ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής εργασίας εμπίπτει στην Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research) και πιο συγκεκριμένα στον κλάδο της που αναφέρεται ως Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων (Inventory Control Theory). Η Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων ασχολείται με την διαχείριση του ύψους των αποθεμάτων ενός ή περισσοτέρων αγαθών, με σκοπό την απρόσκοπτη ικανοποίηση της ζήτησης με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Το βασικό πρόβλημα της θεωρίας αποθεμάτων είναι ο προσδιορισμός του ύψους των παραγγελιών καθώς και ο χρονικός προγραμματισμός τους. Μας ενδιαφέρει δηλαδή, με απλούς όρους, πόσο και πότε πρέπει να παραγγείλουμε. Για τη μελέτη ενός προβλήματος αποθεμάτων θα πρέπει να είναι γνωστές οι ιδιαιτερότητες της δομής του συστήματος, αφού στις ποικίλες εφαρμογές, τα πλαίσια λειτουργίας διαφέρουν ουσιωδώς.

Μια πρώτη διάκριση των μοντέλων αποθεμάτων γίνεται με βάση τη ζήτηση του προϊόντος. Τα μοντέλα στα οποία η ζήτηση είναι γνωστή με βεβαιότητα αναφέρονται ως προσδιοριστικά ή ντετερμινιστικά σε αντίθεση με τα μοντέλα στα οποία η ζήτηση είναι γνωστή μόνο πιθανοθεωρητικά, που αναφέρονται ως στοχαστικά. Επιπλέον τα μοντέλα διακρίνονται σε συνεχούς και σε περιοδικής επιθεώρησης ανάλογα με το αν είναι δυνατή η συνεχής παρακολούθηση του ύψους του αποθέματος ή όχι.

Άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τα μοντέλα είναι ο τρόπος αντιμετώπισης των ελλειμμάτων, τα διάφορα κόστη που υπάρχουν, οι πιθανές εκπτώσεις λόγω οικονομιών κλίμακας, ο χρονικός ορίζοντας λειτουργίας του μοντέλου, η χωρητικότητα των αποθηκών κλπ. Οι παράγοντες αυτοί οδηγούν σε πολύ διαφορετικές συμπεριφορές τα συστήματα και γι’αυτό ο επιχειρησιακός ερευνητής θα πρέπει να βεβαιωθεί ότι το μοντέλο απεικονίζει αρκετά πιστά το πραγματικό σύστημα.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα ως μεθοδολογία εφαρμόστηκε αρχικά στις δραστηριότητες Logistics, κατά την διάρκεια του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου. Ομάδες επιστημόνων αντιμετώπιζαν προβλήματα τα οποία δεν μπορούσαν να επιλυθούν με τις παραδοσιακές μεθόδους. Η επιτυχής εφαρμογή αρχών της Επιχειρησιακής έρευνας παράλληλα με την μαθηματική ανάπτυξη της μεθόδου Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή οδήγησαν στην καθιέρωση της Επιχειρησιακής Έρευνας ως νέου αυτόνομου γνωστικού πεδίου από τις αρχές της δεκαετίας 1950 - 1959.

Η πρώτη εργασία που έγινε στη μοντελοποίηση της διαχείρισης αποθεμάτων είναι του Ford Harris (1913), ο οποίος τυποποίησε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο αποθεμάτων και απέδειξε τον τύπο για την ποσότητα οικονομικής παραγγελίας (Economic Order Quantity – E.O.Q.). Αργότερα τράβηξαν το επιστημονικό ενδιαφέρον οι έρευνες του R.H. Wilson (1934), του οποίου οι εργασίες δημοσιεύονταν για τα επόμενα δεκαπέντε χρόνια. Στις αρχές της δεκαετίας του ’50 δημοσιεύθηκαν οι εργασίες των Arrow, Harris και Marschak (1951) καθώς και των Dvoretsky, Kiefer και Wolfowitz (1952 a&b), οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση για τη μετέπειτα εξέλιξη στην μαθηματική θεωρία αποθεμάτων. Ο T.M. Whitin (1957) παρουσίασε τη σχέση μεταξύ της κλασικής οικονομικής σκέψης και θεμάτων στη διαχείριση αποθεμάτων και ήταν ένας από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με το (Q, r) μοντέλο υπό συνθήκες αβεβαιότητας, το οποίο μετέπειτα αποτέλεσε το ορόσημο για πολλά συστήματα αποθεμάτων.

Ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών επιστημόνων έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά μοντέλα αποθεμάτων κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950. Οι Bellman, Glisksberg και Gross (1955) έδειξαν πώς οι μέθοδοι του δυναμικού προγραμματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων απλών μοντέλων αποθεμάτων με στοχαστική ζήτηση. Μία σειρά μαθηματικών μοντέλων από τους Arrow, Karlin και Scarf (1958) έδωσαν την ώθηση για μετέπειτα εργασίες στο συγκεκριμένο πεδίο.

Σήμερα ο αριθμός των εργασιών που έχουν ήδη δημοσιευθεί σχετικά με προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων ανέρχεται σε αρκετές χιλιάδες.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Το κόστος και τα προβλήματα στη διανομή προϊόντων καθιστούν απαγορευτικό για μια επιχείρηση τη συνεχή τοποθέτηση παραγγελιών. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω, οι επιχειρήσεις προβλέπουν τη ζήτηση για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και προβαίνουν στην εξασφάλιση κατάλληλου αποθέματος που θα καλύψει τη ζήτηση αυτή. Από την άλλη πλευρά η ύπαρξη αποθέματος δημιουργεί κόστη στην επιχείρηση (λόγω δέσμευσης κεφαλαίου, πληρωμής ασφαλίστρων, έξοδα λειτουργίας αποθήκης κλπ.). Στόχος μιας επιχείρησης είναι να υπολογιστεί η κατάλληλη *ποσότητα παραγγελίας* που θα ελαχιστοποιήσει τα κόστη που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια δημιουργίας και διατήρησης του αποθέματος.

Όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του αποθέματος που πρέπει να διατηρούμε, λαμβάνουμε υπόψη μας τα διάφορα κόστη που σχετίζονται με το απόθεμα. Τέτοια κόστη είναι το κόστος αγοράς, το κόστος εκκίνησης παραγγελίας, το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης και το κόστος ελλείψεων.

Το κόστος εκκίνησης παραγγελίας ορίζεται ως το κόστος τοποθέτησης μιας παραγγελίας και δεν εξαρτάται από το ύψος της παραγγελίας. Περιλαμβάνει το εργατικό κόστος του τμήματος παραγγελιών, το κόστος του εγγράφου παραγγελίας, κόστος εισαγωγής δεδομένων, εγκατάσταση υποδομής παραγγελιών, αποστολής και λήψης εγγράφων κτλ

Με τον όρο κόστος αγοράς εννοούμε το κόστος αγοράς (ή παραγωγής) των προϊόντων μιας παραγγελίας. Το κόστος αυτό είναι συνάρτηση του ύψους της παραγγελίας. Στις περισσότερες εφαρμογές θεωρείται γραμμικό και υπολογίζεται από το μοναδιαίο κόστος αγοράς επί το ύψος της παραγγελίας.

Το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης των προϊόντων στην αποθήκη περιλαμβάνει τα παρακάτω επιμέρους κόστη:

1. Κόστος αποθήκης. Το κόστος αυτό περιλαμβάνει τα έξοδα ενοικίασης ή συντήρησης της αποθήκης.
2. Κόστος ζημιών κατά την διάρκεια αποθήκευσης.
3. Κόστος κεφαλαίου. Είναι το κόστος από το κεφάλαιο που δεσμεύεται για την αγορά των αποθεμάτων. Τα κεφάλαια αυτά θα μπορούσαν να είχαν επενδυθεί σε άλλο τμήμα της εταιρίας.
4. Έξοδα ασφάλισης του αποθέματος.

5. Έξοδα καταστροφής προϊόντων που δεν μπορούν να καταναλωθούν λόγω ακαταλληλότητας.
6. Φόροι.
7. Λοιπά κόστη, όπου περιλαμβάνονται εργατικά κόστη, έξοδα διοίκησης της αποθήκης κτλ.

Το κόστος ελλείμματος παρουσιάζεται σε μια επιχείρηση όταν η ζητούμενη ποσότητα προϊόντος υπερβαίνει το διαθέσιμο απόθεμα αυτού.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις «χειρισμού» του κόστους ελλείμματος προϊόντων:

Στην πρώτη περίπτωση (ικανοποίηση της παραγγελίας με υστέρηση-backlogging), η υπερβολική ζήτηση δεν χάνεται, αλλά οι πελάτες αναμένουν μέχρι την επόμενη παραλαβή του συγκεκριμένου προϊόντος. Στην περίπτωση αυτή, το κόστος ελλείμματος αντικατοπτρίζει τη διαμόρφωση μιας άσχημης εικόνας της επιχείρησης απέναντι στους πελάτες της καθώς και τη βλάβη στην αξιοπιστία της, λόγω της καθυστέρησης παραλαβής του προϊόντος.

Στη δεύτερη περίπτωση (μη ικανοποίηση της παραγγελίας με υστέρηση-no backlogging), όταν υπάρξει υπερβολική ζήτηση του προϊόντος τότε οι πελάτες δεν περιμένουν μέχρι την επόμενη παραλαβή αλλά αντίθετα:

1. Η υπερβολική ζήτηση ικανοποιείται με μια έκτακτη – άμεση παραγγελία η οποία παραλαμβάνεται με κάποιο δαπανηρό μέσο, επιφέροντας επιπλέον κόστος.
2. Η υπερβολική ζήτηση δεν ικανοποιείται καθόλου τελικά, οπότε το κόστος ελλείμματος είναι ουσιαστικά το κόστος της χαμένης εισροής εισοδήματος συν το κόστος της απώλειας καλής πίστης (goodwill).

Το συνολικό κόστος αποθεμάτων γενικά προκύπτει από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} \textit{Συνολικό} \\ \textit{κόστος} \\ \textit{αποθεμάτων} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Κ}\textit{όστος} \\ \textit{αγοράς} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κ}\textit{όστος} \\ \textit{εκκίνησης} \\ \textit{παραγγελίας} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κ}\textit{όστος} \\ \textit{αποθήκευσης} \\ \textit{διατήρησης} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Κ}\textit{όστος} \\ \textit{ελλείψεων} \end{pmatrix}$$

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ποσότητα αποθέματος είναι :

- *Ο ρυθμός ζήτησης*, που ορίζεται ως το πλήθος προϊόντων που ζητούνται προς κατανάλωση ανά χρονική μονάδα. Στα μοντέλα προσδιοριστικής ζήτησης ο ρυθμός αυτός είναι γνωστός, ενώ αντίθετα στα στοχαστικά μοντέλα ζήτησης, η ζήτηση κάθε περιόδου είναι τυχαία μεταβλητή. Η πιο απλή κατηγορία μοντέλων αναφέρεται στα μοντέλα σταθερής ζήτησης όπου ο ρυθμός ζήτησης είναι γνωστός και σταθερός.

- *Ο χρόνος* που μεσολαβεί μεταξύ *παραγγελίας και παράδοσης* (Lead time). Σε ορισμένα μοντέλα ο χρόνος αυτός είναι μηδενικός.
- *Ο κύκλος παραγγελίας,* που ορίζεται το διάστημα μεταξύ δυο παραγγελιών.
- *Το απόθεμα ασφαλείας,* που είναι το απόθεμα που διατηρείται προκειμένου να αντιμετωπισθεί υψηλότερη ζήτηση από την προβλεπόμενη κατά την διάρκεια του χρόνου μεταξύ παραγγελίας – παράδοσης.
- *Οι εκπτώσεις* που δίνονται από τους κατασκευαστές στους πελάτες και είναι ανάλογες της ποσότητας παραγγελίας .

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια, καθένα από τα οποία συνοψίζει μια κατηγορία συγγενικών μοντέλων. Σε κάθε κεφάλαιο οι βασικές υποθέσεις είναι οι ίδιες και τα εργαλεία της μαθηματικής ανάλυσης είναι παρόμοια.

Στο κεφάλαιο 1 εξετάζουμε μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης με προσδιοριστική ομοιόμορφη ζήτηση. Στα μοντέλα αυτά βελτιστοποιούμε τη διαχείριση του αποθέματος ενός αγαθού το οποίο ζητείται με γνωστό σταθερό ρυθμό για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Επιπλέον θεωρούμε ότι είναι δυνατή η συνεχής καταγραφή του αποθέματος του προϊόντος όπως και η δυνατότητα παραγγελίας οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Στα μοντέλα αυτά δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα και η εξέλιξη του συστήματος παρουσιάζει ομοιογένεια στο χρόνο. Για το λόγο αυτό για τη μελέτη τους μπορούμε να περιοριστούμε στην εξέλιξη του αποθέματος σε έναν κύκλο παραγγελίας και αρκεί η χρησιμοποίηση των κλασικών τεχνικών βελτιστοποίησης του απειροστικού λογισμού πολλών μεταβλητών.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης με προσδιοριστική ζήτηση. Στα μοντέλα αυτά η ζήτηση είναι γνωστή για χρονικό ορίζοντα πεπερασμένων το πλήθος χρονικών περιόδων. Επιπλέον υπάρχει δυνατότητα τοποθέτησης παραγγελιών σε κάθε χρονική περίοδο. Λόγω της ανομοιογένειας που υπάρχει στην ζήτηση των διάφορων περιόδων (π.χ. λόγω φαινομένων εποχικότητας) και στον πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα παραγωγής–αποθήκευσης, το σύστημα δεν παρουσιάζει ομοιογένεια στον χρόνο και οι κλασικές τεχνικές βελτιστοποίησης που επαρκούν για την μελέτη των μοντέλων του κεφαλαίου 1 δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Τα μοντέλα χωρίς (πάγια) κόστη εκκίνησης ανάγονται σε προβλήματα μεταφοράς και επιλύονται με σχετικούς αλγορίθμους, ενώ τα μοντέλα με (πάγια) κόστη εκκίνησης ανά περίοδο ανάγονται σε μοντέλα δυναμικού προγραμματισμού και επιλύονται με αντίστοιχες επαναληπτικές μεθόδους.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης με στοχαστική ζήτηση. Τα μοντέλα αυτά αντιμετωπίζονται με μια σύνθεση πιθανοθεωρητικών και αναλυτικών τεχνικών. Λόγω της μικρής εφαρμόσιμοτητας τους στην πράξη παρουσιάζουμε μόνο τα θεμελιώδη αποτελέσματα γι αυτή την κατηγορία.

Τέλος στο κεφάλαιο 4 αναλύονται μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης με στοχαστική ζήτηση. Τα μοντέλα μιας περιόδου μελετώνται με σχετικά απλές αναλυτικές τεχνικές. Τα μοντέλα πολλών περιόδων μοντελοποιούνται ως προβλήματα στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού. Η λύση τους είναι εξαιρετικά επίπονη και απαιτεί την χρήση ισχυρών υπολογιστών. Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας θα εστιαστούμε στα βασικά ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά αυτών των μοντέλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ

1.1 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ (Economic order quantity model – EOQ Model)

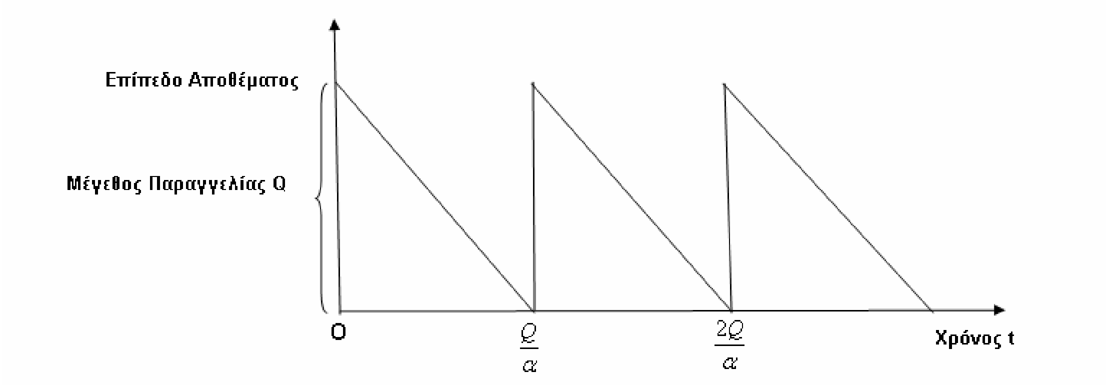
Θεωρούμε ένα προϊόν το οποίο διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος είναι γνωστός και σταθερός, έστω α (μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα). Αυτό σημαίνει ότι το προϊόν καταναλίσκεται από την αποθήκη που περιέχει το απόθεμα με ρυθμό α και για το λόγο αυτό μιλάμε για προσδιοριστική ομοιόμορφη ζήτηση. Επιπλέον, η πολιτική που ακολουθούμε για την αναπλήρωση του αποθέματος είναι να παραγγέλνουμε ποσότητα Q μονάδων κάθε φορά που το απόθεμα μηδενίζεται. Κάθε παραγγελία θεωρείται άμεσα παραδοτέα (Χρόνος παραγγελίας – παραλαβής = 0).

Βασικές υποθέσεις – παράμετροι του μοντέλου:

- K = Πάγιο κόστος ανά παραγγελία (αυτό ενσωματώνει το κόστος εκκίνησης της παραγωγικής διαδικασίας ή κόστη γραφειοκρατίας για τη διεκπεραίωση της παραγγελίας κλπ.)
- c = Κόστος παραγωγής ή αγοράς ανά μονάδα προϊόντος.
- h = Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα του χρόνου.
- α = Ρυθμός ζήτησης.
- Γραμμικά κόστη αγοράς και αποθήκευσης προϊόντων.
- Δεν επιτρέπονται ελλείμματα.
- Δεν υπάρχουν εκπτώσεις για παραγγελίες μεγάλων ποσοτήτων του προϊόντος.

Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε το ύψος των παραγγελιών Q, καθώς και των χρονικών αποστάσεων μεταξύ των παραγγελιών T, ώστε να ελαχιστοποιείται το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος. Θεωρούμε ότι η διαθέσιμη αποθήκη είναι άπειρης χωρητικότητας και επιπλέον το σύστημα λειτουργεί επ’αόριστον. Επιπλέον, λόγω της ομοιόμορφης ζήτησης, το ύψος της παραγγελίας θα είναι πάντα το ίδιο. Η εξέλιξη του ύψους (επιπέδου) του αποθέματος σε σχέση με το χρόνο θα έχει τη μορφή:

Επίπεδο αποθέματος ως συνάρτηση του χρόνου



Στην προσπάθεια να ικανοποιήσουμε τον σκοπό που προαναφέρθηκε, δηλαδή την ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους και λόγω της περιοδικότητας που εμφανίζεται παραπάνω, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα σε ένα κύκλο λειτουργίας του συστήματος μήκους T. Για δεδομένο Q και ρυθμό ζήτησης α έχουμε ότι $T = \dfrac{Q}{a}$. Επιπλέον το συνολικό κόστος (total cost) που συσσωρεύεται σε έναν κύκλο ως συνάρτηση $TC\ (Q)$ του Q είναι:

$$TC\ (Q) = K + cQ + \int_0^T h(Q - at)dt$$

όπου ο πρώτος προσθετέος αναφέρεται στο πάγιο κόστος, ο δεύτερος προσθετέος αναφέρεται στο κόστος αγοράς/παραγωγής και ο τρίτος προσθετέος στο κόστος αποθήκευσης. Πραγματικά το ύψος του αποθέματος τη στιγμή $t \in [0,\ T]$ είναι Q–at και επομένως το συνολικό κόστος αποθήκευσης είναι:

$$\int_0^T h(Q - at)dt = \left[h\left(Qt - a\frac{t^2}{2} \right) \right]_{t=0}^{T} = h\left(QT - a\frac{T^2}{2} \right),$$

οπότε αντικαθιστώντας το T με Q/α έχουμε τελικά:

$$\int_0^T h(Q - at)dt = \frac{hQ^2}{\alpha} - \frac{hQ^2}{2\alpha} = \frac{hQ^2}{2\alpha}.$$

Έχουμε επομένως

$$TC\,(Q) = K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}.$$

Έτσι το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα (total cost per unit) σε έναν κύκλο λειτουργίας ως συνάρτηση *TCU (Q)* του *Q* είναι:

$$TCU\,(Q) = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2}{2\alpha}}{\frac{Q}{\alpha}} = \frac{aK}{Q} + \alpha c + \frac{hQ}{2}$$

Αναζητούμε το βέλτιστο Q^*, δηλαδή αυτό που ελαχιστοποιεί την *TCU (Q).*

Δηλαδή πρέπει :

$$\frac{dTCU(Q)}{dQ} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2TCU(Q)}{dQ^2} > 0$$

οπότε έχουμε

$$\frac{dTCU(Q)}{dQ} = -\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2TCU(Q)}{dQ^2} = \frac{2aK}{Q^3},$$

και

$$\frac{dTCU(Q^*)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \quad \text{και} \quad \frac{d^2TCU(Q^*)}{dQ^2} = \frac{2aK}{Q^3} > 0.$$

Συνεπώς η βέλτιστη ποσότητα οικονομικής παραγγελίας είναι:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}},$$

και ο αντίστοιχος χρόνος μεταξύ των παραγγελιών είναι:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}.$$

Το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα είναι τότε:

$$TCU\,(Q^*) = \alpha c + \sqrt{2aKh}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εταιρεία που φτιάχνει τηλεοράσεις, κατασκευάζει και ένα είδος μεγαφώνου γι αυτές ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Η Εταιρεία παράγει με σταθερό ρυθμό 96.000 τηλεοράσεις ανά έτος, που απαιτούν αντίστοιχα μεγάφωνα το χρόνο. Το κόστος παραγωγής ενός μεγαφώνου ανέρχεται στην τιμή των 10 €. Το κόστος εκκίνησης παραγωγής μεγαφώνων είναι 12.000 €. Το κόστος αποθήκευσης ανά μεγάφωνο και ανά μήνα είναι 0,30 €. Να βρεθεί βέλτιστη πολιτική διαχείρισης του αποθέματος, αν δεν επιτρέπονται ελλείψεις και το απόθεμα καταγράφεται συνεχώς.

