ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μαρία – Άννα Γ. Μαρκοπούλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Ιούνιος 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μαρία – Άννα Γ. Μαρκοπούλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Ιούνιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Βρόντος Σπυρίδων
- Ηλιόπουλος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

SIMULATION TECHNIQUES IN FINANCIAL RISK MANAGEMENT

BY

Maria – Anna G. Markopoulou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

2014

Στους γονείς μου

Γιώργο και Ελένη

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθ’ όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διοικητική κινδύνων είναι ένα σημαντικό επιστημονικό αντικείμενο με εφαρμογές σε πολλούς τομείς, ένας εκ των οποίων είναι η χρηματοοικονομική ανάλυση. Στην παρούσα διπλωματική θα αναφερθούμε σε μια από τις βασικότερες τεχνικές της διοικητικής χρηματοοικονομικών κινδύνων, την προσομοίωση Monte Carlo. Την τεχνική αυτή θα την χρησιμοποιήσουμε σε ένα αρκετά ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητικής όσο και από πρακτικής πλευράς, πρόβλημα της χρηματοοικονομικής ανάλυσης, όπως είναι η τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων μέσω του μοντέλου των Black & Scholes. Στην συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια της αντιστάθμισης και της μέτρησης του κινδύνου μέσω ενός ευρέως αποδεκτού μέτρου κινδύνου, όπως είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at risk). Ο σκοπός της εργασίας είναι μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R να προσομοιώσουμε τιμές χρηματοοικονομικών τίτλων, ώστε να τιμολογήσουμε χρηματοοικονομικά προϊόντα και να αντισταθμίσουμε χρηματοοικονομικούς κινδύνους που παρουσιάζονται σε ένα χαρτοφυλάκιο.

ABSTRACT

Risk management is an important scientific subject with applications in many areas, one of which is financial analysis. In this M.Sc. dissertation we will use a basic technique of financial risk management, which is Monte Carlo simulation. Our main task is to employ this tool to an interesting, in theory and in practice, problem of financial analysis: the risk neutral pricing of financial derivatives through the Black & Scholes model. We also introduce hedging and measurement of risk through a widely accepted measure of risk, called Value at Risk (VaR). The aim of this work is to simulate values of financial instruments using the R programming language, in order to price financial derivatives and hedge financial risks.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διοικητική χρηματοοικονομικών κινδύνων βασίζεται σε τρεις σημαντικούς τομείς που είναι: οι τεχνικές προσομοίωσης, οι τεχνικές αντιστάθμισης και η μέτρηση των κινδύνων. Στην παρούσα εργασία θα χειριστούμε έννοιες όπως: η προσομοίωση τιμών χρηματοοικονομικών τίτλων, η τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων, και η αντιστάθμιση και μέτρηση χρηματοοικονομικών κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου.

Στο 1^{ο}Κεφάλαιο θα αναλύσουμε με την βοήθεια της γλώσσας R την παραγωγή τυχαίων αριθμών από συνεχείς και διακριτές κατανομές μέσω των μεθόδων της αντιστροφής, της απόρριψης και της σύνθεσης. Θα αναφερθούμε επίσης στην γενικότερη έννοια της προσομοίωσης καθώς επίσης στα μειονεκτήματα και στα πλεονεκτήματα που αυτή παρουσιάζει.

Στο 2^{ο}Κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια της προσομοίωσης τιμών χρηματοοικονομικών προϊόντων μέσω της γεωμετρικής κίνησης Brown, με χρήση της παραγωγής τυχαίων αριθμών από κανονική κατανομή. Θα παρουσιάσουμε επίσης το οικονομικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται ένας βασικός κλάδος των χρηματοοικονομικών, όπως είναι τα παράγωγα προϊόντα, αναλύοντας περιπτώσεις όπως: τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου επί ενός (vanilla options) ή επί πολλαπλών (multi asset options) τίτλων καθώς και τα εξωτικά δικαιώματα (exotic options). Τέλος θα παρουσιάσουμε μια από τις πιο βασικές τεχνικές τιμολόγησης των παραπάνω δικαιωμάτων, που είναι η Monte Carloπροσομοίωση μέσω του μοντέλου των Black&Scholes.

Στο 3^{ο} και τελευταίο Κεφάλαιο αυτής της εργασίας θα αναφερθούμε στο γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο των χρηματοοικονομικών κινδύνων και στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις βασικότερες στρατηγικές αντιστάθμισης ενός από τους πιο συνήθεις χρηματοοικονομικούς κινδύνους, που είναι ο κίνδυνος αγοράς. Τέλος θα παρουσιάσουμε τρείς βασικές μεθόδους εκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο (VaR) που είναι η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης, η μέθοδος διακύμανσης – συνδιακύμανσης και η μέθοδος Monte Carlo.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ιστορία του ανθρώπου, ο επικρατέστερος τρόπος επίλυσης πολλών προβλημάτων ήταν μέσω της μελέτης των αναπαραστάσεων τους. Αυτή η δυνατότητα εξελίχθηκε παράλληλα με την εξέλιξη των επιστημών για να φτάσουμε σήμερα στην έννοια της προσομοίωσης. Όπως όμως είναι φυσικό, δεν μπορούμε σε καμία περίπτωση να επιτύχουμε, ακόμα και αν κατέχουμε τα υψηλότερα μέσα της τεχνολογίας, την απόλυτη ταυτοποίηση ενός προβλήματος ή μιας κατάστασης. Παρ' όλα αυτά οι τεχνικές προσομοίωσης που αναπτύχθηκαν χρησιμοποιούνται από αναλυτές και εξειδικευμένους οικονομολόγους και η χρήση τους σε πολλά πρακτικά προβλήματα καθίσταται απαραίτητη. Ειδικότερα, σε πολλά επίπεδα της οικονομικής ανάλυσης είναι απαραίτητη η προσομοίωση με σκοπό την εκτίμηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν ύστερα από την επιλογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής.

Είναι εμφανές λοιπόν ότι η επίλυση ενός προβλήματος, ειδικότερα ενός οικονομικού προβλήματος που έγκειται περισσότερο στο ποια στρατηγική θα ακολουθηθεί, εξαρτάται ως ένα σημείο από την επιτυχή προσομοίωση που ο εκάστοτε αναλυτής θα κληθεί να πραγματοποιήσει. Όμως προτού γίνει λεπτομερής αναφορά στις τεχνικές προσομοίωσης είναι σκόπιμο να γίνει μια πρώτη αναφορά σχετικά με το τι εννοούμε με τον όρο προσομοίωση αλλά και ποια είδη μπορούμε να διακρίνουμε.

1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Τόσο στην διεθνή όσο και στην ελληνική βιβλιογραφία μπορεί κανείς να διακρίνει την ύπαρξη πολλών αλλά όμοιων μεταξύ τους ορισμών για τον όρο προσομοίωση. Αυτό έγκειται αφενός μεν στο γεγονός ότι ανάλογα με τον τομέα στον οποίο γίνεται χρήση των τεχνικών προσομοίωσης δίνεται αντίστοιχα και ένας πιο περιορισμένος ορισμός, και αφετέρου ότι γίνεται σχετική αναφορά σε αυτές τις διαδικασίες πολλές φορές με διαφορετικό όρο από αυτόν της προσομοίωσης, όπως για παράδειγμα Monte Carlo μέθοδος ή μέθοδοι δειγματοληψίας.

Δεχόμενοι ένα γενικότερο πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται και η οικονομική ανάλυση μπορούμε να παρουσιάσουμε τον ορισμό του Morgenthaler σύμφωνα με τον οποίο προσομοίωση καλείται η αντιγραφή των θεμελιωδών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης χωρίς αυτή να υφίσταται στην πραγματικότητα, προκειμένου να αναλυθεί και να εκτιμηθεί περαιτέρω. Παράλληλα ένας ακόμα ορισμός που δόθηκε το 1975 από τον Shannon αναφέρει ότι η προσομοίωση είναι η διαδικασία σχεδιασμού ενός μοντέλου ενός πραγματικού συστήματος, καθώς και η διαδικασία διεξαγωγής πειραμάτων με σκοπό είτε την κατανόηση συμπεριφοράς είτε την εκτίμηση διάφορων στρατηγικών για την διαχείριση του συστήματος.

Στην συνέχεια είναι χρήσιμο να γίνει μια απλή αναφορά στο παρακάτω διάγραμμα στο οποίο γίνεται μια διάκριση στα είδη προσομοίωσης σύμφωνα με βασικά χαρακτηριστικά στα οποία αυτή η διαδικασία στηρίζεται.

Διάγραμμα 1: Πηγή: «Προσομοίωση και εφαρμογές» Μιχάλης Σφακιανάκης

Ο διαχωρισμός σε «συνεχή» και «διακριτή» προσομοίωση εξαρτάται από το αν οι αλλαγές στις τιμές των βασικότερων μεταβλητών του μοντέλου το οποίο προσομοιώνουμε κατανέμονται με συνεχή ή διακριτό τρόπο. Στην συνέχεια η διακριτή προσομοίωση διακρίνεται σε «χρονολογική» στην περίπτωση που ο μηχανισμός που αναπαριστά τον προσομοιωμένο χρόνο αναθεωρείται σε τακτά χρονικά διαστήματα. Διαφορετικά έχουμε την «περιστασιακή» διακριτή προσομοίωση κατά την οποία η αναθεώρηση γίνεται στους χρόνους εμφάνισης κάποιων γεγονότων. Στην περίπτωση της περιστασιακής αναθεώρησης λαμβάνεται υπόψη η πιθανότητα εμφάνισης των γεγονότων που ενεργοποιούν τον μηχανισμό, με αποτέλεσμα να έχουμε την διάκριση σε «ομοιόμορφη» κατανομή ή σε «μη ομοιόμορφη» κατανομή. Η περίπτωση της μη ομοιόμορφης κατανομής διακρίνεται περαιτέρω στις περιπτώσεις της συνεχούς ή διακριτής κατανομής.

