ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

MARTINGALE ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΜΕΤΡΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ CAT

Κακοταρίτης Δημήτριος

Πειραιάς
Μάιος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από την ΓΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ 1^{η}/26.09.2013 συνεδρίασή τους σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική κινδύνου.

- Νικόλαος Μαχαιράς, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Βασίλειος Σεβρόγλου, Επίκουρος Καθηγητής
- Γεώργιος Ψαρράκος, Επίκουρος Καθηγητής.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

MARTINGALE ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΜΕΤΡΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ CAT

Κακοταρίτης Δημήτριος

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL AND RISK MANAGEMENT

MARTINGALE EQUIVALENT PROBABILITY MEASURES AND THE PROBLEM OF PRICING CAT DERIVATIVES

by
Dimitrios Kakotaritis

Piraeus, Greece
May 2015

Στους γονείς μου,
Κατερίνα και Κωνσταντίνο.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου και κύριο Γεώργιο Ψαρράκο για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία μελετούμε το πρόβλημα της αποτίμησης των ασφαλιστικών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης για καταστροφικά γεγονότα (ΣΜΕ CAT για συντομία), τα οποία βασίζονται στον Δείκτη Ζημιών (Loss Index) του ISO (Insurance Service Office). Στα πλαίσια αυτά, δοσμένου ενός χώρου πιθανότητας και μιας στοχαστικής διαδικασίας που παριστάνει την αξία ενός ασφαλιστικού ΣΜΕ CAT, παρουσιάζει ενδιαφέρον η ύπαρξη και η μοναδικότητα ενός martingale ισοδύναμου μέτρου πιθανότητας. Η μοναδικότητα ενός τέτοιου μέτρου, κάτω απο ορσμένες προϋποθέσεις, είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την πληρότητα της αγοράς άυλων τίτλων και ικανή για την λύση του προβλήματος αποτίμησης. Ωστόσο, στην περίπτωση σύνθετων διαδικασιών βασισμένων σε ομογενείς, μεικτές ή διπλά στοχαστικές διαδικασίες Poisson, ακόμα και αν έχουμε πληρότητα, θα μπορούσαμε να χάσουμε την μοναδικότητα ενός martingale ισοδύναμου μέτρου, και επομένως την μοναδική δυνατότητα αποτίμησης. Ως συνέπεια, σε ένα πρώτο βήμα μελετούμε την αποτίμηση στα πλαίσια της μεγιστοποιήσης της ωφελημότητας που γίνεται ατομικά απο κάθε επενδυτή. Ως ένα δεύτερο βήμα προκύπτει η αποτίμηση με την μέθοδο της ισορροπίας της αγοράς, όπου όλοι οι επενδυτές μπορούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφελιμοτητά τους (ανταλλάσσοντας κινδύνους) την ίδια χρονική στιγμή.

Abstract

In this thesis, we focus on the pricing of insurance futures for catastrophic events (CAT futures), whose underlying delivery is a Loss Index (or Loss Ratio) of Insurance service Office (ISO). Given a probability space and a stochastic process of the value of a CAT future, the existence and the uniqueness of an equivalent martingale measure, is important. In some special cases, the uniqueness of such a measure is equivalent to the completeness of securities markets and capable of solving the pricing problem. Although, as soon as we move to compound processes based on homogeneous, mixed, or doubly stochastic Poisson processes, even when completeness is present, we may lose the uniqueness of the equivalent martingale property and therefore the unique pricing property. Hence, as a first step we study the pricing of CAT futures in the context of utility maximization from the point of view of an individual agent. As a second step we study the pricing through the general equilibrium approach, where all investors maximize their utility (exchanging risks) at the same time.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

μ.χ.: μετρήσιμος χώρος

χ.μ., χ.π.: χώρος μέτρου, χώρος πιθανότητας

σ.μ.μ.: σύνολο μηδενικού μέτρου

σ.β.: σχεδόν βέβαια

τ.μ.: τυχαία μεταβλητή

σ.κ.(π.): συνάρτηση κατανομής (πιθανότητας)

σ.(π.)π.: συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας

σ.δ.: στοχαστική διαδικασία

ΣΜΕ: Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Εισαγωγή

Τα ασφαλιστικά παράγωγα για καταστροφικά γεγονότα (ασφαλιστικά παράγωγα CAT) εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στις αρχές της δεκαετίας του ’90 στο χρηματιστήριο παραγώγων του Σικάγου και αποτέλεσαν την απάντηση του CBOT (Chicago Board of Trade) στο αίτημα της ασφαλιστικής, κυρίως, αγοράς για την εισαγωγή ενός χρηματοοικονομικού εργαλείου ως μια εναλλακτική λύση αντασφάλισης, αντισταθμίζοντας με αυτόν τον τρόπο τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο ασφάλισης (underwriting risk). Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της κατασκευής ενός μοντέλου αποτίμησης αυτών των ασφαλιστικών παραγώγων CAT και πιο συγκεκριμένα των ασφαλιστικών ΣΜΕ CAT, όπως προτάθηκε απο τους Embrechts και Meister στις εργασίες τους [22], [10]. Στην περίπτωση αυτή έπρεπε να δημιουργηθεί ένας δείκτης πάνω στον οποίον θα βασίζανταν οι τιμές των ασφαλιστικών παραγώγων, καθώς σε αντίθεση με τις υπόλοιπες αγορές, π.χ. ομολόγων, η ασφαλιστική αγορά δεν έχει συνεχή ενημέρωση της υποκείμενης αγοραίας τιμής. Το CBOT επέλεξε ο δείκτης αυτός να είναι ένα loss ratio (ποσοστό ζημιάς), το οποίο υπολογίστηκε απο το ISO. Με βάση τα αναλογιστικά πλαίσια, θεωρείται οτι μια κατάλληλη στοχαστική διαδικασία (σ.δ. για συντομία) που μπορεί να εκφράσει τις ζημιές, απο τις οποίες εξαρτάται το loss ratio, είναι μια σύνθετη Μεικτή σ.δ. Poisson. Στη συνέχεια διερευνούμε ένα μοντέλο αποτίμησης σε μία αγορά υπό no arbitrage, το οποίο μεταφράζεται στην εύρεση ενός μοναδικού martingale ισοδύναμου μέτρου για τη σ.δ. των τιμών του ΣΜΕ CAT. Αποδεικνύτεται οτι υπάρχουν πολλά martingale ισοδύναμα μέτρα, όμως δεν υπάρχει μοναδικότητα και συνεπώς δε μπορούμε να αποτιμήσουμε υπο no arbitrage(βλ. σελ. 61). Βασικό ρόλο για τη μη ύπαρξη ενός μοναδικού martingale ισοδύναμου μέτρου παίζει η μη πληρότητα της ασφαλιστικης αγοράς, καθώς αυτές οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες (βλ. σελ. 68). Ως εκ τούτου, στρεφόμαστε σε άλλες μεθόδους αποτίμησης και πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο της μεγιστοποιήσης της ωφελιμότητας απο μία ασφαλιστικη εταιρεία και μετέπειτα στη μέθοδο της ισορροπίας της αγοράς όπου όλοι οι επενδυτές μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμοτητά τους. Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής.

Στο Κεφάλαιο 1 παραθέτουμε κάποιες βασικές έννοιες και ορισμούς. Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε μια επισκόπηση στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου όπου αρχικά παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των σ.δ. άφιξης απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, (βλ. Ενότητες 2.1 και 2.2 αντίστοιχα). Στην Ενότητα 2.3 αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα της σ.δ. Poisson, και ολοκληρώνουμε το 2^o Κεφάλαιο με μια αναφορά στις σύνθετες κατανομές (βλ. Ενότητα 2.4).

Στο Κεφάλαιο 3 κάνουμε μια πιο εκτενή αναφορά στα ασφαλιστικά ΣΜΕ CAT, ορίζοντας τον Δείκτη ζημιάς, στον οποίο βασίζεται το παράγωγό μας, και την σ.δ. των ζημιών, που είναι μια Σύνθετη Μεικτή σ.δ. Poisson. Έπειτα τονίζουμε τη βασική διαφορά του Δείκτη ζημιάς σε σχέση με άλλους χρηματοοικονομικούς δείκτες, δηλαδή την έλλειψη πληροφορίας.

Στο Κεφάλαιο 4 υποδεικνύονται ορισμένες γνωστές τεχνικές αποτίμησης υπο no-arbitrage, όπου ουσιαστικά βλέπουμε ότι χρειάζεται ένα μοναδικό ισοδύναμο martingale μέτρο για μία (δίκαιη) αποτίμηση.

Προκειμένου να ερευνήσουμε την ύπαρξη ισοδύναμων martingale μέτρων, πρέπει για δοσμένο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις παραγώγους Radon-Nikodym dQ/dP, όπου Q είναι ένα δεύτερο μέτρο πιθανότητας επάνω στην σ-άλγεβρα Σ. Επομένως ,αρχικά, στο Κεφάλαιο 5 αναφέρουμε ένα σημαντικό Θεώρημα χαρακτηρισμών των παραγώγων Radon Nikodym (βλ. Θεώρημα 5.1.1), το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ακριβώς τις παραγώγους Radon-Nikodym για τις πιο σημαντικές *σ.δ.* ασφαλιστικών κινδύνων (βλ. παραδείγματα 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4). Στην Ενότητα 5.2, δοσμένης μιας διύλισης $\{\mathcal{F}_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ για τον μ.χ. (Ω, Σ) και δύο μέτρων πιθανότητας P, Q επάνω στη Σ, μελετούμε αρχικά πότε η ισοδυναμία των $P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ και $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ συνεπάγεται την ισοδυναμία των P και Q επάνων στην $\mathcal{F}_\infty$. Αποδεικνύεται, ότι αυτό δεν είναι πάντα δυνατόν (βλ. πρόταση 5.2.2 και παράδειγμα 5.2.3). Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα *"αντίστροφο"* του Θεωρήματος 5.1.1, σύμφωνα με το οποίο, δοσμένης μιας σύνθετης μεικτής διαδικασίας Poisson $\{S_t\}$ ως προς P, κάτω απο ορισμένες προϋποθέσεις, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην Σ, ώστε η $\{S_t\}$ να παραμείνει μια σύνθετη μεικτή δ. Poisson ως προς Q. Το εν λόγω αποτέλεσμα μαζί με το Θεώρημα 5.1.1 χαρακτηρίζει, για δοσμένη σύνθετη μεικτή δ. Poisson $\{S_t\}$ επάνω στον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \Sigma, \mathbb{F}, P)$, όλα τα μέτρα πιθανότητας Q, ώστε το $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s$ να είναι ισοδύναμο με το $P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε

$s \in \mathbb{R}_+$, ως προς τα οποία η $\{S_t\}$ παραμένει σύνθετη μεικτή δ. Poisson. Τέλος στην Ενότητα 5.3 εξετάζουμε αν η σ.δ. της ζημιάς είναι martingale ως προς ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας. Αποδεικνύεται ότι αυτό συμβαίνει ακριβώς τότε όταν η $\{S_t\}$ είναι σύνθετη Poisson (Πρόταση 5.3.3).

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζουμε την πληρότητα σύνθετων διαδικασιών βασισμένων σε ομογενείς ή διπλά στοχαστικές διαδικασίες Poisson. Αποδεικνύεται ότι τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες δεν είναι γενικά πλήρεις (Πρόταση 6.1.3, Παράδειγμα 6.1.4). Στη συνέχεια στην Ενότητα 6.2 παραθέτουμε ένα σημαντικό Θεώρημα των Revuz και Yor (Θεώρημα 6.2.1), σύμφωνα με το οποίο μία cadlag στοχαστικη διαδικασία που είναι martingale ως προς ένα μέτρο πιθανότητας Q είναι πλήρης ακριβώς τότε, όταν το Q δεν είναι κυρτός συνδυασμός δύο martingale ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για τρείς ειδικές περιπτώσεις, που περιέχουν ευρείες κλάσεις στοχαστικών διαδικασιών, ισχύει η ισοδυναμία της πληρότητας μιας στοχαστικής διαδικασίας και της μοναδικότητας ενός martingale ισοδύναμου μέτρου. Όμως σε μία ασφαλιστική αγορά δεν ισχύει γενικά κάποια από τις τρείς αυτές περιπτώσεις (Παράδειγμα 6.2.3).

Στο Κεφάλαιο 7 μελετούμε μία εκδοχή του Θεωρήματος αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων στα πλαίσια μιας αγοράς ασφαλιστικών ΣΜΕ. Αποδεικνύεται ότι μια αγορά ασφαλιστικών ΣΜΕ δεν επιτρέπει στρατηγικές arbitrage ακριβώς τότε, όταν υπάρχει ένα martingale ισοδύναμο μέτρο (Πρόταση 7.3.3 και Θεώρημα 7.3.5).

Τέλος στο Κεφάλαιο 8 μελετούμε την αποτίμηση στα πλαίσια της μεγιστοποιήσης της ωφελημότητας, καθώς όπως δείχνεται στα στα κεφάλαια 6 και 7, μια ασφαλιστική αγορά, γενικά, δεν είναι πλήρης αλλά ακόμα και πλήρεις ασφαλιστικές αγορές γενικά δεν επιτρέπουν την μοναδικότητα ενός martingale ισοδύναμου μέτρου. Στην Ενότητα 8.1 γίνεται αποτίμηση μεγιστοποιώντας την ωφελιμότητα απο έναν μόνον επενδυτή και στην Ενότητα 8.2 γίνεται αποτίμηση με την μέθοδο της ισορροπίας της αγοράς, όπου όλοι οι επενδυτές μπορούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφελημοτητά τους (ανταλλασσοντας κινδύνους) την ίδια χρονική στιγμή.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

1.1 Γενικές μαθηματικές έννοιες και ορισμοί

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ ($I \neq \varnothing$) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω. Τα στοιχεία μίας σ-άλγεβρας Σ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με χ_A συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) A.

Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in I}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **διαμέριση** του Ω, αν
- $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ και
- $\bigcup_{j\in I} B_j = \Omega$.

Οι τελευταίες δύο ιδιότητες συνοπτικά συμβολίζονται ως εξής: $\biguplus_{j\in I} B_j = \Omega$.

1.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Από εδώ και στο εξής, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χώρος πιθανότητας (χ.π. για συντομία). Έστω $\{X_t\}_{t\in I}$ μία σ.δ. με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο R_{X_t} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή σ.δ.** ή **σ.δ. Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_n < t, t_j, t \in I$ για κάθε $j = 1, \ldots n$ και $i_1, \ldots, i_n, k \in R_{X_t}$ ισχύει

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right).$$

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τ.μ. X ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και (εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται **η δεσμευμένη μέση τιμή** της (τ.μ.) X δοθέντος του (ενδεχομένου) B. Για μία $X = \chi_A$ με $A \in \Sigma$ εύκολα προκύπτει ότι $E[\chi_A|B] = P_B(A)$ διότι

$$\begin{aligned} E[\chi_A|B] &:= \int_B \chi_A dP_B = \int_{A\cap B} dP_B = P_B(A\cap B) \\ &= \frac{P(A\cap B\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P_B(A). \end{aligned}$$

Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ (βλ. Παράρτημα Β΄ για τον ορισμό) και τ.μ. $Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Τότε **μία δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθείσης της (τ.μ.) Y** ορίζεται να είναι μία τυχαία μεταβλητή $E[X|Y] : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) η $E[X|Y]$ είναι μία $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|Y]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in \sigma(Y)$

Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και T σ-υποάλγεβρα της Σ. Τότε **μία δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθείσης της σ-υποάλγεβρας** T ορίζεται να είναι μία τυχαία μεταβλητή $E[X|T] : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) η $E[X|T]$ είναι μία T-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|T]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in T$

Η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής δοθείσης μίας σ-υποάλγεβρας της Σ επεκτείνει τη δέσμευση επάνω σε μία τ.μ. Y υπό την έννοια ότι $E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$ $P \restriction \sigma(Y) - \sigma.\beta.$.

Μία αύξουσα οικογένεια $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}_+$, σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** (filtration).

Μία διύλυση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ονομάζεται **πλήρης** (complete) αν και μόνο αν το σύνολο

$$\mathcal{N}_P := \{A \subseteq \Omega : \exists N \in \Sigma_0 \quad A \subseteq N\}$$

είναι υποσύνολο της $\mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in I$.

Μία σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $t \in I$ η τ.μ. X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Η $\{T_t\}_{t\in I}$ με $T_t = \sigma\big(\{X_s : s \leq t\}\big)$ για κάθε $t \in I$ ονομάζεται **η κανονική διύλιση για την** $\{X_t\}_{t\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση. Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale ως προς τη διύλιση** $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ ή **ένα** $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$**-martingale** (ή η οικογένεια $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(m₁) Η $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$.

(m₂) Για κάθε $t \in I$ η $X_t \in \mathcal{L}^1(P)$.

(m₃) Για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ ισχύει $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad P|\mathcal{F}_s - \sigma.\beta.$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι για την υπόλοιπη εργασία κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε έναν σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

1.3 Βασικές Χρηματοοικονομικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμοί 1.3.1. *Χρηματοοικονομική αγορά και Χαρτοφυλάκια*

(a) **Χρηματοοικονομική αγορά** *(financial market) ή απλώς αγορά* θα θεωρείται μία δομή μέσα στην οποία επενδυτές πραγματοποιούν αγοραπωλησίες κ χρηματοοικονομικών τίτλων (π.χ. ομόλογα, μετοχές παράγωγα). Συνήθως καλούμε τους τίτλους αυτούς: τίτλος 1, τίτλος 2,...., τίτλος κ.

(b) Ενα **χαρτοφυλάκιο** (portfolio) είναι μία συλλογή απο τίτλους. Ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να αποτελείται απο N τίτλους μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά απο ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$. Το x_i εκφράζει την ποσότητα του τίτλου i που κρατάμε στην κατοχή μας. Ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός. Ο θετικός αριθμός εκφράζει **μία θέση αγοράς (long position)** ενώ ο αρνητικός αριθμός εκφράζει **μία θέση πώλησης ή θέση δανεισμού (short position)**.

(c) Η **εμπορική ή επενδυτική στρατηγική** (treding strategy) ή **δυναμικό χαρτοφυλάκιο** (dynamic portfolio) είναι ένα σύνολο τίτλων μιας αγοράς του οποίου η σύνθεση μπορεί να αλλάζει ανάλογα με την τρέχουσα και παρελθούσα κατάσταση της αγοράς και περιγράφεται απο το διάνυσμα

$$x_t = (x_1(t), x_2(t), ..., x_\kappa(t)).$$

Το $x_i(t)$ εκφράζει το πλήθος των τεμαχίων του τίτλου i που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο στο χρόνο t. Το $x_i(t)$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και μάλιστα μπορεί να είναι αρνητικός (αν $x_i(t) < 0$ τότε το χαρτοφυλάκιο ειναι short (έχουν πουληθεί) $x_i(t)$ μονάδες του τίτλου i). Υποθέσαμε παραπάνω ότι η σύνθεση x_t του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t διαμορφώνεται με βάση την πληροφορία που έχουμε από την αγορά μέχρι τον χρόνο t (δεν λαμβάνεται πληροφορία από το μέλλον), δηλαδή το $x_i(t)$ θα είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμο.

Άν $S_t = (S_1(t), S_2(t), ..., S_\kappa(t))$ το τυχαίο διάνυσμα των χρηματικών αξιών των κ τίτλων της αγοράς στο χρόνο t, τότε η χρηματική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t θα είναι ίση με

$$V_t = x_t \cdot S_t = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i(t) S_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ένα χ.π. (Ω, Σ, P) και μία διύλιση $\{\mathcal{F}\}_{0<t<T}$ η οποία εκφράζει όλη την πληροφορία σχετικά με τις τιμές των τίτλων της αγοράς μέχρι και το χρόο t.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι $\sigma.\delta.$ $\{S_t, t \in [0, T]\}$, $\{x_t, t \in [0, T]\}$, $\{V_t, t \in [0, T]\}$ είναι όλες προσαρμοσμένες στο φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$.

Ένα **αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο**, θεωρείται το χαρτοφυλάκιο το οποίο κατά την αλλαγή της σύνθεσής του η συνολική του αξία παραμένει ίδια (δεν εισέρχεται ούτε εξέρχεται κάποιο χρηματικό ποσό).

(d) **Arbitrage (εξισορροοιητική κερδοσκοπία)** καλείται μία στρατηγική αγοραπωλησιών τίτλων της αγοράς που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος. Άν σε μια αγορά δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage τότε θα λέμε ότι η αγορά βρίσκεται σε **κατάσταση ισορροπίας** ή σε **κατάσταση no-arbitrage**.

Ορισμοί 1.3.2. *Χρηματοοικονομικοί τίτλοι (financial instruments)*

(a) Ένα **ομόλογο** (bond) είναι ένα χρεόγραφο, για το οποίο ο εκδότης έχει την υποχρέωση να καταβάλει, στη λήξη της σύμβασης, την ονομαστική αξία αυτού και στην περίπτωση των ομολόγων με κουπόνι, σε τακτά προκαθορισμένα διαστήματα ποσό χρημάτων (το κουπόνι). Ένα ομόλογο είναι απλώς ένα δάνειο, το οποίο αντλείται από τον εκδότη του δανείου όχι μέσω της τραπεζικής διαμεσολάβησης αλλά μέσω των κεφαλαιαγορών. Ο εκδότης είναι ο οφειλέτης, ο κάτοχος ομολόγων ο δανειστής και το κουπόνι (αν υπάρχει) είναι ο τόκος.

(b) **Μετοχή** (Shares) είναι ένα από τα ίσα μερίδια, στα οποία διαιρείται το κεφάλαιο μιας ανώνυμης εταιρίας. Η μετοχή, ως αξιόγραφο, ενσωματώνει τα δικαιώματα του μετόχου που πηγάζουν από τη συμμετοχή του στην ανώνυμη εταιρία. Τα δικαιώματα αυτά, είναι ανάλογα του αριθμού μετοχών που κατέχει ο μέτοχος. Ενδεικτικά δικαιώματα που προκύπτουν από την κατοχή μετοχών είναι το ποσοστό ίσο με τον αριθμό των μετοχών που κατέχει ο μέτοχος προς το σύνολο των μετοχών της εταιρείας, του μερίσματος από τα διανεμόμενα κέρδη της εταιρίας, καθώς και αντίστοιχο ποσοστό από την περιουσία της εταιρίας, σε περίπτωση που αυτή διαλυθεί.

(c) **Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα** (ΠΧΠ). Ως παράγωγο προϊόν θεωρείται μια διμερής σύμβαση η οποία μπορεί να αναφέρεται σε κάποιο αγαθό (υποκείμενο αγαθό) π.χ. μετοχές, (ή δείκτες μετοχών: FTSE 20, FTSE 40), ομόλογα, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα. Στη συνέχεια αναφέρουμε μερικά από τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα.

• **Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ, future contracts)** είναι απρόσωπες συμφωνίες μεταξύ δύο συμβαλλομένων για αγορά ή πώληση μιας συγκεκριμένης ποσότητας ενός υποκείμενου τίτλου (underlying instrument) σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία T (maturity) και σε προκαθορισμένη τιμή K (delivery price) που έχει συμφωνηθεί κατά την αγοραπωλησία.

• **Δικαιώματα προαίρεσης (Options)**. Δικαίωμα προαίρεσης (call option ή put option) καλείται η συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, τον holder και τον writer του δικαιώματος. Η συμφωνία αυτή δίνει στον holder το *δικαίωμα* (αλλά όχι την υποχρέωση) να *αγοράσει* από τον writer (αν πρόκειται για call option), ή να *πωλήσει* στον writer (αν πρόκειται για put option):

- ένα συγκεκριμένο αγαθό (π.χ. 1000 μετοχές ΑΑΑ) με αξία S_t στο χρόνο t,
- σε μία προκαθορισμένη τιμή K (strike price),
- σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία T (maturity) (άν είναι Ευρωπαϊκού τύπου) ή σε όποιο χρόνο t επιθυμεί με $t \in [0, T]$ (άν είναι Αμερικάνικου τύπου). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μόνο τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα.

Ο holder δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα του παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο writer είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο holder. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον holder και για αυτό πρέπει να προκαταβάλει (στο χρόνο 0) ένα αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος- Option price, option premium) στον writer.

Κεφάλαιο 2

Σύντομη Επισκόπηση Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μία σύντομη αναφορά σε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Έτσι, αρχικά σκιαγραφούμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, θέτοντας το γενικό πλαίσιο αναφοράς του παρόντος κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 2.1). Έπειτα, προχωράμε στην επισκόπιση κάποιων ιδιοτήτων των σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 2.2 και 2.3, αντίστοιχα). Τέλος αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson(βλ. Ενότητα 2.4), που αποτελεί την βάση για την κατανόηση τόσο της μεικτής διαδικασίας Poisson όσο και των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών.

2.1 Το Υπόδειγμα

Για την ανάπτυξη ενός υποδείγματος που θα μοντελοποιεί το χαρτοφυλάκιο των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, αναφέρουμε αρχικά τις ακόλουθες έννοιες,

- την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων (*claim arrival process*),

- την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων (*claim number process*), και,

- την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (*claim interarrival process*).

Θα δούμε ότι και οι τρείς στοχαστικές διαδικασίες σχετίζονται μεταξύ τους και μάλιστα γνωρίζοντας την μία μπορούμε να καθορίσουμε τις υπόλοιπες.
Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που ασφαλίζονται από κάποια ασφαλιστική εταιρεία. Οι ασφαλισμένοι πληρώνουν ασφάλιστρα έναντι των κινδύνων που αντιμετωπίζουν και οι οποίοι αν παραγματοποιηθούν προξενούν απαιτήσεις έναντι της εταιρίας, η οποία με τη σειρά της καλείται να τις εξοφλήσει . Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αποτελείται από έναν και μοναδικό ή περισσότερους κινδύνους.
Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι απαιτήσεις λαμβάνουν χώρα τυχαία και σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα ξεκινώντας στο χρόνο μηδέν, έτσι ώστε

- καμιά απαίτηση να μην λαμβάνει χώρα στο χρόνο μηδέν, και

- να μην συμβαίνουν δύο (ή περισσότερες) απαιτήσεις, ταυτόχρονα.

Η υπόθεση της μη ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο (ή περισσότερων) απαιτήσεων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, δεν πρέπει να παρουσιάζεται κάποιο σημαντικό πρόβλημα όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μικρό. Όμως, όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο, εξαρτάται από το είδος της υπό εξέταση ασφάλισης για το αν αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αποδεκτή ,π.χ δύο ασφαλισμένοι από το ίδιο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αυτοκινήτων να εμπλακούν σε ένα δυστύχημα μεταξύ τους και να υπάρχει μερική ευθύνη και από τους δύο .
Πάντως, η υπόθεση της μη ταυτόχρονης εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακόμα κι όταν κρίνεται ως μη αποδεκτή, μπορεί να διατηρηθεί, αλλάζοντας ελαφρώς την οπτική μας, δηλαδή, με το να θεωρήσουμε τα γεγονότα (που προκαλούν την έγερση) απαίτησης (όπως αυτοκινητιστικά δυστυχήματα) αντί των ατομικών απαιτήσεων. Ο αριθμός των ατομικών απαιτήσεων που εγείρονται για ένα συγκεκριμένο γεγονός απαίτησης μπορεί τότε να ερμηνευτεί ως το μέγεθος του γεγονότος απαίτησης.
Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μοντελοποιούμε τις προηγούμενες ιδέες σε ένα *πιθανοθεωρητικό* υπόδειγμα.

