



ΕΛΕΓΧΟΣ

612

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗ
«ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ
ΑΝΑΛΥΣΗ» ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

Επιβλέπων Καθηγητής : Δρ. Δημήτριος Κυριαζής.

Τίτλος Μετ/κης Εργασίας:
**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ –
ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ
&
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ	
ΑΡ. ΕΙΣ.	48980 + όπισθετα
COMP	29361
ΤΑΞΗ	332 645 ΚΑΛ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ	

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ε. ΚΑΛΛΙΑΣ

Πειραιάς
Ιούλιος 2005



00148980

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	2
Κεφάλαιο 1	4
Εισαγωγή	4
Κεφάλαιο 2	6
Παράγωγα	6
2.1 Βασικά των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων	6
2.2 Μεταβλητές που εξαρτώνται τα παράγωγα	8
2.3 Τρόποι αποτίμησης παραγώγων	10
2.4 Διωνυμικό Υπόδειγμα	10
2.4 Μοντέλο Black & Scholes	12
2.5 Απο τα χρηματοοικονομικά στα πραγματικά δικαιώματα	13
Υπόδειγμα Καθαρής παρούσας αξίας	15
3.2 Προσομοίωση Monte Carlo	17
Κεφάλαιο 4	20
Πραγματικά Δικαιώματα	20
4.1 Ορολογία	21
4.2 Είδη Πραγματικών Δικαιωμάτων	22
4.3 Πραγματικά Δικαιώματα και Καθαρή παρούσα αξία	25
4.4 Σύγκριση Πραγματικών Δικαιωμάτων με Χρηματοοικονομικά Παράγωγα	25
4.5 Περιγραφή Πραγματικών Δικαιωμάτων	27
4.5.1 Δικαίωμα Καθυστέρησης ενός Έργου (option to Defer)	28
4.5.2 Δικαίωμα Επέκτασης ενός Έργου (option to expand)	33
4.5.3 Δικαίωμα Εγκατάλειψης ενός Έργου (option to abandon) ..	34
4.5.4 Δικαίωμα προσωρινής παύσης (Option to Temporarily Shut Down)	36
4.5.5 Δικαίωμα Εναλλαγής * (Option to Switch Inputs or Outputs) ..	37
4.5.6 Αλληλεπιδράσεις πολλαπλών Πραγματικών Δικαιωμάτων ..	42
4.5.7 Αποτίμηση σύνθετων πραγματικών δικαιωμάτων με προσομοίωση Monte Carlo	44
4.5.8 Η Αποτίμηση Εταιρειών με την Μέθοδο των Πραγματικών Δικαιωμάτων	47
Κεφάλαιο 5	52
5.1 Παράδειγμα αποτίμησης προγράμματος Έρευνας και Ανάπτυξης	52
5.2 Παράδειγμα αποτίμησης άδειας εξόρυξης χρυσού	55
5.3 Παράδειγμα αποτίμησης πραγματικών δικαιωμάτων σε ναυτιλιακές επενδύσεις	58
Κεφάλαιο 6	62
Συμπεράσματα	62

Προσάρτημα 1	63
Προσάρτημα 2	66
Προσάρτημα 3	68
Προσάρτημα 4	69
Βιβλιογραφία	71

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ ΠΩΣ ΕΠΗΡΕΑΖΟΝΤΑΙ ΤΑ ΔΙΚ. ΑΠΟ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΤΟΥΣ	9
ΠΙΝΑΚΑΣ 2 ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ	22
ΠΙΝΑΚΑΣ 3 ΚΑΤΗΓΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ	24
ΠΙΝΑΚΑΣ 4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΚ. ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	60
ΠΙΝΑΚΑΣ 5 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΚΠΑ	64
ΠΙΝΑΚΑΣ 6 ΠΥΚΝΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΚΠΑ	65
ΠΙΝΑΚΑΣ 7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΕΤΑ ΑΠΟ 1000 ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	65
ΠΙΝΑΚΑΣ 8 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΥ ΣΕ MS EXCEL	66
ΠΙΝΑΚΑΣ 9 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ B&S ΣΕ MS EXCEL	68

ΕΙΚΟΝΑ 1 Η ΠΙΘΑΝΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΜΕΤΟΧΗΣ ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ DT	11
ΕΙΚΟΝΑ 2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΟΝΤΕ CARLO	18
ΕΙΚΟΝΑ 4 ΠΛΗΡΩΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ (ΟΡΤΙΟΝ ΤΟ DEFER)	29
ΕΙΚΟΝΑ 5 ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΝΑΒΟΛΗΣ	32
ΕΙΚΟΝΑ 6 ΠΛΗΡΩΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ	33
ΕΙΚΟΝΑ 7 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΩΡΙΝΗΣ ΕΓΚΑΤΑΛΕΙΨΗΣ ΕΝΟΣ ΕΡΓΟΥ	37
ΕΙΚΟΝΑ 8 ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ	43
ΕΙΚΟΝΑ 9 ΠΛΗΡΩΜΗ ΜΕΤΟΧΩΝ ΣΤΗΝ ΡΕΥΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ	48
ΕΙΚΟΝΑ 10 ΧΡΗΜΑΤΟΡΘΕΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ	53
ΕΙΚΟΝΑ 11 ΠΙΘΑΝΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΘΕΣ	54
ΕΙΚΟΝΑ 12 ΚΑΘΑΡΗ ΤΙΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ	55

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Είναι πολύ σημαντικό για τις επιχειρήσεις και ειδικά για τους ανθρώπους που βρίσκονται πίσω από αυτές οι αποφάσεις τους να είναι ευέλικτες και να χρησιμοποιούν με σωστό τρόπο την διαίσθηση τους.

Τα πραγματικά δικαιώματα προσπαθούν να ποσοτικοποιήσουν τις επιλογές που έχουν οι διαχειριστές ενός επενδυτικού σχεδίου και τότε ή με ποιο τρόπο πρέπει να γίνουν οι επιχειρηματικές επενδύσεις. Ουσιαστικά τα πραγματικά δικαιώματα βοηθούν την διοίκηση να αποφασίσει ποιές επενδύσεις να παγώσει ή ποιές επενδύσεις να εγκαταλείψει και σε ποιές να προχωρήσει, η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων δημιουργήθηκε για να αντιμετωπίσει το αβέβαιο μέλλον και να ενισχύσει την επιχειρηματική χρηματοοικονομική και στρατηγική.

Τα επενδυτικά σχέδια χρησιμοποιώντας παραδοσιακές μεθόδους αποτίμησης αποτιμώνται με την προξόφληση των ταμειακών ροών τους, μια μέθοδος που είναι στατική όσον αφορά την επενδυτική απόφαση, αντίθετα η αντιμετώπιση της αποτίμησης ενός επενδυτικού σχεδίου με τα πραγματικά δικαιώματα έχει μια δυναμική αφού συμπεριλαμβάνει την ευλιξία και τις προοπτικές ανάπτυξης που μπορεί να έχει ένα επενδυτικό σχέδιο.

Οι τεχνικές αποτίμησης που χρησιμοποιούνται για τα πραγματικά δικαιώματα προέρχονται από τον χώρο αποτίμησης των δικαιωμάτων και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται είναι προσαρμοσμένα στις ιδιαιτερότητες τους.

Η εργασία αυτή είναι δομημένη στα επόμενα κεφάλαια ως εξής:

Το κεφάλαιο 2 κάνει μια σύντομη αναφορά στην θεωρία παραγώγων, τα χαρακτηριστικά τους και παρουσιάζει τα δύο θεμελιώδη υποδείγματα που χρησιμοποιούνται για την αποτίμησή τους.

Το κεφάλαιο 3 αναφέρεται στην κλασική μέθοδο αποτίμησης επενδυτικών σχεδίων με την προεξόφληση των ταμειακών τους ροών , και τον υπολογισμό της καθαρής παρούσας αξίας, επίσης κάνει μια περιγραφική αναφορά στην μέθοδο Monte Carlo και πως είναι δυνατό να την χρησιμοποιήσουμε στην μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας παρουσιάζοντας ένα παράδειγμα στο προσάρτημα.

Το κεφάλαιο 4 παρουσιάζει τα πραγματικά δικαιώματα , μια κατηγοριοποίηση τους όπως την συναντάμε στην βιβλιογραφία , τα χαρακτηριστικά τους και τα συγκρίνει με τα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Γίνεται μια περιγραφή των διαφόρων ειδών μεμονωμένων πραγματικών παραγώγων και δίνονται ενδεικτικά παραδείγματα για την αποτίμησή τους και πως επηρεάζει την τελική αξία των επενδυτικών σχεδίων αν τα συμπεριλάβουμε. Η αποτίμηση τους γίνεται χρησιμοποιώντας την θεωρία του Διωνυμικού υποδείγματος όπου είναι ιδιαίτερα απλή και με μεγάλη πρακτική και διαισθητική σημασία. το ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια σχετικά πρόσφατη εργασία όπου αποτιμώνται σύνθετα πραγματικά δικαιώματα με την χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo ελαχίστων τετραγώνων .

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται 3 παραδείγματα αποτίμησης επενδυτικών σχεδίων με την ανάλυση πραγματικών δικαιωμάτων. Τα παραδείγματα είναι τα εξής: α)αποτίμηση ενός έργου έρευνας και ανάπτυξης, ένα παράδειγμα ενός επενδυτικού σχεδίου που σαν στόχο έχει την δημιουργία ενός ορυχείου εξόρυξης χρυσού και τέλος δίνεται ένα παράδειγμα χρήσης των πραγματικών δικαιωμάτων για την αποτίμηση ναυτιλιακών επενδύσεων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο δίνονται τα συμπεράσματα της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Παράγωγα

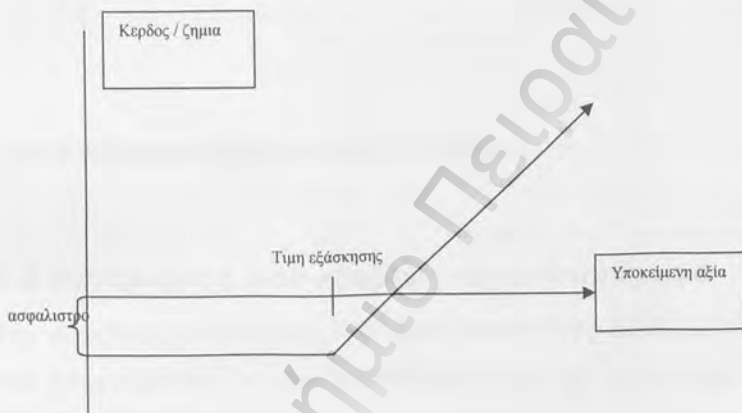
Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει τα βασικά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών παραγώγων και τρόπους αποτίμησης τους.. Συγκεκριμένα θα παρουσιαστούν οι ορισμοί του δικαιώματος , βασικά χαρακτηριστικά τους, αποτίμηση των δικαιωμάτων με την χρήση του Διωνυμικού μοντέλου και η μέθοδος αποτίμησης με το μοντέλο Black-Scholes και τέλος πως συσχετίζονται τα πραγματικά δικαιώματα με τα χρηματοοικονομικά παράγωγα.

2.1 Βασικά των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων

Το χρηματοοικονομικό δικαίωμα δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού ή περιουσιακού στοιχείου σε μια συγκεκριμένη τιμή , που την ονομάζουμε τιμή εξάσκησης, με την λήξη του ή πριν από αυτή. Από την στιγμή που αναφερόμαστε σε δικαίωμα τότε ο κάτοχος του μπορεί να επιλέξει να μην το εξασκήσει και να το αφήσει να λήξει. Για να αποκτήσει αυτό το δικαίωμα κάποιος πληρώνει ένα ποσό που ονομάζεται ασφάλιστρο. Στα δικαιώματα λαμβάνουν μέρος δύο αντισυμβαλλόμενα μέρη , ο αγοραστής του δικαιώματος (buyer) ο οποίος και καταβάλλει το ασφάλιστρο και ο πωλητής του δικαιώματος (seller/writer) ο οποίος και εισπράττει το ασφάλιστρο. Τα δικαιώματα είναι μια συναλλαγή που το κέρδος του ενός αντισυμβαλλόμενου μέρους είναι η ζημία του άλλου δηλαδή το σύνολο αθροίζει στο μηδέν. Υπάρχουν δύο ειδών δικαιώματα, τα δικαιώματα αγοράς και τα δικαιώματα πώλησης.

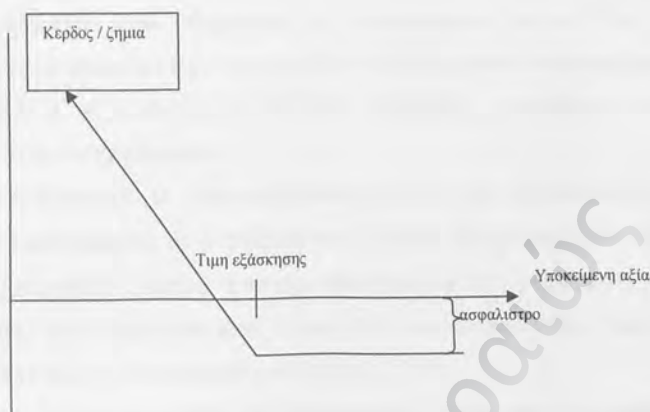
Τα δικαιώματα αγοράς δίνουν στο κάτοχο το δικαίωμα να αγοράσει μια υποκείμενη αξία σε μια συγκεκριμένη τιμή σε οποιαδήποτε στιγμή πριν ή κατά την λήξη του δικαιώματος . Αν η τιμή της υποκείμενης

αξίας κατά την λήξη του δικαιώματος είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα δεν έχει αξία . Αντίθετα αν η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε ο κάτοχος μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα και να αγοράσει στην τιμή εξάσκησης ώστε να κερδίσει την διαφορά. Το διάγραμμα παρακάτω δείχνει τις πιθανές τιμές του δικαιώματος αγοράς στην λήξη του.



Εικόνα 1 Διάγραμμα Δικ. Αγοράς στην λήξη του

Τα δικαιώματα πώλησης δίνουν στο κάτοχο το δικαίωμα να πουλήσει μια υποκείμενη αξία σε μια συγκεκριμένη τιμή σε οποιαδήποτε στιγμή πριν ή κατά την λήξη του δικαιώματος . Αν η τιμή της υποκείμενης αξίας κατά την λήξη του δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα δεν έχει αξία . Αντίθετα αν η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε ο κάτοχος μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα και να πουλήσει στην τιμή εξάσκησης ώστε να κερδίσει την διαφορά. Το διάγραμμα παρακάτω δείχνει τις πιθανές τιμές του δικαιώματος αγοράς στην λήξη του.



Εικόνα 2 Διάγραμμα πληρωμής στην λήξη Δικ. Πώλησης

2.2 Μεταβλητές που εξαρτώνται τα παράγωγα

Την αξία ενός δικαιώματος την καθορίζουν ένας αριθμός μεταβλητών που συσχετίζονται με την υποκείμενη αξία και την αγορά που αυτά διαπραγματεύονται.

Η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας. Τα παράγωγα εξ'ορισμού είναι προϊόντα που στηρίζουν την αξία τους πάνω σε κάποιο άλλο υποκείμενο στοιχείο. Επομένως αλλαγές στην τιμή της υποκείμενης αξίας άμεσα πρέπει να τα επηρεάζει. Τα δικαιώματα αγοράς επομένως θα αυξάνουν την αξία τους αν η τιμή της υποκείμενης αξίας ανεβαίνει αφού δίνουν το δικαίωμα να αγοράσεις την υποκείμενη σε συγκεκριμένη τιμή, αντίθετα τα δικ. Πώλησης θα απαξιώνονται όσο η υποκείμενη αξία αυξάνει.

Η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης αξίας. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος δεν μπορεί να χάσει περισσότερο από το ασφάλιστρο επομένως όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας τόσο πιθανότερο είναι το δικαίωμα να εξασκηθεί, άρα η αξία των δικαιωμάτων ανεβαίνει όσο αυξάνει η μεταβλητότητα αντίθετα απο ότι

μπορεί να συμβαίνει με άλλες μορφές επένδυσης όπου η αβεβαιότητα μειώνει την αξία τους.

Τα μερίσματα που πληρώνει η υποκείμενη αξία. Τα μερίσματα λειτουργούν διαφορετικά για τα δικ. Αγοράς όπου όσο αυξάνονται τόσο μειώνεται η αξία τους ενώ τα δικ. Πώλησης αυξάνουν σε αξία όσο αυξάνονται τα μερίσματα

Η τιμή εξάσκησης. Ο τιμή εξάσκησης είναι μια σημαντική παράμετρος για τα δικαιώματα, όσο αυξάνεται η τιμή εξάσκησης τα δικ. Αγοράς χάνουν σε αξία, αφού ουσιαστικά δίνεται το δικαίωμα κάποιος να αγοράσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε υψηλότερη τιμή αντίθετα συμβαίνει για τα δικαιώματα πώλησης.

Ο χρόνος μέχρι την λήξη. Τα δικαιώματα αυξάνουν την αξία τους όσο απομακρύνονται από την ημερομηνία που λήγουν.

Το επιτόκιο κατά την διάρκεια του δικαιώματος. Αύξηση του επιτοκίου θα αυξήσει την αξία του δικαιώματος αγοράς και θα μειώσει την αξία του δικ. Πώλησης.

Ο πίνακας παρακάτω παρουσιάζει συνοπτικά πως επιδρούν οι μεταβλητές στην αξία των δικαιωμάτων.

Παράγοντας	Δικ. Αγοράς	Δικ. Πώλησης
Αύξηση Υποκείμενης αξίας	Αυξάνουν	Μειώνονται
Αύξηση Τιμής εξάσκησης	Μειώνονται	Αυξάνουν
Αύξηση μεταβλητότητας	Αυξάνουν	Αυξάνουν
Αύξηση Χρόνου λήξης	Αυξάνουν	Αυξάνουν
Αύξηση Επιτοκίου	Αυξάνουν	Μειώνονται
Αύξηση Μερισμάτων	Μειώνονται	Αυξάνουν

Πίνακας 1 Συνοπτικά πως επηρεάζονται τα Δικ. από αλλαγή στις μεταβλητές τους

Τα δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν πριν από την λήξη τους ονομάζονται Αμερικάνικου τύπου ενώ αυτά που εξασκούνται μόνο κατά την λήξη τους είναι τα Ευρωπαϊκού τύπου.