1.3 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Παρά το γεγονός ότι ο σκοπός της παρούσας εργασίας δεν είναι να αναλύσει την προσομοίωση και τους τομείς στους οποίους χρησιμοποιείται, είναι χρήσιμο να αναφερθούν τα θετικά και τα αρνητικά τα οποία παρουσιάζονται με την χρήση των τεχνικών προσομοίωσης. Στα θετικά λοιπόν μιας διαδικασίας προσομοίωσης μπορούμε να δεχθούμε τα εξής:

- Αποτελεί βασική προσέγγιση για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων.
- Μειωμένο κόστος εφαρμογής.
- Γρήγορη εφαρμογή.
- Αποτελεί μια απλοποιημένη διαδικασία.
- Είναι πρακτική.
- Είναι ασφαλής καθώς αποτελεί απλή αναπαράσταση του προβλήματος.

- Δίνεται η δυνατότητα πάρα πολλών επαναλήψεων.
- Πολύπλευρη εξέταση του προβλήματος.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε και τα μειονεκτήματα μιας τέτοιας διαδικασίας, καθώς ανάλογα την περίπτωση, μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα μετριάζοντας τις παραμέτρους εκείνες που επηρεάζουν αρνητικά την προσομοίωση που θέλουμε να επιτύχουμε.

- Μπορεί να απαιτεί σημαντικό χρόνο και κόστος.
- Ύπαρξη καταλληλότερης μεθόδου.
- Βασικός παράγοντας η τυχαιότητα των τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιούνται.
- Όχι και τόσο ακριβής αναπαράσταση της πραγματικότητας.
- Δεν δίνει πάντα τα καλύτερα αποτελέσματα.

Έχοντας μια γενική εικόνα για το τι είναι και πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε επίσης από πότε ξεκίνησε να χρησιμοποιείται ως τεχνική ανάλυσης και ποια ήταν η εξέλιξη του συγκεκριμένου τομέα μέχρι σήμερα.

1.4 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με εφαρμογές της προσομοίωσης στην χρηματοοικονομική διοίκηση κινδύνου. Προκειμένου όμως να υλοποιήσουμε την προσομοίωση οποιουδήποτε οικονομικού μοντέλου, μια από τις βασικότερες διαδικασίες που θα πρέπει να έχουμε κατανοήσει είναι η παραγωγή τυχαίων αριθμών.

Στην οικονομική ανάλυση και κυρίως στην διαχείριση κινδύνου ασχολούμαστε κυρίως με την ανάλυση στοχαστικών φαινομένων τα οποία μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας κάποιες τυχαίες μεταβλητές. Τις τιμές των μεταβλητών αυτών, όπως είναι φυσικό, δεν είμαστε σε θέση να τις γνωρίζουμε προτού παρατηρήσουμε την πραγματική εξέλιξη των φαινομένων. Συνεπώς προκειμένου να τα μελετήσουμε θα πρέπει να κατασκευάζουμε εικονικά πειραματικά μοντέλα, τα οποία θα πρέπει να επηρεάζονται από τυχαίους αριθμούς.

Έτσι το πρώτο βήμα για την μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου μέσω προσομοίωσης αποτελεί η δυνατότητα παραγωγής τυχαίων αριθμών από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με αυτό τον τρόπο ουσιαστικά αναπαράγουμε την τυχαιότητα που επηρεάζει το στοχαστικό φαινόμενο.

Όταν η προσομοίωση έκανε τα πρώτα της βήματα, ορισμένες συνήθεις τεχνικές που χρησιμοποιούνταν προκειμένου να αναπαραχθεί τυχαιότητα ήταν η ρίψη ζαριών ή νομισμάτων, το ανακάτεμα χαρτιών και η ρουλέτα. Αργότερα για τον ίδιο σκοπό χρησιμοποιήθηκαν συσκευές από τον κλάδο της φυσικής.

Με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας (πεπερασμένης) ακολουθίας $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια εκ των οποίων κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0,1). Δηλαδή,

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x) = x, \qquad x \in (0,1).$$

Έχει επικρατήσει λοιπόν να λέμε τυχαίους αριθμούς μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών U_1 , U_2 , ... με τις εξής ιδιότητες:

- Κάθε U_i ~ U[0,1] (ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]).
- Οι τ.μ. U_1 , U_2 , ... είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Η πιο σημαντική από τις παραπάνω δύο ιδιότητες είναι η δεύτερη καθώς μας εξασφαλίζει ότι είναι αδύνατο να προβλέψουμε την τιμή U_i γνωρίζοντας τις προηγούμενες τιμές $U_1, U_2, \dots, U_{i-1}$ που έχουμε παράγει. Ωστόσο η πρώτη ιδιότητα δεν είναι τόσο απαραίτητη καθώς αν παράγουμε τυχαίους αριθμούς από $U_i \sim U[0,1/2]$ θα μπορούσαμε επίσης να τους χρησιμοποιήσουμε με κάποιες αλλαγές.

Οι τυχαίοι αριθμοί που παράγουμε με τη χρήση υπολογιστικών συστημάτων παράγονται μέσα από συγκεκριμένες επαναληπτικές διαδικασίες. Συνεπώς δεν είναι τυχαίοι με την πραγματική έννοια του όρου. Για το λόγο αυτό ονομάζονται ψευδοτυχαίοι. Παρ' όλα αυτά οι διαδικασίες που ακολουθούνται για την παραγωγή τους είναι έτσι μελετημένες ώστε τελικά οι αριθμοί αυτοί να έχουν τα χαρακτηριστικά που έχουν και οι τυχαίοι αριθμοί. Περισσότερο μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε τέτοιους αριθμούς για την προσομοίωση διαφόρων μοντέλων και όχι τόσο να εξετάσουμε κατά πόσο αυτοί οι αριθμοί εμφανίζουν τυχαιότητα μέσω των έλεγχων τυχαιότητας. Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, θα θεωρούμε ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι πράγματι τυχαίοι και θα παρουσιάσουμε τις τρείς βασικότερες μεθόδους για την παραγωγή τους.

1.4.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
Α. ΜΕΘΟΔΟΣ MIDSQUARE

Μια από τις απλούστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων μεταβλητών είναι η midsquare μέθοδος. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή τα βήματα που ακολουθούμε προκειμένου να παράγουμε τυχαίους αριθμούς με *n* το πλήθος ψηφία είναι τα εξής:

1. Επιλέγουμε έναν αρχικό *n*-ψηφίο αριθμό που καλείται *seed*.
2. Βρίσκουμε το τετράγωνο του αριθμού αυτού. Αν ο αριθμός των ψηφίων του αποτελέσματος είναι μικρότερος από 2*n*, προσθέτουμε μηδενικά στην αρχή του αριθμού ώστε να έχει 2*n* ψηφία.
3. Παίρνουμε τα *n* μεσαία ψηφία του αριθμού του βήματος 2.
4. Τοποθετούμε μια υποδιαστολή μπροστά από τον αριθμό του βήματος 3. Ο αριθμός αυτός είναι ένας τυχαίος αριθμός.
5. Χρησιμοποιούμε τον τελευταίο αριθμό ως *seed* στο βήμα 1 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο με έναν τετραψήφιο αριθμό θα πάρουμε

Seed = 5623

$\alpha_1 = 5623^2 = 31618129$ τότε $u_1 = 0{,}6181$

$\alpha_1 = 6181^2 = 38204761$ τότε $u_1 = 0{,}2047$

$\alpha_1 = 2047^2 = 4190209$τότε$u_1 = 0{,}1902$

Η απλότητα που παρουσιάζει ο παραπάνω αλγόριθμος τον καθιστά κατάλληλο για την παρουσίαση της λογικής που στηρίζεται η παραγωγή τυχαίων αριθμών, παρόλα αυτά γενικά ως μέθοδος δεν έχει ικανοποιητική απόδοση. Μερικά από τα μειονεκτήματά του είναι ότι μπορεί για συγκεκριμένους αριθμούς (*seed*) από κάποιο βήμα και μετά να παράγει πολλές φορές τον ίδιο αριθμό ή ότι αν σε κάποιο βήμα παράγει έναν τυχαίο αριθμό κοντά στο 0 (δηλαδή με πολλά μηδενικά μετά την υποδιαστολή) τότε οι επακόλουθοι τυχαίοι αριθμοί θα είναι και αυτοί πολύ μικροί.

Β. ΜΕΘΟΔΟΣ MULTIPLICATIVE CONGRUENTIAL

Μία άλλη μέθοδος που είναι από τις συνηθέστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω Η/Υ είναι η πολλαπλασιαστική μέθοδος (multiplicative congruential method). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή :

1. Ξεκινάμε με μία αρχική τιμή $x \in N$, η οποία καλείται γόνος(seed) και επιλέγεται από τα εκατοστά του δευτερολέπτου που δείχνει το ρολόι του υπολογιστή ή από εμάς.
2. Κατόπιν υπολογίζεται η νέα τιμή

$$x_i = a \cdot x_0 \cdot \mathrm{mod}\, m,$$

για κάποιους φυσικούς αριθμούς a, m οι οποίοι έχουν επιλεγεί από πριν. Ως m συνήθως λαμβάνεται ένας κατάλληλος πολύ μεγάλος πρώτος αριθμός.

3. Έπειτα, υπολογίζουμε επαναληπτικά τα εξής:

$$x_2 = a \cdot x_1 \cdot \mathrm{mod}\, m$$
$$x_3 = a \cdot x_2 \cdot \mathrm{mod}\, m$$

έτσι, κάθε x_i ανήκει στο $\{0,1,\dots, m-1\}$ και ο αριθμός x_i/m θεωρείται ότι είναι ένας ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ του 0 και του 1.

