1040

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Κ. ΔΕΣΠΟΤΗ

ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1988

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Κ. ΔΕΣΠΟΤΗ

ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1988

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αφιερώνεται στους Γονείς μου

Θεωρώ χρέος μου να εκφράσω τις πιο θερμές ευχαριστίες προς τους Καθηγητές κ.κ. Αντώνιο Παναγιωτόπουλο και Ιωάννη Σίσκο για την συνεχή επίβλεψη και καθοδήγησή τους κατά την εκπόνηση της παρούσας διατριβής.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ιωάννη-Χρήστο Παναγιωτόπουλο, μέλος της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, για την συμπαράσταση και πολύτιμη συμβολή του.

Τέλος ευχαριστώ εκείνους που με την ηθική τους συμπαράσταση στήριξαν την προσπάθειά μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Η ΜΕΘΟΔΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ADELAIS

Ο τρόπος που λαμβάνονται οι αποφάσεις και ο ρόλος του ανθρώπινου παράγοντα στις διαδικασίες λήψης τους αποτελούν σήμερα τα βασικά αντικείμενα μελέτης της Επιστήμης των Αποφάσεων (Decision Science). Η οποία αυτονομήθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 70 συμπεριλαμβάνοντας έννοιες, τεχνικές και μεθόδους συγγενών κλάδων όπως της Επιχειρησιακής Ερευνας, της εφηρμοσμένης οικονομικής, της Επιστήμης της Συμπεριφοράς κ.α.

Η τάση της αυστηρής και κλειστής περιγραφής της πραγματικότητας και της προβολής της σε μαθηματικά μοντέλα με πρωταρχική προβληματική την επιλογή ή τον σχεδιασμό βέλτιστων αποφάσεων με βάση ένα και μοναδικό κριτήριο υπήρξε το κύρια χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας της Επιχειρησιακής Ερευνας.

Συχνά όμως τα μοντέλα αυτά αποδεικνύονταν αναποτελεσματικά λόγω της αδυναμίας τους να ανταποκριθούν στις πραγματικές συνθήκες των πολυδιάστατων προβλημάτων όπου η ρευστότητα των παραμέτρων επηρεάζει τις αποφάσεις και η διαθέσιμη πληροφορία είναι ανεπαρκής.

Ηδη από το 1960 ο Simon [70], σε αντίθεση με την λογική του παραδοσιακού μοντέλου της βέλτιστης επιλογής που θέλει τους αποφασίζοντες ανά πάσα στιγμή πλήρως πληροφορημένους για τις επιπτώσεις ενδεχόμενων επιλογών τους, διακυρύσσει την αρχή της "περιορισμένης λογικής" (bounded rationality).

Ετσι, η νέα αντίληψη των πραγμάτων άνοιξε τον δρόμο στην Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων (Multiple Criteria Decision Making) για την ανάλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων απόφασης κάτω από το καθεστώς πολλαπλών κριτηρίων και για την θεμελίωση και ανάπτυξη μεθόδων και συστημάτων υποστήριξης των αντίστοιχων αποφάσεων.

Το 1972, έτος πραγματοποίησης του πρώτου συνέδριου με θέμα την πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων[1], αποτελεί την αφετηρία μίας έντονης και με ταχύ ρυθμό αναπτυσσόμενης ερευνητικής δραστηριότητας σε σχετικά θέματα.

Σήμερα, στην μεθοδολογία της πολυκριτήριας ανάλυσης, διακρίνονται τέσσερις τάσεις: ο Πολυκριτήριος Μαθηματικός Προγραμματισμός (Multiobjective Mathematical Programming), η Θεωρία Πολυκριτήριας Χρησιμότητας (Multiattribute Utility Theory), οι Σχέσεις Υπεροχής (Outranking Relations) και η Ανάλυση Μονότονης Παλινδρόμησης (Ordinal Regression).

Ο πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός επιτρέπει την ταυτόχρονη θεώρηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων στα πλαίσια της μεθοδολογίας του μαθηματικού προγραμματισμού.

Αν και η ανάπτυξη των μεθόδων του πραγματοποιήθηκε κατά την τελευταία δεκαπενταετία, εντούτοις οι πρώτες ιδέες και τα

---

1) Βλ. Cochrane, Zeleny [15]

πρώτα συμπεράσματα οφείλονται στους Koopmans [51], Kuhn και Tucker [53], Charnes και Cooper [12], Ijiri [43], Lee [55,56] και Geoffrion [33].

Στις αρχές τις δεκαετίας του 70 οι εργασίες των Philip [62] Evans και Steuer [24] και Zeleny [81] έφεραν στο προσκήνιο τον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό, οπότε εμφανίστηκε μία πλειάδα μεθόδων απαρίθμησης των αποτελεσματικών λύσεων σε πολυκριτήρια γραμμικά προγράμματα με πιο αντιπροσωπευτικές εκείνες των Evans και Steuer [23], Ecker και Kouada [22] και Benveniste [7].

Την ίδια περίοδο, που χαρακτηρίζεται και από την ταχεία εξέλιξη της τεχνολογίας των υπολογιστών και ειδικότερα των μικρουπολογιστών, οι ερευνητές στρέφονται στην ανάπτυξη αλληλεπιδραστικών μεθόδων, οι οποίες αποσκοπούν στον προσδιορισμό αποδεκτών λύσεων με προοδευτική διάρθρωση των προτιμήσεων των αποφασιζόντων (Benayoun, Tergny και Keuneman [5], Benayoun, Montgolfier, Tergny και Larichev [4], Geoffrion, Dyer και Feinberg [34], Haimes και Hall [36], Zionts και Wallenius [85]).

Εκτεταμένες επισκοπήσεις των πιο χαρακτηριστικών αλληλεπιδραστικών μεθόδων, αναλυτικές ταξινομήσεις τους σε κατηγορίες καθώς και αναφορές σε διάφορες εφαρμογές τους γίνονται από τους Roy [66], Cohon και Marks [16], Hwang και Masud [42], Zeleny [83], Goicoechea, Hansen και Duckstein [35], Ckankong και Haimes [11], Evans [25] και Zionts [84].

Σήμερα, στον πολυκριτήριο μαθηματικό προγραμματισμό υπάρχουν δυό διαφορετικές προβληματικές όσον αφορά τον τρόπο που λαμβάνονται οι αποφάσεις: η διεξοδική και η ορθολογική.

Σύμφωνα με την πρώτη η όδευση προς την τελική απόφαση πραγματοποιείται με βάση τα επίπεδα ικανοποίησης που διαμορφώνει ο αποφασίζων γιά τις τιμές των κριτηρίων και την διεξοδική ανάλυση του βαθμού προσέγγισης των τεθέντων στόχων. Χωρίς να γίνεται καμμία αναφορά στην συνάρτηση χρησιμότητας ο αποφασίζων διαμορφώνει την υποκειμενική του αντίληψη γιά την σημαντικότητα των κριτηρίων και ορίζει τις επιλογές του, που αφορούν τα επίπεδα ικανοποίησης και τους στόχους του (Benayoun et. al [4], Benson [6])

Σύμφωνα με την δεύτερη, επιχειρείται η οικοδόμηση αυτού του ίδιου του μοντέλου χρησιμότητας του αποφάσιζοντα, το οποίο στη συνέχεια χρησιμοποιείται γιά την ανάδειξη αποφάσεων μέγιστης χρησιμότητας (Zionts και Wallenius [85], Geoffrion et.al [34], Jacquet-Lagreze, Meziani και Slowinski [46]).

Οι βασικές αρχές της θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας, τέθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 50 από τους Adams και Fagot [1], Miller και Starr [59] και στη συνέχεια το 1961 από τους Yntema και Torgerson [80], οι οποίοι εισήγαγον την ανάλυση της συνάρτησης χρησιμότητας "εις τα εξ ων συνετέθη" (utility function decomposition), δηλαδή την ανάλυση της ολικής χρησιμότητας στις επιμέρους χρησιμότητες των κριτηρίων.

Το ενδιαφέρον όμως γιά τον τομέα αυτόν της πολυκριτήριας ανάλυσης τονίστηκε στα μέσα της δεκαετίας του 60 με τις εργασίες των Fishburn [27] και Pollak [64] στις οποίες τέθηκαν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να πληρούνται ώστε να είναι δυνατή η έκφραση της συνάρτησης χρησιμότητας ως άθροισμα των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας των κριτηρίων.

Η θεωρία της πολυκριτήριας χρησιμότητας θεμελιώνεται με το **αξίωμα της** ολικής **και μεταβατικής συγκρισιμότητας**[1] Η θεωρία αυτή διερευνά επιπλέον τις ειδικότερες ιδιότητες που πρέπει να χαρακτηρίζουν ένα σύστημα προτιμήσεων, ώστε αυτό να μπορεί να εκφραστεί από ένα συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμότητας, και υποδεικνύει μεθοδολογικά πλαίσια για την εκτίμηση των συναρτήσεων χρησιμότητας (Fishburn [29,30], Huber [40], Vincke [73], Keeney και Raiffa [50]).

Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής έχει τις ρίζες της στα μέσα της δεκαετίας του 60, όταν για πρώτη φορά αυτές συμπεριλήφθηκαν ως μοντέλο ανάλυσης της συμπεριφοράς, στη μέθοδο ELECTRE [65].

Η βασική ιδέα στην προσέγγιση των προβλημάτων απόφασης με την βοήθεια των σχέσεων υπεροχής συνίσταται στο ότι, προκειμένου να ληφθεί η τελική απόφαση, δεν είναι πάντα αναγκαία αλλά ούτε και ρεαλιστική η πλήρης διάταξη των εναλλακτικών επιλογών,[2] όπως προκύπτει από το **αξίωμα της**

---

1) Βλ. Roy, Vincke [69]
2) Βλ. Roy [67]

ολικής και μεταβατικής συγκρισιμότητας.

Ετσι, οι σχέσεις υπεροχής οικοδομούν ένα περισσότερο ρεαλιστικό μοντέλο ανάλυσης της συμπεριφοράς σύμφωνα με το αξίωμα της μερικής συγκρισιμότητας .

Οι μέθοδοι που βασίζονται στις σχέσεις υπεροχής προσανατολίζονται κυρίως σε προβλήματα με πεπερασμένο σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων. Ποικίλουν δε ανάλογα με τον τύπο πληροφορίας που απαιτούν εκ μέρους του αποφασίζοντα, τον τρόπο με τον οποίο εκμεταλεύονται την πληροφορία αυτή και την γενικότερη προβληματική την οποία ορίζουν.

Μία ανασκόπιση των μεθόδων αυτών γίνεται από τον Ostanello [61].

Τέλος, η στατιστική μέθοδος της ανάλυσης παλινδρόμησης χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της συλλογιστικής των ατόμων στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων.

Η μεθοδολογία της περιλαμβάνει τον καθορισμό του συνόλου των εναλλακτικών επιλογών και των κριτηρίων που τις επηρρεάζουν, την καταγραφή δεδομένων αποφάσεων που χαρακτηρίζουν τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων και την εκτίμηση ενός αναλυτικού μοντέλου χρησιμότητας που να μπορεί να τις αναπαραστήσει.

Η ιδέα να συμπεριληφθεί η ανάλυση παλινδρόμησης στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων οφείλεται κυρίως στον Hammond.

Το 1977 οι Hammond, Cook και Adelman [37] παρουσίασαν το

POLICY, ένα αλληλεπιδραστικό σύστημα ανάλυσης των προτιμήσεων του αποφασίζοντα, με βάση το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης.

Το 1978 οι Jacquet-Lagreze και Siskos [47] παρουσίασαν το μοντέλο μονότονης παλινδρόμησης UTA.

Το 1983 οι Siskos και Yannacopoulos [71] παρουσίασαν το μοντέλο UTASTAR, βελτιωμένη έκδοση του UTA, στο οποίο στηρίχθηκε στη συνέχεια ο Yannacopoulos [79] για την ανάπτυξη του συστήματος MINORA.

Οπως τονίσθηκε, η τεχνολογία έμελε να επηρρεάσει τις ερευνητικές κατευθύνσεις και την εξέλιξη της Επιστήμης των Αποφάσεων.

Στις αρχές της δεκαετίας του 70 πρωτοεμφανίζεται ο όρος "Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων" (Decision Support Systems) που αποδίδει μία αντίληψη του ρόλου των υπολογιστών στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων.

Η γενική αρχιτεκτονική των ΣΥΑ ορίζει ότι αυτά απαρτίζονται από μία τράπεζα δεδομένων, μία τράπεζα μοντέλων και ένα σύνολο προγραμμάτων (λογικό βάσης) που διαχειρίζονται τις τράπεζες δεδομένων και μοντέλων και τον διάλογο του χρήστη με τον Η/Υ.

Κατά τους Keen και Scott-Morton [49], Alter [2] και Huber [41], τα Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων (ΣΥΑ) αναπτύσσονται σε υπολογιστή και αποσκοπούν στο να προάγουν την αποτελεσματικότητα των διαδικασιών λήψης αποφάσεων σε προβλήματα ή τομείς δραστηριοτήτων που χαρακτηρίζονται από χαμηλό βαθμό δόμησης, όπου δεν είναι δυνατή αλλά ούτε επιθυμητή η αυτοματοποίηση του ρόλου των αποφασιζόντων.

Οι Carlson και Sprague [10] αντιλαμβάνονται τα ΣΥΑ ως διαδικασίες υποστηριζόμενες από υπολογιστή, που αποσκοπούν στη διεύρυνση τού γνωστικού πεδίου των αποφασιζόντων σχετικά με τα προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν.

Ο Zeleny [83] ισχυρίζεται ότι ρόλος των ΣΥΑ δεν είναι να υποδεικνύουν λύσεις καλύτερες από εκείνες που αντιλαμβάνονται οι αποφασίζοντες. Ο ρόλος τους είναι να αναπτύσσουν τις ικανότητες των αποφασιζόντων έτσι ώστε οι λύσεις που αυτοί προτείνουν να γίνονται καλύτερες.

Εξάλλου, το χαμηλό κόστος αγοράς, συντήρησης και λειτουργίας των μικρουπολογιστών, η αυτονομία στην χρήση τους και η άμεση απόκριση τους παράλληλα με την επινόηση διαλογικών γλωσσών προγραμματισμού δημιούργησαν τις προυποθέσεις για την ανάπτυξη περισσότερο ευέλικτων και αποτελεσματικών ΣΥΑ, μέσα σε ένα περιβάλλον άμεσης και αλληλεπιδραστικής επικοινωνίας χρήστη-Η/Υ.

Την νέα αυτή γεννιά των ΣΥΑ ο Courbon [17,18] την χαρακτηρίζει με τον όρο "Αλληλεπιδραστικά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων" (Systemes Interactifs d'Aide a la Decision). Ο Courbon ορίζει τα ΣΥΑ ως συστήματα που αξιοποιούν την κρίση και την εμπειρία των αποφασιζόντων για να τους καθοδηγήσουν στην λήψη αποφάσεων μέσα από μία διαδικασία δοκιμής-λάθους (trial-and-error)

Τα πολυκριτήρια προβλήματα εντάσσονται στην κατηγορία των προβλημάτων χαμηλού βαθμού δόμησης και όταν ακόμη αντιμετωπίζονται σε συνθήκες βεβαιότητας. Τούτο οφείλεται κυρίως στην παρουσία πολλαπλών και αντικρουόμενων κριτηρίων για την αξιολόγηση εναλλακτικών αποφάσεων.

Η πολλαπλότητα των κριτηρίων συνδυαζόμενη με το ότι η "a priori" διαθέσιμη πληροφορία για τον βαθμό και τον τρόπο αλληλεπίδρασής τους είναι συνήθως ανεπαρκής, επιδρά στο σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση χαρακτηρίζεται και αυτό από έναν χαμηλό βαθμό δόμησης.

Για τους προηγούμενους λόγους, η ανάπτυξη ολοκληρωμένων ΣΥΑ αποτελεί σήμερα ένα από τα βασικότερα αντικείμενα έρευνας και στον χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων.

Σε μία πρόσφατη έρευνα ο Bui [9] κατέγραψε 74 μηχανογραφημένες μεθόδους της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων, που αναπτύχθηκαν την τελευταία δεκαετία στην Ευρώπη και στην Αμερική. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρυνας αυτής ένα μικρό μόνο ποσοστό (23%) των μεθόδων είναι αλληλεπιδραστικές ενώ μόνο 15% αυτών υποστηρίζουν όλα τα στάδια της διαδικασίας για την λήψη μίας απόφασης.

Η ίδια έρευνα έδειξε επίσης ότι, όσον αφορά τις τεχνικές του μαθηματικού λογισμού που χρησιμοποιούνται, το μεγαλύτερο ποσοστό των μεθόδων (47%) χρησιμοποιούν τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού, ενώ μόνο ένα 8% χρησιμοποιεί τεχνικές μη γραμμικού προγραμματισμού και ένα 9% βασίζεται στην ανάλυση παλινδρόμησης.

Τέλος, σημαντική διαπίστωση της έρευνας του Bui είναι ότι όλα τα συστήματα που μελετήθηκαν στηρίζονται σε μία και μόνο μέθοδο της πολυκριτήριας ανάλυσης, γεγονός που φανερώνει ότι έχουν σχεδιαστεί ως αυτόνομα συστήματα που δεν υποστηρίζουν τον καταμερισμό μοντέλων και δεδομένων και την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ περισσοτέρων μεθόδων.

Ο Jelassi [48] διακρίνει τέσσερις γενιές ΣΥΑ στην πολυκριτήρια ανάλυση ανάλογα με την αρχιτεκτονική τους και τον βαθμό ολοκλήρωσης των συστατικών τους μερών (μοντέλα, δεδομένα, διάλογος) και σκιαγραφεί τα γενικά χαρακτηριστικά των ΣΥΑ της πέμπτης γενιάς, με βάση τις αρχές των Εμπειρων Συστημάτων (Expert Systems).

Η παρούσα διατριβή σκοπό έχει την ανάπτυξη μίας νέας αλληλεπιδραστικής μεθόδου πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού και ενός πληροφοριακού συστήματος για την εφαρμογή της.

Η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια και ένα παράρτημα.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες και πορίσματα της πολυκριτήριας ανάλυσης και του κατά τμήματα γραμμικού προγραμματισμού. Γίνεται επίσης παρουσίαση του αλγορίθμου του Fourer [31] που επιλύει κατά τμήματα γραμμικά προγράμματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική παρουσίαση των πλέον αντιπροσωπευτικών αλληλεπιδραστικών μεθόδων του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού καθώς και σύντομη αναφορά σε άλλες μεθόδους που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα τεχνικών του.

Δίδονται επίσης οι διάφοροι τύποι πληροφοριών που οι μέθοδοι χρησιμοποιούν και ορίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των αλληλεπιδραστικών μεθόδων, τα οποία συνιστούν κριτήρια για την αξιολόγησή τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται μία νέα αλληλεπιδραστική μέθοδος, η οποία εκμεταλευόμενη τα θετικά στοιχεία της διεξοδικής και της ορθολογικής προσέγγισης ορίζει μία νέα προβληματική για την λήψη των αποφάσεων στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό, δηλαδή την προσέγγιση λύσεων μέγιστης χρησιμότητας μέσα σε αποδεκτά όρια για τις τιμές των κριτηρίων.

Στην αρχή περιγράφονται η γενική φιλοσοφία και οι αρχές της μεθόδου και τη συνέχεια αναπτύσσονται διεξοδικά όλα τα επιμέρους στάδιά της και οι τεχνικές που χρησιμοποιεί.

Συγκεκριμένα, αναπτύσσεται η τεχνική προσδιορισμού φραγμάτων για τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων, που επιτρέπει την ασφαλή οριοθέτηση ενός μη κενού χώρου αποφάσεων χωρίς αρχικά να εξαιρεί ουδεμία αποτελεσματική λύση.

Σ'αυτό ακριβώς το σημείο βελτιώνεται η μέθοδος των ικανοποιητικών στόχων του Benson [6].

Αναπτύσσεται το μεθοδολογικό πλαίσιο για την τοποθέτηση επιπέδων ικανοποίησης και την ανάλυση ευαισθησίας τους, που επιτρέπει την διευθέτηση του χώρου των αποφάσεων κατά τρόπον ώστε να είναι δυνατή η επανένταξη σ'αυτόν λύσεων που είχαν εξαιρεθεί στην πορεία της διαδικασίας.

Αναπτύσσεται η τεχνική δημιουργίας υποθετικών αποφάσεων, η οποία απλοποιεί αντίστοιχη τεχνική της μεθόδου των Jacquet-Lagreze, Meziani και Slowinski [46].

Προσαρμόζεται και θεμελιώνεται η μέθοδος μονότονης παλινδρόμησης UTA των Jacquet-Lagreze και Siskos [47] για την εκτίμηση αποκλειστικά κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας σε περιβάλλον συνεχούς χώρου αποφάσεων.

Μοντελοποιείται το κατά τμήματα γραμμικό και το ισοδύναμο γραμμικό πρόγραμμα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας, που επιτρέπει τον προσδιορισμό αποτελεσματικών λύσεων ολικού βελτίστου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η αλγοριθμική διαδικασία της μεθόδου, η οποία στην συνέχεια αναλύεται με την βοήθεια ενός παραδείγματος προγραμματισμού παραγωγής με τρία κριτήρια.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται η γενική φιλοσοφία, οι αρχές λειτουργίας, η φυσική δομή και τα τεχνικά χαρακτηριστικά του πληροφοριακού συστήματος ADELAIS (Aide a la DEcision pour systemes Lineaires multicriteres par AIde a la Structuration des preferences), το οποίο επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου σε πραγματικά προβλήματα αποφάσεων.

Το ADELAIS είναι ένα σύστημα που υποστηρίζει όλα τα στάδια της διαδικασίας για την λήψη μίας απόφασης σε γραμμικά συστήματα με πολλαπλά κριτήρια και συνθήκες βεβαιότητας, η δε αρχή λειτουργίας του στηρίζεται στην προοδευτική δόμηση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα μέσα από μία διαδικασία δοκιμής λάθους.

Τέλος στο παράρτημα περιγράφεται η γενική προβληματική των μοντέλων παλινδρόμησης στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων και παρουσιάζεται η μέθοδος μονότονης παλινδρόμησης UTA.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΕΣ

Η πολυκριτήρια ανάλυση πραγματεύεται τα μοντέλα και τις διαδικασίες λήψης αποφάσεων κάτω από το καθεστώς πολλαπλών κριτηρίων.
Αν και το γνωστικό της αντικείμενο είναι σαφές, η χρησιμοποιούμενη ορολογία δεν είναι ενιαία.
Ετσι, εκτός του όρου "κριτήρια" (criteria) αναφέρονται και οι όροι: χαρακτηριστικά (attributes), αντικειμενικοί σκοποί (objectives) και στόχοι (goals), οι οποίοι χρησιμοποιούνται άλλοτε με κάποια διάκριση ως προς το εννοιολογικό τους περιεχόμενο και άλλοτε εναλλακτικά για την απόδοση της ίδιας πολλές φορές έννοιας.

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι βασικές έννοιες και αρχές της πολυκριτήριας ανάλυσης, που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.
Επίσης γίνεται μία σύντομη αναφορά στις σχέσεις προτίμησης, στα βασικότερα σημεία της θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας και στις ιδιότητες των αθροιστικών συναρτήσεων χρησιμότητας.
Τέλος δίνονται οι βασικότερες έννοιες που αφορούν τον κατά τμήματα γραμμικό προγραμματισμό.

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η μεθοδολογία της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων αναφέρεται στην επιλογή μίας ή περισσοτέρων αποφάσεων από ένα σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων. Οι αποφάσεις αυτές έχουν περιγραφεί με βάση τα χαρακτηριστικά τους, που εκλαμβάνονται ως ιδιότητες του "έξω" κόσμου και καθιερώνονται αντικειμενικά ή ακόμη και υποκειμενικά. Μετριούνται ανεξάρτητα από τις επιθυμίες των αποφασιζόντων και μπορούν να θεωρηθούν ως παράμετροι περιγραφής διαφόρων εναλλακτικών επιλογών.

Οι αντικειμενικοί σκοποί είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τις ανάγκες και τις επιθυμίες των αποφασιζόντων. Αντιπροσωπεύουν την κατεύθυνση προς το "περισσότερο επιθυμητό" έτσι όπως αυτό γίνεται αντιληπτό και καθορίζεται από τους αποφασίζοντες.

Στην ανάλυση αποφάσεων με πολλαπλούς αντικειμενικούς σκοπούς επιδιώκεται ο σχεδιασμός και η αναζήτηση αποφάσεων που ικανοποιούν στο μέγιστο βαθμό τους αντικειμενικούς σκοπούς που θέτουν οι αποφασίζοντες.

Οι στόχοι εκφράζουν τις επιθυμίες και τις ανάγκες των αποφασιζόντων. Εξωτερικεύονται και καθιερώνονται ως συγκεκριμένοι βαθμοί ικανοποίησης των αντικειμενικών σκοπών.

Τα <u>**κριτήρια**</u> είναι μέτρα σύγκρισης εναλλακτικών επιλογών ή κανόνες βάσει των οποίων μία επιλογή μπορεί να χαρακτηρισθεί ως αποδεκτή ή μη.

Συγκεκριμένα, τα κριτήρια g_1, ..., g_n που χαρακτηρίζουν ένα πρόβλημα απόφασης πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες, για κάθε ζεύγος αποφάσεων a, b:

i) $g_i(a) = g_i(b)\ \forall\ i \in [n] \iff a \sim b$

ii) $g_i(a) = g_i(b)\ \forall\ i \in [n], i \neq k$ και $g_k(a) > g_k(b) \iff a \succ b$

iii) Η παράλειψη ενός κριτηρίου από τα n καθιστά ανίσχυρη μία τουλάχιστον από τις δύο προηγούμενες ιδιότητες.

όπου $\sim$ (αντίστοιχα $\succ$) η σχέση αδιαφορίας (αντίστοιχα η σχέση προτίμησης).

Η πρώτη ιδιότητα ονομάζεται πληρότητα (exhaustiveness), η δεύτερη μονοτονία (monotonicity) και η τρίτη μη πλεονασμός (non-redundancy).

Κάθε n-άδα κριτηρίων που πληρούν τις προηγούμενες τρείς ιδιότητες ονομάζεται <u>**συνεπής οικογένεια κριτηρίων**</u> (consistent family of criteria) και σημειώνεται με

$$G = \{ g_1, \ldots, g_n \}.$$

1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ

Το γενικό πρόβλημα του πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού είναι το ακόλουθο:

Να ευρεθεί το διάνυσμα $\underline{x} \in R^m$, ώστε

$$\max g_1(\underline{x}), \ \ldots, \ \max g_n(\underline{x})$$

κάτω από τους περιορισμούς (1.2.1)

$$\underline{F}(\underline{x}) \leq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

όπου:

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης.

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ οι αντικειμενικές συναρτήσεις

$\underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \ldots, F_k(\underline{x}))$ το διάνυσμα των συναρτήσεων των περιορισμών

$\underline{b}$ το διάνυσμα των πραγματικών τιμών των δεύτερων μελών.

__Χώρος αποφάσεων__ ή __σύνολο εφικτών λύσεων__ του πολυκριτήριου μαθηματικού προγράμματος (π.μ.π) 1.2.1 ονομάζεται το σύνολο

$$A = \{ \underline{x} \in R^m : \underline{F}(\underline{x}) \leq \underline{b} , \ \underline{x} \geq 0 \}$$

δηλαδή το σύνολο των τιμών των μεταβλητών απόφασης που ικανοποιούν τους περιορισμούς του.

Σε κάθε λύση $\underline{x} \in A$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $\underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x}))$ των τιμών των κριτηρίων.

Χώρος κριτηρίων του π.μ.π 1.2.1 ονομάζεται το σύνολο

$$S = \{ \underline{g}(\underline{x}) \in R^n : \underline{x} \in A \}$$

δηλαδή το σύνολο των τιμών $\underline{g}(\underline{x})$ για κάθε διάνυσμα $\underline{x} \in A$.

Βέλτιστη λύση του π.μ.π. 1.2.1 ονομάζεται κάθε λύση $\underline{x}^* \in A$ για την οποία:

$$g_i(\underline{x}^*) \geq g_i(\underline{x}) \quad \forall \quad \underline{x} \in A \quad \text{και} \quad i \in [n].$$

Οι αντικειμενικοί σκοποί που εμφανίζονται στα προβλήματα πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού είναι από τη φύση τους συνήθως αλληλοσυγκρουόμενοι με αποτέλεσμα να μην υπάρχει γενικά βέλτιστη λύση σ'αυτά, δηλαδή λύση που να βελτιστοποιεί ταυτόχρονα όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις.

Αποτελεσματική λύση του π.μ.π. 1.2.1 ονομάζεται κάθε λύση $\underline{x}^e \in A$ για την οποία δεν υπάρχει $\underline{x} \in A$ τέτοιο ώστε $g_i(\underline{x}) \geq g_i(\underline{x}^e)$ $\forall$ $i \in [n]$ και $g_j(\underline{x}) > g_j(\underline{x}^e)$ για ένα τουλάχιστον $j \in [n]$.

Το σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων συμβολίζεται με A_E.

Σύνολο αποτελεσματικών σημείων του S ή **αποτελεσματικό σύνορο** του S ονομάζεται το σύνολο:

$$S_E = \{ \underline{g} \in S: \underline{g} = \underline{g}(\underline{x}), \ \underline{x} \in A_E \}$$

Εστω το παραμετρικό μαθηματικό πρόγραμμα:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(\underline{x})$$
$$\underline{x} \in A \qquad (1.2.2)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad i \in [n]$$

του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτός συνδυασμός των αντικειμενικών συναρτήσεων του π.μ.π. 1.2.1. Ο Geoffrion [33] απέδειξε ότι για τα προγράμματα 1.2.1 και 1.2.2 ισχύουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 1ο

Αν $\underline{x}^e$ είναι μία βέλτιστη λύση του προγράμματος 1.2.2 τότε είναι και αποτελεσματική λύση του προγράμματος 1.2.1.

Θεώρημα 2ο

Αν το σύνολο A είναι κυρτό και οι συναρτήσεις $g_i(\underline{x})$ είναι κοίλες στο A τότε, μια λύση $\underline{x}^e \in A$ είναι αποτελεσματική λύση του προγράμματος 1.2.1 τότε και μόνο όταν η $\underline{x}^e$ είναι βέλτιστη λύση του προγράμματος 1.2.2.

Τα δύο αυτά θεωρήματα απετέλεσαν τη βάση για την ανάπτυξη μεθόδων προσδιορισμού και διερεύνησης του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων στα προβλήματα πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού.

Προτιμητέα ή **καλλίτερη συμβιβαστική** λύση του π.μ.π 1.2.1 ονομάζεται η αποτελεσματική λύση που τελικά επιλέγεται από τον αποφασίζοντα.

Οταν στο πρόγραμμα 1.2.1 οι αντικειμενικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις των περιορισμών είναι γραμμικές, τότε προκύπτει το ακόλουθο πολυκριτήριο γραμμικό πρόγραμμα (π.γ.π):

$$\max g_1(\underline{x})=\underline{c}_1^T\underline{x}\ ,\ \ldots,\ \max g_n(\underline{x})=\underline{c}_n^T\underline{x} \tag{1.2.3}$$

$$\underline{x}\in A=\{\ \underline{x}\in R^m : \mathbb{A}\ \underline{x} \leq \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\ \}$$

όπου:

$\underline{c}_i = (c_{i1}, \ldots, c_{im})$, $i \in [n]$

$\mathbb{A}$ η μήτρα των συντελεστών των περιορισμών

$\underline{b}$ το διάνυσμα των πραγματικών τιμών των δεύτερων μελών.

Στο πρόγραμμα αυτό ο χώρος A των αποφάσεων είναι ένα κυρτό πολύεδρο του R^m.

Η ισχύς του δεύτερου θεωρήματος του Geoffrion είναι προφανής για προγράμματα της μορφής 1.2.3 δεδομένου ότι σ'αυτά το σύνολο A είναι κυρτό και οι αντικειμενικές συναρτήσεις, ως γραμμικές, είναι κοίλες.

Ιδεώδες σημείο του π.γ.π. 1.2.3 ονομάζεται το σημείο $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ του R^n για τις συντεταγμένες του οποίου ισχύει

$$h_i = \max_{\underline{x}\in A} g_i(\underline{x}) \quad , \quad i \in [n]$$

Το ιδεώδες σημείο ευρίσκεται εν γένει έξω από το χώρο των κριτηρίων S και οι συνιστώσες του εκφράζουν τις πλέον επιθυμητές τιμές για τα κριτήρια.

Αν $\underline{x}_i^*$ είναι η βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος

$$\max g_i(\underline{x}) \ , \ \underline{x} \in A \ , \ i \in [n]$$

και

$$g_{ij} = g_j(\underline{x}_i^*) \ , \quad i,j \in [n].$$

τότε ο τετραγωνικός πίνακας

	g_1	....	g_i	....	g_n
g_1	$g_{11} = h_1$		g_{1i}		g_{1n}
		.....	.....	.....	
g_i	g_{i1}		$g_{ii} = h_i$		g_{in}
		.....	.....	.....	
g_n	g_{n1}		g_{ni}		$g_{nn} = h_n$

ονομάζεται <u>πίνακας πληρωμών</u> του π.γ.π. 1.2.3.

Οι τιμές της κύριας διαγωνίου του πίνακα πληρωμών ταυτίζονται προφανώς με τις συντεταγμένες του ιδεώδους σημείου.

Πραγματικά για i=j ισχύει:

$$g_{ii} = g_i(\underline{x}_i^*) = \max_{\underline{x} \in A} g_i(\underline{x}) = h_i$$

<u>Αντι-ιδεώδες σημείο</u> του π.γ.π. 1.2.3 ονομάζεται το διάνυσμα $\underline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ του R^n για τις συντεταγμένες του οποίου ισχύει:

$$\ell_j = \min_{\{i\}} \{g_{ij}\} \quad , \; i,j \in [n]$$

Ετσι, οι συντεταγμένες του αντι-ιδεώδους σημείου ορίζονται από τα ελάχιστα στοιχεία των στηλών του πίνακα πληρωμών.

Για δύο σημεία $\underline{g}$, $\underline{g}' \in S$, <u>μετρική του Tchebycheff</u> με βάρη τους μη αρνητικούς αριθμούς m_i, $i \in [n]$ και $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$ ονομάζεται η διαφορά

$$\|\underline{g} - \underline{g}'\| = \max_{\{i\}} \{ m_i (g_i - g_i') \}$$

Στην περίπτωση που $\underline{h}$ είναι το ιδεώδες σημείο του π.γ.π. 1.2.3 και $\underline{g}^o = (g_1^o, \ldots, g_n^o)$ είναι ένα αποτελεσματικό σημείο του χώρου των κριτηρίων S, τότε το $\underline{g}^o$ είναι το πλησιέστερο προς το $\underline{h}$ όταν ικανοποιείται η σχέση:

$$\max_{\{i\}} \{ m_i(h_i - g_i^o) \} = \min_{\underline{x} \in A} \max_{\{i\}} m_i(h_i - g_i(\underline{x}))$$

1.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ

Μια διαδικασία που σκοπό έχει να υποστηρίξει τη λήψη αποφάσεων, για να είναι αποτελεσματική, πρέπει να μπορεί να οδηγεί τον αποφασίζοντα στην τελική του απόφαση. Για τον λόγο αυτό είναι πάντα αναγκαίος ο ορισμός μιας διμελούς σχέσης, που να εκφράζει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των εναλλακτικών αποφάσεων και η λήψη της τελικής απόφασης.

Μια κατηγορία μεθόδων επιχειρεί την δόμηση των προτιμήσεων και την προσέγγιση τους με ένα μοντέλο ολικής προτίμησης. Οι μέθοδοι αυτές έχουν την βάση τους στην θεωρία χρησιμότητας, η οποία θεμελιώνεται στην παραδοχή ότι κάθε σύστημα προτιμήσεων μπορεί να εκφραστεί από μια πραγματική συνάρτηση, την συνάρτηση χρησιμότητας. Οταν κατασκευασθεί μια τέτοια συνάρτηση, τότε το πρόβλημα της επιλογής της τελικής απόφασης γίνεται σχετικά εύκολο. Οταν μάλιστα στο πρόβλημα δεν υπάρχει αβεβαιότητα, τότε η τελική απόφαση αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας.

Εστω οτι το σύνολο A των εναλλακτικών αποφάσεων είναι πεπερασμένο ή απέραντο αλλά αριθμήσιμο. Τότε υπάρχει μία σχέση προτίμησης $\succsim$ που ορίζεται ως εξής:

$$a \succsim b \iff \text{"Η απόφαση a δεν υπολείπεται της απόφασης b"}$$

Η κλασσική θεωρία απαιτεί η σχέση προτίμησης να είναι μία σχέση ολικής προδιάταξης.

Με την βοήθεια της σχέσης προτίμησης ορίζεται στο Α η σχέση γνήσιας προτίμησης $\succ$ ως εξής:

$$a \succ b \iff a \succsim b \text{ και όχι } b \succsim a$$

Η σχέση γνήσιας προτίμησης στο Α είναι μία γνήσια μερική διάταξη σ'αυτό.

Τέλος στο Α ορίζεται και η σχέση αδιαφορίας $\sim$ ως εξής:

$$a \sim b \iff a \succsim b \text{ και } b \succsim a$$

Η σχέση αδιαφορίας είναι μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία διαμερίζει το Α σε κλάσεις.

Εστω $W = A/_\sim$ το σύνολο-πηλίκο της διαμέρισης αυτής, τότε στο σύνολο αυτό ορίζεται μία σχέση γνήσιας προτίμησης ως εξής:

$$A' \succ A'' \iff a \succ b \quad \forall\, a \in A',\ b \in A''$$

Η σχέση αυτή είναι καλά ορισμένη.

Πραγματικά, αν $a_0 \in A'$ και $b_0 \in A''$ τότε $a \sim a_0 \quad \forall \quad a \in A'$ και $b \sim b_0 \quad \forall \quad b \in A''$.

Από τον ορισμό της σχέσης αδιαφορίας έπεται ότι

$$a \sim a_0 \implies a \succsim a_0 \quad \forall\ a \in A'$$

$$b \sim b_0 \implies b_0 \succsim b \quad \forall\ b \in A''$$

Επειδή $a_0 \succ b_0$, από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έπεται ότι

$$a \succ b \quad \forall \quad a \in A',\ b \in A''.$$

Από τα προηγούμενα εύκολα προκύπτει ότι η σχέση γνήσιας προτίμησης στο W είναι μια γνήσια διάταξη σ'αυτό.

Αν το σύνολο A είναι πεπερασμένο τότε και το σύνολο-πηλίκο W είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$W = \{ A_1, \dots, A_K \}$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν

$$A_i \succ A_{i+1} \qquad \forall\ i = 1, 2, \dots, k-1$$

1.4 ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας, υπό συνθήκες βεβαιότητας, βασίζεται στην παραδοχή οτι το σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα χαρακτηρίζεται από την ομώνυμη σχέση.

Ετσι για το σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα ισχύουν, για κάθε ζεύγος αποφάσεων a, b, οι ιδιότητες:

i) $a \succ b$ ή $b \succ a$ ή $a \sim b$

ii) $(a \succ b$ και $b \succ c) \Longrightarrow a \succ c$

iii) $(a \sim b$ και $b \sim c) \Longrightarrow a \sim c$

Οι ιδιότητες αυτές έχουν υποστεί κριτική, τα δε μοντέλα που στηρίζονται σ'αυτές έχουν κατηγορηθεί ως μη ρεαλιστικά.