2.2 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε τόσο την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων όσο και την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Ορισμός 2.2.1. Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. είναι μια σ.δ. **άφιξης των απαιτήσεων** αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

(t$_1$) $T_0(\omega) = 0$, και

(t$_2$) $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται το P-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. T_n είναι θετική κάτι που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι η σ.δ. **ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι η τ.μ. W_n είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i. \tag{2.1}$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους Ορισμούς 2.2.1 και 2.2.2 σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην προηγούμενη ενότητα σημειώνουμε τα εξής:

- Η T_n είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο εμφάνισης της n-οστής απαίτησης.
- Η W_n είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο αναμονής μεταξύ της $(n-1)$-οστής και της n-οστής απαίτησης.
- Με πιθανότητα ένα, **καμία** απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις **δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα**.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι Ορισμοί 2.2.1 και 2.2.2 βρίσκουν άμεση φυσική ερμηνεία, αφού προφανώς οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων θα είναι θετικοί, ενώ λογικά η απαίτηση n θα εμφανίζεται σε χρόνο μεταγενέστερο αυτού στον οποίο εμφανίζεται η απαίτηση $n-1$.
Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως

την αντίστοιχη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.
Από τον Ορισμό 2.2.2 και την (2.1), είναι προφανές ότι η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων αλληλοκαθορίζονται. Η σχέση τους γίνεται ξεκάθαρη από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.2.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}\big)$.

(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \ldots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \ldots, T_n(\omega))'$$

και

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα, καθώς και για τον $n \times n$-πίνακα $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ με

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{cases}$$

έχουμε:

(a) *Ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, και*

(b) $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ *καθώς και* $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.2.3.

Από το (i) έπεται το συμπέρασμα ότι η πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την γνώση της $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ίδια με την πληροφορία που προκύπτει από την γνώση της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενώ από το (ii) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τιμές της μίας μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και τις τιμές της άλλης μέσω ενός πίνακα.

Λήμμα 2.2.4. *Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων του Λήμματος 2.2.3 ικανοποιούν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα εξής:*

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \text{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Στις υποθέσεις που κάναμε για το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 2.1 η πιθανότητα να προκύψουν ταυτόχρονα δύο ή και περισσότερες απαιτήσεις είναι ίση με μηδέν, αυτό όμως δεν αποκλείουν την δυνατότητα πραγματοποίησης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο, κάτι που μας οδηγεί πολύ φυσικά στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.5. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στην πιθανότητα της έκρηξης.

Λήμμα 2.2.6. *Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Πόρισμα 2.2.7. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} E[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7 αντίστοιχα.
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια συγκεκριμένη ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί είναι η απόφαση για το αν θα πρέπει να θεωρήσουμε την πιθανότητα έκρηξης ίση με το μηδέν ή όχι. Αυτή φυσικά είναι μια απόφαση που αφορά την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.
Το ακόλουθο Λήμμα δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από μία εφαρμογή του Λήμματος 2.2.4 και μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση που έχουν οι στοχαστικές διαδικασίες $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.2.8. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{E}[W_n] = 1/\alpha$ και $\mathbb{E}[T_n] = n/\alpha$, και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [26] Lemma 1.2.2.

2.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και αποδεικνύουμε ότι οι σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη (και κατ'επέκταση την σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων). Παραθέτουμε ακόμη δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο πως συνδέεται η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την πιθανότητα της έκρηξης. Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες της προσαύξησης, των ανεξάρτητων και των στάσιμων προσαυξήσεων για την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.3.1. Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται σ.δ. **του αριθμού των απαιτήσεων** αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχούν τα εξής:

(n1) $N_0(\omega) = 0$,

(n2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

(n3) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(n4) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

(n5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_N ονομάζεται το P-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται από ορισμένους συγγραφείς και *σημειακή διαδικασία*
Θέλοντας να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία στον παραπάνω ορισμό σημειώνουμε τα εξής:

- Η N_t είναι η τ.μ. που δηλώνει τον πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- P-σχεδόν βέβαια όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ξεκινούν από το μηδέν (βλ. **(n1)**), είναι δεξιά συνεχείς (βλ. **n3)**), αυξάνουν με άλματα μοναδιαίου ύψους στα σημεία ασυνέχειας (βλ. **(n2)** και **(n4)**), και τείνουν στο άπειρο (βλ. **(n5)**).

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως σε χρόνο μηδέν δεν έχουμε καμία απαίτηση, ενώ με το πέρασμα του χρόνου ο αριθμός των απαιτήσεων αυξάνει. Μάλιστα, όταν αυτό

γίνεται στο χρονικό διάστημα $(t, t+\varepsilon)$, η αύξηση δεν είναι μεγαλύτερη της μίας απαίτησης, αφού από τις υπθέσεις του υποδείγματός μας σχεδόν βέβαια δύο ή περισσότερες απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.
Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παρόυσας ενότητας η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη, μαθηματικά η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται στα δύο ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 2.3.2. *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega), \tag{2.2}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}. \tag{2.3}$$

Θεώρημα 2.3.3. *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}_0$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:*

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega)$.

Για την απόδειξη των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων βλ. π.χ [1] Θεώρημα 3.3.2 και Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που παράγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που παράγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,(και άρα και το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.
Εξαιτίας της παραπάνω υπόθεσης, παίρνουμε δύο απλές, αλλά πολύ χρήσιμες ισότητες, που καταδεικνύουν το ότι ορισμένα ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να ερμηνευτούν (ισοδύναμα) ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων κι αντίστροφα.

Λήμμα 2.3.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

(ii) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.3.4.

Άμεση συνέπεια του (i) του Λήμματος 2.3.4 αποτελεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.3.5. *Ισχύει* $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Μία πρώτη εφαρμογή του Λήμματος 2.3.4 είναι η σύνδεση του ενδεχομένου της έκρηξης με την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, κάτι που φαίνεται στα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

Λήμμα 2.3.6. *Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει*

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right).$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ [26] Lemma 2.1.4.

Πόρισμα 2.3.7. *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ [26] Corollary 2.1.5.

Όπως θα διαπιστώσουμε και στα επόμενα κεφάλαια, η μελέτη της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων θα βασιστεί σε σημαντικό βαθμό στις ιδιότητες των προσαυξήσεών της, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων στο διάστημα $(s,t]$, των στάσιμων αλλά και των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.
Για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ η **προσαύξηση** της σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s,t]$ ορίζεται από την

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.4}$$

Επειδή, μάλιστα, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $N_0(\omega) = 0$ και $T_n(\omega) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η (2.4) βρίσκεται σε συμφωνία με τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.3.2. Επί πλέον, για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.5}$$

που ισχύει ακόμα κι αν το $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.4 Η Διαδικασία Poisson

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τη διαδικασία Poisson και δίνουμε κάποια αρχικά αποτελέσμα που αφορούν τις κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,$\{N_t\}_{n\in\mathbb{R}_+}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.4.1. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (**ομογενής**) **διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\theta \in (0,\infty)$ εάν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις και για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού είναι ότι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν

$$P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$$

για όλα τα $t,h \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 2.4.2. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson** αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο 1.

Λήμμα 2.4.3. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Για την απόδειξη βλ π.χ [26] Lemma 2.2.1

Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων των Λημμάτων 2.2.8 και 2.4.3 και δηλώνει ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων είναι (ισόνομα) εκθετικά κατανεμημένοι και ανεξάρτητοι έπεται ότι ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Poisson και αντίστροφα.

Πόρισμα 2.4.4. *Έστω* $\theta \in (0, \infty)$. *Αν η σ.δ.* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρισμού είναι το πρώτο από μία σειρά θεωρημάτων χαρακτηρισμού που θα ακολουθήσουν στα υπόλοιπα κεφάλαια

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω* $\theta \in (0, \infty)$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο* θ.

(iii) *Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τη συνθήκη* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) *Η σ.δ* $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι ένα martingale.*

Για απόδειξη βλ. π.χ. [26] Theorem 2.3.4 .

2.5 Η Σ.Δ. των συνολικών απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε τη *σ.δ* συνολικών απαιτήσεων.Αρχικά επεκτείνουμε το υπόδειγμα που θεωρείται μέχρι στιγμής (υποενότητα 2.5.1) και ύστερα θέτουμε μερικά γενικά συμπεράσματα για τις σύνθετες κατανομές(ενότητα2.6).αποδεικνύεται ότι οι κατανομές των συνολικών απαιτήσεων μπορούν να καθοριστούν ρητά μόνο σε λίγες εξαιρετικές περιπτώσεις.

Το Υπόδειγμα 2.5.1. Στη παρούσα ενότητα και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θεωρούμε την ακολουθία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τη $\sigma.\delta$ του αριθμού των απαιτήσεων και την ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τη $\sigma.\delta$ άφιξης της απαίτησης που επάγεται από τη $\sigma.\delta$ αριθμού των απαιτήσεων.Θεωρούμε ότι το exceptional μηδενικό σύνολο είναι κενό και ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.

Επιπλέον, η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται ως μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και για κάθε $\in \mathbb{R}_+$,ορίζουμε

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} X_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{2.6}$$

Φυσικά έχουμε $S_0 = 0$.

Σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην Ενότητα 2.1 οι παραπάνω τ.μ. βρίσκουν την ακόλουθη ερμηνεία

- Η X_n είναι η τ.μ. που δηλώνει το μέγεθος ή την ένταση ή το ποσό της n-απαίτησης.

- Η S_t είναι η τ.μ. που δηλώνει το συνολικό μέγεθος ή ύψος ή ποσό των απαιτήσεων που εφανίζονται μέχρι το χρόνο t.

Συνακόλουθα , η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται η $\sigma.\delta$ μεγέθους απαίτησης και η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η $\sigma.\delta$ συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από τη $\sigma.\delta$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και της $\sigma.\delta$ μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ίσα και ανεξάρτητα κατανεμημένη και ότι η $\sigma.\delta$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η $\sigma.\delta$ μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες.

Λήμμα 2.5.2. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$P[\{S_t \in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P[\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\}] \tag{2.7}$$

Για απόδειξη βλ. π.χ. [26] Theorem 5.1.1 .

Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ *με* $s \leq t$ *η προσαύξηση της σ.δ* $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *των συνολικών απαιτήσεων επάνω στο διάστημα (s,t] ικανοποιεί τη*

$$S_t - S_s = S_{N_t} - S_{N_s} = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k \tag{2.8}$$

Εφόσον $S_0 = 0$, *η τελευταία σχέση βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό της τ.μ.* S_t *όπως αυτός δόθηκε στη αρχή της ενότητας.*
Επιπλέον ισχύει ότι

$$S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega) \tag{2.9}$$

ακόμα και αν το $S_s(\omega)$ *είναι άπειρο.*
Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα που συνδέουν την συμπεριφορά των προσαυξήσεων της σ.δ του αριθμού των απαιτήσεων με αυτή των προσαυξήσεων της σ.δ των συνολικών απαιτήσεων.

Θεώρημα 2.5.3. *Άν η σ.δ του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ συνολικών απαιτήσεων.*

Για απόδειξη βλ. π.χ. [26] Theorem 5.1.2 .

Θεώρημα 2.5.4. *Άν η σ.δ του αριθμού των απαιτήσεων έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ,τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ συνολικών απαιτήσεων.*

Για απόδειξη βλ. π.χ.[26] Theorem 5.1.3 .

2.6 Σύνθετες Κατανομές

Η μελέτη της *σ.δ* συνολικών απαιτήσεων συνεχίζεται στην παρούσα ενότητα μέσω της αναφοράς του υπολογισμού της κατανομής του ύψους των συνολικών απαιτήσεων της τ.μ. S_t σε δοσμένο χρόνο t.
Κατ'αρχάς και για λόγους ευκολίας προχωρούμε στην απλοποίηση, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, των συμβολισμών που εισάγαμε μέχρι τώρα σε αυτό το κεφάλαιο. Έτσι θεωρούμε την τ.μ. N για την οποία ισχύει ότι $P_N(\mathbb{N}) = 1$ και ορίζουμε την τ.μ. (τυχαίο άθροισμα),

$$S := \sum_{k=0}^{N} X_k \tag{2.10}$$

με την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\sigma.\delta$ του μεγέθους της απαίτησης όπως την ορίσαμε στην αρχή της Ενότητας 2.5) να είναι ισοκατανεμημένη και ανεξάρτητη της τ.μ. N. Τότε η κατανομή της τ.μ. S, έστω P_S, ονομάζεται σύνθετη κατανομή και σημειώνεται με

$$\mathbf{C}(P_N, P_X)$$

ή $\mathbf{C}(F_N, F_X)$ σε όρους σ.κ.π.. Οι σύνθετες κατανομές ονομάζονται από την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ή αλλιώς της απαριθμήτριας τ.μ. N, π.χ. αν η P_N είναι μία κατανομή Poisson, τότε η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ λέμε ότι είναι μία σύνθετη κατανομή Poisson.

Λήμμα 2.6.1. Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$P_S(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(\{n\}) P_X^{*n}(B) \tag{2.11}$$

Παρόλο που ο παραπάνω τύπος είναι χρήσιμος σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, απαιτεί τον υπολογισμό συνελίξεων, ο οποίος μπορεί να είναι δύσκολος η τουλάχιστον χρονοβόρος. Για το σκοπό αυτό σε αρκετές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε την χ.σ. του S και να εκμεταλλευτούμε ύστερα τον Τύπο της Αντιστροφής.

Λήμμα 2.6.2. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\varphi_S(u) = m_N(\varphi_X(u)) \tag{2.12}$$

Για απόδειξη βλ. π.χ. [26] Theorem 5.2.2 .

Πόρισμα 2.6.3. *Άν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$,τότε*

$$\varphi_S(u) = e^{\alpha[\varphi_X(u)-1]} \tag{2.13}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Εάν η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων είναι Bernoulli, τότε ο υπολογισμός της σύνθετης κατανομής Poisson μπορεί να απλοποιηθεί όπως φαίνεται στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.6.4. *Για κάθε $\alpha \in (0, \infty)$ και $\eta \in (0, 1)$ ισχύει*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{B}(\eta) = \mathbf{P}(\alpha\eta) \tag{2.14}$$

Λήμμα(Ταυτότητες του Wald) 2.6.5. *Έστω ότι* $E[N] < \infty$ *και* $E[X] < \infty$. *Τότε υπάρχει η μέση τιμή και η διακύμανση της τ.μ.* S *και ικανοποιούνται οι ισότητες:*

(i) $E[S] = E[N]E[X]$

(ii) $V[S] = E[N]E[X] + V[N]E[X]^2$

Πόρισμα 2.6.6. *Θεωρούμε ότι* $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$ *και* $E[X] < \infty$.*Τότε*

(i) $E[S] = \alpha E[X]$

(ii) $V[S] = \alpha E[X^2]$

Κεφάλαιο 3

Μία σύντομη εισαγωγή στα Ασφαλιστικά ΣΜΕ για καταστροφικά γεγονότα

3.1 Εισαγωγή

Υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά **ασφαλιστικά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης καταστροφικών γεγονότων** (catastrophe insurance futures) τα οποία εμπορεύονται στο CBoT (Chicago board of Trade): Ανατολικά, Κεντροδυτικά, Δυτικά και Εθνικά. Δε θα υπάρξει περεταίρω διάκριση μεταξύ των ασφαλιστικών ΣΜΕ, καθώς πέραν της διαφοράς των πολιτειών που αφορούν, οι ακριβείς προδιαγραφές τους είνα ίδιες. Επίσης, διάφορα δικαιώματα αμερικάνικου τύπου εμπορεύονται σε κάθε συμβόλαιο. Τη δεδομένη στιγμή ο όγκος εμπορίου των δικαιωμάτων των ασφαλιστικών ΣΜΕ είναι μεγαλύτερος απο τον πρέποντα. Ένας λόγος είναι βέβαια οτι τα δικαιώματα αντισταθμίζουν κυρίως μη αναλογικά ανтασφαλιστικά συμβόλαια παρα αναλογικά, και τα αναλογικά δεν είναι συναφή με την ασφάλιση καταστροφών. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τα ασφαλιστικά ΣΜΕ.

Τα ασφαλιστικά ΣΜΕ εμπορεύονται σε τριμηνιαίο κύκλο και οι μήνες σύναψης συμβολαίου είναι οι Μάρτιος, Ιούνιος, Σεπτέμβριος και Δεκέμβριος. Για παράδειγμα, το συμβόλαιο του Ιουνίου καλύπτει ζημιές από γεγονότα τα οποία συνέβησαν κατά τη διάρκεια του πρώτου τριμήνου του ίδιου χρόνου όπως δηλώθηκαν μέχρι το τέλος του Ιουνίου. **Εφόσον η προκαθορισμένη αξία βασίζεται στις ζημιές που έχουν συμβεί (πληρωμένες και εκτιμημένες μη πληρωμένες) ένα**

τρίτο τρίμηνο επιτρέπει τον καθορισμό της ζημιάς. Η διαπραγμάτευση τερματίζεται την πέμπτη μέρα του τέταρτου μήνα από το μήνα που συνάφθηκε το συμβόλαιο (π.χ. ο διακανόνισμος του συμβολαίου του Ιουνίου γίνεται στις 5 Οκτωβρίου). Η προκαθορισμένη αξία του συμβολαίου προσδιορίζεται από ένα δείκτη ζημιάς.

3.2 Δείκτης Ζημιάς

Ο **δείκτης ζημιάς** είναι το υποκείμενο αγαθό για την τελική αξία του ΣΜΕ. Αποτελείται από δηλωμένες ζημιές στο **Insurance service Office** (ISO). Περίπου 100 εταιρείες δηλώνουν ζημιές στο ISO αλλά διαλέγονται οι πληροφορίες με βάση το μέγεθος, τη ποικιλομορφία της επιχείρησης και την ποιότητα. Οι επιλεγμένες ζημιές που πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικές των διαφορετικών ειδών ασφαλίσεων και Πολιτειών, αντικαθίστανται από σταθμισμένες ζημιές. Τα βάρη είναι το ποσοστό των ασφαλίστρων που πληρώθηκαν στις επιλεγμένες εταιρείες προς τα ολικά ασφάλιστρα που κερδήθηκαν για κάθε είδος ασφάλισης και Πολιτείας (τα ασφάλιστρα είναι εκτιμημένα). Οι επιλεγμένες εταιρείες και το εκτιμημένο ασφάλιστρο ανακοινώνονται από το CBoT πριν την έναρξη της περιόδου εμπορίου του συμβολαίου.

Τα διάφορα είδη ασφαλίσεων περιλαμβάνουν ιδιοκτήτες ακινήτων (homeowners), εμπορικούς πολλαπλούς κινδύνους (commercial multiple peril), σεισμούς (earthquakes), φυσικές ζημιές αυτοκινήτων (automobile physical damage), πυρκαγιές (fire), allied lines, ιδιοκτήτες αγροκτημάτων (farmowners) και εσωτερικη θαλάσσια ασφάλιση (commercial inland marine). Δηλωμένες ζημιές μπορούν προκύψουν και απο κινδύνους όπως ανεμοθύελες (windstorm), χαλάζι (hail), σεισμούς (earthquakes), εξέγερση (riot) και πλημμύρα (flood).

Έστω L_T το άθροισμα των επιλεγμένων σταθμισμένων ζημιών που συνέβησαν κατά τη διάρκεια του τριμήνου που αφορά το συμβόλαιο και δηλώθηκαν μέχρι το τέλος του επόμενου τριμήνου. Έστω Π τα ανακοινωθέντα ασφάλιστρα που κερδήθηκαν κατά τη διάρκεια του τριμήνου. Τότε η **προκαθορισμένη αξία** (settlement value) F_T του ασφαλιστικού ΣΜΕ δίνεται από

$$F_T = \$25000 \cdot min\left(\frac{L_T}{\Pi}, 2\right) \tag{3.1}$$

Επιπλέον για να αναλύσουμε την τυχαιότητα στη τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ, πρέπει να μελετήσουμε πιο αναλυτικά το L_T.

3.3 Η Στοχαστική διαδικασία της Ζημιάς

Ο στόχος μας εδώ είναι να ανπτύξουμε ένα στοχαστικό μοντέλο για την σ.δ. $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ των δηλωμένων ζημιών απο τις επιλεγμένες ασφαλιστικές εταιρείες μέχρι το χρόνο t (T είναι το τέλος της περιόδου δήλωσης). Η στοχαστική διαδικασία $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ χωρίζεται σε περισσότερες στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες έχουν πιο εμφανή δομή. Επιλέγουμε μεταξύ συνηθισμένων ζημιών και καταστροφικών γεγονόντων. Οι σεισμοί είναι καταστροφικά γεγονότα. Καταστροφικές ζημιές μπορούν να προκύψουν από κινδύνους τυφώνων, ανέμων, χαλαζιών, πλημμύρων ή εξεγέρσεων όταν οι ζημιές ξεπερνούν ένα συγκεκριμένο ποσό. Οι Huygues-Beaufond and Partrat κατέληξαν στη μελέτη τους στην ακόλουθη διάκριση:

Τυφώνες που ξεπερνούν τα 30 εκατομμύρια δολλάρια και ζημιές από άνεμο-χαλάζι-πλημμύρα ή εξέγερση που ξεπερνούν τα 7,5 εκατομμύρια δολλάρια είναι καταστροφικές ζημιές.

Σύμφωνα με τον Meister στις ζημιές από εξεγέρσεις δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός στις συνηθισμένες ζημιες και τις καταστροφικές. Συνεπώς πρέπει να οριστεί ένας τρόπος εκτίμησης των παραμέτρων που καθορίζουν τις $\sigma.\delta.$ Συμβολίζουμε τις συνηθισμένες ζημιές που προκύπτουν απο τις ασφαλίσεις **allied lines, φυσικών ζημιών αυτοκινήτων, εμπορικών πολλαπλών κινδύνων, ιδιοκτητών αγροκτημάτων, πυρκαγιάς, ιδιοκτητών ακινήτων και inland marine με $\{L_t^i\}_{0\leq t\leq T}$, ($i=1,2,...,7$).** Επιπλέον συμβολίζουμε τις καταστροφικές ζημιές που προκύπτουν απο **σεισμούς, άνεμο-χαλάζι-πλημμύρα, τυφώνες και εξεγέρσεις με $\{C_t^j\}_{0\leq t\leq T}$, ($j=1,...,4$).** Άρα,

$$L_t = \sum_{k=1}^{7} L_t^k + \sum_{l=1}^{4} C_t^l \tag{3.2}$$

όπου L_t είναι οι ζημιές που συνέβησαν μέχρι το χρόνο t (και δηλώθηκαν κατά τη διάρκεια της περιόδου δήλωσης). Οι Huygues-Beaufond and Partrat κατέληξαν στη μελέτη τους ότι για τις $\sigma.\delta.$ $\{C_t^1\}_{0\leq t\leq T}$ (ζημιές απο σεισμούς), $\{C_t^2\}_{0\leq t\leq T}$ (ζημιές απο άνεμο-χαλάζι-πλημμύρα) και $\{C_t^3\}_{0\leq t\leq T}$ (ζημιές απο τυφώνες μπορούμε να υποθέσουμε ότι ακολουθούν σύνθετες $\sigma.\delta.$ Poisson.

Οι επτά συνηθισμένες σ.δ. ζημιών $\{L_t^i\}_{0\leq t\leq T}$, $(i=1,2,...,7)$ υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Στα κλασικά ασφαλιστικά πλαίσια οι διδικασίες $\{L_t^i\}_{0\leq t\leq T}$, $(i=1,2,...,7)$ θεωρούνται ότι είναι σύνθετες $\sigma.\delta.$ Poisson. Εάν, τώρα, υποθέσουμε επί πλέον ότι και η $\{C_t^4\}_{0\le t\le T}$ είναι μία σύνθετη $\sigma.\delta.$ Poisson και ότι οι καταστροφικές ζημιές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες των συνηθισμένων ζημιών τότε καταλήγουμε στην:

Υπόθεση 3.3.1. *Η $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ που ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) ακολουθεί μία σύνθετη $\sigma.\delta.$ Poisson.*

Υπό την υπόθεση 3.3.1 η $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ είναι μία ομογενής $\sigma.\delta.$ με ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Η ομογένεια και η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων δεν είναι τόσο προφανείς. Οι ζημιές που προκύπτουν από την ασφάλιση των φυσικών ζημιών αυτοκινήτου συχνά μοντελοποιούνται από μία μεικτή σύνθετη $\sigma.\delta.$ Poisson η οποία γενικά δεν παρουσιάζει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αντιθέτως, ο αναμενόμενος αριθμός των τυφώνων ανά τρίμηνο εξαρτάται από την εποχή του χρόνου και, επομένως, δε μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία ομογενή $\sigma.\delta.$. Άρα, εάν θέλουμε να επιτρέψουμε την εξάρτηση των προσαυξήσεων και την ετεροσκεδαστικότητα υποχρεούμαστε να έχουμε ένα πιο γενικευμένο μοντέλο. Για να είμαστε πιο γενικοί, με την έννοια ότι δε μελετάμε μόνο τα προϊόντα στο CBoT, φαίνεται αναγκαίο να επιτρέψουμε και άλλες $\sigma.\delta.$ εκτός των σύνθετων διαδικασιών Poisson. Γι'αυτούς τους λόγους κάνουμε και τις παρακάτω υποθέσεις:

Υπόθεση 3.3.2. *Η $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ που ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) ακολουθεί μία μεικτή σύνθετη $\sigma.\delta.$ Poisson.*

Υπόθεση 3.3.3. *Η $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ που ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) ακολουθεί μία διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson (doubly stochastic compound Poisson process ή Cox process).*

Παρατήρηση: Όσον αφορά τα ασφαλιστικά ΣΜΕ, οι παράμετροι που καθορίζουν τη $\sigma.\delta.$ πρέπει να εκτιμηθούν από τα σχετικά δεδομένα ζημιών. Παρόλο που η υπόθεση, ότι η $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ ακολουθεί σύνθετη διαδικασία Poisson, θα μπορούσε θεωρητικά να μην ικανοποιείται, φαίνεται να είναι χρήσιμη για πρακτικές εφαρμογές.