ΛΥΣΗ

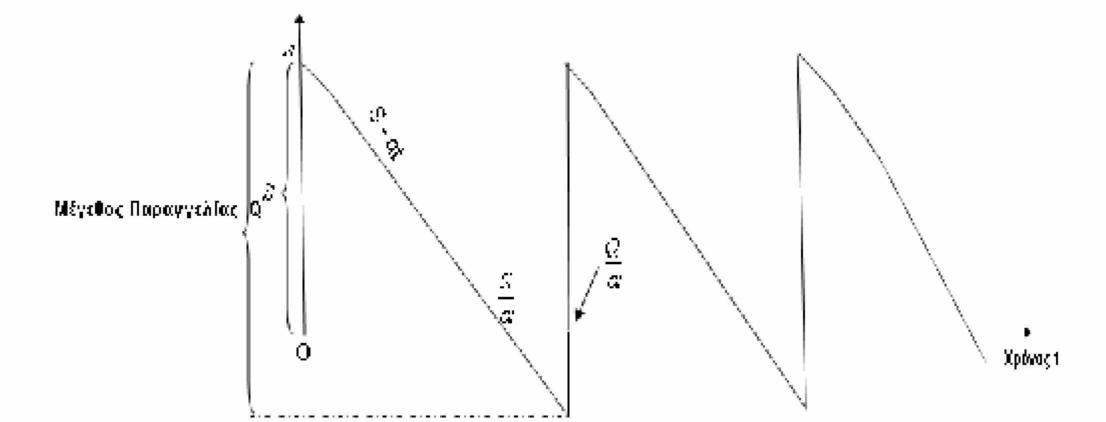
Εδώ έχουμε $a = \frac{96.000}{12} = 8.000$ προϊόντα το μήνα, $K = 12.000$, $c = 10$, $h = 0.30$, και ισχύουν οι υποθέσεις του κλασικού προτύπου οικονομικής ποσότητας παραγγελίας. Επομένως η βέλτιστη πολιτική θα είναι η παραγωγή

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = 25.298 \text{ μεγαφώνων, κάθε } T_0^* = \frac{Q^*}{a} = 3,2 \text{ μήνες.}$$

1.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με το βασικό μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας αλλά επιτρέπονται ελλείμματα αποθεμάτων τα οποία αναπληρώνονται από την επόμενη παραγγελία (backlogging). Στο μοντέλο αυτό υπάρχουν επομένως και κόστη έλλειψης. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε δύο μεταβλητές *Q* και *S* που παριστάνουν την ποσότητα παραγγελίας και το επίπεδο του αποθέματος αμέσως μετά την παραλαβή μιας παραγγελίας. Επομένως, η εξέλιξη του αποθέματος ως συνάρτηση του χρόνου έχει τη μορφή:

Επίπεδο αποθέματος ως συνάρτηση του χρόνου όταν υπάρχουν ελλείμματα



Έστω:

- *p* = Κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα του χρόνου. Τότε, αν *S* είναι το επίπεδο αποθέματος μετά την τοποθέτηση *Q* παραγόμενων μονάδων, θα έχουμε ότι το μέγιστο έλλειμμα αποθέματος που παρατηρείται αμέσως πριν την τοποθέτηση *Q* παραγόμενων μονάδων είναι *Q-S*.

Τότε η συνάρτηση συνολικού κόστους ανά κύκλο παραγωγής *TC(Q, S)* είναι:

$$TC(Q, S) = K + cQ + \frac{hS^2}{2a} + \frac{p(Q-S)^2}{2\alpha},$$

όπου ο πρώτος προσθετέος αναφέρεται στο πάγιο κόστος, ο δεύτερος προσθετέος αναφέρεται στο κόστος αγοράς/παραγωγής, ο τρίτος προσθετέος στα κόστη αποθήκευσης του κύκλου και ο τελευταίος στα κόστη ελλειμμάτων του κύκλου.

Πράγματι έχουμε:

- Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας ανά κύκλο παραγωγής = $K + cQ$
- Κόστος αποθήκευσης ανά κύκλο παραγωγής = $\frac{hS}{2}\frac{S}{a} = \frac{hS^2}{2a}$

Επειδή τα ελλείμματα εμφανίζονται στο τελευταίο τμήμα μήκους $\frac{(Q-S)}{a}$ ενός κύκλου, έχουμε ότι:

- Κόστος ελλειμμάτων ανά κύκλο παραγωγής =

$$\frac{p(Q-S)}{2}\frac{Q-S}{a} = \frac{p(Q-S)^2}{2a}.$$

Έτσι το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα (total cost per unit) σε έναν κύκλο λειτουργίας είναι:

$$TCU(Q,S) = \frac{K + cQ + hS^2/(2\alpha) + p(Q-S)^2/(2\alpha)}{Q/\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha K}{Q} + \alpha c + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}.$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο βελτιστοποίησης συνάρτησης 2 μεταβλητών *(S, Q)* χωρίς περιορισμούς, προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση *T.*

Έχουμε:

$$\frac{\partial TCU}{\partial S} = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q},$$

$$\frac{\partial TCU}{\partial Q} = -\frac{a K}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2}$$

Θέτοντας

$$\frac{\partial TCU}{\partial S}(Q^*, S^*) = \frac{\partial TCU}{\partial Q}(Q^*, S^*) = 0,$$

προκύπτουν οι ιδανικές ποσότητες:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} \quad \text{και} \quad Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $TCU(Q,S)$ είναι κυρτή και επομένως οι παραπάνω ποσότητες πράγματι την ελαχιστοποιούν ολικά. Ο αντίστοιχος βέλτιστος χρόνος μεταξύ των παραγγελιών είναι:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

Το μέγιστο έλλειμμα αποθέματος δίνεται από την σχέση:

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου υπάρχει δυνατότητα ελλείψεων, με κόστος έλλειψης p=0,20€.

ΛΥΣΗ

Εδώ είναι $a = \frac{96.000}{12} = 8.000$ προϊόντα το μήνα, K = 12.000, c =10, h = 0,30, p=0,20 και ισχύουν οι υποθέσεις του προτύπου με ελλείψεις.

Άρα η βέλτιστη πολιτική θα είναι η παραγωγή $Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$ =40.000 μεγαφώνων και το αντίστοιχο επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας είναι $S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$ =16.000 μεγάφωνα. Η μέγιστη έλλειψη αποθέματος ισούται με 24.000 μεγάφωνα. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί γιατί το κόστος έλλειψης έχει θεωρηθεί στο συγκεκριμένο παράδειγμα μικρότερο από το κόστος αποθήκευσης. Ο βέλτιστος χρόνος μεταξύ παραγγελιών είναι $T_0^* = \frac{Q*}{a} =$ 5 μήνες.

1.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΚΠΤΩΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ένα προϊόν το οποίο διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος είναι γνωστός και σταθερός, έστω a (μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα). Επιπλέον, οι υποθέσεις είναι οι ίδιες με αυτές του βασικού μοντέλου οικονομικής παραγγελίας χωρίς ελλείμματα, με μόνη διαφορά ότι το κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος είναι c_1 για παραγγελίες μεγέθους μικρότερες του q, ενώ είναι c_2 για παραγγελίες μεγέθους μεγαλύτερου ή ίσου του q. Κάθε παραγγελία θεωρείται άμεσα παραδοτέα. Επομένως

$$c = \begin{Bmatrix} c_1, & if \quad Q \leq q \\ c_2, & if \quad Q > q \end{Bmatrix}, \; c_1 > c_2,$$

και άρα

$$\text{Κόστος Αγοράς στη μονάδα του χρόνου} = \begin{cases} \dfrac{c_1 Q}{T} = \dfrac{c_1 Q}{\left(\dfrac{Q}{a}\right)} = ac_1, & Q \leq q \\ \dfrac{c_2 Q}{T} = \dfrac{c_2 Q}{\left(\dfrac{Q}{a}\right)} = ac_2, & Q > q \end{cases}$$

Επίσης, το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα (total cost per unit) θα είναι:

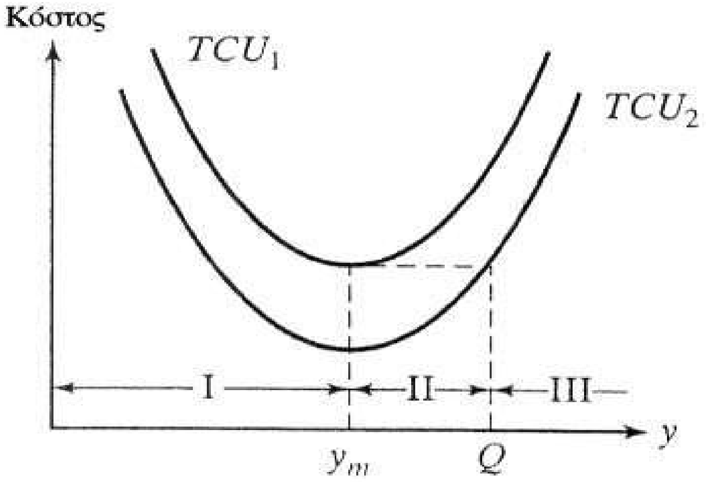
$$TCU\,(Q) = \begin{cases} TCU_1(Q) = ac_1 + \dfrac{Ka}{Q} + \dfrac{h}{2}Q, & Q \leq q \\ TCU_2(Q) = ac_2 + \dfrac{Ka}{Q} + \dfrac{h}{2}Q, & Q > q \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $TCU_1(Q)$ και $TCU_2(Q)$ απεικονίζονται γραφικά στο πρώτο σχήμα παρακάτω. Οι συναρτήσεις αυτές ελαχιστοποιούνται όταν παραγγείλουμε ποσότητα

$$y_m = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}.$$

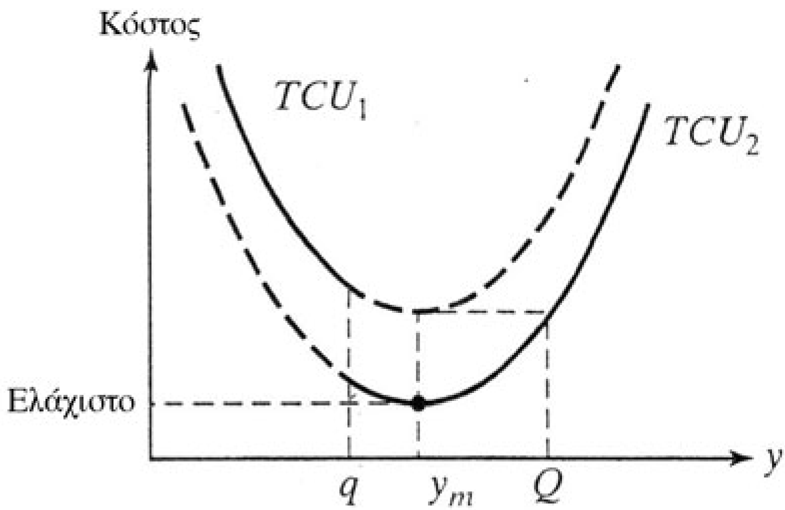
Η συνάρτηση $TCU(Q)$ παρουσιάζεται στα τρία επόμενα σχήματα ανάλογα με την περιοχή που βρίσκεται το επίπεδο απ'όπου αρχίζει η εκπτωτική τιμή.

Οι συναρτήσεις TCU_1 και TCU_2 και τα κρίσιμα σημεία y_m, Q

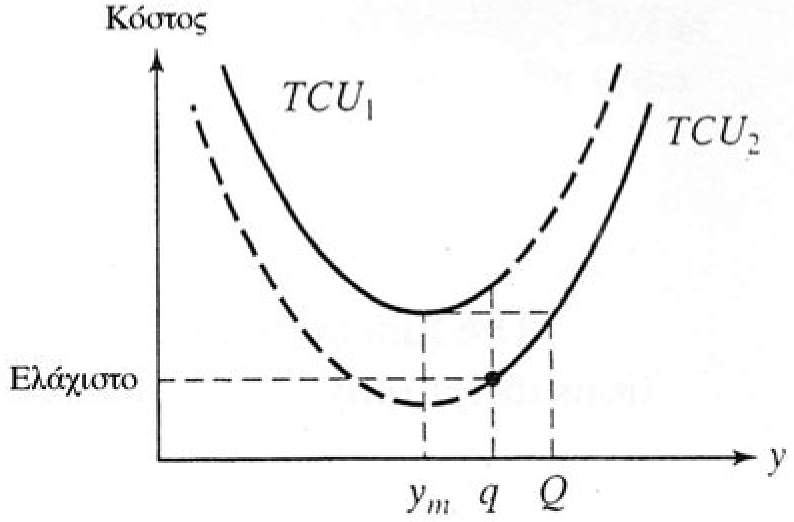


Η συνάρτηση *TCU(Q)* ανάλογα με τη θέση του *q*

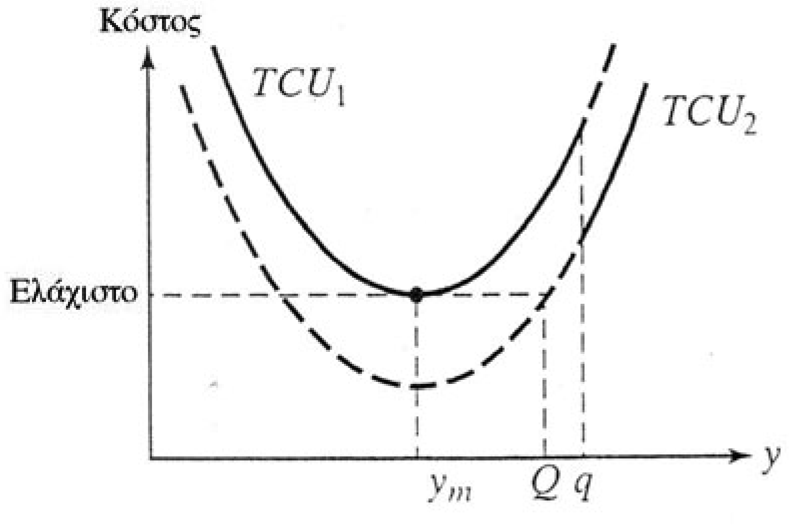
Περίπτωση Ι: $q < y_m$



Περίπτωση ΙΙ: $y_m \le q < Q$



Περίπτωση ΙΙΙ: $Q \le q$



Με βάση τα παραπάνω σχήματα, έχουμε ότι ο καθορισμός της καλύτερης ποσότητας παραγγελίας Q^* εξαρτάται από το πού κινείται το σημείο της έκπτωσης q, στις ζώνες δηλαδή I, II, III ή αλλιώς στα διαστήματα $(0, y_m)$, $[y_m, Q)$ και $[Q, \infty)$. Η τιμή της ποσότητας Q ($> y_m$) προκύπτει από την εξίσωση:

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m) \Rightarrow$$

$$\alpha c_2 + \frac{K\alpha}{Q} + \frac{hQ}{2} = TCU_1(y_m) \Rightarrow$$

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2\alpha - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2K\alpha}{h} = 0.$$

Οπότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q^* είναι:

$$Q^* = \begin{cases} y_m, \ \text{αν } q \ \text{βρίσκεται στη ζώνη I ή III} \\ q, \ \text{αν } q \ \text{βρίσκεται στη ζώνη II} \end{cases}$$

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος προκειμένου να βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q^* για το παρόν μοντέλο που περιλαμβάνει εκπτώσεις στην τιμή αγοράς των προϊόντων για αγορές πάνω από ένα όριο περιγράφεται ως εξής:

ΒΗΜΑ Ι: Ορίζω $y_m = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}$. Αν το q βρίσκεται στην ζώνη Ι ($q < y_m$), τότε $Q^* = y_m$ και σταματάμε. Διαφορετικά πάμε στο επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ ΙΙ: Βρίσκω την ποσότητα Q από την εξίσωση:

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2 a - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2Ka}{h} = 0.$$

Ορίζουμε τις ζώνες ΙΙ ($y_m \leq q < Q$) και ΙΙΙ ($Q \leq q$). Αν το q είναι στην ζώνη ΙΙ, τότε $Q^* = q$. Αλλιώς, η ποσότητα q είναι στην ζώνη ΙΙΙ και έτσι $Q^* = y_m$.

1.4 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ

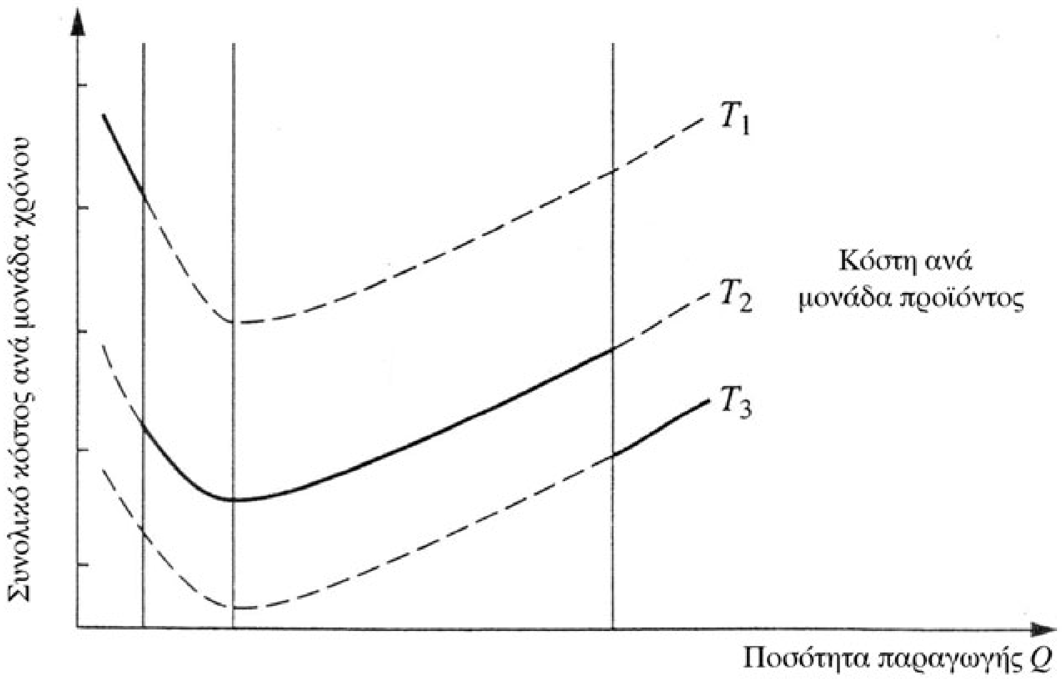
Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ένα προϊόν το οποίο διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος είναι γνωστός και σταθερός, έστω a (μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα). Επιπλέον, οι υποθέσεις είναι οι ίδιες με αυτές του βασικού μοντέλου οικονομικής παραγγελίας χωρίς ελλείμματα, με μόνη διαφορά ότι το κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος είναι c_i για μεγέθη παραγγελιών στο $[q_{i-1},\ q_i)$ όπου $c_1 > c_2 > c_3 > ... > c_n$ και $0 = q_0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$. Κάθε παραγγελία θεωρείται άμεσα παραδοτέα. Το μοντέλο αυτό είναι γενίκευση του μοντέλου που παρουσιάστηκε παραπάνω στην παράγραφο 1.3.

Επομένως το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα (total cost per unit) ως συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q θα είναι:

$$TCU(Q) = \begin{cases} TCU_1(Q) = ac_1 + \dfrac{Ka}{Q} + \dfrac{hQ}{2}, & 0 \le Q < q_1 \\ TCU_2(Q) = ac_2 + \dfrac{Ka}{Q} + \dfrac{hQ}{2}, & q_1 \le Q < q_2 \\ ... & \\ TCU_n(Q) = ac_n + \dfrac{Ka}{Q} + \dfrac{hQ}{2}, & q_{n-1} \le Q < q_n \end{cases}$$

Οι καμπύλες $TCU_i(Q)$ είναι παράλληλες και κυρτές. Έστω y_m το κοινό ελάχιστο όλων των $TCU_i(Q)$. Λόγω της κυρτότητας των $TCU_i(Q)$ για κάθε i και της σχέσης $TCU_i(Q) \ge TCU_{i+1}(Q)$, συμπεραίνουμε εύκολα ότι η ποσότητα που ελαχιστοποιεί την $TCU(Q)$ είναι η y_m ή κάποιο q_i που βρίσκεται δεξιά του y_m.

Τα παραπάνω γίνονται πιο κατανοητά παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα στο οποίο απεικονίζονται οι καμπύλες T_1, T_2, ... που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $TCU_1(Q)$, $TCU_2(Q)$, ... Η έντονη μαύρη καμπύλη που σημειώνει άλματα είναι αυτή που αντιστοιχεί στην $TCU(Q)$ που ορίζεται κατά κλάδους όπως περιγράψαμε πιο πάνω.