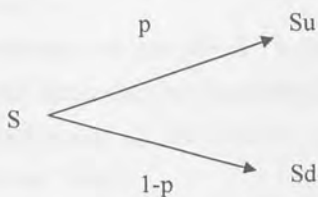
2.3 Τρόποι αποτίμησης παραγώγων

Η βασική ιδέα που υπάρχει πίσω από τις μεθόδους αποτίμησης των δικαιωμάτων είναι ότι κάποιος μπορεί να αγοράσει κατάλληλο αριθμό από την υποκείμενη αξία με δανεικά χρήματα πληρώνοντας το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και με αυτό το τρόπο θα μπορεί να επαναλάβει τις μελλοντικές αποδόσεις του δικαιώματος σε οποιαδήποτε κατάσταση. Άρα μπορούμε να καθορίσουμε την αξία του παραγώγου από την τιμή που μας κοστίζει να φτιάξουμε το ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο. Η παραπάνω υπόθεση χρησιμοποιείται και για τις δύο μεθόδους αποτίμησης που παρουσιάζονται παρακάτω.

2.4 Διωνυμικό Υπόδειγμα

Συνέχεια της αρχής που περιγράψαμε παραπάνω είναι αυτή που θεωρεί ότι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι στον κίνδυνο και ουσιαστικά αυτό που προσδοκούν να τους αποδώσει η οποιαδήποτε επένδυση είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο άρα μπορούμε με αυτή την υπόθεση τις μελλοντικές ταμειακές ροές να τις προεξοφλήσουμε με αυτό το επιτόκιο.

Με το διωνυμικό υπόδειγμα υποθέτουμε ότι η τιμή μια μετοχής ακολουθεί μια πολλαπλασιαστική διωνυμική διαδικασία όπως παρουσιάζεται παρακάτω (εικόνα 1) και αφού είμαστε σε ένα κόσμο χωρίς κίνδυνο αυτό που προσδοκούμε είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r . Άρα η αναμενόμενη τιμή για την μετοχή στο χρονικό διάστημα μήκους dt θα είναι Se^{rt} όπου S η τιμή της μετοχής στην αρχή του διαστήματος.



Εικόνα 3 Η πιθανές τιμές της μετοχής χρονικό διάστημα dt

Άρα $Se^{rt} = pSu + (1-p)Sd$ ή $e^{rt} = pu + (1-p)d$.

Το u και d αντιπροσωπεύουν το ρυθμό απόδοσης αν η μετοχή κινηθεί ανοδικά και d αν κινηθεί καθοδικά με τη συνθήκη $ud=1$ και την

$$p = \frac{e^{rd} - d}{u - d}, u = e^{\sigma\sqrt{dt}}, d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

Το δικαίωμα υπολογίζεται αν ξεκινήσουμε από το τέλος προς την αρχή στο δένδρο με τις τιμές της μετοχής. Στη λήξη του δικαιώματος είναι γνωστή η αξία του π . Για ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης X στη λήξη αξίζει $\max(X - S_T, 0)$. Αφού έχουμε θεωρήσει την ουδετερότητα προς τον κίνδυνο τότε μπορούμε την χρονική στιγμή $T-dt$ να την υπολογίσουμε από την αναμενόμενη τιμή στην T προεξοφλημένη με το r για διάστημα Dt . Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάνουμε για κάθε κόμβο του δέντρου μέχρι την στιγμή που επιθυμούμε να υπολογίσουμε το δικαίωμα.

Η γενική διωνυμική φόρμα για n περιόδους δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$C = \sum_{j=0}^n \{n! / j!(n-j)!\} p^j (1-p)^{n-j} \text{Max}(u^j d^{n-j} S - X, 0) / (1+r)^n$$

το πρώτο μέρος της παράστασης δίνει την διωνυμική πιθανότητα του να επιτύχουμε j πάνω βήματα με πιθανότητα p όπως την υπολογίσαμε. Το

δεύτερο μέρος μας δίνει την αξία του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης X .

Αποδεικνύεται ότι για $dt \rightarrow 0$ η παραπάνω διαδικασία συγκλίνει στην \log -normal κατανομή και προσεγγίζει μια διαδικασία διάχυσης Wiener. Στο προσάρτημα 2 δίνεται ο κωδικός για εκτέλεση διωνυμικού μοντέλου σε VBA.

2.4 Μοντέλο Black & Scholes

Το διωνυμικό μοντέλο δίνει ένα περισσότερο διαισθητικό τρόπο για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αλλά χρειάζεται ένα πολύ μεγάλο αριθμό δεδομένων για την τις μελλοντικές τιμές της υποκείμενης αξίας. Το μοντέλο B & S δεν είναι ένα εναλλακτικό μοντέλο αλλά το όριο του διωνυμικού για συνεχές χρόνο.

Οι Black & Scholes (1973) έδειξαν ότι η συνεχής εφαρμογή του τεχικού χαρτοφυλακίου που περιγράψαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου με τις υποθέσεις ότι:

- Δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγών, επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις, το επιτόκιο δανεισμού και χρηματοδότησης είναι το ίδιο
- Το επιτόκιο είναι σταθερό μέχρι την λήξη του δικαιώματος
- Η υποκείμενη αξία δεν πληρώνει μερίσματα
- Η υποκείμενη αξία ακολουθεί μια διαδικασία Wiener

$\frac{ds}{s} = adt + sdz$, όπου το a είναι η στιγμιαία αναμενόμενη απόδοση στη υποκείμενη αξία, σ είναι η μεταβλητότητα και θεωρείται ότι είναι σταθερή και dz διαφορικό από την τυπική κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά dt .

Κατέληξαν σε μια διαφορική εξίσωση με λύση:

$$C = S * \exp(r - q)T * N(d_1) - X * \exp(rT)N(d_2),$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + (\sigma^2/2) * T - I)}{\sigma * \sqrt{T}} \text{ and}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

Όπου S η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας,

X η τιμή εξάσκησης,

T χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος,

R Επιτόκιο στην διάρκεια του δικαιώματος,

σ^2 διακύμανση της υποκείμενης αξίας

q είναι το μέρισμα που μπορεί να πληρώνει η υποκείμενη αξία

Ουσιαστικά οι παράγοντες που καθορίζουν την αξία του δικαιώματος με την χρήση αυτού του μοντέλου είναι οι ίδιοι που χρησιμοποιήθηκαν και στο διωνυμικό μοντέλο, αφού στην λύση κρύβεται το τεχνικό χαρτοφυλάκιο

Αξία Δικαιώματος = $SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$ = αγόρασε $N(d_1)$ μετχές + δανείσσε το ποσό $Xe^{-rT}N(d_2)$

Στο προσάρτημα 3 γίνεται εφαρμογή του μοντέλου σε φύλλο εργασίας MS Excel

2.5 Απο τα χρηματοοικονομικά στα πραγματικά δικαιώματα

Οι περισσότερες εταιρίες έχουν πραγματικά δικαιώματα όπως να αυξήσουν την παραγωγή ή να δημιουργήσουν ένα νέο προϊόν ή να εγκαταλείψουν ένα επενδυτικό σχέδιο. Η βασική αρχή της αποτίμησης ενός έργου είναι ότι μια επιχείρηση επενδύει σε ένα έργο για το οποίο οι παρούσα αξία των μελλοντικών του χρηματοροών V ξεπερνάει το κόστος επένδυσης I. Ουσιαστικά η αποτίμηση πραγματικών περιουσιακών στοιχείων προσπαθεί να καθορίσει ποιά θα ήταν η αξία ενός έργου αν διαπραγματευόταν σε μια χρηματαγορά.

Χρησιμοποιώντας την βασική αρχή της αποτίμησης χρηματοοικονομικών παραγώγων η αξία ενός δικαιώματος μπορεί να υπολογιστεί δημιουργώντας ένα ισάξιο έργο στη αγορά που ουσιαστικά θα έχει την υποκείμενη αξία χρηματοδοτούμενη απο ένα δανεικό ποσό και η αξία αυτής της συνθετική θέσης σε κάθε μελλοντική στιγμή θα είναι όπως αυτή του δικαιώματος. Το χαρτοφυλάκιο αυτό για μερικά έργα που έχουν να κάνουν με φυσικούς πόρους όπου οι υποκείμενες αξίες διαπραγματεύονται σε μια οργανωμένη αγορά π.χ χρυσός πετρέλαιο κ.α είναι δυνατό να δημιουργηθεί αντίθετα στα περισσότερα έργα όμως αυτή η συνθήκη δεν ισχύει αυτό όμως δεν είναι ουσιαστικό πρόβλημα για τα πραγματικά παράγωγα αφού ουσιαστικά αναφέρονται σε ατελής αγορές. Η προσαρμογή που πρέπει να γίνει για να αποτιμήσουμε περιουσιακά στοιχεία που δεν διαπραγματεύονται σε κάποια αγορά επομένως δεν γνωρίζουμε αν το δίδυμο χαρτοφυλάκιο που έχουμε δημιουργήσει βρίσκεται σε ισορροπία είναι παρόμοια σαν την προσαρμογή που κάνουμε στην αποτίμηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων όταν η υποκείμενη αξία δίνει μέρισμα.

Δηλαδή θα μπορούσαμε να αντικαθαστίσουμε το ρυθμό ανάπτυξης α στην Wiener διαδικασία με ρυθμό ανάπτυξης ουδέτερο στον κίνδυο αφαιρώντας ένα κατάλληλο ασφάλιστρο κινδύνου σε συνθήκες ισορροπίας της αγοράς (α -RP) Trigeorgis σελ 95, 127 (1996).

Κεφάλαιο 3

Υπόδειγμα Καθαρής παρούσας αξίας

Η καθαρή παρούσα αξία είναι με βεβαιότητα το εργαλείο που χρησιμοποιείται για μεγάλες επενδύσεις που γίνονται από διάφορους εταιρείες.

Η βάση για την ανάλυση με χρήση πραγματικών δικαιωμάτων είναι η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας επομένως μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου είναι απαραίτητη.

Βασική αρχή που υπάρχει σε αυτή την μέθοδο είναι ότι η οποιαδήποτε επένδυση που γίνεται έχει σαν σκοπό να μεγιστοποιήσει την αξία του οργανισμού που την πραγματοποιεί. Η αξία μια επιχείρησης μετρίεται από τις θετικές χρηματικές ροές που θα παράγει αφού αυτές είναι που θα χρησιμοποιήσουν οι μέτοχοί της για να κάνουν νέες επενδύσεις και να δημιουργήσουν νέες χρηματικές ροές.

Η μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής:

- Βρίσκουμε την παρούσα αξία των θετικών και αρνητικών χρηματικών ροών (XP) χρησιμοποιώντας σαν επιτόκιο προεξόφλησης το κόστος κεφαλαίου της επιχείρησης.
- Προσθέτουμε την παρούσα αξία όλων των προεξοφλημένων χρηματικών ροών και το άθροισμα αυτό αποτελεί την καθαρή παρούσα αξία (ΚΠΑ).
- Αν η ΚΠΑ είναι θετική αποδεχόμαστε την επένδυση, αντίθετα αν είναι αρνητική την απορρίπτουμε.

Η εξίσωση για την καθαρή παρούσα αξία είναι η ακόλουθη:

$$KPA = XP_0 + \frac{XP_1}{(1+\kappa)^1} + \frac{XP_2}{(1+\kappa)^2} + \dots + \frac{XP_v}{(1+\kappa)^v} = \sum_{\tau=0}^v \frac{XP_{\tau}}{(1+\kappa)^{\tau}}$$

Εξίσωση 1 Καθαρή παρούσα αξία

Όπου XP_t είναι η χρηματική ροή την περίοδο t και K είναι το κόστος κεφαλαίου της επένδυσης και n η διάρκειά του.

Το δυσκολότερο κομμάτι της μεθόδου είναι η εκτίμηση των χρηματικών ροών της επένδυσης αφού αρκετές υποθέσεις πρέπει να γίνουν σχετικά με τα έξοδα ή τα έσοδα της επένδυσης για να υπάρξει μια εκτίμηση για την χρηματοροή της εκάστοτε περιόδου.

Τυπικά οι χρηματικές ροές εμπεριέχουν τα ακόλουθα:

- 1. Το έξοδο αρχικής επένδυσης.** Η αρχική επένδυση περιέχει ένα αρχικό έξοδο σύν οποιαδήποτε αύξηση στο λειτουργικό κεφάλαιο κίνησης. Υπενθυμίζουμε ότι για να υποστηριχθεί μια καινούργια επένδυση επιπλέον αποθέματα χρειάζονται, η διαφορά μεταξύ του επιπλέον κυκλοφορούντος ενεργητικού και επιπλέον τρεχουσών υποχρεώσεων είναι αυτό που ονομάσαμε λειτουργικό κεφάλαιο κίνησης και πρέπει να συνυπολογίζεται με το αρχικό έξοδο της επένδυσης.
- 2. Λειτουργικές ταμιακές ροές στην διάρκεια ζωής του έργου.** Αυτές είναι οι επιπλέον χρηματικές ροές κατά την διάρκεια της οικονομικής ζωής του έργου. Οι ετήσιες λειτουργικές χρηματικές ροές αποτελούνται από το λειτουργικό έσοδο μετά τους φόρους σύν το ποσό που έχει αποσβεσθεί το οποίο ουσιαστικά είναι έξοδο που δεν δαπανά μετρητά. Τα χρηματοοικονομικά έξοδα δεν υπολογίζονται αφού ουσιαστικά τα λαμβάνουμε υπόψη μας στην διαδικασία της προεξόφλησης.
- 3. Τελικές χρηματικές ροές.** Στο τέλος της ζωής ενός έργου συνήθως λαμβάνονται υπόψη κάποιες χρηματικές ροές όπως η αξία εκποίησης σύν η επιστροφή του καθαρού λειτουργικού κεφαλαίου κίνησης.

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει ότι η οποιαδήποτε επένδυση θα δημιουργήσει ένα σύνολο χρηματοροών με βεβαιότητα και βασιζόμενοι

σε αυτές τις χρηματοροές δεχόμαστε ή απορίπτουμε το επενδυτικό σχέδιο. Είναι φανερό ότι αυτές οι χρηματοροές στον πραγματικό κόσμο δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων και ο κίνδυνος που έχουν μετριέται με διάφορες μεθόδους. Οι περισσότεροι γνωστές μέθοδοι είναι οι εξής τρεις:

- Ανάλυση Ευαισθησίας
- Ανάλυση διαφόρων σεναρίων
- Προσομοίωση Monte Carlo.

Παρακάτω θα περιγράψουμε την μέθοδο εκτίμησης του κινδύνου των χρηματοροών με προσομοίωση Monte Carlo.

3.2 Προσομοίωση Monte Carlo

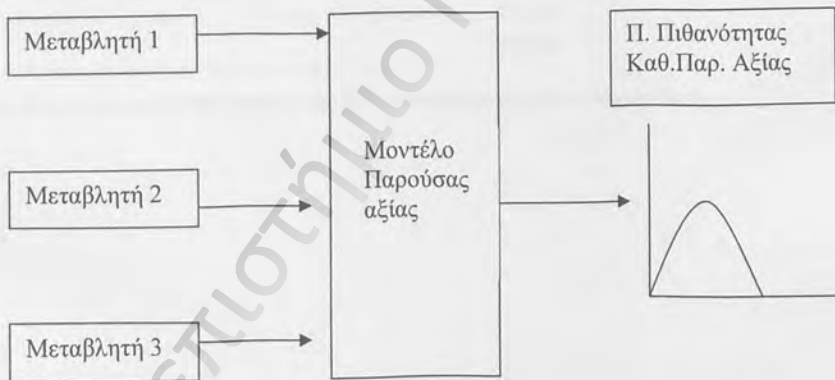
Λαμβάνοντας υπόψη μας την αβεβαιότητα τότε μια μεταβλητή που εμπεριέχεται για τον υπολογισμό των χρηματοροών δεν χαρακτηρίζεται από μια τιμή αλλά από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει. Επομένως οι κύριες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε την καθαρή παρούσα αξία μιας επένδυσης, όπως το εργατικό κόστος ή οι πωλήσεις κ.λ.π είναι αβέβαια και έχουν κάποια μεταβλητότητα η οποία τελικά περνάει και στην καθαρή παρούσα αξία της επένδυσής μας.

Με την προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιούμε τις κατανομές πιθανοτήτων των κυριότερων μεταβλητών που έχουμε εκτιμήσει για να αποκτήσουμε τυχαία δείγματα αυτών των μεταβλητών και τελικά να δημιουργήσουμε την πυκνότητα πιθανότητας της καθαρής παρούσας αξία

Τα κυριότερα βήματα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι τα εξής:

- Μοντελοποίηση του έργου με διατύπωση ενός συνόλου μαθηματικών εξισώσεων για όλες τις κύριες μεταβλητές όπως και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

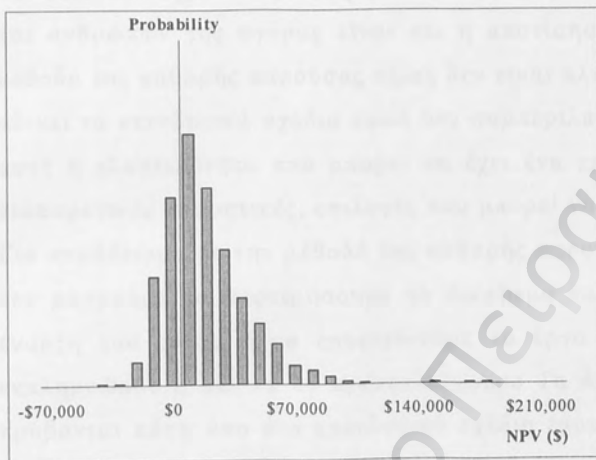
- Ορισμό πυκνοτήτων πιθανοτήτων για τις κύριες μεταβλητές χρησιμοποιώντας περασμένα εμπειρικά δεδομένα ή υποκειμενικά
- Τυχαίο δείγμα αντλείται με τη χρησιμοποίηση υπολογιστή ο οποίος μας δίνει δείγμα τυχαίων αριθμών απο την κατανομή που του ορίζουμε. Με τον τρόπο αυτό και απο τις εξισώσεις που έχουμε ορίσει αποκτάμε μια τυχαία τιμη για την καθαρή παρούσα αξία
- Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα αρκετές φορές αποθηκεύοντας την τιμή που παίρνουμε για την καθαρή παρούσα αξία με αποτέλεσμα να έχουμε τελικά την πυκνότητα πιθανοτήτων της ,άρα και εκτίμηση την αναμενόμενη τιμή της ή την διακύμανσή της.