Η πρώτη αναφέρεται στην ολική συγκρισιμότητα δηλαδή οτι δύο εναλλακτικές αποφάσεις μπορούν πάντα να συγκριθούν. Αυτό όμως αντίκειται στο γεγονός οτι ο αποφασίζων ενδέχεται να μη θέλει ή να μην είναι πάντα ικανός να συγκρίνει δύο εναλλακτικές επιλογές.

Η δεύτερη αναφέρεται στην μεταβατικότητα των προτιμήσεων, ιδιότητα που δεν επαληθεύεται πάντα στην πράξη. Πραγματικά, οι λόγοι που οδηγούν τον αποφασίζοντα να προτιμήσει a έναντι b , μπορεί να είναι διαφορετικοί από εκείνους που τον οδηγούν στη προτίμηση b έναντι c. Σε μια τέτοια περίπτωση η προτίμηση του a έναντι του c δεν είναι πλέον προφανής.

Ο Roy [67] αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα της ολικής συγκρισιμότητας πρότεινε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο ανάλυσης της συμπεριφοράς εισάγοντας τις έννοιες: ασθενούς προτίμησης (weak preference), ασυγκρισιμότητας (incomparability) και σχέσης υπεροχής (outranking).

Οπως αναφέρθηκε στην αρχή, η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας δέχεται οτι υπό συνθήκες βεβαιότητας οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα είναι δυνατόν να εκφραστούν από μια πραγματική συνάρτηση, τη συνάρτηση χρησιμότητας. Η παραδοχή αυτή απορρέει από τις υποθέσεις (i)-(iii) και από το ακόλουθο θεώρημα (Fishburn [28]).

Θεώρημα

Αν στο A υπάρχει σχέση προτίμησης και το W είναι αριθμήσιμο, τότε υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση u ορισμένη στο A τέτοια ώστε για κάθε a, $b \in A$

$$a \succ b \iff u(a) > u(b)$$

$$a \sim b \iff u(a) = u(b)$$

Μία επέκταση του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο θεώρημα (Fishburn [28]) στο οποίο η συνθήκη αριθμησιμότητας του W αντικαθίσταται από τη συνθήκη ύπαρξης ενός αριθμήσιμου υποσυνόλου του W.

Θεώρημα

Αν στο A υπάρχει σχέση προτίμησης και B είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του W τέτοιο ώστε

$$\forall A_1,\ A_2 \in W \text{ με } A_1 \succ A_2 \quad \exists\ Y \in B : A_1 \succ Y \succ A_2.$$

τότε υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση u ορισμένη στο A, τέτοια ώστε για κάθε a, b A

$$a \succ b \iff u(a) > u(b)$$

$$a \sim b \iff u(a) = u(b)$$

Αν $A \subset R^m$ είναι ο χώρος των αποφάσεων και $S \subset R^n$ είναι ο χώρος των κριτηρίων ενός π.μ.π., τότε για κάθε $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$ ισχύει

$$\underline{x} \succsim \underline{y} \iff \underline{g}(\underline{x}) \succsim \underline{g}(\underline{y})$$

Η διατήρηση της σχέσης προτίμησης στο χώρο των κριτηρίων S επιτρέπει την σύγκριση των εναλλακτικών αποφάσεων μέσω των διανυσμάτων των τιμών των κριτηρίων.

Το επόμενο θεώρημα (Fishburn [28]) αναφέρεται στις συνθήκες ύπαρξης της συνάρτησης χρησιμότητας όταν $A \subset R^m$.

Θεώρημα

Εστω $A \subset R^m$, $S \subset R^n$ και μια σχέση προτίμησης στο A τέτοια ώστε για οποιαδήποτε $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in A$ ισχύουν:

i) $g_i(\underline{x}) \geq g_i(\underline{y}) \quad \forall\ i \in [n] \Longrightarrow \underline{g}(\underline{x}) \succ \underline{g}(\underline{y})$

ii) Αν $\underline{g}(\underline{x}) \succ \underline{g}(\underline{y}) \succ \underline{g}(\underline{z}) \Longrightarrow \exists!\ \lambda \in (0,1):\ \underline{g}(\underline{y}) \sim \lambda \underline{g}(\underline{x}) + (1-\lambda)\underline{g}(\underline{z})$

τότε υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση u ορισμένη στο S τέτοια ώστε

$$\underline{x} \succ \underline{y} \Longleftrightarrow u(g(x)) > u(g(y))$$

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Longleftrightarrow u(g(x)) = u(g(y))$$

Η πρώτη συνθήκη του θεωρήματος εκφράζει τη μονοτονία των προτιμήσεων, δηλαδή όταν η τιμή ενός κριτηρίου αυξάνει χωρίς να μειώνονται οι τιμές των υπολοίπων, τότε αυξάνει και η προτίμηση.

Η δεύτερη συνθήκη έκφράζει την συνέχεια του χώρου των κριτηρίων που είναι απαραίτητη προυπόθεση για τον ορισμό της συνάρτησης χρησιμότητας.

Η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας δεχόμενη ότι, η ολική χρησιμότητα μίας απόφασης $\underline{x}$ που έχει αξιολογηθεί ως προς n κριτήρια $g_1(\underline{x})$, $g_2(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x})$ μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των μερικών χρησιμοτήτων

$$u[\underline{g}(\underline{x})] = \mathcal{X}[u_1(g_1(\underline{x})),\ u_2(g_2(\underline{x})), \ldots,\ u_n(g_n(\underline{x}))]$$

επιχειρεί να απαντήσει στα ακόλουθα θέματα:

(α) Προσδιορισμός των ιδιοτήτων που πρέπει να έχουν οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα, ώστε η συνάρτηση χρησιμότητάς του να λάβει συγκεκριμένη αναλυτική μορφή.

(β) Ελεγχος των ιδιοτήτων αυτών.

(γ) Εκτίμηση της συνάρτησης u.

Ο συνηθέστερος τύπος συνάρτησης χρησιμότητας είναι ο αθροιστικός, ο οποίος έχει την μορφή

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(\underline{x})) \qquad (1.4.1)$$

δηλαδή, η ολική χρησιμότητα μιας απόφασης ισούται με το άθροισμα των μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων.

Το μοντέλο αυτό χρησιμότητας συνοδεύεται συνήθως από σχέσεις που κανονικοποιούν τις τιμές των μερικών χρησιμοτήτων στο διάστημα [0,1], οπότε λαμβάνει την μορφή

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(g_i(\underline{x}))$$

$$u_i(\ell_i)=0 , \quad u_i(h_i)=1 , \quad i \in [n] \qquad (1.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

όπου:

p_i συντελεστές βάρους που εκφράζουν τη σχετική σημαντικότητα των κριτηρίων,

ℓ_i, h_i οι λιγότερο και οι περισσότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων αντίστοιχα.

Εκτός από το αθροιστικό μοντέλο χρησιμότητας υπάρχουν και άλλα. Ο Huber [40] σε μία ανασκόπιση αυτών των μοντέλων χρησιμότητας εξετάζει την δυνατότητα εφαρμογής τους στα προβλήματα λήψης αποφάσεων.

1.5 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Οι Keeney και Raiffa [50] ονομάζουν κάθε σύστημα προτιμήσεων, το οποίο μπορεί να εκφραστεί από μια αθροιστική συνάρτηση χρησιμότητας, αθροιστικό σύστημα προτιμήσεων.

Ενα τέτοιο σύστημα προτιμήσεων επιτρέπει την ομαδοποίηση των κριτηρίων σε μικρότερα υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Ετσι γίνεται δυνατή η μείωση της διάστασης του πολυκριτήριου προβλήματος με αποτέλεσμα να είναι ευχερέστερη η εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας.

Εστω $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ το σύνολο των n κριτηρίων και P και Q δύο υποσύνολά του που συνιστούν διαμέρισή του. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα P και Q μπορούν να είναι τα

$$P = \{g_1, \ldots, g_s\}\ ,\ Q = \{g_{s+1}, \ldots, g_n\}$$

Αν $\underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x}))$ είναι το διάνυσμα των τιμών των κριτηρίων για μία απόφαση $\underline{x}$, τότε η διαμέριση του G δίδει $\underline{g}(\underline{x}) = (\underline{p}(\underline{x}), \underline{q}(\underline{x}))$, όπου $\underline{p}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), \ldots, g_s(\underline{x}))$ και $\underline{q}(\underline{x}) = (g_{s+1}(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x}))$.

Χάριν απλούστευσης του συμβολισμού, το διάνυσμα $\underline{g}(\underline{x})$, το οποίο ορίζει ένα σημείο στο χώρο S των κριτηρίων, γράφεται $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n)$.

Ανάλογα τότε είναι $\underline{p} = (g_1, \ldots, g_s)$, $\underline{q} = (g_{s+1}, \ldots, g_n)$ και $\underline{g} = (\underline{p}, \underline{q})$.

Εστω $\underline{g}' = (\underline{p}', \underline{q}')$ και $\underline{g}'' = (\underline{p}'', \underline{q}')$ δύο σημεία του χώρου S των κριτηρίων. Τότε το $\underline{p}'$ ονομάζεται **υπό συνθήκη προτιμόμενο** από το $\underline{p}''$ για σταθερό $\underline{q}'$, τότε και μόνο όταν ισχύει:

$$(\underline{p}', \underline{q}') \succsim (\underline{p}'', \underline{q}')$$

Το σύνολο των κριτηρίων P ονομάζεται **ανεξάρτητο του συμπληρωματικού του** Q τότε και μόνο όταν για δεδομένο $\underline{q}'$ ισχύει

$$(\underline{p}', \underline{q}') \succsim (\underline{p}'', \underline{q}') \Longrightarrow (\underline{p}', \underline{q}) \succsim (\underline{p}'', \underline{q}) \qquad \forall\ \underline{q}, \underline{p}', \underline{p}''$$

Δηλαδή, η υπό συνθήκη προτίμηση του $\underline{p}'$ έναντι του $\underline{p}''$ είναι ανεξάρτητη του $\underline{q}'$.

Τα κριτήρια $g_1, \ldots, g_n$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** τότε και μόνο όταν κάθε υποσύνολό τους είναι ανεξάρτητο του αντίστοιχου συμπληρωματικού του.

Ο Debreu [20] απέδειξε το ακόλουθο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει αθροιστική συνάρτηση χρησιμότητας είναι η ανεξαρτησία των κριτηρίων.

1.6 ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΕΣ ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία πραγματική συνάρτηση f_i μίας πραγματικής μεταβλητής ονομάζεται κατά τμήματα γραμμική αν είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ του πεδίου ορισμού της

$$[\gamma_i^{\ell}, \gamma_i^{h}] = \bigcup_{j=\ell}^{h-1} [\gamma_i^{j}, \gamma_i^{j+1}] \ , \quad \ell < h$$

Η ακολουθία των σημείων γ_i^j που διαιρούν το πεδίο ορισμού της f_i ενδέχεται να είναι απέραντη και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Μία πραγματική συνάρτηση $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n πραγματικών μεταβλητών ονομάζεται διαχωρίσιμη ή αθροιστική κατά τμήματα γραμμική αν για κάθε $i \in [n]$ οι συναρτήσεις $f_i(x_i)$ είναι κατά τμήματα γραμμικές και

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

Αν η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση f_i είναι και συνεχής, τότε μπορεί να ορισθεί από τις κλίσεις της σε κάθε διάστημα $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$.

Πραγματικά, αν c_i^j είναι η κλίση της f_i στο $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ τότε για κάθε $a,b \in [\gamma_i^{\ell}, \gamma_i^{h}]$ τέτοια ώστε

$$\gamma_i^{s} \leq a \leq \gamma_i^{s+1} \ , \ \gamma_i^{t} \leq b \leq \gamma_i^{t+1} \ , \ s < t$$

είναι

$$f_i(b)-f_i(a)= c_i^{s} (\gamma_i^{s+1} -a) +[\sum_{j=s+1}^{t-1} c_i^{j} (\gamma_i^{j+1} - \gamma_i^{j})] + c_i^{t} (b - \gamma_i^{t})$$

Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι κάθε συνεχής κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση μπορεί να ορισθεί από τις ακολουθίες των αριθμών γ_i^j και των αντιστοίχων κλίσεων c_i^j. Μία τέτοια συνάρτηση θα συμβολίζεται με $[c/\gamma]_i x_i$.

Το άθροισμα κατά τμήματα γραμμικών και συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Κατά συνέπεια η συνάρτηση $F = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i)$ είναι συνεχής. Ετσι, η F μπορεί να ορισθεί, όπως και κάθε F_i, από τις ακολουθίες γ_i^j και c_i^j για $i \in [n]$.

Μία συνεχής κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση $F=F(x_1, \ldots, x_n)$ θα συμβολίζεται

$$[c/\gamma]\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i x_i$$

Η ακολουθία των κλίσεων c_i^j, όπως και εκείνη των γ_i^j, ενδέχεται να είναι απέραντη και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Αν η $[c/\gamma]_i$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα με πεπερασμένα άκρα $[\gamma_i^\ell, \gamma_i^h]$ τότε θα ισχύουν

$$c_i^{\ell-1} = -\infty \implies [c/\gamma]_i x_i = \infty \quad \forall \; x_i < \gamma_i^\ell$$

$$c_i^h = +\infty \implies [c/\gamma]_i x_i = \infty \quad \forall \; x_i > \gamma_i^h$$

Οι προηγούμενες σχέσεις συσχετίζουν την έννοια των μη πεπερασμένων κλίσεων με τις μη πεπερασμένες τιμές της $[c/\gamma]_i$.

Η συνάρτηση $[c/\gamma]_i$ είναι κυρτή τότε και μόνο όταν $c_i^{j-1} < c_i^j$ για κάθε πεπερασμένο σημείο γ_i^j του πεδίου ορισμού της.

Αν για κάθε $i \in [n]$ οι συναρτήσεις $[c/\gamma]_i x_i$ είναι κυρτές τότε και η συνάρτηση $[c/\gamma]\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i x_i$ είναι κυρτή.

1.7 ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Κάθε πρόγραμμα ελαχιστοποίησης μίας κυρτής, αθροιστικής και κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης:

$$\min [c/\gamma]\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i x_i \qquad (1.7.1)$$
$$\mathbb{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

ονομάζεται <u>κατά τμήματα γραμμικό πρόγραμμα.</u>

Σ'αυτό υποτίθεται ότι κάθε συνάρτηση $[c/\gamma]_i$ ορίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων κλίσεων c_i^j και μία πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών γ_i^j. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο κλασσικός αλγόριθμος simplex εξετάζει μόνο ένα πεπερασμένο σύνολο βασικών λύσεων.

Για το πρόγραμμα 1.7.1 ισχύουν οι ακόλουθοι ορισμοί και συμβολισμοί.

Κάθε σύνολο m γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών της mxn μήτρας $\mathbb{A}$ ονομάζεται <u>βάση</u> του και η αντίστοιχη μήτρα συμβολίζεται με B.

Αν K είναι το σύνολο των δεικτών των στηλών μιας βάσης, τότε οι μεταβλητές $\underline{x}_B = (x_{Bi})$, $i \in K$ ονομάζονται **βασικές μεταβλητές.** Οι υπόλοιπες μεταβλητές ονομάζονται μη βασικές και συμβολίζονται με $\underline{x}_N = (x_{Nj})$, $j \in I-K$ όπου $I = \{1, \ldots, n\}$.

Αν a_{Nj}, $j \in I-K$ είναι οι στήλες της μήτρας που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές, τότε κάθε λύση $\underline{x} = (\underline{x}_B, \underline{x}_N)$ για την οποία

$$x_{Nj} = \gamma_{Nj}, \; j \in I-K \quad \text{και} \quad B\underline{x}_B = \underline{b} - \sum_j a_{Nj}\gamma_{Nj}$$

ονομάζεται **βασική λύση** του προγράμματος 1.7.1.

Τέλος, σε κάθε βασική λύση αντιστοιχεί το διάνυσμα $\underline{c}_B$ των κλίσεων των βασικών μεταβλητών:

$$\underline{c}_B = (c^h_{Bi}), \; i \in K \text{ αν } \gamma^h_{Bi} \le x_{Bi} \le \gamma^{h+1}_{Bi}$$

Ετσι, οι συντεταγμένες του $\underline{c}_B$, που αντιπροσωπεύουν τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών, εξαρτώνται από την τιμή των x_{Bi} στην βασική λύση.

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης κυρτών και διαχωρίσιμων κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων αντιμετωπίστηκε αρχικά ως ένα πρόβλημα αμιγούς γραμμικού προγραμματισμού.

Οι Charnes και Lemke [13], Dantzing [19] και Ho [39] εισήγαγαν διάφορους μετασχηματισμούς, ικανούς να μετατρέψουν ένα κατά τμήματα γραμμικό πρόγραμμα σε ένα ισοδύναμο γραμμικό, μαγαλύτερων όμως διαστάσεων.

Οι μέθοδοι simplex για κατά τμήματα γραμμικά προγράμματα αποτελούν μία πιο άμεση προσέγγιση στο προηγούμενο πρόβλημα. Αυτές επιλύουν κατευθείαν το κατά τμήματα γραμμικό πρόγραμμα χωρίς να είναι ανάγκη αυτό προηγουμένως να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο γραμμικό.

Ο Fourer [31], στηριζόμενος στον αλγόριθμο simplex για γραμμικά προγράμματα με φραγμένες μεταβλητές, πρότεινε έναν γενικότερο αλγόριθμο για κατά τμήματα γραμμικά προγράμματα, ο οποίος αναλύεται στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 0: Υπολογισμός της βασικής λύσης $\underline{x} = (\underline{x}_B, \underline{x}_N)$ με

$x_{Nj} = \gamma_{Nj}$

$B\,\underline{x}_B = \underline{b} - \sum_j a_{Nj}\,\gamma_{Nj}$

και του αρχικού διανύσματος κλίσεων

$\underline{c}_B$: $c_{Bi} = c^{h}_{Bi}$ αν $\gamma^{h}_{Bi} \leq x_{Bi} \leq \gamma^{h+1}_{Bi}$

Βήμα 1: Εύρεση του

$\underline{u} = \underline{c}_B\,B^{-1}$

και των διαφορών

$\delta^{+}_{Nj} = c^{+1}_{Nj} - \underline{u}\,a_{Nj}$, $\delta^{-}_{Nj} = c^{-1}_{Nj} - \underline{u}\,a_{Nj}$

Αν $\delta^{+}_{Nj} \geq 0$ και $\delta^{-}_{Nj} \leq 0$ για κάθε j τότε η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση.

Διαφορετικά, προσδιορισμός μίας μεταβλητής x_{Np} τέτοιας ώστε

$\delta^{+}_{Np} < 0$ ή $\delta^{-}_{Np} > 0$

Βήμα 2 Εύρεση των

$\underline{y}_B = B^{-1} a_{Np}$ αν $\delta^+_{Np} < 0$ ή

$\underline{y}_B = -B^{-1} a_{Np}$ αν $\delta^-_{Np} > 0$

Αν $(\gamma^{+1}_{Bi} = +\infty \ \forall y_{Bi} < 0)$ και $(y^{-1}_{Bi} = -\infty \ \forall y_{Bi} > 0)$

και $(\gamma^{+1}_{Np} = +\infty$ και $\delta^+_{Np} < 0)$ ή $(\gamma^{-1}_{Np} = -\infty$ και $\delta^-_{Np} < 0)$

τότε το πρόγραμμα έχει μη πεπερασμένη βέλτιστη λύση.

Διαφορετικά, προσδιορισμός του

$\theta = \min\{(x_{Bi} - \gamma^{+r_i}_{Bi})/y_{Bi} : y_{Bi} < 0,\ (x_{Bi} - \gamma^{-r_i}_{Bi})/y_{Bi} : y_{Bi} > 0,$

$-(\gamma_{Np} - \gamma^{+r}_{Np}) : \delta^+_{Np} < 0,\ (\gamma_{Np} - \gamma^{-r}_{Np}) : \delta^-_{Np} > 0\}$

Βήμα 3 Επιλογή μίας βασικής μεταβλητής x_{Bq} για την οποία

(a) $(x_{Bq} - \gamma^{+r_q}_{Bq})/y_{Bq} = \theta$ και $y_{Bq} < 0$, ή

(b) $(x_{Bq} - \gamma^{-r_q}_{Bq})/y_{Bq} = \theta$ και $y_{Bq} > 0$

ή επιλογή ένος σημείου γ^{+r}_{Np} ή γ^{-r}_{Np} για το οποίο

(c) $-(\gamma_{Np} - \gamma^{+r}_{Np}) = \theta$ και $\delta^+_{Np} < 0$, ή

(d) $(\gamma_{Np} - \gamma^{-r}_{Np}) = \theta$ και $\delta^-_{Np} > 0$

Βήμα 4: Πραγματοποίηση των αντικαταστάσεων:

$\underline{x}_B = \underline{x}_B - \theta\, \underline{y}_B$

$x_{Np} = \gamma_{Np} + \theta$ αν $\delta^+_{Np} < 0$

$x_{Np} = \gamma_{Np} - \theta$ αν $\delta^-_{Np} > 0$

$c_{Bi} = c^{r_i - 1}_{Bi}$ για κάθε $y_{Bi} < 0$, $i \neq q$

$c_{Bi} = c^{-(r_i - 1)}_{Bi}$ για κάθε $y_{Bi} > 0$, $i \neq q$

Βήμα 5: Αν ισχύουν (a) ή (b) τότε

$$B = B - \{a_{Bq}\} + \{a_{Np}\}$$

$$c_{Bp} = c_{Np}^{+r} \quad \text{αν} \quad \delta_{Np}^{+} < 0, \text{ ή}$$

$$c_{Bp} = c_{Np}^{-r} \quad \text{αν} \quad \delta_{Np}^{-} > 0$$

$$\gamma_{Nq} = \gamma_{Bq}^{+r_q} \quad \text{αν} \quad y_{Bq} < 0, \text{ ή}$$

$$\gamma_{Nq} = \gamma_{Bq}^{-r_q} \quad \text{αν} \quad y_{Bq} > 0$$

και επιστροφή στο πρώτο βήμα.

Αν ισχύουν (c) ή (d) τότε

$$\gamma_{Np} = \gamma_{Np}^{+r} \quad \text{αν} \quad \delta_{Np}^{+} < 0, \text{ ή}$$

$$\gamma_{Np} = \gamma_{Np}^{-r} \quad \text{αν} \quad \delta_{Np}^{-} > 0$$

και επιστροφή στο πρώτο βήμα.

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η πλέον ενδιαφέρουσα κατηγορία μεθόδων του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού είναι εκείνη των αλληλεπιδραστικών μεθόδων (interactive methods).

Ως αλληλεπιδραστική μέθοδος νοείται κάθε επαναληπτική διαδικασία της οποίας η πορεία διαμορφώνεται προοδευτικά σύμφωνα με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

Κάθε αλληλεπιδραστική μέθοδος αναλύεται σε δύο στάδια: το υπολογιστικό και της απόφασης.

Στο υπολογιστικό στάδιο γίνεται η επεξεργασία των πληροφοριών που παρέχει ο αποφασίζων. Προιόν της επεξεργασίας αυτής είναι μία ή περισσότερες εναλλακτικές λύσεις. Στο στάδιο της απόφασης, οι λύσεις αυτές αξιολογούνται από τον αποφασίζοντα, ο οποίος παρέχει επιπρόσθετες πληροφορίες υπό την μορφή εκτιμήσεων ή παραχωρήσεων για τις τιμές των κριτηρίων. Οι εκτιμήσεις αυτές αποτελούν την βάση για την αναζήτηση μίας καλλίτερης λύσης σε επόμενη επανάληψη. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι την λήψη της τελικής απόφασης.

Οι αλληλεπιδραστικές μέθοδοι χωρίζονται σε δύο γενικές κατηγορίες.

Η πρώτη περιλαμβάνει μεθόδους, στις οποίες η απαιτούμενη πληροφορία απορρέει από τις εκτιμήσεις του αποφασίζοντα όσον αφορά την αποδοχή ή μη των τιμών των κριτηρίων και αντιστοιχεί σε υπονοούμενη πληροφορία παραχωρήσεων (implicit trade-off).

Οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής, με πιο αντιπροσωπευτικές την μέθοδο STEM, την μέθοδο του μετατοπιζόμενου ιδεώδους και την μέθοδο των ικανοποιητικών στόχων, εμπίπτουν στην προβληματική της διεξοδικής προσέγγισης των αποφάσεων.

Η δεύτερη περιλαμβάνει μεθόδους, στις οποίες η πληροφορία απορρέει από συγκεκριμένες παραχωρήσεις μεταξύ των τιμών των κριτηρίων και αντιστοιχεί σε σαφή πληροφορία παραχωρήσεων (explicit trade-off). Σ'αυτές προσδιορίζονται και αναλύονται οι λόγοι οριακής υποκατάστασης των κριτηρίων (marginal rates of substitution).

Οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής, με πιο αντιπροσωπευτικές την μέθοδο των Geoffrion-Dyer-Feinberg και την μέθοδο των Zionts και Wallenius, εμπίπτουν στην προβληματική της ορθολογικής προσέγγισης των αποφάσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται οι προαναφερθείσες χαρακτηριστικές μέθοδοι και των δύο κατηγοριών, γίνεται σύντομη αναφορά σε άλλες μεθόδους, οι οποίες καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα τεχνικών που χρησιμοποιούνται στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό, κατηγοροποιούνται οι τύποι πληροφοριών που χρησιμοποιούν και αναλύουν οι διάφορες μέθοδοι και τέλος παρουσιάζονται ορισμένα κριτήρια για την αξιολόγηση και σύγκριση των αλληλεπιδραστικών μεθόδων.

2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ STEM

Η μέθοδος STEM (Step Method) των Benayoun, Montgolfier, Tergny και Larichev [4] είναι μία τυπική αλληλεπιδραστική μέθοδος διερεύνησης του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων σε πολυκριτήρια γραμμικά προγράμματα.

Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας υπολογίζεται ως λύση η πλησιέστερη προς το ιδεώδες σημείο αποτελεσματική λύση, με την βοήθεια της μετρικής του Tchebycheff.

Η μέθοδος, βασιζόμενη στις εκτιμήσεις του αποφασίζοντα και στο μέτρο της ικανοποίησης του από τις τιμές των κριτηρίων, κατευθύνει αυτόν προς την βέλτιστη συμβιβαστική λύση, σε ένα διαρκώς περιοριζόμενο χώρο αποφάσεων.

Η μέθοδος STEM αναλύεται στα ακόλουθα τρία στάδια.

Στάδιο 1: (Προκαταρκτικό)

Υπολογίζονται οι συντεταγμένες του ιδεώδους σημείου και ο πίνακας πληρωμών.

Στάδιο 2: (Υπολογιστικό)

Στην k επανάληψη υπολογίζεται μία αποτελεσματική λύση x^k,

ως βέλτιστη λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$\min_{\underline{x} \in A^k} z$$

$$z \geq (h_j - g_j(\underline{x}))\pi_j \quad , \quad j \in [n]$$

$$z \geq 0$$

όπου

h_j η j συντεταγμένη του ιδεώδους σημείου

A^k ο χώρος των αποφάσεων όπως έχει διαμορφωθεί στην k-1 επανάληψη ($A^1 = A$)

Αν ℓ_j είναι το ελάχιστο στοιχείο της j στήλης του πίνακα πληρωμών, τότε τα βάρη π_j υπολογίζονται στην πρώτη επανάληψη από τις σχέσεις:

$$\pi_j = a_j / \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad j \in [n]$$

με

$$a_j = [(h_j - \ell_j)/h_j](1/\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{ji}^2}) \quad , \quad \text{αν } h_j > 0$$

ή

$$a_j = [(\ell_j - h_j)/\ell_j](1/\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{ji}^2}) \quad , \quad \text{αν } h_j \leq 0$$

Στάδιο 3: (Στάδιο απόφασης)

Ο αποφασίζων αξιολογεί τις τιμές των κριτηρίων στο διάνυσμα $\underline{g}^k = \underline{g}(\underline{x}^k)$. Η διαδικασία διακόπτεται (χωρίς να δίνει λύση στο πρόβλημα), όταν καμμία τιμή στο $\underline{g}^k$ δεν είναι ικανοποιητική ή τερματίζεται (με βέλτιστη συμβιβαστική λύση την $\underline{x}^k$), όταν όλες οι τιμές στο $\underline{g}^k$ είναι ικανοποιητικές.

Οταν υπάρχουν μερικά μόνο κριτήρια με τιμές ικανοποιητικές, τότε ο αποφασίζων πρέπει να υποδείξει ποιά απ'αυτά και σε ποιά έκταση θα θυσιάσει προς όφελος των υπολοίπων κριτηρίων. Για κάθε κριτήριο που η τιμή του μειώνεται τίθεται $\pi_j = 0$, ενώ ο χώρος των αποφάσεων για την επόμενη επανάληψη γίνεται:

$$A^{K+1} = A^{K} \cap \{ \underline{x} \in A^{K} : g_j(\underline{x}) \geq g_j(\underline{x}^{K}) - \Delta g_j ,\ g_i(\underline{x}) \geq g_i(\underline{x}^{k}),\ i \in [n], i \neq j \}$$

όπου:

Δg_j μία αποδεκτή ελάτωση της τιμής του κριτηρίου g_j.

Στην μέθοδο STEM δεν γίνεται καμμία αναφορά στην συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα και δεν ορίζεται η έννοια της βέλτιστης συμβιβαστικής λύσης.

Ο περιορισμός του χώρου των αποφάσεων γίνεται με τρόπο που δεν επιτρέπει την αύξηση της τιμής κάποιου κριτηρίου του οποίου η τιμή έχει μειωθεί σε προηγούμενη επανάληψη. Ετσι, τμήματα του χώρου των αποφάσεων εξαιρούνται σταδιακά χωρίς να παρέχεται η δυνατότητα επανεξέτασης τους.

2.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΖΟΜΕΝΟΥ ΙΔΕΩΔΟΥΣ

Η μέθοδος του μετατοπιζόμενου ιδεώδους(method of the displaced ideal, Zeleny [82]) είναι μία μέθοδος σταδιακού περιορισμού του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων.

Η μέθοδος αυτή αναλύεται στα ακόλουθα τρία στάδια.

Στάδιο 1: (Προκαταρκτικό)

Προσδιορίζεται το σύνολο Ε όλων των αποτελεσματικών λύσεων και το αρχικό ιδεώδες σημείο.

Στάδιο 2: (Υπολογιστικό)

Στην k επανάληψη προσδιορίζεται ένα υποσύνολο E^{k} του Ε, με τις αποτελεσματικές λύσεις που είναι οι πλησιέστερες, σύμφωνα με κάποια επιπρόσθετα κριτήρια, προς το ιδεώδες σημείο, όπως αυτό έχει διαμορφωθεί στην k-1 επανάληψη.

Στάδιο 3: (Στάδιο απόφασης)

Ο αποφασίζων πρέπει να λάβει την τελική του απόφαση, επιλέγοντας την κατά την κρίση του καλύτερη λύση από το E^{k}. Οταν αυτό είναι δυνατό τότε η διαδικασία τερματίζεται. Στην περίπτωση που το E^{k} είναι αρκετά μεγάλο για να μπορέσει ο αποφασίζων να διακρίνει την καλύτερη συμβιβαστική λύση, τότε τροποποιεί το ιδεώδες σημείο και διαδικασία επαναλαμβάνεται από το δεύτερο στάδιο.

Κατά τον Zeleny [83], η περιστολή του συνόλου Ε στο E^{K} μπορεί να γίνει ή με εξαίρεση των λύσεων που, κατά την κρίση του αποφασίζοντα, είναι υποδεέστερες άλλων ή με εξαίρεση των λύσεων, των οποίων η απόσταση από το ιδεώδες σημείο υπερβαίνει κάποια προκαθωρισμένη τιμή. Στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιείται συνήθως η ακόλουθη οικογένεια μετρικών:

$$L_p(\underline{\lambda}, \underline{x}^k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p (1-d_j(\underline{x}^k))^p , \quad 1 \leq p < \infty$$

με

$$d_j(\underline{x}^k) = (g_j(\underline{x}^k) - \ell_j)/(h_j^k - \ell_j) , \quad j \in [n]$$

όπου:

$\underline{\lambda}$, h_j^k, ℓ_j είναι αντίστοιχα το διάνυσμα των βαρών των κριτηρίων, η j συντεταγμένη του μετατοπισμένου ιδεώδους σημείου της k επανάληψης και το ελάχιστο στοιχείο της j στήλης του πίνακα πληρωμών.

Η μέθοδος του μετατοπιζόμενου ιδεώδους οδηγεί στην τελική απόφαση με προοδευτική εξαίρεση εναλλακτικών λύσεων και χαρακτηρίζεται για την απλότητα της πληροφορίας που απαιτεί. Το γεγονός όμως ότι δεν αναφέρεται καθόλου στην συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα την καθιστά μη ορθολογική.

2.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΩΝ ΣΤΟΧΩΝ

Η <u>μέθοδος των ικανοποιητικών στόχων</u> (method of satisfactory goals) του Benson [6] χρησιμοποιεί επαναληπτικά την μέθοδο των φραγμένων αντικειμενικών συναρτήσεων για την εύρεση μίας ικανοποιητικής λύσης.

Στο προκαταρκτικό μέρος της μεθόδου, ο αποφασίζων καθορίζει τις ελάχιστα αποδεκτές τιμές για όλα τα κριτήρια (L_i^1, i∈[n]) Οι τιμές αυτές αντιπροσωπεύουν τα κάτω φράγματα των κριτηρίων και σε συνδυασμό με τους αρχικούς περιορισμούς, που οριοθετούν τον χώρο των αποφάσεων, πρέπει να ορίζουν ένα μη κενό σύνολο εφικτών λύσεων.

Στην περίπτωση που αυτό δεν επιτυγχάνεται ο αποφασίζων πρέπει να ορίσει εκ νέου τις τιμές των L_i^1.

Το επαναληπτικό μέρος της μεθόδου αναλύεται στα ακόλουθα τρία στάδια:

Στάδιο 1: (Στάδιο απόφασης)

Στην k επανάληψη ο αποφασίζων ορίζει ένα κριτήριο g_s για το οποίο κρίνει ότι η τιμή L_s^k, όπως αυτή έχει διαμορφωθεί στην k-1 επανάληψη, είναι η λιγότερο ικανοποιητική.

Στάδιο 2: (Υπολογιστικό)

Σε κάθε k επανάληψη επιλύεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} &\max \; g_s(\underline{x}) \\ &\underline{x} \in A \qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.1) \\ &g_i(\underline{x}) \geq L_i^k \;, \quad i \in [n] \;, \; i \neq s \end{aligned}$$

Στάδιο 3: (Στάδιο απόφασης)

Ο αποφασίζων αξιολογεί την τιμή του g_S που προκύπτει από το πρόγραμμα 2.3.1.

Αν αυτή δεν είναι ικανοποιητική, τότε καθορίζει νέα φράγματα $\underline{L}^{k+1}$ ($\leq \underline{L}^{k}$) και η διαδικασία επανέρχεται στο δεύτερο στάδιο.

Αν η τιμή του g_S είναι ικανοποιητική, τότε ο αποφασίζων ή πρέπει να την ελατώσει κατά ένα ποσοστό προκειμένου να βελτιωθούν οι τιμές των υπολοίπων κριτηρίων και να μεταβεί στο πρώτο στάδιο ή να τερματίσει την διαδικασία λαμβάνοντας ως τελική λύση την $\underline{x}^{k}$ (βέλτιστη λύση του προγράμματος 2.3.1 στην k επανάληψη).

Ο καθορισμός νέων φραγμάτων στο τελευταίο στάδιο γίνεται με τη βοήθεια των δυικών μεταβλητών που αντιστοιχούν στους περιορισμούς φράγματος του 2.3.1.

Η μέθοδος των ικανοποιητικών στόχων μπορεί να εφαρμοσθεί εξίσου αποτελεσματικά σε γραμμικά και μη γραμμικά πολυκριτήρια προγράμματα. Βέβαια στην δεύτερη περίπτωση ο προσδιορισμός των δυικών μεταβλητών είναι δύσκολος.

Ο αποφασίζων, διαμορφώνοντας προοδευτικά τα αποδεκτά επίπεδα για τις τιμές των κριτηρίων, οδηγείται στην βέλτιστη συμβιβαστική λύση που είναι αποτελεσματική και όχι κατ' ανάγκη ακραία.

2.4 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ GEOFFRION-DYER-FEINBERG

Οι Geoffrion, Dyer και Feinberg [34], προσαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Frank και Wolfe [32] στις ιδιαιτερότητες του πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού, πρότειναν μία αλληλεπιδραστική μέθοδο προσδιορισμού της τελικής απόφασης χρησιμοποιώντας την συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα.

Η μέθοδος αυτή επιλύει το ακόλουθο πρόγραμμα:

$$\max_{\underline{x} \in A} \; U(g_1(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x})) \tag{2.4.1}$$

Στο πρόγραμμα αυτό η συνάρτηση χρησιμότητας U δεν έχει γνωστή αναλυτική μορφή αλλά είναι διαφορίσιμη και κοίλη σε κάθε $\underline{x} \in A$ ενώ ο χώρος A είναι κυρτός.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο των Frank και Wolfe, λαμβάνεται μία λύση $\underline{x}^1 \in A$ ως αφετηρία και στην συνέχεια εκτελούνται επαναληπτικά τα ακόλουθα δύο βήματα:

Βήμα 1: Επιλύεται το πρόγραμμα:

$$\max_{\underline{y} \in A} \; \nabla U(\underline{g}(\underline{x}^k))\underline{y} \tag{2.4.2}$$

και τίθεται

$$\underline{d}^k = \underline{y}^k - \underline{x}^k$$

όπου

$\underline{y}^k$ η βέλτιστη λύση του προγράμματος 2.4.2

Βήμα 2: Προσδιορίζεται ένας αριθμός t^k για τον οποίο ισχύει

$$U(\underline{g}(\underline{x}^k + t^k \underline{d}^k)) = \max U(\underline{g}(\underline{x}^k + t\underline{d}^k)), \quad 0 \leq t \leq 1$$

και τίθεται $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + t^k \underline{d}^k$

Η διαδικασία μεταβαίνει στο πρώτο βήμα.

Το πρόγραμμα 2.4.2 ερμηνεύεται γεωμετρικά με την μετατόπιση, προς τα μέγιστα, του εφαπτόμενου επιπέδου της U στο $\underline{x}^k$, ενώ η $\underline{y}^k$ αντιπροσωπεύει το απώτερο σημείο επαφής του με τον χώρο A.

Το πρόγραμμα 2.4.2 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\max_{\underline{y} \in A} \ \underline{w} M \underline{y}$$

όπου $\underline{w} = (\partial U/\partial g_1, \ldots, \partial U/\partial g_n)$, $M = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial x_1, \ldots, \partial g_1/\partial x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial g_n/\partial x_1, \ldots, \partial g_n/\partial x_m \end{bmatrix}$

Το διάνυσμα $\underline{w}$ που εκφράζει την κλίση της U σε κάθε $\underline{g} \in S$ χαρακτηρίζει τους λόγους οριακής υποκατάστασης των κριτηρίων σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$\lambda\underline{w} = \lambda(\partial U/\partial g_1, \ldots, \partial U/\partial g_n) = (1, \partial g_1/\partial g_2, \ldots, \partial g_1/\partial g_n) \quad (2.4.3)$$

όπου $\lambda = (\partial U/\partial g_1)^{-1}$

Στην σχέση αυτή, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το g_1 έχει ληφθεί ως κριτήριο αναφοράς με θετική οριακή χρησιμότητα $\partial U/\partial g_1 > 0$.