Τα βήματα προκειμένου να ορίσουμε την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q^* που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα είναι:

ΒΗΜΑ Ι: Ορίζουμε το $y_m = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}$. Έστω q_{i0}, q_{i0+1}, q_{i0+2}…τα q_i που είναι μεγαλύτερα του y_m.

ΒΗΜΑ ΙΙ: Υπολογίζω τις τιμές της *TCU(Q)* στα y_m, q_{i0}, q_{i0+1}, $q_{i0+2}\cdots$

Η βέλτιστη πολιτική είναι να παραγγείλουμε από τα y_m, q_{i0}, q_{i0+1}, q_{i0+2}…αυτό που αντιστοιχεί στο ελάχιστο των *TCU(*y_m*)*, *TCU(*q_{i0}*)*, *TCU(*q_{i0+1}*)*.

1.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΣΤΑΔΙΑΚΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΑΝΑΠΛΗΡΩΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ

Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ένα προϊόν το οποίο διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά. Γενικά ισχύουν οι υποθέσεις του βασικού προτύπου χωρίς ελλείμματα αλλά θεωρούμε ότι το απόθεμα αναπληρώνεται ομοιόμορφα με ρυθμό τ (μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα), αρχίζοντας με την τοποθέτηση της παραγγελίας. Απαιτούμε ο ρυθμός αναπλήρωσης τ να είναι μεγαλύτερος του ρυθμού ζήτησης α ,διότι αλλιώς θα δημιουργούνται ολοένα και μεγαλύτερα ελλείμματα.

Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:

Q = Ποσότητα παραγγελίας

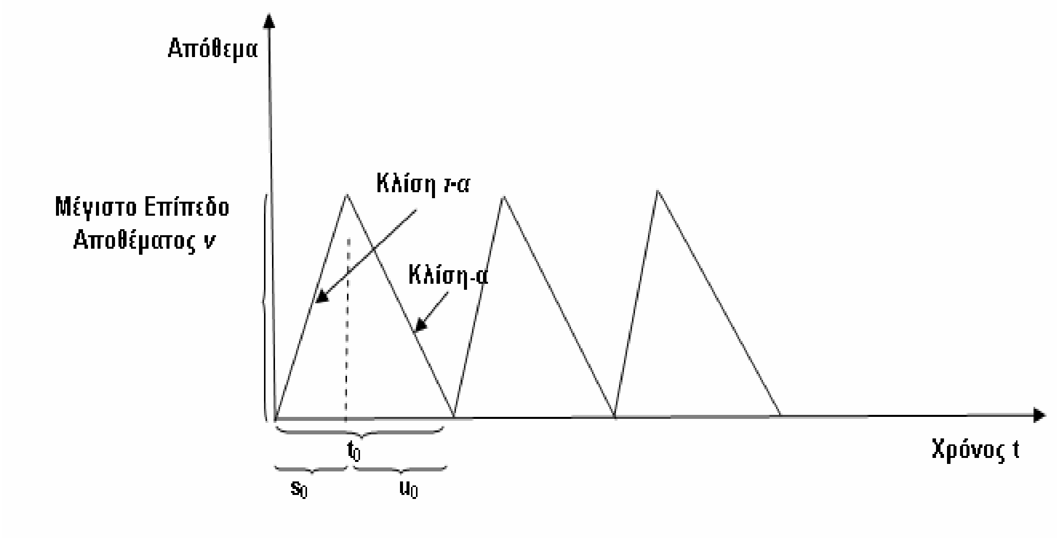
T_0 = Κύκλος παραγγελίας

v = Μέγιστο επίπεδο αποθέματος

s_0 = Περίοδος αναπλήρωσης αποθέματος στον κύκλο παραγγελίας T_0

u_0 = Περίοδος αποκλειστικής κατανάλωσης αποθέματος στον κύκλο παραγγελίας T_0.

Το επίπεδο του αποθέματος ως συνάρτηση του χρόνου εξελίσσεται όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Για δεδομένη ποσότητα παραγγελίας Q είναι:

Περίοδος αναπλήρωσης αποθέματος: $s_0 = \dfrac{Q}{\tau}$

Μέγιστο επίπεδο αποθέματος: $v = Q - \alpha\, s_0 = Q - \alpha \frac{Q}{\tau} = Q(1 - \frac{\alpha}{\tau})$.

Περίοδος αποκλειστικής κατανάλωσης αποθέματος σε κύκλο παραγγελίας:

$$u_0 = \frac{v}{\alpha} = \frac{Q}{\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\tau}).$$

Κύκλος Παραγγελίας: $T_0 = s_0 + u_0 = \frac{Q}{\tau} + \frac{Q}{\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\tau}) = \frac{Q}{\alpha}$.

Η συνολική συνάρτηση κόστους ανά κύκλο παραγωγής $TC(Q)$ είναι:

$$TC(Q) = cQ + K + h\frac{1}{2}t_0 v \; = \; cQ + K + h\frac{Q^2}{2\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\tau}),$$

όπου ο πρώτος προσθετέος αναφέρεται στο κόστος αγοράς, ο δεύτερος προσθετέος αναφέρεται στο κόστος εκκίνησης, και ο τρίτος προσθετέος στα κόστη αποθήκευσης του κύκλου.

Έτσι το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα (total cost per unit) σε έναν κύκλο λειτουργίας είναι:

$$TCU(Q) = \frac{cQ + K + \frac{hQ^2}{2\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\tau})}{\frac{Q}{\alpha}} =$$

$$= \; c\alpha + \frac{K\alpha}{Q} + \frac{hQ}{2}(1 - \frac{\alpha}{\tau}).$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο βελτιστοποίησης συνάρτησης μιας μεταβλητής χωρίς περιορισμούς, προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση T. Έχουμε:

$$\frac{dTCU(Q)}{dQ} = -\frac{K\alpha}{Q^2} + \frac{h}{2}(1 - \frac{\alpha}{\tau}).$$

Θέτοντας $\frac{dTCU}{dQ}(Q^*) = 0$ προκύπτει ότι η βέλτιστη πολιτική μας προτείνει να παραγγέλλουμε

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h(1 - \frac{\alpha}{\tau})}} \quad \text{κάθε } T_0^* = \sqrt{\frac{2K}{h\alpha(1 - \frac{\alpha}{\tau})}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου υπάρχει δυνατότητα σταδιακής αναπλήρωσης του αποθέματος με ρυθμό τ=10.000 μεγάφωνα τον μήνα , χωρίς να επιτρέπονται οι ελλείψεις.

ΛΥΣΗ

Έχουμε τώρα τ=10.000, $\alpha = \dfrac{96.000}{12} = 8.000$, K = 12.000, c =10, h = 0,30, p=0,20 και ισχύουν οι υποθέσεις του κλασικού προτύπου χωρίς ελλείψεις. Άρα η βέλτιστη πολιτική θα είναι να παράγονται κάθε φορά

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h(1-\frac{\alpha}{\tau})}} = 56.569 \text{ μεγάφωνα.}$$

Ο αντίστοιχος χρόνος μεταξύ των παραγγελιών είναι

$$T_0^* = \sqrt{\frac{2K}{h\alpha(1-\frac{\alpha}{\tau})}} = 7 \text{ μήνες.}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για την παράδοση κάθε παραγγελίας είναι $s_0 = \dfrac{Q}{\tau}$ και στο τέλος του θα έχουμε φτάσει σε επίπεδο αποθέματος $v = Q(1-\dfrac{\alpha}{\tau})$.

1.6 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟΘΗΚΗΣ

Το μοντέλο αυτό αφορά *n* (>1) προϊόντα τα οποία διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά και για τα οποία υπάρχει ο περιορισμός της χωρητικότητας της αποθήκης που χρησιμοποιείται για την φύλαξή τους. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός ζήτησης είναι γνωστός και σταθερός, έστω α_i (μονάδες προϊόντος ανά χρονική μονάδα). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι δεν επιτρέπονται ελλείμματα αποθέματος. Για κάθε προϊόν *i* όπου *i* = 1, 2, …., *n*, ορίζουμε:

α_i = Ρυθμός Ζήτησης του προϊόντος *i* όπου *i* = 1, 2… *n*

K_i = Πάγιο κόστος ανά παραγγελία (αυτό ενσωματώνει το κόστος εκκίνησης της παραγωγικής διαδικασίας ή κόστη γραφειοκρατίας για τη διεκπεραίωση της παραγγελίας κλπ.)

h_i = Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα του χρόνου.

Q_i = Ποσότητα Παραγγελίας

b_i = Απαιτούμενος χώρος αποθήκευσης ανά μονάδα αποθέματος.

B = Μέγιστος διαθέσιμος χώρος αποθήκευσης για όλα τα *n* προϊόντα.

Υπό την υπόθεση της μη ύπαρξης ελλειμμάτων, το μαθηματικό μοντέλο δίνεται από:

$$\text{Minimize } TCU\,(Q_1 , Q_2 \ldots Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i a_i}{Q_i} + c_i a_i + \frac{h_i Q_i}{2}\right)$$

με περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i \le B,$$

όπου $Q_i > 0$, για *i* = 1, 2, …., *n*.

Τα βήματα προκειμένου να ορίσουμε τις κατάλληλες ποσότητες παραγγελίας Q_i^* είναι:

ΒΗΜΑ Ι: Υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \alpha_i}{h_i}}, \text{ με } i = 1, 2\ldots n.$$

ΒΗΜΑ ΙΙ: Ελέγχουμε αν οι ποσότητες Q_i^* (i=1, 2, ….,n) ικανοποιούν τον περιορισμό που τέθηκε για τον χώρο αποθήκευσης. Αν τον ικανοποιούν, σταματάμε και οι ποσότητες Q_i^* είναι οι καλύτερες δυνατές. Διαφορετικά, προχωράμε στο επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ ΙΙΙ: Χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές της μεθόδου Lagrange, προκειμένου να βρούμε τις τιμές των ποσοτήτων παραγγελιών.

Η συνάρτηση Lagrange δίνεται από:

$$L\,(\lambda, Q_1, Q_2 \ldots Q_n) = TCU\,(Q_1, Q_2 \ldots Q_n) - \lambda\,(\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i - B) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{K_i a_i}{Q_i} + c_i a_i \frac{h_i Q_i}{2}) - l\,(\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i - B)$$

όπου λ (<0) είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Θέτουμε τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν (αναγκαία και ικανή συνθήκη λόγω της κυρτότητας της αντικειμενικής συνάρτησης και της κυρτής εφικτής περιοχής) και έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{K_i \alpha_i}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda b_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \alpha_i}{h_i - 2\lambda^* b_i}}, \; i=1, 2\ldots n$$

και

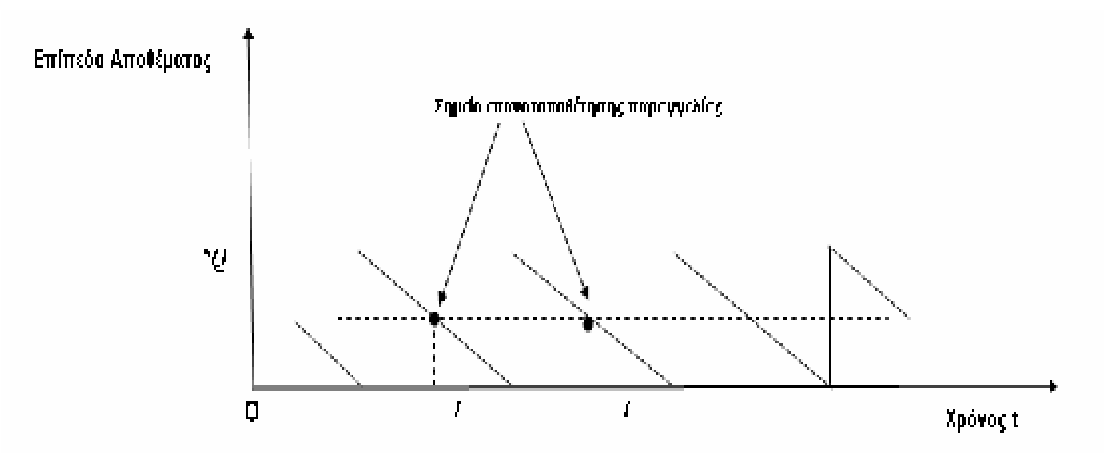
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i + B = 0\,.$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων με κάποια αριθμητική μέθοδο (αφού δεν είναι γραμμικό) λαμβάνουμε τις κατάλληλες ποσότητες παραγγελίας που ελαχιστοποιούν το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα.

1.7 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΜΕ ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΛΑΒΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Στην περίπτωση αυτή, ισχύουν οι γενικές υποθέσεις του προτύπου οικονομικής ποσότητας παραγγελίας αλλά σε αντίθεση με το βασικό μοντέλο κάθε παραγγελία δεν θεωρείται άμεσα παραδοτέα αλλά μεσολαβεί χρόνος ίσος με L. Η πολιτική που ακολουθούμε για την αναπλήρωση του αποθέματος είναι να παραγγέλνουμε ποσότητα Q μονάδων νωρίτερα από την εξάντληση του αποθέματος ώστε αυτή να φτάσει ακριβώς τη στιγμή που το απόθεμα μηδενίζεται. Όπως φαίνεται και διαγραμματικά παρακάτω, η χρονική στιγμή κατά την οποία προβαίνουμε σε παραγγελία προϊόντος είναι όταν το επίπεδο αποθέματος είναι αL μονάδες. Η εξέλιξη του επιπέδου του αποθέματος είναι σχηματικά η εξής:

Επίπεδο αποθέματος ως συνάρτηση του χρόνου όταν υπάρχει χρονική υστέρηση στην παραλαβή της παραγγελίας



Φυσικά, η παρατήρηση αυτή ισχύει όταν ο χρόνος παράδοσης L είναι μικρότερος από τον κύκλο παραγγελίας $T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$ στο βασικό οικονομικό μοντέλο. Όμως, αυτό σπάνια συμβαίνει στην πράξη. Κατά συνέπεια, ορίζουμε τον αποτελεσματικό χρόνο παράδοσης L_e ως την διαφορά: $L_e = L - n\, T^*$, όπου n=[$\frac{L}{T^*}$]. Στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων είναι να παραγγέλλουμε ποσότητα Q^* οπότε το επίπεδο αποθέματος μειώνεται στις $L_e \alpha$ μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ

2.1 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (MATERIALS REQUIREMENT PLANNING – MRP)

Στα μοντέλα που αναπτύσσονται σε αυτό το κεφάλαιο το επίπεδο αποθέματος εξετάζεται περιοδικά. Δηλαδή, υπάρχει ένας καθορισμένος αριθμός περιόδων στην αρχή των οποίων τοποθετούνται οι παραγγελίες αφού εξεταστεί το επίπεδο του αποθέματος. Επιπλέον η ζήτηση σε κάθε περίοδο είναι προσδιοριστική, μη – ομοιόμορφη (δυναμική), με την έννοια ότι μπορεί να είναι διαφορετική από τη μια περίοδο στην άλλη. Μοντέλα τέτοιου τύπου προκύπτουν κατά τον προγραμματισμό των πρώτων υλών (Material Requirement Planning). Παρακάτω περιγράφουμε με ένα παράδειγμα την εφαρμογή του MRP.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

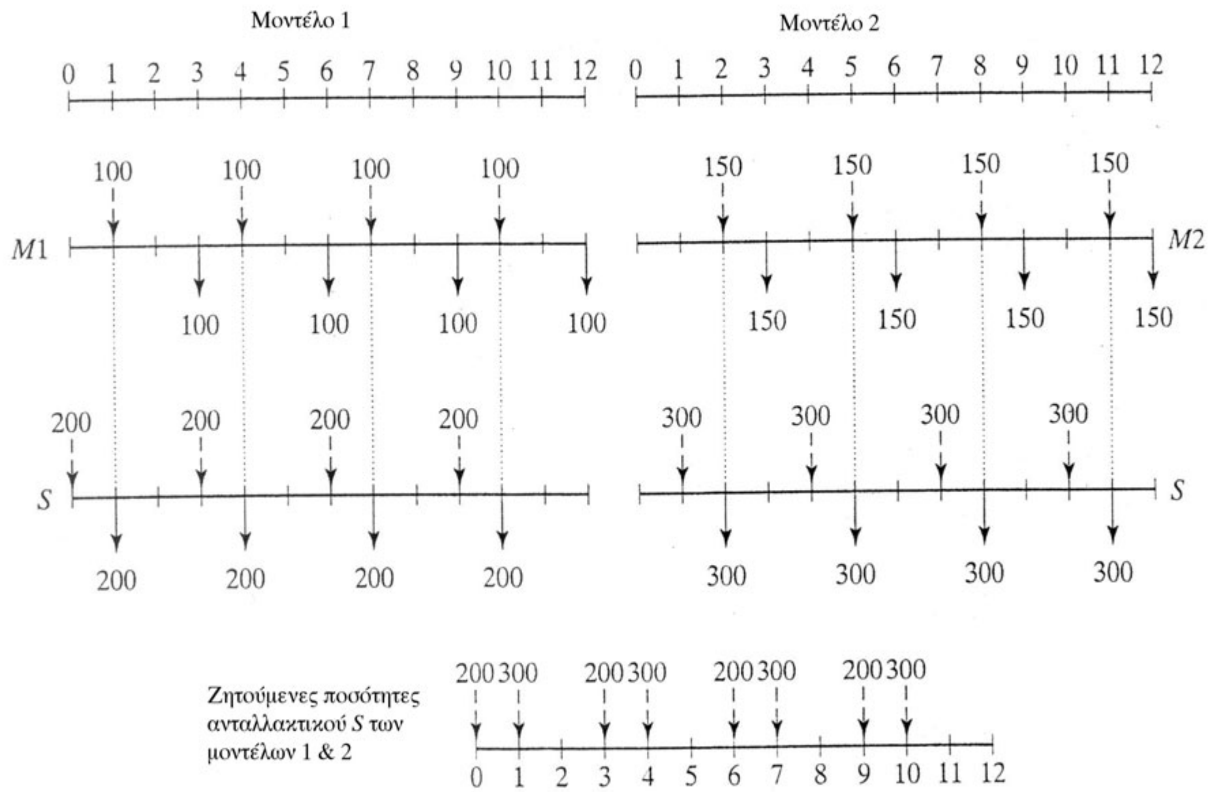
Έστω ότι η ζήτηση ανά τρίμηνο δύο διαφορετικών τύπων προϊόντος M_1 και M_2 είναι 100 και 150 μονάδες αντίστοιχα. Οι παραλαβές γίνονται στο τέλος κάθε τριμήνου. Ο χρόνος παραγγελίας – παραλαβής είναι 2 μήνες για το M_1 και ένας μήνας για το M_2 Κάθε μονάδα από το M_1 και το M_2 απαιτεί την χρήση 2 μονάδων από το υλικό (εξάρτημα) S. Ο απαιτούμενος χρόνος για την παραγωγή του S είναι ένας μήνας.

Στο παρακάτω σχήμα αντικατοπτρίζονται τα σχέδια παραγωγής για το M_1 και για το M_2 .Τα συμπαγή βέλη για τα M_1 και M_2 αντιπροσωπεύουν την τριμηνιαία ζήτηση των δύο τύπων προϊόντος που εκδηλώνεται στο τέλος των μηνών 3, 6, 9 και 12. Με διακεκομμένα βέλη για τα M_1 και M_2 σημειώνονται οι ποσότητες παραγγελίας για τους αντίστοιχους μήνες.

Για την έναρξη της παραγωγής των δύο τύπων προϊόντος στον ακριβή χρόνο είναι απαραίτητο να έχει γίνει και η παραγωγή του υλικού S. Η πληροφορία αυτή (ζήτηση του S) δίνεται από τα αντίστοιχα συμπαγή βέλη στο S διάγραμμα, όπου η ζήτηση για το S υλικό βρίσκεται λαμβάνοντας υπόψη ότι απαιτούνται από το S δύο τεμάχια για κάθε μονάδα του M_1 ή του M_2. Επειδή η παραγωγή του S διαρκεί ένα μήνα, τα διακεκομμένα βέλη δείχνουν πότε και σε τι ύψος πρέπει να αρχίσει η παραγωγή του *S*.

Το πρόβλημα που ανακύπτει δεδομένης της γνωστής ζήτησης για το S, είναι η αναζήτηση της σωστής παραγόμενης ποσότητας στην αρχή κάθε μήνα προκειμένου να μειωθεί το συνολικό κόστος παραγωγής-αποθήκευσης-έλλειψης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ MRP



2.2 ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΗ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΑΛΛΑ ΜΕ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΑ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΑ

Εξετάζουμε ένα σύστημα ελέγχου παραγωγής – αποθεμάτων πολλών περιόδων όπου για την παραγωγή του προϊόντος έχουμε διάφορα επίπεδα – δυνατότητες σε κάθε περίοδο (π.χ. με κανονική απασχόληση, με υπερωριακή απασχόληση κλπ.). Τα δεδομένα είναι τα εξής:

- N = Μήκος του χρονικού ορίζοντα
- Σε κάθε περίοδο t υπάρχουν k_t επίπεδα παραγωγής τα οποία παριστάνουν διαφορετικούς τρόπους ή συνθήκες παραγωγής (π.χ. με κανονική απασχόληση είτε με υπερωριακή απασχόληση), με κόστη ανά μονάδα προϊόντος $c_{t,1}, c_{t,2}, c_{t,3}, \ldots, c_{t,k_t}$.
- h_t = Κόστος αποθήκευσης 1 μονάδας προϊόντος την περίοδο t.
- p_t = Κόστος έλλειψης 1 μονάδας προϊόντος την περίοδο t.
- α_{ti} = Δυνατότητα συνολικής παραγωγής την περίοδο t στο επίπεδο i.
- b_t = Η συνολική ζήτηση την περίοδο t.