3.4 Η έλλειψη πληροφορίας

Χωρίς να έχει δοθεί κάποιο μοντέλο τιμολόγησης για τα ασφαλιστικά ΣΜΕ, είναι προφανές ότι σε συγκεκριμέο χρόνο $t \in [0, T]$ το L_t είναι η κύρια πληροφορία που καθορίζει την τιμή F_t του μέλλοντος εκείνη τη στιγμή. Ωστόσο το L_t είναι γνωστό στους επενδυτές σε μόνο δύο συγκεκριμένες μέρες: Μία ενδιάμεση αναφορά παρουσιάζει το ποσό του L_t την τέταρτη μέρα μετά την περίοδο αναφοράς. Ο τελικός δείκτης αξίας γίνεται γνωστός στη ληκτότητα. Η τιμή ενός κοινού ΣΜΕ βασίζεται σε μία αντίστοιχη τρέχουσα αξία (spot price). Οι τρέχουσες αξίες ανακοινώνονται καθημερινά και, επομένως, η μεταβλητότητα των μελλοντικών τιμών των ΣΜΕ προκύπτει απο την αβεβαιότητα των τρέχουσων αξιών. Η μεταβλητότητα των ασφαλιστικών ΣΜΕ προκύπτει επίσης και από την αβεβαιότητα σχετικά με τον πρόσφατο δείκτη ζημιάς. Παρόλο που το CBoT πρέπει να βελτιώσει την έκδοση των πρόσφατων πληροφοριών και παρόλο που προϊόντα παρόμοια με τα ασφλαιστικά ΣΜΕ μοιάζουν να μην έχουν αυτό το πρόβλημα, δε μπορεί να αγνοηθεί το γεγονός ότι δεν υπάρχει σχεδόν καμία πληροφορία σχετικά με την ανάπτυξη του (L_t) στο παρόν. Ωστόσο η πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές πρέπει κάπως να χρησιμοποιηθεί για να τιμολογηθούν τα ασφαλιστικά ΣΜΕ. Ως εκ τούτου, φαίνεται ωραία ιδέα η ανάπτυξη ενός μοντέλου τιμολόγησης υπό την:

Υπόθεση 3.4.1. *Έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ μία πλήρης διύλιση στην Σ και $\mathcal{F}_t$ η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη στους επενδυτές τη χρονική στιγμή t. Τότε η σ.δ. $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ θα είναι $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ προσαρμοσμένη,*

και η ανάπτυξη εκτιμήσεων για το L_t δεδομένης της πληροφορίας που είναι διαθέσιμη εκείνη τη στιγμή.

3.5 Περίληψη συμβολισμών και ορισμών

Θεωρούμε το χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) και ένα δεύτερο μέτρο πιθανότητας Q στον μ.χ. (Ω, Σ) Έστω $P_X(s) := P[X \le s]$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Τότε η P_X ονομάζεται η **κατανομή (πιθανότητας) της τυχαίας μεταβλητής** X **υπό το μέτρο** P. Ονομάζουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **(Borel) μετρήσιμη** εάν είναι μετρήσιμη ως προς τη Borel σ-άλγεβρα δηλαδή άν είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Για κάθε $A \in B$ με $\mathcal{B}(A)$ συμβολίζουμε την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του A, δηλαδή $\mathcal{B}(A) := \{B \in \mathcal{B}, B \subseteq A\}$. Μία **cadlag συνάρτηση** πάνω στον $\mathbb{R}$ είναι μία δεξιά συνεχής συνάρτηση της οποίας τα όρια από αριστερά πάντα υπάρχουν.

Ορισμός 3.5.1. *Μία* **διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson** $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$

επάνω στον (Ω, Σ, P) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k \tag{3.3}$$

όπου η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία αυστηρά θετικών, ισοκατανεμημένων και ανεξάρτητων τ.μ. X_n στον μ.χ. (Ω, Σ) και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **σ.δ. Cox** ή μια **διπλά σ.δ. Poisson με παράμετρο μια σ.δ.** $\Theta := \{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον (Ω, Σ), που ικανοποιεί τις συνθήκες

(i) η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, δηλ. για κάθε $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}$ και για κάθε $k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{N}(n \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ ισχύει

$$P(\bigcap_{j=i}^{n}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\sigma(\Theta)) = \prod_{j=i}^{n} P(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\sigma(\Theta)) \quad P \restriction \sigma(\Theta)-\sigma.\beta..$$

και

(ii) $P_{N_t - N_s|\Theta} = \mathbf{P}(\Theta_t - \Theta_s) \quad \forall 0 < s < t$. (βλ. π.χ. [13] Lemma 19. Prop. 18 και Def. 16).

Μία **μεικτή σύνθετη διαδικασία Poisson** είναι μία διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson με

$$\Theta_t := \Theta t$$

όπου Θ είναι μία αυστηρώς θετική τυχαία μεταβλητή στο (Ω, Σ, P). Άν η τυχαία μεταβλητή Θ είναι σταθερή σχεδόν βεβαίως, ονομάζουμε τότε τη διαδικασία $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, μία **σύνθετη διαδικασία Poisson.**

Στη διπλωματική αυτή υποθέτουμε πάντα ότι:
- $P[X_1 > 0] = 1$
- $X_1 \in \mathcal{L}^2(P)$ (βλ. Παράρτημα Β΄ για τον ορισμό)
- $P[\Theta > 0] = 1$
- $\Theta \in \mathcal{L}^2(P)$
- $\forall t \in \mathbb{R} : \Theta_t \in \mathcal{L}^2(P)$
- Η τ.μ. Θ και η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 3.5.2. *Άν P, Q είναι δύο μέτρα πιθανότητας επάνω στην Σ, θα λέγαμε ότι τα P και Q είναι* ***ισοδύναμα*** *άν*

$$\forall A \in \Sigma \qquad (P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0).$$

Συμβολισμός: $P \sim Q$.
Θα λέμε ότι τα P και Q είναι **αμοιβαία ιδιάζοντα** (mutually singular) αν

$$\exists \quad A \in \Sigma \qquad (P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 1).$$

Συμβολισμός: $P \perp Q$.
$Q_X \sim P_X$ σημαίνει $Q \restriction \sigma(X) \sim P \restriction \sigma(X)$ και $Q_X \perp \ P_X$ σημαίνει $Q \restriction \sigma(X) \perp P \restriction \sigma(X)$.

Έστω $(\Omega, \Sigma, \mathbb{F}, P)$ ένας φιλτραρισμένος χ.π. και Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ. Θα λέμε ότι τα P και Q είναι **προοδευτικά ισοδύναμα** (progressively equivalent) αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει $P \restriction \mathcal{F}_t \sim Q \restriction \mathcal{F}_t$.

Παρατηρήσεις 3.5.3. **(a)** Στις εργασίες των Meister [22] και Embrechts-Meister [10] γράφεται εκ παραδρομής ότι

$$P_{N_{s+t}-N_t} = \mathbf{P}(\Theta_{s+t} - \Theta_t)$$

για κάθε s,t>0 όπου $\Theta := \{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια γνησίως αύξουσα σ.δ. επάνω στον (Ω, Σ) με $\Theta_t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Προφανώς η παραπάνω σχέση είναι μόνο μια ειδική περίπτωση μίας σημειακής σ.δ. που κατανέμεται κατα Cox, αφού η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει $\Theta_t = \theta_0 \in \mathbb{R}$, οπότε προκύπτι μια σύνθετη σ.δ. Poisson με παράμετρο $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
(b) Στις εργασίες των Meister [22] και Embrechts-Meister [10] μια διπλά σ.δ. Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με παράμετρο $\Theta := \{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ορίζεται ως μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την ιδιότητα

$$P_{N_{s+t}-N_t} = \mathbf{P}(\Theta_{s+t} - \Theta_t) \quad \forall s, t > 0.$$

Όμως στην [10] οι Embrechts και Meister παραπέμπουν στο βιβλίο [13] του Grandell για λεπτομερείς πληροφορίες του ορισμού μίας σ.δ. Cox. Σύμφωνα με τον ορισμό μίας σ.δ. Cox στον Grandell [13] η συνθήκη (i) είναι επίσης απαραίτητη. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη (i) του Ορισμού 3.5.1 είναι αναγκαία για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.7.

Κεφάλαιο 4

Αποτίμηση υπό "No-Arbitrage"

4.1 Βασικές Χρήσιμες Έννοιες

Οι παρακάτω ορισμοί είναι χρήσιμοι για το κεφάλαιο 4.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $T > 0$ και $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ μια διύλιση στον (Ω, Σ). Μία σ.δ. $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ ονομάζεται* **προβλέψιμη** *(predictable), αν είναι $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{P}$ είναι η σ-άλγεβρα επάνω στον $\Omega\times[0,T]$, η οποία παράγεται από όλες τις σ.δ. που είναι προσαρμοσμένες στην $\mathbb{F}$ και με αριστερα συνεχείς τροχιές. Προβλέψιμη $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ χονδρικά σημαίνει ότι σε χρόνο t η ξ_{t+dt} είναι γνωστή.*

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ μια διαμέριση του $[0,T]$, $\xi_k : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ μια $\mathcal{F}_{t_k}$-μετρήσιμη και φραγμένη συνάρτηση για κάθε $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ και η σ.δ. $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ που ορίζεται απο τον τύπο*

$$\xi_t := \sum_{k=1}^{n} \chi_{(t_{k-1},t_k]}(t)\xi_{k-1} \qquad \forall t \in [0,T].$$

Τότε το **στοχαστικό ολοκλήρωμα** *της $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ ως προς την $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ορίζεται ως εξής:*

$$\int_0^T \xi_s dX_s := \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}).$$

Μια σ.δ. $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ όπως παραπάνω ονομάζεται μια **στοιχειώδης στρατηγική** (elementary strategy).

Για περισσότερες πληροφορίες επάνω στο στοχαστικό ολοκλήρωμα παραπέμπουμε στο [17], [20].

4.2 Τεχνικές Αποτίμησης υπό No Arbitrage

Προκειμένου να τονίσουμε τις βασικές διαφορές ανάμεσα στα ΣΜΕ καταστροφικών γεγονότων (CAT futures) ή και γενικότερα τα ασφαλιστικά παράγωγα και των παραδοσιακών χρηματοοικονομικών παραγώγων, ας εξετάσουμε το πρόβλημα αποτίμησης για τα τελευταία στο πλαίσιο του no arbitrage.
Θεωρούμε μία $T > 0$ και $\sigma.\delta.$ τιμών $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \mathbb{F}, P)$ και μία τυχαία χρηματοροή H πρίν ή στο χρόνο T. Η H ονομάζεται **ενδεχόμενη απαίτηση**, και είναι μία $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή στον (Ω, Σ, P). Τυπικά παραδείγματα είναι:

1) Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που εκφράζεται από τη $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ με ληκτότητα T και τιμή εξάσκησης K,

$$H = (X_T - K)^+$$

όπου $x^+ = max(x, 0)$

2) Εάν η $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ περιγράφει μία $\sigma.\delta.$ ζημιάς και η H είναι η τελευταία χρηματοροή που προκύπτει από ένα μή αναλογικό[1] αντασφαλιστικό συμβόλαιο καλύπτοντας ζημιές σε στρώμα (K_1, K_2) στο χρόνο T,

$$H = min(X_T, K_2) - min(X_T, K_1)$$

3) Ο διακανονισμός ενός ΣΜΕ καταστροφικών γεγονότων

$$H = \$25000 \cdot min\left(\frac{X_T}{\Pi}, 2\right),$$

και

4) Ένα Ασιατικό δικαίωμα με τη τιμή εξάσκησης K και ληκτότητα T,

$$H = \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_u \ du - K\right)^+$$

[1]Αναλογικη: Σύμφωνα με την αναλογική αντασφάλιση, ένας οι περισσότεροι αντασφαλιστές μπορούν να αναλάβουν ένα δηλωμένο ποσοστό (π.χ. 75%) της κάθε πολιτικής που ένας ασφαλιστής παράγει.
Μη αναλογική: Σύμφωνα με τη μη αναλογική αντασφάλιση, ο αντασφαλιστής πληρώνει μόνο εαν οι συνολικές απαιτήσεις που υπέστη ο ασφαλιστής σε μια δεδομένη χρονική περίοδο υπερβαίνει ένα καθορισμένο ποσό, το οποίο έχει τη μορφή της "υπερβάλλουσας ζημιάς" και της "ανακοπής ζημιάς"

Υπενθυμίζουμε ότι μία **ευκαιρία arbitrage** (arbitrage opportunity) είναι η δυνατότητα βέβαιου κέρδους χωρίς ρίσκο. Σε μία αγορά no-arbitrage, τέτοιες ευκαιρίες δεν υπάρχουν. Η (δίκαιη) αποτίμηση ενδεχόμενων απαιτήσεων σε μία τέτοια αγορά συνήθως ξεκινάει με την ακόλουθη υπόθεση (κατασκευή): "Έστω Q ένα **Martingale ισοδύναμο μέτρο** ως προς το P, δηλ. $Q \sim P$ και η *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι ένα $(\mathcal{F}_t)$-Martingale ως προς Q". *Είναι ακριβώς αυτή η υπόθεση η οποία εξαρτάται σημαντικά απο τις στοχαστικές ιδιότητες της σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$. Στις τυπικές χρηματοοικονομικές αγορές, όπως το μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein διωνυμικού δέντρου, το μοντέλο Bachelier της κίνησης Brown ή το μοντέλο γεωμετρικής κίνησης Brown των Markovitz-Black-Scholes, μπορούμε να δείξουμε ότι όχι μόνο ένα τέτοιο μέτρο Q υπάρχει αλλά είναι και μοναδικό (Όπως θα δούμε παρακάτω, το τελευταίο έχει σχέση με την έννοια της πληρότητας της αγοράς και διαφέρει σημαντικά στις ασφαλιστικές αγορές). Ωστόσο, προς το παρόν ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο μοναδικό μέτρο Q. Υπενθυμίζουμε ότι η H είναι $\mathcal{F}_T(= \sigma(\{X_s : 0 \le s \le T\}))$-μετρήσιμη. Τότε στις παραπάνω πρότυπες χρηματοοικονομικές περιπτώσεις μπορουμε να γράφουμε την H σαν την **αναπαράσταση Itô**:

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s \ dX_s \tag{4.1}$$

για κάποιο H_0 και μία προβλέψιμη (π.χ. αριστερά συνεχή) *σ.δ.* $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$. Η αναπαράσταση (4.1) οδηγεί σε μία στρατηγική χαρτοφυλακίου, αναπαράγωντας (ακίνδυνα) την απαίτηση H εάν το ασφάλιστρο H_0 είναι κατάλληλα επιλεγμένο (εδώ εισάγεται το Q!). Πράγματι στο χρονο t κρατάμε το ποσό ξ_t στο περιουσιακό στοιχείο X_t που εμπεριέχει κίνδυνο, και την ποσότητα

$$\eta_t := \left(H_0 + \int_0^t \xi_s \ dX_s\right) - \xi_t X_t$$

στο ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο δοθείσης της σταθεράς 1 (σκεφτείτε προεξοφληθέντα ποσά). Η αξία V_t αυτού του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t είναι $V_t = \xi_t X_t + \eta_t$, και ώς εκ τούτου από κατασκευή $V_T = H$ (αγνοούμε τα κόστη συναλλαγών!). Όλο αυτό μπορει να λειτουργήσει εάν μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική επένδυση $H_0(= V_0)$ και τη *σ.δ.* $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$. Δυστυχώς η αναπαράσταση Itô είναι ως επί το πλείστον μόνο ένα μή κατασκευαστικό θεώρημα ύπαρξης. Χρησιμοποιώντας την έννοια αυτοχρηματοδοτούμενων στρατηγικών και το λήμμα του Itô, μπορούμε να πετύχουμε μία κατασκευαστική λύση (εμπλέκοντας τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους). Εδώ είναι το τελικό τέχνασμα για να υπολογίσουμε το H_0:

1) η $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι ένα Martingale ως προς Q (όχι απαραίτητα ένα Martingale ως προς P)

2) η $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι προβλέψιμη $\sigma.\delta.$ και "καλή", με την έννοια ότι η $\left(I_t := \int_0^t \xi_s dX_s\right)_{0\le t\le T}$ είναι ένα Martingale ως προς Q

3) $\mathbb{E}_Q(I_t) = \mathbb{E}_Q(I_0) = 0$, ώς εκ τούτου $\mathbb{E}_Q(H) = H_0$, εφόσον γνωρίζουμε τα H και Q βρίκαμε το δίκαιο ασφάλιστρο H_0.

Απο αυτή τη σύντομη σύνοψη μαθαίνουμε οτι υπάρχουν 2 καίρια σημεία. Το πρώτο είναι η ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου, αλλα μέχρι τώρα δεν είναι εμφανές τι πρέπει να γίνει αν υπάρχουν και διάφορα άλλα martingale ισοδύναμα μέτρα. Το δεύτερο σημείο είναι ότι μια ενδεχόμενη απαίτηση δέχεται μια αναπαράσταση Itô, επιτρέποντας την αναπαραγωγή της απαίτησης αυτής χωρις κάποιο κίνδυνο. Αν μία τέτοια αναπαράσταση Itô δεν είναι διαθέσιμη, τότε δεν μπορεί να γίνει η αποτίμηση της ενδεχόμενης απαίτησης μέσω της μέσης τιμής ως πρός ένα martingale ισοδύναμο μέτρο. Το ερώτημα, κάτω από ποιές συνθήκες υπάρχει ένα martingale ισοδύναμο μέτρο, οδηγεί στο πρώτο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου. Το ακριβές αποτέλεσμα αποδείχτηκε απο τον Stricker [28] και είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 4.2.1. *(Stricker [28] Theorems 2 and 3). 1. Τα ακόλουθα δύο συμπεράσματα είναι ισοδύναμα*

(a) Υπάρχει ένα martingale ισοδύναμο μέτρο $P \sim Q$ με πυκνότητα

$$\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{L}^2(P)$$

(b) $(\mathcal{L}^2(P))^+ \cap \overline{(K - B^+)} = \{0\}$
όπου $K := \{\int_0^T \xi_s dX_s | \xi_s \textit{στοιχειώδη στρατηγική}\}$ και B^+ είναι το σύνολο όλων των θετικών φραγμένων τ.μ. στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η κλειστότητα (closure) θεωρείται στον χώρο $\mathcal{L}^2(P)$.

2. Εάν η σ.δ. $\{X_t\}$ είναι συνεχής, τότε το $\overline{(K - B^+)}$ μπορει να αντικατασταθεί απο το $\overline{K}$.

Για την απόδειξη βλ. Stricker [28] Θεώρημα 2 και Θεώρημα 3 (βλ. Meister σελ. 31-32).
Για κάθε σύνολο $A \subseteq \mathcal{L}^2(P)$, η κλειστότητα $\overline{A}$ του A ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \bigcap \{B : B \subseteq \mathcal{L}^2(P), B \textit{ κλειστό σύνολο και } A \subseteq B\}.$$

Παρόλο που ομολογουμένως αφήσαμε απ'έξω διάφορες λεπτομέριες, η παραπάνω συζήτηση σαφώς μας δίνει ένα τρόπο με τον οποίο αποτιμούμε και αντισταθμίζουμε ασφαλιστικά παράγωγα τα οποία βασίζονται στη *σ.δ.* κινδύνου $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$:

Βήμα 1 Διερευνούμε τη σχέση μεταξύ των συνθηκών no-arbitrage και την ύπαρξη ισοδύναμων Martingale μέτρων Q.

Βήμα 2 Τί γίνεται με τη μοναδικότητα του Q (σχετίζεται με την πληρότητα, βλ. Κεφάλαιο 6)?

Βήμα 3 Βρίσκουμε την αναπαράσταση Itô της *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ και διερευνούμε τη σαφή κατασκευή αντισταθμιστικών χαρτοφυλακίων.

Βήμα 4 Τί γίνεται αν κάποιο απο τα παραπάνω αποτύχει?

Στα επόμενα κεφάλαια, θα δείξουμε ότι γενικά για *σ.δ.* κινδύνου υπάρχουν πολλά ισοδύναμα martingale μέτρα (και συνεπώς δίκαια ασφάλιστρα) έτσι ώστε μία συζήτηση κλειδί θα αφιερωθεί στο Βήμα 4. Μέσω ενός σημαντικού παραδείγματος, περιορίζουμε τη συζήτησή μας στη μεικτή σύνθετη *σ.δ.* Poisson.

Κεφάλαιο 5

Σύνθετες Μεικτές Σ.Δ. Poisson και Αλλαγή Μέτρου (Mixed Compound Poisson Process and Change of Measure)

5.1 Σύνθετες Μεικτές Σ.Δ. Poisson και παράγωγοι Radon-Nikodym

Για μια δεδομένη $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σε έναν χ.π. (Ω,Σ,P) με μια διύλιση $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, προκειμένου να ερευνήσουμε την ύπαρξη ισοδύναμων Martingale μέτρων Q, πρέπει να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις παραγώγους Radon-Nikodym dQ/dP. Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τον Meister (1995). Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό που αναφέραμε προηγουμένως στην ενότητα 3.5.

Θεώρημα 5.1.1. *(Meister [22], Θεώρημα 2.6) Έστω $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη μεικτή $\sigma.\delta.$ Poisson σε ένα μ.χ. (Ω,Σ) ως προς τα μέτρα P και Q και έστω $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση της $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, δηλ. για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathcal{F}_t:=\sigma(\{S_u : u\le t\})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\forall\ s\in\mathbb{R}_+ \qquad Q\restriction\mathcal{F}_s\sim P\restriction\mathcal{F}_s$,

(ii) $P_{X_1}\sim Q_{X_1}$,

(iii) υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ *με*

$$\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1, \qquad \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$$

και

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]}. \tag{5.1}$$

Το Θεώρημα 5.1.1 μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ακριβώς τις παραγώγους Radon-Nikodym για τις πιο σημαντικές *σ.δ.* ασφαλιστικών κινδύνων.

Παράδειγμα 5.1.2. *(Περίπτωση σύνθετης μεικτής Poisson)*
Έστω P και Q μέτρα πιθανότητας τέτοια ώστε η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη μεικτή *σ.δ.* Poisson ως προς P και Q και έστω $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$P_\Theta = \delta_{\theta_1}, \quad Q_\Theta = \delta_{\theta_2}.$$

Τότε από το Θεώρημα 5.1.1 υπάρχει κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (iii) του θεωρήματος. Επομένως για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int \Theta^{N_s} e^{-\Theta s} dQ}{\displaystyle\int \Theta^{N_s} e^{-\Theta s} dP} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} Q_\Theta(d\theta)}{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} P_\Theta(d\theta)} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} \delta_{\theta_2}(d\theta)}{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} \delta_{\theta_1}(d\theta)} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\theta_2^{N_s} e^{-\theta_2 s}}{\theta_1^{N_s} e^{-\theta_1 s}} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{N_s} e^{-(\theta_2-\theta_1)s}
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρ. 2.4.6 του [2].

Παράδειγμα 5.1.3. *(Περίπτωση Γαμμα-μεικτής σύνθετης Poisson*[1]*)*
Έστω P και Q μέτρα πιθανότητας τέτοια ώστε η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη μεικτή αρνητική διωνυμική *σ.δ.* ως προς P και Q και έστω $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$. Θεωρούμε τις παραμέτρους $\gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2 > 0$ που περιγράφουν την κατανομή της τ.μ. Θ, δηλ.

$$P_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma_1, c_1), \quad Q_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma_2, c_2).$$

Τότε πάλι από το Θεώρημα 5.1.1 υπάρχει κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ να έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int \Theta^{N_s}e^{-\Theta s}dQ}{\displaystyle\int \Theta^{N_s}e^{-\Theta s}dP} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s}e^{-\theta s}Q_\Theta(d\theta)}{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s}e^{-\theta s}P_\Theta(d\theta)} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s}e^{-\theta s}\frac{c_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)}\theta^{\gamma_2-1}e^{-c_2\theta}d\theta}{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{N_s}e^{-\theta s}\frac{c_1^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)}\theta^{\gamma_1-1}e^{-c_1\theta}d\theta}.
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}] &= \int_0^\infty \theta^{N_s}e^{-\theta s}\frac{c_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)}\theta^{\gamma_2-1}e^{-c_2\theta}d\theta \\
&= \frac{\Gamma(N_s+\gamma_2)}{(c_2+s)^{(N_s+\gamma_2)}}\frac{c_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)}\int_0^\infty \theta^{N_s+\gamma_2-1}e^{-(c_2+s)\theta}\frac{(c_2+s)^{(N_s+\gamma_2)}}{\Gamma(N_s+\gamma_2)}d\theta \\
&= \frac{\Gamma(N_s+\gamma_2)}{(c_2+s)^{(N_s+\gamma_2)}}\frac{c_2^{\gamma_2}}{\Gamma(\gamma_2)}.
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)}\frac{\Gamma(N_s+\gamma_2)}{\Gamma(N_s+\gamma_1)}\left(\frac{c_1+s}{c_2+s}\right)^{N_s} z$$

[1]Μια μεικτή διαδικασία Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με παράμετρο θ ονομάζεται και **διαδικασία Pólya-Lundberg** αν ισχύει $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma, c)$ με $\gamma, c > 0$. Τοτε η αντίστοιχη σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **Γαμμα-μεικτή σύνθετη Poisson** ή **σύνθετη μεικτή αρνητική διωνυμική διαδικασία.**

όπου το z δίνεται από

$$z = \frac{c_2^{\gamma_2}}{c_1^{\gamma_1}} \frac{(c_1+s)^{\gamma_1}}{(c_2+s)^{\gamma_2}} \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_2)}. \tag{5.2}$$

Παράδειγμα 5.1.4. *(Γενική αντίστροφη Γκαουσιανή μεικτή σύνθετη Poisson)* Έστω P και Q μέτρα πιθανότητας τέτοια ώστε η διαδικασία $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια Γενική αντίστροφη Γκαουσιανή μεικτή σύνθετη Poisson[2] (επίσης λέγεται και Sichel) *σ.δ.* ως προς P και Q και έστω $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$. Θεωρούμε τις παράμετρους $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ που καθορίζουν τις κατανομές του Θ ως προς τα δύο μέτρα (τα λ_1, λ_2 εδώ είναι σταθερές και όχι μεταβλητές τιμές της τυχαίας μεταβλητής Θ, δηλ.

$$P_\Theta = \mathbf{GIG}(\mu_1, \beta_1, \lambda_1), \quad Q_\Theta = \mathbf{GIG}(\mu_2, \beta_2, \lambda_2)$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}] &= \int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} Q_\Theta(d\theta) \\
&= \int_0^\infty \theta^{N_s} e^{-\theta s} \frac{\mu_2^{-\lambda_2} \theta^{\lambda_2 - 1} e^{-\frac{(\theta^2+\mu_2^2)}{2\beta_2\theta}}}{2\kappa_{\lambda_2}(\mu_2\beta_2^{-1})} d\theta \\
&= (2\kappa_{\lambda_2}(\mu_2\beta_2^{-1}))^{-1} \mu_2^{N_s} \int_0^\infty \mu_2^{-(\lambda_2+N_s)} \theta^{(\lambda_2+N_s)-1} e^{-\left(\theta s + \frac{(\theta^2+\mu_2^2)}{2\beta_2\theta}\right)} d\theta
\end{aligned}$$

Έστω

$$\widetilde{\beta_2} = \beta_2(1+2\beta_2 s)^{-1}, \quad \widetilde{\mu_2} = \mu_2(1+2\beta_2 s)^{-1/2}$$

οπότε

$$\theta s + \frac{(\theta^2+\mu_2^2)}{2\beta_2\theta} = \frac{\theta^2 + \widetilde{\mu_2}^2}{2\widetilde{\beta_2}\theta}$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+2\beta_2 s)^{-(\lambda_2+N_s)/2} \mu_2^{N_s}}{2\kappa_{\lambda_2}(\mu_2\beta_2^{-1})} \int_0^\infty \mu_2^{-(\lambda_2+N_s)} (1+2\beta_2 s)^{(\lambda_2+N_s)/2} \theta^{(\lambda_2+N_s)-1} e^{-\left(\theta s + \frac{(\theta^2+\mu_2^2)}{2\beta_2\Theta}\right)} d\theta \\
&= \frac{\mu_2^{N_s}(1+2\beta_2 s)^{-(\lambda_2+N_s)/2}}{2\kappa_{\lambda_2}(\mu_2\beta_2^{-1})} \int_0^\infty \widetilde{\mu_2}^{-(\lambda_2+N_s)} \theta^{(\lambda_2+N_s)-1} e^{-\frac{(\theta^2+\widetilde{\mu_2}^2)}{2\widetilde{\beta_2}\theta}} d\theta \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\kappa_{\lambda_2+N_s}(\mu_2\beta_2^{-1}(1+2\beta_2 s)^{1/2})}{\kappa_\lambda(\mu_2\beta_2^{-1})} \ \mu_2^{N_s}(1+2\beta_2 s)^{-(\lambda_2+N_s)/2},
\end{aligned}$$

[2]Η διαδικασία $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **γενική αντίστροφη Γκαουσιανή μεικτή σύνθετη Poisson** (general inverse Gaussian mixed compound Poisson), αν $P_\Theta = \mathbf{GIG}(\mu, \beta, \lambda)$.

