ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

«Διαχείριση Χαρτοφυλακίου Ασφαλιστηρίων Ζωής»

Σταύρος Δ. Διαμαντόπουλος

Πειραιάς,
Ιούνιος 2015

University of Piraeus

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Actuarial Science

M.Sc. in

"Actuarial Science and Risk Management"

"A Life Annuity Portfolio and its Risk Sources"

Stavros D. Diamantopoulos

Piraeus,

June 2015

Στη Θεοδώρα, τον Δημήτριο,
τον Ανδρέα και την Έλενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διευθυντή του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, κύριο Μιχαήλ Γκλεζάκο, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και την κυρία Γεωργία Βερροπούλου, Επίκουρη Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την οικογένεια μου και την αγαπημένη μου Έλενα, η οποία αποτελεί το βασικό κίνητρο στην ακαδημαϊκή μου πορεία και την έμπνευση για την περαιτέρω εξέλιξη της σταδιοδρομίας μου. Συγκεκριμένα, θέλω να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Ανδρέα που είναι άξιος συμπαραστάτης και απαραίτητο στήριγμα μου σε όλους τους τομείς της ζωής μου, όπως βέβαια και τους γονείς μου Θεοδώρα και Δημήτριο οι οποίοι με την αμέριστη στήριξη και εμπιστοσύνη που έδειξαν στο προσωπό μου, καθ'όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών, με βοήθησαν να αντεπεξέλθω σε όλες τις δυσκολίες.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι ασφαλιστικές εταιρείες ζωής διαχειρίζονται το χαρτοφυλάκιο τους. Στο χαρτοφυλάκιο μιας εταιρείας υπάρχει το παθητικό που αποτελείται από ασφαλιστήρια ζωής και το ενεργητικό που αποτελείται από άλλα επενδυτικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε ένα μοντέλο για ένα ομοιογενές χαρτοφυλάκιο αναλύοντας δύο παράγοντες κινδύνου, τον επενδυτικό κίνδυνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα στοχαστικό μοντέλο των ποσοστών αποδόσεων για την μελέτη και την ανάλυση αυτών των κινδύνων και θα παρουσιάσουμε τρόπους μέτρησης του ασφαλιστικού και του επενδυτικού κινδύνου όλου του χαρτοφυλακίου. Θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τον κίνδυνο θνησιμότητας και τις συνέπειες του χρησιμοποιώντας διάφορες μελλοντικές προβλεψεις των πινάκων θνησιμότητας. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται σε διάφορες περιπτώσεις και τα αποτελέσματα δείχνουν πως οι κινδυνοι που αναλύουμε επηρεάζουν τον αριθμό των συμβολαίων του χαρτοφυλακίου. Στο τέλος, θα δωθούν παραδείγματα και εφαρμογές έτσι ώστε να κατανοηθεί ο τρόπος διαχείρησης του κινδύνου στιις ασφαλιστικές εταιρείες.

Abstract

In this work the way in which life insurance companies manage their portfolio will be studied. The liability of insurance comprises life insurance contracts and assets consisting of other investments. Specifically, a model for a homogeneous portfolio by analyzing two risk factors, the investment risk and the insurance risk will be considered. A stochastic model of the rate of return, in order to study the insurance and the investment risk will be presented. Measure of the above risks of the homogenous portfolio will be considered, and the issue of the longevity risk of the insurance companies will also be discussed. Applications and illustrations are given, showing the robustness of the above stochastic model in terms of the number of policies in the homogenous portfolio. Finally, conclusions and remarks concerning the control of the overall risk of the companies are also given.

Εισαγωγή

Η πλειοψηφία των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες στη διαχείριση του χαρτοφυλακίου προέρχονται από τον επενδυτικό κίνδυνο λόγω των επιτοκίων και τον ασφαλιστικό κίνδυνο λόγω των ποσοστών θνησιμότητας αλλά και την αλληλεπίδραση αυτών των κινδύνων που περιέχουν τα ασφαλιστηρια συμβολαια ζωής. Λόγω της φύσης των κινδύνων αυτών, το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας έχει γίνει για την παρούσα αξία ενός συνόλου συμβολαίων σε ένα πλαίσιο όπου τα δύο παραπάνω ποσοστά και η θνησιμότητα είναι τυχαία.

Η προσοχή των επιστημόνων μετατοπιστηκε στην αντιμετώπιση των συμβολαίων του χαρτοφυλακίου συνολικά. Μεγάλη συνεισφορά σε αυτόν τον τομέα έχουν οι Norberg (1993)[21], Parker (1993)[24], (1994a)[25],(1994b)[26] και (1997)[27]και Frees (1998)[19].

Ο Norberg (1993)[21] υπολόγισε τις δύο πρώτες ροπές της παρούσας αξίας των στοχαστικών ροών των πληρωμών και τις εφάρμοσε σε ένα χαρτοφυλάκιο προσωρινών ασφαλιστήριων συμβολαίων. Ο Parker (1993)[24] μελέτησε τις ροπές της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών μοντελοποιώντας την ένταση του επιτοκίου χρησιμοποιώντας: (i) ένα λευκό θόρυβο , (ii) μία διαδικασία Wiener και (iii) μια διαδικασία Ornstein - Uhlenbeck. Ο Parker βρήκε τις ροπές της παρούσας αξίας του χαρτοφυλακίου των παροχών που αφορούν τα ασφαλιστήρια, μοντελοποιώντας την ένταση επιτοκίου με τοη βοήθεια του μοντέλου Vasicek (Vasicek 1977)[28]. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο Vasicek για το ποσοστό απόδοσης ο Parker θεωρεί την διακύμανση ως μέτρο της του κινδύνου του χαρτοφυλακίου τον οποίο χώρισε σε ασφαλιστικό και σε επενδυτικό κίνδυνο. Ο Frees (1998)[19] έδειξε τη χρησιμότητα του συντελεστή προσδιορισμού, για τον ποσοστικό προσδιορισμό της βαρύτητας κάθε πηγής αβεβαιότητας σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν περισσότερες από δύο πηγές κινδύνων.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου με ράντες διαιρώντας τον κίνδυνο αυτό σε δύο μέρη. Θα παρουσιαστούν μερικοί τρόποι ελέγχου αυτών των κινδύνων χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές της μεταβλητότητα της αναμενόμενης αξίας του χαρτοφυλακίου με τις ισόβιες ράντες ζωής.

Κατά την ενασχόληση με ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστηρίων ζωής, είναι γνωστό ότι η επίδραση των τυχαίων αποκλίσεων της θνησιμότητας μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας τις τεχνικές συγκέντρωσης. Ωστόσο, όπως τόνισαν οι Morocco και Pitacco (1998)[20] και Olivieri (1998)[22], στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου με ράντες ζωής, ένα φαινόμενο που δεν μπορεί να ελεγχθεί με τεχνικές συγκέντρωσης είναι ο κίνδυνος της μακροζωίας, δηλαδή οι συστημικές αποκλίσεις του πραγματικού αριθμού των θανάτων από τον αναμενόμενο αριθμό των θανάτων που οφείλονται στη βελτίωση της ποιότητας ζωής. Ο κίνδυνος μακροβιότητας παράγει αναλογιστικές ζημιές στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου με ισόβιες ράντες, ενώ στην περίπτωση των συμβολαίων ασφάλισης ζωής παράγει αναλογιστικά κέρδη. Γι’αυτούς τους λόγους κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο να περιληφθούν κατάλληλες προβλέψεις των βελτιώσεων της θνησιμότητας στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου με ισόβιες ράντες.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται βασικές μαθηματικές έννοιες της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Ο ορισμός των εννοιών πιθανότητα,κατανομή ή πυκνότητα τυχαίας μεταβλητής, σ-άλγεβρα, δεσμευμένη πιθανότητα, μέση τιμή, διακύμανση, ροπή, ροπογεννήτρια καθώς και διάφορα παραδείγματα είναι αναγκαίο να δωθούν έτσι ώστε να διευκολυνθεί ο αναγνώστης στην κατανόηση των κεφαλαίων που ακολουθούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο συνεχίζεται η μαθηματική παρουσίαση εννοιών και γίνεται μία εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες και συγκεκριμένα στην αριθμητική κίνηση Brown,στη διαδικασία Ornestein – Uhlenbeck και στη γεωμετρική κίνηση Brown. Επίσης, δίνονται παραδείγματα και εφαρμογές οι οποίες βοηθούν στην κατανόηση των διαδικασιών αυτών.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των αναλογιστικών μεγεθών. Αρχικα εισάγεται και αναλύεται η έννοια των ραντών και τα είδη ραντών που υπάρχουν. Επίσης, γίνεται επεξήγηση των αναλογιστικών συμβόλων και παρατίθενται παραδείγματα με όλα τα είδη ραντών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των χρηματοοικονομικών και ασφαλιστικών κινδύνων, παρουσιάζονται στοιχεία και πίνακες οι οποίοι βοηθούν στην ανάλυση αυτή. Μεγαλύτερη σημασία δίνεται στον επενδυτικό κίνδυνο, στον κίνδυνο μακροζωίας και στον επενδυτικό κίνδυνο καθώς είναι αυτοί που θα μας απασχολήσουν στο πέμπτο κεφάλαιο όπου θα πραγματοποιηθεί η μαθηματική και στοχαστική ανάλυση του χαρτοφυλακίου.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται οι τυχαίες μεταβλητές σε ένα ομογενές χαρτοφυλάκιο με ισόβιες άμεσες ράντες και υπολογίζονται οι δύο πρώτες ροπές της παρούσας αξίας του χαρτοφυλακίου και του μέσου κόστους ανά συμβόλαιο. Επίσης, παρουσιάζεται μια περιγραφή του στοχαστικού μοντέλου που χρησιμοποιείται για να διαμορφώσει τη στιγμιαία απόδοση για τις δύο πηγές κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο. Στο τέλος, παρουσιάζονται κάποιοι υπολογισμοί και παραδείγματα σχετικά με τη σημασία των δύο κινδύνων, που σχετίζονται άμεσα με τον αριθμό των συμβολαίων στο χαρτοφυλάκιο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1ο Κεφάλαιο

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες και Ορισμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων και της στατιστικής. Συγκεκριμένα, θα αναλυθούν οι έννοιες και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε στα υπόλοιπα κεφάλαια της εργασίας. Το μοντέλο μας ασχολείται με δύο μέρη της ασφαλιστικής θεωρίας, το Ντετερμινιστικό και το Στοχαστικό, επομένως θα αναφερθούμε σε πιθανότητες, σε στατιστικά μεγέθη, στη κίνηση Brown, το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito και τη διαδικασία Uchlebeck. Συνεπώς, είναι ένα κεφάλαιο αφιερωμένο στους αναγνώστες έτσι ώστε να μπορέσουν να ανταποκριθούν στη ροή της εργασίας και να κατανοήσουν ευκολότερα το μοντέλο μας. Επίσης, κάθε ορισμός θα ακολουθείται και από μία εφαρμογή για την εξοικείωση των αναγνωστών με τις μαθηματικές έννοιες.

1.1. Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο τη μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων,προτύπων ή μοντέλων γνωστών ως στοχαστικών υποδειγμάτων τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των στοχαστικών ή τυχαίων πειραμάτων και φαινομένων. Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Στην αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της τυχαιότητας. Έτσι η ρίψη ενός νομίσματος ή ενός ζαριού και η παρατήρηση του αποτελέσματος, όπως και η παρατήρηση του φύλου νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων αποτελούν στοχαστικά ή τυχαία πειράματα. Όταν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα πείραμα ή εμφανίζεται ένα φαινόμενο καθορίζουν το αποτέλεσμα, το πείραμα ή το φαινόμενο είναι γνωστό ως αιτιοκρατικό. Για την περιγραφή τούτων αρκούν τα αιτιοκρατικά μαθηματικά υποδείγματα τα οποία αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης άλλων κλάδων της επιστήμης.

1.1.1 Χώρος Πιθανότητας

Η θεωρία πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τυχαία φαινόμενα. Φαινόμενα στα οποία οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εξελίσσονται δεν προκαθορίζουν την έκβαση τους. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος. Για να μελετήσουμε αυτά τα τυχαία φαινόμενα πρέπει να ορίσουμε την τυπική μαθηματική δομή που λέγεται χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 1.1.1[9]: *Ένας χώρος πιθανότητας που σχετίζεται με ένα τυχαίο πείραμα αποτελείτε από τρία στοιχεία* (Ω, F, P) *για τα οποία ισχύουν τα εξής:*

Ω είναι το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και καλείται δειγματικός χώρος.

F *είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του* Ω *η οποία έχει τη δομή μίας σ-άλγεβρας.*

P *είναι η συνάρτηση η οποία σχετίζει έναν αριθμό* $P(A)$ *σε κάθε σύνολο* $A \in F$

1.1.2 σ-άλγεβρα

Όταν μιλάμε για πιθανότητες, εννοούμε πόσο δύσκολο ή εύκολο είναι να συμβεί κάποιο γεγονός. Συνεπώς, πρέπει να ορίσουμε κατάλληλα τις έννοιες ”γεγονός” και ‘‘εύκολο”. Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια ‘‘γεγονός” και για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να εισάγουμε την έννοια της σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.1.2[9]: *Έστω* Ω *κάποιο σύνολο. Ορίζουμε την **σ-άλγεβρα*** F *η οποία αποτελείται από υποσύνολα του* Ω *με τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \in F$

(ii) $A \in F \Rightarrow A^c \equiv \Omega \setminus A \in F$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in F \;\Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Η πρώτη ιδιότητα δείχνει ότι η οικογένεια υποσυνόλων του Ω περιλαμβάνει το κενό σύνολο, ενώ οι άλλες δύο ιδιότητες δηλώνουν ότι η οικογένεια των υποσυνόλων είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα των υποσυνόλων του αλλά και ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις του αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.1.1

Έστω ένα σύνολό Ω={2,4,6}, τότε η $F = \{\Omega, \emptyset, \{4\}, \{2, 6\}\}$ είναι σ-άλγεβρα καθώς ικανοποιεί και τις 3 παραπάνω ιδιότητες.

Παράδειγμα 1.1.2

Έστω ένα σύνολο Ω={1, 2, 5, 6}, τότε η F_1 = { Ω, ∅, {1}, {2}, {1, 5, 6}} δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί περιέχει τα σύνολα {1} και {2} αλλά όχι το $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$. Όμως, η $F_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{5,6\}, \{1,5,6\}, \{2,5,6\}\}$ είναι σ-άλγεβρα καθώς ικανοποιεί και τις 3 συνθήκες.

Ορισμός 1.1.3[9]**:** *Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που ορίζεται από ένα σύνολο A, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A. Η άλγεβρα αυτή συμβολίζεται με σ(A).*

Παράδειγμα 1.1.3

Θεωρούμε την σ-άλγεβρα ={∅, Ω, A, A^c} Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A , οπότε είναι η σ(A).

Παράδειγμα 1.1.4

Έστω A_1 και A_2 υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ και $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 = \Omega$. Τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει το A={A_1, A_2} είναι η $\{\emptyset, A_1, A_2, \Omega\}$

Παράδειγμα 1.1.5

Έστω A_1 και A_2 υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε, $A_i \cap A_j = \emptyset$ και $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 = \Omega$. Το παρακάτω σύνολο, $\{\emptyset, A_1, A_2, A_3, \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_3,\ \Omega\}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα σ(A) η οποία περιέχει το A={A_1, A_2, A_3}

1.1.3 Μέτρο Πιθανότητας

Στη προηγούμενη παράγραφο αναλύσαμε την μαθηματική έννοια του γεγονότος. Σε αυτή τη παράγραφο θα εισάγουμε την έννοια του μέτρου πιθανότητας για να αναλύσουμε το πόσο εύκολα μπορεί να πραγματοποιηθεί κάποιο γεγονός. Ουσιαστικά, θα αναφερθούμε σε μία συνάρτηση P η οποία παίρνει ένα σύνολο και το αντιστοιχεί σε μία τιμή. Το σύνολο θα αντιστοιχεί στην πραγματοποίηση ενός ή περισσοτέρων ενδεχομένων και η τιμή θα αντιστοιχεί στο πόσο εύκολο είναι να πραγματοποιηθούν τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα. Αυτή τη συνάρτηση θα την ονομάζουμε μέτρο πιθανότητας

Ορισμός 1.1.4[7]**:** *Ένα μέτρο πιθανότητας P σε μία σ-άλγεβρα A υποσυνόλων ενός συνόλου Ω είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού την A που έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) $P(\Omega) = 1$
(ii) $P(A) \geq 0$ *για κάθε* $A \in A$
(iii) Αν A_n, *n=1, 2, 3,…, είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην A , τότε*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Παράδειγμα 1.1.6

Θεωρούμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός νομίσματος, έστω A_κ το ενδεχόμενο να εμφανιστεί κ φορές η όψη κορώνα. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A_\kappa)$ για κ=0, 1, 2, 3. Όντως το παρακάτω σύνολο είναι ο δειγματικός χώρος Ω,Ω={ΚΚΚ, ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΓΚΚ}, όπου "Γ" είναι η όψη Γράμματα και "Κ" η όψη Κορώνα. Επειδή τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι ισοπίθανα, θα χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας$P(A_\kappa) = \frac{\mathrm{N}(A_\kappa)}{\mathrm{N}(\Omega)}$

Όπου, N(A_κ) ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A_κ και
όπου, N(Ω) ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου Ω και

Έχουμε,

A_0={ΚΚΚ}, A_1={ΓΚΚ, ΚΓΚ,ΚΚΓ}, A_2={ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ}, A_3={ΓΓΓ}. Οπότε, τα μέτρα των πιθανοτήτων $P(A_0), P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ είναι:

$P(A_0)$=1/8, $P(A_1)$=3/8, $P(A_2)$=3/8, $P(A_3)$=1/8

1.1.4 Ανεξαρτησία

Η έννοια ανεξαρτησίας είναι μία έννοια πολύ μεγάλης σημασίας στην θεωρία πιθανοτήτων. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για γεγονότα, κατόπιν θα συνεχίσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για συλλογές γεγονότων, δηλαδή για σ-άλγεβρες και τέλος θα ορίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 1.1.5[5]**:** *Δύο γεγονότα A και B λέγονται ανεξάρτητα αν* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. *Πρακτικά, δύο γεγονότα είναι αν το ένα δεν επηρεάζει το άλλο.*

Παράδειγμα 1.1.7

Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα κατά το οποίο ρίχνουμε δύο αμερόληπτα νομίσματα. Ας ονομάσουμε Α το γεγονός στο οποίο το πρώτο νόμισμα φέρνει γράμματα και Β το γεγονός στο οποίο το νόμισμα φέρνει γράμματα. Είναι προφανές ότι τα δύο αυτά γεγονότα είναι ανεξάρτητα, αφού το τι φέρνει το ένα νόμισμα δεν επηρεάζει το τι θα φέρει το άλλο. Εύκολα παρατηρούμε πως $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Παράδειγμα 1.1.18

Αν δύο γεγονότα Α και Β είναι ανεξάρτητα τότε και τα γεγονότα A^c *και* B^c είναι επίσης ανεξάρτητα, πράγματι:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= (P(A \cap B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \big(1 - P(A)\big)(1 - P(B)) \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

Ορισμός 1.1.6: *Θεωρούμε μια σ-άλγεβρα F επάνω σε ένα σύνολο Ω, οι σ-υποάλγεβρες $F_i, i \in I$ της F ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε υποσύνολο J του I και κάθε σύνολο $A_\iota \in F_i$ έχουμε:*

$$P\big(\cap_{n \in J} A_n\big) = \prod_{n \in J} P(A_n)$$

Ορισμός 1.1.7: *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \in I$ ονομάζονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.*

Παράδειγμα 1.1.9

Έστω ότι έχουμε δύο νομίσματα με τα οποία εκτελούμε ρίψη, ονομάζουμε X_1 την τυχαία μεταβλητή

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{πρώτο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

και την τυχαία μεταβλητή X_2

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{δεύτερο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες καθώς το αποτέλεσμα της μίας μεταβλητής δεν επηρεάζει την άλλη. Αντιθέτως, αν η X_2 εξαρτιόταν από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης, τότε οι τυχαίες μεταβλητές δε θα ήταν ανεξάρτητες.

1.1.5 Δεσμευμένη πιθανότητα

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας οφείλεται στις περιπτώσεις όπου μερική γνώση, ως προς την έκβαση, ενός τυχαίου πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και πιθανότητα $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $\mathrm{A} \subseteq \Omega$. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο εκτέλεσής του πειράματος πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο $\mathrm{A} \subseteq \Omega$. Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο σύνολο A και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο B (ως προς το δειγματικό χώρο Ω) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο $\Gamma = \mathrm{AB}$ το οποίο συμβολίζεται με B/A και διαβάζεται το ενδεχόμενο B δεδομένου του ενδεχομένου A. Η πιθανότητα του ενδεχομένου B δεδομένου του A, η οποία συμβολίζεται με $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$, $\mathrm{B} \subseteq \Omega$ και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα δεδομένου του , συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες $P(\mathrm{A})$ *και* $P(AB)$. Το επόμενο παράδειγμα χρησιμεύει στην καλύτερη κατανόηση του πλαισίου στο οποίο τοποθετείται η δεσμευμένη πιθανότητα.

Ορισμός 1.1.8[5]: *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού τυχαίου πειράματος και $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του A, είναι μία συνάρτηση $P(B/A)$, $\mathrm{B} \subseteq \Omega$, η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A),} \ , \quad B \subseteq \Omega$$

η $\mathrm{P(B|A)}$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του Β δεδομένου του Α.

Παράδειγμα 1.1.10

Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το 5. Τα σφαιρίδια 1 και 2 είναι άσπρα ενώ τα σφαιρίδια 3, 4 και 5 είναι μαύρα.

α) Έστω ότι σε μία πρώτη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος περιλαμβάνει τα ισοπίθανα δειγματικά σημεία $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και το ενδεχόμενο της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου περιλαμβάνει τα σημεία $A = \{1, 2\}$. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, $P(A) = 2/5 \textit{ και } P(A') = 3/5$

β) Έστω ότι από την ανωτέρω κληρωτίδα εξάγονται τυχαία δύο σφαιρίδια, το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανατοποθέτηση. Ο δειγματικός χώρος Ω του σύνθετου αυτού τυχαίου πειράματος περιλαμβάνει τα εξής 20 ισοπίθανα δειγματικά σημεία:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),$$
$$(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

Το ενδεχόμενο A, εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην πρώτη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα 8 δειγματικά σημεία:

$$A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$

ενώ το ενδεχόμενο B, εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην δεύτερη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα 8 δειγματικά σημεία:

$$B = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$$

Έτσι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A είναι ίση με $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 8/20 = 2/5$

Ας υποθέσουμε ότι στην πρώτη κλήρωση του συνθέτου τυχαίου πειράματος πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο A, της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου. Η γνώση της πραγματοποίησης του A παρέχει επιπρόσθετη πληροφόρηση ως προς την τελική έκβαση του συνθέτου τυχαίου πειράματος συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο Ω στο σύνολο A και το ενδεχόμενο B στο ενδεχόμενο $AB = \{(1,2),(2,1)\}$

Επομένως, η δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A είναι ίση με $P(B|A) = N(AB)/N(A) = 2/8 = 1/4$

1.2. Βασικές Έννοιες Θεωρίας Στατιστικής

Η Στατιστική είναι η επιστήμη που συνδυάζει ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων, έτσι ώστε μετά από την επεξεργασία τους να μπορούμε να συνοψίσουμε και να παρουσιάσουμε συνοπτικά και αποτελεσματικά την εξαγωγή συμπερασμάτων. Η Στατιστική επιτυγχάνει τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση των στατιστικών στοιχείων, δηλαδή των αριθμητικών δεδομένων, με τη εφαρμογή κατάλληλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων.

1.2.1 Συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής

Τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τυχαίου πειράματος δύνανται να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ποσοτικό χαρακτηριστικό του τυχαίου πειράματος, ή συμβολικές εκφράσεις με γράμματα του αλφαβήτου, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που περιγράφουν ποιοτικό χαρακτηριστικό του πειράματος. Οι περιπτώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ενιαία με την αντιστοίχηση σε κάθε ενδεχόμενο ενός πραγματικού αριθμού. Επιπλέον, σε ένα τυχαίο πείραμα το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε ενδεχόμενα. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.2.1[3]: *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε ενδεχόμενο ω ∈ Ω έναν πραγματικό αριθμό x = X(ω).*

Σημειώνουνε ότι οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με τα κεφαλαία γράμματα χωρίς δείκτες X,Y,Z,W ή με δείκτες $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\kappa$ και οι τιμές τους με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$.

Επίσης, για να συνεχίσουμε και να ορίσουμε τις συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στην συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.2.2[3]: *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει πραγματική μη αρνητική συνάρτηση,* $f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *, τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο* $A \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$

με

$$P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με α < β να ισχύει

$$P(a < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Η $f(x)$ καλείται πυκνότητα πιθανότητας ή απλώς πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 1.2.3[3]: *Ονομάζουμε συνάρτηση κατανομής F μιας τυχαίας μεταβλητής X, την συνάρτηση*

$$F(x) = P(X \leq x)\,, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Αν θεωρήσουμε πως η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι συνεχής τότε έχουμε,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \quad -\infty < x < \infty$$

Επίσης αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x τότε παραγωγίζοντας τη παραπάνω σχέση παίρνουμε την

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Παράδειγμα 1.2.1

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα [0,2] και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Θα προσδιορίσουμε τη πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X. Η συνάρτηση κατανομής της X είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση κατανομής βρίσκουμε την συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεαβλητής X

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x < 0 \text{ ή } \chi > 2 \end{cases}$$

Ορισμός 1.2.4[3]**:** *Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται διακριτή αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών $\{x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots\}$, δηλαδή*

$$P(X \in \{x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots\}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1$$

Στην περίπτωση αυτή η

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \qquad \kappa = 0, 1, 2 \ldots$$

καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και ισχύει

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1$$

Ορισμός 1.2.5[3]**:** *Έστω Χ μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \quad \kappa = 0, 1, 2 \dots$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Υποθέτουμε ότι οι δυνατές τιμές $x_0, x_1, x_2 \dots$ *έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε* $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$. *Τότε,*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < x_0 \\ \sum_{\kappa=0}^{r} f(x_\kappa), & x_r \leq x \leq x_{r+1}, \ r = 0, 1, 2 \dots \end{cases}$$

και

$$f(x_r) = \begin{cases} F(x_0), & r = 0 \\ F(x_r) - F(x_{r-1}), & r = 1, 2, \dots \end{cases}$$

1.2.2 Η σ-άλγεβρα που παράγεται από μια τυχαία μεταβλητή

Ας θεωρήσουμε έναν χώρο πιθανοτήτων *(Ω, F, P)* και την τυχαία μεταβλητή Χ θα παρατηρήσουμε πως η μεταβλητή παράγει μία σ-άλγεβρα από την οποία θα παράγονται ακόμη μικρότερες σ-άλγεβρες.