Θεωρούμε ότι η συνολική δυνατότητα παραγωγής είναι μεγαλύτερη από την συνολική ζήτηση στο χρονικό ορίζοντα, αλλιώς το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση. Ζητούμε το βέλτιστο σχεδιασμό παραγωγής δηλαδή αυτόν που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος παραγωγής-αποθήκευσης-έλλειψης.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα μεταφοράς με $k_1 + k_2 + \ldots + k_N$ σταθμούς παραγωγής, οι οποίοι αντιστοιχούν στα διάφορα επίπεδα παραγωγής των N περιόδων και N σταθμούς προορισμού που αντιστοιχούν στις καταναλώσεις των N περιόδων. Το κόστος παραγωγής – αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος που παράγεται κατά την περίοδο t σύμφωνα με το επίπεδο i και καταναλώνεται στην περίοδο $s>t$ είναι βέβαια $c_{t,i} + \sum_{j=t}^{s-1} h_j$. Ομοίως το κόστος παραγωγής-έλλειψης μιας μονάδας προϊόντος που παράγεται κατά την περίοδο t στο επίπεδο i για να ικανοποιηθεί η ζήτηση που προέκυψε στην περίοδο $s<t$ είναι $c_{t,i}+\sum_{j=s}^{t-1} p_j$.

Έτσι τα δεδομένα του προβλήματος καταχωρούνται στον παρακάτω πίνακα του προβλήματος μεταφοράς. Στον πίνακα αυτό ο σταθμός προορισμού B_{N+1} είναι τεχνητός και αντιστοιχεί στην δυνατότητα παραγωγής που περισσεύει (δεν χρησιμοποιείται) σε κάθε περίοδο t και επίπεδο i . Το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς βέβαια είναι 0.

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	…..	$\mathbf{B}_{N-1}$	$\mathbf{B}_N$	$\mathbf{B}_{N+1}$	**Δυνατότητα παραγωγής**
$\mathbf{A}_{11}$	c_{11}	$c_{11}+h_1$	$c_{11}+h_1+h_2$	…..	$c_{11}+\sum_{i=1}^{N-2} h_i$	$c_{11}+\sum_{i=1}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{11}$
$\mathbf{A}_{12}$	c_{12}	$c_{12}+h_1$	$c_{12}+h_1+h_2$	…..	$c_{12}+\sum_{i=1}^{N-2} h_i$	$c_{12}+\sum_{i=1}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{12}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$\mathbf{A}_{1k_1}$	c_{1k_1}	$c_{1k_1}+h_1$	$c_{1k_1}+h_1+h_2$	…..	$c_{1k_1}+\sum_{i=1}^{N-2} h_i$	$c_{1k_1}+\sum_{i=1}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{1k_1}$
$\mathbf{A}_{21}$	$c_{21}+p_1$	c_{21}	$c_{21}+h_2$	…..	$c_{21}+\sum_{i=2}^{N-2} h_i$	$c_{21}+\sum_{i=2}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{21}$
$\mathbf{A}_{22}$	$c_{22}+p_1$	c_{22}	$c_{22}+h_2$	…..	$c_{22}+\sum_{i=2}^{N-2} h_i$	$c_{22}+\sum_{i=2}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{22}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$\mathbf{A}_{2k_2}$	$c_{2k_2}+p_1$	c_{2k_2}	$c_{2k_2}+h_2$	…..	$c_{2k_2}+\sum_{i=2}^{N-2} h_i$	$c_{2k_2}+\sum_{i=2}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{2k_2}$
$\mathbf{A}_{31}$	$c_{31}+p_1+p_2$	$c_{31}+p_2$	c_{31}	…..	$c_{31}+\sum_{i=3}^{N-2} h_i$	$c_{31}+\sum_{i=3}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{31}$
$\mathbf{A}_{32}$	$c_{32}+p_1+p_2$	$c_{32}+p_2$	c_{32}	…..	$c_{32}+\sum_{i=3}^{N-2} h_i$	$c_{32}+\sum_{i=3}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{32}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$\mathbf{A}_{3k_3}$	$c_{3k_3}+$ p_1+p_2	$c_{3k_3}+p_2$	c_{3k_3}	…..	$c_{3k_3}+\sum_{i=3}^{N-2} h_i$	$c_{3k_3}+\sum_{i=3}^{N-1} h_i$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{3k_3}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..

$\mathbf{A}_{N-1,1}$	$c_{N-1,1}+\sum_{i=1}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,1}+\sum_{i=2}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,1}+\sum_{i=3}^{N-2} p_i$	…..	$c_{N-1,1}$	$c_{N-1,1}+h_{N-1}$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N-1,1}$
$\mathbf{A}_{N-1,2}$	$c_{N-1,2}+\sum_{i=1}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,2}+\sum_{i=2}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,2}+\sum_{i=3}^{N-2} p_i$	…..	$c_{N-1,2}$	$c_{N-1,2}+h_{N-1}$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N-1,2}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	**…..**
$\mathbf{A}_{N-1,k_{N-1}}$	$c_{N-1,K_{N-1}}+\sum_{i=1}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,k_{N-1}}+\sum_{i=2}^{N-2} p_i$	$c_{N-1,k_{N-1}}+\sum_{i=3}^{N-2} p_i$	…..	$c_{N-1,k_{N-1}}$	$c_{N-1,k_{N-1}}+h_{N-1}$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N-1,k_{N-1}}$
$\mathbf{A}_{N,1}$	$c_{N,1}+\sum_{i=1}^{N-1} p_i$	$c_{N,1}+\sum_{i=2}^{N-1} p_i$	$c_{N,1}+\sum_{i=3}^{N-1} p_i$	…..	$c_{N,1}+p_{N-1}$	$c_{N,1}$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N,1}$
$\mathbf{A}_{N,2}$	$c_{N,2}+\sum_{i=1}^{N-1} p_i$	$c_{N,2}+\sum_{i=2}^{N-1} p_i$	$c_{N,2}+\sum_{i=3}^{N-1} p_i$	…..	$c_{N,2}+p_{N-1}$	$c_{N,2}$	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N,2}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	**…..**
$\mathbf{A}_{N,k_N}$	$c_{N,K_N}+\sum_{i=1}^{N-1} p_i$	$c_{N,k_N}+\sum_{i=2}^{N-1} p_i$	$c_{N,k_N}+\sum_{i=3}^{N-1} p_i$	…..	$c_{N,k_N}+p_{N-1}$	c_{N,k_N}	0	$\boldsymbol{\alpha}_{N,k_N}$
Ζήτηση	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$	…..	$\mathbf{b}_{N-1}$	$\mathbf{b}_N$	$\mathbf{b}_{N+1}$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια βιομηχανία παράγει ειδικά προστατευτικά για τζάκι στο χρονικό διάστημα από Δεκέμβριο μέχρι Μάρτιο. Στο χρόνο αυτό η ζήτηση παρουσιάζει σταδιακή αύξηση με αποκορύφωμα τη μέση της περιόδου. Εξ αιτίας της μεγάλης δυναμικής του προϊόντος στην αγορά η συγκεκριμένη βιομηχανία χρησιμοποιεί υπερωριακή απασχόληση προκειμένου να καλύψει την ζήτηση. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παραγωγικές δυνατότητες της βιομηχανίας και η ζήτηση που εκδηλώνεται στο διάστημα των τεσσάρων μηνών:

Παραγωγική Δυνατότητα (capacity)			
Μήνας	Κανονική Απασχόληση (τεμάχια)	Υπερωριακή Απασχόληση (τεμάχια)	Ζήτηση (τεμάχια)
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος σε κάθε περίοδο είναι 6$ με κανονική απασχόληση και 9$ με υπερωριακή απασχόληση. Το κόστος αναμονής ανά μονάδα προϊόντος για κάθε μήνα είναι 0,10$ και το κόστος ελλειμμάτων για κάθε μήνα ανέρχεται σε 0,20$.

Παρακάτω περιγράφεται διαγραμματικά το μοντέλο και η επίλυσή του. Συμβολίζουμε με R_i και O_i την κανονική και την υπερωριακή απασχόληση αντίστοιχα για τις περιόδους $i = 1,2,3,4$.

Επειδή η προσφορά του προϊόντος ξεπερνά την εκδηλωμένη ζήτηση, προσθέτουμε στον πίνακα έναν πλασματικό προορισμό (dummy) ο οποίος αντιστοιχεί στην περισσευόμενη δυνατότητα παραγωγής (αυτή που δεν θα χρησιμοποιηθεί τελικά). Σημειώνεται ότι καμία από τις «οδούς μεταφοράς» δεν μπλοκάρεται αφού επιτρέπονται κόστη ελλειμμάτων.

Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος από σταθμό παραγωγής (περίοδο και επίπεδο παραγωγής) σε σταθμό προορισμού (περίοδο κατανάλωσης) προκύπτει αθροίζοντας τα αντίστοιχα κόστη παραγωγής, αποθήκευσης και έλλειψης που αντιστοιχούν. Για παράδειγμα, το κόστος μονάδας προϊόντος από το R_1 στην περίοδο 1 ισούται μόνο με 6$. Το κόστος μονάδας προϊόντος από το O_1 στην περίοδο 4 ισούται με το κόστος παραγωγής συν το κόστος αποθήκευσης για τις περιόδους 1 έως 4, δηλαδή 9$ + (0,1$ +0,1$ +0,1$) = 9,30$. Έχουμε επομένως το ακόλουθο tableau του προβλήματος μεταφοράς.

	1	2	3	4	Περίσσευμα	
R_1	6	6,1	6,2	6,3	0	90
O_1	9	9,1	9,2	9,3	0	50
R_2	6,2	6	6,1	6,2	0	100
O_2	6,2	9	9,1	9,2	0	60
R_3	6,4	6,2	6	6,1	0	120
O_3	9,4	9,2	9	9,1	0	80
R_4	6,6	6,4	6,2	6	0	110
O_4	9,6	9,4	9,2	9	0	70
	100	190	210	160	20	

Η βέλτιστη λύση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς, π.χ. με τον αλγόριθμο των δυναμικών (βλέπε Φακίνου και Οικονόμου (2003) – Κεφ.2). Λόγω του μεγάλου πλήθους των πράξεων που απαιτούνται είναι καλό οι αντίστοιχοι υπολογισμοί να γίνουν χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιούμε το λογισμικό LINGO της Lindo Software (βλ. ιστοσελίδα www.lindo.com) που επιλύει προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Ο αντίστοιχος κώδικας του προγράμματος εμφανίζεται παρακάτω. Είναι εύκολο για οποιονδήποτε έχει γενικές γνώσεις προγραμματισμού να καταλάβει τη λογική του προγράμματος αυτού. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε το παράρτημα στο βιβλίο των Φακίνου και Οικονόμου (2003) ή στο εγχειρίδιο του LINGO.

Κώδικας LINGO για την επίλυση του παραδείγματος 1

```
model:
! Transportation Problem 1;

SETS:
   SOURCE / R1, O1, R2, O2, R3, O3, R4, O4/   : CAPACITY;
   DESTINATION / D1, D2, D3, D4, SURPLUS/ : DEMAND;
   ROUTES( SOURCE, DESTINATION) : COST, QUANTITY;
ENDSETS

! The objective;
 [OBJ] MIN = @SUM( ROUTES: COST * QUANTITY);

! The demand constraints;
 @FOR( DESTINATION( J): [DEM]
  @SUM( SOURCE( I): QUANTITY( I, J)) >=
   DEMAND( J));

! The supply constraints;
 @FOR( SOURCE( I): [SUP]
  @SUM( DESTINATION( J): QUANTITY( I, J)) <=
   CAPACITY( I));

! Here are the parameters;
DATA:
   CAPACITY =   90, 50, 100, 60, 120, 80, 110, 70;
   DEMAND =   100, 190, 210,160, 20;
   COST =       6.0,  6.1,  6.2,  6.3, 0.0,
                9.0,  9.1,  9.2,  9.3, 0.0,
                6.2,  6.0,  6.1,  6.2, 0.0,
                6.2,  9.0,  9.1,  9.2, 0.0,
                6.4,  6.2,  6.0,  6.1, 0.0,
                9.4,  9.2,  9.0,  9.1, 0.0,
                6.6,  6.4,  6.2,  6.0, 0.0,
                9.6,  9.4,  9.2,  9.0, 0.0;
ENDDATA
end
```

Με την εντολή Solve επιλύεται το παραπάνω πρόβλημα μεταφοράς και προκύπτει η ακόλουθη αναφορά λύσης. Όπως φαίνεται η βέλτιστη λύση βρέθηκε σε 13 επαναλήψεις του υποκείμενου αλγορίθμου. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος είναι 4523. Η αναφορά της λύσης περιέχει όλες τις παραμέτρους καθώς και τις τιμές των μεταβλητών στην άριστη λύση. Αρκεί επομένως να κοιτάξουμε τις μεταβλητές QUANTITY που μας δείχνουν ποιες ποσότητες πρέπει να μεταφερθούν από σταθμό παραγωγής σε σταθμό προορισμού.

```
Global optimal solution found at step:            13
 Objective value:                              4523.000

                       Variable           Value        Reduced Cost
                  CAPACITY( R1)        90.00000           0.0000000
                  CAPACITY( O1)        50.00000           0.0000000
                  CAPACITY( R2)        100.0000           0.0000000
                  CAPACITY( O2)        60.00000           0.0000000
                  CAPACITY( R3)        120.0000           0.0000000
```

```
             CAPACITY( O3)        80.00000            0.0000000
             CAPACITY( R4)        110.0000            0.0000000
             CAPACITY( O4)        70.00000            0.0000000
               DEMAND( D1)        100.0000            0.0000000
               DEMAND( D2)        190.0000            0.0000000
               DEMAND( D3)        210.0000            0.0000000
               DEMAND( D4)        160.0000            0.0000000
          DEMAND( SURPLUS)        20.00000            0.0000000
             COST( R1, D1)        6.000000            0.0000000
             COST( R1, D2)        6.100000            0.0000000
             COST( R1, D3)        6.200000            0.0000000
             COST( R1, D4)        6.300000            0.0000000
        COST( R1, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( O1, D1)        9.000000            0.0000000
             COST( O1, D2)        9.100000            0.0000000
             COST( O1, D3)        9.200000            0.0000000
             COST( O1, D4)        9.300000            0.0000000
        COST( O1, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( R2, D1)        6.200000            0.0000000
             COST( R2, D2)        6.000000            0.0000000
             COST( R2, D3)        6.100000            0.0000000
             COST( R2, D4)        6.200000            0.0000000
        COST( R2, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( O2, D1)        6.200000            0.0000000
             COST( O2, D2)        9.000000            0.0000000
             COST( O2, D3)        9.100000            0.0000000
             COST( O2, D4)        9.200000            0.0000000
        COST( O2, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( R3, D1)        6.400000            0.0000000
             COST( R3, D2)        6.200000            0.0000000
             COST( R3, D3)        6.000000            0.0000000
             COST( R3, D4)        6.100000            0.0000000
        COST( R3, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( O3, D1)        9.400000            0.0000000
             COST( O3, D2)        9.200000            0.0000000
             COST( O3, D3)        9.000000            0.0000000
             COST( O3, D4)        9.100000            0.0000000
        COST( O3, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( R4, D1)        6.600000            0.0000000
             COST( R4, D2)        6.400000            0.0000000
             COST( R4, D3)        6.200000            0.0000000
             COST( R4, D4)        6.000000            0.0000000
        COST( R4, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
             COST( O4, D1)        9.600000            0.0000000
             COST( O4, D2)        9.400000            0.0000000
             COST( O4, D3)        9.200000            0.0000000
             COST( O4, D4)        9.000000            0.0000000
        COST( O4, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
         QUANTITY( R1, D1)        40.00000            0.0000000
         QUANTITY( R1, D2)        40.00000            0.0000000
         QUANTITY( R1, D3)        10.00000            0.0000000
         QUANTITY( R1, D4)       0.0000000            0.3000000
    QUANTITY( R1, SURPLUS)       0.0000000             3.000000
         QUANTITY( O1, D1)       0.0000000            0.0000000
         QUANTITY( O1, D2)        50.00000            0.0000000
         QUANTITY( O1, D3)       0.0000000            0.0000000
         QUANTITY( O1, D4)       0.0000000            0.3000000
    QUANTITY( O1, SURPLUS)       0.0000000            0.0000000
         QUANTITY( R2, D1)       0.0000000            0.3000000
         QUANTITY( R2, D2)        100.0000            0.0000000
         QUANTITY( R2, D3)       0.0000000            0.0000000
```

QUANTITY(R2, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R2, SURPLUS)	0.0000000	3.100000
QUANTITY(O2, D1)	60.00000	0.0000000
QUANTITY(O2, D2)	0.0000000	2.700000
QUANTITY(O2, D3)	0.0000000	2.700000
QUANTITY(O2, D4)	0.0000000	3.000000
QUANTITY(O2, SURPLUS)	0.0000000	2.800000
QUANTITY(R3, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(R3, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R3, D3)	120.0000	0.0000000
QUANTITY(R3, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R3, SURPLUS)	0.0000000	3.200000
QUANTITY(O3, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(O3, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O3, D3)	80.00000	0.0000000
QUANTITY(O3, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O3, SURPLUS)	0.0000000	0.2000000
QUANTITY(R4, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(R4, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R4, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(R4, D4)	110.0000	0.0000000
QUANTITY(R4, SURPLUS)	0.0000000	3.000000
QUANTITY(O4, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(O4, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O4, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(O4, D4)	50.00000	0.0000000
QUANTITY(O4, SURPLUS)	20.00000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
OBJ	4523.000	1.000000
DEM(D1)	0.0000000	-9.000000
DEM(D2)	0.0000000	-9.100000
DEM(D3)	0.0000000	-9.200000
DEM(D4)	0.0000000	-9.000000
DEM(SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
SUP(R1)	0.0000000	3.000000
SUP(O1)	0.0000000	0.0000000
SUP(R2)	0.0000000	3.100000
SUP(O2)	0.0000000	2.800000
SUP(R3)	0.0000000	3.200000
SUP(O3)	0.0000000	0.2000000
SUP(R4)	0.0000000	3.000000
SUP(O4)	0.0000000	0.0000000

Η παραπάνω αναφορά της λύσης περιέχει και τις δυικές τιμές των περιορισμών οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στην ανάλυση ευαισθησίας του προβλήματος, δηλαδή στη μελέτη για το αν και πως επηρεάζεται η βέλτιστη λύση αν κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος αλλάξουν (π.χ. αύξηση στα κόστη παραγωγής ή αποθήκευσης κλπ.) . Το LINGO επιπλέον προσφέρει και αυτοματοποιημένη ανάλυση ευαισθησίας. Δεν θα υπεισέλθουμε όμως σε αυτές τις τεχνικές που εκφεύγουν από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Η περιγραφή της βέλτιστης λύσης που προέκυψε συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

Περίοδος	Πρόγραμμα Παραγωγής
Κανονική Απασχόληση 1	Παραγωγή 90 τμχ, για διάθεση 40 τμχ στην περίοδο1, 40 τμχ στην περίοδο 2 και 10 τμχ στην περίοδο 3
Υπερωριακή Απασχόληση 1	Παραγωγή 50 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 2
Κανονική Απασχόληση 2	Παραγωγή 100 τμχ, για διάθεση στην περίοδο2
Υπερωριακή Απασχόληση 2	Παραγωγή 60 τμχ, για διάθεση (ικανοποίηση ελλείματος) στην περίοδο1
Κανονική Απασχόληση 3	Παραγωγή 120 τμχ, για διάθεση στην περίοδο3
Υπερωριακή Απασχόληση 3	Παραγωγή 80 τμχ, για διάθεση στην περίοδο3
Κανονική Απασχόληση 4	Παραγωγή 110 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 4
Υπερωριακή Απασχόληση 4	Παραγωγή 50 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 4 με 20 τμχ αχρησιμοποίητη δυνατότητα παραγωγής

Το συνολικό κόστος παραγωγής θα είναι όπως είδαμε (λύση LINGO) 4523$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ένα προϊόν κατασκευάζεται για την ικανοποίηση γνωστής ζήτησης για 4 περιόδους σύμφωνα με τα παρακάτω δεδομένα:

Μοναδιαίο κόστος παραγωγής για αριθμό προϊόντων	**Περίοδος *i***			
	1	**2**	**3**	**4**
1-3 επίπεδο παραγωγής 1	1	2	2	3
4-11 επίπεδο παραγωγής 2	1	4	5	4
12-15	2	4	7	5

επίπεδο παραγωγής 3				
16-25 επίπεδο παραγωγής 4	5	6	10	7
Μοναδιαίο κόστος αποθ: *i*®*i*+1	0.30	0.35	0.20	0.25
Μοναδιαίο κόστος έλλειψης *i*	0,40	0,30	0,30	0,10
Ζήτηση	11	4	17	29

Ζητείται να βρεθεί το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής - αποθήκευσης.

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιείται ως πρόβλημα μεταφοράς σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω.

