ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ**
**Π.Μ.Σ. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ**

**Διπλωματική εργασία :**

# ***Εμπειρική Μελέτη Μοντέλων Αποτίμησης Δικαιωμάτων Που Υπόκεινται Σε Φράγμα***

***Νικόλαος Α. Κασιμάτης***

***Επιβλέπων Καθηγητής*** Νικόλαος Εγγλέζος

***Επιτροπή*** Επίκ. Καθηγήτρια Χριστίνα Χρίστου
Λέκτορας Μιχαήλ Ανθρωπέλος

***Φεβρουάριος 2015***

## ***Περίληψη***

Η διπλωματική πραγματεύεται την αποτίμηση εξωτικών δικαιωμάτων, όπως είναι τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα. Χρησιμοποιούνται τα μοντέλα για την περιγραφή της τιμής υποκείμενου τίτλου ,*Black-Scholes, Constant Elasticity of Variance, Stochastic Volatility of Heston, Merton's Jump Diffusion* και *Variance Gamma* και συγκρίνονται οι αποδόσεις τους. Τα δικαιώματα έχουν υποκείμενο τίτλο την συναλλαγματική ισοτιμία δολαρίου έναντι του ευρώ και αναφέρονται στο χρονικό διάστημα ενός έτους το 2004.

Αρχικά παραθέτουμε το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο είναι αναγκαίο για την αποπεράτωση της εμπειρικής έρευνας. Έπειτα μεταφράζουμε τα δεδομένα για τα απλά δικαιώματα από τεκμαρτές μεταβλητότητες στρατηγικών, όπως συνήθως αποτιμώνται τα δικαιώματα στην αγορά συναλλάγματος, σε τιμές 12 απλών δικαιωμάτων αγοράς. Με βάση αυτές τις τιμές εκτιμάμε για τις 254 ημέρες τις παραμέτρους των μοντέλων με τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt καθώς επίσης εξετάζουμε την απόδοση των μοντέλων εκτός του δείγματος εκτίμησης. Τέλος προχωράμε στην αποτίμηση των εξωτικών δικαιωμάτων με τα εκτιμώμενα μοντέλα και εξετάζουμε την συμπεριφορά τους σε ένα «δύσκολο» περιβάλλον όπως των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα.

Η δυσκολία εντοπίζεται αφενός στην έλλειψη δεδομένων αφού τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα δεν είναι συμφωνίες που λαμβάνουν χώρα σε οργανωμένα χρηματιστήρια, αλλά απευθείας συμφωνίες των αντισυμβαλλόμενων, αφετέρου στην υπολογιστική πολυπλοκότητα του μονοπατιού της ισοτιμίας το οποίο είναι αναγκαίο για την αποτίμηση.

Λέξεις Κλειδιά

Απλά δικαιώματα προαίρεσης, Δικαιώματα που Υπόκεινται Σε Φράγμα, Αποτίμηση Δικαιωμάτων, Προσομοίωση Monte Carlo, Αγορά Συναλλάγματος, Εκτίμηση παραμέτρων, Μοντέλα περιγραφής της τιμής του υποκείμενου τίτλου, Μονοπάτια Τιμής, Εμπειρική Μελέτη, Τεκμαρτή Μεταβλητότητα

## *Abstract*

This thesis presents several models for the price of the underlying asset in valuation of barrier options, Black-Scholes, Constant elasticity of variance, Stochastic Volatility of Heston, Merton's Jump Diffusion and Variance Gamma, and compares their performance. The underlying asset of these options is the foreign exchange rate of the US dollar to euro and they refer to the specific time period of the year 2004.

Firstly we display the theoretical framework which is needed for the completion of the empirical study. Thereafter we translate the data for the plain vanilla options from implied volatilities of investing strategies, as the options are usually valuated in the exchange market, in 12 market plain vanilla prices. Based on these prices for 254 days we estimate the model parameters with the iterative algorithm of Levenberg-Marquardt as well as we examine the performance of the models, out of the valuation sample. Finally we proceed to the pricing of barrier options with these estimated models in order to examine their behavior in a 'tough environment' as the one designated by such exotic options.

On the one hand, the main difficulty comes from the lack of data, since barrier options are not contracts that take place in organized stock markets, but they are direct deals between the parties. On the other hand, another difficulty that is pointed out is the simulation of the exchange rate path, which is needed for the actual valuation.

Key words:

Plain vanilla, Barrier options, Option pricing, Monte Carlo simulation, Foreign exchange market, Parameter valuation, Option pricing models, Pricing paths, Empirical study, Implied volatility

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

# Εισαγωγή

## *1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης( Options)*

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) αποτελούν μία από τις πιο διαδεδομένες κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ο αγοραστής ή κάτοχος ενός δικαιώματος προαίρεσης διατηρεί το δικαίωμα να πραγματοποιήσει μια συγκεκριμένη συναλλαγή, αγορά ή πώληση, σε προκαθορισμένη τιμή για ένα προκαθορισμένο αριθμό μεριδίων ενός προσδιορισμένου τίτλου. Η πραγματοποίηση της συναλλαγής μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στη λήξη του συμβολαίου είτε κατά την διάρκεια του ανάλογα με το τι ορίζεται ρητά στο συμβόλαιο του δικαιώματος. Στον αντίποδα ο πωλητής ενός τέτοιου δικαιώματος έχει την υποχρέωση και όχι το δικαίωμα, να παραδώσει την υποκείμενη αξία στον αγοραστή αν αυτός ασκήσει το δικαίωμα του. Ένα δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να αφορά είτε δικαίωμα σε αγορά ενός υποκείμενου τίτλου (Call option) είτε σε πώληση του (Put option).

Τα βασικά στοιχεία που πρέπει να διακρίνουμε σε ένα δικαίωμα προαίρεσης και τα οποία ορίζονται στο συμβόλαιο ρητά είναι τα εξής:

- Αρχικά ο υποκείμενος τίτλος ο οποίος είναι οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό και μη προϊόν. Μια μετοχή, ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα εμπορικό αγαθό ή και μία ισοτιμία όπως θα μας απασχολήσει στην παρούσα μελέτη είναι ενδεικτικά παραδείγματα υποκείμενων τίτλων σε ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης. Αυτό που θα μας απασχολήσει ιδιαιτέρως στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η τιμή (***price***) του υποκείμενου τίτλου, η οποία καθορίζει και τις χρηματοροές στη λήξη του συμβολαίου αν αναφερόμαστε σε δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου ή τις χρηματοροές σε κάθε χρονική στιγμή ισχύς του συμβολαίου αν αναφερόμαστε σε αμερικάνικου τύπου.
- Η τιμή άσκησης του δικαιώματος (***Strike price***) η οποία είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής ενός δικαιώματος θα πραγματοποιήσει την συναλλαγή αν εξασκήσει το δικαίωμα.
- Η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (***maturity***) η οποία αναφέρεται στον χρόνο μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Σε δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου η ημερομηνία λήξης συμπίπτει με την ημερομηνία που μπορούν να εξασκηθούν τα δικαιώματα, ενώ σε δικαιώματα

Αμερικάνικου τύπου η εξάσκηση μπορεί να τελεστεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

- Το ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος (***premium***) το οποίο είναι η χρηματική αξία που καταβάλλεται από τον αγοραστή του δικαιώματος στον πωλητή σαν αντάλλαγμα του δικαιώματος να πραγματοποιήσει συναλλαγή με τον υποκείμενο τίτλο.
- Θέση (***position***). Μπορούν να ληφθούν δύο αντίθετες θέσεις από έναν επενδυτή. Θέση αγοράς του δικαιώματος (***long position***)και θέση πώλησης (***short position***)
- Το μέγεθος του συμβολαίου. Είναι ο αριθμός των μεριδίων του υποκείμενου τίτλου που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος (***holder***) να αγοράσει ή να πωλήσει στον εκδότη(***writer***).

Αν και τα δικαιώματα προαίρεσης υπήρξαν για πολλά χρόνια μία διαδεδομένη μορφή εμπορικών συναλλαγών παρέμεναν σχετικά άγνωστα ως χρηματοοικονομικά προϊόντα. Το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων ξεκίνησε την λειτουργία του στις 26 Απριλίου του 1973 στο Chicago και ονομάστηκε *Chicago Board Option Exchange*. Στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών ξεκίνησε την διαπραγμάτευση προϊόντων τον Αύγουστο του 1999.

Η εύρεση της τιμής (*option price*) ενός δικαιώματος είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα και συνήθως αντιμετωπίζεται με την μεθοδολογία που πρώτοι εισήγαγαν οι Black-Scholes-Merton και η οποία θα αναλυθεί στο Κεφάλαιο 3 μαζί με άλλες διαδεδομένες μεθοδολογίες.

Το πιο απλό δικαίωμα είναι το δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (*plain vanilla option* ).

Αν θεωρήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς (*call*) Ευρωπαϊκού τύπου το οποίο λήγει στον χρόνο T ,με τιμή του υποκείμενου τίτλου S ,και strike price K οι χρηματοροές που θα λάβει ο αγοραστής του συμβολαίου στην λήξη εξαρτώνται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη. Συνεπώς αν $S_T$>K, όπου $S_T$ η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον χρόνο T, ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα έχει κέρδος

$$\boldsymbol{f_{call} = S_T - K}$$

ενώ αν $S_T$<K τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα αφού μπορεί στην αγορά να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο με λιγότερα χρήματα και συνεπώς το συμβόλαιο θα του επιφέρει κέρδη

$$\boldsymbol{f_{call} = 0}$$

Γενικά βλέπουμε πως το κέρδος από ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου μπορεί να εκφραστεί ως

$$\boldsymbol{f_{call} = max(S_T - K, 0)}$$

Αντίστοιχα για ένα δικαίωμα πώλησης (put) Ευρωπαϊκού τύπου αν η τιμή $S_T$ ,η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον χρόνο Τ, είναι μικρότερη από το Κ ,ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα έχει κέρδος

$$\boldsymbol{f_{put} = k - S_T}$$

**,** ενώ αν $S_T$>K τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα αφού μπορεί στην αγορά να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο με περισσότερα χρήματα και συνεπώς το συμβόλαιο θα του επιφέρει κέρδη

$$\boldsymbol{f_{put} = 0}$$

Γενικά βλέπουμε πως το κέρδος από ένα δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού τίτλου μπορεί να εκφραστεί ως

$$\boldsymbol{f_{put} = max(k - S_T, 0)}$$

Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f_{call}}$ και $\boldsymbol{f_{put}}$ ονομάζονται συναρτήσεις χρηματοροών *(payoff functions)* των δικαιωμάτων στην λήξη στο *Σχήμα 1* βλέπουμε την γραφική παράσταση ως συνάρτηση του υποκείμενου τίτλου για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης.

Για να μπορέσουμε να βρούμε λοιπόν την αξία ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης τη στιγμή της συμφωνίας ώστε να κοστολογήσουμε το συμβόλαιο αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την τιμή στην λήξη με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια και τέλος να προεξοφλήσουμε τις τελικές χρηματοροές .

## *1.2 Plain Vanilla και «Εξωτικά» Δικαιώματα*

Τα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία αναφέραμε είναι δικαιώματα απλά τα οποία δεν περιέχουν ειδικά χαρακτηριστικά, όρους ή προϋποθέσεις. Αυτού του είδους τα δικαιώματα προαίρεσης τα ονομάζουμε *plain vanilla options* και έτσι θα αναφέρονται στην συνέχεια αυτής της διατριβής με σκοπό να υπάρχει σύντομος διαχωρισμός από τα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία εμπεριέχουν ειδικά χαρακτηριστικά, όρους ή προϋποθέσεις. Τα *plain vanilla* δικαιώματα είναι μορφή των δικαιωμάτων προαίρεσης πιο διαδεδομένη από τα υπόλοιπα είδη options και ο λόγος είναι η απλότητα στην χρησιμοποίηση τους.

Τα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία δεν έχουν την απλή δομή των options και συνδυάζουν όρους, χαρακτηριστικά ή προϋποθέσεις που διαφοροποιούν το συμβόλαιο ονομάζονται «εξωτικά» δικαιώματα ή *exotic options* όπως αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία. Στην συνέχεια αυτής της διατριβής με σκοπό να υπάρχει σύντομος διαχωρισμό από τα plain vanilla options θα αναφέρουμε τα δικαιώματα αυτά με την διεθνή ορολογία τους exotic options.

Τα exotic options αποτελούν και αυτά διαδεδομένα εργαλεία αντιστάθμισης κινδύνου διαφόρων επενδυτικών επιλογών, καθώς επίσης χρησιμοποιούνται και για κερδοσκοπία. Τα exotic options είναι κατά κύριο λόγο συμβόλαια τα οποία διαπραγματεύονται στην over the counter αγορά, το οποίο σημαίνει πως η αγοραπωλησία των δικαιωμάτων πραγματοποιείται κατευθείαν μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων χωρίς την μεσολάβηση κάποιου εκκαθαριστή, όπως ενός χρηματιστηρίου. Επίσης η τιμή τους δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου εκείνη την στιγμή αλλά και από την διαδρομή (path dependent) της τιμής του τίτλου μέχρι εκείνη την στιγμή.

Μπορούμε να διακρίνουμε πολλές κατηγορίες exotic options. Για την κάθε μία κατηγορία υπάρχει και ένα χαρακτηριστικό των δικαιωμάτων που τα ξεχωρίζει από τα plain vanilla δικαιώματα και τα εντάσσει στην κατηγορία των πολύπλοκων exotic options. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα δικαιώματα Ασιατικού τύπου (Asian options), τα δικαιώματα φράγματος (barrier options), τα lookback δικαιώματα (lookback options), τα chooser δικαιώματα (chooser options), τα binary δικαιώματα (binary options) και τα rainbow δικαιώματα (rainbow options). Γίνεται φανερό πως υπάρχει μία πολύ μεγάλη ποικιλία exotic options. Ο λόγος μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτός αν σκεφτούμε πως ο σκοπός δημιουργίας των δικαιωμάτων αυτών είναι η ικανοποίηση συγκεκριμένων αναγκών των αντισυμβαλλόμενων. Ανάγκες που ένα τυποποιημένο δικαίωμα προαίρεσης δεν μπορεί να ικανοποιήσει.

Στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε με τα δικαιώματα τα οποία υπόκεινται σε φράγμα ή όπως αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία barrier options

## ***1.3 Δικαιώματα που Υπόκεινται σε Φράγμα (Barrier Options)***

Τα barrier options αποτελούν μια κατηγορία exotic options με μία επιλογή συνήθως στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Το δικαίωμα αρχίζει να υπάρχει ή σβήνει ανάλογα με το φράγμα το οποίο έχουμε θέσει στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Αυτή η μορφή option μπορεί να προτιμηθεί γιατί στην πράξη είναι πάντα φθηνότερη από ένα plain vanilla option. Οι τέσσερις βασικοί τύποι των barrier options είναι:

- *Up-and-Out (UO):*Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεκινά κάτω από το επίπεδο φραγμού και πρέπει να κινηθεί προς τα επάνω για να σβήσει το option.
- *Down-and-Out (DO):* Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεκινά πάνω από το επίπεδο φραγμού και αν φθάσει ή περάσει από κάτω από το επίπεδο φραγμού το option παύει να ισχύει.
- *Up-and-In (UI):* Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεκινά κάτω από το επίπεδο φραγμού και πρέπει να φθάσει ή να ξεπεράσει το επίπεδο φραγμού για να ενεργοποιηθεί το δικαίωμα.
- *Down-και-In* *(DI):* Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεκινά πάνω από το επίπεδο φραγμού και πρέπει να φθάσει ή περάσει από κάτω από το επίπεδο φραγμού για να ενεργοποιηθεί το δικαίωμα.

Πρόσθετα υπάρχει και μία παραλλαγή του barrier option σύμφωνα με την οποία όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου πιάσει το φράγμα, τα δικαιώματα γίνονται μη ενεργά και επιστρέφεται ένα προκαθορισμένο ποσό χρημάτων του ασφαλίστρου στον κάτοχο του (*rebate*).

Τα barrier options μπορούν να λειτουργήσουν είτε ως δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου είτε ως Αμερικάνικου ανάλογα με το πότε έχουν οριστεί να μπορούν να εξασκηθούν.

Κύριο πλεονέκτημα των barrier options είναι πως είναι πιο φθηνά στην κτήση τους από τα απλά plain vanilla options. Έτσι ένας επενδυτής με λιγότερα χρήματα μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δικαιώματα είτε για να αντισταθμίσει έναν κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο του είτε ακόμα και για να αυξήσει την χρηματοοικονομική του μόχλευση (leverage).

Τα barrier options λόγω της σύνθετης δομής τους διαπραγματεύονται στην over the counter αγορά. Αυτό μετατρέπει και την τιμολόγηση των συγκεκριμένων δικαιωμάτων ακόμα πιο δύσκολη όπως θα αναφέρουμε στην συνέχεια.

Για να μπορέσουμε να βρούμε την συνάρτηση των τελικών χρηματοροών αρκεί να βάλουμε στην εξίσωση και το επίπεδο φραγμού το οποίο ορίζουμε ως $\mathbf{H_L}$ για τα *Down-and in* και *Down-and-Out barrier options* και $\mathbf{H_H}$ για τα *Up-and-in* και *Up-and-Out barrier options* και επίσης να ορίσουμε τα ελάχιστα και τα μέγιστα της διαδικασίας κίνησης του υποκείμενου τίτλου ως

$$m_S = \inf\{ S_t \ ; 0 < t < T\} \text{ και } M_S = \sup\{ S_t \ ; 0 < t < T\}$$

Το *Up-and-In call option* είναι χωρίς αξία εκτός αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου S περάσει το προκαθορισμένο επίπεδο φραγμού $\mathbf{H_H}$ κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Έτσι η συνάρτηση χρηματοροών για ένα *Up-and-In call option είναι:*

$$\Phi_{UI}(S_T,M_S)=max(0,(S_T-K)^{+}\mathbf{1}(M_S\geq H_H))$$

Όπου $\mathbf{1}(M_S\geq H_H)$ είναι ένας δείκτης ο οποίος παίρνει την τιμή 1 αν $M_S\geq H_H$ ενώ σε διαφορετική περίπτωση είναι 0.

Για το *Up-and-Out call option* η σχέση είναι αντίστροφη: το *Up-and-Out call* είναι ένα κανονικό δικαίωμα αγοράς εκτός αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου χτυπήσει το φράγμα όπου χάνει την αξία του, έτσι έχουμε:

$$\Phi_{UO}(S_T,m_S)=max(0,(S_T-K)^{+}\mathbf{1}(M_S<H_H))$$

Για τα *Down-και-In call options Down-and-Out* το ύψος του φράγματος καθορίζεται σε τιμή μικρότερη της τιμής του υποκείμενου τίτλου την στιγμή της συμφωνίας (t=0) ή αλλιώς $H_L<S_0$ . Έτσι το Down-και-In call είναι χωρίς αξία εκτός αν κάποια στιγμή κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου τίτλου χτυπήσει το φράγμα δηλαδή $H_L\geq S_t$ στην t χρονική στιγμή (0≤t≤T). Τότε ισχύει ότι και στα plain vanilla call options. Δηλαδή

$$\Phi_{DI}(S_T,m_S)=max(0,(S_T-K)^{+}\mathbf{1}(m_S\leq H_L))$$

Για το *Down-and-Out* ισχύει το αντίστροφο. Το δικαίωμα είναι χωρίς αξία αν κατά την διάρκεια της ζωής του η τιμή του υποκείμενου τίτλου πέσει κάτω από το επίπεδο φραγμού. Αλλιώς αποτιμάται ως ένα απλό δικαίωμα αγοράς. Έτσι ισχύει:

$$\Phi_{DO}(S_T,M_S)=max(0,(S_T-K)^{+}\mathbf{1}(m_S>H_L))$$

Τέλος για να μπορέσουμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα την χρονική στιγμή t=0, δηλαδή την στιγμή που αγοράζουμε το συμβόλαιο αρκεί να προεξοφλήσουμε τις τελικές χρηματοροές.

Στο Σχήμα 2 φαίνονται οι τελικές χρηματοροές για κάθε τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη. Με τα σχήματα αυτά αρχίζει να φαίνεται ποιό είναι το πρόβλημα και στην αποτίμηση των barrier options. Παρατηρώντας το Down and In δικαίωμα αγοράς βλέπουμε πως για κάθε τιμή στην λήξη του υποκείμενου τίτλου οι χρηματοροές είναι μηδέν. Φυσικά αυτό δεν ισχύει. Απλά για να μπορέσουμε να αποδώσουμε καλύτερα την εικόνα του δικαιώματος θα πρέπει να δούμε όλη την διαδρομή της τιμής.

Για παράδειγμα στο Σχήμα 2 και για το δικαίωμα αγοράς Down and Out οι τελικές χρηματοροές για τελική τιμή 700 Ευρώ είναι 200 Ευρώ. Αν όμως οποιαδήποτε στιγμή της ζωής του δικαιώματος η τιμή είχε περάσει κάτω από το φράγμα(300 Ευρώ) τότε οι τελικές χρηματοροές θα ήταν μηδέν.

## ***1.4 Το Πρόβλημα Αποτίμησης των Δικαιωμάτων Που Υπόκεινται Σε Φράγμα***

Όπως προαναφέραμε τα δικαιώματα προαίρεσης με αυτές τις ιδιαίτερες συνθήκες τα οποία ονομάζουμε barrier options είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία είναι απολύτως προσαρμοσμένα σε επενδυτές και επιχειρήσεις οι οποίοι θέλουν είτε να επενδύσουν για κερδοσκοπικούς λόγους είτε για να αντισταθμίσουν κινδύνους στα χαρτοφυλάκια τους. Η προσαρμογή αυτή επιτυγχάνεται με τους όρους των συμβολαίων αυτών που τα εντάσσουν στα exotic options.

Η ιδιαιτερότητα των δικαιωμάτων αυτών όπως είναι κατανοητό δημιουργεί και τα προβλήματα στην αποτίμηση τους σε σχέση με απλά δικαιώματα προαίρεσης. Τα προβλήματα εστιάζονται αφενός στο γεγονός πως τα exotic options διαπραγματεύονται στην over the counter αγορά και αφετέρου στην σύνθετη δομή των payoffs των δικαιωμάτων.

Ως over the counter αγορά αναφέρουμε συναλλαγές που γίνονται κατευθείαν από τους δύο αντισυμβαλλόμενους χωρίς να παρεμβάλλεται το χρηματιστήριο ή κάποιος άλλος ο οποίος θα ορίσει τα χαρακτηριστικά του δικαιώματος και θα παρακολουθεί την πορεία του. Αυτά γίνονται κατευθείαν από τους αντισυμβαλλόμενους με συνέπεια να γίνεται ανέφικτη η εύρεση ιστορικών δεδομένων στη διάρκεια ζωής των περισσότερων εξωτικών δικαιωμάτων, ιστορικά δεδομένα τα οποία μας χρειάζονται στην διαμόρφωση των μοντέλων αποτίμησης.

Η σύνθετη δομή των χρηματοροών των exotic options δημιουργούν εξίσου πρόβλημα στην αποτίμηση τους. Αξίζει να σκεφτούμε πως οι τελικές χρηματοροές ενός είδους exotic option, του barrier option, εξαρτώνται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου σε περισσότερες από μία χρονική στιγμή και πολύ περισσότερο από την κοινή κατανομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου σε διάφορα σημεία του χρόνου. Η προσπάθεια προσομοίωσης των μονοπατιών της τιμής του υποκείμενου τίτλου συνεπώς χρειάζεται να είναι αρκετά αποδοτική για να αποφευχθεί η λανθασμένη τιμολόγηση.

Τέλος στα barrier options η επιρροή του φράγματος είναι διαφορετική ανάλογα με το ύψος του, δηλαδή την διαφορά της τιμής του υποκείμενου τίτλου και την τιμή του φράγματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

## Εισαγωγή Στις Βασικές Έννοιες Των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Πριν προχωρήσουμε στην επεξήγηση των πέντε μοντέλων που περιγράφουν την τιμή του υποκείμενου τίτλου τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα διατριβή για την αποτίμηση των δικαιωμάτων αγοράς είναι χρήσιμο να αναλύσουμε τις βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών μαθηματικών τα οποία χρησιμοποιούνται στα μοντέλα καθώς και το περιβάλλον στο οποίο κινείται ο υποκείμενος τίτλος ο οποίος θα χρησιμοποιήσουμε.

### *2.1 Προσομοίωση Monte Carlo*

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι μία αριθμητική μέθοδος ιδιαιτέρως χρήσιμη όταν υπολογίζουμε τιμές δικαιωμάτων με μεγάλη εξάρτηση από το μονοπάτι των τιμών του υποκείμενου τίτλου.

Με τη μέθοδο Monte Carlo υπολογίζουμε αριθμητικά μέσες τιμές. Από τον Ισχυρό Νόμο Των Μεγάλων Αριθμών (ΙΝΜΑ) γνωρίζουμε ότι για Ν αριθμό τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, ο δειγματικός μέσος τους τείνει στην πραγματική τιμή   όταν το n τείνει στο άπειρο

$$\bar{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} E(X_i)$$

Χρησιμοποιούμε λοιπόν έναν αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής των τυχαίων μεταβλητών μας – στην συγκεκριμένη περίπτωση των προεξοφλημένων αποδόσεων των δικαιωμάτων στη λήξη –με το να παράγουμε Ν τυχαίους αριθμούς από τη γνωστή τυπική κανονική κατανομή και προσομοιώνοντας την τιμή της μετοχής.

Εδώ θα πρέπει να απαντήσουμε σε μία αναμενόμενη ερώτηση. Πως μπορούμε να βρούμε το μέγεθος Ν του δείγματος που απαιτείται για να έχουμε μια δεδομένη ακρίβεια; Η απάντηση είναι πως θα χρησιμοποιήσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Δηλαδή θα ποσοτικοποιήσουμε την ποιότητα του εκτιμητή μας $\bar{X}_N$ από το αναμενόμενο τετραγωνικό σφάλμα:

$$E[(\bar{X}_N - m)^2] = Var(\bar{X}_N) = Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(X_i) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Με αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το Ν η εκτίμηση μας βελτιώνεται.

Ανακαλούμε το διάστημα εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο με συντελεστή εμπιστοσύνης (1-α) ο οποίος για δείγματα με αρκετά μεγάλο Ν δίνεται από την εξής σχέση:

$$\left[\bar{X}_N - z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_N}{N}}\ , \bar{X}_N + z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_N}{N}}\right]$$

Μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε το σχετικό σφάλμα:

$$\frac{|\bar{X}_N - \mu|}{|\bar{X}_N|} = \left|1 - (\frac{\mu}{\bar{X}_N})\right|$$

Από τα διαστήματα εμπιστοσύνης γνωρίζουμε ότι για τα 1-α στα 100 δείγματα μεγέθους Ν ο πραγματικός μέσος εντοπίζεται ως:

$$\bar{X}_N - z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_N}{N}} \leq \mu \leq \bar{X}_N + z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_N}{N}}$$

$$\frac{|\bar{X}_N - \mu|}{|\bar{X}_N|} \leq \frac{z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_N}{N}}}{|\bar{X}_N|}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει πως όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι το δεξί μέλος, τόσο ακριβέστερη προσέγγιση έχω.

## 2.2 Στοχαστικές Διαδικασίες

Οι στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν ένα ερευνητικό πεδίο ιδιαίτερης σημασίας για την ανάπτυξη μοντέλων τιμολόγησης χρηματοοικονομικών παραγώγων δεδομένου πως η μοντελοποίηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων πραγματοποιείται σε περιβάλλον στοχαστικότητας.

Ως στοχαστική διαδικασία (stochastic process) ορίζουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t , τον χρόνο $\{X(t), t\epsilon T\}$ Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου είναι το σύνολο δεικτών (index set) της στοχαστικής διαδικασίας. Με βάση το σύνολο των δεικτών τους οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτού χρόνου (discrete time) όταν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο και σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου (continuous time) όταν το σύνολο T είναι διάστημα του R. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατατάσσονται βάσει του συνόλου των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) σε:

- Διακριτού χρόνου και διακριτής μεταβλητής
- Διακριτού χρόνου και συνεχής μεταβλητής
- Συνεχούς χρόνου και διακριτής μεταβλητής και
- Συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής

Έστω $\{S(t), t \geq 0\}$ μία στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου. Η S(t) είναι μία τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή στο χρόνο tκαι η S(t,ω) είναι μία απεικόνιση από ένα χώρο πιθανότητας (Ω,Α,Ρ) στο R που ορίζεται από την σχέση

$$S(t,\omega) = \{H\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota o\upsilon\sigma\iota\alpha\kappa o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \sigma\tau o\ \chi\rho\acute{o}\nu o\ t\ \acute{o}\tau\alpha\nu \\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau o\pi o\iota\eta\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\acute{\omega}\delta\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ \omega \in \Omega\}$$

Σε αυτή την περίπτωση η $\{S(t), t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία τιμών.

Οι τιμές περιουσιακών στοιχείων στην πραγματικότητα παίρνουν μόνο διακριτές τιμές και ο χρόνος διαπραγμάτευσης τους δεν είναι συνεχής. Παρ' όλα αυτά για την μελέτη εξέλιξης των τιμών τους γίνεται χρήση των μοντέλων που , αν και δεν υπακούουν με ακρίβεια στην πραγματικότητα, είναι εύχρηστα και στην πράξη οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

## 2.3 Διαδικασίες Markov

Η διαδικασία Markov είναι ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου και μεταβλητής κατά την οποία η μελλοντική κίνηση της μεταβλητής εξαρτάται μόνο από το σημείο που βρίσκεται στο παρόν χωρίς να υπάρχει εξάρτηση από ιστορικά στοιχεία. Η $S_t$ ακολουθεί μία διαδικασία Markov εάν οι κατανομές πιθανότητας του συνόλου των $S_{t+\Delta t}$ για όλες τις επόμενες t+Δt χρονικές στιγμές εξαρτώνται μόνο από την $S_t$.

Η διαδικασία Markov δείχνει να επαληθεύει την αδύναμη μορφή της αποτελεσματικής αγοράς (weak form efficiency market hypothesis). Σύμφωνα με αυτή την μορφή αποτελεσματικής αγοράς ιστορικές πληροφορίες αντικατοπτρίζονται ήδη στις τιμές και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους επενδυτές για να προβλέψουν μελλοντικές αποδόσεις.

Μπορούμε να υπολογίσουμε συνεπώς πως η διακύμανση για την τιμή

$$S_T \rightarrow \qquad Var(S_T|S_0) = Tvar(S_{t+1} - S_t)$$

Συνεπώς είναι φανερό πως η διακύμανση των μεταβλητών που ακολουθούν διαδικασία Markov είναι ανάλογη του χρόνου και κατ' επέκταση η τυπική απόκλιση είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.

## 2.4 Διαδικασίες Wiener (Κινήσεις Brown)

Η διαδικασία Wiener (γνωστή και ως κίνηση Brown στον τομέα της φυσικής), αποτελεί έναν συγκεκριμένο τύπο της διαδικασίας Markov, στην οποία θεωρείται ότι

$$var(S_{t+1} - S_t|S_t) = 1 \text{ και } E(S_{t+1} - S_t|S_t) = 0$$

Όπου E η αναμενόμενη μεταβολή της $S_t$ . Για να ακολουθεί μία μεταβλητή z διαδικασία Wiener, θα πρέπει κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος Δt να ισχύει

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Όπου ε μία τυχαία τιμή από την κανονική κατανομή φ(0,1). Επιπλέον οι αξίες του Δz σε 2 μη αλληλοεπικαλυπτόμενα μικρά χρονικά διαστήματα είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Συνεπάγεται πως το Δz ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση $\sqrt{\Delta t}$ και διακύμανση Δt.

Κατά την διάρκεια μίας μεγάλης περιόδου Τ η μεταβολή της z είναι ίση με $z(T) - z(0)$. Αυτή η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε N μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt, όπου $N = \frac{T}{\Delta t}$

Συνεπώς

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Όπου μπορούμε να βρούμε εύκολα τα εξής:

$$E[z(T) - z(0)] = 0$$

$$var[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T$$

$$\sigma[z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$$

*Για να προχωρήσουμε στον ορισμό* -Η κίνηση Brown έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου R.Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε την κίνηση ενός μικρού σώματος σε έναν υγρό ή αέριο. Ο Αμερικανός μαθηματικός R.Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος την διαδικασία αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητες της, για αυτό και η διαδικασία είναι γνωστή και ως Wiener Process.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{z(t), t \geq 0\}$ λέγεται κίνηση Brown με συντελεστή διάχυσης $\sigma^2$ αν:

- $z(0) = 0$
- Έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- Για κάθε $t \geq 0$ , $z(t) \sim N(o, \sigma^2 t)$

Όταν σ=1 τότε η διαδικασία καλείται τυποποιημένη κίνηση Brown (Standard Brownian Motion) ή διαδικασία Wiener (Wiener process).