Στην μέθοδο των Geoffrion, Dyer, Feinberg λαμβάνεται $\partial g_1/\partial g_i = \Delta g_1/\Delta g_i$, $i=2, \ldots, n$.

Σε κάθε k επανάληψη η εκτίμηση του $\lambda\underline{w}^k$ στο σημείο $\underline{g}^{k-1} = \underline{g}(\underline{x}^k)$ γίνεται από τον αποφασίζοντα. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να προσδιορίσει, για κάθε κριτήριο g_i, την μεταβολή Δg_i της τιμής του, που αντισταθμίζει την κατά μία μονάδα ελάττωση της τιμής του g_1. Για τον προσδιορισμό της λύσης $\underline{x}^{k+1}$, στο δεύτερο βήμα του αλγόριθμου, υπολογίζονται για διαφορετικές τιμές του t τα διανύσματα $\underline{g}(\underline{x}^k + t\underline{d}'^k)$. Ο αποφασίζων πρέπει να επιλέξει απ'αυτά εκείνο που προτιμά.

Η μέθοδος τερματίζεται στην k επανάληψη όταν ικανοποιηθεί η σχέση

$$\Delta^k/\Delta^1 = \underline{w}^k(\underline{g}^k - \underline{g}^{k-1})/\underline{w}^1(\underline{g}^1 - \underline{g}^0) < \varepsilon$$

όπου ε είναι μικρός θετικός αριθμός.

Τα Δ^{k} και Δ^{1} εκφράζουν την αύξηση της τιμής της U από την k-1 στην k επανάληψη και στην πρώτη επανάληψη αντίστοιχα.

Η μέθοδος των Geoffrion, Dyer, Feinberg μπορεί να εφαρμοστεί σε γραμμικά και μη γραμμικά πολυκριτήρια προγράμματα εξασφαλίζοντας την σύγκλιση στην τελική απόφαση.

Ομως οι λύσεις που προσδιορίζονται δεν είναι πάντα αποτελεσματικές, ενώ η μεγάλη δυσκολία στην εκτίμηση των λόγων οριακής υποκατάστασης των κριτηρίων καθιστά την μέθοδο δυσεφάρμοστη.

2.5 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ZIONTS-WALLENIUS

Η μέθοδος των Zionts και Wallenius [85] συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των Geoffrion, Dyer, Feinberg με εκείνα της STEM.
Σ'αυτή χρησιμοποιείται άμεσα η συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα, η οποία υποτίθεται οτι είναι γραμμική. Ετσι, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας, η εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας ανάγεται στον προσδιορισμό νέων βαρών για τα κριτήρια και κάθε νέα λύση που υπολογίζεται είναι μία ακραία αποτελεσματική λύση μέγιστης χρησιμότητας.
Για τον προσδιορισμό της πρώτης λύσης χρησιμοποιείται μία πλασματική συνάρτηση χρησιμότητας, στην οποία τα βάρη των κριτηρίων λανβάνονται αυθαίρετα.

Το επαναληπτικό μέρος της μεθόδου αναλύεται στα ακόλουθα δύο στάδια:

Στάδιο 1: (Υπολογιστικό)

Στην k επανάληψη προσδιορίζεται μία ακραία αποτελεσματική λύση $\underline{x}^k$, ως βέλτιστη λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$\max_{\underline{x} \in A} \quad U^k = \sum_{i=1}^{n} w_i^k \, g_i(\underline{x})$$

όπου:

w_i^k, με $\sum_{i=1}^{n} w_i^k = 1$, τα βάρη των κριτηρίων όπως αυτά έχουν διαμορφωθεί στην k-1 επανάληψη.

Στην συνέχεια προσδιορίζονται οι προσκείμενες στην $\underline{x}^k$ ακραίες αποτελεσματικές λύσεις.

Στάδιο 2: (Στάδιο απόφασης)

Ο αποφασίζων συγκρίνει τις τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στην λύση $\underline{x}^k$ με εκείνες των προσκείμενων της λύσεων. Οι προτιμήσεις για τις λύσεις αυτές θέτουν νέους περιορισμούς για τα βάρη των κριτηρίων, οι οποίοι καθορίζουν τις τιμές που θα λάβουν στην επόμενη επανάληψη.

Για τον προσδιορισμό των ακραίων αποτελεσματικών λύσεων που πρόσκεινται στην $\underline{x}^k$, εισάγεται η έννοια της αποτελεσματικής μεταβλητής.
Μία μη βασική μεταβλητή της $\underline{x}^k$ ονομάζεται <u>αποτελεσματική</u> όταν η είσοδός της στην βάση συνεπάγεται δύο τουλάχιστον ετερόσημες μεταβολές στις τιμές των κριτηρίων και αύξηση της τιμής της συνάρτησης χρησιμότητας.
Ετσι ο αποφασίζων συγκρίνει μόνο τις λύσεις που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικές μεταβλητές της $\underline{x}^k$.
Η διαδικασία τερματίζεται στην k επανάληψη (με τελική λύση την $\underline{x}^k$), όταν δεν υπάρχουν αποτελεσματικές μεταβλητές στην $\underline{x}^k$ ή όταν ο αποφασίζων προτιμήσει την $\underline{x}^k$ έναντι όλων των προσκείμενων σ'αυτήν λύσεων.

Η μέθοδος των Zionts και Wallenius παρουσιάζει τα εξής μειονεκτήματα:

α) Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γραμμική.

β) Μόνο ακραίες αποτελεσματικές λύσεις εξετάζονται.

γ) Εξαιρούνται σταδιακά ακραίες λύσεις χωρίς να παρέχεται η δυνατότητα επανεξέτασης τους.

Σε μία μεταγενέστερη εργασία τους, οι Zionts και Wallenius [86] επέτυχαν άρση μόνο του τρίτου περιορισμού. Η νέα μέθοδος όμως, συγκλίνει με αργότερο ρυθμό στην τελική απόφαση και απαιτεί ευρύτερη συμμετοχή του αποφασίζοντα.

2.6 ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Υπάρχουν μέθοδοι, όπως οι IGP (Interactive Goal Programming) [21], GPSTEM (Goal Programming Step Method) [26] και ISGP (Interactive Sequential Goal Programming)[58], που συνδυάζουν το προγραμματισμό στόχων με τα χαρακτηριστικά των αλληλεπιδραστικών μεθόδων.

Στην μέθοδο IGP προσαρμόζεται ο προγραμματισμός στόχων σε μία παραλλαγή του αλγόριθμου των Frank και Wolfe .
Οι στόχοι για κάθε κριτήριο καθορίζονται από τον αποφασίζοντα σε τέτοια επίπεδα που η υπέρβασή τους να μην αυξάνει την τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας. Επιπλέον σε κάθε επανάληψη, ο αποφασίζων πρέπει να προσδιορίζει τους λόγους οριακής υποκατάστασης των κριτηρίων προκειμένου να ορισθεί η κατεύθυνση αναζήτησης μίας νέας λύσης.

Η GPSTEM χρησιμοποιεί την μέθοδο STEM αντικαθιστώντας, στο υπολογιστικό στάδιο, το πρόγραμμα ελαχιστοποίησης της μετρικής του Tchebycheff με ένα πρόγραμμα στόχων. Με τον τρόπο αυτό η GPSTEM συγκλίνει ταχύτερα στην συμβιβαστική λύση και προσδιορίζει λύσεις που βρίσκονται κοντά στους στόχους που θέτει ο αποφασίζων.

Στην μέθοδο ISGP υπολογίζονται n+1 αποτελεσματικές λύσεις σε κάθε επανάληψη. Μία λύση που προσεγγίζει στον μέγιστο βαθμό όλους τους στόχους ταυτόχρονα και n εναλλακτικές που λαμβάνονται αν κάθε στόχος θεωρηθεί ανεξάρτητα από τους άλλους.

Αν κάποια απ'αυτές ικανοποιεί τον αποφασίζοντα η διαδικασία τερματίζεται, διαφορετικά επαναπροσδιορίζει τους στόχους του με βάση τις τρέχουσες τιμές των κριτηρίων και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Οπως τονίσθηκε, στην μέθοδο των Geoffrion, Dyer, Feinberg οι λύσεις δεν είναι πάντα αποτελεσματικές. Στηριζόμενοι στο γεγονός αυτό, οι Winkels και Meika [78] και αργότερα οι Korhonen και Laakso [52] παρουσίασαν παραλλαγές της μεθόδου, στις οποίες χρησιμοποίησαν την τεχνική του παραμετρικού προγραμματισμού για να προβάλουν τις λύσεις, που προσδιορίζονται, στο αποτελεσματικό σύνορο του χώρου των αποφάσεων.

Οι Korhonen και Laakso ειδικότερα, προκειμένου να απλοποιήσουν τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας του αποφασίζοντα, συμπεριέλαβαν στη μέθοδο τους την τεχνική των "στόχων αναφοράς" του Wierzbicki [77]

Ο Stewart [72], σε μία παραλλαγή της μεθόδου των Zionts και Wallenius, χρησιμοποίησε το αθροιστικό μοντέλο χρησιμότητας και πρότεινε την ανάλυση παλινδρόμησης ως μέσο για την εκτίμηση των βαρών των κριτηρίων σ'αυτό. Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου η συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα προσεγγίζεται κατά τμήματα γραμμικά και ο προσδιορισμός των αποτελεσματικών λύσεων γίνεται με τη βοήθεια του κατά τμήματα γραμμικού προγραμματισμού.

Οι Choo και Atkins [14] στην μέθοδό τους αναζητούν νέες λύσεις στον χώρο των κριτηρίων με την βοήθεια του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει το ιδεώδες σημείο με ένα νέο κάθε φορά αποτελεσματικό σημείο. Τούτο καθορίζεται από τον αποφασίζοντα και αποτελεί την βάση για τον προσδιορισμό νέων λύσεων.

Πρόσφατα, οι Jacquet-Lagreze, Meziani και Slowinski [46] παρουσίασαν μία μέθοδο πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού, η οποία αποτελείται από τρία μη επαναλαμβανόμενα στάδια.

Στο πρώτο στάδιο προσδιορίζεται ένα σύνολο αποτελεσματικών λύσεων. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το πρώτο βήμα του αλγόριθμου των Choo και Atkins.

Στη συνέχεια ο αποφασίζων διατάσσει τις λύσεις αυτές κατά σειρά προτίμησης και με την βοήθεια του συστήματος PREFCALC [45] εκτιμάται μία αθροιστική συνάρτηση χρησιμότητας.

Τέλος, η συνάρτηση χρησιμότητας μεγιστοποιείται στο χώρο των αποφάσεων και λαμβάνεται έτσι η τελική λύση που είναι αποτελεσματική και όχι κατ' ανάγκη ακραία.

Η μέθοδος αυτή είναι αλληλεπιδραστική μόνο όσο αφορά την εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας και παρέχει μία μόνο λύση την οποία ο αποφασίζων είναι αναγκασμένος να δεχθεί.

2.7 ΤΥΠΟΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ

Οπως τονίσθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η προσέγγιση της τελικής λύσης σε ένα πρόβλημα πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού, όταν γίνεται με την βοήθεια αλληλεπιδραστικής μεθόδου, είναι σταδιακή και βασίζεται σε πληροφορία που παρέχει ο αποφασίζων στο στάδιο απόφασης.

Η πληροφορία αυτή πηγάζει από τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα και ανάλογα με το περιεχόμενό της μπορεί να σχετίζεται:

(α) Με την σπουδαιότητα των κριτηρίων.

(β) Με τις τιμές των κριτηρίων.

(γ) Με εναλλακτικές αποφάσεις.

Οι Larichev και Nikiforov [54], βασιζόμενοι σε παρατηρήσεις και πορίσματα της επιστήμης της συμπεριφοράς, κατέταξαν τις ανωτέρω πληροφορίες σε τρείς τύπους: τις <u>πολύπλοκες (Π)</u>, τις <u>απλές (Α)</u> και τις <u>αμφιλεχόμενες (Μ)</u>.

Οι τελευταίες χαρακτηρίζονται έτσι επειδή δεν υπάρχουν σχετικά πορίσματα που να τις κατατάσσουν στους τύπους Α ή Π. Ετσι προέκυψε η ακόλουθη ταξινόμηση.

α. Πληροφορία που σχετίζεται με την σπουδαιότητα των κριτηρίων.

1. Κατανομή βαρών στα κριτήρια (Π).
2. Διάταξη των κριτηρίων σύμφωνα με την σπουδαιότητα τους (Α).

β. Πληροφορία που σχετίζεται με τις τιμές των κριτηρίων.

1. Σύγκριση δύο τιμών του ίδιου κριτηρίου (Α).
2. Σύγκριση των τιμών δύο κριτηρίων (Α).
3. Προσδιορισμός των λόγων οριακής υποκατάστασης δύο κριτηρίων (Π).
4. Καθορισμός μιας ικανοποιητικής τιμής για ένα κριτήριο (Μ).
5. Προσδιορισμός των κριτηρίων των οποίων οι τιμές πρέπει να βελτιωθούν (Α).
6. Διαχωρισμός των τιμών των κριτηρίων σε ικανοποιητικές και μη (Α).

γ. Πληροφορία που σχετίζεται με εναλλακτικές αποφάσεις.

1. Σύγκριση δύο εναλλακτικών αποφάσεων και επιλογή της καλύτερης (Π).
2. Επιλογή της καλύτερης απόφασης από ένα σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων (Π).
3. Διάταξη ορισμένων εναλλακτικών αποφάσεων κατά σειρά προτίμησης (Π).
4. Ορισμός της ιδεώδους απόφασης (Μ).

2.8 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Οι Naslund [60], Wallenius [74,75], Hemming [38], Larichev και Nikiforov [54] και Roy [68] έχουν αναφερθεί εκτεταμμένα σε ιδιότητες που πρέπει να χαρακτηρίζουν τις αλληλεπιδραστικές μεθόδους και οι οποίες καθιερώνουν μέτρα σύγκρισής τους. Μερικές από τις ιδιότητες αυτές παρουσιάζονται εδώ υπό μορφή κανόνων που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για την ανάπτυξη νέων αλληλεπιδραστικών μεθόδων.

Πρέπει να εξασφαλίζεται η σύγκλιση στην τελική απόφαση

Μία διαδικασία λέγεται ότι συγκλίνει όταν μπορεί να προσεγγίσει την τελική λύση μετά από πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων.

Η δυνατότητα λοιπόν ελέγχου της σύγκλισης σχετίζεται άμεσα με την δυνατότητα ορισμού της τελικής λύσης.

Ομως στα προβλήματα χαμηλού βαθμού δόμησης, όπως τονίζουν οι Mason και Mitroff [57], δεν υπάρχει κριτήριο που να μπορεί να χαρακτηρίσει μία λύση ως σωστή ή εσφαλμένη.

Στον πολυκριτήριο μαθηματικό προγραμματισμό ειδικότερα, η απουσία ικανών και αναγκαίων συνθηκών ορισμού της βέλτιστης συμβιβαστικής λύσης οδηγεί στην διαπίστωση ότι μία τέτοια λύση ορίζεται μόνο από το σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Δηλαδή ο ίδιος ο αποφασίζων δέχεται μία λύση ως βέλτιστη συμβιβαστική όταν τον ικανοποιεί.

Στα πλαίσια αυτά ο Phillips [63] εισήγαγε τον όρο "απαραίτητη σύγκλιση" (requisite convergence) για να χαρακτηρίσει την ιδιότητα των αλληλεπιδραστικών μεθόδων να δομούν οι ίδιες το σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα, σε τέτοιο βαθμό ώστε αυτός να είναι σε θέση να καταλήξει στην βέλτιστη συμβιβαστική λύση.

Πρέπει να προτείνονται μόνο αποτελεσματικές λύσεις

Πραγματικά, για μία λύση που δεν είναι αποτελεσματική υπάρχει τουλάχιστον μία αποτελεσματική λύση που πλεονεκτεί έναντι της πρώτης ως προς όλα τα κριτήρια.

Δεν πρέπει να παρουσιάζεται ευαισθησία σε ενδεχόμενα σφάλματα εκτιμήσεων

Πραγματικά, επειδή η πληροφορία μπορεί να βασίζεται σε εσφαλμένες εκτιμήσεις, οι μέθοδοι θα πρέπει να μην επηρεάζονται από το γεγονός αυτό.

Δεν πρέπει να αποκλείεται η δυνατότητα επανεξέτασης μίας λύσης που έχει απορριφθεί σε προηγούμενο στάδιο.

Μία αλληλεπιδραστική μέθοδος νοείται ως μία διαδικασία παροχής γνώσης για το πρόβλημα που επιλύει. Μέσα από αυτή την διαδικασία ο αποφασίζων αντιλαμβάνεται και συνειδητοποιεί τι είναι εφικτό και τι δεν είναι και έτσι, αναθεωρεί και προσαρμόζει ανάλογα τους στόχους του. Μία τέτοια αναθεώρηση των στόχων μπορεί να οδηγήσει στην επανεξέταση μιας λύσης που αποκλείστηκε σε κάποιο προηγούμενο επαναληπτικό κύκλο της μεθόδου.

Οι απαιτήσεις των εκτιμήσεων πρέπει να είναι περιορισμένες.

Ο αποφασίζων συναντά δυσκολία στις ακριβείς εκτιμήσεις, όπως για παράδειγμα στον προσδιορισμό των λόγων οριακής υποκατάστασης των κριτηρίων. Ετσι, μόνο απλές εκτιμήσεις πρέπει να απαιτούνται εκ μέρους του αποφασίζοντα.

Τέλος, στα χαρακτηριστικά των μεθόδων μπορούν να συμπεριληφθούν και οι χωροχρονικές τους συναρτήσεις που εκφράζουν τις απαιτήσεις τους σε κύρια μνήμη και υπολογιστικούς χρόνους.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Οπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η διεξοδική και η ορθολογική προσέγγιση των αποφάσεων στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό διαφέρουν ως προς το σκεπτικό σύμφωνα με το οποίο αναζητούν και τοποθετούν την βέλτιστη συμβιβαστική λύση στο σύνορο των αποτελεσματικών λύσεων.
Πραγματικά η διεξοδική προσέγγιση ενώ επιτρέπει την αναζήτηση και την ανάδειξη συμβιβαστικών λύσεων μέσα σε προκαθωρισμένα επίπεδα για τις τιμές των κριτηρίων, δεν εγγυάται το ότι η τελική απόφαση θα προέρχεται από λύση μέγιστης χρησιμότητας.
Αντίθετα, οι τιμές των κριτηρίων που προσεγγίζονται ορθολογικά, με την βοήθεια της εκτιμηθείσας συνάρτησης χρησιμότητας, ενδέχεται να μην ικανοποιούν τελικά των αποφασίζοντα, αν απέχουν από τις αναμενόμενες γι'αυτόν τιμές.
Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται μία αλληλεπιδραστική μέθοδος για τον προσδιορισμό συμβιβαστικών λύσεων μέγιστης χρησιμότητας, μέσα σε αποδεκτά όρια για τις τιμές των κριτηρίων.

Η μέθοδος συνδυάζει τα θετικά στοιχεία των δύο προηγούμενων ξεχωριστών προσεγγίσεων, εισάγοντας έτσι μία νέα προβληματική για την λήψη των αποφάσεων στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό.

Σύμφωνα με αυτήν, η όδευση προς την τελική απόφαση πραγματοποιείται σε τρείς φάσεις που επαναλαμβάνονται: οριοθέτηση του εξεταζόμενου χώρου αποφάσεων, κατασκευή του μοντέλου χρησιμότητας του αποφασίζοντα, χρησιμοποίηση του μοντέλου για τον προσδιορισμό λύσεων μέγιστης χρησιμότητας.

Στην πρώτη φάση χρησιμοποιείται με αλληλεπιδραστικό τρόπο η μέθοδος των φραγμένων αντικειμενικών συναρτήσεων, συμπληρωμένη με την ανάλυση ευαισθησίας των φραγμάτων, που επιτρέπει την διεύρυνση του εξεταζόμενου χώρου αποφάσεων κάθε φορά που αυτό κρίνεται αναγκαίο στην πορεία της διαδικασίας.

Στην δεύτερη φάση, για την κατασκευή του μοντέλου χρησιμότητας του αποφασίζοντα, χρησιμοποιείται η τεχνική της μονότονης παλινδρόμησης.

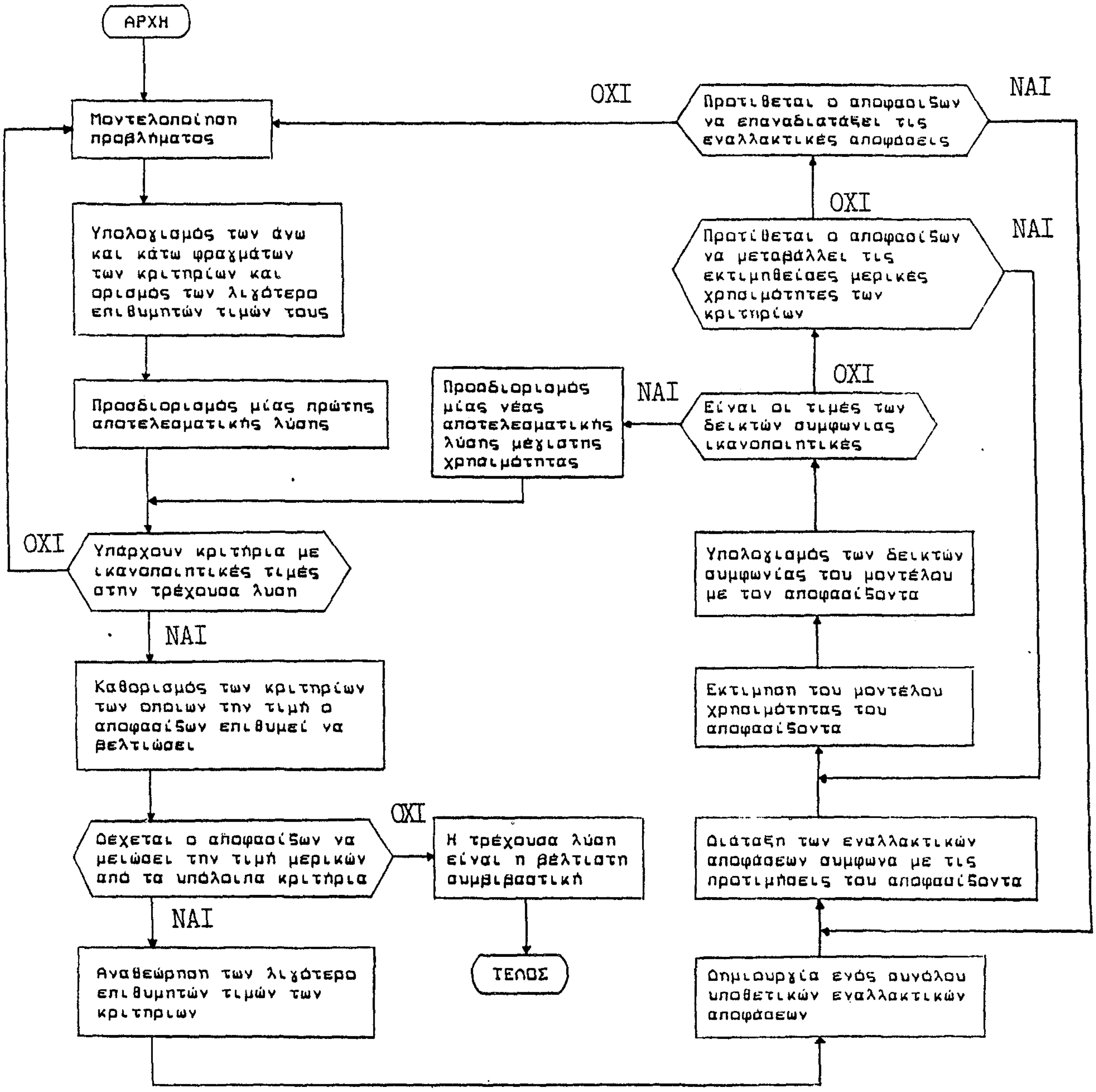
Τέλος, στην τρίτη φάση, ο προσδιορισμός λύσεων μέγιστης χρησιμότητας γίνεται με την βοήθεια τεχνικών του κατά τμήματα γραμικού προγραμματισμού.

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των αλληλεπιδραστικών μεθόδων του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού και αποτελείται από δύο μέρη: το προκαταρκτικό και το επαναληπτικό. Το πρώτο μέρος ενεργοποιείται μία φορά στην αρχή της διαδικασίας λήψης της απόφασης, ενώ το δεύτερο επαναλαμβάνεται μέχρι την λήψη της τελικής απόφασης (σχ. 1).

Το προκαταρκτικό μέρος αναλύεται σε δύο στάδια, από τα οποία το πρώτο αποσκοπεί στην εύρεση των άνω και κάτω φραγμάτων ,των αντικειμενικών συναρτήσεων και κατά συνέπεια στον προσδιορισμό των διαστημάτων μεταβολής των τιμών των κριτηρίων. Σ'αυτό κάθε μία αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται και στη συνέχεια ελαχιστοποιείται, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, στον χώρο των εναλλακτικών αποφάσεων. Η τεχνική αυτή οδηγεί στον προσδιορισμό του ιδεώδους σημείου (του οποίου οι συντεταγμένες αντιπροσωπεύουν τα άνω φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων), στην κατασκευή του πίνακα πληρωμών και στον προσδιορισμό των κάτω φραγμάτων των αντικειμενικών συναρτήσεων. Οι συντεταγμένες του ιδεώδους σημείου είναι οι πλέον επιθυμητές τιμές για τα κριτήρια και λαμβάνονται ως στόχοι για τον αποφασίζοντα.

Αποτέλεσμα της ανωτέρω υπολογιστικής διαδικασίας είναι και ο προσδιορισμός του εύρους των διαστημάτων μεταβολής των



Σχήμα 1: Διάγραμμα ροής της μεθόδου

τιμών των κριτηρίων. Το εύρος αυτό αντανακλά την ευαισθησία των κριτηρίων στις μεταβολές των μεταβλητών απόφασης και κατά συνέπεια την "αντικειμενική" σχετική σημαντικότητά τους.

Στο δεύτερο στάδιο του προκαταρκτικού μέρους υπολογίζεται μία πρώτη αποτελεσματική λύση του πολυκριτήριου γραμμικού προγράμματος. Οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στη λύση αυτή ορίζουν στον χώρο των κριτηρίων το πλησιέστερο, προς το ιδεώδες, αποτελεσματικό σημείο. Ως μέτρο της απόστασης από το ιδεώδες σημείο λαμβάνεται η μετρική του Tchebycheff σε συνδυασμό με τη σχετική σημαντικότητα των κριτηρίων, που απορρέει από το πρώτο στάδιο.

Στο προκαταρκτικό μέρος η εύρεση της πρώτης αποτελεσματικής λύσης γίνεται με τρόπο μηχανιστικό και δεν απαιτεί την συμμετοχή του αποφασίζοντα. Η λύση αυτή λαμβάνεται ως αφετηρία μιας επαναληπτικής διαδικασίας που απαιτεί την διαρκή συμμετοχή του αποφασίζοντα για την βελτίωσή της προς μία κατεύθυνση που υπαγορεύεται από τις επιθυμίες και τους προσωπικούς στόχους του.

Το επαναληπτικό μέρος της μεθόδου αναλύεται σε τέσσερα στάδια.

Στάδιο I: Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας γνωστοποιούνται στον αποφασίζοντα οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στην κάθε φορά νέα αποτελεσματική λύση μέγιστης χρησιμότητας. Στην πρώτη επανάληψη η λύση που παρουσιάζεται στον αποφασίζοντα είναι εκείνη που υπολογίζεται στο προκαταρκτικό μέρος. Στο σημείο αυτό η συμμετοχή του αποφασίζοντα είναι καθοριστική. Αν κρίνει ότι οι τιμές ορισμένων κριτηρίων δεν είναι ικανοποιητικές, καλείται να υποδείξει εκείνα τα κριτήρια των οποίων την τιμή κρίνει ικανοποιητική, σε βαθμό που να επιτρέπει τη μείωσή της προς όφελος των υπολοίπων. Ετσι, ο αποφασίζων εκδηλώνει, στη φάση αυτή, την πρόθεσή του για συμβιβασμό, προκειμένου να καταλήξει στην τελική απόφαση και αναθεωρεί έμμεσα τους στόχους του όσον αφορά τα επίπεδα των τιμών των κριτηρίων.

Η διαδικασία αναζήτησης της τελικής απόφασης τερματίζεται στο στάδιο αυτό απο τον αποφασίζοντα, όταν εντοπισθεί η βέλτιστη συμβιβαστική λύση, δηλαδή όταν οι τιμές των κριτηρίων που έχουν επιτευχθεί τον ικανοποιούν.

Στάδιο ΙΙ: Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας ο αποφασίζων πρέπει να δηλώσει τις προτιμήσεις του για δεδομένες εναλλακτικές αποφάσεις. Ετσι, στο στάδιο αυτό δημιουργείται ένας περιορισμένος αριθμός σεναρίων για τις τιμές των κριτηρίων. Τα σενάρια αυτά συνιστούν υποθετικές εναλλακτικές αποφάσεις που χαρακτηρίζονται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Κανένα απ'αυτά δεν πλεονεκτεί έναντι των άλλων για όλα τα κριτήρια. Ετσι προφυλάσσεται ο αποφασίζων από το να αντιμετωπίζει τετριμμένες καταστάσεις.

(β) Παράγονται με τρόπο που δεν παραβιάζει τις επιθυμίες του αποφασίζοντα σχετικά με το ποιά κριτήρια πρέπει να βελτιωθούν και ποιά μπορούν να υποβιβασθούν στην τρέχουσα λύση.

(γ) Οι τιμές των κριτηρίων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στα διαστήματα μεταβολής τους, ώστε το παραγόμενο δείγμα να είναι ευρύ και αντιπροσωπευτικό.

(δ) Ο αριθμός των εκάστοτε παραγομένων σεναρίων επιλέγεται από τον αποφασίζοντα.

Στάδιο III: Στο στάδιο αυτό εκτιμάται η συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα με την βοήθεια του μοντέλου μονότονης παλινδρόμησης UTA . Η πληροφορία που απαιτείται για τον σκοπό αυτό είναι μία προδιάταξη στο σύνολο των υποθετικών αποφάσεων που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο στάδιο. Η πληροφορία αυτή λαμβάνεται από τον αποφασίζοντα με την τεχνική των συγκρίσεων κατά ζεύγη όπου, συγκρίνει κάθε φορά δύο μόνο αποφάσεις και ή επιλέγει μια απ' αυτές ως την πλέον συμφέρουσα ή τις κρίνει ισοδύναμες. Η σύγκριση αυτή δεν γίνεται με απλή αντιπαράθεση των αποφάσεων, αλλά με εντοπισμό και ανάλυση των συνεπειών (όφελος και ζημία) από την προτίμηση της μιας έναντι της άλλης.

αυτές τις ασυμφωνίες και τότε ο αποφασίζων, για να τις αντιμετωπίσει, παρεμβαίνει με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

(α) Αναθεωρεί, σύμφωνα με τις υποδείξεις του μοντέλου, τη διάταξη που αρχικά όρισε στο σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων.

(β) Μεταβάλλει τις μερικές χρησιμότητες που υποδεικνύονται από το μοντέλο προκειμένου να επανορθώσει το μέρος των ασυμφωνιών που κρίνει απαράδεκτο.

(γ) Αναθεωρεί το ίδιο το πολυκριτήριο πρόγραμμα, αν πεισθεί ότι όπως αυτό έχει μοντελοποιηθεί δεν είναι ικανό να περιγράψει το πρόβλημα απόφασης.
Μια τέτοια αναθεώρηση μπορεί να γίνει με την προσθήκη νέων κριτηρίων αξιολόγησης ή με την τροποποίηση των παλαιών ή ακόμη και με μεταβολή του χώρου των αποφάσεων.

Η εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας ολοκληρώνεται στο στάδιο αυτό, όταν σε κάποια φάση της διαδικασίας επέλθει ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ του μοντέλου και του αποφασίζοντα.

Στάδιο IV: Στο στάδιο αυτό οι εκτιμηθείσες μερικές χρησιμότητες των κριτηρίων συνθέτουν αθροιστικά μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας, η οποία μεγιστοποιείται στο χώρο των αποφάσεων. Η τεχνική αυτή

Προκειμένου να συγκροτηθούν τα ζεύγη των αποφάσεων, λαμβάνεται ως βάση μία και γίνεται σύγκριση των υπολοίπων με αυτή. Μετά τον πρώτο κύκλο συγκρίσεων το αρχικό σύνολο αποφάσεων διαμερίζεται σε τρία υποσύνολα: Στο σύνολο των αποφάσεων που προτιμήθηκαν έναντι της βάσης, στο σύνολο εκείνων που δεν προτιμήθηκαν και στο σύνολο εκείνων που κρίθηκαν ισοδύναμες με τη βάση. Το τελευταίο σύνολο αποτελεί μια κλάση ισοδυναμίας.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε υποσύνολο με αποφάσεις που δεν έχουν συγκριθεί μεταξύ τους έως ότου επιτευχθεί μία διάταξη των κλάσεων ισοδυναμίας.

Η προκύπτουσα προδιάταξη , που εκφράζει την ολική προτίμηση του αποφασίζοντα, αναλύεται από τη μέθοδο UTA προκειμένου να εκτιμηθούν οι μερικές χρησιμότητες των κριτηρίων που την αποκαθιστούν στο μεγαλύτερο βαθμό.

Ο βαθμός συσχέτισης της ολικής προτίμησης και του μοντέλου χρησιμότητας ελέγχεται με δύο δείκτες: Ο ένας είναι μία συνάρτηση ολικού σφάλματος, ενώ ο άλλος είναι το τ-Kendall που εκφράζει τον βαθμό της συμφωνίας μεταξύ της προτεινόμενης από τον αποφασίζοντα διάταξης και εκείνης που υπαγορεύεται εκ των υστέρων από την εκτιμηθείσα συνάρτηση χρησιμότητας.

Οταν παρατηρούνται ασυμφωνίες, όταν δηλαδή ο αποφασίζων έχει υπερεκτιμήσει ή υποεκτιμήσει μερικές αποφάσεις που περιέχονται στην διάταξη, σύμφωνα με τις υποδείξεις του μοντέλου χρησιμότητας, η μέθοδος αναλύει οδηγεί σε μια νέα αποτελεσματική λύση και μια νέα επανάληψη της όλης διαδικασίας.

Οι αποτελεσματικές λύσεις που προσδιορίζονται χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι βρίσκονται μέσα στα πλαίσια των στόχων του αποφασίζοντα. Εξάλλου η κατεύθυνση αναζήτησης των λύσεων αυτών είναι ορθολογική επειδή ταυτίζεται με την κατεύθυνση μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας του αποφασίζοντα.

3.2 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Οπως τονίσθηκε, στο προκαταρκτικό μέρος υπολογίζονται τα άνω και τα κάτω φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων. Ο υπολογισμός αυτός έχει ως αποτέλεσμα τον ορισμό του πεδίου τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων. Αρχικά, κάθε αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, στο χώρο A των αποφάσεων. Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση των ακόλουθων γραμμικών προγραμμάτων:

$$\max g_i(\underline{x}) = \underline{c}_i^T \underline{x} \qquad i \in [n] \qquad (3.2.1)$$
$$\underline{x} \in A$$

Αν $\underline{x}_i^*$ είναι η βέλτιστη λύση του i-οστου γραμμικού προγράμματος και h_i η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης τότε είναι:

$$h_i = g_i(\underline{x}_i^*) = \max g_i(\underline{x}) \ , \ \underline{x} \in A.$$

Το διάνυσμα $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ αποτελεί το ιδεώδες σημείο του πολυκριτήριου γραμμικού προγράμματος και οι συντεταγμένες του αντιπροσωπεύουν τα άνω φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων, επιλύονται τα ακόλουθα γραμμικά προγράμματα:

$$\min \; g_i(\underline{x}) = \underline{c}_i^T \underline{x} \qquad i \in [n] \qquad (3.2.2)$$
$$\underline{x} \in A$$

Αν $\underline{x}_{i*}$ είναι η βέλτιστη λύση του i-οστού γραμμικού προγράμματος και ℓ_i συμβολίζει το κάτω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης g_i τότε είναι:

$$\ell_i = g_i(\underline{x}_{i*}) = \min g_i(\underline{x}) \; , \; \underline{x} \in A$$

Για να είναι δυνατός ο ορισμός πεπερασμένων φραγμάτων ℓ_i πρέπει τα προγράμματα 3.2.2 να έχουν πεπερασμένη βέλτιστη λύση. Οταν ένα τουλάχιστον από αυτά είναι μη φραγμένο, τότε η τιμή των ℓ_i ορίζεται με την βοήθεια του πίνακα πληρωμών (g_{ij})

$$g_{ij} = g_j(\underline{x}_i^*) \; , \; i,j \in [n]$$

από τον οποίο προκύπτει το αντι-ιδεώδες σημείο

$$\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) \quad \text{με} \quad f_j = \min_{\{i\}} (g_{ij}) \; , \; j \in [n]$$

Ετσι, αν υπάρχει $j \in [n]$ τέτοιο ώστε $\ell_j = -\infty$ και $\ell_i \in R$ για κάθε $i \neq j$ τότε τίθεται

$$\ell_j = h_j - (h_j - f_j)\max\{(h_i-\ell_i)/(h_i-f_i),\ i\in[n]\ ,\ i\neq j\}$$

ενώ, αν για κάθε $i \in [n]$ είναι $\ell_i = -\infty$ τότε τίθεται $\ell_i = f_i$. Στην τελευταία περίπτωση, η θεώρηση των συντεταγμένων του αντι-ιδεώδους σημείου ως κάτω φραγμάτων για τις αντικειμενικές συναρτήσεις, αν και εμπεριέχει τον κίνδυνο εξαίρεσης αποτελεσματικών λύσεων[1], κρίνεται αναγκαία.

Το σχετικό εύρος των διαστημάτων $[\ell_i, h_i]$ υποδηλώνει την ευαισθησία των κριτηρίων σε ενδεχόμενες μεταβολές του $\underline{x}$. Ετσι είναι δυνατός ο αντικειμενικός προσδιορισμός της σχετικής σημαντικότητας των κριτηρίων, με τη βοήθεια των βαρών m_i που υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$m_i = d_i / \sum_{K=1}^{n} d_K \qquad i\in[n] \qquad (3.2.3)$$

όπου

$$d_i = \begin{cases} (h_i-\ell_i)/h_i\ , & \text{αν}\ h_i > 0 \\ \\ (\ell_i-h_i)/\ell_i\ , & \text{αν}\ h_i \leq 0 \end{cases} \qquad i\in[n] \qquad (3.2.4)$$

Με τον τρόπο αυτό τα μεγαλύτερα βάρη κατανέμονται στα πλέον ευαίσθητα κριτήρια, ενώ τα μικρότερα στα κριτήρια των οποίων το εύρος μεταβολής είναι σχετικά μικρό.

Εκτός από τα φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων στο στάδιο αυτό υπολογίζεται και μία πρώτη αποτελεσματική λύση. Εστω $\underline{x}^1$ η λύση αυτή και $\underline{g}^1 = (g_1(\underline{x}^1), \ldots, g_n(\underline{x}^1))$ οι αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων.

---

1) Βλ. Weistroffer [76], Isermann, Steuer [44]

Ως πρώτη λύση λαμβάνεται εκείνη, για την οποία οι τιμές των κριτηρίων είναι οι πλησιέστερες προς το ιδεώδες σημείο σύμφωνα με την μετρική του Tchebycheff.