Εικόνα 4 Προσομίωση Monte Carlo

Στο προσάρτημα 1 υπάρχει ένα παράδειγμα εκτελεσμένο σε φύλλο εργασίας MSExcel στο οποίο υπολογίζεται η καθαρή αξία ενός έργου με την υπόθεση ότι η τιμή πώλησης ακολουθεί κανονική κατανομή όπως και ο ρυθμός αύξησης των πωλήσεων και είναι θετικά

συσχετισμένος με την ζήτηση που θα υπάρξει ανα προϊόν. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε το πρόσθετο πρόγραμμα Simtools.xla Παρακάτω εμφανίζεται η πυκνότητα πιθανότητας για την ΚΠΑ του παραδείγματος μετά απο 1000 επαναλήψεις της προσομοίωσης



Εικόνα 5 Πυκνότητα Πιθανότητας της ΚΠΑ εφαρμόζοντας μέθοδο Monte-Carlo

Κεφάλαιο 4

Πραγματικά Δικαιώματα

Τα τελευταία χρόνια η τάση που επικρατεί μεταξύ των ακαδημαϊκών και ανθρώπων της αγοράς είναι ότι η αποτίμηση επενδύσεων με την μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας δεν είναι πλήρης και πολλές φορές αδικεί τα επενδυτικά σχέδια αφού δεν συμπεριλαμβάνεται στην μέθοδο αυτή η ελαστικότητα που μπορεί να έχει ένα επενδυτικό σχέδιο ή οι διαφορετικές προοπτικές, επιλογές που μπορεί να έχει στην πορεία του. Για παράδειγμα με την μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας ενός έργου δεν μπορούμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα να καθυστερήσουμε την έναρξη του έργου ή να επεκτείνουμε το έργο αν κάποιες συνθήκες εκπληρωθούν ή και να το εγκαταλείψουμε. Τα δικαιώματα λοιπόν που κρύβονται κάτω από ένα επενδυτικό σχέδιο έχουν κάποια αξία που αν προστεθεί στην αξία που δίνεται από την μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας τότε πολλές επενδύσεις που θα απορρίπτονταν μπορούν να παρουσιάσουν αρκετά προσοδοφόρες.

Οι τεχνικές που μας επιτρέπουν να αναλύσουμε τις επενδύσεις λαμβάνοντας υπόψη μας την αβεβαιότητα ή την ευλιξία που μπορεί να έχουν, ονομάζονται πραγματικά δικαιώματα.

Ο παρακάτω ορισμός έχει δοθεί από τον Τριγεώργη (1996) :

« Παρόμοια με τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα , τα πραγματικά δικαιώματα εμπεριέχουν διακριτικές αποφάσεις ή δικαιώματα , χωρίς καμία υποχρέωση να αποκτήσουμε ή ανταλλάξουμε ένα περιουσιακό στοιχείο για μια συγκεκριμένη εναλλακτική τιμή»

Ένα δικαίωμα γίνεται «πραγματικό» όταν η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι οι χρηματικές ροές από ένα αληθινό περιουσιακό στοιχείο και την αξία οποιαδήποτε άλλου δικαιώματος συσχετίζεται με την απόκτηση αυτού του περιουσιακού στοιχείου. Σαν περιουσιακό στοιχείο μπορούμε να θεωρήσουμε από την απόκτηση

ενός οικοπέδου μέχρι την απόκτηση κάποιας πατέντας, άδεια χρήσης φυσικών πόρων και άλλα.

4.1 Ορολογία

Η περισσότερη από την ορολογία των πραγματικών δικαιωμάτων προέρχεται από τον χώρο των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων. Η υποκείμενη αξία είναι το περιουσιακό στοιχείο για το οποίο μπορούμε να ανταλλάξουμε ένα δικαίωμα αν το επιθυμεί ο κάτοχος του δικαιώματος. Η τιμή εξάσκησης είναι η τιμή που κοστίζει να κάνουμε συνήθως τη αρχική επένδυση, ή αν έχουμε παραδείγματος χάριν την άδεια χρήσης μια πατέντας, το κόστος για φτιάξουμε την δουλειά που θα κάνει χρήση της πατέντας.

Ο ορισμός που έχουμε δανειστεί για τα πραγματικά δικαιώματα στη προηγούμενη ενότητα κάνει φανερή την συνάφεια των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για τη αποτίμηση των πραγματικών δικαιωμάτων με τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα.

Ο πίνακας παρακάτω κάνει μια συνοπτική σύγκριση των μεταβλητών όπως αυτές χρησιμοποιούνται στο υπόδειγμα των Black & Scholes:

$$C = S * \exp(r - q)T * N(d_1) - X * \exp(-rT)N(d_2),$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S / X) + (r - q + (\sigma^2 / 2) * T - t)}{\sigma * \sqrt{T}} \text{ and}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

Εξίσωση 2 Μοντέλο Black & Scholes

Χρηματοοικονομικά Δικαιώματα	Μεταβλητές	Πραγματικά Δικαιώματα
Τιμή Μετοχής	S	Καθαρή Παρούσα Αξία
Τιμή Εξάσκησης	X	Κόστος Επένδυσης
Χρόνος μέχρι την λήξη	T	Χρονικό διάστημα όπου η επενδυτική απόφαση μπορεί να αναβληθεί
Επιτόκιο χωρίς Κινδύνο	R	Επιτόκιο χωρίς Κινδύνο

Διακύμανση αποδόσεων μετοχής	σ^2	Διακύμανση αποδόσεων έργου
Μερισματική απόδοση	q	Αξία που χάθηκε απο αναβολή έργου

Πίνακας 2 Αναλογία μεταξύ χρηματοοικονομικών και πραγματικών δικαιωμάτων

Όσον αφορά τον χρόνο μέχρι την λήξη γιαωτα πραγματικά δικαιώματα σε αντίθεση με αυτό των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων δεν είναι δεδομένος και εξαρτάται απο διάφορους πράγοντες όπως το επιχειρησιακό περιβάλλον ή τον τομέα που γίνεται η επένδυση. Για παράδειγμα λόγω της τεχνολογικής αβεβαιότητας μια εταιρεία μπορεί να καθυστερεί να εξασκήσει το δικαίωμα που μπορεί να έχει σε δεδομένο R&D έργο ή αντίθετα να για να προλάβει τον ανταγωνισμό να επισπεύσει να εκτελέσει κάποιο άλλο έργο.

Η παράμετρος της μεταβλητότητας των χρηματικών ροών είναι πολύ δύσκολο να εκτιμηθεί. Συνήθως εκτιμάται βασιζόμενοι σε κάποιο δείκτη που μπορεί να έχει σχέση με το έργο ή απο ιστορικά δεδομένα που μπορεί να υπάρχουν απο παρόμοιες επενδύσεις. Άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται για να εκτιμηθεί η μεταβλητότητα είναι με προσομοίωση των χρηματοροών. Ουσιαστικά εφαρμόζεται η μέθοδος Monte Carlo για να δημιουργηθεί η πυκνότητα πιθανότητας του έργου όπως έχει περιγραφτεί σε προηγούμενη ενότητα.

4.2 Είδη Πραγματικών Δικαιωμάτων

Υπάρχουν διάφορα είδη πραγματικών δικαιωμάτων τα οποία μπορούν να συσχετιστούν με ένα ευρύ φάσμα επιχειρηματικών προβλημάτων. Έχουν γίνει διάφορες κατηγοριοποιήσεις παρακάτω παρουσιάζονται οι ποιοί γνωστές κατηγορίες πραγματικών δικαιωμάτων και τα επιχειρησιακά πεδία που συνήθως απευθύνονται. Η κατηγοριοποίηση

έγινε απο Trigeorgi 1996 και σίγουρα δεν εξάντλει τον τρόπο που κάποιος μπορεί να κατηγοριοποιήσει τα πραγματικά δικαιώματα.

Κατηγορία Δικαιώματος	Περιγραφή	Παραδείγματα
Δικαιώματα Ατομικής Ελευθερίας (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Η ατομική ελευθερία να ενοχοποιηθεί για παράνομο αδίκημα περιλαμβάνει στοιχεία: α) η ύλη του αδικήματος β) η ύλη του προσώπου γ) η ύλη του τόπου δ) η ύλη του χρόνου	Όχι να ενοχοποιηθείς για αδίκημα που δεν έχει καθοριστεί με νόμο πριν από την πράξη σου. Το αδίκημα να μην είναι δυνατό να ενοχοποιηθεί και αν είναι δυνατό να ενοχοποιηθεί μόνο αν είναι δυνατό να ενοχοποιηθεί
Δικαιώματα Ατομικής Ελευθερίας (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.
Δικαιώματα Γενικής Ελευθερίας (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Τα δικαιώματα γενικής ελευθερίας είναι τα δικαιώματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.
Δικαιώματα Πολιτικής Ελευθερίας (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.
Δικαιώματα Κοινωνικής Ελευθερίας (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.
Καταναλωτικά Δικαιώματα (Όχι να ενοχοποιηθείς)	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.	Αποκλειστικά για αδικήματα που ενοχοποιούνται με νόμο που εκδόθηκε πριν από την πράξη σου.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Κατηγορία	Περιγραφή	Βιομηχανία
Δικαίωμα Αναβολής (Option to defer)	Η διοίκηση διατηρεί το δικαίωμα να αγοράσει κάποιο περιουσιακό στοιχείο. Αναβάλλει την απόφαση προκειμένου να ερευνήσει πως κινείται η αγορά	Οι εταιρείες που έχουν σαν αντικείμενο εξόρυξη φυσικών πόρων κ.α
Βαθμωτή επένδυση (Time to build option)	Οι επενδύσεις γίνονται σε διαφορετικά στάδια, σε περίπτωση που η επένδυση δεν κινηθεί προς τις προβλέψεις να την εγκαταλείψουν. Το κάθε στάδιο αντιμετωπίζεται σαν δικαίωμα για την αξία των επόμενων και αποτιμάται σαν σύνθετο δικαίωμα(compound option)	Οι βιομηχανίες που εξαρτώνται από την έρευνα και ανάπτυξη νέων προϊόντων
Δικαίωμα Αλλαγής (Option to alter)	Αναλόγως πως έχει εξελιχθεί η επένδυση το δικαίωμα να επεκτείνει την παραγωγή ή να την μειώσει	Καταναλωτικά αγαθά, εταιρείες εξόρυξης κ.α
Δικαίωμα Εγκατάλειψης (Option to abandon)	Το Δικαίωμα να εγκαταλείψει μια επένδυση και να την ρευστοποιήσει στην υπολειματική αξία	Αεροπορικές εταιρείες, επενδύσεις σε νέα προϊόντα σε αβέβαιες αγορές
Δικαίωμα Αλλαγής (Option to alter)	Αν οι τιμές ή ζήτηση αλλάξουν να μπορεί η διοίκηση να αλλάξει την παραγωγή	Μηχανικά μέρη, ηλεκτρονικά προϊόντα
Δικαίωμα Ανάπτυξης (Growth Option)	Σύνθετο Δικαίωμα, αρχικές επενδύσεις που ανοίγουν το δρόμο για άλλες	Πολυεθνικές με στρατηγικές αποκτήσεις, R&D βιομηχανίες
Multiple Interacting Options	Όλα τα έργα είναι στην ουσία συλλογή από διαφορετικά δικαιώματα	Όλα τα έργα στις περισσότερες βιομηχανίες

Πίνακας 3 | Κατηγοροποίηση Πραγματικών Δικαιωμάτων

4.3 Πραγματικά Δικαιώματα και Καθαρή παρούσα αξία

Αν θα θέλαμε να συγκρίνουμε την μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας (ΚΠΑ) με αυτή της ανάλυσης με πραγματικά δικαιώματα (ΠΔ) για να εκτιμήσουμε την αξία μιας επένδυσης θα έπρεπε να ξεκινήσουμε λέγοντας ότι στην ανάλυση με πραγματικά δικαιώματα χρησιμοποιούμε την μέθοδο της ΚΠΑ. Όταν αποτιμάμε ένα δικαίωμα σε σχέση με κάποιο έργο η υποκείμενη αξία του δικαιώματος είναι στην πραγματικότητα η αξία του έργου σε ένα κόσμο χωρίς αβεβαιότητα και αυτό το επιτυγχάνουμε κάνοντας χρήση της μεθόδου προεξόφλησης των ταμειακών ροών. Επομένως προβλήματα που μπορεί να υπάρχουν με την μία μέθοδο γίνονται κοινά και για την άλλη.

Πολύ σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου προεξόφλησης των ταμειακών ροών είναι ότι είναι πολύ δύσκολο ακόμη και με τις περισσότερες προχωρημένες μεθόδους πρόβλεψης να εκτιμήσεις μελλοντικές ταμειακές ροές.

Το κόστος κεφαλαίου για αρκετά έργα είναι αρκετά δύσκολο να το εκτιμήσεις πολύ περισσότερο για έργα με ειδικό κίνδυνο.

Όταν στα έργα που προσπαθούμε να αποτιμήσουμε υπάρχουν δικαιώματα όπως του να μπορείς να αναβάλεις το έργο ή να το καθυστερήσεις, ή ακόμη αν υπάρχει η δυνατότητα να δείξει η διοίκηση ευελιξία σε συνάρτηση με τις συνθήκες της αγοράς αφού το έργο αρχίσει να τρέχει τότε η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας δεν μπορεί να αποτιμήσει ολόκληρη την αξία του έργου

4.4 Σύγκριση Πραγματικών Δικαιωμάτων με Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η αποτίμηση χρηματοοικονομικών παραγώγων έγινε με την υπόθεση ότι η αγορά

βρίσκεται σε ισορροπία και δεν είναι δυνατό να υπάρξει κέρδος χωρίς κίνδυνο, ουσιαστικά μπορούσαμε να επαναλάβουμε τις πληρωμές του δικαιώματος χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο απο μετοχές επομένως η τιμή του δικαιώματος ήταν ίδια με αυτή του χαρτοφυλακίου που δημιουργούσαμε που προσομοιώνε το δικαίωμα.

Τα πραγματικά δικαιώματα δεν γίνεται πάντοτε να τα συγκρίνεις με κάποια μετοχή ή αγαθό που συναλλάσσεται επομένως μπορεί να δίνουν μια απόδοση μικρότερη απο αυτή που θα έδινε τον ανάλογο κινδύνου χρηματοοικονομικό παράγωγο για αυτό το λόγο γίνεται μια προσαρμογή αντικαθιστώντας τον ρυθμό ανάπτυξης α , με ένα ουδέτερο στο κίνδυνο(risk-neutral) ρυθμό ανάπτυξης $\hat{\alpha}$, αφού αφαιρέσουμε ένα κατάλληλο ασφάλιστρο κινδύνου(risk premium) $\hat{\alpha} = \alpha - RP$ (Trigeorgis 1996).

Μερικές ακόμη διαφορές που μπορούμε να διακρίνουμε συγκρίνοντας μεταξύ των πραγματικών δικαιωμάτων και δικαιωμάτων αγοράς σε μετοχές είναι οι ακόλουθες:

- Ο κάτοχος των πραγματικών δικαιωμάτων δεν είναι αυτός που έχει το αποκλειστικό δικαίωμα όπως με τα χρηματοοικονομικά παράγωγα, αφού μπορεί να είναι σε κάποια ανταγωνιστική αγορά που δεν θα προστατεύει τα δικαιώματα του απο κινήσεις του ανταγωνισμού.
- Τα πραγματικά δικαιώματα δεν συναλλάσσονται ή αν συναλλάσσονται γίνεται σε μη ολοκληρωμένες αγορές με σημαντικό κόστος
- Η διακύμανση της υποκείμενης αξίας μπορεί να μην είναι γνωστή κατά την διάρκεια της ζωής του δικαιώματος
- Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα είναι απλά σε σχέση με το πως αποτιμούνται στην λήξη αφού η τιμή τους στην εξάσκηση δίνεται απο την υποκείμενη αξία . Τα πραγματικά παράγωγα γίνονται απλά αν η τιμή στην λήξη εξαρτάται απο κόστος του υποκείμενου έργου , αλλά μπορεί να γίνουν αρκετά πολύπλοκα

αφού η εξάσκηση του ενός παραγώγου μπορεί να συνεπάγεται άλλες επενδυτικές ευκαιρίες δηλαδή πρόκειται για σύνθετα παράγωγα.

- Τα πραγματικά δικαιώματα δεν έχουν εξάσκηση στιγμιαία πράγμα στην ουσία έχει σαν αποτέλεσμα να μειώνεται η πραγματική τους διάρκεια, π.χ μια εταιρεία εξόρυξης πετρελαίου μπορεί να έχει δικαίωμα χρήσης για μερικά χρόνια αλλά πρέπει να συνυπολογίσει και τον χρόνο που χρειάζεται για να αντλήσει τα αποθέματα στην ουσία δηλαδή το δικαίωμα χρήσης είναι μικρότερο.

4.5 Περιγραφή Πραγματικών Δικαιωμάτων

Παρακάτω θα περιγράψουμε μερικά είδη πραγματικών δικαιωμάτων που μπορούμε να συναντήσουμε στην αποτίμηση επενδύσεων τα οποία κάνουν φανερό πως υπολείπεται ο παραδοσιακός τρόπος ανάλυσης επενδύσεων με την καθαρή παρούσα αξία της ανάλυσης με πραγματικά δικαιώματα. Υπενθυμίζουμε ότι με την στατική μέθοδο της καθαρής παρούσης αξίας, την ονομάζουμε στατική αφού θεωρεί ότι η διοίκηση μιας επένδυσης δεν έχει άλλη επιλογή ώστε να αναθεωρήσει τα αρχικά της σχέδια, η εταιρεία θα προχωρήσει σε μια επένδυση I εάν η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών V είναι υψηλότερη από την επένδυση I

$$ΚΠΑ = V - I > 0$$

Αντίθετα η χρήση δικαιωμάτων μας επιτρέπει να ποσοτικοποιήσουμε την αξία της ευελιξίας της διοίκησης κατά την διάρκεια που ένα επιχειρηματικό πλάνο είναι σε λειτουργία. Στην πραγματικότητα η ευελιξία είναι διάφορα δικαιώματα που συσχετίζονται με μια επενδυτική ευκαιρία επομένως η επέκταση της καθαρής παρούσης αξίας μπορεί να συλλάβει καλύτερη αυτή την αξία:

Επεκτεμένη Παρούσα Αξία ΚΠΑ* = ΚΠΑ + Αξία Δικαιώματος

Εξίσωση 3 Επεκταμένη Παρούσα Αξία

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα πραγματικά δικαιώματα που αναφέρονται στον πίνακα 2 .

4.5.1 Δικαίωμα Καθυστερήσης ενός Έργου (option to Defer).

Υποθέτουμε ότι μια εταιρεία έχει αποκλειστικά δικαιώματα για τα επόμενα n χρόνια σε ένα έργο το οποίο παρουσιάζει αρνητική καθαρή παρούσα αξία, αλλά μπορεί να γίνει ένα κερδοφόρο έργο αργότερα. (McDonald & Siegel 1986) Επομένως η εταιρεία έχει τις εξής επιλογές :

Εάν $V > I$ να αναλάβει το έργο

$V < I$ να μην αναλάβει το έργο

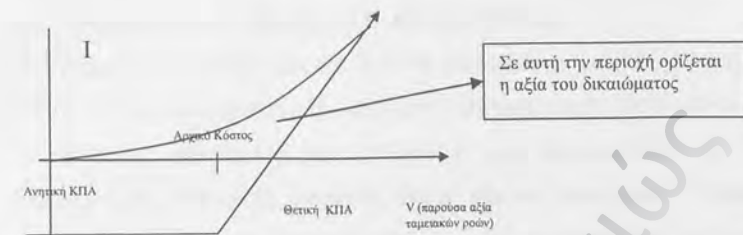
Το δικαίωμα να αναβάλει μια εταιρεία ένα επιχειρηματικό πλάνο είναι σημαντικό αν η επένδυση χρειάζεται μια πολύ υψηλή αρχική επένδυση και το επιχειρηματικό περιβάλλον είναι αβέβαιο επόμενος το σχέδιο πρέπει να αναβάλλεται μέχρι το έργο να έχει μια διαφορά ασφαλείας από την καθαρή παρούσα αξία του.