Είναι αντιληπτό πως κάθε κίνηση Brown μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση Wiener ως εξής: $z(t) = \sigma W(t)$

Μετά από χρόνο Δt οι αντίστοιχες προσαυξήσεις Δz και ΔW θα ικανοποιούν την σχέση $\Delta z = \sigma \Delta W$ και αν θεωρήσουμε Δt πως τείνει στο μηδέν (εξετάζουμε σε συνεχές περιβάλλον) τότε έχουμε την διαφορική εξίσωση : $dz = \sigma dW$

## 2.5 Γενικευμένες Διαδικασίες Wiener

Μια γενικευμένη διαδικασία Wiener (ή κίνηση Brown με παρέκκλιση ) για μία μεταβλητή x , με ρυθμό τάσης (drift rate) μ και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) $\sigma^2$ ορίζεται ως

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

Όπου dW είναι μία διαδικασία Wiener για $\Delta t \rightarrow 0$ και μ, σ είναι σταθερές.

Ενώ στην βασική διαδικασία Wiener ο ρυθμός τάσης είναι 0 και ο ρυθμός διακύμανσης είναι 1 στην γενικευμένη διαδικασία Wiener οι μ και σ μπορούν να τεθούν ίσες με οποιεσδήποτε σταθερές.

Συνεπώς στην περίπτωση οποιουδήποτε χρονικού διαστήματος T προκύπτει ότι η γενικευμένη διαδικασία Wiener είναι κανονικά κατανεμημένη με

$$E(x(T) - x(0)) = \mu T$$

$$var\big(x(T) - x(0)\big) = \sigma^2 T$$

$$\sigma\big(x(T) - x(0)\big) = \sigma\sqrt{T}$$

Συνεπώς για να δώσουμε τον ορισμό. Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ λέγεται γενικευμένη διαδικασία Wiener αν

- $X(0) = 0$
- Έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- Για κάθε $t \geq 0$ , $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

Αν dW μία απειροστή προσαύξηση μίας κίνησης Wiener και dX μιας κίνησης Brown με τάση μ τότε μπορούμε σχηματικά να γράψουμε $dX = \mu dt + \sigma dW$

Με αυτόν τον τρόπο η μεταβολή στην x προκαλείται από έναν ντετερμινιστικό όρο *μdt* και έναν τυχαίο όρο *σdZ.*

## 2.6 Διαδικασίες Ito- Το Λήμμα του Ito

Μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, κατά την οποία οι παράμετροι α και b είναι συναρτήσεις της τιμής της μεταβλητής x και του χρόνου t, ονομάζεται διαδικασία Ito.

Ορίζεται ως εξής:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Χαρακτηριστικό της διαδικασίας Ito αποτελεί το γεγονός ότι ο ρυθμός τάσης και ο ρυθμός διακύμανσης αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Σε διακριτό χρόνο και εντός μικρού χρονικού διαστήματος Δt ισχύει

$$\Delta x \approx a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Το σύμβολο ‘ ≈ ‘ φανερώνει ότι η παραπάνω σχέση εσωκλείει μία μικρή προσέγγιση. Αυτό συμβαίνει καθώς για το μικρό χρονικό διάστημα ανάμεσα στο t και t+Δt θεωρείται πως ο ρυθμός τάσης και ο ρυθμός διακύμανσης παραμένουν σταθεροί, ενώ στην πραγματικότητα αλλάζουν συνεχώς.

Συνεχίζοντας σύμφωνα με το λήμμα του Ito εάν η τιμή μιας μεταβλητής χ ακολουθεί μια διαδικασία Ito και είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τότε η συνάρτηση G(x,t) ακολουθεί την συνάρτηση

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \qquad (2.1)$$

Πρόκειται για μία διαδικασία Ito με ρυθμό τάσης

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

Και ρυθμό διακύμανσης $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$

Η σπουδαιότητα του λήμματος του Ito έγκειται στο γεγονός πως οι τιμές των δικαιωμάτων είναι συναρτήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου.

## ***2.7 Η λογαριθμοκανονική Κατανομή***

Έστω πως ορίζω $G = \ln S$

Τότε έχω :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad , \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \qquad , \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito θα έχω:

$$dln\big(S(t)\big) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dZ(t)$$

Από την στιγμή που το μ και το σ είναι συνεχή αυτή η εξίσωση μας υποδεικνύει πως η συνάρτηση G=ln S ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener. Έχει έναν σταθερό ρυθμό τάσης $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και έναν σταθερό ρυθμό διακύμανσης ίσο με σ. Η αλλαγή στην συνάρτηση $lnS$ μεταξύ του χρόνου 0 και στο μελλοντικό χρόνο T κατανέμεται κανονικά με μέσο $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ και διακύμανση $\sigma^2 T$ .
Αυτό σημαίνει πως

$$lnS_T - lnS_0 \sim \varphi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

$$ή$$

$$lnS_T \sim \varphi\left[lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

Όπου $S_T$ είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο μελλοντικό χρόνο Tα , $S_0$ είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή 0 και φ(m,s) είναι μία κανονική κατανομή με μέσο m και διακύμανση s.

Η τελευταία σχέση μας δείχνει πως η $lnS_T$ κατανέμεται κανονικά . Μία μεταβλητή έχει μία log-κανονική κατανομή αν ο φυσικός λογάριθμος της μεταβλητής κατανέμεται κανονικά.

## ***2.8 Αγορά Συναλλάγματος***

Η παρούσα εμπειρική μελέτη θα γίνει σε δικαιώματα αγοράς τα οποία έχουν σαν υποκείμενο τίτλο συναλλαγματικές ισοτιμίες. Οι συναλλαγματικές ισοτιμίες και τα παράγωγα τους είναι κάπως διαφοροποιημένα και είναι θεμιτό να αναπτύξουμε σε αυτήν την παράγραφο ορολογίες καθώς και στρατηγικές τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε και στην διαμόρφωση των δεδομένων κατάλληλα για μελέτη.

Αγορά Συναλλάγματος ή Foreign Exchange (FX) είναι η συναλλαγή που πραγματοποιείται με ισοτιμίες. Για να συμμετέχει κάποιος ουσιαστικά αγοράζει ένα νόμισμα και πουλάει ένα άλλο. Είναι μία παγκόσμια αγορά και τόσο εξειδικευμένη ώστε το συντριπτικό ποσοστό του συνόλου των συναλλαγών πραγματοποιείται Over the Counter. Η αγορά FX λόγω της παγκόσμιας εμβέλειας της είναι ανοιχτή 24 ώρες τη μέρα και είναι πολύ ρευστή.

Σύμφωνα με το "Monetary and Economic Department" στην τριετή έκθεση για την συναλλαγματική αγορά την τριετία 2007-2010 η αξία συναλλαγών ξεπερνούσε τα 4 τρισεκατομμύρια δολάρια ενώ η αξία συναλλαγών για την τριετία 2010-2013 ξεπέρνούσε τα 5.3 τρισεκατομμύρια δολάρια Αμερικής. Η ισοτιμία η οποία κατείχε την πρώτη θέση για την ίδια τριετία είναι η ισοτιμία Δολαρίου Αμερικής προς Ευρώ (USD/EUR) με ποσοστό 24.1% των συναλλαγών, ήτοι 1,227 τρισεκατομμύρια δολάρια. Ενώ το 87% των συναλλασσόμενων ισοτιμιών εμπεριείχε το νόμισμα των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (USD).

Οι επενδυτές προσπαθούν όλο και περισσότερο να έχουν καλύτερη ακρίβεια στις κοστολογήσεις των προϊόντων ώστε σε αυτή την ρευστή αγορά να μην έχουν απώλειες. Η παρούσα διπλωματική ακολουθεί αυτή την τάση και προσπαθεί να μελετήσει εμπειρικά την λειτουργία χρηματοοικονομικών μοντέλων αποτίμησης στην αγορά του FX.

Τα πιο συχνά συναλλασσόμενα ζευγάρια ισοτιμιών είναι:

- EUR/USD, Ευρώ ανά Δολάριο.
- USD/JPY, Δολάριο ανά Γιέν Ιαπωνίας
- GBP/USD Λίρα ανά Δολάριο
- USD/CHF Δολάριο ανά Ελβετικό Φράγκο.

Τα συμβόλαια τα οποία μπορεί κάποιος να πραγματώσει στην αγορά συναλλάγματος μπορούμε να χωρίσουμε ως εξής:

- Spot Συναλλαγή η οποία είναι μία συμφωνία μεταξύ 2 αντισυμβαλλόμενων για ανταλλαγή ισοτιμιών σε 2 εργάσιμες ημέρες
- Forward Συναλλαγή είναι όποια συναλλαγή 2 αντισυμβαλλόμενοι θα ανταλλάξουν ισοτιμίες σε συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον μεγαλύτερη των 2 ημερών.
- Option Συναλλαγή. Το γνωστό δικαίωμα είτε αγοράς είτε πώλησης μίας συγκεκριμένης ποσότητας σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή

Ένα παράδειγμα για δικαίωμα αγοράς σε αγορά συναλλάγματος. Ένας επενδυτής αγοράζει ένα EURUSD δικαίωμα αγοράς με τιμή spot ισοτιμίας (τιμή του υποκείμενου τίτλου την στιγμή την οποία το παρατηρούμε) $S_t$=1,3900, strike τιμή K=1,3500 και προκαθορισμένο πόσο ανταλλαγής (notional) 1.000.000. Το ποσό που πρέπει να πληρώσει ο επενδυτής για να πάρει το δικαίωμα του παραδείγματος είναι 102.400 δολάρια( ή 0,1024 επί του προκαθορισμένου ποσού.) Έτσι αν η ισοτιμία μείνει πάνω από την strike τιμή ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα λάβει 1.000.000 ευρώ και θα πληρώσει 1.350.000 δολάρια.

Ο πιο διαδεδομένος όρος στην αγορά συναλλάγματος είναι το ελληνικό γράμμα (greeks) delta. Το delta είναι η μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της ισοτιμίας. Δηλαδή πιο απλά είναι ένας δείκτης που μας δείχνει την συμπεριφορά της τιμής του δικαιώματος σε οποιαδήποτε μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Ισχύει:

$$\Delta_S(K,\sigma,\varphi) \triangleq \frac{\partial \Pi}{\partial S} = \Pi_S = \varphi e^{-rfT} N(\varphi d_+)$$

Όπου φ=+1 για ένα δικαίωμα αγοράς και φ= - 1 για ένα δικαίωμα πώλησης. Η τελευταία ισότητα ισχύει στον θεωρητικό κόσμο των Black Scholes. Μπορούμε να δούμε πως αν έχουμε το delta, μπορούμε να βρούμε την strike τιμή του δικαιώματος λύνοντας την εξίσωση που μας δίνει την τιμή του delta ως προς K. Έτσι για ένα δικαίωμα αγοράς θα έχουμε

$$K = Sexp\left(-N^{-1}\left(\Delta_c e^{(rf)T}\right)\sigma\sqrt{T} + \left(rd - rf + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

Και για ένα δικαίωμα πώλησης

$$K = Sexp\left(-N^{-1}\left(-\Delta_p e^{(rf)T}\right)\sigma\sqrt{T} + \left(rd - rf + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

Όπου $N^{-1}(.)$ Είναι η αντίστροφη αθροιστική κανονική κατανομή
S είναι η ισοτιμία την στιγμή της παρατήρησης $rd, rf$ είναι αντίστοιχα το εγχώριο επιτόκιο άνευ κινδύνου και το επιτόκιο άνευ κινδύνου του ξένου νομίσματος.

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία δικαιώματος αγοράς και πώλησης (PutCall Parity) μπορούμε να εξάγουμε πως

$$\Delta_c(K,\sigma) - \Delta_p(K,\sigma) = e^{-rfT}$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι πολύ σημαντικές αφού ενώ στην αγορά μετοχών όπως το χρηματιστήριο οι τιμές των δικαιωμάτων δίνονται για διαφορετικές strike τιμές και ληκτότητες, στην αγορά συναλλάγματος οι τιμές δίνονται σε όρους τεκμαρτής μεταβλητότητας και delta. Υπάρχουν 4 τρόποι έκφρασης δικαιωμάτων σε όρους τεκμαρτής μεταβλητότητας και delta τους οποίους θα αναλύσουμε. Βάσει αυτών των αναλύσεων μετατράπηκαν τα δεδομένα στη παρούσα εμπειρική μελέτη από τεκμαρτές μεταβλητότητες σε τιμές.

ATM δικαιώματα

Το δικαίωμα με το μεγαλύτερο δείκτη ρευστοποίησης είναι το ATM δικαίωμα. Η τιμή strike για αυτά τα δικαιώματα είναι στα επίπεδα της τιμής της ισοτιμίας. Συμβολίζεται ως : $\sigma_{ATM}$

Risk Reversals

Το risk reversal είναι ένα συμβόλαιο το οποίο περιέχει μία θέση αγοραστή σε ένα out-of-the-money δικαίωμα αγοράς και μία θέση πωλητή σε ένα out-of-the-money δικαίωμα πώλησης όπου τα δικαιώματα έχουν το ίδιο delta (σε απόλυτες τιμές αφού το delta του δικαιώματος πώλησης είναι πάντα αρνητικό), συνηθέστερα ίσον με 0,10 ή 0,25. Το risk reversal είναι ίσο με την διαφορά της τεκμαρτής μεταβλητότητας του δικαιώματος αγοράς με την τεκμαρτή μεταβλητότητα του δικαιώματος πώλησης.

$$\sigma_{\Delta RR} = \sigma_{\Delta C} - \sigma_{\Delta P}$$

Αν για παράδειγμα το 25-delta risk reversal είναι αρνητικό σημαίνει πως τα OTM δικαιώματα αγοράς είναι φθηνότερα από τα OTM δικαιώματα πώλησης.

Butterfly

Το συμβόλαιο αυτό είναι ένα συμμετρικό προϊόν το οποίο δίνει το μεγαλύτερο όφελος όταν η ισοτιμία στη λήξη είναι κοντά στο ATM επίπεδο. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία τέτοια στρατηγική χρησιμοποιώντας την μέση τιμή για ένα OTM δικαίωμα αγοράς και ένα ITM δικαίωμα αγοράς και πουλώντας 2 ATM δικαιώματα αγοράς. Μπορούμε να το υπολογίσουμε ως εξής:

$$\sigma_{\Delta BF} = (\sigma_{\Delta C} + \sigma_{\Delta P})/2 \; - 2\sigma_{ATM}$$

Strangle

Σε αυτή την στρατηγική ουσιαστικά ο επενδυτής ποντάρει στην πεποίθηση του ότι η μεταβλητότητα στη λήξη θα είναι χαμηλά. Για να επιτευχθεί η στρατηγική θα χρειαστεί 2 OTM δικαιώματα ,ένα αγοράς και ένα πώλησης. Μπορούμε να υπολογίσουμε την στρατηγική ως εξής

$$\sigma_{\Delta RR} = (\sigma_{\Delta C} + \sigma_{\Delta P})/2 \; - \sigma_{ATM}$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

# Μοντέλα Περιγραφής της Τιμής του Υποκείμενου Τίτλου

Το μεγαλύτερο πρόβλημα το οποίο αντανακλάται από την πολυπλοκότητα των barrier options όπως γίνεται αντιληπτό είναι η δυσκολία αποτίμησης τους. Η αποτίμηση των barrier options καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολη διότι αντίθετα με τα plain vanilla options τα barrier options δεν εξαρτώνται μόνο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου αλλά και από την πορεία που ακολούθησε η τιμή του υποκείμενου αυτού τίτλου, δεδομένου ότι αν έχει περάσει το φράγμα της τιμή που ορίζεται από το συμβόλαιο του δικαιώματος έχουμε ένα barrier event. Έτσι σε αντίθεση με plain vanilla options το απλούστερο υπόδειγμα αποτίμησης Black-Scholes δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατευθείαν στα barrier options.

Κατά καιρούς διάφορα υποδείγματα έχουν δημιουργηθεί με σκοπό να ικανοποιήσουν την ανάγκη της σωστής αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης τα οποία εισάγουν όλο και περισσότερες παραμέτρους ώστε να γίνουν πιο ρεαλιστικά. Τα σημαντικότερα και αυτά τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στην εμπειρική μελέτη είναι τα εξής:

- Μοντέλο Black and Scholes
- Μοντέλο Constant Elasticity Of Variance
- Heston's Stochastic Volatility Μοντέλο
- Merton's Jump-Diffusion Μοντέλο
- The Variance Gamma Μοντέλο

Τα υποδείγματα αυτά εξετάζουν την κίνηση της ισοτιμίας στον χρόνο και το κάθε ένα στηρίζεται σε διαφορετικές υποθέσεις και χαρακτηριστικά για την κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

## 3.1 Μοντέλο των Black-Scholes

### Ιστορικές Αναφορές στην Βιβλιογραφία

Η δημοσίευση των Fischer Black και Myron Scholes το 1973 με τίτλο "The Pricing Of Options and Corporate Liabilities" και η εισαγωγή μέσω αυτής της δημοσίευσης του μοντέλου αποτίμησης των Black-Scholes, θεωρήθηκε ως ένα πολύ σπουδαίο επίτευγμα για την οικονομική επιστήμη αφού πλέον μπορούσε κάποιος με υποθέσεις που δεν επηρεάζουν αρκετά τα αποτελέσματα να αποτιμήσει σε συνεχή χρόνο δικαιώματα. Άμεσα το υπόδειγμα αποτίμησης των Black και Scholes έγινε αποδεκτό από τους φορείς τις αγοράς. Είναι ενδεικτικό πως οι περισσότεροι επενδυτές στην αγορά ακόμα και τώρα χρησιμοποιούν το υπόδειγμα αυτό στην αποτίμηση των διαφόρων δικαιωμάτων προαίρεσης και όχι μόνο.

Πέρα από την αγορά ολόκληρη η επιστημονική κοινότητα έχει στηρίξει τις μελέτες της στο υπόδειγμα Black-Scholes και έχει προχωρήσει στην ανάπτυξη μοντέλων πάνω σε αυτό το υπόδειγμα με παραλλαγές οι οποίες θα μπορούσαν να δώσουν αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια. Για αυτόν τον λόγο μπορούμε να δούμε πως στις περισσότερες εμπειρικές μελέτες το μοντέλο Black-Scholes χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για την σύγκριση με τα λοιπά υποδείγματα.

Στη πρόσφατη μελέτη των *Cathrine Jessen & Rolf Poulsen* το 2012 η οποία πραγματεύεται την αποτίμηση για δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο τις συναλλαγματικές ισοτιμίες Δολαρίου/Ευρώ (USD/EUR), το μοντέλο Black-Scholes χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς και μάλιστα καταφέρνει να δώσει αποτελέσματα για τα barrier options καλύτερα από αποτελέσματα τα οποία έχουν αναφερθεί σε παρόμοιες παλαιότερες δημοσιεύσεις οι οποίες ασχολούνται με την αγορά αξιόγραφων μετοχών. Επίσης τα αποτελέσματα του μοντέλου είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα των μοντέλων Constant Elasticity of Variance model και Heston stochastic volatility model και τέλος το Black-Scholes μοντέλο έδωσε αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια από μοντέλα όπως το Merton Jump-diffusion model και το Variance Gamma model.

Στη εμπειρική μελέτη των Yunbi An και Wulin Suo το 2009 το μοντέλο Black-Scholes επίσης χρησιμοποιήθηκε ως σημείο αναφοράς σε μελέτη όπου αποτιμήθηκαν δικαιώματα στον δείκτη “EUR/USD Currency Option Volatility Index” και τα USD και EUR LIBOR επιτόκια για την περίοδο 2 Ιανουαρίου 2002 – 29 Ιουνίου 2007. Τα αποτελέσματα τους χωρίστηκαν σε αποτελέσματα για barrier options και για ένα άλλο είδος εξωτικών δικαιωμάτων, τα compound options. Στα barrier options το μοντέλο Stochastic volatility βγάζει καλύτερα αποτελέσματα από το Black n Scholes μοντέλο, με μόνη διαφορά στα out-of-the-money options, ενώ τα Jump diffusion και Stochastic volatility and jump diffusion μοντέλα μας δίνουν πολύ φτωχά αποτελέσματα σε σχέση με τα προαναφερόμενα ως προς την αντιστάθμιση κινδύνου τους. Από την άλλη στα compound options η συμπεριφορά των Jump diffusion και Stochastic volatility and jump diffusion μοντέλων μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το black n Scholes.

Το μοντέλο των Black-Scholes μπορούμε να το δούμε και στις εμπειρικές έρευνες των *Maruhn,J.,Nalhom, M. and Fengler , M. “Static hedges for reverse barrier options with robustness against skew risk :an empirical analysis*” η οποία εκδόθηκε το 2010, στην οποία όμως δεν υπήρχε αναφορά στις πραγματικές τιμές των barrier options στην αγορά.

Η μερική διαφορική εξίσωση των B&S.

Το 1973 οι Fischer Black και Myron Scholes δημοσίευσαν την εργασία τους με τίτλο "*The Pricing Of Options and Corporate Liabilities*" σύμφωνα με την οποία πρότειναν ένα υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων. Η ιδέα του υποδείγματος ήταν να αντισταθμίσουν ένα δικαίωμα αγοράζοντας και πουλώντας τον υποκείμενο τίτλο με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαλειφθεί ο κίνδυνος. Συνεπώς κατασκεύασαν ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα δικαίωμα και από έναν αριθμό Δ μετοχών και εξέτασαν τη στιγμιαία μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου. Επέλεξαν το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να είναι χωρίς κίνδυνο, αυτό επιτυγχάνεται με την συνεχής αναπροσαρμογή της ποσότητας Δ των αριθμών των μετοχών του χαρτοφυλακίου (continuous rebalancing of the portfolio). Σύμφωνα με μία εκ των υποθέσεων του μοντέλου που θα αναφέρουμε στην συνέχεια, δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage κάτι το οποίο σημαίνει πως το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει απόδοση το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (risk-free rate).
Το υπόδειγμα Black-Scholes στηρίζεται σε υποθέσεις όσων αφορά την αγορά αλλά και τον υποκείμενο τίτλο.

Οι υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής:

- Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown, το οποίο μας δείχνει πως έχουμε σταθερή μεταβλητότητα και επιπλέον δεν υπάρχουν άλματα στα μονοπάτια που ακολουθεί η μετοχή (συνεχή μονοπάτια).
- Ο υποκείμενος τίτλος δεν αποδίδει μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του παραγώγου.
- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.
- Επιτρέπεται το short selling των μετοχών με πλήρη χρήση των εσόδων.
- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών – επιτρέπεται η συνεχής αναπροσαρμογή των εσόδων.
- Είναι εφικτός ο δανεισμός οποιουδήποτε αριθμού χρεογράφων, ακόμη και υποδιαίρεσης αυτών.
- Η διαπραγμάτευση των τίτλων είναι συνεχής.
- Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι σταθερό και το ίδιο για όλες τις λήξεις.

Συνεπώς με βάση τις υποθέσεις του υποδείγματος υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο, έστω Π το οποίο περιέχει Δ αριθμό υποκείμενων τίτλων και -1 δικαιώματα. Δηλαδή είναι σε θέση πωλητή (short) σε δικαίωμα και θέση αγοραστή (Long) στον υποκείμενο τίτλο.

Έστω $F(S, t)$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος που εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου S και το χρόνο t.
Η αξία του Π θα μπορεί να γραφεί ως:

$$\Pi = - F + \Delta S$$

Και η μεταβολή της αξία του χαρτοφυλακίου γράφεται ως

$$d\Pi = -dF + \Delta dS$$

Σύμφωνα με την υπόθεση πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερή μεταβλητότητα η τιμή του υποκείμενου τίτλου γράφεται ως

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

όπου μ = η αναμενόμενη απόδοση του υποκείμενου τίτλου ετησιοποιημένη σ = Η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου ετησιοποιημένη
και dz είναι διαδικασία Wiener.

Με δεδομένο πως και η αναμενόμενη απόδοση και η μεταβλητότητα μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου μπορούμε να πούμε πως η S ακολουθεί μια Ito διαδικασία.

Επίσης η τιμή του δικαιώματος είναι συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου F=F(S,t) και διπλά διαφορίσιμη συνεπώς ισχύουν οι υποθέσεις του λήμματος του Ito.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2$$

Από την γεωμετρική κίνηση Brown έχουμε :

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt^2$$

Συνεπώς $dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(\sigma^2 S^2 dt)$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial F}{\partial S}dZt$$

Βλέπουμε πως η F είναι μια καινούργια διαδικασία Ito, έτσι έχουμε

$$d\Pi = -dF + \Delta dS$$

$$= -\left(\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial F}{\partial S}dZt\right) + \Delta\ (\mu S dt + \sigma S dZt)$$

$$= -\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S\left(\frac{\partial F}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt - \left(\frac{\partial F}{\partial S} - \Delta\right)\sigma S dZt$$

Γίνεται φανερό πως θέτοντας $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ μπορούμε να εξαλείψουμε τον τυχαίο όρο $dZ_t$ ο οποίος είναι ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου Π. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{d}\Pi = -\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)\mathrm{dt}\,. \tag{3.1}$$

Επειδή όπως βλέπουμε δεν εμφανίζεται ο όρος dZ το χαρτοφυλάκιο πρέπει να είναι χωρίς κίνδυνο κατά την διάρκεια του χρόνου dt. Σύμφωνα και με τις υποθέσεις το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει απόδοση risk-free rate. Αν αποδίδει περισσότερο θα είχαμε arbitrage. Συνεπώς ισχύει πως:

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{r}\Pi\mathrm{dt} = \mathrm{r}(-\mathrm{F} + \Delta\mathrm{S})\mathrm{dt} \tag{3.2}$$

Όπου r είναι η χωρίς κίνδυνο απόδοση που προσφέρει το χαρτοφυλάκιο.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1) στην εξίσωση (2) έχω

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt = r(-F + \Delta S)dt$$

$$-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -rF + r\Delta S$$

$$-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -rF + \frac{\partial F}{\partial S} rS$$

$$\boldsymbol{rF = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}}$$

Η εξίσωση είναι γνωστή και ως μερική διαφορική εξίσωση (Partial Differential Equation) των Black-Scholes. Είναι μια γραμμική, δευτέρου βαθμού παραβολική εξίσωση. Το γεγονός πως η μερική διαφορική εξίσωση προέκυψε χωρίς υπόθεση για τον τίτλο S μπορεί να μας δώσει λύσεις για οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο.

Η μερική διαφορική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις, ανάλογα με τις οριακές συνθήκες (boundary conditions) που θα τεθούν. Στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και χρόνο μέχρι τη λήξη T, η τιμή του c(S,T) απαιτείται να ικανοποιεί την παρακάτω οριακή συνθήκη:

$$c = \max\{S - K, 0\}$$

ενώ ένα δικαίωμα πώλησης ίδιων χαρακτηριστικών η τιμή του p πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω οριακή συνθήκη

$$p = \max\{K - S, 0\}$$

Μειονεκτήματα Black –Scholes

Τα κύρια μειονεκτήματα του μοντέλου εμφανίζονται ήδη από τις υποθέσεις του. Οι περισσότερες παρουσιάζουν μη ρεαλιστικές συνθήκες που οδηγούν σε σφάλματα. Για παράδειγμα το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη του τα φαινόμενα fat-tail, τα οποία εμφανίζονται στην κατανομή που έχει κάποιες χρονικές περιόδους η απόδοση μίας μετοχής και σύμφωνα με την οποία έχουμε πάρα πολύ μεγάλη κύρτωση ή ασυμμετρία. Επίσης δεν λαμβάνει υπόψη του το φαινόμενο volatility smile ή σε μία ελεύθερη μετάφραση το χαμόγελο της μεταβλητότητας. Σχεδιάζοντας την τεκμαρτή μεταβλητότητα κατά τις τιμές εξάσκησης για μια δεδομένη λήξη ,η εικόνα που μας δίνεται είναι ένα "χαμόγελο", αντί της αναμενόμενης επίπεδης επιφάνεια. Το σχέδιο διαφέρει στις διάφορες τιμές εξάσκησης K. Αυτό το σχήμα , το οποίο έχει ελάχιστο στα at-the-money δικαιώματα, συνεπάγεται ελλείψεις στο πρότυπο Black-Scholes μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης που προϋποθέτει σταθερή μεταβλητότητα και log-κανονικές κατανομές των υποκείμενων αποδόσεων των αξιογράφων.

Η σημαντικότητα του υποδείγματος των Black και Scholes στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών προϊόντων στην αγορά δεν έχει παύσει από την δημοσίευση του και έπειτα. Ήδη από την έναρξη λειτουργίας του στο Chicago Board Options Exchange (CBOT), τον Απρίλιο του 1973, οι επαγγελματίες των αγορών τους χρησιμοποιούν καθημερινά στην πράξη. Οι εξισώσεις των Black και Scholes αποτελούν μέχρι και σήμερα το βασικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Θεωρούνται ένα κοινό σημείο αναφοράς και για αυτό κρίνεται σκόπιμο να συμπεριληφθεί και στην παρούσα μελέτη, αν και τα χρηματοοικονομικά προϊόντα που θα μελετηθούν είναι πιο σύνθετα συμβόλαια δικαιωμάτων.

Black-Scholes-Εμπειρική Μελέτη

Οι Black και Scholes κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο μία εξίσωση που να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση, υποκείμενη στην οριακή συνθήκη ενός δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου. Στην συνέχεια μετατρέπουν την μερική διαφορική εξίσωση στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας (heat transfer equation) γνωστή από τον τομέα της φυσικής επιστήμης. Η κλειστή μορφή που προκύπτει για την αποτίμηση του δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου όπου θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εξής:

$$\mathbf{c(t) = S(t)N(d1) - Ke^{-r(T-t)}N(d2)}$$

Όμοια για ένα δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου

$$\boldsymbol{p(t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d2) - S(t)N(-d1)}$$

Όπου

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

Και

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

όπου S είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής
K είναι η τιμή εξάσκησης,
r είναι το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk free rate),
σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής,
t είναι ο τρέχοντας χρόνος και
T είναι η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος
T-t είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Για τα barrier option χρησιμοποιήσουμε την κλειστή μορφή αποτίμησης όπως αναφέρεται στον *Zhang, Peter G., 1998.* Έτσι θα έχουμε

$$\boldsymbol{UI_{BS}} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2v}{\sigma^2}} \left\{P_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right) - P_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, H\right) + (H-K)e^{-rT}\Phi\left(-d_{BS}(h,S)\right)\right\} \\ + C_{BS}(S,H) + (H-K)e^{-rT}\Phi(d_{BS}(S,H))$$

$$\boldsymbol{UO_{BS}} = C_{BS}(S,K) - C_{BS}(S,H) - (h-K)e^{-rT}\Phi(d_{BS}(S,H)) \\ - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2v}{\sigma^2}} \left\{C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right) - C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, H\right) - (H-K)e^{-rT}\Phi\left(d_{BS}(H,S)\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{DI_{BS}} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2v}{\sigma^2}} C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)$$

$$\boldsymbol{DO_{BS}} = C_{BS}(S,K) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2v}{\sigma^2}} C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)$$

Όπου

-$C_{BS}(S,K)$ και $P_{BS}(S,K)$ οι τιμές Black-Scholes των plain vanilla call και put options.
-$\omega = \rho - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$
-$d_{BS}(S,K) = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)+vT}{\sigma\sqrt{T}}$
-Φ(χ) η κανονική αθροιστική συνάρτηση κατανομής

Ειδική Περίπτωση όταν ο υποκείμενος τίτλος μοιράζει μέρισμα

Όπως είδαμε και από τις αρχικές υποθέσεις το μοντέλο Black και Scholes μπορεί να αποτιμήσει δικαιώματα όταν ο υποκείμενος τίτλος δεν πληρώνει κάποιο μέρισμα. Στην περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος πληρώνει μερίσματα το μοντέλο αποτίμησης μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να τα λάβει υπόψη του. Για το σκοπό αυτό η αξία των μερισμάτων, έστω D, προεξοφλείται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r (risk-free rate) και εν συνεχεία αφαιρείται από την αρχική αξία της μετοχής $S_0$. Έτσι έχουμε:

$$\boldsymbol{S'(0) = S(0) - D}$$

## 3.2 Μοντέλο Constant Elasticity of Variance (CEV)

Το μοντέλο Constant Elasticity of Variance, το οποίο για συντομία θα αναφέρεται με τα αρχικά γράμματα του CEV, θα μπορούσε σε μία ελεύθερη μετάφραση να γραφεί ως το υπόδειγμα αποτίμησης το οποίο θεωρεί σταθερή την ελαστικότητα της διακύμανσης στην τιμή του δικαιώματος. Το CEV έχει αναπτυχθεί από τον John Cox το 1975

Πολλές εμπειρικές μελέτες μας έχουν δείξει πως μεταξύ της τιμής μίας μετοχής και της μεταβλητότητας της υπάρχει μία στενή σχέση αιτίου αποτελέσματος. Μελετητές όπως οι R.Geske, F.Black και A.Christie θεωρούν πως η σχέση αυτή στηρίζεται στην χρηματοοικονομική μόχλευση των εταιρειών η οποία επηρεάζει την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Συνεπώς μία αύξηση της τιμής της μετοχής θα μειώσει τον δείκτη Χρέους προς Ιδίων Κεφαλαίων της επιχείρησης και ως συνέπεια αυτού θα έχουμε και μείωση της διακύμανσης των αποδόσεων της τιμής της μετοχής της εν λόγω επιχείρησης. Ο F.Black στην μελέτη του "Studies Of Stock Prices Volatility Changes" αναλύει και αντιστρέφει την σχέση αιτίου-αποτελέσματος και επισημαίνει πως μία αύξηση στην μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής προκαλεί μείωση της τιμής. Η αρνητική εξάρτηση αυτή δημιουργεί πρόβλημα στην αξιοπιστία του υποδείγματος των Black και Scholes και δημιουργεί την ανάγκη της εισαγωγής μίας σχέσης που να περιγράφει την εξάρτηση.