όπου (1):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \widetilde{\mu_2}^{-(\lambda_2+N_s)} \theta^{(\lambda_2+N_s)-1} e^{-\frac{(\theta^2+\widetilde{\mu_2}^2)}{2\widetilde{\beta_2}\theta}} d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{\widetilde{\mu_2}^{-(\lambda_2+N_s)} \theta^{(\lambda_2+N_s)-1} e^{-\frac{(\theta^2+\widetilde{\mu_2}^2)}{2\widetilde{\beta_2}\theta}}}{\kappa_{\lambda_2+N_s}(\mu_2\beta_2^{-1}(1+2\beta_2 s)^{1/2})} d\theta \; \kappa_{\lambda_2+N_s}(\mu_2\beta_2^{-1}(1+2\beta_2 s)^{1/2}) \\
&= \kappa_{\lambda_2+N_s}(\mu_2\beta_2^{-1}(1+2\beta_2 s)^{1/2}) \\
&= \kappa_{\lambda_2+N_s}(\widetilde{\mu_2}\widetilde{\beta_2}^{-1})
\end{aligned}
$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.1, καταλήγουμε στο

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} \frac{\mathbb{E}_Q[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\
&= z\; e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{N_s} \left(\frac{1+2\beta_1 s}{1+2\beta_2 s}\right)^{N_s/2} \frac{\kappa_{\lambda_2+N_s}(\mu_2\beta_2^{-1}(1+2\beta_2 s)^{1/2})}{\kappa_{\lambda_1+N_s}(\mu_1\beta_1^{-1}(1+2\beta_1 s)^{1/2})}
\end{aligned}
$$

όπου

$$
z = \frac{(1+2\beta_1 s)^{\lambda_1/2}}{(1+2\beta_2 s)^{\lambda_2/2}} \frac{\kappa_{\lambda_1}(\mu_1\beta_1^{-1})}{\kappa_{\lambda_2}(\mu_2\beta_2^{-1})}.
$$

5.2 Σύνθετες Μεικτές Σ.Δ. Poisson και ισοδύναμα μέτρα

Σε όλη την ενότητα 5.2 η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson. Είναι γνωστό από το Θεώρημα 5.1.1, ότι κάτω από την ασθενή υπόθεση ότι $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$ τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα επάνω σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$ $(s \in \mathbb{R}_+)$. Έστω

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\infty &:= \sigma(\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}) \\
&:= \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t\right) \subseteq \Sigma
\end{aligned}
$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει για την $\mathcal{F}_\infty$, δηλ. από την $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$ δεν έπεται πάντα ότι $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \sim Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$, όπως δείχνουν οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 5.2.1. *(Meister [22], Πρόταση 2.7) Έστω ότι τα μέτρα πιθανότητας P και Q ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1. Τα μέτρα Q και P είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{F}_s$ αν και μονο αν*

$$Q_{X_1} = P_{X_1} \text{ και } Q_\Theta \sim P_\Theta$$

Πρόταση 5.2.2. *(Meister [22], Πρόταση 2.8) Έστω ότι τα μέτρα πιθανότητας P και Q ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1. Εάν τα Q_Θ και P_Θ είναι αμοιβαία ιδιάζοντα ή $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ τότε συνεπάγεται οτι τα μέτρα Q και P είναι αμοιβαία ιδιάζοντα στην $\mathcal{F}_\infty$.*

Παράδειγμα 5.2.3. Έστω P και Q μέτρα πιθανότητας τέτοια ώστε η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη μεικτή $\sigma.\delta.$ Poisson ως προς P και Q. Έστω επίσης θ_1, θ_2 τέτοια ώστε

$$P_\Theta = \delta_{\theta_1}, \quad Q_\Theta = \delta_{\theta_2}.$$

όπου δ_{θ_1} και δ_{θ_2} είναι τα μέτρα Dirac επάνω στην $\mathcal{B}((0,\infty))$. Τότε αν $\theta_1 \neq \theta_2$ ή $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$, ισχύει $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \perp Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$, ενώ αν $\theta_1 = \theta_2$ και $P_{X_1} = Q_{X_1}$ ισχύει $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty = Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$.Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού, θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

(a) Αν $\theta_1 \neq \theta_2$ τότε $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \perp Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$. Πράγματι, έστω $A = \{\theta_1\} \in \mathcal{B}$. Τότε

$$P_\Theta(A) = \delta_{\theta_1}(A) = 1$$

$$Q_\Theta(A) = \delta_{\theta_2}(A) = 0$$

$\Longrightarrow \exists A \in \mathcal{B} \quad [P_\Theta(A) = 1 \Longleftrightarrow Q_\Theta(A) = 0]$
$\Longleftrightarrow P_\Theta \perp Q_\Theta \overset{5.2.2}{\Longrightarrow} P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \perp Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$.

(b) $P_{X_1} \neq Q_{X_1} \Longrightarrow P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \perp Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$. Πράγματι, αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.2.2.

(c) Έστω $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ και $P_{X_1} = Q_{X_1}$. Τότε $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty = Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$.
Πράγματι, αν $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ τότε

$$P_\Theta = Q_\Theta. \tag{5.3}$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\mathcal{F}_s \cap \{N_s = n\} \subseteq \sigma(X_1, \ldots, X_n) \cap \{N_s = n\} \tag{5.4}$$

(βλ. π.χ. [1] βήμα (α) στην απόδειξη της Πρότασης 7.2.6).
Έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_s$. Τότε από την (5.4) έπεται ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists B_n \in \sigma(X_1, \ldots, X_n) \qquad A \cap \{N_s = n\} = B_n \cap \{N_s = n\}. \tag{5.5}$$

(c_1) Για κάθε $B \in \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)$ ισχύει $Q(B) = P(B)$. Πράγματι, έστω $B \in \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)$ τότε υπάρχει $j \in \{1 \ldots, n\}$ ώστε $B \in \sigma(X_j)$, ισοδύναμα υπάρχει $A_j \in \mathcal{B}$ ώστε $B = X_j^{-1}(A_j,)$. Επομένως

$$\begin{aligned} Q(B) &= Q(X_j^{-1}(A_j,) = Q_{X_j}(A_j,) \\ &= P_{X_j}(A_j) = P(X_j^{-1}(A_j) = P(B). \end{aligned}$$

(c_2) $\mathcal{D}_n := \{B \in \sigma(X_1, \ldots, X_n) : Q(B) = P(B)\}$
Τότε ισχύει
$\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j) \subseteq \mathcal{D}_n$ λόγω του (c_1).

(c_3) Έστω $\mathcal{A}_n := \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j) \cup \mathcal{E}_n$ όπου

$$\mathcal{E}_n := \{A_1 \cap \cdots \cap A_k : A_j \in \sigma(X_j) \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}, k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Τότε $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{D}_n$. Πράγματι έστω $D \in \mathcal{E}_n$. Τότε υπάρχει $k \in \{1, \ldots .n\}$ και $A_j \in \sigma(X_j)$ με $j \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $D = A_1 \cap \cdots \cap A_k$. Άρα για κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$ υπάρχει $B_j \in \mathcal{B}$ ώστε $A_j = X_j^{-1}(B_j)$. Επομένως

$$\begin{aligned} Q(D) &= Q(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \\ &= Q(X_1^{-1}(B_1) \cap \ldots X_k^{-1}(B_k)) \\ &= Q(X_1^{-1}(B_1) \ldots Q(X_k^{-1}(B_k)) \\ &= Q(A_1) \ldots Q(A_k) \\ &\overset{(c_1)}{=} P(A_1) \ldots P(A_k) = P(D) \end{aligned}$$

όπου η τρίτη και η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των X_n $(n \in \mathbb{N})$. Άρα $D \in \mathcal{D}_n$ και επομένως ισχύει το βήμα (c_3).

(c_4) $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{D}_n$.
Πράγματι το (c_4) είναι άμεση συνέπεια των (c_2) και (c_3).

(c_5) Για κάθε$n \in \mathbb{N}$ η $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $D_1, D_2 \in \mathcal{A}_n$.

- Αν $D_1, D_2 \in \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)$ τότε υπάρχει $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $D_1 \in \sigma(X_{j_1})$ και $D_2 \in \sigma(X_{j_2})$. Άρα $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}_n$.

- Αν $D_1, D_2 \in \mathcal{E}_n$ τότε θα υπάρχουν $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $A_i \in \sigma(X_i)$ για $i \in \{1, \dots, k\}$ και $B_j \in \sigma(X_{i_j})$ για $j \in \{1, \dots, l\}$ και για $\{i_1, \dots, i_n\}$ μια μετάθεση των $\{1, \dots, n\}$ ώστε $D_1 = A_1 \cap \dots \cap A_k$ και $D_2 = B_1 \cap \dots \cap B_l$. Τότε $D_1 \cap D_2 = C_1 \cap \dots \cap C_m$ με $m \in \{1, \dots, n\}$ και $C_j \in \sigma(X_{j_i})$ όπου $\{j_1, \dots, j_n\}$ είναι μια μετάθεση των $\{i_1, \dots, i_n\}$. Επομένως $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}_n$.

- Αν $D_1 \in \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)$ και $D_2 \in \mathcal{E}_n$. Τότε υπάρχει $j_0 \in \{i_1, \dots, i_n\}$ ώστε $D_1 \in \sigma(X_{j_0})$ και $B_j \in \sigma(X_{i_j})$ για $j \in \{1, \dots, l\}, l \in \{i_1, \dots, i_n\}$ ώστε $D_2 = B_1 \cap \dots \cap B_l$. Άρα $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}_n$. Εδω τελειώνει η απόδειξη του βήματος (c_5).

($\mathbf{c_6}$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sigma(\mathcal{A}_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j) \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Επομένως $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_n) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_n)$ και άρα ισχύει το βήμα (c_6).

($\mathbf{c_7}$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathcal{D}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
Έστω $n \in \mathbb{N}$ αυθαίρετο και σταθερό. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{D}_n$ είναι μια κλάση Dynkin. Επομένως λαμβάνοντας υπόψη την (c_5) μπορούμε να συμπεράνουμε από το Θεώρημα Α΄.2 της μονότονης κλάσης ότι $\sigma(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{D}_n$. Άρα απο το (c_6) και τον ορισμό της $\mathcal{D}_n$ προκύπτει ότι $\mathcal{D}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

($\mathbf{c_8}$) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$ ισχύει $Q(A) = P(A)$.

Πράγματι, έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_s$. Τότε

$$\begin{aligned}
Q(A) &= Q\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0}(A\cap\{N_s=n\}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} Q(A\cap\{N_s=n\}) \\
&\overset{(5.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n\cap\{N_s=n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n)Q(N_s=n) \\
&\overset{(c_7)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)\int Q(\{N_s=n\}|\Theta)dQ \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)\int e^{-\Theta s}\frac{(\Theta s)^n}{n!}dQ \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)\int e^{-\theta s}\frac{(\theta s)^n}{n!}Q_\Theta(d\theta) \\
&\overset{(5.3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)\int e^{-\theta s}\frac{(\theta s)^n}{n!}P_\Theta(d\theta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)P(N_s=n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n\cap\{N_s=n\}) \\
&\overset{(5.5)}{=} \sum_{n=o}^{\infty} P(A\cap\{N_s=n\}) = P\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0}(A\cap\{N_s=n\}\right) = P(A)
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη και η δέκατη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{F}_s \quad Q(A) = P(A)$ το οποίο συνπάγεται ότι και για κάθε $A \in \bigcup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s \quad Q(A) = P(A)$.

($\mathbf{c_9}$) Για κάθε $A \in \mathcal{F}_\infty \quad Q(A) = P(A)$.
Η $\bigcup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Πράγματι έστω $A, B \in \bigcup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s$. Τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $A \in \mathcal{F}_s, B \in \mathcal{F}_t$ και υπάρχει $u \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $s, t \leq u$ και $A, B \in \mathcal{F}_u$. Ως εκ τούτου συνεπάγεται ότι $A \cap B \in \mathcal{F}_u$.

Έστω $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{F}_\infty : P(A) = Q(A)\}$. Επομένως έχουμε ότι $\bigcup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

(Dyn1) $\emptyset \in \mathcal{D}$

(Dyn2) $\forall A \in \mathcal{D}$ ισχύει $A^c \in \mathcal{D}$.

(Dyn3) $\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{D}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \mathbb{N}$ ισχύει $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$.

Απο το Θεώρημα Α΄.2 της μονότονης κλάσης συνεπάγεται ότι $\sigma(\bigcup_{s\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_s) \subseteq \mathcal{D}$. Όμως γνωρίζουμε επίσης ότι $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{s\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_s)$ και ως εκ τούτου καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}_\infty.$$

Επομέμως για κάθε $A \in \mathcal{F}_\infty \quad P(A) = Q(A)$.

Το παράδειγμα 5.2.3 μας δημιουργεί την απορία εάν υπάρχουν πάντα μόνο οι δύο δυνατότητες $P \restriction \mathcal{F}_\infty = Q \restriction \mathcal{F}_\infty$ ή $P \restriction \mathcal{F}_\infty \perp Q \restriction \mathcal{F}_\infty$. Όπως θα δούμε παρακάτω ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι αληθής:

Παράδειγμα 5.2.4. Έστω $P_{X_1} = Q_{X_1}$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ με $\theta_1 \neq \theta_2$ τέτοια ώστε

$$P_\Theta = \delta_{\theta_1}, \quad Q_\Theta = \frac{1}{2}\delta_{\theta_1} + \frac{1}{2}\delta_{\theta_2}.$$

Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι $P \restriction \mathcal{F}_\infty \perp Q \restriction \mathcal{F}_\infty$. Έτσι υπάρχουν σύνολα $A, B \in \mathcal{F}_\infty$ με $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$ και επι πλέον χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P(B) = 0 = Q(A)$ και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} P(B) &= \int P(B|\Theta)dP = \int \mathbb{E}_P[\chi_B|\Theta]dP \\ &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[\chi_B|\Theta]] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}_P[\chi_B|\Theta=\theta]P_\Theta(d\theta) \\ &= \mathbb{E}_P[\chi_B|\Theta=\theta_1] = 0 \end{aligned}$$

αλλά

$$\begin{aligned} 1 = Q(B) &= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q[\chi_B|\Theta]] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_Q[\chi_B|\Theta=\theta_1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_Q[\chi_B|\Theta=\theta_2] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_P[\chi_B|\Theta=\theta_1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_Q[\chi_B|\Theta=\theta_2] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_Q[\chi_B|\Theta=\theta_2] \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Όμως $P_\Theta \nsim Q_\Theta$ διότι για $A = \{\theta_2\} \in \mathcal{B}$ ισχύει $P_\Theta(A) = \delta_{\theta_1}(A) = 0$ αλλά

$$Q_\Theta(A) = \frac{1}{2}\delta_{\theta_1}(A) + \frac{1}{2}\delta_{\theta_2}(A) = \frac{1}{2}.$$

Άρα $P \restriction \mathcal{F}_\infty \nsim Q \restriction \mathcal{F}_\infty$ διότι αν είχαμε $P \restriction \mathcal{F}_\infty \sim Q \restriction \mathcal{F}_\infty$ τότε θα είχαμε και $P \restriction \mathcal{F}_s \nsim Q \restriction \mathcal{F}_s \quad \forall s \geq 0$ και επομένως απο την πρόταση 5.2.1 θα είχαμε $P_\Theta \sim Q_\Theta$, άτοπο.
Ως εκ τούτου καταλήγουμε ότι από $P \restriction \mathcal{F}_\infty \nsim Q \restriction \mathcal{F}_\infty$ γενικά δεν συνεπάγεται οτι τα μέτρα P και Q είναι αμοιβαία ιδιάζοντα στην $\mathcal{F}_\infty$.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι αλλάζοντας το μέτρο η *σ.δ.* $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ "παραμένει" μια σύνθετη μεικτή *σ.δ.* Poisson εάν η παράγωγος Radon-Nikodym έχει την "σωστή" δομή σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$. Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς και ορισμούς (το P παραμένει πάντα ένα σταθερό μετρο).

Συμβολισμοί και ορισμοί 5.2.5. Έστω

$$M_1(\mathbb{R}_+) = \{\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \longmapsto [0,1] : \mu \text{ κατανομή πιθανότητας}, \\ \mu(0) = 0, \textstyle\int_0^\infty x^2 d\mu(x) < \infty\}.$$

Με $\mathcal{G}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των συναρτήσεων $g_G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}_+$, ώστε να υπάρχει $G \in M_1(\mathbb{R}_+)$ με την ίδιότητα

$$g_G(s,n) = \frac{\int_0^\infty \theta^n e^{-\theta s} G(d\theta)}{\mathbb{E}_P[\Theta^n e^{-\Theta s}]} \quad \forall s > o, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε το χώρο $\Upsilon = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} := \{f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}\}$ δηλαδή $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Για απλοποίηση ορίζουμε

$$\Omega = \{f \in \Upsilon : \text{f μετρήσιμη και cadlag}\}$$

Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $\pi_t : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\pi_t(f) := f_t$. Η απεικόνιση π_t ονομάζεται η **κανονική προβολή** απο το Υ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\omega \in \Omega$ ορίζουμε $S_t(\omega) := \omega_t$, δηλαδή ορίζουμε την απεικόνιση $S_t : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $S_t(\omega) = \pi_t(\omega) = \omega_t$. Επομένως ισχύει $S_t = \pi_t|\Omega$.
Επίσης για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε την $\mathcal{F}_t := \sigma(\{S_u : u \leq t\})$, και την $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t)$. Θέτουμε $\Sigma := \mathcal{F}_\infty$. Έστω $P : \Sigma \longmapsto [0,1]$ ένα μέτρο πιθανότητας.

Παρατηρήσεις 5.2.6. (a) Έστω $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} := \otimes_{t\in\mathbb{R}_+} \mathfrak{B}_t$, όπου $\mathfrak{B}_t := \mathfrak{B}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Η $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** επάνω στον Υ και ορίζεται ως εξής:

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} := \sigma(\{\pi_t^{-1}(B_t) : t \in \mathbb{R}_+, B_t \in \mathfrak{B}\}),$$

όπου $\pi_t^{-1}(B_t) := \prod_{s\in\mathbb{R}_+} B_s$ με

$$B_s = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν} \quad s \neq t \\ B_t & \text{αν} \quad s = t \end{cases}.$$

Έστω $\mathcal{E} := \{\pi_t^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}, t \in \mathbb{R}_+\}$ και έστω

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \{\pi_I^{-1}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}) : n \in \mathbb{N}, I := \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+, B_{t_i} \in \mathfrak{B} \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

όπου $\pi_I : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}^I$ με $\pi_I(\omega) = (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_1})$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+} := \sigma(\widetilde{\mathcal{E}})$. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}, I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ και $B_{t_i} \in \mathfrak{B}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ ισχύει

$$\pi_I^{-1}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}) \ = \prod_{s \in \mathbb{R}_+} A_s = \prod_{i=1}^{n} B_{t_i} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+ \setminus I}$$

όπου

$$A_s = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν} \quad s \notin I \\ B_{t_i} & \text{αν} \quad s = t_i \quad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} = \widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+}$. Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{E}$. Τότε θα υπάρχουν $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ ώστε $A = \pi_t^{-1}(B)$. Άρα $A = \pi_I^{-1}(B_t)$, όπου $I := \{t\} \subseteq \mathbb{R}_+$ και $B_t := B \in \mathfrak{B}$. Επομένως $A \in \widetilde{\mathcal{E}}$.
Έτσι προκύπτει ότι $\mathcal{E} \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}$ και άρα $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{E}})$ δηλαδή

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+}. \tag{5.6}$$

Αντιστρόφως, έστω $A \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Τότε θα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}, I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ και $B_{t_i} \in \mathfrak{B}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε $A = \pi_I^{-1}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n})$. Τότε

$$\begin{aligned} A &= \pi_I^{-1}[(B_{t_1} \times \mathbb{R}^{I \setminus \{t_1\}}) \cap \cdots \cap (B_{t_n} \times \mathbb{R}^{I \setminus \{t_n\}})] \\ &= \pi_I^{-1}(B_{t_1} \times \mathbb{R}^{I \setminus \{t_1\}}) \cap \cdots \cap \pi_I^{-1}(B_{t_n} \times \mathbb{R}^{I \setminus \{t_n\}}) \\ &= (B_{t_1} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+ \setminus \{t_1\}}) \cap \cdots \cap (B_{t_n} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+ \setminus \{t_n\}}) \\ &= \pi_{t_1}^{-1}(B_{t_1}) \cap \cdots \cap \pi_{t_n}^{-1}(B_{t_n}), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$A = \pi_{t_1}^{-1}(B_{t_1}) \cap \cdots \cap \pi_{t_n}^{-1}(B_{t_n}). \tag{5.7}$$

Επομένως $\pi_{t_i}^{-1}(B_{t_i}) \in \sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και άρα $\bigcap_{i \in I} \pi_{t_i}^{-1}(B_{t_i}) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$, δηλαδή $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ λόγω της (5.7).
Έτσι, δείξαμε ότι $\widetilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$, συνεπώς $\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+} := \sigma(\widetilde{\mathcal{E}}) \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$, δηλαδή

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+} \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}. \tag{5.8}$$

Απο τις σχέσεις (5.6) και (5.8) συνεπάγεται $\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{R}_+} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$. Προφανώς ισχύει $\mathcal{F}_\infty = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} \cap \Omega$.
(b) Δοθέντων των συναρτήσεων κατανομών των ποσών μεταπηδήσεων F_{X_1} και ενός μέτρου $G \in M_1(\mathbb{R}_+)$ υπάρχει πάντα ένα μέτρο πιθανότητας P στον μ.χ. (Ω, Σ) και μία τ.μ. $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}_+$ με $P_\Theta = G$ ώστε η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μία σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson ως προς το μέτρο P. Το P ειναι κατασκευάσιμο ακριβώς, προσδιορίζοντας την απο κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{t_1,\ldots,t_n}$ για όλα τα διανύσματα $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή και το Θεώρημα ύπαρξης του Kolmogorov.

Η παρακάτω πρόταση είναι το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.1.1, όταν ο χ.π, (Ω, Σ, P) του 5.1.1 είναι ο χ.π. του Ορισμού 5.2.5.

Πρόταση 5.2.7. *(Meister [22], Προταση 2.9) Έστω ότι η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μία σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson ως προς το P και ότι g_G είναι στοιχείο του συνόλου $\mathcal{G}$ και μία μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ με $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$. Τότε συνεπάγεται ότι η εξίσωση*

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_G(s, N_s) \quad (s \geq 0)$$

προσδιορίζει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας Q στον μ.χ. (Ω, Σ) τέτοιο ώστε η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μία σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson ως προς το μέτρο Q.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το g_G είναι ένα στοιχείο απο το σύνολο $\mathcal{G}$ και Q:$\Sigma \longmapsto \mathbb{R}_+$ είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_G(s, N_s) \quad (s \geq 0). \tag{5.9}$$

Έστω $F(x) := \mathbb{E}_P[\chi_{(X_1 \leq x)} e^{\gamma(X_1)}]$ και $\widetilde{Q}$ ένα μέτρο πιθανότητας πάνω στον μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ) τέτοιο ώστε η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο $\widetilde{Q}$ με $\widetilde{Q}_\Theta = G$ και $\widetilde{Q}_{X_1} = F$.
(a) Ισχύει

$$\frac{d\widetilde{Q}_{X_1}}{dP_{X_1}} = e^\gamma \text{ και } \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[X_1^2] < \infty.$$

(a1) Για την απόδειξη της πρώτης ισότητας θα δείξουμε αρχικά ότι

$$\widetilde{Q}_{X_1}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{E}_P[\chi_{\{X_1 \le x\}} e^{\gamma(X_1)}] \\ &= \mathbb{E}_P[(\chi_{(-\infty,x]} \circ X_1) e^{\gamma \circ X_1}] \\ &= \int (\chi_{(-\infty,x]} \circ X_1) e^{\gamma \circ X_1} dP \\ &= \int \chi_{(-\infty,x]}(t) e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είνα συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [2]. Άρα

$$\widetilde{Q}_{X_1}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

(a2) Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει $\widetilde{Q}_{X_1}(B) = \int_B e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt)$.
Πράγματι, έστω $\mathcal{G}_{\mathcal{B}} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$, όπου $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ είναι ένας γεννήτορας της $\mathfrak{B}$, κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές. Επίσης έστω

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathfrak{B} : \quad \widetilde{Q}_{X_1}(B) = \int_B e^\gamma dP_{X_1}\}.$$

Τότε $\mathcal{G}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin.
Πράγματι, είναι εύκολο να αποδειχθεί οτι ισχύει

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]. \tag{5.10}$$

(Dyn1') $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{X_1}(\mathbb{R}) &\overset{(5.10)}{=} \widetilde{Q}_{X_1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]) \\ &= \lim_{n \to \infty} \widetilde{Q}_{X_1}((-\infty, n]) \\ &\overset{(a_1)}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{n} e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^\gamma dP_{X_1}, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της πρότασης 1.2.3 του [2].

(Dyn2') $B \setminus A \in \mathcal{D}$ για $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$.
Πράγματι, έστω $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$. Τότε

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{X_1}(B \setminus A) &= \widetilde{Q}_{X_1}(B) - \widetilde{Q}_{X_1}(A) \\ &= \int_B e^\gamma dP_{X_1} - \int_A e^\gamma dP_{X_1} \\ &= \int_{B\setminus A} e^\gamma dP_{X_1} \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της υπόθεσης $A, B \in \mathcal{D}$, ενώ η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος 2.3.3. [2].

(Dyn3') $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ για κάθε ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο **στοιχείων** της $\mathcal{D}$.
Πράγματι, έστω μια ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο **στοιχείων** της $\mathcal{D}$. Τότε

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{X_1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{Q}_{X_1}(B_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} e^\gamma dP_{X_1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{B_n} e^\gamma dP_{X_1} \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{B_n} e^\gamma dP_{X_1} \\ &= \int \chi_{\{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}} e^\gamma dP_{X_1} \\ &= \int_{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n} e^\gamma dP_{X_1} \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος Beppo Levi 2.3.2 του [2].
Άρα απο το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης Β'2 έπεται ότι $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{D}$, άρα $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{B}$, δηλαδή $\mathcal{D} = \mathfrak{B}$.
Συνεπώς η συνάρτηση $e^\gamma : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μια Radon-Nikodym παράγωγος του $\widetilde{Q}_{X_1}$ ως προς P_{X_1}, δηλαδή

$$\frac{d\widetilde{Q}_{X_1}}{dP_{X_1}}(x) = e^{\gamma(x)} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+. \tag{5.11}$$

(a3) Ισχύει $\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[X_1^2] < \infty$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[X_1^2] &= \int X_1^2 d\widetilde{Q} \\
&= \int x^2 \widetilde{Q}_{X_1}(dx) \\
&\overset{(5.11)}{=} \int x^2 e^{\gamma(x)} P_{X_1}(dx) \\
&= \int X_1^2 e^{\gamma(X_1)} dP \\
&= \mathbb{E}_P[X_1^2] < \infty,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και η τέταρτη ισότητα είνα συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [2], ενώ η ανισότητα δίνεται απο την υπόθεση.