Εάν δεν αναλάβει το έργο δεν θα έχει πρόσθετα έξοδα και μόνο ότι έχει δαπανήσει αρχικά θα χάσει. Το διάγραμμα παρακάτω παρουσιάζει τις πληρωμές των ταμειακών ροών αν η εταιρεία υποθέσουμε καθυστερεί της εκπλήρωση του έργου για όλο το διάστημα που έχει το δικαίωμα. Άρα στην λήξη όπου άλλη καθυστέρηση δεν είναι δυνατή το δικαίωμα θα αξίζει με την καθαρή παρούσα αξία (ΚΠΑ) αν είναι θετική ή μηδέν αν είναι αρνητική δηλαδή να εγκαταλείψει το έργο.

Επεκταμένη Παρούσα Αξία = $\text{Max}[ΚΠΑ(V_t - I), 0]$

Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα μοιάζει αυτό ενός δικαιώματος αγοράς στην λήξη του. Η παρούσα αξία των ταμειακών ροών αν το

έργο είχε ολοκληρωθεί και η αναμενόμενη διακύμανση τους αντιπροσωπεύουν την υποκειμένη αξία και την διακύμανση της και τιμή εξάσκησης I την απαιτούμενη επένδυση για το έργο.



Εικόνα 6 Πληρωμή Δικαιώματος Καθυστέρησης (option to defer)

Σε προηγούμενη ενότητα έχουμε δει την αναλογία στις μεταβλητές έτσι ώστε να εφαρμόσουμε την θεωρία αποτίμησης δικαιωμάτων για να αποτιμήσουμε το προηγούμενο πραγματικό δικαίωμα. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι το κόστος της καθυστέρησης του εφόσον η $ΚΠΑ > 0$ και μπορεί να συσχετισθεί με την μερισματική απόδοση. Η δυσκολότερη μεταβλητή για εκτίμηση είναι αυτή της διακύμανσης της αξίας του έργου. Σημαντικό μειονέκτημα χρησιμοποιώντας το μοντέλο Black & Scholes είναι πως θεωρούμε ότι η υποκειμένη αξία ακολουθεί μια διαδικασία διάχυσης (diffusion process) που είναι δύσκολο να δικαιολογηθεί αφού για παράδειγμα μια ξαφνική τεχνολογική αλλαγή μπορεί να αλλάξει δραστικά την αξία ενός έργου.

Πολλές φορές έργα που μπορεί να έχουν θετική καθαρή παρούσα αξία αναβάλλονται και εκτελούνται αργότερα που μπορεί να αυξήσουν την αξία τους.

Ο McDonald & Siengel (1996) έδειξαν, ότι ο κανόνας του να επενδύεις όταν $ΚΠΑ > 0$ ισχύει μόνο σε κατάσταση απόλυτης βεβαιότητας για τις αναμενόμενες ταμιακές ροές, δηλαδή όταν η διακύμανση τους είναι μηδέν. Κάνοντας την υπόθεση ότι η διάρκεια της επενδυτικής

ευκαιρίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου, έδειξαν ότι ο κανόνας για να επενδύσεις εξαρτάται από το κλάσμα της μεικτής παρούσας αξίας των ροών V_i και το κόστος επένδυσης F_i καθώς πλησιάζει ένα καθορισμένο σύνορο V_i . Η επένδυση είναι μη αντιστρεπτή και υποθέσανε ότι τα V_i και F_i ακολουθούν γεωμετρική κίνηση Brown.

Ο Trigeorgis (1996) έδειξε ότι οι υποθέσεις των McDonald & Siegel είναι πολύ περιοριστικές και μη πραγματικές, δεν είναι δυνατό οι επενδυτικές ευκαιρίες να υπάρχουν για πάντα, και δεν μπορεί να υπάρξει μια κλειστής μορφής λύση για το δικαίωμα. Πρότεινε να το αντιμετωπίσουμε σαν Αμερικάνικου τύπου δικαίωμα αγοράς. Με τον περιορισμό ότι δεν υπάρχει κόστος ευκαιρίας από την μη εξάσκηση της επένδυσης τότε μπορούμε να τα αποτιμήσουμε σαν Ευρωπαϊκού τύπου.

Η ανάλυση ενός έργου σαν πραγματικό δικαίωμα δείχνει ακόμη ότι παράγοντες που μπορεί να το κάνουν λιγότερο ελκυστικό με την μέθοδο την καθαρής παρούσας αξίας, όπως η υψηλή διακύμανση της αξίας του, με την μέθοδο των πραγματικών δικαιωμάτων του προσδίδουν αξία αφού η διακύμανση είναι μια μεταβλητή στα δικαιώματα που προσδίδει αξία όσο υψηλότερη είναι. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι υποθέσεις που έχουν γίνει είναι αρκετές οι επενδύσεις έχουν θεωρηθεί ότι γίνονται σωρευτικά στην αρχή του, σε περίπτωση που μικρές αρχικές επενδύσεις έχουν μεγάλο περιθώριο κέρδους τότε η αναβολή στην εκτέλεση του έργου δεν έχει πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή του δικαιώματος αναβολής ενός επενδυτικού σχεδίου σε διακριτό χρόνο χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό μοντέλο.

Το παράδειγμα παρουσιάζεται στον Smit & Trigeorgis (2004):

Υποθέτουμε ότι μια εταιρεία υψηλής τεχνολογίας έχει αποκλειστική ευκαιρία με την μορφή άδειας χρήσης να δημιουργήσει μια μονάδα που να πράγει ένα προϊόν το οποίο χρειάζεται μια επένδυση παρούσας αξίας $I_0 = 80$ εκ. Οι αναμενόμενες μεικτές θετικές χρηματοροές από την

παραγωγή μπορεί να μεταβάλονται ανάλογα την ζήτηση σε $V^+ = \$180$ ή $V^- = \$60$ εκ.με ίδια πιθανότητα $p=0.5$ αν υποθέσουμε ότι το κόστος κεφαλαίου είναι 20% το έργο αναμένεται να έχει

$$E(V_0) = \frac{0.5 \cdot 180 + 0.5 \cdot 60}{1.2} = 100 \text{ εκ}$$

Αν η εταιρεία έκανε μια άμεση επένδυση θα περίμενε ότι η ΚΠΑ = $100 - 80 = 20$ εκ.

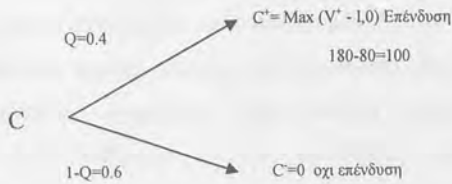
Αυτό όμως που είναι σημαντικό σε ένα κόσμο αβεβαιότητας είναι η εταιρεία να εξασκούσε το δικαίωμα που έχει να διατηρήσει την άδεια για ένα χρόνο και να επενδύσει τότε που θα ήταν γνωστή η ζήτηση δηλαδή τότε που θα είχε εισροή 180εκ ή αν θα ήταν 60 εκ θα εγκατέλειπε το σχέδιο. Ουσιαστικά αυτό που ζητάμε είναι να αποτιμήσουμε αυτό το δικαίωμα σήμερα.

Θα αποτιμήσουμε το δικαίωμα θεωρώντας ότι όλοι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι προς τον κίνδυνο επομένως αυτό που περιμένουμε να μας αποδίδουν οι επενδύσεις μας είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο που στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα είναι $r=8\%$. Επομένως περιμένουμε $V^+ \cdot p + V^- \cdot (1-p) = V_0 \cdot (1+r)$ άρα οι πιθανότητες χωρίς κίνδυνο είναι:

$$p = \frac{V^+ \cdot (1+r) - V^-}{V^+ - V^-} = \frac{80 \cdot 1.08 - 60}{180 - 60} = 0.4$$

Τελικά η αξία της επένδυσης με το δικαίωμα να αναβάλουμε το επενδυτικό σχέδιο για ένα χρόνο είναι:

$$C = \frac{p \cdot C^+ + (1-p) \cdot C^-}{(1+r)} = \frac{0.4 \cdot 100 - 0.6 \cdot 0}{1.08} = 37 \text{ εκ}$$



Εικόνα 7 Αξία του δικαιώματος αναβολής

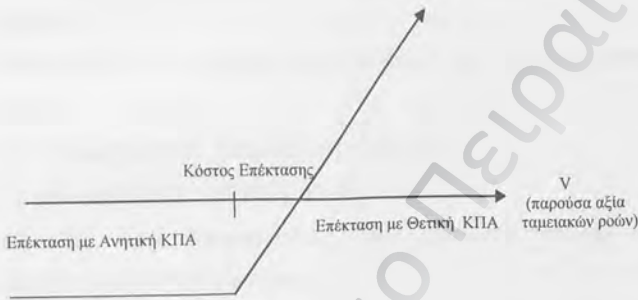
(από Smit & Trigeorgis 2004)

Είναι φανερό ότι το αποκλειστικό δικαίωμα που είχε η εταιρεία η εταιρεία να επενδύσει αργότερα ξεπερνάει κατά πολυ την αποτίμηση που θα έχουμε με την παθητική ΚΠΑ ($37 > 20$).

Η μέθοδο ανάλυσης με την παραπάνω μορφή είναι κατάλληλη για εταιρίες με μοναδική τεχνογνωσία ή για εταιρίες που εκμεταλλεύονται ακινήτη περιουσία ή εταιρίες που εξορύχουν φυσικές πρώτες ύλες , όλες έχουν κοινό χαρακτηριστικό τον μεγάλο επενδυτικό ορίζοντα και τον περιορισμένο ανταγωνισμό. Σε περιπτώσεις που υπάρχει εξωτερικός ανταγωνισμός τότε έχουμε επιδράσεις όπως αυτές σε αμερικάνικου τύπου δικαιώματα αγοράς όπου είναι πιθανή η εξάσκηση του δικαιώματος πριν την λήξη. Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι η καθυστέρηση του επενδυτικού σχεδίου θα επέτρεπε στον ανταγωνισμό να εισέλθει και να πάρει μερίδιο αγοράς της τάξεως του 50% τότε το κόστος της επένδυσης θα περιοριζόταν στο μισό δηλαδή $I = 40$ εκ όπως και οι πιθανές θετικές χρηματοροές της επένδυσης θα μειώνονταν. Τελικά η αξία του δικαιώματος θα υπολογιζόταν 18.5εκ (το μισό απο αυτό που είχαμε υπολογίσει χωρίς ανταγωνισμό) και φαίνεται ότι είναι προτιμότερο να προβεί σε άμεση επένδυση για να προλάβει την είσοδο του ανταγωνισμού και να εισπράξει την ΚΠΑ = 20 εκ.

4.5.2 Δικαίωμα Επέκτασης ενός Έργου (option to expand).

Παρόμοια με το δικαίωμα να καθυστερήσει την εκτέλεση ενός έργου μια εταιρεία πολλές φορές μπορεί να επενδύσει σε κάποιο έργο αν και έχει αρνητική καθαρή παρούσα αξία επειδή της δίνει το δικαίωμα να επεκταθεί στο μέλλον αν οι συνθήκες είναι ευνοικότερες. Το διάγραμμα πληρωμών των ταμειακών ροών παρακάτω παραπέμπει σε αυτό ενός δικαιώματος αγοράς.



Εικόνα 8 Πληρωμή Δικαιώματος Επέκτασης

Τελικά αν προσθέσουμε την αξία του δικαιώματος στην αρχική αξία της επένδυσης με την αρνητική καθαρή παρούσα αξία μπορεί να οδηγηθούμε σε διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που θα είχαμε αν δεν λαμβάναμε υπόψη μας το δικαίωμα επέκτασης.

Αν υποθέσουμε ότι μια εταιρεία έχει το δικαίωμα να επεκτείνει την παραγωγή της κατά $E\%$ με ένα πρόσθετο επενδυτικό κόστος $I_1\%$ τότε αυτό το δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα αγοράς το οποίο στην λήξη πληρώνει :

$$C = \max[\text{ΚΠΑ της επέκτασης}(E \cdot V - I_1), 0]$$

Ανάλογα με το δικαίωμα του να επεκτείνεις ένα επενδυτικό σχέδιο είναι να το περιορίσεις αν το έργο δεν αποδίδει αυτά που αναμενόταν. Αυτό το δικαίωμα μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα δικαίωμα πώλησης

στο μέρος του σχεδίου που πρόκειται να ακυρωθεί και με τιμή εξάσκησης τα έξοδα που πρόκειται να ακυρωθούν. Με $K\%$ είναι η μείωση των εσόδων και P_K το κόστος που περιοριζόμαστε τότε το δικαίωμα στη λήξη πληρώνει:

$$P = \text{Max}[K\text{ΠΑ του περιορισμού}(P_K - K \cdot V), 0]$$

Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, η εταιρεία έχει την ευελιξία την επόμενη χρονιά να κάνει μια πρόσθετη επένδυση $I_1=40$ εκ και να περιμένει ότι θα αυξήσει τα έσοδα της κατά 50%. Η άλλη επιλογή είναι να μην κάνει κανένα έξοδο και να διατηρήσει τα ίδια έσοδα.

Επομένως αν η αγορά κινηθεί προς το ευνοϊκό σενάριο στη λήξη θα έχουμε:

$$C_1^+ = \text{Max}[0, (0.5 \cdot 180 - 40), 0] = 50 \text{ και}$$

$$C_1^- = \text{Max}[0, (0.5 \cdot 60 - 40), 0] = 0$$

Η αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή της έναρξης του επενδυτικού σχεδίου είναι

$$C = \frac{p \cdot C^+ + (1-p) \cdot C^-}{(1+r)} = \frac{0.4 \cdot 50 - 0.6 \cdot 0}{1.08} = 18.5$$

Η επεκτεταμένη παρούσα αξία ($K\text{ΠΑ}^*$) του έργου θα γίνεται Εξίσωση 4:

$$K\text{ΠΑ}^* = 20 + 18.5 = 38.5$$

Το δικαίωμα επέκτασης είναι αρκετά σημαντικό όταν τα επενδυτικά σχέδια περιλαμβάνουν την είσοδο ενός νέου προϊόντος σε αβέβαιη αγορά. Ειδικά είναι στρατηγικής σημασίας όταν οι managers τα λαμβάνουν υπόψη τους για να αποκτήσουν πλεονέκτημα έναντι του ανταγωνισμού σε περίπτωση που οι συνθήκες της αγοράς αλλάξουν.

4.5.3 Δικαίωμα Εγκατάλειψης ενός Έργου (option to abandon).

Πολλές φορές για ένα επενδυτικό σχέδιο που είναι σε εφαρμογή υπάρχει η δυνατότητα από την διοίκηση του να το εγκαταλείψει ή να το

ρευστοποιήσει στην τιμή εκποίησης A ή να το ανταλλάξει στη καλύτερη εναλλακτική που μπορεί να έχει.

Στην λήξη η αξία του επενδυτικού σχεδίου με το δικαίωμα να εγκαταλειφτεί για τιμή εκποίησης S θα είναι (Smit & Trigeorgis 2004) :

$$ΚΠΑ^* = ΚΠΑ + \text{Max}[\text{εγκαταλείπει}(S-V), \text{συνέχεια}]$$

Ουσιαστικά για την εταιρεία που έχει το δικαίωμα να εγκαταλείψει ένα επενδυτικό σχέδιο για τιμή A μεταφράζεται με το να διαλέξει το μέγιστο μεταξύ της παρούσας αξίας του έργου και της καλύτερης εναλλακτικής A δηλαδή $E = \text{Max}(V, A)$

Η παρουσία δύο μερικά συσχετισμένων στοχαστικών διαδικασιών δυσκολεύει την αποτίμηση αυτού του δικαιώματος. Η αποτίμηση διευκολύνεται αν αποτιμήσουμε την αξία του έργου V σε μονάδες της τιμής εξάσκησης A (Hopp & Tsolakis 2004 sec 4.2) $X = \frac{V}{A}$. Ο βασικός κανόνας είναι ότι το επενδυτικό σχέδιο συνεχίζεται όταν το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από την μονάδα αλλιώς εγκαταλείπεται. Το δικαίωμα αυτό είναι ένα δικαίωμα αγοράς στο κλάσμα με τιμή εξάσκησης να ισούται με μονάδα. Άρα στην λήξη το δικαίωμα πληρώνει:

$$C = \max\left[0, \frac{V}{A} - 1\right]$$

Για την αποτίμηση του δικαιώματος αυτού μπορούμε να εργαστούμε όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις διωνυμικά από το τέλος προς την αρχή, χρησιμοποιώντας τις σχετικές τιμές των V, A . Η σημαντικότερη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιούμε σαν μεταβλητότητα την σχετική μεταβλητότητα των δύο διαδικασιών, της αξίας του επενδυτικού σχεδίου και της τιμής εκποίησης $\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma^2_v + \sigma^2_A - 2\rho_{VA}\sigma_v\sigma_A}$

4.5.4 Δικαίωμα προσωρινής παύσης (Option to Temporarily Shut Down).

Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να είναι επιθυμητό έστω και προσωρινά να παύσει η παραγωγή. Ο McDonald & Siegel (1985) αποτίμησαν έργα με το δικαίωμα να σταματήσουν, χωρίς να υπάρχει κόστος, στην περίπτωση που η τιμή του προϊόντος P δεν επαρκεί να καλύψει το μεταβλητό κόστος ανά μονάδα προϊόντος C . Υπόθεσαν ότι η τιμή του προϊόντος ακολουθεί μια διαδικασία διάχυσης της μορφής:

$$\frac{dP}{P} = a * dt + \sigma * dz$$

θεώρησαν την λειτουργία σαν ένα δικαίωμα του να αποκτήσεις την P_t πληρώνοντας C_t τιμή εξάσκησης και αποτίμησαν, $V_0(t)$, την παρούσα αξία του λειτουργικού κέρδους $\pi_t = \max(P_t - C_t, 0)$ την χρονική στιγμή t με την υπόθεση ότι υπάρχει αδιαφορία στον κίνδυνο των επενδυτών. Το άθροισμα των $V_0(t)$ μας δίνει την αξία R του επενδυτικού σχεδίου με το δικαίωμα να το εγκαταλείψουμε προσωρινά. $R = \sum_{t=0}^T V_t$

Επομένως η παρούσα αξία μια αβέβαιης χρηματοροής ισούται με την αναμενόμενη τιμή της χρηματοροής προεξοφλημένη με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Δηλαδή η αξία του δικαιώματος να παράγεις την χρονική στιγμή t είναι :

$$V(P_0, C_t, t) = e^{-rt} E_0[\pi_t] = e^{-rt} E_0[\max(P_t - C_t, 0)]$$

Τελικά έδειξαν ότι αυτό ισούται :

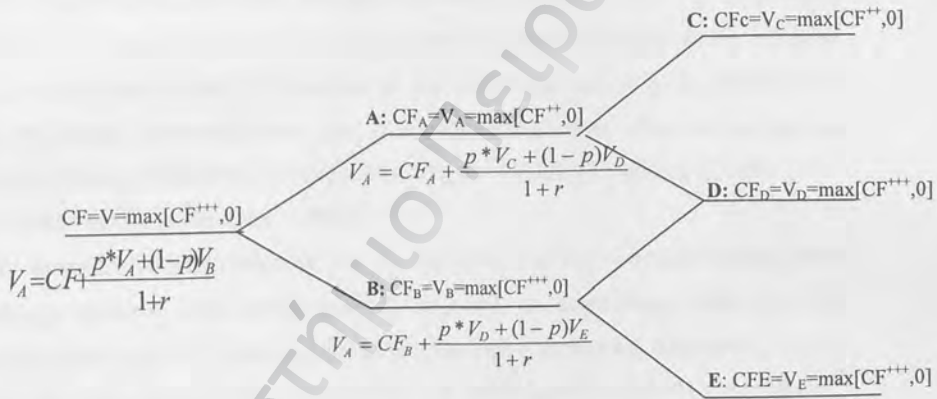
$$V(P_0, C_t, t) = P_0 * \exp(r - q)T * N(d_1) - C_t * \exp(-rT)N(d_2),$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(P_0 / C_t) + (r - \delta + (\sigma_p^2 / 2) * t)}{\sigma_p * \sqrt{t}} \text{ and}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{t}$$

και το $\delta = r - a$, όπου a η αναμενόμενη ανατίμηση στα προϊόντα όπου a είναι αναγκαίο να μην είναι ίδια με το r . Παρατηρούμε ότι η παραπάνω λύση ταυτίζεται με αυτή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος αγοράς σε υποκείμενη αξία που πληρώνει μέρισμα δ . Για την εκτίμηση του σ_p είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητότητα που υπολογίζεται από την αγορά των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης αν υπάρχουν για το την τιμή του προϊόντος McDonald & Siegel (1985). Παρακάτω παρουσιάζουμε Διωνυμικά την αποτίμηση του δικαιώματος για προσωρινή εγκατάλειψη του επενδυτικού σχεδίου. Η αποτίμηση ξεκινάει από τα δεξιά προς τα αριστερά



Εικόνα 9 Αποτίμηση Διακινήματος Προσωρινής Εγκατάλειψης ενός έργου

4.5.5 Δικαίωμα Εναλλαγής * (Option to Switch Inputs or Outputs).

* Η εναλλαγή αναφέρεται στις πρώτες ύλες (Π.Χ ένα εργοστάσιο ηλεκτρισμού μπορεί να παράγει ρεύμα χρησιμοποιώντας σαν πρώτη ύλη άνθρακα ή φυσικό αέριο εξαρτάται από τις τιμές των προϊόντων) ή στο προϊόν που παράγεται αναλόγως την ζήτηση του και αυτό μπορεί να

επιτευχθεί με κάποιο εύλικτο σύστημα παραγωγής. Το δικαίωμα της εταιρείας να αποκτήσει την ευελιξία να αλλάξει ένα προϊόν που εμπεριέχει κίνδυνο με ένα άλλο έχει κάποια αξία, επομένως διατίθεται να πληρώσει ένα ασφάλιστρο για να αποκτήσει αυτό το δικαίωμα. Η αξία αυτής της ευελιξίας πρέπει να μετριέται σε σχέση με το αυξημένο κόστος που δημιουργείται. Το δικαίωμα της εναλλαγής έχουν ερευνηθεί από διάφορους όπως Triantis & Hodder (1991), Kulatilaka(1993).

Η ύπαρξη ευελιξίας στην διαδικασία της παραγωγής έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις βιομηχανίες εξόρυξης, άντλησης πετρελαίου, παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος, χημικές βιομηχανίες κ.α.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κόστος αλλαγής τότε η αποτίμηση γίνεται με απλό τρόπο όπου συγκρίνεται η αποτίμηση σε κάθε περίοδο και επιλέγεται εκείνη η τεχνολογία με την μεγαλύτερη χρηματοροή και το άθροισμα των επιμέρους μας δίνει την επιμέρους αξία του έργου με το δικαίωμα εναλλαγής μεταξύ δύο τεχνολογιών (Trigeorgis,1996 171-177,και Triantis,Hodder, 1990)

Την παραπάνω μεθοδολογία δεν μπορούμε να την εφαρμόσουμε όταν υπάρχει κόστος εναλλαγής όπου η επιλογή να περάσουμε από την μία τεχνολογία στη άλλη δεν επηρεάζει μόνο την παρούσα απόφαση, αλλά και τις μελλοντικές περιόδους. Η αποτίμηση γίνεται ξεκινώντας από τη τελευταία περίοδο προς την αρχή και η αξία π.χ την χρονική στιγμή 1 υπολογίζεται από την αναμενόμενη τιμή στην χρονική στιγμή 2 στην κατάσταση 1 που θα κινηθεί ανοδικά κατάσταση 2 που θα κινηθεί καθοδικά (διωνυμικό υπόδειγμα- μπορεί να υπολογιστεί και για παραπάνω αριθμό καταστάσεων). Επομένως η αξία την προηγούμενη χρονική στιγμή υπολογίζεται από του τύπο:

$$E_{t-1}^s(m) = \max_i (c_{t-1}^s(i) + \frac{pE_t^{s+1} + (1-p)E_t^{s-1}(i)}{1+r} - I(m \rightarrow i))$$

το $I(m \rightarrow i) = 0$ μόνο για $I = m$ δηλαδή δεν υπάρχει κόστος αν παραμείνεις στην ίδια τεχνολογική κατάσταση. Όπου $i=0,1,\dots,M$

τεχνολογικές καταστάσεις που μπορεί να εναλλάξει η παραγωγή, $t=0, \dots, T$ χρονικές περιόδους και $s=1, \dots, n$ καταστάσεις που μπορεί να βρῖσκεται η αξία την επόμενη χρονική στιγμή π.χ 2 αν ελέγχουμε με το διωνυμικό υπόδειγμα (πάνω-κάτω). Στην τελευταία χρονική περίοδο T η έκφραση γίνεται

$$E_T^s(m) = \max_i (c_T^s(i) - I(m \rightarrow i))$$

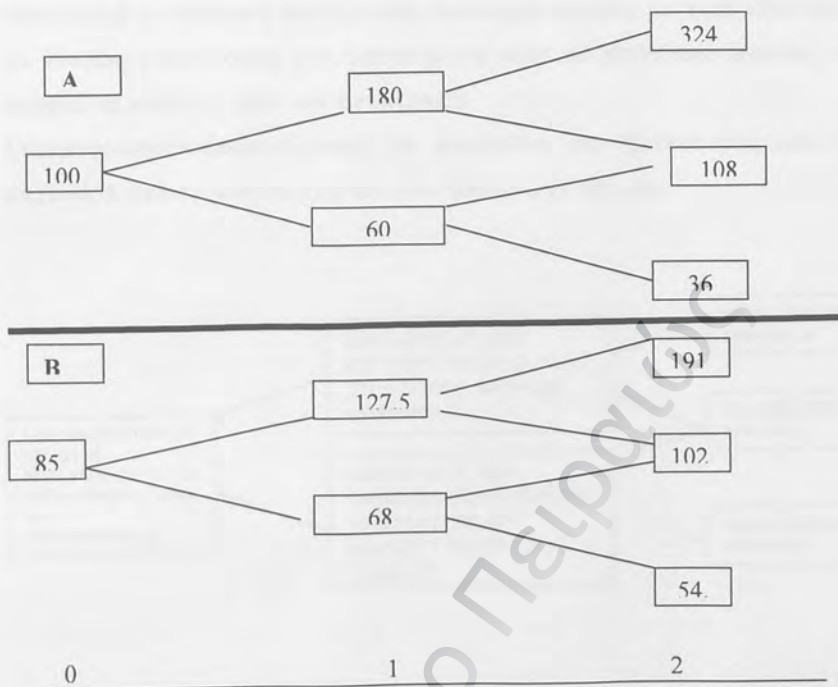
με το $c_T^s(i)$ να είναι η χρηματοροή όταν χρησιμοποιούμε την τεχνολογία i στην κατάσταση s .

Εάν τον αριθμό των τεχνολογικών καταστάσεων i και το κόστος της εναλλαγής στις καταστάσεις τα μεταφράσουμε διαφορετικά όπως σαν καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί ένα επενδυτικό σχέδιο, π.χ να το αναβάλλουμε ή να το επεκτείνουμε τότε ουσιαστικά αποτιμούμε ένα σύνθετο δικαίωμα.

Για παράδειγμα το δικαίωμα να εγκαταλείψουμε ένα επενδυτικό σχέδιο για την τιμή εκποίησης του χρησιμοποιώντας την παραπάνω φόρμα μπορεί να υπολογιστεί σαν εξετάζουμε την εναλλαγή από την κατάσταση 1 που έχει θετικές χρηματοροές, $c_T^1(1) > 0$, στην κατάσταση 2 που δεν θα έχει χρηματοροές, $c_T^2(2) = 0$, το κόστος μετατροπής θα είναι αρνητικό και ίσο με την τιμή εκποίησης S δηλαδή $I(2 \rightarrow 1) = -S$. Αν η κατάσταση εγκατάλειψης είναι μη αντιστρεπτή αυτό μπορεί να προκαλέσει την μη εναλλαγή στην κατάσταση 2 αν και το επενδυτικό σχέδιο μπορεί να παρουσιάζει αρνητικές ροές.

Παρακάτω παρουσιάζεται μια εφαρμογή της προηγούμενης μεθοδολογίας για 2 χρονικές περιόδους όπου υπολογίζεται το δικαίωμα της εναλλαγής μεταξύ δύο μηχανών A και B με κόστος αλλαγής από την $I(A \rightarrow B) = 8$ μονάδες και από την $I(B \rightarrow A) = 2$ μονάδες. Στην εικόνα παρακάτω δίνονται οι χρηματοροές των δύο μηχανών

Trigeorgis pp 177-184 (1996).



Η επαναληπτική μέθοδος που θα ακολουθηθεί ξεκινάει από τον τελευταίο κόμβο, η ιδέα είναι ότι οι επιλογές είναι ή να μείνουμε με την μηχανή που λειτουργούμε ή να αλλάξουμε στην άλλη προσθέτοντας το κόστος αλλαγής, η απόφαση εξαρτάται από ποια κατάσταση έχει τις μεγαλύτερες χρηματοροές.

Η έκφραση που περιγράφει την διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η παρακάτω :

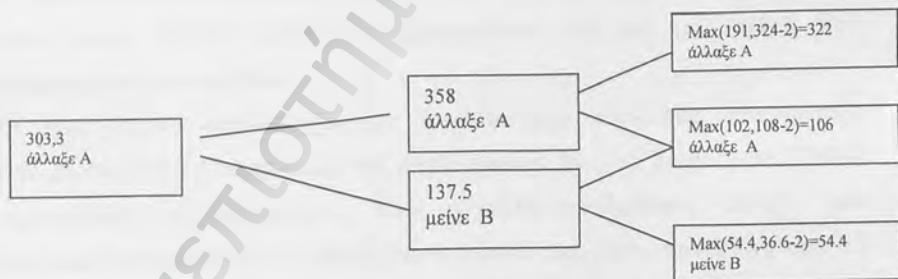
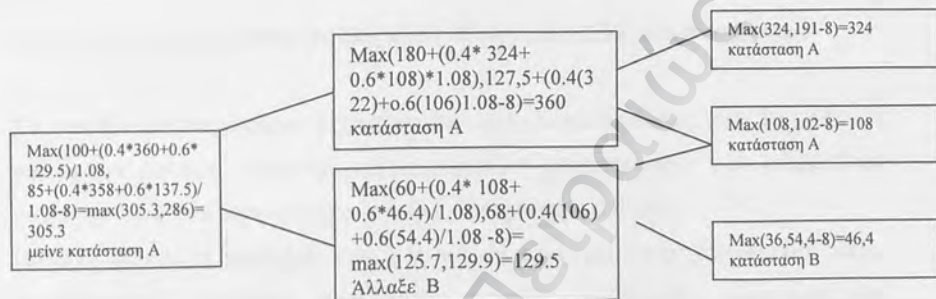
$$E_t^s(A) = \max(c_t^s(A) + \frac{\hat{E}[E_{t+1}^s(A)]}{1+r}, c_t^s(B) + \frac{\hat{E}[E_{t+1}^s(B)]}{1+r} - I(A \rightarrow B)) \quad \text{με } c_t^s(A) \text{ η}$$

χρηματοροή την τρέχουσα χρονική στιγμή στην κατάσταση A
η παραπάνω έκφραση απλοποιείται σε

$$E_t^s(A) = c_t^s(A) + \max(c_t^s(B) - c_t^s(A) - I(A \rightarrow B), 0)$$

όπου αυτή η έκφραση θυμίζει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης το κόστος μετατροπής και υποκειμένη αξία το πρόσθετο όφελος που μπορεί να υπάρξει από την μετατροπή.

Συγκεντρωτικά εφαρμόζοντας τα παραπάνω και ξεκινώντας από την μηχανή Α πρώτο διάγραμμα και από μηχανή Β δεύτερο



Για τον υπολογισμό των κόμβων παραπάνω συγκρίνουμε την ταμειακή ροή που θα είχαμε αν μέναμε στην παρούσα κατάσταση σύν ότι θα κερδίσουμε μετέπειτα προεξοφλώντας το με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο με τις χρηματοροές που θα είχαμε αν αλλάζαμε κατάσταση μείον το κόστος αλλαγής με τις μετέπειτα χρηματοροές από την καινούργια κατάσταση.

Τα καλύτερα αποτελέσματα τα έχουμε αν ξεκινήσουμε απο την μηχανή A. Η αξία του δικαιώματος να αλλάζουμε υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε την προεξοφλημένη παρούσα αξία της μηχανής A που είναι 300 απο την παρούσα αξία που προκύπτει με το δικαίωμα εναλλαγής 305.3 , ουσιαστικά αξίζει να αγοράσουμε μια μηχανή που δίνει το δικαίωμα να εναλλάξουμε και να πληρώσουμε 5.3 μονάδες παραπάνω.

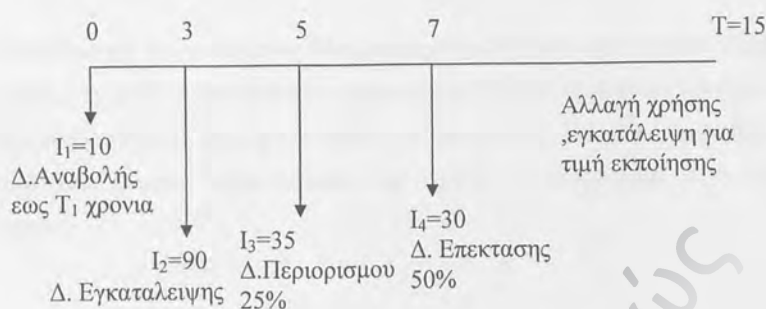
4.5.6 Αλληλεπιδράσεις πολλαπλών Πραγματικών Δικαιωμάτων

Το κεφάλαιο παρακάτω εξετάζει τις αλληλοεπιδράσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ διάφορων πραγματικών δικαιωμάτων που μπορεί να υπάρχουν σε ένα επενδυτικό σχέδιο (Trigeorgis 1993).

Πολλές φορές η ευελιξία που μπορεί να υπάρχει στην διαχείριση ενός επενδυτικού σχεδίου έχει την μορφή συλλογής πραγματικών δικαιωμάτων , των οποίων η συνδυασμένη αξία γενικά δεν είναι το άθροισμα της μεμονωμένης αξίας του κάθε δικαιώματος.

Οι αλληλεπιδράσεις που μπορεί να υπάρχουν εξαρτώνται απο τον τύπο, πόσο πιθανό είναι να εξασκηθούν και με την σειρά που συμμετέχουν στο σχέδιο.

Σε ένα γενικό παραδειγμα με περισσότερα απο ένα πραγματικά δικαιώματα όπως παρουσιάζεται στην εικόνα 10 ο Trigeorgis (1993) παρουσίασε τις περιπτώσεις που οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δικαιωμάτων μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την αποτίμηση που θα δινόταν αν προσθέταμε την αξία των επιμέρους δικαιωμάτων. Κατηγοροποίησε την εξάρτηση απο το πόσο πιθανό είναι να εξασκηθεί κάποιο πραγματικό δικαίωμα και τη σειρά που επιδρούν στο έργο.



Εικόνα 10 Γενικό επενδυτικό σχέδιο με πολλαπλά πραγματικά δικαιώματα

Για παράδειγμα έδειξε ότι αν δυο διαφορετικά δικαιώματα είναι διαφορετικού τύπου η από κοινού πιθανότητα θα είναι μικρή και θα έχουν μικρή αλληλεπίδραση μεταξύ τους άρα το άθροισμα των επιμέρους μπορεί να ισχύει. Αντίθετα αν η ημερομηνίες λήξης διαφέρουν χρονικά τότε η αλληλεπίδραση μεγαλώνει αρκετά. Αν τα δικαιώματα είναι ίδιου τύπου η αλληλεπίδραση είναι μεγάλη και η τιμή απέχει από αυτή που θα είχαμε από το άθροισμα των επιμέρους τιμών. Τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν από την υπόθεση ότι η μεικτή αξία του έργου V_1 ακολουθεί την τυπική διαδικασία διάχυσης Wiener όπως δίνεται από :

$$\frac{dV}{V} = (\alpha - \delta)dt + \sigma dz$$

και η από κοινού αθροιστική πιθανότητα ότι ένα ζευγάρι πραγματικών δικαιωμάτων στην λήξη τους θα είναι πάνω από το χρηματικό τους ισοδύναμο (δηλαδή θα εξασκηθούν) ακολουθεί μια δυκανονική τυπική αθροιστική κατανομή $B(a, b, \rho)$ με το $\rho = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}$ όπου τ_1 και τ_2 είναι οι χρόνοι μέχρι την λήξη των δικαιωμάτων. Για απόσταση μεταξύ των

δικαιωμάτων πολύ μεγάλη δηλαδή $\frac{\tau_1}{\tau_2} \rightarrow \infty$ τότε $\rho=0$ και εκφυλίζεται η

δικανονοκή σε γινόμενο δύο μομομεταβλητών κανονικών κατανομών, επίσης η ειδική περίπτωση όπου αντίθετα δικαιώματα λήγουν τη ίδια χρονική στιγμή έχει $\rho=-1$ και $B(d^*, d, -1)=0$, όπου το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης εξαλείφεται και ισχύει το άθροισμα των επιμέρους τιμών.