Ο αντίστοιχος πίνακας μεταφοράς είναι

Προορισμός / Αφετηρία	1	2	3	4	Περίσσευμα	Δυνατότητα Παραγωγής
(1,1)	**1**	**1,30** 0	**1,65** 0	**1,85** 0	**0** 0	3
(1,2)	**1** 0	**1,30** 0	**1,65** 0	**1,85** 0	**0** 0	8
(1,3)	**2** 0	**2,30** 0	**2,65** 0	**2,85** 0	**0** 0	4
(1,4)	**5** 0	**5,30** 0	**5,65** 0	**5,85** 0	**0** 0	10
(2,1)	**2,40**	**2** 0	**2,35** 0	**2,55** 0	**0** 0	3
(2,2)	**4,40**	**4** 0	**4,35** 0	**4,55** 0	**0** 0	8
(2,3)	**4,40**	**4** 0	**4,35** 0	**4,55** 0	**0** 0	4
(2,4)	**6,40**	**6** 0	**6,35** 0	**6,55** 0	**0** 0	10

(3,1)	**2,70**	**2,30**	**2** 0	**2,20** 0	**0** 0	3
(3,2)	**5,70**	**5,30**	**5** 0	**5,20** 0	**0** 0	8
(3,3)	**7,70**	**7,30**	**7** 0	**7,20** 0	**0** 0	4
(3,4)	**10,70**	**10,30**	**10** 0	**10,20** 0	**0** 0	10
(4,1)	**4**	**3,60**	**3,30**	**3** 0	**0** 0	3
(4,2)	**5**	**4,60**	**4,30**	**4** 0	**0** 0	8
(4,3)	**6**	**5,60**	**5,30**	**5** 0	**0** 0	4
(4,4)	**8**	**7,60**	**7,30**	**7**	**0** 0	10
Ζήτηση	**11**	**4**	**17**	**29**	**39**	

Η βέλτιστη λύση προκύπτει και πάλι χρησιμοποιώντας το λογισμικό LINGO της Lindo Software (βλ. ιστοσελίδα www.lindo.com) που επιλύει προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

Κώδικας LINGO για την επίλυση του παραδείγματος 2

```
model:
! Transportation Problem 2;

SETS:
   SOURCE / S11, S12, S13, S14,
            S21, S22, S23, S24,
            S31, S32, S33, S34,
            S41, S42, S43, S44/    : CAPACITY;
   DESTINATION / D1, D2, D3, D4, SURPLUS/ : DEMAND;
   ROUTES( SOURCE, DESTINATION) : COST, QUANTITY;
ENDSETS

! The objective;
 [OBJ] MIN = @SUM( ROUTES: COST * QUANTITY);

! The demand constraints;
 @FOR( DESTINATION( J): [DEM]
  @SUM( SOURCE( I): QUANTITY( I, J)) >=
   DEMAND( J));
```

```
! The supply constraints;
 @FOR( SOURCE( I): [SUP]
  @SUM( DESTINATION( J): QUANTITY( I, J)) <=
   CAPACITY( I));

! Here are the parameters;
DATA:
   CAPACITY =    3, 8, 4, 10,
                 3, 8, 4, 10,
                 3, 8, 4, 10,
                 3, 8, 4, 10;
   DEMAND =    11, 4, 17, 29, 39;
   COST =       1.00,      1.30,      1.65,      1.85,      0.00,
                1.00,      1.30,      1.65,      1.85,      0.00,
                2.00,      2.30,      2.65,      2.85,      0.00,
                5.00,      5.30,      5.65,      5.85,      0.00,
                2.40,      2.00,      2.35,      2.55,      0.00,
                4.40,      4.00,      4.35,      4.55,      0.00,
                4.40,      4.00,      4.35,      4.55,      0.00,
                6.40,      6.00,      6.35,      6.55,      0.00,
                2.70,      2.30,      2.00,      2.20,      0.00,
                5.70,      5.30,      5.00,      5.20,      0.00,
                7.70,      7.30,      7.00,      7.20,      0.00,
               10.70,     10.30,     10.00,     10.20,      0.00,
                4.00,      3.60,      3.30,      3.00,      0.00,
                5.00,      4.60,      4.30,      4.00,      0.00,
                6.00,      5.60,      5.30,      5.00,      0.00,
                8.00,      7.60,      7.30,      7.00,      0.00;
ENDDATA
end
```

Με την εντολή Solve προκύπτει η ακόλουθη αναφορά λύσης που δίνει τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν σε κάθε περίοδο καθώς και το πότε θα πρέπει να καταναλωθούν ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση με βέλτιστο τρόπο. Για οικονομία χώρου παραθέτουμε μόνο τις τιμές των μεταβλητών QUANTITY που δίνουν την άριστη λύση και όχι τις παραμέτρους του προβλήματος που εμφανίζονται στην αναφορά.

```
Global optimal solution found at step:            35
 Objective value:                               217.5000

                       Variable           Value        Reduced Cost

             QUANTITY( S11, D1)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S11, D2)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S11, D3)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S11, D4)         3.000000          0.0000000
        QUANTITY( S11, SURPLUS)        0.0000000           4.000000
             QUANTITY( S12, D1)         8.000000          0.0000000
             QUANTITY( S12, D2)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S12, D3)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S12, D4)        0.0000000          0.0000000
        QUANTITY( S12, SURPLUS)        0.0000000           4.000000
             QUANTITY( S13, D1)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S13, D2)         2.000000          0.0000000
             QUANTITY( S13, D3)        0.0000000          0.0000000
             QUANTITY( S13, D4)         2.000000          0.0000000
        QUANTITY( S13, SURPLUS)        0.0000000           3.000000
             QUANTITY( S14, D1)         3.000000          0.0000000
```

```
      QUANTITY( S14, D2)        2.000000            0.0000000
      QUANTITY( S14, D3)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S14, D4)       0.0000000            0.0000000
 QUANTITY( S14, SURPLUS)        5.000000            0.0000000
      QUANTITY( S21, D1)       0.0000000            0.7000000
      QUANTITY( S21, D2)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S21, D3)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S21, D4)        3.000000            0.0000000
 QUANTITY( S21, SURPLUS)       0.0000000             3.300000
      QUANTITY( S22, D1)       0.0000000            0.7000000
      QUANTITY( S22, D2)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S22, D3)        5.000000            0.0000000
      QUANTITY( S22, D4)        3.000000            0.0000000
 QUANTITY( S22, SURPLUS)       0.0000000             1.300000
      QUANTITY( S23, D1)       0.0000000            0.7000000
      QUANTITY( S23, D2)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S23, D3)        4.000000            0.0000000
      QUANTITY( S23, D4)       0.0000000            0.0000000
 QUANTITY( S23, SURPLUS)       0.0000000             1.300000
      QUANTITY( S24, D1)       0.0000000             1.400000
      QUANTITY( S24, D2)       0.0000000            0.7000000
      QUANTITY( S24, D3)       0.0000000            0.7000000
      QUANTITY( S24, D4)       0.0000000            0.7000000
 QUANTITY( S24, SURPLUS)        10.00000            0.0000000
      QUANTITY( S31, D1)       0.0000000             1.350000
      QUANTITY( S31, D2)       0.0000000            0.6500000
      QUANTITY( S31, D3)       0.0000000            0.0000000
      QUANTITY( S31, D4)        3.000000            0.0000000
 QUANTITY( S31, SURPLUS)       0.0000000             3.650000
      QUANTITY( S32, D1)       0.0000000             1.350000
      QUANTITY( S32, D2)       0.0000000            0.6500000
      QUANTITY( S32, D3)        8.000000            0.0000000
      QUANTITY( S32, D4)       0.0000000            0.0000000
 QUANTITY( S32, SURPLUS)       0.0000000            0.6500000
      QUANTITY( S33, D1)       0.0000000             2.700000
      QUANTITY( S33, D2)       0.0000000             2.000000
      QUANTITY( S33, D3)       0.0000000             1.350000
      QUANTITY( S33, D4)       0.0000000             1.350000
 QUANTITY( S33, SURPLUS)        4.000000            0.0000000
      QUANTITY( S34, D1)       0.0000000             5.700000
      QUANTITY( S34, D2)       0.0000000             5.000000
      QUANTITY( S34, D3)       0.0000000             4.350000
      QUANTITY( S34, D4)       0.0000000             4.350000
 QUANTITY( S34, SURPLUS)        10.00000            0.0000000
      QUANTITY( S41, D1)       0.0000000             1.850000
      QUANTITY( S41, D2)       0.0000000             1.150000
      QUANTITY( S41, D3)       0.0000000            0.5000000
      QUANTITY( S41, D4)        3.000000            0.0000000
 QUANTITY( S41, SURPLUS)       0.0000000             2.850000
      QUANTITY( S42, D1)       0.0000000             1.850000
      QUANTITY( S42, D2)       0.0000000             1.150000
      QUANTITY( S42, D3)       0.0000000            0.5000000
      QUANTITY( S42, D4)        8.000000            0.0000000
 QUANTITY( S42, SURPLUS)       0.0000000             1.850000
      QUANTITY( S43, D1)       0.0000000             1.850000
      QUANTITY( S43, D2)       0.0000000             1.150000
      QUANTITY( S43, D3)       0.0000000            0.5000000
      QUANTITY( S43, D4)        4.000000            0.0000000
 QUANTITY( S43, SURPLUS)       0.0000000            0.8500000
      QUANTITY( S44, D1)       0.0000000             3.000000
      QUANTITY( S44, D2)       0.0000000             2.300000
```

```
        QUANTITY( S44, D3)        0.0000000          1.650000
        QUANTITY( S44, D4)        0.0000000          1.150000
   QUANTITY( S44, SURPLUS)         10.00000         0.0000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                       OBJ         217.5000          1.000000
                  DEM( D1)        0.0000000         -5.000000
                  DEM( D2)        0.0000000         -5.300000
                  DEM( D3)        0.0000000         -5.650000
                  DEM( D4)        0.0000000         -5.850000
             DEM( SURPLUS)        0.0000000         0.0000000
                 SUP( S11)        0.0000000          4.000000
                 SUP( S12)        0.0000000          4.000000
                 SUP( S13)        0.0000000          3.000000
                 SUP( S14)        0.0000000         0.0000000
                 SUP( S21)        0.0000000          3.300000
                 SUP( S22)        0.0000000          1.300000
                 SUP( S23)        0.0000000          1.300000
                 SUP( S24)        0.0000000         0.0000000
                 SUP( S31)        0.0000000          3.650000
                 SUP( S32)        0.0000000         0.6500000
                 SUP( S33)        0.0000000         0.0000000
                 SUP( S34)        0.0000000         0.0000000
                 SUP( S41)        0.0000000          2.850000
                 SUP( S42)        0.0000000          1.850000
                 SUP( S43)        0.0000000         0.8500000
                 SUP( S44)        0.0000000         0.0000000
```

2.3 ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΗ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΟΥΤΕ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΑ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΑ

Εξετάζουμε το μοντέλο με χρονικό ορίζοντα N περιόδων. Η παραγωγική δυνατότητα (capacity) για κάθε περίοδο είναι δεδομένη και μπορούν να πραγματοποιηθούν συγκεκριμένες παραγωγές σε διάφορα επίπεδα παραγωγής όπως στο προηγούμενο μοντέλο. Θεωρούμε ότι κατά την τρέχουσα περίοδο μπορούν να παραχθούν περισσότερα από την ζήτηση, ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση επόμενων περιόδων, οπότε σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε υπόψιν και το αντίστοιχο κόστος αποθήκευσης. Οι υποθέσεις και ο συμβολισμός είναι ακριβώς ίδιοι με το προηγούμενο μοντέλο με μόνη διαφορά ότι δεν επιτρέπονται ελλείμματα.

Η παραδοχή της απουσίας ελλειμμάτων έγκειται στο ότι η παραγωγή στις μελλοντικές περιόδους δεν μπορεί να ικανοποιήσει την ζήτηση της τρέχουσας περιόδου. Η υπόθεση αυτή προϋποθέτει ότι αθροιστικά η παραγωγική δυνατότητα (capacity) για τις περιόδους i, i+1, …, N υπερβαίνει ή είναι ίση με την συνολική ζήτηση για τις αντίστοιχες περιόδους.

Η επίλυση του προβλήματος σαν ένα πρόβλημα μεταφοράς καθορίζει τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν σε κάθε περίοδο και πότε πρέπει να καταναλωθούν.

Τα δεδομένα του προβλήματος καταχωρούνται στον παρακάτω πίνακα του προβλήματος μεταφοράς το οποίο ταυτίζεται με τον πίνακα του προηγούμενου μοντέλου όσον αφορά τα κόστη που βρίσκονται πάνω και δεξιά από την κύρια πινακική διαγώνιο. Τα άλλα κόστη γίνονται στην περίπτωσή μας ∞. Ο αλγόριθμος επίλυσης είναι σαφώς απλούστερος του αλγορίθμου επίλυσης για προβλήματα που επιτρέπουν και ελλείματα και εισήχθηκε από τον Johnson (1957).

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	…..	$\mathbf{B}_{N-1}$	$\mathbf{B}_N$	$\mathbf{B}_{N+1}$	Δυνατότητα παραγωγής
$\mathbf{A}_{11}$	c_{11}	$c_{11}+h_1$	$c_{11}+h_1+h_2$	…..	$c_{11}+\sum_{i=1}^{N-2} h_i$	$c_{11}+\sum_{i=1}^{N-1} h_i$	0	α_{11}
$\mathbf{A}_{12}$	c_{12}	$c_{12}+h_1$	$c_{12}+h_1+h_2$	…..	$c_{12}+\sum_{i=1}^{N-2} h_i$	$c_{12}+\sum_{i=1}^{N-1} h_i$	0	α_{12}

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\mathbf{A}_{1k_1}$	c_{1k_1}	$c_{1k_1}+h_1$	$c_{1k_1}+h_1+h_2$	.....	$c_{1k_1}+\sum_{i=1}^{N-2}h_i$	$c_{1k_1}+\sum_{i=1}^{N-1}h_i$	0	α_{1k_1}
$\mathbf{A}_{21}$	∞	c_{21}	$c_{21}+h_2$	.....	$c_{21}+\sum_{i=2}^{N-2}h_i$	$c_{21}+\sum_{i=2}^{N-1}h_i$	0	α_{21}
$\mathbf{A}_{22}$	∞	c_{22}	$c_{22}+h_2$	.....	$c_{22}+\sum_{i=2}^{N-2}h_i$	$c_{22}+\sum_{i=2}^{N-1}h_i$	0	α_{22}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\mathbf{A}_{2k_2}$	∞	c_{2k_2}	$c_{2k_2}+h_2$	.....	$c_{2k_2}+\sum_{i=2}^{N-2}h_i$	$c_{2k_2}+\sum_{i=2}^{N-1}h_i$	0	α_{2k_2}
$\mathbf{A}_{31}$	∞	∞	c_{31}	.....	$c_{31}+\sum_{i=3}^{N-2}h_i$	$c_{31}+\sum_{i=3}^{N-1}h_i$	0	α_{31}
$\mathbf{A}_{32}$	∞	∞	c_{32}	.....	$c_{32}+\sum_{i=3}^{N-2}h_i$	$c_{32}+\sum_{i=3}^{N-1}h_i$	0	α_{32}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\mathbf{A}_{3k_3}$	∞	∞	c_{3k_3}	.....	$c_{3k_3}+\sum_{i=3}^{N-2}h_i$	$c_{3k_3}+\sum_{i=3}^{N-1}h_i$	0	α_{3k_3}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\mathbf{A}_{N-1,1}$	∞	∞	∞	.....	$c_{N-1,1}$	$c_{N-1,1}+h_{N-1}$	0	$\alpha_{N-1,1}$
$\mathbf{A}_{N-1,2}$	∞	∞	∞	.....	$c_{N-1,2}$	$c_{N-1,2}+h_{N-1}$	0	$\alpha_{N-1,2}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\mathbf{A}_{N-1,k_{N-1}}$	∞	∞	∞	.....	$c_{N-1,k_{N-1}}$	$c_{N-1,k_{N-1}}+h_{N-1}$	0	$\alpha_{N-1,k_{N-1}}$
$\mathbf{A}_{N,1}$	∞	∞	∞	.....	∞	$c_{N,1}$	0	$\alpha_{N,1}$

$\mathbf{A}_{N,2}$	∞	∞	∞	…..	∞	$c_{N,2}$	0	$\alpha_{N,2}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$\mathbf{A}_{N,k_N}$	∞	∞	∞	…..	∞	c_{N,k_N}	0	α_{N,k_N}
	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$	…..	$\mathbf{b}_{N-1}$	$\mathbf{b}_N$	$\mathbf{b}_{N+1}$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια βιομηχανία παράγει ειδικά προστατευτικά για τζάκι στο χρονικό διάστημα από Δεκέμβριο μέχρι Μάρτιο. Στο χρόνο αυτό η ζήτηση παρουσιάζει σταδιακή αύξηση με αποκορύφωμα τη μέση της περιόδου. Εξ αιτίας της μεγάλης δυναμικής του προϊόντος στην αγορά η συγκεκριμένη βιομηχανία χρησιμοποιεί υπερωριακή απασχόληση προκειμένου να καλύψει την ζήτηση. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παραγωγικές δυνατότητες της βιομηχανίας και η ζήτηση που εκδηλώνεται στο διάστημα των τεσσάρων μηνών:

Παραγωγική Δυνατότητα (capacity)			
Μήνας	Κανονική Απασχόληση (τεμάχια)	Υπερωριακή Απασχόληση (τεμάχια)	Ζήτηση (τεμάχια)
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος σε κάθε περίοδο είναι 6$ με κανονική απασχόληση και 9$ με υπερωριακή απασχόληση. Το κόστος αναμονής ανά μονάδα προϊόντος για κάθε μήνα είναι 0,10$.

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε μια εφικτή λύση του προβλήματος θεωρούμε ότι αθροιστικά η προσφορά του προϊόντος στην αγορά μηνιαίως υπερβαίνει ή τουλάχιστον ισούται αθροιστικά με τη συνολική ζήτηση που εκδηλώνεται όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνας	Προσφορά (τεμάχια)	Ζήτηση (τεμάχια)
1	90+50 = 140	100
2	140+100+60 = 300	100+190 = 290
3	300+120+80 = 500	290+210 = 500
4	500+110+70 = 680	500+160 = 660

Παρακάτω περιγράφεται διαγραμματικά το μοντέλο και η επίλυσή του. Συμβολίζουμε με R_i και O_i την κανονική και την υπερωριακή απασχόληση αντίστοιχα για τις περιόδους ***i = 1,2,3,4.***

Επειδή η προσφορά του προϊόντος ξεπερνά την εκδηλωμένη ζήτηση, προσθέτουμε στον πίνακα έναν πλασματικό προορισμό (dummy) προκειμένου να συμπληρωθεί το μοντέλο προβλήματος μεταφοράς. Σημειώνεται ότι όλες οι «οδοί μεταφοράς» μπλοκάρονται από την τρέχουσα περίοδο προς προηγούμενες αφού δεν επιτρέπονται κόστη ελλειμμάτων.

Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος από σταθμό παραγωγής (περίοδος και επίπεδο παραγωγής) σε σταθμό προορισμού (περίοδος κατανάλωσης) προκύπτει αθροίζοντας τα αντίστοιχα κόστη παραγωγής και αποθήκευσης. Για παράδειγμα, το κόστος μονάδας προϊόντος από το R_1 στην περίοδο 1 ισούται μόνο με 6$. Το κόστος μονάδας προϊόντος από το O_1 στην περίοδο 4 ισούται με το κόστος παραγωγής συν το κόστος αναμονής για τις περιόδους 1 έως 4, δηλαδή 9$ + (0,1$ +0,1$ +0,1$) = 9,30$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω tableau στο οποίο παρουσιάζεται και η μοντελοποίηση και η λύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, στην πάνω δεξιά γωνία κάθε τετραγώνου που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένους σταθμούς παραγωγής και προορισμού γράφεται με εμφατικά (bold) γράμματα το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς ενώ στο κέντρο του ίδιου τετραγώνου γράφεται η βέλτιστη ποσότητα μεταφοράς. Στο μοντέλο χωρίς ελλείματα η λύση μπορεί να βρεθεί εύκολα χωρίς να καταφύγουμε σε ειδικά λογισμικά γραμμικής βελτιστοποίησης. Η άνω τριγωνική μορφή του πίνακα με τα κόστη μεταφοράς επιτρέπει τη λύση του προβλήματος με ένα πέρασμα του πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω.

	1	2	3	4	Περίσσευμα	
R_1	**6** 90	**6,1** 0	**6,2** 0	**6,3** 0	**0** 0	**90**
O_1	**9** 10	**9,1** 30	**9,2** 10	**9,3** 0	**0** 0	**50** $\rightarrow 40 \rightarrow 10$
R_2		**6** 100	**6,1** 0	**6,2** 0	**0** 0	**100**
O_2		**9** 60	**9,1** 0	**9,2** 0	**0** 0	**60**
R_3			**6** 120	**6,1** 0	**0** 0	**120**
O_3		0	**9** 80	**9,1** 0	**0** 0	**80**
R_4				**6** 110	**0** 0	**110**
O_4				**9** 50	**0** 20	**70** $\rightarrow 20$
	100 ↓ **10**	**190** ↓ **90** ↓ **30**	**210** ↓ **90** ↓ **10**	**160** ↓ **50**	**20**	

Η καλύτερη λύση υπολογίζεται ξεκινώντας από τη στήλη 1 και προχωρώντας κατά μία στήλη κάθε φορά προς το τέλος (στήλη περισεύματος). Για κάθε στήλη η ζήτηση ικανοποιείται με βάση τις φθηνότερες «οδούς» της συγκεκριμένης στήλης.