(b) Ισχύει $\widetilde{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$.
Για να δείξουμε ότι $\widetilde{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$ πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall\ B \in \mathfrak{B} \quad [\widetilde{Q}_{X_1}(B) = 0 \Longleftrightarrow P_{X_1}(B) = 0].$$

Πράγματι έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε απο την (5.11) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}_{X_1}(B) = 0 &\overset{(5.11)}{\Longleftrightarrow} \int_B e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \int \chi_B(t) e^{\gamma(t)} P_{X_1}(dt) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \chi_B e^{\gamma} = 0 \qquad P_{X_1} - \sigma.\beta. \\
&\Longleftrightarrow \chi_B = 0 \qquad P_{X_1} - \sigma.\beta. \\
&\Longleftrightarrow \int \chi_B dP_{X_1} = 0 \Longleftrightarrow \int_B dP_{X_1} = 0 \\
&\Longleftrightarrow P_{X_1}(B) = 0,
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη και η πέμπτη ισοδυναμία είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.10 του [2].

Απο το Θεώρημα 5.1.1 και το (b) έπεται ότι $\widetilde{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_s \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \geq 0$ και

$$\frac{d\widetilde{Q}}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_{\mathcal{G}}(s, N_s) \quad (s \geq 0). \tag{5.12}$$

(c) $\widetilde{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_s = Q \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$.
Πράγματι απο τις σχέσεις (5.9) και (5.12) προκύπτει ότι, για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = \frac{d\widetilde{Q}}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = B(s, N_s),$$

όπου $B(s, N_s) := e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_{\mathcal{G}}(s, N_s)$. Επομένως έχουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_s$ ισχύουν οι σχέσεις

$$Q(A) = \widetilde{Q}(A) = \int_A B(s, N_s) dP,$$

δηλαδή $\widetilde{Q} \restriction \mathcal{F}_s = Q \restriction \mathcal{F}_s$.

(d) $\widetilde{Q} \restriction \widetilde{\mathcal{F}} = Q \restriction \widetilde{\mathcal{F}}$, όπου $\widetilde{\mathcal{F}} := \cup_{s \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_s$.
Πράγματι, έστω $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Τότε θα υπάρχει $s_0 \in \mathbb{R}_+$ ώστε $F \in \mathcal{F}_{s_0}$ και άρα

$$Q(F) = (Q \restriction \mathcal{F}_{s_0})(F) \stackrel{(c)}{=} (\widetilde{Q} \restriction \mathcal{F}_{s_0})(F) = \widetilde{Q}(F).$$

Επομένως ισχύει το (d).

(e) Το μέτρο Q είναι σ-προσθετικό πάνω στην άλγεβρα $\widetilde{\mathcal{F}} = \cup_{s \geq 0} \mathcal{F}_s$. Πράγματι, το $\widetilde{Q}$ είναι σ-προσθετικό (ως μέτρο πιθανότητας) πάνω στην άλγεβρα $\widetilde{\mathcal{F}}$ (δηλ. για κάθε ακολουθία $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της $\widetilde{\mathcal{F}}$ με $F_i \cap F_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}$ και με την ιδιότητα $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \widetilde{\mathcal{F}}$ ισχύει $(\widetilde{Q} \restriction \widetilde{\mathcal{F}})(\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{Q} \restriction \widetilde{\mathcal{F}})(F_n)$).
Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και το (d), θα έχουμε ότι το $Q \restriction \widetilde{\mathcal{F}}$ είναι σ-προσθετικό. Απο το (e) έπεται ότι η μοναδική επέκταση του Q στην $\sigma(\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathcal{F} = \Sigma$ και το $\widetilde{Q}$ συμπίπτουν. □

Απο το Θεώρημα 5.1.1 και την Πρόταση 5.2.7 προκύπτει το παρακάτω:

Ερώτημα 5.2.8. Μπορούν το Θεώρημα 5.1.1 και η Πρόταση 5.2.7 να αποδειχτούν γενικότερα για σύνθετες μεικτές στοχαστικές διαδικασίες Cox?

5.3 Σύνθετες Μεικτές Σ.Δ. Poisson και Martingales

Το ακόλουθο Πόρισμα οδήγησε σε μια νέα προσέγγιση ως προς τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων, δηλαδή την προσέγγιση με martingales. Για απλότητα συνεχίζουμε κάτω απο την υπόθεση ότι ο μετρήσιμος χώρος (Ω, Σ) είναι εκείνος των ορισμών 5.2.5. Έστω επίσης P ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω, Σ) έτσι ώστε η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο P με παράμετρο θ_1.

Πόρισμα 5.3.1. *(Meister [22], Πόρισμα 2.10) Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω, Σ) έτσι ώστε:*

(i) $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_s \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+$

(ii) Η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο* Q.

Τότε υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\beta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ *με* $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] < \infty$ *και* $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$ *έτσι ώστε για κάθε* $0 \le s \le t$ *και* $A \in \mathcal{F}_s$ *να ισχύει*

$$Q(A) = \int_A e^{\sum_{i=1}^{N_t} \beta(X_i) - \theta_1 t(\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]-1))} \; dP. \tag{5.13}$$

Αντίστροφα, έστω $\beta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ *μια Borel μετρήσιμη απεικόνιση με* $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] < \infty$ *και* $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$ *που ικανοποιεί την (5.13). Τότε υπάρχει μια μοναδική κατανομή πιθανότητας* Q *στον* (Ω, Σ) *που προσδιορίζεται απο την (5.13) και η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii). Επιπλέον, εάν* $Q \neq P$ *τότε τα μέτρα* P *και* Q *είναι αμοιβαία ιδιάζοντα στον* (Ω, Σ).

Απόδειξη. **(a)** Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω, Σ) με τις ιδιότητες (i) και (ii). Απο το Θεώρημα 5.1.1. έπεται ότι $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$ και χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 5.1.2 (χρησιμοποιώντας του ίδιους συμβολισμούς) έχουμε ότι υπάρχει κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1, \quad \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$ και

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{N_s} e^{-(\theta_2-\theta_1)s} \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{5.14}$$

Έστω β μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση: $\mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει $\beta(x) = \alpha + \gamma(x)$, όπου $\alpha := ln(\frac{\theta_2}{\theta_1})$. Τότε έχουμε ότι $\frac{\theta_2}{\theta_1} = e^{\alpha}$ δηλαδή

$$\theta_2 = \theta_1 e^{\alpha}. \tag{5.15}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] &= \int e^{\gamma(X_1)+\alpha} dP \\ &= e^{\alpha} \int e^{\gamma(X_1)} dP \\ &= e^{\alpha}\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = e^{\alpha} < \infty \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 5.1.1 που μας λέει ότι $\mathbb{E}_{P_{X_1}}[e^{\gamma(X_1)}] = 1$. Άρα

$$\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = e^{\alpha}. \tag{5.16}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)+\alpha}] \\ &= e^{\alpha}\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] < \infty. \end{aligned}$$

Απο τις σχέσεις (5.15) και (5.16) έπεται ότι

$$\theta_2 = \theta_1 \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]. \tag{5.17}$$

Τότε η (5.14) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} \restriction \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{N_s} e^{-(\theta_2-\theta_1)s} \\ &\overset{(5.15)}{=} e^{\sum_{i=1}^{N_s}(\beta(X_i)-\alpha)} (e^{\alpha})^{N_s} e^{-(\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]\theta_1-\theta_1)s} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i)} e^{-\theta_1 s(\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]-1)} \\ &\overset{(5.16)}{=} e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i) - \theta_1 s(e^{\alpha}-1)} \end{aligned}$$

Επομένως αποδείξαμε το ευθύ.

(b) Τώρα αντίστροφα έστω $\beta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη απεικόνιση με $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] < \infty$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$ που ικανοποιεί την (5.13). Ορίζουμε τα παρακάτω

- $\theta_2 = \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]\theta_1$
- $\alpha = ln(\frac{\theta_2}{\theta_1})$
- κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $x \longmapsto \gamma(x) := \beta(x) - \alpha$,

και το στοιχείο $g_G \in \mathcal{G}$ ώστε

$$g_G(s, N_s) := \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{N_s} e^{-(\theta_2-\theta_1)s}.$$

Τότε η (5.13) εύκολα γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} \restriction \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i) - \theta_1 s(\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]-1))} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_t}[\gamma(X_i)+\alpha] - s(\theta_2-\theta_1))} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_t} \gamma(X_i)} (e^{\alpha})^{N_s} e^{-s(\theta_2-\theta_1)} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_t} \gamma(X_i)} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{N_s} e^{-(\theta_2-\theta_1)s} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_{\mathcal{G}}(s, N_s), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{dQ}{dP} \restriction \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} g_{\mathcal{G}}(s, N_s), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Επίσης ισχύει $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-\alpha}] \\ &= \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]e^{-\alpha} \\ &= \frac{\theta_2}{\theta_1}e^{-\alpha} = e^{\alpha}e^{-\alpha} = 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)-\alpha}] \\ &= e^{-\alpha}\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty, \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει απο την υπόθεση $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$. □

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.2.7 για να συμπεράνουμε, ότι η Q είναι μια μοναδική κατανομή πιθανότητας στον (Ω, Σ) που ικανοποιεί την (i) και η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο Q. Με το ίδιο επιχείρημα όπως στην Πρόταση 5.2.7 μπορούμε ακριβώς να δείξουμε οτι τα Q_Θ και δ_{θ_2} πρέπει να συμπίπτουν και ως εκ τούτου η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο Q. Εφόσον το μέτρο Q είναι μοναδικά προσδιορισμένο στην $\cup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s$ τότε είναι μοναδικά προσδιορισμένο και στη Σ. Το Παράδειγμα 5.2.4 αποδεικνύει το τελευταίο συμπέρασμα του Πορίσματος αυτού.

Ορισμός 5.3.2. *Έστω ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο P και $\mathbb{E}_P[X_1] < \infty$. Η ποσότητα $p(P) := \mathbb{E}_P[S_1] \in [0,\infty]$ ονομάζεται* **πυκνότητα ασφαλίστρου** *(premium density).*

Για την $p(P)$ έχουμε

$$\begin{aligned} p(P) &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[S_1|\Theta]] \\ &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[N_1|\Theta]\ \mathbb{E}_P[X_1|\Theta]] \\ &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[N_1|\Theta]\ \mathbb{E}_P[X_1|]] \\ &= \mathbb{E}_P[\Theta\ \mathbb{E}_P[X_1]] \\ &= \mathbb{E}_P[\Theta]\ \mathbb{E}_P[X_1]. \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει απο την ανεξαρτησία των τ.μ. Θ και X_1.
Έστω ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο P με **πυκνότητα ασφαλίστρου** $p > 0$. Η ακόλουθη Πρόταση θα δείξει πως μπορούν να βρεθούν ισοδύναμα Martingale μέτρα για τη σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Πρόταση 5.3.3. *(Meister [22], Πρόταση 2.11) Η σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\mathcal{F}_t$-martingale υπό το μέτρο Q και $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ αν και μόνον αν*

(i) υπάρχουν $\theta > 0$ και $\beta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση με $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = \theta$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$ έτσι ώστε

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s}(\beta(X_i)-\theta s)}(\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}])^{-1} \tag{5.18}$$

(ii) $p = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]$.

Απόδειξη. Έστω ότι η σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\mathcal{F}_t$-martingale υπό το μέτρο Q και $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Πράγματι, θέτοντας $\widetilde{\mathcal{F}}_s := \sigma(\mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta))$ για καθε $s \in \mathbb{R}_+$, έχουμε αμέσως ότι η $\{\widetilde{\mathcal{F}}_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διύλιση στον μ.χ. (Ω, Σ) και $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty = \mathcal{F}_\infty = \Sigma$. Επομένως για το υπόλοιπο της απόδειξης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Τότε για $t \geq s \geq 0$ και δεσμεύοντας ως προς $\mathcal{F}_s$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\Theta]|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q[N_t - N_s|\Theta]\mathbb{E}_Q[X_1]|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[(t-s)\Theta\ \mathbb{E}_Q[X_1]|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[X_1](t-s)\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s].
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια της ιδιότητας του πύργου, αφού $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_s$ (βλ. π.χ. [4] Θεώρημα 5.5.10) και η δεύτερη προκ'υπτει απο την ανεξαρτησία των τ.μ. Θ και X_1.
Επίσης απο τη υπόθεση ότι η σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα Martingale ως προς Q έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_Q[S_t - pt + pt - ps + ps - S_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[(S_t - pt) - (S_s - ps) + p(t-s)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[S_t - pt|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}_Q[S_s - ps|\mathcal{F}_s] + p(t-s)\mathbb{E}[1|\mathcal{F}_s] \\
&= S_s - ps - S_s + ps + p(t-s) \\
&= p(t-s)
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει απο την $\mathcal{F}_s$-μετρησιμότητα της S_s. Ως εκ τούτου καταλήγουμε

$$\mathbb{E}_Q[X_1](t-s)\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s] = p(t-s),$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s] = \frac{p}{\mathbb{E}_Q[X_1]} \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Τότε απο την τελευταία σχέση έχουμε ότι

$$\frac{p}{\mathbb{E}_Q[X_1]} = \lim_{s\to\infty} \mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s] = \Theta \quad Q-\sigma.\beta.$$

(βλ. π.χ. [25], Θεώρημα 3.1, σελιδα 64). Συνεπώς έχουμε ότι $Q_\Theta = \delta_\theta$ όπου $\theta = p/\mathbb{E}_Q[X_1]$. Εφόσον τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$, έπεται απο το Θεώρημα 5.1.1. ότι ότι υπάρχει κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1, \quad \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$ και

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)} \frac{\theta^{N_s}e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]}. \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{5.19}$$

Έστω β μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση: $\mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει $\beta(x) := \gamma(x) + ln\,\theta$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] &= \int e^{\gamma(X_1)+ln\theta} dP \\ &= e^{ln\theta}\int e^{\gamma(X_1)} dP \\ &= \theta\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = \theta < \infty\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 5.1.1 που μας λέει ότι $\mathbb{E}_{P_{X_1}}[e^{\gamma(X_1)}] = 1$. Άρα

$$\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = \theta.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)+ln\theta}] \\ &= \theta\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty.\end{aligned}$$

Τότε η (5.19) γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \gamma(X_i)} \frac{\theta^{N_s} e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} [\beta(X_i) - ln\theta]} \frac{\theta^{N_s} e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i)} (e^{ln\theta})^{-N_s} \frac{\theta^{N_s} e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i)} \theta^{-N_s} \frac{\theta^{N_s} e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}]} \\ &= e^{(\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i) - \theta s)} (\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}])^{-1}.\end{aligned}$$

Επομένως αποδείχθηκε η (i).

Έστω $\frac{dQ_{X_1}}{dP_{X_1}} = f$ όπου $lnf := \gamma$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[X_1] &= \int X_1 f dP = \int X_1 e^{\gamma(X_1)} dP \\ &= \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = \frac{p}{\theta},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της $\theta = \frac{p}{\mathbb{E}_P[X_1]}$.

Άρα

$$\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = \frac{p}{\theta} \tag{5.20}$$

και καταλήγουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)})] &= \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1) + ln\theta}] \\ &= \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]\theta \\ &\overset{(5.20)}{=} \frac{p}{\theta}\theta = p.\end{aligned}$$

Επομένως αποδείξαμε το ευθύ.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχουν $\theta > 0$ και $\beta : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση με $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = \theta$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$ έτσι ώστε

$$\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s = e^{\sum_{i=1}^{N_s} \beta(X_i) - \theta s} (\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s} e^{-\Theta s}])^{-1}$$

και $p = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]$. Επίσης θεωρούμε κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $x \longmapsto \gamma(x) := \beta(x) - ln\theta$. Τότε η (5.18) γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dP} \upharpoonright \mathcal{F}_s &= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\beta(X_i)-\theta s}(\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}])^{-1} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\beta(X_i)}\frac{e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}[\gamma(X_i)+ln\theta]}\frac{e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)}(e^{ln\theta})^{N_s}\frac{e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{N_s}\gamma(X_i)}\frac{\theta^{N_s}e^{-\theta s}}{\mathbb{E}_P[\Theta^{N_s}e^{-\Theta s}]}.
\end{aligned}$$

Επίσης ισχύει $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] < \infty$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-ln\theta}] \\
&= \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}]e^{-ln\theta} \\
&= \frac{\theta}{\theta} = 1
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)-ln\theta}] \\
&= e^{-ln\theta}\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] \\
&= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty,
\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει απο την υπόθεση $\mathbb{E}_P[X_1^2 e^{\beta(X_1)}] < \infty$.

Με το ίδιο επιχείρημα όπως στην Πρόταση 5.2.7 μπορούμε ακριβώς να δείξουμε οτι τα Q_Θ και δ_θ πρέπει να συμπίπτουν και ως εκ τούτου η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο Q που ικανοποιεί $Q \upharpoonright \mathcal{F}_s \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Εφόσον το μέτρο Q είναι μοναδικά προσδιορισμένο στην $\cup_{s\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_s$ τότε είναι μοναδικά προσδιορισμένο και στη Σ.

Επίσης, έχουμε δείξει ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_Q[X_1](t-s)\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s]$$

και

$$\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}].$$

Όμως

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)-ln\theta}] \\ &= e^{-ln\theta}\mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)}] \\ &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)}] = \frac{p}{\theta},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει απο την υπόθεση ότι $p = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]$, και

$$\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s] = \theta \quad Q-\sigma.\beta.$$

καθώς η Θ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη ($\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_s \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$) και $Q_\Theta = \delta_\theta$.

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_Q[X_1](t-s)\mathbb{E}_Q[\Theta|\mathcal{F}_s] \\ &= \frac{p}{\theta}(t-s)\theta = p(t-s) \qquad Q-\sigma.\beta..\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] = p(t-s) \qquad Q-\sigma.\beta.. \tag{5.21}$$

Ισχύει η σχέση $\mathbb{E}_Q[S_t - pt|\mathcal{F}_s] = S_s - ps$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[S_t - pt - S_s + ps|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_Q[S_t - S_s - (pt-ps)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{F}_s] - (pt-ps) \\ &\overset{(5.21)}{=} p(t-s) - p(t-s) = 0 \qquad Q-\sigma.\beta..\end{aligned}$$

Επομένως η σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\mathcal{F}_t$-martingale υπο το μέτρο Q. Ως εκ τούτου, αποδείχθηκε και το αντίστροφο. □

Παρατηρήσεις. Απο την τελευταία πρόταση προκύπτει ότι:
(a) Η μεθοδολογία με martingales για τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων οδηγεί για την περίπτωση της σύνθετης μεικτής σ.δ. Poisson στην σύνθετη σ.δ. Poisson.
(b) Άν τα μεγέθη των αλμάτων $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ δεν είναι σταθερά υπο το μέτρο P, τότε ένα ισοδύναμο martingale μέτρο για τη σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δεν μπορεί να είναι μοναδικό. Εάν τα μεγέθη των αλμάτων είναι σταθερά υπο το μέτρο P, τότε συνεπάγεται ότι $P_{X_1} = Q_{X_1}$ και ως εκ τούτου, απο την σχέση $p = \mathbb{E}_P[X_1\theta]$ συνεπάγεται ότι το $\theta = p/\mathbb{E}_P[X_1]$ είναι μοναδικά ορισμένο.

Κεφάλαιο 6

Πληρότητα Αγορών

6.1 Πληρότητα και Μη Πληρότητα

Με τη λέξη πληρότητα εννούμε ότι η υποκείμενη σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τέτοια ώστε κάθε ενδεχόμενη απαίτηση να μπορει να αναπαραχθεί απο μία (αυτοχρηματοδοτούμενη) στρατηγική. Επομένως δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή η έννοια συνδέεται με τις αναπαραστάσεις Itô.

Ορισμός 6.1.1. *Κάθε πεντάδα* $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\ , P,\ \{X_t\}_{t\in[0,T]})$, *ώστε η τετράδα* $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\ , P)$ *να είναι ένας φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας και η* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *μια σ.δ. προσαρμοσμένη στην* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, *ονομάζεται* **αγορά** *ή υπόδειγμα αγοράς.*

Ορισμός 6.1.2. *Έστω* $Q \sim P$ *ώστε η σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *να είναι martingale ως προς* Q. *Τότε η* **αγορά** $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\ , Q,\ \{X_t\}_{t\in[0,T]})$ *ή η σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *είναι* **πλήρης** *εάν κάθε ενδεχόμενη απαίτηση* $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ *δέχεται μια αναπαράσταση Itô (4.1) ως προς τη σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$.

Βασικά γνωρίζουμε ότι η συνθήκη no-arbitrage είναι "ισοδύναμη" με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου. Εκτός από την απόδειξη της ύπαρξης στρατηγικών αναπαραγωγής (replicating strategies) σε διάφορα **no-arbitrage** μοντέλα, απο τη πληρότητα συνεπάγεται (ή είναι όντως ισοδύναμη) η μοναδικότητα των ισοδύναμων martingales μέτρων. Τα ακόλουθα μοντέλα είναι γνωστό ότι είναι πλήρη.

1. Η μονοδιάστη κίνηση Brown (Itô [15], 1951),
2. Η πολυδιάστατη κίνηση Brown και μερικοί ειδικοί τύποι διάχυσης (Jacod [16], 1979),

3. Η σ.δ. $\{N_t - \lambda t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπου η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson (Kunita and Watanabe [21], 1967),

4. Η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη σημειακή διαδικασία Martingales $\{N_t - \int_0^t \lambda_s ds\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Brémaud [5], 1981).

Το 3 είναι μια ειδική περίπτωση του 4. Το 4, που αναλύεται απο τον Brémaud [5], μας λέει ότι τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales της μορφής

$$\{N_t - \int_0^t \lambda_s ds\}$$

δέχονται πάντα μία αναπαράσταση για τετραγωνικά ολοκληρώσιμα δεξιά συνεχή martingales $\{M_t\}$, δηλ. υπάρχει μία προβλέψιμη διαδικασία $\{H_t\}_{t\in[0,T]}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\mathbb{E}[\int_0^T |H_s|\lambda_s ds] < \infty$$

και

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s(dN_s - \lambda_s ds) \quad \forall t \in [0,T].$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια κατάσταση όπυ οι σημειακές διαδικασίες είναι σύνθετες. Έστω $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ μια διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson, μή εκφυλισμένη (τα μεγέθη των αλμάτων δεν είναι σταθερά), ορισμένη σε έναν φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$. Όπως πάντα θεωρούμε ότι $\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_s : s \leq t\})$ για καθε $t \in [0,T]$ και $\Sigma = \mathcal{F}_T$. Επίσης έστω $p > 0$ η πυκνότητα ασφαλίστρου και Q ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας στον χώρο (Ω, Σ), τέτοια ώστε η σ.δ.

$$\{M_t\}_{t\in[0,T]} := \{S_t - pt\}_{t\in[0,T]}$$

να είναι ένα martingale υπό το μέτρο Q. Υπενθυμίζουμε ότι η αγορά

$$(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]} \ \ Q, \ \{M_t\}_{t\in[0,T]})$$

είναι πλήρης εάν κάθε $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ δέχεται μια αναπαράσταση Itô ως προς τη σ.δ. $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$, δηλ., υπάρχει μια προβλέψιμη διαδικασία $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ και $H_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s dM_s \quad Q - \sigma.\beta..$$

Ως μια συνθήκη ολοκληρωσιμότητας απαιτούμε να ισχύει $\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T (\xi_k)^2 d\langle M\rangle_s\right] < \infty$, όπου με $\langle M\rangle_t$ συμβολίζεται η σ.δ. της τετραγωνικής κύμανσης της $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$, δηλ. $\langle M\rangle_t := M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t M_s dM_s$. Επομένως έχουμε την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 6.1.3. *(Meister [22], Πρόταση 3.3) Η αγορά* $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]} \ , Q, \ \{M_t\}_{t\in[0,T]})$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ μία ενδεχόμενη απαίτηση. Επίσης έστω N_T ο (τυχαίος) αριθμός των αλμάτων της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ μέχρι τον χρόνο T, $(T_1, T_2, \dots, T_{N_T})$ οι (τυχαίοι) χρόνοι των αλμάτων και $(X_1, X_2, \dots, X_{N_T})$ τα μεγέθη των αλμάτων. Από το [22], Λήμμα 2.1, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}_T = \sigma(N_T, X_1, \dots, X_{N_T}, T_1, \dots, T_{N_T}).$$

Επομένως υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \longmapsto \mathbb{R}$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathfrak{B}_{\mathbb{N}}\otimes\mathfrak{B}_{\mathbb{N}}$ -μετρήσιμη τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{t}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{t}}, \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} & f(n, (t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots)(x_1, \dots x_n, x_{n+1}, \dots)) \\ = \ & f(n, (t_1, \dots, t_n, \widetilde{t}_{n+1}, \widetilde{t}_{n+2}, \dots)(x_1, \dots x_n, \widetilde{x}_{n+1}, \widetilde{x}_{n+2}, \dots)) \end{aligned}$$

και

$$H - H_0 = f(N_T, (T_1, \dots, T_{N_T}, \dots)(X_1, \dots, X_{N_T}, \dots)),$$

όπου $H_0 = \mathbb{E}_Q[H]$. Τώρα ψάχνουμε για στρατηγική αναπαραγωγής $\{\xi_s\}$, δηλ.

$$f(N_T, (T_1, \dots, T_{N_T}, \dots)(X_1, \dots, X_{N_T}, \dots)) = \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - p \int_0^T \xi_s ds.$$

Ας επιλέξουμε την ακόλουθη στρατηγική: έως το χρόνο $(T_1 \wedge T)$ η $\{\xi_s\}$ ορίζεται απο τη συνάρτηση

$$\xi_s = -\frac{f(0, (\dots), (\dots))}{Tp} \qquad s \le T_1 \wedge T.$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν αναμένουμε να συμβεί κάποιο γεγονός έως το χρόνο T. Εάν $T_1 < T$ (σημειώνουμε ότι $Q[T_1 = T] = 0$), τότε επιλέγουμε

$$\xi_s = \frac{\xi_{T_1} X_1 - f(1, (T_1, \dots), (X_1, \dots)) - p \int_0^{T_1} \xi_s ds}{p(T - T_1)} \qquad T_1 < s \le T_2 \wedge T.$$

Εάν ακολουθήσουμε τη βασική ιδέα αυτής της στρατηγικής καταλήγουμε ότι $(T_0 = 0)$

$$\{\xi_t\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \chi_{\{T_k \wedge T < t \le T_{k+1} \wedge T\}} \right\}$$

με

$$\eta_k = \frac{\sum_{l=1}^{k} \xi_{T_l} X_l - f(k, (T_1, \ldots, T_k, \ldots)(X_1, \ldots, X_k, \ldots)) - p \sum_{l=1}^{k} \eta_{l-1}(T_l - T_{l-1})}{p(T - T_k)}.$$

Αυτή η στρατηγική σίγουρα αναπαράγει την $H - H_0$ αφού

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi_s dM_s &= \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - p \sum_{k=1}^{N_T} \eta_{k-1}(T_k - T_{k-1}) - p(T - T_{N_T})\eta_{N_T} \\
&= f(N_T, (T_1, \ldots, T_{N_T})(X_1, \ldots, X_{N_T})) \\
&= H - H_0
\end{aligned}$$

και καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T (\xi_s)^2 d\langle M\rangle_s\right] &= \mathbb{E}_Q\left[\left(\int_0^T \xi_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}_Q[(H - H_0)^2] \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2 - 2HH_0 + H_0^2] \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2] - 2\mathbb{E}_Q[HH_0] + \mathbb{E}_Q[H_0^2] \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2] - 2\mathbb{E}_Q[H\mathbb{E}_Q[H]] + \mathbb{E}_Q[H_0^2] \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2] - 2\mathbb{E}_Q[H]^2 + H_0^2 \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2] - 2H_0^2 + H_0^2 \\
&= \mathbb{E}_Q[H^2] - H_0^2 < \infty
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 18.13 του [23]. □

Σημαντικό σημείο σε αυτήν την απόδειξη είναι το γεγονός ότι το μοντέλο δεν επιτρέπει στον επενδυτή να λαμβάνει τυχαία κέρδη απο τα ασφάλιστρα. Στην πιο γενική και πραγματική περίπτωση, όπου αυτά τα κέρδη είναι αβέβαια και δεν εξαρτώνται μόνο απο τη σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$, ή όταν τα ασφάλιστρα δεν έχουν καταβληθεί, αλλά οι απαιτήσεις μπορούν να πάρουν και θετικές και αρνητικές τιμές και έχουν μέση τιμή μηδέν υπό το μέτρο Q, τότε το μοντέλο παύει να είναι πλήρες. Η πρώτη περίπτωση είναι αρκετά προφανής, άρα ας εξετάσουμε την δεύτερη.