Ετσι, για την $\underline{x}^1$ θα πρέπει να ισχύει

$$\max_{\{i\}} \{ m_i(h_i - g_i(\underline{x}^1)) \} = \min_{\underline{x} \in A} \max_{\{i\}} m_i(h_i - g_i(\underline{x})) \qquad (3.2.5)$$

Η λύση $\underline{x}^1$ που ικανοποιεί την 3.2.5 είναι η βέλτιστη λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος, που ελαχιστοποιεί την μετρική του Tchebycheff:

$$\begin{aligned} &\min z \\ &\underline{x} \in A \\ &(h_i - g_i(\underline{x}))m_i \leq z \quad , \ i \in [n] \\ &z \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η εφαρμογή του προκαταρκτικού μέρους δίδει ως αποτελέσματα:

(α) Τα φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων. Απ'αυτά τα άνω συνιστούν τους στόχους του αποφασίζοντα, ενώ τα κάτω αντιπροσωπεύουν αρχικά τις λιγότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων.

(β) Μια πρώτη αποτελεσματική λύση, η οποία και όταν ακόμη δεν γίνει αποδεκτή από τον αποφασίζοντα, βρίσκεται πλησίον των στόχων του.

3.3 ΑΝΑΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΛΙΓΟΤΕΡΟ ΕΠΙΘΥΜΗΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ

Η αναπροσαρμογή των λιγότερο επιθυμητών τιμών των κριτηρίων αντιμετωπίζεται στο επαναληπτικό μέρος της διαδικασίας. Τούτο γίνεται κάθε φορά που μια νέα αποτελεσματική λύση παρουσιάζεται στον αποφασίζοντα.

Αρχικά, ως λιγότερο επιθυμητές τιμές για τα κριτήρια λαμβάνονται τα κάτω φράγματά τους, τα οποία υπολογίζονται στο προκαταρκτικό μέρος της μεθόδου. Τούτο κρίνεται αναγκαίο επειδή ο αποφασίζων δεν είναι συνήθως σε θέση να γνωρίζει εκ των προτέρων ποιά είναι τα όρια του χώρου των αποφάσεων, πως μεταβάλονται οι τιμές των κριτηρίων και ποιές είναι οι αλληλεπιδράσεις τους. Ετσι, μία τυχαία προσωπική του εκτίμηση για τις λιγότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων κρίνεται, στο στάδιο αυτό, αναποτελεσματική, δεδομένου ότι θα μπορούσε να οδηγήσει σε κενό χώρο αποφάσεων, ενώ μια πιο εμπεριστατωμένη εκτίμηση θα απαιτούσε μια χρονοβόρα διαδικασία συνεχών υπολογισμών.

Στο προκαταρκτικό μέρος υπολογίζονται και οι περισσότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων, δηλαδή οι συντεταγμένες του διανύσματος $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, που αντιπροσωπεύουν τους στόχους του αποφασίζοντα.

Αν λοιπόν $\underline{\ell}^0 = (\ell_1^0, \ldots, \ell_n^0)$ συμβολίζουν τις αρχικά λιγότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων, τότε είναι:

$$\ell_i^0 = \ell_i \quad , \ i \in [n]$$

Στην q επανάληψη οι λιγότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων $\underline{\ell}^q = (\ell_1^q , \ldots , \ell_n^q)$ προκύπτουν από αναθεώρηση εκείνων της προηγούμενης επανάληψης ($\underline{\ell}^{q-1}$) και από τις τιμές που έχουν ήδη λάβει τα κριτήρια από τη νέα αποτελεσματική λύση $\underline{x}^q$.

Κατά την διαδικασία της αναπροσαρμογής των λιγότερο επιθυμητών τιμών ο αποφασίζων αξιολογεί τις τρέχουσες τιμές των κριτηρίων οπότε ένα από τα τρία ακόλουθα ενδεχόμενα θα συμβεί:

(α) Επάνοδος στο αρχικό μοντέλο του πολυκριτήριου προβλήματος και αναθεώρησή του.

(β) Τερματισμός της διαδικασίας.

(γ) Καθορισμός νέων τιμών, ως λιγότερο επιθυμητών, και επανάληψη της διαδικασίας με στόχο την αναζήτηση μιας νέας αποτελεσματικής λύσης.

Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας παρουσιάζονται στον αποφασίζοντα οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στη λύση $\underline{x}^q$:

$$\underline{g}^q = (g_1^q , \ldots , g_n^q) \quad \text{με} \quad g_i^q = g_i(\underline{x}^q) \quad , \ i \in [n]$$

Εκείνος πρέπει τότε να αξιολογήσει τις τιμές αυτές και να εκδηλώσει το μέτρο της ικανοποίησής του.

Η περίπτωση (α) εμφανίζεται όταν ο αποφασίζων δηλώσει ότι οι τιμές δεν κρίνονται ικανοποιητικές για κανένα κριτήριο. Τότε όμως επιθυμεί βελτίωση των τιμών όλων των κριτηρίων πράγμα το οποίο δεν είναι εφικτό δεδομένου ότι μία ταυτόχρονη αύξηση όλων των τιμών θα οδηγούσε έξω από τον χώρο των κριτηρίων και κατά συνέπεια έξω από τον χώρο των αποφάσεων.

Πραγματικά, επειδή η $\underline{x}^q$ είναι αποτελεσματική δεν υπάρχει $\underline{x} \in A$ τέτοιο ώστε $g_i(\underline{x}) \geq g_i(\underline{x}^q)$, $i \in [n]$ και $g_j(\underline{x}) > g_j(\underline{x}^q)$ για ένα τουλάχιστο j.

Η ανάγκη λοιπόν βελτίωσης όλων των τιμών των κριτηρίων οδηγεί στην διαπίστωση ότι το μοντέλο του πολυκριτήριου προβλήματος δεν είναι ικανό να αντιμετωπίσει τις καταστάσεις που εμφανίζονται. Αυτό είναι δυνατό να οφείλεται σε κακό σχεδιασμό των αντικειμενικών συναρτήσεων, που κατασκευάστηκαν για να περιγράψουν τους σκοπούς του αποφασίζοντα ή σε εσφαλμένη οριοθέτηση του χώρου των αποφάσεων. Στην πρώτη περίπτωση προτείνεται επανεξέταση των αντικειμενικών σκοπών και των συναρτήσεων που τους περιγράφουν. Στη δεύτερη περίπτωση προτείνεται επανεξέταση του συνόλου των περιορισμών που οριοθετούν τον χώρο των αποφάσεων.

Αν ο αποφασίζων κρίνει οτι υπάρχει ένα τουλάχιστον κριτήριο με τιμή ικανοποιητική, τότε καλείται να υποδείξει, μεταξύ των υπολοίπων, τα κριτήρια εκείνα την τιμή των οποίων επιθυμεί να βελτιώσει.

Αν GN είναι το σύνολο αυτών των κριτηρίων, τότε το σύνολο $\tilde{G} = G - GN$ περιέχει τα κριτήρια των οποίων η τιμή έχει αξιολογηθεί ως ικανοποιητική.

Σ'αυτή τη φάση της διαδικασίας, ο αποφασίζων πρέπει να αποφασίσει αν θα μειώσει τις τιμές κάποιων κριτηρίων του $\tilde{G}$

ώστε να είναι δυνατή η βελτίωση των τιμών των κριτηρίων του GN.

Η περίπτωση (β) εμφανίζεται όταν ο αποφασίζων δεν δεχθεί να μειώση την τιμή κανενός από τα κριτήρια του συνόλου $\tilde{G}$. Τότε η διαδικασία τερματίζεται, ενώ ως τελική απόφαση λαμβάνεται η τρέχουσα λύση $\underline{x}^q$.

Η περίπτωση (γ) εμφανίζεται όταν ο αποφασίζων εκδηλώσει την πρόθεση να προβεί σε περαιτέρω παραχωρήσεις τιμών μεταξύ των κριτηρίων των συνόλων GN και $\tilde{G}$, προκειμένου να βελτιώσει την τρέχουσα λύση. Τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αναπροσαρμογή των λιγότερο επιθυμητών τιμών των κριτηρίων.

Οι λιγότερο επιθυμητές τιμές αναπροσαρμόζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \ell_i^q &= g_i^q \quad \text{για κάθε} \quad g_i \in GN \\ \ell_i^q &= \ell_i^{q-1} \quad \text{για κάθε} \quad g_i \in \tilde{G} \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

Οι τιμές ℓ_i^q , $i \in [n]$ συνιστούν νέα κάτω φράγματα των αντικειμενικών συναρτήσεων, που επιφέρουν περιορισμό του χώρου των αποφάσεων.

Ετσι, αν A^q είναι ο νέος χώρος των αποφάσεων που οριοθετείται στην q επανάληψη, τότε είναι:

$$A^q = A^{q-1} \cap \{ \underline{x} \in R^m : g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^q \ , \quad i \in [n] \ \} \ , \ A^o = A \qquad (3.3.2)$$

Ο χώρος A^q ορίζεται ως υποσύνολο του χώρου A^{q-1} της q−1 επανάληψης, που δημιουργείται με την προσθήκη νέων περιορισμών.

Πρόταση

Αν $A \neq \emptyset$ τότε $A^q \neq \emptyset$ για κάθε $q = 1,2,\ldots$

Πραγματικά, αν $A^o = A \neq 0$ και $\underline{x}^1$ είναι η βέλτιστη λύση του προγράμματος 3.2.6, τότε είναι

$$\underline{x}^1 \in A^o \quad \text{και} \quad g_i(\underline{x}^1) \geq \ell_i^o \quad , \quad i \in [n]$$

Εξάλλου, από την 3.3.1 προκύπτει ότι για κάθε $i \in [n]$ είναι

$$\ell_i^1 = \ell_i^o \quad \text{ή} \quad \ell_i^1 = g_i(\underline{x}^1)$$

Ετσι, για κάθε $i \in [n]$:

$$\ell_i^o \leq \ell_i^1 \leq g_i(\underline{x}^1)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\underline{x}^1 \in A^o \quad \text{και} \quad \underline{x}^1 \in \{\underline{x} \in R^m : g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^1 \ , \ i \in [n] \}$$

δηλαδή ότι

$$\underline{x}^1 \in A^1 = A^o \cap \{\underline{x} \in R^m : g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^1 \ , \ i \in [n] \}$$

οπότε $A^1 \neq \emptyset$.

Γενικώτερα, για την αποτελεσματική λύση $\underline{x}^q$ ισχύει:

$$\underline{x}^q \in A^{q-1} \quad \text{και} \quad g_i(\underline{x}^q) \geq \ell_i^{q-1}$$

Από την 3.3.1 όμοια προκύπτει οτι για κάθε $i \in [n]$ είναι

$$\ell_i^q = \ell_i^{q-1} \quad \text{ή} \quad \ell_i^q = g_i(\underline{x}^q)$$

οπότε

$$\ell_i^{q-1} \leq \ell_i^q < g_i(\underline{x}^q)$$

Ετσι προκύπτει ότι

$$\underline{x}^q \in A^{q-1} \quad \text{και} \quad \underline{x}^q \in \{\underline{x} \in R^m : g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^q \ , \ i \in [n] \}$$

δηλαδή ότι

$$\underline{x} \in A^{q} = A^{q-1} \cap \{\underline{x} \in R^{m} : g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^{q} \quad , \ i \in [n] \}$$

οπότε $A^{q} \neq \emptyset$

Οπως προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση, οι όροι της ακολουθίας $\{ A^{q} : q=0,1,2,\ldots \}$ είναι μη κενά σύνολα για τα οποία ισχύει:

$$A^{0} \supset A^{1} \supset \ldots \supset A^{q} \supset \ldots \qquad (3.3.3)$$

Τούτο έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό του χώρου των αποφάσεων σε κάθε επανάληψη, δηλαδή την σταδιακή εξαίρεση των αποτελεσματικών λύσεων που δίνουν στα κριτήρια τιμές μικρότερες από τις εκάστοτε λιγότερο επιθυμητές.

Ο σταδιακός περιορισμός του χώρου των αποφάσεων βοηθάει την σύγκλιση στην τελική απόφαση μη επιτρέποντας όμως την επανεξέταση λύσεων που είχαν εξαιρεθεί σε προηγούμενες επαναλήψεις. Ετσι μπορεί να μετατραπεί σε μία διαδικασία αναγκαστικής σύγκλισης.

Προκειμένου λοιπόν να αποφευχθεί μία τέτοια σύγκλιση, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας γίνεται ανάλυση της ευαισθησίας των λιγότερο επιθυμητών τιμών ℓ_i^{q}.

Ετσι, για κάθε $g_k \in GN$ λύνεται το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} &\max \ g_k(\underline{x}) \\ &\underline{x} \in A^{q-1} \\ &g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^{q} \quad , \ g_i \in GN \quad , \ i \neq k \\ &g_j(\underline{x}) \geq \ell_j^{q} \quad , \ g_j \in \widetilde{G} \end{aligned} \qquad (3.3.4)$$

Αν g_k^* είναι η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου g_k στο 3.3.4, τότε για κάθε g_k: $g_k^* < h_k$, ο αποφασίζων καλείται να καθορίσει, με την βοήθεια των δυικών μεταβλητών του 3.3.4 (που αντιστοιχούν στους περιορισμούς φράγματος των κριτηρίων του $\tilde{G}$) μία αποδεκτή ελάττωση Δ_j του ℓ_j^q, για κάθε $g_j \in \tilde{G}$ με $\ell_j^q > \ell_j^o$.

Τότε, για τα κριτήρια g_j για τα οποία είναι $\ell_j^q > \ell_j^o$, οι λιγότερο επιθυμητές τιμές ℓ_j^q γίνονται $\ell_j^q - \Delta_j$, με $\Delta_j \geq 0$ οπότε η 3.3.2 δίνει έναν νέο χώρο αποφάσεων $A'^q \supseteq A^q$.

3.4 ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων και ειδικότερα στην περίπτωση που το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων είναι πεπερασμένο, <u>σύνολο αναφοράς</u> ονομάζεται κάθε υποσύνολο αποφάσεων που λαμβάνεται ως βάση για την προσέγγιση της συλλογιστικής του αποφασίζοντα.

Στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό, όπου ο χώρος των αποφάσεων είναι συνεχής, ως σύνολο αναφοράς ορίζεται κάθε πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του χώρου των κριτηρίων, των οποίων οι συντεταγμένες μπορούν να θεωρηθούν ως τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων. Ετσι, το σύνολο αναφοράς περιλαμβάνει αποφάσεις που θα μπορούσαν να αξιολογηθούν από τον αποφασίζοντα.

Στο σύνολο αυτό, κάθε προδιάταξη, που είναι σύμφωνη με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα, ονομάζεται <u>αναφορική απόφαση.</u>

Επειδή ο ρόλος του συνόλου αναφοράς περιορίζεται μόνο στην κατασκευή της αναφορικής απόφασης και καμμία από τις αποφάσεις που ανήκουν σ'αυτό δεν λαμβάνεται ως τελική, δεν είναι απαραίτητο αυτές να αντιστοιχούν σε αποτελεσματικές ή εφικτές λύσεις του πολυκριτήριου γραμμικού προγράμματος.

Ετσι, στην q επανάληψη της διαδικασίας, ως σύνολο αναφοράς λαμβάνεται το ακόλουθο σύνολο διανυσμάτων του R^n:

$$U = \{ \underline{g}^k ,\ k=0,1,\ldots,s \}$$

όπου s δεδομένος φυσικός αριθμός και $\underline{g}^{k} = (g_{ik})$, $i \in [n]$

με

$$g_{ik} = \begin{cases} \ell_i^q + (k/s)(h_i - \ell_i^q) , & i \in \{i \in [n]: g_i \in GN\} \\ h_i - (k/s)(h_i - \ell_i^q) , & i \in \{i \in [n]: g_i \in \widetilde{G}\} \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

Από την 3.4.1 εύκολα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\underline{g}^{k}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στα διαστήματα μεταβολής των τιμών των κριτηρίων.

Επιπλέον, καμμία από τις εναλλακτικές αποφάσεις του V δεν πλεονεκτεί έναντι των άλλων για όλα τα κριτήρια.

Πραγματικά, αν υπάρχουν $\underline{g}^{p}, \underline{g}^{t} \in V$ τέτοιες ώστε $g_{ip} \geq g_{it}$, $i \in [n]$ τότε

$$g_{ip} \geq g_{it} \ , \ i \in \{ i \in [n] : g_i \in GN \} \qquad (3.4.2)$$

$$g_{ip} \geq g_{it} \ , \ i \in \{ i \in [n] : g_i \in \widetilde{G} \} \qquad (3.4.3)$$

Ομως από την 3.4.2 έπεται ότι

$$\ell_i^q + p(h_i - \ell_i^q)/s \geq \ell_i^q + t(h_i - \ell_i^q)/s$$

δηλαδή $p \geq t$.

Ομοια, από την 3.4.3 έπεται ότι

$$h_i - p(h_i - \ell_i^q)/s \geq h_i - t(h_i - \ell_i^q)/s$$

δηλαδή $t \geq p$, οπότε τελικά προκύπτει $p = t$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες, η πρώτη εξασφαλίζει το ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων του V συνιστούν ένα ευρύ και αντιπροσωπευτικό δείγμα των τιμών των κριτηρίων, ενώ η δεύτερη προφυλάσσει τον αποφασίζοντα από το να αντιμετωπίζει τετριμμένες καταστάσεις, όταν δηλώνει τις προτιμήσεις του για τις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς.

3.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ

Οπως είναι γνωστό, κάθε μοντέλο χρησιμότητας αποσκοπεί στην σύνθεση των κριτηρίων στην αντίστοιχη συνάρτηση ώστε να είναι δυνατή η ανά δύο σύγκριση των εναλλακτικών αποφάσεων.

Ετσι, αν $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$ τότε

$$\underline{x} \succ \underline{y} \iff \underline{g}(\underline{x}) \succ \underline{g}(\underline{y}) \qquad (3.5.1)$$

Η απεικόνιση του χώρου των αποφάσεων στον χώρο των κριτηρίων γίνεται μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού

$$T : A \longrightarrow R^n$$

με

$$T = \begin{bmatrix} c_{11} \cdots\cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{i1} \cdots\cdots c_{im} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots\cdots c_{nm} \end{bmatrix}$$

από τον οποίο είναι

$$\underline{g}(\underline{x}) = T\,\underline{x}$$

Αν $u : R^n \longrightarrow R$ είναι η συνάρτηση χρησιμότητας, όπως αυτή ορίσθηκε στο πρώτο κεφάλαιο τότε

$$\underline{g}(\underline{x}) \succ \underline{g}(\underline{y}) \iff u(\underline{g}(\underline{x})) \geq u(\underline{g}(\underline{y})) \qquad (3.5.2)$$

Από τις 3.5.1 και 3.5.2 προκύπτει ότι

$$\underline{x} \succ \underline{y} \iff u(\underline{g}(\underline{x})) \geq u(\underline{g}(\underline{y})) \qquad (3.5.3)$$

Οι σχέσεις 3.5.2 και 3.5.3 εκφράζουν το γεγονός ότι ο ρόλος ενός μοντέλου σύνθεσης των κριτηρίων συνίσταται στην εκτίμηση μίας συνάρτησης u που να αντιπροσωπεύει δεδομένες προτιμήσεις.

Μία βασική μορφή της αθροιστικής συνάρτησης χρησιμότητας είναι η ακόλουθη:

$$U(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} p_i U_i(g_i(\underline{x}))$$

$$U_i(\ell_i)=0 \ , \ U(h_i)=1 \quad , \quad i \in [n] \qquad (3.5.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

όπου ℓ_i και h_i είναι αντίστοιχα η λιγότερο και η περισσότερο επιθυμητή τιμή για το κριτήριο g_i και p_i είναι συντελεστής που εκφράζει τη σχετική σημαντικότητα του g_i.
Για την μέθοδο θα χρησιμοποιηθεί η κανονικοποιημένη μορφή:

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(\underline{x}))$$

$$u_i(\ell_i)=0 \quad , \quad i \in [n] \qquad (3.5.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(h_i) = 1$$

Πρόταση

Τα αθροιστικά μοντέλα χρησιμότητας 3.5.5 και 3.5.6 είναι ισοδύναμα.

Η ισοδυναμία αυτή αποδεικνύεται με την βοήθεια του ακόλουθου μετασχηματισμού:

$$U_i(g_i(\underline{x})) = u_i(g_i(\underline{x}))/u_i(h_i)$$

$$p_i = u_i(h_i) \ , \ u_i(h_i) \neq 0 \quad , \ i \in [n] \tag{3.5.7}$$

Πραγματικά, δεδομένου του 3.5.6, είναι:

$$U_i(\ell_i) = u\ (\ell_i)/u_i(h_i) = 0 \ , \ U_i(h_i) = u_i(h_i)/u_i(h_i) = 1, \ i \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} u_i(h_i) = 1$$

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(\underline{x}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i(h_i)\ u_i(g_i(\underline{x})) \ / \ u_i(h_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U_i(g_i(\underline{x}))$$

$$= U(\underline{g}(\underline{x}))$$

Η ισχύς του αντίστροφου δείχνεται ανάλογα. Πραγματικά, δεδομένου του 3.5.5 , από τον ανωτέρω μετασχηματισμό έπεται:

$$u_i(\ell_i) = U_i(\ell_i)\, u\, (h_i) = 0 \qquad , \qquad i \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(h_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(h_i)\, U_i(h_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$\begin{aligned} U(\underline{g}(\underline{x})) &= \sum_{i=1}^{n} p_i U_i(g_i(\underline{x})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(h_i)\, u_i(g_i(\underline{x})) \;/\; u_i(h_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(\underline{x})) \\ &= u(\underline{g}(\underline{x})) \end{aligned}$$

Προκειμένου να εξασφαλισθεί η ύπαρξη ολικού βέλτιστου προστίθεται στο 3.5.6 και η συνθήκη

$$u_i[(1-t)a+tb] \geq (1-t)u_i(a)+tu_i(b) \quad , t \in (0,1), \forall a,b \quad [\ell_i, h_i]$$

που εκφράζει ότι οι συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας είναι κοίλες.

3.6 Η ΜΕΘΟΔΟΣ UTA ΓΙΑ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η μέθοδος UTA, που είναι μία μέθοδος μονότονης παλινδρόμησης, εκτιμά ένα σύστημα συναρτήσεων χρησιμότητας σύμφωνα με το αθροιστικό μοντέλο 3.5.6.

Η εκτίμηση ενός συστήματος κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας επιτυγχάνεται με την βοήθεια μίας παραλλαγής της UTA, που αναλύεται στην συνέχεια.

Εστω $U = \{ \underline{g}^{k} = (g_{ik})\ ,\ k=0,\ldots,s\ ,\ i \in [n] \}$ το σύνολο αναφοράς και μία προδιάταξη σ'αυτό:

$$\underline{g}^{k} \succ \underline{g}^{k+1} \quad \text{ή} \quad \underline{g}^{k} \sim \underline{g}^{k+1} \qquad ,k=0,1,\ldots,s-1$$

όπου οι αποφάσεις του U είναι διατεταγμένες κατά αύξουσα τάξη του k [1].

Η ολική χρησιμότητα κάθε απόφασης του U εκφράζεται ως άθροισμα των μερικών χρησιμοτήτων για κάθε κριτήριο χωριστά:

$$u(\underline{g}^{k}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_{ik}) \quad , k=0,1,\ldots,s \qquad (3.6.1)$$

Στο διάστημα $[\ \ell_i^{q}\ ,\ h_i\ ]$, στο οποίο μεταβάλλονται οι τιμές του κριτηρίου g_i , λαμβάνεται μία ακολουθία από a_i σημεία

$$\gamma_i^{1}\ ,\ \gamma_i^{2}\ ,\ldots,\ \gamma_i^{j}\ ,\ \gamma_i^{j+1}\ ,\ldots,\ \gamma_i^{a_i}$$

που ορίζονται από τη σχέση:

---

1) Τούτο δεν βλάπτει την γενικότητα

$$\gamma_i^{j+1} = \ell_i^q + j(h_i - \ell_i^q)/(a_i - 1)\ ,\ i \in [n],\ j=0,\ldots,\ a_i - 1 \qquad (3.6.2)$$

ή

$$\gamma_i^{a_i - t} = h_i - t(h_i - \ell_i^q)/(a_i - 1)\ ,\ i \in [n]\ ,\ t=0,\ldots,\ a_i - 1 \qquad (3.6.3)$$

Για $j=0$ και $j=a_i-1$, από την 3.6.2 προκύπτουν αντίστοιχα τα άκρα του διαστήματος ℓ_i^q και h_i . Με την παρεμβολή των ανωτέρω σημείων το διάστημα $[\ell_i^q, h_i]$ χωρίζεται σε a_i-1 ίσα μέρη:

$$[\ell_i^q,\ h_i] = [\ell_i^q = \gamma_i^1, \ldots,\ \gamma_i^j,\ \gamma_i^{j+1}, \ldots,\ \gamma_i^{a_i} = h_i]$$

Εύκολα προκύπτει ότι οι σχέσεις 3.6.2 και 3.6.3 είναι ισοδύναμες, δίνουν δηλαδή τα ίδια σημεία του $[\ell_i^q, h_i]$, όταν $j+t=a_i-1$ και $j,t=0,\ldots,a_i-1$.

Αν υπάρχουν κριτήρια g_i , $i \in [n]$ με $a_i=s+1$ τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Αν $g_i \in GN$ τότε $g_{ik} = \gamma_i^{j+1}$ για κάθε $k,j=0,\ldots,s$ και $k=j$

Αν $g_i \in \widetilde{G}$ τότε $g_{ik} = \gamma_i^{j+1}$ για κάθε $k,j=0,\ldots,s$ και $k+j=s$

Πραγματικά, αν $g_i \in GN$ τότε

$$g_{ik} = \ell_i^q + (k/s)(h_i - \ell_i^q)\ ,\ k=0,\ldots,\ s$$

και για $k=j$ και $s=a_i-1$ προκύπτει η 3.6.2 , δηλαδή είναι

$$g_{ik} = \gamma_i^{j+1} \text{ για κάθε } k,\ j=0,\ldots,\ s\ ,\ \text{και } k=j.$$

Αν $g_i \in \widetilde{G}$ τότε

$$g_{ik} = h_i - (k/s)(h_i - \ell_i^q)\ ,\ k=0,\ldots,\ s$$

και για $k=t$ και $s=a_i-1$ προκύπτει η 3.6.3, δηλαδή είναι

$$g_{ik} = \gamma_i^{a_i - t}, \quad k, t = 0, \ldots, s, \ \text{με} \ k = t.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\gamma_i^{a_i - t} = \gamma_i^{s+1-t} = \gamma_i^{j+1} \ \text{για κάθε} \ t, j = 0, \ldots, s \quad \text{με} \ t + j = s.$$

δηλαδή

$$g_{ik} = \gamma_i^{j+1} \ \text{για κάθε} \ k, j = 0, \ldots, s \quad \text{με} \ k + j = s$$

Προκειμένου λοιπόν να διασφαλιστεί η ύπαρξη ενός τουλάχιστον g_{ik}, $k = 0, \ldots, s$ σε κάθε διάστημα $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ πρέπει να είναι $a_i \leq s+1$, $i \in [n]$, ενώ από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν $a_i = s+1$ για κάποια $i \in [n]$ τότε τα g_{ik} και γ_i^{j+1} συμπίπτουν για $k, j = 0, \ldots, s$.

Για κάθε κριτήριο g_i, $i \in [n]$ η μερική χρησιμότητα $u_i(g_{ik})$ κάθε τιμής $g_{ik} \in [\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ εκφράζεται συναρτήσει των μερικών χρησιμοτήτων των γ_i^j και γ_i^{j+1} μέσω των ακόλουθων σχέσεων γραμμικής παρεμβολής:

$$u_i(g_{ik}) = (\gamma_i^{j+1} - g_{ik}) u_i(\gamma_i^j) / (\gamma_i^{j+1} - \gamma_i^j) + (g_{ik} - \gamma_i^j) u_i(\gamma_i^{j+1}) / (\gamma_i^{j+1} - \gamma_i^j) \qquad (3.6.4)$$

Επειδή $\gamma_i^{j+1} > \gamma_i^j$ για κάθε $i \in [n]$, $j = 1, \ldots, a_i - 1$ από την μονοτονία των προτιμήσεων έπεται ότι

$$u_i(\gamma_i^{j+1}) \geq u_i(\gamma_i^j) \quad , \quad i \in [n], \ j = 1, \ldots, a_i - 1$$

Αν τεθεί

$$w_{ij} = u_i(\gamma_i^{j+1}) - u_i(\gamma_i^j) \quad , \quad i \in [n], \ j = 1, \ldots, a_i - 1 \qquad (3.6.5)$$

τότε είναι $w_{ij} \geq 0$, $i \in [n]$, $j=1,\ldots,a_i-1$

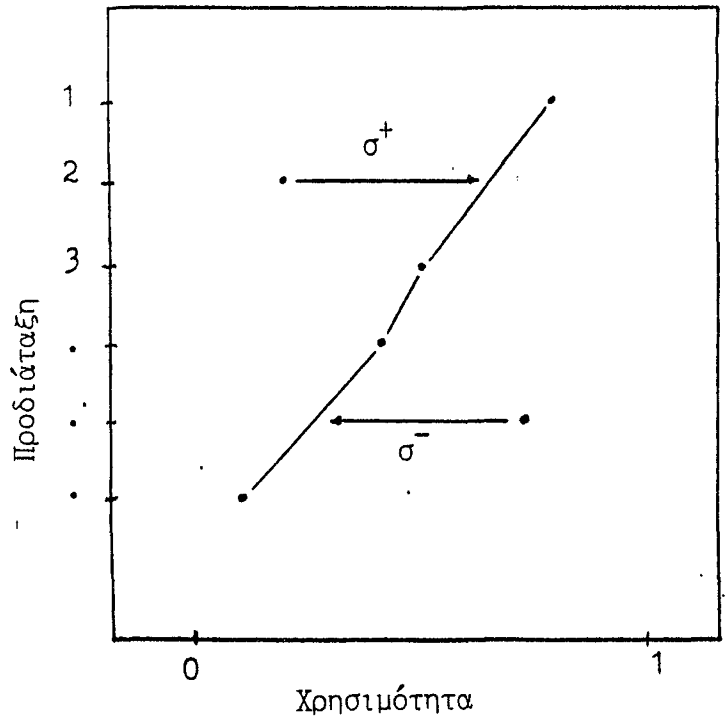
Από τον μετασχηματισμό 3.6.5 έπεται ότι οι μερικές χρησιμότητες των παρεμβαλομένων σημείων γ_i^j μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των w_{ij} από τις σχέσεις

$$u_i(\gamma_i^j) = \sum_{d=1}^{j-1} w_{id} \quad , \quad i \in [n] \ , \ j=2,\ldots,a_i$$

$$u_i(\gamma_i^1) = 0 \quad , \quad i \in [n] \qquad (3.6.6)$$

Οι σχέσεις 3.6.4 και 3.6.6 επιτρέπουν την έκφραση των $u_i(g_{ik})$ συναρτήσει των w_{ij}. Κατά συνέπεια, η ολική χρησιμότητα κάθε απόφασης του V, στις σχέσεις 3.6.1, μπορεί να εκφραστεί επίσης συναρτήσει των w_{ij}.

Σε κάθε απόφαση $\underline{g}^k$ του V αντιστοιχούν δύο συναρτήσεις θετικού σφάλματος $\sigma^+(\underline{g}^k)$ και $\sigma^-(\underline{g}^k)$ που εκφράζουν αντίστοιχα την πιθανή υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση της $\underline{g}^k$ κατά την διάταξη των αποφάσεων του V από τον αποφασίζοντα. Ετσι, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, το σφάλμα $\sigma^+(\underline{g}^k)$ (αντίστοιχα το $\sigma^-(\underline{g}^k)$) αντιπροσωπεύει την ποσότητα χρησιμότητας που πρέπει να προστεθεί (αντίστοιχα αφαιρεθεί) στην εκτιμηθείσα χρησιμότητα $u(\underline{g}^k)$ ώστε η απόφαση $\underline{g}^k$ να επανακτήσει την τάξη της στην προδιάταξη.



Για τις συναρτήσεις σφάλματος και για κάθε $\underline{g}^k \in U$ ισχύουν:

$$\sigma^+(\underline{g}^k)\ ,\ \sigma^-(\underline{g}^k) \geq 0 \quad \text{και} \quad \sigma^+(\underline{g}^k)\sigma^-(\underline{g}^k)=0$$

Με την εισαγωγή των συναρτήσεων σφάλματος, η ολική χρησιμότητα για κάθε απόφαση $\underline{g}^k$ του U γίνεται

$$u(\underline{g}^k) + \sigma^+(\underline{g}^k) - \sigma^-(\underline{g}^k)$$

ενώ, για κάθε ζεύγος διαδοχικών αποφάσεων στην προδιάταξη, οι σχέσεις που εκφράζουν την διαφορά χρησιμότητας είναι

$$\Delta(\underline{g}^k,\underline{g}^{k+1}) = u(\underline{g}^k)-u(\underline{g}^{k+1})+\sigma^+(\underline{g}^k)-\sigma^-(\underline{g}^k)-\sigma^+(\underline{g}^{k+1})+\sigma^-(\underline{g}^{k+1})$$

$$k=0,\ldots,s-1 \qquad (3.6.7)$$

Από τις σχέσεις 3.6.1, 3.6.4 και 3.6.6 και από τον μετασχηματισμό 3.6.5 έπεται ότι οι σχέσεις 3.6.7 είναι συναρτήσεις των w_{ij} και των σφαλμάτων.

Σε κάθε επανάληψη q, για την πλέον επιθυμητή τιμή του κριτηρίου g_i , όπως προκύπτει από τις 3.6.6, ισχύει:

$$u_i(h_i) = u_i(\gamma_i^{a_i}) = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij}$$

Ομως στο αθροιστικό μοντέλο 3.5.6 είναι

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(h_i) = 1$$

Η προηγούμενη σχέση, ως συνάρτηση των w_{ij} , λαμβάνει τελικά την ακόλουθη μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1$$

Από την συνθήκη κοιλότητας των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας προκύπτει η σχέση

$$u\,[(1-t)\gamma_i^{j-1} + t\gamma_i^{j+1}] \geq (1-t)u_i(\gamma_i^{j-1}) + tu_i(\gamma_i^{j+1}) \qquad (3.6.8)$$
$$t \in (0,1),\ j=2,\ldots,a_i-1\ ,\ i \in [n]$$

η οποία για t=1/2 γράφεται:

$$u_i(\gamma_i^{j}) - u_i(\gamma_i^{j-1}) \geq u_i(\gamma_i^{j+1}) - u\,(\gamma_i^{j}) \qquad (3.6.9)$$
$$j=2,\ldots,a_i-1\ ,\ i \in [n]$$

ή, με την βοήθεια της 3.6.5

$$w_{ij-1} - w_{ij} \geq 0 \quad , j=2, \ldots, a_i-1 \ , \ i \in [n] \qquad (3.6.10)$$

Το σύστημα σχέσεων 3.6.10 εκφράζει την συνθήκη κοιλότητας των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας, συναρτήσει των μεταβλητών w_{ij}.

Η εκτίμηση των μεταβλητών w_{ij} και κατά συνέπεια των μερικών χρησιμοτήτων στα παρεμβαλόμενα σημεία g_i^j , $i \in [n]$, $j=1, \ldots, a_i$, γίνεται με την επίλυση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$\min F = \sum_{k=0}^{s} \left(\sigma^+(\underline{g}^k) + \sigma^-(\underline{g}^k) \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\underline{g}^k, \underline{g}^{k+1}) &\geq \delta \quad , \text{αν } \underline{g}^k \succ \underline{g}^{k+1}, k=0, \ldots, s-1 \\ &= 0 \quad , \text{αν } \underline{g}^k \sim \underline{g}^{k+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1 \qquad (3.6.11)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(w_{ij-1} - w_{ij} \geq 0 \ , \ j=2, \ldots, a_i-1 \right)$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad , \quad i \in [n] \ , \ j \in [a_i-1]$$

$$\sigma^+(\underline{g}^k) \ , \ \sigma^-(\underline{g}^k) \geq 0 \qquad k=0, \ldots, s$$

με $0 < \delta < 1/|W|$, όπου W είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στην αναφορική απόφαση.

Το πρόγραμμα 3.6.11 επιτρέπει την εκτίμηση βέλτιστων κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας και την επίτευξη της βέλτιστης ανασύστασης της προδιάταξης, δεδομένου ότι το συνολικό σφάλμα γίνεται ελάχιστο.

Εστω F^* η βέλτιστη τιμή του σφάλματος και $\{\sigma(\underline{g}^k), \sigma(\underline{g}^k), \underline{g}^k \in U\}$ οι αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων. Αν $F^* = 0$, τότε είναι $\sigma^+(\underline{g}^k) = \sigma^-(\underline{g}^k) = 0$ για κάθε απόφαση $\underline{g}^k$ του U και η εκτιμηθείσα συνάρτηση ολικής χρησιμότητας αποκαθιστά πλήρως την υποκειμενική διάταξη. Αν $F^* > 0$, τότε υπάρχουν αποφάσεις $\underline{g}^k$ του U για τις οποίες είναι $\sigma^+(\underline{g}^k) > 0$ ή $\sigma^-(\underline{g}^k) > 0$. Στην περίπτωση αυτή η υποκειμενική διάταξη και εκείνη που προκύπτει από την εκτιμηθείσα συνάρτηση χρησιμότητας γενικά δεν ταυτίζονται, ενώ οι εκδηλούμενες ασυμφωνίες αντιστοιχούν στις αποφάσεις για τις οποίες εμφανίζεται θετικό σφάλμα.

Σε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες περιπτώσεις ενδέχεται η βέλτιστη λύση του 3.6.11 να μην είναι μοναδική. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν λύσεις του, που ενώ δίνουν την ίδια τιμή σφάλματος F^*, αντιστοιχούν σε διαφορετικές συναρτήσεις χρησιμότητας. Η ανάλυση ευστάθειας (stability analysis) ή ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) της βέλτιστης λύσης συνίσταται ακριβώς στην αναζήτηση αυτών των πολλαπλών λύσεων.