Ξεκινώντας με την στήλη1, η οδός (R_1,1) έχει το φθηνότερο κόστος μονάδος οπότε επιλέγουμε min(90,100) = 90 μονάδες για να μπουν στο αντίστοιχο τετράγωνο (R_1,1). Τώρα απομένουν 10 ανικανοποίητες μονάδες ζήτησης στη στήλη 1. Η επόμενη φθηνότερη «οδός» στην στήλη 1 είναι η (O_1,1) για την οποία παίρνουμε το min(50,10) = 10 μονάδες οπότε η ζήτηση της περιόδου 1 έχει τώρα ικανοποιηθεί και περισσεύει και παραγωγική δυνατότητα 40 μονάδων για την O_1.

Ομοίως ακολουθούμε και στις επόμενες στήλες οπότε βρίσκουμε την παραπάνω βέλτιστη λύση που φαίνεται στον πίνακα μεταφοράς. Σύμφωνα με αυτή το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής περιγράφεται ως εξής:

Περίοδος – Επίπεδο παραγωγής	**Ποσότητα Παραγωγής - Κατανάλωση**
Με κανονική απασχόληση την περίοδο 1	Παραγωγή 90 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο1
Με υπερωριακή απασχόληση την περίοδο 1	Παραγωγή 10, 30 και 10 τμχ για κατανάλωση κατά τις περιόδους 1, 2 και 3 αντίστοιχα
Με κανονική απασχόληση την περίοδο 2	Παραγωγή 100 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 2
Με υπερωριακή απασχόληση την περίοδο 2	Παραγωγή 60 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 2
Με κανονική απασχόληση την περίοδο 3	Παραγωγή 120 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 3
Με υπερωριακή απασχόληση την περίοδο 3	Παραγωγή 80 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 3
Με κανονική απασχόληση την περίοδο 4	Παραγωγή 110 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 4
Με υπερωριακή απασχόληση την περίοδο 4	Παραγωγή 50 τμχ για κατανάλωση κατά την περίοδο 4 και απομένουν 20 τμχ αχρησιμοποίητης δυνατότητας παραγωγής

Συνεπώς, το συνολικό κόστος παραγωγής θα είναι: 90x6$ + 10x9$ + 30x9.10$ + 100x6$ + 60x9$ + 10x9.20$ + 120x6$ + 80x9$ + 110x6$ + 50x9$ = 4685$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στο παράδειγμα 2 της παραγράφου 2.2 παραθέτουμε την λύση με το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής για την περίπτωση που δεν υπάρχουν ελλείμματα. Τα δεδομένα του προβλήματος και η λύση καταχωρούνται στον παρακάτω πίνακα.

Προορισμός / Αφετηρία	1	2	3	4	Περίσσευμα	
(1,1)	**1** 3	**1,30** 0	**1,65** 0	**1,85** 0	**0** 0	~~3~~
(1,2)	**1** 8	**1,30** 0	**1,65** 0	**1,85** 0	**0** 0	~~8~~
(1,3)	**2** 0	**2,30** 1	**2,65** 3	**2,85** 0	**0** 0	~~4~~ ~~3~~
(1,4)	**5** 0	**5,30** 0	**5,65** 0	**5,85** 5	**0** 5	~~10~~ 5
(2,1)		**2** 3	**2,35** 0	**2,55** 0	**0** 0	~~3~~
(2,2)		**4** 0	**4,35** 8	**4,55** 0	**0** 0	~~8~~
(2,3)		**4** 0	**4,35** 3	**4,55** 0	**0** 0	~~4~~ ~~1~~
(2,4)		**6** 0	**6,35** 0	**6,55** 0	**0** 10	10
(3,1)			**2** 3	**2,20** 0	**0** 0	~~3~~
(3,2)			**5** 0	**5,20** 8	**0** 0	~~8~~
(3,3)			**7** 0	**7,20** 0	**0** 4	4
(3,4)			**10** 0	**10,20** 0	**0** 10	10
(4,1)				**3** 3	**0** 0	~~3~~
(4,2)				**4** 8	**0** 0	~~8~~
(4,3)				**5** 4	**0** 0	~~4~~
(4,4)				**7**	**0** 10	10
	~~11~~	~~4~~	~~17~~	~~29~~	39	

Η βέλτιστη λύση προκύπτει και πάλι με ένα πέρασμα του πίνακα αρχίζοντας από τη στήλη 2 και προχωρώντας δεξιά κατά μία στήλη κάθε φορά, προς την στήλη του περισσεύματος. Για κάθε στήλη, η ζήτηση ικανοποιείται χρησιμοποιώντας τον φθηνότερο συνδυασμό παραγωγικών δυνατοτήτων της ίδιας στήλης.

Τελικά η βέλτιστη πολιτική είναι να παραχθούν:

3+8+1+3+5=20	προϊόντα την περίοδο 1
3+8+3+1=15	προϊόντα την περίοδο 2
3+8=11	προϊόντα την περίοδο 3
3+8+4=15	προϊόντα την περίοδο 4

και να διατεθούν όπως φαίνεται στον πίνακα.

2.4 ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι υπάρχουν κόστη εκκίνησης και υποθέτουμε ότι ο προγραμματισμός αφορά n περιόδους. Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές απόφασης:

- K_i = Κόστος εκκίνησης κατά την περίοδο *i*.
- D_i = Ζήτηση κατά την περίοδο *i*.
- h_i = Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης την περίοδο *i*.
- z_i = Ποσότητα παραγωγής ή παραγγελίας κατά την περίοδο *i*.
- x_i = Απόθεμα στην αρχή της *i* περιόδου.

Τέλος το κόστος παραγωγής για z_i μονάδες κατά την περίοδο *i* δίνεται από την συνάρτηση:

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ K_i + c_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

Μοντελοποιόντας το παραπάνω πρόβλημα στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού έχουμε ένα πρόβλημα n περιόδων. Η κατάσταση του συστήματος στο στάδιο *i* είναι το απόθεμα x_i στην αρχή της *i* περιόδου και η απόφαση αφορά την ποσότητα παραγωγής ή παραγγελίας z_i κατά την περίοδο *i*. Η δυναμική του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i\,.$$

Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι οι χώροι καταστάσεων (δυνατές τιμές των x_i) και οι χώροι αποφάσεων (δυνατές τιμές των z_i) δίνονται από τις σχέσεις:

$$0 \le x_i \le D_i + D_{i+1} + \ldots + D_n$$

(ώστε να καλύπτεται πιθανά όλη η μελλοντική ζήτηση από το απόθεμα της καθε περιόδου) και

$$0 \le z_i \le D_i + x_{i+1}$$

(ώστε $x_i = x_{i+1} + D_i - z_i \ge 0$, όπου $z_i \ge 0$). Έστω $f_i(x_{i+1})$, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής που εκφράζει το ελάχιστο κόστος παραγωγής ή αποθήκευσης για τις περιόδους 1, 2, …i ώστε στο τέλος της i να έχουμε απόθεμα x_{i+1}.

Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης και τα αντίστοιχα πεδία ισχύος τους είναι:

$$f_1(x_2) = C_1(x_2 + D_1 - x_1) + h_1 x_2\,, \quad (0 \le x_2 \le D_2 + D_3 + \ldots + D_n\,)$$

και

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \le z_i \le D_i + x_{i+1}} (C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\,,$$

$$(0 \le x_{i+1} \le D_{i+1} + D_{i+2} + \ldots + D_n \quad \text{όπου } 2 \le i \le n).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω ένα πρόβλημα παραγωγής-αποθήκευσης ενός προϊόντος που εμπίπτει σο παραπάνω πλαίσιο με αρχικό απόθεμα x_1=1, ζητήσεις, πάγια κόστη εκκίνησης παραγγελίας και κόστη αποθήκευσης που δίνονται από τον πίνακα:

Περίοδος *i*	D_i	K_i	h_i
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση κόστους παραγωγής (χωρίς το κόστος εκκίνησης) είναι η

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10 z_i\,, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \ge 4. \end{cases}$$

Ζητείται να σχεδιασθεί βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής – αποθήκευσης.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις βελτιστοποίησης υπολογίζουμε διαδοχικά την $f_1(x_2)$ για $0 \le x_2 \le D_2 + D_3 = 6$, $(z_1 = D_1 - x_1 + x_2 = 2 + x_2)$, την $f_2(x_3)$ για $0 \le x_3 \le D_3 = 4$, $(0 \le z_2 \le D_2 + x_3 = 2 + x_3)$ και την $f_3(x_4)$ για $x_4 = 0$ $(0 \le z_3 \le D_3 + x_4 = 4\,)$. Έχουμε πινακοποιημένα τα παρακάτω αποτελέσματα:

$f_1(x_2)$

x_2	z_1	$C_1(z_1)$	$h_1 x_2$		$f_1(x_2)$	z_1^*
0	2	23	0		**23**	**2**
1	3	33	1		**34**	**3**
2	4	53	2		**55**	**4**
3	5	73	3		**76**	**5**
4	6	93	4		**97**	**6**
5	7	113	5		**118**	**7**
6	8	133	6		**139**	**8**

$f_2(x_3)$

x_3	z_2	$C_2(z_2)$	$h_2 x_3$	$f_1(x_3 + D_2 - z_2)$	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0	0	55	55	
	1	17	0	34	51	
	2	27	0	23	**50** *	**2** *
1	0	0	3	76	79	
	1	17	3	55	75	
	2	27	3	34	64	
	3	37	3	23	**63** *	**3** *
2	0	0	6	97	103	
	1	17	6	76	99	
	2	27	6	55	88	
	3	37	6	34	**77** *	**3** *
	4	57	6	23	86	
3	0	0	9	118	127	
	1	17	9	97	123	
	2	27	9	76	112	
	3	37	9	55	101	
	4	57	9	34	**100** *	**4**
	5	77	9	23	109	

4	0	0	12	139	151	
	1	17	12	118	147	
	2	27	12	97	136	
	3	37	12	76	125	
	4	57	12	55	124	
	5	77	12	**34**	**123***	**5**
	6	97	12	23	132	

$$f_3(x_4)$$

x_4	z_3	$C_3(z_3)$	$h_3 x_4$	$f_2(x_4+D_3-z_3)$	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0	0	123	123	
	1	16	0	100	116	
	2	26	0	77	103	
	3	36	0	63	**99***	**3**
	4	56	0	50	106	

Άρα η βέλτιστη πολιτική θα είναι:

$x_4 = 0 \Rightarrow \quad z_3^* = 3 \quad \Rightarrow$

$x_3 = x_4 + D_3 - z_3^* = 0 + 4 - 3 = 1 \Rightarrow z_2^* = 3 \Rightarrow$

$x_2 = x_3 + D_2 - z_2^* = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow z_1^* = 2$

με συνολικό κόστος 99 μονάδες.

2.5 ΤΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ WAGNER - WHITIN

Όταν τα μοναδιαία κόστη παραγωγής και αποθήκευσης είναι φθίνουσες συναρτήσεις της ποσότητας παραγωγής και του αποθέματος αντίστοιχα, τότε είναι βέλτιστο σε κάθε περίοδο είτε να καλύπτουμε τη ζήτηση εξ ολοκλήρου από νέα παραγωγή αποκλειστικά ή αποκλειστικά από προϋπάρχον απόθεμα (Αρχή των Wagner – Whitin, βλ. Wagner H and Whitin, T.(1958) Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, 5, 89 – 96).

Στην περίπτωση αυτή αρκεί να αναζητήσουμε το βέλτιστο σε πιο περιορισμένους χώρους καταστάσεων και αποφάσεων και οι εξισώσεις βελτιστοποίησης παίρνουν τη μορφή

$$f_1(x_2) = C_1(x_2 + D_1 - x_1) + h_1 x_2, \qquad (x_2 \in \{0, D_2, D_2 + D_3, ..., D_2 + ... + D_n\})$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{z_i \in \{0, D_i + x_{i+1}\}} (C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)),$$

$$(x_{i+1} \in \{0, D_{i+1}, D_{i+1} + D_{i+2}, ..., D_{i+1} + ... + D_n\}, \quad 1 \leq 2 \leq N)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί το πρόβλημα παραγωγής-αποθήκευσης με αρχικό απόθεμα x_1= 15 και δεδομένα που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Περίοδος *i*	D_i	K_i	**Μοναδιαίο Κόστος παραγωγής**	**Μοναδιαίο Κόστος αποθήκευσης**
1	76	98	2	1
2	26	114	2	1
3	90	185	2	1
4	67	70	2	1

ΛΥΣΗ

Λόγω του ότι τα κόστη παραγωγής και αποθήκευσης είναι γραμμικά έχουμε ότι ικανοποιείται η υπόθεση Wagner-Whitin και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις απλοποιημένες εξισώσεις βελτιστοποίησης. Έχουμε συγκεκριμένα να υπολογίσουμε τα

$f_1(x_2)$ για $x_2 \in \{0, D_2, D_2 + D_3, D_2 + D_3 + D_4\}$ (οπότε $z_1 = x_2 + D_1 - x_1$)

$f_2(x_3)$ για $x_3 \in \{0, D_3, D_3 + D_4\}$ (οπότε $z_2 \in \{0, D_2 + x_3\}$)

$f_3(x_4)$ για $x_4 \in \{0, D_4\}$ (οπότε $z_3 \in \{0, D_3 + x_4\}$)

$f_4(x_5)$ για $x_5 = 0$ (οπότε $z_4 \in \{0, D_4 + x_5\}$).

Έχουμε:

$f_1(x_2)$

x_2	z_1	$C_1(z_1)$	$h_1 x_2$		$f_1(x_2)$	z_1^*
0	61	220	0		**220**	**61**
26	87	272	26		**298**	**87**
116	177	452	116		**568**	**177**
183	244	586	183		**769**	**244**

$f_2(x_3)$

x_3	z_2	$C_2(z_2)$	$h_2 x_3$	$f_1(x_3 + D_2 - z_2)$	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0	0	298	**298***	**0**
	26	166	0	220	386	
90	0	0	90	568	658	
	116	346	90	220	**656***	**116**
157	0	0	157	769	926	
	183	480	157	220	**857***	**183**

$f_3(x_4)$

x_4	z_3	$C_3(z_3)$	$h_3 x_4$	$f_2(x_4 + D_3 - z_3)$	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0	0	656	**656***	**0**
	90	365	0	298	663	
67	0	0	67	857	924	
	157	499	67	298	**864***	**157**

$f_4(x_5)$

x_5	z_4	$C_4(z_4)$	$h_4 x_5$	$f_3(x_5 + D_4 - z_4)$	$f_4(x_5)$	z_4^*
0	0	0	0	864	864	
	67	204	0	656	**860***	**67**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ

3.1 ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ (probabilistic EOQ model) Ή ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΝΑΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ (reorder point ROP – model)

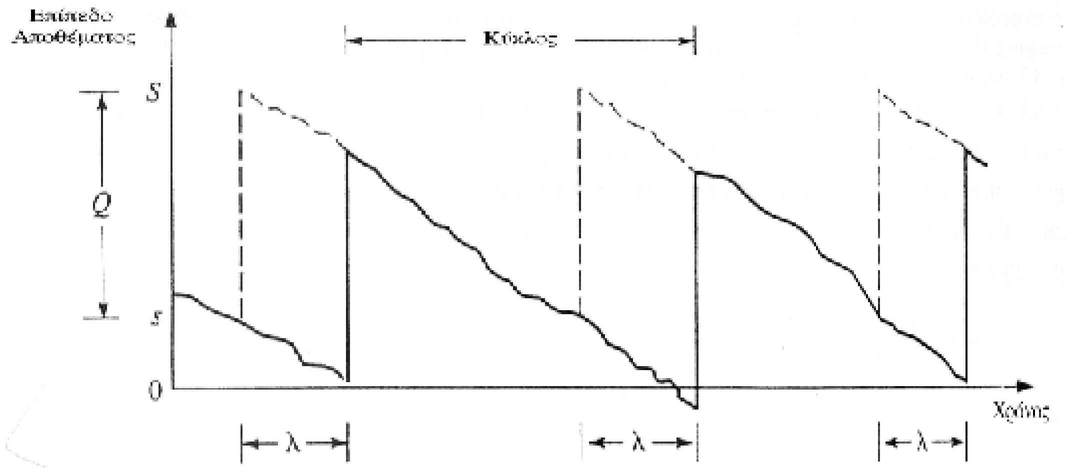
Το μοντέλο που θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα είναι ανάλογο του μοντέλου της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (συνεχούς επιθεώρησης) μόνο που η ζήτηση για το προϊόν είναι στοχαστική και υπάρχει σταθερός χρόνος παράδοσης ή παραλαβής χρονικής διάρκειας λ. Όταν το επίπεδο αποθέματος μειώνεται στο επίπεδο ασφαλείας s, τότε δίνεται παραγγελία με σκοπό να ανέβει το απόθεμα σε επίπεδο S (παραγγέλλουμε ποσότητα $Q = S$-s). Η πολιτική αυτή ονομάζεται (s , S) και η ανικανοποίητη ζήτηση υποθέτουμε ότι ικανοποιείται άμεσα όταν γίνει αναπλήρωση του αποθέματος.

Προκειμένου να δοθεί μια πληρέστερη περιγραφή του μοντέλου, ορίζουμε τα παρακάτω:

- *Διαθέσιμο απόθεμα,* ονομάζεται ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που είναι άμεσα διαθέσιμο προς πώληση. Κατά συνέπεια η ποσότητα αυτή δεν μπορεί να είναι αρνητική.
- *Επίπεδο αποθέματος,* είναι το διαθέσιμο απόθεμα μειωμένο κατά το μέγεθος της ανικανοποίητης ζήτησης. Η ανικανοποίητη ζήτηση είναι πιθανό να εμφανιστεί (προσωρινά) μόνο όταν το διαθέσιμο απόθεμα είναι μηδενικό, οπότε εξ αιτίας της ζήτησης που δεν έχει ικανοποιηθεί, το επίπεδο αποθέματος γίνεται αρνητικό.
- *Επίπεδο θέσης,* είναι το επίπεδο αποθέματος συν την ποσότητα παραγγελίας η οποία δεν έχει ακόμη παραληφθεί. Το επίπεδο θέσης θα πρέπει να είναι μη αρνητικό, ωστέ να μην υπάρχει περίπτωση να μην ικανοποιηθεί η ζήτηση μετά την παραλαβή της αναμενόμενης παραγγελίας.

Η ζήτηση μονάδων προϊόντος κατά τη διάρκεια του χρόνου παραλαβής λ, θεωρείται συνεχής τυχαία μεταβλητή και συμβολίζεται με D, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(\xi)$, (ξ>0) και μέση τιμή E(*D*) = $\alpha\lambda$ όπου α είναι ο ρυθμός της ζήτησης στη μονάδα του χρόνου.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως το επίπεδο αποθέματος (διακεκομμένη γραμμή) και το επίπεδο θέσης διαφέρουν στην διάρκεια του χρόνου. Από το σχήμα αυτό μπορούμε να φανταστούμε μια σειρά από κύκλους, δηλαδή χρόνους που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές παραλαβές παραγγελιών. Στο σχήμα περιλαμβάνεται ένας κύκλος κατά τον οποίο η ζήτηση της περιόδου *λ*, είναι σχετικά μεγάλη και κατά συνέπεια το επίπεδο αποθέματος τείνει να γίνει αρνητικό.



Στο μοντέλο αυτό περιλαμβάνονται τα εξής κόστη:

- *K* = Πάγιο κόστος ανά παραγγελία (αυτό ενσωματώνει το κόστος εκκίνησης της παραγωγικής διαδικασίας ή κόστη γραφειοκρατίας για τη διεκπεραίωση της παραγγελίας κλπ.)
- *c* = Κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος.
- *h* = Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και μονάδα του χρόνου.
- *p* = Κόστος ελλείμματος μέχρι την παραλαβή της επόμενης παραγγελίας, που είναι ανεξάρτητο από τη διάρκεια κατά την οποία εκδηλώνεται η έλλειψη αυτή.

Αναζητούμε το χρόνο κατά τον οποίο είναι απαραίτητο να θέσουμε παραγγελία, (δηλαδή να βρούμε το απόθεμα ασφαλείας *s*) και επίσης αναζητούμε την κατάλληλη ποσότητα παραγγελίας *Q*, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος στην μονάδα του χρόνου, *T*(*Q* , *s*):

$$T(Q\ ,s) = E(OC) + E(HC) + E(SC)$$

Όπου

$E(OC)$ = Αναμενόμενο κόστος παραγγελίας στην μονάδα του χρόνου, (ordering cost).
$E(HC)$ = Αναμενόμενο κόστος αποθήκευσης στην μονάδα του χρόνου, (holding cost).
$E(SC)$ = Αναμενόμενο κόστος ελλειμμάτων στην μονάδα του χρόνου, (shortage cost).

Γενικά υποθέτουμε ότι η χρονική διάρκεια παράδοσης ή παραλαβής λ είναι αρκετά μικρή ώστε να μην υπάρχει ποτέ παραπάνω από μία τοποθετημένη παραγγελία και το σημείο επανατοποθέτησης s είναι πάντα μη αρνητικό. Κατά συνέπεια, το διαθέσιμο απόθεμα, όταν παραληφθεί η παραγγελία, θα πέφτει πάντα πάνω από το σημείο επανατοποθέτησης s, διότι διαφορετικά θα απαιτείται η τοποθέτηση μίας παραγγελίας παραπάνω. Εάν το πηλίκο p/h είναι ικανοποιητικά μεγάλο, όπως συμβαίνει συνήθως στην πράξη, τότε όλες οι παραπάνω υποθέσεις ικανοποιούνται.