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος παραγωγής ψευδοτυχαίων θα είναι:

Βήμα 1: $x_0 = seed$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την ποσότητα $x_i = a \cdot x_{i-1} \cdot \mathrm{mod}\, m$ και θέτουμε

$$U_i = \frac{x_i}{m} \quad i = 1,2,\dots,n$$

Με $x\mathrm{mod}m$ συμβολίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του x δια του m δηλαδή ισχύει $x\mathrm{mod}\, m = m \cdot (x/m - \lfloor x/m \rfloor)$, και ως $\lfloor x \rfloor$ εννοούμε την ακέραια τιμή του x. Οι παράμετροι m και a είναι θετικοί ακέραιοι και δεδομένου του γόνου (*seed*) x_0 καθορίζουν πλήρως τους αριθμούς που θα παραχθούν. Από την διαδικασία που περιγράψαμε είναι φανερό ότι $x_n \in \{0,1,\dots,m-1\}$. Άρα μπορούμε να παράγουμε το πολύ $m-1$ τυχαίους αριθμούς μέχρι να συναντήσουμε το αρχικό x_0, όπου η ακολουθία θα επαναληφθεί. Η διαδικασία που περιγράψαμε καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων m, a.

Αποδεικνύεται ότι όταν ο m είναι πρώτος αριθμός και ο a ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες τότε κανένας όρος της ακολουθίας δεν θα πάρει την τιμή 0 (σε αυτή την περίπτωση όλες οι επόμενες τιμές θα ήταν μηδενικές).

- το $a^{m-1} - 1$ είναι ένα πολλαπλάσιο του m.
- το $a^j - 1$ δεν είναι πολλαπλάσιο του m για $j = 1,\dots,m-2$.

Οι παραπάνω συνθήκες βασίζονται στην παρατήρηση ότι η παραγόμενη ακολουθία$x_0, a\cdot x_0, a^2 \cdot x_0, a^3 \cdot x_0, \dots (\mathrm{mod}\, m)$ θα αρχίσει να επαναλαμβάνεται για το μικρότερο k για το οποίο a^k ισχύει $x_0 \bmod m = x_0$.

Η επιλογή των παραμέτρων m και a πρέπει να γίνεται με στόχο την γρήγορη και εύκολη παραγωγή της ακολουθίας από τον υπολογιστή καθώς και να μπορούν οι όροι της ακολουθίας να θεωρηθούν τυχαίοι αριθμοί. Ο m συνήθως επιλέγεται να είναι ένας μεγάλος πρώτος αριθμός. Η επιλογή του εξαρτάται από το μέγεθος των λέξεων που χειρίζεται ο εκάστοτε επεξεργαστής. Όταν ένας επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί πράξεις με λέξεις των 32-bit τότε μια καλή επιλογή είναι $m = 2^{32} - 1$ και $a = 7^5 - 1$.

Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ MIXED CONGRUENTIAL.

Μία ακόμα συνήθης μέθοδος παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών είναι και η mixed congruential η οποία είναι σχεδόν ίδια με την πολλαπλασιαστική μέθοδο multiplicative congruential, εκτός από το γεγονός ότι σε κάθε βήμα αντί του $x_i = (a \cdot x_{i-1})\mathrm{mod}\, m$ υπολογίζουμε το $x_i = (a \cdot x_{i-1} + c)\mathrm{mod}\, m$ λαμβάνοντας υπόψη τους ίδιους παράγοντες στην επιλογή a και m.

Βήμα 1: $x_0 = seed$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την ποσότητα $x_i = (a \cdot x_{i-1} + c)\mathrm{mod}\, m$ και θέτουμε

$$U_i = \frac{x_i}{m} \quad i = 1,2,\dots,n$$

Η μέγιστη περίοδος, δηλαδή το πλήθος επαναλήψεων, που μπορούμε να επιτύχουμε με τις παραπάνω μεθόδους είναι προφανώς ίση με m (σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι η μέθοδος έχει πλήρη περίοδο).

Ο Knuth (1998) αναφέρει ότι αν η επιλογή των παραμέτρων a, m, $c \neq 0$ γίνει με βάση τα παρακάτω κριτήρια τότε η γεννήτρια για οποιοδήποτε γόνο x_0 έχει πλήρη περίοδο.

(i) Τα c και m είναι μεταξύ τους πρώτοι αριθμοί (ο μόνος φυσικός αριθμός που διαιρεί και τους δυο να είναι ο αριθμός 1).

(ii) Κάθε πρώτος αριθμός που διαιρεί το m θα πρέπει να διαιρεί και το $a - 1$.

(iii) Το 4 θα πρέπει να διαιρεί το $a - 1$ εάν διαιρεί και το $m - 1$.

Κάθε γλώσσα προγραμματισμού και τα περισσότερα υπολογιστικά προγράμματα όπως και το R-project έχουν μια εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς Έτσι μας είναι άμεσα διαθέσιμοι τυχαίοι αριθμοί για να προχωρήσουμε σε προσομοίωση. Πολλές φορές είναι χρήσιμο κατανοώντας τον τρόπο παραγωγής τυχαίων αριθμών σε βάση προγραμματισμού να αλλάξουμε κάποιες από τις παραμέτρους που οι εντολές αυτές χρησιμοποιούν.

1.4.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Η διαδικασία της προσομοίωσης συνήθως απαιτεί τη χρήση τυχαίου δείγματος από διάφορες κατανομές. Θα παρουσιάσουμε συνοπτικά κάποιες μεθόδους για την παραγωγή τέτοιων δειγμάτων με ιδιαίτερη έμφαση στην παραγωγή τυχαίου δείγματος από την κανονική κατανομή. Υποθέτουμε ότι θέλουμε τυχαίο δείγμα από την συνάρτηση κατανομής F ή από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f.

Α. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Πρόταση: Έστω $U \sim U(0,1)$ *και* F μια οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X = F^{-1}(U)$$

έχει συνάρτηση κατανομής F.

Η F^{-1} καλείται γενικευμένη αντίστροφη της F και ορίζεται ως εξής:

$$F^{-1}(u) = \inf F^{-1}([u,1]) = \inf\{x: F(x) \in [u,1]\}, \qquad u \in [0,1]$$

Η παραπάνω υπάρχει και στην περίπτωση όπου η F δεν είναι αντιστρέψιμη. Επομένως εάν παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U, η $F^{-1}(U)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής $X \sim F$. Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται εύκολα από την παρακάτω σχέση:

$$P(X \leq x) = P[F_X^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F_x(x)] = F_X^{-1}(x).$$

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων μεταβλητών που θα έχουν συνάρτηση κατανομής F, με την μέθοδο της αντιστροφής θα είναι:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό $U \sim$ U(0,1)
ΒΗΜΑ 2. Θέτουμε $X = F^{-1}(U)$.

Παρ' όλη την απλότητα της παραπάνω μεθόδου, η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη διαδικασία ή να μην έχει αναλυτική μορφή.

Β. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ

Έστω ότι μπορούμε να παράγουμε μια τυχαία μεταβλητή Y που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)$. Με βάση τη δυνατότητα παραγωγής τυχαίου δείγματος από την $g(x)$ μπορούμε να πάρουμε δείγμα από μια άλλη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Έστω c κάποια σταθερά για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \text{ για όλα τα } y : g(y) \neq 0$$

Έχοντας μια πραγματοποίηση της Y μπορούμε να τη δεχτούμε ή να την απορρίψουμε με πιθανότητα ανάλογη του $f(Y)/g(Y)$. Συγκεκριμένα, αν ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα, η τυχαία μεταβλητή X που παράγεται έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την f.

Βήμα 1: Παράγουμε Y και U με $Y \sim G$ και $U \sim U(0,1)$.
Βήμα 2: Εάν $U \leq f(Y)/(cg(Y))$ θέτουμε $X = Y$, διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Η πιθανότητα σε κάθε επανάληψη να δεχτούμε την Y είναι

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_R P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) g(y)dy = \int_R \frac{f(Y)}{cg(Y)} g(y)dy = \int_R \frac{f(Y)}{c} dy = \frac{1}{c}$$

Καθώς $f(y)/(cg(y)) \leq 1$, άρα $P(U < f(y)/cg(y)) = f(y)/cg(y)$.

Άρα η τυχαία μεταβλητή N που εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι να δεχτούμε ότι μια τιμή θα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/c$ (δηλαδή με μέσο c). Άρα όσο μικρότερο το c τόσο πιο αποτελεσματική θα είναι η διαδικασία. Το μικρότερο c που μπορούμε να πάρουμε είναι το

$$c = \sup\left\{\frac{f(x)}{g(x)}, x: g(x) \neq 0\right\}$$

Επομένως το c εξαρτάται άμεσα από την επιλογή της g και στην περίπτωση όπου η f δεν είναι φραγμένη η εύρεση ενός c που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση πιθανότητας απόρριψης ή αποδοχής ίσως να μην είναι δυνατή.

Γ. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ

Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μίξεις κατανομών. Στην γενική περίπτωση όπου έχουμε μίξη j στον αριθμό κατανομών, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$p_i = P(X = i) = \sum_j a_j \cdot p_i^{(j)}, i = 0,1, \ldots$$

όπου

- $\left\{p_i^{(j)}, i = 0,1,2, \ldots\right\}, j = 0,1,2, \ldots$ είναι οι συναρτήσεις πιθανότητας των κατανομών F_j για $j = 0,1,2, \ldots$ αντίστοιχα,
- $\sum_j a_j = 1, a_j \in (0,1)$

Ο αλγόριθμος που προκύπτει για την παραγωγή τυχαίων αριθμών στην προκείμενη περίπτωση είναι ο ακόλουθος:

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή $\{\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots\}$

ΒΗΜΑ 2: Εάν $Y = j$ τότε παράγουμε τον τυχαίο αριθμό X από την κατανομή F_j.