Ορισμός 1.2.6[9]**:** *Η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή Χ είναι μετρήσιμη, αποκαλείται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή Χ και συμβολίζεται σ(Χ).*

Παράδειγμα 1.2.2

Έχουμε δύο αμερόληπτα νομίσματα και εκτελούμε 3 διαδοχικές ρίψεις, η τυχαία μεταβλητή ορίζεται ως εξής:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{πρώτο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{δεύτερο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

και $Z = X_1 + X_2$

Οι X_1, X_2 *και* Z είναι τυχαίες μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές παίρνουν τις ακόλουθες τιμές στο Ω.

$\omega \in \Omega$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$Z(\omega)$
ΚΚ	1	1	2
ΚΓ	1	0	1
ΓΚ	0	1	1
ΓΓ	0	0	0

Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την X_1 είναι η $\sigma(X_1) = \{\emptyset, \Omega, \{KK, K\Gamma\}, \{\Gamma K, \Gamma\Gamma\}\}$, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την Z είναι:

$\sigma(Z) = \{\emptyset, \Omega, \{KK\}, \{\Gamma\Gamma\}, \{K\Gamma, \Gamma K\}, \{K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}, \{KK, \Gamma\Gamma\}, \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}\}$

1.2.3 Μέση τιμή

Η μέση ή αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών και συμβολίζεται με $E(X)$.

Ορισμός 1.2.7[7]**:** *Έστω ότι* X *είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας* $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$*. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση:*

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa)$$

με την προϋπόθεση ότι,

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} |x_\kappa| f(x_\kappa) < \infty$$

Ορισμός 1.2.8[7]**:** *Έστω ότι X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Βασική προϋπόθεση ύπαρξης της παραπάνω ποσότητας είναι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος να συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,dx < \infty$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i) Η μέση τιμή είναι γραμμικός τελεστής, δηλαδή αν $X \;και\; Y$ είναι τυχαίες μεταβλητές και c_1, c_2 σταθερές τότε $E[c_1X + c_2Y] = c_1E(X) + c_2E(Y)$.

ii) Αν $X \leq Y \;τότε\; E(X) \leq E(Y)$

iii) Αν $X = c$, όπου c σταθερά, τότε $E(X) = c$

iv) Αν $X \geq 0$ τότε $E(X) = \int X\,dP = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$, όπου P μέτρο πιθανότητας

Παράδειγμα 1.2.3

Θεωρούμε ότι X είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το χρόνο σε λεπτά που απαιτείται για την επισκευή μίας ηλεκτρονικής συσκευής. Η τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & διαφορετικά \end{cases}$$

Ο μέσος χρόνος για την επισκευή μίας ηλεκτρονικής συσκευής

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{2} x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2} = 1$$

Παράδειγμα 1.2.4

Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου, δηλαδή ενός ζαριού. Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την $f(X) = P(X = x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Παρατηρούμε πως η μεταβλητή μας είναι διακριτή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_{\kappa} f(x_{\kappa})$$

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

1.2.4 Διακύμανση – Συνδιακύμανση

Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής είναι το μέγεθος το οποίο μας δείχνει πόσο κοντά στην μέση τιμή της βρίσκονται οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 1.2.9[9]: *Σαν διακύμανση $Var(X)$ της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται η ποσότητα*

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

όπου,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - E(X)^2] \\ &= E[X^2 - 2X \cdot E(X) + E(X)^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Αν έχουμε πάνω από μία μεταβλητές, τότε χρησιμοποιούμε την συνδιακύμανση, η οποία ορίζεται παρακάτω.

Παράδειγμα 1.2.5

Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου, δηλαδή ενός ζαριού. Να υπολογισθεί η διακύμανση $Var(X)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την $f(X) = P(X = x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Η διακύμανση δίνεται από τον παρακάτω τύπο $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Παρατηρούμε πως η μεταβλητή μας είναι διακριτή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa)$$

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} {x_\kappa}^2 f(x_\kappa)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

Επομένως,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{35}{12}$$

Παράδειγμα 1.2.6

Έστω ότι ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου μετρούμενος σε ώρες είναι μια συνεχής μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, \ \ 0 \leq x \leq \theta$$

Όπου θ>0 είναι παράμετρος της κατανομής. Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης του φαρμάκου $E(X)$ και τη διασπορά του χρόνου απορρόφησης $Var(X)$. Παρατηρούμε πως η μεταβλητή μας είναι διακριτή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} x\frac{2(\theta - x)}{\theta^2}dx = \frac{2}{\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta - x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{\theta} - \frac{2x^3}{3\theta^2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta}{3}$$

Επίσης,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^2 x^2(\theta - x)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3\theta} - \frac{x^4}{2\theta^2}\right]_0^2 = \frac{\theta^2}{6}$$

Επομένως,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^2}{9}$$

$$Var(X) = \frac{\theta^2}{18}$$

Ορισμός 1.2.10[9]**:** *Έστω $X\, και\, Y$ δύο τυχαίες μεταβλητές. Ως συνδιακύμανση $Cov(X,Y)$, ορίζεται η ποσότητα*

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Όπου,

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y) - E(X+Y)]^2 \\ &= E[\big(X - E(X)\big) + (Y - E(Y)]^2 \\ &= E(X - E(X)^2) + E(Y - E(Y)^2) + 2E\big(X - E(X)\big)(Y - E(Y)) \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2\mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y} - \mathrm{E}(\mathrm{Y}))] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, πως η διακύμανση του αθροίσματος των τυχαίων μεταβλητών $X\, και\, Y$ δεν ισούται με το άθροισμα των διακυμάνσεων τους. Η ποσότητα $E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ ονομάζεται συνδιακύμανση των $X\, και\, Y$ και συμβολίζεται με $Cov(X,Y)$. Σύμφωνα με το παραπάνω καταλήγουμε στον εξής τύπο:

$$Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Επίσης, παρατηρούμε πως η συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $X\, και\, Y$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες, είναι μηδέν.

$$Cov(X,Y) = 0$$

1.2.5 Ροπές και Ροπογεννήτρια

Ορισμός 1.2.11[12]**:** *Η ροπή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X τάξης r συμβολίζεται με $E(X^r)$ και ορίζεται από τον εξής τύπο*

$$E(X^r) = \sum_x x^r\, P(X = x)$$

Ορισμός 1.2.12[12]: *Η ροπή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X τάξης r συμβολίζεται με $E(X^r)$ και ορίζεται από τον εξής τύπο*

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

Ορισμός 1.2.13[12]: *Έστω μία τυχαία μεταβλητή X για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $E(e^{tx})$ για κάθε t που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής (-δ, δ), δ>0. Τότε η συνάρτηση $M_x(t) = E(e^{tx})$ ονομάζεται ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X*

Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

Ενώ, αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Οι ιδιότητες της ροπογεννήτριας εόναι οι κάτωθι

α) Ισχύει πάντα ότι $M_x(0) = 1$

β) Οι ροπές της X μπορούν να βρεθούν αν πάρουμε διαδοχικές παραγώγους της $M_x(t)$

$$E(X) = \left[\frac{d}{dx} M_x(t)\right]_{t=0}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dx^2} M_x(t)\right]_{t=0}$$

Παράδειγμα 1.2.7

Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι $f(x) = 3e^{-3x}$, $x > 0$. Θα βρούμε τη ροπογεννήτρια $M_x(t)$ και με βάση αυτή τη ροπογεννήτρια θα βρούμε τη πρώτη και τη δεύτερη ροπή καθώς και τη διακύμανση της X.

$$M_x(t) = \int_0^{\infty} e^{tx}\, 3e^{-3x} dx = 3\int_0^{\infty} e^{-(3-t)x}\, dx = \frac{3}{3-t}, t < 3$$

$$E(X) = \left[\frac{d}{dx} M_x(t)\right]_{t=0} = \left[\frac{3}{(3-t)^2}\right]_{t=0} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dx^2} M_x(t)\right]_{t=0} = \left[\frac{3 \cdot 2 \cdot (3-t)}{(3-t)^4}\right]_{t=0} = \frac{2}{9}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{9}$$

Παράδειγμα 1.2.8

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τις τιμές των αποτελεσμάτων της ρίψης ενός ζαριού. Θα βρούμε τη ροπογεννήτρια $\mathrm{M_x(t)}$, τη πρώτη και τη δεύτερη ροπή καθώς και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής Χ με συνάρτηση πυκνότητας

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Η ροπογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x) = \sum_x e^{tx} \frac{1}{6} = \frac{e^t}{6} + \frac{e^{2t}}{6} + \cdots + \frac{e^{6t}}{6}$$

$$M_x(t) = \frac{1}{6} e^t \left(\frac{e^{6t} - 1}{e^t - 1}\right)$$

Η πρώτη ροπή είναι:

$$E(X) = \left[\frac{d}{dx} M_x(t)\right]_{t=0} = \left[1\frac{e^t}{6} + 2\frac{e^{2t}}{6} + \cdots + 6\frac{e^{6t}}{6}\right]_{t=0}$$

$$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Η δεύτερη ροπή είναι:

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dx^2} M_x(t)\right]_{t=0} = \left[1\frac{e^t}{6} + 2 \cdot 2\frac{e^{2t}}{6} + \cdots + 6 \cdot 6\frac{e^{6t}}{6}\right]_{t=0}$$

$$E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + \cdots + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Επομένως η διακύμανση είναι:

$$Var(x) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

1.3 Βασικές Διακριτές και Συνεχείς Κατανομές

Στην ενότητα αυτό μελετώνται οι κατανομές που αναφέρονται στην εργασία. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνονται τα πιο βασικά και χρήσιμα στοχαστικά πρότυπα (μοντέλα) καθ' ένα από τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή μιας ευρείας κλάσης στοχαστικών πειραμάτων ή φαινομένων. Επίσης, υπολογίζονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής.

1.3.1 Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή

[7]Έστω τ.μ. X η οποία παίρνει τις τιμές $X = 1,2,\dots\kappa$ με σταθερή πιθανότητα $\frac{1}{\kappa}$, τότε λέμε ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}, & x = 1,2,\dots\kappa \\ 0, & \text{για άλλες τιμές} \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{1}{n}$$

Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(x) = \frac{\kappa + 1}{2} \qquad Var(X) = \frac{\kappa^2 - 1}{12}$$

1.3.2 Διωνυμική Κατανομη

Όταν γίνονται n δοκιμές ενός πειράματος, όπου υπάρχουν μόνο 2 δυνατά και αντίθετα αποτελέσματα. Επίσης θα πρέπει τα δύο αποτελέσματα να είναι ισοδύναμα και ανεξάρτητα σε όλες τις δοκιμές του πειράματος.

[12]Έστω τ.μ. X, τότε λέμε ότι η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \ \mu\varepsilon \ x = 0,1,2,\ldots,n$$

Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(x) = np \qquad\qquad Var(X) = np(1-p)$$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{\kappa=0}^{x} \binom{n}{\kappa} p^\kappa (1-p)^{n-\kappa}, & 0 \le x < n \\ 1, & x \ge n \end{cases}$$

Παραδειγμα 1.3.1

Μια βιομηχανία κατασκευάζει μεταλλικά ελάσματα για να αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές παραγωγής, κάθε τέτοιο έλασμα αντέχει στη συγκεκριμένη καταπόνηση με πιθανότητα 0.8. Επιλέγουμε τυχαία 9 τέτοια ελάσματα και τα υποβάλλουμε στη συγκεκριμένη καταπόνηση. Θα βρούμε τη πιθανότητα να αντέξουν α) το πολύ 2 ελάσματα, β) περισσότερα από 7 ελάσματα, γ) τουλάχιστον 2 ελάσματα και δ) λιγότερα από 6 και τουλάχιστον 4 ελάσματα.

Αν X ο αριθμός των ελασμάτων που θα αντέξουν την καταπόνηση. Παρατηρούμε πως $X \sim B(9, 0.7)$ και επομένως για τις ζητούμενες πιθανότητες έχουμε:

(α)

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{9}{0} 0.8^2 0.2^9 + \binom{9}{1} o.8^1 0.2^8 + \binom{9}{2} 0.8^2 0.2^7$$

$$= 0.0003$$

(β)

$$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9)$$

$$= \binom{9}{8} 0.8^8 0.2^2 + \binom{9}{9} 0.8^8 0.2^2$$

$$= 0.436207$$

(γ)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \binom{9}{0} 0.8^0 0.2^9 - \binom{9}{1} 0.8^1 0.2^8$$

$$= 0.999981$$

(δ)

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \binom{9}{4} 0.8^4 0.2^5 + \binom{9}{5} 0.8^2 0.2^4$$

$$= 0.0825754$$

1.3.3 Κανονική Κατανομή

[3]*Η* Κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, κυρίως λόγω της ευρείας χρησιμότητάς της σε ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Μερικοί από τους λόγους που εξηγούν την εξέχουσα θέση της είναι οι εξής:

- πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά (π.χ. ύψος, βάρος, βαθμολογία σε τεστ κ.λ.π.) ακολουθούν (περιγράφονται ικανοποιητικά από) την Κανονική κατανομή.

- τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν Κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό, η Κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων
- το άθροισμα και ο μέσος όρος μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ακολουθεί κατά προσέγγιση Κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το ποια κατανομή ακολουθούν οι αρχικές παρατηρήσεις
- πολλές κατανομές, τόσο διακριτές όσο και συνεχείς, μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να προσεγγισθούν από την Κανονική κατανομή.

Έστω τ.μ. X, τότε λέμε ότι η X ακολουθεί κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Με μέση τιμή και διακύμανση: $E(x) = \mu \quad , \quad Var(X) = \sigma^2$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Επίσης, για την κανονική κατανομή ισχύει:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

Παράδειγμα 1.3.2

Η γραμμή του οπτικού πεδίου σύμφωνα με την οποία ένα βλήμα αποτυγχάνει τον στόχο του ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = -15\,m$ και διασπορά $25\,m^2$.

Θα υπολογίσουμε τη πιθανότητα το βλήμα να αποτύχει τον στόχο σε απόσταση μεγαλύτερη από $20\,m$.

Αν τ.μ. X η απόκλιση του βλήματος από τον στόχο. Τότε $X \sim N(-15, 25)$. Η ζητούμενη πιθανότητα δίδεται από τον τύπο:

$$P(|X| > 20) = 1 - P(-20 < X < 20)$$

$$= 1 - \{F(20) - F(-20)\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{20+15}{5}\right) + \Phi\left(\frac{-20+15}{5}\right)$$

$$= 1 - \Phi(7) - \Phi(-1)$$

$$P(|X| > 20) = 0.1587$$

1.3.4 Κατανομή Weibull

[12]Έστω τ.μ. X, τότε λέμε ότι η X ακολουθεί κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X = x) = \theta\gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^{\gamma}}$$

Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\theta^{1/\gamma}} \qquad Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \leq x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^{\gamma}}$$

1.3.5 Ομοιόμορφη Συνεχής Κατανομή

Η απλούστερη συνεχής κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη η οποία εκχωρεί ίσες πιθανότητες στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος με συνεχή δειγματικό χώρο Ω.

[7]Έστω τ.μ. X, ορισμένη στον Ω με πεδίο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$ $όπου\ \alpha < \beta$ πραγματικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x - a}{\beta - \alpha}, & a \leq x \leq \beta \\ 1, & \beta \leq x \end{cases}$$

Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad\qquad Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Παράδειγμα 1.3.3

Ας θεωρήσουμε ένα όργανο μέτρησης με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Το παρεχόμενο από το όργανο αυτό τέταρτο δεκαδικό ψηφίο 109 αποτελεί στρογγυλοποίηση προς τον πλησιέστερο ακέραιο. Τα σφάλματα που προκύπτουν από την στρογγυλοποίηση της μέτρησης ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha,\beta)$ με $\alpha = \frac{10^{-4}}{2}$ και $\beta = \frac{10^{-4}}{2}$. Θα υπολογίσουμε, (α) τη πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης μιας ποσότητας να είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερο του $\frac{10^{-4}}{3}$, (β) τη μέση τιμή και τη διασπορά του σφάλματος μέτρησης

(α) Χρησιμοποιώντας την συνάρτησης κατανομής, έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(|X| > \frac{10^{-4}}{3}\right) &= 1 - P\left(|X| \le \frac{10^{-4}}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(-\frac{10^{-4}}{3} \le X \le \frac{10^{-4}}{3}\right) \\ &= 1 - \left[F\left(\frac{10^{-4}}{3}\right) - F\left(-\frac{10^{-4}}{3}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας τους τύπους μέσης τιμής και διακύμανσης, έχουμε:

$$E(X) = 0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad Var(X) = \frac{10^{-8}}{12}$$

1.3.6 Λογαριθμική Κανονική Κατανομή

[3]Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες ενώ η τ.μ. X που μας ενδιαφέρει δεν ακολουθεί την Κανονική κατανομή, ένας απλός μετασχηματισμός μας οδηγεί σε Κανονική τυχαία μεταβλητή. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός ο οποίος

πολύ συχνά οδηγεί σε Κανονική κατανομή είναι ο $log\,X$. Αναφέρουμε πολύ σύντομα τα επόμενα παραδείγματα:

- η αντοχή Χ ενός υλικού σε συγκεκριμένες καταπονήσεις δεν ακολουθεί Κανονική κατανομή. Θεωρώντας όμως την τ.μ. $\log X$ η κατανομή που προκύπτει είναι Κανονική.
- η τ.μ. $\log X$ όπου Χ είναι η χρονική διάρκεια επώασης μιας μεταδοτικής νόσου ακολουθεί κατά προσέγγιση την Κανονική κατανομή
- αν Χ είναι η ποσότητα του ενζύμου SGPT (serum glutamic pyruvic transaminase) στο αίμα ενός ατόμου που πάσχει από ηπατίτιδα, τότε η τ.μ. $\log X$ έχει Κανονική κατανομή.
- ο λογάριθμος της ποσότητας ενός φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα από τη στιγμή χορήγησής του, ακολουθεί κατά προσέγγιση την Κανονική κατανομή.

Έστω ο μετασχηματισμός της τ.μ. X,

$$X = lnY \text{και } Y = e^x \text{ και } dx = \frac{1}{Y}$$

Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}$$

Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \text{ ή } (E(X))^2\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Συνάρτηση κατανομής:

$$F(X) = P(X \le x) = \Phi\left(\frac{lnx-\mu}{\sigma}\right)$$

Παράδειγμα 1.3.4

Από μια μελέτη της ποσότητας X του ενζύμου SGPT που περιέχεται στο αίμα των μη φορέων ηπατίτιδας ενός πληθυσμού βρέθηκε ότι $E(X) = 18.54$ και $Var(X) = 14.03$. Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή και θα υπολογίσουμε το ποσοστό των μη φορέων ηπατίτιδας στους οποίους η ποσότητα του ενζύμου SGPT είναι μικρότερη του 25.

Αν συμβολίσουμε με μ και σ^2 τις παραμέτρους της λογαριθμοκανονικής κατανομής που ακολουθεί η τ.μ. X, τότε:

$$E(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad\qquad Var(X) = (E(X))^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Οπότε,

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = 18.54 \quad \text{και} \quad (18.54)^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right) = 14.03$$

Συνεπώς,

$$e^{\sigma^2} - 1 = \frac{14.03}{(18.54)^2} \;\Leftrightarrow\; e^{\sigma^2} - 1 = 0.04$$

$$\sigma^2 = log\,1.04 \;\Leftrightarrow\; \sigma^2 = 0.04 \;\Leftrightarrow\; \sigma = 0.2$$

Επομένως,

$$\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = log18.54 \;\Leftrightarrow\; \mu = 2.92 - \frac{1}{2}0.04$$

$$\mu = 2.9$$

Το ζητούμενο ποσοστό δίνεται από τον τύπο:

$$P(X \le 25) = P(logX \le log25) = P\left(\frac{logX - \mu}{\sigma} \le \frac{log25 - 2.9}{0.2}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{3.22 - 2.9}{0.2}\right) = \Phi(1.6) = 0.9452$$

Άρα περίπου 94.5% των μη φορέων ηπατίτιδας στον πληθυσμό έχουν λιγότερες από 25 μονάδες ενζύμου SGPT στο αίμα τους.

2ο Κεφάλαιο

Στοχαστικές Διαδικασίες

Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται με το πέρασμα του χρόνου με αβέβαιο τρόπο, λέγεται ότι ακολουθούν μία στοχαστική διαδικασία[9]. Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτού χρόνου και σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη στην οποία η τυχαία μεταβλητή μπορεί πάρει κάποια τιμή μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, ενώ στη στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει κάποια τιμή οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν ακόμα να διακριθούν σε διαδικασίες διακριτής και συνεχούς τυχαίας μεταβλητής. Σε μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, ενώ στη διαδικασία διακριτής τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο συγκεκριμένες διακεκριμένες τιμές.

2.1. Η Κίνηση Brown

Μια κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί ένας τυχαίος περίπατος όπου κατά την ρίψη ενός νομίσματος έχουμε μία απείρως γρήγορη περιστροφή η οποία πραγματοποιείται σε απειροελάχιστα μικρά διαστήματα σε κάθε σημείο. Δηλαδή, μια κίνηση Brown αποτελεί έναν τυχαίο περίπατο που συμβαίνει σε συνεχή χρόνο με κινήσεις που είναι συνεχής και όχι διακριτές. Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται από μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $Z = \{Z(t)\}$ εξαρτώμενη από το χρόνο t, όπου $Z(t)$ αντιπροσωπεύει το συνολικό άθροισμα όλων των κινήσεων μετά από t περιόδους. Μία τέτοια οικογένεια ονομάζεται στοχαστική διαδικασία.

Όταν μία κίνηση που ξεκινάει απο το z, τότε η διαδικασία $Z(t)$ έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά[6]:

(1) $Z(0) = z$
(2) $Z(t+s) - Z(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διακύμανση s
(3) $Z(t+s_1) - Z(t)$ είναι ανεξάρτητες της $Z(t+s_2) - Z(t)$ όπου $s_1, s_2 > 0$. Δηλαδή, αυτά τα μικρά διαστήματα που πραγματοποιείται η κίνηση είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς, $Z(t+s) - Z(t)$ και $Z(t+s_1) - Z(t)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(4) $Z(t)$ είναι μία συνεχή συνάρτηση του χρόνου t

Αν $z = 0$ τότε η κίνηση Brown καλείται standard ή pure κίνηση Brown. Επίσης, η standard κίνηση Brown είναι γνωστή και ως κίνηση Wiener.

Παράδειγμα 2.1.1.

Η διακύμανση της $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \leq s < t$, είναι $Z(t) - Z(s) = Z\big(s + (t - s)\big) - Z(s)$, από την ιδιότητα (2) συμπαιρένουμε πως η διακύμανση είναι ίση με $t - s$

Παράδειγμα 2.1.2.

Θα αποδείξουμε πως $E[Z(t+s)|Z(t)] = Z(t)$

Για κάθε τυχαία μεταβλητή $X, Y\ και\ Z$ γνωρίζουμε πως:

$$E(X + Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z) \text{ και } E(X|X) = X$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις υποθέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z(t+s)|Z(t)] &= E[Z(t+s) - Z(t) + Z(t)|Z(t)] \\ &= E[Z(t+s) - Z(t)|Z(t)] + E[Z(t)|Z(t)] \\ &= 0 + Z(t) = Z(t) \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει πως η $Z(t)$ είναι martingale. Δηλαδή, αν για μία διαδικασία $Z(t)$ ισχύει $E[Z(t+s)|Z(t)] = Z(t)$, τότε ονομάζεται martingale.

Παράδειγμα 2.1.3.[6]

Υποθέτουμε πως $Z(3) = 6$, θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E[Z(7)|Z(3)]$.

Έχουμε $E[Z(7)|Z(3)] = E[Z(3+4)|Z(3)] = Z(3) = 6$

Παράδειγμα 2.1.4.

Έστω Z μία σταντάρ κίνηση Brown. Θα αποδείξουμε ότι $E\big(Z(t)Z(s)\big) = \min\{t, s\}$ όπου $t, s \geq 0$
Υποθέτουμε $t \geq s$, εφόσον $Z(t)$ είναι standard κίνηση Brown, τότε ισχύει

$$Z(0) = 0,$$

Έχουμε, $E[Z(t)] = E[Z(t) - Z(0)] = 0$ $και$ $Var[Z(t)] = Var[Z(t) - Z(0)] = t - 0 = t.$

$$
\begin{aligned}
Όμως\ Var[Z(t)] &= E[Z(t)^2] - (E[Z(t)])^2 \\
&= E[Z(t)^2] - 0 = E[Z(t)^2] \\
&= t
\end{aligned}
$$

Επισης,
$$
\begin{aligned}
E\big(Z(t)Z(s)\big) &= E[\big(Z(s) + Z(t) - Z(s)\big)Z(s))] \\
&= E[\big(Z(s)\big)^2] + E[\big(Z(t) - Z(s)\big)Z(s)] \\
&= s + E[Z(t) - Z(s)]E[Z(s)] \\
&= s + 0 = \min\{t, s\}
\end{aligned}
$$

Αφού $Z(t) - Z(s) και\, Z(s) = Z(s) - Z(0)$ είναι ανεξάρτητες, συμφωνα με την ιδιότητα (3)

Στη συνέχεια θα απόδειξουμε ότι μία Standard κίνηση Brown Z μπορει να προσεγγιστεί από ένα σύνολο ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Για μικρά χρονικά διαστήματα h μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μεταβολές της Z απο τη στιγμή t έως $t + h$ από την εξίσωση:

$$Z(t + h) - Z(t) = Y(t + h)\sqrt{h}$$

Όπου $Y(t)$ είναι τα αποτελέσματα μιας τυχαίας κληρωσης που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $Y(t) = \pm 1$ και πιθανότητα 0.5. Επίσης, $E[Y(t)] = 0$ και $Var[Y(t)] = 1$.