Προχωρώντας στην μαθηματική ανάλυση του μοντέλου, ορίζουμε τα παρακάτω μεγέθη:

Μέσος κύκλος παραγγελίας : $E[T] = \frac{Q}{\alpha}$

ή ισοδύναμα

Μέσος αριθμός κύκλων παραγγελίας ανά χρονική μονάδα: $\frac{1}{E[T]} = \frac{\alpha}{Q}$

Ακόμη,

Κόστος αγοράς σε έναν κύκλο: $K + cQ$

Κόστος αποθήκευσης ανά χρονική μονάδα:

$E(HC) = h$*Μέσο απόθεμα σε έναν κύκλο = $h\frac{(S-\alpha\lambda)+(s-\alpha\lambda)}{2} = h(\frac{Q}{2} + s - \alpha\lambda)$

(διότι $S - \alpha\lambda$ είναι το μέσο αρχικό απόθεμα και $s - \alpha\lambda$ είναι το μέσο τελικό απόθεμα)

Κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο: $pE[\max(0, D-s)] = p\int_s^\infty (\xi - s) f_D(\xi) d\xi$

Μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα:

$$TCU(Q,s) = C(Q,s) = \frac{\alpha K}{Q} + \alpha c + h(\frac{Q}{2} + s - \alpha\lambda) + \frac{p\alpha}{Q}\int_s^\infty (\xi - s) f_D(\xi) d\xi$$

Προκειμένου να βρεθούν οι ιδανικές ποσότητες των Q και s ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση $C(Q, s)$ θέτοντας τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν:

$$\frac{\partial C(Q^*,s^*)}{\partial Q} = -\frac{\alpha \mathrm{K}}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{p\alpha}{Q^2}\int_s^\infty (\xi - s) f_D(\xi) d\xi = 0$$

$$\frac{\partial C(Q^*,s^*)}{\partial s} = h - \frac{p\alpha \int_s^\infty f_D(\xi) d\xi}{Q} = 0$$

που δίνουν το σύστημα

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a[K + p\int_{s^*}^\infty (\xi - s^*) f_D(\xi) d\xi]}{h}}$$

και

$$\int_s^\infty f_D(\xi) d\xi = \frac{hQ^*}{p\alpha}.$$

Δυστυχώς, η επίλυση του παραπάνω συστήματος δεν είναι δυνατή δεν καταλήγει σε κλειστούς αναλυτικούς τύπους για τις βέλτιστες ποσότητες και γι’αυτό οδηγούμαστε σε όσο το δυνατό καλύτερες προσεγγίσεις για τα Q^*, s^*. Τα Q^*, s^* που προκύπτουν από τη λύση του παραπάνω συστήματος είναι μοναδικά και επιπλέον είναι πράγματι βέλτιστα λόγω της κυρτότητας της $C(Q, s)$.

3.2 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΝΑΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΧΡΟΝΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ – ΠΑΡΑΛΑΒΗΣ

Εξετάζουμε τώρα την ειδική περίπτωση που η κατανομή της ζήτησης είναι η ομοιόμορφη με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \alpha\nu \quad 0 \le \xi \le t, \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι

$$\int_s^{\infty} f_D(\xi) d\xi = \frac{hQ^*}{p\alpha} = 1 - \frac{s}{t}, \;\; 0<s<t,$$

οπότε η βέλτιστη ποσότητα για το s^* δίνεται από ην σχέση:

$$s^* = \frac{t(p\alpha - hQ^*)}{p\alpha} = t(1 - \frac{hQ^*}{p\alpha}).$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\int_s^{\infty} (\xi - s) f_D(\xi) d\xi = \frac{t}{2} + \frac{s^2}{2t} - s$$

οπότε η βέλτιστη ποσότητα για το Q^* δίνεται από ην σχέση:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha K + \alpha pt + \alpha ps^*/t - 2\alpha ps^*}{h}}$$

Αντικαθιστώντας το s^* στην τελευταία ισότητα και υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, προκύπτει μετά από ορισμένες απλοποιήσεις ότι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}} \sqrt{\frac{\alpha p}{\alpha p - ht}}.$$

Παρατηρούμε την ομοιότητα με το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας όπου αντίστοιχα ισχύει $Q^* = \sqrt{2aK/h}$. Όπως βλέπουμε η στοχαστικότητα στη ζήτηση επιβάλλει να είμαστε πιο συντηρητικοί στις παραγγελίες, δηλαδή η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ποσότητα παραγγελίας του προσδιοριστικού προτύπου.

3.3 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΑΝΑΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΧΡΟΝΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ – ΠΑΡΑΛΑΒΗΣ

Αντίστοιχα, στην περίπτωση που η ζήτηση ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο $\alpha\lambda$, και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_D(\xi) = (\frac{1}{\alpha\lambda})e^{-\frac{\xi}{\alpha\lambda}}, \qquad \xi \geq 0$$

έχουμε ότι

$$\int_s^\infty f_D(\xi)d\xi = e^{-\frac{s}{\alpha\lambda}}$$

και η εξίσωση

$$\int_s^\infty f_D(\xi)d\xi = \frac{hQ^*}{p\alpha}$$

οδηγεί στην βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

$$s^* = -\alpha\lambda \ln \frac{hQ^*}{p\alpha}$$

Επιπλέον επειδή

$$\int_s^\infty (\xi - s) f_D(\xi)d\xi = \alpha\lambda e^{-s/\alpha\lambda}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha}{h}(K + \alpha\lambda p e^{-s^*/\alpha\lambda})}.$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής, αντικαθιστούμε το s^* στην τελευταία σχέση , υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη, οπότε προκύπτει:

$$Q^* = \alpha\lambda + \sqrt{\alpha^2\lambda^2 + \frac{2\alpha K}{h}},$$

όπου και πάλι διαπιστώνουμε την ομοιότητα με το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο παράδειγμα της παραγράφου 1.1 δίνονται τα εξής δεδομένα: K=12000 και h=0.30 με ρυθμό ζήτησης α=8000 για κάθε μήνα . Υποθέτουμε ότι κάθε φορά που σχεδιάζεται παραγωγή τηλεοράσεων, τότε και η παραγωγή μεγαφώνων, πραγματοποιείται άμεσα.

Υποθέτουμε επίσης ότι μεσολαβεί ένα διάστημα ενός μήνα, λ=1, ανάμεσα στην πραγματοποίηση της παραγωγής μεγαφώνων και στην διάθεσή τους προς εγκατάσταση στις τηλεοράσεις. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε διακοπή στην παραγωγική διαδικασία των τηλεοράσεων οδηγεί σε συσσώρευση κόστους. Το κόστος ελλειμμάτων είναι p=\$5 για κάθε μεγάφωνο.

Για την περίπτωση που η ζήτηση ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή οι αντίστοιχες βέλτιστες ποσότητες είναι:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}}\sqrt{\frac{\alpha p}{\alpha p - ht}} = \sqrt{\frac{8000*5}{8000*5-0.3*16000}} \quad \sqrt{\frac{2*8000*12000}{0.3}} = \quad 26968$$

και αντίστοιχα

$$s^* = \frac{t(p\alpha - hQ^*)}{p\alpha} = t(1-\frac{hQ^*}{p\alpha}) = 16000\left[1-\frac{0.3*26968}{5*8000}\right] = 12764$$

Η πιθανότητα να παρατηρηθεί έλλειψη προϊόντος (stock out) δίνεται από την σχέση:

$$P\{D > s^*\} = \frac{hQ^*}{p\alpha} = 0{,}20$$

Στην περίπτωση που η ζήτηση ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο 8000, οι αντίστοιχες ισότητες είναι:

$$Q^* = \alpha\lambda + \sqrt{\alpha^2\lambda^2 + \frac{2\alpha K}{h}} = 8000 + \sqrt{8000^2 + \frac{2*8000*12000}{0.3}} = 34533$$

και

$$s^* = -\alpha\lambda \ln\frac{hQ^*}{p\alpha} = -8000\ln\frac{0.3*34533}{5*8000} = 10807$$

Η πιθανότητα να παρατηρηθεί έλλειψη προϊόντος (stock out) δίνεται από την σχέση:

$$P\{D > s^*\} = \frac{hQ^*}{p\alpha} = 0{,}26$$

3.4 ΕΝΑΣ ΓΕΝΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΝΑΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Προσεγγίζουμε τα *s*, *Q* μέσω ακολουθιών $s_1, s_2, \ldots$ και $Q_1, Q_2, \ldots$ που κατασκευάζονται ως εξής:

ΒΗΜΑ 0: $$Q_1 = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}, \qquad s_1 : \int_{s_1}^{\infty} f_D(\xi) d\xi = \frac{hQ_1}{p\alpha}$$

Και αποτελεί την πρώτη προσέγγιση με το προσδιοριστικό EOQ μοντέλο.

ΒΗΜΑ i: Το Q_{i+1} υπολογίζεται από την σχέση

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a[K + p\int_{s^*}^{\infty} (\xi - s^*) f_D(\xi) d\xi]}{h}} \text{ για } s^* = s_i$$

Και το s_{i+1} υπολογίζεται από την σχέση $\int_s^{\infty} f_D(\xi) d\xi = \frac{hQ^*}{p\alpha}$ για $Q^* = Q_{i+1}$

Αν $$\left| Q_{i+1} - Q_i \right| < \varepsilon$$

και $$\left| s_{i+1} - s_i \right| < \delta$$

όπου *ε*, *δ* είναι δοσμένα επίπεδα ακριβείας τότε ο αλγόριθμος σταματά αλλιώς προχωράμε στο βήμα *i*+1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η βιομηχανία «Electro» χρησιμοποιεί ένα ειδικό υλικό κατασκευής κατά την παραγωγική διαδικασία, με ρυθμό 1000 γαλονιών για κάθε μήνα. Το κόστος εκκίνησης της παραγγελίας είναι 100$. Το κόστος αποθήκευσης ανά γαλόνι και μήνα είναι 2$ και το κόστος ελλειμμάτων είναι 10$ ανά γαλόνι του υλικού.

Με βάση τα δεδομένα του παρελθόντος συμπεραίνουμε ότι η ζήτηση ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,100). Ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθήσει η επιχείρηση.

ΛΥΣΗ

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι:

ΒΗΜΑ 0: $$Q_1 = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = \sqrt{\frac{2*100*1000}{2}} = 316.23$$

$$s_1 : \int_{s_1}^{\infty} f_p(x)dx = \frac{hQ_1}{pa} \Rightarrow \frac{100 - s_1}{100} = \frac{2*316.23}{10*1000} \Rightarrow s_1 = 93.68$$

ΒΗΜΑ i: $$S = \int_{s^*}^{\infty} (\xi - s^*) f_D(\xi) d\xi = \int_{s^*}^{100} (\xi - s^*) \frac{1}{100} d\xi = \frac{s^{*2}}{200} - s^* + 50$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2a(k + pS)}{h}} = \sqrt{\frac{2*1000(100 + 105)}{2}} = \sqrt{100000 + 10000S}$$

$$s^* : \int_{s^*}^{\infty} f_D(\xi) d\xi = \frac{hQ^*}{pa} \Rightarrow \frac{100 - s^*}{100} = \frac{2Q^*}{10*1000} \Rightarrow Q^* = 100 - \frac{s^*}{50}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφράσεις για τα S, Q^* και s^* ο αλγόριθμος γίνεται

ΒΗΜΑ 1: $$S = \frac{s_1^2}{200} - s_1 + 50 = 0.19971 \text{ γαλόνια}$$

$$Q_2 = \sqrt{100000 + 10000*0.19971} = 319.37 \text{ γαλόνια}$$

και άρα $$s_2 = 100 - \frac{319.39}{50} = 93.612$$

ΒΗΜΑ 2: $$S = \frac{s_2^2}{200} - s_2 + 50 = 0.20399 \quad \text{γαλόνια}$$

$$s_2 = \sqrt{100000 + 10000*0.20399} = 319.44 \quad \text{γαλόνια}$$

οπότε

$$s_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \quad \text{γαλόνια}$$

Συμπερασματικά λοιπόν η βέλτιστη πολιτική έγκειται στο πρέπει να παραγγείλουμε περίπου 320 γαλόνια από το συγκεκριμένο υλικό όποτε το επίπεδο αποθέματος πέσει στα 94 γαλόνια. Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε με τον επαναληπτικό αλγόριθμο συμφωνεί με το αποτέλεσμα που έχουμε από τον ακριβή τύπο $$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \sqrt{\frac{ap}{ap - \lambda t}}$$

που αποδείξαμε στην παράγραφο 3.2.

Πράγματι, $$Q^* = \sqrt{\frac{2*1000*100}{2}} \sqrt{\frac{1000*10}{1000*10 - 2*100}} = 319.44 \, .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ

4.1 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΟΣ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ότι ο χρονικός ορίζοντας καλύπτει μία χρονική περίοδο στη διάρκεια της οποίας η ζήτηση D που εκδηλώνεται είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή, ενώ ορίζουμε:

$(p_D(d), \quad d = 0,1,2...)$ τη συνάρτηση πιθανότητας της D όταν είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή και

$(f_D(\xi), \xi>0)$ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της D όταν είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Επίσης θεωρούμε ότι δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα και συνεπώς δεν υπάρχει κόστος εκκίνησης. Το κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος ανέρχεται σε c μονάδες. Επιπλέον, υπάρχει κόστος αποθήκευσης h ανά μονάδα προϊόντος στο τέλος της περιόδου και κόστος έλλειψης p ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης.

Η μεταβλητή απόφασης είναι ο αριθμός μονάδων προϊόντος ή αλλιώς το μέγεθος της παραγγελίας Q που πρέπει να δώσουμε. Το μοντέλο αυτό είναι κατάλληλο όταν:

- Πρόκειται για προϊόν το οποίο καταναλώνεται άμεσα (π.χ. ημερήσια εφημερίδα, εποχικό προϊόν κλπ.)
- Πρόκειται για φυσικά προϊόντα (π.χ. είδη μαναβικής) των οποίων η απαξίωση επέρχεται γρήγορα.
- Όταν η παραγωγή γίνεται εφάπαξ.
- Όταν η ζήτηση του προϊόντος κρίνεται αβέβαια πέρα από μια περίοδο.

Η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής ακολουθεί και εδώ την οδό που ακολουθήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή εκφράζουμε το συνολικό κόστος μιας περιόδου ως συνάρτηση της ελεγχόμενης μεταβλητής που είναι η ποσότητα παραγγελίας Q και κατόπιν ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση αυτή με την κλασική μέθοδο μηδενισμού της αντίστοιχης παραγώγου κ.ο.κ. Λόγω της στοχαστικότητας της ζήτησης και των μέσων τιμών που υπολογίζονται, η συνάρτηση κόστους περιέχει όρους της μορφής $F(Q)=\int_0^{b(Q)} f(x,Q)dx$. Για το λόγο αυτό, για να διευκολυνθεί η κατανόηση των αποτελεσμάτων που ακολουθούν, υπενθυμίζουμε ως τεχνικό σημείο, τον τρόπο υπολογισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης

$$F(Q)=\int_0^{b(Q)} f(x,Q)dx.$$

Είναι:

$$F(Q)=\int_0^{b(Q)} f(x,Q)dx=\alpha(b(Q),Q) \text{ όπου } \alpha(z,Q)=\int_0^{z} f(x,Q)dx.$$

Άρα,

$$\frac{dF(Q)}{dQ}=\frac{\partial\alpha}{\partial z}(b(Q),Q)\frac{dz}{dQ}+\frac{\partial\alpha}{\partial Q}(b(Q),Q)\frac{dQ}{dQ}$$

Όμως,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}=f(z,Q),\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial Q}=\int_0^{z}\frac{\partial f}{\partial Q}(x,Q)dx,\qquad \frac{dz}{dQ}=b'(Q),\qquad \frac{dQ}{dQ}=1.$$

Επομένως είναι,

$$\frac{dF(Q)}{dQ}=f(b(Q),Q)b'(Q)+\int_0^{b(Q)}\frac{\partial f}{\partial Q}(x,Q)dx.$$

Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή D έχει συνάρτηση κατανομής $F_D(\xi)$. Είναι φανερό ότι η ποσότητα που αποθεματοποιείται στο τέλος της περιόδου είναι: max (0, Q-D), ενώ η ποσότητα ελλείμματος στο τέλος της περιόδου είναι: max (0, D-Q).

Το συνολικό κόστος δίνεται από την σχέση:

$$T(D,Q)=cQ+p\max(0,D-Q)+h\max(0,Q-D)$$

ενώ το μέσο συνολικό κόστος δίνεται αντίστοιχα από:

$$T(Q)=E[T(D,Q)]=\int_0^{\infty} TCU(x,Q)f_D(x)dx$$

$$=cQ+h\int_0^{Q}(Q-x)f_D(x)dx+p\int_Q^{\infty}(x-Q)f_D(x)dx.$$

Ορίζουμε για μελλοντική αναφορά

$$L(Q) = h\int_0^Q (Q-\xi) f_D(\xi)d\xi + p\int_Q^\infty (\xi - Q) f_D(\xi)d\xi$$

το μέσο κόστος αποθήκευσης-έλλειψης.

Χρησιμοποιώντας το τεχνικό σημείο που αναφέραμε παραπάνω, θα έχουμε:

$$\frac{dT(Q)}{dQ} = c + h[(Q-Q) f_D(Q) * 1 + \int_0^Q f_D(\xi)d\xi] - p[(Q-Q) f_D(Q) * 1 + \int_\infty^Q - f_D(\xi)d\xi] =$$

$$= c + h\int_0^Q f_D(\xi)d\xi - p\int_Q^\infty f_D(\xi) = c + hF_D(Q) - p(1 - F_D(Q))$$

Άρα λύνοντας την

$$\frac{dT(Q^*)}{dQ} = 0$$

θα έχουμε

$$F_D(Q^*) = \frac{p-c}{p+h} \Rightarrow Q^* = F_D^{-1}(\frac{p-c}{p+h}).$$

Επιπλέον

$$\frac{d^2T(Q^*)}{dQ^2} = (h+p) f_D(Q^*) > 0,$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η $T(Q)$ έχει πράγματι ελάχιστο στο Q^* οπότε η ποσότητα

$$Q^* = F_D^{-1}(\frac{p-c}{p+h})$$

είναι η βέλτιστη ποσότητα που πρέπει να παραγγείλουμε.

Στην περίπτωση που έχουμε διακριτή ζήτηση το συνολικό κόστος θα είναι:

$$T(Q) = cQ + h\sum_{d=0}^{Q-1}(Q-d)p_D(d) + p\sum_{d=Q}^{\infty}(d-Q)p_D(d)$$

και στην περίπτωση αυτή το Q^* είναι το μικρότερο Q έτσι ώστε $F_D(Q) \geq \dfrac{p-c}{p+h}$.

Ο προσδιορισμός της βέλτιστης ποσότητας Q^* απαιτεί τη γνώση της κατανομής της D και συχνά αυτό είναι δύσκολο, ιδιαίτερα όταν η ζήτηση έχει μεγάλο εύρος τιμών. Για το λόγο αυτό η διακριτή τυχαία μεταβλητή προσεγγίζεται συχνά από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένας χονδρέμπορος θα θέσει μια παραγγελία ποδηλάτων για τα Χριστούγεννα. Η τιμή πώλησης ανά ποδήλατο είναι 45$, η τιμή αγοράς ανά ποδήλατο είναι 20$ ενώ η τιμή πώλησης μετά τα Χριστούγεννα με την έκπτωση ανέρχεται σε 10$.Τέλος τα έξοδα αποθήκευσης μέχρι το τέλος της περιόδου των Χριστουγέννων εκτιμώνται σε 1$, ανά ποδήλατο που περισσεύει.

ΛΥΣΗ

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα υπολογίζουμε το κέρδος του χονδρέμπορου ως εξής:

Κέρδος: $45\min(Q,D) - 20Q + 10\max(0.Q-D) - \max(0,Q-D) =$

$$= 45D + 45\min(Q-D,0) - 20Q + 9\max(0,Q-D) =$$

$$= 45D - 45\max(0,D-Q) - 20Q + 9\max(0,Q-D)$$

Το σχετικό κόστος θα είναι: $20Q + 45\max(0,D-Q) - 9\max(0,Q-D)$.

Επειδή το συνολικό κόστος είναι τυχαία μεταβλητή, όπως η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή, σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο συνολικό κόστος. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι p = 45, c = 20, h = -9. Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα είναι:

$$Q = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right),$$

όπου

$$\frac{p-c}{p+h} = \frac{45-20}{45-9} = \frac{25}{36} = 0.6944 .$$

Στην περίπτωση που η D ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο 1/10000 τότε η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_D(x) = 1 - \frac{1}{1000} e^{\frac{-x}{10000}} \ , \ x > 0 ,$$

οπότε για τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q^* έχουμε

$$F_D(Q^*) = 1 - \frac{1}{10000} e^{-\frac{Q^*}{10000}} = 0.6944 \Rightarrow Q^* = 11856,$$

δηλαδή ο χονδρέμπορος θα πρέπει να δημιουργήσει απόθεμα 11856 ποδηλάτων στην περίοδο των Χριστουγέννων, αριθμός που είναι λίγο αρκετά μεγαλύτερος από την αναμενόμενη ζήτηση των 10000.