4.5.7 Αποτίμηση σύνθετων πραγματικών δικαιωμάτων με προσομοίωση Monte Carlo.

Στήν ενότητα αυτή παρουσιάζεται η μέθοδος αποτίμησης σύνθετων πραγματικών δικαιωμάτων του Gamba A. (2002) με την χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo κάνοντας χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογιστεί ο βέλτιστος χρόνος εξάσκησης ενός αμερικάνικου δικαιώματος όπως αυτή παρουσιάστηκε από τον Longstaff & Schwartz.

Η μέθοδος στηρίζεται στην προσέγγιση των Trigeorgi & Gamba όπου ένα σύνολο από σύνθετα πραγματικά δικαιώματα απεικονίζονται σε ένα σύνολο από απλά δικαιώματα και διατηρούν την ιεραρχική μορφή τους. Τα πραγματικά δικαιώματα είναι συνήθως Αμερικάνικου τύπου πράγμα που σημαίνει ότι συνήθως δεν έχουμε αναλυτικές λύσεις για την αποτίμηση τους επομένως πρέπει να αποτιμηθούν με αριθμητικές μεθόδους.

Τα κύρια σημεία της αποτίμησης σύνθετων πραγματικών δικαιωμάτων όπως εφαρμόζεται από τους Trigeorgi & Gamba παρουσιάζεται παρακάτω. Τα μεικτά πραγματικά δικαιώματα αλληλεπιδρούν με διάφορες μορφές, όπως μπορεί να είναι σύνθετα δικαιώματα ή να είναι ανεξάρτητα δικαιώματα

Η περίπτωση που είναι ανεξάρτητα δικαιώματα τότε η αξία του χαρτοφυλακίου των ανεξάρτητων δικαιωμάτων είναι το άθροισμα των επί μέρους απλών δικαιωμάτων.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε H δικαιώματα με χρόνους μέχρι την λήξη T_h και συναρτήσεις πληρωμών $\Pi_h(t, X_t)$ και αξίες $F_h(t, X_t), h=1, \dots, H$ για $t < T_h$

Η πιθανότητα όλα τα H δικαιώματα να εξασκηθούν μαζί είναι ένα δικαίωμα με τιμή

$$G(t, X_t) = \sum_{h=1}^H F_h(t, X_t), \quad (1)$$

Αν υπάρχει κάποια αβεβαιότητα με H πιθανά αποτελέσματα $p_h > 0$ και $\sum_h p_h = 1$ και η αβεβαιότητα αυτή χάνεται σε χρόνο $T' < T_h$ τότε

$$G(t, X_t) = e^{-r(T'-t)} \sum_{h=1}^H p_h E' [F_h(T', X_{T'})],$$

Η δεύτερη περίπτωση που εξετάζουμε είναι να έχουμε σύνθετα δικαιώματα όπου ένα δικαίωμα όταν εξασκηθεί να δώσει περισσότερες ευκαιρίες. Αυτή η κατάσταση συμβαίνει σε πολλές κλιμακωτές επενδύσεις, οπότε η τιμή του προηγούμενου δικαιώματος εξαρτάται από την τιμή του επόμενου δικαιώματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε H δικαιώματα και η τιμή του h εκτός από την δική του πληρωμή δίνει το δικαίωμα να εξασκηθούν και τα υπόλοιπα $h+1$ δικαιώματα $h=1, \dots, H-1$. Η πληρωμή στην εξάσκηση του h δικαιώματος συμβολίζεται με $\Pi_h(t, X_t)$.

Τότε η τιμή του h δικαιώματος σε ενδιάμεσο χρόνο είναι :

$$F_h(t, X_t) = \max_{\tau \in T(t, T_h)} x \{ e^{-r(T-\tau)} E_\tau^* [\Pi_h(\tau, X_\tau) + F_{h+1}(\tau, X_\tau)] \} \quad (2)$$

με $F_h(t, X_t) = 0$ αν $t > T_h$ αφού η τιμή του δικαιώματος δίνεται από το τέλος προς την αρχή.

Ο αλγόριθμός των ελάχιστων τετραγώνων Monte Carlo βασίζεται σε προσομοίωση που εκπληρώνει δυναμικό προγραμματισμό από το τέλος προς την αρχή.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα με συνάρτηση πληρωμής $\Pi(T, X_T)$ και $F(T, X_t)$ η τιμή του δικαιώματος οποιαδήποτε στιγμή $t < T$, η συνάρτηση πληρωμής Π έχει ένα μέτρο πιθανότητας που μπορεί να καθοριστεί. Αν το δικαίωμα είναι αμερικάνικου τύπου τότε μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή πριν την λήξη του και η αξία του δίνεται από

$$F(t, X_t) = \max_{\tau \in T(t, T)} \{e^{-r(\tau-t)} E_t^*[\Pi(\tau, X_\tau)], \Pi(t, X_t)\} \quad (3)$$

Έχουμε θεωρήσει ότι η X_t ακολουθεί την διαδικασία

$$dX(t) = a(t, X)dt + b(t, X)dB^*(t)$$

όπου το a είναι η προσαρμοσμένη στον κίνδυνο τάση και η $B^*(t)$ είναι η κίνηση Brown.

Αν θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα αμερικάνικου τύπου δικαίωμα εξίσωση (3) τότε χωρίζουμε σε N ακέραια μέρη το διάστημα $[0, T]$ με $\Delta t = T/N$ και προσομοιώνουμε την στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ δημιουργώντας K μονοπάτια. Θα ονομάσουμε $X_i(\omega)$ την αξία της διαδικασίας τον χρόνο t στο ω μονοπάτι και $\tau(\omega)$ τον χρόνο που εξασκείται το δικαίωμα στο μονοπάτι ω . Το κριτήριο που χρησιμοποιούμε για να εξασκήσουμε το δικαίωμα είναι

$$\Phi(t_n, X_{t_n}(\omega)) = \{e^{-r(t_{n+1}-t_n)} E_{t_n}^*[F(t_{n+1}, X_{t_{n+1}}) | F_{t_n}]\} \leq \Pi(t_n, X_{t_n}(\omega)) \quad (4) \text{ τότε } \tau(\omega) = t_n$$

Ουσιαστικά συγκρίνουμε την αξία του δικαιώματος σε ενδιάμεσο χρόνο με την συνάρτηση πληρωμής του δικαιώματος.

Τον χρόνο $t_n=0$ όπου οι βέλτιστοι χρόνοι έχουν υπολογιστεί για όλα τα μονοπάτια χρησιμοποιούμε τον μέσο όρο για να εκτιμήσουμε την αξία του αμερικάνικου δικαιώματος

$$F(0, x) = \frac{1}{K} \sum_{\omega=1}^K e^{-r\tau(\omega)} \Pi(\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)) \quad (5)$$

Το κύριο πρόβλημα είναι να βρεθεί η συνάρτηση $\Phi(t_n, X_t)$ για να γίνει η σύγκριση

Στην περίπτωση που θέλουμε να εκτιμήσουμε ένα σύνθετο δικαίωμα τότε θεωρούμε ότι ο βέλτιστος χρόνος εξάσκησης για τα $h+1$ επόμενα δικαιώματα αφού υπολογίζουμε από το τέλος προς την αρχή έχει εκτιμηθεί. Για να υπολογίσουμε για το h δικαίωμα χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2) για να βρούμε την ενδιάμεση τιμή του

Ο κανόνας για να βρούμε τον βέλτιστο χρόνο είναι ο εξής
 "αν ισχύει

$$\Phi(t_n, X_t(\omega) \leq \Pi_h(t_n, X_{t_n}(\omega)) + F_{h+1}(t_n, X_{t_n}(\omega))$$

τότε $\tau_h(\omega) = t_{en}$

Ο παραπάνω κανόνας εφαρμόζεται αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον βέλτιστο χρόνο για ένα σύνθετο δικαίωμα.

Η εκτίμηση που χρησιμοποιούν για το την ενδιάμεση αξία του δικαιώματος $\Phi(t_{en}, T_X)$ είναι

$$\Phi(t_n, X_t(\omega) = E_{t_n}^* \left\{ \sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i - t_n)} \sum_{l=h+1}^H \Pi_l(t_n, t_i, \tau) \right\}$$

Βασιζόμενοι στην μέθοδο των Long staff and Schwartz μπορούμε να εκτιμήσουμε την Φ με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων των προεξοφλημένων χρηματοροών του δικαιώματος.

4.5.8 Η Αποτίμηση Εταιρειών με την Μέθοδο των Πραγματικών Δικαιωμάτων

Παρακάτω παρουσιάζεται ένας τρόπος αποτίμησης μιας εταιρείας όπως αποδίδεται από τον Damodaran(2002). Με τον παραδοσιακό τρόπο προεξόφλησης των ταμειακών ροών μια εταιρεία αποτιμάται εκτιμώντας τις ταμειακές ροές της για μια μακριά χρονική περίοδο

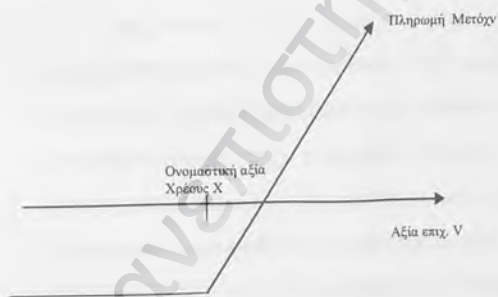
αφού τις προεξοφλούσαμε με ένα επιτόκιο που αντανakλούσε την επικινδυνότητα τους. Τελικά αν αναιρούσαμε από την αξία της εταιρείας όπως την υπολογίσαμε την αξία του χρέους της προέκυπτε η αξία του μετοχικού κεφαλαίου της.

Αν θεωρήσουμε ότι η αξία μια επιχείρησης είναι ότι απομένει στους μετόχους αφού ικανοποιηθούν οι υπόλοιποι πιστωτές της εταιρείας. Το ίδιο ισχύει και όταν η εταιρεία ρευστοποιηθεί, αφού η αρχή της περιορισμένης ευθύνης των εταιρειών προστατεύει τους μετόχους σε δημόσιες εταιρείες όταν τα χρέη της επιχείρησης ξεπερνούν τα περιουσιακά στοιχεία της από τυχόν απαιτήσεις, επομένως δεν διακινδυνεύουν περισσότερο από το κεφάλαιο που έχουν επενδύσει.

Άρα στην περίπτωση της ρευστοποίησης το διάγραμμα πληρωμών των μετόχων όπως θα δούμε παρακάτω μοιάζει με αυτό ενός δικαιώματος αγοράς.

Πληρωμή στην ρευστοποίηση στους μετόχους =
$$\begin{cases} V-X & \text{if } V > X \\ 0 & \text{if } V < X \end{cases}$$

όπου V αξία ρευστοποίησης της επιχείρησης και X ονομαστική αξία του χρέους και άλλων απαιτήσεων



Εικόνα 11 Πληρωμή Μετόχων στην ρευστοποίηση της επιχείρησης

Άρα παρατηρώντας το παραπάνω διάγραμμα μια μετοχή μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα δικαίωμα αγοράς σε μια επιχείρηση που για να το εξασκήσεις θα πρέπει η επιχείρηση να ρευστοποιηθεί και να

αποπληρωθεί το χρέος της επιχείρησης που ουσιαστικά είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

Ένα πρώτο συμπέρασμα που μπορεί να υπάρξει όταν αντιμετωπίζουμε τις μετοχές σαν δικαιώματα είναι ότι μπορεί να έχουν αξία ακόμη αν και η αξία της μετοχής είναι πολύ μικρότερη από την ονομαστική αξία του χρέους της εταιρείας. Αφού αν και μπορεί να είναι ένα δικαίωμα έξω από το χρηματικό του ισοδύναμο (out of the money) πάντα υπάρχει η πιθανότητα η τιμή της υποκείμενης αξίας να γίνει μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης.

Για να αποκτήσουμε τα δεδομένα για να αποτιμήσουμε την μετοχή σαν δικαίωμα αγοράς έγιναν οι εξής υποθέσεις:

- Ότι υπάρχουν δύο που μπορούν να έχουν απαιτήσεις οι μέτοχοι και οι πιστωτές.
- Ότι υπάρχει δάνειο μιας διάρκειας
- Δεν δεσμεύουν το δάνειο άλλοι περιορισμοί και είναι zero coupon
- Η αξία και η διακύμανση της εταιρείας μπορούν να εκτιμηθούν

Η τρέχουσα αξία της εταιρείας μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο της προεξόφλησης στις αναμενόμενες ταμειακές ροές λαμβάνοντας υπόψη μας ότι μιλάμε για συνθήκες ρευστοποίησης της εταιρείας άρα οι προβλέψεις μας πρέπει να μειούμενες και το πιθανότερο είναι να θεωρούμε ότι η εταιρεία βρίσκεται σε περίοδο σταθερής ανάπτυξης άρα οι επανεπενδύσεις γίνονται γ για να διατηρήσουν τα υπάρχοντα περιουσιακά στοιχεία. Την διακύμανση της εταιρείας μπορούμε να την παρατηρήσουμε από την διακύμανση της μετοχής της και του χρέους της

$$\sigma_{firm}^2 = w_e^2 * \sigma_e^2 + w_d^2 * \sigma_d^2 + 2w_e * w_d * \rho_{ed} \sigma_e * \sigma_d$$

όπου ρ_{ed} είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του χρέους και της απόδοσης της μετοχής .

Η διάρκεια του χρέους πρέπει να υπολογίζεται από την σταθμισμένη διάρκεια των διαφόρων χρεών που μπορεί να έχει η εταιρεία και αυτή θα είναι και η διάρκεια μέχρι την λήξη.

Τελικά χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παραμέτρους μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία της μετοχής μια εταιρείας.

Σαν παράδειγμα παρουσιάζουμε την αποτίμηση της εταιρείας Eurotunnel με τα δεδομένα όπως τα εκτιμάει ο Damodaran(2002)

Συγκεκριμένα η εταιρεία φαινόταν ότι ήταν προβληματική αφού το είχε εσωτερική αξία -117 εκ και EBIT -56εκ.

Οι δανειακές τις υποχρεώσεις ήταν περισσότερες από 8.000εκ συμπεριλαμβανομένων και των κουπονιών που είχε να αποπληρώσει.

Η σταθμισμένη διάρκεια (duration) του χρέους της ήταν 10.93 έτη .

Οι υποθέσεις που γίνονται για τα έσοδα της είναι ότι τα έσοδα θα αυξάνουν με 5% σταθερά κατά έτος, το κόστος πωλήσεων από 85% θα μειωθεί σε 65% και θα σταθεροποιηθεί σε αυτό το επίπεδο τα επόμενα 5 έτη, τα έξοδα κεφαλαίου και αποσβέσεων θα είναι αυξάνουν σταθερά με 5%, δεν θα υπάρξουν απαιτήσεις για κεφάλαιο κίνησης και ο δείκτης δανειακών κεφαλαίων θα πέσει από 95.35% σε 70% . Το b της μετοχής εκτιμάται σε 1.10 και θα μειωθεί σε 0.8 τα επόμενα. Η παρούσα αξία των ελεύθερων ταμειακών ροών της εταιρείας είναι 2.312 εκ.

Η μεταβλητότητα εκτιμήθηκε για την μετοχή 41% και το χρέος 17% με συντελεστή συσχέτισης 0.5 και το κλάσμα της αξίας του χρέους προς τα κεφάλαια της εταιρείας 85%. Τελικά η διακύμανση της εταιρείας είναι 0.0335 και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 6%.

Συνοπτικά οι παράμετροι που εκτιμηθήκαν για να εφαρμόσουμε το υπόδειγμα των **B&S** είναι:

Υποκείμενη αξία S	2312
Τιμή εξάσκησης X	8865(ονομαστική αξία χρέους)
Μεταβλητότητα	0.0335
Χρόνος μέχρι την λήξη	10.93(duration χρέους)

Επιτόκιο χωρίς Κίνδυνο	6%
------------------------	----

Πίνακας 4 Παράμετροι για υπολογισμό αξίας μετοχής Eurotunnel

$$d_1 = -0.8337 \quad N(d_1) = 0.2023 \quad d_2 = -1.4392 \quad N(d_2) = 0.0751$$

αξία του δικαιώματος είναι :

$$2.312(0.2023) - 8865 \exp((-0.06 * 10.93)) * (0.0751) = 122 \text{ εκ. όταν}$$

διαπραγματευόταν στα 150 εκ.

Στο προσάρτημα 4 δίνεται εφαρμογή του παραδείγματος σε φύλλο εργασίας Excel όπως το έχει παρουσιάσει ο Damodaran

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

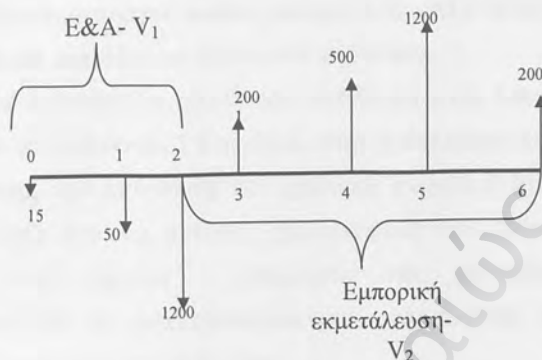
Κεφάλαιο 5

5.1 Παράδειγμα αποτίμησης προγράμματος Έρευνας και Ανάπτυξης

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι από τους Smit & Trigeorgi 2003 . Πολύ σημαντικές υποθέσεις που θα γίνουν είναι ότι η εταιρεία έχει αποκλειστικά δικαιώματα του προγράμματος άρα δεν βρίσκεται σε περιβάλλον ανταγωνισμού

Ζητούμενο είναι να αποτιμήσουμε ένα πρόγραμμα έρευνας και ανάπτυξης ενός νέου προϊόντος. Το πρόγραμμα περιέχει διάφορα στάδια που εξαρτώνται μεταξύ τους οι κύριες φάσεις του επενδυτικού σχεδίου είναι αυτή της έρευνας και της εμπορικής χρήσης του σχεδίου.

Παρακάτω φαίνονται οι θετικές και αρνητικές χρηματοροές του σχεδίου. Η φάση της έρευνας και ανάπτυξης χρειάζεται άμεσα ένα έξοδο 15 εκ και τον επόμενο χρόνο ακόμη 50 εκ.. Στην φάση της εμπορικής εκμετάλλευσης χρειάζεται μια επένδυση I_3 της τάξεως των 1200εκ και οι εισροές εκτιμώνται ότι θα είναι $CF_3=200$ εκ, $CF_4=500$ εκ $CF_5=700$ εκ, $CF_6=200$ εκ.