Ο παραπάνω αλγόριθμός μπορεί να γίνει πιο κατανοητός στην περίπτωσή που η μίξη κατανομών αποτελείται από μόνο δύο (2) κατανομές και θα έχει την εξής μορφή:

$$p_i = P(X = i) = \alpha \cdot p_i^{(1)} + (1 - \alpha) \cdot p_i^{(2)}, i = 0,1, \ldots$$

Και ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 2: Εάν $U < \alpha$ τότε παράγουμε $X \sim F_1$, ενώ αν $U \geq \alpha$ τότε παράγουμε $X \sim F_2$.

1.5 ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΠΟ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ
Α. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & 0 \leq x < \infty, \qquad \beta > 0 \\ \quad 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\beta}$$

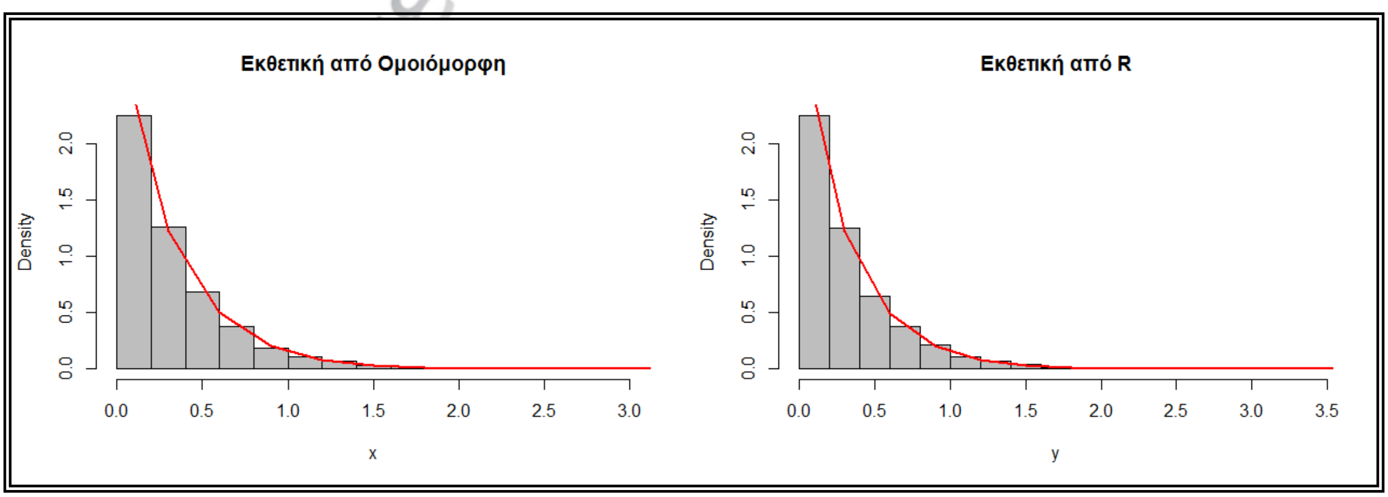
Θέτοντας $U = F_X(x)$ έχουμε $X = -\beta \ln(1 - U)$ και επειδή οι τ.μ. U και $(1-U)$ είναι ισόνομες μπορούμε να πάρουμε επίσης $X = -\beta \ln(U)$.

Οπότε ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $X = -\beta \ln(U)$.

```
Nsim=10^4 #πλήθος παραγόμενων αριθμών
lambda=3 #παράμετρος εκθετικής
u=runif(Nsim)
x=-log(u)/lambda #μετασχηματισμός ομοιόμορφης σε εκθετική
y=rexp(Nsim, lambda) #παραγωγή εκθετικών από το R
par(mfrow=c(1,2)) #γραφήματα
hist(x, freq=FALSE, col="grey",main="Εκθετική από Ομοιόμορφη")
curve(dexp(x, lambda),from=0,to=30,col="red", add=TRUE, lwd=2)
hist(y, freq=FALSE, col="grey", main="Εκθετική από R")
curve(dexp(x, lambda),from=0,to=30,col="red", add=TRUE, lwd=2)
```



Γράφημα 1: Ιστόγραμμα συχνοτήτων από *Exp*(3).

B. ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω τ.μ. $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ με σ. π. π

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1} e^{-x/\beta}}{\beta^a \Gamma(\alpha)}, & 0 \leq x < \infty, \quad \beta > 0,\ \alpha > 0 \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και ανεξάρτητες τ.μ. $Y_i \sim Exp\ (\beta)$, $i\ = 1,2, \dots, a$ με σ. π. π

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-y/\beta}, & 0 \leq y < \infty, \quad \beta > 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε

$$X =_d \sum_{i=1}^{a} Y_i \sim Gamma(a, \beta)$$

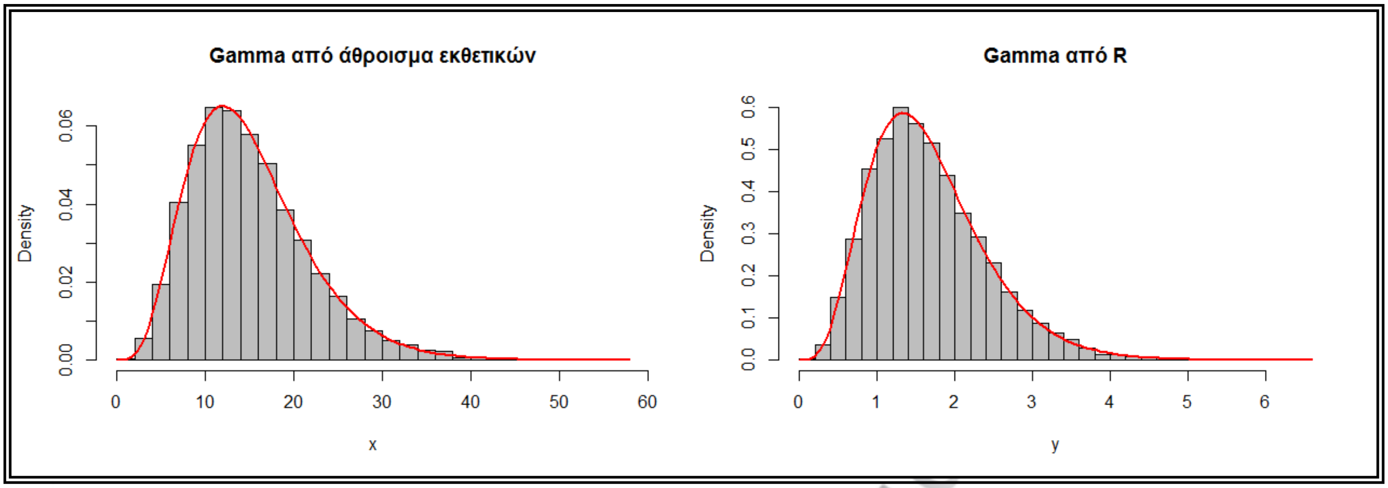
Οπότε ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα είναι:

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε $U_i \sim U(0,1)$ για $i = 1,2, \dots, a$.

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $Y_i = -\beta \ln(U_i)$ για $i = 1,2, \dots, a$.

ΒΗΜΑ 3: $X = \sum_{i=1}^{a} Y_i$

```
b=3; a=5;Nsim=10^4
u=runif(a*Nsim)
u=matrix(data=u, nrow=a)#μετατροπή σε πίνακα Nsim*a
x=-log(u)
x=b*apply(x,2,sum)
y=rgamma(Nsim,a,b)
par(mfrow=c(1,2))#γραφήματα
hist(x, freq=FALSE, br=25, col="grey", main="Gamma από άθροισμα εκθετικών")
curve(dgamma(x,shape=a,scale=b,log=FALSE),col="red",add=TRUE,lwd=2)
hist(y, freq=FALSE, br=30,col="grey", main="Gamma από R")
curve(dgamma(x, a, b, log=FALSE), col="red", add=TRUE, lwd=2)
```



Γράφημα 2: Ιστόγραμμα συχνοτήτων *Gamma*(5,3).

Γ. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ένα σημαντικό εργαλείο για την μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι, σε πρώτο στάδιο, η παραγωγή τυχαίων αριθμών από τυπική κανονική κατανομή και έπειτα η παραγωγή τυχαίου δείγματος από κανονική κατανομή.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη **μέθοδο Box-Müller** για την παραγωγή κανονικών τυχαίων μεταβλητών, αφού πρώτα εισάγουμε κάποιες χρήσιμες έννοιες.

Όπως ακριβώς στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε σημείο με συντεταγμένες (x_0, y_0) αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $x = x_0$ και $y = y_0$, έτσι και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων κάθε σημείο καθορίζεται μονοσήμαντα από την τομή ενός κύκλου σταθερής ακτίνας $r = r_0$ και μίας ευθείας που καθορίζεται από μία σταθερή τιμή γωνίας $\theta = \theta_0$. Οι καμπύλες σταθερής ακτίνας r και γωνίας θ ορίζουν το λεγόμενο «πολικό πλέγμα», το οποίο θυμίζει ιστό αράχνης.

Η σχέση μεταξύ πολικών (r, θ) και καρτεσιανών (x, y) συντεταγμένων στο επίπεδο δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις μετατροπής

$$X = R\cos\Theta \;\text{ και } Y = R\sin\Theta$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 \;\;, \tan\Theta = \frac{Y}{X}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι αν (X, Y) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο τότε οι αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες του (R: ακτίνα, Θ: γωνία) θα είναι

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ και } \Theta = \arctan(Y/X),$$

όπου arctan είναι η αντίστροφη συνάρτηση εφαπτομένης.