Έστω το διάστημα [0,T] το οποίο διαιρείται σε n υποδιαστήματα με μήκος $h = \frac{T}{n}$. Οπότε,

$$
\begin{aligned}
Z(T) &= Z(T) - Z(0) \\
&= [Z(h) - Z(0)] + [Z(2h) - Z(h)] + [Z(3h) - Z(2h)\,] + \cdots \\
&\quad \ldots + [Z\big((n-1)h\big) + Z\big((n-2)h\big) + Z(nh) - Z\big((n-1)h\big) \quad (*)
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$Z(T) = \sum_{i=1}^{n} [Z(ih) - Z\big((i-1)h\big)]$$

Έχουμε,

$$(*) = Y(o+h)\sqrt{h} + Y(2h)\sqrt{h} + \cdots + Y(nh)\sqrt{h}$$

$$= [Y(h) + Y(2h) + \cdots + Y(nh)]\sqrt{h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y(ih)\sqrt{h}$$

$$= \sqrt{T}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)\right]$$

Όμως, $E[Y(ih)] = 0$, έχουμε

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E[Y(ih)] = 0$$

Ομοίως, $Var(Y(ih)) = 1$

$$Var\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$$

Αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως μία standard κίνηση Brown μπορεί να προσεγγιστεί από ένα σύνολο ανεξάρτητων διωνυμικών κληρώσεων με μέση τιμή 0 και διακύμανση h.

Οπότε, από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)$$

το όριο ακολουθεί κανονική κατανομή, έστω W

$$Z(T) = \sqrt{T}W(T)$$

Συνεπώς, η $Z(T)$ προσεγγίζεται από κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T.

Γνωρίζουμε πως $Var[W(t)] = 1 \;\kappa\alpha\iota\; E[W(t)] = 0$

Οπότε,

$$E[Z(T)] = E\left[\sqrt{T}W(T)\right]$$

$$= \sqrt{T} E[W(T)] = 0$$

Επίσης,

$$Var[Z(T)] = Var\left[\sqrt{T} W(T)\right]$$

$$= (\sqrt{T})^2 Var[W(T)]$$

$$= T$$

Επομένως,

$$Z(T) \sim N(0, T)$$

Στο στοχαστικό λογισμό η Z(t) γράφεται σε μορφή ολοκληρώματος ως εξής:

$$Z(T) = \int_0^T dZ(t)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 2.1.5.

Αν Z μία standard κίνηση Brown. Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E\big(Z(4)Z(5)\big)$. Γνωρίζουμε πως $Z(5) - Z(4) και\, Z(4) = Z(4) - Z(0)$

$$E\big(Z(4)Z(5)\big) = E[Z(4)\{Z(5) - Z(4) + Z(4)\}] = E[Z(4)^2] + E[Z(4)\big(Z(5) - Z(4)\big)]$$

$$= E[Z(4)^2] + E\big[Z(4)\big(Z(5) - Z(4)\big)\big]$$

$$= E[Z(4)^2] + E[Z(4)]E[Z(5) - Z(4)]$$

$$= E[Z(4)^2] - [E(Z(4))]^2 + E[Z(4)]E[Z(5)]$$

$$= Var\big(Z(4)\big) = 4$$

2.2. Αριθμητική Κίνηση Brown

Σε μία standard κίνηση Brown, η $dZ(t)$ έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Μπορούμε να το γενικεύσουμε αυτό επιτρέποντας μη μηδενική μέση τιμή και μία αυθαίρετη τιμή. Η $X(t)$ ορίζεται ως[6]:

$$X(t+h) - X(t) = ah + sY(t+h)\sqrt{h}$$

Όπου $Y(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητη που ακολουθεί διωνυμική κατανομή. Το ah απεικονίζει drift term (παράγοντας μετατόπισης) και το $s\sqrt{h}$ απεικονίζει το noise term (όρος θορύβου). Έστω $T > 0$, τότε ο διαχωρισμός του [0,T] σε n υποδιαστήματα γίνεται με μήκος $h = \frac{T}{n}$. Οπότε,

$$X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^{n} (a\frac{T}{n} + sY(ih)\sqrt{\frac{T}{n}})$$

$$= aT + \sigma(\sqrt{T}\sum_{\iota=1}^{\nu}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}})$$

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα η ποσότητα $\sqrt{T}\sum_{\iota=1}^{\nu}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T. Επομένως,

$$X(T) - X(0) = aT + \sigma Z(t)$$

Όπου Z είναι η standard κίνηση Brown. Η στοχαστική διαφορική μορφή αυτής της παράστασης είναι η εξής:

$$dX(t) = adt + \sigma Z(t) \qquad (2.1)$$

Μια στοχαστική διαδικασίας $\{X(\tau)\}_{t\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί την συνήθη διαφορική εξίσωση (σ.δ.ε.) (2.1) ονομάζεται αριθμητική κίνηση Brown. Με $E\big(X(t) - X(0)\big) = at$ και $Var\big(X(T) - X(0)\big) = Var\big(at + \sigma Z(t)\big) = \sigma^2 t$. Το a είναι η στιγμιαία μεση τιμή ανά χρονικό διάστημα ή ο drift factor και το σ^2 είναι η στιγμιαία διακύμανση ανά χρονικό διάστημα. Η διαφορά $X(t) - X(0)$ είναι κανονικά κατανεμημμένη, με αναμενόμενη μέση τιμή at και διακύμανση $\sigma^2 t$. Επομένως η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημμένη με μέση τιμή $X(0) + at$ και διακύμανση $a^2 t$.

Παράδειγμα 2.2.1.

Αν η $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μία αριθμητική κίνηση Brown με drift factor a και μεταβλητότητα σ. Θα αποδείξουμε ότι $X(t) = X(a) + a(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}W(t)$, όπου W είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή. Χρησιμοποιώντας την σ.δ.ε. (2.1) γράφουμε

$$X(t) - X(a) = a(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}W(t)$$

έτσι, η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημμένη με μέση τιμή $X(a) + a(t-a)$ και διακύμανση $\sigma^2(t-a)$

Παράδειγμα 2.2.2.

Αν η $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μία αριθμητική κίνηση Brown όπου $X(31) = 2$. Ο drift factor είναι 0.345 και η μεταβλητότητα 0.75. Θα υπολογίσουμε τη πιθανότητα $X(40) < 0$

Η μέση τιμή της κανονικά κατανεμημμένης $X(40)$ είναι:

$$X(31) + \alpha(40-31) = 2 + 0.435 \times 9 = 5.92$$

Η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sigma\sqrt{t-a} = 0.75\sqrt{40-31} = 2.25$$

$$\Pr(X(40) < 0) = \Pr\left(Z < \frac{0-5.92}{2.25}\right) = N(-2.62) = 0.0044$$

Παράδειγμα 2.2.3.

Αν η $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μία αριθμητική κίνηση Brown που αρχίζει από το 0 με $\alpha = 0.2$ *και* $\sigma^2 = 0.125$. Θα υπολογίσουμε τη πιθανότητα το $X(2)$ να είναι μεταξύ 0.1 και 0.5.

Γνωρίζουμε πως η $X(2)$ είναι κανονικά κατανεμημμένη με μέση τιμή $\alpha T = 0.4$ και διακύμανση $\sigma^2 T = 0.125 \times 2 = 0.25$. Επομένως,

$$\Pr(0.1 < X(2) < 0.5) = N\left(\frac{0.5-0.4}{0.5}\right) - N\left(\frac{0.1-0.4}{0.5}\right) = 0.57926 - 0.274253 = 0.305$$

2.3. Η Διαδικασία Ornestein – Uhlenbeck

Κατά τη μοντελοποίηση της τιμολόγησης χρηματοοικονομικών παραγώγων και ειδικότερα προιόντων (commodities)[13],[14], παρατηρείται η τάση οι τιμές να επανέρχονται στον μέσο όρο. Έτσι, αν μια τιμή ξεκινά από τη μέση τιμή και μεταβάλλεται είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, τότε σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα θα τείνει να επανέλθει στη μέση τιμή. Αυτό το μοντέλο της επαναφοράς της τιμής προς τη μέση τιμή περιέχει περισσότερη οικονομική λογική από την αριθμητική κίνηση Brown που αναλύσαμε πιο πάνω. Επίσης, μπορούμε να ενσωματώσουμε την επαναφορά αυτή τροποποιώντας τον drift factor στην (2.1):

$$dX(t) = \lambda[a - X(t)]dt + \sigma dZ(t) \quad (2.2)$$

όπου a είναι η μακροχρόνια μέση τιμή στην οποία η $X(t)$ τείνει να επανέλθει, σ είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας λ είναι η ταχύτητα της αναστροφής ή ο παράγοντας αναστροφής και $Z(t)$ είναι η κίνηση Brown. Η εξίσωση (2.2.) είναι η διαδικασία Ornestein – Uhlenbeck.

Παράδειγμα 2.3.1.

Θα επιλύσουμε τη σ.δ.ε. (2.2).

Θέτουμε $Y(t) = X(t) - a$. Έτσι έχουμε,

$$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dZ(t)$$

ή

$$dY(t) + \lambda Y(t)dt = \sigma dZ(t)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$d\left[e^{\lambda t}Y(t)\right] = e^{\lambda t}\sigma dZ(t)$$

Οπότε ολοκληρώνοντας από το 0 εώς το t έχουμε,

$$\int_0^t d\left[e^{\lambda t}Y(t)\right] = \int_0^t e^{\lambda s}\sigma dZ(s) \quad \Leftrightarrow \quad \left[e^{\lambda t}Y(t)\right]_0^t = \sigma\int_0^t e^{\lambda s}dZ(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[e^{\lambda t}Y(t)\right]_0^t = \sigma\int_0^t e^{\lambda s}dZ(s) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \sigma\int_0^t e^{\lambda s}dZ(s)$$

$$Y(t) = e^{-\lambda t}Y(0) + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dZ(s)$$

Αντικαθιστώντας το $Y(t)$, το οποί έχουμε θέσει $Y(t) = X(t) - a$ έχουμε,

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + a\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dZ(s)$$

2.4. Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η αριθμητική κίνηση Brown έχει πολλά μειονεκτήματα, ονομαστικά[6]:

- η $X(t)$ μπορεί να είναι αρνητική με αποτέλεσμα η αριθμητική κίνηση Brown να είναι ένα όχι και τόσο καλό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές

- η μέση τιμή και η διακύμανση των μεταβολών, σε όρους δολαρίου, είναι ανεξάρτητη από το επίπεδο της τιμής της μετοχής. Στη πράξη, αν η τιμή της μετοχής διπλασιαστεί, θα αναμέναμε μία διπλασίαση της αξίας του δολαρίου όσο και της τυπικής απόκλισης του δολαρίου

Αυτά τα μειονεκτήματα μπορούν να εξαλειφθούν με την γεωμετρική κίνηση Brown την οποία θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε παρακάτω.

Εφόσον ο drift factor και η μεταβλητότητα στην αριθμητική κίνηση Brown είναι παράγοντες του $X(t)$, τότε η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση[10]

$$dX(t) = a\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dZ(t) \quad (2.3)$$

ονομάζεται διαδικασία Ito. Συγκεκριμένα, αν $a\big(X(t)\big) = \alpha X(t)\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\big(X(t)\big) = \sigma X(t)$, τότε η (2.3) γίνεται

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma X(t)dZ(t)$$

ή

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = adt + \sigma dZ(t) \quad (2.4)$$

Η διαδικασία στη προηγούμενη εξίσωση ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown. Επίσης η εξίσωση (2.4) αναφέρει πως η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί κανονική κατανομή με στιγμιαία μέση τιμή a και στιγμιαία διακύμανση σ^2.

Παράδειγμα 2.4.1.

Αν μία γεωμετρική κίνηση Brown της μορφης:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = 0.413dt + 0.524dZ(t)$$

Θα βρούμε (α) τη στιγμιαία μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής της αξίας του περιουσιακού στοιχείου και (β) τη στιγμιαία διακύμανση της ποσοστιαίας μεταβολής της αξίας του περιουσιακού στοιχείου.

(α) Σύμφωνα με τον τύπο (2.4) παρατηρούμε πως ο παράγοντας α ισούται με 0.413, επομένως η στιγμιαία μέση τιμή είναι 0.413.

(β) Ομοίως, ο παράγοντας σ^2 ισούται με 0.524, οπότε η στιγμιαία διακύμανση είναι 0.524

Για μια αυθαίρετη αρχική τιμή $X(0)$ η εξίσωση (2.4) μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$X(t) = X(0)e^{(a-0.5\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}Z}$$

Όπου Z είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους 0 και 1. Εναλλακτικά, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(t) = X(0)e^{(a-0.5\sigma^2)t+\sigma Z(t)}$$

Όπου Z είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους 0 και t. Η $X(t)$ είναι μία εκθετική συνάρτηση, οπότε η $X(t)$ ακολουθεί την λογαριθμική κατανομή με μέση τιμή $E\big(X(t)\big) = X(0)e^{at}$ και διακύμανση $Var\big(X(t)\big) = e^{2at}X(0)^2\big(e^{\sigma^2 t} - 1\big)$. Παρατηρούμε πως η $lnX(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $lnX\big((0)\big) + (a - 0.5\sigma^2)t$ και διακύμανση $\sigma^2 t$.

Όποτε,

$$\ln X(t) = lnX(0) + (a - 0.5\sigma^2)t + \sigma Z(t)$$

Συμπαιρένουμε πως όταν η X ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, τότε ο λογάριθμος της ακολουθεί αριθμητική κίνηση Brown. Επομένως,

$$d[lnX(t)] = (a - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dZ(t)$$

Παράδειγμα 2.4.2.

Η τιμή μιας μετοχής είναι 100. Η αξία της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με drift rate 10% ανά έτος και το ποσοστό διακύμασνσης είναι 9% ανά έτος. Θα υπολογίσουμε τη πιθανότητα σε δύο χρόνια από τώρα η αξία της μετοχής να υπερβεί τα 200.

Η πιθανότητα που θέλουμε είναι

$$\Pr(S(2) > 200) = \Pr(\ln\left(\frac{S(2)}{S(0)}\right) > ln2)$$

Όμως, $\ln\left(\frac{S(2)}{S(0)}\right)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή:

$$(a - 0.5\sigma^2)\mathrm{t} = (0.10 - 0.5(0.09) \times 2 = 0.11$$

και η διακύμανση:

$$\sigma^2 t = 0.09 \times 2 = 0.18$$

επομένως,

$$\Pr(S(2) > 200) = \Pr\left(Z > \frac{ln2 - 0.11}{\sqrt{0.18}}\right) = 1 - N(1.37) = 1 - 0.915 = 0.085$$

Παράδειγμα 2.4.3.

Αν μία γεωμετρική κίνηση Brown με drift factor 0.10. Για $h = \frac{1}{365}$, υποθέτουμε πως ο λόγος του noise term με το drift factor είναι 22.926. Θα υπολογίσουμε τη τυπική απόκλιση σ. Από τα δεδομένα συμπαιρένουμε

$$\frac{\sigma\sqrt{h}}{ah} = 22.926 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma}{0.10\sqrt{\frac{1}{365}}} = 22.926$$

Αν η εξίσωση αυτή λυθεί ως προς σ, τότε βρίσκουμε την τυπική απόκλιση, $\sigma = 0.12$

$3^{ο}$ Κεφάλαιο

Αναλογιστικά Μοντέλα Πληρωμών

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλογιστικά μεγέθη που συναντάμε στην εργασία μας. Θα γίνει ανάλυση των εννοιών και τον συμβολισμών που θα χρησιμοποιήσουμε, όπως οι χρηματοοικονομικές ράντες, οι ασφαλιστικές ράντες, η πιθανότητα επιβίωσης και διάφοροι συμβολισμοί της ασφαλιστικής επιστήμης. Με τον όρο ράντα εννοούμε μία σειρά πληρωμών που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Υπάρχουν δύο είδη ραντών που θα συναντήσουμε στην εργασία μας, οι χρηματοοικονομικές ράντες και οι ασφαλιστικές ράντες ή αλλιώς ράντες ζωής. Οι πληρωμές επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες ανάλογα με το είδος τους. Οι ράντες μας βοηθούν να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών λαμβάνοντας υπόψη αυτές τους παράγοντες.

3.1. Χρηματοοικονομικές Ράντες

Χρηματοοικονομικές ράντες είναι αυτές που οι πληρωμές τους επηρεάζονται από τα τρέχοντα επιτόκια. Λαμβάνοντας υπόψη τα αναμενόμενα ή τα πραγματικά επιτόκια μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών. Με τον όρο παρούσα αξία αναφερόμαστε σε μελλοντικές πληρωμές και συγκεκριμένα στην αξία αυτών των πληρωμών τη παρούσα χρονική στιγμή. Ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας δίνεται παρακάτω[13],[2]:

$$ΠΑ = \frac{K}{(1+i)^t}$$

Όπου, $ΠΑ$: παρούσα αξία
K: κεφάλαιο
i: επιτόκιο
t: αριθμός ετών

Παράδειγμα 3.1.1[13]

Θα βρούμε το ποσό που πρέπει να επενδυθεί με επιτόκιο 9% ετησίως για να εισπράξουμε το ποσό των 1000 ν.μ. στο τέλος των 3 ετών.

$$ΠΑ = \frac{K}{(1+i)^t} \Rightarrow ΠΑ = \frac{1000}{1{,}09^3} \Rightarrow ΠΑ = 772$$

Άρα η παρούσα αξία του ποσού των 1000 ν.μ. είναι 772 ν.μ.. Δηλαδή, πρέπει να επενδυθούν 772 ν.μ. για να εισπράξουμε το ποσό των 1000 ν.μ. στο τέλος των 3 ετών.

3.1.1. Προεξοφλητικό επιτόκιο

Όπως αναφέραμε πιο πάνω ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας είναι:

$$ΠΑ = \frac{K}{(1+i)^t}$$

Από τον συγκεκριμένο τύπο, την ποσότητα $\frac{1}{(1+i)}$ θα την συμβολίσουμε με υ, δηλαδή

$$\upsilon = \frac{1}{(1+i)}$$

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο για t χρόνια, τότε:

$$\upsilon^t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Επομένως, ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας γράφεται ως εξής[13]:

$$ΠΑ = K\upsilon^t$$

3.1.2. Ληξιπρόθεσμες Ράντες

Σε αυτές τις ράντες έχουμε στο τέλος κάθε έτους μία πληρωμή και η παρούσα αξία της ράντας συμβολίζεται με a_n, όπου το n συμβολίζει τον αριθμό των πληρωμών. Με την βοήθεια του προεξοφλητικού επιτοκίου μπορούμε να ορίσουμε την παρούσα αξία της ράντας ως[13]:

$$a_n = \upsilon^1 + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^{n-1} + \upsilon^n \Rightarrow$$

$$a_n = \sum_{n=1}^{n} \upsilon^n$$

Παρατηρούμε πως η a_n είναι άθροισμα n-όρων μιας γεωμετρικής προόδου, επομένως με τον τύπο του αθροίσματος μπορούμε να αποδείξουμε πως για n-πληρωμές 1 νομισματικής μονάδας ο τύπος που υπολογίζουμε την παρούσα αξία της ράντας είναι ο εξής[2]:

$$a_n = 1 \cdot \frac{1 - \upsilon^n}{i}$$

Παράδειγμα 3.1.2

Θα βρούμε τη παρούσα αξία μιας immediate ράντας , η οποία πληρώνει 1000€ για 20 χρόνια με επιτόκιο $i = 7\%$. Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο,

$$\upsilon^t = \frac{1}{(1+i)^t} \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{(1+0{,}07)^{20}} \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{3{,}87} \Rightarrow \upsilon = 0{,}26 \text{ ή } \upsilon = 2{,}6\%$$

$$a_n = 1000 \cdot \frac{1 - \upsilon^n}{i} \Rightarrow a_{20} = 1000 \cdot \frac{1 - 0{,}26}{0{,}07} \Rightarrow a_{20} = 10.594€$$

Άρα η παρούσα αξία της ράντας είναι 10.594€

3.1.3. Προκαταβλητέες Ράντες

Σε αυτές τις ράντες έχουμε πληρωμές στο τέλος κάθε έτους και η παρούσα αξία της ράντας συμβολίζεται με $\ddot{a}_n$, όπου το n συμβολίζει τον αριθμό των πληρωμών. Με την βοήθεια του προεξοφλητικού επιτοκίου μπορούμε να ορίσουμε την παρούσα αξία της ράντας ως[13]:

$$a_n = 1 + \upsilon^1 + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^{n-1} \Rightarrow$$

$$\ddot{a}_n = \sum_{n=0}^{n-1} \upsilon^n$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως και στις Immediate, αποδεικνύεται πως ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της ράντας είναι:

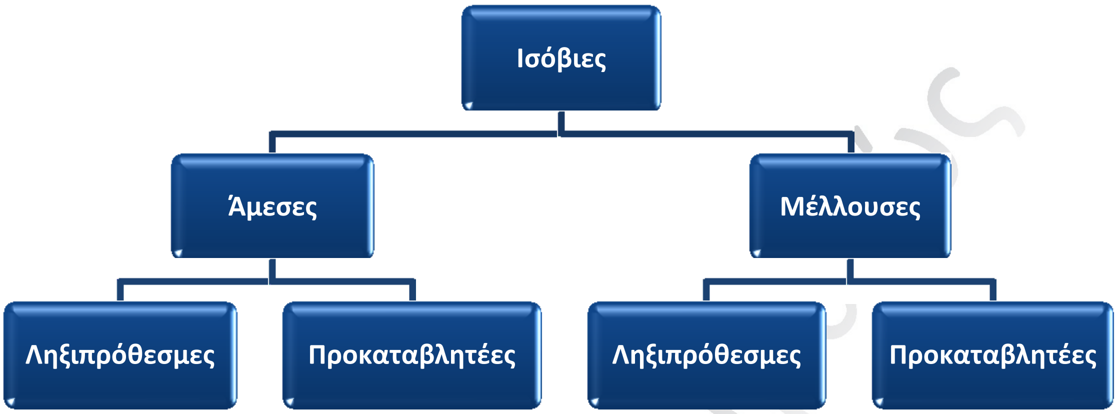
$$\ddot{a}_n = 1 \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

3.2. Ασφαλιστικές Ράντες

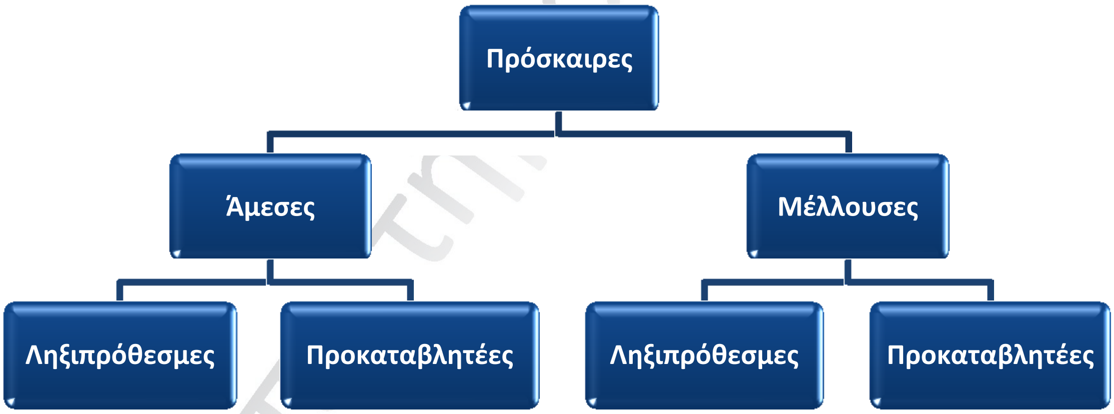
Ασφαλιστικές ράντες ή ράντες ζωής είναι αυτές των οποίων οι πληρωμές επηρεάζονται από δύο παράγοντες, ο πρώτος παράγοντας είναι το ονομαστικό επιτόκιο και ο δεύτερος παράγοντας είναι η πιθανότητα επιβίωσης του ασφαλισμένου. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα επιβίωσης εκφράζει πόσο πιθανό είναι να ζει κάποια χρονική στιγμή ένα άτομο ορισμένης ηλικίας έτσι ώστε να εισπράξει την πληρωμή.

Οι ράντες οι οποίες θα παρουσιάσουμε σε αυτή την ενότητα είναι η ισόβια άμεση, η ισόβια μέλλουσα, η πρόσκαιρη άμεση και η πρόσκαιρη μέλλουσα. Παρακάτω θα γίνει αναλυτική επεξήγηση αυτών των ραντών και θα παρατεθούν κάποια παραδείγματα.

Διάγραμμα 1: Ισόβιες Ράντες Ζωής



Διάγραμμα 2: Πρόσκαιρες Ράντες Ζωής



3.2.1. Συμβολισμός και τυπολόγιο αναλογιστικών μεγεθών

Αναλόγως με την διάρκεια ή τους όρους ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου χρησιμοποιούμε την κατάλληλη πιθανότητα επιβίωσης της οποίας τη τιμή παίρνουμε από τους πίνακες θνησιμότητας. Παρακάτω ακολουθεί ο συμβολισμός για μερικά αναλογιστικά μεγέθη που θα χρησιμοποιήσουμε.