Οταν υπάρχουν πολλαπλές λύσεις, τότε χαρακτηριστικές είναι εκείνες που μεγιστοποιούν τα βάρη $p_i = u_i(h_i)$ των κριτηρίων. Ο δε προσδιορισμός τους γίνεται με την βοήθεια των ακόλουθων γραμμικών προγραμμάτων:

$$\max \quad p_i = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij}$$

$$D(\underline{g}^k, \underline{g}^{k+1}) \geq \delta \quad , \text{αν} \quad \underline{g}^k \succ \underline{g}^{k+1} \qquad , k=0,\ldots, s-1$$
$$= 0 \quad , \text{αν} \quad \underline{g}^k \sim \underline{g}^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1 \qquad (3.6.12)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} (w_{ij-1} - w_{ij} \geq 0 \ , \ j=2, \ \ldots, \ a_i-1)$$

$$\sum_{k=0}^{s} \{ \sigma^+(\underline{g}^k) + \sigma^-(\underline{g}^k) \} \leq F^*$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad , \ i \in [n] \ , \ j \in [a_i-1]$$
$$\sigma^+(\underline{g}^k) \ , \ \sigma^-(\underline{g}^k) \geq 0 \quad , \quad k=0,\ldots, s$$

Στα προγράμματα 3.6.12 ο χώρος των εφικτών λύσεων έχει περιορισθεί, σε σχέση με εκείνον του 3.6.11, με την προσθήκη του περιορισμού

$$\sum_{k=0}^{s} \{ \sigma^+(\underline{g}^k) + \sigma^-(\underline{g}^k) \} \leq F^*$$

Η επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων 3.6.12 παρέχει ένα σύστημα n βέλτιστων συναρτήσεων χρησιμότητας. Η μέση χρησιμότητα είναι εκείνη που λαμβάνεται συνήθως στις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

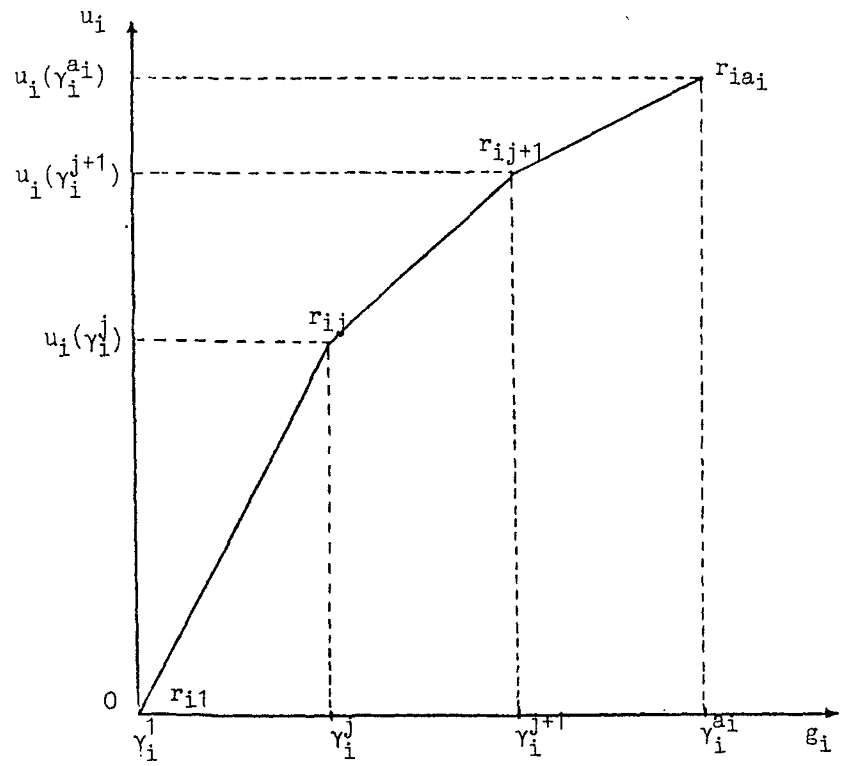
Αν $p_i^* = \max \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij}$ και $p_{i_*} = \min \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij}$, υπό τους περιορισμούς του 3.6.12, τότε αυτά αποτελούν αντίστοιχα την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή για το βάρος του κριτηρίου g_i ενώ το εύρος του διαστήματος $[p_{i_*}, p_i^*]$ δίνει μία εικόνα της σημαντικότητας του κριτηρίου g_i στις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

3.7 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η επίλυση του γραμμικού προγράμματος 3.6.11, έχει ως αποτέλεσμα την κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας, για κάθε κριτήριο g_i.
Πραγματικά, όπως προκύπτει από την 3.6.5, οι μεταβλητές w_{ij} του γραμμικού προγράμματος 3.6.11 εκφράζουν, για κάθε κριτήριο g_i, την διαφορά χρησιμότητας στα άκρα των διαστημάτων $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$, $j=1,\ldots,a_i-1$.
Εξάλλου, όπως προκύπτει από την 3.6.2, για κάθε κριτήριο g_i το εύρος των διαστημάτων $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ είναι σταθερό και ίσο με $(h_i - \ell_i^q)/(a_i-1)$.
Ετσι, η κλίση της u_i στο $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση:

$$c_i^j = [(a_i-1)/(h_i-\ell_i^q)]w_{ij}^o$$

όπου w_{ij}^o είναι η τιμή της μεταβλητής w_{ij} που αντιστοιχεί στην βέλτιστη λύση του 3.6.11.
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αφού η συνάρτηση μερικής χρησιμότητας u_i λαμβάνεται γραμμική σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ είναι κατά τμήματα γραμμική στο $[\ell_i^q, h_i] = \bigcup_{j=1}^{a_i-1} [\gamma_i^j, \gamma_i^{j+1}]$ (σχ. 2).



Σχήμα 2: Κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση της u

Ετσι, η u_i μπορεί να ορισθεί πλήρως[1] στο $[l_i^q, h_i]$ από τις πεπερασμένες ακολουθίες $\gamma=(\gamma_i^1 \dots \gamma_i^j\ \gamma_i^{j+1} \dots \gamma_i^{a_i})$ και $c=(c_i^1 \dots c_i^j c_i^{j+1} \dots c_i^{a_i-1})$ των σημείων του πεδίου ορισμού της και των αντίστοιχων κλίσεών της.

Επιπλέον, η u_i είναι κοίλη στο $[\ell_i^q, h_i]$ επειδή $c_i^j > c_i^{j+1}$ για κάθε $j=1,\dots, a_i-1$ και γράφεται:

$$u_i(g_i) = [c/\gamma]_i g_i \qquad (3.7.2)$$

1) Βλ. σελ. 37

Επειδή κάθε g_i είναι συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ η 3.7.2 μπορεί να γραφεί:

$$u_i(g_i(\underline{x})) = [c/\gamma]_i g_i(\underline{x}) \tag{3.7.3}$$

Τέλος, η συνάρτηση ολικής χρησιμότητας, η οποία σύμφωνα με το αθροιστικό μοντέλο δίνεται ως άθροισμα των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας, γράφεται:

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i g_i(\underline{x}) \tag{3.7.4}$$

και είναι κατά τμήματα γραμμική και κοίλη ως άθροισμα κατά τμήματα γραμμικών και κοίλων συναρτήσεων.

Μία εφικτή λύση $\underline{x} \in A^q$ είναι αποτελεσματική και μέγιστης χρησιμότητας, όταν είναι βέλτιστη λύση του ακόλουθου προγράμματος:

$$\max_{\underline{x} \in A^q} \; u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i g_i(\underline{x}) \tag{3.7.5}$$

Το 3.7.5 είναι ένα κατά τμήματα γραμμικό πρόγραμμα, το οποίο μπορεί να επιλυθεί άμεσα με την βοήθεια του αλγόριθμου του Fourer[1], επειδή η u είναι κοίλη. Η ιδιότητα αυτή της u διασφαλίζει το ότι κάθε τοπικά βέλτιστη λύση είναι και ολικά βέλτιστη.

Εναλλακτικά, το 3.7.5 μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα ισοδύναμο γραμμικό πρόγραμμα.

---

1) Βλ. σελ. 41

Πραγματικά, όπως προκύπτει από την 3.6.6 και από τα προηγούμενα, η μερική χρησιμότητα σε κάθε ένα από τα σημεία γ_i^j ως προς το κριτήριο g_i , είναι:

$$u_i(\gamma_i^1) = 0$$

$$u_i(\gamma_i^j) = [(h_i - \ell_i^q)/(a_i-1)] \sum_{d=1}^{j-1} c_i^d \quad , j=2,\ldots, a_i \qquad (3.7.6)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία $(\gamma_i^j , u_i(\gamma_i^j))$ και $(\gamma_i^{j+1} , u_i(\gamma_i^{j+1}))$ προσεγγίζει γραμμικά την καμπύλη της u_i στο διάστημα $[\gamma_i^j , \gamma_i^{j+1}]$.

Ετσι, για κάθε τιμή του κριτηρίου g_i στο διάστημα $[\gamma_i^j , \gamma_i^{j+1}]$ και για την αντίστοιχη μερική χρησιμότητά της ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} g_i &= r_{ij}\, \gamma_i^j + r_{ij+1}\, \gamma_i^{j+1} \\ u_i(g_i) &= r_{ij}\, u_i(\gamma_i^j) + r_{ij+1}\, u_i(\gamma_i^{j+1}) \qquad (3.7.7) \\ r_{ij} &+ r_{ij+1} = 1 \quad , r_{ij} \geq 0 \quad , j=1,\ldots, a_i \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι, για κάθε κριτήριο g_i , η κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση της u_i στο $[\ell_i^q, h_i]$ εκφράζεται με το ακόλουθο σύστημα σχέσεων:

$$u_i(g_i) = \sum_{j=1}^{a_i} r_{ij}\, u_i(\gamma_i^j) \qquad (3.7.8)$$

$$g_i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{a_i} r_{ij}\, \gamma_i^j \qquad (3.7.9)$$

$$\sum_{j=1}^{a_i} r_{ij} = 1 \quad , \quad r_{ij} \geq 0 \ , \ j=1,\ldots, a_i \qquad (3.7.10)$$

Με την βοήθεια της 3.7.6, η 3.7.8 μπορεί να γραφεί:

$$u_i(g_i) = [(h_i - \ell_i^q)/(a_i-1)] \sum_{j=2}^{a_i} (r_{ij} \sum_{d=1}^{j-1} c_i^d) \qquad (3.7.11)$$

Από την 3.7.11 και σύμφωνα με το αθροιστικό μοντέλο χρησιμότητας έπεται ότι η συνάρτηση ολικής χρησιμότητας είναι η ακόλουθη:

$$u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} \{[(h_i - \ell_i^q)/(a_i-1)] \sum_{j=2}^{a_i} (r_{ij} \sum_{d=1}^{j-1} c_i^d)\} \qquad (3.7.12)$$

Ετσι, μία αποτελέσματική λύση μέγιστης χρησιμότητας λαμβάνεται ως βέλτιστη λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$\max \quad u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} [(h_i - \ell_i^q)/(a_i-1)] \sum_{j=2}^{a_i} (r_{ij} \sum_{d=1}^{j-1} c_i^d)$$

$$\underline{x} \in A^q$$

$$g_i(\underline{x}) - \sum_{j=1}^{a_i} r_{ij} \gamma_i^j = 0 \quad , \; i \in [n] \qquad (3.7.13)$$

$$\sum_{j=1}^{a_i} r_{ij} = 1 \quad , \; i \in [n]$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad , \; i \in [n] \; , \; j = 1, \ldots, a_i$$

Το 3.7.13 είναι το ισοδύναμο γραμμικό του κατά τμήματα γραμμικού προγράμματος 3.7.5 και επειδή η u είναι κοίλη μπορεί να επιλυθεί[1] με την κλασσική μέθοδο simplex, η οποία

1) Βλ. Bazarra, Shetty [3]

στην περίπτωση αυτή εξασφαλίζει ολικό βέλτιστο.

Οι διαστάσεις όμως του 3.7.13 είναι μεγαλύτερες εκείνων του 3.7.5. Πραγματικά, αν N είναι το πλήθος των περιορισμών του αρχικού πολυκριτήριου προγράμματος, τότε οι διαστάσεις του 3.7.5 είναι $m \times (N+n)$, ενώ οι διαστάσεις του 3.7.13 είναι $(m+\sum_{i=1}^{n} a_i) \times (N+3n)$.

Η αύξηση αυτή των διαστάσεων κατά την μετάβαση από το κατά τμήματα γραμμικό στο ισοδύναμο γραμμικό πρόγραμμα οφείλεται στην προσθήκη των νέων μεταβλητών r_{ij} και των περιορισμών που συσχετίζουν τις συναρτήσεις των κριτηρίων με τα διακεκριμένα σημεία του πεδίου ορισμού των.

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Ο αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιεί την μέθοδο του προηγούμενου κεφάλαιου, αποτελείται από 8 βήματα από τα οποία τα τρία πρώτα αντιστοιχούν στο προκαταρκτικό μέρος της μεθόδου και τα υπόλοιπα πέντε στο επαναληπτικό μέρος αυτής.
Συγκεκριμένα, το τέταρτο βήμα του αλγόριθμου αντιστοιχεί στο πρώτο στάδιο του επαναληπτικού μέρους της μεθόδου, το πέμπτο βήμα στο δεύτερο στάδιο, τα βήματα 6 και 7 στο τρίτο και τέλος το βήμα 8 αντιστοιχεί στο τέταρτο στάδιο της μεθόδου.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο αλγόριθμος της μεθόδου και ένα πρόβλημα πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο επιλύεται με την βοήθεια αυτού.

4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Ο αλγόριθμος επιλύει το ακόλουθο π.γ.π:

$$\max\ u(g_1(\underline{x})=\underline{c}_1^T\underline{x}, \ldots, g_n(\underline{x})=\underline{c}_n^T\underline{x})$$

$$\underline{x} \in A=\{\underline{x} \in R^m : \mathbb{A}\,\underline{x} \leq \underline{b}\ ,\ \underline{x} \geq 0\}$$

όπου

$\underline{x}=(x_1, \ldots, x_m)$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης

$g_1, \ldots, g_n$ οι αντικειμενικές συναρτήσεις

$\underline{c}_i=(c_{i1}, \ldots, c_{im})$, $i \in [n]$ τα διανύσματα των συντελεστών των αντικειμενικών συναρτήσεων

$\mathbb{A}$ η μήτρα των συντελεστών των περιορισμών

$\underline{b}$ το διάνυσμα των πραγματικών τιμών των δεύτερων μελών

Η συνάρτηση χρησιμότητας u είναι κοίλη και τέτοια ώστε για κάθε $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$ ισχύουν

$$\underline{x} \succ \underline{y} \iff u(\underline{g}(\underline{x})) > u(\underline{g}(\underline{y}))$$

$$\underline{x} \sim \underline{y} \iff u(\underline{g}(\underline{x})) = u(\underline{g}(\underline{y}))$$

Ετσι ο αλγόριθμος, στον οποίο διατηρείται ο γενικός συμβολισμός των προηγουμένων κεφαλαίων, αναλύεται στα ακόλουθα βήματα:

• <u>Προκαταρκτικό μέρος</u>

Βήμα 1: Υπολόγισε τα άνω και κάτω φράγματα των κριτηρίων:

$h_i = g_i(\underline{x}_i^*) = \max g_i(\underline{x})$, $\underline{x} \in A$, $i \in [n]$

$g_{ij} = g_j(\underline{x}_i^*)$, $i, j \in [n]$

$F_j = \min\limits_{\{i\}} \{g_{ij}\}$, $i, j \in [n]$

$\ell_i = g_i(\underline{x}_{i_*}) = \min g_i(\underline{x})$, $\underline{x} \in A$, $i \in [n]$

Αν $\ell_i = -\infty$ για κάθε $i \in [n]$, τότε $\ell_i = F_i$, $i \in [n]$

Αν υπάρχει $j \in [n]$: $\ell_j = -\infty$ και $\ell_i \in R$ για $i \neq j$, τότε:

$\ell_j = h_j - (h_j - F_j)\max\{(h_i - \ell_i)/(h_i - F_i)$, $i \in [n]$, $i \neq j\}$

Βήμα 2: Υπολόγισε τα βάρη των κριτηρίων:

$d_i = (h_i - \ell_i)/h_i$, αν $h_i > 0$, $i \in [n]$

$d_i = (\ell_i - h_i)/\ell_i$, αν $h_i \leq 0$, $i \in [n]$

$m_i = d_i / \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$, $i \in [n]$

και θέσε $q = 1$, $A^0 = A$ και $\ell_i^0 = \ell_i$, $i \in [n]$

Βήμα 3: Λύσε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min z$$

$$\underline{x} \in A^0$$

$$(h_i - g_i(\underline{x}))m_i \leq z \quad , \ i \in [n]$$

$$z \geq 0$$

Αν $\underline{x}^q$ είναι μία βέλτιστη λύση του τότε υπολόγισε $\underline{g}^q = (g_1^q, \ldots, g_n^q)$ με $g_i^q = g_i(\underline{x}^q)$.

- <u>Επαναληπτικό μέρος</u>

<u>Στάδιο I</u>

Βήμα 4: Προσδιόρισε νέα κάτω φράγματα για τα κριτήρια:

Αν δεν υπάρχουν κριτήρια με ικανοποιητικές τιμές στο $\underline{g}^q$, τότε ζήτησε από τον αποφασίζοντα να αναθεωρήσει το μοντέλο του π.γ.π, διαφορετικά ζήτησέ του να υποδείξει το σύνολο GN των κριτηρίων την τιμή των οποίων επιθυμεί να βελτιώσει.

Αν ο αποφασίζων δεν προτίθεται να μειώσει την τιμή ορισμένων κριτηρίων από τα υπόλοιπα $\tilde{G}=G-GN$ προς όφελος των κριτηρίων του GN, τότε η $\underline{x}^q$ είναι η βέλτιστη συμβιβαστική λύση.

Διαφορετικά, θέσε

$$\ell_i^q = g_i^q \text{ για κάθε } g_i \in GN$$
$$\ell_i^q = \ell_i^{q-1} \text{ για κάθε } g_i \in \tilde{G}$$

και για κάθε $g_k \in GN$ λύσε το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \; g_k(\underline{x})$$
$$\underline{x} \in A^{q-1}$$
$$g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^q \qquad , \; g_i \in GN \;, \; i \neq k$$
$$g_j(\underline{x}) \geq \ell_j^q \qquad , \; g_j \in \tilde{G}$$

Αν για την βέλτιστη τιμή g_k^* του g_k ισχύει $g_k^* = h_k$ για κάθε $g_k \in GN$, τότε θέσε:

$$A^q = A^{q-1} \cap \{ \underline{x} \in R^m \; / \; g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^q \quad , \; i \in [n] \}$$

Διαφορετικά, ζήτησε από τον αποφασίζοντα για κάθε $g_k \in GN$ με $g_k^* < h_k$ να καθωρίσει, με την βοήθεια των δυικών μεταβλητών του προηγούμενου προγράμματος που αντιστοιχούν στους περιορισμούς φράγματος των κριτηρίων του $\tilde{G}$, μία αποδεκτή ελάτωση Δ_j του ℓ_j^q, για κάθε $g_j \in \tilde{G}$ με $\ell_j^q > \ell_j^o$ και θέσε $\ell_j^q = \ell_j^q - \Delta_j$ και
$A^q = A^{q-1} \cap \{ \underline{x} \in R^m \,/\, g_i(\underline{x}) \geq \ell_i^q \quad, i \in [n] \}$

Στάδιο II

Βήμα 5: Δημιούργησε σύμφωνα με την επιθυμία του αποφασίζοντα ένα σύνολο s εναλλακτικών αποφάσεων

$$U = \{ \underline{g}^k = (g_{ik}) \ , \ k=0,\ldots,s \ , \ i \in [n] \}$$

θέτοντας:

$$g_{ik} = \ell_i^q + (k/s)(h_i - \ell_i^q), \ k=0,\ldots, s \ , \text{ αν } g_i \in GN$$

$$g_{ik} = h_i - (k/s)(h_i - \ell_i^q), \ k=0,\ldots, s \ , \text{ αν } g_i \in \tilde{G}$$

Στάδιο III

Βήμα 6: Διάταξε τις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς U σύμφωνα με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα

Βήμα 7: Λύσε το γραμμικό πρόγραμμα

$$\min \ F = \sum_{k=0}^{s} \{ \sigma^{+}(\underline{g}^{k}) + \sigma^{-}(\underline{g}^{k}) \}$$

$$\Delta(\underline{g}^{k}, \underline{g}^{k+1}) \geq \delta \quad , \text{ αν } \underline{g}^{k} \succ \underline{g}^{k+1}$$

$$= 0 \quad , \text{ αν } \underline{g}^{k} \sim \underline{g}^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} (w_{ij-1} - w_{ij} \geq 0 \ , \ j=2, \ldots, a_i - 1)$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad , \ i \in [n], \ j \in [a_i - 1]$$

$$\sigma^{+}(\underline{g}^{k}), \ \sigma^{-}(\underline{g}^{k}) \geq 0 \ , \ k=0, \ldots, s$$

όπου δ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός και διερεύνησε την ύπαρξη πολλαπλών λύσεων.

Αν η βέλτιστη λύση είναι μοναδική τότε συνέχισε από το σημείο υπολογισμού της ολικής χρησιμότητας των αποφάσεων του V.

Διαφορετικά, προσδιόρισε εκείνες τις βέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν τα βάρη:

$$p_i = u_i(h_i) = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} \qquad , \ i \in [n]$$

και υπολόγισε τη μέση τιμή τους.

Υπολόγισε την ολική χρησιμότητα κάθε εναλλακτικής απόφασης του U.

Αν η διάταξη του U ταυτίζεται με την διάταξη του βήματος 6, πήγαινε στο επόμενο βήμα.

Διαφορετικά ρώτησε τον αποφασίζοντα:

i) Αν προτίθεται να μεταβάλει τις εκτιμηθείσες μερικές χρησιμότητες των κριτηρίων και σε θετική απάντηση επέστρεψε στο σημείο του υπολογισμού της ολικής χρησιμότητας των εναλλακτικών αποφάσεων του U.

ii) Αν προτίθεται να επαναδιατάξει τις εναλλακτικές αποφάσεις του U και σε θετική απάντηση επέστρεψε στο βήμα 6.

iii) Αν αποδέχεται το μοντέλο χρησιμότητας που εκτιμήθηκε και σε αρνητική απάντηση ζήτησε από τον αποφασίζοντα να αναθεωρήσει το μοντέλο του π.γ.π, ενώ σε θετική πήγαινε στο επόμενο βήμα.

Στάδιο IV

Βήμα 8: Λύσε το πρόγραμμα

$$\max_{\underline{x} \in A^q} u(\underline{g}(\underline{x})) = \sum_{i=1}^{n} [c/\gamma]_i g_i(\underline{x})$$

Αν $\underline{x}^q$ είναι η βέλτιστη λύση του, τότε θέσε $q=q+1$, υπολόγισε $\underline{g}^q = (g_1^q, \ldots, g_n^q)$ με $g_i^q = g_i(\underline{x}^q)$ και επέστρεψε στο βήμα 4.

4.2 ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία βιοτεχνία παράγει τέσσερις τύπους προιόντων. Η παραγωγή των προιόντων αυτών απαιτεί πέντε φάσεις.
Η απαιτούμενη εργασία για την παραγωγή μιας δωδεκάδας κάθε προιόντος καθώς και οι διαθέσιμη μηνιαία εργασία για κάθε φάση δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

Φάση Τύπος	I	II	III	IV	V	Απαιτήσεις
Α	4	6	3	2	1	16
Β	4	7	4	3	1	19
Γ	3	5	2	1	1	12
Δ	2	3	2	2	-	9
Εργασία (ανθ/ώρες)	730	1125	700	500	150	

Για την κατασκευή των προιόντων χρησιμοποιούνται δύο τύποι πρώτης ύλης. Το απόθεμα του πρώτου τύπου υπερεπαρκεί για την παραγωγή. Το απόθεμα του δεύτερου τύπου περιορίζεται σε 500 μονάδες. Ο δεύτερος τύπος πρώτης ύλης χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την παραγωγή των προιόντων Α και Γ, τα οποία ανά μονάδα απαιτούν 0.3 και 0.5 μονάδες αυτής αντίστοιχα.

Προκειμένου να ικανοποιηθεί η ελάχιστη ζήτηση για κάθε ένα από τα προιόντα Α, Β, Γ, Δ, οι παραγόμενες ποσότητας δεν πρέπει να είναι μικρότερες από 25, 30, 25 και 20 δωδεκάδες αντίστοιχα.

Το κέρδος από κάθε δωδεκάδα των προιόντων Α, Β, Γ, Δ είναι 48, 60, 30, 18 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα.

Η διεύθυνση της βιοτεχνίας, προκειμένου να προγραμματίσει την παραγωγή της για τον επόμενο μήνα, έθεσε τους ακόλουθους στόχους:

(α) Μεγιστοποίηση των κερδών της από την διάθεση των των προιόντων Α, Β, Γ, Δ.

(β) Περιορισμό της απασχόλησης του προσωπικού παραγωγής των προιόντων Α, Β, Γ και Δ, προκειμένου να βοηθηθεί ένα άλλο τμήμα.

(γ) Μεγιστοποίηση της παραγωγής των προιόντων Γ και Δ, τα οποία ικανοποιούν την ζήτηση των καλύτερων πελατών της.

<u>Μοντελοποίηση του προβλήματος</u>

Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι οι ζητούμενοι αριθμοί των δωδεκάδων παραγωγής των προιόντων Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, τότε προκύπτουν:

Κριτήρια αξιολόγησης

Κέρδος : $g_1 = 48x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 18x_4$

Απασχόληση : $g_2 = 16x_1 + 19x_2 + 12x_3 + 9x_4$

Συνολική ποσότητα Γ και Δ: $g_3 = x_3 + x_4$

Περιορισμοί απασχόλησης

I $\quad 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 730$

II $\quad 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 1125$

III $\quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 700$

IV $\quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 500$

V $\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 150$

Περιορισμοί ζήτησης

Α: $x_1 \geq 25$

Β: $x_2 \geq 30$

Γ: $x_3 \geq 25$

Δ: $x_4 \geq 20$

Περιορισμός πρώτης ύλης

$12*0.3x_1 + 12*0.5x_3 \leq 500$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το πρόβλημα προγραμματισμού της παραγωγής περιγράφεται με το ακόλουθο μοντέλο πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max \; g_1 = 48x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 18x_4$$
$$\max \; g_2 = -16x_1 - 19x_2 - 12x_3 - 9x_4$$
$$\max \; g_3 = x_3 + x_4$$

$$
\begin{array}{rcl}
4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 730 \\
6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \leq & 1125 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \leq & 700 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 500 \\
x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 150 \\
x_1 & \geq & 25 \\
x_2 & \geq & 30 \\
x_3 & \geq & 25 \\
x_4 & \geq & 20 \\
3.6x_1 + 6x_3 & \leq & 500
\end{array}
\qquad (4.2.1)
$$

4.3 ΕΠΙΛΥΣΗ

Προκαταρκτικό στάδιο

Τα άνω και τα κάτω φράγματα των κριτηρίων g_1, g_2, g_3 στο πρόγραμμα 4.2.1, όπως προκύπτουν από το πρώτο βήμα του αλγόριθμου, είναι:

$h_1 = 8850.000$, $h_2 = -1450.000$, $h_3 = 212.143$

$\ell_1 = 4110.000$, $\ell_2 = -3098.333$, $\ell_3 = 45.000$

Η δε ανταγωνιστική τους σχέση προκύπτει από τον ακόλουθο πίνακα πληρωμών του προγράμματος:

	g_1	g_2	g_3	x_1	x_2	x_3	x_4
g_1	8850.000	-3050.000	75.000	25	100	25	50
g_2	4110.000	-1450.000	45.000	25	30	25	20
g_3	7590.006	-3072.145	212.143	25	30	64.29	147.86

Ετσι το πρόγραμμα παραγωγής $x_1=25, x_2=100, x_3=25, x_4=50$, που επιφέρει το μεγαλύτερο κέρδος (8850 χιλιάδες δρχ.) χρειάζεται για την υλοποίησή του 3050 ώρες εργασίας, δηλαδή το 95.16% της διαθέσιμης εργασίας, ενώ παράλληλα αποδίδει σχετικά μικρό αριθμό προιόντων Γ και Δ (75 δωδεκάδες).

Αντίθετα, το πρόγραμμα $x_1=25$, $x_2=30$, $x_3=25$, $x_4=20$, που χρησιμοποιεί την λιγότερη εργασία (1450 ώρες) και επιτρέπει την αποδέσμευση του 54.76% της συνολικής εργασίας, επιφέρει το μικρότερο κέρδος (4110 χιλιάδες δρχ.) και αποδίδει τον μικρότερο αριθμό προιόντων Γ και Δ (40 δωδεκάδες).

Τέλος, το πρόγραμμα $x_1=25$, $x_2=30$, $x_3=64.29$, $x_4=147.86$, που μπορεί να ικανοποιήσει στο μεγαλύτερο βαθμό την ζήτηση των καλύτερων πελατών της βιοτεχνίας (212.14 δωδεκάδες προιόντων Γ και Δ), επιφέρει σημαντικά κέρδη (7590 χιλιάδες δρχ.) αλλά απαιτεί για την υλοποίησή του το 95.85% της συνολικής εργασίας.

Σύμφωνα με το δεύτερο βήμα του αλγόριθμου, τα βάρη των κριτηρίων g_1, g_2, g_3, όπως προκύπτουν από τον πίνακα πληρωμών, είναι m_1 = 0.288, m_2 = 0.287 και m_3 = 0.425 αντίστοιχα.

Σύμφωνα με το τρίτο βήμα του αλγόριθμου, η αποτελεσματική λύση του 4.2.1, που αντιστοιχεί στα προηγούμενα βάρη και που υπολογίζεται ως βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος ελαχιστοποίησης της μετρικής του Icebytcheff (πίνακας 4.3.1), είναι:

$$\underline{x}^1 = (\ 25,\ 90.1\ ,\ 25,\ 20\ )$$

Οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στη λύση αυτή είναι: g_1^1 = 7715.820, g_2^1 = -2591.843, g_3^1 = 45, δηλαδή προσεγγίζουν τις περισσότερο επιθυμητές τιμές κατά 76.1 %, 30.7 % και 0 % αντίστοιχα.

Πίνακας 4.3.1: Το γραμμικό πρόγραμμα ελαχιστοποίησης της μετρικής του Tchebycheff

x_1	x_2	x_3	x_4	z		R.H.S
4	4	3	2		≤	730
6	7	5	3		≤	1125
3	4	2	2		≤	700
2	3	1	2		≤	500
1	1	1			≤	150
1					≥	25
	1				≥	30
		1			≥	25
			1		≥	20
3.6		6			≤	500
13.82	17.28	8.64	5.18	1	≥	2548.80
4.59	5.45	3.44	2.58	-1	≤	416.15
		0.43	0.43	1	≥	90.16
				1		min

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1

Ο υπεύθυνος για τον προγραμματισμό της παραγωγής (αποφασίζων), αξιολογόντας τις τιμές που του παρουσιάζονται, κρίνει ότι σ'αυτή τη φάση οι τιμές των κριτηρίων g_1 και g_2 είναι αρκετά ικανοποιητικές και ότι πρέπει να βελτιωθεί η τιμή του g_3.
Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις του αποφασίζοντα, ως λιγότερο επιθυμητές τιμές για τα κριτήρια, στη φάση αυτή, λαμβάνονται οι ακόλουθες:

$$\ell_1^1 = \ell_1 = 4110 \ , \ \ell_2^1 = \ell_2 = -3098.333 \ , \ \ell_3^1 = g_3^1 = 45$$

Με βάση τις τιμές αυτές και σύμφωνα με το πέμπτο βήμα του αλγόριθμου δημιουργούνται οκτώ εναλλακτικά σενάρια για τις τιμές των κριτηρίων, τα οποία θα κατατάξει ο αποφασίζων κατά σειρά προτίμησης (πίνακας 4.3.2).

Πίνακας 4.3.2: Εναλλακτικά σενάρια και ολική προτίμηση πρώτης επανάληψης.

	Τιμές κριτηρίων			
Σενάριο	g_1	g_2	g_3	Τάξη
a_1	8850.00	-1450.00	45.00	5
a_2	8172.86	-1685.48	68.88	4
a_3	7495.71	-1920.95	92.76	2
a_4	6818.57	-2156.43	116.63	1
a_5	6141.43	-2391.91	140.51	3
a_6	5464.29	-2627.38	164.39	4
a_7	4787.14	-2862.86	188.27	6
a_8	4110.00	-3098.33	212.14	7

Ετσι, η προτίμηση του σενάριου a_4 έναντι του a_3 σημαίνει ότι ο αποφασίζων, προκειμένου να αυξήσει την παραγωγή των προιόντων Γ και Ω κατά 23.87 δωδεκάδες (από 92.76 σε 116.63, δηλαδή κατά 25.7%), προτίθεται να μειώσει το κέρδος κατά 677.14 χιλιάδες δραχμές (από 7495.71 σε 6818.57, δηλαδή κατά 9%) και παράλληλα να χρησιμοποιήσει 235.48 ώρες εργασίας επιπλέον (2156.43 ώρες αντί 1920.95, δηλαδή 12.3% περισσότερες).

Με ανάλογο τρόπο ερμηνεύονται και οι υπόλοιπες κατά ζεύγη προτιμήσεις, ενώ η τοποθέτηση του σενάριου a_4 στην κορυφή της διάταξης σημαίνει ότι οι τιμές των κριτηρίων που αυτό αντιπροσωπεύει κρίνονται ως οι πλέον συμφέρουσες.

Στη συνέχεια, σύμφωνα με τον αλγόριθμο UTA, υπολογίζονται οι αναλυτικές εκφράσεις της ολικής χρησιμότητας κάθε σενάριου του πίνακα 4.3.2.

Για τον σκοπό αυτό, το διάστημα από την λιγότερο ως την περισσότερο επιθυμητή τιμή κάθε κριτηρίου, χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη:

$[\ell_1', h_1] = [4110.00, 5690.00, 7270.00, 8850.00]$

$[\ell_2', h_2] = [-3098.33, -2548.89, -1999.45, -1450.00]$

$[\ell_3', h_3] = [45.00, 100.71, 156.43, 212.14]$

Η παρεμβολή των τιμών του πίνακα 4.3.2 στα προηγούμενα διαστήματα οδηγεί στις ακόλουθες αναλυτικές εκφράσεις της ολικής χρησιμότητας των σεναρίων:

$u(a_1) = w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{21} + w_{22} + w_{23}$

$u(a_2) = w_{11} + w_{12} + 0.57w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.57w_{23} + 0.43w_{31}$

$u(a_3) = w_{11} + w_{12} + 0.14w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.14w_{23} + 0.86w_{31}$

$u(a_4) = w_{11} + 0.71w_{12} + w_{21} + 0.71w_{22} + w_{31} + 0.29w_{32}$

$u(a_5) = w_{11} + 0.29w_{12} + w_{21} + 0.29w_{22} + w_{31} + 0.71w_{32}$

$u(a_6) = 0.86w_{11} + 0.86w_{21} + w_{31} + w_{32} + 0.14w_{33}$

$u(a_7) = 0.43w_{11} + 0.43w_{21} + w_{31} + w_{32} + 0.57w_{33}$

$u(a_8) = w_{31} + w_{32} + w_{33}$

Συμφωνα με το βήμα 7 του αλγόριθμου, από τις προηγούμενες αναλυτικές σχέσεις και την διάταξη που έχει ορίσει ο αποφασίζων στο σύνολο των οκτώ σεναρίων, προκύπτει το γραμμικό πρόγραμμα του τροποποιημένου μοντέλου UTA (πίνακας 4.3.3), του οποίου η επίλυση επιτρέπει την εκτίμηση μίας βέλτιστης κατά τμήματα γραμμικής κάι κοίλης συνάρτησης χρησιμότητας.

Η βέλτιστη λύση του προγράμματος αυτού είναι:

$$w_{11} = 0.364 \;,\; w_{12} = 0.108 \;,\; w_{13} = 0.096$$
$$w_{21} = 0.024 \;,\; w_{22} = 0.012 \;,\; w_{23} = 0$$
$$w_{31} = 0.260 \;,\; w_{32} = 0.074 \;,\; w_{33} = 0.062$$

Οπως προκύπτει όμως από την ανάλυση ευστάθειας του ολικού βέλτιστου, η προηγούμενη λύση δεν είναι μοναδική. Ετσι επιλύονται τα γραμμικά προγράμματα μεγιστοποίησης των βαρών των κριτηρίων (πίνακας 4.3.4) και λαμβάνονται οι ακόλουθες λύσεις:

max p1: $w_{11} = 0.603 \;,\; w_{12} = 0.070 \;,\; w_{13} = 0$
$$w_{21} = 0.024 \;,\; w_{22} = 0.012 \;,\; w_{23} = 0$$
$$w_{31} = 0.279 \;,\; w_{32} = 0.012 \;,\; w_{33} = 0$$

max p2: $w_{11} = 0.024 \;,\; w_{12} = 0.012 \;,\; w_{13} = 0$
$$w_{21} = 0.603 \;,\; w_{22} = 0.070 \;,\; w_{23} = 0$$
$$w_{31} = 0.279 \;,\; w_{32} = 0.012 \;,\; w_{33} = 0$$

Πίνακας 4.3.3 : Γραμμικό πρόγραμμα εκτίμησης βέλτιστης συνάρτησης χρησιμότητας

w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{32}	w_{33}	σ_4^+	σ_4^-	σ_3^+	σ_3^-	σ_5^+	σ_5^-	σ_6^+	σ_6^-	σ_2^+	σ_2^-	σ_1^+	σ_1^-	σ_7^+	σ_7^-	σ_8^+	σ_8^-		[illegible]
	-.29	-.14		-.29	-.14	.24	.29		1	-1	-1	1													≥	0.01
	.71	.14		.71	.14	-.14	-.71				1	-1	-1	1											≥	0.01
	-.71	-.57		-.71	-.57	.57	.71						1	-1	-1	1									≥	0.01
.14	1	.57	.14	1	.57	-.57	-1	-.14							1	-1	-1	1							=	0
-.14	-1	-1	-.14	-1	-1	1	1	.14									1	-1	-1	1					≥	0.01
.57	1	1	.57	1	1	-1	-1	-.57											1	-1	-1	1			≥	0.01
.43			.43					-.43													1	-1	-1	1	≥	0.01
1	-1																								≥	0
	1	-1																							≥	0
			1	-1																					≥	0
				1	-1																				≥	0
						1	-1																		≥	0
							1	-1																	≥	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1																	=	1
									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		MIN

Πίνακας 4.3.4 : Γραμμικό πρόγραμμα εκτίμησης μεταβέλτιστων συναρτήσεων χρησιμότητας

w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{32}	w_{33}	σ_4^+	σ_4^-	σ_3^+	σ_3^-	σ_5^+	σ_5^-	σ_6^+	σ_6^-	σ_2^+	σ_2^-	σ_1^+	σ_1^-	σ_7^+	σ_7^-	σ_8^+	σ_8^-		R.H.S
	-.29	-.14		-.29	-.14	.24	.29		1	-1	-1	1													≥	0.01
	.71	.14		.71	.14	-.14	-.71				1	-1	-1	1											≥	0.01
	-.71	-.57		-.71	-.57	.57	.71						1	-1	-1	1									≥	0.01
.14	1	.57	.14	1	.57	-.57	-1	-.14							1	-1	-1	1							=	0
-.14	-1	-1	-.14	-1	-1	1	1	.14									1	-1	-1	1					≥	0.01
.57	1	1	.57	1	1	-1	-1	-.57											1	-1	-1	1			≥	0.01
.43			.43					-.43													1	-1	-1	1	≥	0.01
1	-1																								≥	0
	1	-1																							≥	0
			1	-1																					≥	0
				1	-1																				≥	0
						1	-1																		≥	0
							1	-1																	≥	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1																	=	1
									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	=	0
1	1	1																								MAX
			1	1	1																					MAX
						1	1	1																		MAX

max p3: $w_{11} = 0.024$, $w_{12} = 0.012$, $w_{13} = 0$

$w_{21} = 0.412$, $w_{22} = 0.156$, $w_{23} = 0$

$w_{31} = 0.383$, $w_{32} = 0.012$, $w_{33} = 0$

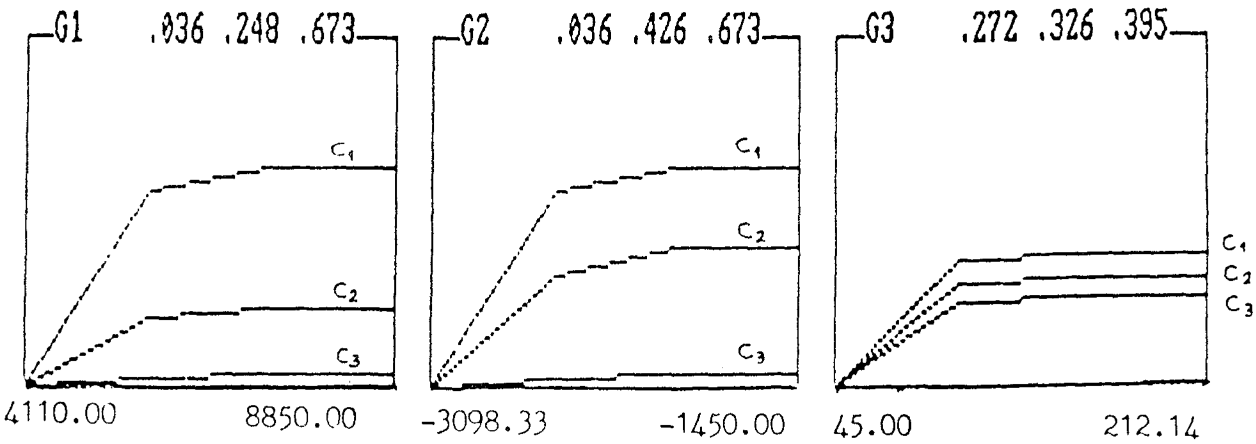
Για την σύνθεση των αποτελεσμάτων υπολογίζεται η μέση λύση των τριών προηγουμένων, που είναι:

$w_{11} = 0.217$, $w_{12} = 0.031$, $w_{13} = 0$

$w_{21} = 0.346$, $w_{22} = 0.079$, $w_{23} = 0$

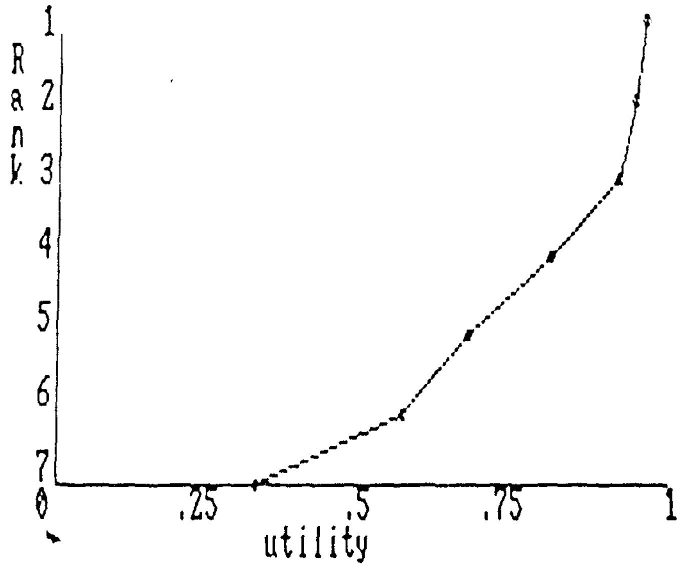
$w_{31} = 0.314$, $w_{32} = 0.012$, $w_{33} = 0$

Οι βέλτιστες συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας των κριτηρίων παριστάνονται γραφικά με ένα σύστημα τριών καμπύλων για κάθε κριτήριο (σχ. 3). Οι καμπύλες c_1 ατιστοιχούν στις λύσεις που μεγιστοποιούν τα βάρη των κριτηρίων, οι καμπύλες c_2 στη μέση λύση, ενώ οι καμπύλες c_3 αντιστοιχούν στο ελάχιστο βάρος των κριτηρίων και λαμβάνονται από τις ελάχιστες τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών w_{ij}.