Εικόνα 12 Χρηματοροές προγράμματος Ερευνάς και Ανάπτυξης

Αν υποθέσουμε ότι το κόστος κεφαλαίου είναι $K=15\%$ τότε η παρούσα αξία του αθροίσματος των εισροών από την εμπορική χρήση την στιγμή 2 θα ήταν:

$$ΠΑ = \sum_{i=1}^4 \frac{CF_i}{(1+K)^i} \text{ δηλαδή } 1127 \text{ εκ και αν αναιρούσαμε το κόστος}$$

επένδυσης I_3 τότε

$KΠΑ = 1127 - 1200 = -73$ εκ. Βασιζόμενοι σε αυτή την τιμή δεν θα έπρεπε να προχωρήσουμε στην επένδυσαν θέλαμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των χρηματοροών την στιγμή $t=0$ με το ίδιο κόστος κεφαλαίου δηλαδή 15% τότε θα γινόταν η παρούσα αξία του 852 εκ και το έξοδο επένδυσης προεξοφλημένο με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 4% θα ισούται με 1109 εκ και 63 εκ για τα έξοδα έρευνας. Τελικά η καθαρή αξία του έργου την χρονική στιγμή 0 γίνεται

$$KΠΑ = 852 - 1109 - 63 = -320 \text{ εκ}$$

Το πρόγραμμα μπορεί να εκτελεστεί σε δύο στάδια όπου το ένα στάδιο της έρευνας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα δικαίωμα αγοράς με την έννοια ότι δεν δημιουργεί καμία υποχρέωση αλλά δίνει την ευκαρία στην εταιρεία αν επιλέξει να κάνει την επένδυση.

Αν η εταιρεία επιλέξει να κάνει την επένδυση στην φάση 2 είναι σαν ένα δικαίωμα με διάρκεια 2 έτη (δηλ. όσο η διάρκεια της έρευνας) με τιμή εξάσκησης την επένδυση την χρονική στιγμή 2 δηλ. 1200εκ και υποκείμενη αξία την τις θετικές χρηματοροές του έργου 852 εκ. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε εκτιμήσει την μεταβλητότητα των χρηματοροών και οι πολλαπλασιαστικοί παράγοντες u, d για τις χρηματοροές είναι 1.5 και 0.67 τότε

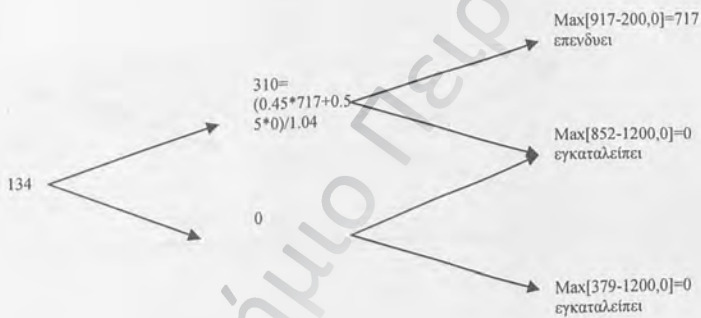


Εικόνα 13 Πιθανές τιμές για χρηματοροές

Παρακάτω υπολογίζουμε τις τιμές του δικαιώματος για κάθε κόμβο από την χρονική στιγμή 2 προς την χρονική στιγμή 0 χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες που δίνονται θεωρώντας ότι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι προς τον κίνδυνο δηλ $p = \frac{(1+r)-d}{u-d}$ δηλαδή $p=0.45$. Τελικά στον χρόνο 0 η αξία του δικαιώματος ανάπτυξης είναι 134εκ

Η αξία του δικαιώματος να προχωρήσουμε στην έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ένα σύνθετο δικαίωμα(δικαίωμα σε δικαίωμα) που σαν τιμή

εξάσκησης έχει το ποσό που χρειάζεται να επενδύσει δηλαδή 63 εκ , και υποκείμενη αξία την αξία του δικαιώματος να προχωρήσει η εταιρεία σε εμπορική χρήση .Το χειρότερο αποτέλεσμα που μπορεί να υπάρξει είναι μα μην γίνει η έρευνα δηλαδή κόστος 0 τελικά η τιμή του δικαιώματος είναι $\max(0,134-63)=71\text{εκ}$
 Τελικά η διοίκηση αν και η ΚΠΑ του έργου υπολογιζόταν αρνητική δικαιολογείται να αγοράσει το δικαίωμα για μελλοντική ανάπτυξη με το πρόγραμμα έρευνας



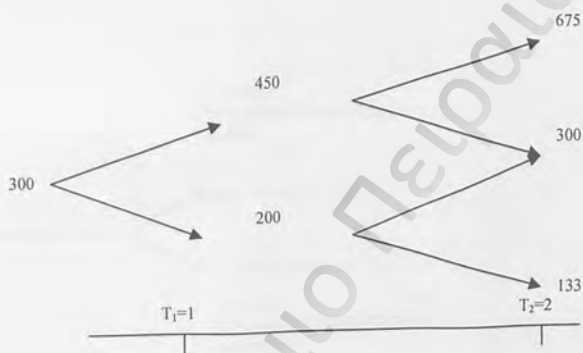
Εικόνα 14 Καθαρή τιμή δικαιώματος για επένδυση στο πρόγραμμα

5.2 Παράδειγμα αποτίμησης άδειας εξόρυξης χρυσού

Το παράδειγμα είναι από τον Smit & Trigeorgi 2003 και στηρίζεται στην εργασία των Brennan & Schwartz (1985).

Υποθέτουμε ότι μια εταιρεία ζητείται να αποτιμήσει την άδεια εκχώρησης ενός ορυχείου αφού η επένδυση να αναπτύξεις ένα ορυχείο είναι μη αντιστρεπτή και μετά την ανάπτυξη του η διοίκηση δεν μπορεί να αποφύγει το έξοδο. Η αρχική επένδυση που απαιτείται είναι $I_0 = 4.5$ και δεν υπάρχουν μεταβλητά έξοδα. Η παραγωγή υπολογίζεται στον πρώτο χρόνο $\Pi_1 = 4000$ ουγ. και $\Pi_2 = 10.000$ ουγ.

Η αβεβαιότητα που υπάρχει για τα έσοδα είναι άμεσα συσχετισμένη με την τιμή του χρυσού που βρίσκεται στην τιμή $S_0 = 300\$/\text{ουγκ}$. Χρησιμοποιώντας την ιστορική μεταβλητότητα του χρυσού έχουμε υποθέσει ότι στο τέλος του χρόνου θα έχει δύο τιμές που θα αλλάζουν πολλαπλασιαστικά με $u = e^{\sigma} = 1.5$ και $u \cdot d = 1$ δηλαδή $d = 0.67$ τις δύο τιμές τις παίρνει με την ίδια πιθανότητα. Παρακάτω φαίνονται οι πιθανές τιμές μετά από 2 έτη.



Αν θέλαμε να υπολογίσουμε την καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης θα χρησιμοποιούσαμε την τιμή που θα είχε το συμβόλαιο των 2 χρόνων F_2 και 1 έτους F_1 για να υπολογίσουμε τις χρηματοροές σε αυτές τις περιόδους (δικαιολογείται αυτή η χρήση αφού αν θα ήθελε η εταιρεία να εξαλείψει τον κίνδυνο της μεταβολής της τιμής θα έπρεπε να πουλήσει συμβόλαια χρυσού)

Επομένως

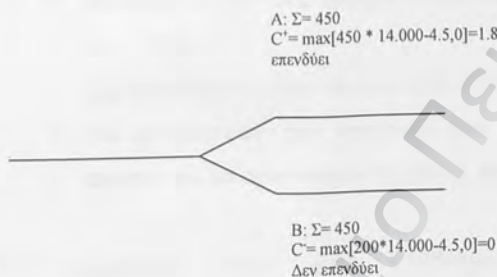
$$\frac{Q_1 * F_1}{1+r} + \frac{Q_2 * F_2}{(1+r)^2} - I = \frac{Q_1 * S_0(1+r)}{1+r} + \frac{Q_2 * S_0(1+r)^2}{(1+r)^2} - I$$

ΚΠΑ=

$$= (Q_1 + Q_2)S_0 - I = 14.000 * 300 - 4.5 = -0.3$$

Άρα αν ήταν να επενδύσει άμεσα θα είχε αρνητική καθαρά παρούσα αξία η επένδυση. Αν ήθελε να αγοράσει το δικαίωμα να αναβάλει για ένα έτος την επένδυση για να δει πως θα εξελιχθεί η τιμή του χρυσού το ζητούμενο είναι ποια θα ήταν η εύλογη αξία του δικαιώματος.

Ουσιαστικά αν η τιμή του χρυσού μειωθεί η εταιρεία θα αφήσει το δικαίωμα να λήξει σε αντίθετη περίπτωση θα προχωρήσει την επένδυση. Παρακάτω φαίνεται πώς αλλάζουν οι επιλογές με το δικαίωμα να αναβάλει τη επένδυση



Αν υπολογίσουμε τη ουδέτερη στον κίνδυνο πιθανότητα (risk neutral) δηλαδή την πιθανότητα που θεωρούμε ότι όλες οι επενδύσεις αποδίδουν το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, $p \cdot S^+ + (1-p)S^- = (1+r)S$ τότε

$$p = \frac{(1+0.04)300 - 200}{450 - 200} = 0,45$$

$$\text{Άρα η άδεια αξίζει: } V_0 = \frac{p \cdot C^+ + (1-p) \cdot C^-}{1+r} = \frac{0,45 \cdot 1,8 + 0}{1,04} = 0,78 \text{ εκ}$$

5.3 Παράδειγμα αποτίμησης πραγματικών δικαιωμάτων σε ναυτιλιακές επενδύσεις

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την χρήση της ανάλυσης πραγματικών δικαιωμάτων για επενδύσεις που μπορούν να κάνουν εφοπλιστικές εταιρείες Hopp & Tsolakis (2004).

Θεωρούμε ότι μια εφοπλιστική εταιρεία κατέχει δύο Τανκερ αξίας 25 εκ τα οποία τα έχει ναυλώσει σε κάποια πετρελαϊκή εταιρεία. Τα επόμενα δύο χρόνια πρέπει να αποφασίσουν τι θα κάνουν με την εταιρεία. Οι επιλογές που έχουν είναι:

- Να αγοράσουν ένα ακόμη πλοίο στο τέλος του δεύτερου χρόνου για 30 εκ.
- Να πουλήσουν ένα τάνκερ για 24 εκ
- Να πουλήσουν την εταιρεία για 40 εκ στην πετρελαϊκή αλλά πρέπει να αποφασίσουν 6 μήνες πριν λήξει το συμβόλαιο τους.

Το παραπάνω είναι ένα πρόβλημα πολλαπλών πραγματικών δικαιωμάτων, όπου αν υπολογιστεί το καθένα ξεχωριστά και προστεθεί θα δώσει λάθος αποτελέσματα αν δεν ληφθούν υπόψη οι αλληλεπιδράσεις των δικαιωμάτων. Τα δικαιώματα που πρέπει να αξιολογηθούν είναι αυτά της επέκτασης, περιορισμού και εγκατάλειψης του επενδυτικού σχεδίου και να καταλήξει στην καταλληλότερη επιλογή

Αν θέλουμε να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα της επέκτασης και περιορισμού λαμβάνοντας υπόψη τις αλληλοεπιδράσεις τους χρησιμοποιούν την έννοια του δικαιώματος επιλογής (chooser option). Το δικαίωμα επιλογής δίνει στο κάτοχο το δικαίωμα να διαλέξει την χρονική στιγμή T_0 ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης α και χρόνο μέχρι την λήξη T_1 ή ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης β και χρόνο μέχρι την λήξη T_2 . Το δικαίωμα αυτό έχει τιμή

$$\text{Max}[C(S_1, X_1, T_1-t), P(S_1, X_2, T_2-t); t].$$

Η αποτίμηση του παραπάνω δικαιώματος έχει κλειστή λύση που δίνεται από τον τύπο:

$$Sd^{-T_1}N_2(x, y_1, \rho_1) - X_1r^{-T_1}N_2(x - \sigma\sqrt{T_1}, y_1 - \sigma\sqrt{T_1}, \rho_1) - Sd^{-T_2}N_2(-x, -y_2, \rho_2) - X_2r^{-T_2}N_2(-x + \sigma\sqrt{T_2}, -y_2 - \sigma\sqrt{T_2}, \rho_2)$$

Ο πίνακας παρακάτω δείχνει τα αποτελέσματα με τη μεταβλητότητα δύο χρόνων να είναι 44% η οποία έχει υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα 20 ετών για τις τιμές των τάνκερ .

Δεδομένα	
Τρέχουσα Τιμή	25.00
Τιμή εξάσκησης Δ. Αγοράς	30.00
Χρόνος μέχρι την λήξη	2
Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο	2%
Μέρισμα	10%
Μεταβλητότητα	44%
Χρόνος επιλογής 1.5	1.5
Χρόνος λήξης δικ. Πώλησης	2
Τιμή εξάσκησης Δ. Πωλ	24.00

Αποτελέσματα	
Δικ. Εγκατάλειψης	8.86
Δικ Επέκτασης- 1	2.69
Δικ. Περιορισμού-2	6.76
Άθροισμα 1+2	9.45

Πίνακας 5 Αποτελέσματα δικά. Επιλογής διαφορετικών στρατηγικών

Οι Horp & Tsolakis έδειξαν ότι αν πρόσθεταν τα επιμέρους δικαιώματα θα υπερεκτιμούσαν την αξία του επενδυτικού σχεδίου επομένως έπρεπε να πάρουν υπόψη τους τις αλληλοεπιδράσεις.

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε από τον Trigeorgi (1993) χρησιμοποιεί τεχνικές αποτίμησης των δικαιωμάτων κάνοντας χρήση του διωνυμικού μοντέλου όπου βασίζονται σε αποτίμηση από το τέλος προς την αρχή και σε κάθε φάση οι επιλογές της διοίκησης αποτιμώνται.

Μια άλλη περίπτωση της χρήσης πραγματικών δικαιωμάτων στις εφοπλιστικές εταιρείες είναι η αλλαγή στον τύπο των πλοίων που επενδύει η εταιρεία, π.χ από πλοία μεταφοράς ξηρού φορτίου σε τάνκερ κ.α Horp & Tsolakis(2004). Ουσιαστικά η εταιρεία έχει το δικαίωμα να ανταλλάξει το πλοίο Α για το πλοίο Β. Αν είμαστε βέβαιοι για το ύψος των ναύλων αυτό είναι ένα απλό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης την τιμή του πλοίου και υποκείμενη αξία τις χρηματοροές του.στην πράξη υπάρχει αβεβαιότητα για την τιμή εξάσκησης και εξαρτάται από την συσχέτιση μεταξύ των τιμών των δύο πλοίων. Το δικαίωμα αλλαγής ουσιαστικά είναι αδιάφορο αν οι τιμές είναι θετικά συσχετισμένες , η μεγαλύτερη αξία υπάρχει όταν είναι αρνητικά συσχετισμένες.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή για πλοία ξηρού φορτίου είναι 15 εκ και για τα τάνκερ είναι 33 εκ με τις μεταβλητότητες να έχουν υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα 52% και 57 % αντίστοιχα και την συσχέτιση τους 0.867. Πρέπει η εταιρεία να αποφασισθεί αν θα αφήσει τα πλοία ξηρού φορτίου για το τάνκερ σε ένα χρόνο. Κάνοντας χρήση της μεθόδου που

περιγράφεται στο Κεφ 4.3 δηλαδή αν θέλουμε να ανταλλάξουμε ένα στοιχείο με αβεβαιότητα με κάποιο άλλο μπορούμε να υπολογίσουμε με το διωνυμικό υπόδειγμα την $C = \max[0, A/B - 1]$ ή συνάρτηση πληρωμής $P = \max[0, 1 - A/B]$.

Οι Horp & Tsoiakis υπολόγισαν ότι η αξία του δικαιώματος αγοράς είναι 0 δηλαδή το δικαίωμα να ανταλλάξεις ένα πλοίο τάνκερ με ένα πλοίο ξηρού φορτίου ενώ η τιμή του δικαιώματος πώλησης δηλαδή να ανταλλάξεις την αξία ενός ξηρού φορτίου με ένα τάνκερ είναι 20.089 εκ . Σε αυτή την τιμή αν υπολογιστεί και η τιμή πώλησης του πλοίου ξηρού φορτίου 15 εκ τότε το επενδυτικό σχέδιο αποτιμάται στα 35.1 εκ δηλαδή ξεπερνάει την αξία του τάνκερ για 2.1 εκ άρα πρέπει να προβούν στην αλλαγή του πλοίου ξηρού φορτίου.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε περιληπτικά μερικά από τα πραγματικά δικαιώματα που συναντάμε στην βιβλιογραφία και βασικές αρχές αποτίμησής τους. Τα δικαιώματα που παρουσιάσαμε για πρακτικούς λόγους αποτιμήθηκαν κάνοντας χρήση του διωνυμικού υποδείγματος

Παράλληλα σαν εφαρμογή των δικαιωμάτων παρουσιάσαμε μερικά παραδείγματα που συναντάμε στην βιβλιογραφία και προσπαθήσαμε να τα συγκρίνουμε με την παραδοσιακή μέθοδο προεξόφλησης των ταμειακών ροών και να δείξουμε πως υστερεί της ανάλυσης με πραγματικά δικαιώματα.

Πάρα πολύ ενδιαφέρον έχει η αποτίμηση των δικαιωμάτων αυτών σε συνθήκες που συναντώνται στην πραγματικότητα όπου ισχύουν συνθήκες ανταγωνισμού και ακόμη και η απόφαση για επένδυση αλλάζει την ισορροπία του συστήματος, οι εργασίες που έχουν δημοσιοποιηθεί είναι αρκετές και αναμειγνύουν τη θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων με αυτή της Θεωρίας Παιχνιδιών.