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. από $N(0,1)$ τότε και οι τ.μ R^2 και Θ αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητες και ισχύει

$$R^2 \sim Exp\ (1/2) \text{ και } \Theta \sim U\ (0{,}2\pi)$$

Επομένως μπορούμε να παράγουμε τις $R^2 = -2 \ln U_1$ και $\Theta = 2\pi U_2$ και μετά να θέσουμε

$$X = R\cos\Theta \text{ και } Y = R\sin\Theta.$$

Ο σχετικός αλγόριθμος λοιπόν θα είναι:

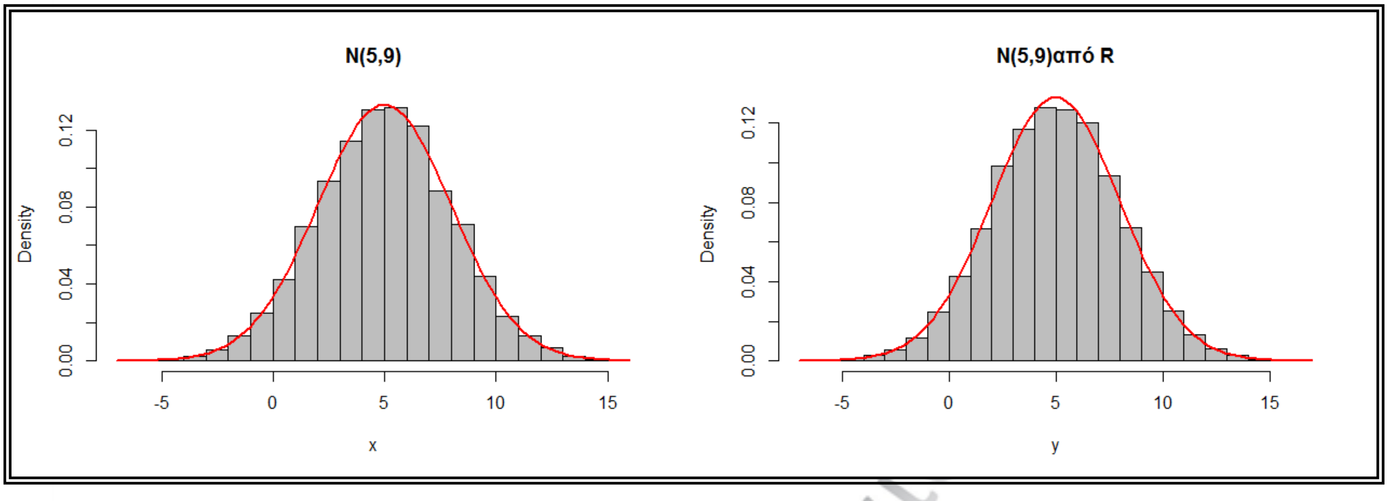
ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε $U_1 \sim U(0{,}1), U_2 \sim U(0{,}1)$. ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $X_1 = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot U_2)$, $X_2 = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot U_2)$.

Ο σκοπός κάθε αλγόριθμου, έκτος από την παραγωγή τυχαίων αριθμών, είναι και η ολοκλήρωση του με όσο τον δυνατό λιγότερες επαναλήψεις και με λιγότερο χρονοβόρους υπολογισμούς. Με τον τελευταίο αλγόριθμο επιτυγχάνουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με λιγότερα βήματα απ' ότι με άλλες μεθόδους καθώς χρειαζόμαστε να παράγουμε μόνο δυο τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή για να παράγουμε δυο τυχαίους από την κανονική.

Στον παρακάτω πίνακα, αριστερά θα δώσουμε τον κώδικα για την παραγωγή τ. μ $Z \sim N(0{,}1)$ βασιζόμενοι στον παραπάνω μετασχηματισμό και δεξιά θα παράγουμε τ.μ $X = \mu + \sigma \cdot Z$ η οποία ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$.

<u>Παραγωγή τυχαίων αριθμών απόΝ (0,1).</u>	**<u>Παραγωγή τυχαίων αριθμών από Ν(5, 9).</u>**

simnorm=function(n.gen){
u1=runif(n.gen)
u2=runif(n.gen)
Rsq=-2*log(u1)
theta=2*pi*u2
z=sqrt(Rsq)*cos(theta)
# output 	
z}
	mi=5 #μέσος; si=3 #διασπορά;
	n.gen=10^4 #πλήθος επαναλήψεων;
	z=simnorm(n.gen);#συνάρτηση παραγωγής N(0,1)
	x=mi+si*z #μετατροπή N(0,1)σε N(mi,si^2)
	y=rnorm(n.gen,mi,si)#παραγωγή τ.μ από R
	par(mfrow=c(1,2))#γραφήματα
	hist(x,br=25,main="N(5,9)",col="grey",freq=FALSE)
	curve(dnorm(x,mi,si),col="red",add=TRUE,lwd=2)
	hist(y,br=25,main="N(5,9)από R",
	col="grey",freq=FALSE)
	curve(dnorm(x, mi, si), col="red", add=TRUE,
	lwd=2)



Γράφημα 3: Ιστόγραμμα συχνοτήτων N(5, 9).

1.6 ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΠΟ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ.
Α. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Θα περιγράψουμε τη γενική διαδικασία παραγωγής τ.μ. από διακριτή κατανομή με πιθανότητα

$$P(X = x_j) = p_j\,,\ \ j = 0,1,\dots \ \text{και} \ \sum_j p_j = 1$$

Έστω τ.μ.$U \sim U(0,1)$. Τότε σύμφωνα με την μέθοδο της αντιστροφής θέτουμε

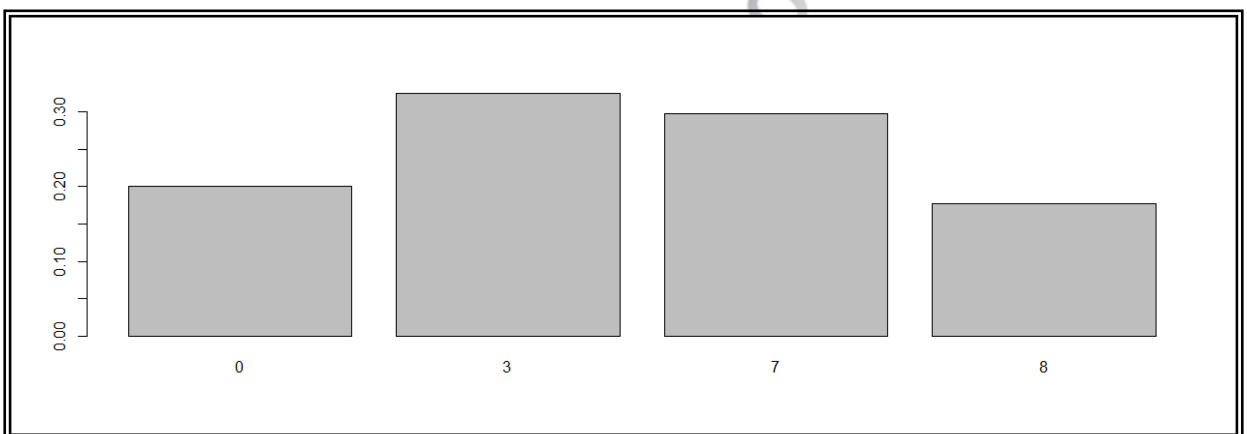
$$X = \begin{cases} 0, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ U < p_0 \\ 1, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ p_0 \le U < p_0 + p_1 \\ & \vdots \\ j, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ \sum_{i=0}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{j} p_i \\ & \vdots \end{cases}$$

Η παραπάνω τ.μ. X έχει κατανομή $P(X = x_j) = p_j\,,\ \ j = 0,1,\dots$.
Έστω τώρα ότι έχουμε την παρακάτω κατανομή πιθανοτήτων:

$X = x$	0	3	7	8
$P(X = x)$	0.2	0.32	0.3	0.18

```
#παράμετροι: x, probabilities, number to generate
simdiscrete=function(x, probs, n.gen){
xprobs=data.frame(x=x,probs=probs)
```

```
# ταξινόμηση των τιμών x
xprobs.sorted=xprobs[do.call(order, xprobs["x"]), ]
cum.probs=cumsum(xprobs.sorted[,2])
xprobs.sorted=cbind(xprobs.sorted,cum.probs)
u=runif(n.gen);sim.vector=rep(0,n.gen)
for(i in 1:n.gen) sim.vector[i]=min(xprobs.sorted[,1][which(cum.probs>=u[i])])
#output
sim.vector}
#Εισαγωγή παραμέτρων
X=c(0,3,7,8);Probs=c(0.2,0.32,0.3,0.18);n.gen=10000
#Εισαγωγή πλήθος προσομοιώσεων στην συνάρτηση
Y=simdiscrete(X,Probs,n.gen)
xtabs(~Y)/ n.gen
barplot(xtabs(~Y)/ n.gen)
```



Γράφημα 4: Ιστόγραμμα συχνοτήτων από διακριτή κατανομή.