4.2 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΕ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΑΛΛΑ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΟΣ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

Στην περίπτωση αυτή το βασικό στοχαστικό πρότυπο ελέγχου αποθεμάτων αποτελεί μικρή διαφοροποίηση του προηγούμενου προτύπου, εφόσον τώρα θεωρούμε ότι υπάρχει αρχικό απόθεμα *x*. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε με ποιο τρόπο επηρεάζει αυτό το αρχικό απόθεμα τη βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων που αναζητούμε, όταν η μεταβλητή απόφασης είναι η *Q*, δηλαδή το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας.

Οπότε είναι:

Διαθέσιμη ποσότητα *Q* = Αρχικό απόθεμα *x* + ποσότητα παραγγελίας (*Q*-*x*), ενώ το συνολικό κόστος είναι:

$$T(D,Q) = c(Q-x) + p\max(0, D-Q) + h\max(0, Q-D)$$

Το μέσο συνολικό κόστος δίνεται αντίστοιχα από:

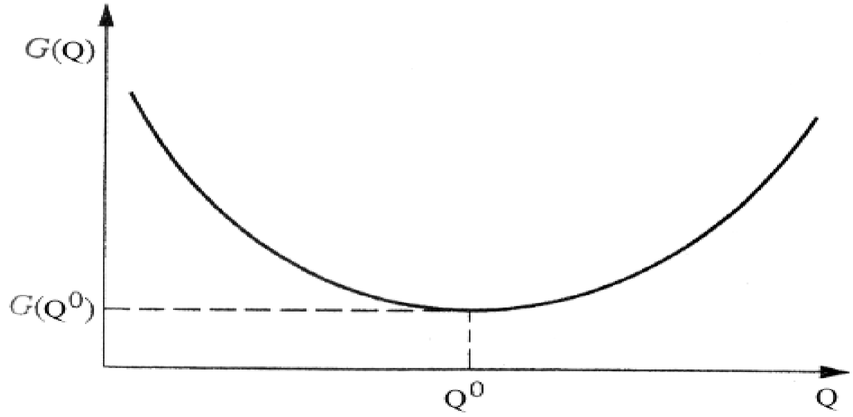
$$TCU(Q) = -cx + G(Q)$$

όπου $G(Q)$ είναι το μέσο κόστος στο πρότυπο χωρίς αρχικό απόθεμα.

Αναζητούμε την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q^* που είναι τέτοια ώστε

$$T(Q^*) = \min_{Q\geq x} T(Q) = \min_{Q\geq x}(-cx + G(Q))$$

Η γραφική παράσταση της $G(Q)$ όπως φαίνεται παρακάτω είναι κυρτή και παρουσιάζει ελάχιστο στο $Q^0 = F_D^{-1}(\frac{p-c}{p+h})$.



Συμπερασματικά,

$$Q^* = \begin{cases} F_D^{-1}(\dfrac{p-c}{p+h}), & an \quad x \le F_D^{-1}(\dfrac{p-c}{p+h}) \\ x, & an \quad x > F_D^{-1}(\dfrac{p-c}{p+h}). \end{cases}$$

Δηλαδή η βέλτιστη πολιτική είναι να παραγγείλουμε όση ποσότητα χρειάζεται ώστε να φτάσουμε το απόθεμα στο επίπεδο $F_D^{-1}(\dfrac{p-c}{p+h})$, αν το αρχικό απόθεμα είναι μικρότερο, αλλιώς να μην παραγγείλουμε καθόλου.

4.3 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΕ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

Η εισαγωγή του κόστους εκκίνησης στο στοχαστικό πρότυπο ελέγχου αποθεμάτων γενικά διαφοροποιεί σημαντικά τα αποτελέσματά μας συγκριτικά με τα προηγούμενα πρότυπα. Υποθέτουμε, όπως και προηγουμένως, ότι ο χρονικός ορίζοντας καλύπτει μία χρονική περίοδο στη διάρκεια της οποίας η ζήτηση D που εκδηλώνεται είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή, ενώ ορίζουμε:

$p_D(d), \quad d = 0,1,...$ τη συνάρτηση πιθανότητας της D για διακριτές μεταβλητές και

$f_D(\xi), \quad \xi > 0$ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της D για συνεχείς μεταβλητές.

Επίσης θεωρούμε ότι υπάρχει αρχικό απόθεμα x και πάγιο κόστος εκκίνησης K, αν αποφασιστεί να τοποθετηθεί κάποια παραγγελία. Το κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος ανέρχεται σε c μονάδες, το κόστος αποθήκευσης είναι h ανά μονάδα προϊόντος που περισσεύει στο τέλος της περιόδου και το κόστος έλλειψης είναι p ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης.

Η μεταβλητή απόφασης είναι ο αριθμός μονάδων προϊόντος ή αλλιώς το μέγεθος της παραγγελίας Q που πρέπει να δώσουμε.

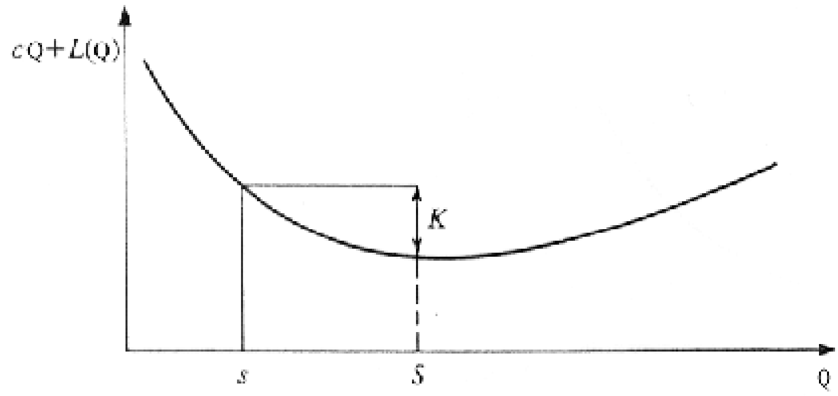
Ξεκινώντας την ανάλυσή μας, θεωρούμε ότι τα κόστη έλλειψης και αποθήκευσης είναι γραμμικά, οπότε όπως έχουμε δει στην παράγραφο 4.1 το μέσο κόστος έλλειψης-αποθήκευσης για μια περίοδο είναι:

$$L(Q) = p\int_Q^\infty (\xi - Q) f_D(\xi) + h\int_0^Q (Q-\xi) f_D(\xi) d\xi$$

Έτσι το συνολικό κόστος που προκύπτει δίνεται από τη σχέση:

$$T(Q) = \begin{cases} K + c(Q-x) + L(Q), & \acute{o}\tau\alpha\nu\, Q > x \\ L(x), & \acute{o}\tau\alpha\nu\, Q = x \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι η ποσότητα $cQ + L(Q)$ είναι το ίδιο αναμενόμενο κόστος που θεωρήσαμε παραπάνω όταν το κόστος εκκίνησης δεν είχε ληφθεί υπόψιν. Αν το $cQ + L(Q)$ απεικονισθεί γραφικά ως μια συνάρτηση του Q θα έχει την παρακάτω μορφή.



Ορίζουμε με S την τιμή για το Q που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $cQ+L(Q)$ και ορίζουμε με s την μικρότερη τιμή για το Q για την οποία θα ισχύει ότι:

$$cs+L(s)=K+cS+L(S)$$

Το S έχει βρεθεί από τη θεωρία της παραγράφου 4.1 και είναι το Q για το οποίο

$$F_D(Q)=\frac{p-c}{p+h}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η βέλτιστη πολιτική είναι η παρακάτω:

$$\text{Αν} \quad x\begin{cases} < s, & \textit{παραγγέλω}\ S-x\ \textit{ώστε να έχουμε απόθεμα ύψους}\ S \\ \geq s, & \textit{δεν παραγγέλουμε} \end{cases}$$

όπου, όπως είπαμε

$$S^*=F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right)$$

και το s είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί την σχέση:

$$cs+L(s)=K+cS+L(S).$$

Η πολιτική που περιγράψαμε είναι γνωστή ως (s,S) πολιτική και έχει εκτεταμένη χρήση στην βιομηχανία. Για να αποδείξουμε ότι η (s,S) πολιτική που αναφέρουμε είναι βέλτιστη, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το ύψος του αρχικού αποθέματος x και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $G(y)=cy+L(y)$ είναι κυρτή, φθίνουσα στο [0, S] και αύξουσα στο $[S,\infty]$ με ελάχιστο στο S.

Περίπτωση 1: $x>S$.

Στην περίπτωση αυτή, για όλα τα $y \geq x$ έχουμε

$$cy+L(y)\geq cx+L(x)$$
$$\Rightarrow c(y-x)+L(y)\geq L(x)$$
$$\Rightarrow K+c(y-x)+L(y)\geq K+L(x)\geq L(x)$$

οπότε

$$\min_{y\geq x} C(y)=C(x),$$

και είναι βέλτιστο το απόθεμα μετά την παραγγελία να είναι *x*, δηλαδή να μην παραγγείλουμε καθόλου.

Περίπτωση 2: $s<x\leq S$.

Τότε για $y\geq x$ έχουμε

$$K+cy+L(y)\geq K+cS+L(S)\ =cs+L(s)\geq cx+L(x)$$
$$\Rightarrow K+c(y-x)+L(y)\geq L(x)$$

οπότε

$$\min_{y\geq x} C(y)=C(x),$$

οπότε και πάλι είναι βέλτιστο να έχουμε απόθεμα x αμέσως μετά την παραγγελία, δηλαδή να μην παραγγείλουμε καθόλου.

Περίπτωση 3: $x<s$.

Τότε έχουμε

$$\min_{y\geq x}\{K+cy+L(y)\}=K+cS+L(S)\ =cs+L(S)\ <cx+L(x)$$
$$\Rightarrow \min_{y\geq x}(K+c(y-x)+L(y))<L(x)$$
$$\Rightarrow \min_{y\geq x} C(y)<C(x)$$
$$\Rightarrow \min_{y\geq x} C(y)=\min_{y>x} C(y)=K+cS+L(S)=C(S)$$

Συνεπώς το βέλτιστο στην περίπτωση αυτή είναι να έχουμε απόθεμα *S*, αμέσως μετά την παραγγελία, δηλαδή να παραγγείλουμε $S-x$. Συνεπώς έχουμε πλήρως αποδείξει ότι η (s,S) πολιτική που περιγράψαμε είναι βέλτιστη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η ημερήσια ζήτηση ενός ευπαθούς προϊόντος που συμβαίνει στην αρχή μιας μέρας ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,10]. Το μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης είναι 0,50 euro. Το μοναδιαίο κόστος έλλειψης είναι 4,50 euro. Το μοναδιαίο κόστος αγοράς είναι 0,50 euro και το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας είναι 5 euro. Ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική διαχείρισης του αποθέματος.

ΛΥΣΗ

Επειδή η ημερήσια ζήτηση ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή θα έχουμε:

$$F_D(Q) = \begin{cases} 1, & Q > 10 \\ \dfrac{Q}{10}, & 0 \le Q \le 10 \\ 0, & Q < 0 \end{cases}$$

Το S είναι τέτοιο ώστε

$$F_D(S) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{4.5-0.5}{4.5+0.5} = 0.8$$

Άρα,

$$F_D(S) = \frac{p-c}{p+h} \Leftrightarrow \frac{S}{10} = 0.8 \Leftrightarrow S = 8.$$

Επίσης για $Q \in [0,10]$ θα είναι:

$$\begin{aligned} L(Q) &= E[p\max(0, D-Q) + h\max(0, Q-D)] = \\ &= h\int_0^Q (Q-x) f_D(x)dx + p\int_Q^{10} (x-Q) f_D(x)dx = \\ &= h\int_0^Q \frac{Q-x}{10} dx + p\int_Q^{10} \frac{x-Q}{10} dx = \\ &= h\left[\frac{Qx}{10} - \frac{x^2}{20}\right]_{x=0}^{Q} + p\left[\frac{x^2}{20} - \frac{xQ}{10}\right]_{x=Q}^{10} \\ &= 0.025Q^2 + 4.5(5-Q) + 0.225Q^2 \\ &= 0.25Q^2 - 4.5Q + 22.5. \end{aligned}$$

Το s βρίσκεται ως η μικρότερη λύση της

$$K + cS + L(S) = cs + L(s)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0.5s + 0.25s^2 - 4.5s + 22.5 = 5 + 0.5*8 + 0.25*8^2 - 4.5*8 + 22.5 \\ &\Leftrightarrow 0.25s^2 - 4s + 11 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow s = 12.4721 \quad ή \quad s = 3.5278. \end{aligned}$$

Άρα $s = 3.5278$ και η βέλτιστη πολιτική είναι η παραγγελία $8-x$ μονάδων αν $x < 3.5278$ αλλιώς να μην τοποθετηθεί καθόλου παραγγελία.

4.4 ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ

Στο μοντέλο στοχαστικής ζήτησης και περιοδικής επιθεώρησης πολλών περιόδων θεωρούμε ότι η ικανοποίηση της ζήτησης πραγματοποιείται από την επόμενη παραγγελία (backlogging) ή χωρίς την τοποθέτηση παραγγελίας (no backlogging).

Θεωρούμε επίσης ότι το μοντέλο πολλών περιόδων αναφέρεται σε έναν περιορισμένο χρονικό ορίζοντα. Τα μοντέλα με άπειρες περιόδους μπορούν να προκύψουν από αυτά των πεπερασμένων περιόδων παίρνοντας το όριο καθώς ο αριθμός των περιόδων τείνει στο άπειρο. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχει κόστος εκκίνησης παραγγελίας σε καμία περίοδο. Η μελέτη μοντέλων με κόστη εκκίνησης είναι αρκετά δυσκολότερη και στις περισσότερες περιπτώσεις ο ακριβής προσδιορισμός της βέλτιστης πολιτικής είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος. Για τη μελέτη των μοντέλων περιοδικής επιθεώρησης πολλών περιόδων, κάνουμε χρήση του δυναμικού προγραμματισμού.

Αν και σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα αποθεμάτων που μελετήσαμε, η βέλτιστη πολιτική προσδιοριζόταν από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, σε αυτή την ενότητα ωστόσο, έχουμε λύσεις που βασίζονται στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους.

Στην περίπτωση των μοντέλων πολλών περιόδων πρέπει να ληφθεί υπόψιν και η μεταβολή της αξίας του χρήματος που συμβαίνει λόγω του πληθωρισμου. Για το λόγο αυτό αποπληθωρίζουμε όλα τα ποσά (κόστη ή κέρδη) ώστε να τα ανάγουμε σε σημερινές αξίες. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον αποπληθωριστή $\alpha<1$ που εκφράζει τη σημερινή αξία μιας χρηματικής μονάδας της επόμενης περιόδου.
Έτσι αν ο αποπληθωριστής είναι σταθερός και ίσος με $a<1$ για κάθε περίοδο, τότε το ποσό των χρημάτων S, μετά από n περιόδους ($n \geq 1$) αξίζει $a^n S$ σημερινές χρηματικές μονάδες.

Στο μοντέλο που μελετάμε υποθέτουμε ότι η κατανομή της ζήτησης είναι σταθερή για κάθε περίοδο. Στη γενικότερη περίπτωση που έχουμε πολλές περιόδους με διαφορετικές κατανομές ζήτησης θα ισχύουν ανάλογοι τύποι αλλά η συνάρτηση πυκνότητας της ζήτησης $f(D)$ αντικαθιστάται από την $f_i(D_i)$,όπου το i ορίζει την περίοδο.

Ορίζουμε ως $F_i(x_i)$ το μέγιστο συνολικό αναμενόμενο κέρδος για τις περιόδους $i, i+1, ..., N$, δοθέντος του αρχικού αποθέματος x_i πριν την τοποθέτηση παραγγελίας κατά την i περίοδο. Επίσης ορίζουμε το r ως το έσοδο ανά μονάδα προϊόντος, οπότε έχουμε:

$$F_i(x_i) = \max_{y_i \geq x_i} (-c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} [rD - h(y_i - D)] f(D) dD$$

$$+ \int_{y_I}^{\infty} [ry_i + ar(D - y_i) - p(D - y_i)] f(D) dD$$

$$+ a \int_0^{\infty} F_{i+1}(y_i - D) f(D) dD), \quad i = 1, 2, ..., N$$

όπου $F_{N+1}(y_N - D) \equiv 0$.

Παρατηρούμε ότι μπορεί το αρχικό απόθεμα x_i να είναι αρνητικό, αν η ανικανοποίητη ζήτηση αναπληρωθεί με την παραλαβή της επόμενης παραγγελίας. Η ποσότητα $pr(D - y_i)$ του δεύτερου προσθετέου αντιπροσωπεύει την ανικανοποίητη ζήτηση κατά την i περίοδο η οποία πρέπει να ικανοποιηθεί στην $(i+1)$ περίοδο ενώ η το κέρδος θα πληρωθεί την επόμενη περίοδο και λόγω του αποπληθωριστή υπολογίζεται ως $ar(D - y_i)$.

Η βέλτιστη πολιτική στην περίπτωση του πεπερασμένου ορίζοντα δεν είναι στάσιμη, δηλαδή δεν εξαρτάται μόνο από το απόθεμα που έχουμε στην αρχή μιας περιόδου αλλά και από το σε ποια περίοδο βρισκόμαστε. Για το λόγο αυτό ο προσδιορισμός της είναι ιδιαίτερα επίπονος αφού πρέπει να υπολογίσουμε αναδρομικά μια πολιτική για κάθε περίοδο ξεκινώντας από την τελευταία και πηγαίνοντας προς τα πίσω. Εδώ θα περιοριστούμε στη μελέτη του μοντέλου με άπειρο ορίζοντα, οπότε το σύστημα παρουσιάζει ομοιογένεια στο χρόνο και η βέλτιστη πολιτική είναι η ίδια για κάθε περίοδο. Η παραπάνω εξίσωση βελτιστοποίησης παίρνει τώρα τη μορφή:

$$F(x) = \max_{y \geq x} (-c(y - x) + \int_0^{y} [rD - h(y - D)] f(D) dD$$

$$+ \int_{y}^{\infty} [ry + ar(D - y) - p(D - y)] f(D) dD$$

$$+ a \int_0^{\infty} F(y - D) f(D) dD, \quad i = 1, 2, ..., N$$

όπου το x και y είναι τα επίπεδα αποθέματος για κάθε περίοδο πριν και μετά από την παραλαβή μιας παραγγελίας.

Η βέλτιστη πολιτική για το μοντέλο απείρων περιόδων προκύπτει παραγωγίζοντας το δεξιό μέλος και βρίσκοντας που μηδενίζεται η αντίστοιχη παράγωγος. Έτσι παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial(.)}{\partial y} = -c - h\int_0^y f(D)dD + \int_y^\infty [(1-a)r + p] f(D)dD + a\int_0^\infty \frac{\partial F(y-D)}{\partial y} f(D)dD = 0 .$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης μπορούμε επίσης να δούμε ότι

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y} = c$$

οπότε η παραπάνω εξίσωση για την εύρεση του y^* που βελτιστοποιεί ως προς y το δεξιό μέλος της εξίσωσης βελτιστοποίησης γίνεται:

$$-c - h\int_0^y f(D)dD + ((1-a)r + p)(1 - \int_0^y f(D)dD) + ac\int_0^\infty f(D)dD = 0 .$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το βέλτιστο y^* είναι αυτό που ικανοποιεί την

$$\int_0^{y^*} f(D)dD = \frac{p + (1-a)(r-c)}{p + h + (1-a)r} .$$

Συνεπώς η βέλτιστη πολιτική περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Αν} \qquad x\begin{cases} < y^*, & \text{παραγγέλω } y^* - x \\ \geq y^*, & \text{δεν παραγγέλουμε} \end{cases}$$

Γενικότερα, στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα (πεπερασμένο πλήθος περιόδων σχεδίασης), η βέλτιστη πολιτική είναι της ίδιας μορφής για κάθε περίοδο με την περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα που είδαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα για την περίοδο i η βέλτιστη πολιτική είναι

$$\text{An} \qquad x_i\begin{cases} < y_i^*, & paragg\acute{e}lw\ y_i^* - x \\ \geq y_i^*, & den\ paragg\acute{e}loume \end{cases}$$

όπου το y_i^* ερμηνεύεται ως το επιθυμητό επίπεδο αποθέματος στην αρχή της περιόδου i. Η διαφορά με το μοντέλο του άπειρου χρονικού ορίζοντα έγκειται μόνο στο ότι τα y_i^* δεν είναι όλα ίδια αλλά εξαρτώνται από την περίοδο. Ισχύει μάλιστα ότι:

$$y_N^* \leq y_{N-1}^* \leq \ldots \leq y_i^* \leq \ldots \leq y_1^* \leq y^*$$

όπου το y^* είναι η μοναδική κρίσιμη τιμή για το μοντέλο απείρων περιόδων. Όπως βλέπουμε στο μοντέλο των πεπερασμένων το πλήθος περιόδων, η βέλτιστη πολιτική επιτυγχάνεται όταν παραγγέλνουμε λιγότερη ποσότητα καθώς πλησιάζουμε στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Παράλληλα, καμία από τις κρίσιμες τιμές των y_i^* δεν μπορεί να υπερβεί την βέλτιστη τιμή y^* του μοντέλου απείρων περιόδων.