Σχήμα 3: Συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας των τριών κριτηρίων

Οι εκτιμηθείσες συναρτήσεις χρησιμότητας αποκαθιστούν πλήρως την προτεινόμενη από τον αποφασίζοντα διάταξη (σχ. 4) και αυτό προκύπτει από τους δείκτες συμφωνίας του μοντέλου με τον αποφασίζοντα (τ-Kendall=1, F*=0).



SR	ALT	UTIL	NR	E(+)	E(-)
1	a4	.960	1	.000	.000
2	a3	.943	2	.000	.000
3	a5	.918	3	.000	.000
4	a6	.809	4	.000	.000
4	a2	.809	4	.000	.000
5	a1	.674	5	.000	.000
6	a7	.567	6	.000	.000
7	a8	.326	7	.000	.000

TAU=1.000   F(*)=0.000

Σχήμα 4: Καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης

Η επίτευξη πλήρους συμφωνίας μεταξύ του αποφασίζοντα και του μοντέλου χρησιμότητας επιτρέπει την αποδοχή του τελευταίου και την χρησιμοποίησή του για την ανάδειξη μίας νέας αποτελεσματικής λύσης μέγιστης χρησιμότητας.

Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση του κατά τμήματα γραμμικού προγράμματος του πίνακα 4.3.5. Η βέλτιστη λύση

Πίνακας 4.3.5 : Κατά τμήματα γραμμικό πρόγραμμα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας

x_1	x_2	x_3	x_4	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}	r_{31}	r_{32}	r_{33}	r_{34}		R.H.S
4	4	3	2													$\le$	730
6	7	5	3													$\le$	1125
3	4	2	2													$\le$	700
2	3	1	2													$\le$	500
1	1	1														$\le$	150
1																$\ge$	25
	1															$\ge$	30
		1														$\ge$	25
			1													$\ge$	20
3.6		6														$\le$	500
48	60	30	18													$\ge$	4110
16	19	12	9													$\le$	3098.33
		1	1													$\ge$	45
48	60	30	18	-4110	-5690	-7270	-8850									=	0
-16	-19	-12	-9					3098.33	2543.89	1999.45	1450					=	0
		1	1									-45	-100.71	-156.43	-212.14	=	0
				1	1	1	1									=	1
								1	1	1	1					=	1
												1	1	1	1	=	1
					0.217	0.248	0.248		0.346	0.425	0.425		0.314	0.326	0.326		MAX

του προγράμματος αυτού είναι:

$$\underline{x}^2 = (25, 30.95, 68.33, 32.38)$$

ενώ οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν σ'αυτή είναι: $g_1^2 = 5689.968$, $g_2^2 = -2099.513$, $g_3^2 = 100.74$ και αντιστοιχούν σε ποσοστά προσέγγισης των περισσότερο επιθυμητών τιμών 33.3%, 60.6% και 33.3% αντίστοιχα.

Από τις νέες τιμές των κριτηρίων και από εκείνες που είχαν προκύψει στο προκαταρκτικό στάδιο, διαπιστώνεται αύξηση κατά 123.9% της παραγωγής των προιόντων Γ και Ο και εξοικονόμηση εραγασίας κατά 18.9% σε βάρος του κέρδους, το οποίο μειώνεται κατά 26.2%.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2

Για τις νέες τιμές των κριτηρίων ο αποφασίζων εκτιμά ότι αυτή του g_2 είναι πολύ ικανοποιητική και ότι μπορεί να την μειώσει προκειμένου να βελτιωθούν οι τιμές των g_1 και g_3. Ετσι οι λιγότερο επιθυμητές τιμές των κριτηρίων γίνονται

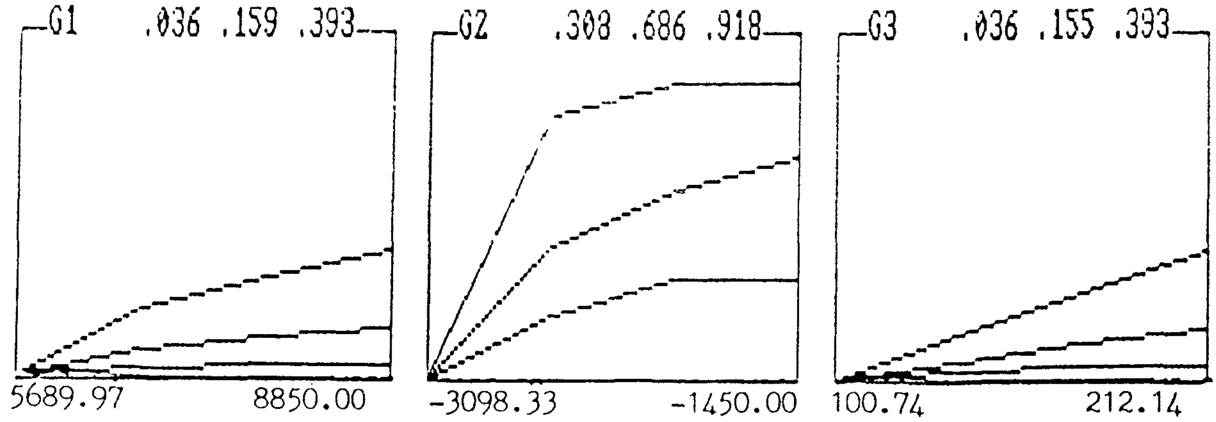
$$\ell_1^2 = g_1^2 = 5689.968, \quad \ell_2^2 = \ell_2^1 = -3098.333, \quad \ell_3^2 = g_3^2 = 100.74$$

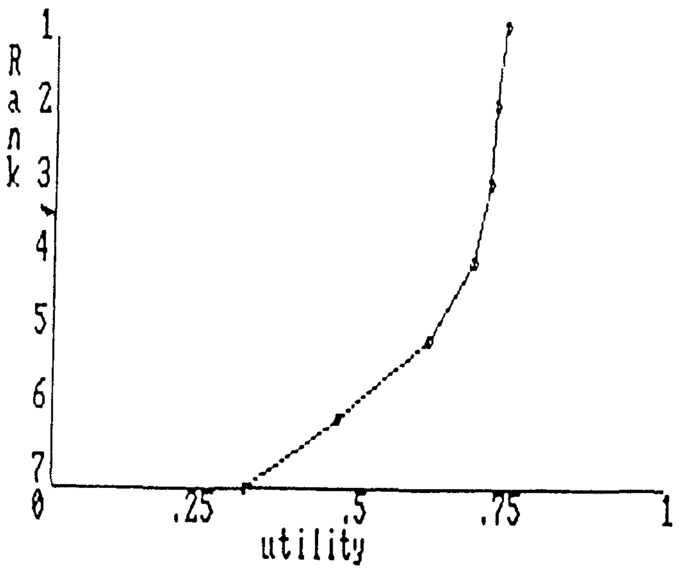
Με βάση τις τιμές αυτές δημιουργούνται οκτώ νέα σενάρια, τα οποία ο αποφασίζων κατατάσσει κατά σειρά προτίμησης (πίνακας 4.3.6).

Πίνακας 4.3.8: Εναλλακτικά σενάρια και ολική προτίμηση δεύτερης επανάληψης.

	Τιμές κριτηρίων			
Σενάριο	g_1	g_2	g_3	Τάξη
a_1	5689.97	-1450.00	100.71	4
a_2	6141.40	-1685.48	116.63	3
a_3	6592.84	-1920.95	132.55	1
a_4	7044.27	-2156.43	148.47	2
a_5	7495.70	-2391.91	164.39	4
a_6	7947.13	-2627.38	180.31	5
a_7	8398.57	-2862.86	196.22	6
a_8	8850.00	-3098.33	212.14	7

Με βάση τα σενάρια του πίνακα 4.3.6 και την ολική προτίμηση του αποφασίζοντα, εκτιμώνται νέες συναρτήσεις χρησιμότητας, οι οποίες αποκαθιστούν πλήρως την προτεινόμενη από τον αποφασίζοντα διάταξη (σχ. 5).





SR	ALT	UTIL	NR	E(+)	E(-)
1	a3	.736	1	.000	.000
2	a4	.721	2	.000	.000
3	a2	.711	3	.000	.000
4	a1	.686	4	.000	.000
4	a5	.686	4	.000	.000
5	a6	.613	5	.000	.000
6	a7	.463	6	.000	.000
7	a8	.314	7	.000	.000

TAU=1.000 F(*)=0.000

Σχήμα 5: Συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας και καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης

Η νέα λύση μέγιστης χρησιμότητας, που προκύπτει από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης μέσης χρησιμότητας στον χώρο των αποφάσεων, είναι:

$$\underline{x}^3 = (25,\ 30,\ 68.33,\ 84.32)$$

Οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στη λύση αυτή είναι:

$$g_1^3 = 6567.768 \ , \quad g_2^3 = -2548.885 \ , \quad g_3^3 = 152.654$$

Οι νέες αυτές τιμές προσεγγίζουν τις περισσότερο επιθυμητές κατά 51.9% , 33.3% και 64.4% αντίστοιχα, ενώ σε σχέση με τις προηγούμενες παρατηρείται αύξηση του κέρδους και της παραγωγής των προιόντων Γ και Ο κατά 15.4% και 51.5% αντίστοιχα, σε βάρος μιας αύξησης της εργασίας κατά 21.4%.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3

Ο αποφασίζων, αξιολογώντας τις νέες τιμές των κριτηρίων, διαπιστώνει ότι πρέπει να βελτιωθεί η τιμή του g_1 χωρίς να μειωθεί η τιμή του g_2. Για να γίνει αυτό αποφασίζει να μειώσει την τιμή του g_3, την οποία κρίνει πολύ ικανοποιητική.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ως λιγότερο επιθυμητές για τα κριτήρια λαμβάνονται οι ακόλουθες:

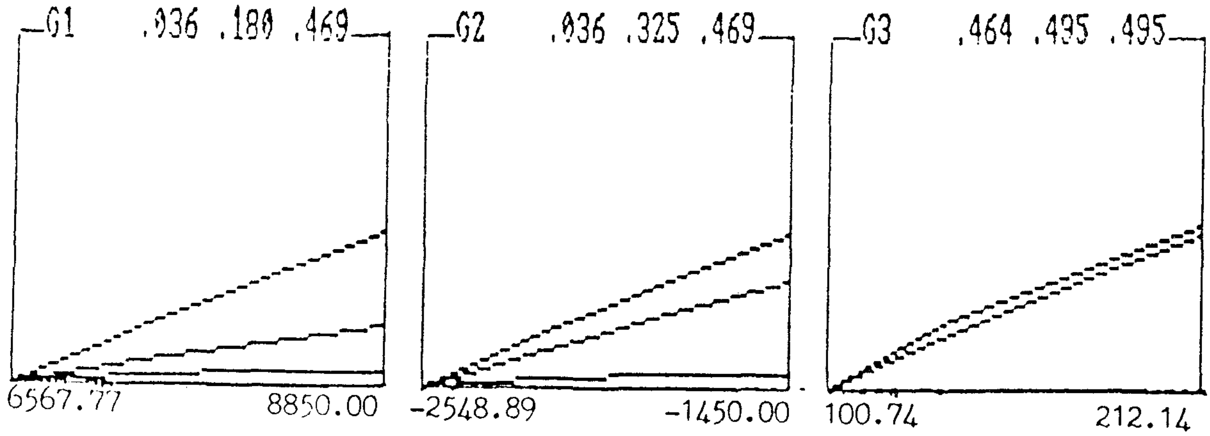
$$\ell_1^3 = g_1^3 = 6567.768 \ , \quad \ell_2^3 = g_2^3 = -2548.885 \ , \quad \ell_3^3 = \ell_3^2 = 100.74$$

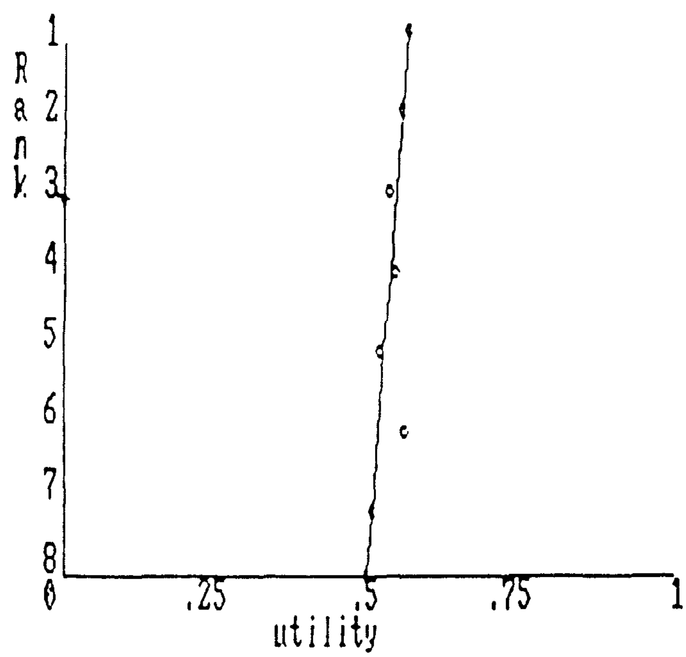
Στη συνέχεια ο αποφασίζων δηλώνει την ολική του προτίμηση σε οκτώ νέα σενάρια (πίνακας 4.3.7).

Πίνακας 4.3.7: Εναλλακτικά σενάρια και ολική προτίμηση τρίτης επανάληψης.

	Τιμές κριτηρίων			
Σενάριο	g_1	g_2	g_3	Τάξη
a_1	6567.77	-2548.89	212.14	8
a_2	6893.80	-2391.90	196.22	5
a_3	7219.83	-2234.92	180.31	4
a_4	7545.87	-2077.93	164.39	2
a_5	7871.90	-1920.95	148.47	1
a_6	8197.93	-1763.97	132.55	6
a_7	8253.97	-1606.98	116.63	3
a_8	8850.00	-1450.00	100.74	7

Με βάση το ανωτέρω διατεταγμένο σύνολο των εναλλακτικών σεναρίων εκτιμώνται νέες συναρτήσεις χρησιμότητας, οι οποίες δεν συμφωνούν απόλυτα με την προτεινόμενη από τον αποφασίζοντα διάταξη (τ-Kendall=0.643, F*=0.073) (σχ. 6).





SR	ALT	UTIL	NR	E(+)	E(-)
1	a5	.563	1	.002	.000
2	a4	.555	3	.000	.000
3	a7	.532	5	.013	.000
4	a3	.542	4	.000	.007
5	a2	.518	6	.007	.000
6	a6	.559	2	.000	.044
7	a8	.505	7	:000	.000
8	a1	.495	8	.000	.000

TAU=0.643 F(*)=0.073

Σχήμα 6: Συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας και καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης

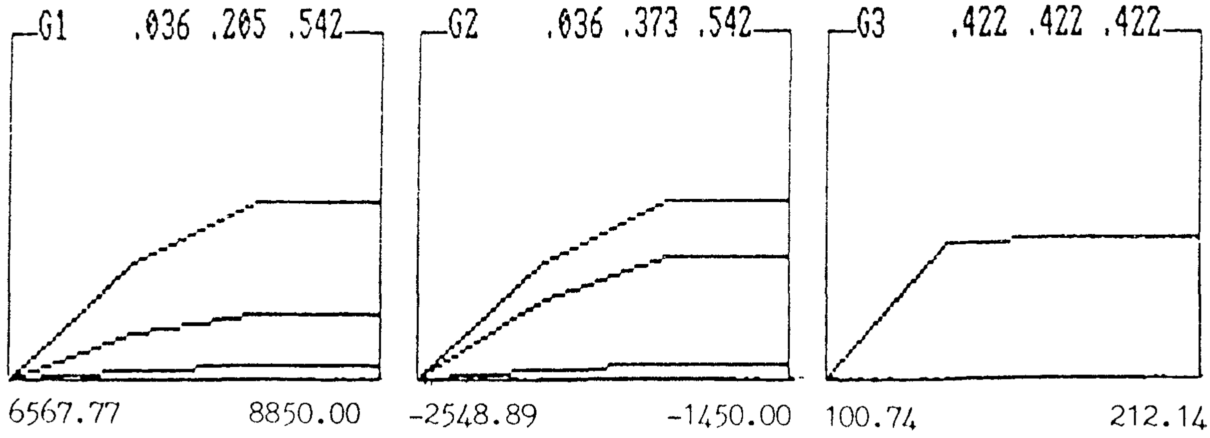
Πραγματικά, όπως προκύπτει από την καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης και την ολική χρησιμότητα κάθε απόφασης, ο αποφασίζων φαίνεται να έχει υποεκτιμήσει το σενάριο a_6, το οποίο κατατάσσει έκτο στη διάταξη, ενώ το το μοντέλο το τοποθετεί στη δεύτερη θέση. Επίσης, το μοντέλο τοποθετεί το σενάριο a_7 στην πέμπτη θέση της διάταξης, σε αντίθεση με τον αποφασίζοντα ο οποίος το κατατάσσει τρίτο στις προτιμήσεις του.

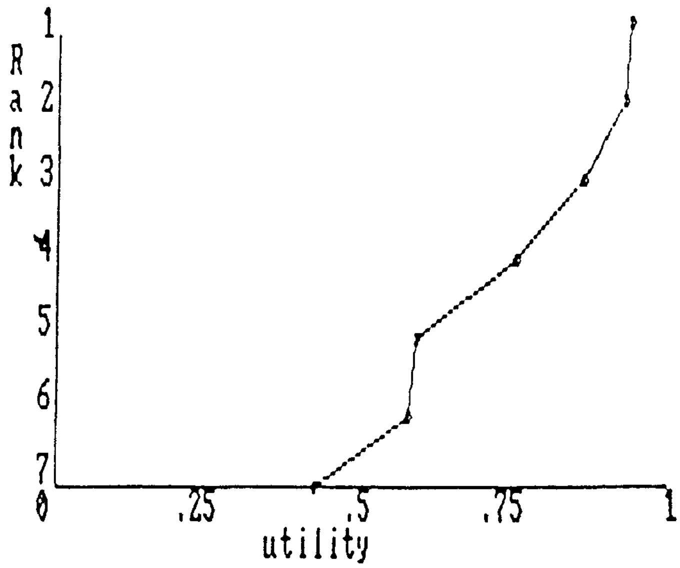
Ο αποφασίζων, στηριζόμενος στις υποδείξεις του μοντέλου, δέχεται να τροποποιήσει εν μέρει την αρχική του διάταξη και προτείνει την ακόλουθη:

$(1:a_5)$, $(2:a_6)$, $(3:a_4)$, $(4:a_7)$, $(4:a_3)$, $(5:a_2)$, $(6:a_8)$, $(7:a_1)$.

Με βάση τη νέα διάταξη υπολογίζονται νέες συναρτήσεις χρησιμότητας, οι οποίες αυτή τη φορά αποκαθιστούν πλήρη συμφωνία μεταξύ του μοντέλου και του αποφασίζοντα (σχ. 7).

Ο αποφασίζων, επιδιώκοντας να αυξήσει όσο το δυνατό περισσότερο το κέρδος, επιλέγει ως τελική συνάρτηση χρησιμότητας εκείνη που αντιστοιχεί στο μέγιστο βάρος για το κριτήριο g_1 και στα μέσα βάρη για τα κριτήρια g_2 και g_3.





SR	ALT	UTIL	NR	E(+)	E(-)
1	a5	.937	1	.000	.000
2	a6	.929	2	.000	.003
3	a4	.860	3	.000	.000
4	a7	.754	4	.000	.000
4	a3	.754	4	.000	.000
5	a2	.588	5	.000	.000
6	a8	.578	6	.000	.000
7	a1	.422	7	.000	.000

TAU=1.000 F(*)=0.003

Σχήμα 7: Συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας και καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης

Η νέα λύση που προκύπτει από την μεγιστοποίηση αυτής της συνάρτησης είναι:

$$\underline{x}^{4} = (25,\ 37.01,\ 68.33,\ 69.52)$$

Οι τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν στην λύση αυτή είναι: g_1^4 = 6721.962, g_2^4 = -2548.883, g_3^4 = 137.857 και αντιστοιχούν σε ποσοστά προσέγγισης των περισσότερο επιθυμητών τιμών 55.1% , 33.3% και 55.6%.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 4

Ο αποφασίζων, αξιολογόντας τις νέες τιμές των κριτηρίων, δέχεται αυτές ως τελικές και τερματίζει την διαδικασία.

Με τον τρόπο αυτό αποδέχεται ως πρόγραμμα παραγωγής του επόμενου μηνός το ακόλουθο:

Προιόν Α: 25

Προιόν Β: 37.01

Προιόν Γ: 68.33

Προιόν Δ: 69.52

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ADELAIS

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται το σύστημα ADELAIS (Aide à la DEcision pour systèmes Linéaires multicritères par AIde à la Structuration des préférences), που προκύπτει από την μέθοδο και τον αλγόριθμό της. Το ADELAIS είναι ένα αλληλεπιδραστικό σύστημα υποστήριξης αποφάσεων για γραμμικά συστήματα με πολλαπλά κριτήρια, που έχει για κύριο κορμό του την προοδευτική διάρθρωση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα μέσα από μία διαδικασία δοκιμής-λάθους.

5.1 ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ο κεντρικός στόχος του συστήματος είναι η δημιουργία ενός δυναμικού πλαίσιου που συνθέτει αποτελεσματικά τις δύο ξεχωριστές θεωρήσεις-προσεγγίσεις των αποφάσεων δηλαδή την ορθολογική και την διεξοδική.

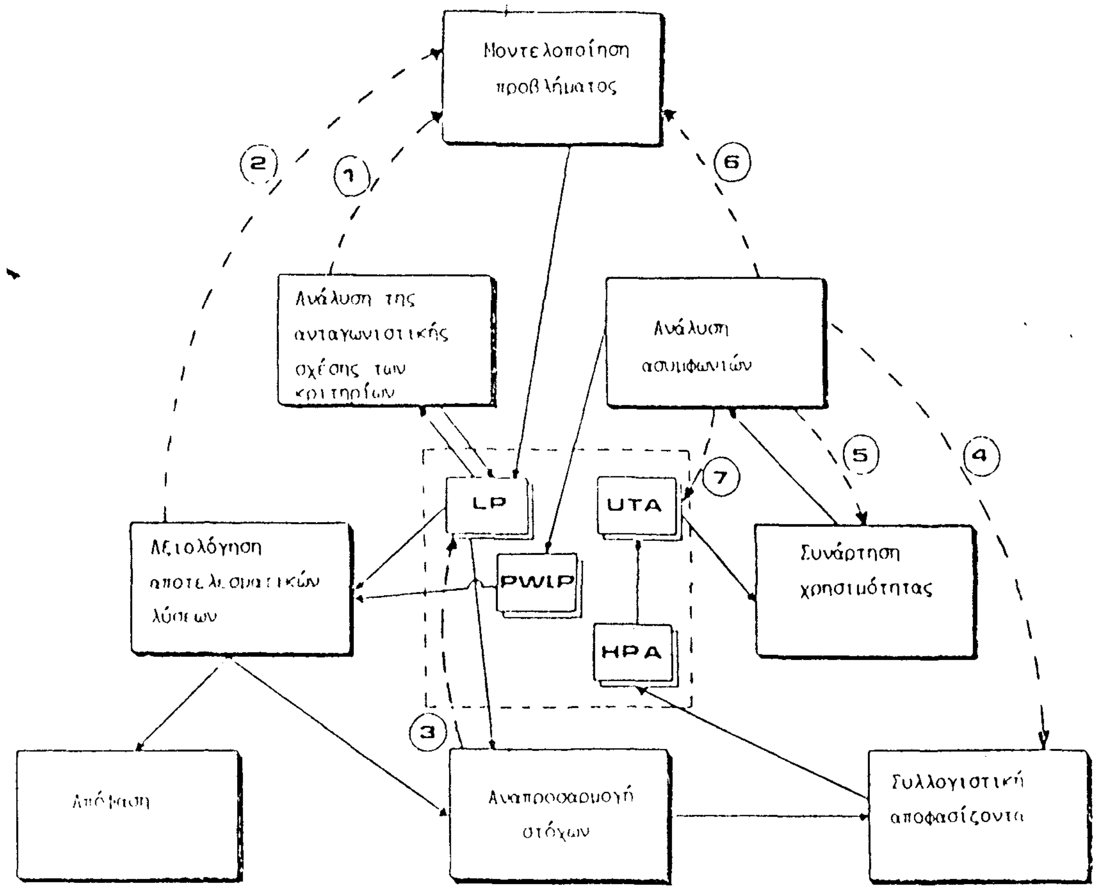
Οι επιμέρους στόχοι του συστήματος αφορούν αφενός την αρχιτεκτονική του:

- ανεξαρτησία δεδομένων
- ασφάλεια δεδομένων
- ανεξαρτησία μοντέλων
- δυνατότητα επέκτασης

αφετέρου την γενική φιλοσοφία και λειτουργία του:

- παροχή γνώσης για το πρόβλημα της απόφασης
- δυνατότητα επαναπροσδιορισμού του προβλήματος
- ευρεία συμμετοχή του αποφασίζοντα σε όλα τα στάδια της απόφασης
- απλή και κατανοητή πληροφορία από και προς τον χρήστη
- απρόσκοπτη λειτουργία μετά από εσφαλμένες εκτιμήσεις με δυνατότητες επανόρθωσης
- ανάδειξη αποτελεσματικών αποφάσεων
- αξιοπιστία και ευκολία στη χρήση.

Στο κατωτέρω σχήμα απεικονίζονται τα κύρια στοιχεία σύνθεσης του συστήματος ADELAIS (μοντέλα, θεμελιώδεις λειτουργίες, αναδράσεις) καθώς και ο τρόπος σύνδεσης τους.



Σχήμα 8: Σύστημα ADELAIS

5.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα ADELAIS αναλύεται στα ακόλουθα επτά θεμελιώδη υποσυστήματα-λειτουγίες.

- **Μοντελοποίηση του προβλήματος**

Η πρώτη λειτουργία του συστήματος συνίσταται στην ανάλυση του προβλήματος απόφασης και την διαμόρφωσή του σε πρόβλημα πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού. Περιλαμβάνει αφενός τον καθορισμό του αντικειμένου της απόφασης, αφετέρου την καθιέρωση σκοπών και την επιλογή των κριτηρίων βάσει των οποίων θα αξιολογούνται οι αποφάσεις.

Το αντικείμενο της απόφασης καθορίζεται με βάση τις μεταβλητές απόφασης. Αυτές δομούνται και καθορίζονται μετά από συνεχείς αναδρομές προς το αντικείμενο της απόφασης, έτσι ώστε τελικά εκείνο που εννοείται να προσεγγίζεται σημασιολογικά από αυτό που ορίζεται.
Οι υφιστάμενοι όμως περιορισμοί (τεχνολογία - πόροι - περιβάλλον) στο πεδίο ορισμού των μεταβλητών απόφασης έχουν ως αποτέλεσμα το αντικείμενο της απόφασης να ερμηνεύεται τελικά ως ένας οριοθετημένος χώρος εναλλακτικών αποφάσεων η υπέρβαση του οποίου προκαλεί την παραβίαση των περιοριστικών κανόνων.

Οι σκοποί τίθενται και αυτοί στα πλαίσια του τρίπτυχου τεχνολογία-πόροι-περιβάλλον και καθορίζονται σύμφωνα με τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων ή/και βάσει γενικότερων επιλογών (πολιτικών, οικονομικών, κοινωνικων...).

Τα κριτήρια είναι συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης, που περιγράφουν τους σκοπούς και εκφράζουν το μέτρο στο οποίο αυτοί ικανοποιούνται.

Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα απόφασης, τα κριτήρια πρέπει να συνιστούν μία συνεπή οικογένεια, ώστε να περιγράφουν πλήρως του σκοπούς, να συνδέονται ορθολογικά με το αντικείμενο της απόφασης και να μη αλληλοκαλύπτονται.

- **Ανάλυση της ανταγωνιστικής σχέσης των κριτηρίων**

Στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό τα κριτήρια εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης, με κοινό πεδίο ορισμού τον χώρο των εναλλακτικών αποφάσεων που οριοθετείται από τους περιορισμούς του προβλήματος. Η φύση όμως των προβλημάτων καθιστά γενικά ανέφικτη την ταυτόχρονη βελτιστοποίηση των κριτηρίων. Αυτό οφείλεται συνήθως στην αντίθεση των σκοπών που αυτά εκφράζουν.

Η δεύτερη λειτουργία του συστήματος συνίσταται ακριβώς στην ανάλυση της ανταγωνιστικής σχέσης των κριτηρίων και πραγματοποιειται με την βοήθεια του πίνακα πληρωμών του προβλήματος. Ο πίνακας αυτός απεικονίζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές των κριτηρίων για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών απόφασης και αποτελεί πηγή σημαντικής πληροφορίας για την μετέπειτα εξέλιξη της διαδικασίας για την λήψη της τελικής απόφασης.

- Αξιολόγηση αποτελεσματικών λύσεων

Η τρίτη λειτουργία του συστήματος παρέχει το πλαίσιο απόφασης που επιτρέπει στον αποφασίζοντα να εξωτερικεύει τις προτιμήσεις του για τις τιμές των κριτηρίων, όπως αυτές διαμορφώνονται από τις λύσεις που αναδεικνύει σταδιακά το σύστημα.

Ο αποφασίζων αξιολογεί τις τιμές των κριτηρίων που έχουν επιτευχθεί, σύμφωνα με τα χαμηλότερα επίπεδα ικανοποίησης του και βάσει της πληροφορίας που του παρέχει ο πίνακας πληρωμών.

Η διαδικασία της αξιολόγησης βασίζεται στον διάλογο μεταξύ συστήματος και αποφασίζοντα και καθορίζει την πορεία της όλης διαδικασίας. Ετσι, αν οι τιμές των κριτηρίων κριθούν ικανοποιητικές, λαμβάνεται η τελική απόφαση και αναλύεται το πρόγραμμα που θα πρέπει να ακολουθηθεί για να πραγματοποιηθούν τα οφέλη που προέκυψαν.

- Αναπροσαρμογή στόχων

Η τέταρτη λειτουργία του συστήματος συνίσταται στην διαμόρφωση νέων στόχων όσο αφορά τα επίπεδα των τιμών των κριτηρίων και βασίζεται στην πληροφορία που προκύπτει από την διαδικασία αξιολόγησης των αποτελεσματικών λύσεων.

Η αναπροσαρμογή των στόχων επιφέρει τον περιορισμό του χώρου των αποφάσεων με εξαίρεση εκείνων των αποφάσεων που αντιστοιχούν σε μη ικανοποιητικές τιμές των κριτηρίων.

Ομως ο περιορισμός αυτός δεν είναι οριστικός λόγω των διαφόρων τύπων αναδράσεων[1] που παρέχει το σύστημα.

Στα πλαίσια των νέων στόχων, δημιουργείται ένας περιορισμένος αριθμός υποθετικών αποφάσεων οι οποίες αποτελούν στη συνέχεια την βάση για την σύληψη της συλλογιστικής του αποφασίζοντα.

- **Συλλογιστική του αποφασίζοντα**

Η πέμπτη λειτουργία του συστήματος παρέχει ένα πλαίσιο απόφασης που επιτρέπει στον αποφασίζοντα να εξωτερικεύει έμμεσα την πολιτική του σύμφωνα με το "μοντέλο" της ολικής του προτίμησης.

Για τον σκοπό αυτό, ο αποφασίζων κατατάσσει κατά σειρά προτίμησης τις υποθετικές αποφάσεις του συνόλου αναφοράς ή ενδεχομένως παλαιότερες πραγματικές αποφάσεις του ίδιου προβλήματος κατά το παρελθόν.

Συγκεκριμένα ο αποφασίζων εξετάζει τα οφέλη και τις ζημίες που προκύπτουν από τις επιλογές του, βοηθούμενος έτσι στην πιστότερη εξωτερίκευση της συλλογιστικής του.

Η διαδικασία αυτή αναφέρεται στον τρόπο σκέψης του αποφασίζοντα και στην σύνθεση της αναφορικής απόφασης. Η οποία λαμβάνει τελικά την μορφή μιας προδιάταξης στο σύνολο των υποθετικών αποφάσεων.

- **Συνάρτηση χρησιμότητας**

Η συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα αποτελεί το μοντέλο της ολικής του προτίμησης, το οποίο πηγάζει από μία

---

1) Βλ. σελ. 155

διαδικασία προσέγγισης της συλλογιστικής του από το σύστημα με αναλυτικά μέσα.

Η έκτη διαδικασία του συστήματος χρησιμοποιεί την μέθοδο μονότονης παλινδρόμησης UTA, η οποία με βάση την αναφορική απόφαση εκτιμά ένα σύστημα συναρτήσεων χρησιμότητας αθροιστικού τύπου.

Οι συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας εκφράζουν το βάρος με το οποίο κάθε κριτήριο συμμετέχει στην διαμόρφωση της ολικής χρησιμότητας. Ο δε βαθμός στον οποίο αυτή αποκαθιστά την αναφορική απόφαση εκφράζει τον βαθμό προσέγγισης της συλλογιστικής του αποφασίζοντα απο το αναλυτικό μοντέλο ολικής προτίμησης.

Η ανάλυση ευστάθειας του μοντέλου ολικής προτίμησης οδηγεί συχνά στην διαπίστωση ότι οι συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας και κατά συνέπεια τα βάρη των κριτηρίων μπορούν να μεταβάλλονται μέσα σε ορισμένα όρια, χωρίς να αλλοιώνεται ο βαθμός συσχέτισης του με την αναφορική απόφαση. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για τον αποφασίζοντα δεδομένου ότι του παρέχεται η δυνατότητα να επιλέγει συναρτήσεις μερικής χρησιμότητας χωρίς να ανατρέπει τους δείκτες συμφωνίας τους με το μοντέλο.

- **Ανάλυση ασυμφωνιών**

Η έβδομη λειτουργία του συστήματος συνίσταται αφενός στην γραφική παράσταση του εκτιμηθέντος μοντέλου ολικής προτίμησης, αφετέρου στον υπολογισμό και την παρουσίαση (αριθμητική και γραφική) των δεικτών συμφωνίας του με την αναφορική απόφαση.

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων χρησιμότητας[1] που περιλαμβάνει τις καμπύλες μερικής χρησιμότητας των κριτηρίων, βοηθά στην σαφή αντίληψη του ρυθμού με τον οποίο αυξάνεται η χρησιμότητα ως προς κάθε κριτήριο (από την λιγότερο έως την περισσότερο επιθυμητή τιμή του) καθώς και του βάρους με το οποίο κάθε ένα κριτήριο συμμετέχει στην διαμόρφωση της ολικής προτίμησης.

Εξάλλου, η ταυτόχρονη παρουσίαση όλων των μερικών χρησιμοτήτων (που προκύπτουν από την ανάλυση ευστάθειας του μοντέλου ολικής προτίμησης) δίνει μία σαφή εικόνα του διαστήματος, στο οποίο μπορούν να μεταβάλονται τα βάρη των κριτηρίων χωρίς να παραβιάζονται οι δείκτες συμφωνίας. Το εύρος των διαστημάτων αυτών δίνει επίσης το πόσο σημαντικό θεωρεί ο αποφασίζων κάθε κριτήριο, όταν εξωτερικεύει τις προτιμήσεις του.

Η συμφωνία του μοντέλου ολικής προτίμησης με την αναφορική απόφαση ελέγχεται με την τιμή του ολικού σφάλματος αποκλίσεων και με το τέστ τ-Kendall . Οι δείκτες αυτοί εκφράζουν τον βαθμό στον οποίο η μέθοδος παλινδρόμησης έχει κατορθώσει να συλλάβει την συλλογιστική του αποφασίζοντα και να την αναπαραστήσει με την συνάρτηση χρησιμότητας.