Σίγουρα η δυναμική των πραγματικών δικαιωμάτων στην χρηματοοικονομική ανάλυση δεν έχει εξαντληθεί και το πεδίο έρευνας των εφαρμογών τους στην Ελληνική πραγματικότητα είναι πάρα πολύ ανοικτό

Προσάρτημα 1

Υπολογισμός ΚΠΑ με μέθοδο Monte Carlo

Δεδομένα για υπολογισμό ΚΠΑ						
					Key Output: NPV =	\$8,661
Κόστος Κτιρίων	\$12,000					
Κόστος Μηχανημάτων	\$8,000			Market value of building in 2006		\$7,500
ΚεφΚιν /Πωλήσεις	10%			Market value of equip. in 2006		\$2,000
Πωλήσεις 1ου χρόνου	20,813			Tax rate		40%
Ρυθμός ανόδου πωλήσεων	-22.2%			WACC		12%
Τιμή πωλ. ανά μονάδα	\$3.14			Inflation: growth in sales price		2.0%
Μεταβλητό κόστος ανά μονάδα	\$2.11			Inflation: growth in VC per unit		2.0%
Μη μεταβλητά έξοδα	\$8,000			Inflation: growth in fixed costs		1.0%
Ταμειακές ροές		0 2002	1 2003	2 2004	3 2005	4 2006
<i>Investment Outlays: Long- Term Assets</i>						
Κτίρια	(\$12,000)					
Μηχανήματα	(8,000)					
<i>Λειτουργικές χρηματοροές</i>						
Πωληθέντα προϊόντα			20,813	16,193	12,599	9,802
Τιμή πώλησης ανα μονάδα			\$3.14	\$3.21	\$3.27	\$3.34
Εσοδα			\$65,444	\$51,935	\$41,215	\$32,707
Μεταβλητό κόστος			43,939	34,869	27,671	21,959
Σταθερά έξοδα			8,000	8,080	8,161	8,242
Αποσβέσεις			156	312	312	312
αποσβέσεις μηχανημάτων			1,600	2,560	1,520	960
Λειτουργικά κέρδη προ φόρων			11,749	6,114	3,551	1,233
φόροι 40%			4,700	2,446	1,420	493
καθαρά κέρδη			7,050	3,669	2,130	740
αποσβέσεις			1,756	2,872	1,832	1,272
Λειτουργικά χρηματοροή			\$8,806	\$6,541	\$3,962	\$2,012
Καθαρό λειτουργικό κεφάλαιο κίνησης		\$6,544	\$5,194	\$4,121	\$3,271	\$0
χρηματοροή απο κεφ. Κίνησης			\$1,351	\$1,072	\$851	\$3,271

Τιμή εκποίησης ακινήτων						\$8,863
Τιμή εκποίησης μηχανημάτων						1,744
Αθρίσμα						\$10,607
Καθαρή ταμειακή ροή	(\$20,000)	\$10,157	\$7,613	\$4,813	\$15,890	
ΚΠΑ (at 12%)		\$8,661				
IRR		30.20%				
MIRR		22.54%				

Πίνακας 6 Φύλλο εργασίας για υπολογισμό ΚΠΑ

Monte Carlo Simulation		
Τιμή πώλησης: Normal distribution	Mean=	3
	Standard deviation=	0.35
Μεταβλητό Κόστος: Triangular distribution	Lower bound=	1.4
	Most likely=	2.1
	Upper bound=	2.5
Πωλήσεις: Triangular distribution	Lower bound=	15000
	Most likely=	20000
	Upper bound=	30000
Ρυθμός Ανάπτυξης: Normal distribution	Mean=	0
	Standard deviation=	0.15
	Correlation with unit sales=	0.65
<p>ρυθμός ανάπτυξης των πωλήσεων είναι θετικά συσχετισμένος με την ζήτηση</p>		
Δεδομένα	Συναρτήσεις πιθανοτήτων	Resulting Random Variable
Τιμή Πωλήσεις	NORMINV	=NORMINV(RAND(),C4,C5)
Μεταβλητό Κόστος	TRIANINV	=TRIANINV(RAND(),C8,C9,C10)
Ζήτηση	RAND	=RAND()
Πυλήσεις προϊόντος	TRIANINV	=TRIANINV(C29,C12,C13,C14)
Correlated with Demand Indicator	CORAND	=CORAND(C20,C29)
Growth Rate	NORMINV	=NORMINV(C31,C18,C19)

	Πραγματικά	Τιμή απο προσομοίωση
Τιμή πώλησης =	3	=C27
Μεατβ. Κόστος =	2.1	=C28
Πωλήσεις =	20000	=C30
Ρυθμός Αναπ =	0	=C32
KPA =	5809	=G46

Πίνακας 7 Πυκνότητες Πιθανοτήτων για μεταβλητές για υπολογισμό ΚΠΑ

Αποτελέσματα Προσομοίωσης							
			Sales Price	Variable Cost	Unit Sales	Sales Growth	NPV
		Mean	\$0.43	\$2.00	21,847	\$0.00	\$14,353
		Standard deviation	\$0.25	\$0.22	3,174	\$0.15	\$23,705
		Maximum	\$0.86	\$2.48	29,816	\$0.72	\$171,316
		Minimum	\$0.00	\$1.40	15,087	-\$0.43	-\$48,626
		Correlation with Unit Sales				67.4%	
		Median					\$9,847
		Probability of NPV > 0					71.8%
		Coefficient of Variation					1.65

Πίνακας 8 Αποτελέσματα προσομοίωσης μετά από 1000 επαναλήψεις

Προσάρτημα 2

Αποτίμηση Παραγώγων με την χρήση του Διωνυμικού Μοντέλου

Κωδικός VBA:

```
Function binomial(asset, X, nstep, T, vol)
```

```
Dim i As Integer, j As Integer
```

```
Dim vvec As Variant
```

```
ReDim vvec(nstep)
```

```
ReDim S(nstep)
```

```
u = Exp(vol * Sqr(T / (252 * nstep)))
```

```
d = 1 / u
```

```
pvf = Exp((-0.05 * (30 / 252)) / nstep)
```

```
For i = 0 To nstep
```

```
vvec(i) = Application.Max((asset * (u ^ i) * (d ^ (nstep - i))) - X, 0)
```

```
Next i
```

```
For j = nstep - 1 To 0 Step -1
```

```
For i = 0 To nstep - 1
```

```
vvec(i) = (0.5083 * vvec(i + 1) + 0.4916 * vvec(i)) * pvf
```

```
Next i
```

```
Next j
```

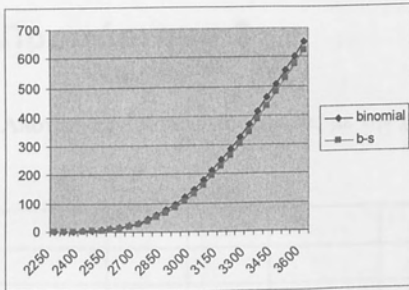
```
binomial = vvec(0)
```

```
End Function
```

Παράδειγμα Αποτίμησης Δικαιώματος Αγοράς με την Χρήση Διωνυμικού αριθμός βημάτων 30

u	$\exp(s\sqrt{0.01})$	$p=\exp(rt)-d/u-d$				
u*d=1	1			spot	binomial	b-s
u	1.030455	an vol	30%	2250	0.29794	0.26
d	0.970446	spot	100	2300	0.531713	0.53
p	0.500835	strike	80	2350	1.185289	1.00
1-p	0.499165	maturity	0.0833	2400	2.037415	1.80
		r	0.05	2450	3.721969	3.10
		nstep	112	2500	6.06085	5.11
		dt	0.01	2550	9.716702	8.12
				2600	14.77019	12.43
		bin	0.00869	2650	21.76388	18.39
				2700	30.88288	26.35
				2750	42.79829	36.68
				2800	57.05158	49.68

Πίνακας 9 αποτίμηση με χρήση Διωνυμικού σε MS Excel



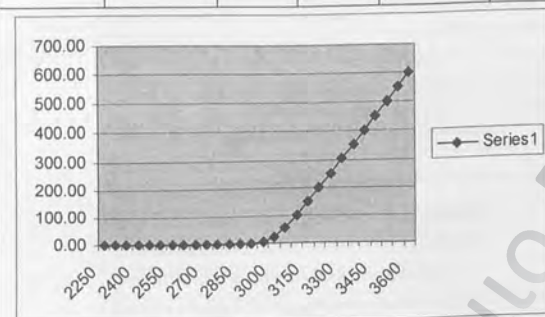
Εικόνα 15 Δικαίωμα αγοράς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Προσάρτημα 3

Αποτίμηση Δικαιώματος αγοράς με την χρήση του υποδείγματος Black & Scholes

				spot			call prices	boundary condition	
				2250	0	0	0.00	0	
				2300	0	0	0.00	0	
				2350	0	0	0.00	0	
				2400	0	0	0.00	0	
				2450	0	0	0.00	0	
				2500	0	0	0.00	0	
				2550	0	0	0.00	0	
				2600	2.154E-14	1.865E-14	0.00	0	
				2650	3.004E-11	2.647E-11	0.00	0	
				2700	1.39E-08	1.247E-08	0.00	0	
				2750	2.28E-06	2.083E-06	0.00	0	
				2800	0.0001413	0.0001313	0.00	0	
				2850	0.0035275	0.0033325	0.06	0	
				2900	0.0380354	0.0364983	0.83	0	
				2950	0.1923139	0.1871899	5.87	0	
				3000	0.5079577	0.5004189	22.91	0.595179	
				3050	0.8144986	0.809403	56.49	50.595179	
				3100	0.9603723	0.9587291	101.54	100.59518	
				3150	0.9953616	0.9950996	150.68	150.59518	
				3200	0.9997037	0.9996823	200.60	200.59518	
				3250	0.9999896	0.9999886	250.60	250.59518	
				3300	0.9999998	0.9999998	300.60	300.59518	
				3350		1	1	350.60	350.59518
				3400		1	1	400.60	400.59518
				3450		1	1	450.60	450.59518
low bound	500.59518								
X=	3000	call=	479.47768						
S=	3500	d1=	1.5984974						
r=	0.05	N(d1)=	0.9450338						
volatility	0.3	d2=	1.5795992						
time to expiry	1	N(d2)=	0.9429007						



Εικόνα 16 Δικαιωμα Αγοράς μέθοδος Β&S

Πίνακας 10 Εφαρμογή του υποδείγματος Β&S σε MS Excel

Προσάρτημα 4

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ ΣΑΝ ΔΙΑΚΙΩΜΑ			
Assumptions			
1. All the assumptions underlying the Black-Scholes model apply			
2. The value of the firm is known.			
The user has to input the following variables			
1. Current value of the underlying firm (or its assets).			
2. Variance in the ln(value) of the underlying firm.			
3. Face Value of the outstanding debt.			
4. Riskless interest rate that corresponds to average duration of debt.			
5. Face-value weighted duration of the debt outstanding of the firm.			
6. Expected dividend yield on the stock of the firm.			
Inputs relating the underlying asset			
Enter the value of the firm =		\$2,312.00	(in currency)
There are two ways of estimating standard deviation. One is to use the firm's own stock and bond prices to estimate it. The other is to use the variance of the industry to which your firm belongs.			
Which approach would you like to use to estimate variance?			F
Stock & Bond Price Variance			
Are the stocks and bonds of this firm traded?			
			Yes
Enter the standard deviation in the firm's stock price (ln) =			41%
Enter the standard deviation in the firm's bond price (ln) =			17%
Enter the correlation between the stock and bond prices =			0.5
Enter the average D/(D+E) ratio during the variance estimation period =			85%
Based upon these inputs, the standard deviation is =		18.32%	
Industry average variance in firm value			
If yes, enter the annualized standard deviation in ln(value) of asset			18.30%
Enter the current annualized dividends on the stock (total)			
		\$0.00	(in currency)
This will result in a dividend yield of			0.00%
Do you want to change this dividend yield for the life of the option?			No (Yes or No)
If yes, enter the new dividend yield for the life of the option =			(in %)
Inputs relating to the option			
Enter the cumulated face value of outstanding debt =		\$8,865.00	(in currency)
Enter the average duration of outstanding debt =		10.93	(in years)
(Weighted by the face value of the debt)			
General Inputs			
Enter the riskless rate that corresponds to the option lifetime =		6.00%	(in %)
\$2,312.00		T.Bond rate=	6.00%
\$8,865.00		Variance=	0.033549
10.93		Annualized dividend yield=	0.00%
d1 =	-0.833704263	d2 =	-1.439256327
N(d1) =	0.202223772	N(d2) =	0.075038999

ΑΞΙΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ		\$122.27			
ΥΠΟΛΟΠΙΟΜΕΝΟ ΧΡΕΟΣ		\$2,189.73			
		13.65%			

Πίνακας 11 Αποτίμηση Εταιρειών σαν πραγματικά δικαιώματα

- [1] Avramis, A. (2002). The promise and perils of Real Options. Web <http://www.stern.nyu.edu/~avramis/>
- [2] Boyle, A. (2004). How to value startup and emerging enterprises. Special web
- [3] Boyle, J. S. and Schwartz, E. (1987). "Evaluating Investment Options: An Extension of The Journal of Business", Vol. 60 (1987), 125-147
- [4] Copeland, T. and Antikarov, V. (2007). Real Options
- [5] Fama, E. (2007). Valuing Real options. Working Paper, University of California, Berkeley
- [6] Garma, A. (2002). Real Options Valuation: A New Valuation Approach. Department of Financial Engineering, University of Virginia - July 02
- [7] Hull, J. (1997). Options, Futures, and Other Derivatives 7th Edition Prentice Hall International, Inc.
- [8] Hull, C. and Toevska, S. (2004). "Real Option Valuation – The case of start-ups in the Venture Capital industry" - University of Konstanz, Germany
- [9] Truitt, A. and Hodder, J. (1996). "Using Real Options to Value a Complex Option". The Journal of Finance, Vol. 51, Issue 1, pp. 549-563
- [10] Trigeorgis, L. (1996). Real Options: The Art and Science of Strategic Investment Allocation. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.
- [11] Trigeorgis, L. and Smith, N. (1998). "Real Options: From Theory to Practice: The case of Valuation of Real Estate". Journal of Applied Engineering, 12(1) and 12(2)
- [12] Trigeorgis, L. and Smith, N. (2004). Strategic Investment: The Real Options Game. Yale University Press, Princeton and Oxford
- [13] Trigeorgis, L. (1993). "The Nature of Options Investments and the Valuation of Investments with Real Options: Real Options". The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 28, pp. 1-20.
- [14] Ross, S. (2002). Understanding using Real Options in Multiple Cash Flows. John Wiley & Sons.
- [15] Ross, S. and Westerfield, M. (2002). Financial Management: Theory and Practice 10th edition South-Western Thomson Learning
- [16] Trigeorgis, L. (1999). Derivatives – The Theory and Practice of Financial Engineering. John Wiley & Sons
- [17] McDonald, R and D. Siegel (1985). "The value of Waiting to Invest." Quarterly Journal of Economics 100: 161-191
- [18] McDonald, R and D. Siegel (1986). "The value of Waiting to Invest." International Economic Review Vol. 25, No. 2 (June 1985): 331-349
- [19] Muel, A and Toevska, S (2002). "When are Real Options Exercised? An Empirical Study of Venture Capitalists". The Review of Financial Studies Vol. 15, No. 1 pp. 25-54

Βιβλιογραφία

- [1] Aswath Damodaran (2002) . The promise and Peril of Real Options. Web <http://pages.stren.nyu.edu/pages/~adamodar>
- [2] Bapat, A. (2004). How to value startups and emerging companies. Special studt
- [3] Brennan, M. and Schwartz, E. (1985). "Evaluating Natural Resource Investments" The Journal of Business , Vol. 58 , No.2 (Apr., 1985),135-157
- [4] Copeland, T. and Antikarov, V. (2001). Real Options, Texere
- [5] Fernadez, P. (2001). Valuing Real options: frequently made errors. IESE Business School
- [6] Gamba, A.(2002). Real Options Valuation:a Monte Carlo Simulation Approach1 Department of Financial Studies University of Verona - Italy2
- [7] Hull, J. (1997). Options, Futures, and Other Derivatives Third Edition Prentice Hall International, Inc.
- [8] Hopp, C. and Tsolakis, S. (2004). Application of Real Option Valuation – The case of Investements in the Shipping Industry.University of Konstanz, Germany
- [9] Triantis, A. and Hodder, J. (1990). "Valuing Flexibility as a Complex Option" The Journal of Finance , Vol 45, No. 2 (June 1990) 549-565
- [10] Trigeorgis, L. (1996). Real Options-Managerial Flexibility And Strategy in Resource Allocation, MIT Press, Cambridge,Mass.
- [11] Trigeorgis, L and Smit, H. (2003). "Real Options : Examples and Principles of Valuation and Strategy" Journal of Applied Corporate Finance
- [12] Trigeorgis, L and Smit, H. (2004). Strategic Investment –Real Options and Game Princeton University Press, Princeton and Oxford
- [13] Trigeorgis, L. (1993). "The Nature of Options Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options" The Journal of Financial and Quatitative Analysis, Vol 28 , NO 1 pp.1-20.
- [14] Razgaitis, R. (2003). Dealmaking using Real Options and Monte Carlo Analysis, John Willey & Sons.
- [15] Brigham, E. and Ehrhardt, M. (2002). Financial Management- Theory and practice 10th edition South-Western Thomson Learning
- [16] Wilmot,P. (1999).Derivatives – The Theory and Practice of Financila Engineering. John Wiley & Sons
- [17] McDonald, R and D. Siegel. (1985). "The value of Waiting to Invest." Qurterly Journal of Economics 101: 707-727
- [18] McDonald, R and D. Siegel. (1986). "The value of Waiting to Invest." International Economic Review Vol.26, No. 2 (June 1985):331-349
- [19] Moel, A and Tufano, P (2002) "When Are Real Options Exercised? An Empirical Study Of Mine Closings" The Review of Financial Studies Vol 15 No.1 pp.35- 64

- [20] Kulatilaka, N and Perotti, E (1997). "Strategic Growth Options" Management Science (August 1998) Vol. 44, No.8 (pp.1021-1031)
- [21] Longstaff, F. and Scwhartz, E. (2001) "Valuing American Options by Simulations: a Simple Least Square Approach" The Review of Financial Studies, Vol. 14, No1, pp.113-147

Websites with Extensive Bibliographies

<http://www.rhsmith.umd.edu/finance/atriantis/RealOptionsportal.html>

An excellent resource for real options. Professor Alex Triantis has organized over 500 articles and books about real options into a searchable database.

<http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html>

A rich site with downloadable tools, many links and references to research articles. Created and maintained by Marco Antonio Guimarães Dias, a petroleum engineer and technical consultant at Petrobras.

<http://www.real-options.de/index.html>

A website devoted to real options, based in Germany. Created and maintained by Prof. Ulrich Hommel of the European Business School in Vallendar, Germany.

<http://www.realoptions.org/>

This site archives the large number of academic papers presented at the annual real options conferences, 1999 - 2004, organized by Lenos Trigeorgis.

<http://www.world-of-realoptions.com>

<http://www.few.eur.nl/few/people/jsmit/publications> Publications of J. Smit

<http://people.bu.edu/nalink/papers.htm>

Nalin Kulatalika web page

Faculty Web Sites

[Aswath Damadoran](#), Stern School of Management, New York University.

[Campbell Harvey](#), Professor, Fuqua School of Business, Duke University.

[Mitchell Petersen](#), Kellogg School of Management, Northwestern University.

[John Henderson](#), School of Management, Boston University.

[Alex Triantis](#), Robert H. Smith School of Business, University of Maryland.

[Peter Tufano](#), Sylvan C. Coleman Professor of Financial Management, Harvard Business School.