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω τ.μ $X \sim Geo(p)$ τότε έχουμε

$$P(X = i) = pq^{i-1}, \text{για} i \geq 1$$

με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$P(X \leq j - 1) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i) = 1 - q^{i-1}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν παράγουμε τ.μ .U_i από ομοιόμορφη κατανομή μπορούμε έπειτα να παράγουμε τ.μ $X \sim Geo(p)$ αν

$$X = \left\lfloor \frac{\log(U)}{\log(q)} \right\rfloor + 1\,,$$

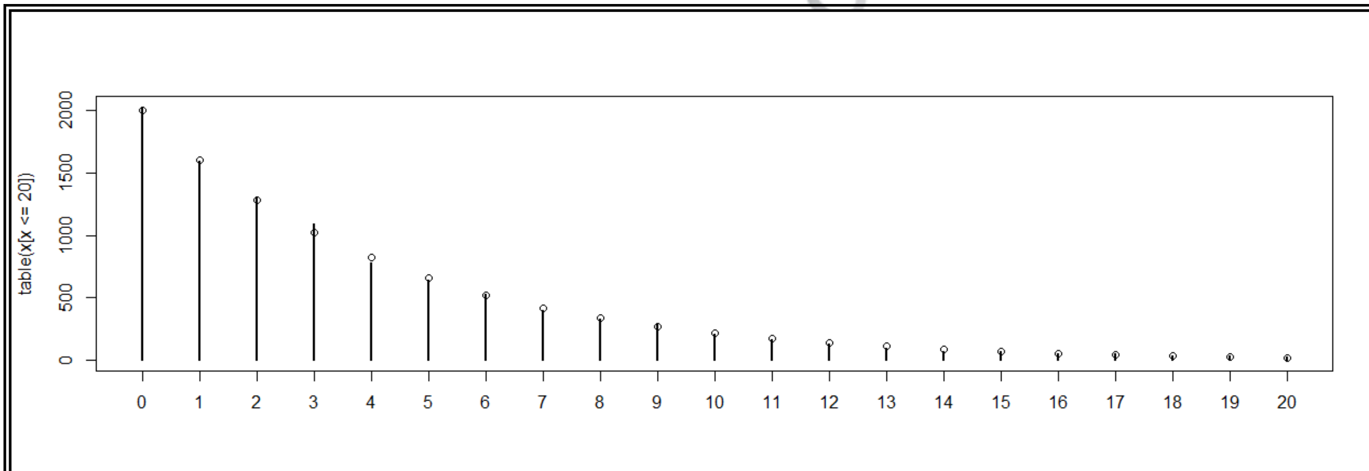
όπου $q = 1 - p$ και $\lfloor x \rfloor$ το ακέραιο μέρος του x.

Οπότε ο αλγόριθμος για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από γεωμετρική κατανομή $Geo(p)$ θα είναι:

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε $U \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $X = \left\lfloor \frac{\log(U)}{\log(q)} \right\rfloor + 1$.

```
Nsim=10^4
p=0.2
u=runif(Nsim)
x=floor(log(u) / log(1-p)) #ακέραιο μέρος
t=0:20;
plot(table(x[x<=20]))
points(t,p*(1-p)^t*Nsim)
```



Γράφημα 5: Ιστόγραμμα συχνοτήτων Geo(0.3).

Γ. ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ)

Έστω τ. μ X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_x(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,\ldots \text{ και } \lambda > 0$$

Σύμφωνα με την μέθοδο της αντιστροφής χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο.

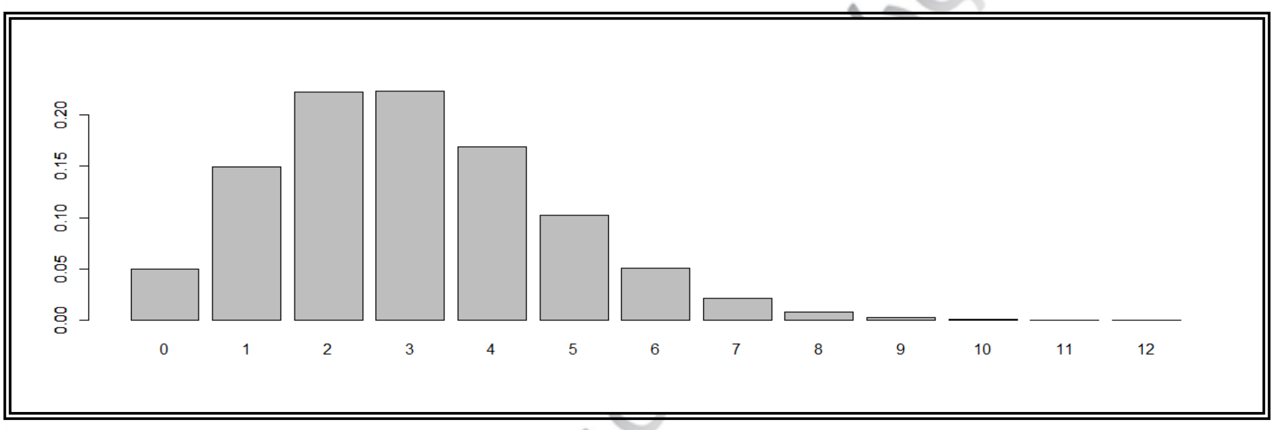
ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε $U \sim U(0,1)$.

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $p = e^{-\lambda}, F = p$ και $i = 0$.

ΒΗΜΑ 3: Εάν $U < F$ τότε $X = i$.

ΒΗΜΑ 4: Θέτουμε $p = p\,\lambda/(i+1)$, $F = F + p$, $i = i + 1$ και επιστρέφουμε στο 3° Βήμα.

```
simPoisson=function(n.gen,lambda){u=runif(n.gen)
sim.vector=rep(0,n.gen)
for(j in 1:n.gen){i=0;p=exp(-lambda);F=p
while(u[j] >= F){p=lambda*p/(i+1);F=F+p;i=i+1  }
sim.vector[j]=i  }
#output
sim.vector}
x<-simPoisson(100000,3)
barplot(xtabs(~x)/100000)
```



Γράφημα 6: Bar plot από Poisson(3).

1.7 ΕΝΤΟΛΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ R

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	ΕΝΤΟΛΗ -R-
Uniform	runif
Exponential	rexp
Gamma	rgamma
Beta	rbeta
Normal	rnormal
Lognormal	rlnorm
Cauchy	rcauchy
Weibul	rweibull
Chi-Square	rchisq
Student t	rt
F	rf
Logistic	rlogis

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	ΕΝΤΟΛΗ -R-
Binomial	rbinom
Negative Binomial	rnbinom
Geometric	rgeom
Hypergeometric	rhyper
Poisson	rpois

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΙΟΝΤΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία τιμολόγησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, βασιζόμενη σε μεθόδους στοχαστικής και αριθμητικής ανάλυσης, αποτελεί αντικείμενο υψίστης σημασίας στον χρηματοοικονομικό τομέα. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις κατηγορίες γνωστών παράγωγων προϊόντων, ασχολούμενοι εκτενέστερα με τα δικαιώματα προαίρεσης, υλοποιώντας τα μέσα που έχουμε στην διάθεσή μας για την τιμολόγηση τους σε γλώσσα προγραμματισμού R.

Η αξία των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων έχει άμεση εξάρτηση από την μεταβολή της αξίας των αντίστοιχων υποκείμενων προϊόντων τους (π.χ. εμπορεύματα, μετοχές, χρηματιστηριακοί δείκτες). Μια σύντομη αναφορά στα συνήθη παράγωγα προϊόντα που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο Αθηνών είναι η εξής:

- Προθεσμιακές συμφωνίες (Προθεσμιακά συμβόλαια – Forwards και Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης –Futures).
- Δικαιώματα προαίρεσης (Options).
- Ανταλλαγές (Swaps).
- Εγγυήσεις (Warrants).

Σημαντικό επίσης είναι να αναφέρουμε και τα οφέλη που προέκυψαν από την δημιουργία των παραγώγων καθώς δόθηκε η ευκαιρία για αντιστάθμιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων, για μεταφορά των κινδύνων και την αύξηση του πιθανού κέρδους από επενδύσεις σε παράγωγα. Επίσης σημαντική είναι και η αύξηση της ρευστότητας των αγορών καθώς με τις επενδύσεις σε παράγωγα απαιτούνται πολύ λιγότερα κεφάλαια ως ασφάλιστρο (έννοια που θα αναλυθεί παρακάτω) απ' ότι για παράδειγμα για μια επένδυση σε μετοχές μια εταιρίας εισηγμένης στο χρηματιστήριο.

2.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η χρήση των παράγωγων προϊόντων εμφανίζεται πριν από πολλούς αιώνες καθώς σύμφωνα με ιστορικές πηγές τόσο οι Αρχαίοι Φοίνικες όσο και οι Αρχαίοι Έλληνες πουλούσαν τα φορτία των πλοίων τους σε προκαθορισμένες τιμές και με ημερομηνία παράδοσης στο μέλλον. Στα γραπτά του Αριστοτέλη εμφανίζεται η πρώτη περιγραφή τέτοιου παράγωγου προϊόντος, στην ιστορία του Θαλή του φτωχού φιλόσοφου από την Μίλητο, ο οποίος χρησιμοποίησε μια χρηματοοικονομική διαδικασία με σκοπό να δώσει μια ουσιαστική απάντηση σε όσους τον χλεύαζαν ότι η φιλοσοφία είναι άχρηστη και χωρίς πρακτική αξία καθώς δεν του έχει επιφέρει κανένα πλούτο. Συγκεκριμένα, προβλέποντας την αυξημένη σοδειά του επόμενου έτους, αποφάσισε να προχωρήσει στην αγορά του δικαιώματος χρήσης των ελαιοτριβείων. Έτσι λοιπόν πόνταρε όλα του τα χρήματα στην αγορά της σοδειάς την παρούσα στιγμή, ενώ όταν ήρθε η στιγμή της συγκομιδής η σοδειά αποδείχθηκε ότι άξιζε πολύ παραπάνω, και την οποία πώλησε απολαμβάνοντας μεγάλα κέρδη.

Η πρώτη συναλλαγή με παράγωγα προϊόντα πραγματοποιήθηκε περίπου το 1688, στο Χρηματιστήριο του Άμστερνταμ, όπου διαπραγματεύθηκαν τα πρώτα δικαιώματα προαίρεσης πάνω στο βολβό της τουλίπας. Παράλληλα, η πρώτη διαπραγμάτευση με συμβόλαια μελλοντικής προαίρεσης (Future Contracts) πραγματοποιήθηκε σε αγορά ρυζιού στην Οζάκα της Ιαπωνίας, με τυποποιημένα συμβόλαια, τα οποία δεν είναι γνωστό εάν διέθεταν ή όχι εγγύηση πίστωσης.