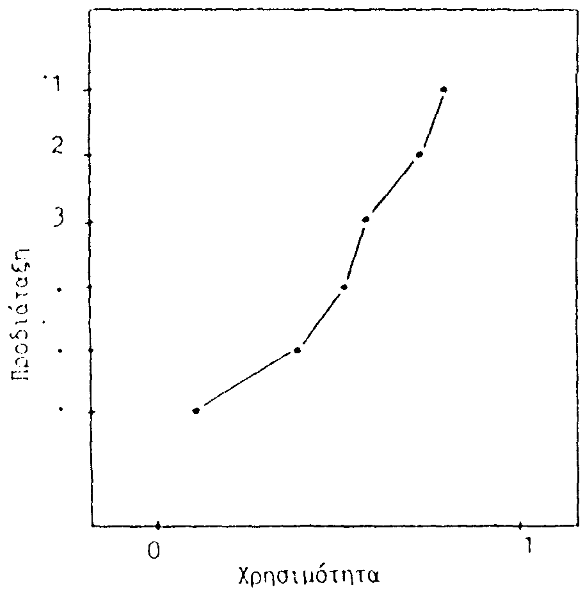
Το ολικό σφάλμα υπολογίζεται ως άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων υποεκτίμησης και υπερεκτίμησης των αποφάσεων του

---

1) Βλ. σελ. 131

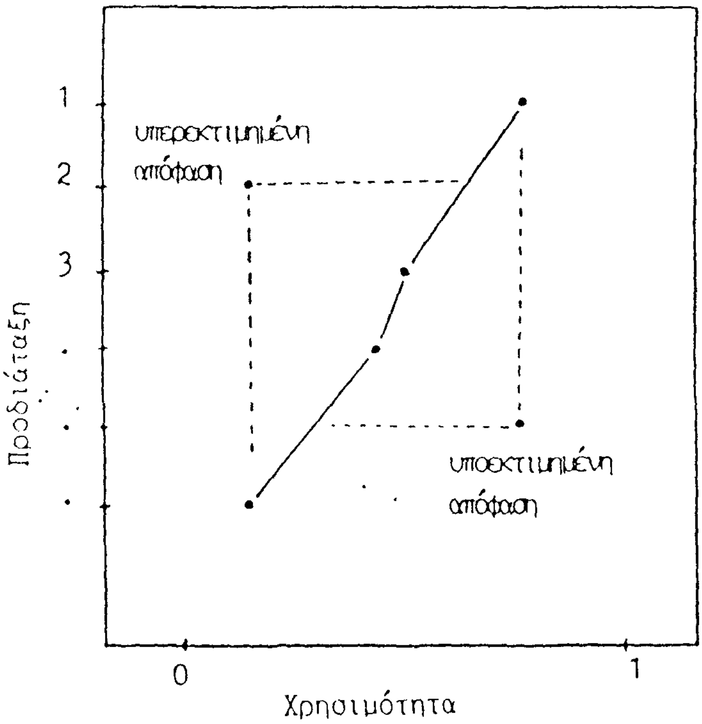
συνόλου αναφοράς. Τα σφάλματα αυτά εκφράζουν την χρησιμότητα που θα πρέπει να αφαιρεθεί ή να προστεθεί αντίστοιχα στην ολική χρησιμότητα των αποφάσεων, προκειμένου αυτές να επανακτήσουν την τάξη τους στις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

Το είδος και το μέγεθος αυτών των σφαλμάτων καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο διατάσσονται οι αποφάσεις του συνόλου αναφοράς από το μοντέλο ολικής προτίμησης. Ετσι, όταν η αρχική διάταξη και εκείνη που υπαγορεύεται από το μοντέλο ταυτίζονται (τ=1), όλες οι αποφάσεις του συνόλου αναφοράς βρίσκονται πάνω στην μονότονη καμπύλη παλινδρόμησης (σχ.9).



Σχήμα 9: Πλήρης ανασύσταση της υποκειμενικής διάταξης

Οι μεταξύ των δύο διατάξεων ασυμφωνίες παριστάνονται με ένα διάγραμμα, στο οποίο εμφανίζονται ποιές αποφάσεις αποκλίνουν, δεξιά ή αριστερά, από την μονότονη καμπύλη παλινδρόμησης (σχ.10).



Σχήμα 10: Εμφάνιση ασυμφωνιών

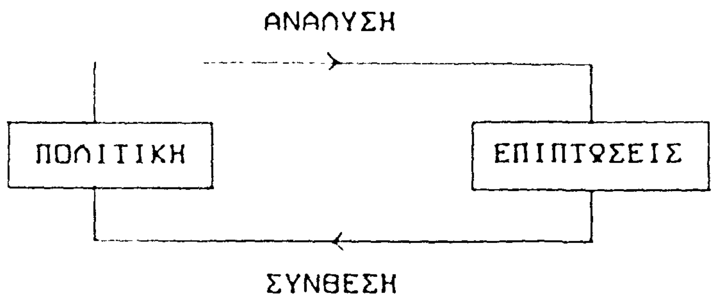
Στην πράξη, η επίτευξη πλήρους συμφωνίας μεταξύ μοντέλου και αποφασίζοντα απαιτεί αρκετές δοκιμές, το πλήθος των οποίων εξαρτάται από τον αριθμό των αποφάσεων στο σύνολο αναφοράς αλλά και από την συνέπεια του αποφασίζοντα κατά την εκδήλωση των προτιμήσεών του.

Ετσι, μία συνάρτηση χρησιμότητας γίνεται αποδεκτή, ως αντιπροσωπευτική των προτιμήσεων του αποφασίζοντα, όταν ο βαθμός συμφωνίας της υποκειμενικής διάταξης και εκείνης που υπαγορεύεται από το μοντέλο κριθεί ικανοποιητική με βάση την τιμή του σφάλματος και το τ-Kendall.

Η προσέγγιση μίας τέτοιας συνάρτησης χρησιμότητας πραγματοποιείται με τη βοήθεια διαφόρων αναδράσεων που αναλύονται στη επόμενη παράγραφο.

5.3 ΟΙ ΑΝΑΔΡΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα ADELAIS, ως μία διαδικασία παροχής γνώσης για το πρόβλημα της απόφασης που αναλύει, αποσκοπεί στην προοδευτική δόμηση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα.
Ετσι το σύστημα παρέχει, σε όλα τα στάδια της απόφασης, επτά τύπους αναδράσεων που επιτρέπουν στον αποφασίζοντα να διαμορφώνει την πολιτική του (στάδιο σύνθεσης) σύμφωνα με τα αποτελέσματα της και τις επιπτώσεις τους (στάδιο ανάλυσης).



- **Ανάδραση τύπου 1**

Ο πίνακας πληρωμών του προβλήματος (ο οποίος δίνει μία ιδέα για το πως μεταβάλονται οι τιμές των κριτηρίων) ενδέχεται να πληροφορήσει τον αποφασίζοντα ότι, για κάποιο κριτήριο και σύμφωνα με την κλίμακα μέτρησής του η διαφορά μεταξύ της περισσότερο και της λιγότερο επιθυμητής τιμής δεν είναι σημαντική.
Ενα τέτοιο κριτήριο μπορεί να χαρακτηρισθεί ως μη σημαντικό

για την αξιολόγηση των εναλλακτικών αποφάσεων, δεδομένου ότι για οποιαδήποτε απόφαση οι τιμές του δεν μεταβάλλονται σημαντικά.

Στην περίπτωση αυτή ο αποφασίζων έχει τη δυνατότητα να αναθεωρήσει το μοντέλο του προβλήματος διαγράφοντας τα κριτήρια που συμπεριφέρονται με αυτό τον τρόπο.

Οταν οι συνθήκες το υπαγορεύουν, η διαγραφή ενός κριτηρίου από το μοντέλο του προβλήματος, παρόλου ότι συνεπάγεται ένα νέο ξεκίνημα της όλης διαδικασίας, έχει ως αποτέλεσμα τόσο την συντόμευση των υπολογιστικών διαδικασιών όσο και την διευκόλυνση του αποφασίζοντα στο έργο του για την λήψη της τελικής απόφασης.

- **Ανάδραση τύπου 2**

Ο αποφασίζων ενδέχεται, κατά την αξιολόγηση μίας αποτελεσματικής λύσης, να κρίνει πως καμμία από τις τιμές των κριτηρίων, που αντιστοιχούν στη λύση αυτή, δεν είναι ικανοποιητική. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βελτιώσει ταυτόχρονα τις τιμές όλων των κριτηρίων, πράγμα το οποίο δεν μπορεί να γίνει χωρίς να παραβιαστεί ο χώρος των αποφάσεων. Ετσι μπορεί να ανατρέξει στο μοντέλο του προβλήματος και να διευρύνει τον χώρο των αποφάσεων στο βαθμό που η τεχνολογία και οι πόροι το επιτρέπουν.

Αυτό όμως συνεπάγεται μία μεταβολή στα δεύτερα μέλη των περιορισμών, η οποία θα μπορούσε να συνεισφέρει στην βελτίωση των τιμών των κριτηρίων κατά τρόπο που περιγράφεται από τη λύση του δυικού προβλήματος. Μία τέτοια επέμβαση στο μοντέλο του προβλήματος θα πρέπει να συνοδεύεται από μία εμπεριστατωμένη ανάλυση και μελέτη σχετικά με τα οφέλη και τις ζημίες που αυτή συνεπάγεται.

- **Ανάδραση τύπου 3**

Η ανάδραση αυτή αφορά την επανένταξη στον κύκλο μελέτης ενός τμήματος του χώρου των αποφάσεων που είχε εξαιρεθεί σε προηγούμενες επαναλήψεις. Πραγματικά, στο στάδιο της αναπροσαρμογής των στόχων, το σύστημα περιορίζει τον χώρο των αποφάσεων σύμφωνα με τον τρόπο που ο αποφασίζων αξιολογεί τις αποτελεσματικές λύσεις. Ετσι, όταν στο στάδιο της αξιολόγησης ο αποφασίζων θεωρήσει ως μη ικανοποιητικές τις τιμές κάποιων κριτηρίων, το σύστημα λαμβάνει αυτόματα τις τιμές αυτές ως τις λιγότερο επιθυμητές για τα αντίστοιχα κριτήρια. Στη συνέχεια, με βάση τα νέα κατώτερα επίπεδα ικανοποίησης, το σύστημα εξαιρεί κάθε λύση που δίνει στα κριτήρια τιμές κάτω από τα επίπεδα αυτά.

Η διαδικασία αυτή φαίνεται εν πρώτοις να βοηθάει στην σύγκλιση προς την τελική απόφαση. Επειδή όμως οι εκτιμήσεις του αποφασίζοντα, κατά την αξιολόγηση των αποτελεσματικών λύσεων, ενδέχεται κάποτε να είναι εσφαλμένες, μία τέτοια σύγκλιση θα μπορούσε να εξελιχθεί σε αναγκαστική.

Για να μη συμβεί αυτό, το σύστημα παρέχει την δυνατότητα στον αποφασίζοντα να διευρύνει τοπικά το υπό μελέτη τμήμα του χώρου των αποφάσεων ώστε να μπορεί να επανεξετάσει ορισμένες αποφάσεις που είχαν εξαιρεθεί σε προηγούμενα στάδια.

Η ανάγκη για την χρησιμοποίηση της ανάδρασης αυτού του τύπου εμφανίζεται όταν ο αποφασίζων συνειδητοποιήσει ότι τα χαμηλότερα επίπεδα ικανοποίησης των κριτηρίων, έτσι όπως έχουν διαμορφωθεί, περιορίζουν τον χώρο των αποφάσεων σε βαθμό που κάποια κριτήρια να μη μπορούν να πάρουν ικανοποιητικές τιμές. Τότε, το σύστημα υποδεικνύει στον αποφασίζοντα τον τρόπο με το οποίο θα μπορούσε να πετύχει καλύτερες τιμές για τα κριτήρια αυτά.

- **Ανάδραση τύπου 4**

Κατά την ανάλυση των ασυμφωνιών που παρουσιάζονται μεταξύ του μοντέλου και του αποφασίζοντα, ο δεύτερος, συνειδητοποιώντας ότι δεν έχει αξιολογήσει σωστά τις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς, ενδέχεται να αποδεχθεί μερικά ή ολικά τις υποδείξεις του μοντέλου. Στην περίπτωση αυτή ο αποφασίζων μπορεί, σύμφωνα με τις υποδείξεις του μοντέλου, να τροποποιήσει την συλλογιστική του, επαναδιατάσσοντας τις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς. Η ανάδραση αυτή οδηγεί σε μία εκ νέου εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας, προκειμένου το νέο μοντέλο ολικής προτίμησης να αντιπροσωπεύει τη νέα πλέον συλλογιστική του αποφασίζοντα.

- **Ανάδραση τύπου 5**

Η ανάδραση αυτή αφορά την επέμβαση του αποφασίζοντα στο ίδιο το μοντέλο ολικής προτίμησης. Τούτο γίνεται όταν ο αποφασίζων, καταλογίζοντας στο μοντέλο τις ασυμφωνίες που έχουν προκύψει, αρνείται να αποδεχθεί τις υποδείξεις του και εμμένει στην αρχική του διάταξη.
Τότε γίνεται προσπάθεια για την διατήρηση των αρχικών τάξεων στην αναφορική απόφαση με μετατροπή των μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων.
Οι αλλαγές αυτές στη συνάρτηση χρησιμότητας μεταβάλλουν σημαντικά τους δείκτες συμφωνίας του μοντέλου με τον αποφασίζοντα και δημιουργούν ενδεχομένως νέες ασυμφωνίες.
Ετσι η διαδικασία επαναλαμβάνεται για να οδηγήσει ίσως στην ενεργοποίηση άλλων αναδράσεων που σχετίζονται με την ανάλυση ασυμφωνιών.

- **Ανάδραση τύπου 6**

Η ανάδραση αυτή σχετίζεται με την μοντελοποίηση του ίδιου του προβλήματος απόφασης.
Πραγματικά, κατά την ανάλυση των ασυμφωνιών, ο αποφασίζων ενδέχεται να συνειδητοποιήσει ότι τα κριτήρια (όπως έχουν επιλεγεί και μοντελοποιηθεί για την αξιολόγηση των εναλλακτικών αποφάσεων) δεν είναι ικανά να περιγράψουν τις προτιμήσεις του. Στην περίπτωση αυτή, αντιμετωπίζοντας ένα σφάλμα υποεκτίμησης (αντίστοιχα υπερεκτίμησης) δεν δέχεται τις υποδείξεις του μοντέλου για να αναβαθμίσει (αντίστοιχα

να υποβαθμίσει) μία απόφαση, αλλά ανατρέχει στο μοντέλο του προβλήματος για να το τροποποιήσει. Η τροποποίηση μπορεί να γίνει με αλλαγή της αναλυτικής μορφής ενός κριτηρίου, με διαγραφή ενός κριτηρίου ή ακόμη με προσθήκη ενός νέου κριτηρίου.

Μία τέτοια επέμβαση στο μοντέλο του προβλήματος απόφασης δημιουργεί την ανάγκη για ένα νέο ξεκίνημα της όλης διαδικασίας.

- **Ανάδραση τύπου 7**

Η ανάδραση αυτή σχετίζεται με την αμφισβήτηση του μοντέλου αθροιστικής χρησιμότητας ως βάσης για την ανάλυση της πολιτικής του αποφασίζοντα.

Η ανάγκη για την χρησιμοποίησή της εμφανίζεται όταν η ανάλυση παλινδρόμησης (με τη βοήθεια της μεθόδου UTA και των τριών προηγουμένων αναδράσεων) δεν μπορεί να προσεγγίσει την συλλογιστική του αποφασίζοντα.

Η περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανιστεί όταν οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα δεν είναι σύμφωνες με την ιδιότητα της αμοιβαίας ανεξαρτησίας των κριτηρίων .

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, κρίνεται απαραίτητη η χρησιμοποίηση διαφορετικού μοντέλου για την ανάλυση της πολιτικής του αποφασίζοντα.

Οταν ένα τέτοιο μοντέλο δεν είναι καταχωρημένο στην τράπεζα μοντέλων του συστήματος, πράγμα το οποίο συμβαίνει στην παρούσα έκδοση του ADELAIS, τότε η ανάδραση τύπου 7 ισοδυναμεί με έξοδο από το σύστημα.

5.4 ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα ADELAIS χρησιμοποιεί, για την διεκπεραίωση των λειτουργιών του, τα εξής τέσσερα μοντέλα: LP, HPA, UTA, PWLP.

- **Το μοντέλο LP**

Πρόκειται για τον κλασικό αλγόριθμο του Dantzig [19] που επιλύει γραμμικά προγράμματα της μορφής

$$\max \text{ ή } \min_{\underline{x} \in A} \underline{c}^T \underline{x}$$

Το σύστημα χρησιμοποιεί το μοντέλο LP για την μεγιστοποίηση και την ελαχιστοποίηση καθενός κριτηρίου χωριστά, προκειμένου να προσδιορίσει τα άνω και κάτω φράγματα των κριτηρίων και στη συνέχεια να κατασκευάσει τον πίνακα πληρωμών.

Στην περίπτωση που η ελαχιστοποίηση ενός κριτηρίου οδηγήσει σε μη φραγμένη λύση, το σύστημα υπολογίζει το κάτω φράγμα για το κριτήριο αυτό με βάση τη μέγιστη σχετική απόκλιση των φραγμάτων των υπολοίπων κριτηρίων από τις ελάχιστες τιμές τους στον πίνακα πληρωμών.

Το μοντέλο LP χρησιμοποιείται επίσης, στο προκαταρκτικό στάδιο, για να υπολογισθεί μία πρώτη αποτελεσματική λύση.

Τέλος, το σύστημα χρησιμοποιεί το μοντέλο LP στο στάδιο της αναπροσαρμογής των στόχων, για να προβεί στην ανάλυση ευαισθησίας των κριτηρίων με βάση τις μεταβολές στα κατώτερα επίπεδα ικανοποίησης τους. Η χρησιμοποίηση του LP για το σκοπό αυτό πραγματοποιείται μέσω της ανάδρασης τρίτου τύπου.

- **Το μοντέλο HPA**

Πρόκειται για έναν αλγόριθμο εύρεσης του δρόμου Hamilton σε ένα γράφημα γνήσιας ολικής διάταξης (Hamiltonian Path Algorithm)

Υπενθυμίζεται ότι δρόμος ενός προσανατολισμένου γραφήματος ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία διαδοχικών του τόξων.

Δρόμος Hamilton ενός προσανατολισμένου γραφήματος ονομάζεται κάθε δρόμος που διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά.

Σε ένα γράφημα γνήσιας ολικής διάταξης, δηλαδή πλήρες, μη συμμετρικό και μεταβατικό, υπάρχει ακριβώς ένας δρόμος Hamilton[1].

Το γράφημα των προτιμήσεων του αποφασίζοντα είναι ένα γράφημα γνήσιας ολικής διάταξης, οι κορυφές του οποίου αντιστοιχούν στις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς και τα τόξα υποδηλώνουν την μεταξύ τους σχέση προτίμησης.

Ετσι το πρόβλημα της διάταξης κατά σειρά προτίμησης ενός πεπερασμένου πλήθους εναλλακτικών αποφάσεων ανάγεται στην

---

1) Βλ. Berge [8]

κατασκευή του αντίστοιχου γραφήματος προτιμήσεων και στην εύρεση του μοναδικού δρόμου Hamilton σ'αυτό.

Το σύστημα κατασκευάζει το γράφημα των προτιμήσεων του αποφασίζοντα στο στάδιο που αυτός εξωτερικεύει την συλλογιστική του και στη συνέχεια χρησιμοποιεί το μοντέλο HPA για να προσδιορίσει σ'αυτό τον δρόμο Hamilton.

- **Το μοντέλο UTA**[1]

Είναι το μοντέλο μονότονης παλινδρόμησης, το οποίο δεχόμενο ως είσοδο μία ασθενή διάταξη των αποφάσεων του συνόλου αναφοράς, εκτιμά μία συμβιβαστή με την ασθενή διάταξη αθροιστική συνάρτηση χρησιμότητας, κατά τμήματα γραμμική και κοίλη .

- **Το μοντέλο PWLP**

Πρόκειται για τον αλγόριθμο του Fourer[2] ,για κατά τμήματα γραμμικό προγραμματισμό (Piece-Wise Linear Programming).

Το σύστημα χρησιμοποιεί το μοντέλο PWLP, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας, για να προσδιορίσει στον χώρο των αποφάσεων μία αποτελεσματική λύση μέγιστης χρησιμότητας.

1) Βλ. σελ. 94
2) Βλ. σελ. 41

5.5 ΦΥΣΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

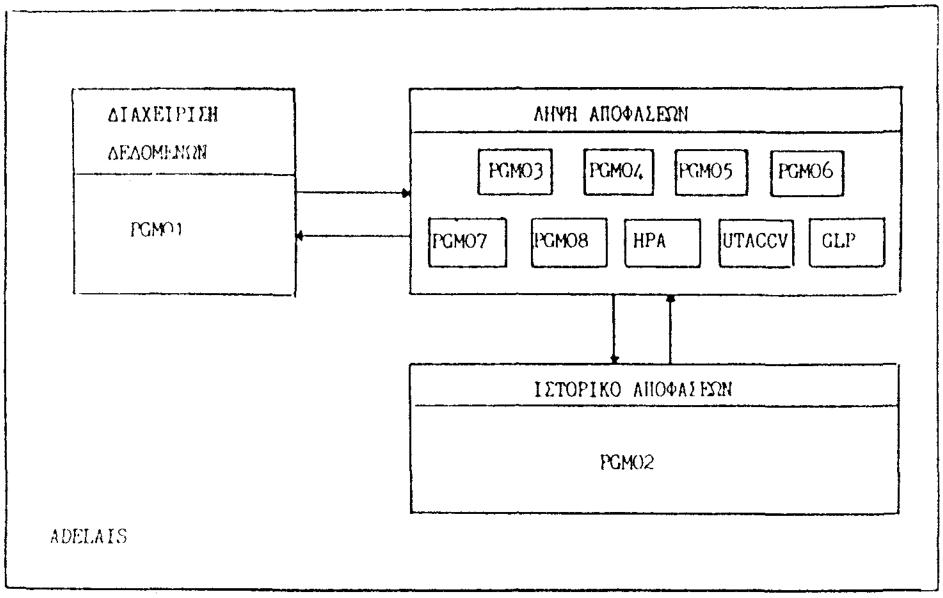
Το σύστημα ADELAIS απαρτίζεται από δώδεκα συνολικά προγράμματα κάθε ένα από τα οποία αποτελεί μία ανεξάρτητη προγραμματιστική οντότητα. Το πρώτο (MENU) είναι εκείνο που επιτρέπει την είσοδο στο σύστημα, ενώ τα υπόλοιπα, ανάλογα με τις λειτουργίες που υποστηρίζουν, διαμερίζονται σε τρία υποσύνολα που συνθέτουν ουσιαστικά τις τρείς λειτουργίες-υποσυστήματα του ADELAIS: Διαχείριση δεδομένων, λήψη αποφάσεων, ιστορικό αποφάσεων (σχ. 11).

Το υποσύστημα "διαχείριση δεδομένων" υποστηρίζει αφενός την εισαγωγή και την καταχώρηση των δεδομένων ενός νέου προβλήματος, αφετέρου την μεταβολή των δεδομένων ενός ήδη καταχωρημένου.

Το υποσύστημα "λήψη αποφάσεων", που αποτελεί τον κορμό του συστήματος ADELAIS, συγκεντρώνει τον μεγαλύτερο αριθμό προγραμμάτων, μεταξύ των οποίων και τα μοντέλα του συστήματος (προγράμματα GLP, HPA, UTACCU). Στα πλαίσια του υποσυστήματος αυτού συντελούνται οι βασικότερες διεργασίες του συστήματος, οι οποίες αφορούν:

- Την διερεύνηση του χώρου των εναλλακτικών αποφάσεων με στόχο τον εμπλουτισμό της γνώσης και της εμπειρίας του αποφασίζοντα.

- Την αξιοποίηση της εμπειρίας του αποφασίζοντα, με την βοήθεια των μοντέλων του συστήματος, για την ανάδειξη αποτελεσματικών αποφάσεων μέγιστης χρησιμότητας.



Σχήμα 11: Υποσυστήματα του ADELAIS

Οι αποτελεσματικές λύσεις και οι επιπτώσεις τους (που προσδιορίζονται κατά την διάρκεια της διαδικασίας) καταχωρούνται σε ιστορικό αρχείο, το περιεχόμενο του οποίου δίνει στο τέλος της διαδικασίας μία εικόνα για την πορεία που ακολούθησε ο αποφασίζων μέχρι να καταλήξει στην τελική απόφαση.

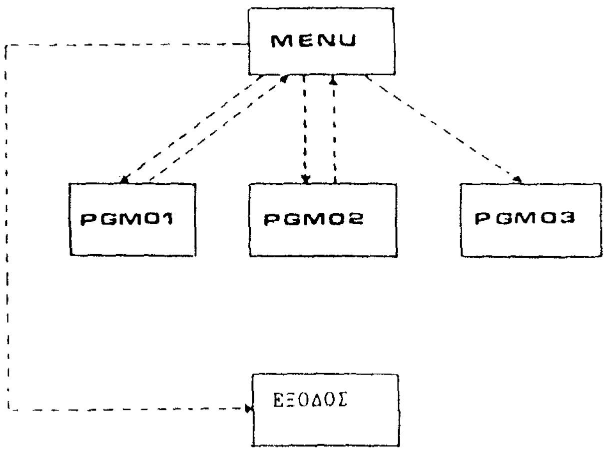
Οι εναλλακτικές αποφάσεις του ιστορικού αρχείου, εκτός του ότι όλες συνιστούν αποτελεσματικές λύσεις του προβλήματος απόφασης, μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο μιας εκ των υστέρων μελέτης, που ενδεχομένως να οδηγήσει ακόμη και στην τροποποίηση της τελικής απόφασης.

Η ανάπτυξη των φυσικών διαγραμμάτων ροής του ADELAIS γίνεται κατά υποσύστημα με κοινό σημείο επικοινωνίας το πρόγραμμα MENU, το οποίο αποτελεί την φυσική είσοδο στο σύστημα και το μέσο μεταβίβασης του ελέγχου στα τρία υποσυστήματά του.

<u>Είσοδος στο σύστημα</u>

- Πρόγραμμα MENU: Πρόκειται για το εναρκτήριο πρόγραμμα που επιτρέπει την φυσική είσοδο στο σύστημα. Το πρόγραμμα αυτό εμφανίζει στην οθόνη του υπολογιστή τον κατάλογο των βασικών λειτουργιών του συστήματος και μεταβιβάζει τον έλεγχο στον χρήστη. Ο χρήστης στην συνέχεια μπορεί να επιλέξει μία από τις λειτουργίες του συστήματος ή να το εγκαταλείψει.

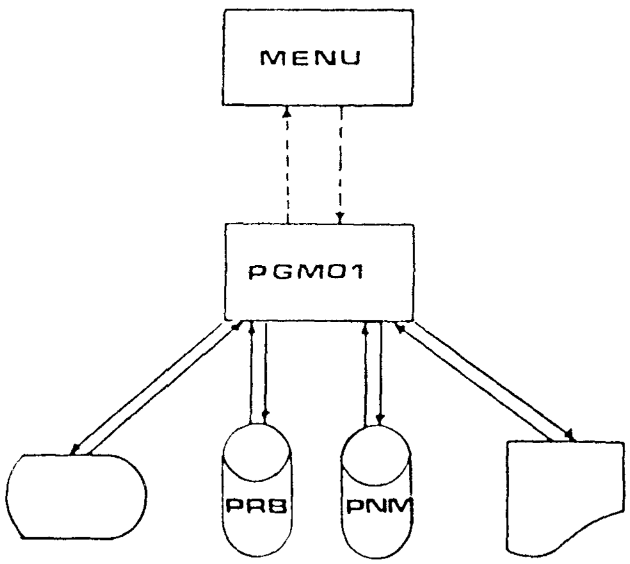
Στην πρώτη περίπτωση ο έλεγχος μεταβιβάζεται σε ένα από τα προγράμματα PGM01, PGM02 ή PGM03, ενώ στην δεύτερη ο έλεγχος μεταβιβάζεται στο λειτουργικό σύστημα του υπολογιστή (σχ. 12).



Σχήμα 12 : Είσοδος στο σύστημα

Υποσύστημα διαχείρισης δεδομένων

● **Πρόγραμμα PGM01:** Το πρόγραμμα PGM01 υποστηρίζει την σύνθετη διαδικασία διαχείρισης των δεδομένων. Δέχεται τον έλεγχο, κατ'εντολή του χρήστη, από το πρόγραμμα MENU και χρησιμοποιεί για είσοδο-έξοδο δύο αρχεία δίσκου (αρχεία τύπου .PRB και .PNM) και την οθόνη του υπολογιστή (σχ.13).



Σχήμα 13: Υποσύστημα διαχείρισης δεδομένων.

Η διαδικασία διαχείρησης δεδομένων αναλύεται στις ακόλουθες υποδιαδικασίες:

Είσοδος δεδομένων: Ο χρήστης ορίζει και καταχωρεί τα βασικά χαρακτηριστικά και τις διαστάσεις του προβλήματος, όπως τον τίτλο του, την φυσική μονάδα καταχώρησης, το πλήθος των κριτηρίων, των μεταβλητών και των περιορισμών. Στην συνέχεια ορίζει τα ονόματα των κριτηρίων, των μεταβλητών και των περιορισμών με τρόπο που αυτά να ανταποκρίνονται εννοιολογικά στα μεγέθη του προβλήματος. Τα στοιχεία αυτά καταχωρούνται στο αρχείο .PNM (σχ. 13).
Τέλος, ο χρήστης εισάγει αναλυτικά τα αριθμητικά δεδομένα, δηλαδή τους συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων, τους συντελεστές των περιορισμών και τα δεύτερα μέλη τους, τα οποία καταχωρούνται στο αρχείο .PRB.

Προβολή-εκτύπωση: Ο χρήστης μπορεί να αναζητήσει τα δεδομένα ενός ήδη καταχωρημένου προβλήματος και στην συνέχεια να τα προβάλλει στην οθόνη του υπολογιστή ή/και να τα μεταφέρει στον εκτυπωτή του συστήματος.

Μεταβολή: Η διαδικασία αυτή παρέχει στον χρήστη την δυνατότητα να τροποποιεί το μοντέλο ενός προβλήματος, αλλάζοντας τις διαστάσεις του και τα δεδομένα με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

- Μεταβολή/προσθήκη/διαγραφή κριτηρίων.
- Μεταβολή/προσθήκη/διαγραφή περιορισμών.
- Προσθήκη/διαγραφή μεταβλητών.
- Μεταβολή των ονομάτων των κριτηρίων, των μεταβλητών και των περιορισμών.

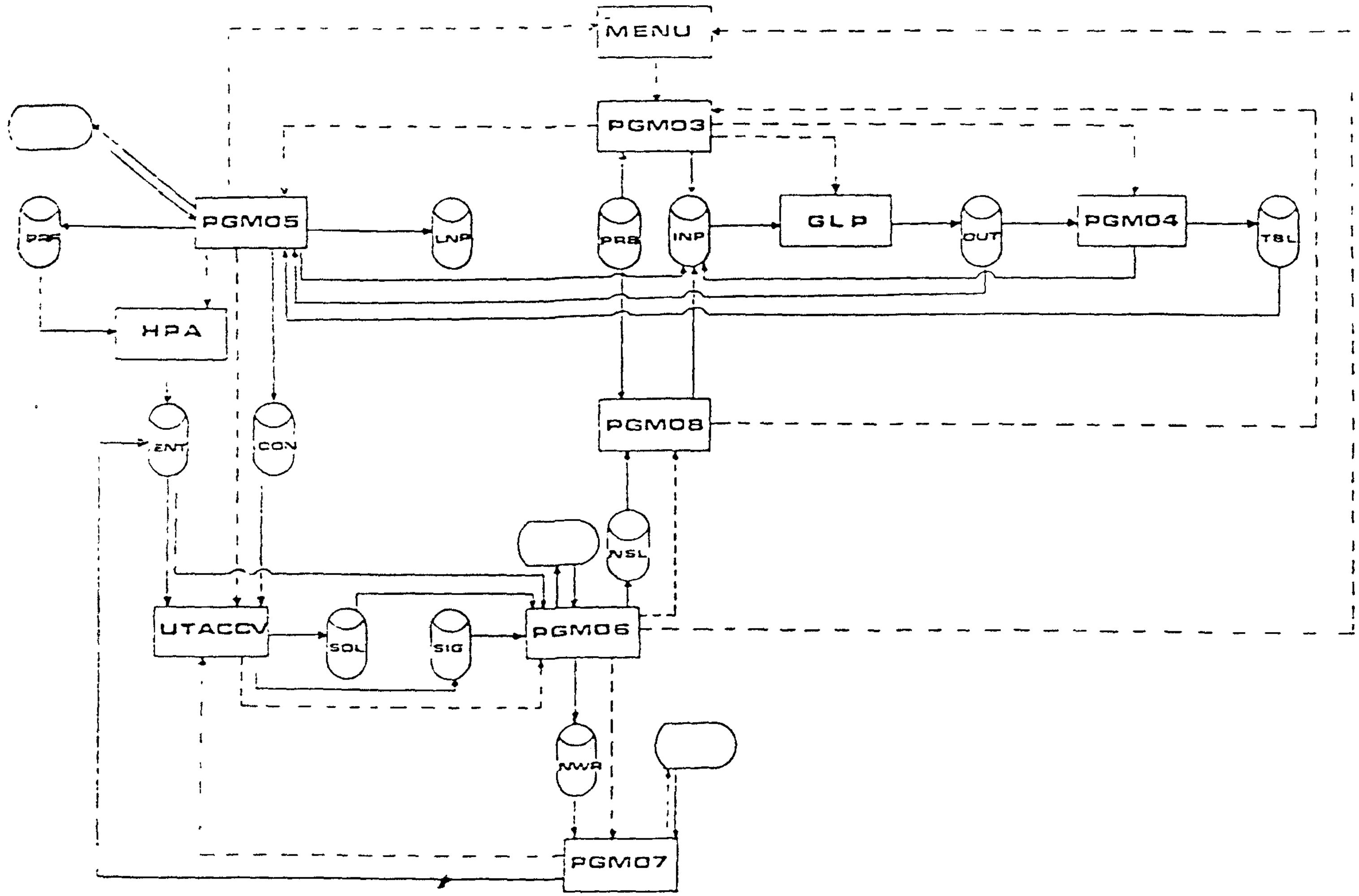
Διαγραφή: Η διαδικασία αυτή επιτρέπει την ολοκληρωτική διαγραφή ενός προβλήματος από το φυσικό μέσο καταχώρησής του.

Οι διάφορες επιμέρους λειτουργίες του συστήματος διαχείρισης δεδομένων υποστηρίζονται από ένα κατάλληλα σχεδιασμένο και εύχρηστο σύστημα καταλόγων εναλλακτικών επιλογών (menus), το οποίο κάθε στιγμή πληροφορεί τον χρήστη για την περιοχή του συστήματος που χρησιμοποιεί και τον τρόπο μετάβασής του σε άλλες περιοχές του.

Υποσύστημα λήψης αποφάσεων

Το υποσύστημα λήψης αποφάσεων αποτελείται από εννέα ανεξάρτητα προγράμματα, που όλα μαζί συνθέτουν και επιτελούν την βασικότερη λειτουργία του συστήματος ADELAIS. Τα συστατικά μέρη του υποσυστήματος αυτού και ο τρόπος επικοινωνίας τους αποτυπώνονται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 14.

- Πρόγραμμα PGM03: Ο ρόλος του προγράμματος PGM03 είναι διττός: Σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας, το πρόγραμμα αυτό αναλαμβάνει τον συντονισμό των προγραμμάτων PGM04, PGM05 και GLP, ενώ στην περίπτωση που ένα πρόβλημα απόφασης αντιμετωπίζεται για πρώτη φορά, το πρόγραμμα εκτελεί και το μέρος εκείνο της προκαταρκτικής διαδικασίας



Σχήμα 14 : Υποσύστημα λήψης αποφάσεων

που αφορά την προετοιμασία των απαιτούμενων για την συνέχεια αρχείων. Ετσι, χρησιμοποιώντας ως είσοδο το βασικό αρχείο δεδομένων .PRB δημιουργεί προσωρινά αρχεία τύπου .INP, που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια ως αρχεία εισόδου από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού (πρόγραμμα GLP).

- **Πρόγραμμα GLP**: Πρόκειται για το γενικευμένο μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού. Σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας, το πρόγραμμα GLP αναλαμβάνει την επίλυση γραμμικών ή κατά τμήματα γραμμικών προγραμμάτων, ανάλογα με τις τιμές διαφόρων παραμέτρων. Χρησιμοποιεί ως είσοδο το αρχείο .INP και δημιουργεί αρχείο αποτελεσμάτων, τύπου .OUT.

- **Πρόγραμμα PGM04**: Το πρόγραμμα PGM04 εκτελείται μία μόνο φορά στο προκαταρκτικό στάδιο της διαδικασίας. Με βάση τα αποτελέσματα από την βελτιστοποίηση όλων των κριτηρίων χωριστά (αρχείο .INP), το PGM04 υπολογίζει τον πίνακα πληρωμών τον οποίο και καταχωρεί σε αρχείο, τύπου .TBL. Στην συνέχεια δημιουργεί ένα δεύτερο αρχείο, τύπου .INP, στο οποίο καταχωρεί τα δεδομένα του γραμμικού προγράμματος ελαχιστοποίησης της μετρικής του Tchebycheff. Για την επίλυση αυτού του γραμμικού προγράμματος και τον προσδιορισμό της πρώτης αποτελεσματικής λύσης, ο έλεγχος μεταβιβάζεται στο πρόγραμμα PGM03 και από εκεί στο GLP.

- Πρόγραμμα PGMOS: Η λειτουργία του προγράμματος αυτού συνίσταται αφενός στην υποστήριξη των τριών πρώτων τύπων αναδράσεων του ADELAIS, αφετέρου στη διαχείριση του διαλόγου που πλαισιώνει την αλληλεπίδραση ανθρώπου-μηχανής, στις τρείς φάσεις: αξιολόγηση λύσεων, αναπροσαρμογή των λιγότερο επιθυμητών τιμών των κριτηρίων, εξωτερίκευση της συλλογιστικής του αποφασίζοντα.

Η αξιολόγηση μιας λύσης γίνεται από τον χρήστη μέ βάση τον πίνακα πληρωμών (αρχείο .TBL) και τις τιμές των κριτηρίων που αντιστοιχούν σ'αυτήν (αρχείο .OUT). Η λύση αυτή καταχωρείται και στο ιστορικό αρχείο εναλλακτικών αποφάσεων (αρχείο .LNP). Στη συνέχεια, ανάλογα με το πως εξελίσσεται ο διάλογος στη φάση της αξιολόγησης, ο χρήστης μπορεί μέσω του MENU να κάνει χρήση του συστήματος διαχείρησης δεδομένων, προκειμένου να μεταβάλλει το μοντέλο του προβλήματος, να διακόψει την διαδικασία αν κρίνει ότι οι τιμές των κριτηρίων είναι ικανοποιητικές ή να συνεχίσει τη διαδικασία για την αναζήτηση μιας καλύτερης λύσης. Στην τελευταία περίπτωση, το πρόγραμμα προβαίνει σε μία πρώτη εκτίμηση των λιγότερο επιθυμητών τιμών των κριτηρίων, ενώ, μέσω της ανάδρασης τρίτου τύπου, δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να τροποποιήσει τις τιμές αυτές.

Στη συνέχεια, το πρόγραμμα δημιουργεί ένα σχετικά μικρό αριθμό υποθετικών σεναρίων, τα οποία παρουσιάζει κατά ζεύγη στον χρήστη για να τα συγκρίνει. Τα σενάρια αυτά καταχωρούνται σε αρχείο τύπου .DON, τα αποτελέσματα από τις κατά ζεύγη συγκρίσεις καταχωρούνται σε αρχείο τύπου .PRF, ενώ ο έλεγχος μεταβιβάζεται στο πρόγραμμα HPA.

- **Πρόγραμμα HPA:** Το πρόγραμμα αυτό, χρησιμοποιώντας ως αρχείο εισόδου το .PRF, κατασκευάζει το γράφημα των προτιμήσεων του αποφασίζοντα και στη συνέχεια την ασθενή διάταξη που αυτές ορίζουν στο σύνολο αναφοράς. Οι διατεταγμένες αποφάσεις καταχωρούνται σε αρχείο τύπου .ENT και ο έλεγχος μεταβιβάζεται στο πρόγραμμα UTACCU.