Παράδειγμα 6.1.4. *Έστω η αγορά $((\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\ Q),\ \{S_t\}_{t\in[0,T]})$ όπου η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson και μη εκφυλισμένη με αναμενόμενο* *μέγεθος άλματος 0 (και ως εκ τούτου martingale) υπό το μέτρο Q (όπως πάντα η $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι η φυσική διύλιση της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$). Τότε η αγορά $((\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\ \ Q),\ \{S_t\}_{t\in[0,T]})$ δεν είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ότι N_T δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων που συνέβησαν μέχρι το χρόνο T. Τότε, η N_T δε δέχεται μια αναπαράσταση Itô ως προς τη σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$. Πράγματι, υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι η N_T δέχεται μία αναπαράσταση Itô ως προς τη σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$. Τότε υπάρχει μια προβλέψιμη σ.δ. $\{\xi_t\}_{t\in[0,T]}$ ώστε να ισχύει

$$N_T := c + \int_0^T \xi_s dS_s,$$

και $N_T \in \mathcal{H}$ όπου,

$$\mathcal{H} := \left\{\eta_0 + \int_0^T \eta_s dS_s : \eta_0 \in \mathbb{R}, \{\eta_s\}\{\mathcal{F}_s\} - \text{προβλέψιμη και } \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T (\eta_s)^2 d\langle S\rangle_s\right] < \infty\right\}.$$

Έστω πάλι $(T_1, \ldots, T_{N_T})$ οι (τυχαίοι) χρόνοι των αλμάτων της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$, $(X_1, X_2, \ldots, X_{N_T})$ τα μεγέθη των αλμάτων και θ η ένταση των αλμάτων. Τότε

$$N_T = c + \int_0^T \xi_s dS_s = c + \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k$$

διότι

$$\begin{aligned}\int_0^T \xi_s dS_s &:= \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1} X_k = \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k\end{aligned}$$

όπου $\xi_{k-1}(\omega) = \xi_{T_k}(\omega) \qquad \forall k \in \{1, \ldots, N_T\}$. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_Q[(c + \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - N_T)^2] \\ &= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q[(c + \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - N_T)^2 | N_T]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_Q[(c + \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - N_T)^2 | N_T] Q[N_T = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_Q[(c + \sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k} X_k - N_T)^2 | N_T] \frac{(\theta T)^n}{n!} e^{-\theta T} \\ &\geq e^{-\theta T}\mathbb{E}_Q[(c-0)^2] + (\theta T e^{-\theta T})\mathbb{E}_Q[(c + \xi_{T_1} X_1 - 1)^2].\end{aligned}$$

Επομένως, απο $c = 0$ και $\mathbb{E}_Q[(\xi_{T_1} X_1 - 1)^2] = 0$ συνεπάγεται ότι $\xi_{T_1} = 1/X_1$ Q-σχεδον βεβαίως. Όμως από την υπόθεσή μας η διαδικασία $\{\xi_s\}$ θεωρείται προβέψιμη και συνεπώς οδηγούμαστε σε άτοπο. $\square$

6.2 Μοναδικότητα των Ισοδύναμων Martingale Μέτρων

Όπως έχουμε προαναφέρει, η ύπαρξη ενός μη μοναδικού ισοδύναμου martingale μέτρου δεν είναι επαρκής για να λύσει το πρόβλημα της αποτίμησης μιας ενδεχόμενης απαίτησης. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η μοναδικότητα ενός ισοδύναμου martingale μέτρου είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κατάσταση της πληρότητας όπως θα δούμε στο παρακάτω αποτέλεσμα των Jacod και Yor [18].

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω ένα μέτρο πιθανότητας Q τέτοιο ώστε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$, που είναι ορισμένη σε έναν φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, Q)$ με $\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_s : s \leq t\})$ και $\Sigma = \mathcal{F}_T$, να είναι ένα martingale υπο το μέτρο αυτό. Υποθέτουμε ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι cadlag. Τότε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι πλήρης εάν και μόνον αν το μέτρο Q είναι extremal στο σύνολο $\mathcal{Q}$ των ισοδύναμων martingale μέτρων για την σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ με την ακόλουθη έννοια. Το Q δεν μπορεί να γραφτεί με την εξής μορφή*

$$Q = tQ_1 + (1-t)Q_2 \ \text{με} \ 0 < t < 1 \ \text{και} \ Q_1 \neq Q_2 \quad Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}.$$

Απόδειξη. Βλέπε [18], σελίδα 97, Πρόταση 2.4 .

Ορισμός 6.2.2. *(a)* **Χρόνος διακοπής** *ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια συνάρτηση $\tau : \Omega \longmapsto [0,T]$ ώστε $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για όλα τα $t \in [0,T]$.*

(b) Αν $\tau : \Omega \longmapsto [0,T]$ είναι ένας χρόνος διακοπής ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, η οικογένεια

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_T : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in [0,T]\}$$

ονομάζεται **σ-άλγεβρα διακοπής.**

Σε τρείς ειδικές περιπτώσεις η συνθήκη της extremity μπορει να αναχθεί στη συνθήκη της μοναδικότητας. Η πρώτη περιπτωση είναι αυτη ενός πεπερασμένου χώρου πιθανότητας και στη δεύτερη υποθέτουμε ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι συνεχής

(βλ. [16]). Στη τρίτη περίπτωση η διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ θεωρείται οτι είναι **αυστηρώς αριστερά συνεχής**, δηλ. αν $\tau : \Omega \longmapsto [0,T]$ είναι ένας $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-χρόνος διακοπής, τότε η σ-άλγεβρα διακοπής $\mathcal{F}_\tau$
και το αυστηρο παρελθόν

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \{A \cap \{t < \tau\} : A \in \mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$$

συμπίπτουν (βλ. [24]). Αυτό παράγει την ισοδυναμία της μοναδικότητας ενός ισοδύναμου martingale μέτρου και της πληρότητας σε αυτές τις τρείς ειδικές περιπτώσεις. Όμως γενικα στα πλαίσια μιας ασφαλιστικής αγοράς οποιαδήποτε απο αυτές τις ειδικές περιπτώσεις δεν εφαρμόζεται. Οι κλασικές στοχαστικές διαδικασίες κινδύνου ούτε είναι συνεχείς ούτε ορίζονται σε πεπερασμένο χώρο πιθανότητας. Επίσης οι διαδικασίες κινδύνου που επιτρέπουν άλματα μεταβαλλόμενων μεγεθών δεν πληρούν τη συνθήκη της αυστηρής αριστερής συνέχειας, όπως δείχνει το παρακάτω

Παράδειγμα 6.2.3. Έστω $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ μια διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson ορισμένη πάνω σε ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ με $\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_s : s \leq t\})$ και έστω πάλι $(X_1, X_2, \dots)$ τα ποσά των αλμάτων. Θεωρούμε οτι τα άλματα παίρνουν τιμές σε τουλάχιστον δύο μεταξύ τους ξένα σύνολα $A, B \in \mathfrak{B}$ με θετική πιθανότητα. Επίσης έστω $\tau : \Omega \longmapsto [0,T]$ όπου

$$\tau := min(T, inf\{t \geq 0 : S_t > 0\})$$

και το σύνολο $C \in \mathcal{F}_T$ όπου

$$C := \{X_1 \in A\} \cap \{S_T > 0\}.$$

Τότε, έχουμε ότι για κάθε $t < T$

$$C \cap \{\tau \leq t\} = \{X_1 \in A\} \cap \{\tau \leq t\}. \tag{6.1}$$

Πράγματι, για κάθε $t < T$ ισχύει

$$\begin{aligned} C \cap \{\tau \leq t\} &= \{X_1 \in A\} \cap \{S_T > 0\} \cap \{\tau \leq t\} && (6.2) \\ &= \{X_1 \in A\} \cap \{\tau \leq t\} && (6.3) \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται ως εξής. Έστω $\omega \in \{\tau \leq t\}$. Τότε $\tau(\omega) \leq t$, ή ισοδύναμα $min(T, inf\{\widetilde{t} \geq 0 : S_{\widetilde{t}}(\omega) > 0\}) \leq t$, ή ισοδύναμα $D := \{\widetilde{t} \in [0,T] :$

$S_{\widetilde{t}}(\omega) > 0\} \neq \emptyset$. Ισχύει ότι $D \neq \emptyset$, διότι αν $D = \emptyset$ τότε $inf\emptyset = \infty \leq t$ και ως εκ τούτου άτοπο. Επομένως υπάρχει $\widetilde{t} \in [0, T]$ τέτοιο ώστε $S_{\widetilde{t}}(\omega) > 0$. Επειδή $S_T(\omega) \geq S_{\widetilde{t}}(\omega)$, συνεπάγεται ότι $S_T(\omega) > 0$ και ως εκ τούτου $\omega \in \{S_T > 0\}$. Άρα αποδείξαμε ότι $\{\tau \leq t\} \subseteq \{S_T > 0\}$ ή ισοδύναμα $\{S_T > 0\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\}$. Επομένως ισχύει η (6.3).

Επίσης για κάθε $t < T$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C \cap \{\tau \leq t\} &= \{X_1 \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \\ &= \{S_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

Προφανώς $C \cap \{\tau \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Ως εκ τούτου, η χ_C είναι $\mathcal{F}_\tau$-μετρήσιμη. Όμως η χ_C δεν είναι $\mathcal{F}_{\tau-}$-μετρήσιμη διότι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\tau-} &= \sigma(\{A \cap \{\tau > t\} : A \in \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}) \\ &= \sigma(\{A \cap \{\tau > t\} : A \in \sigma(\{N_t, X_1, \ldots, X_{N_t}, T_1, \ldots, T_{N_t}\}), t \in [0, T]\}) \\ &= \sigma\{\{N_t = n\} \cap B \cap \{\tau > t\} : n \in \mathbb{N}, B \in \sigma(X_1, \ldots, X_n, T_1, \ldots, T_n), t \in [0, T]\} \\ &= \sigma\{\{N_t = 0\} \cap \{\tau > t\} : t \in [0, T]\} = \sigma(\tau). \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.1 του [22]. Η κατάσταση αλλάζει αν πάρουμε υπόψιν μας σημειακές διαδικασίες martingales οι οποίες θεωρούνται οτι έχουν αυστηρώς αριστερά συνεχείς διυλίσεις. Προφανώς περεταίρω έρευνα πρέπει να γίνει πάνω σε αυτό το αντικείμενο.

Προτού ξεκινήσουμε με το πρόβλημα της αποτίμησης για ασφαλιστικά ΣΜΕ καταστροφικών γεγονότων, παραθέτουμε μερικές επισημάνσεις σχετικά με την μη πληρότητα και την ασφαλιστική αποτίμηση.

1. Δέν υπάρχει "σωστή" τιμή της ασφάλισης. Υπάρχει απλά *η αγοραία τιμή συναλλαγής (transacted market price)* η οποία είναι αρκετά υψηλή για να προσελκύσει πωλητές, και χαμηλή αρκετά για να προκαλέσει αγοραστές.

2. Σε μη πλήρεις αγορές, η ακριβής αναπαραγωγή είναι αδύνατη και κρατώντας ένα δικαίωμα είναι πραγματικά μια επικίνδυνη επιχείρηση, εννοώντας ότι *δεν είναι πιθανή καμία προτίμηση κάποιου ανεξάρτητου τύπου αποτίμησης*. Εάν, ωστόσο, η αποτίμηση δικαιωμάτων εισαχθεί στο πλαίσιο της

μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας, δηλ. καθορίζεται η στάση ως προσ τον κίνδυνο ενός δυνητικού αγοραστή ενός δικαιώματος, τότε ένα μοναδικό μέτρο αναδύεται με ένα πολύ φυσκό τρόπο.

3. Οι θεωρίες που βασίζονται στο arbitrage, είναι θεωρίες που αφορούν τις σχετικές τιμές (relative prices) και δεν προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί οι τιμές μιας συγκεκριμένης μετοχής έφτασαν το παρατηρούμενο επίπεδο. Μόνο η αλληλεξάρτηση μεταξύ των τιμών εξηγείται.

Κεφάλαιο 7

Συνέχεια της μελέτης των ΣΜΕ καταστροφικών γεγονότων

7.1 Ο Μετασχηματισμός Esscher

Ο μετασχηματισμός Esscher είναι ένα πολύτιμο εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη. Οι Gerber και Shiu στο [11] δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός Esscher είναι επίσης μια αποτελεσματική τεχνική για να εκτιμούμε χρηματοοικονομικά παράγωγα (derivative securities) εάν οι λογάριθμοι των τιμών των primitive securities (stock, bond) εκφράζονται απο ορισμένες στοχαστικές διαδικασίες με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αυτή η οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών περιλαμβάνει τη σ.δ. Wiener, τη σ.δ. Poisson, τη σ.δ. Gamma και τη ν αντίστροφη σ.δ. Gauss. Ένας μετασχηματισμός Esscher μιας τέτοιας σ.δ. τιμών μετοχής ῎επάγει ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας επάνω στη στοχαστική διαδικασία. Η παράμετρος Esscher ή η παράμετρος διάνυσμα είναι καθορισμένη ώστε η προεξοφλημένη τιμή κάθε primitive securiry να είναι ένα martingale υπο το νέο μέτρο πιθανότητας. Η τιμή οποιουδήποτε παραγώγου υπολογίζεται απλά ως η μέση τιμή των προεξοφλημένων πληρωμών, ως προς το νέο ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας. Άμεσες συνέπειες της μεθόδου του μετασχηματισμού Esscher περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, τον τύπο αποτίμησης Black-Scholes για δικαιώματα προαίρεσης, τον διωνυμικό τύπο δικαιωμάτων προαίρεσης και τύπους αποτίμησεις δικαιωμάτων προαίρεσης για το μέγιστο και ελάχιστο διάφορων περιουσιακών στοιχείων.

Έστω μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και έστω h ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε το ολοκλήρωμα

$$M(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x) dx$$

να υπάρχει. Ώς συνάρτηση του x, η

$$\widehat{f}(x, h) = \frac{e^{hx} f(x)}{M(h)}$$

είναι μια σ.π.π., και ονομάζεται ο **μετασχηματισμός Esscher** (με παράμετρο h) της αρχικής κατανομής. Ο μετασχηματισμός Esscher αναπτύχθηκε για να προσεγγίσει την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων γύρω απο ένα σημείο x_0, εφαρμόζοντας μια ανλυτική προσέγγιση (τις σειρές Edgeworth) στην μετασχηματισμένη κατανομή με την παράμετρο h επιλεγμένη με τέτοιο τρόπο ώστε η νέα μέση τιμή να είναι ίση με x_0.

Ο μετασχηματισμός Esscher μπορεί να επεκταθεί σε μια ορισμένη οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών οι οποίες περιλαμβάνουν μερικές απο αυτές που χρησιμοποιούνται ως μοντέλα των κινήσεων των τιμών μιας μετοχής. Η παράμετρος h καθορίζεται έτσι ώστε το τροποποιημένο μέτρο πιθανότητας να είναι ένα martingale ισοδύναμο μέτρο, ως προς το οποίο οι τιμές των securities είναι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές.

7.2 Ο Κινδυνοουδέτερος Μετασχηματισμός Esscher

Για $t \geq 0$, η S_t δηλώνει την τιμή μιας μη μερισματικής μετοχής ή μιας security τη χρονική στιγμή t. Έστω ότι υπάρχει μια σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}+}$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, $X(0) = 0$, έτσι ώστε

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \qquad t \geq 0. \tag{7.1}$$

Για οποιοδήποτε t, η τυχαία μεταβλητή X_t, η οποία μπορεί να ερμηνευτεί ως το συνεχές προεξοφλημένο ποσοστό απόδοσης μετά απο t περιόδους, έχει μια άπειρα διαιρετή κατανομή. Έστω

$$F(x, t) := P(\{X_t \leq x\})$$

η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, και

$$M(z, t) = \mathbb{E}[e^{zX_t}]$$

η ροπογεννήτρια συνάρτηση. Υποθέτοντας ότι η $M(z,t)$ είναι συνεχής στο σημείο $t=0$, αποδεικνύεται ότι

$$M(z,t) = [M(z,1)]^t \tag{7.2}$$

(βλ. π.χ. [19] ,section 14.4). Έστω ότι η (7.2) ισχύει. Για απλοποίηση, αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. X_t έχει σ.π.π.

$$f(x,t) = \frac{d}{dx}F(x,t), \quad t>0,$$

τότε

$$M(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x,t)dx.$$

Έστω h ένας πραγματικός αριθμός για τον οποίον η $M(h,t)$ υπάρχει. (Άπο την (7.2) έπεται ότι εάν η $M(h,t)$ υπάρχει για ένα θετικό αριθμό t, τότε υπάρχει και για όλους τους θετικούς αριθμούς t.) Εισάγουμε τώρα τον μετασχηματισμό Esscher (με παράμετρο h) της σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}+}$. Ο μετασχηματισμός Esscher είναι πάλι μια σ.δ. με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, όπου η νέα σ.π.π. της τ.μ. X_t, $t>0$, είναι

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x,t;h) &= \frac{e^{hx}f(x,t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy}f(y,t)dy} \\ &= \frac{e^{hx}f(x,t)}{M(h,t)}.\end{aligned}$$

Αυτή η τροποποιημένη κατανομή της X_t είναι ο **μετασχηματισμός Esscher** της αρχικής κατανομής. Η αντίστοιχη ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι η

$$M(z,t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\widehat{f}(x,t;h)dx = \frac{M(z+h,t)}{M(h,t)}.$$

Απο την (7.2) έπεται ότι

$$M(z,t;h) = [M(z,1;h)]^t \tag{7.3}$$

Ο μετασχηματισμός Esscher μιας τ.μ. είναι μια καθιερωμένη ιδέα στη βιβλιογραφία της θεωρίας κινδύνου. Εδώ, θεωρούμε τον μετασχηματισμό Esscher μιας σ.δ.. Με άλλα λόγια, το μέτρο πιθανότητας της σ.δ. έχει τροποποιηθεί. Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι θετική, το τροποποιημένο μέτρο πιθανότητας είναι ισοδύναμο με το αρχικό.
Θέλουμε να εξασφλίσουμε ότι οι τιμές των μετοχών του μοντέλου είναι εσωτερικά συμβατές (internally consistent). Ως εκ τούτου, ψάχνουμε ένα $h=h^*$, έτσι ώστε

η σ.δ. $\{e^{-\delta t}S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ των προεξοφλημένων τιμών των μετοχών, είναι ένα martingale ως προς το μέτρο πιθανότητας που αντιστοιχεί στο h^*. Ιδιαιτέρως,

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}^*[e^{-\delta t}S_t] \\ &= e^{-\delta t}\mathbb{E}^*[S_t], \end{aligned}$$

όπου το δ δηλώνει τη σταθερή ουδέτερη κινδύνου ένταση επιτοκίου. Απο τη σχέση (7.1) η παράμετρος h^* είναι η λύση της εξίσωσης

$$e^{-\delta t}\mathbb{E}^*[e^{X_t}] = 1$$

ή

$$e^{\delta t} = M(1, t; h^*).$$

Απο την (7.3) βλέπουμε ότι η λύση δεν εξαρτάται απο το t. Οπότε θέτουμε $t = 1$ και έχουμε

$$e^{\delta} = M(1, 1; h^*)$$

ή

$$\delta = ln[M(1, 1; h^*)].$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η παράμετρος h^* είναι μοναδική (βλ. [12]). Ο μετασχηματισμός Esscher της παραμέτρου h^* ονομάζεται ο **ουδέτερος κινδύνου μετασχηματισμός Esscher**, και το αντίστοιχο martingale ισοδύναμο μέτρο ονομάζεται το **ουδέτερο κινδύνου μέτρο Esscher**. Σημειώστε ότι, παρόλο που το ουδέτερο κινδύνου μέτρο Esscher είναι μοναδικό, μπορουν να υπάρχουν και άλλα martingale ισοδύναμα μέτρα.(βλ. Delbaen και Haezendonck για martingale ισοδύναμα μέτρα της σύνθετης σ.δ. Poisson.)

7.3 Ασφαλιστικές Αγορές ΣΜΕ Χωρίς Arbitrage

Μια εφαρμογή της θεωρίας του non-arbtrage οφείλεται στον Sondermann [27]. Τα ασφαλιστικά ΣΜΕ απο τη σκοπιά ενός πρωτασφαλιστή, θα μπορούσαν να θεωρηθούν και ως αντασφαλιστικα εργαλεία, όμως το πλαίσιο δεν είναι ακριβώς το ίδιο. Ωστόσο, η εργασία του Sondermann μας ωθεί να έχουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα, όσον αφορά τα ασφαλιστικά ΣΜΕ. Επομένως, οι ερωτήσεις κλειδιά σχετικά με τις ασφαλιστικές αγορές ΣΜΕ καταστροφικών γεγονότων είναι οι εξής:

- Υπάρχουν στρατηγικές τέτοιες ώστε, λαμβάνοντας θέσεις αγοράς (long position) και θέσεις πώλησης (short position) σε ασφαλιστικά ΣΜΕ, να αποφέρουν σίγουρο κέρδος?

- Ποιές είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να αποκλειστούν οι ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος?

Υπενθυμίζουμε ότι η σ.δ. $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ συμβολίζει τις συνολικές ζημιές που περιλαμβάνονται ώς δείκτης ζημιάς στα ασφαλιστικά ΣΜΕ. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι η σ.δ. $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ θεωρείται οτι είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson, ή μια μεικτή σύνθετη σ.δ. Poisson, ή μια διπλά στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P). Έστω $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ η σ.δ. των τιμών του ασφαλιστικού ΣΜΕ. Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε μια θέση πώλησης σε χρόνο t σημαίνει ότι δεσμευόμαστε να πληρώσουμε το τυχαίο ποσό $F_T - F_t$ στο χρόνο T. Ο κάτοχος μιας θέσης αγοράς θα λάβει το ποσό $F_T - F_t$ στο χρόνο T. Δεν υπάρχουν χρηματορροές πρίν το χρόνο T. Αυτή είναι μια θεωρητική υπόθεση, καθώς το σύστημα εκκαθάρισης του CBoT απαιτεί ορισμένες πληρωμές απο τους επενδυτές πρίν το χρόνο T. Επιπλέον, το αφαλιστικό ΣΜΕ έχει αρχική αξία μηδεν και ο διακανονισμός συμβαίνει στο χρόνο T. Θεωρούμε οτι η αγορά είναι ρευστή και τα ασφαλιστικά ΣΜΕ είναι διαιρετά με την έννοια ότι κάθε επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει οποιοδήποτε ποσοστό ενός ασφαλιστικού ΣΜΕ σε οποαδήποτε χρονική στιγμή. Επίσης θεωρούμε οτι τα επιτόκια είναι ντετερμινιστικά και ως εκ τούτου τα θεωρούμε μηδέν (επειδή δεν υπάρχουν χρηματορροές μεταξύ του χρονικού διαστήματος 0 έως T, και συνεπώς όλες οι χρηματορροές προεξοφλούνται στην αξία τους στο χρόνο 0). Θυμίζουμε επίσης ότι $F_T = 25000min\left(\frac{L_T}{\Pi}, 2\right)$ και ως εκ τούτου η σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι φραγμένη. Οι σ.δ. $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ και $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι προσαρμοσμένες στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, που συμβολίζει τα αυξανόμενα σύνολα πληροφορίας τα οποία είναι διαθέσιμα στο χρόνο t. Τώρα πρέπει να δώσουμε εναν καινούριο ορισμό για την έννοια της στρατηγικής: μία στρατηγική χρησιμοποιείται απο έναν επενδυτή που συμφωνεί σε διάφορες αβέβαιες χρονικές στιγμές να είναι κάτοχος σε διάφορες θέσεις αγοράς ή πώλησης σε ένα ασφαλιστικό ΣΜΕ, όπου ο αριθμός των θέσεων αγοράς ή πώλησης εξαρτάται μόνο απο την πληροφορία, η οποία είναι διαθέσιμη σε αυτές τις αβέβαιες χρονικές στιγμές. Για να είμαστε πιο ακριβείς, παραθέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.3.1. *Το σύνολο* $\xi := \{n, \tau_1, \ldots, \tau_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, *όπου* $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_i : \Omega \longmapsto [0,T], i = 1, \ldots, n \text{ είναι } \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]} - \text{χρόνοι διακοπής, και}$$

$\xi_i : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *είναι* $\mathcal{F}_{\tau_i}$ *– μετρήσιμες και τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τ.μ.* *καλείται μία* **στρατηγική**. *Το τελικό όφελος της συναλλαγής* $G_T(\xi)$ *μιας στρατηγικής* ξ *δίνεται από τον παρακάτω τύπο.*

$$G_T(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k (F_T - F_{\tau_k}) \quad (\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P).$$

Παρατήρηση. Ίσως σε μερικούς αναγνώστες να μην φαίνεται τόσο προφανώς ότι δεν επιτρέπουμε συνεχείς στρατηγικές. Σημειώστε ότι συνήθως μια συνεχής στρατηγική περιγράφει το ποσό που κρατείται σε ένα επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Η διακύμανση της τιμής επομένως, καθορίζει το τελικό κέρδος συναλλαγής. Το πλαίσιο του ασφαλιστικού ΣΜΕ είναι διαφορετικό, δηλ., δεν κρατάμε ένα συγκεκριμένο ποσό ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, αλλά συμφωνούμε σε ένα ασφαλιστικό ΣΜΕ (σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή), το οποίο έχει καθοριστεί τη χρονική στιγμή T. Ωστόσο ο ορισμός 7.1.1. μας επιτρέπει αρκετά ρεαλιστικές στρατηγικές.