Έκτοτε, το πλέον σημαντικό γεγονός θεωρείται η δημιουργία του Χρηματιστηρίου του Σικάγο, το 1848. Λόγω της τοποθεσίας του, αναπτύχθηκε ως το βασικό κέντρο αποθήκευσης, πώλησης και διανομής σιταριού, ενός προϊόντος, το οποίο εξαιτίας του εποχικού χαρακτήρα του, συσσωρευόταν σε μεγάλες ποσότητες μετά τη συγκομιδή, δημιουργώντας προβλήματα αποθήκευσης. Ως αποτέλεσμα, οι τρέχουσες (spot) τιμές αυξάνονταν και μειώνονταν δραστικά. Συνέπεια των παραπάνω ήταν, μία ομάδα διαπραγματευτών σιταριού, να δημιουργήσει τα «κατά την άφιξη» συμβόλαια, τα οποία επέτρεπαν στους παραγωγούς να «κλειδώνουν» την τιμή πώλησης και να παραδίδουν αργότερα το σιτάρι. Με αυτόν τον τρόπο, οι παραγωγοί αποθήκευαν το σιτάρι σε δικές τους εγκαταστάσεις και το παρέδιδαν στο Χρηματιστήριο του Σικάγο, μήνες αργότερα, ενώ παράλληλα τα εν λόγω συμβόλαια αποδείχθηκαν χρήσιμα και ως ένα μέσο αντιστάθμισης και κερδοσκοπίας στις μεταβολές των τιμών (Αγγελόπουλος Π. 2011).

Η διαπραγμάτευση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων απαγορεύτηκε αρκετές φορές στην Ευρώπη, την Ιαπωνία ακόμη και τις ΗΠΑ, παρ' όλα αυτά αποκαταστάθηκε αρκετά γρήγορα. Το 1922, η ομοσπονδιακή κυβέρνηση προσπαθεί, για πρώτη φορά, να ρυθμίσει την αγορά των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures Contracts), μέσω των συμβολαίων σιταριού. Το 1972, το Χρηματιστήριο του Σικάγο, ανταποκρινόμενο στις ελεύθερα κυμαινόμενες συναλλαγματικές ισοτιμίες, δημιουργεί τη Διεθνή Νομισματική Αγορά, η οποία επιτρέπει την διαπραγμάτευση σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης συναλλαγματικών ισοτιμιών (Currency Futures). Τρία χρόνια αργότερα, το ίδιο χρηματιστήριο δημιουργεί τα πρώτα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης επιτοκίων (interest rate futures contract) ενώ το 1973 αποτελεί έτος σταθμό στην ιστορία των παραγώγων, δεδομένου ότι το Χρηματιστήριο του Σικάγο ξεκινά για πρώτη φορά τη διαπραγμάτευση δικαιωμάτων προαίρεσης ενώ παράλληλα δημοσιεύεται το πλέον γνωστό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης από τους Fischer Black και Myron Scholes. Στη συνέχεια, η δεκαετία του 1980 σηματοδοτεί την έναρξη διαπραγμάτευσης των συμβάσεων ανταλλαγής (swaps) αλλά και παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων εκτός της χρηματιστηριακής αγοράς (over-the-counter). Σύντομα, κάθε μεγάλη επιχείρηση χρησιμοποιεί παράγωγα προϊόντα είτε για να αντισταθμίσει είτε για να κερδοσκοπήσει σε επιτόκια, συναλλαγματικές ισοτιμίες και κίνδυνο προϊόντων ενώ εμφανίζονται και περισσότερο πολύπλοκα προϊόντα, γνωστά ως «εξωτικά» (exotic).

Τα τελευταία χρόνια χρηματιστηριακός και επιχειρηματικός κόσμος αντιμετωπίζει μία σειρά μεγάλων απωλειών από γνωστές και ιδιαίτερα έμπειρες επιχειρήσεις, όπως η Lehmann Brothers καθώς και μία σειρά πτωχεύσεων, η οποία οφείλονταν κατά κύριο λόγο στη χρήση μόχλευσης κατά τη διαπραγμάτευση. Παρ' όλα αυτά, η χρήση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη έως και σήμερα, με τη διαφορά ότι οι επιχειρήσεις επιβάλλουν αυστηρότερους ελέγχους.

2.3 ΟΡΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Σύμφωνα με ένα γενικό ορισμό (Hull, 2009), τα παράγωγα ορίζονται ως χρηματοοικονομικά συμβόλαια μεταξύ δύο μερών, των οποίων η αξία διαμορφώνεται βάσει της αξίας ενός άλλου χρεογράφου, συνήθως διαπραγματεύσιμου, όπως οι μετοχές. Παρ' όλα αυτά, κατά καιρούς έχουν διατυπωθεί και άλλοι ορισμοί, οι οποίοι διαφέρουν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό από τον παραπάνω. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο (Warren Buffet,2002), ο οποίος ορίζει τα παράγωγα ως ωρολογιακές βόμβες, τόσο για τα μέρη που σχετίζονται άμεσα με αυτά όσο και για το ευρύτερο οικονομικό σύστημα, δεδομένου ότι επιτρέπουν τη μετακίνηση χρήματος σε μελλοντική ημερομηνία, με την αξία του, όμως, να καθορίζεται από ένα ή περισσότερα προϊόντα αναφοράς, όπως τα επιτόκια, οι μετοχές, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες κλπ.

Από την άλλη πλευρά, ο (Chui, 2011) παρουσιάζει τα παράγωγα ως χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία επιτρέπουν τη βελτίωση της διαχείρισης της αγοράς και των πιστωτικών κινδύνων, ενισχύοντας παράλληλα την χρηματοοικονομική καινοτομία και την ανάπτυξη της αγοράς και αυξάνοντας την αντοχή της αγοράς στα χρηματοοικονομικά «σοκ».

2.3.1 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα που συναντώνται στην αγορά ποικίλλουν ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους, το είδος του υποκείμενου χρηματοδοτικού εργαλείου και τη σχέση του με το παράγωγο, τον τρόπο εξόφλησής τους, την αγορά στην οποία διαπραγματεύονται κλπ. Οι κυριότερες κατηγορίες, στις οποίες μπορούν να διακριθούν περιλαμβάνουν τις εξής:

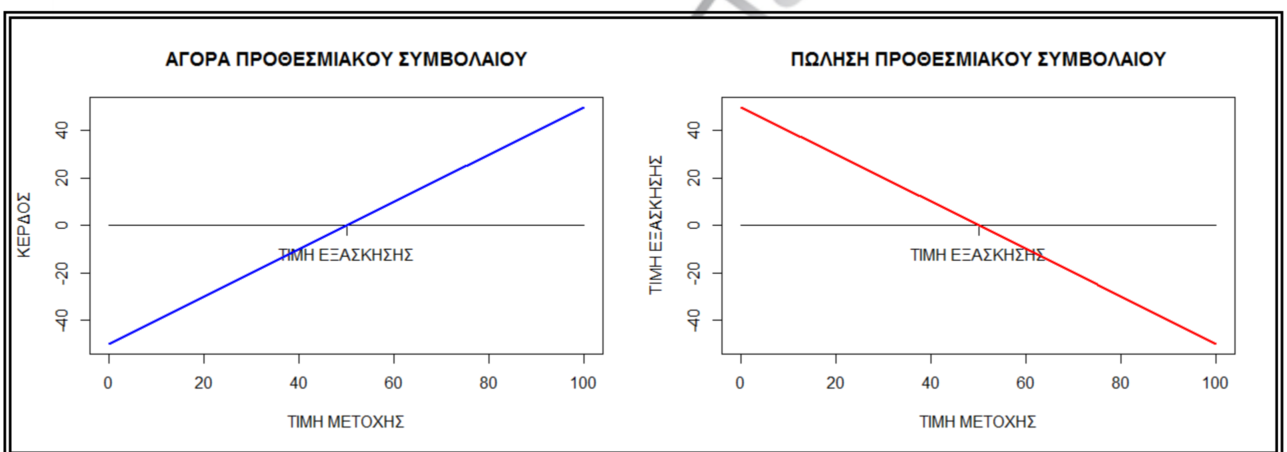
- Με βάση τη σχέση μεταξύ του παραγώγου και του υποκείμενου χρηματοδοτικού τίτλου (διακρίνονται σε forward, option, future, swap κλπ).
- Με βάση το είδος του υποκείμενου χρηματοδοτικού εργαλείου (διακρίνονται σε παράγωγα εμπορευμάτων, παράγωγα ξένου συναλλάγματος κλπ)
- Με βάση την αγορά στην οποία διαπραγματεύονται (διακρίνονται σε παράγωγα που διαπραγματεύονται στις αγορές και σε παράγωγα που διαπραγματεύονται εκτός των αγορών-OTC)

Μια άλλη σημαντική διάκριση γίνεται μεταξύ των:

- Παραγώγων vanilla (vanilla derivatives), τα οποία είναι απλά και πιο συνηθισμένα και
- Παραγώγων exotic (exotic derivatives), τα οποία είναι πολύπλοκα και πιο εξειδικευμένα

2.3.1.1 ΠΡΟΘΕΣΜΙΑΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ (FORWARD CONTRACTS)

Το προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract) αποτελεί μια συμφωνία που συνάπτεται σε μια χρονική στιγμή για την παράδοση ενός προϊόντος σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε μια τιμή (τιμή παράδοσης) που καθορίζεται κατά το χρόνο της σύμβασης. Τα προθεσμιακά συμβόλαια αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων για παράδειγμα μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών και συνήθως η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς. Δηλαδή έχουμε μια διαπραγμάτευση «over the counter». Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου ο ένας αντισυμβαλλόμενος και πιο συγκεκριμένα αυτός που έχει τη θετική ή μακρά θέση αγοράς (long position) συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού σε μια προκαθορισμένη τιμή σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον. Ο αντισυμβαλλόμενος που σύμφωνα με το συμβόλαιο έχει την αρνητική ή βραχεία θέση πώλησης (short position), είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού στη προκαθορισμένη τιμή στο προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον (Νούλας 2006).