Ιστορικές Αναφορές στην Βιβλιογραφία

Το Constant Elasticity of Variance μοντέλο μπορούμε να το βρούμε ανατρέχοντας σε πολλές μελέτες. Ο *Schroder* το 1989 διατύπωσε στην μελέτη του την κλειστή φόρμουλα αποτίμησης που συσχετίζει την μεταβλητότητα με τα κατά καιρούς επίπεδα τιμών.

Μια παραλλαγή του μοντέλου έχει διατυπωθεί από τους *Delbaen F. , Shirakawa H το 2002.* Οι Freddy Delbaen και Hiroshi Shirakawa το 2002 έδωσαν προσοχή στην σχέση μεταξύ του μοντέλου CEV και τη διαδικασία τετραγώνου του Bessel και έδειξαν πως στην αποτίμηση με το CEV μοντέλο αφήνει περιθώριο για arbitrage όταν είναι βαθμονομημένο να είναι θετικό.

Αναλυτικές φόρμουλες για το CEV μοντέλο μπορούμε να βρούμε με συνεγκαταστάσεις όπως υποδεικνύουν στην εργασία τους οι Nalholm και Poulsen το 2006 καθώς επίσης και με μεθόδους αντιστροφής όπως υπάρχουν από τους Davydov και Linetsky το 2001.

Όσων αφορά την εφαρμογή του μοντέλου σε εμπειρικές μελέτες μπορούμε να το δούμε στην εμπειρική μελέτη των Cathrine Jessen & Rolf Poulsen το 2012 η οποία πραγματεύεται την αποτίμηση για δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο τις συναλλαγματικές ισοτιμίες Δολαρίου/Ευρώ (USD/EUR), τα αποτελέσματα του μοντέλου είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα των μοντέλων Black-Scholes και Heston stochastic volatility και φαίνεται να είναι πιο αποδοτικό για αποτίμηση barrier options από ότι απλών δικαιωμάτων (plain vanilla).

Το μοντέλο CEV εισάγει την ακόλουθη ντετερμινιστική σχέση μεταξύ των τιμών των μετοχών και της μεταβλητότητάς τους:

$$\sqrt{\upsilon(S,t)} = \sigma\, S^{\frac{\beta-2}{2}}$$

Και η διακύμανση των αποδόσεων $u(S,t) = \sigma^2 S^{\beta-2}$ (3.3)

Όπου σ είναι θετική σταθερά.

Συνεπώς η τιμή της μετοχής μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$dS = \mu S dt + \sqrt{u}\, S dZ$$

Όμοια αντικαθιστώντας με την σχέση (1)

$$dS = \mu S dt + \sigma S^{\frac{\beta-2}{2}} dZ \qquad , \ \beta<2$$

Όπου dZ είναι μια διαδικασία Wiener και σ είναι θετικός και σταθερός.

Στο CEV μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί έχουμε 2 παραμέτρους για εκτίμηση και αυτοί είναι το β και το σ.

Η ελαστικότητα της μεταβλητότητας σε σχέση με την τιμή μας δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\frac{du(S,t)}{dS}}{\frac{u(S,t)}{S}} = \beta - 2$$

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις εξής περιπτώσεις.

i. Όταν β=2: Αυτό μετατρέπει την ελαστικότητα της μεταβλητότητας ως προς την τιμή ίση με το μηδέν και πρακτικά σημαίνει πως η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή και ανεπηρέαστη από αλλαγές στην τιμή της μετοχής, ενώ οι τιμές των μετοχών κατανέμονται log normally. Είναι αυτό το οποίο έχουν υποθέσει και οι Black και Scholes. Έτσι βλέπουμε πως η τιμή της μετοχής περιγράφεται $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$

ii. Όταν β<2: Η ελαστικότητα είναι αρνητική και η αρνητική εξάρτηση μεταξύ τιμής και μεταβλητότητας επιβεβαιώνεται.

iii. Όταν β>2: Η ελαστικότητα είναι θετική και υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ τιμής και μεταβλητότητας. Φαινόμενο που στην πραγματική οικονομία είναι πολύ σπάνιο και πραγματοποιήσιμο βάσει μόνο κάποιων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών του δείγματος.

## CEV-Εμπειρική Μελέτη

Για την αποτίμηση των plain vanilla δικαιωμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την φόρμουλα που παρουσίασε ο Mark Schroder το 1989 στην μελέτη του "*Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula*." Σύμφωνα με την μελέτη αυτή η τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς μπορεί να υπολογιστή με την φόρμουλα

$$c = S(t)e^{-\alpha T}Q\left[2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right] - Ke^{-rT}Q\left[2y; 2 - \frac{2}{2-\beta}, 2x\right]$$

Για κάθε β<2

όπου

- α – είναι το συνεχές ποσοστό μερίσματος που αναλογεί στην μετοχή
- r – το άνευ κινδύνου επιτόκιο (risk-free rate)
- Q(.) είναι η συμπληρωματική noncentral chi-square κατανομή
- $y = kK^{2-\beta}$
- $x = kS^{2-\beta}e^{(r-a)(2-b\beta)\tau}$
- $k = 2(r-a)/(\delta^{2(2-\beta)}[e^{(r-a)(2-\beta)\tau} - 1]$

Για τις τιμές όπου β>2 υπάρχει η ισοδύναμη σχέση από τους Emanuel and MacBeth (1982), σύμφωνα με την οποία:

$$c = S(t)e^{-\alpha T}Q\left[2x; \frac{2}{\beta-2}, 2y\right] - Ke^{-rT}(1 - Q\left[2y; 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x\right]$$

Για την αποτίμηση των barrier options θα προσομοιώσουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου με την κίνηση την οποία προϋποθέτει το CEV μοντέλο και με αριθμητικές μεθόδους θα βρούμε τις χρηματοροές τη χρονική στιγμή T τις οποίες θα προεξοφλήσουμε.

## 3.3 Μοντέλο Στοχαστικής Μεταβλητότητας Heston

Το μοντέλο Heston’s stochastic volatility είναι ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει την εξέλιξη της μεταβλητότητας ενός υποκείμενου τίτλου. Υποθέτει πως η μεταβλητότητα ενός υποκείμενου τίτλου δεν είναι σταθερή , ούτε ντετερμινιστικά κινούμενη αλλά ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Το μοντέλο είναι μία εξέλιξη του Black-Scholes μοντέλου αποτίμησης και έχει ονομαστεί μοντέλο Heston’s stochastic volatility διότι πρώτος το περιέγραψε ο Steven Heston το 1993.

Σύμφωνα με τον Heston οι αποδόσεις των τιμών των υποκείμενων τίτλων δεν ακολουθούν lognormal κατανομές αλλά μπορούν να προσδιοριστούν ως:

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S \, dz'(t)$$

Όπου dz’(t) είναι μία διαδικασία Wiener και v η μεταβλητότητα των αποδόσεων της μετοχής η οποία κατά τον Heston ακολουθεί κατανομή Ornstein-Unlenbeck και ισχύει

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta \, dz''(t)$$

Τότε το Ito’s lemma μας δείχνει πως η διακύμανση v(t) ακολουθεί την διαδικασία

$$dv(t) = k[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dz''^{(t)}$$

Όπου θ είναι η μακροχρόνια μεταβλητότητα, κ είναι η ταχύτητα εμφανίσεως του μέσου, σ είναι αυτό που ονομάζουμε μεταβλητότητα της μεταβλητότητας και το z’(t) έχει συντελεστή συσχέτισης με το z’’(t) ίσο με ρ.

Σύμφωνα με τους Black και Scholes η αξία κάθε περιουσιακού στοιχείου πρέπει να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (PDE), η οποία στην περίπτωση του Heston γίνεται:

$$\frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma v S\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} +$$

$$+\{k[\theta - v(t)] - \lambda(S, v, t)\}\frac{\partial U}{\partial v} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Όπου ο όρος λ(S,v,t) αναπαριστά την τιμή του ρίσκου της μεταβλητότητας και πρέπει να είναι ανεξάρτητος από το περιουσιακό στοιχείο.

Ο Heston χτίζει την λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης όχι απευθείας αλλά χρησιμοποιώντας την μέθοδο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Έτσι αναλύει πως ένα ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K και λήξη στον χρόνο T ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση με τις οριακές συνθήκες:

$$U(S, v, T) = Max(0, S - K)$$

$$\frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1$$

$$U(0, v, t) = 0$$

$$rs\frac{\partial U}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta\frac{\partial U}{\partial v}(S, 0, t) - rU(S, 0, t) + U(t)(S, 0, t) = 0$$

$$U(S, \infty, t) = S$$

Η λύση που βγαίνει σύμφωνα με τον Heston για ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι της μορφής

$$C(S, v, t) = SP(1) - Ke^{-(r-q)(T-t)}P(2) \tag{5}$$

Όπου ο πρώτος όρος είναι η παρούσα αξία του υποκείμενου τίτλου και ο δεύτερος όρος είναι η παρούσα αξία των χρηματοροών βάσει της προσυμφωνημένης τιμής εξάσκησης και P(1) είναι το delta του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και το P(2) είναι η χωρίς ρίσκο πιθανότητα η τιμή του υποκείμενου τίτλου να είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης στην λήξη. Και οι δύο αυτές πιθανότητες P(1) , P(2) ικανοποιούν την μερική διαφορική εξίσωση.

Μετά από αντικαταστάσεις στον τελευταίο τύπο και των οριακών συνθηκών στην μερική διαφορική εξίσωση και με την βοήθεια των χαρακτηριστικών εξισώσεων φ(1) και φ(2), μπορούμε να καταλήξουμε στην λύση κλειστού τύπου του μοντέλου Heston's stochastic volatility που θα μας βοηθήσει στην αποτίμηση δικαιωμάτων υποθέτοντας στοχαστικότητα στην μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών.

Φόρμουλα: $\mathbf{C(\tau, \varphi) = (r - q)\varphi(i)\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left\{(bj - \rho\sigma\varphi(i) + d)\tau - 2\ln\left\{\frac{1 - ge^{dt}}{1 - g}\right\}\right\}}$

$$\mathbf{D(\tau;\varphi)=\frac{bj-\rho\sigma\varphi(i)+d}{\sigma^2}\left[\frac{1-\varepsilon^{d\tau}}{1-ge^{d\tau}}\right]}$$

Όπου $\tau = \mathrm{T} - \mathrm{t}$ , $\mathrm{g} = \frac{\mathrm{bj}-\rho\sigma\varphi(\mathrm{i})+\mathrm{d}}{\mathrm{bj}-\rho\sigma\varphi(\mathrm{i})-\mathrm{d}}$ , $\mathrm{d} = \sqrt{(\rho\sigma\varphi(\mathrm{i})-\mathrm{bj})^2-\sigma^2(2\mathrm{uj}\varphi(\mathrm{i})-\varphi^2}$

$u_1$ =0.5 , $u_2$= -0.5 , α=κθ , $b_1$= κ + λ – ρς , $b_2$= κ + λ.

Για την αποτίμηση των barrier options θα προσομοιώσουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου με την κίνηση την οποία προϋποθέτει το μοντέλο σύμφωνα με τον Heston και με αριθμητικές μεθόδους θα βρούμε τις χρηματοροές τη χρονική στιγμή Τ τις οποίες θα προεξοφλήσουμε

<u>Ιστορικές Αναφορές στην Βιβλιογραφία</u>

Ο πρώτος που περιέγραψε το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας ήταν ο ίδιος ο Heston το 1993 όπου και εισήγαγε την κλειστή φόρμουλα αποτίμησης των απλών δικαιωμάτων ενώ ο Lipton το 2001 στην μελέτη του πάνω σε επιτόκια έδειξε πως με τις εξής υποθέσεις:

- Τα εγχώρια και ξένα επιτόκια είναι ίσα.
- Η συνδιακύμανση τους είναι μηδέν

Μπορεί να βρεθεί λύση κλειστού τύπου και για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα. Βέβαια οι υποθέσεις είναι αυτές είναι δύσκολο να θεωρηθούν ρεαλιστικές, το αντίθετο μάλλον, με συνέπεια να αποφέρουν ανακριβή αποτελέσματα. Εναλλακτικό τρόπο τιμολόγησης έδωσαν οι Foulson και In’T’Hout το 2010 με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιέγραψαν.

Σε εμπειρικές μελέτες μπορούμε πάλι να διακρίνουμε την μελέτη των Cathrine Jessen &R.Poulsen το 2012 η οποία πραγματεύεται την αποτίμηση δικαιωμάτων με υποκείμενο τίτλο τις συναλλαγματικές ισοτιμίες δολαρίου-ευρώ. Τα αποτελέσματα δεν φαίνεται να είναι το ίδιο αποδοτικά για την αποτίμηση των barrier options με αυτά των μοντέλων Black&Scholes και constant elasticity of Variance.

Στην εμπειρική μελέτη των An Y.και Suo W. το 2009 το μοντέλο με στοχαστική μεταβλητότητα δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το μοντέλο αναφοράς Black Scholes με μόνη διαφορά στα Out-of-the-Money δικαιώματα ενώ και στα compounds δικαιώματα η απόδοση είναι συγκριτικά καλύτερα.

## 3.4 Merton's Jump Diffusion Model

Το μοντέλο Merton's Jump Diffusion είναι και αυτό με την σειρά του ένα υπόδειγμα το οποίο θεωρείται μια εξέλιξη του Black-Scholes μοντέλου. Η διαφορά του με την παραδοσιακή εκδοχή των Black και Scholes είναι πως ο Merton, όπου και προς τιμή του το μοντέλο έχει το όνομα του, έχει συμπεριλάβει άλματα (jumps) στις αποδόσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Η ιδέα του Merton είναι απλή και λογική. Όλοι μας έχουμε παρατηρήσει τιμές μετοχών η άλλων χρηματοοικονομικών στοιχείων να ανεβαίνουν η πέφτουν ακαριαία, πολλές φορές όντας η συμπεριφορά αυτή μία αντίδραση της αγοράς σε ανακοινώσεις. Η αλλαγή αυτή της τιμής μπορεί να θεωρηθεί ένα άλμα (jump). Αυτό αυτομάτως θα σήμαινε πως η υπόθεση των Black και Scholes ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown η οποία παράγει μια lognormal κατανομή για την τιμή της μετοχής μεταξύ 2 σημείων στο χρόνο θα πρέπει να μορφοποιηθεί και να συμπεριλάβει και τα άλματα αυτά τα οποία μεταβάλλουν την κίνηση των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Ο Merton για να το αποδείξει αναφέρει πως συνολικές αλλαγές πάνω στην τιμή μιας μετοχής είναι μια σύνθεση 2 ειδών διαταραχών.

- Οι «κανονικές» διαταραχές της τιμής. Οι διαταραχές αυτές σχετίζονται με προσωρινές μεταβολές στην προσφορά και στην ζήτηση, αλλαγές στα επιτόκια, αλλαγές στο οικονομικό περιβάλλον και είναι οριακές αλλαγές στην αξία μιας μετοχής. Τέτοιες διαταραχές μπορούν να μοντελοποιηθούν με την γεωμετρική κίνηση Brown.
- Οι «μη κανονικές» διαταραχές τις τιμής. Οι διαταραχές αυτές συμβαίνουν με την άφιξη σημαντικών πληροφοριών για την επιχείρηση. Τέτοιες πληροφορίες μπορεί να είναι συγκεκριμένα για την επιχείρηση ,ακόμα και για την γενικότερη αγορά. Αυτές οι διαταραχές έχουν μεγαλύτερη ισχύ από τις κανονικές και διαμορφώνουν νέα επίπεδα στις τιμές των μετοχών.

Οι «μη κανονικές» διαταραχές μπορούμε να υποθέσουμε πως είναι ένα άλμα το οποίο γίνεται σε μία τιμή. Πριν και μετά το άλμα οι αλλαγές στην τιμή της μετοχής είναι μία διαδικασία Wiener, την στιγμή του άλματος όμως έχουμε μία διαδικασία Poisson η οποία περιγράφεται ως εξής:

Το γεγονός που περιγράφεται με την κατανομή poisson είναι η άφιξη μία σημαντικής πληροφορίας για την μετοχή. Υποθέτουμε πως οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες και πανομοιότηπα κατανεμημένες. Έτσι η πιθανότητα για να συμβεί ένα γεγονός στην χρονική διάρκεια h (το οποίο h το ορίζει ο μοντελοποιός) ορίζεται ως

Prob {μη πραγματοποίηση γεγονότος στο διάστημα (t,t+h)}=1-λh+O(h), Prob{το γεγονός συμβαίνει μία φορά στο διάστημα(t,t+h)}= λh+O(h)

Prob{το γεγονός συμβαίνει πάνω από μία φορά στο διάστημα(t,t+h)}=O(h)

Όπου O(h) είναι το ασυμπτωτικής σειράς σύμβολο που ορίζεται ως Ψ(h) αν $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\psi(h)}{h}\right) = 0$ και $\lambda = ο\ μέσος\ αριθμός\ αφίξεων\ ανά\ μονάδα\ χρόνου$

Έτσι σύμφωνα με το μοντέλο του Merton μπορούμε να βρούμε την τιμή μίας μετοχής υποθέτοντας άλματα. Αναμιγνύοντας την μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει κινήσεις σε συνεχές μονοπάτι και την μερική διαφορική εξίσωση για κατανομή Poisson, βρίσκουμε πως

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

Όπου το

-μ είναι η στιγμιαία απόδοση της μετοχής,

-σ$^2$ είναι η στιγμιαία διακύμανση της απόδοσης, όταν δεν συμβαίνει γεγονός,

-dZ είναι μια στάνταρ Gauss-Wiener διαδικασία,

-q(t) είναι η ανεξάρτητη διαδικασία Poisson, dq και dZ υποθέτονται να είναι ανεξάρτητες,

-λ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου ,

-k≡ε(Y-1) όπου Y-1 είναι η τυχαία μεταβλητή που μεταβάλλει ποσοστιαία την τιμή αν συμβεί το γεγονός και

-ε είναι η προσωπική προσδοκία του μοντελοποιού στην τυχαία μεταβλητή Y.

Το σdz κομμάτι περιγράφει την «κανονική» διαταραχή της τιμής που περιγράψαμε προηγουμένως και το dq περιγράφει την «μη κανονική» διαταραχή.

Συνεπώς με βάση τις παραπάνω υποθέσεις ο στιγμιαίος μέσος της Jump Diffusion διαδικασίας υπολογίζεται ως:

$$\frac{1}{dt}E\left(\frac{dSt}{St}\right) = (\mu - \lambda k)$$

Και η στιγμιαία διακύμανση των συνολικών αποδόσεων της διαδικασίας :

$$\frac{1}{dt}Var\left(\frac{dSt}{St}\right) = \sigma^2 + \lambda(k^2 + (1+k)^2(e^{\delta^2} - 1)$$

Συνεπώς διακρίνουμε την περίπτωση που δεν υπάρχουν άλματα στις τιμή της μετοχής,λ=0. Σε αυτή την περίπτωση επιστρέφουμε στο υπόδειγμα αποτίμησης Black-Scholes.

Από την στιγμή που υπάρχει το ρίσκο του άλματος η αγορά δεν μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρωμένη και η υπόθεση των Black και Scholes για την απουσία arbitrage δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να γίνουν περαιτέρω υποθέσεις ώστε να επιστρέψουμε στο άνευ ρίσκου (risk neutral) περιβάλλον.

Ο Bates(1991) απέδειξε πως η διαδικασία Jump Diffusion κάτω από το καθεστώς risk neutral μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{dSt}{St} = (r - q - \lambda k)dt + \sigma dw(t) + JdQ$$

Όπου J είναι το τυχαίο άλμα σε ένα γεγονός άλματος και

$$\ln(1+J) \sim N\left(\ln(1+k) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right)$$

Q είναι ένας μετρητής Poisson με ένταση λ

Χρησιμοποιώντας την μερική διαφορική εξίσωση ο Merton καταλήγει πως η τιμή για ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς δίνεται αναλυτικά από

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(\mathrm{St}, \mathrm{X}, \mathrm{t}, \mathrm{T}, \lambda, \mathrm{k}, \delta) \\ &= \mathbf{e}^{-\mathbf{r}(\mathbf{T}-\mathbf{t})} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \left( \frac{\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{T}-\boldsymbol{\tau})} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{T}-\boldsymbol{\tau})\right)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \right) \left(\mathbf{S}(\mathbf{t}) \mathbf{e}^{-\mathbf{r}(\mathbf{n})(\mathbf{T}-\mathbf{t})} \, \mathbf{N}\left(\mathbf{d}(\mathbf{1n})\right) \right. \\ &\left. - \mathbf{X}\mathbf{e}^{-\mathbf{r}\mathbf{T}} \mathbf{N}\left(\mathbf{d}(\mathbf{2n})\right) \right) \end{aligned}$$

Όπου

$$r_n = r - q - \lambda k + n\ln(1+k)/(T-t)$$

$$d_{1n} = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\left(\sigma^2(T-t) + n\delta^2\right)\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + n\delta^2}}, \quad d_{2n} = d_{1n} - \sqrt{\sigma^2(T-t) + n\delta^2}$$

Αντίθετα με το Black-Scholes μοντέλο και με το CEV μοντέλο, το μοντέλο του Merton έχει 2 πηγές αβεβαιότητας για αυτό και έχει 4 παραμέτρους προς εκτίμηση.

Για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φραγμούς θα προσομοιώσουμε την κίνηση του υποκείμενου τίτλου με μέθοδο Monte Carlo και θα βρούμε την τιμή στην λήξη του δικαιώματος. Έπειτα θα εξετάσουμε τα μονοπάτια τα οποία έχουμε προσομοιώσει αν έχουν χτυπήσει το φράγμα ή όχι και θα βρούμε την τιμή του δικαιώματος.

Ιστορικές Αναφορές στην Βιβλιογραφία

Το μοντέλο του Merton έχει οριστεί από τον Merton στην μελέτη του το 1976 όπου και βρίσκουμε την φόρμουλα επίλυσης για δικαιώματα plain vanilla. Για την αποτίμηση των barrier options έχουν προτείνει οι Metwally και Atiya το 2002 και Joshi και Leung το 2007 μεθόδους με προσομοίωση Monte Carlo όπου απέδωσαν αποτελέσματα για τα barrier options σε χαρτοφυλάκια αξιόγραφων. Στην εμπειρική μελέτη των An Y.και Suo W. το 2009 το μοντέλο Jump-Diffusion για τα barrier options έδωσε πολύ φτωχά αποτελέσματα σε σχέση με τα compounds options όπου απέδωσε καλύτερα από τον Black-Scholes μοντέλο.

Στην μελέτη των *Cathrine Jessen & Rolf Poulsen* το 2012 φαίνεται να επαληθεύεται η συμπεριφορά του μοντέλου στα barrier options αφού το μοντέλο του Merton αποτυγχάνει να παράξει αξιόπιστα αποτελέσματα. Ιδιαίτερη εντύπωση έχει η συμπεριφορά του μοντέλου για απλά δικαιώματα προαίρεσης, στα οποία το Merton’s Jump-Diffusion μοντέλο καταφέρνει να βγάλει καλύτερα αποτελέσματα από το Black-Scholes μοντέλο.

## 3.5 Μοντέλο Variance Gamma

H Variance gamma διαδικασία (VGP) στην θεωρία είναι μία στοχαστική διαδικασία κομμάτι της μαθηματικής θεωρίας των πιθανοτήτων. Η VGP, γνωστή και ως κίνηση Laplace, είναι μία Lévy διαδικασία καθορισμένη από μία τυχαία αλλαγή του χρόνου, αυτό που την διαχωρίζει από πολλές διαδικασίες Lévy είναι η ύπαρξη πεπερασμένων στιγμών. Δεν υπάρχει διάχυση όπως στα προηγούμενα μοντέλα τα οποία είδαμε αφού η VGP είναι μία καθαρή διαδικασία αλμάτων. Οι αυξήσεις των αλμάτων αυτών είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν μια variance gamma διαδικασία.

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια Variance Gamma διαδικασία ως:

$$X = \{X(t) = X(t;\theta,\sigma,v) = B(G(t;1,v),\theta,\sigma), \quad t \geq 0$$

Όπου:

- $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ [Δηλαδή Χ είναι κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ2]
- $B = \{B(t) = B(t;\theta,\sigma), t \geq 0\} \qquad B \sim Brownian\ motion(\theta,\sigma)$
  [κίνηση Brown, με παράμετρο τάσης θ και παράμετρο διακύμανσης σ]
- $B(t+\delta) - B(t) \sim N(\theta\delta, \sigma^2\delta)$ , $για\ όλα\ τα\ t \geq 0$
- $G = \{G(t) = (t;\mu,v), t \geq 0\} \qquad G \sim gamma\ process$
  [G είναι μια διαδικασία gamma ανεξάρτητη από την B, με τάση μ>0 και μεταβλητότητα v>0.
- $G(t+\delta) - G(t) \sim Gamma\left(\frac{\delta\mu^2}{v}, \frac{v}{m}\right)$ , $για\ t \geq 0\ και\ \delta > 0$

Αντίθετα με άλλες διαδικασίες οι οποίες περιγράφουν άλματα η διαδικασία Variance Gamma εμπερικλείει την διαδικασία με κίνηση Brown στην κορυφή της διαδικασίας gamma η οποία περιγράφει τον χρόνο. Με άλλα λόγια υπό την προϋπόθεση της υλοποίησης της τυχαίας αυτής διαδικασίας του χρόνου, η τιμή ακολουθεί την κίνηση Brown. Η πυκνότητα μπορεί να βρεθεί ως:

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(\theta g, \sigma^2 g) \cdot \gamma(\frac{t}{v}, \frac{1}{v})\, dg$$

Οι Madan , Carr και Chang (1998) έδειξαν πως με το Variance Gamma μοντέλο βαθμονομημένο με τις τιμές της αγοράς έλυσαν το πρόβλημα του volatility smile και των fat-tail κατανομών. Η τιμή μίας μετοχής μπορεί να βρεθεί ως:

$$S = S_0 \exp\{(rt + Y_t^{VG} + \omega t\}$$

Όπου $Y_t^{VG} = \theta G_t^v + \sigma W(G_t^v)$ είναι η variance gamma διαδικασία με τάση θt+σ$W_t$ και μεταβλητότητα v. O martingale διορθωτικός όρος

$$\omega = \left(\frac{1}{v}\right)\ln\left(1 - \theta v - \frac{1}{2}\sigma^2 v\right)$$

μας διαβεβαιώνει πως η αναμενόμενη απόδοση των τιμών του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με την άνευ ρίσκου απόδοση. Η παράμετρος ν (μεταβλητότητα) ελέγχει για κύρτωση και η παράμετρος θ για ασυμμετρία.

Βλέπουμε πως αν το ν→0 τότε εξαφανίζεται το θ και επιστρέφουμε στο μοντέλο Black και Scholes.

Για τα Plain vanilla δικαιώματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Για τα barrier δικαιώματα θα πραγματοποιήσουμε μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo όπως έχουν παρουσιαστεί στην μελέτη του Glasserman “Monte Carlo methods in financial engineering”.

Ιστορικές Αναφορές στην Βιβλιογραφία

Το μοντέλο Variance Gamma έχει εισαχθεί στην βιβλιογραφία από τους Madan και Serena το 1990 ενώ ειδική αναφορά έχει γίνει στην μελέτη του Lee το 2004 για την αποτίμηση των plain vanilla options με το μοντέλο Variance Gamma βάσει αντίστροφων μετασχηματισμών Fourier. Για τα barrier options ο Glasserman 2004 έχει βρει τιμές μέσω μεθόδων προσομοίωσης. Επίσης ο A.Avramidis το 2004 με το double-gamma bridge sampling αλγόριθμο στην μελέτη του μας δίνει έναν τρόπο αποτίμησης διαφόρων ειδών δικαιωμάτων.Plain Vanilla δικαιώματα , δικαιώματα ασιατικού τύπου, barrier δικαιώματα, Lookback δικαιώματα.

Ένας ακόμα αλγόριθμος που μας επιτρέπει να αποτιμήσουμε δικαιώματα, ευρωπαϊκού τύπου αλλά και αμερικάνικου, μας έχει δοθεί από τον F.Fiorani το 2001.

Σε συγκριτικές εμπειρικές μελέτες όπως των *Cathrine Jessen & Rolf Poulsen* το 2012 αλλά και των An Y.και Suo W. το 2009, το μοντέλο Variance Gamma δείχνει να μην εμφανίζει αξιόπιστα αποτελέσματα ούτε σε δικαιώματα plain vanilla αλλά ούτε και πιο περίπλοκα δικαιώματα όπως τα barrier options.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

# Εμπειρική Μελέτη

Η εμπειρική μελέτη όπως αναφέραμε και σε προηγούμενα σημεία θα εστιαστεί στην ικανότητα των μοντέλων περιγραφής της τιμής του υποκείμενου τίτλου *Black-Scholes, Constant Elasticity of Variance, Stochastic Volatility of Heston, Merton's Jump Diffusion* και *Variance Gamma* να αποτιμήσουν εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης όπως τα barrier options πάνω στην συναλλαγματική ισοτιμία Δολαρίου/Ευρώ. Η ροή της μελέτης είναι η εξής:

- Σε πρώτο στάδιο θα μετατρέψουμε τα δεδομένα για τα απλά δικαιώματα αγοράς, τα οποία έχουμε αντλήσει, από τεκμαρτές μεταβλητότητες στρατηγικών σε τιμές δικαιωμάτων αγοράς.
- Έπειτα θα υπολογίσουμε μέσω του υπολογιστικού προγράμματος *Matlab* τις παραμέτρους των μοντέλων που δίνουν το καλύτερο ταίριασμα στις τιμές των μοντέλων με τις παρατηρηθείσες τιμές της αγοράς.
- Θα ελέγξουμε τα μοντέλα με τις εκτιμημένες παραμέτρους πως συμπεριφέρονται σε σχέση με τις τιμές τις αγοράς εντός του δείγματος εκτίμησης (In-sample) για απλά δικαιώματα αγοράς.
- Επίσης θα ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων σε εκτός του δείγματος παρατηρήσεις(out-of-sample) και για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών.
- Θα αποτιμήσουμε τα εξωτικά δικαιώματα και θα τα συγκρίνουμε με τις τιμές τις αγοράς αλλά και μεταξύ τους ώστε
- Τέλος να βρούμε πιο μοντέλο μπορεί να περιγράψει καλύτερα το μονοπάτι της τιμής της ισοτιμίας και μπορεί να μας φέρει καλύτερα αποτελέσματα στην αποτίμηση.

## 4.1 Δεδομένα Εμπειρικής Μελέτης

Για να μπορέσουμε να κάνουμε την εμπειρική μελέτη θα χρειαστούμε

- δεδομένα για απλά δικαιώματα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση και την εύρεση της απόδοσης των μοντέλων περιγραφής της τιμής της ισοτιμίας
- και δεδομένα για δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα.

Λόγω του ότι τα για τα τελευταία δεν είναι εύκολο να βρούμε δεδομένα σε κάποια οργανωμένη αγορά αφού συναλλαγές γίνονται μεταξύ των ενδιαφερόμενων απευθείας θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα τα οποία παραθέτουν οι Jessen, Cathrine and Rolf Poulsen (2013).Τα δεδομένα αυτά χρησιμοποιήθηκαν στην εμπειρική μελέτη την οποία διεξήγαγαν ( *Empirical Performance of Models for Barrier Option Valuation*).

Τα δεδομένα έρχονται από δύο διαφορετικές πήγες. Τα μεν απλά δικαιώματα προαίρεσης από την British Bankers' Association και τα δεδομένα για τα barrier options από τον τομέα Risk-Management της Danske Bank, της μεγαλύτερης τράπεζας στην Δανία.