Ορισμός 7.3.2. *Μια στρατηγική* ξ *που επιτρέπει σίγουρο κέρδος καλείται μια* **arbitrage στρατηγική**, *δηλ., μια στρατηγική* ξ *που ικανοποιεί τις συνθήκες*

(i) $G_T(\xi) \geq 0 \quad P - \sigma.\beta.,$

(ii) $\mathbb{E}_P[G_T(\xi)] > 0.$

Υπό την φυσική υπόθεση ότι η σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι δεξιά συνεχής, η ακόλουθη πρόταση καθορίζει μια ικανή συνθήκη για την απουσιά arbitrage στρατηγικών και είναι ακριβώς η ίδια συνθήκη η οποία απαιτείται στο πλαίσιο των χρηματοοικονομικών αγορών.

Πρόταση 7.3.3. *(Meister [22], Πρόταση 3.6) Η αγορά* $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P, \{F_t\}_{t\in[0,T]})$ *των ασφαλιστικών ΣΜΕ δεν επιτρέπει arbitrage στρατηγικές, εάν υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο* Q *τέτοιο ώστε η σ.δ.* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ *να είναι martingale ως προς* Q.

Απόδειξη. Έστω η αγορά $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P, \{F_t\}_{t\in[0,T]})$ και έστω Q ένα ισοδύναμο martingale μέτρο στον (Ω, Σ) και μια στρατηγική ξ τέτοια ώστε

$$P[G_T(\xi) \geq 0] = 1.$$

Απο την ισοδυναμία των μέτρων έχουμε ότι

$$Q[G_T(\xi) \geq 0] = 1.$$

Χρησιμοποιώντας την martingale ιδιότητα της σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ και δεσμεύοντας ως προς τις σ-άλγεβρες διακοπής έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[G_T(\xi)] &:= \mathbb{E}_Q[\sum_{k=1}^{n} \xi_k (F_T - F_{\tau_k})] \\
&= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q[\sum_{k=1}^{n} \xi_k (F_T - F_{\tau_k}) | \mathcal{F}_{\tau_k}]] \\
&= \mathbb{E}_Q[\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbb{E}_Q[(F_T - F_{\tau_k}) | \mathcal{F}_{\tau_k}]] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_Q[\xi_k \mathbb{E}_Q[(F_T - F_{\tau_k}) | \mathcal{F}_{\tau_k}]] = 0,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το [25], σελ. 66, και η τελευταία ισότητα προκύπτει από

$$\mathbb{E}_Q[F_T | \mathcal{F}_{\tau_k}] = F_{\tau_k} \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Επομένως εφόσον $\mathbb{E}_Q[G_T(\xi)] = 0$ συνεπάγεται ότι και $\mathbb{E}_P[G_T(\xi)] = 0$. □

Παράδειγμα 7.3.4. Μία πολύ κοινή αρχή υπολογισμού ασφαλίστρων στα αναλογιστικά, είναι η αρχή Esscher. Εφαρμόζοντας την αρχή του Esscher στην αποτίμηση των ασφαλιστικών ΣΜΕ οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$F_t = \mathbb{E}_Q[F_T | \mathcal{F}_t] \quad 0 \leq t \leq T,$$

για κάποιο $\alpha > 0$ όπου

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{e^{\alpha F_T}}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha F_T}]}.$$

Προφανώς, τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα και η σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι ένα martingale ως προς το μέτρο Q. Εάν η $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια διπλά στοχαστική διαδικασία, τότε η σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι σίγουρα δεξιά συνεχής. Ως εκ τούτου, το μοντέλο αποκλείει την ευκαιρία για arbitrage στρατηγικές.

Ας δώσουμε επίσης ένα αποτέλεσμα αντίστροφο απο την Προταση 7.1.2., το οποίο μας δηλώνει ότι η απουσία ευκαιριών arbitrage στην αγορά των ασφαλιστικών ΣΜΕ εγγυάται ην ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου.

Θεώρημα 7.3.5. *(Meister [22], Θεώρημα 3.7)*
Έστω ότι η αγορά $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P, \{F_t\}_{t\in[0,T]})$ των ασφαλιστικών ΣΜΕ δεν επιτρέπει arbitrage στρατηγικές. Τότε υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο Q τέτοιο ώστε η σ.δ. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ να είναι martingale ως προς Q.

Απόδειξη. βλ. Meister [22] σελ.44-46.

Παρατήση 7.3.6. *Σύμφωνα με την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος το martingale ισοδύναμο μέτρο Q δεν είναι μοναδικό. Έτσι προκύπτει το ερώτημα της εύρεσης ενός "βέλτιστου" μέτρου από την οικογένεια όλων των martingale ισοδύναμων μέτρων Q που προκύπτουν απο το παραπάνω θεώρημα. Ένα τέτοιο μέτρο θα οδηγούσε σε μία "βέλτιστη" αποτίμηση.*

Κεφάλαιο 8

Αποτιμήσεις και Αναπαραγώγες (Replications) στις ασφαλιστικές αγορές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης

8.1 Εισαγωγή

Όπως δείχθηκε στα κεφάλαια 6 και 7, μια ασφαλιστική αγορά, γενικά, δεν είναι πλήρης, αλλά, ακόμα και πλήρεις ασφαλιστικές αγορές, γενικά, επιτρέπουν πολλά martingale ισοδύναμα μέτρα. Ως εκ τούτου, υπάρχουν διάφορες δυνατότητες να αποτιμήσουμε ενδεχόμενες απαιτήσεις αποκλείοντας ευκαιρίες για arbitrage. Σε αυτό το πλαίσιο η κοινή προσέγγιση για αποτιμήσεις, είναι το μοντέλο εξαρτώμενων προτιμήσεων. Οι προτιμήσεις (preferences) συνήθως περιγράφονται απο τις συναρτήσεις ωφελιμότητας των von Neumann–Morgenstern. Στο κεφάλαιο αυτό θα διακρίνουμε μεταξύ τιμών υπολογισμένων απο επενδυτές ατομικά και τιμών ισορροπίας μιας ολόκληρης αγοράς.

Ο στόχος ενός επενδυτή είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Επομένως, ο επενδυτής συμφωνεί σε μια θέση σε ένα ασφαλιστικό ΣΜΕ μόνο εάν είναι μια ελκυστική επένδυση σε σχέση με άλλες πιθανές επενδύσεις. Ως εκ τούτου, η τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ θε έπρεπε να εξαρτάται μόνο απο τις προτιμήσεις του επενδυτή και τις επενδυτικές ευκαιρίες. Αυτή η περίπτωση αναλύεται στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αναφέρεται η γενική θεωρία ισορροπίας ως μέθοδος για να αποτιμήσουμε τα ασφαλιστικα ΣΜΕ. Η ισορροπία της αγοράς είναι η κατάσταση όπου όλοι οι επενδυτές μπορούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφελιμότητά τους (ανταλλάσοντας κινδύνους) την ίδια χρονική στιγμή. Οι τιμές ισορροπίας προκύπτουν αλλάζοντας το μέτρο και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες μέσες τιμές υπό το νέο μέτρο. Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ θα έπρεπε να εξαρτάται μόνο από τις ωφελιμότητες όλων των επενδυτών και τις επενδυτικές ευκαιρίες.

Σε μερικές καταστάσεις ένας επενδυτής θέλει να αναπαράξει μια ενδεχόμενη απαίτηση μέσω μιας εμπλοκής στην αντίστοιχη αγορά. Σε μια μη πλήρη αγορά υπάρχουν απαιτήσεις οι οποίες δεν μπορούν να αναπαραχθούν, με την έννοια ότι δεν δέχονται μια αναπαράσταση Itô. Επομένως, παραμένει κάποια αβεβαιότητα σχετικά με το κόστος αναπαραγωγής. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αυτού, δείχνεται πως μπορεί να αποφεχθεί η "περιττή" αβεβαιότητα του κόστους αναπαραγωγής.

8.2 Αποτίμηση ασφαλιστικών ΣΜΕ στο πλαίσιο της μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας

Μια μελέτη σχετικά με το θέμα της αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης στα πλάισια της μεγιστοποιήσης της ωφελιμότητας οφείλεται στους Davis και Robeau [9]. Αν και κανείς δε μπορεί να εφαρμόσει τα αποτελέσματα στα πλάισια μιας ασφαλιστικής αγοράς με ένα απλό τρόπο, μας κινητοποιεί σίγουρα να εφαρμόσουμε την ιδέα και να αναπτύξουμε παρόμοια αποτελέσματα στην αποτίμηση ασφαλιστικών ΣΜΕ. Στα ακόλουθα θα δοθεί η βασική ιδέα των Davis και Robeau [9].

Ένας επενδυτής με ωφελιμότητα u και μια συγκεκριμένη αρχική προικοδότηση x, σχηματίζει ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο. Για τον προσδιορισμό του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής μπορεί να κάνει μια επιλογή στρατηγικής π απο το σύνολο $\mathcal{S}$ των πιθανών στρατηγικών. Η αξία σε μετρητά του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t είναι $X_x^\pi(t)$. Ο στόχος του είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου $X_x^\pi(t)$ σε προκαθορισμένο τελικό χρόνο T. Ο επενδυτής θέτει το ερώτημα κατά πόσον η μέγιστη ωφελιμότητα μπορεί να αυξηθεί με την αγορά ή με το short-selling ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης του οποίου η αξία σε μετρήτα στο χρόνο T είναι κάποια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, όπου η τιμή αγοράς στη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι p. Έτσι, απο την οπτική γωνία του επενδυτή, η τιμή p είναι μια δίκαιη τιμή για το δικαίωμα προαίρεσης, εάν διοχετεύοντας λίγα απο τα κεφάλαια του σε αυτό τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει μια ουδέτερη επίδραση στην εφικτή ωφελιμότητα του επενδυτή.

Αυτο το επιχείρημα του "οριακού ποσοστού υποκατάστασης" (Marginal Rate of Substitution) οδηγεί στη συνέχεια (υπο πρόσθετες παραδοχές) σε ένα γενικό τύπο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης η οποία βασικά εξαρτάται από το σύνολο των στρατηγικών $\mathcal{S}$, την αρχική προικοδότηση x, και τη συνάρτηση ωφελιμότητας u.

Έστω τώρα ότι ο επενδυτής είναι μια ασφαλιστική εταιρεία. Η εταιρεία κατέχει ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστηρίων συμβολαίων για τα οποία λαμβάνει ασφάλιστρα, αλλά επίσης υποχρεούται και να πληρώσει για τις ζημιές που έχουν συμβεί. Έστω $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ η σ.δ. που δηλώνει τη συνολική αξία των ληφθέντων ασφαλίστρων μέχρι το χρόνο t, και $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ η σ.δ. που δηλώνει τη συνολική αξία των απαιτήσεων που έχουν συμβεί μέχρι το χρόνο t, ορισμένες και οι δύο σε ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \mathcal{F}_{t\in[0,T]}, P)$ όπου $\mathcal{F}_t := \sigma(\{P_s : s \leq t, Y_t : s \leq t\})$. Υποθέτουμε την ύπαρξη μιας ρευστής αντασφαλιστικής αγοράς, δηλ. σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \leq T$ η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να αποφασίσει να πουλήσει οποιοδήποτε ποσοστό του υπολοιπόμενου κινδύνου $\{Y_s\}_{s\in[t,T]}$ βασισμένη στη διαθέσιμη πληροφορία τη χρονική στιγμή t. Για να έιμαστε πιο ακριβείς δίνουμε τον ακόλουθο αρισμό.

Ορισμός 8.2.1. *Έστω $t \in [0,T]$. Μια* **στρατηγική αντασφάλισης** $\{\xi_s\}_{s\in[t,T]}$ *είναι μια προβλέψιμη σ.δ. στον $(\Omega, \Sigma, \mathcal{F}_{s\in[t,T]}, P)$ με*

$$0 \leq \xi_s \leq 1 \quad \forall s \in [t,T].$$

Με $\mathcal{H}_t$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των στρατηγικών αντασφάλισης (οι οποίες "ξεκινάνε" τη χρονική στιγμή t).

Υποθέτουμε πάλι ότι τα επιτόκια είναι ντετερμινιστικά και περιγράφονται απο τη συνάρτηση $\{r(t)\}_{t\in[0,T]}$, όπου το $r(t)$ δηλώνει την αξία στο χρόνο T μιας χρηματορροής που προκύπτει απο μια επένδυση 1 νομισματικής μονάδας τη χρονική στιγμή t. Εισάγουμε, επι πλέον, τη σ.δ. $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ η οποία δίνεται απο

$$X_t := r(t)(P_t - Y_t) \quad \forall t \in [0, T],$$

δηλώνοντας τα πληθωρισμένα καθαρά κέρδη απο την ασφαλιστική επιχείρηση μέχρι τη χρονική στιγμή t.

Εάν η ασφαλιστική εταιρεία επιλέξει τη χρονική στιγμή t κάποια στρατηγική αντασφάλισης $\xi_s \in \mathcal{H}_t$, τότε το τελικό όφελος της εταιρείας στο χρόνο T (θετικό ή αρνητικό) δίνεται από

$$G_T(\xi) := \int_t^T \xi_s dX_s,$$

όπου υποθέτουμε ότι οι αντασφαλιστικές εταιρείες λαμβάνουν ασφάλιστρα απο τον πρωτασφαλιστή για την δεσμευσή τους. Για να αποφύγουμε προβλήματα ολοκληρωσιμότητας, υποθέτουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ έχει ολοκληρώσιμη κύμανση.

Έστω ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας u, δηλώνοντας τις προτιμήσεις της εταιρείας. Θεωρούμε οτι η u είναι μια $\mathcal{C}^2$-συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (δηλ. μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο) με $u' > 0$ και $u'' \leq 0$. Ο στόχος του ασφαλιστή είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού όφελους τη χρονική στιγμή T χρησιμοποιώντας την πληροφορία $\mathcal{F}_t$. Έστω ότι

$$V := \sup_{\xi\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}_P[u(G_T(\xi))|\mathcal{F}_t]$$

είναι η μέγιστη αναμενόμενη ωφελιμότητα του (πληθωρισμένου) τελικού όφελους, όπου $\mathcal{A}_t$ είναι κάποιο υποσύνολο του $\mathcal{H}_t$. Η ασφαλιστική εταιρεία τώρα θέτει το ερώτημα αν η μέγιστη ωφελιμότητά τους V θα μπορούσε να αυξηθεί συμφωνώντας σε μια θέση αγοράς ή πώλησης σε ένα ασφαλιστικό ΣΜΕ. Το επιχείρημα του "οριακού ποσοστού υποκατάστασης" (Marginal Rate of Substitution) χρησιμοποιείται ως εξής: η F_t είναι μια δίκαιη τιμή για το ασφαλιστικό ΣΜΕ τη χρονική στιγμή t, εάν "συμφωνώντας λίγο" σε ένα συμβόλαιο, έχει μια ουδέτερη επίδραση στην εφικτή ωφελιμότητα της εταιρείας. Με σκοπό το σχηματισμό ενός μαθηματικού τύπου ορίζουμε για οποιοδήποτε δ και F_t την ποσότητα:

$$W(\delta, F_t) := \sup_{\xi\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}_P[u(G_T(\xi) + \delta(F_T - F_t))|\mathcal{F}_t]$$

και δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 8.2.2. *Έστω ότι για κάθε F_t η συνάρτηση*

$$\delta \longmapsto W(\delta, F_t)$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\delta = 0$ και υπάρχει μία μοναδική λύση $\widehat{F}_t$ της εξίσωσης

$$\frac{\partial W}{\partial \delta}(0, F_t) = 0.$$

Τότε η $\widehat{F}_t$ είναι η **δίκαιη τιμή** *για το ασφαλιστικό ΣΜΕ τη χρονική στιγμή t.*

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται ένας τύπος αποτίμησης για τα ασφαλιστικά ΣΜΕ.

Θεώρημα 8.2.3. *(Meister [22], Θεώρημα 4.3) Έστω οτι υπάρχει $\widehat{\xi} \in \mathcal{A}_t$ τέτοιο ώστε*

$$V = \mathbb{E}_P[u(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]$$

και ώστε η συνάρτηση

$$\delta \longmapsto W(\delta, F_t)$$

να είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\delta = 0$ για κάθε σταθερό F_t. Τότε η δίκαιη τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{F}_t = \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]}.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $W(\delta, F_t)$ στο σημείο $\delta = 0$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \delta} W(\delta, F_t)|_{\delta=0} &= \frac{d}{d\delta}(\mathbb{E}_P[u(G_T(\widehat{\xi}) + \delta(F_T - \widehat{F}_t))|\mathcal{F}_t])|_{\delta=0} \\
&= \frac{d}{d\delta}(\mathbb{E}_P[u(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t] + \delta\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))(F_T - \widehat{F}_t)|\mathcal{F}_t] + o(\delta))|_{\delta=0} \\
&= \mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))(F_T - \widehat{F}_t)|\mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 6.7.3 του [14]. Ως εκ τούτου υπάρχει μια μοναδική λύση $\widehat{F}_t$ της εξίσωσης

$$\frac{\partial W}{\partial \delta}(0, F_t) = 0$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))(F_T - \widehat{F}_t)|\mathcal{F}_t] = 0 \\
\iff & \mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))F_T|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))\widehat{F}_t|\mathcal{F}_t] = 0 \\
\iff & \widehat{F}_t = \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]}.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8.2.4. Έστω ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει μια εκθετική ωφελιμότητα $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ με αποστροφή στον κίνδυνο $\alpha > 0$ και ότι δεν αντασφαλίζει τις απαιτήσεις της, δηλ. $\mathcal{A}_t = \{\xi_s\}\ \ s \in [t, T]$ όπου $\xi_s := 1$ για κάθε $s \in [t, T]$. Τότε, έχουμε ότι

$$G_T(\widehat{\xi}) = \int_t^T \xi_s dX_s = X_T - X_t \quad \text{για} \quad \xi \in \mathcal{A}_t.$$

Επομένως συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_t &= \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_P[e^{-\alpha(X_T - X_t)}F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{-\alpha(X_T - X_t)}|\mathcal{F}_t]}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι η σ.δ. ασφαλίστρων $\{P_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι ντετερμινιστική. Τότε συνεπάγεται ότι (χρησιμοποιώντας και ότι η Y_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη και $r(T) = 1$)

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_t &= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha(r(T)Y_T - r(t)Y_t)}F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha(r(T)Y_T - r(t)Y_t)}|\mathcal{F}_t]} \\
&= \frac{e^{-\alpha r(t)Y_t}\mathbb{E}_P[e^{\alpha Y_T}F_T|\mathcal{F}_t]}{e^{-\alpha r(t)Y_t}\mathbb{E}_P[e^{\alpha Y_T}|\mathcal{F}_t]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha Y_T}F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha Y_T}|\mathcal{F}_t]}.
\end{aligned}$$

Τώρα αντικαθιστούμε την ασφαλιστική εταιρεία με την ασφαλιστική αγορά που κατέχει όλα εκείνα τα ασφαλιστήρια συμβόλαια τα οποία οδηγούν στισς ζημιές που συμπεριλαμβάνονται στο δείκτη του ασφαλιστικού ΣΜΕ, δηλ. $Y_t = L_t$ για κάθε $t \in [0, T]$. Ως εκ τούτου η δίκαιη τιμή για το ασφαλιστικό ΣΜΕ (απο την οπτική γωνία της Ασφαλιστικής αγοράς) είναι

$$\widehat{F}_t = \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha L_T}c(L_T \wedge 2\Pi)|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha L_T}|\mathcal{F}_t]}, \tag{8.1}$$

όπου $c = \$25000/\Pi$. Η εξίσωση (8.1) δέιχνει οτι στην τελευταία περίπτωση, η μέθοδος μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας ουσιαστικά οδηγεί στην αρχή του Esscher (βλ. σελιδες 13-14 των [6]).

Παρατήρηση. Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία κατέχει ασφαλιστήρια συμβόλαια, σχηματίζει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι ανεξάρτητο του F_T. Τότε, εύκολα καταλήγουμε ότι

$$\widehat{F}_t = \mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t].$$

Μπορεί να μην είναι αρκετά εμφανές ότι η δίκαιη τιμή του ΣΜΕ δίνεται απο τη μέση τιμή του φυσικού μέτρου και ότι η αποτίμηση δε συμπεριλαμβάνει αποστροφη κινδύνου. Σημειώστε ότι η δίκαιη τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ $\widehat{F}_t$ πρέπει να θεωρηθεί ως ένα όριο με την ακόλουθη έννοια. Ένας ασφαλιστής δε θα έπρεπε να συμφωνήσει σε μια θέση αγοράς (long position) ενός ΣΜΕ του οποίου η τιμή τη χρονική στιγμή t είναι παραπάνω απο $\widehat{F}_t$, και να λάβει τουλάχιστον $\widehat{F}_t$ για μια θέση πώλησης (short position). Εάν οι απαιτήσεις που προκύπτουν απο το χαρτοφυλάκιο του ασφαλιστή είναι θετικά συσχετισμένες με τις ζημιές που προκύπτουν απο το χαρτοφυλάκιο του δείκτη τότε προφανώς η τιμή $\widehat{F}_t$ είναι υψηλότερη απο τη φυσική μέση τιμή $\mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t]$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_t &= \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]} \\
&= \frac{Cov[u'(G_T(\widehat{\xi})), F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]} + \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]} \\
&> \mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

Η ερμηνεία είναι σαφής. Θεωρούμε ότι η συσχέτιση μεταξύ των ασφαλίστρων και του δείκτη του ασφαλιστικού ΣΜΕ είναι αμελητέα. Εάν η ασφαλιστική εταιρεία συμφωνεί σε μια θέση αγοράς, τότε ο κίνδυνος $Var[G_T(\widehat{\xi}) + F_T]$, που προκύπτει, είναι γενικά μικρότερος απο το άθροισμα $Var[G_T(\widehat{\xi})] + Var[F_T]$ του κινδύνου που προκύπτει απο το χαρτοφυλάκιο του ασφαλιστή και του κινδύνου που προκύπτει απο τη συμφωνία στο ασφαλιστικό ΣΜΕ. Για αυτό το λόγο ο ασφαλιστής μπορεί να δεχθεί να πληρώσει παραπάνω από $\mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t]$. Αντιθέτως, αν ο ασφαλιστής συμφωνήσει σε μια θέση πώλησης, τότε

$$Var[G_T(\widehat{\xi}) - F_T] > Var[G_T(\widehat{\xi})] + Var[F_T]$$

και η ασφαλιστική εταιρεία ασφαλώς απαιτεί περισσότερα απο $\mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t]$. Εάν τα $G_T(\widehat{\xi})$ και F_T είναι ανεξάρτητα, τότε η ασφαλιστική εταιρεία εκ των προτέρων δεν έχει προτίμηση στο να συμφωνήσει σε μια θέση αγοράς ή πώλησης, διότι

$$Var[G_T(\widehat{\xi}) \pm F_T] = Var[G_T(\widehat{\xi})] + Var[F_T].$$

Εάν θεωρήσουμε την $\widehat{F}_t$ ως τη μέγιστη τιμή την οποία δεχόμαστε να πληρώσουμε για την τυχαία χρηματορροή F_T, και ταυτοχρόνως ως την ελάχιστη απαίτηση για να πληρώσουμε F_T, τότε η $\widehat{F}_t$ ασφαλώς πρέπει να συμπίπτει με την $\mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t]$.

Ας σημειώσουμε επίσης ότι μια ασφαλιστική εταιρεία ή ένας ασφαλιστικός επενδυτής που κερδοσκοπούν στα ασφαλιστικά ΣΜΕ, τα οποία θεωρούμε οτι είναι ανεξάρτητα απο τις αβέβαιες επενδυτικές ευκαιρίες του ενός ή του άλλου, δύσκολα θα αποτιμούσε το ασφαλιστικό ΣΜΕ χρησιμοποιώντας μέση τιμή υπο το φυσικό μέτρο, αλλά χρησιμοποιώντας την ακόλουθη προσέγγιση. Έστω u η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή που αντιπροσωπεύει την αποστροφή του στον κίνδυνο σχετικά με μια επένδυση σε ασφαλιστικά ΣΜΕ. Θεωρούμε ότι η u είναι εκθετικού τύπου και, επομένως, ότι η αποστοφή στον κίνδυνο είναι κάποια σταθερά $\alpha > 0$. Για αυτό το λόγο, σε αυτό το παράδειγμα δεν πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ μιας επένδυσης σε ένα ή περισσότερα ασφαλιστικά ΣΜΕ. Έστω ότι η $\widehat{F}_t$ είναι το άνω όριο των ποσών που ο επενδυτής δέχεται ως την τιμή ενός ασφαλιστικού ΣΜΕ όταν έχει συμφωνήσει σε μία θέση αγοράς τη χρονική στιγμή t. Εφόσον η τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή t είναι 0, τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_P[u(F_T - \widehat{F}_t)|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_P[1 - e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)} e^{\alpha \widehat{F}_t}|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_P[1 - e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)} e^{\alpha \widehat{F}_t}|\mathcal{F}_t] = 0 \\ \iff & \mathbb{E}_P[e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)} e^{\alpha \widehat{F}_t}|\mathcal{F}_t] = 1 \\ \iff & e^{\alpha \widehat{F}_t} \mathbb{E}_P[e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)}|\mathcal{F}_t] = 1 \\ \iff & ln e^{\alpha \widehat{F}_t} + ln(\mathbb{E}_P[e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)}|\mathcal{F}_t]) = 0 \\ \iff & \alpha \widehat{F}_t = -ln(\mathbb{E}_P[e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)}|\mathcal{F}_t]) \\ \iff & \widehat{F}_t = \frac{1}{\alpha} ln(\mathbb{E}_P[e^{-\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)}|\mathcal{F}_t]^{-1}) \quad \text{(long position)} \end{aligned}$$

και προφανώς το κατώτερο όριο $\widetilde{F}_t$ για το ποσό το οποίο ο επενδυτής απαιτεί όταν συμφωνεί σε μια θέση πώλησης δίνεται από

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_P[u(\widehat{F}_t - F_T)|\mathcal{F}_t] = 0 \\ \iff & \widetilde{F}_t = \frac{1}{\alpha} ln(\mathbb{E}_P[e^{\alpha c(L_T \wedge 2\Pi)}|\mathcal{F}_t]) \quad \text{(short position).} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι η συνάρτηση ln είναι αυστηρά κοίλη και ότι η (-ln) είναι αυστηρά κυρτή, καταλήγουμε στο (εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen και υποθέτοντας ότι $L_t < 2\Pi$)

$$\widehat{F}_t < \mathbb{E}_P[F_T|\mathcal{F}_t] < \widetilde{F}_t$$

Στα ακόλουθα θα αποτιμήσουμε ενδεχόμενες απαιτήσεις Ευρωπαϊκού τύπου, οι οποίες είναι της μορφής $f(F_T) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ με $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ και μετρήσιμη. Διακρίνουμε μεταξύ δύο προσεγγίσεων που εξαρτώνται απο τη φύση του επενδυτή. Ο πρώτος τύπος επενδυτή είναι ένας επενδυτής (καλείται κερδοσκόπος) ο οποίος επενδύει λίγα απο τα κεφάλαιά του σε μια ενδεχόμενη απαίτηση Ευρωπαϊκού τύπου H για να διαφοροποιήσει το (μη ασφαλιστικό) χαρτοφυλάκιό του. Ο άλλος τύπος επενδυτή είναι μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία θέλει να κάνει hedging κάποιου κινδύνου που προκύπτει απο ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστηρίων συμβολαίων, και επομένως επενδύει στην H. Στην περίπτωση του κερδοσκόπου μπορούμε να ακολουθήσουμε τους Davis και Robeau [9] και να καταλήξουμε (κάτω απο κάποιεσ πρόσθετες υποθέσεις, βλ. [9]) σε ένα τύπο αποτίμησης για την H που εξαρτάται απο τη ωφελιμότητα, τη βέλτιστη στρατηγική χαρτοφυλακίου και την αρχική προικοδότηση. Για να μελετήσουμε τη δεύτερη περίπτωση ας υποθέσουμε πάλι ότι ο επενδυτής είναι μια ασφαλιστική εταιρεία που κατέχει ένα χαρτοφυλάκιο με ασφαλιστήρια συμβόλαια των οποίων οι προτιμήσεις δίνονται απο κάποια ωφελιμότητα u. Κάτω απο τις ίδιες υποθέσεις όπως πρίν, θεωρούμε ότι ο στόχος της ασφαλιστικής εταιρείας είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα. Τη χρονική στιγμη $t \in [0, T]$ η εταιρεία θέτει την ερώτηση εάν η μέγιστη ωφελιμότητα θα μπορούσε να αυξηθεί με την απόκτηση ενός "μικρού μέρους" της H. Ακολουθώντας απολύτως την προσέγγιση που οδηγεί στη δίκαιη τιμή του ασφαλιστικού ΣΜΕ καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.2.5. *(Meister [22], Θεώρημα 4.4) Έστω οτι υπάρχει $\widehat{\xi} \in \mathcal{A}_t$ τέτοιο ώστε*

$$\sup_{\widehat{\xi} \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}_P[u(G_T(\xi))|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_P[u(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]$$

και ώστε η συνάρτηση

$$\delta \longmapsto W(\delta, p) := \sup_{\widehat{\xi} \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}_P[u(G_T(\xi) + \delta(H - r(t)p))|\mathcal{F}_t]$$

να είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\delta = 0$ για κάθε σταθερό p. Τότε η δίκαιη τιμή της H τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{p} = \frac{1}{r(t)} \frac{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))H|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[u'(G_T(\widehat{\xi}))|\mathcal{F}_t]}.$$

Απόδειξη. Όμοια με αυτή του Θεωρήματος 8.2.3..