Πίνακας 1[8]: Αναλογιστικά Μεγέθη

Σύμβολα	Ορισμός
$a_{\overline{n}\|i}$	η παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών 1 ν.μ. στο τέλος κάθε έτους για n έτη με επιτόκιο i
$\ddot{a}_{\overline{n}\|i}$	η παρούσα αξία μιας σειράς πληρωμών 1 ν.μ. στην αρχή κάθε έτους για n έτη με επιτόκιο i
$s_{\overline{n}\|i}$	η μελλοντική αξία μιας σειράς πληρωμών 1 ν.μ. στο τέλος κάθε έτους για n έτη με επιτόκιο i
$\ddot{s}_{\overline{n}\|i}$	η μελλοντική αξία μιας σειράς πληρωμών 1 ν.μ. στην αρχή έτους για n έτη με επιτόκιο i
p_x	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να επιβιώσει σε ηλικία *x+1*
q_x	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να αποβιώσει το επόμενο έτος
μ_x	η ένταση θνησιμότητας για ένα άτομο ηλιίας *x*
${}_np_x$	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να επιβιώσει μέχρι την ηλικία *x+n*
${}_nq_x$	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να αποβιώσει μέχρι την ηλικία *x+n*
${}_{n/}q_x$	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να επιβιώσει μέχρι την ηλικία *x+n* και να αποβιώσει το επόμενο έτος
${}_{n/m}q_x$	η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας *x* να επιβιώσει μέχρι την ηλικία *x+n* και να αποβιώσει μέσα στα επόμενα *m* έτη
l_x	άτομα εν ζωή στην ηλικία x
d_x	άτομα που απεβίωσαν κατά την ηλικία x
${}_nd_x$	άτομα που απεβίωσαν κατά την ηλικία x

Πίνακας 2[8]: Τυπολόγιο Αναλογιστικών Μεγεθών

$\boldsymbol{{}_tp_x = 1 - {}_tq_x}$	$\boldsymbol{{}_tq_x = 1 - {}_tp_x}$
$\boldsymbol{{}_kp_x = p_x\, p_{x+1}\, p_{x+2} \cdots p_{x+k-1}}$	${}_{k/}q_x = {}_kp_x\, q_{x+k}$
$\boldsymbol{p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}}$	${}_np_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}$
$\boldsymbol{q_x = \dfrac{d_x}{l_x} = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}}$	${}_nq_x = \dfrac{{}_nd_x}{l_x} = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$
$\boldsymbol{l_{x+1} = l_x - d_x}$	$d_x = l_x - l_{x+1}$
$\boldsymbol{d_x = q_x\, l_x}$	${}_nq_x = 1 - \boldsymbol{p_x\, p_{x+1}\, p_{x+2} \cdots p_{x+k-1}}$

3.2.2. Ισόβια Άμεση Προκαταβλητέα Ράντα

Στην ισόβια άμεση προκαταβλητέα ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ. (νομισματικής μονάδας), οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται με την υπογραφή του συμβολαίου και στην αρχή κάθε έτους μέχρι τον θάνατο του ασφαλισμένου, έτσι εξηγείται ο όρος «ισόβια». Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^t$$

Όπου, υ: προεξοφλητικό επιτόκιο

t: μεταβλητή που εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής του ασφαλισμένου

Επομένως, η τιμή του ασφάλιστρου ή του **Ενιαίου Καθαρού Ασφαλίστρου**[15],[4] (ΕΚΑ) θα είναι:

$$E(Z) = \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^t\, {}_tp_x$$

Όπου, x: η ηλικία του ασφαλισμένου

3.2.3. Ισόβια Μέλλουσα Προκαταβλητέα Ράντα

Στην ισόβια μέλλουσα προκαταβλητέα ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ., οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται σε m-έτη μετά από το έτος υπογραφής του συμβολαίου και στην αρχή κάθε έτους μέχρι τον θάνατο του ασφαλισμένου. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ΕΚΑ.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le t < m \\ \upsilon^m + \upsilon^{m+1} + \cdots + \upsilon^t, & t \ge m \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=m}^{\infty} \upsilon^t \, {}_t p_x$$

3.2.4. Πρόσκαιρη Άμεση Προκαταβλητέα Ράντα

Στην πρόσκαιρη άμεση προκαταβλητέα ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ., οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται με την υπογραφή του συμβολαίου και στην αρχή κάθε έτους και σταματούν n-έτη μετά, ανεξαρτήτως εάν ο ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή. Σε περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποβιώσει σε αυτό το διάστημα, τότε οι πληρωμές σταματούν στην αρχή εκείνου του έτους. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \begin{cases} 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^t \quad , & 0 \le t < n \\ 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^{n-1}, & t \ge n \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=0}^{n-1} \upsilon^t \, {}_t p_x$$

Παραδειγμα 3.2.1[4]

Έχουμε μία πρόσκαιρη άμεση προκαταβλητέα ράντα 3 – ετών για ένα άτομο ηλικίας x με πληρωμές των 10 ν.μ. στην αρχή κάθε έτους. Δίνεται πως $p_x = p_{x+1} = p_{x+2} = 0.9$ και επιτόκιο $i = 0.05$. Έστω Ζ η παρούσα αξία της ράντας, θα βρεθεί η αναμενόμενη παρούσα αξία της ράντας Ε(Ζ) και η διακύμανση V(Z). Αρχικά θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία Ζ της ράντας:

$$Z = 10 + 10\upsilon \ + 10\upsilon^2$$
$$Z = 10 + 10 \cdot 0.95238 + 10 \cdot 0.90703$$
$$Z = 28.5941$$

Η Ζ είναι η παρούσα αξία της χρηματοοικονομικής ράντας, για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία, πρέπει να ενσωματόσουμε και της πιθανότητες επιβίωσης:

$$E(Z) = 10 \sum_{t=0}^{2} \upsilon^t \ {}_tp_x$$

$$E(Z) = 10(\upsilon^0 + \upsilon^1 \, p_x + \upsilon^2 \, {}_2p_x)$$

$$E(Z) = 10(1 + 0.95238 \cdot 0.9 + 0.90703 \cdot p_x \cdot p_{x+1}$$

$$E(Z) = 10(1 + 0.95238 \cdot 0{,}9 + 0.90703 \cdot 0.81)$$

$$E(Z) = 10(1 + 0.857142 + 0.7347)$$

$$E(Z) = 25.9$$

Για να υπολογίσουμε τη διακύμανση

$$Var(Z) = E(Z^2) + E(Z)$$

Συνεπώς πρέπει να υπολογίσουμε την δεύτερη ροπή της παρούσας αξίας

$$E(Z^2) = 10^2 + 9{,}5238^2 \cdot 0.9 + 9.0703^2 \cdot 0.81$$

$$E(Z^2) = 248.2$$

$$Var(Z) = E(Z^2) + E(Z)$$

$$Var(Z) = 222.3$$

Τις τιμές για το προεξοφλητικό επιτόκιο $(\upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3 \ldots)$ *τις συναντάμε στους πίνακες που παρατίθεται στο τέλος της εργασίας.*

3.2.5. Πρόσκαιρη Μέλλουσα Προκαταβλητέα Ράντα

Στην πρόσκαιρη μέλλουσα προκαταβλητέα ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται m-έτη μετά την υπογραφή του συμβολαίου και συνεχίζονται για n-έτη στην αρχή κάθε έτους. Οι πληρωμές σταματάνε μετα απο n-έτη ανεξαρτήτως αν ο ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή. Σε περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποβιώσει στο διάστημα των πληρωμών, τότε αυτές σταματούν. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε[15]:

$$Z = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t < m \\ \upsilon^m + \upsilon^{m+1} + \cdots + \upsilon^t , & m \le t \le m+n \\ \upsilon^m + \upsilon^{m+1} + \cdots + \upsilon^{m+n-1}, & t \ge m+n \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=m}^{m+n-1} \upsilon^t \, {}_t p_x$$

3.2.6. Ισόβια Άμεση Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Στην ισόβια άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ., οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται στο τέλος του έτους που υπογράφηκε το συμβόλαιο και στο τέλος κάθε έτους μέχρι τον θάνατο του ασφαλισμένου. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \upsilon + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^t$$

Επομένως, η τιμή του ασφάλιστρου θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=1}^{\infty} \upsilon^t \, {}_t p_x$$

3.2.7. Ισόβια Μέλλουσα Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Στην ισόβια μέλλουσα ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ., οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται σε m-έτη μετά από το έτος υπογραφής του συμβολαίου και στο τέλος κάθε έτους μέχρι τον θάνατο του ασφαλισμένου. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ΕΚΑ.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \begin{cases} 0 , & 0 < t \leq m \\ \upsilon^{m+1} + \upsilon^{m+2} + \cdots , & t > m \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=m+1}^{\infty} \upsilon^t \, {}_t p_x$$

3.2.8. Πρόσκαιρη Άμεση Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Στην πρόσκαιρη άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών 1 ν.μ., οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται στο τέλος του έτους που υπογράφηκε το συμβόλαιο και στην αρχή κάθε έτους και σταματούν n-έτη μετά, ανεξαρτήτως εάν ο ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή. Σε περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποβιώσει σε αυτό το διάστημα, τότε οι πληρωμές σταματούν στο τέλος εκείνου του έτους.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \begin{cases} \upsilon + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^t & , \quad 0 < t \leq n \\ \upsilon + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \cdots + \upsilon^{n-1} & , \quad t > n \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα:

$$E(Z) = \sum_{t=1}^{n} \upsilon^t \ {}_t p_x$$

Παραδειγμα 3.2.2 [4]

Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα επιβίωσης, να υπολογιστεί η παρούσα αξία μιας πρόσκαιρης άμεσης ράντας με πληρωμές 5 ν.μ. στο τέλος κάθε έτους για 8 έτη με επιτόκιο $i = 6\%$ ενός ατόμου ηλικίας x.

t	l_t	q_t	p_t	${}_t p_x$
0	1000	0.05	0.95	1
1	950	0.07	0.93	0.95
2	880	0.09	0.91	0.88
3	800	0.14	0.86	0.8
4	700	0.17	0.83	0.58
5	580	0.21	0.79	0.46
6	460	0.30	0.70	0.32
7	320	0.50	0.50	0.16
8	160	0.88	0.13	0.02

Χρησιμοποιώντας τους τύπους που αναγράφονται παραπάνω μπορούμε να συμπληρώσουμε έναν πίνακα επιβίωσης υπολογίζοντας τις πιθανότητες επιβίωσης μέσω της μεταβλητής l_t.

Μέσω του τύπου που μας δίνεται στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία της ράντας

Έχουμε,

$$\mathrm{E(Z)} = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} \upsilon^{\mathrm{t}}\ {}_{\mathrm{t}}\mathrm{p_x}$$

$$\mathrm{E(Z)} = 5(\textstyle\sum_{\mathrm{t=1}}^{8} \upsilon^{\mathrm{t}}\ {}_{\mathrm{t}}\mathrm{p_x} = \upsilon^1\ \mathrm{p_x} + \upsilon^2\ {}_2\mathrm{p_x} + \cdots + \upsilon^7\ {}_7\mathrm{p_x} + \upsilon^8\ {}_8\mathrm{p_x})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E(Z)} = 5(&0.94340 \cdot 0.95 + 0.89 \cdot 0.88 + 0.83962 \cdot 0.8 + 0.79209 \cdot 0.58 \\ &+\ 0.74726 \cdot 0.46 + 0.70496 \cdot 0.32 + 0.66506 \cdot 0.16 + 0.62741 \cdot 0.02)\end{aligned}$$

$E(Z) = 17.5$ ν.μ.

3.2.9. Πρόσκαιρη Μέλλουσα Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Στην πρόσκαιρη μέλλουσα ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε μία σειρά πληρωμών οι οποίες ξεκινούν να καταβάλλονται m-έτη μετά την υπογραφή του συμβολαίου και συνεχίζονται για n-έτη στο τέλος του κάθε έτους. Οι πληρωμές σταματάνε μετα απο n-έτη ανεξαρτήτως αν ο ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή. Σε περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποβιώσει στο διάστημα των πληρωμών, τότε αυτές σταματούν. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε την παρούσα αξία αυτών των ραντών και την αξία του ασφαλίστρου.

Έστω Π.Α. συμβολίζεται με Z, τότε:

$$Z = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t \leq m \\ \upsilon^{m+1} + \upsilon^{m+2} + \cdots + \upsilon^{t}\ , & m < t \leq m+n \\ \upsilon^{m+1} + \upsilon^{m+2} + \cdots + \upsilon^{m+n} & , \quad t > m+n \end{cases}$$

Επομένως, η τιμή του ΕΚΑ θα είνα[13]:

$$E(Z) = \sum_{t=m+1}^{m+n} \upsilon^t \; {}_tp_x$$

4ο Κεφάλαιο

Ασφαλιστικοί και Χρηματοοικονομικοί Κίνδυνοι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε για πρώτη φορά τους κινδύνους που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο μιας εταιρίας ασφαλίσεων ζωής, Ορισμένους θα τους περιγράψουμε συνοπτικά και για κάποιους θα γίνει μεγαλύτερη ανάλυση κυρίως σε θεωρητικό επίπεδο. Στην εργασία, θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση του επενδυτικού κινδύνου, του κίνδυνου θνησιμότητας όσον αφορά τις ασφαλίσεις ζωής και του κίνδυνου μακροβιότητας για το κομμάτι των συνταξιοδοτικών προϊόντων. Η μαθηματική ανάλυση αυτών των κινδύνων θα ακολουθήσει σε επόμενο κεφάλαιο.

Οι ασφαλιστικές που ασχολούνται με προγράμματα ζωής και συνταξιοδοτικά προϊόντα, έχουν ως στόχο την συγκέντρωση κεφαλαίου. Ένα μέρος των οποίων θα εξασφαλίζει την άδεια λειτουργίας της ασφαλιστικής εταιρείας, καθώς θα καλύπτουν τα εποπτικά κεφάλαια που ορίζονται από την εκάστοτε αρχή. Ένα άλλο μέρος αυτών των κεφαλαίων θα διατίθεται στην αγορά σε επενδύσεις που θα επιλέγει η ίδια η εταιρεία, για την μεγιστοποίηση των κερδών της. Οι επενδύσεις αυτές θα ανήκουν στο ενεργητικό της εταιρείας και μαζί με την υπόλοιπη άυλη και υλική περιουσία της θα αποτελούν τα περιουσιακά της στοιχεία. Σε αυτό το σημείο, να τονίσουμε πως η εταιρεία βρίσκεται εκτεθειμένη σε κίνδυνο λόγω των επενδύσεων της, όπου πολλές από αυτές βασίζονται στα τρέχοντα επιτόκια της αγοράς, άλλα και λόγω των ασφαλιστικών προϊόντων που συναλλάσσεται, τα οποία περιέχουν και τον ασφαλιστικό κινδύνο και τον επιτοκιακό κίνδυνο, αφού πολλά προϊόντα όπως τα συνταξιοδοτικά βασίζονται στα επιτόκια.

Οι κίνδυνοι που απασχολούν μία ασφαλιστική εταιρεία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τους ασφαλιστικούς κινδύνους και τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Ο ασφαλιστικός κίνδυνος πηγάζει από την ανάληψη ασφαλιστικών κινδύνων ζωής και αναφέρεται στους καλυπτόμενους κινδύνους όσο και στη διαδικασία που ακολουθείται για την διεξαγωγή των ασφαλιστικών εργασιών ζωής. Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι είναι αυτοί που απασχολούν κάθε χρηματοπιστωτικό οργανισμό και πηγάζουν από τις επενδύσεις που υλοποιεί η ασφαλιστική, αλλά και από τα ασφαλιστικά προϊόντα επενδυτικού τύπου.

4.1. Ασφαλιστικοί Κίνδυνοι

Οι ασφαλιστικοί κίνδυνοι που περιέχονται σε ένα χαρτοφυλάκιο με ασφαλιστήρια ζωής είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας (mortality risk), ο κίνδυνος μακροβιότητας (longevity risk), ο κίνδυνος ανικανότητας (disability risk), ο κίνδυνος εξαγοράς (lapse risk), ο κίνδυνος εξόδων (expenses risk) και ο κίνδυνος αναθεώρησης (revision risk).

4.1.1. Κίνδυνος Ανικανότητας

Ο κίνδυνος ανικανότητας[14] αντανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της ανικανότητας, στο βαθμό που η πιθανή επιδείνωση τους προκαλεί ζημιές στην επιχείρηση ή αύξηση των τεχνικών προβλέψεων. Ο συγκεκριμένος κίνδυνος εμπεριέχεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από το ενδεχόμενο ανικανότητας. Ο κίνδυνος αυτός επηρεάζεται από τις φυσικές καταστροφές, τις καταστροφές που οφείλονται σε ανθρώπινο παράγοντα και από τις σημαντικές ιατρικές εξελίξεις, οι οποίες μπορούν να μειώσουν σημαντικά τον κίνδυνο σε περίπτωση καινοτόμων ιατρικών ανακαλύψεων.

Δυστυχώς για τις ασφαλιστικές εταιρείες, τα διαθέσιμα στοιχεία για την παραμετροποίηση του κινδύνου ανικανότητας είναι συνήθως σε επίπεδο εταιρείας και αμφιβόλου ποιότητας. Ως βάση για την εκτίμηση του κινδύνου αποτελούν οι κλαδικές μελέτες.

4.1.2. Κίνδυνος Εξαγοράς

Ο κίνδυνος εξαγοράς[14] είναι ο κίνδυνος την ακύρωσης των συμβολαίων από την μεριά του ασφαλισμένου και αντανακλά την ζημιά που προέρχεται από την μεταβολή του ρυθμού των εξαγορών και των ακυρώσεων των συμβολαίων. Στην παραπάνω αναφορά συμπεριλαμβάνεται ο κίνδυνος της μόνιμης μεταβολής του ρυθμού εξαγορών, όπως επίσης και ο κίνδυνος γεγονότων μαζικής εξαγοράς. Αναλύεται σε δύο μέρη, σε αυτό που εξαρτάται από την κατάσταση των αγορών και σε αυτό που δεν εξαρτάται.

Τα στοιχεία για την παραμετροποίηση του κινδύνου εξαγοράς διαφοροποιούνται ανά επιχείρηση και ανά προϊόν, ενώ αντίθετα με τους λοιπούς ασφαλιστικούς κινδύνους, για την εκτίμηση του κινδύνου εξαγοράς που συνδέεται με την αγορά οι κλαδικές μελέτες δεν αποτελούν βάση.

4.1.3.Κίνδυνος Εξόδων

Ο κίνδυνος εξόδων[14] προκύπτει από την μεταβλητότητα των εξόδων εξυπηρέτησης των ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Τα έξοδα αυτά μπορεί να μεταβληθούν τόσο ως προς το μέγεθος τους κατά τη στιγμή της αποτίμησης , όσο και κατά τον ρυθμό αύξησης τους στο μέλλον.

4.1.4. Κίνδυνος Αναθεώρησης

Ο εν λόγω κίνδυνος προκύπτει από το ενδεχόμενο αναθεώρησης του ποσού ετήσιας προσόδου ή της κατάστασης της υγείας του ασφαλισμένου. Επίσης, προκύπτει από αλλαγές δικαστικών αποφάσεων ύστερα από ενστάσεις σε προηγούμενες αποφάσεις αποζημιώσεων. Έχει εφαρμογή μόνο στις παροχές που καταβάλλονται με τη μορφή προσόδου, το ποσό των οποίων δύναται να αναπροσαρμοστεί.

4.2. Χρηματοοικονομικοί Κίνδυνοι

Οι μη ασφαλιστικοί κίνδυνοι, όπως προαναφέρθηκε, είναι αυτοί που απασχολούν τους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς λόγω της επενδυτικής δραστηριότητας τους. Συνεπώς, οι κίνδυνοι που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας είναι ο κίνδυνος αγοράς (market risk), ο πιστωτικός κίνδυνος (credit risk) και ο λειτουργικός κίνδυνος (operational risk).

4.2.1. Πιστωτικός Κίνδυνος

Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος πιθανών ζημιών λόγω απρόσμενης αθέτησης των υποχρεώσεων ή δυσμενούς μεταβολής της πιστωτικής ικανότητας αντισυμβαλλομένων ή πιστωτών σε σχέση με συμβόλαια μείωσης κινδύνου όπως οι αντασφαλιστικές συμβάσεις, οι τιτλοποιήσεις και τα παράγωγα προϊόντα.

Γίνεται διαχωρισμός σε δύο τύπους σχετικά με τον τύπο έκθεσης στον κίνδυνο. Ο πρώτος τύπος έκθεσης είναι δύσκολο να διαφοροποιηθεί και έχει πιστοληπτικές διαβαθμίσεις όπως στις αντασφαλιστικές ανακτήσεις, στα παράγωγα προϊόντα, μετρητά στην τράπεζα και εγγυητικές επιστολές σε λιγότερους από 15 αντισυμβαλλόμενους. Ο δεύτερος τύπος έκθεσης διαφοροποιείται και δεν έχει πιστοληπτική διαβάθμιση όπως οι απαιτήσεις από διαμεσολαβούντες και εγγυητικές επιστολές σε περισσότερους από 15 αντισυμβαλλόμενους.

4.2.2. Λειτουργικός Κίνδυνος

Λειτουργικός κίνδυνος[14] είναι ο κίνδυνος εμφάνισης ζημιών λόγω ακατάλληλων ή προβληματικών εσωτερικών διαδικασιών, προβλημάτων στα λειτουργικά συστήματα και προβλημάτων στο προσωπικό. Επίσης, ο εν λόγω κίνδυνος περιλαμβάνει τους νομικούς κινδύνους που μπορεί να εμφανιστούν λόγω ακαταλληλότητας των λειτουργικών διαδικασιών, όμως δεν περιλαμβάνει τους κινδύνους που απορρέουν από στρατηγικές αποφάσεις καθώς και τον κίνδυνο φήμης.

4.3. Κίνδυνος Θνησιμότητας

Ένας από τους πιο σημαντικούς ασφαλιστικούς κίνδυνους στη διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου με ασφαλιστήρια ζωής είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας. Ο κίνδυνος θνησιμότητας αντανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας, στον βαθμό που η πιθανή επιδείνωση τους προκαλεί ζημίες στην εταιρεία. Ο κίνδυνος αυτός εμπεριέχεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από τη θνησιμότητα του ασφαλισμένου.

4.3.1. Υποθέσεις Θνησιμότητας

Οι υποθέσεις[1] για την θνησιμότητα ουσιαστικά καθορίζουν ποιο θα μπορούσε να είναι το κόστος των συμβολαίων. Μια λανθασμένη παραδοχή για το ποσοστό θνησιμότητας μπορεί να έχει μακροπρόθεσμες επιπτώσεις για μια εταιρεία, εξαιτίας της μακροπρόθεσμης φύσης των περισσότερων συμβολαίων.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την θνησιμότητα οι οποίοι ποικίλουν ανάλογα με τη δομή του χαρτοφυλακίου:

Ατομικοί Παράγοντες

Το φύλο, η ηλικία, το ιατρικό ιστορικό, η διατροφή, η άσκηση, το άγχος, το κάπνισμα, το αλκοόλ, τα ναρκωτικά, το οικογενειακό ιστορικό, οι ασχολίες, το επάγγελμα, η συμπεριφορά (όπως η επιθετική οδήγηση ή οδήγηση σε κατάσταση μέθης), η οικογενειακή κατάσταση, η φυσική κατάσταση, η εκπαίδευση, η οικονομική κατάσταση και η ψυχική κατάσταση

Περιβαλλοντικοί Παράγοντες

Η ρύπανση του αέρα και των υδάτων

Γεωγραφικοί Παράγοντες

Η υψηλότερη έκθεση σε υπεριώδη ακτινοβολία στο νότιο ημισφαίριο (που οδηγεί σε μια υψηλότερη συχνότητα εμφάνισης καρκίνου του δέρματος, η έκθεση σε περισσότερες μολυσματικές ασθένειες κυρίως σε περιοχές με τροπικό κλίμα

Ποιοτικοί Παράγοντες

Η προσβασιμότητα και το κόστος της διαθέσιμης ιατρικής φροντίδας, ιδιαίτερα της προληπτικής φροντίδας (εμβολιασμοί, εξετάσεις ρουτίνας), η επείγουσα περίθαλψη και οι ιατρικές θεραπείες για σοβαρές καταστάσεις (όπως η στεφανιαία χειρουργική επέμβαση, η χημειοθεραπεία, η ακτινοθεραπεία)

Πολιτιστικές Διαφορές

Σε ορισμένες χώρες, η ασφαλιστική απάτη μπορεί να είναι πιο συνηθισμένη, η αυτοκτονία μπορεί να θεωρείται ένας έντιμος τρόπος για να λύσουμε ένα προσωπικό πρόβλημα, τα όπλα μπορεί να είναι ευρέως διαθέσιμα και τα φαινόμενα βίας μπορεί να είναι πιο συχνά.

Διαφορές στο Underwriting

(α) στην επιμόρφωση των ασφαλιστών,
(β) στις μεθοδους και στα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ασφάλιση
(γ) στα όρια της εταιρείας για τους κινδύνους
(δ) στη συνέπεια της ασφάλισης,
(ε) στο ρόλο που διαδραματίζουν οι πράκτορες στη διαδικασία ασφάλισης
(στ)στις πληροφορίες που συλλέγονται για την ασφάλιση (ιατρικό ερωτηματολόγιο ιατρικές εξετάσεις, εξετάσεις αίματος, δείγμα ούρων, κλπ)

Διάφοροι Παράγοντες

Πόλεμοι, άλλα είδη ένοπλων συγκρούσεων, επιδημίες και φυσικές καταστροφές, όπως τυφώνες, σεισμοί και πλημμύρες.

4.3.2. Πίνακες Θνησιμότητας

Στις μεγάλες αγορές ασφαλειών ζωής οι εκτιμήσεις για τον κίνδυνο θνησιμότητας βασίζονται στους πίνακες θνησιμότητας. Ύστερα από μελέτες και αναλύσεις δημογραφικών στοιχείων προκύπτουν μεγάλοι πίνακες με ποσοστά θνησιμότητας. Συνήθως, βγαίνουν ξεχωριστοί πίνακες για κάθε φύλλο.

Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι πινάκων θνησιμότητας[1]:

Αθροιστικός Πίνακας

Οι τιμές του μεταβάλλονται μόνο από την συμπληρωμένη ηλικία του ασφαλισμένου. Αν εξαιρέσουμε από τον πίνακα τα προηγούμενα χρόνια ή επιλεγμένα χρόνια του συμβολαίου, τότε ο πίνακας θα ονομάζεται απόλυτος πίνακας.

Επιλεκτικός Πίνακας

Έχει τιμές που μεταβάλλονται τόσο από την ζητούμενη ηλικία όσο και από το έτος του συμβολαίου. Η λέξη "επιλογή" αναφέρεται στη χαμηλότερη θνησιμότητα που λαμβάνεται υπόψη μέσω της διαδικασίας underwriting. Η επιλογή είναι συχνά αμελητέα στις νεότερες ηλικίες και σημαντικότερη στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Επιλεκτικός και Απόλυτος Πίνακας

Είναι ο συνδυασμός αυτών των δύο πινάκων θνησιμότητας. Συνήθως ο επιλεκτικός πίνακας χρησιμοποιείται για τα πρώτα 15 με 25 χρόνια του συμβολαίου, ενώ ο απόλυτος πίνακας χρησιμοποιείται για τα επόμενα χρόνια. Για την τιμολόγηση των περισσότερων προϊόντων, οι εταιρείες χρησιμοποιούν αυτόν τον συνδυασμό.

Ο πίνακας 3 απεικονίζει τη σημαντική διαφορά μεταξύ επιλεκτικών και των απόλυτων πινάκων θνησιμότητας. Τα ποσοστά θνησιμότητας είναι πολύ μικρά και για να είναι πιο εύκολη η αντίληψη του μεγέθους τους τα εκφράζουμε ανά χίλια. Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε ένα ποσοστό θνησιμότητας γύρω στο 1,046% θα λέμε 10,46 στα 1000. Με την βοήθεια των πινάκων μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τρεις ασφαλισμένους που έχουν συμπληρώσει 60 έτη, αλλά έχουν ασφαλιστεί διαφορετικές ηλικίες ο καθένας:

Πίνακας 3: Ποσοστά Θνησιμότητας ανά χίλια άτομα

	Έτος συμβολαίου											
Ηλικία Ασφάλισης	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11+**	**Ηλικία Ασφαλισμένου**
50	4,87	5,51	6,15	6,93	7,83	9,30	10,69	12,06	13,40	14,77	19,50	60
51	5,24	5,95	6,69	7,57	8,61	10,29	11,76	13,24	14,75	16,32	21,47	61
52	5,64	6,45	7,29	8,29	9,48	11,37	12,90	14,53	16,23	18,04	23,65	62
53	6,08	6,99	7,96	9,09	10,43	12,53	14,14	15,93	17,85	19,95	26,05	63
54	6,57	7,60	8,70	9,95	11,44	13,79	15,49	17,47	19,65	22,06	28,69	64
55	7,11	8,27	9,50	10,86	12,54	15,17	16,96	19,16	21,62	24,39	31,57	65
56	7,70	8,91	10,20	11,62	13,44	16,20	18,25	20,69	23,33	26,55	34,68	66
57	8,33	9,58	10,95	12,44	14,41	17,33	19,64	22,34	25,16	28,85	38,00	67
58	8,99	10,29	11,75	13,32	15,46	18,55	21,15	24,12	27,10	31,28	41,60	68
59	9,70	11,06	12,62	14,28	16,61	19,87	22,77	26,00	29,12	33,88	45,54	69
60	10,46	11,89	13,57	15,32	17,85	21,28	24,48	27,97	31,28	36,71	49,90	70

Πηγή: D. Atkinson, J. Dallas "Products and Finance, Life Insurance",2000

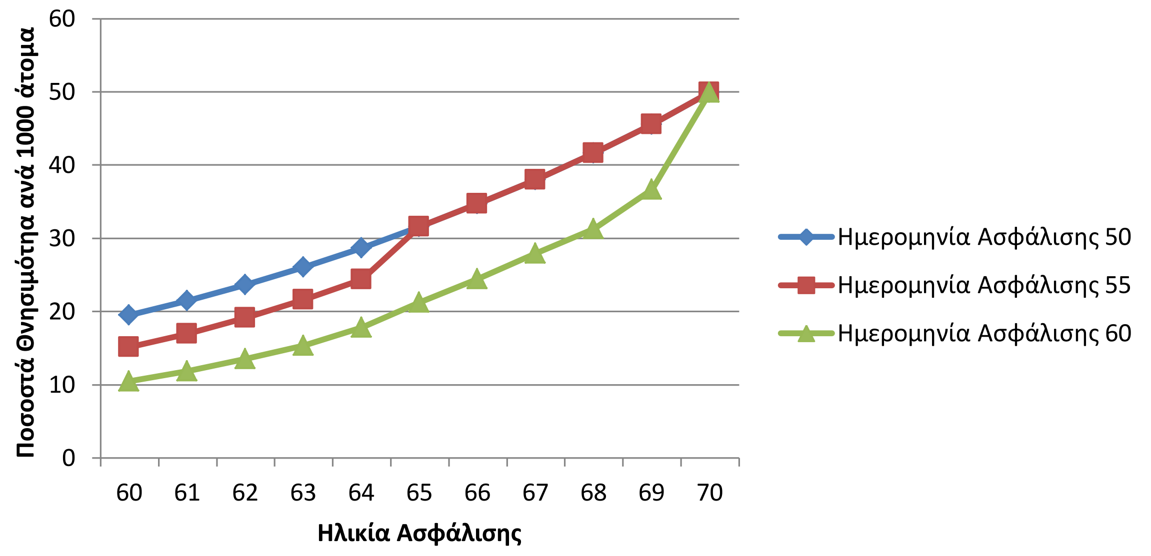
1. Ένας καινούριος ασφαλισμένος ηλικίας 60 ετών(ηλικία ασφάλισης 60, 1ο έτος συμβολαίου) έχει ποσοστό θνησιμότητας 10,46 ανά 1.000.

2. Ένας ασφαλισμένος εδώ και πέντε έτη, ηλικίας 60 ετών (ηλικία ασφάλισης 55, 5ο έτος συμβολαίου) έχει ποσοστό θνησιμότητας 15,17 ανά 1.000.

3. Ένας ασφαλισμένος εδώ και δέκα έτη, ηλικίας 60 ετών (ηλικία ασφάλισης 50, 10ο έτος συμβολαίου) έχει ποσοστό θνησιμότητας 19,50 ανά 1.000, σχεδόν διπλάσιο ποσοστό από τον καινούριο ασφαλισμένο.

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται τα ποσοστά θνησιμότητας από τον πίνακα 3 για τις ηλικίες των ασφαλισμένων 60-70 σε συνδυασμό με τις ηλικίες ασφάλισης στα 50, 55, και 60. Τα ποσοστά που παρουσιάζονται για την ηλικία ασφάλισης στα 50 έτη είναι από τον απόλυτο πίνακα. Οι πρώτες πέντε τιμές που εμφανίζονται για την ηλικία ασφάλισης στα 55 έτη είναι από τον επιλεκτικό πίνακα, ενώ οι τελευταίες έξι τιμές είναι από τον απόλυτο πίνακα. Τα πρώτα δέκα ποσοστά που παρουσιάζονται για την ηλικία ασφάλισης των 60 ετών είναι από τον επιλεκτικό πίνακα.

Διάγραμμα 1: Ποσοστά θνησιμότητας σε διάφορες ηλικίες ασφάλισης



Πηγή: D. Atkinson, J. Dallas “Products and Finance, Life Insurance”,2000

Για να αναπτυχθεί ένας αξιόπιστος συνδυαστικός πίνακας θνησιμότητας απαιτούνται πολλά χρόνια δεδομένων και δεκάδες χιλιάδες (αν όχι εκατοντάδες χιλιάδες) θανάτων για τη μελέτη. Ως αποτέλεσμα, οι περισσότεροι πίνακες θνησιμότητας είναι κατασκευασμένοι από την βιομηχανία της ασφάλισης ζωής λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της άθροισης των στοιχείων πολλών εταιρειών. Οι μεγαλύτερες εταιρείες, ιδίως εκείνες που συμβάλλουν στη κατασκευή των πινάκων θνησιμότητας, αναλύουν τα αποτελέσματα θνησιμότητας τους ως ποσοστό επί του πίνακα της βιομηχανίας. Ορισμένες μικρότερες εταιρείες μπορεί να μην έχουν τους πόρους για να αναλύσουν τα αποτελέσματα θνησιμότητας. Ως αποτέλεσμα, υποθέτουν ότι εκπροσωπούνται από τον μέσο όρο της θνησιμότητας.

Χρησιμοποιώντας το μέσο όρο του κλάδου για τη θνησιμότητα μπορεί να είναι επικίνδυνο, καθώς η θνησιμότητα ποικίλλει ευρέως από εταιρεία σε εταιρεία λόγω των πολλών παραγόντων, όπως είναι οι στόχοι και τα πρότυπα του underwriting κάθε εταιρείας. Οι εταιρείες με το χαμηλότερο ποσοστό θνησιμότητας μπορεί να εμφανίσουν το μισό της θνησιμότητας των εταιρειών με την υψηλότερη θνησιμότητα. Εάν τα αποτελέσματα της θνησιμότητας της εταιρείας δεν μπορούν να αναλυθούν, η εταιρεία θα πρέπει τουλάχιστον να αναλύσει τους παράγοντες που επηρεάζουν τη θνησιμότητα πριν από τον καθορισμό της θνησιμότητας.

Σε ορισμένες χώρες, οι πίνακες θνησιμότητας του κλάδου αναπτύχθηκαν με τα αθροιστικά ποσοστά θνησιμότητας, αντί των συνδυαστικών αποτελεσμάτων θνησιμότητας. Αυτό γίνεται συνήθως όταν υπάρχουν ανεπαρκή στοιχεία για την ανάπτυξη αξιόπιστων ποσοστών θνησιμότητας ή όταν τα αποτέλεσμα δεν φαίνονται να είναι αντιπροσωπευτικά. Δεν αποτελεί έκπληξη, πως οι εταιρείες που εδρεύουν σε χώρες χωρίς επιλεκτικούς πίνακες θνησιμότητας, τείνουν να βασίζουν τις υποθέσεις της θνησιμότητας τους αποκλειστικά στους αθροιστικούς πίνακες θνησιμότητας. Μια παραλλαγή αυτής της προσέγγισης είναι να χρησιμοποιήσετε ένα μειωμένο ποσοστό της συνολικής θνησιμότητας για τα πρώτα χρόνια του συμβολαίου. Για παράδειγμα, το ποσοστό θνησιμότητας του πρώτου χρόνου θα μπορούσε να είναι το 50% του συνολικού ποσοστού, και το δεύτερο έτος θα μπορούσε να είναι το 75%. Χρησιμοποιώντας τα ίδια μειωμένα ποσοστά για όλες τις ηλικίες ασφάλισης, θα υπάρξει υπερεκτίμηση της θνησιμότητας στις νεαρότερες ηλικίες και υποτίμηση των αποτελεσμάτων σε μεγαλύτερες ηλικίες.

4.4. Κίνδυνος Μακροβιότητας

Ένας άλλος κίνδυνος που θα αναλύσουμε είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας, ο οποίος ενυπάρχει στα συνταξιοδοτικά προγράμματα και συγκεκριμένα στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από την μακροβιότητα του ασφαλισμένου. Για τις ράντες ζωής, ο κίνδυνος θνησιμότητας μετατρέπεται σε κίνδυνο μακροζωίας, δηλαδή ο κίνδυνος να ζήσει ο ασφαλισμένος περισσότερο από ότι έχει προβλέψει η ασφαλιστική εταιρεία. Με άλλα λόγια χρησιμοποιώντας χαμηλότερα ποσοστά θνησιμότητας δημιουργείται μια συντηρητική παραδοχή για τα ποσοστά της θνησιμότητας. Με την πρότερη εμπειρία, γνωρίζουμε ότι πολλά προϊόντα ραντών ζωής τιμολογούνται χρησιμοποιώντας υποτιμημένα ποσοστά θνησιμότητας, γεγονός το οποίο σε ορισμένες περιπτώσεις έχει οδηγήσει σε σημαντικές ζημιές τις ασφαλιστικές εταιρείες.

4.4.1. Υποθέσεις Μακροβιότητας

Κατά την τιμολόγηση ασφαλίσεων ζωής, πολλοί επαγγελματίες είναι επιφυλακτικοί με τις υποθέσεις για την τη βελτίωση της θνησιμότητας, κάτι το οποίο μπορεί να είναι καταστροφικό στη περίπτωση τιμολόγησης προϊόντα με ράντες ζωής. Στην τιμολόγηση ασφαλίσεων ζωής είναι λογικό να λαμβάνεται υπόψη μικρότερος ρυθμός βελτίωσης της θνησιμότητας σε σχέση με το παρελθόν, ενώ στη τιμολόγηση προϊόντων με ράντες ζωής λαμβάνεται υπόψη μεγαλύτερος ρυθμός βελτίωσης σε σχέση με το παρελθόν. Ουσιαστικά αυτή η πρακτική υιοθετείται από τις ασφαλιστικές εταιρείες για την διαχείριση του κινδύνου θνησιμότητας που περιέχεται στις ασφαλίσεις ζωής και του κινδύνου μακροζωίας ο οποίος περιέχεται στα προϊόντα με ράντες ζωής, όπως στα συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Τα ποσοστά θνησιμότητας που χρησιμοποιούνται συνήθως διακρίνονται ανάλογα με το φύλλο, εκτός εάν αυτή η διάκριση απαγορεύεται από τον νόμο, όπως συμβαίνει στα συνταξιοδοτικά προγράμματα. Σε γενικές γραμμές, οι υποθέσεις της θνησιμότητας διαφέρουν για τις ατομικές ράντες, τις ομαδικές ράντες και τα δομημένα συμβόλαια. Οι παραδοχές αυτές διαφέρουν λόγων των προσωπικών επιλογών κατά τη στιγμή της αγοράς του προϊόντος.

Από τότε που τα ατομικά προγράμματα ασφάλισης είναι ελεύθερα στην αγορά, συνήθως μόνο τα άτομα με υγιεινό τρόπο ζωής επιλέγουν να αγοράσουν ισόβια προγράμματα ασφάλισης. Ενώ τα άτομα με κακές συνήθειες είναι λιγότερο διατεθειμένοι να αγοράσουν ισόβια προγράμματα, καθώς δεν επιθυμούν να τιμολογηθούν με τις υποθέσεις θνησιμότητας που ισχύουν.

Τα ομαδικά προγράμματα ασφάλισης συχνά έχουν και άλλη επιλογή από το να γίνονται πληρωμές με τη μορφή ισόβιων ραντών. Η πρόσθετη επιλογή είναι να γίνονται εγγυημένες πληρωμές για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Μία επιλογή την οποία την προτιμούν οι ασφαλισμένοι με ανθυγιεινό τρόπο ζωής.

Με οποιαδήποτε επιλογή από τις δύο οδηγούμαστε σε υψηλότερα ποσοστά θνησιμότητας που έχει ως αποτέλεσμα, τα ομαδικά προγράμματα ζωής να τιμολογούνται και να εκτιμώνται υψηλότερα από τα ατομικά προγράμματα.

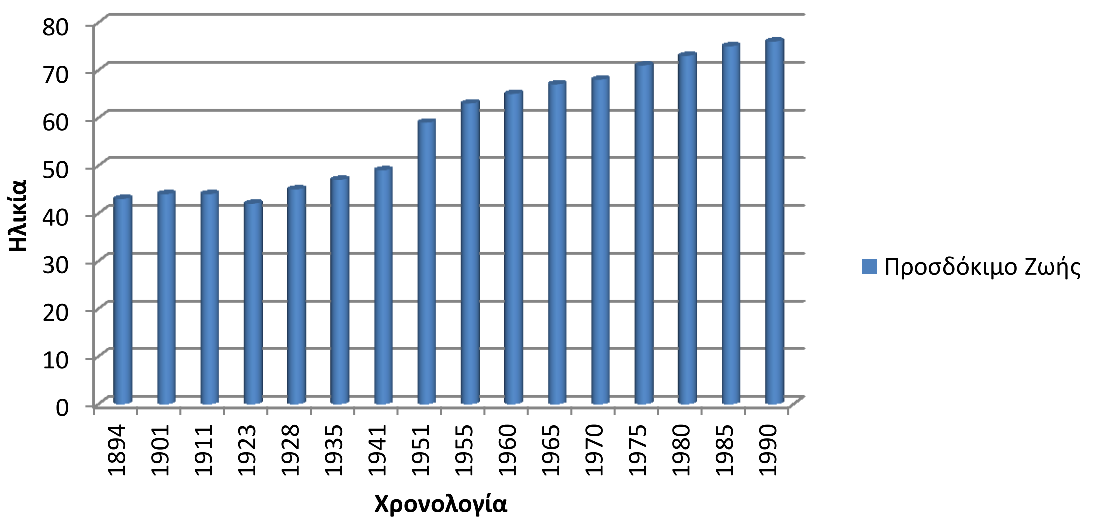
Υπάρχουν τυποποιημένοι πίνακες τιμολόγησης για ατομικά και ομαδικά συνταξιοδοτικά προγράμματα. Αυτοί οι πίνακες περιλαμβάνουν επίσης τις προβλέψεις για την μελλοντική βελτίωση της θνησιμότητας. Όπως και με κάθε πίνακα της αγοράς, έτσι και αυτοί οι πίνακες πρέπει να προσαρμόζονται στο είδος της ασφαλιστικής εταιρείας.

4.4.2. Τάσεις Μακροβιότητας

Κατά τη διάρκεια του εικοστού αιώνα, η ιατρική επιστήμη προχώρησε πολύ πιο πέρα από ό, τι σε όλους τους προηγούμενους αιώνες μαζί. Τα διαγνωστικά εργαλεία, τα μέτρα πρόληψης, τα φάρμακα, οι ιατρικές θεραπείες και οι χειρουργικές επεμβάσεις συνδυαστικά μειώνουν δραματικά τα επίπεδα θνησιμότητας. Ταυτόχρονα, οι θάνατοι από ατυχήματα στο χώρο εργασίας, οι ρύποι, το μολυσμένο νερό και οι μολυσματικές ασθένειες μειώθηκαν δραματικά στις οικονομικά ανεπτυγμένες χώρες. Η συνδυασμένη επίδραση όλων αυτών των παραγόντων έχει ως αποτέλεσμα την δραματική βελτίωση στο προσδόκιμο ζωής στις οικονομικά ανεπτυγμένες χώρες.

Το διάγραμμα 2 παρουσιάζει το ιαπωνικό προσδόκιμο ζωής για τους άντρες και παρατηρούμε πως αυξήθηκε 73% από το 1901 έως το 1990. Τα αποτελέσματα είναι ακόμα πιο εντυπωσιακά αν εξετάσουμε τις αλλαγές στα ποσοστά θνησιμότητας. Για παράδειγμα, το ποσοστό θνησιμότητας για ένα άντρα ηλικίας 45 ετών στην Ιαπωνία το 1990 ήταν μόνο 19% του ποσοστού το 1901. Αυτό μεταφράζεται σε μια μέση ετήσια βελτίωση θνησιμότητα κατά 1,8%.

Διάγραμμα 2: Ιστορικό του προσδόκιμου ζωής για τους άντρες στην Ιαπωνία

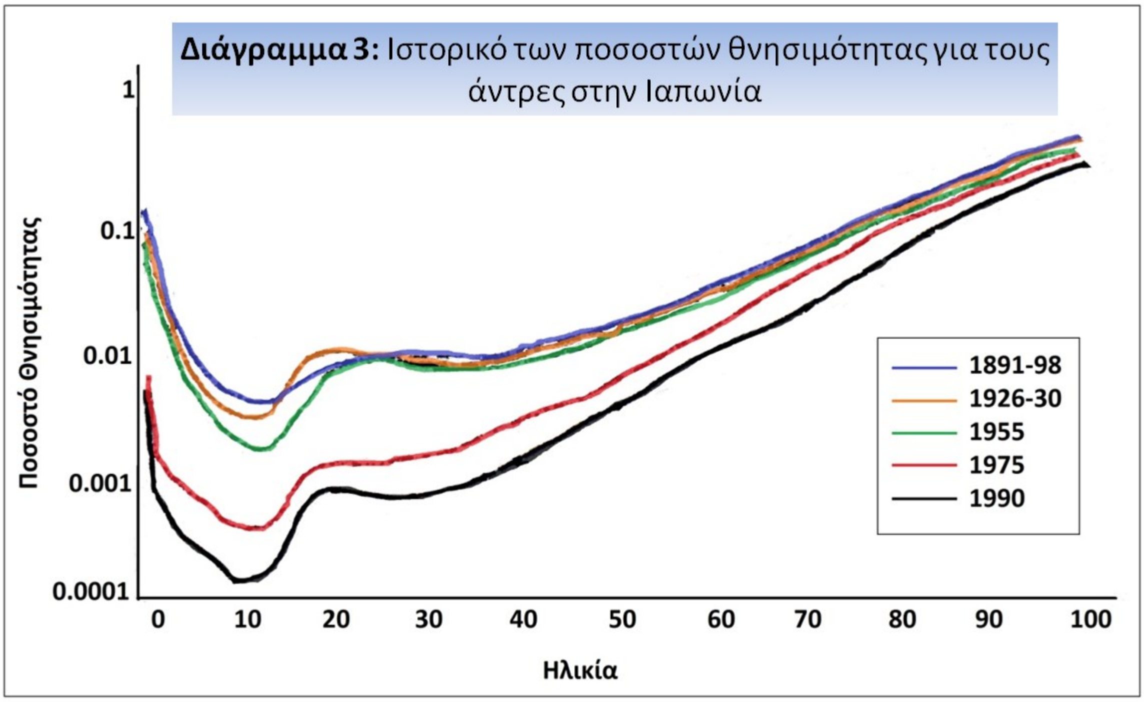


Πηγή: The Society of Actuaries (www.soa.com)

Το διάγραμμα 3 δείχνει τη δραματική βελτίωση στα ποσοστά θνησιμότητας στα οποία βασίζεται το προσδόκιμο ζωής του διαγράμματος 2. Ενώ, τα ποσοστά θνησιμότητας έχουν μειωθεί, παρατηρούμε πώς το σχήμα της καμπύλης δεν έχει αλλάξει ριζικά. Εμφανίζεται ένα ελάχιστο στην ηλικία των 10 ετών, και ένα τοπικό μέγιστο στην ηλικία των 20 ετών και ύστερα μια σταθερή ποσοστιαία αύξηση από την ηλικία των 35 έως την ηλικία 85. Και στους δύο πίνακες, οι τιμές που βασίζονται στους Ιαπωνικούς πίνακες θνησιμότητας.

Οι πίνακες δεν το δείχνουν, αλλά η βελτίωση της θνησιμότητας για τις γυναίκες στην Ιαπωνία ήταν ακόμη πιο δραματική. Το ποσοστό θνησιμότητας για μία γυναίκα ηλικίας 45 ετών το 1990 ήταν μόνο 11.66% του ποσοστού το 1894. Αυτό μεταφράζεται σε μια μέση ετήσια βελτίωση της θνησιμότητας κατά 2,4%.

Το θέμα για τις ασφαλιστικές είναι ποια θα είναι η εξέλιξη στον 21^{ο} αιώνα. Θα επιταχυνθεί η βελτίωση της θνησιμότητας, με την περαιτέρω πρόοδο της ιατρικής ή θα επιβραδυνθεί επειδή ήδη έχουν επιτευχθεί οι σημαντικότερες ανακαλύψεις στην ιατρική;



Διάγραμμα 3: Ιστορικό των ποσοστών θνησιμότητας για τους άντρες στην Ιαπωνία

Πηγή: The Society of Actuaries (www.soa.com)

Ορισμένες εταιρείες προβλέπουν τη βελτίωση της θνησιμότητας βασισμένες σε δικές τους παραδοχές. Πολλές εταιρείες όμως δεν το κάνουν. Η βελτίωση της θνησιμότητας θα μπορούσε να προσαρμοστεί στους πίνακες θνησιμότητας που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση. Εναλλακτικά, εάν η εταιρεία επιθυμεί να αλλάζει τις προβλέψεις της για την βελτίωση της θνησιμότητας ανά προϊόν, πρέπει να αναπτύξει διαφορετικούς παράγοντες βελτίωσης της θνησιμότητας.

Κατά την εξέταση των ιστορικών τάσεων της θνησιμότητας για την ανάπτυξη υποθέσεων για την βελτίωση της θνησιμότητας, πρέπει να είναι εξαιρετικά προσεκτικοί όταν επανεξετάζουν τα στοιχεία θνησιμότητας των ασφαλισμένων. Δύο σημαντικές τάσεις στον κλάδο των ασφαλίσεων συμβάλλουν στην εμφανή βελτίωση της θνησιμότητας[1]:

1. Υπήρξε μια σταδιακή μετάβαση σε πιο συγκεκριμένες τάξεις κινδύνου, όπως για τους μη καπνιστές και των προτιμώμενων κινδύνων. Η εισαγωγή αυτών των κατηγοριών κινδύνου προκαλεί εκείνους με το χαμηλότερο ποσοστό θνησιμότητας να αγοράσουν μεγαλύτερη ασφάλιση (επειδή είναι λιγότερο ακριβή) και εκείνων με την υψηλότερη θνησιμότητα να αγοράσουν λιγότερη ασφάλιση (επειδή είναι πιο ακριβή). Η τάση αυτή μειώνει το μέσο όρο θνησιμότητας όσων αγοράζουν ασφάλεια ζωής, ακόμη και όταν τα υποκείμενα ποσοστά θνησιμότητας για τις διάφορες κατηγορίες κινδύνου παραμένουν αμετάβλητα. Η τάση αυτή θα πρέπει να

λαμβάνεται υπόψη σε οποιαδήποτε υπόθεση βελτίωσης της θνησιμότητας.