Ο υποκείμενος τίτλος είναι η συναλλαγματική ισοτιμία Δολαρίου/Ευρώ (USD/EUR). Οι κυριότεροι λόγοι της επιλογής της συναλλαγματικής ισοτιμίας Δολαρίου/Ευρώ ως υποκείμενο τίτλο είναι πως είναι η πιο ισχυρή ισοτιμία σε συναλλακτική δραστηριότητα με συνέπεια να έχει και τον μεγαλύτερο αριθμό συμβολαίων και σε απλά δικαιώματα αλλά και σε εξωτικές μορφές δικαιωμάτων όπως τα barrier options που θα μελετήσουμε.

Για να αποτιμήσουμε δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο ισοτιμίες θα πρέπει να σκεφτούμε πως μία ξένη ισοτιμία είναι ανάλογη με μία μετοχή που πληρώνει γνωστό μέρισμα. Ο κάτοχος της ξένης ισοτιμίας λαμβάνει μία απόδοση ίση με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο της χώρας.

Για κάθε ημέρα έχουμε παρατηρήσεις δικαιωμάτων με ληκτότητες 1 εβδομάδα, 1 μήνα ,3 μήνες, 6 μήνες, 12 μήνες και 24 μήνες .Επιπλέον έχουμε τιμές για strike τιμές ίσες με την τρέχουσα ισοτιμία (ATM) και strike τιμή σε επίπεδα 5% πάνω της τρέχουσας τιμής (Out –Of-The-Money για τα δικαιώματα αγοράς που θα εξετάσουμε) και 5% κάτω από την τρέχουσα τιμή (In-The-Money για τα δικαιώματα αγοράς). Συνολικά θα μελετήσουμε τα δεδομένα για διάστημα από 02 Ιανουαρίου 2004 μέχρι και 31 Δεκεμβρίου 2004.

Τα δεδομένα δίνονται σε μορφή τεκμαρτής μεταβλητότητας, ο συνήθης τρόπος απεικόνισης των δικαιωμάτων στην αγορά συναλλάγματος. Μας δίνονται

- ✓ τεκμαρτές forward μεταβλητότητες για At-The-Money δικαιώματα
- ✓ τεκμαρτές μεταβλητότητες, με ληκτότητα 1 μήνα, 3 μήνες και 12 μήνες για την στρατηγική 25-delta strangles
- ✓ τεκμαρτές μεταβλητότητες, με ληκτότητα 1 μήνα, 3 μήνες και 12 μήνες, για την στρατηγική 25-delta risk reversals

Αυτές οι τεκμαρτές μεταβλητότητες μας αποφέρουν τιμές για 12 απλά δικαιώματα αγοράς, έξι εκ των οποίων At-The-Money και από 3 δικαιώματα Out-Of-The-Money και In-The-Money.

Για να μπορέσουμε να εκμαιεύσουμε τις τιμές θα πρέπει αρχικά να ανατρέξουμε στο Ενότητα 2.8 για να δούμε τους τύπους αυτούς που ουσιαστικά θα μας βοηθήσουν να βρούμε την τιμή της τεκμαρτής μεταβλητότητας.

$$\sigma_{\Delta RR} = \sigma_{\Delta C} - \sigma_{\Delta P} \qquad , \qquad \sigma_{\Delta RR} = (\sigma_{\Delta C} + \sigma_{\Delta P})/2 \ - \sigma_{ATM}$$

Από την στιγμή που έχουμε 2 αγνώστους στις δύο αυτές σχέσεις και επίσης αυτές οι σχέσεις αναφέρονται σε OTM δικαιώματα μπορούμε να βρούμε τα $\sigma_{\Delta C}, \sigma_{\Delta P}$ δηλαδή τις τιμές του δικαιώματος αγοράς και πώλησης που επαληθεύουν τις στρατηγικές. Σύμφωνα με τις σχέσεις

$$K = Sexp\left(-N^{-1}\left(\Delta_c e^{(rf)T}\right)\sigma\sqrt{T} + \left(rd - rf + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

$$K = Sexp\left(-N^{-1}\left(-\Delta_p e^{(rf)T}\right)\sigma\sqrt{T} + \left(rd - rf + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

θα βρούμε τις τιμές strike για το κάθε δικαίωμα. Έπειτα γνωρίζουμε όλους τους αγνώστους και μπορούμε να εφαρμόσουμε την κλειστή μορφή Black& Scholes για να βρούμε τις τιμές των δικαιωμάτων.

Τέλος για να έχουμε ολοκληρωμένο σετ δεδομένων αντλήσαμε από την Κεντρικής Τράπεζας της Αμερικής δεδομένα για το σύντομο επιτόκιο (short rate) το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε ως r(d) δηλαδή ως το επιτόκιο του εγχώριου νομίσματος, ενώ από την Eurostat αντλήσαμε στοιχεία για τα αντίστοιχα επιτόκια για το νόμισμα του ευρώ τα οποία θα ονομάσουμε r(f) δηλαδή επιτόκιο ξένου νομίσματος.

Για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα το σετ δεδομένων περιέχει ημερήσιες πληροφορίες για δικαιώματα με μονό φράγμα αλλά και διπλό γραμμένα πάνω στην αγορά συναλλάγματος. Οι παρατηρήσεις είναι από 02 Ιανουαρίου μέχρι και 27 Σεπτεμβρίου 2005. Τα δεδομένα έχουν εξαχθεί από risk-management τμήμα που με την σειρά του τα έχει πάρει από ένα γραφείο FX-desk ρητά για σκοπούς εσωτερικής διαχείρισης κινδύνων.

Ο αριθμός των συμβολαίων είναι 1.744 και ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων είναι 80.424.

Χρήσιμες πληροφορίες για τα δεδομένα είναι οι εξής:

- Ο χρόνος για την λήξη δίνεται από την σχέση $T - t = \frac{\log\left(\frac{F}{S}\right)}{r_d - r_f}$
- Κρατάμε μόνο τα δεδομένα για την ισοτιμία που μελετάμε.
- Κρατάμε μόνο τα δικαιώματα με μονό φράγμα.
- Κρατάμε μόνο τα δικαιώματα αγοράς για εξοικονόμηση χρόνου της μελέτης.
- Πέραν των προηγουμένων κρατάμε την διαλογή που είχαν πραγματοποιήσει οι C.Jessen&R.Poulsen (2012)

## 4.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Μία διαδικασία εκτίμησης υποθέτει πως έχοντας ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων για το μοντέλο, βρίσκουμε τιμές των παραμέτρων τέτοιες ώστε τα τετράγωνα των διαφορών από τιμές των δικαιωμάτων που εξάγονται από το μοντέλο με τις τιμές της αγοράς έχουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Μαθηματικά εκφράζεται ως:

$$\hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} (f_i^{market}(T_i, K_i) - f_i^{model}(T_i, K_i))^2$$

Όπου $\hat{\theta}$ είναι το σετ των παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου και N συμβολίζει τον αριθμό των δικαιωμάτων. Στην μελέτη μας έχουμε συνολικά 12 δικαιώματα άρα N=12.

Θα βρούμε τις τιμές των απλών δικαιωμάτων που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά και θα χρησιμοποιήσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt με εφαρμογή στο υπολογιστικό πακέτο matlab και την εντολή *lsqnonlin* για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα για την εύρεση τιμής στα απλά δικαιώματα αγοράς. Έπειτα θα ελέγξουμε την ορθότητα των τιμών που θα μας δώσουν τα μοντέλα με τις εκτιμηθείσες τιμές και θα βρούμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για τον χρονικό ορίζοντα 10 ημερών. Τέλος θα εισάγουμε τις τιμές από τις παραμέτρους στα μοντέλα για την εύρεση τιμής σε barrier options, θα αποτυπώσουμε τις τιμές και θα τις συγκρίνουμε με τις τιμές της αγοράς.

Η μέθοδος Levenberg-Marquardt είναι από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές για να παράγουμε λύσεις σε μη-γραμμικά least square curve fitting προβλήματα. Όπως άλλοι αριθμητικοί αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης, ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt είναι μία επαναληπτική διαδικασία. Για να αρχίσει μια ελαχιστοποίηση, ο χρήστης πρέπει να παρέχει μια αρχική εικασία για το διάνυσμα παραμέτρων .

Ας σκεφτούμε N παρατηρήσεις y(i), όπου i=1,2,…..,N και μία εξίσωση $\mathrm{g}: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ με n : παραμέτρους $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}}$. Υποθέτουμε πως $N \geq n$.

Στην μελέτη μας οι N παρατηρήσεις είναι οι τιμές των απλών δικαιωμάτων αγοράς που έχουμε παρατηρήσει διαμορφωμένες στην αγορά.

Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου μας $g(x; p_i) = \hat{y}_i$ και βρίσκουμε τα -κατάλοιπα $r_i(x) \coloneqq \hat{y}_i - y_i$. Συνεπώς βρίσκουμε το $R = (r_1, \dots\dots, r_N)^T$ το οποίο είναι το διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων.

Τότε πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_x f(x) \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2}R(x)^T R(x)$$

Οι Levenberg K.(1944) και Marquardt D(1963) πρότειναν μία λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει την μέθοδο *Steepest descent* με την μέθοδο των Gauss-Newton.

O Levenberg προτείνει να υπολογίσουμε την κατεύθυνση $d_k$ ως τη λύση στη παρακάτω τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton.

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_\kappa I)d_k = -(R'(x^k)^T R(x^k)$$

Όπου $I$ είναι μοναδιαία μήτρα και $\lambda_k > 0$ είναι μία παράμετρος απόσβεσης. Η μήτρα στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένη. Με αυτόν τον τρόπο η λύση $d_k$ εγγυάται πως είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση $f$ για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης. Για μικρές τιμές του $\lambda_k$ η μέθοδος του Levenberg συμπεριφέρεται σαν την επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών $x^k$ που είναι κοντά στο $x^*$. Για επαναλήψεις μακριά από την βέλτιστο η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να δοθεί με την σχέση

$$d_k \approx -\frac{1}{\lambda_k}(R'(x^k)^T R(x^k)$$

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης $\lambda_k$ επηρεάζει το $d_k$ καθώς επίσης και την διάρκεια κάθε βήματος Levenberg-Marquardt. Από την στιγμή που η επιλογή έχει άμεσο αντίκτυπο στην σταθερότητα της μεθόδου είναι σημαντικό πως θα ορίσουμε το $\lambda_k$ και πως θα αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη.

Μία συνήθης επιλογή είναι

$$\lambda_0 \coloneqq \tau \,.\, \max_\iota\{D_0\,(i,i)\}_{i=1,\ldots n}.$$

Η παράμετρος $\tau$ σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη του μοντελοποιού για τις τιμές των παραμέτρων.

Συνολικά η εκτίμηση έγινε για 254 παρατηρήσεις από 02 Ιανουαρίου 2004 μέχρι και 31 Δεκεμβρίου 2004. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους Πίνακες 2 και 3

Αποτελέσματα Black-Scholes

Το μοντέλο Black-Scholes είχε μόνο μία παράμετρο για να εκτιμήσουμε, την μεταβλητότητα. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που εκτιμήσαμε είναι

$\sigma = 0{,}106484$ με τυπική απόκλιση 0,0040 ενώ το μέγιστο και το ελάχιστο κυμαίνονται στο 7% για το μέγιστο και 10% για το ελάχιστο.

Είναι φυσιολογικό το μοντέλο Black Scholes να μην μπορεί να ταιριάξει απόλυτα με τις τιμές τις αγοράς, μεγάλο ρόλο σε αυτό παίζει πως το μοντέλο έχει μόνο μία μεταβλητή. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως στην σταθερότητα του και στα αποτελέσματα του δεν είναι σωστό. Οφείλει τώρα να δούμε την συμπεριφορά των τιμών του μοντέλου σε σχέση με της τιμές τις αγοράς στο διάστημα του έτους που έγινε η εκτίμηση. Το Σχήμα 5 μας δείχνει την κοινή πορεία των τιμών των δικαιωμάτων με ληκτότητα 1 μήνα.

Γραφικά διακρίνουμε πως το μοντέλο έχει ταιριάξει στην κίνηση του ATM δικαιώματος με λήξη ένα μήνα. Είναι λογικό από την στιγμή που στο χαρτοφυλάκιο το οποίο εκτιμήσαμε δεν βάλαμε σταθμά για να αυξήσουμε ή να μειώσουμε την επίδραση των OTM ή των ITM δικαιωμάτων.

Οι απόλυτες διαφορές αγοραίας τιμής με τιμή μοντέλου δείχνουν πως το μοντέλο Black-Scholes καταφέρνει την καλύτερη απόδοση στα ITM δικαιώματα ενώ έχει φτωχή απόδοση στα OTM. (Πίνακας 6)

## Αποτελέσματα Constant Elasticity of Variance Μοντέλο

Το δεύτερο μοντέλο το οποίο εκτιμήσαμε έχει δύο παραμέτρους προς εκτίμηση κάτι που μας κάνει να πιστεύουμε πως θα ταιριάξει καλύτερα στις τιμές της αγοράς. Οι παράμετροι άλφα και σίγμα μας πέτυχαν μέσες τιμές 1.456013 και 0,95998 αντίστοιχα με τυπικές αποκλίσεις για το σίγμα σε ικανοποιητικό βαθμό. Ενώ για το άλφα έχουμε μεγαλύτερη τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη διασπορά στα μέγιστα και τα ελάχιστα. -+19% για το σίγμα και -+36% για το άλφα. Ουσιαστικά μας δείχνει η εκτίμηση πως η ελαστικότητα της μεταβλητότητας είναι αρκετά υψηλή και πώς η μεταβλητότητα του δικαιώματος ανεβαίνει όταν η ισοτιμία ανεβαίνει.

Οι απόλυτες διαφορές αγοραίας τιμής με τιμή μοντέλου για το CEV μας δείχνουν καταφέρνει για τα ITM και ATM δικαιώματα να πιάσει πολύ υψηλές αποδόσεις. (Πίνακας 6)

## Αποτελέσματα Μοντέλου Στοχαστικής Μεταβλητότητας του Heston

Το μοντέλο του Heston είναι το μοντέλο με τις περισσότερες παρατηρήσεις προς εκτίμηση από τα μοντέλα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε . Αυτό αυτομάτως το καθιστά υποψήφιο να μας δώσεις τις μικρότερες τιμές στις διαφορές ελαχίστων τετραγώνων. Όσο περισσότεροι παράμετροι τόσο καλύτερο το ταίριασμα του μοντέλου στις τιμές της αγοράς. Η θεωρία επιβεβαιώνεται και στον Πίνακα 3 όπου συγκρίνονται τα ελάχιστα τετράγωνα των διαφορών στα 5 μοντέλα. Οι μέσες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου είναι

$$v0 = 0.11433\,, \qquad \theta = 0{,}012337, \qquad \kappa = 2{,}010933, \qquad \eta = 0{,}200912, \qquad \rho = -0{,}062638$$

Ενώ τα τετράγωνα των διαφορών 0.0000033826. Δηλαδή λιγότερο από το μισό από το δεύτερο μοντέλο όπου είναι το CEV με 0,0000071576. Οι αποκλίσεις των τιμών συμπεριφέρονται κανονικά .

Οι απόλυτες διαφορές αγοραίας τιμής με τιμή του μοντέλου Heston με στοχαστική μεταβλητότητα μας εμφανίζουν πολύ καλές επιδόσεις του μοντέλου για ATM, όπου είναι και οι καλύτερες για το σύνολο των μοντέλων καθώς και για ITM δικαιώματα όπου επίσης είναι οι καλύτερες για το σύνολο των μοντέλων. Στα OTM όπως και τα προηγούμενα δύο μοντέλα δείχνει χειρότερες επιδόσεις. (Πίνακας 6)

Αποτελέσματα Μοντέλου Merton Jump Diffusion

Η εκτίμηση των παραμέτρων του Merton μας δίνει τιμές για το μοντέλο

$$\sigma = 0{,}080657\,, \lambda = 1{,}025238\,, \mu(\zeta) = 0{,}005098\,, \sigma(\zeta) = 0{,}004008$$

Οι τιμές οι οποίες εκτιμήθηκαν έχουν διαφορές με μέση τιμή 0,0002881677. Το ότι το μοντέλο έχει δυο πηγές αβεβαιότητας μας φέρνει αποτελέσματα στην εκτίμηση με μικρότερη ακρίβεια από τα λοιπά μοντέλα που περιγράφουν την κίνηση της ισοτιμίας.

Αποτελέσματα Μοντέλου Variance Gamma

Για το τελευταίο μοντέλο η εκτίμηση μας έφερε τιμές για τις παραμέτρους

$$\theta = 0{,}034279\,, \ \sigma = 0{,}1097332 \qquad v = 0.099816,$$

ενώ σύμφωνα με τους υπόλοιπους δείκτες δείχνει να ταιριάζουν καλά οι τιμές του μοντέλου στο δείγμα των πραγματικών τιμών.

Οι απόλυτες διαφορές αγοραίας τιμής με τιμή του μοντέλου Variance Gamma δείχνουν στο σύνολο πως απέδωσε μεγαλύτερα σφάλματα από τα μοντέλα CEV, Black&Scholes και Heston όμως κοιτώντας αναλυτικά τα επιμέρους αποτελέσματα στα OTM και ITM δικαιώματα κατάφερε να πιάσει την καλύτερη απόδοση. Τα OTM είναι τα δικαιώματα στα οποία τα προηγούμενα μοντέλα δεν έδωσαν τόσο ακριβή αποτελέσματα. Αντίθετα μεγαλύτερο σφάλμα ,διπλάσιο περίπου από τα υπόλοιπα μοντέλα έδωσαν τα αποτελέσματα για τα ATM. (Πίνακας 6)

Για την συνολική εικόνα παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των τιμών της αγοράς και των τιμών που μας δίνουν τα μοντέλα μας με τις εκτιμημένες παραμέτρους. (Σχήμα 6, Σχήμα 7, Σχήμα 8)

## 4.3 Προβλεπτική Ικανότητα Μοντέλων Περιγραφής της Τιμής

Η περίπτωση που μία σχέση μπορεί να περιγράψει καλύτερα την κίνηση τιμών μέσα στο δείγμα το οποίο έχει εκτιμηθεί δεν σημαίνει πως απαραίτητα μπορεί να έχει και καλή προβλεπτική ικανότητα. Αρκεί να σκεφτούμε ένα πολυώνυμο το οποίο καταφέρνει να μοντελοποιήσει τον θόρυβο σε ένα δείγμα.

Συνεπώς έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον να ελέγξουμε τα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιήσαμε και εκτιμήσαμε πως συμπεριφέρονται στην περιγραφή των τιμών εκτός του δείγματος εκτίμησης. Έτσι συμβολίζουμε την κάθε ημέρα που έχει γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων με T=0 . Έπειτα βρίσκουμε τις τιμές για τις ημέρες T=1,2,3…10 για κάθε ένα μοντέλο και τις συγκρίνουμε με τις τιμές τις αγοράς. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και για τις 254 ημέρες εκτίμησης για τα δικαιώματα At-The-Money , In-The-Money και Out-of-The-Money με λήξη ένα μήνα. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους Πίνακες 7, 8 και 9. Επίσης τα Σχήματα 9,10,11 δείχνουν την μέση τιμή για όλες τις παρατηρήσεις στην εξέλιξη των καταλοίπων για το διάστημα T=0,1,2…10.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως όσο απομακρυνόμαστε από την ημέρα της εκτίμησης T=0 τα κατάλοιπα αυξάνονται. Μια παρατήρηση την οποία αναμέναμε αφού οι μεταβλητές μεταβάλλονται και μειώνεται η περιγραφική ικανότητα των μοντέλων.

Στο σύνολο το μοντέλο του Heston φαίνεται πως έχει πολύ καλύτερη προβλεπτική ικανότητα και πως η στοχαστική μεταβλητότητα μπορεί να εξηγήσει καλύτερα την κίνηση της ισοτιμίας για το σύνολο των δικαιωμάτων.

Επίσης βλέπουμε πως στα OTM και ITM το μοντέλο Variance Gamma σε αντίθεση με τα ATM δικαιώματα καταφέρνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα σε σημείο όπου στα ITM δικαιώματα και την ημέρα T=10 η επίδοση του συγκλίνει με την επίδοση του μοντέλου του Heston.

## 4.4 Αποτίμηση Δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα

Το επόμενο σκέλος της εμπειρικής μελέτης έχει να κάνει με τον σκοπό της μελέτης αυτής. Η αποτίμηση των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα όπως εξηγήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα για τους επενδυτές. Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός πως αυτού του τύπου τα δικαιώματα είναι συμφωνίες κατευθείαν μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων και δεν υπάρχει τις περισσότερες φορές ημερήσια καταγραφή των τιμών για να στηριχθεί η αγορά και να μελετήσει την συμπεριφορά τους. Επίσης τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα έχουν μεγάλη εξάρτηση από το μονοπάτι της τιμής του υποκείμενου τίτλου αφού τα σημεία του μονοπατιού δείχνουν αν το δικαίωμα κατά την λήξη του θα είναι εν ισχύ ή όχι.

Για να παρουσιάσουμε το μονοπάτι της τιμής της ισοτιμίας θα χρησιμοποιήσουμε προσομοιώσεις με την μέθοδο Monte Carlo. Συνεπώς για το κάθε μοντέλο θα δημιουργήσουμε N αριθμό μονοπατιών της τιμής και θα υπολογίσουμε τις τελικές χρηματοροές του δικαιώματος στην λήξη του. Έπειτα θα βρούμε την μέση τιμή των χρηματοροών και θα την προεξοφλήσουμε ώστε να βρούμε την τιμή του δικαιώματος την στιγμή παρατήρησης. Τέλος θα ελέγξουμε τις τιμές που παρήγαγαν τα μοντέλα με τις τιμές της αγοράς τις οποίες έχουμε ως δεδομένα.

Ο αριθμός των επαναλήψεων θα είναι 10.000 επαναλήψεις και θα παρατηρούμε την τιμή σε ημερήσια βάση. Υποθέτουμε πώς είναι το κλείσιμο της μέρας. Οι συνολικές τιμές που πρέπει να υπολογίσει το υπολογιστικό πρόγραμμα Matlab για το σύνολο των προσομοιώσεων Monte Carlo και το σύνολο των παρατηρήσεων είναι $1{,}5 * 10^9$. Είναι φανερό πως η μέθοδο Monte Carlo είναι μια χρονοβόρα μέθοδος για την αποτίμηση τόσων πολλών παρατηρήσεων.

Στον Πίνακα 5 υπάρχει η σχετική πληροφόρηση για το δείγμα των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη μας.

Συνολικά έχουμε 46 συμβόλαια και 1001 παρατηρήσεις για αυτά τα συμβόλαια. Ο μέσος χρόνος ζωής των συμβολαίων είναι 53 ημέρες και η μέση ληκτότητα είναι 26 ημέρες. Τα δικαιώματα είναι κατανεμημένες σωστά με 20 UpOut δικαιώματα αγοράς και 17 DownOut δικαιώματα αγοράς όμως με μεγαλύτερο εύρος παρατηρήσεων για τα DownOut. Το να βλέπουμε περισσότερα DownOut και UpOut δικαιώματα είναι σύνηθες φαινόμενο στην αγορά αφού τα UpIn και UpOut δικαιώματα αγοράς δεν είναι εύκολο να δώσουν στους επενδυτές κέρδη και δεν προτιμώνται.

Για την αποτίμηση έχουμε για κάθε ημέρα παρατήρησης από τα δεδομένα τις εξής μεταβλητές, ληκτότητα (*time to maturity*), τιμή ισοτιμίας (*spot price*), τιμή άσκησης του δικαιώματος (*strike price*), επίπεδο φράγματος (*barrier level*) και τα επιτόκια ευρώ (EUR) και δολαρίου (USD). Έπειτα στο υπολογιστικό πρόγραμμα MATLAB ελέγχουμε σε ποια ημερομηνία αντιστοιχούν τα στοιχεία αυτά για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα και με μία βοηθητική μεταβλητή ανασύρουμε τις παραμέτρους της ίδιας ημέρας που έχουμε εκτιμήσει στα απλά δικαιώματα αγοράς. Έτσι έχουμε όλα τα στοιχεία για να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα. Αυτό επαναλαμβάνεται για όλες τις παρατηρήσεις.

Στο τέλος για την κάθε παρατήρηση των δεδομένων έχουμε εκτός από την τιμή των δεδομένων και το σετ τιμών από τα μοντέλα αποτίμησης.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις επιδόσεις τους θα υπολογίσουμε και δύο τιμές ακόμα. Η πρώτη είναι το Σχετικό Σφάλμα το οποίο μας δίνεται από την σχέση

$$rerror = 100 * \frac{|B^{market} - B^{model}|}{|B^{market}|}$$

Καθώς επίσης θα υπολογίσουμε και το απόλυτο σφάλμα. Δηλαδή

$$abserror = |B^{market} - B^{model}|$$

<u>Αποτελέσματα</u>

Για τα UpOut δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα βλέπουμε στον Πίνακα 10 τα αποτελέσματα από την αποτίμηση. Οι τιμές είναι οι μέσοι όροι των σχετικών σφαλμάτων ανά παρατήρηση καθώς και των απόλυτων σφαλμάτων ανά παρατήρηση. Διακρίνουμε πως το μοντέλο Black-Scholes κατάφερε να φέρει πολύ σταθερές τιμές με μικρά σφάλματα. Το μοντέλο του Heston είχε καλή επίδοση με σχετικό σφάλμα 0,3111845 .Από τα μοντέλα τα οποία περιείχαν άλματα αλλά και από το constant elasticity of variance δεν πήραμε τιμές με αποδεκτό επίπεδο σχετικού σφάλματος.

Για τα UpIn δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα το μοντέλο Black Scholes δείχνει να αποτιμά με μεγάλη ακρίβεια μόλις 0,04822% σχετικό σφάλμα ενώ έπεται το μοντέλο Heston με στοχαστική μεταβλητότητα. Το Constant elasticity of Variance μοντέλο είναι στην τρίτη θέση ενώ το Variance Gamma και το μοντέλο του Μερτον δείχνουν αποτελέσματα λιγότερο ακριβή. Τα αποτελέσματα δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 11

Για τα DownOut δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα ο Πίνακας 12 δείχνει τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων για τις 474 παρατηρήσεις. Το μοντέλο Black-Scholes και το μοντέλο με την στοχαστική μεταβλητότητα του Heston κατάφεραν να φέρουν πολύ καλά αποτελέσματα ενώ το μοντέλα τα οποία εμπεριέχουν άλματα δώσανε ανακριβή αποτελέσματα με σχετικά σφάλματα 1,77488 για το Merton και 2,9896 για το Variance Gamma μοντέλο.

Για τα DownIn δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα το μοντέλο Black-Scholes παρουσιάζει υψηλά σχετικά σφάλματα ενώ το μοντέλο που μας δίνει τιμές πιο κοντά στις αγοραίες είναι το μοντέλο του Heston με την στοχαστική μεταβλητότητα έπειτα κατά σειρά τα καλύτερα αποτελέσματα έδωσαν το variance gamma , το constant elasticity of variance , το μοντέλο του Merton και τέλος το Black-Scholes. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Πίνακα 13 σε σειρά κατάταξης από το ακριβέστερο μοντέλο αποτίμησης στο πιο ανακριβή.

## 4.5 Σύγκριση Με Παλαιότερες Μεθόδους

Στην εμπειρική μελέτη των C.Jessen &R.Poulsen (2012) σε δικαιώματα τα οποία είναι γραμμένα σε ισοτιμίες τα αποτελέσματα δείχνουν πως τα μοντέλα συνεχούς μονοπατιού χωρίς άλματα τα καταφέρνουν καλύτερα να εξηγήσουν τα δεδομένα της αγοράς ενώ τα μοντέλα τα οποία εμπεριέχουν άλματα, αν και για τα απλά ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα θεωρούνται μία αξιόπιστη πηγή , για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα ευρωπαϊκού τύπου αποφέρουν αποτελέσματα σχετικά ανακριβή.

Σε μία ακόμα εμπειρική μελέτη των Y.An &W.Suo (2009) η οποία επίσης πραγματεύεται την αντιστάθμιση κινδύνου με μοντέλα αποτίμησης για δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο την ισοτιμία ευρώ προς δολάριο Αμερικής (EUR/USD) τα αποτελέσματα δείχνουν πως τα αποτελέσματα στην σύγκριση των μοντέλων εξαρτώνται από το πόσο «εξωτικό» είναι το δικαίωμα. Αναφέρεται πως για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα, ειδικότερα για τα UpOut δικαιώματα τα μοντέλα με στοχαστική μεταβλητότητα αποδίδουν καλύτερα από ότι το Black-Scholes μοντέλο. Ενώ όπως και στην μελέτη των C.Jessen &R.Poulsen (2012) τα μοντέλα τα οποία εμπεριέχουν άλματα στην κίνηση των μετοχών αποτυγχάνουν να δώσουν ποιοτικά αποτελέσματα. Πέραν των προηγουμένων διευκρινίζεται πως μεγάλη σημασία για το πιο μοντέλο θα προτιμήσουμε έχουν οι μεταβλητές που κάνουν το δικαίωμα εξωτικό. Για παράδειγμα το ύψος του φράγματος ή αν το δικαίωμα είναι UpIn ή UpOut..

Στην εμπειρική μελέτη των S.Easton,R.Gerlach,M.Graham και F.Tuyl (2003) χρησιμοποιούνται παρατηρούμενες τιμές δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα που συναλλάσσονται στο Αυστραλιανό Χρηματιστήριο. Στα αποτελέσματα τους παρατηρούν πως οι παρατηρούμενες αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα είναι μεγαλύτερες από αυτές που εξάγουν τα μοντέλα σε αντίθεση με τα απλά δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου που οι αγοραίες τιμές είναι μικρότερες των τιμών που παράγουν τα μοντέλα δείχνοντας πως υπάρχουν και άλλοι παράμετροι οι οποίοι επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα

Η εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε επιβεβαιώνει τους C.Jessen &R.Poulsen (2012) για την αξιοπιστία του μοντέλου Variance Gamma στα απλά δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου. Ελαφρώς περισσότερο ακριβές από το μοντέλο Heston στοχαστικής μεταβλητότητας και το constant elasticity of variance για τα In-The-Money και Out-Of-The-Money δικαιώματα.

Στα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα το μοντέλο Black-Scholes μας έδωσε τιμές με τα μικρότερα σφάλματα, κάτι το οποίο μπορούμε να το εκλάβουμε ως εκπλήρωση αυτοεπιβεβαιούμενων προσδοκιών, από την στιγμή που στην αγορά το μοντέλο Black-Scholes χρησιμοποιείται ευρέως για την τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών προϊόντων. Πέρα από αυτό το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας Heston έδειξε να είναι αρκετά καλό στην αποτίμηση των barrier options δίνοντας μας μικρές αποκλίσεις από την τιμή. Τα μοντέλα τα οποία περιέχουν άλματα, όπως και στις προαναφερθείσες μελέτες δεν κατάφεραν να μας δώσουν συνεπή αποτελέσματα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

## Συμπεράσματα

Όσο προχωράμε στην παγκοσμιοποίηση της αγοράς η ανάγκη των επενδυτών για μείωση του ρίσκου των χαρτοφυλακίων τους αλλά και η ανάγκη των επιχειρήσεων για μείωση του κόστους παραγωγής και παράλληλα αύξηση του μεριδίου τους στην παγκόσμια αγορά καθιστά την αγορά συναλλάγματος (FX market) την πιο ταχέως αναπτυσσόμενη στον πλανήτη.

Σύμφωνα με την Bank of International Settlement (BIS, τριετής αναφορά 2013) οι παγκόσμιες καθημερινές συναλλαγές σε τρέχουσες αλλά και forward ισοτιμίες κυμαίνεται στα 5.3 τρισεκατομμύρια δολάρια Αμερικής. Ποσό που είναι κατά 32% μεγαλύτερο από το 2010 και κατά 60% από αυτό του 2007.

Η ανάπτυξη της αγοράς συναλλάγματος σε συνδυασμό με τις όλο και αυξανόμενες ανάγκες των επενδυτών και των επιχειρήσεων για διαφοροποίηση φέρνουν στην επιφάνεια στρατηγικές και είδη συμβολαίων εξειδικευμένα στους αντισυμβαλλόμενους. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης γραμμένα πάνω σε ισοτιμίες εξυπηρετούν αυτές τις ανάγκες των επενδυτών και των επιχειρήσεων. Πλέον ακόμα ένα πιο εξειδικευμένο συμβόλαιο κερδίζει με τον χρόνο έδαφος και αυτό είναι τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα. Η δυσκολία αποτίμησης τους είναι τροχοπέδη στην ακόμα πιο γρήγορη ανάπτυξη που θα μπορούσαν να έχουν. Μία δυσκολία που έγκειται στα ανεπαρκή ιστορικά στοιχεία συναλλαγών αλλά και στην συνεχή παρακολούθηση του μονοπατιού της ισοτιμίας μέχρι την λήξη τους.