Παρατήρηση. Τα Θεωρήματα 8.2.3. και 8.2.5. εμφανώς οδηγούν στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας ή προσδιορισμού των βέλτιστων στρατηγικών. Ωστόσο, δεν είναι τόσο εμφανές το πώς μπορούν να βρεθούν οι βέλτιστες στρατηγικές εάν το σύνολο των δυνατών στρατηγικών δεν περιοριστεί αυστηρά.

8.3 Αποτίμηση ασφαλιστικών ΣΜΕ σε ένα γενικό μοντέλο ισορροπίας

Το μοντέλο που θα περιγραφεί σε αυτή την ενότητα, έχει εισαχθεί απο τον Bühlmann [7], [8]. Στα ακόλουθα θα δοθεί μια περιγραφή του μοντέλου, όπως επίσης και τα αποτελέσματά του που εφαρμόστηκαν στα πλαίσια της ασφαλιστικής αγοράς των ΣΜΕ.

Θεωρούμε ότι υπάρχουν N επενδυτές στην αγορά των ασφαλιστικών ΣΜΕ, συμπεριλαμβάνοντας και όλες τις ασφαλιστικές εταιρείες που δηλώνουν τις ζημιές τους στο ISO. Ως εκ τούτου, μερικές απο αυτές τις ασφαλιστικές εταιρείες είναι αυτές για τις οποίες οι ζημιές που προκύπτουν απο το χαρτοφυλάκιό τους με τα ασφαλιστήρια συμβόλαια συμπεριλαμβάνονται στον δείκτη των ασφαλιστικών ΣΜΕ. Άλλοι μπορεί να είναι επενδυτές με στόχο την κερδοσκοπία στα ασφαλιστικά ΣΜΕ ή ασφαλιστικές εταιρείες που θέλουν να διαφοροποιήσουν (diversify) το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιό τους. Έστω $t \in [0,T]$. Θεωρούμε ότι κάθε επενδυτής i υποχρεώνεται να πληρώσει το τυχαίο ποσό X_i τη χρονική στιγμή T. Θεωρούμε επίσης ότι αυτή η υποχρέωση μπορεί να προκύψει είτε απο το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο είτε απο συμφωνίες σε ασφαλιστικά ΣΜΕ. Οι επενδυτές χαρακτηρίζονται απο τις συναρτήσεις ωφελιμοτητάς τους $u_i, (i = 1, \ldots, N)$, οι οποίες θεωρούμε οτι είναι $\mathcal{C}^2$-συναρτήσεις με $u_i' > 0, u_i'' \leq 0$, και αρχικό πλούτο $w_i, (i = 1, \ldots, N)$. Οι επενδυτές έχουν την ευκαιρία να αγοράσουν (ή να πουλήσουν) συναρτήσεις ανταλλαγής (exchange functions) $Y_i, (i = 1, \ldots, N)$, κάνοντάς τους να λάβουν το τυχαίο ποσό Y_i τη χρονική στιγμή T. Ένα τυπικό παράδειγμα για μια συνάρτηση ανταλλαγής είναι ένα συμβόλαιο αντασφάλισης ή ένα ασφαλιστικό ΣΜΕ. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i και Y_i ορίζονται σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Υποθέτουμε ότι η τιμή για μια συνάρτηση ανταλλαγής Y_i δίνεται από

$$p_i = \mathbb{E}_P[Y_i \varphi | \mathcal{F}_t]$$

όπου φ είναι μια Σ-μετρήσιμη συνάρτηση απο το $\Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Εάν όλοι οι επενδυτές μπορούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφελιμότητα της τελικής χρηματορροής τους, τότε ονομάζουμε αυτή την κατάσταση μια **ισορροπία**. Για μεγαλύτερη ακρίβεια δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 8.3.1. *Μια* ***ισορροπία*** *(equilibrium) είναι ένα ζεύγος $(\widehat{\varphi}, \widehat{Y})$ τέτοιο ώστε*

(i) Για κάθε $i = 1, \ldots, N$ η μέση τιμή $\mathbb{E}_P[u_i(w_i - X_i + \widehat{Y}_i - \widehat{p}_i) | \mathcal{F}_t]$ είναι η μέγιστη απο όλες τις δυνατές επιλογές του Y_i, με

$$\widehat{p}_i = \mathbb{E}_P[Y_i \varphi | \mathcal{F}_t]$$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} Y_i = 0.$

Ο Bühlmann έδειξε οτι οι ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μιας ισορροπίας είναι

1 Τα X_i να είναι φραγμένες τ.μ. $(i = 1, \ldots, N)$

2 Οι αποστροφές στον κίνδυνο ρ_i να είναι συνεχείς θετικές συναρτήσεις επάνω στον $\mathbb{R}$ ικανοποιώντας την συνθήκη Lipschitz

$$|\rho_i(x) - \rho_i(y)| \leq k|x - y|, \text{για κάθε}\, x, y \in \mathbb{R}$$

όπου $k \in \mathbb{R}_+$ σταθερά.
Αυτή η γενική κατάσταση αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer. Επομένως, γενικά, δεν έχουμε έναν ακριβή τύπο που να προσδιορίζει το ζεύγος $(\widehat{\varphi}, \widehat{Y})$. Ωστόσο, στην περίπτωση όπου όλες οι συναρτήσεις ωφελιμότητας είναι εκθετικής μορφής $(u_i(x) = (1 - e^{-\alpha x}), i = 1, \ldots, N)$ η συνθήκη 1 δεν είναι απαραίτητη και τα $(\widehat{\varphi}, \widehat{Y})$ προσδιορίζονται μοναδικά απο τις σχέσεις (βλ.[7]):

$$\widehat{\varphi} = \frac{e^{\alpha \sum_{i=1}^{N} X_i}}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha \sum_{i=1}^{N} X_i} | \mathcal{F}_t]} \quad \text{με} \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i},$$

$$\widehat{Y}_i = X_i - \gamma_i \sum_{i=1}^{N} X_i - \frac{\mathbb{E}_P[(X_i - \gamma_i \sum_{i=1}^{N} X_i) e^{\alpha \sum_{i=1}^{N} X_i} | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha \sum_{i=1}^{N} X_i} | \mathcal{F}_t]} \quad \text{με} \quad \gamma_i = \frac{\alpha}{\alpha_i}.$$

Ειδικά, ενδιαφερόμαστε για την τιμή ισορροπίας F_t της τυχαίας χρηματορροής F_T τη χρονική στιγμή T (υπενθυμίζουμε ότι η F_t καθορίζεται τη χρονική στιγμή t αλλά πληρώνεται τη χρονική στιγμή T). Στην ισορροπία έχουμε

$$\begin{aligned} F_t &= \mathbb{E}_P[F_T \varphi | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha \sum_{i=1}^N X_i} F_T | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha \sum_{i=1}^N X_i} | \mathcal{F}_t]}. \end{aligned}$$

Οι πληρωμές $X_i, (i = 1, \dots, N)$ μπορούν να προκύψουν απο απαιτήσεις που δηλώθηκαν στις ασφαλιστικές εταιρείες ή απο συμφωνίες σε ασφαλιστικά ΣΜΕ. Εφόσον ο συνολικός αριθμός των θέσεων αγοράς και πώλησης των ασφαλιστικών ΣΜΕ συμπίπτουν, το άθροισμα των τελικών τυχαίων χρηματορροών που προκύπτει απο αυτά τα συμβόλαια είναι μηδέν. Εάν τώρα διαχωρίσουμε μεταξύ των ζημιών που συμπεριλαμβάνονται στον δείκτη του ασφαλιστικού ΣΜΕ και άλλων ζημιών X, τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^N X_i = L_T - L_t + X$$

και

$$F_t = \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha X} e^{\alpha(L_T - L_t)} F_T | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha X} e^{\alpha(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t]}.$$

Σε μια πρακτική εφαρμογή ο τελευταίος τύπος μπορεί μόνο να εκτιμηθεί, διότι μια κατηγορηματική λύση θα χρειαζόταν τη γνώση της απο κοινού κατανομής των X και $L_T - L_t$. Εφόσον

$$F_t = \frac{Cov_{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha X}, e^{\alpha(L_T - L_t)} F_T) + \mathbb{E}_P[e^{\alpha X} | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T - L_t)} F_T | \mathcal{F}_t]}{Cov_{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha X}, e^{\alpha(L_T - L_t)}) + \mathbb{E}_P[e^{\alpha X} | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t]},$$

οι όροι $Cov_{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha X}, e^{\alpha(L_T - L_t)} F_T), Cov_{\mathcal{F}_t}(e^{\alpha X}, e^{\alpha(L_T - L_t)})$ και $\mathbb{E}_P[e^{\alpha X} | \mathcal{F}_t]$ μπορούν να εκτιμηθούν απο την αντίστοιχη πληροφορία του παρελθόντος. Ο υπολογισμός των όρων $\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T - L_t)} F_T | \mathcal{F}_t]$ και $\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t]$ είναι το αντικείμενο του ακόλουθου παραδείγματος.

Παράδειγμα 8.3.2. Έστω ότι το σύνολο των επενδυτών $(i = 1, \dots, N)$ είναι περιορισμένο και επιτρέπει μόνο εκείνες τις ασφαλιστικές εταιρείες που επηρεάζουν το δείκτη του ασφαλιστικού ΣΜΕ, εκείνες των οποίων οι ζημιές δεν είναι συσχετισμένες με την σ.δ. $\{L_t\}_{t \in [0,T]}$ ή επενδυτές που μόνο κερδοσκοπούν σε ασφαλιστικά ΣΜΕ. Επίσης, θεωρούμε οτι σε αυτό το περιορισμένο σύνολο επενδυτών, ο αριθμός των θέσεων αγοράς και πώλησης στα ασφαλιστικά ΣΜΕ συμπίπτει. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}F_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}|\mathcal{F}_t]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\alpha L_T}c(L_T\wedge 2\Pi)|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{\alpha L_T}|\mathcal{F}_t]}. \end{aligned}$$

Αυτός είναι ο ίδιος τύπος αποτίμησης με αυτόν του παραδείγματος 8.2.4, όπου περιορίσαμε επίσης την ασφαλιστική αγορά σε εκείνες τις εταιρείες που οι ζημιές τους συμπεριλαμβάνονται στο δείκτη του ασφαλιστικού ΣΜΕ.

Για να αναλύσουμε πιο λεπτομερώς τον τύπο, δουλεύουμε κάτω απο την Υπόθεση 3.3.3 και θεωρούμε ότι η $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια διπλή στοχαστική σύνθετη διαδικασία Poisson με τη σ.δ. της έντασης $\{\Theta_t\}_{t\in[0,T]}$ και τα ποσα αλμάτων (απαιτήσεις) $(X_1, X_2, \dots)$. Υπενθυμίζουμε οτι η N_t δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων μέχρι το χρόνο t και $N_T - N_t \sim \mathbf{P}(\Theta_T - \Theta_t)$. Δεσμεύοντας ως προς $\Theta_T - \Theta_t$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}|\mathcal{F}_t, \Theta_T-\Theta_t]|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_P[e^{(\Theta_T-\Theta_t)\mathbb{E}_P[e^{\alpha X_1}]-1}|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι άμεση συνέπεια της ροπογεννήτριας της σύνθετης Poisson και

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}(L_T\wedge 2\Pi)|\mathcal{F}_t] \\ = \ & \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[e^{\alpha(L_T-L_t)}(L_T\wedge 2\Pi)|\mathcal{F}_t, \Theta_T-\Theta_t]|\mathcal{F}_t] \\ = \ & \mathbb{E}_P[\int_0^\infty e^{\alpha s}\{(s+L_t\wedge 2\Pi\}dP[(L_T-L_t)=s)|\Theta_T-\Theta_t]|\mathcal{F}_t] \\ = \ & \mathbb{E}_P[\sum_{k=0}^\infty e^{-(\Theta_T-\Theta_t)}\frac{(\Theta_T-\Theta_t)^k}{k!}\int_0^\infty e^{\alpha s}\{(s+L_t\wedge 2\Pi\}dF^{*k}(s)|\mathcal{F}_t] \\ = \ & \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}_P[e^{-(\Theta_T-\Theta_t)}\frac{(\Theta_T-\Theta_t)^k}{k!}|\mathcal{F}_t] \\ \times \ & \left\{\int_0^{(2\Pi-L_t)^+} e^{\alpha s}(s+L_t)dF^{*k}(s) + 2\Pi(1-dF^{*k}((2\Pi-L_t)^+)\right\} \end{aligned}$$

όπου $F^{*k}(s) := P[X_1+\cdots+X_k \le s]$ και τελικά οδηγούμαστε

$$F_t = c\frac{\sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}_P[e^{-(\Theta_T-\Theta_t)}\frac{(\Theta_T-\Theta_t)^k}{k!}|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_P[e^{(\Theta(T)-\Theta(t))\mathbb{E}_P[e^{\alpha X_1}]-1}|\mathcal{F}_t]}\eta_k \tag{8.2}$$

με $\eta_k = \int_0^{(2\Pi - L_t)^+} e^{\alpha s}(s + L_t)dF^{*k}(s) + 2\Pi(1 - dF^{*k}((2\Pi - L_t)^+)$.

Για την πρακτικη εφαρμογή θα ήταν χρήσιμο να ακολουθήσουμε την Υπόθεση 3.3.1 και να θεωρήσουμε ότι η $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια σύνθετη σ.δ. Poisson με ένταση θ. Ο τύπος αποτίμησης τότε γίνεται πιο εύκολος.

$$F_t = ce^{\theta(t-T)\mathbb{E}_P[e^{\alpha X_1}]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta(T-t))^k}{k!}\eta_k. \tag{8.3}$$

Ως επόμενο βήμα ας θεωρήσουμε ότι η τιμή διακανονισμού του ασφαλιστικού ΣΜΕ είναι uncapped, δηλ. ορίζουμε

$$\widetilde{F}_T = 25000\frac{L_T}{2\Pi} = cL_T$$

και οτι οι απαιτήσεις ακολουθούν την κατανομή Gamma δηλ. $X_1 \sim \mathbf{Ga}(n,\mu) \quad (n \in \mathbb{N}, \mu > 0)$. Ως εκ τούτου έχουμε (αναλογικά με τον τύπο (8.3))

$$\widetilde{F}_t = ce^{\theta(t-T)\mathbb{E}_P[e^{\alpha X_1}]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta(T-t))^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha s}(s + L_t)dF^{*k}(s)$$

με $F^{*k} \sim \mathbf{Ga}(kn,\mu)$ και

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha s}dF^{*k}(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha s}\frac{\mu^{kn}}{\Gamma(kn)}s^{kn-1}e^{-\mu s}ds = \left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^{kn}$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha s}sdF^{*k}(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha s}\frac{\mu^{kn}}{\Gamma(kn)}s^{kn}e^{-\mu s}ds = \left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^{kn}\frac{kn}{\mu-\alpha}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_t &= ce^{\theta(t-T)(\frac{\mu}{\mu-\alpha})^n} \\
&\quad \times \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta(T-t))^k}{k!}\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^{kn}L_t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\theta(T-t))^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^{n(k-1)}\theta(T-t)\frac{n\mu^n}{(\mu-\alpha)^{n+1}}\right\} \\
&= c\left\{L_t + \theta(T-t)\frac{n\mu^n}{(\mu-\alpha)^{n+1}}\right\}
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει κατηγοριματικά οτι η $\widetilde{F}_t$ αυξάνεται με τα L_t, θ και α και μειώνεται όσο ο χρόνος προς τη ληκτότητα T μειώνεται.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Χρήσιμες έννοιες της Θεωρίας Μέτρου

Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{G}$ του Ω. **Η ελάχιστη σ-άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και (α, β), αντίστοιχα.

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. (Ω, Σ, μ).

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο μ-μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή μ-**μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με Σ_0.

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε δύο θεωρήματα για σ-άλγεβρες. Τα θεωρήματα αυτά (ιδιαιτέρως το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης) είναι μέρος της βασικής τεχνικής αποδείξεων των Μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων και έχουν πολλές και μεγάλου φάσματος εφαρμογές.

Λήμμα Α΄.1. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια στοιχείων του Ω. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(i) **(Dyn1')** $\Omega \in \mathcal{D}$

(Dyn2') $B \setminus A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$

(Dyn3') $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

(Dyn2) $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$

(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

Θεώρημα Μονότονης Κλάσης Α΄.2. *Έστω* Ω *ένα σύνολο και* $\mathcal{D}$ *μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του* Ω. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ *είναι τέτοιο, ώστε* $I \cap J \in \mathcal{I}$ *για όλα τα* $I, J \in \mathcal{I}$. *Τότε η* $\mathcal{D}$ *περιέχει την* $\sigma(\mathcal{I})$.

Παράρτημα Β΄

Χρήσιμες έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. (Ω, Σ, P). Μία συνάρτηση $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία) **ή** Σ**-μετρήσιμη** αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B) \in \Sigma$. Ένα μέτρο πιθανότητας P ονομάζεται **τέλειο** αν για κάθε τυχαία μεταβλητή X στον Ω υπάρχει ένα σύνολο Borel $\subseteq X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ τέτοιο ώστε, $P(X^{-1}(B)) = 1$.
Μία τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο P) αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P-\sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int f^2 dP < \infty$ – **συναρτήσεων**.
Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** ($\sigma.\kappa.\pi.$) αν είναι , αύξουσα, δεξιά συνεχής, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. X. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution). Η P_X (αντ. η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**$\sigma.\kappa.\pi.$**)** $F_X : \mathbb{R} \longmapsto [0, 1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η F_X είναι πράγματι *σ.κ.π.* (βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.4.9). Η *σ.κ.π.* F_X μίας τ.μ. X ικανοποιεί την σχέση

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B), \forall B \in \mathfrak{B} \tag{B$'$.1}$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι το μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.4.10 για τον ορισμό του μέτρου Lebesgue-Stieltjes και για την απόδειξη της (Β′.1)).

Μια *σ.κ.π.* $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με *σ.κ.π.* $F_X = F$) ονομάζεται:

• **Διακριτή**, αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* της) είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \longmapsto \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (*σ.π.*) της F (αντ. της X).

• **Συνεχής**, αν η F είναι συνεχής συνάρτηση (αντ. η *σ.κ.π.* F_X της).

•**Απόλυτα Συνεχής**, αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* F_X της) είναι της μορφής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$.

Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*) της F (αντ. της X). Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας ((συνεχής τ.μ.)) θα εννοούμε ((απόλυτα συνεχής τ.μ.)).

Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}\nu(dx) = \int_{B \cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου f_X η αντίστοιχη *σ.(π.)π.*, και ν είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Έστω(Ω, Σ, μ) και (Θ, T, ν) χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του** $\Omega \times \Theta$**)**, αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται σ-**άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.
Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** μ **και** ν και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Εαν I είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π.-γινόμενο $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := \Big(\prod_{i \in J} \Omega_i, \otimes_{i \in J}\Sigma_i, \otimes_{i \in J} P_i \Big)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την πιθανότητα-γινόμενο στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού της P^I.
Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.
Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}), \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \quad \text{και για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ. [2], Παρατήρηση 3.2.5(b). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.
Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων** σ-**υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

Μία οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται P-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** της σ-υποάλγεβρας $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

$\forall j \leq n \ \ \forall E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.
Μία οικογένεια Σ--μετρήσιμων απεικονήσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από τον Ω στον Υ είναι:
• P-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στην σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ , αν η οικογένεια $\sigma\left(\{X_i\}\right)_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$,και
• P-**υπό συνθήκη ισόνομη** επάνω στην σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ αν,

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_j^{-1}(B)),$$

για $i, j \in I$, $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$.
Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η σ-**άλγεβρα στο** Ω **η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου I σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\Bigg(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\Bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.
Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι σ-υποάλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.
Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την n-**οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n *$ P, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [3], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται σ.**δ.** (σ.δ.) ή **στοχαστική σ.δ.**. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια σ.δ. **συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια σ.δ. **διακριτού χρόνου**.
Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:
• μια σ.δ. **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
• μια σ.δ. **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\}$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$.

Παράρτημα Γ΄

Χρήσιμες Κατανομές Πιθανότητας

Παρακάτω, παραθέτουμε τις κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στη παρούσα εργασία. Ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ δίνοντας απλώς την αντίστοιχη σ.(π.)π. όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.

(i) **Κατανομή Poisson** $(P_X = \mathbf{P}(\theta))$

- $f_X(x) = e^{-\theta}(\theta^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$ με $\theta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = Var[X] = \theta$.

(ii) **Εκθετική Κατανομή** $(P_X = \mathbf{P}(\beta))$

- $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = 1/\beta, Var[X] = 1/\beta^2$.

(iii) **Κατανομή Γάμμα** $(P_X = \mathbf{P}(\alpha, \beta))$

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\alpha, \beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = \alpha/\beta, Var[X] = \alpha/\beta^2$.

(iv) **Γενική Αντίστροφη Γκαουσιανή Κατανομή** $P_X = \mathbf{GIG}(\mu, \beta, \lambda)$

- $f_X(x) = \frac{\mu^{-\lambda} x^{\lambda-1} e^{\frac{(x^2+\mu^2)}{2\beta x}}}{2\kappa_\lambda(\mu\beta^{-1})}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\mu, \beta > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ όπου $\kappa_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{\frac{1}{2}x(y+y^{-1})} dy \quad \forall x > 0$.

Βιβλιογραφία

[1] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006): *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική εργασία.

[2] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006): *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς.

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2005): *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πειραιάς.

[4] Ash, R.B., Doléans-Dade, Catherine A. (2000): *Probability and Measure Theory*, Harcourt/Academic Press.

[5] Brémaud, Pierre (1981): *Point processes and queues*, Springer.

[6] Buhlmann, Hans , Embrechts, Paul, Shiryaev, Albert N. (1996): *No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms.* CWI Quarterly, 9(no. 4), 291-318.

[7] Bülmahnn, H. (1980):*An Economic Premium Principle*, the ASTIN Bulletin 11 (1), 52-60 .

[8] Bülmahnn, H. (1981):*The General Premium Principle*, the ASTIN Bulletin 14 (1),13-21 .

[9] Davis, M.H.A. and Robeau, N.M. (1994): *A general option pricing formula for incomplete markets*, Imperial College London.

[10] Embrechts, Paul and Meister, Steffen (1997): *Pricing Insurance Derivatives: The Case of CAT Futures*, in Securitization of Insurance risk, 1995 Bowles Symposium, SOA Monograph M-F197-1: 15-26.

[11] Gerber, H.U. and Shiu, S.W. (1995): *Option pricing by Esscher transforms.* Transactions of the Society of Actuaries. XLVI:99-192.

[12] Gerber, H.U. and Shiu, S.W. (1996): *Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options on Two Stocks* Mathematical Finance 6, 303-322.

[13] Grandell, J. (1991): *Aspects of Risk Theory New York* Springer-Verlag.

[14] Haussmann, U.G. (1987): *A Stochastic max. Principle for Optimal Control of Diffusions*, Pitman Research notes in Mathematics 151, Longman, London.

[15] Itô, K. (1951): *Multiple Wiener integral*, Journal of the Mathematical Society of Japan 3:157-69 .

[16] Jacod, J. (1979): *Calcul stochastique et problémes de martingales*, Lecture notes in mathematics 714, Berlin: Springer-Verlag.

[17] Jacod, J and Shiryaev, Albert N. (2003): *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag.

[18] Jacod, J and Yor, M (1977): *Etudes des solutions extremales et répresentation intégrale des solutions pour certains problémes de martingales*, Probability theory and related fields 38, 83-125.

[19] Jones, D.A.*Bayesian Statistics*, TSA XVI1 (1965): 33-57; Discussion 181-200.

[20] Karatzas, Ioannis (1988): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.

[21] Kunita, H. and Watanabe, S. (1967): *On square integrable martingales*, Nagoya Mathematical Journal 30.

[22] Meister, S. (1995): *Contribution to the Mathematics of Catastrophe Insurance Futures*, Diplomarbeit.

[23] Métivier, Michel (1982): *Semimartingales. A Course on Stochastic Processes*, de Gruyter Studies in Math.,2.

[24] Pratelli, M. (1994): *Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers*.

[25] Revuz, D. and Yor, M. (1980): *Continuous Martingales and Brownian Motion*.

[26] Schmidt, K.D. (1996): *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[27] Sondermann, D. (1991): *Reinsurance in arbitrage-free Markets*, Insurance: Mathematics and Economics 10:191-202.

[28] Stricker, C. (1990): *Arbitrage et lois de martingale*, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol.n.3, 451-460.

Ευρετήριο