2. Υπήρξε μια σταδιακή βελτίωση στις πληροφορίες και τις αποφάσεις στο underwriting, λόγω των εξελίξεων, όπως οι φθηνότερες εξετάσεις αίματος και η καλύτερη κατανόηση των παραγόντων κινδύνου. Καλύτερο underwriting οδηγεί σε ασφαλισμένους με χαμηλότερα ποσοστά θνησιμότητας. Η θνησιμότητα του πληθυσμού μπορεί να μην έχει αλλάξει, αλλά η θνησιμότητα αυτών που έχουμε αποδεχτεί για ασφάλιση ζωής θα βελτιωθεί. Η τάση αυτή, στο βαθμό που αναμένεται να συνεχιστεί, επηρεάζει στα αρχικό στάδια της θνησιμότητας, αλλά όχι στην μακροχρόνια θνησιμότητας. Ως εκ τούτου, θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη σε οποιονδήποτε υπόθεση βελτίωσης της θνησιμότητας.

Η σημασία αυτών των δύο τάσεων είναι πολύ σημαντική, καθώς οποιαδήποτε μπορεί να υπερβεί το επίπεδο της πραγματικής βελτίωσης της θνησιμότητας. Επομένως, αν δε ληφθούν υπόψη και δε προσαρμοστούν στις υποθέσεις μας είναι πολύ επικίνδυνο.

Οι παράγοντες βελτίωσης της θνησιμότητας θα μπορούσαν να σχεδιαστούν έτσι ώστε να διαφέρουν ανάλογα με την ηλικία, το φύλο και το είδος του κινδύνου. Για παράδειγμα, γίνεται αντιληπτό ότι τα υψηλότερα ποσοστά θνησιμότητας έχουν μεγαλύτερα περιθώρια βελτίωσης, ενώ τα χαμηλότερα ποσοστά θνησιμότητας δεν έχουν ουσιαστικά κανένα περιθώριο βελτίωσης. Η βελτίωση της θνησιμότητας θα μπορούσε επίσης να ποικίλλει ανά ημερολογιακό έτος. Για παράδειγμα, οι πρόσφατες τάσεις βελτίωσης της θνησιμότητα μπορεί να θεωρηθεί πως θα συνεχιστούν για μερικά χρόνια ακόμη και στη συνέχεια να μειωθεί σταδιακό ο ρυθμός βελτίωσης.

4.5. Επενδυτικός Κίνδυνος

Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατέχουν μια ποικιλία περιουσιακών στοιχείων που χρησιμοποιούνται για να καλύψουν τα ασφαλιστήρια συμβόλαια. Αυτά τα περιουσιακά στοιχεία χρησιμοποιούνται για την κάλυψη των αποθεμάτων που ορίζουν οι εποπτικές αρχές και για την κάλυψη των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Ορισμένα στοιχεία του ενεργητικού, όπως τα ομόλογα, οι προνομιούχες μετοχές και άλλα χρεόγραφα εξασφαλίζουν έσοδα στην εταιρεία λόγω της επιτοκιακής τους απόδοσης. Οι μετοχές και τα ακίνητα παρέχουν κάποιο τρέχον εισόδημα αλλά κυρίως βοηθούν στην ανάπτυξη κεφαλαιακών κερδών ή ζημιών. Όσον αφόρα τον υλικό εξοπλισμό της εταιρείας, όπως οι υπολογιστές, το λογισμικό και τα έπιπλα, δεν παρέχει κανένα επενδυτικό κέρδος στην εταιρεία. Το κόστος αυτών των περιουσιακών στοιχείων μειώνεται σταδιακά με το πέρασμα των ετών.

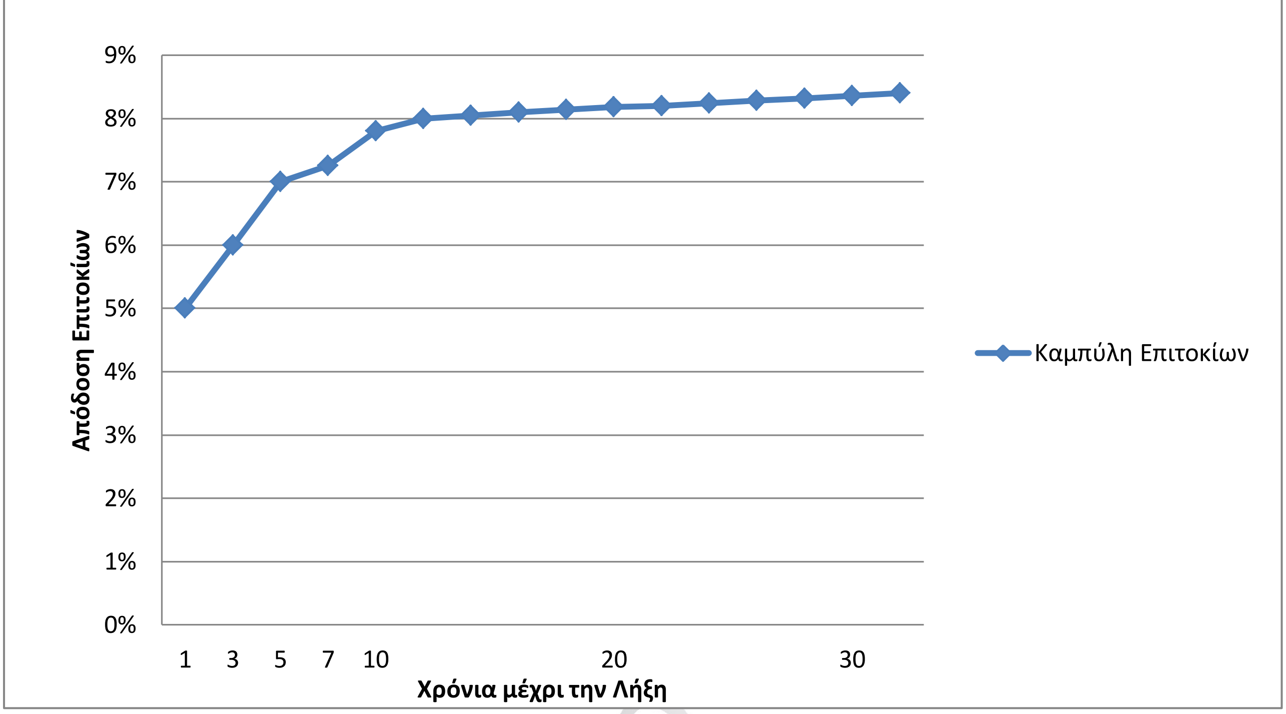
4.5.1. Υποθέσεις Επιτοκίων

Κατά την τιμολόγηση ενός προϊόντος ασφάλισης ζωής, είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν τα έσοδα από τις επενδύσεις που θα αποκτηθούν από τα διάφορα περιουσιακά στοιχεία του υποκείμενου προϊόντος. Σε αυτή την ενότητα θα υποθέσουμε ότι όλα τα έσοδα από επενδύσεις προέρχονται από τα επιτόκια. Η υπόθεση αυτή λειτουργεί καλύτερα για τα προϊόντα που υποστηρίζονται μόνο από το έντοκα στοιχεία του ενεργητικού, όπως τα ομόλογα και οι ενυπόθηκοι τίτλοι δανεισμού.

Οι οικονομικές συνθήκες σε μεγάλο βαθμό καθορίζεται από τα επιτόκια. Η οικονομική δραστηριότητα και τα κέρδη τείνουν να αυξάνονται όταν τα επιτόκια και τα ποσοστά πληθωρισμού είναι χαμηλά. Οι οικονομικές υφέσεις συχνά συνδυάζονται με τις απώλειες κεφαλαίων, τα υψηλά επιτόκια, και τα υψηλά ποσοστά πληθωρισμού, με αποτέλεσμα να αυξάνονται οι αθετήσεις πληρωμών. Οι κυβερνήσεις συχνά χειραγωγούν τα επιτόκια για να επιτύχουν τους οικονομικούς ή πολιτικούς στόχους. Οι στόχοι αυτοί μπορούν να περιλαμβάνουν την προστασία της αξίας του νομίσματός τους, κρατώντας σε χαμηλά επίπεδα τον πληθωρισμό, και βοηθώντας τις εγχώριες επιχειρήσεις να ανακάμψουν από τις προηγούμενες απώλειες.

Τα επιτόκια ποικίλλουν ανάλογα με τη διάρκεια ή τη λήξη των έντοκων χρεογράφων. Η καμπύλη αποδόσεων που φαίνεται στο διάγραμμα 4 περιγράφει πώς οι επενδυτικές αποδόσεις διαφέρουν ανάλογα με τη διάρκεια της επένδυσης. Τα σημεία των δεδομένων στην καμπύλη αντιπροσωπεύουν αποδόσεις για τις επενδύσεις που λήγουν σε 90 και 180 ημέρες και 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, και 30 ετών.

Διάγραμμα 4[11]: Καμπύλη Επιτοκίων



Τα επιτόκια ποικίλλουν επίσης από το βαθμό επικινδυνότητας της επένδυσης και το είδος του περιουσιακού στοιχείου. Για παράδειγμα, τα στεγαστικά δάνεια συνήθως πληρώνουν υψηλότερα επιτόκια από τα ομόλογα με τον ίδιο κίνδυνο, λόγω των πρόσθετων δαπανών που έχουν τα δάνεια.

Μερικές οικονομικές θεωρίες συνδέουν τα επίπεδα των επιτοκίων με την δημογραφία μιας χώρας. Στο βαθμό τέτοιο ώστε τα δημογραφικά να είναι κινητήριος μοχλός για την οικονομία, οι προβλέψεις του πληθυσμού μπορεί να είναι χρήσιμο μέτρο πρόβλεψης της μελλοντικής οικονομικής δραστηριότητας . Για παράδειγμα , μια χώρα με πολλούς νέους ανθρώπους που έχουν ανάγκη να δανειστούν χρήματα για το πρώτο τους διαμερίσματα, για έπιπλα, για ηλεκτρικές συσκευές και για αγορά αυτοκίνητου μπορούν να δημιουργήσουν ζήτηση για χρήμα που ξεπερνά την προσφορά χρήματος. Όταν συμβαίνει αυτό, η αξία του χρήματος αυξάνεται. Αυτό μπορεί να εξηγήσει τα υψηλά επιτόκια στον Καναδά και στις ΗΠΑ στις αρχές του 1980, όταν ο μεγαλύτερος αριθμός των νέων της μεταπολεμικής γενιάς είχαν ξεκινήσει τα δικά τους νοικοκυριά. Αντίθετα, μια χώρα με γήρανση του πληθυσμού της έχει περισσότερους ανθρώπους που αποταμιεύουν για τις συντάξεις τους παρά νέους ανθρώπους που έχουν ανάγκη να δανειστούν. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει μια προσφορά χρήματος που υπερβαίνει τη ζήτηση για χρήμα, με αποτέλεσμα την οδήγηση των επιτοκίων προς τα κάτω. Αυτό μπορεί να εξηγήσει εν μέρει τα πολύ χαμηλά επιτόκια στην Ιαπωνία κατά το μεγαλύτερο μέρος της δεκαετίας του 1990. Οπότε, χρησιμοποιώντας τις προβλέψεις όσον αφορά τις ηλικιακές ομάδες ενός τόπου μπορεί να αποκτήσουμε κάποιες γνώσεις για τις μακροπρόθεσμες τάσεις των επιτοκίων.

Τα επιτόκια είναι απρόβλεπτα, σε ορισμένες χώρες, τα μακροπρόθεσμα επιτόκια τείνουν να αλλάζουν αργά, η μεταβολή τους σπάνια περνάει το 1% σε ένα έτος ή το 2% κατά τη διάρκεια αρκετών ετών. Ως αποτέλεσμα, ορισμένες ασφαλιστικές εταιρείες προβλέπουν με βεβαιότητα ότι τα σημερινά επίπεδα των επιτοκίων θα συνεχιστούν για μερικά χρόνια ακόμη, προβλέποντας ίσως και κάποια μικρή μείωση για περισσότερη ασφάλεια.

Για τα επενδυτικά προϊόντα ή τα προϊόντα αποταμίευσης, μπορεί να είναι αρκετά επικίνδυνο για τις εταιρείες να εγγυηθούν στα τρέχοντα επίπεδα επιτοκίων με πολύ μακρινό χρονικό ορίζοντα. Με τα χρόνια, πολλές ασφαλιστικές εταιρείες ζωής έχουν καταστεί αφερέγγυες, καθώς τα επιτόκια μειώθηκαν και δεν ήταν πλέον σε θέση να κερδίζουν από τα επιτόκια υψηλές αποδόσεις ώστε να καλύψουν τις μακροπρόθεσμες εγγυήσεις.

Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να αυξήσει το χάσμα μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων και του παθητικού. Για παράδειγμα, εάν οι μελλοντικές ταμειακές ροές ενός προϊόντος μπορούν να προβλεφθούν με ακρίβεια, τότε η εταιρεία μπορεί να αγοράσει περιουσιακά στοιχεία με ταμειακές ροές που ταιριάζουν με αυτές του προϊόντος, με στόχο την αποτελεσματική ανοσοποίηση του χαρτοφυλακίου της εταιρεία από τυχόν μελλοντικές μεταβολές των επιτοκίων.

Ένας απλούστερος τρόπος για να μειωθεί ο επιτοκιακός κίνδυνος είναι μέσω του σχεδιασμού του προϊόντος. Προϊόντα που εγγυώνται χαμηλά επιτόκια και εκτιμούν τα τρέχοντα επιτόκια με βάση την πραγματική απόδοση της επένδυσης. Με αυτόν τον τρόπο μεγάλο μέρος του επενδυτικού κινδύνου μεταφέρεται από την εταιρεία στο ασφαλισμένο. Εάν ο σχεδιασμός του προϊόντος δεν μεταφέρει τον κίνδυνο στον ασφαλισμένο, τότε η εταιρεία πρέπει να βρει άλλο τρόπο να καλύψει τον κίνδυνο όπως για παράδειγμα με την αύξηση των απαιτήσεων από τον πελάτη.

4.5.2. Υπολογισμός Καθαρού Επιτοκίου

Μια ασφαλιστική εταιρεία πριν σχεδιάσει την επενδυτική της στρατηγική και διατυπώσει μια σειρά από υποθέσεις των επιτοκίων, θα πρέπει να επανεξετάσει τις επενδυτικές επιλογές που είναι διαθέσιμες. Για κάθε επένδυση, ίσως το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό είναι το καθαρό επιτόκιο. Ωστόσο, πολλές εταιρείες υποφέρουν από ένα ή δύο από τα ακόλουθα προβλήματα, τα οποία περιορίζουν την επιτυχή ανάπτυξη προϊόντων και του προσωπικού των επενδύσεων[1]:

i) Το τμήμα που είναι υπεύθυνο για την ανάπτυξη και σχεδίαση του προϊόντος ξέρει πολύ λίγα για τις επενδυτικές επιλογές και τις ταμιακές ροές των επενδύσεων και δεν επιδιώκει να μάθει όσες περισσότερες πληροφορίες μπορεί από το τμήμα των επενδύσεων.

ii) Το τμήμα των επενδύσεων γνωρίζει πολύ λίγα για τα προϊόντα ασφάλισης ζωής και τις ταμειακές ροές τους και δεν προσπαθεί να μάθει ό, τι μπορεί από το υπόλοιπο προσωπικό της εταιρείας.

Το αποτέλεσμα αυτών των προβλημάτων είναι να μην επιτυγχάνεται η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική, κάτι που οδηγεί σε ένα πιο επικίνδυνο, λιγότερο ανταγωνιστικό και λιγότερο επικερδές προϊόν.

Καθαρό Επιτόκιο (Net Interest Rate)[11]

Το καθαρό επιτόκιο μπορεί να υπολογιστεί για κάθε είδος περιουσιακού στοιχείου, με βάση την τρέχουσα επενδυτική αγορά. Σε γενικές γραμμές, το καθαρό επιτόκιο υπολογίζεται ως το ακαθάριστο επιτόκιο αφαιρώντας τις δαπάνες των επενδύσεων και το κόστος των αθετήσεων των υποχρεώσεων.

Ακαθάριστο Επιτόκιο (Gross interest rate)[11]

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο μιας επένδυσης είναι σταθερό κατά τη διάρκεια ενός έτους ενός συμβολαίου. Το ακαθάριστο επιτόκιο είναι το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο που θα αποκτηθεί κατά τη διάρκεια του έτους. Το επιτόκιο που έχει κερδηθεί για διάφορα περιουσιακά στοιχεία συχνά αναφέρεται διαφορετικά, ανάλογα με το χρονοδιάγραμμα των πληρωμών των τόκων.

Το επιτόκιο για ένα ομόλογο συνήθως αναφέρεται ως εξαμηνιαίο ποσοστό απόδοσης. Για παράδειγμα, ένα ομόλογο με κουπόνι 6% μπορεί να έχει δύο εξαμηνιαίες πληρωμές με επιτόκιο 3%. Αυτό μεταφράζεται σε ένα ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 6,09%.

Το επιτόκιο για ένα στεγαστικό δάνειο με μηνιαίες πληρωμές συνήθως εκφράζεται ως μηνιαίο επιτόκιο απόδοσης. Για παράδειγμα, ένα δάνειο με 12% επιτόκιο μπορεί να χρεώνει στην πραγματικότητα επιτόκιο 1% ανά μήνα. Αυτό μεταφράζεται σε ένα ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 12,68%. Δεν έχει σημασία πως εκφράζεται το επιτόκιο, αλλά πρέπει πρώτα να μετατρέπεται σε ετήσιο πραγματικό επιτόκιο και μετά να χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση του προϊόντος.

Επενδυτικές Δαπάνες

Επενδυτικές δαπάνες είναι αυτές που πραγματοποιούνται από το τμήμα επενδύσεων της εταιρείας ή από τον εξωτερικό διαχειριστή επενδύσεων των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας. Τα έξοδα αυτά καλύπτουν τις δαπάνες για την αγορά και την πώληση των περιουσιακών στοιχείων, για την αναθεώρηση και την συνεχή παρακολούθηση τους, για τη συλλογή των εσόδων από τις επενδύσεις και την λογιστική εκτέλεση των επενδύσεων που απαιτείται. Τυπικά, οι δαπάνες για τις επενδύσεις, εκφράζονται ως ετήσιο ποσοστό του ενεργητικού, όπως για παράδειγμα 0,15% ή 15 μονάδες βάσης, όπου μία μονάδα βάσης ισούται με 0,01%.

Ορισμένοι τύποι περιουσιακών στοιχείων επιβαρύνονται με υψηλότερες επενδυτικές δαπάνες. Για παράδειγμα, η διαχείριση των εμπορικών δανείων μπορεί να είναι πιο ακριβή από ό, τι η διαχείριση των εταιρικών ομολόγων. Συνήθως, οι εταιρείες καθορίζουν το ποσοστό δαπάνης των επενδύσεων ξεχωριστά για κάθε κατηγορία περιουσιακών στοιχείων. Αυτό επιτρέπει στην εταιρεία να προβλέπει πώς μεταβάλλονται οι επενδυτικές δαπάνες, σε περίπτωση διαφορετικού συνδυασμού των περιουσιακών στοιχείων.

Δαπάνες Αθέτησης

Τα έντοκα στοιχεία ενεργητικού έχουν τον κίνδυνο αθέτησης. Αθέτησης των υποχρεώσεων ενός περιουσιακού στοιχείου συμβαίνει όταν οι προγραμματισμένες πληρωμές κεφαλαίου ή τόκων, δεν πραγματοποιούνται. Ωστόσο, κάποιο ποσοστό των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας κάθε χρόνο συνήθως αθετεί, με την εταιρεία τελικά να μην χάνει ολόκληρο το ποσό, αλλά να εισπράττει γύρω στο 50% του ανεξόφλητου κεφαλαίου και των τόκων. Όταν η εταιρεία αγοράζει ένα έντοκο χρεόγραφο, ο διαχειριστής επενδύσεων αξιολογεί την πιθανότητα αθέτησης του, που συχνά στηρίζεται σε αξιολογήσεις οι οποίες δημοσιεύονται από τους οργανισμούς αξιολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας. Αυτές οι αξιολογήσεις εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες, κυρίως την οικονομική ευρωστία και τη μελλοντική βιωσιμότητα του δανειζόμενου.

Οι αξιολογήσεις εκφράζονται συνήθως με γράμματα από το λατινικό αλφάβητο και κυμαίνονται από ΑΑΑ, που είναι το υψηλότερο ποσοστό δηλαδή η πιο ασφαλή εκτίμηση, σε BBB , που θεωρείται η χαμηλότερη βαθμολογία για επένδυση, στις αξιολογήσεις υπάρχει κλίμακα ακόμη χαμηλότερη από BBB. Όσο χαμηλότερη είναι η βαθμολογία, τόσο υψηλότερο είναι το αναμενόμενο επιτόκιο. Για ορισμένα περιουσιακά στοιχεία δεν έχουν ανατεθεί αξιολογήσεις από τους οργανισμούς αξιολόγησης. Σε αυτή την περίπτωση, η εταιρεία θα αναπτύξει υποθέσεις για την αθέτηση που βασίζεται στη δική της εμπειρία ή σε μελέτες που διεξήχθησαν από εταιρείες του εξωτερικού. Ωστόσο, οι αθετήσεις συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με την οικονομική ύφεση. Επίσης, οι δαπάνες των αθετήσεων τείνουν να είναι πολύ χαμηλότερες από τον μέσο όρο κατά τη περίοδο οικονομικής ευημερίας και πολύ υψηλότερες από τον μέσο όρο κατά τη περίοδο οικονομικής ύφεσης. Ο πίνακας 4 παρουσιάζει τον ιστορικό μέσο όρο των ΗΠΑ για το κόστος αθέτησης των εταιρικών ομόλογών την περίοδο 1970-1998, εκφραζόμενο ως ετήσιο ποσοστό.

Πίνακας 4: Αξιολόγηση εταιρικών ομολόγων των ΗΠΑ(1970-1998)

Rating	*Over 5 Years*	*Over 10 Years*	*Over 20 Years*
AAA	0,00%	0,00%	0,01%
AA	0,01	0,01	0,04
A	0,04	0,08	0,15
BBB	0,23	0,34	0,45
BB	1,05	1,16	1,22
B	4,11	3,79	3,42
C	4,88	4,40	3,95

Πηγή: D. Atkinson, J. Dallas "Products and Finance, Life Insurance",2000

Ο υπολογισμός του καθαρού επιτοκίου ενός προϊόντος είναι απαραίτητο όχι μόνο κατά τη στιγμή της τιμολόγησης, αλλά και σε τακτική βάση, έτσι ώστε οι αποδόσεις του προϊόντος να παρακολουθούνται συνεχώς. Για τα έντοκα προϊόντα και τον υπολογισμό του καθαρού επιτοκίου είναι απαραίτητη η συνεχή ενημέρωση των αποδόσεων των αθετήσεων. Ο πίνακας 5 παρουσιάζει τον υπολογισμό του σταθμισμένου μέσου όρου του καθαρού επιτοκίου για ένα χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων.

Πίνακας 5: Υπολογισμός Σταθμισμένου Καθαρού Επιτοκίου

Τύπος χρεογράφου	*Αξιολόγηση*	*Ακαθάριστο Επιτόκιο*	*Ποσοστό Δαπανών Επενδύσεων*	*Ετήσιο Κόστος Αθέτησης*	*Καθαρό Επιτόκιο*	*Στάθμιση*
Κρατικά Χρεόγραφα		5,50%	0,20%	0,00%	5,30%	10%
Εταιρικά Ομόλογα	AAA	6,00%	0,20%	0,10%	5,70%	20%
	A	6,70%	0,20%	0,20%	6,30%	45%
	BB	7,75%	0,20%	1,25%	6,30%	10%
Εμπορικά Δάνεια		8,00%	0,40%	0,35%	7,25%	15%
Σταθμισμένα Ποσοστά		**6,74%**	**0,23%**	**0,2875%**	**6,2225%**	**100%**

Πηγή: D. Atkinson, J. Dallas "Products and Finance, Life Insurance",2000

Ένας τρόπος για τον υπολογισμό του καθαρού επιτοκίου ενός προϊόντος είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των καθαρών επιτοκίων για τον συνδυασμό των διάφορων τύπων περιουσιακών στοιχείων, όπως συνηθίζεται στην επενδυτική στρατηγική. Εναλλακτικά, το μέσο σταθμισμένο καθαρό επιτόκιο μπορεί να υπολογιστεί από το σταθμικό μέσο όρο του ακαθάριστου επιτοκίου, του ποσοστού δαπάνης των επενδύσεων και του ετήσιου κόστους αθέτησης. Αμφότερες οι προσεγγίσεις απεικονίζονται στον Πίνακα 5.

4.5.3. Επενδυτική Στρατηγική

Υπάρχουν δύο ριζικά διαφορετικές προσεγγίσεις για τον καθορισμό των επιτοκίων:

<u>Η Μέθοδος Τμηματοποίησης</u>

Τα περιουσιακά στοιχεία διαχωρίζονται σε κατηγορίες ανά τομέα εργασίας της εταιρείας ή ανά προϊόν ή σε διάφορες χρονικές περιόδους κατά τις οποίες η εταιρεία έλαβε κεφάλαια. Ως αποτέλεσμα έχουμε ένα επιτόκιο για κάθε κατηγορία περιουσιακών στοιχείων.

Μια εταιρεία μπορεί να αποφασίσει τον διαχωρισμό των περιουσιακών στοιχείων για διάφορους λόγους :

- για να επιτύχει ανεξάρτητες επενδυτικές επιλογές για διαφορετικούς τομείς της επιχείρησης και να καταγράφει τα αποτελέσματα αυτών των επιλογών

- για να ταιριάξει τις βραχυπρόθεσμες υποχρεώσεων με τα βραχυπρόθεσμα στοιχεία ενεργητικού και τις μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις με τα μακροπρόθεσμα περιουσιακά στοιχεία.

- για να αποδίδει στα συμβόλαια τα επιτόκια σύμφωνα με εκείνα τα επιτόκια που ίσχυαν όταν έλαβε κονδύλια για τις εν λόγω συμβόλαια. Αυτό επιτρέπει στην εταιρεία να είναι ανταγωνιστική με τα τρέχοντα επιτόκια.