- **Πρόγραμμα UTACCU:** Το πρόγραμμα αυτό επιλύει το γραμμικό πρόγραμμα του αλγόριθμου UTA και στην συνέχεια προβαίνει στην ανάλυση ευστάθειας της βέλτιστης λύσης του. Στην περίπτωση που υπάρχουν πολλαπλές λύσεις, το πρόγραμμα προσδιορίζει εκείνες που μεγιστοποιούν τα βάρη των κριτηρίων (μετα-βέλτιστες λύσεις) καθώς και τη μέση τιμή τους (μέση λύση).

Για την δημιουργία του πίνακα simplex του γραμμικού προγράμματος UTA, το UTACCU χρησιμοποιεί ως αρχεία εισόδου τα αρχεία .DON και .ENT. Οι τιμές των μεταβλητων w που αντιστοιχούν στη βέλτιστη, στις μετα-βάλτιστες και στη μέση λύση καταχωρούνται σε αρχείο τύπου .SOL, ενώ οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών σφάλματος καταχωρούνται σε αρχείο τύπου .SIG. Μετά την δημιουργία αυτών των αρχείων, ο έλεγχος μεταβιβάζεται στο πρόγραμμα PGM06.

● Πρόγραμμα PGM06: Η λειτουργία του προγράμματος αυτού συνίσταται κυριως στην ανάλυση των αποτελεσμάτων του προγράμματος UTACCU. Ετσι, χρησιμοποιώντας ως αρχεία εισόδου τα αρχεία .ENT, .SOL και .SIG, το πρόγραμμα PGM06 υπολογίζει τις τιμές των δεικτών συμφωνίας του μοντέλου ολικής προτίμησης με την αναφορική απόφαση και στη συνέχεια παριστά γραφικά τις καμπύλες των συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας και την καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης. Το πρόγραμμα PGM06 υποστηρίζει επίσης τους τρείς τύπους αναδράσεων του συστήματος, που σχετίζονται με την λειτουργία της ανάλυσης των ασυμφωνιών.

Η μεταβολή των μερικών χρησιμοτήτων (ανάδραση τύπου 5) υποστηρίζεται από ένα σύνολο υποδιαδικασιών, οι οποίες είναι ενσωματομένες στο πρόγραμμα PGM06, και ένα σύστημα διαλόγου που πλαισιώνει την αλληλεπίδραση του χρήστη με το σύστημα.

Οι αναδράσεις τύπων 4 και 6 ισοδυναμούν με τη μεταβίβαση του ελέγχου στα προγράμματα PGM07 και MENU αντίστοιχα, ενώ η αποδοχή του μοντέλου ολικής προτίμησης ισοδυναμεί με τη μεταβίβαση του ελέγχου στο πρόγραμμα PGM08 (σχ. 14).

Το πρόγραμμα PGM06 δημιουργεί δύο αρχεία: ένα αρχείο τύπου .NWR, στο οποίο καταχωρείται η διάταξη των εναλλακτικών αποφάσεων που αναδεικνύεται από το μοντέλο, και ένα αρχείο τύπου .NSL στο οποίο καταχωρούνται οι τιμές των μεταβλητών w_{ij} που αντιστοιχούν στο μοντέλο ολικής προτίμησης που γίνεται αποδεκτό από τον αποφασίζοντα.

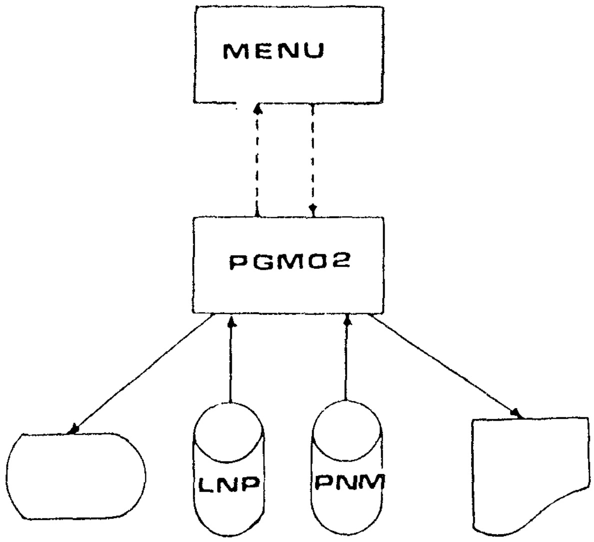
- **Πρόγραμμα PGM07:** Το πρόγραμμα αυτό, χρησιμοποιώντας ως αρχείο εισόδου το .NWR, εμφανίζει στην οθόνη τις αποφάσεις του συνόλου αναφοράς και τις δυο διατάξεις που προέρχονται από τον χρήστη και το σύστημα αντίστοιχα. Στη συνέχεια, λαμβάνει τη νέα διάταξη που ορίζει ο χρήστης από την οθόνη, δημιουργεί νέο αρχείο τύπου .ENT και μεταβιβάζει τον έλεγχο στο πρόγραμμα UTACCV προκειμένου να εκτιμηθούν νέες συναρτήσεις χρησιμότητας.

- **Πρόγραμμα PGM08:** Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί ως αρχεία εισόδου τα αρχεία τύπου .NSL και .PRB, κατασκευάζει αρχείο τύπου .INP, στο οποίο καταχωρεί τα δεδομένα του γραμμικού προγράμματος μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας και στη συνέχεια, για την επίλυση του, μεταβιβάζει τον έλεγχο στο πρόγραμμα GLP, μέσω του PGM03.

<u>Ιστορικό αποφάσεων</u>

- Πρόγραμμα PGM02: Το πρόγραμμα αυτό παρέχει τη δυνατότητα αναζήτησης των αποτελεσματικών λύσεων που αναδεικνυονται κατά την διάρκεια της διαδικασίας για την λήψη μιας απόφασης, χρησιμοποιόντας ως αρχεία εισόδου τα .LNP και .PNM (σχ. 15).

Ανάλογα με το μέσο που επιλέγει ο χρήστης, το πρόγραμμα παρουσιάζει στην οθόνη ή/και στον εκτυπωτή του συστήματος τον κατάλογο των αποτελεσματικών λύσεων και τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων.



Σχήμα 15: Ιστορικό αποφάσεων

5.6 ΤΕΧΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα ADELAIS προγραμματίστηκε σε μικρουπολογιστή τύπου IBM-XT.

Για την ανάπτυξη των προγραμμάτων του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν οι γλώσσες προγραμματισμού MS-BASIC και FORTRAN77, οι μεταφραστές (compilers) IBM PC Basic Compiler 1.00 και MS-Fortran77 3.31 και ο linker MS 8086 Object Linker 3.04, σε περιβάλλον MS-DOS 3.2.

Το σύστημα είναι εγκατεστημένο σε μικρουπολογιστή με χωρητικότητα κύριας μνήμης 640 KB και μπορεί να ανταποκριθεί αποτελεσματικά στις ανάγκες πολυκριτήριων γραμμικών προγραμμάτων μέσων διαστάσεων (10 κριτήρια, 200 μεταβλητές, 200 περιορισμοί).

Στην περίπτωση προβλημάτων μεγαλυτέρων διαστάσεων κρίνεται αναγκαία η μεταφορά του συστήματος ADELAIS σε υπολογιστή με μεγαλύτερες δυνατότητες.

Οταν όμως η απόκριση του συστήματος σε πραγματικό χρόνο δεν παίζει καθοριστικό ρόλο, το ADELAIS μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εξίσου αποτελεσματικά, και σε προβλήματα μεγαλυτέρων διαστάσεων, ως "γεννήτρια" εναλλακτικών αποτελεσματικών σεναρίων.

Τέτοια σενάρια μπορούν να αποτελέσουν είσοδο ενός συστήματος προσομοίωσης.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι αναμφίβολα ένα από τα πλέον γνωστά μοντέλα της επιχειρησιακής έρευνας που χρησιμοποιούνται για την άσκηση αποτελεσματικής διοίκησης σε τομείς όπως ο προγραμματισμός δραστηριοτήτων και η διαχείρηση πόρων.

Ο πολυκριτήριος γραμμικός προγραμματισμός ειδικότερα είναι το πλέον σύγχρονο μοντέλο για την λήψη διοικητικών αποφάσεων σε τομείς δραστηριοτήτων που η φύση τους ενδοβάλλει την θεώρηση πολλαπλών στόχων.

Η γενική μεθοδολογία του ακολουθεί δύο κυρίως προβληματικές: την απαρίθμηση όλων των αποτελεσματικών λύσεων σε πολυκριτήρια γραμμικά προγράμματα και την διερεύνηση του συνόλου των εναλλακτικών λύσεων ενός π.γ.π με σκοπό τον προσδιορισμό εκείνης που ικανοποιεί τον εκάστοτε αποφασίζοντα.

Η δεύτερη, που είναι και η πλεόν ενδιαφέρουσα, αφορά αποκλειστικά τις αλληλεπιδραστικές μεθόδους του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού, οι οποίες όπως τονίσθηκε αναζητούν την τελική λύση ακολουθώντας δύο διαφορετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις (ορθολογική ή διεξοδική).

Στην παρούσα διατριβή γενικεύεται η μεθοδολογική προσέγγιση και επίλυση προβλημάτων πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού με την ανάπτυξη μίας νέας αλληλεπιδραστικής μεθόδου, χαρακτηριστικά της οποίας είναι η χρήση επιπέδων ικανοποίησης που επιτρέπουν στους αποφασίζοντες να προδιαγράφουν και να ελέγχουν την φυσιογνωμία των λύσεων που αναζητούν καθώς και η εκτίμηση του μοντέλου προτιμήσεων των αποφασιζόντων, μέσω του οποίου ορθολογίζονται οι εκάστοτε αναζητούμενες λύσεις.

Ειδικότερα χαρακτηριστικά της μεθόδου, όπως ο φόρτος πληροφορίας, η ποιότητα των υπολογιζομένων λύσεων κ.α , ακολουθούν τις προδιαγραφές που έχει ορίσει για τις αλληλεπιδραστικές μεθόδους η εμπειρική και συγκριτική έρευνα στον χώρο των εφαρμογών τους.

Πραγματικά, η πληροφορία που η μέθοδος χρησιμοποιεί και αναλύει, επειδή πηγάζει από έναν περιορισμένο αριθμό συγκρίσεων εναλλακτικών αποφάσεων ανά δύο, είναι απλή και κατανοητή.

Οι λύσεις που αναδεικνύονται από την μέθοδο είναι λύσεις αποτελεσματικές και ολικού βελτίστου, όπως προκύπτει από το μοντέλο του κυρτού προγραμματισμού (convex programming) και από το γεγονός ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι κατά τμήματα γραμμική και κοίλη.

Η ανάλυση ευαισθησίας των επιπέδων ικανοποίησης επιτρέπει την επανένταξη στον κύκλο μελέτης και την επανεξέταση λύσεων που είχαν εξαιρεθεί δίνοντας έτσι την δυνατότητα επανόρθωσης ενδεχομένων εσφαλμένων εκτιμήσεων κατά την αξιολόγησή τους.

Στην διατριβή αναπτύσσεται επίσης το σύστημα ADELAIS, για την εφαρμογή της μεθόδου σε πραγματικά προβλήματα απόφασης.

Η αρχή λειτουργίας του στηρίζεται σε μία αναδραστική διαδικασία δοκιμής-λάθους που επιτρέπει στους αποφασίζοντες-χρήστες να δομούν προοδευτικά τις προτιμήσεις τους, να ενισχύουν την γνώση τους και να αναζητούν ικανοποιητικές λύσεις σε προβλήματα πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού.

Το σύστημα ADELAIS από πλευράς ολοκλήρωσης των συστατικών του μερών (μοντέλα, δεδομένα, διάλογος) κατατάσσεται στην τρίτη γενιά συστημάτων υποστήριξης πολυκριτήριων αποφάσεων.

Αυτά χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη μίας βάσης δεδομένων, ενός συστήματος διαχείρησής τους και ενός ολοκληρωμένου συστήματος διαλόγου που επιτρέπει την ροή των πληροφοριών από και πρός τον χρήστη με σαφή και δομημένο τρόπο.

Τα συστήματα της τρίτης γενιάς χαρακτηρίζονται επίσης από το γεγονός ότι η λειτουργία τους και ο τρόπος με τον οποίο υποστηρίζουν τις διαδικασίες λήψης αποφάσεων βασίζονται σε μία και μόνο μέθοδο.

Ομως στον σύγχρονο επιχειρησιακό χώρο η λήψη μίας απόφασης γίνεται με σύνθετες διαδικασίες που συχνά

ξεφεύγουν από την αποκλειστική ευθύνη του ενός και μόνου ατόμου.
Εξάλλου οι παράγοντες που επηρεάζουν την ποιότητα μίας απόφασης είναι ποικίλοι και αλληλοεξαρτόμενοι και η ανάλυσή τους προυποθέτει την χρησιμοποίηση ευρύτερων και περισσότερο ολοκληρωμένων πληροφοριακών συστημάτων.
Τέτοια συστήματα πρέπει να υποστηρίζουν τον καταμερισμό μοντέλων και δεδομένων, την ανταλλαγή πληροφοριακού υλικού μεταξύ διαφορετικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων και την συμμετοχή περισσοτέρων του ενός αποφασιζόντων, ώστε σε μία πιο ρεαλιστική βάση να καθιστούν δυνατή την αποτελεσματική χρησιμοποίηση των μοντέλων, ανάλογα με τις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος, καθώς και την συγκριτική ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Στον τομέα της ανάπτυξης ολοκληρωμένων συστημάτων πολλά έχει να προσφέρει η εμπειρία από την ανάπτυξη έμπειρων συστημάτων (expert systems).
Τέτοιες συστημικές δομές, ενσωματομένες σε συστήματα υποστήριξης αποφάσεων μπορούν να συνεισφέρουν τα μέγιστα στην αύξηση της αποτελεσματικότητας των διαδικασιών λήψης αποφάσεων, αφού παρέχουν την δυνατότητα καταγραφής και αξιοποίησης της εμπειρίας των αποφασιζόντων.

Ειδικότερα, όσον αφορά την έρευνα στον χώρο του πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού αλλά και της πολυκριτήριας ανάλυσης γενικότερα, σε επίπεδο μεθοδολογίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τομέας της εμπειρικής έρευνας και της συγκριτικής μελέτης μεθόδων και συστημάτων.

Σκοπός της εμπειρικής έρευνας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς μίας μεθόδου ή ενός συστήματος σε πραγματικά προβλήματα αποφάσεων ή ακόμη και σε συνθήκες εργαστηρίου με προσομοιούμενο χώρο αποφάσεων και υποθετικούς αποφασίζοντες.

Η συγκριτική μελέτη μεθόδων και συστημάτων αφορά την εφαρμογή τους στο ίδιο πρόβλημα απόφασης με σκοπό την ανάδειξη των σχετικών πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων τους, ο μεθοδικός έλεγχος και η καταγραφή των οποίων μπορεί άμεσα να βοηθήσει στην αναλυτική ταξινόμηση των μεθόδων σε κατηγορίες με κοινές ιδιότητες.

Μία τέτοια ταξινόμηση είναι απαραίτητη προυπόθεση για την δημιουργία μίας ολοκληρωμένης τράπεζας μοντέλων της πολυκριτήριας ανάλυσης που θα έδινε την δυνατότητα επιλογής της πλέον ενδεδειγμένης μεθόδου για τον τύπο του προβλήματος που κάθε φορά αντιμετωπίζεται, πάντα βέβαια υπό την οπτική ότι το πρόβλημα επιλογής της είναι, το ίδιο, ένα πολυκριτήριο πρόβλημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

[1] Adams, E.W., R. Fagot: A Model of Riskless Choice. Behavioral Science, 4, (1959) pp.1-10.

[2] Alter, S.: A Taxonomy of Decision Support Systems. Sloan Management Review, 19 (1), (1977), pp.39-56.

[3] Bazarra, M.S., C.M. Shetty: Nonlinear Programming. Willey, New York, 1979.

[4] Benayoun, R., J.de Montgolfier, J. Tergny, O. Larichev: Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM). Mathematical Programming, 1 (3), (1971), pp.366-375.

[5] Benayoun, R., J. Tergny, D. Keuneman: Mathematical Programming with Multiobjective Functions: A Solution by P.O.P. (Progressive Orientation Procedure). METRA, 9 (2), (1970), pp. 279-299.

[6] Benson, R.G.: Interactive Multiple Criteria Optimization Using Satisfactory Goals. Ph.D. Thesis, University of Iowa, 1975.

[7] Benveniste, M.: Testing for Complete Efficiency in a Vector Maximization Problem. Mathematical Programming, 12 (2), (1977), pp. 285-288.

[8] Berge, C.: Graphs. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[9] Bui, X.T.: Building Effective Multiple Criteria Decision Support Systems. Systems, Objectives, Solutions, 4 (1), (1984), pp.3-16.

[10] Carlson, E., R. Sprague: Building Effective Decision Support Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

[11] Chankong, V. ,Y. Haimes: Multiobjective Decision Making, Theory and Methodology. North-Holland, New York, 1983.

[12] Charnes, A., W.W. Cooper: Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vols.I,II, Wiley, New York, 1961.

[13] Charnes, A., C.E. Lemke: Minimazation of Non-Linear Seperable Convex Functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 1, (1954), pp.301-312.

[14] Choo, E.U., D.R. Atkins: An Interactive Algorithm for Multicriteria Programming. Compt. and Ops Res., 7, (1980), pp.81-87.

[15] Cochrane, J.L., M. Zeleny (eds.): Multiple Criteria Decision Making. University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.

[16] Cohon, J.L., D.H. Marks: A Review and Evaluation of Mutiobjective Programming Techniques. Water Resources Research, 11 (2), (1975), pp.208-220.

[17] Courbon, J.C., J. Grajew, J. Tolovi: Conception et Mise en Oeuvre ces SIAD: L'Approche Evolutive. Informatique et Gestion, 103, (1979), pp.51-59.

[18] Courbon, J.C., B. Oudet, J.P. Rouet: Les Systemes Interactifs d'Aide a la Decision. Informatique et Gestion, 89, (1977), pp.72-77.

[19] Dantzig, G.B.: Linear Programming and Extentions. Princeton University Press, Princeton, 1963.

[20] Debreu, G.: Topological Methods in Cardinal Utility Theory. In Mathematical Methods in the Social Sciences (K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, eds). Stanford University Press, Stanford, (1960), pp.16-26.

[21] Dyer, J.S.: Interactive Goal Programming. Operations Research, 19, (1972), pp.62-70.

[22] Ecker, J.G., I.A. Kouada: Finding Efficient Points for Linear Multiple Objective Programs. Mathematical Programming, 8 (3), (1975), pp.375-377.

[23] Evans, J.P., R.E. Steuer: Generating Efficient Extreme Points in Linear Multiple Objective Programming: Two Algorithms and Computing Experience. In Multiple Criteria Decision Making. University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, (1973), pp.349-365.

[24] Evans, J.P., R.E. Steuer: A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs. Mathematical Programming, 5 (1), (1973), pp.54-72.

[25] Evans, W.G.: An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs. Management Science, 30 (11), (1984), pp.1268- 1282.

[26] Fichefet, J.: GPSTEM: An Interactive Multiobjective Optimization Method. In Progress in Operations Research, Vol.1 (A. Prekopa, ed.). North-Holland, Amsterdam (1976), pp.317-332.

[27] Fishburn, P.C.: Independency in Utility Theory with Whole Product Sets. Operations Research, 13, (1965), pp.28-45.

[28] Fishburn, P.C.: Utility Theory for Decision Making. Wiley, New York, 1970.

[29] Fishburn, P.C.: Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules:A Survey. Management Science, 20 (11), (1974) pp.1442-1471.

[30] Fishburn, P.C.: A Survey of Multiattribute/Multicriteria Evaluation Theories. In Multicriteria Problem Solving (S. Zionts, ed.). Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[31] Fourer, R.: A Simplex Algorithm for Piecewise-Linear Programming I: Derivation and Proof. Mathematical Programming, 33, (1985), pp.204-233.

[32] Frank, M., P. Wolfe: An Algorithm for Quadratic Programming. Naval Research Logistics Quarterly, 3 (1,2), (1956), pp.95-100.

[33] Geoffrion, A.M.: Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22 (3), (1968), pp.618-630.

[34] Geoffrion, A.M., J.S. Dyer, A. Feinberg: An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department. Management Science, 19 (4), (1972), pp.357-368.

[35] Goicoechea, A., D.R. Hansen, L. Duckstein: Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications. Willey, New York, 1982.

[36] Haimes, Y.Y., W.A. Hall: Multiobjectives in Water Resources Systems Analysis: The Surrogate Worth Trade Off Method. Water Resources Research, 10 (4),(1974), pp.615-623.

[37] Hammond, K.R., R.L. Cook, L. Adelman: POLICY: An Aid for Decision Making and International Communication. Columbia Journal of World Business, 12, (1977), pp.79-93.

[38] Hemming, T.: Guide Lines for Testing Interactive Multicriteria Methods by Simulation. Proceedings of the VII-th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, 1, (1986), pp.190-199.

[39] Ho, J.k.: Relationship Among Linear Formulations of Seperable Convex Piecewise Linear Programs. Technical Report, University of Tennessee, 1984.

[40] Huber, G.: Multi-Atribute Utility Models: A Review of Field and Field-Like Studies. Management Science, 20 (10), (1974), pp.1393-1402.

[41] Huber G.: Organizational Science Contributions to the Design of Decision Support Systems. Proceedings of an International Task Force Meeting, Pergamon Press, 1980.

[42] Hwang, C.L., A. Masud: Multiple Objective Decision Making, Methods and Applications. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[43] Ijiri, Y.: Management Goals and Accounting for Control. North-Holland, Amsterdam, 1965.

[44] Isermann, H., R.E. Steuer: Pay-Off Tables and Minimum Criterion Values over the Efficient Set. Report 85-178, College of Business Administration, University of Georgia, USA, 1985.

[45] Jacquet-Lagreze, E.: PREFCALC - Evaluation et Decision Multicriteres. Euro-Decision, 1983.

[46] Jacquet-Lagreze, E., R. Meziani, R. Slowinski: MOLP with an Interactive Assessment of a Piecewise Linear Function. European Journal of Operational Research, 31 (3), (1987), pp.350-357.

[47] Jacquet-Lagreze, E., J. Siskos: Assessing a set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making: The UTA Method. European Journal of Operational Research, 10, (1982), pp.151-164.

[48] Jelassi, M.T.: MCDM-From 'Stand-Alone' Methods to Integrated and Intelligent DSS. Proceedings of the VII-th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, 1, (1986), pp.250-262.

[49] Keen, P., M. Scott-Morton: Decision Support Systems. An Organizational Perspective. Addison-Wesley, 1978.

[50] Keeney, R.L., H. Raiffa: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. Wiley, New York, 1976.

[51] Koopmans,T.C.: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. In Activity Analysis of Production and Allocation (T.C. Koopmans, ed.). Cowles Commission Monograph 13, (1951), pp.33-97, Wiley, New York.

[52] Korhonen, P., J. Laakso: A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem. European Journal of Operational Reasearch, 24, (1986), pp.277-287.

[53] Kuhn, H.W, A.W. Tucker: Nonlinear Programming. In Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (J. Neyman, ed.) pp.481-492. University of California Press, Berkeley, California, 1951.

[54] Larichev, O.I., A.D. Nikiforov: Analytical Survey of Procedures for Solving Multicriteria Mathematical Programming Problems. Proceedings of the VII-th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, 1, (1986), pp.400-414.

[55] Lee, S.M.: Decision Analysis Through Goal Programming. Decision Sciences, 2, (1971), pp.172-180.

[56] Lee, S.M.: Goal Programming for Decision Analysis. Auerbach Publishers, Philadelphia. 1972.

[57] Mason, R.O., Mitroff, I.I.: A Program for Research on Management Information Systems. Management Science, 19 (3), (1983), pp.475-487.

[58] Masud, A., C.L. Hwang: Interactive Sequential Goal Programming. Journal of the Operational Research Society, 32, (1981), pp.391-400.

[59] Miller, D.R., M.K. Starr: Executive Decisions and Operations Research. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1959, 1969.

[60] Naslund, B.: Interactive Methods in Multiple Criteria Optimization. EFI working paper No 6004, Stockholm School of Economics, Stockholm, 1973.

[61] Ostanello, A.: Outranking Methods. In Multiple Criteria Decision methods and Applications (G. Fandel, J. Spronk, eds), pp.41-60, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[62] Philip, J.: Algorithms for the Vector Maximization Problem. Mathematical Programming, 2 (2),(1972), pp.207-229.

[63] Phillips, L.D.: Requisite Decision Making - A Case Study. Journal of the Operational Research Society, 33, (1982), pp.303-311.

[64] Pollak, R.A.: Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions. Econometrica, 35, (1967), pp.485-494.

[65] Roy, B.: Classement et Choix en Presence de Points de Vue Multiples: La methode ELECTRE. R.I.R.O, 8, (1968), pp.57-75.

[66] Roy, B.: Problems and Methods with Multiple Objective Functions. Mathematical Programming, 1 (2), (1971), pp.239-266.

[67] Roy, B.: How Outranking Relation Helps Multicriteria Decision Making. In Multiple Criteria Decision Making (J.L. Cochrane, M. Zeleny, eds.), pp.179-201. University of South Carolina Press, Columbia, 1973.

[68] Roy, B.: Meaning and Validity of Interactive Procedures as Tools for Decision Making. European Journal of Operational Reseach, 31, (1987), pp.297-303.

[69] Roy, B., Ph. Vincke: Relational Systems of Preference with one or more Pseudo-Criteria: Some New Concepts and Results. Management Science, 30 (11), (1984), pp.1323-1335.

[70] Simon, H.A.:: The New Science of Management Decision. Harper and Row Puplishers, New York, 1960.

[71] Siskos, J., D. Yannacopoulos: UTASTAR: An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions. Investigacao Operational, 5 (1), (1985), pp.39-53.

[72] Stewart, T.J.: An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method Based on Piecewise-Linear Additive Value Functions. IEEE Transactions, SMC-17, 5, (1987),pp.799-805.

[73] Vincke, Ph.: Multiattribute Utility Theory as a Basic Approach. In Multiple Criteria Decision Methods and Applications (G. Fandel, J. Spronk, eds), pp.27-40. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[74] Wallenius, J.: Interactive Multiple Criteria Decision Methods: An Investigation and an Approach. Acta Academiae Oeconomicae Helsingiensis, Series A:14, Helsinki School of Economics, Finland, 1975.

[75] Wallenius, J.: Comparative Evaluation of some Interactive Approaches of Multicriterion Optimization. Management Science, 21 (3), (1975), pp.1387-1396.

[76] Weistroffer, H.R.: Careful usage of Pessimistic Values is needed in Multiple Objectives Optimization. Operations Research Letters, 4, (1985), pp.23-25.

[77] Wierzbicki, A.: The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization. In Multiple Criteria Decision Making, Theory and Applications (G. Fandel, T. Gal, eds.), Springer-Verlag, New York, 1980.

[78] Winkels, H.M., M. Meika: An Integration of Efficiency Projections into the Geoffrion Approach for Multiobjective Linear Programming. European Journal of Operational Research, 16, (1984), pp.113-127.

[79] Yannacopoulos, D.: Mise en Place et Experimentation d'un Systeme Interactif d'Aide a la Decision Multicritere: Le Systeme MINORA. These 3eme Cycle, Universite de Paris - Dauphine, Paris, 1985.

[80] Yntema, D.B., W.S. Torgerson: Man-Computer Cooperation in Decisions Requiring Common Sense. IRE Transactions on Human Factors in Electronics, HFE-2, (1961), pp.20-26.

[81] Zeleny, M.: Linear Multiobjective Programming. Springer-Verlag, New York, 1974.

[82] Zeleny, M.: A Concept of Compromise Solutions and the Method of Displaced Ideal. Computers and Operations Research, 1 (4), (1974), pp.479-496.

[83] Zeleny, M.: Multiple Criteria Decision Making. McGraw-Hill, New York, 1982.

[84] Zionts, S.: Multiple Criteria Mathematical Programming: An Overview and Several Approaches. In Multiple Criteria Decision Methods and Applications (G. Fandel, J. Spronk, eds), pp.85-128. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[85] Zionts, S., J. Wallenius: An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem. Management Science, 22 (2), (1976), pp.652-663.

[86] Zionts, S., J. Wallenius: An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a class of Underlying Non-Linear Utility Functions. Management Science, 29 (5), (1983), pp.519-529.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

Η ΜΕΘΟΔΟΣ UTA

• Η ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΣΤΗΝ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η ανάλυση παλινδρόμησης αποτελεί βασική μεθοδολογία της επιστήμης της συμπεριφοράς για την διερεύνηση και την προσέγγιση της συλλογιστικής των ατόμων, όσον αφορά την λήψη αποφάσεων.

Η μεθοδολογία αυτή περιλαμβάνει:

- Την συλλογή δεδομένων, σχετικών με το αντικείμενο της απόφασης και διαμόρφωση του συνόλου των εναλλακτικών επιλογών.
- Την διαμόρφωση των κριτηρίων που φαίνονται καθοριστικά στην λήψη μίας απόφασης.
- Την καταγραφή δεδομένων αποφάσεων.
- Την οικοδόμηση ενός αναλυτικού μοντέλου προτίμησης δυνάμενου να αναπαράγει όσο το δυνατό πιστότερα τις δεδομένες αποφάσεις.

Ενα μοντέλο προτίμησης, αναπαριστώντας την σχέση μεταξύ δεδομένων αποφάσεων και των κριτηρίων που τις επηρρεάζουν, μπορεί χρησιμοποιηθεί εκ των υστέρων για την λήψη μίας απόφασης μέσα από ένα ευρύτερο σύνολο εναλλακτικών επιλογών.

Ετσι, αν Y είναι μία εξηρτημένη μεταβλητή, που συμβολίζει την συλλογιστική του αποφασίζοντα, έτσι όπως αυτή σκιαγραφείται βάσει δεδομένων αποφάσεων, $g_1, \ldots, g_n$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές (κριτήρια) που επηρρεάζουν την λήψη μίας απόφασης και U είναι η ενυπάρχουσα στον αποφασίζοντα (αλλά άγνωστη) συνάρτηση χρησιμότητας, τότε η σχέση

$$Y = U(g_1, \ldots, g_n)$$

υποδηλώνει την εξάρτηση της συλλογιστικής του από την συνάρτηση χρησιμότητάς του.

Αυτό που επιδιώκεται με την ανάλυση παλινδρόμησης είναι η εκτίμηση μίας συνάρτησης U^*, τέτοιας ώστε η προσέγγιση της συλλογιστικής του αποφασίζοντα

$$Y^* = U^*(g_1, \ldots, g_n)$$

να είναι όσο το δυνατό καλύτερη. Επιδιώκεται δηλαδή η μέγιστη συμβατότητα μεταξύ Y και Y^*.

Τα μοντέλα παλινδρόμησης στην πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων ποικίλουν, ανάλογα με τις υποθέσεις τους για την συνάρτηση χρησιμότητας του αποφασίζοντα (γραμμική, αθροιστική, κ.λ.π.) και τις τεχνικές που χρησιμοποιούν.

- Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ UTA

Η μέθοδος UTA (UTilite Additif)[...] είναι μία μέθοδος μονότονης παλινδρόμησης για την ανάλυση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα σε πολυκριτήρια προβλήματα με πεπερασμένο και προκαθορισμένο σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων.

Με δεδομένες τις πολυκριτήριες εκτιμήσεις των εναλλακτικών αποφάσεων αφενός και μία προδιάταξη ορισμένων χαρακτηριστικών αποφάσεων αφετέρου, η μέθοδος UTA επιτρέπει την εκτίμηση ενός συστήματος αθροιστικών συναρτήσεων χρησιμότητας που αποκαθιστά στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό την δεδομένη προδιάταξη.

Σύνολο αναφοράς και αναφορική απόφαση

Στην UTA, ως σύνολο αναφοράς λαμβάνεται ένα σύνολο χαρακτηριστικών εναλλακτικών αποφάσεων

$$A = \{a_1, \ldots, a_K\}$$

τις οποίες ο αποφασίζων μπορεί να αξιολογήσει και να κατατάξει κατά σειρά προτίμησης.

Ως αναφορική απόφαση λαμβάνεται μία προδιάταξη του A, η οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να είναι η ακόλουθη:

$$a_j \succeq a_{j+1} \quad \forall \; a_j , a_{j+1} \in A$$

Κριτήρια

Στην UTA τα κριτήρια $g_1, \ldots, g_n$, τα οποία μπορεί να είναι ποιοτικά ή/και ποσοτικά, ορίζονται ως πραγματικές μονότονες συναρτήσεις

$$g_i \; : \; A \longrightarrow [g_{i_*} , g_i^*]$$

όπου:

g_{i_*} η λιγότερο επιθυμητή τιμή για το κριτήριο g_i

g_i^* η περισσότερο επιθυμητή τιμή για το κριτήριο g_i

Αν $g_i(a)$ είναι η εκτίμηση της απόφασης a ως προς το κριτήριο g_i, τότε το διάνυσμα $\underline{g}(a) = (g_1(a), \ldots, g_n(a))$ αντιπροσωπεύει το "προφίλ" της απόφασης a.

Συνάρτηση χρησιμότητας

Η συνάρτηση χρησιμότητας υπό συνθήκες βεβαιότητας είναι μία πραγματική συνάρτηση

$$u : \prod_{i=1}^{n} [\, g_{i_*} , g_i^* \,] \longrightarrow R$$

για την οποία ισχύουν:

$$a \succ b \iff u(\underline{g}(a)) > u(\underline{g}(b))$$

$$\forall\ a,b \in A$$

$$a \sim b \iff u(g(a)) = u(g(b))$$

Το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων

Η μέθοδος UTA αποσκοπεί στην εκτίμηση ενός συστήματος συναρτήσεων χρησιμότητας σύμφωνα με το αθροιστικό μοντέλο

$$u(\underline{g}) = u_1(g_1) + \ldots + u_n(g_n)$$

$$u_i(g_{i_*}) = 0 \qquad , \ i \in [n]$$

$$u_1(g_1^*) + \ldots + u_n(g_n^*) = 1$$

στο οποίο οι μερικές χρησιμότητες u_i και η ολική χρησιμότητα u κανονικοποιούνται στο διάστημα [0,1].

• Η ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Στην UTA, η εκτίμηση του συστήματος των συναρτήσεων χρησιμότητας γίνεται σε δύο στάδια.

Στο πρώτο στάδιο εκτιμώνται οι βέλτιστες μερικές χρησιμότητες και η ολική χρησιμότητα σύμφωνα με το αθροιστικό μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων.

Στο δεύτερο στάδιο γίνεται ανάλυση ευστάθειας του ολικού βέλτιστου. Σε περίπτωση ύπαρξης πολλαπλών λύσεων προσδιορίζονται εκείνες οι βέλτιστες συναρτήσεις χρησιμότητας που μεγιστοποιούν τα βάρη των κριτηρίων.

Για την εκτίμηση των μερικών χρησιμοτήτων στο πρώτο στάδιο και την ανάλυση ευστάθειας του ολικού βέλτιστου στο δεύτερο χρησιμοποιούνται γραμμικά προγράμματα με σκοπό την εύρεση βέλτιστων συναρτήσεων χρησιμότητας που ελαχιστοποιούν μια συνάρτηση ολικού σφάλματος.

Η συνάρτηση σφάλματος εκφράζει στην αναφορική απόφαση τις ενδεχόμενες υπερεκτιμήσεις ή/και υποεκτιμήσεις των εναλλακτικών επιλογών. Η δε ελάχιστη τιμή της αποτελεί κριτήριο ελέγχου του βαθμού συσχέτισης της αναφορικής απόφασης με το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων.

Ο βαθμός συσχέτισης ελέγχεται παράλληλα και με το τ-Kendall που η τιμή του στο διάστημα [-1,1] εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο διατάξεων.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μέθοδος UTA αναλύεται στα εξής στάδια:

Στάδιο 1: Διαίρεση των διαστημάτων $[g_{i_*}, g_i^*]$ σε $r_i - 1$ ίσα μέρη:

$$[g_{i_*}, g_i^*] = [g_{i_*} = g_i^1, \ldots, g_i^j, g_i^{j+1}, \ldots, g_i^{r_i} = g_i^*]$$

Στάδιο 2: Προσδιορισμός των περιορισμών μονοτονίας

$$u_i(g_i^{j+1}) \geq u_i(g_i^j) \quad \forall \; g_i^j, \; g_i^{j+1} \in [g_{i_*}, g_i^*], \; i \in [n]$$

Στάδιο 3: Παρουσίαση της ολικής χρησιμότητας για κάθε a_j συναρτήσει των μερικών χρησιμοτήτων:

$$u[\underline{g}(a_j)] = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(a_j))$$

και στη συνέχεια συναρτήσει των μεταβλητών

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad , \; i \in [n], \; j \in [r_i - 1]$$

με την βοήθεια των σχέσεων

$$u_i(g_i^1) = 0, \quad u_i(g_i^j) = \sum_{k=1}^{j-1} w_{ik} \quad \text{για } j > 1$$

Στάδιο 4: Εισαγωγή για κάθε $a_j \in A$ μίας συνάρτησης διπλού σφάλματος

$$\sigma(a_j) = (\sigma^+(a_j),\ \sigma^-(a_j))$$

και για κάθε $(a_j,\ a_{j+1})$, $j \in [k-1]$ προσδιορισμός των σχέσεων:

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = u(\underline{g}(a_j)) - u(\underline{g}(a_{j+1})) + \sigma^+(a_j) - \sigma^-(a_j) - \sigma^+(a_{j+1}) + \sigma^-(a_{j+1})$$

Στάδιο 5: Επίλυση του γραμμικού προγράμματος:

$$\min F = \sum_{j=1}^{k} \{ \sigma^+(a_j) + \sigma^-(a_j) \}$$

$$\Delta(a_j,\ a_{j+1}) \geq \delta \quad \text{αν} \quad a_j \succ a_{j+1}$$
$$= 0 \quad \text{αν} \quad a_j \sim a_{j+1} \qquad j \in [k-1]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i-1} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad , \quad i \in [n],\ j \in [r_i - 1]$$

$$\sigma^+(a_j)\ ,\ \sigma^-(a_j) \geq 0 \quad , \quad j \in [k]$$

όπου δ είναι μικρός θετικός αριθμός.

Στάδιο 6: Διερεύνηση της ύπαρξης πολλαπλών λύσεων στο γραμμικό πρόγραμμα του προηγούμενου σταδίου. Αν η βέλτιστη λύση είναι μοναδική τότε τέλος. Αν όχι τότε επίλυση των ακόλουθων γραμμικών προγραμμάτων.

$$\max p_i = \sum_{j=1}^{r_i-1} w_{ij}$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) \geq \delta \quad \text{αν} \quad a_j \succ a_{j+1}$$

$$= 0 \quad \text{αν} \quad a_j \sim a_{j+1} \qquad j \in [k-1]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i-1} w_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sigma^+(a_j) + \sigma^-(a_j) \right) \leq F^*$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad , \quad i \in [n], \; j \in [r_i - 1]$$

$$\sigma^+(a_j) \; , \; \sigma^-(a_j) \geq 0 \quad , \quad j \in [k]$$

όπου F^* είναι η βέλτιστη τιμή του σφάλματος στο γραμμικό πρόγραμμα του προηγούμενου βήματος.

Στάδιο 7: Υπολογισμός της μέσης τιμής των n βέλτιστων συναρτήσεων χρησιμότητας του προηγούμενου σταδίου. Τέλος.