Στην εμπειρική μελέτη που ολοκληρώσαμε αποτιμήσαμε τέτοιου είδους δικαιώματα αγοράς με πέντε αντιπροσωπευτικά μαθηματικά μοντέλα αποτίμησης. Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους των μοντέλων στηριχτήκαμε σε απλά δικαιώματα αγοράς γραμμένα πάνω σε ισοτιμίες. Μία τακτική που μπορεί να διευκολύνει την αποτίμηση αφού για απλά δικαιώματα κάποιος μπορεί να βρει στοιχεία για παρατηρήσεις πολύ πιο εύκολα και μπορεί να παρακάμψει την πρώτη δυσκολία στην αποτίμηση που αναφέραμε προηγουμένως. Ο έλεγχος της προβλεπτικής ικανότητας των μοντέλων που περιγράφουν τις κινήσεις του υποκείμενου τίτλου που πραγματοποιήσαμε μας δείχνει αν τα μοντέλα μπορούν όντως να περιγράψουν τις κινήσεις του υποκείμενου τίτλου ακόμα και σε εκτός δείγματος τιμές με σκοπό την πρόβλεψη των τιμών της αγοράς.

Έπειτα προσομοιώσαμε τις τιμές της ισοτιμίας και μέσα από τα μονοπάτια μπορέσαμε να δούμε τις πιθανότητες που υπάρχουν η τιμή της ισοτιμίας να περνάει το φράγμα και να ενεργοποιείται η να απενεργοποιείται (ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) το δικαίωμα. Με αυτό τον τρόπο προσπαθήσαμε να ελαχιστοποιήσουμε την αβεβαιότητα για την τιμή της ισοτιμίας που δημιουργεί την δεύτερη δυσκολία.

Σύμφωνα με τα παραπάνω κάποια χρήσιμα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εμπειρική μελέτη μας είναι τα εξής.

- ✓ Για τα απλά δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου ITM και OTM το μοντέλο το οποίο είναι μία καθαρή διαδικασία αλμάτων κατάφερε να εξηγήσει καλύτερα τις παρατηρήσεις της αγοράς έχοντας το μικρότερο απόλυτο σφάλμα μεταξύ τιμή αγοράς – τιμή μοντέλου, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα. Το ότι τα μοντέλα που εμπεριέχουν άλματα μπορούν να αποτιμήσουν καλύτερα τα απλά δικαιώματα το έχουν επισημάνει και οι C.Jessen &R.Poulsen (2012)

- ✓ Στο σύνολο των δικαιωμάτων κατά σειρά τα μοντέλα που πέτυχαν να εξηγήσουν την αγορά κατά σειρά είναι:
  Heston Stochastic Volatility
  Constant Elasticity of Variance
  Black&Scholes με παρόμοια απόδοση
  Variance Gamma μοντέλο και
  Merton το οποίο δείχνει αποτελέσματα πολύ μακριά από την αγορά.

- ✓ Στα απλά δικαιώματα όλα τα μοντέλα πλην του Variance Gamma τείνουν να δείχνουν μεγαλύτερη τιμή από αυτών της αγοράς κάτι το οποίο έχουν επισημάνει και οι S.Easton,R.Gerlach,M.Graham και F.Tuyl (2003). Το Variance Gamma είναι το μοναδικό που μας δίνει τιμές μικρότερες της αγοράς

- ✓ Για τα δικαιώματα τα οποία υπόκεινται σε φράγμα στην μελέτη μας γίνεται σαφές πως η αξιοπιστία του κάθε μοντέλου αποτίμησης είναι συνδεδεμένη με τον τύπο του δικαιώματος που υπόκειται σε φράγμα.

- ✓ Το μοντέλο με στοχαστική μεταβλητότητα του Heston δείχνει να μπορεί να δώσει ακριβέστερα αποτελέσματα σε όλα τα είδη δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα.

<u>Προτάσεις για Έρευνα</u>

- ✓ Ενδιαφέρον θα είναι να υπάρξει εμπειρική έρευνα στην οποία η εκτίμηση των παραμέτρων με την ελαχιστοποίηση των διαφορών των τετραγώνων των σφαλμάτων να γίνει αφού έχουμε εισάγει σταθμά ανάλογα με το είδος του δικαιώματος. (ATM,ITM,OTM)

- ✓ Στην αγορά οι επενδυτές έχουν και τις τιμές bid ,ask οι οποίες μας δίνουν το bid-ask spread. Η διαφορά των τιμών ask και bid είναι συνδεδεμένη με την ρευστότητα στην αγορά του υποκείμενου τίτλου Για παράδειγμα τα ATM δικαιώματα είναι γενικότερα τα πιο ρευστοποιήσιμα δικαιώματα. Μια μελέτη που θα περιλαμβάνει αυτή την αβεβαιότητα των τιμών θα είναι πιο ολοκληρωμένη.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

## Άρθρα

1. *Andersen L. "Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model." J.Comput.Finance.2008,11 p.1-42*
2. *An Y. & Suo W., "An empirical comparison of option pricing models in hedging exotic options" Financ. Mgmt, 2009 , 38(4) 889-91*
3. *Avramidis A.N., L'Ecuyer P. "Efficient Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Option Pricing Under the Variance Gamma Model" Management Science 52, 2006, 1930-1944*
4. *Avramidis A.N. "Efficient pricing of barrier options with the Variance-Gamma model. In proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, pp. 574-1578,2004 (IEEE press)*
5. *Aït-Sahalia, Y., "Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach", Econometrica , 70, 223-262.*
6. *Black F.  and Scholes M. " The Pricing Of Options and Corporate Liabilities" Journal of Political Economy 81 (1973), 637-659*
7. *Cathrine Jessen & Rolf Poulsen "Empirical performance of models for barrier option valuation" 2012*
8. *Carr P. and  Crosby,J. "A class of Levy Process Models with almost exact calibration to both barrier and vanilla FX options" Quantit.Finance  2010, 10(10), 1115-1136*
9. *Coleman, T.F. and Y. Li, "An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds," SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, pp. 418–445, 1996*
10. *Coleman, T.F. and Y. Li, "On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds," Mathematical Programming, Vol. 67, Number 2, pp. 189-224, 1994.*
11. *C.F. Lo, P.H. Yuen, C.H. Hui, Constant elasticity of variance option pricing model with time-dependent parameter, Int. J. Theor. Appl. Finance 4 (2000) P 661–674.*
12. *Delbaen F. , Shirakawa H. "A Note on Option Pricing dor the Constant Elasticity of Variance Model" Asia-Pacific Financial Markets 9 (2002), 85-99*
13. *David S Bales, "Empirical option pricing: a retrospection". Journal of Eco. Volume116, Issues 1-2 , September – October 2003, 387-404*
14. *David C. Emanuel and James D. MacBeth. "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model." Journal of Financial and Quantitative Analysis 17 (November 1982), 533-54.*
15. *Dennis, J.E., Jr., "Nonlinear Least-Squares," State of the Art in Numerical Analysis, ed. D. Jacobs, Academic Press, pp. 269–312, 1977*
16. *Easton, S. Gerlach, R,. Graham, M. and Tuyl, F., "An empirical examination of the pricing of exchange-traded barrier options" J Fuk Mkts  2004, 24(11), 1049-1064*
17. *Fiorani F. "The variance-gamma process for option pricing" Mathematics of Finance Pract.Seminar Spring 2001*

18. *G.Bakshi,C.Cao,Z.Chen"Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models" The journal of Finance, Vol.LII, No 5, Dec.1997*
19. *Gut A., 2009. An Intermediate Course in Probability. Springer Second edition*
20. *Gilli M., Schumann E., 2010. Calibration Option Pricing Models with Heuristics. COMISEF Working papers series 30, 1-7*
21. *Hsu Y.L , Lin T.I. ,Lee C.F. "Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: Intergration and detailed derivation" Math and Comp In Simulation 79 (2008), 60-71*
22. *Heston S.L. "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options" Rev Financ.Stud.(1993), 327-344*
23. *Haastrecht A., Pelsser, A.A.J., 2008. E_cient, Almost Exact Simulation of the Heston Stochastic volatility model. Netspar 44, 7-9.*
24. *Hirsa A., Madan D.B."Pricing American Options Under Variance Gamma" journal of Computational Finance 2001*
25. *Zhang, Peter G., 1998, Exotic Options, 2 nd Edition, World Scientific Publishing, Singapore.*
26. *Report in global Foreign Exchange market activity in 2013. Bank for International Settlement is Availabe at : http://www.bis.org/publ/rpfx13fx.pdf*
27. *K.J.In'T Hout, S.Foulon "Adi Finite Difference Schemes for Option Pricing In The Heston Model With Correlation". International Journal of Numerical Analysis and Modelling 2010,Vol 7,p.303-320*
28. *Kleist et al (2010) Report on global foreign exchange market activity in 2010,Bank for International Settlements Is available at: http://www.bis.org/publ/rpfxf10t.pdf*
29. *Levenberg, K., "A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares," Quarterly Applied Math. 2, pp. 164–168, 1944.*
30. *Lipton, A. "Mathematical Methods for Foreign Exchange:A Financial Engineer's Approach", 2001 (World Scientifc: Singapore)*
31. *Lipton A. "The vol smile problem". Risk Mag., 2002,15 p.61-65*
32. *Merton R.C "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous" J.Financ. Econ. 1976, 5, 125-144*
33. *Madan D.B., Seneta E." The variance gamma(V.G)model for share market returns" J Business ,1990, 63, 511-524*
34. *Moodley, N. The Heston Model: A Practical Approach. Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2005.*
35. *Maruhn, J., Nalhom, M. and Fengler , M. "Static hedges for reverse barrier options with robustness against skew risk :an empirical analysis",Quantiv. Financ. 2010, 11, 711-727*
36. *Marquardt, D., "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," SIAM Journal Applied Math., Vol. 11, pp. 431–441, 1963.*
37. *Moré, J.J., "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," Numerical Analysis, ed. G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, pp. 105–116, 1977.*
38. *Nalholm M., Poulsen R. "Static Hedging And Model Risk For Barrier Options" J. Fut. Mrkts (2006a) , 449-463*
39. *N.Thakoor,D.Y.Tangman,M.Bhuruth "Efficient and high accuracy pricing of barrier options under the CEV diffusion".Journal of Computational and Applied Mathematics(2014)p.182-193*
40. *Phelim P.Boyle and Yisong "Sam" Tian. "Pricing Lookback and barrier options under the CEV Process". Journal Of Financial and Quantitative Analysis, Vol.34, Issue 02, June 1999*
41. *P.Carr, D.Madan "Option valuation using the fast fourier transform"*

42. *P.Glasserman,Q.Wu, "Forward and Future Implied Volatility" Intern.Journal Of Theoretical and Applied Finance, Vol.14 (2011),p.407-432*
43. *P. Boyle, Y. Tian, An explicit finite difference approach to the pricing of barrier options, Appl. Math. Finance 5 (1998) 17–43.*
44. *R.Aboulaich,M.L.hadji,A.Jraifi "Option Pricing With Constant Elasticity of Variance (CEV) Model" Applied Mathematical Sciences, Vol.7,2013, p.5443-5456*
45. *Schroder M. "Computing the constant elasticity of variance option pricing formula" The Journal Of Finance , Vol 44 No1 (1989), 211-219*
46. *Wilkens S. and Stoimenov P.A., "The pricing of leverage products: an empirical investigation of the German market for long and 'short' stock index certificates."J bank .Finance 2007, 31, 735-750*
47. *Xiao j. ,Hong Z.,Qin C. "The Constant Elasticity of Variance Model And The Legndre Transform-Dual solution for annuity contracts" 2004*

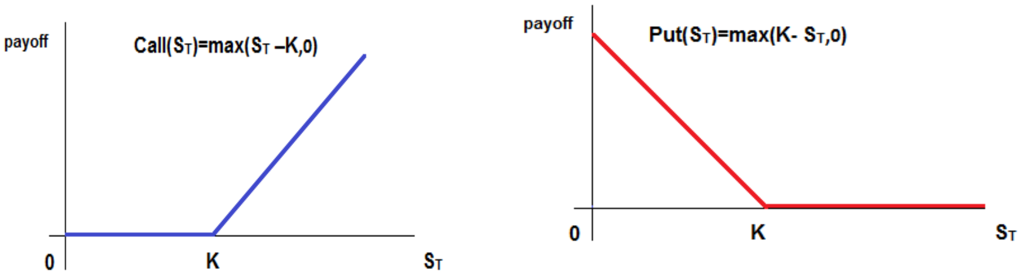
## Βιβλία

1. *John C. Hull (2009) "Options, Futures and Other Derivatives" 7th edition, Prentice Hall.*
2. *Kienitz J., Wetterau D. "Financial Modelling, Theory,Implementation and Practice with MATLAB Source" 2012,Pbl Wiley*
3. *Clark I. J., 2012. Foreign exchange option pricing, A practioner's Guide. Wiley Finance.*

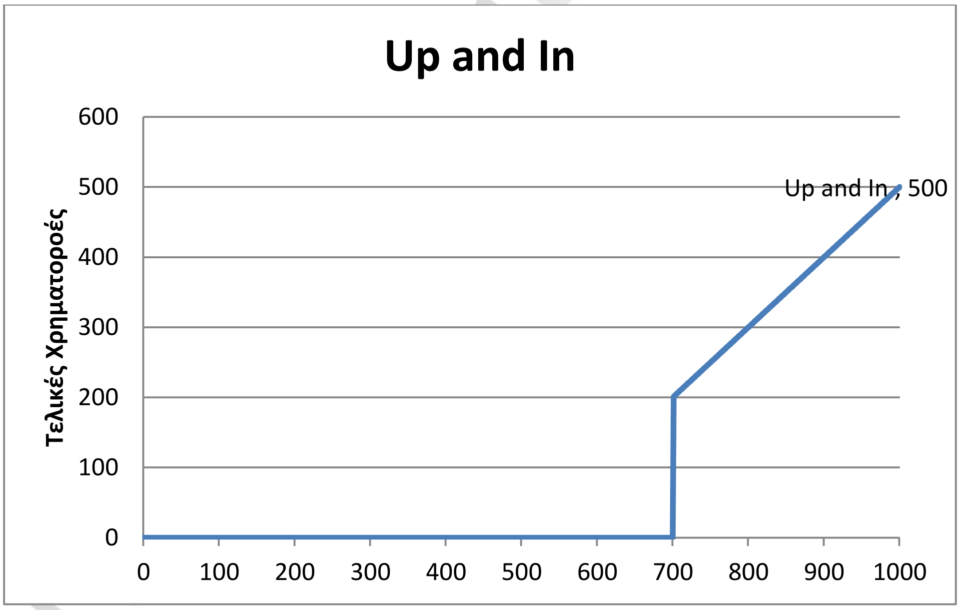
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.Ι

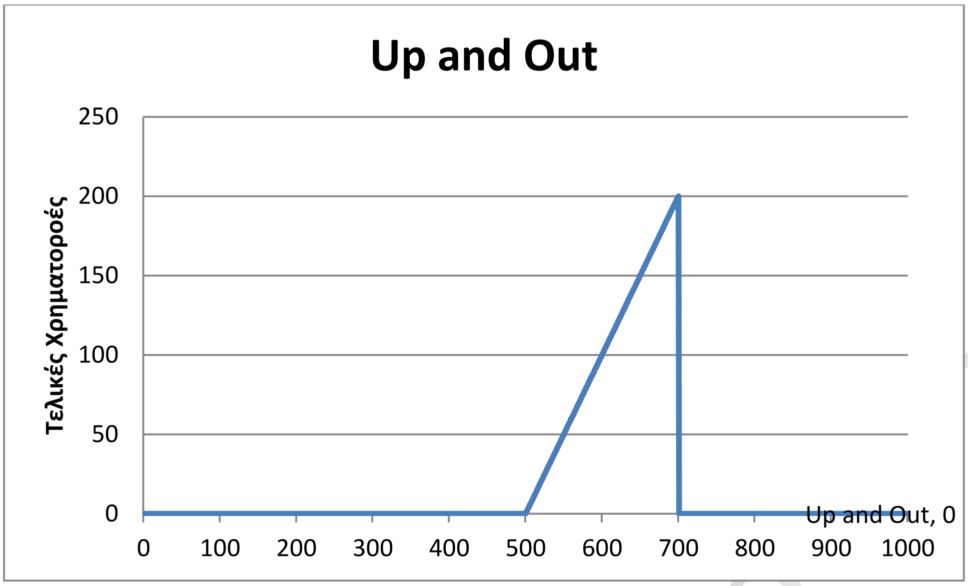
## *Γραφήματα*

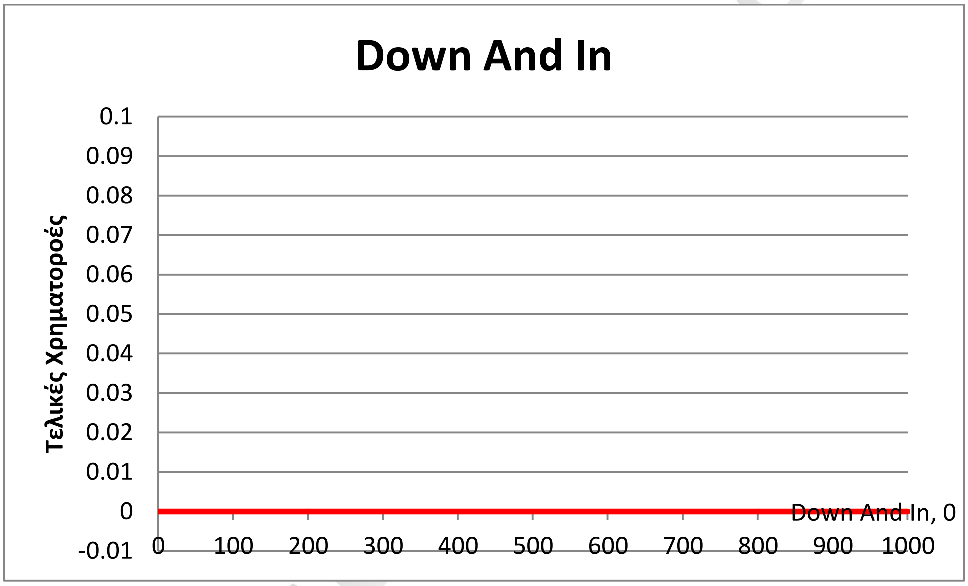
**Σχήμα 1.** *Γραφική παράσταση χρηματοροών για δικαίωμα αγοράς και πώλησης*

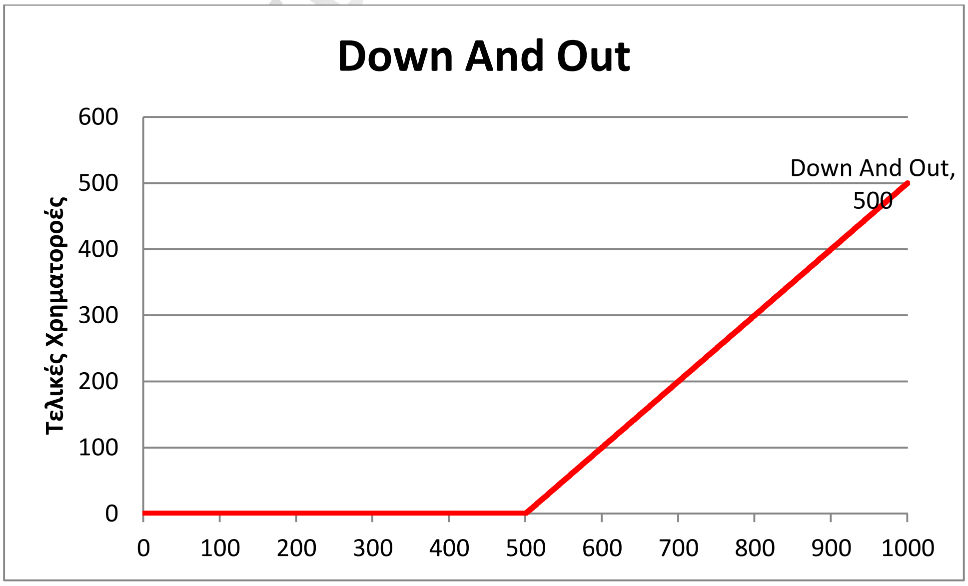



**Σχήμα 2.** *Γραφική παράσταση χρηματοροών για δικαίωμα αγοράς που υπόκειται σε φράγμα Παράδειγμα με τιμή υποκείμενου τίτλου= 0:1000 ,Strike τιμή=500,UpLimit=700, DownLimit=300*

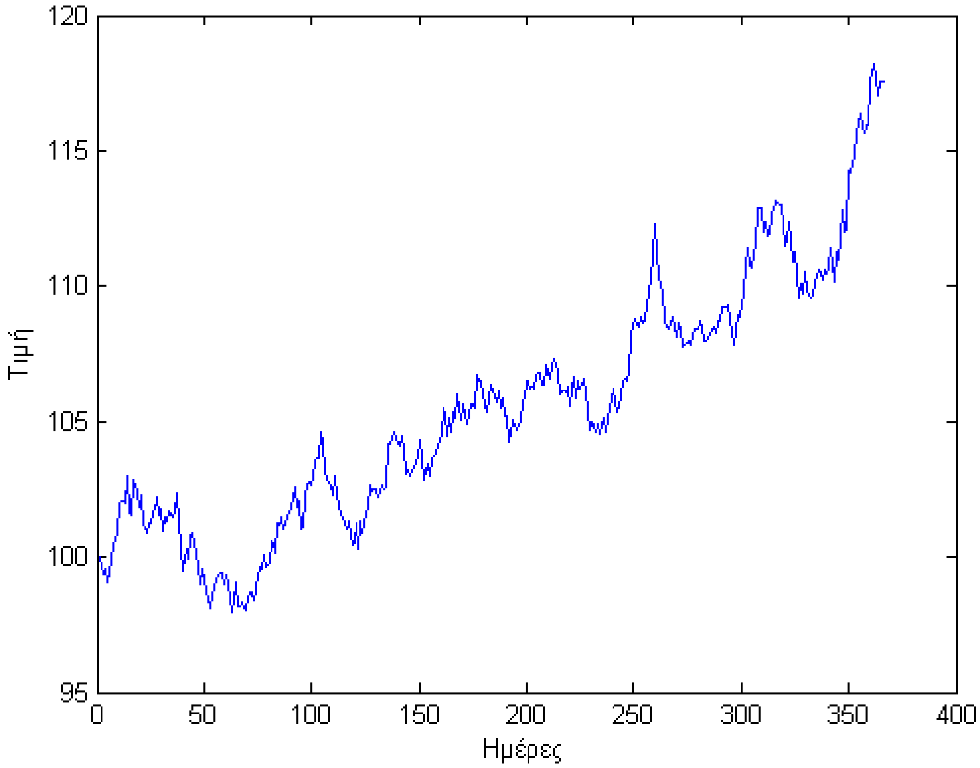



Up and Out
Τελικές Χρηματοροές
250
200
150
100
50
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
Up and Out, 0

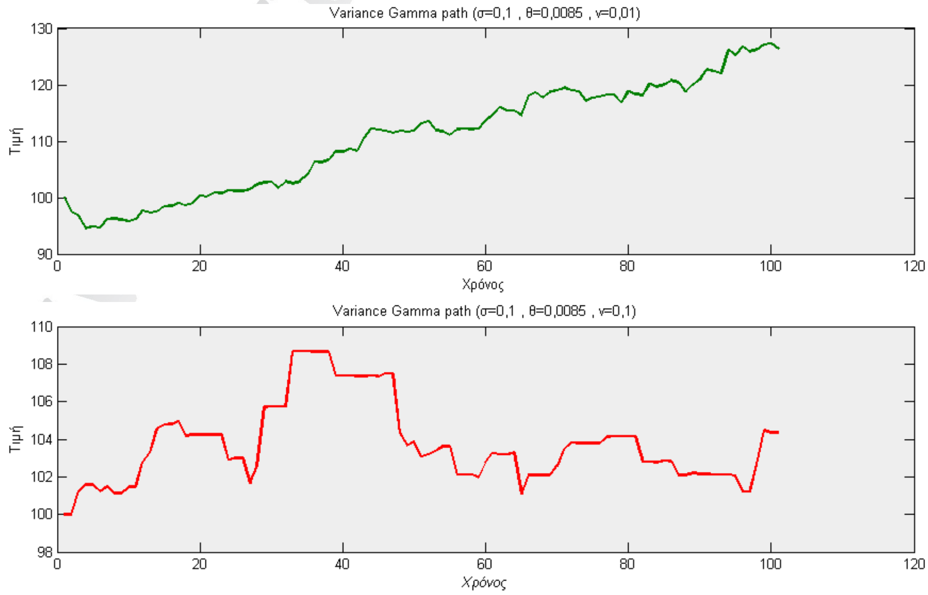

Down And In
Τελικές Χρηματοροές
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
Down And In, 0

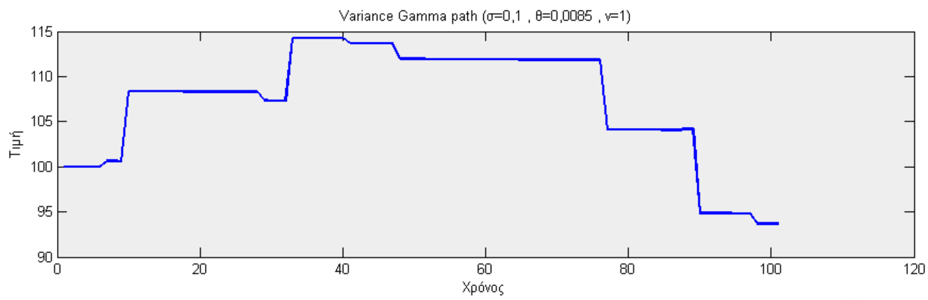

Down And Out
Τελικές Χρηματοροές
600
500
400
300
200
100
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
Down And Out, 500

**Σχήμα 3.** *Προσομοίωση τιμής μίας μετοχής που ακολουθεί μία διαδικασία Wiener ($S_0$=100,μ=0,2, σ=0,1,T=1 έτος με ημερήσια παρακολούθηση) με μέθοδο MonteCarlo*

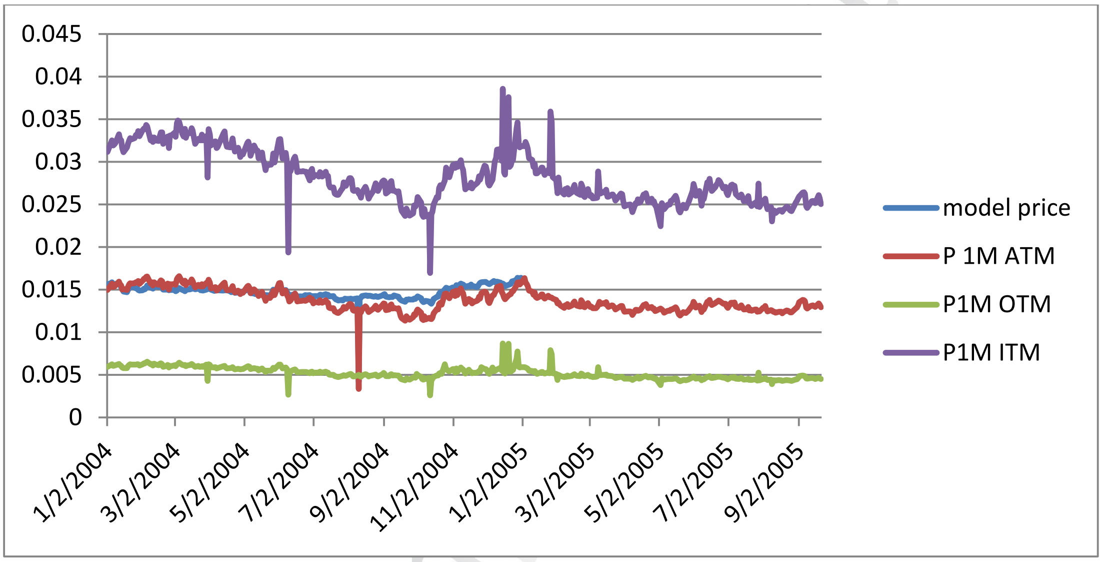



**Σχήμα 4.** *Προσομοίωση τιμής μίας μετοχής που ακολουθεί μία διαδικασία Variance Gamma ($S_0$=100,μ=0,1,T=1 έτος με 100 βήματα παρακολούθησης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου "**v**"*

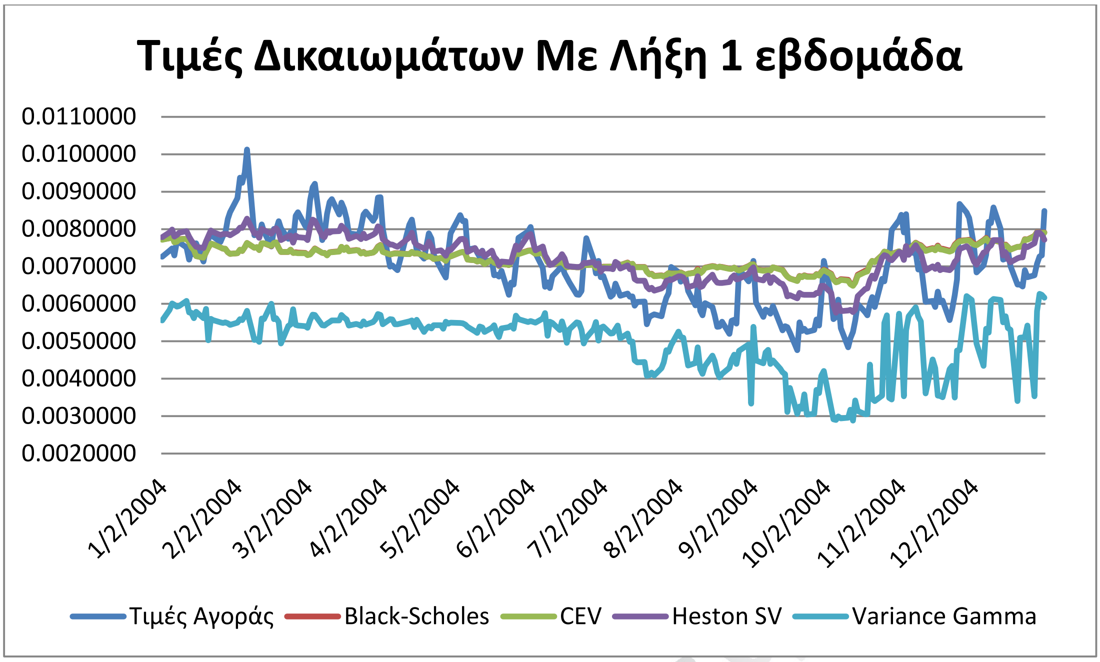


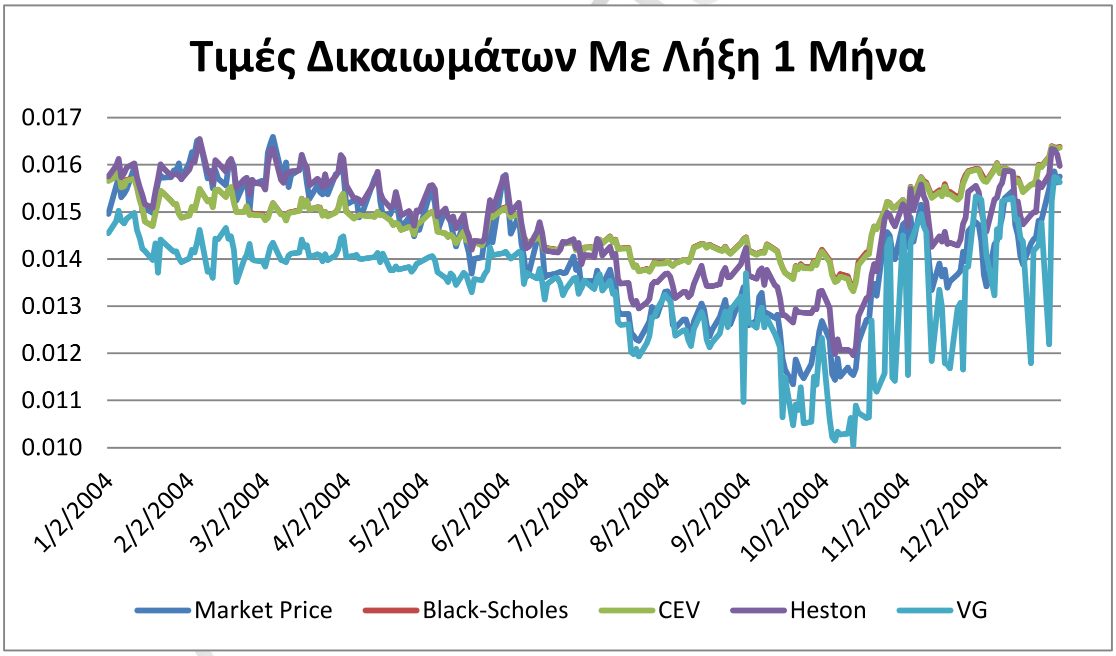


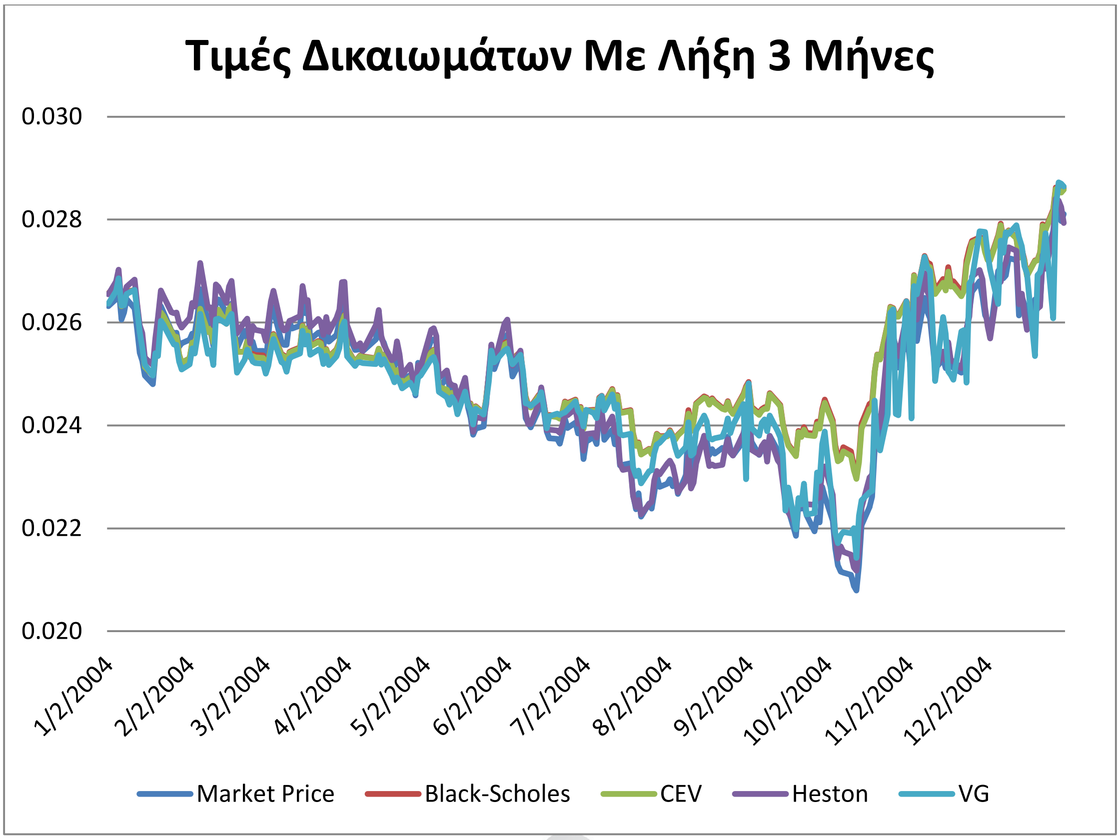

**Σχήμα 5.** Παρουσίαση της τιμής του μοντέλου black scholes με τις εκτιμημένες παραμέτρους. Επίσης τιμές με ληκτότητα 1 Μ για ένα ATM call , ένα OTM call και ένα ITM call.