Κατά τον διαχωρισμό των περιουσιακών στοιχείων, κάθε τμήμα θα έχει συνήθως τη δική του επενδυτική στρατηγική. Τα περιουσιακά στοιχεία θα πρέπει να διαχωρίζονται σε κατηγορίες για την σωστότερη παρακολούθηση της λογιστικής αξίας, της αξία της αγοράς και των επενδυτικών εσόδων κάθε τμήματος.

Κατά την ανάπτυξη ενός νέου προϊόντος, πρέπει να αποφασιστεί αν το προϊόν μπορεί να υπαχθεί σε μία ήδη υπάρχουσα κατηγορία του ενεργητικού ή αν το προϊόν έχει αρκετές διαφοροποιήσεις από τα υπόλοιπα προϊόντα και παράγει επαρκή περιουσιακά στοιχεία έτσι ώστε να δικαιολογείται η δημιουργία ενός νέου τμήματος του ενεργητικού. Σε αυτή τη περίπτωση θα ήταν σκόπιμο να περιμένουμε τα πρώτα αποτελέσματα των πωλήσεων του προϊόντος για να αποφασίσουμε την δημιουργία νέου τμήματος. Αλλιώς, σε περίπτωση που χρειαστεί η έγκριση από τις αρχές για τη δημιουργία του νέου τμήματος, η μέθοδος διαχωρισμού πρέπει να γίνεται πολύ προσεκτικά, καθώς πολλές εταιρείες δαπανούν σημαντική προσπάθεια για την έγκριση δημιουργίας ενός νέου τμήματος του ενεργητικού για ένα νέο προϊόν, τη στιγμή που οι πωλήσεις του προϊόντος είναι πολύ κατώτερες των προσδοκιών

Η Μέθοδος Χαρτοφυλακίου

Σε αυτή τη μέθοδο γίνεται συνδυασμός των περιουσιακών στοιχείων με όλους τομείς εργασιών της εταιρείας, με όλα προϊόντα και για διάφορες χρονικές περιόδους. Σε αυτή τη μέθοδο εξάγουμε ένα επιτόκιο για όλες τις κατηγορίες των περιουσιακών στοιχείων.

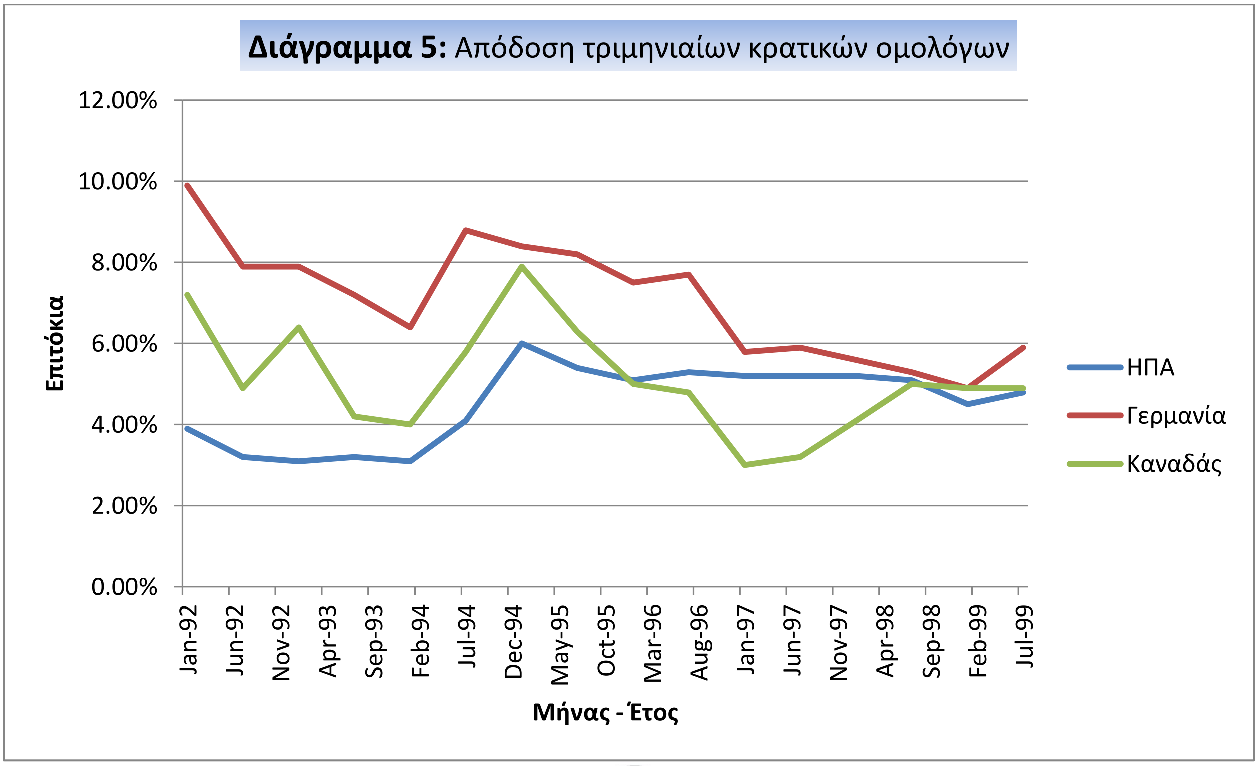
Με τη μέθοδο του χαρτοφυλακίου, υπολογίζεται ένα επιτόκιο για το σύνολο του χαρτοφυλακίου των επενδύσεων της εταιρείας. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μια εταιρεία χρησιμοποιεί συνδυασμό της μεθόδου τμηματοποίησης για ένα μέρος των δραστηριοτήτων της και τη μέθοδο του χαρτοφυλακίου για το υπόλοιπο της επιχείρησής.

Κατά τον καθορισμό των υποθέσεων για το επιτόκιο ενός προϊόντος με αυτή τη μέθοδο υπάρχουν δύο βασικά είδη πληροφοριών, η απόδοση του χαρτοφυλακίου μέχρι ένα χρονικό σημείο και τα τρέχοντα επιτόκια για νέες επενδύσεις τη συγκεκριμένη περίοδο. Γενικά, οι υποθέσεις των επιτοκίων ξεκινούν με την απόδοση του χαρτοφυλακίου κατά το πρώτο έτος. Μετά από αυτό, οι επόμενες αποδόσεις μπορούν να συγχρονιστούν σύμφωνα με τα τρέχοντα επιτόκια, αλλά αυτό διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από το είδος του προϊόντος και την φιλοσοφία της εταιρείας.

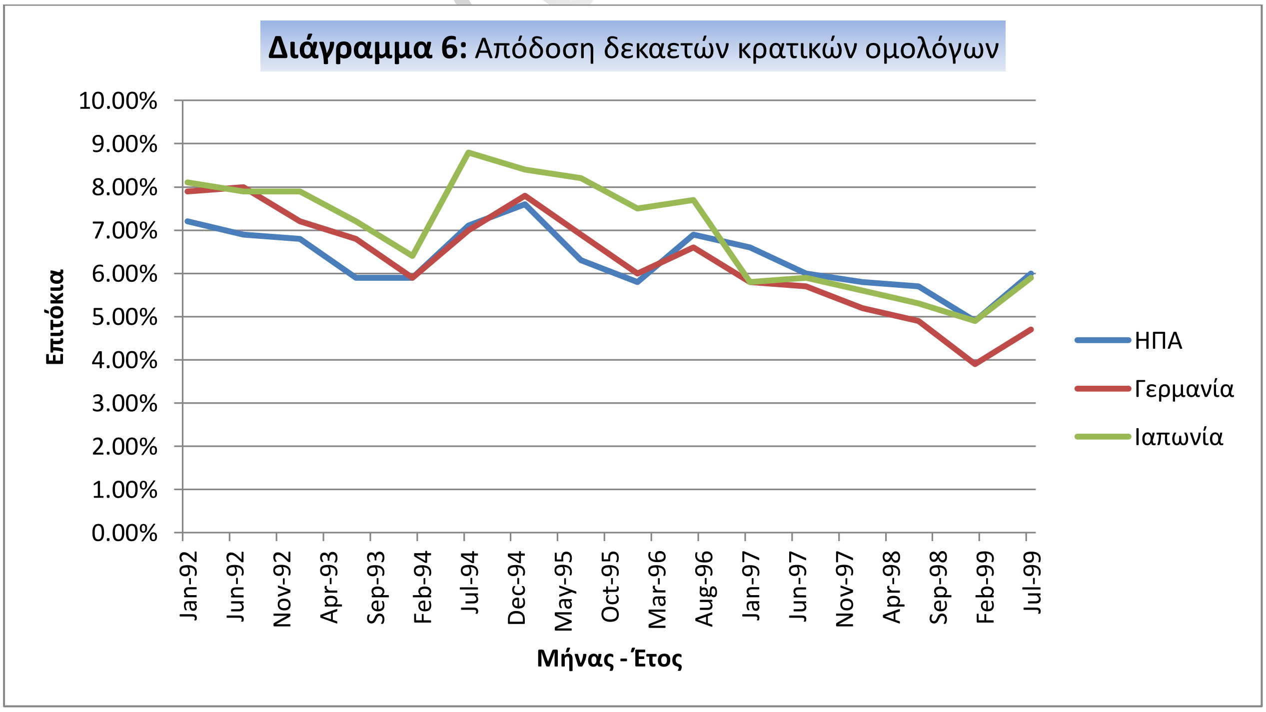
Η μέθοδος του χαρτοφυλακίου λειτουργεί καλύτερα με μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις, όπου οι ταμειακές ροές είναι κάπως προβλέψιμες. Αν υπάρχει ήδη ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων και γίνονται αγορές νέων προϊόντων, με αποτέλεσμα η εταιρεία να λαμβάνει νέες ταμειακές ροές, τότε η μεταβλητότητα της συνολικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου μειώνεται αργά με την πάροδο των ετών. Ωστόσο, όταν το επιτόκιο για τις νέες επενδύσεις είναι σημαντικά χαμηλότερο από το επιτόκιο του χαρτοφυλακίου και συνεχιστούν οι νέες επενδύσεις τότε το επιτόκιο του χαρτοφυλακίου θα μειωθεί γρήγορα. Την ίδια στιγμή που πολλά από τα πιο κερδοφόρα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας μπορεί να εξοφληθούν πρόωρα, επιταχύνοντας ακόμη περισσότερο τη μείωση του επιτοκίου του χαρτοφυλακίου.

4.5.4. Τάσεις Επιτοκίων

Στα διαγράμματα 5 και 6 παρουσιάζονται τριμηνιαία και τα δεκαετή επιτόκια των ομολόγων για διάφορες χώρες από το 1992 μέχρι το 1999. Οι αποδόσεις των τριμηνιαίων ομολόγων έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα και είναι ανεξάρτητα από χώρα σε χώρα. Αντίθετα, τα δεκαετή ομόλογα έχουν μικρότερη μεταβλητότητα και μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ των χωρών.



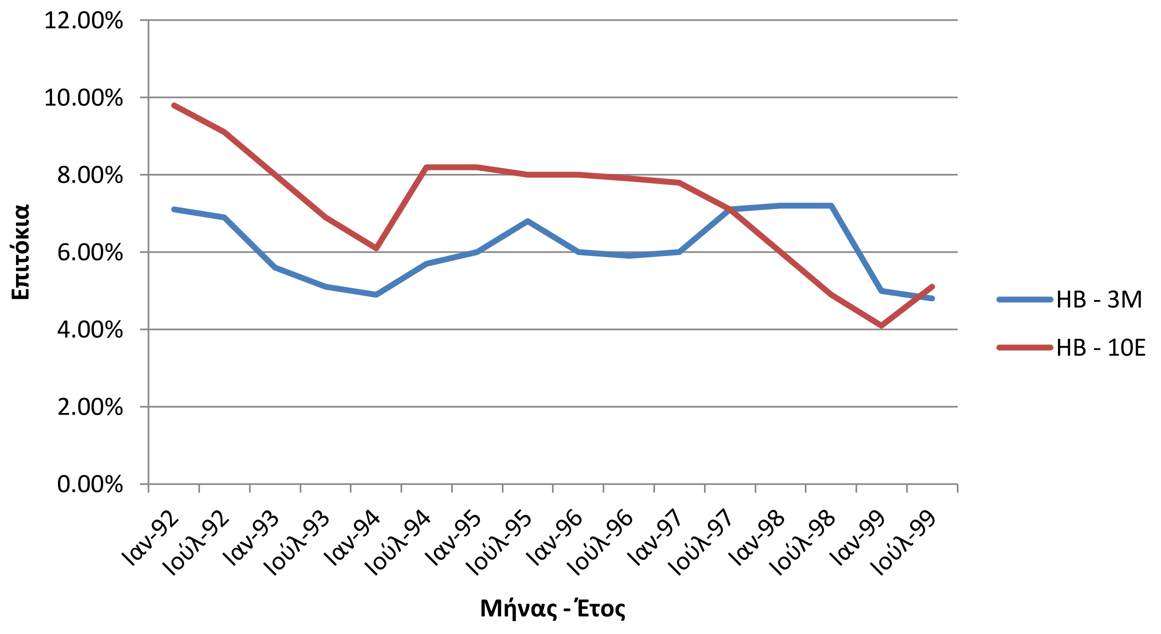
Πηγή: Bloomberg Financial Markets



Πηγή: Bloomberg Financial Markets

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται τα ποσοστά των τριμηνιαίων και των δεκαετών ομολόγων για το Ηνωμένο Βασίλειο. Στις περισσότερες περιόδους το ποσοστό των δεκαετών είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των τριμηνιαίων. Υπάρχουν κάποιες περιόδους, κυρίως μεταξύ Ιουλίου 1997 και Ιουλίου 1999, κατά την οποία το ποσοστό των τριμηνιαίων είναι υψηλότερο από το ποσοστό δέκα ετών και αυτό λόγω της ανεστραμμένης καμπύλης επιτοκίων εκείνης της περιόδου.

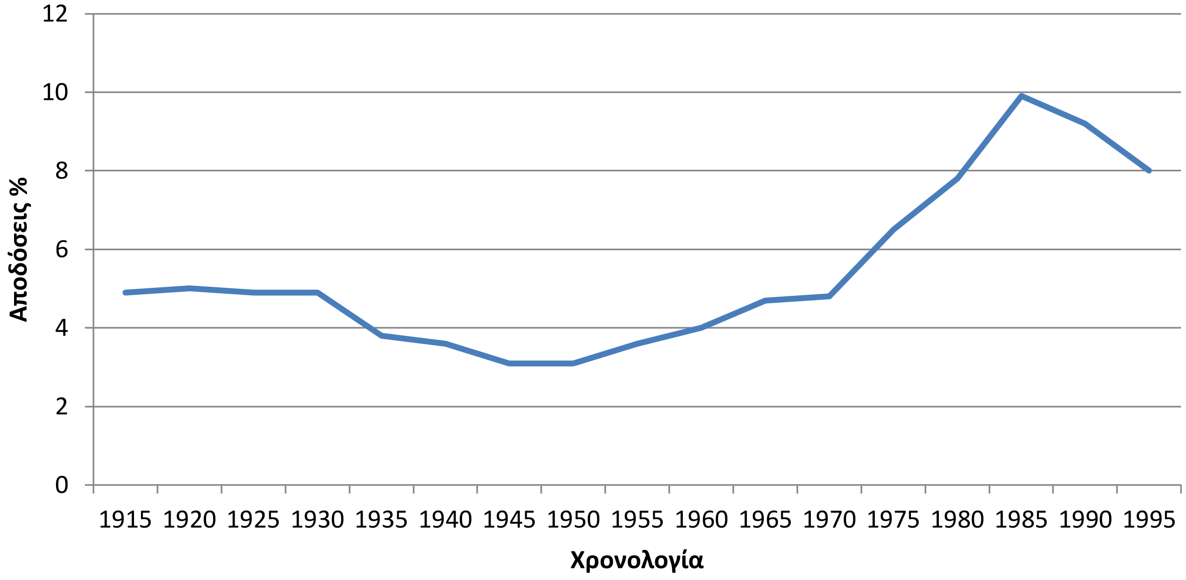
Διάγραμμα 7: Απόδοση δεκαετών και τριμηνιαίων ομολόγων του ΗΒ



Πηγή: Bloomberg Financial Markets

Το διάγραμμα 8 δείχνει τα επιτόκια των χαρτοφυλακίων ζωής των ασφαλιστικών εταιρειών στις ΗΠΑ την περίοδο 1913-1995. Τα ποσοστά αυτά έδειξαν μια αρκετά ομαλή ανοδική εξέλιξη από το 1947 και το 1985, περίοδο κατά την οποία η άνοδος της αξίας του χρήματος υπερέβη το ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Οι αποδόσεις των χαρτοφυλακίων έκαναν βουτιά το 1986 και το 1987, ενώ αυξήθηκαν ελαφρά το 1988 και το 1989, στη συνέχεια μειώνονταν κάθε χρόνο την περίοδο 1990-1995.

Διάγραμμα 8: Αποδόσεις Χαρτοφυλακίων Ζωής Ασφαλιστικών Εταιρειών στις ΗΠΑ



Πηγή: The Society of Actuaries (www.soa.com)

5ο Κεφάλαιο

Στοχαστική Μοντελοποίηση Χαρτοφυλακίου Ασφαλιστήριων Ζωής

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται ένα μοντέλο για ένα ομοιογενές χαρτοφυλάκιο με ισόβιες ράντες ζωής. Ο στόχος είναι να μελετηθούν δύο παράγοντες κινδύνου, ο επενδυτικός κίνδυνος και ο ασφαλιστικός κίνδυνος. Αυτό θα επιτευχθεί με την βοήθεια ενός στοχαστικού μοντέλου για τον υπολογισμό της απόδοσης αυτών των παραγόντων κινδύνου. Το μοντέλο εφαρμόζεται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, και πολλά από τα αποτελέσματα του δείχνουν τη σημασία αυτών των δύο ειδών κινδύνου όσον αφορά το πλήθος των συμβολαίων του χαρτοφυλακίου. Η κατανόηση αυτών των κινδύνων επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρίες να ελέγχουν, σε μεγάλο βαθμό, το συνολικό κίνδυνο των χαρτοφυλακίων τους.

5.1 Χαρτοφυλάκιο με Ασφαλιστήρια Συμβόλαια

Ας θεωρήσουμε ένα ομοιογενές χαρτοφυλάκιο με c ασφαλιστήρια συμβόλαια ισόβιων άμεσων ραντών ζωής. Αυτά τα συμβόλαια θεωρείται ότι έχουν εκδοθεί σε c άτομα ηλικίας x και πληρώνουν κάθε έτος το ποσό 1 $\nu.\mu.$, όπου καταβάλλεται στο τέλος κάθε έτους, σε κάθε έναν από τους επιζώντες. Για $i = 1,2,\dots,c$, με T_i την τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον εναπομείναντα χρόνο ζωής για τον i-ασφαλισμένο και Z_i, είναι η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την παρούσα αξία των παροχών της ράντας για τον i-ασφαλισμένο:

$$Z_\iota = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \quad T_\iota = 0 \\ \sum_{h=1}^{T_i} e^{-y(h)}, & \alpha\nu \quad T_\iota = 1,2,\dots, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$y(t) = \int_0^t \delta_s ds, \quad t > 0$$

Όπου, με δ_s συμβολίζεται η ένταση ανατοκισμού που χρησιμοποιείται κατά το χρονικό διάστημα s για την προεξόφληση των πληρωμών.

Επιπλέον, σύμφωνα με τους *Bowers et al.* 1987[16] και *Parker* 1993[24] υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές:

- Για $i = 1,2,\dots,c$ οι T_ι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές
- Δεδομένης της $y(h)$ για $h = 1,2,\dots,$ οι Z_ι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές για $i = 1,2,\dots,c$
- Για $i = 1,2,\dots,c$ οι T_i και δ_s είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Για τις εκτιμήσεις μας, είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την πρώτη και τη δεύτερη ροπή της Z_i, οι οποίες είναι:

$$[Z_i] = E\left[E[Z_i|T_i]\right] = \sum_{h=1}^{\infty} {}_hp_x E\left[e^{-y(h)}\right] \tag{5.2}$$

$$E\left[{Z_i}^2\right] = \sum_{h=1}^{\infty} {}_hp_x E\left[e^{-2y(h)}\right] + 2\sum_{h=2}^{\infty} {}_hp_x \sum_{r=1}^{h-1} E\left[e^{-y(r)}e^{-y(h)}\right] \tag{5.3}$$

Η απόδειξη της εξίσωσης (5.3) εύκολα προκύπτει ως εξής:

Απόδειξη:

$$E\left[Z_i^2\right] = E\left[E\left[{Z_i}^2|\{y(h)\}_{h=1}^{\infty}\right]\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{h} e^{-y(k)}\right)^2\right] {}_{h|1}q_x$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{h} e^{-y(k)}\right)^2\right] \left({}_hp_x - {}_{h+1}p_x\right)$$

$$= E\left[e^{-2y(1)}\right]p_x + \sum_{h=1}^{\infty}\left\{E\left[\left(\sum_{k=1}^{h+1} e^{-y(k)}\right)^2\right] - E\left[\left(\sum_{k=1}^{h} e^{-y(k)}\right)^2\right] {}_{h+1}p_x\right)\right\}$$

$$= E\left[e^{-2y(1)}p_x + \sum_{h=2}^{\infty} {}_hp_x \left(\sum_{r=1}^{h-1} 2e^{-y(r)}e^{-y(h)} + e^{-2y(h)}\right)\right]$$

Έστω ότι η $Z(c)$ δηλώνει τη συνολική παρούσα αξία για το σύνολο του χαρτοφυλακίου των c ραντών:

$$Z(c) = \sum_{i=1}^{c} Z_i$$

Οι πρώτες δύο ροπές της $Z(c)$ είναι οι εξής:

$$E[Z(c)] = c\sum_{h=1}^{\infty} {}_h p_x E\left[e^{-y(h)}\right] \quad (5.4)$$

$$E[Z(c)^2] = E[\sum_{i=1}^{c} Z_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{c} Z_i Z_j] \quad (5.5)$$

$$= \sum_{i=1}^{c} E\left[Z_i^2\right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{c} E\left[Z_i Z_j\right]. \quad (5.6)$$

Η αναμενόμνη παρούσα αξία δύο ραντών $E[Z_i Z_j]$ γράφεται ως εξής:

$$E\left[Z_i Z_j\right] = E[E[Z_i Z_j | \{y(h)\}_{h=1}^{\infty}]]$$

$$= E[E[Z_i | \{y(h)\}_{h=1}^{\infty}] E[Z_j | \{y(h)\}_{h=1}^{\infty}]]$$

$$= E[Z_1 Z_2]$$

$$= E[\sum_{h=1}^{T_1} e^{-y(h)} \sum_{k=1}^{T_2} e^{-y(k)} | \{y(r)\}_{r=1}^{\infty}]]$$

$$= E[E[\sum_{h=1}^{T_i} e^{-y(h)} \sum_{k=1}^{T_2} e^{-y(k)} \, | \{y(r)\}_{r=1}^{\infty}]]$$

$$= E[\sum_{h=1}^{\infty} {}_h p_x e^{-y(h)} \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x e^{-y(k)}]$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} {}_h p_x \, {}_k p_x E[e^{-y(k)} \, e^{-y(h)}]$$

Άρα,

$$E[Z_i Z_j] = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} {}_h p_x \, {}_k p_x E[e^{-y(k)} \, e^{-y(h)}] \quad (5.7)$$

Ως εκ τούτου, η εξίσωση (5.6) μπορεί να γραφεί ως:

$$E[Z(c)^2] = cE\left[Z_i^2\right] +$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{c} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} {}_h p_x\, {}_k p_x E[e^{-y(k)}\, e^{-y(h)}]$$

$$E[Z(c)^2] = cE\left[Z_i^2\right] +$$

$$+c(c-1) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} {}_h p_x\, {}_k p_x E[e^{-y(k)}\, e^{-y(h)}] \quad (5.8)$$

Τέλος, από τις εξισώσεις (5.5) και (5.8), μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση του $Z(c)$.

Για την ανάλυση μας, θα είναι χρήσιμο να ληφθεί υπόψη το μέσο κόστος ανά ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Το οποίο μπορούμε να το υπολογίσουμε από την απλή αριθμητική πράξη $Z(c)/c$.

5.2 Στοχαστική Εσωτερική Απόδοση

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες είναι ο επενδυτικός κίνδυνος που προκύπτει από τις μεταβολές του επιτοκίου. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα θα ακολουθήσοτυμε τους $Di\ Lorenzo, Sibillo\ και\ Tessitore$ (1997)[18] θα μοντελοποιήσουμε το στιγμιαίο συνολικό επιτόκιο $Y(t)$ ως το άθροισμα δύο συστατικών, το ντετερμινιστικό που συμβολίζεται με $\delta(t)$ και το στοχαστικό με $X(t)$ που περιγράφει τις αποκλίσεις του στιγμιαίου ποσοστού απόδοσης από την αναμενόμενη τιμή του $\delta(t)$. Αυτό σημαίνει ότι η $Y(t)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Y(t) = \delta(t) + X(t) \qquad (5.9)$$

Υποθέτουμε ότι η $\delta(t)$ προσδιορίζεται από τις προβλέψεις με βάση τις υπάρχουσες επενδύσεις.