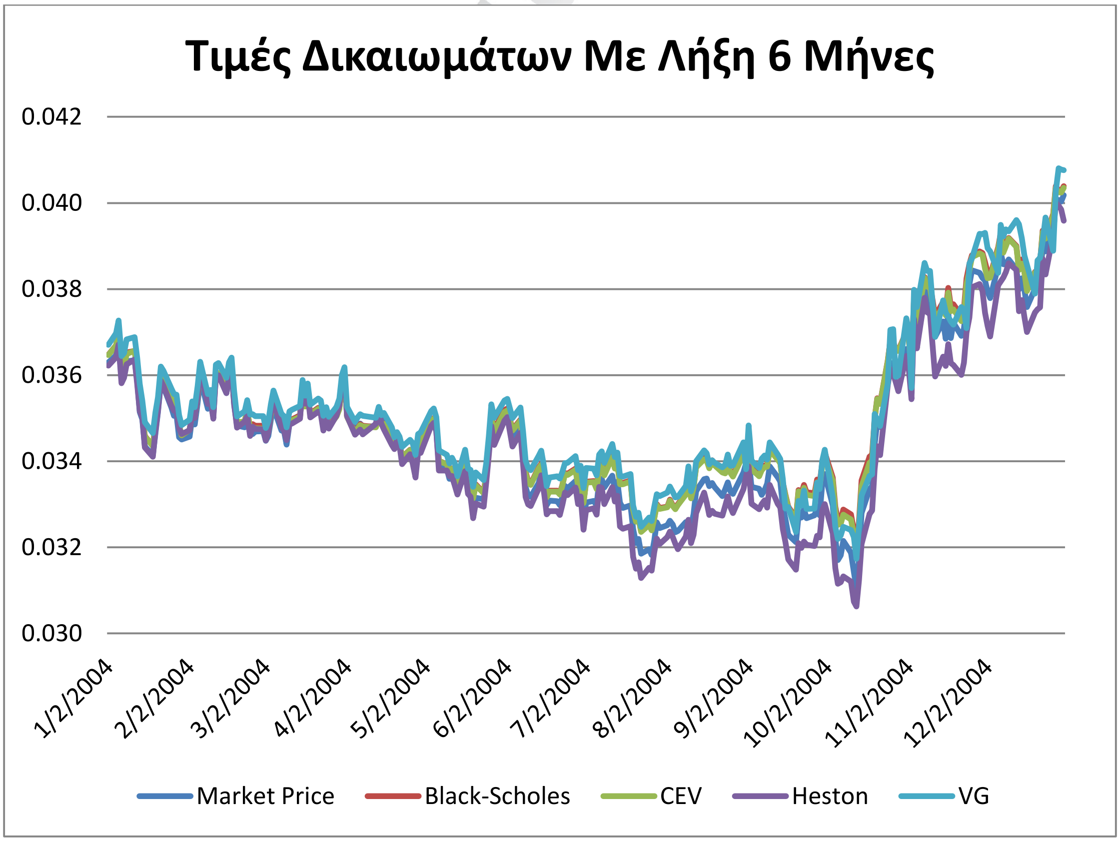


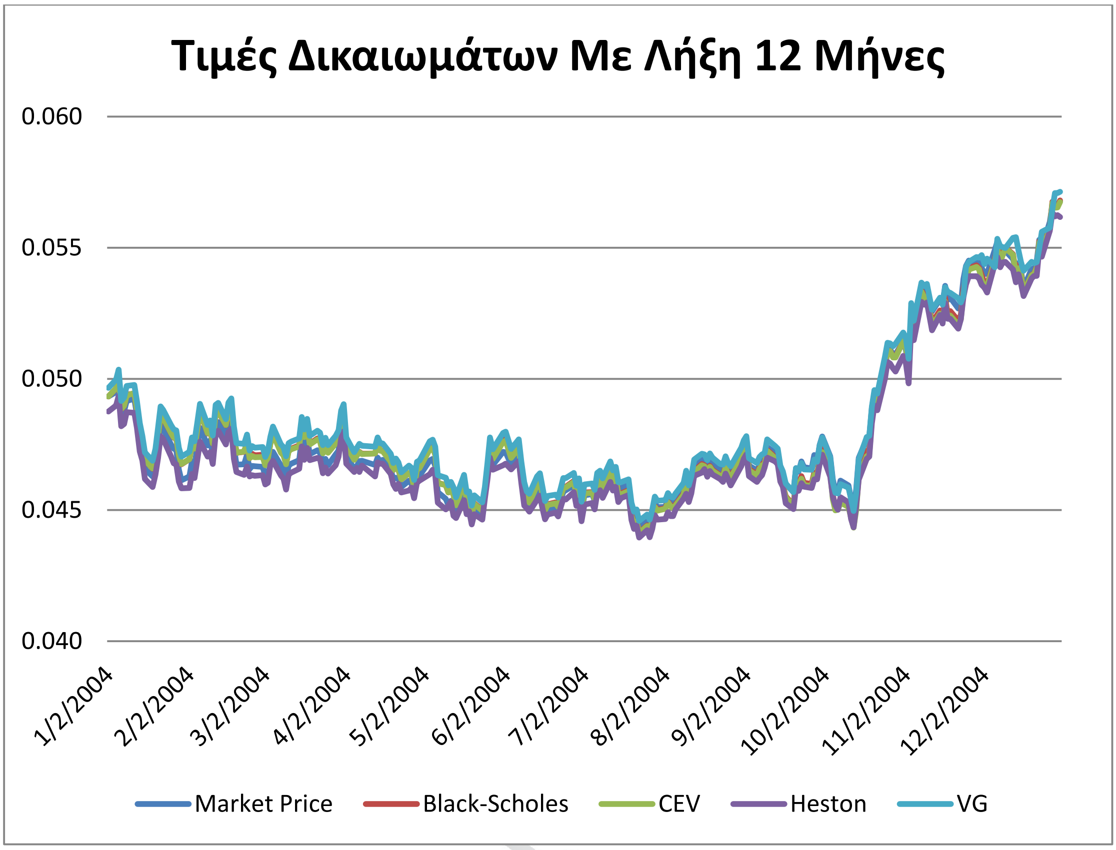

**Σχήμα 6.** Παρουσίαση σύγκριση των τιμών των ATM (strike=spot) δικαιωμάτων της αγοράς με της τιμές των μοντέλων βάσει εκτίμησης για λήξη του δικαιώματος σε 1 εβδομάδα,1 μήνα, 3 μήνες, 6 μήνες , 12 μήνες και 24 μήνες.

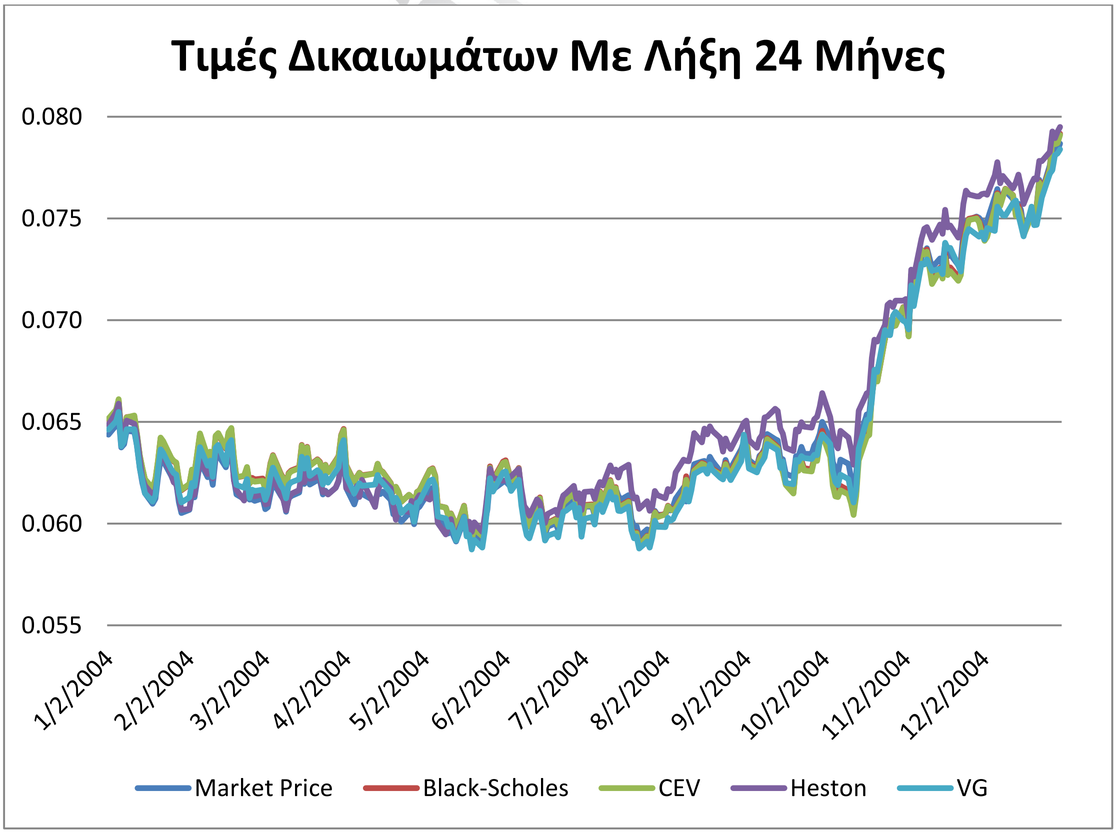

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 1 εβδομάδα
0.0110000
0.0100000
0.0090000
0.0080000
0.0070000
0.0060000
0.0050000
0.0040000
0.0030000
0.0020000
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Τιμές Αγοράς
Black-Scholes
CEV
Heston SV
Variance Gamma


Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 1 Μήνα
0.017
0.016
0.015
0.014
0.013
0.012
0.011
0.010
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

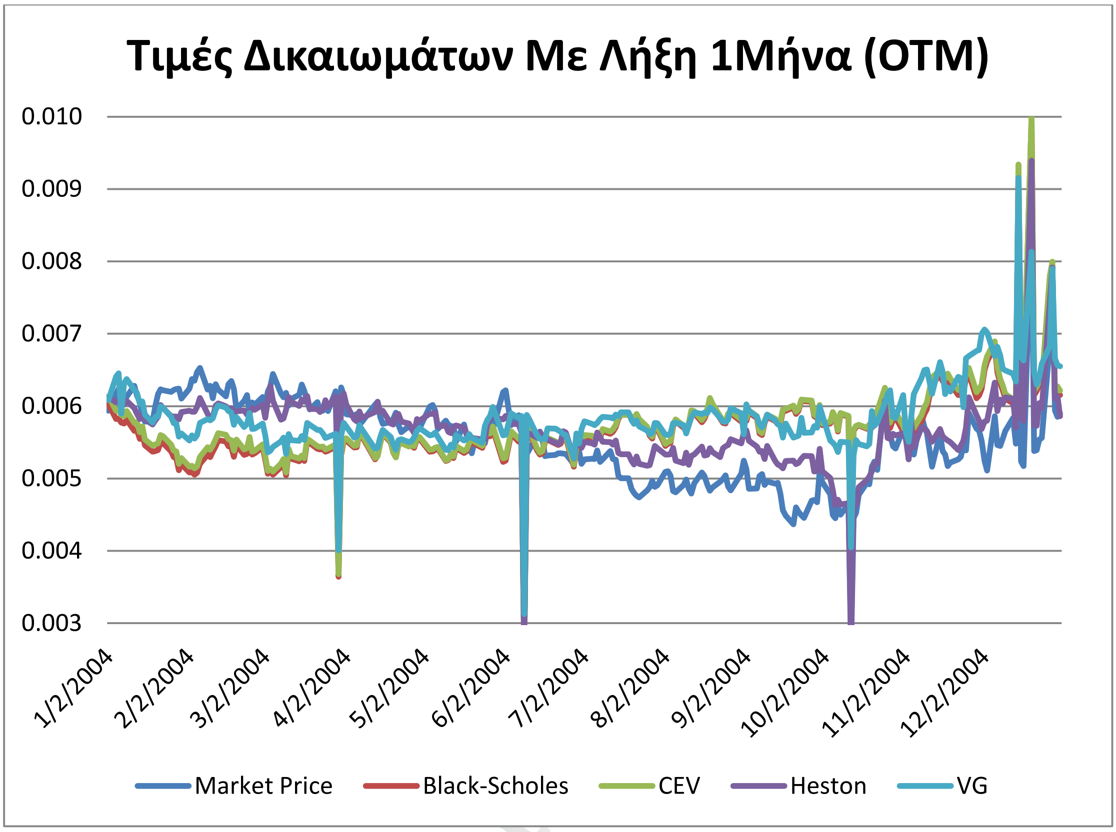

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 3 Μήνες
0.030
0.028
0.026
0.024
0.022
0.020
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

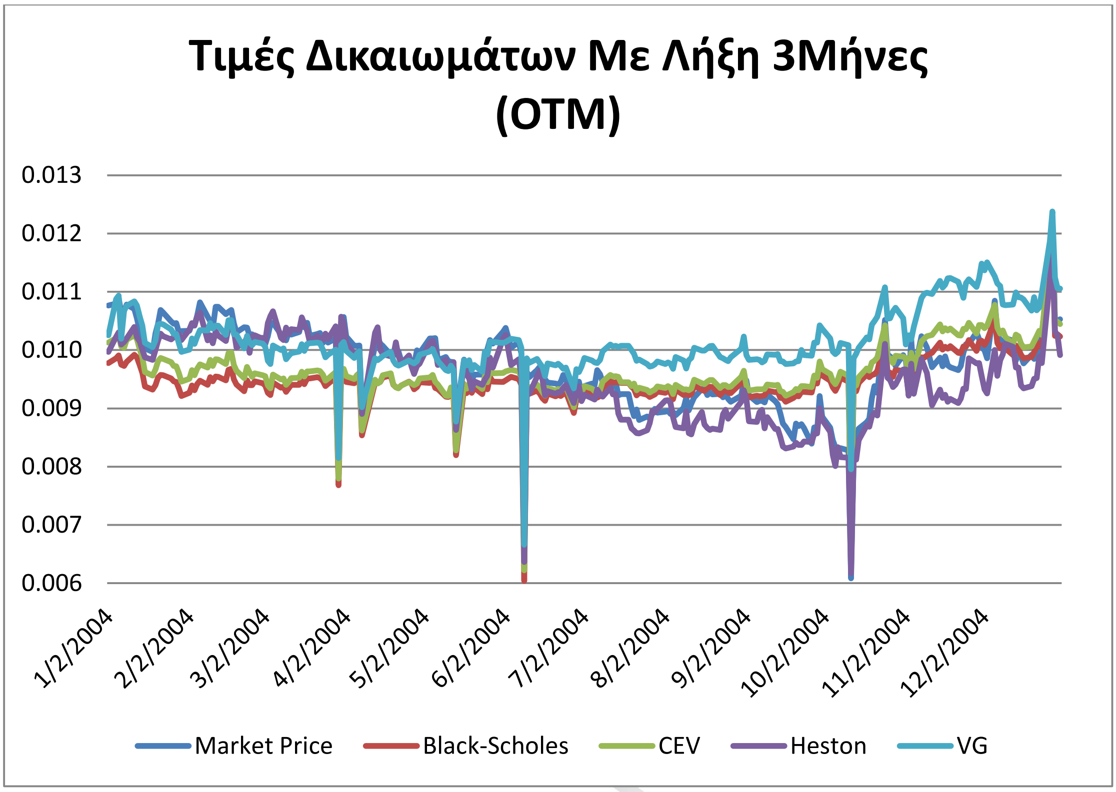

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 6 Μήνες
0.042
0.040
0.038
0.036
0.034
0.032
0.030
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

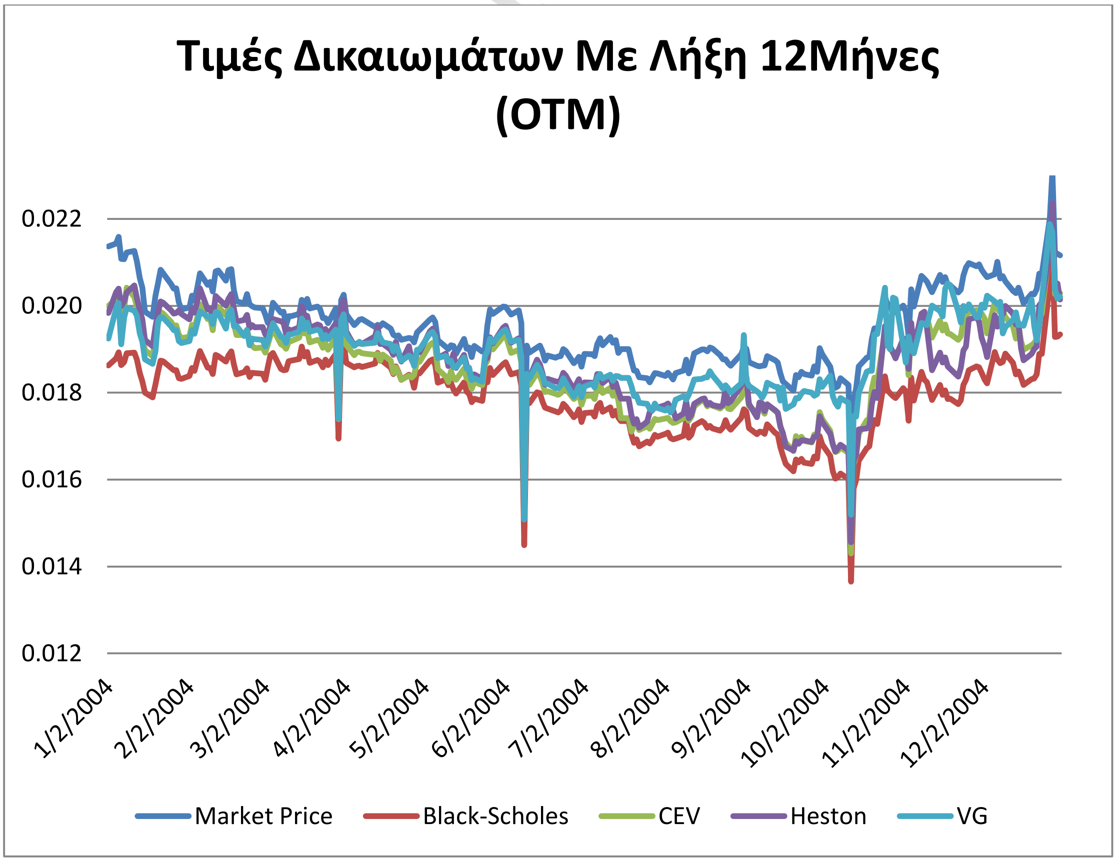

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 12 Μήνες
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG


Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 24 Μήνες
0.080
0.075
0.070
0.065
0.060
0.055
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

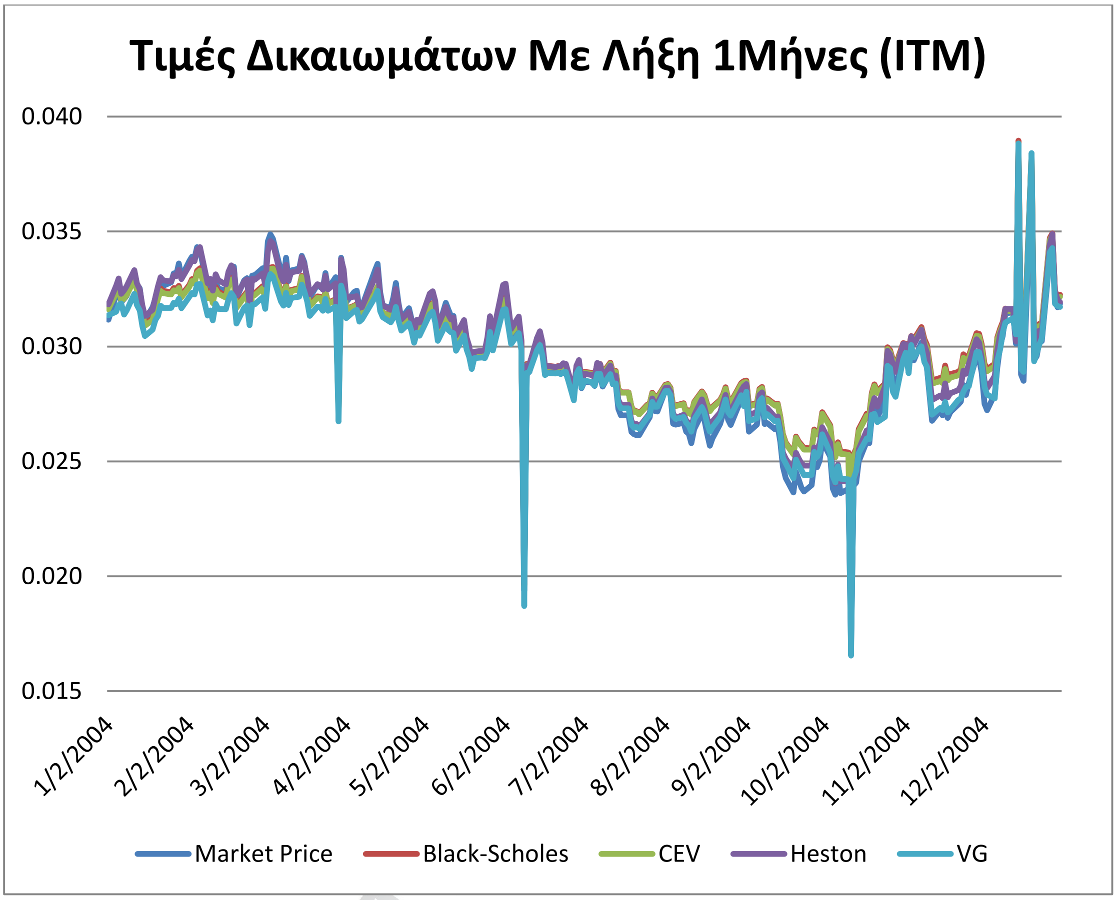
**Σχήμα 7.** Παρουσίαση σύγκριση των τιμών  των OTM (strike>spot) δικαιωμάτων της αγοράς με της τιμές των μοντέλων βάσει εκτίμησης για λήξη του δικαιώματος σε 1 μήνα, 3 μήνες και 12 μήνες.

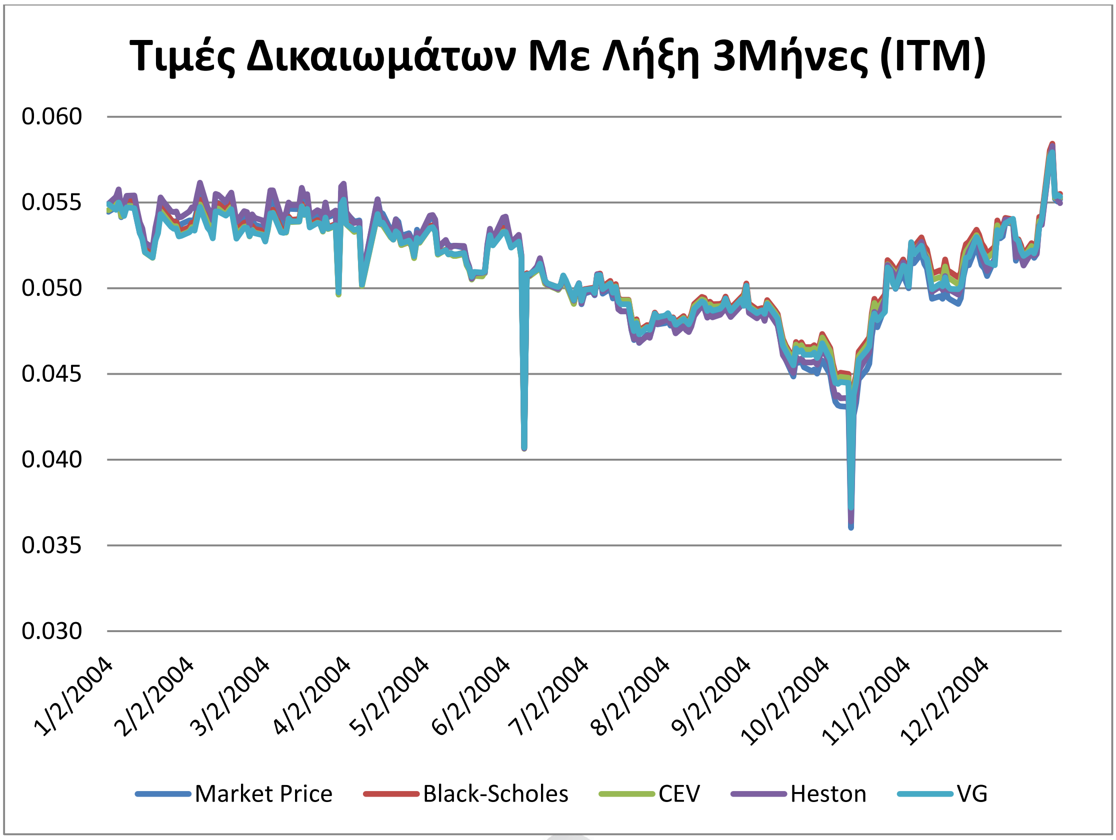


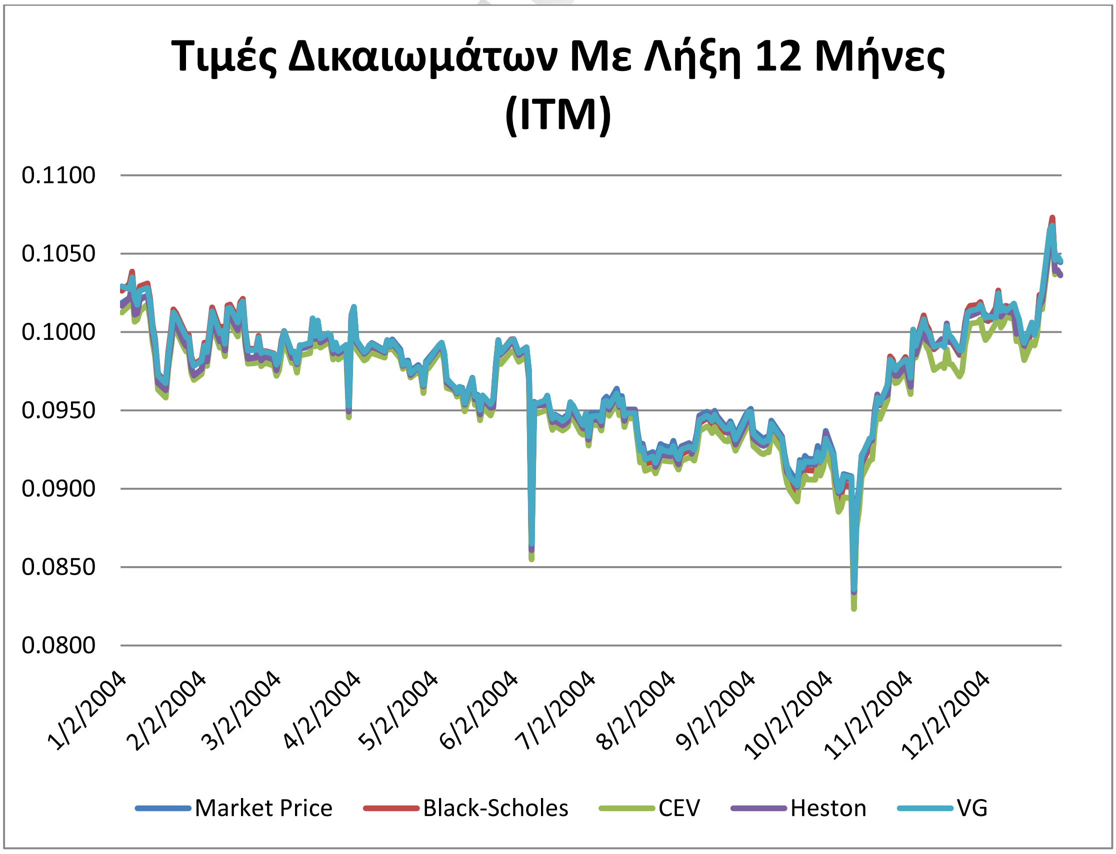

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 3Μήνες (OTM)
0.013
0.012
0.011
0.010
0.009
0.008
0.007
0.006
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG


Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 12Μήνες (OTM)
0.022
0.020
0.018
0.016
0.014
0.012
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

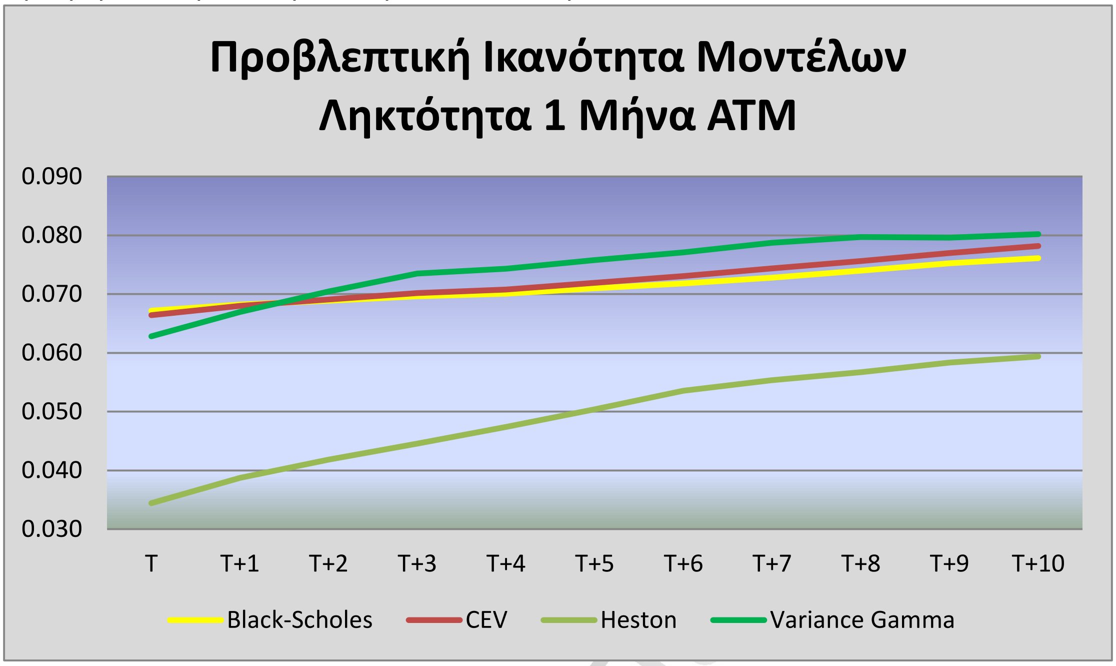
**Σχήμα 8.** Παρουσίαση σύγκριση των τιμών των ITM (strike<spot) δικαιωμάτων της αγοράς με της τιμές των μοντέλων βάσει εκτίμησης για λήξη του δικαιώματος σε 1 μήνα, 3 μήνες και 12 μήνες.



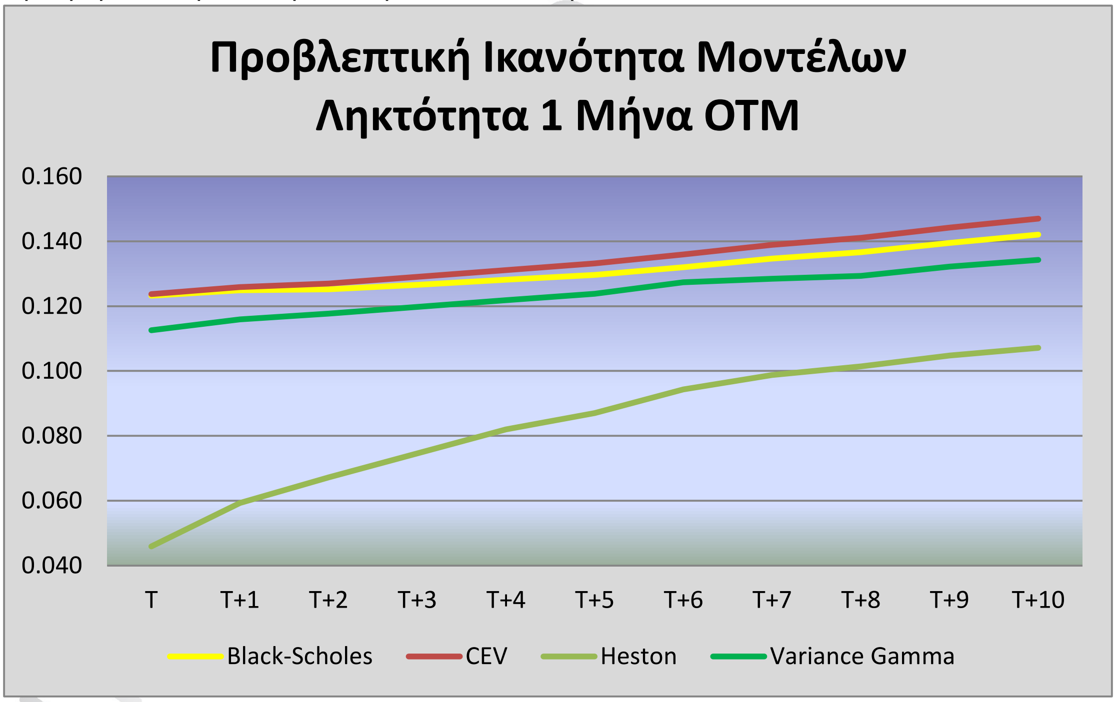

Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 3Μήνες (ITM)
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
0.035
0.030
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG


Τιμές Δικαιωμάτων Με Λήξη 12 Μήνες (ITM)
0.1100
0.1050
0.1000
0.0950
0.0900
0.0850
0.0800
1/2/2004
2/2/2004
3/2/2004
4/2/2004
5/2/2004
6/2/2004
7/2/2004
8/2/2004
9/2/2004
10/2/2004
11/2/2004
12/2/2004
Market Price
Black-Scholes
CEV
Heston
VG

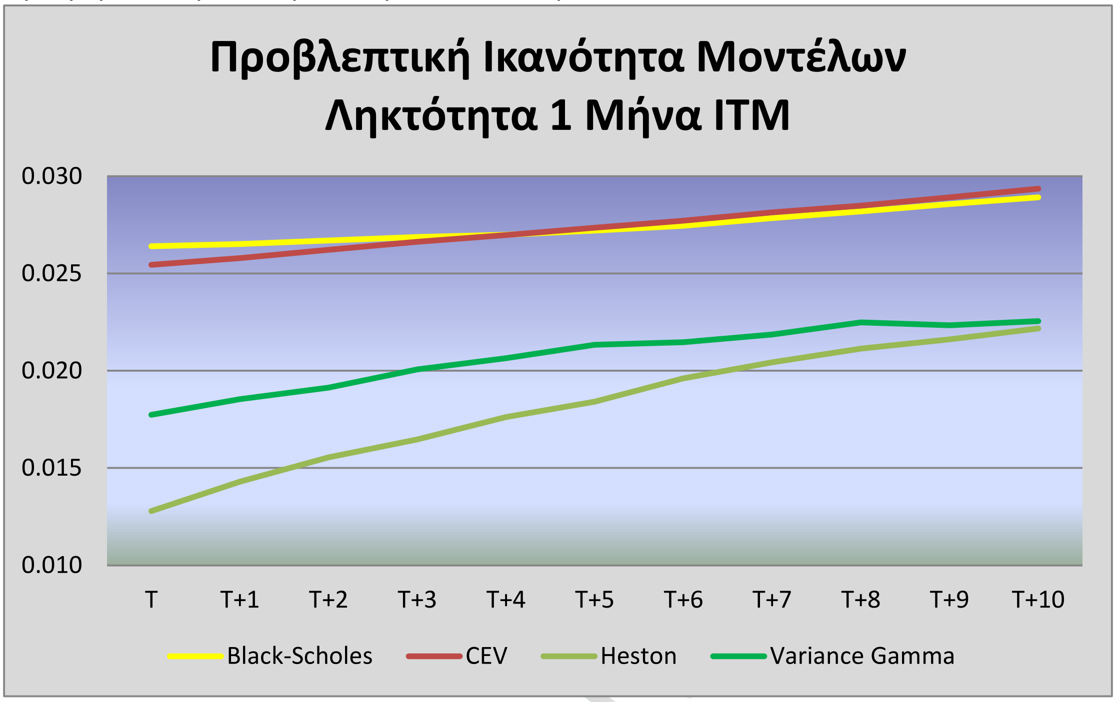
**Σχήμα 9.** Παρουσίαση μέσης τιμής καταλοίπων για το σύνολο του δείγματος όσων αφορά την προβλεπτική ικανότητα 1 Μήνα ATM δικαιωμάτων




**Σχήμα 10.** Παρουσίαση μέσης τιμής καταλοίπων για το σύνολο του δείγματος όσων αφορά την προβλεπτική ικανότητα 1 Μήνα OTM δικαιωμάτων



**Σχήμα 11.** Παρουσίαση μέσης τιμής καταλοίπων για το σύνολο του δείγματος όσων αφορά την προβλεπτική ικανότητα 1 Μήνα ITM δικαιωμάτων



# Πίνακες

**Πίνακας 1**-Μοντέλα και τρόποι αποτύπωσης τους στην εμπειρική μελέτη

| | | | **Αποτίμηση** | | | | | **Εκτίμηση** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Απλά Δικαιώματα** | **Barrier Options** | | | | **Απλά Δικαιώματα** |
| | | **Μοντέλα Αποτίμησης** | | **Up and in call** | **up and out call** | **down and in call** | **down and out call** | |
| **Benchmark** | | **Black&Scholes** | Κλειστή Μορφή | Κλειστοί Τύποι Αποτίμησης | | | | Μέθοδος Levenberg-Marquardt |
| **Diffussion** | Local Volatility | **CEV** | Κλειστή Μορφή Από Schroder | Monte Carlo προσομοιώσεις των μονοπατιών των τιμών | | | | Μέθοδος Levenberg-Marquardt |
| | Stochastic Volatility | **Heston Stochastic Volatility** | Κλειστή Μορφή Heston (1993) | Monte Carlo προσομοιώσεις των μονοπατιών των τιμών | | | | Μέθοδος Levenberg-Marquardt |
| **Jump Diffussion** | Stochastic Volatility | **Merton Jump Diffusion** | Fast Fourier Transform Techniques | Monte Carlo προσομοιώσεις των μονοπατιών των τιμών | | | | Μέθοδος Levenberg-Marquardt |
| **Jump Model-Levy Process** | | **Variance Gamma** | Κλειστή Μορφή Madan and Milne(1991) | Monte Carlo προσομοιώσεις των μονοπατιών των τιμών | | | | Μέθοδος Levenberg-Marquardt |

**Πίνακας 2.** Αποτελέσματα εκτίμησης για τα μοντέλα BlacK-Scholes,CEV,Heston

| *Μοντέλο* | *Black-Scholes* | *CEV* | | *Heston* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *σ* | *σ* | *α* | *Vo* | *ϑ* | *κ* | *η* | *ρ* |
| *Μέσος* | 0.106484 | 0.095998 | 1.456013 | 0.011433 | 0.012337 | 2.010933 | 0.200912 | -0.062638 |
| *Τυπική Απόκλιση* | 0.004039 | 0.007824 | 0.227194 | 0.001954 | 0.000506 | 0.434562 | 0.033667 | 0.064433 |
| *Διάμεσος* | 0.105840 | 0.095993 | 1.383293 | 0.011225 | 0.012274 | 1.966629 | 0.200781 | -0.046881 |
| *Ελάχιστο* | 0.096560 | 0.078838 | 0.984535 | 0.007229 | 0.010966 | 0.746511 | 0.061620 | -0.275638 |
| *Μέγιστο* | 0.114106 | 0.114405 | 1.989426 | 0.015809 | 0.013976 | 3.524948 | 0.374498 | 0.015863 |

**Πίνακας 3.** Αποτελέσματα εκτίμησης για τα μοντέλα Merton JD, Variance Gamma

| *Μοντέλο* | *Merton* | | | | *Variance Gamma* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *σ* | *λ* | *μ(z)* | *σ(z)* | *ϑ* | *σ* | *ν* |
| *Μέσος* | 0.080657 | 1.025238 | 0.005098 | 0.004008 | 0.034279 | 0.109732 | 0.099816 |
| *Τυπική Απόκλιση* | 0.005026 | 0.001381 | 0.000320 | 0.000245 | 0.021126 | 0.003315 | 0.067791 |
| *Διάμεσος* | 0.080892 | 1.025325 | 0.005053 | 0.003998 | 0.029351 | 0.109508 | 0.066723 |
| *Ελάχιστο* | 0.072440 | 1.003275 | 0.004593 | 0.003598 | 0.010000 | 0.102351 | 0.046637 |
| *Μέγιστο* | 0.088538 | 1.025325 | 0.005614 | 0.004398 | 0.107727 | 0.117111 | 0.290432 |

**Πίνακας 4.** Παρουσιάζονται οι διαφορές των τετραγώνων όπως προέκυψαν από την εκτίμηση

| *Μοντέλο* / *Least Squares* | *Black-Scholes* | *CEV* | *Heston SV* | *Merton JD* | *Variance Gamma* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Μέση Τιμή* | 0.0000088719 | 0.0000071576 | 0.0000033826 | 0.0002881677 | 0.0000094739 |
| *Τυπική Απόκλιση* | 0.0000060877 | 0.0000057444 | 0.0000026919 | 0.0000589878 | 0.0000055498 |
| *Διάμεσος* | 0.0000073409 | 0.0000050807 | 0.0000025847 | 0.0002606984 | 0.0000079296 |
| *Ελάχιστο* | 0.0000009528 | 0.0000005320 | 0.0000002976 | 0.0002010399 | 0.0000020360 |
| *Μέγιστο* | 0.0000307263 | 0.0000292589 | 0.0000102768 | 0.0004436138 | 0.0000299178 |

**Πίνακας 5.** Παρουσιάζονται τα δεδομένα για τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα.

| | Αριθμός Δικαιωμάτων | Παρατηρήσεις | Μέσος Χρόνος Ζωής Δικαιωμάτων | Μέσος Χρόνος Προς την λήξη | Μέσο Φράγμα Προς Τιμή Ισοτιμίας | Μέσο Strike προς Φράγμα |
|---|---|---|---|---|---|---|
| UpOut Call | 20 | 387 | 47 | 27 | 1.056306 | 0.953623 |
| UpIn Call | 5 | 75 | 27 | 14 | 1.046379 | 0.950204 |
| DownIn Call | 4 | 65 | 133 | 65 | 0.928195 | 1.040338 |
| DownOut Call | 17 | 474 | 49 | 19 | 0.892059 | 1.040378 |
| ***Σύνολο*** | ***46*** | ***1001*** | ***53*** | ***26*** | ***0.98339*** | ***0.99285*** |

**Πίνακας 6.** Παρουσιάζονται τα απόλυτα σφάλματα όπως προέκυψαν από την σχέση $relative\ error = \frac{marketprice - modelprice}{marketprice}$ και στις τελευταίες γραμμές μέση όροι ανά τύπο δικαιώματος.

| *Μοντέλο* | | *Black-Scholes* | *CEV* | *Heston SV* | *Merton JD* | *Variance Gamma* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *RELATIVE ERROR* | | | | | | |
| *Μέση Τιμή* | *1w ATM* | 0.112309 | 0.111694 | 0.079345 | 0.214437 | 0.288252 |
| | 1m ATM | 0.067199 | 0.066423 | 0.034398 | 0.215256 | 0.062827 |
| | 3m ATM | 0.028405 | 0.027681 | 0.008853 | 0.235007 | 0.019097 |
| | 6m ATM | 0.009775 | 0.008941 | 0.008130 | 0.249500 | 0.014123 |
| | 12m ATM | 0.006605 | 0.007031 | 0.008656 | 0.261535 | 0.009642 |
| | 24m ATM | 0.009530 | 0.009878 | 0.011643 | 0.267593 | 0.007075 |
| | 1m OTM | 0.123221 | 0.123688 | 0.045859 | 0.449562 | 0.112610 |
| | 3m OTM | 0.052114 | 0.048548 | 0.026602 | 0.497426 | 0.061320 |
| | 12m OTM | 0.082844 | 0.049466 | 0.042102 | 0.543151 | 0.033727 |
| | 1m ITM | 0.026402 | 0.025449 | 0.012791 | 0.079340 | 0.017733 |
| | 3m ITM | 0.011645 | 0.010297 | 0.005189 | 0.089887 | 0.008943 |
| | 12m ITM | 0.003786 | 0.007810 | 0.002398 | 0.098274 | 0.002438 |
| | Total AVG | 0.044486 | 0.041409 | 0.023830 | 0.266747 | 0.053149 |
| | Average ATM | 0.038970 | 0.038608 | 0.025171 | 0.240555 | 0.066836 |
| | Average OTM | 0.086060 | 0.073901 | 0.038188 | 0.496713 | 0.069219 |
| | Average ITM | 0.013944 | 0.014519 | 0.006793 | 0.089167 | 0.009704 |

**Πίνακας 7.** Πίνακας με μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, διάμεσο, ελάχιστο και μέγιστο για την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων στα 1 μήνα ATM δικαιώματα

## *Ληκτότητα 1 Μήνας At-the-money*

t=0

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0671986 | 0.0664234 | 0.0343981 | 0.2152563 | 0.0628266 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0490511 | 0.0482312 | 0.0246028 | 0.1059127 | 0.0475808 |
| Διάμεσος | 0.0522881 | 0.0520087 | 0.0313896 | 0.2182552 | 0.0522008 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2060013 | 0.2037144 | 0.1210690 | 0.8796581 | 0.2131313 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0001810 | 0.0000148 | 0.0000443 | 0.0023930 | 0.0001094 |

t=1

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0682252 | 0.0679864 | 0.0387079 | 0.4837688 | 0.0669736 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0512198 | 0.0505830 | 0.0291717 | 0.2381370 | 0.0523445 |
| Διάμεσος | 0.0552482 | 0.0556226 | 0.0340916 | 0.4689008 | 0.0563022 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2113907 | 0.2099923 | 0.1412520 | 2.6125738 | 0.3306188 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0002090 | 0.0003226 | 0.0000163 | 0.0139028 | 0.0002123 |

t=2

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0688690 | 0.0690845 | 0.0418389 | 0.4882752 | 0.0704666 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0522294 | 0.0517331 | 0.0323954 | 0.2887318 | 0.0524736 |
| Διάμεσος | 0.0551103 | 0.0575855 | 0.0360583 | 0.4758103 | 0.0601622 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2231145 | 0.2209342 | 0.1510041 | 3.8206905 | 0.3181689 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0001450 | 0.0001626 | 0.0001031 | 0.0235682 | 0.0000853 |

t=3

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0696304 | 0.0701572 | 0.0445709 | 0.4872320 | 0.0734958 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0538254 | 0.0538948 | 0.0365440 | 0.2690440 | 0.0531705 |
| Διάμεσος | 0.0581369 | 0.0584411 | 0.0358827 | 0.4741400 | 0.0644347 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2307771 | 0.2510433 | 0.1680327 | 3.3937295 | 0.3422306 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0000807 | 0.0006247 | 0.0002139 | 0.0670585 | 0.0000778 |

t=4

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0700830 | 0.0707902 | 0.0473912 | 0.4887879 | 0.0743215 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0551444 | 0.0556773 | 0.0386916 | 0.2859753 | 0.0549709 |
| Διάμεσος | 0.0581544 | 0.0598530 | 0.0372619 | 0.4743747 | 0.0674931 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2408476 | 0.2675021 | 0.2093253 | 3.7815429 | 0.3503079 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0005238 | 0.0001295 | 0.0002402 | 0.0713935 | 0.0001006 |

t=5

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0710084 | 0.0718979 | 0.0503950 | 0.4869684 | 0.0757625 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0562989 | 0.0570836 | 0.0405211 | 0.2557178 | 0.0569814 |
| Διάμεσος | 0.0585886 | 0.0603644 | 0.0380425 | 0.4738835 | 0.0694182 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2471396 | 0.2677809 | 0.2170539 | 3.0796762 | 0.3507089 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0001988 | 0.0000663 | 0.0004295 | 0.0430172 | 0.0000458 |

t=6

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0717803 | 0.0730471 | 0.0535317 | 0.4894440 | 0.0771136 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0572651 | 0.0582223 | 0.0421191 | 0.2845405 | 0.0572846 |
| Διάμεσος | 0.0599099 | 0.0601976 | 0.0416863 | 0.4743011 | 0.0720294 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2502329 | 0.2696394 | 0.2228437 | 3.7496638 | 0.3520577 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0008464 | 0.0008041 | 0.0002536 | 0.0667764 | 0.0002108 |

t=7

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0728010 | 0.0743435 | 0.0553610 | 0.4885169 | 0.0787107 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0575567 | 0.0586961 | 0.0432867 | 0.2567079 | 0.0578335 |
| Διάμεσος | 0.0620858 | 0.0611661 | 0.0443132 | 0.4783560 | 0.0714546 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2471738 | 0.2586999 | 0.1975846 | 3.0583854 | 0.3505464 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0005037 | 0.0001313 | 0.0001458 | 0.0578351 | 0.0003009 |

t=8

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0739768 | 0.0755992 | 0.0566963 | 0.4906136 | 0.0797028 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0576446 | 0.0590672 | 0.0444481 | 0.2816440 | 0.0592247 |
| Διάμεσος | 0.0632485 | 0.0642331 | 0.0451270 | 0.4759455 | 0.0706781 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2588456 | 0.2663116 | 0.2281219 | 3.7039107 | 0.3564817 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0000058 | 0.0001192 | 0.0006988 | 0.0531930 | 0.0000313 |

t=9

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0752455 | 0.0770035 | 0.0583512 | 0.4905623 | 0.0795797 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0574299 | 0.0590659 | 0.0449221 | 0.2682410 | 0.0583829 |
| Διάμεσος | 0.0639066 | 0.0629110 | 0.0480366 | 0.4745363 | 0.0700874 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2579158 | 0.2589820 | 0.2237328 | 3.3679674 | 0.3437425 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0006221 | 0.0003507 | 0.0001675 | 0.0422167 | 0.0002292 |

t=10

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0761381 | 0.0781759 | 0.0593771 | 0.4931753 | 0.0802195 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0575738 | 0.0593618 | 0.0464142 | 0.2882720 | 0.0588393 |
| Διάμεσος | 0.0673120 | 0.0659201 | 0.0490329 | 0.4804096 | 0.0709116 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.2573171 | 0.2586177 | 0.2110314 | 3.8231759 | 0.3238319 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0010688 | 0.0009876 | 0.0001975 | 0.0421011 | 0.0013018 |

**Πίνακας 8.** Πίνακας με μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, διάμεσο, ελάχιστο και μέγιστο για την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων στα 1 μήνα OTM δικαιώματα

## *Ληκτότητα 1 Μήνας Out of-the-money*

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1232207 | 0.1236883 | 0.0458586 | 0.4495617 | 0.1126100 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0800238 | 0.0820708 | 0.0383476 | 0.1705441 | 0.0812194 |
| Διάμεσος | 0.1176650 | 0.1170728 | 0.0373702 | 0.4653842 | 0.0992893 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.3693405 | 0.3753055 | 0.2019509 | 0.7978739 | 0.5571156 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0009190 | 0.0007512 | 0.0002008 | 0.0111656 | 0.0003343 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1249119 | 0.1258646 | 0.0593104 | 1.8326157 | 0.1158735 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0837106 | 0.0860467 | 0.0468056 | 0.5333535 | 0.0862229 |
| Διάμεσος | 0.1150762 | 0.1125047 | 0.0493483 | 1.8200482 | 0.1016918 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.3883427 | 0.3917748 | 0.2277706 | 3.7996585 | 0.5926809 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0006547 | 0.0014832 | 0.0002685 | 0.7147895 | 0.0002292 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1251535 | 0.1269282 | 0.0672225 | 1.8336984 | 0.1176727 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0881082 | 0.0902457 | 0.0548118 | 0.5304338 | 0.0912133 |
| Διάμεσος | 0.1148723 | 0.1127756 | 0.0542441 | 1.8340894 | 0.0994171 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.4166911 | 0.4232408 | 0.2374482 | 4.1597349 | 0.5977385 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0025114 | 0.0003905 | 0.0013826 | 0.6983043 | 0.0006898 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1266146 | 0.1290640 | 0.0745954 | 1.8396768 | 0.1197461 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0910289 | 0.0935742 | 0.0610671 | 0.5736997 | 0.0950639 |
| Διάμεσος | 0.1123939 | 0.1138976 | 0.0604168 | 1.8370981 | 0.0941029 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.4393208 | 0.4430472 | 0.2997122 | 5.9999972 | 0.5979507 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0027167 | 0.0010433 | 0.0009023 | 0.7365165 | 0.0001740 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1281874 | 0.1310778 | 0.0819830 | 1.8375762 | 0.1218624 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0931722 | 0.0962981 | 0.0649301 | 0.5315383 | 0.0982511 |
| Διάμεσος | 0.1116843 | 0.1132267 | 0.0630874 | 1.8488410 | 0.0945885 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.4555316 | 0.4492625 | 0.3210881 | 3.7966631 | 0.5969747 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0015239 | 0.0001928 | 0.0016185 | 0.7365230 | 0.0012669 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1296334 | 0.1332155 | 0.0870154 | 1.8416212 | 0.1237721 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0967530 | 0.1000300 | 0.0707397 | 0.5502608 | 0.1006564 |
| Διάμεσος | 0.1108268 | 0.1135739 | 0.0688910 | 1.8331750 | 0.0977167 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.4734571 | 0.4710922 | 0.3392568 | 4.3005367 | 0.6187389 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0000160 | 0.0004567 | 0.0001701 | 0.7116367 | 0.0005435 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1320414 | 0.1359833 | 0.0943042 | 1.8400318 | 0.1273901 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0988492 | 0.1029475 | 0.0741070 | 0.5299966 | 0.1018011 |
| Διάμεσος | 0.1112434 | 0.1137820 | 0.0734857 | 1.7922159 | 0.0974880 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.4874703 | 0.5050540 | 0.3876863 | 3.6644906 | 0.7066055 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0013184 | 0.0001781 | 0.0005766 | 0.7059794 | 0.0002702 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1346411 | 0.1388774 | 0.0987216 | 1.8472407 | 0.1284762 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0996430 | 0.1042906 | 0.0785912 | 0.5621791 | 0.1051731 |
| Διάμεσος | 0.1152971 | 0.1172147 | 0.0776415 | 1.8655851 | 0.0986707 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.5110860 | 0.5095547 | 0.3796994 | 5.2766972 | 0.7610895 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0047584 | 0.0013211 | 0.0023693 | 0.7863855 | 0.0005407 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1365926 | 0.1411124 | 0.1014560 | 1.8470730 | 0.1293279 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.1002869 | 0.1054337 | 0.0812205 | 0.5453838 | 0.1082763 |
| Διάμεσος | 0.1189298 | 0.1195268 | 0.0821366 | 1.8355931 | 0.1029749 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.5060805 | 0.5173761 | 0.4470481 | 4.9780663 | 0.7440205 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0043376 | 0.0017585 | 0.0006373 | 0.7687483 | 0.0008999 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1395178 | 0.1442405 | 0.1047810 | 1.8469045 | 0.1321559 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0990639 | 0.1047096 | 0.0810992 | 0.5217212 | 0.1049367 |
| Διάμεσος | 0.1208920 | 0.1215030 | 0.0869503 | 1.8412376 | 0.1084299 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.5020458 | 0.5137366 | 0.4371779 | 3.7609702 | 0.6838277 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0011442 | 0.0007446 | 0.0001726 | 0.7390465 | 0.0002779 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.1420743 | 0.1470029 | 0.1071309 | 1.8553556 | 0.1342760 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0993902 | 0.1059426 | 0.0857045 | 0.5592124 | 0.1053888 |
| Διάμεσος | 0.1236896 | 0.1216263 | 0.0906635 | 1.8304352 | 0.1165502 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.5007061 | 0.5125367 | 0.4050919 | 4.5671296 | 0.6884753 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0010497 | 0.0004688 | 0.0001261 | 0.7456816 | 0.0001865 |

**Πίνακας 9.** Πίνακας με μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, διάμεσο, ελάχιστο και μέγιστο για την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων στα 1 μήνα ITM δικαιώματα

***Ληκτότητα 1 Μήνας In-the-money***

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0264018 | 0.0254493 | 0.0127913 | 0.0793401 | 0.0177326 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0190089 | 0.0179064 | 0.0096868 | 0.0351709 | 0.0130406 |
| Διάμεσος | 0.0220290 | 0.0211100 | 0.0110283 | 0.0819530 | 0.0148925 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1012851 | 0.0970640 | 0.0475740 | 0.2264609 | 0.0507682 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0007604 | 0.0001032 | 0.0004008 | 0.0005837 | 0.0000437 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0265144 | 0.0257901 | 0.0143007 | 0.0967556 | 0.0185432 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0197536 | 0.0186733 | 0.0113953 | 0.0723592 | 0.0136132 |
| Διάμεσος | 0.0215222 | 0.0217516 | 0.0116563 | 0.0823955 | 0.0163164 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1070791 | 0.0992016 | 0.0622771 | 0.3181311 | 0.0598157 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0004232 | 0.0001033 | 0.0001880 | 0.0007243 | 0.0000937 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0267058 | 0.0262256 | 0.0155525 | 0.0966043 | 0.0191318 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0202226 | 0.0192309 | 0.0126403 | 0.0718352 | 0.0140970 |
| Διάμεσος | 0.0207915 | 0.0213714 | 0.0122193 | 0.0823456 | 0.0179598 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1097970 | 0.1018623 | 0.0664553 | 0.3105717 | 0.0616216 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0004503 | 0.0003848 | 0.0003403 | 0.0002129 | 0.0000009 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0268849 | 0.0266255 | 0.0164742 | 0.0976547 | 0.0200742 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0207332 | 0.0199186 | 0.0139434 | 0.0752581 | 0.0140137 |
| Διάμεσος | 0.0207997 | 0.0214125 | 0.0126334 | 0.0851428 | 0.0182528 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1108091 | 0.1074089 | 0.0737381 | 0.5748846 | 0.0616396 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0001488 | 0.0003773 | 0.0001120 | 0.0003831 | 0.0000029 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0269998 | 0.0269856 | 0.0176275 | 0.0973795 | 0.0206551 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0212454 | 0.0204618 | 0.0147381 | 0.0719630 | 0.0140032 |
| Διάμεσος | 0.0210176 | 0.0212067 | 0.0134309 | 0.0844057 | 0.0198220 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1087686 | 0.1051708 | 0.0727746 | 0.3833135 | 0.0619209 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0003495 | 0.0002965 | 0.0001532 | 0.0000059 | 0.0000493 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0272123 | 0.0273564 | 0.0184033 | 0.0979744 | 0.0213335 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0218302 | 0.0211570 | 0.0156653 | 0.0734644 | 0.0142477 |
| Διάμεσος | 0.0212882 | 0.0211948 | 0.0137149 | 0.0839099 | 0.0196773 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1164133 | 0.1122718 | 0.0739934 | 0.4456924 | 0.0652548 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0001525 | 0.0002302 | 0.0000427 | 0.0005652 | 0.0001176 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0274474 | 0.0277255 | 0.0196082 | 0.0973707 | 0.0214693 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0224000 | 0.0219260 | 0.0162401 | 0.0727554 | 0.0147829 |
| Διάμεσος | 0.0215706 | 0.0221490 | 0.0145469 | 0.0808296 | 0.0200300 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1337108 | 0.1311678 | 0.0773827 | 0.3156235 | 0.0647736 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0002747 | 0.0003631 | 0.0005165 | 0.0005031 | 0.0002113 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0278440 | 0.0281470 | 0.0204398 | 0.0985636 | 0.0218665 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0225927 | 0.0222898 | 0.0169736 | 0.0764908 | 0.0151318 |
| Διάμεσος | 0.0219437 | 0.0229555 | 0.0153293 | 0.0849484 | 0.0199094 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1386914 | 0.1321426 | 0.0904169 | 0.5434036 | 0.0655355 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0003503 | 0.0003957 | 0.0000203 | 0.0009722 | 0.0001007 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0281875 | 0.0284850 | 0.0211457 | 0.0978586 | 0.0224810 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0226658 | 0.0226106 | 0.0171567 | 0.0737631 | 0.0149464 |
| Διάμεσος | 0.0224548 | 0.0227694 | 0.0166927 | 0.0861591 | 0.0200814 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1376374 | 0.1340888 | 0.0942051 | 0.4250577 | 0.0684862 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0002188 | 0.0000078 | 0.0001027 | 0.0002634 | 0.0001511 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0285642 | 0.0289096 | 0.0216227 | 0.0983862 | 0.0223430 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0225795 | 0.0226629 | 0.0172241 | 0.0720945 | 0.0153952 |
| Διάμεσος | 0.0224239 | 0.0227870 | 0.0173337 | 0.0837066 | 0.0208209 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1267710 | 0.1234560 | 0.0840823 | 0.3234625 | 0.0686566 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0000298 | 0.0000412 | 0.0001050 | 0.0008869 | 0.0000322 |

| Μοντέλο | Black-Scholes | CEV | Heston | Merton | Variance Gamma |
|---|---|---|---|---|---|
| Μέση Τιμή | 0.0289198 | 0.0293589 | 0.0221692 | 0.0993227 | 0.0225541 |
| Τυπική Απόκλιση | 0.0227827 | 0.0230138 | 0.0179577 | 0.0761508 | 0.0157820 |
| Διάμεσος | 0.0229459 | 0.0233766 | 0.0171300 | 0.0879809 | 0.0216621 |
| Μέγιστη Τιμή | 0.1306427 | 0.1271567 | 0.0803370 | 0.4523684 | 0.0644382 |
| Ελάχιστη Τιμή | 0.0000088 | 0.0000781 | 0.0001548 | 0.0006607 | 0.0002363 |

**Πίνακας 10.** Αποτελέσματα αποτίμησης Up and Out δικαιώματα

| Μοντέλο Αποτίμησης | Σχετικά Σφάλματα | Απόλυτα Σφάλματα |
|---|---|---|
| Black -Scholes | 0.0010243 | 0.0000035 |
| Heston Stochastic Volatility | 0.3111845 | 0.0007009 |
| Variance Gamma | 2.3367814 | 0.0032918 |
| Constant Elasticity of variance | 2.9352123 | 0.0042459 |
| Merton Jump Diffusion | 3.6677666 | 0.0031731 |