Επιπλέον, $\{X(t), 0 \leq t \leq +\infty\}$ είναι μία Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία, με παραμέτρους $\beta > 0, \sigma > 0$ και αρχική αξία $X(0) = 0$. Η $X(t)$ περιγράφεται από την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX(t) = -\beta X(t)dt + \sigma dW(t) \qquad (5.10)$$

Όπου η $W(t)$ είναι μία διαδικασία Wiener ή αλλιώς κίνηση Brown.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.9), η στοχαστική παρούσα αξία κατά τη χρονική στιγμή 0 μιας πληρωμής 1 ν.μ. τη χρονική στιγμή t δίνεται από:

$$e^{-y(t)} = e^{-\int_0^t Y(s)ds}$$

$$= e^{-\int_0^t (\delta(s)+X(s))ds}$$

$$= v(t)F(t) \qquad (5.11)$$

Όπου,

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \qquad (5.12)$$

και

$$F(t) = e^{-\int_0^t X(s)ds} \qquad (5.13)$$

Όπου $v(t)$ είναι το ντετερμινιστικό επιτόκιο προεξόφλησης και $F(t)$ είναι το στοχαστικό επιτόκιο προεξόφλησης. Η $F(t)$ ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $E\left[\int_0^t X(s)ds\right]$ και $Var\left[\int_0^t X(s)ds\right]$ και οι ροπές της δίνονται από τον παρακάτω τύπο:

$$E[(F(t))^r] = \exp\{-rE\left[\int_0^t X(s)\, ds\right] + \frac{1}{2}r^2 Var[\int_0^t X(s)ds]\} \qquad (5.14)$$

Χρησιμοποιώντας $E[X(t)] = 0$:

$$\Phi(t) = Var[\int_0^t X(s)ds] \qquad (5.15)$$

Από *Crow and Shimizu* 1988[17]:

$$E[F(t)] = e^{\frac{1}{2}\Phi(t)} \qquad (5.16)$$

Και

$$Var[F(t)] = e^{\Phi(t)}[e^{\Phi(t)} - 1] \qquad (5.17)$$

Τέλος, συμφωνα με τους *Di Lorenzo, Sibillo και Tessitore* (1997)[18] , η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης μπορει να γραφει ως εξής:

$$Cov[F(h), F(k)] = e^{\frac{1}{2}(\Phi(h)+\Phi(k))}[e^{\Phi(h,k)} - 1] \qquad (5.18)$$

Όπου,

$$\Phi(h,k) = Cov[\int_0^h X(s)ds\,, \int_0^k X(s)ds]$$

5.3 Μέτρα Κινδύνων

Όπως επισήμανε ο *Frees* (1998)[19] , είναι σημαντικό να προσδιοριστούν οι παράγοντες που επηρεάζουν το συνολικό κίνδυνο. Για το σκοπό αυτό, θα εξετάσουμε τη θνησιμότητα και το στοχαστικό επιτόκιο ως παράγοντες κινδύνου για να γίνουν οι αναλογιστικές εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας μία στιγμιαία συνολική απόδοση (έσοδα από τόκους συν τα κεφαλαιακά κέρδη και ζημίες) που αντιπροσωπεύεται από την στοχαστική διαδικασία που ορίζεται στις εξισώσεις (5.9) και (5.10).

Επιπλέον, θα λάβουμε υπόψη την θνησιμότητα, τόσο στον κίνδυνο που προκαλείται από τις τυχαίες αποκλίσεις της, όσο και στον κίνδυνο που προκαλείται από βελτιώσεις στην τάση θνησιμότητας.

Μετά τον καθορισμό των παραγόντων κινδύνου, θα πρέπει να μελετήσουμε τρόπους για τη διαχείρισή τους. Τα εργαλεία ελέγχου κινδύνων διαφέρουν ανάλογα με τα συστατικά των κινδύνων που εξετάζουμε. Για παράδειγμα,

- Ο κίνδυνος που οφείλεται στις τυχαίες αποκλίσεις του αριθμού των θανάτων από τις αναμενόμενες τιμές τους, μπορεί να ελεγχθεί με τη βοήθεια των τεχνικών συγκέντρωσης και των αντασφαλίσεων.

- Ο επενδυτικός κίνδυνος μπορεί να ελεγχθεί με διάφορες γνωστές τεχνικές διαχείρισης χρηματοοικονομικών κινδύνων, όπως η τεχνική ανοσοποίησης του χαρτοφυλακίου και οι στρατηγικές αντιστάθμισης του κινδύνου (*Frees* 1998[19]).

- Ο κίνδυνος της μακροβιότητας μπορεί να ελεγχθεί με τη χρήση προβλεπόμενων πινάκων θνησιμότητας που είναι κατασκευασμένοι με βάση τις προβλέψεις της μελλοντικής τάσης θνησιμότητας (*Marocco and Pitacco* 1998[20] και *Olivieri* 1998[22]).

Υπό το πρίσμα των ανωτέρω, είναι σημαντικό να προσδιοριστεί ποσοτικά η συμβολή του κάθε παράγοντα κινδύνου για τη συνολική επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου.

5.4 Μέτρα Ασφαλιστικού και Επενδυτικού Κίνδυνου

Για την διευκόλυνση των υπολογισμών μας θα χρησιμοποιηθεί ένα απλό εργαλείο για την μέτρηση των δύο παραγόντων κινδύνου που επηρεάζουν το χαρτοφυλάκιο. Αυτό είναι η διακύμανση της παρούσας αξίας των ραντών του χαρτοφυλακίου.

Έστω ότι $Var[Z(c)]$ είναι η διακύμανση της παρούσας αξίας του χαρτοφυλακίου, η οποία μπορεί να αναλυθεί με δύο τρόπους (*Parker* 1997[27]) ως εξής:

$$Var[Z(c)] = E\left[Var\left[Z(c)\middle|\{T_i\}_{i=1}^{c}\right]\right] + Var\left[E[Z(c)|\{T_i\}_{i=1}^{c}]\right] \qquad (5.19)$$

και

$$Var[Z(c)] = E\left[Var[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]\right] + Var[E[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]] \qquad (5.20)$$

Στην εξίσωση (5.19), η ποσότητα $Var[E[Z(c)|\{T_i\}_{i=1}^{c}]]$ μας δίνει το μέτρο της μεταβλητότητας του $Z(c)$ που προκαλείται από τις ταμειακές ροές που συνδέονται με τυχαία γεγονότα όπως η θνησιμότητα και η επιβίωση. Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.1.: Το μέτρο του ασφαλιστικού κίνδυνου δίνεται από τον υπολογισμό της ποσότητας $Var[E[Z(c)|\{T_i\}_{i=1}^{c}]]$.

Κατ 'αναλογία, το $E[Var[Z(c)|\{T_i\}_{i=1}^{c}]]$ είναι ο μέσος όρος των ταμειακών ροών της μεταβλητότητας της $Z(c)$ λόγω της στοχαστικής απόδοσης και μπορεί να θεωρηθεί ως εργαλείο μέτρησης του επενδυτικού κινδύνου.

Στην εξίσωση (5.20), ωστόσο, η ποσότητα $Var[E[Z(c)|\{y(k)\}]]$ είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας των $Z(c)$ λόγω της επίδρασης του στοχαστικού παράγοντα προεξόφλησης

Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.: Το μέτρο του επενδυτικού κινδύνου δίνεται από τον υπολογισμό της ποσότητας $Var[E[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]]$.

Επιλέγουμε την εξίσωση (5.20) για τις εκτιμήσεις μας, επειδή, όπως εξηγεί ο *Parker* (1997)[27] , αυτό μας επιτρέπει να συνδέουμε άμεσα τις συνιστώσες του κινδύνου με τον αριθμό των συμβολαίων.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} Var\left[E[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]\right] &= Var[E[\textstyle\sum_{i=1}^{c} Z_i\,|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]] \\ &= Var[c\textstyle\sum_{h=1}^{\infty} {}_hp_x\, e^{-y(h)}] \\ &= c^2 \textstyle\sum_{h=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{\infty} {}_hp_x\, {}_kp_x Cov[e^{-y(h)-y(k)}] \qquad (5.21) \end{aligned}$$

Επισης,

$$Var\left[E[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]\right] = c^2 \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} {}_hp_x\, {}_kp_x E[e^{-y(h)-y(k)}]$$

$$-(c\sum_{h=1}^{\infty} {}_hp_x E\left[e^{-y(h)}\right])^2$$

και

$$E[Var[Z(c)|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]] = E[Var[\sum_{i=1}^{c} Z_i \,|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]]$$

$$= E[cVar[Z_i|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]]$$

$$= cE[E[Z_i^2|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]]$$

$$-cE[(E[Z_i|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}])^2] \qquad (5.22)$$

Όσων αφορά το κόστος ανά συμβόλαιο, έχουμε:

$$Var[E[\frac{Z(c)}{c}\,|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]] = \sum_{h=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{\infty} {}_hp_x\,{}_kp_x Cov(e^{-y(h)}, e^{-y(k)}) \qquad (5.23)$$

και

$$E[Var[\frac{Z(c)}{c}\,|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]] = \frac{1}{c}(E[E[Z_i^2|\{y(k)\}_1^{\infty}]]$$

$$-E[[E[Z_i|\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}]]^2]). \qquad (5.24)$$

5.5 Αριθμητικές Εφαρμογές

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο c με ασφαλιστήρια συμβόλαια ισόβιων άμεσων ραντών ζωής, όπως περιγράφεται παραπάνω. Θα γίνει ποσοτικοποίηση των ασφαλιστικών και επενδυτικών κινδύνων με βάση τις εξισώσεις (5.21) έως (5.24) και τους τέσσερις πίνακες θνησιμότητας.

Σύμφωνα με τον *Olivieri* (1998)[22] , υποθέτουμε ότι η βασική κατανομή της μελλοντικής συνάρτησης επιβίωσης μπορεί να περιγραφεί από μια κατανομή Weibull, όπου η συνάρτηση επιβίωσης από την ηλικία των 0 έως την ηλικία x, $s(x)$, δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$s(x) = e^{-(x/a)^{\gamma}}, \quad x > 0$$

όπου $\alpha > 0\, και\, \gamma > 0$ είναι σταθερές παράμετροι. Η προβλεπόμενη συνάρτηση επιβίωσης από την ηλικία των 0 έως την ηλικία x επίσης ακολουθεί κατανομή Weibull. Ο βασικός πίνακα θνησιμότητας και οι τρεις προβλέψεις για τους πίνακες με την αύξηση της πιθανότητας επιβίωσης, βασίζονται στις παραμέτρους $\alpha\, και\, \gamma$ οι οποίες προτείνονται από τον *Olivieri* (1998)[22]. Παρακάτω δίνονται οι τιμές των παραμέτρων.

Πίνακας 6: Τιμές Παραμέτρων σε Διάφορα Σενάρια

Survival Tables	α	γ
Basic	82.7	7.00
Pessimistic Projection	83.5	8.00
Realistic Projection	85.2	9.15
Optimistic Projection	87.0	10.45

Οι παράμετροι β *και* σ της έντασης του επιτοκίου στην εξίσωση (5.10) που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς μας, καθορίζονται παρόμοια από τους *Di Lorenzo, Sibillo και Tessitore* (1997) [18]. Επίσης, η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, $X(t)$, στην εξίσωση (5.10) αντιπροσωπεύει τις αποκλίσεις της έντασης των επιτοκίων από τις αναμενόμενες τιμές τους, χρησιμοποιώντας τις διαφορές μεταξύ των πραγματικών ποσοστών που σημειώθηκαν και των αντίστοιχων προβλεπόμενων ποσοστών. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους μέσους της συνδιασποράς με την αρχής της ισοδυναμίας (*Pandit* 1983 *και Wu*[23] και *Parker*1994[24]), μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παράμετρους β *και* σ από τις διαφορές αυτές.
Χρησιμοποιώντας δεδομένα από τα ιταλικά τρίμηνα ομόλογα, παίρνουμε $\delta = 0.09$, $\beta = 0{,}11$ και $\sigma = 0.005$.

Οι πίνακες 7 και 8 δείχνουν την μέση τιμή, την διακύμανση, τον επενδυτικό κίνδυνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο της παρούσας αξίας ενός χαρτοφυλακίου c ραντών που εκδίδονται στην ηλικία των 65 ετών. Ο Πίνακας 7 βασίζεται σε πλήθος συμβολαίων $c = 15$, ενώ ο Πίνακας 8 βασίζεται σε $c = 1.000$.

Οι πίνακες 9 και 10 δείχνουν την μέση τιμή, την διακύμανση, τον επενδυτικό κινδύνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο της παρούσας αξίας του μέσου κόστους ανά συμβόλαιο ενός χαρτοφυλακίου με c ράντες που εκδίδονται σε ηλικία 65 ετών. Ο πίνακας 9 βασίζεται σε αριθμό ραντών $c = 15$, ενώ ο πίνακας 10 βασίζεται σε $c = 1.000$.

Οι πίνακες 11 και 12 δείχνουν την μέση τιμή, τη διακύμανση, τον επενδυτικό κινδύνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο της παρούσας αξίας ενός χαρτοφυλακίου με c ράντες που εκδίδονται στην ηλικία των 45. Ο πίνακας 11 βασίζεται σε αριθμό ραντών $c = 15$, ενώ στον πίνακα 12 έχουμε $c = 1.000$.

Οι πίνακες 13 και 14 δείχνουν την μέση τιμή, τη διακύμανση, τον επενδυτικό κίνδυνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο της παρούσας αξίας του μέσου κόστους ανά συμβόλαιο ενός χαρτοφυλακίου με c ράντες που εκδίδονται στην ηλικία των 45. Ο πίνακας 13 βασίζεται σε $c = 15$, ενώ ο πίνακας 14 βασίζεται σε $c = 1.000$.

Πίνακας 7: Παρούσα Αξία Χαρτοφυλακίου στην Ηλικία των 65 με $c = 15$

	Projections			
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)]$	106.654	110.001	114.706	120.257
$Var[Z(c)]$	199.384	196.662	196.012	197.376
$Var[E[Z(c)\|\{y\}]]$	94.698	102.631	114.973	131.174
$E[Var[Z(c)\|\{y\}]]$	104.685	94.031	81.039	66.202

Πίνακας 8: Παρούσα Αξία Χαρτοφυλακίου στην Ηλικία των 65 με $c = 1000$

	Projections			
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)]$	7110.24	7333.41	7647.04	8017.12
$Var[Z(c)]$	427861.00	462405.00	516394.00	587408.00
$Var[E[Z(c)\|\{y\}]]$	420882.00	456136.00	510992.00	582995.00
$E[Var[Z(c)\|\{y\}]]$	6979.00	6269.00	5402.00	4413.00

Από τους πίνακες 7 και 8 παρατηρούμε ότι η μέση τιμή του $Z(c)$ αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ η πρόβλεψη της συνολική διακύμανσης, για $c = 15$, μειώνεται, με εξαίρεση την αισιόδοξη πρόβλεψη, ενώ αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις για $c = 1.000$. Αναλύοντας τις δύο συνιστώσες κινδύνου σημειώνουμε ότι για $c = 15$ και για $c = 1.000$ ο οικονομικός κίνδυνος αυξάνεται, ενώ ο ασφαλιστικός κίνδυνος μειώνεται.

Οι πίνακες 9 και 10 δείχνουν μια παρόμοια συμπεριφορά με τους πίνακες 7 και 8 αντίστοιχα.

Πίνακας 9: Παρούσα Αξία Μέσου Κόστους Ανά Συμβόλαιο στην Ηλικία των 65 με $c = 15$

	Projections			
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)/c]$	7.11024	7.33341	7.64704	8.01712
$Var[Z(c)/c]$	0.88614	0.87404	0.87116	0.87725
$Var[E[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.42088	0.45613	0.51099	0.58299
$E[Var[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.46526	0.41791	0.36017	0.29426

Πίνακας 10: Παρούσα Αξία Μέσου Κόστους Ανά Συμβόλαιο στην Ηλικία των 65 με $c = 1000$

		Projections		
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)/c]$	7.11024	7.33341	7.64704	8.01712
$Var[Z(c)/c]$	0.42786	0.4624	0.51639	0.58740
$Var[E[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.42088	0.45613	0.51099	0.58299
$E[Var[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.00698	0.00627	0.00540	0.00441

Πίνακας 11: Παρούσα Αξία Χαρτοφυλακίου στην Ηλικία των 45 με $c = 15$

		Projections		
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)]$	143.506	145.974	148.913	151.390
$Var[Z(c)]$	263.391	264.082	269.890	276.967
$Var[E[Z(c)\|\{y\}]]$	227.782	239.457	254.678	268.497
$E[Var[Z(c)\|\{y\}]]$	35.609	24.625	15.212	8.470

Πίνακας 12: Παρούσα Αξία Χαρτοφυλακίου στην Ηλικία των 45 με $c = 1000$

		Projections		
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)]$	9567.07	9731.6	9927.55	10092.7
$Var[Z(c)]$	1014670	1065890	1132920	1193880
$Var[E[Z(c)\|\{y\}]]$	1012360	1064250	1131900	1193320
$E[Var[Z(c)\|\{y\}]]$	2310	1640	1020	560

Για όλες τις τιμές του c, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος αυξάνεται και ο ασφαλιστικός κίνδυνος μειώνεται όταν αυξάνεται η πρόβλεψη. Παρατηρούμε ότι η πτωτική συμπεριφορά του ασφαλιστικού κινδύνου είναι ισχυρότερη όταν ο αριθμός των συμβολαίων είναι μικρός. Από μαθηματική άποψη, μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυτή τη συμπεριφορά μέσω της εξίσωσης (5.24), όπου η εξάρτηση της $E[Var(\frac{Z(c)}{c})|\{y(k)\}]]$ στο c είναι προφανής.

Για κάθε σταθερό πίνακα επιβίωσης, η συνολική διακύμανση του $\frac{Z(c)}{c}$ μειώνεται όσο αυξάνεται το c. Ειδικότερα, ο οικονομικός κίνδυνος παίρνει την ίδια τιμή (από την εξίσωση (5.23) βλέπουμε ότι $E[Var(\frac{Z(c)}{c})|\{y(k)\}]]$ δεν εξαρτάται από το

c, ενώ ο ασφαλιστικός κίνδυνος μειώνεται στο μηδέν καθώς το c τείνει στο άπειρο (βλ.(5.24)).
Μπορούμε να επαναλάβουμε ανάλογες σκέψεις σχετικά με τους πίνακες 7, 8, 9, και 10. Παρατηρούμε ότι για x = 45, η συνολική διακύμανση αυξάνει πάντα. Στην πραγματικότητα έχουμε:

Πίνακας 13: Παρούσα Αξία Μέσου Κόστους Ανά Συμβόλαιο στην Ηλικία των 65 με $c = 15$

		Projections		
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)/c]$	9.56706	9.73160	9.92753	10.0926
$Var[Z(c)/c]$	1.17062	1.17369	1.19951	1.23096
$Var[E[Z(c)/c\|\{y\}]]$	1.01236	1.06425	1.13190	1.19332
$E[Var[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.15826	0.10944	0.06761	0.03764

Πίνακας 14: Παρούσα Αξία Μέσου Κόστους Ανά Συμβόλαιο στην Ηλικία των 65 με $c = 1000$

		Projections		
	Basic	Pessimistic	Realistic	Optimistic
$E[Z(c)/c]$	9.56706	9.73160	9.92753	10.0926
$Var[Z(c)/c]$	1.01467	1.06589	1.13292	1.19388
$Var[E[Z(c)/c\|\{y\}]]$	1.01236	1.06425	1.13190	1.19332
$E[Var[Z(c)/c\|\{y\}]]$	0.00231	0.00164	0.00102	0.00056

5.6 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις

Αναλύσαμε ποσοτικά και τις δύο πηγές κινδύνου για ένα χαρτοφυλάκιο ραντών ζωής, τον επενδυτικό κίνδυνο και τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Η ανάλυση έγινε σε ένα πλαίσιο στο οποίο τόσο τα ποσοστά θνησιμότητας όσο και αυτά των αποδόσεων είναι τυχαία. Η συνολική απόδοση διαμορφώνεται ως το άθροισμα των δύο συνιστωσών, ένα ντετερμινιστικό το οποίο κρίνεται από υφιστάμενες επενδύσεις της εταιρείας, και ένα στοχαστικό, που εκπροσωπεί τις αποκλίσεις του πραγματικού ποσοστού απόδοσης από τις αναμενόμενες τιμές του. Η στοχαστική συνιστώσα είναι μια στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με τάση προς τη μέση τιμή του μηδενός. Θεωρούμε, επίσης, ότι ο κίνδυνος της μακροβιότητας οφείλεται στην βελτίωση της τάσης της θνησιμότητας. Τα αποτελέσματα των βελτιώσεων της θνησιμότητας διερευνήθηκαν χρησιμοποιώντας διάφορους προβλεπόμενους πίνακες θνησιμότητας.

Με βάση τα αριθμητικά παραδείγματα που παρουσιάζονται, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ασφαλιστικός κίνδυνος μειώνεται όταν αυξάνεται η πρόβλεψη. Από την άλλη πλευρά, ο οικονομικός κίνδυνος αυξάνεται όταν αυξάνεται η πρόβλεψη, διότι η εταιρεία θα μπορούσε να εκτεθεί για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα στον συστημικό κίνδυνο. Επιπλέον, η μέση τιμή της παρούσας αξίας των ταμειακών ροών συνδέεται με τις αυξήσεις του χαρτοφυλακίου, όταν η πρόβλεψη αυξάνεται, γιατί η ασφαλιστική εταιρεία θα μπορούσε να φέρει μεγαλύτερο κόστος.

Εν κατακλείδι, τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται δείχνουν πώς η χρήση των προβλεπόμενων πινάκων θνησιμότητας επιτρέπει στις ασφαλιστικές να αντιμετωπίζουν τον κίνδυνο μεγαλύτερου κόστους και πως η έκθεση στον χρηματοοικονομικό κίνδυνο και στον ασφαλιστικό κίνδυνο ποικίλλει, ανάλογα με την μακροβιότητα των ασφαλισμένων.

Πίνακας 16: Πινακας Επιτοκίων 3%

n	v^n	$(1+i)^n$
1	0.97087	1.03
2	0.94260	1.0609
3	0.91514	1.09273
4	0.88849	1.12551
5	0.86261	1.15927
6	0.83748	1.19405
7	0.81309	1.22987
8	0.78941	1.26677
9	0.76642	1.30477
10	0.74409	1.34392

Πίνακας 17: Πίνακας Επιτοκίων 4%

n	v^n	$(1+i)^n$
1	0.96154	1.04
2	0.92456	1.0816
3	0.88900	1.12486
4	0.85480	1.16986
5	0.82193	1.21665
6	0.79031	1.26532
7	0.75992	1.31593
8	0.73069	1.36857
9	0.70259	1.42331
10	0.67556	1.48024

Πίνακας 18: Πινακας Επιτοκίων 5%

n	v^n	$(1+i)^n$
1	0.95238	1.05
2	0.90703	1.1025
3	0.86384	1.15763
4	0.8227	1.21551
5	0.78353	1.27628
6	0.74622	1.3401
7	0.71068	1.4071
8	0.67684	1.47746
9	0.64461	1.55133
10	0.61391	1.62889

Πίνακας 19: Πίνακας Επιτοκίων 6%

n	v^n	$(1+i)^n$
1	0.95238	1.05
2	0.90703	1.1025
3	0.86384	1.15763
4	0.8227	1.21551
5	0.78353	1.27628
6	0.74622	1.3401
7	0.71068	1.4071
8	0.67684	1.47746
9	0.64461	1.55133
10	0.61391	1.62889

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. Βιβλία

[1] Atkinson D., Dallas J. “Products and Finance, Life Insurance”,2000

[2] Γιαννακόπουλος Α., «Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά», 2007

[3] Δαμιανού Χ., Παπαδάτος Ν., Χαραλαμπίδης Χ., ¨Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική», 2003

[4] Hasset M.J., Ratliff M.I., Garcia T.C., Steeby A.C., “Life Annuities” and “Contigent Payment Models for the Life Insurance” Actex, 2013

[5] Hoel P., Port S., Stone C., “Introduction to Probability Theory”, 2005

[6] Mikosch T., “Elementary Stochastic Calculus”, 2008

[7] Χαραλαμπίδης Χ., «Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές», 2000

Β. Σημειώσεις

[8] Βεροπούλου Γ., Ψαρρακος Γ. «Ανάλυση, Πρότυπα και Πίνακες Επιβίωσης»,2013

[9] Γιαννακόπουλος Α., «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική. Τόμος Ι: Στοχαστική Ανάλυση», 2004

[10] Γιαννακόπουλος Α., «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική. Τόμος ΙΙ: Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές», 2004

[11] Γκλεζάκος Μ., «Θεωρία Επενδύσεων και Διοίκηση Χαρτοφυλακίου», 2012

[12] Πιτσέλης Γ., Μπούτσικας Μ., «Ζημιοκατανομές και Θεωρία Ακραίων Τιμών», 2012

[13] Σεβρόγλου Β., «Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά», 2012

[14] Χατζηβασίλογλου Ι., «Διοικητικοί Κινδύνου», 2013

[15] Χατζηκωνσταντινίδης Ε., «Συμβάντα Ζωής και Θανάτου», 2012

Γ. Εργασίες

[16] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., and Nesbitt C.J., "Actuarial Mathematics Schaumburg III, Society of Actuaries", 1986

[17] Crow E. L. and Shimizu K., "Lognormal Distribution, Theory and Applications", 1988

[18] Di Lorenzo E., Sibillo M., Tessitore G. "A Stochastic Model for Financial Evaluations. Applications to Actuarial Contracts", Proceedings of the Second International Conference on "Applied Stochastic and Data Analysis", 1997

[19] Frees E.W., "Relative Importance of Risk Sources in Insurance Systems", North American Actuarial Journal, 1998

[20] Morocco P. and Pitacco E., "Longevity Risk and Life Annuity Reinsurance", 1998

[21] Norberg R., " A Solvency Study in Life Insurance" In Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium, 1993

[22] Olivieri A., "Per una Quantificazione del Longevity Risk", 1998

[23] Pandit S.M. and Wu S.M.,"Time Series and Systems Analysis with Applications", 1993

[24] Parker G., "Distribution of the Present Value of Futures Cash Flows" In Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium, 1993

[25] Parker G., "Moments of the Present Value of a Portfolio of Policies", Scandinavian Actuarial Journal, 1994a

[26] Parker G., "Stochastic Analysis of a Portfolio of Endowment Insurance Policies", Scandinavian Actuarial Journal, 1994b

[27] Parker G., "Stochastic Analysis of the Interaction Between Investment and Insurance Risks", North American Actuarial Journal, 1997

[28] Vasicek O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 1977