**Πίνακας 11.** Αποτελέσματα αποτίμησης Up and In δικαιώματα

| Μοντέλο Αποτίμησης | Σχετικά Σφάλματα | Απόλυτα Σφάλματα |
|---|---|---|
| Black -Scholes | 0.0004856 | 0.0000022 |
| Heston Stochastic Volatility | 0.3957268 | 0.0006136 |
| Constant Elasticity of variance | 1.2415594 | 0.0042092 |
| Variance Gamma | 4.2858517 | 0.0014644 |
| Merton Jump Diffusion | 8.7204614 | 0.0051480 |

**Πίνακας 12.** Αποτελέσματα αποτίμησης Down and Out δικαιώματα

| Μοντέλο Αποτίμησης | Σχετικά Σφάλματα | Απόλυτα Σφάλματα |
|---|---|---|
| Heston Stochastic Volatility | 0.2713919 | 0.0020628 |
| Variance Gamma | 2.9896865 | 0.0311507 |
| Constant Elasticity of variance | 18.6927581 | 0.0795194 |
| Merton Jump Diffusion | 1.7748812 | 0.0094064 |
| Black -Scholes | 0.1929898 | 0.0015195 |

**Πίνακας 13.** Αποτελέσματα αποτίμησης Down and In δικαιώματα

| Μοντέλο Αποτίμησης | Σχετικά Σφάλματα | Απόλυτα Σφάλματα |
|---|---|---|
| Heston Stochastic Volatility | 0.3284658 | 0.0002423 |
| Variance Gamma | 0.8101130 | 0.0004350 |
| Constant Elasticity of variance | 0.9935149 | 0.0010688 |
| Merton Jump Diffusion | 1.0810785 | 0.0006993 |
| Black -Scholes | 1.1515332 | 0.0014294 |

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.II

## Κώδικες Matlab

### Κώδικας για εκτίμηση του Μοντέλου Black Scholes μαζί με κλειστής μορφής λύση Black Scholes

```
function [ x,resnorm,residual,exitflag] = BSCalibration(~ )
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο
%του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(254);
irate=zeros(254);
iratef=zeros(254);
TTM=zeros(254,12);
strike=zeros(254,12);
imp_vol=zeros(254,12);
mktprice=zeros(254,12);
parameter=zeros(254,1);
res=zeros(254,1);
%εισάγω δεδομένα
S0 = xlsread('plano.xlsx','modeldata','B4:B440');
irate =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','E4:E440');
iratef= xlsread('plano.xlsx','modeldata','D4:D440');
TTM = xlsread('plano.xlsx','modeldata','G4:R440');
strike = xlsread('plano.xlsx','modeldata','T4:AE440');
imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE440');
mktprice = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AG3:AR440');

for i=1:254
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική(μέσος των implied volatilities των
δεδομένων
x0 = [0.1];
% Θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
lb = [0.001];
ub = [2];
k=i;
[ x,resnorm,residual,exitflag] = lsqnonlin(@BSLSQD,x0,lb,ub);
parameter(i)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%Αποθηκεύω τις τιμές που έχω για κάθε ένα από τα 12 δικαιώματα
με την
%εκτιμημένη παράμετρο στο μοντέλο
```

```
BS_call_matrix = zeros(437,12);
for j=1:12
    BS_call_matrix(i,j) =
BSformulaeCurrency(S0(i),strike(i,j),iratef(i),irate(i),TTM(i,
j),x(1));
end
pricedata = [BS_call_matrix];
end
xlswrite('plano.xls',pricedata,'resultsBS','D2:O438');
xlswrite('plano.xls',res,'resultsBS','B2:B438');
xlswrite('plano.xls',parameter,'resultsBS','A2:A438');
end

function [ BS_lsqd ] = BSLSQD( x )
% καλείται από το BSCalibration.m
% Εύρεση Διαφορών
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
BS_lsqd = zeros(1,12);
for j=1:12
    BS_lsqd(j)= mktprice(k,j)-
BSformulaeCurrency(S0(k),strike(k,j),iratef(k),irate(k),TTM(k,
j),x(1));
end;


function [ Price ] = BSformulaeCurrency( S,K,rf,rd,T,sigma)
%κλειστός τύπος αποτίμησης plain vanilla options
%με black and scholes για ισοτιμίες
%Garman-Kohlhagen model
    d1=((rd-rf+(sigma^2)*0.5)*T+log(S/K))/(sigma*sqrt(T));
    d2=d1-sigma*sqrt(T);
    N1=normcdf(d1);
    N2=normcdf(d2);
    Price=S*exp(-rf*T)*N1-K*exp(-rd*T)*N2;
end
```

**Κώδικας για εκτίμηση του Μοντέλου CEV μαζί με κλειστής μορφής λύση για plain vanilla**

```
function price=CEV_call_Cur(S,K,T,rd,rf,sigma,alpha)
%Κλειστή μορφή αποτίμησης από Schroder ,M (1989)  όταν alpha<1
%Κλειστή μορφή αποτίμησης από Emanuel and MacBeth όταν alpha>1
v=sigma^2/(2*(rd-rf)*(alpha-1))*...
(exp(2*(rd-rf)*(alpha-1)*T)-1);
a=((K*exp(-(rd-rf)*T))^(2*(1-alpha)))/(((1-alpha)^2)*v);
b=1/(1-alpha);
```

```
c=(S^(2*(1-alpha)))/(((1-alpha)^2)*v);
if alpha<1 && alpha>0
    price=S*exp(-rf*T)*(1-ncx2cdf(a,b+2,c))...
    -K*exp(-rd*T)*ncx2cdf(c,b,a);
elseif alpha>1
    price=S*exp(-rf*T)*(1-ncx2cdf(c,-b,a))…
    -K*exp(- rd*T)*ncx2cdf(a,2-b,c);
end
end


function [ x,resnorm,residual,exitflag,output] =
CevCalibration(~ )
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο
%του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(254);
irate=zeros(254);
iratef=zeros(254);
TTM=zeros(254,12);
strike=zeros(254,12);
imp_vol=zeros(254,12);
mktprice=zeros(254,12);
parameter=zeros(254,2);
res=zeros(254,1);
exit=zeros(254,1);
%εισάγω δεδομένα
S0 = xlsread('plano.xlsx','modeldata','B4:B257');
irate =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','E4:E257');
iratef= xlsread('plano.xlsx','modeldata','D4:D257');
TTM = xlsread('plano.xlsx','modeldata','G4:R257');
strike = xlsread('plano.xlsx','modeldata','T4:AE257');
imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE257');
mktprice = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AG3:AR257');
for i=1:437
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική των δεδομένων για εισαγωγή στην
εκτίμηση
x0 = [0.891,1.5]; %[sigma,alpha]
% Θέτω τα όρια των άγνωστων παραμέτρων
lb = [0.001,0.01]; ub = [0.99,3]; k=i;
[x,resnorm,residual,exitflag,output] =
lsqnonlin(@CevLSQD,x0,lb,ub);
parameter(i,:)=x;
res(i)=resnorm;
%Αποθηκεύω τις τιμές που έχω για κάθε ένα από τα 12 δικαιώματα
με την
%εκτιμημένη παράμετρο στο μοντέλο
```

```
cev_call_matrix = zeros(254,12);

for j=1:12
    cev_call_matrix(i,j) =
CEV_call_Cur(S0(i),strike(i,j),TTM(i,j),irate(i),iratef(i),x(1
),x(2));
end;
pricedata = [cev_call_matrix];
end
xlswrite('plano.xls',pricedata,'resultsBS','E2:P254');
xlswrite('plano.xls',res,'resultsBS','C2:C254');
xlswrite('plano.xls',parameter,'resultsBS','A2:B254');
end

function [ cev_lsqd ] = CevLSQD( x )
% Αυτό το function καλείται από το CevCalTest.m
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
cev_lsqd = zeros(1,12);
for j=1:12
    cev_lsqd(j)= mktprice(k,j)-
CEV_call_Cur(S0(k),strike(k,j),TTM(k,j),irate(k),iratef(k),x(1
),x(2));
end;
```

**Κώδικας για εκτίμηση του Μοντέλου Heston’s Stochastic Volatility μαζί με κλειστής μορφής λύση για plain vanilla**

```
function [ x,resnorm,residual,exitflag,output]  =
HestonCalibration(~ )
clear all
tic
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο
%του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(254);
irate=zeros(254);
iratef=zeros(254);
TTM=zeros(254,12);
strike=zeros(254,12);
imp_vol=zeros(254,12);
```

```
mktprice=zeros(254,12);
parameter=zeros(254,5);
res=zeros(254,1);
exit=zeros(254,1);

% εισάγω τις τιμές
S0= xlsread('plano.xlsx','modeldata','B4:B257');
irate =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','E4:E257');
iratef =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','D4:D257');
TTM = xlsread('plano.xlsx','modeldata','G4:R257');
strike = xlsread('plano.xlsx','modeldata','T4:AE257');
imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE257');
mktprice = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AG4:AR257');
for i=1:254
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική των δεδομένων για εισαγωγή στην
εκτίμηση
x0 = [0.009,0.012,2.2,0.2,0.0634]; %V(0),θ,κ,ζ,ρ
% Θέτω τα όρια των άγνωστων παραμέτρων
lb = [0,0.001,0.01,0.01,-0.9];
ub = [1,1,5,1,0.9];
k=i;
[ x,resnorm,residual,exitflag,output]   =
lsqnonlin(@HestonLS,x0,lb,ub);
parameter(i,:)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;

Heston_call_vector = zeros(254,12);

for j=1:12
    Heston_call_vector(i,j) =
HestonCall(S0(i),strike(i,j),TTM(i,j),irate(i),iratef(i),x(3),
x(2),x(4),x(5),x(1));
end;
pricedata = [Heston_call_vector];
end
xlswrite('plano.xls',pricedata,'resultsBS','H2:S254');
xlswrite('plano.xls',res,'resultsBS','F2:F254');
xlswrite('plano.xls',parameter,'resultsBS','A2:E254');
xlswrite('plano.xls',exit,'resultsBS','G2:G254');
toc
end

function P = HestonCall(S,K,T,rd,rf,kappa,theta,sigma,rho,v0)
%    (Written by Agnieszka Janek and Rafal Weron (2010.10.20) )
%    (Revised by Rafal Weron (2010.12.27))
% Υπολογίζει την τιμή του δικαιώματος υιοθετώντας Gauss-
Kronrod quadrature
C = exp(-rf.*T).*S - exp(-rd.*T).*K./(pi).*quadgk(@(v)
HestonVanillaLiptonInt(S,K,T,rd,rf,kappa,theta,sigma,rho,v0,v)
,0,inf,'RelTol',1e-8);
  P = C;
end
```

```
function payoff =
HestonVanillaLiptonInt(S,K,T,r,rf,kappa,theta,sigma,rho,v0,v)
X = log(S/K) + (r - rf).*T;
kappa_hat = kappa - rho*sigma/2;
zeta = sqrt( v.^2.*sigma.^2.*(1-rho.^2) +
2.*1i.*v.*sigma.*rho.*kappa_hat + kappa_hat.^2 + sigma.^2/4 );
psi_plus = - ( 1i*kappa*rho*sigma + kappa_hat ) + zeta;
psi_minus = ( 1i*kappa*rho*sigma + kappa_hat ) + zeta;
alpha = - kappa.*theta/(sigma.^2).*( psi_plus.*T + 2.*log( (
psi_minus + psi_plus.*exp(-zeta.*T) )./(2.*zeta) ) );
beta = ( 1 - exp(-zeta.*T) )./( psi_minus + psi_plus.*exp(-
zeta.*T) ); % corrected typo ("-" -> "+" in [3])
payoff = real( exp( ( -1i.*v + 0.5 ).*X + alpha - (v.^2 +
0.25).*beta.*v0 ) )./(v.^2 + 0.25);
end


function [ Heston_lsqd ] =HestonLS( x )
% Heston Least Square Difference function
%Αυτό καλείται από το HestonCalibration.m
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
%του excell με τα δεδομένα
Heston_lsqd = zeros(1,12);
for j=1:12
    Heston_lsqd(j)= mktprice(k,j)-
HestonCall(S0(k),strike(k,j),TTM(k,j),irate(k),iratef(k),x(3),
x(2),x(4),x(5),x(1));
end;
end
```

**Κώδικας για εκτίμηση του Μοντέλου Merton's Jump Diffusion μαζί με κλειστής μορφής λύση για plain vanilla**

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = MertonCalibration(~ )
clear all
tic
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
```

```
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο
%του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(254);
irate=zeros(254);
iratef=zeros(254);
TTM=zeros(254,12);
strike=zeros(254,12);
imp_vol=zeros(254,12);
mktprice=zeros(254,12);
parameter=zeros(254,4);
res=zeros(254,1);
exit=zeros(254,1);
% εισάγω τις τιμές
S0= xlsread('plano.xlsx','modeldata','B4:B257');
irate =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','E4:E257');
iratef =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','D4:D257');
TTM = xlsread('plano.xlsx','modeldata','G4:R257');
strike = xlsread('plano.xlsx','modeldata','T4:AE257');
imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE257');
mktprice = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AG4:AR257');
for i=1:254
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική των δεδομένων για εισαγωγή στην
εκτίμηση
x0 = [.08,1.2,0.0050,.04]; %sigma,lambda,muz,sigmaz
% Θέτω τα όρια των άγνωστων παραμέτρων
lb = [0.0001,0.0001,-1,0.0001];
ub = [0.8,3,1,0.8];
k=i;
[x,resnorm,residual,exitflag]= lsqnonlin(@MertonLS,x0,lb,ub);
parameter(i,:)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;

Merton_call_vector = zeros(254,12);
for j=1:12
    Merton_call_vector(i,j) =
MertonCall(S0(i),strike(i,j),irate(i),iratef(i),x(1),TTM(i),x(
2),x(3),x(4),100);    % Merton Call με τις εκτιμημένες
παραμέτρους
end;
pricedata = [Merton_call_vector'];
end
xlswrite('plano.xls',pricedata,'resultsBS','H2:S254');
xlswrite('plano.xls',res,'resultsBS','F2:F254');
xlswrite('plano.xls',parameter,'resultsBS','A2:E254');
xlswrite('plano.xls',exit,'resultsBS','G2:G254');
toc
end


function [ Merton_lsqd ] =MertonLS( x )
% merton Least Square Difference function
%Αυτό καλείται από το HestonCalibration.m
```

```
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή

Merton_lsqd = zeros(1,12);
for j=1:12
    Merton_lsqd(j)= mktprice(k,j)-
MertonCall(S0(k),strike(k,j),irate(k),iratef(k),x(1),TTM(k),x(
2),x(3),x(4),10);
end;
end


function Price =
MertonCall(S0,K,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,N)
% Λύση κλείστης μορφής Merton (1976) jump diffusion model
BSCall=@(s,K,r,q,v,T)s*exp(-q*T)*normcdf((log(s/K)+...
     (r-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T))-K*exp(-
r*T)*normcdf((log(s/K)+...
     (r-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)-v*sqrt(T));
% αναμενόμενς τιμές αλμάτων
kappa = exp(muJ + 0.5*sigmaJ^2) - 1;
Price = 0;
for n=0:N
    sigman = sqrt(sigma^2 + n*sigmaJ^2/T);
    rn = rd - lambdaJ*kappa + n*log(1+kappa)/T;
    BS = BSCall(S0,K,rn,rf,sigman,T);
    lambda = lambdaJ*(1+kappa);
    Probability = exp(-lambda*T)*(lambda*T)^n/factorial(n);
    Price = Price +  Probability*BS;
end
```

**Κώδικας για εκτίμηση του Μοντέλου Variance Gamma volatility μαζί με κλειστής μορφής λύση για plain vanilla**

```
function price = VG_price(theta,sigma,v,S,K,rd,rf,T)

%Αναλυτική φορμουλα αποτίμησης με Variance-Gamma
%Carr,Madan,Eric
s = sigma/sqrt(1+(-theta/sigma)^2*v/2);
alpha = + theta/(sigma*sqrt(1+(-theta/sigma)^2*v/2));
gam = T/v;
c1 = 0.5*v*(alpha+s)^2;
c2 = 0.5*v*alpha^2;
d = (log(S/K)+rd*T)/s + gam/s*log((1-c1)/(1-c2));
price = S*exp(-rf*T)*getVG_Psi(d*sqrt((1-c1)/v),
(alpha+s)*sqrt(v/(1-c1)), gam)...
    - K*exp(-rd*T)*getVG_Psi(d*sqrt((1-c2)/v),
alpha*sqrt(v/(1-c2)), gam);
```

```
end

function [x,resnorm,residual,exitflag,output] =
VGCalibration(~ )
clear all
tic
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο
%του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(254);
irate=zeros(254);
iratef=zeros(254);
TTM=zeros(254,12);
strike=zeros(254,12);
imp_vol=zeros(254,12);
mktprice=zeros(254,12);
parameter=zeros(254,3);
res=zeros(254,1);
exit=zeros(254,1);
% εισάγω τις τιμές
S0= xlsread('plano.xlsx','modeldata','B4:B257');
irate =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','E4:E257');
iratef =  xlsread('plano.xlsx','modeldata','D4:D257');
TTM = xlsread('plano.xlsx','modeldata','G4:R257');
strike = xlsread('plano.xlsx','modeldata','T4:AE257');
imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE257');
mktprice = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AG4:AR257');
for i=1:254
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική των δεδομένων για εισαγωγή στην
εκτίμηση
x0 = [0.01,0.2,0.1]; %theta,sigma,v,
% Θέτω τα όρια των άγνωστων παραμέτρων
lb = [0.01,0.01,0.01]; ub = [2,2,0.5]; k=i;
[x,resnorm,residual,exitflag,output] =
lsqnonlin(@VGLS,x0,lb,ub);
parameter(i,:)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%Memory allocation
VG_call_vector = zeros(254,12);
for j=1:12
    VG_call_vector(i,j) =
VG_price(x(1),x(2),x(3),S0(i),strike(i,j),irate(i),iratef(i),T
TM(i,j));
end;
pricedata = [VG_call_vector];
end
xlswrite('plano.xls',pricedata,'resultsBS','H2:S254');
```

```
xlswrite('plano.xls',res,'resultsBS','F2:F254');
xlswrite('plano.xls',parameter,'resultsBS','A2:C254');
xlswrite('plano.xls',exit,'resultsBS','G2:G254');
toc
end

function [ VG_lsqd ] =VGLS( x )
% Variance Gamma Least Square Difference function
%Αυτό καλείται από το HestonCalibration.m
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας USD
global iratef ; %interest rate ξένο (EUR)
global k;% βοηθητική μεταβλητή
VG_lsqd = zeros(1,12);
for j=1:12
    VG_lsqd(j)= mktprice(k,j)-
VG_price(x(1),x(2),x(3),S0(k),strike(k,j),irate(k),iratef(k),T
TM(k,j));
end;
```

**<u>Κώδικας για αποτίμηση Barrier Options με μοντέλο CEV ,μέθοδος Monte Carlo,παραγωγή μονοπατιών</u>**

```
function [path] =cev_path(S,rd,rf,T,sigma,alpha,NRepl,NSteps)
%Ο κώδικας προσομοιάζει το μονοπάτι της τιμή του υποκείμενου
%τίτλου(Συν/κή Ισοτιμία) σύμφωνα με το CEV (constant
elasticity of
%volatilty χρησιμόποιώντας μέθοδο Monte Carlo
dt=T/NSteps;
SPaths=zeros(NRepl,NSteps+1);
SPaths(:,1)=S;
delta=sigma/(SPaths(NRepl,1)^alpha);
vcev=zeros(NRepl,NSteps+1);
vcev(:,1)=delta*SPaths(NRepl,1)^alpha;
for i = 1:NRepl
for t=1:NSteps
%cev model
SPaths(i,t+1)=SPaths(i,t)*exp(((rd-rf)-0.5*vcev(i,t)^2)...
    *dt+vcev(i,t)*sqrt(dt)*randn);
vcev(i,t+1)=delta*SPaths(i,t)^alpha;
end
end
path=SPaths;
%plot(path)
end

function[price, std, CI] =
Cev_MC_UOC(S,H,K,sigma,rd,rf,T,alpha,NRepl,NSteps)
```

```
%  up and out call
% το φράγμα είναι υψηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
% Προσομοίωση τιμής για να υπολογίσουμε τελική τιμή
for i=1:NRepl
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
path = cev_path(S,rd,rf,T,sigma,alpha,1,NSteps);
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end

function[price, std, CI] =
Cev_MC_UIC(S,H,K,sigma,rd,rf,T,alpha,NRepl,NSteps)
%  up and in call
%το φράγμα είναι υψηλότερα της τιμής
payoff = zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    path = cev_path(S,rd,rf,T,sigma,alpha,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1  % path has always been above/below the
barrier
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end

function[price, std, CI] =
Cev_MC_DOC(S,H,K,sigma,rd,rf,T,alpha,NRepl,NSteps)
%  down and out call
% το φράγμα είναι χαμηλότερο από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
for i=1:NRepl
    path = cev_path(S,rd,rf,T,sigma,alpha,1,NSteps);
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    % determine if up or down
    if knocked ==0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K)
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
Cev_MC_DIC(S,H,K,sigma,rd,rf,T,alpha,NRepl,NSteps)
%  down and in call
```

```
% το φράγμα είναι χαμηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path = cev_path(S,rd,rf,T,sigma,alpha,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end
```

**Κώδικας για αποτίμηση Barrier Options με μοντέλο Heston's Stochastic Volatility ,μέθοδος Monte Carlo**

```
function[path]=HestonSPaths(S,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,
NRepl,NSteps)
SPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths(:,1)=S;
VPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths(:,1)=V0;
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl,1+NSteps);
Vvs=randn(NRepl,1+NSteps);
for i=1:NRepl
for j=1:NSteps
SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp((rd-rf-VPaths(i,j)/2)*...
    dt+sqrt(VPaths(i,j)*dt)*Vus(i,j+1));
VPaths(i,j+1)=VPaths(i,j)+(kappa*(theta-VPaths(i,j))*...
    dt+rho*Vus(i,j+1)*zeta*sqrt(VPaths(i,j)*dt)+...
    sqrt(1-rho^2)*Vvs(i,j+1)*zeta*sqrt(VPaths(i,j)*dt));
end
end

function[price, std, CI] =
Heston_UOC(S,H,K,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,NRepl,NSteps)
%  up and out call
% Το φράγμα είναι χαμηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    path =
HestonSPaths(S,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked == 0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-(rd)*T)*payoff)
end
```

```
function[price, std, CI] =
Heston_UIC(S,H,K,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,NRepl,NSteps)
%  up and in call
% το φράγμα είναι υψηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
HestonSPaths(S,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K));
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp((-rd)*T)*payoff);
end

function[price, std, CI] =
Heston_DOC(S,H,K,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,NRepl,NSteps)
%  down and out call
% το φράγμα είναι χαμηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
HestonSPaths(S,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked == 0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-(rd)*T)*payoff)
end

function[price, std, CI] =
Heston_DIC(S,H,K,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,NRepl,NSteps)
%  down and in call
% το φράγμα είναι χαμηλότερο από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
HestonSPaths(S,V0,rd,rf,T,kappa,theta,zeta,rho,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end
```

**Κώδικας για αποτίμηση Barrier Options με μοντέλο Merton's Jump Diffusion ,μέθοδος Monte Carlo**

```
function [path] =
Merton_MC_path(S,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,NRepl,NSteps
)
dt = T/NSteps;
kappa = exp(muJ) - 1;
drift = rd - rf - lambdaJ*kappa - 0.5*sigma^2;
% Θεωρώ ένα μηδενικό πίνακα για να φτιάξω εκεί τα μονοπάτια
SPaths = zeros(NRepl,NSteps);
SPaths(:,1)=S;
% Εκτελώ την προσομοίωση
for s=1:NRepl;
    for t=1:NSteps;
        J=0;
        if lambdaJ ~= 0;
            Nt = poissrnd(lambdaJ*dt);
            if Nt > 0;
                for i=1:Nt;
                    J = J + normrnd(muJ - sigmaJ^2/2,sigmaJ);
                end
            end
        end
        Z = normrnd(0,1);
        SPaths(s,t+1) = SPaths(s,t)*exp(drift*dt +
sigma*sqrt(dt)*Z + J);
    end
%plot(1:length(SPaths),SPaths(:,:))
path=SPaths;
end


function[price, std, CI] =
Merton_UOC(S,H,K,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,NRepl,NSteps
)
%  up and out call
% το φράγμα είναι υψηλότερα από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
Merton_MC_path(S,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);
end
   [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
Merton_UIC(S,H,K,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,NRepl,NSteps
)
%  up and in call
```

```
% το φράγμα είναι χαμηλότερο από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
Merton_MC_path(S,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
Merton_DOC(S,H,K,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,NRepl,NSteps
)
%  down and out call
% το φράγμα είναι χαμηλότερο από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    path =
Merton_MC_path(S,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,1,NSteps);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
Merton_DIC(S,H,K,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,NRepl,NSteps
)
%  down and in call
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path =
Merton_MC_path(S,rd,rf,sigma,T,lambdaJ,muJ,sigmaJ,1,NSteps);

    % δημιουργώ ένα μονοπάτι&ελέγχω αν πέρασε από το φράγμα
knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end
```

**Κώδικας για αποτίμηση Barrier Options με μοντέλο Variance Gamma ,μέθοδος Monte Carlo**

```
function pathS =
MC_VG(S,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,NRepl,NBatches)
% διακριτοποίηση της Variance Gamma process
% χρησιμοποιώντας subordination
pathS = zeros(NRepl,NSteps+1,NBatches);  %Δημιουργώ μηδενικό
πινακα
lnS = zeros(NRepl,NSteps+1);
dT = T / NSteps;
omegaT = -1/nu * log(1-theta(1)*nu ...
    - nu*sigma(1)^2/2);  %διορθωτικός όρος martingale
lnS(:,1) = log(S);
for l = 1 : NBatches
    % G = nu * gamrnd(dT/nu,1,NSim,NTime);
    % dW = randn(NSim,NTime);
    for m=2:NSteps+1
        G = nu * gamrnd(dT/nu,1,NRepl,1); % Gamma subordinator
        dW = randn(NRepl,1);                % Gaussians
        lnS(:,m) = lnS(:,m-1) ...
            + (rd-rf-omegaT) * dT ...
            + theta(1) * G + sqrt(G) * sigma .* dW;
    end


    pathS(:,:,l) = exp(lnS);      %μονοπάτια προσομοίωσης
end


function[price, std, CI] =
VG_MC_DIC(S,K,H,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,NRepl)
%  down and in call
% to φράγμα είναι κάτω από την τιμή
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path = MC_VG(S,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,1,1);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    % ελέγχω αν η τιμή κατά την διαρκεία του δικαιώματος
περασε το φράγμα
 if knocked ==1
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
    [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
VG_MC_DOC(S,K,H,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,NRepl)
%  down and out call
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
```

```
    path = MC_VG(S,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,1,1);
    % δημιουργώ ένα μονοπάτι
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    % ελέγχω αν η τιμή κατά την διαρκεία του δικαιώματος
περασε το φράγμα
    if knocked ==0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
VG_MC_UIC(S,K,H,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,NRepl)
%  Up and in call
payoff = zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    path = MC_VG(S,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,1,1);
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);% use the last
price
    end
end
payoff vector
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end


function[price, std, CI] =
VG_MC_UOC(S,K,H,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,NRepl)
%  up and out call
payoff = zeros(NRepl,1); % col vector of payoffs
for i=1:NRepl
    path = MC_VG(S,rd,rf,T,nu,theta,sigma,NSteps,1,1);
    knocked = barrierCrossing(S,H,path);
    if knocked ==0
        payoff(i) = max(0,path(NSteps+1)-K);
    end
end
  [price, std, CI] = normfit(exp(-rd*T)*payoff);
end
```

**Κώδικας για εύρεση προβλεπτικής ικανότητας με τα επιλεγμένα μοντέλα, όλα σε ένα κώδικα.**

```
function [ model_price] = FORECAST(~)
clear all
tic

S0= xlsread(……);
```

```
irate =  xlsread(……);
iratef= xlsread(……);
TTM = xlsread(……);
strike = xlsread(……)
sigma=xlsread(……);
V0=xlsread(……);
thetaheston=xlsread(……);
kappaheston=xlsread(……);
zetaheston=xlsread(……);
rhoheston=xlsread(……);
sigmamerton=xlsread(……);
lambdamerton=xlsread(……);
muzmerton=xlsread(……);
sigmazmerton=xlsread(……);
thetavg=xlsread(……);
sigmavg=xlsread(……);
vvg=xlsread(……);
sigmacev=xlsread(……);
alphacev=xlsread(……);

BS=zeros(254,10);
CEV=zeros(254,10);
HESTON=zeros(254,10);
MERTON=zeros(254,10);
VG=zeros(254,10);

for i=1:254;

    for j=1:10;

    S=S0(i+j);
    rd=irate(i+j);
    rf=iratef(i+j);
    T=TTM(i+j);
    K=strike(i+j);

    s=sigma(i);

    scev=sigmacev(i); a=alphacev(i);

    v=V0(i);  th=thetaheston(i);  k=kappaheston(i);
z=zetaheston(i); r=rhoheston(i);

    sm=sigmamerton(i); l=lambdamerton(i); muz=muzmerton(i);
sz=sigmazmerton(i);

    thvg=thetavg(i); svg=sigmavg(i); vv=vvg(i);


    BS(i,j)=blsprice(S,K,rd,T,s,rf);
    CEV(i,j)=CEV_call_Cur(S,K,T,rd,rf,scev,a);
    HESTON(i,j)=HestonCall(S,K,T,rd,rf,k,th,z,r,v);
    MERTON(i,j)=MertonCall(S,K,rd,rf,sm,T,l,muz,sz,100);
    VG(i,j)=VG_price(thvg,svg,vv,S,K,rd,rf,T);
```

```
    end
end
xlswrite(……,BS, ……);
xlswrite(……,CEV, ……);
xlswrite(……,HESTON, ……);
xlswrite(……,MERTON, ……);
xlswrite(……,VG, ……);
toc
end
```

**Κώδικας για αποτίμηση Barrier Options με τα επιλεγμένα μοντέλα, όλα σε ένα κώδικα.**

```
function [ model_price] = BARRIERTOTALPRICEFINDER(~)
clear all
tic

 %Παίρνω τις τιμές από τις εκτιμημένες παραμέτρους
sigma=xlsread(……);
v0=xlsread(……);
thetaheston=xlsread(……);
kappaheston=xlsread(……);
zetaheston=xlsread(……);
rhoheston=xlsread((……);
sigmamerton=xlsread(……);
lambdamerton=xlsread(……);
muzmerton=xlsread(……);
sigmazmerton=xlsread(……);
thetavg=xlsread((……);
sigmavg=xlsread(……);
vvg=xlsread(……);
sigmacev=xlsread(……);
alphacev=xlsread(……);

 %Εισάγω τιμές των γνωστών μεταβλητών από δεδομένα barrier
option
H=xlsread(……);
S0=xlsread(……);
rate=xlsread(……);
iratef= xlsread(……);
TTM = xlsread(……);
strike = xlsread(……);
h=xlsread(……);
Ns=xlsread(……);

 %Δημιουργώ κενές στήλες των αποτελεσμάτων ώστε να περαστούν
στο excel ως στήλες.
BSDownOut=zeros(length(h),1);
```

```
CEVDownOut=zeros(length(h),1);
HESTONDownOut=zeros(length(h),1);
MERTONDownOut=zeros(length(h),1);
VGDownOut=zeros(length(h),1);

for i=1:length(h);
    s=sigma(h(i));

    v=v0(h(i));
    th=thetaheston(h(i));
    k=kappaheston(h(i));
    z=zetaheston(h(i));
    r=rhoheston(h(i));

    sigm=sigmamerton(h(i));
    lm=lambdamerton(h(i));
    mu=muzmerton(h(i));
    sigmz=sigmazmerton(h(i));

    thvg=thetavg(h(i));
    sigvg=sigmavg(h(i));
    vvvg=vvg(h(i));

    sigcev=sigmacev(h(i));
    a=alphacev(h(i));

    S=S0(i);
    T=TTM(i);
    K=strike(i);
    Bar=H(i);
    NStep=Ns(i)
    rd=rate(i);
    rf=iratef(i);

BS(i,1)= BS_barrierCurrency (S,K,Bar,rd,rf,s,T,0);
CEV(i,1)=Cev_MC_DIC(S,Bar,K,sigcev,rd,rf,T,a,10000,NStep);
HESTON(i,1)=Heston_DIC(S,Bar,K,v,rd,rf,T,k,th,z,r,10000,NStep)
;
MERTON(i,1)=Merton_DIC(S,Bar,K,rd,rf,sigm,T,lm,mu,sigmz,10000,
NStep);
VG(i,1)=VG_MC_DIC(S,K,Bar,rd,rf,T,vvvg,thvg,sigvg,NStep,10000)
;


end;

pricedata = [BS,CEV,HESTON,MERTON,VG];
xlswrite('Barrier.xls',pricedata);
toc
end
```