Γράφημα 7: Συναρτήσεις κέρδους προθεσμιακών συμβολαίων.

Αγορά προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται όταν κάποιος αναμένει αύξηση της τιμής του προϊόντος στο μέλλον. Σήμερα συμφωνεί σε ποια τιμή θα αγοράσει το προϊόν ανεξάρτητα από το ποια θα είναι η τιμή του προϊόντος στην αγορά την ημέρα παράδοσης. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για αυτόν που έχει πάρει τη μακρά θέση ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής και της τιμής παράδοσης. Εάν η τρέχουσα τιμή του προϊόντος κατά την ημέρα της παράδοσης είναι μεγαλύτερη από την τιμή παράδοσης, ο αγοραστής έχει κέρδος ενώ εάν η τρέχουσα τιμή του προϊόντος κατά την ημέρα παράδοσης είναι μικρότερη από την τιμή παράδοσης, ο αγοραστής έχει ζημία.

Πώληση προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται όταν κάποιος πρέπει να πουλήσει το προϊόν στο μέλλον και φοβάται μείωση της τιμής του προϊόντος. Σήμερα συμφωνεί σε ποια τιμή θα πουλήσει το προϊόν ανεξάρτητα από το ποια θα είναι η τιμή του προϊόντος στην αγορά. Το κέρδος για τον πωλητή ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τιμής παράδοσης και της τρέχουσας τιμής. Εάν η τιμή παράδοσης είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα τιμή του προϊόντος κατά την ημέρα της παράδοσης, ο πωλητής έχει κέρδος, ενώ εάν η τιμή παράδοσης είναι μικρότερη από την τρέχουσα τιμή του προϊόντος κατά την ημέρα παράδοσης, ο πωλητής έχει ζημία.

Η χρησιμότητα των προθεσμιακών συμβολαίων, μεταξύ άλλων έγκειται στο γεγονός ότι επιτρέπεται στα δύο μέρη της συμφωνίας να προγραμματίσουν τη λειτουργία τους καλύτερα εκ των προτέρων γνωρίζοντας την τιμή, την ποσότητα, το χρόνο παράδοσης και το χρόνο πληρωμής. Έτσι ένας αγρότης μπορεί να προχωρήσει στην καλλιέργεια δημητριακών κλειδώνοντας μια τιμή ικανοποιητική εκ των προτέρων χωρίς να αναγκάζεται να παραδώσει το αγαθό παρά μόνο στο χρόνο της συγκομιδής.

Γενικά, τα πλεονεκτήματα των προθεσμιακών συμβολαίων είναι ότι είναι προσαρμοσμένα στις ανάγκες των πελατών και μπορούν να συναφθούν για οποιοδήποτε ποσό. Μέσω αυτών των συμβολαίων μειώνεται ή εξαλείφεται ο κίνδυνος που προέρχεται από την αβεβαιότητα των μελλοντικών τιμών. Επιπλέον, στα προθεσμιακά συμβόλαια δεν υπάρχει δέσμευση χρημάτων μέχρι την καταβολή του προϊόντος. Τέλος, είναι πράξεις που δεν προϋποθέτουν ούτε ειδικές γνώσεις, ούτε ειδική τοποθεσία αφού πραγματοποιούνται σε οποιοδήποτε μέρος.

Ανάμεσα στα μειονεκτήματα των προθεσμιακών συμβολαίων συγκαταλέγεται το ότι είναι υποχρεωτικές πράξεις και πρέπει να πραγματοποιηθούν ανεξάρτητα της διαμορφούμενης τιμής στην αγορά κατά την ημέρα παράδοσης του προϊόντος. Επιπλέον, υπόκεινται σε πιστωτικό κίνδυνο αφού υπάρχει πάντα ο κίνδυνος ένα από τα δύο μέλη, για διάφορους λόγους, να αθετήσει τη συμφωνία.

Τα βασικότερα είδη προθεσμιακών συμβολαίων σύμφωνα με το είδος του προϊόντος που αφορούν είναι:

- τα προθεσμιακά συμβόλαια εμπορευμάτων
- τα προθεσμιακά συμβόλαια συναλλάγματος
- τα προθεσμιακά συμβόλαια επιτοκίου

2.3.1.2 ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ (FUTURES)

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ή futures είναι σύνθετα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Πρόκειται για συμβόλαια και όχι χρεόγραφα, τα οποία υπογράφονται μεταξύ των δύο συμβαλλόμενων μελών. Αφορούν στην πώληση και αγορά συγκεκριμένης και ακριβώς καθορισμένης ποσότητας ενός περιουσιακού στοιχείου, φυσικού ή χρηματοοικονομικού, σε συγκεκριμένο μήνα στο μέλλον. Το στοιχείο αυτό ονομάζεται υποκείμενο (underlying asset). Όπως και σε άλλα παράγωγα, ο υπογράφων ως αγοραστής του υποκείμενου στοιχείου κατέχει μια μακρά θέση (long position) επί αυτού ενώ ο πωλητής μια βραχεία (short). Το σορτάρισμα στα futures δεν έχει σχέση με το σορτάρισμα σε μετοχές, αλλά αφορά απλώς στην συμφωνία για μελλοντική πώληση του υποκείμενου στοιχείου.

Ένα συμβόλαιο futures υποχρεώνει τον αγοραστή ή πωλητή να διεκπεραιώσει τη συναλλαγή ή παράδοση σύμφωνα με τους όρους και το πλαίσιο που αυστηρά ορίζεται στο συμβόλαιο. Ο κύριος λόγος ύπαρξής τους είναι η ασφάλιση έναντι μελλοντικών κινδύνων, αλλά τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται και για κερδοσκοπία επί διαφόρων ειδών κινήσεων στις αγορές χρήματος και εμπορευμάτων. Για την διασφάλιση της εκπλήρωσης των υποχρεώσεων των αντισυμβαλλόμενων μελών η υπογραφή του συμβολαίου καθώς και η διεκπεραίωση των συμφωνηθέντων λαμβάνει χώρα σε ειδικά εκκαθαριστήρια (clearing houses).

Όσον αφορά λοιπόν στην αγορά των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, συναντώνται τα εκκαθαριστήρια, τα οποία λειτουργούν ως μεσάζοντες μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων μελών, εγγυώμενα την τήρηση των όρων που αναγράφονται στα συμβόλαια. Στο τέλος κάθε ημέρας, ελέγχονται όλες οι συναλλαγές και προκύπτει για τον λογαριασμό του κάθε μέλους η καθαρή θέση. Φυσικά, οι έχοντες λογαριασμό στο εκκαθαριστήριο θα πρέπει να πληρώνουν ένα αντίτιμο για τις υπηρεσίες που αυτό παρέχει. Με τα χρήματα αυτά συγκεντρώνονται αρκετά κεφάλαια τα οποία καλύπτουν τους μεσίτες-χρηματιστές ή μέλη που έχουν μακρές θέσεις στην περίπτωση που οι αντισυμβαλλόμενοι αποφασίσουν να μην τηρήσουν τους όρους που υπέγραψαν, φαινόμενο, όμως, εξαιρετικά σπάνιο. Γενικά αυτός ο τρόπος οργάνωσης της αγοράς συμβολαίων φέρεται ως αρκετά αποτελεσματικός.

Οι υποκείμενες αξίες σε κατηγορίες επί των οποίων υπογράφονται συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι είτε φυσικές είτε χρηματοοικονομικές. Πιο συγκεκριμένα ως φυσικές θεωρούνται τα αρόσιμα αγαθά κάθε είδους, ενεργειακά αγαθά, όπως το πετρέλαιο, το φυσικό αέριο ή ο ηλεκτρισμός, μεταποιημένα αγαθά όπως το χαρτί κλπ. Στα χρηματοοικονομικά υποκείμενα στοιχεία εντάσσονται οι μετοχές, οι ομολογίες, νομίσματα, καθώς και διάφοροι δείκτες της αγοράς.

Ως προς τους επενδυτές, αυτοί κατηγοριοποιούνται με βάση ποια κίνητρα τους διέπουν όταν υπογράφουν τα συμβόλαια, δηλαδή τον σκοπό για τον οποίο χρειάζονται τη μελλοντική εκπλήρωση. Έτσι οι διάφοροι παίκτες της αγοράς διακρίνονται σε hedgers, speculators και arbitrageurs.

Ιδιαίτερο ρόλο στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διαδραματίζει η έννοια του περιθωρίου, κυρίως ως εγγύηση των συναλλαγών που λαμβάνουν χώρα στα εκκαθαριστήρια. Πρόκειται για προκαταβολή είτε σε μετρητά είτε σε περιουσιακά στοιχεία. Ο ρόλος του, επί της ουσίας, είναι η ελαχιστοποίηση του πιστωτικού κινδύνου και ανέρχεται, ως αξία, συνήθως, στα 5-15% επί της αξίας του συμβολαίου [Brown and Geisst (1983)]. Οι μορφές που μπορεί να λάβει περιλαμβάνουν τις εξής:

- Το αρχικό περιθώριο, δηλαδή το ποσό που απαιτείται να έχει το ενδιαφερόμενο μέλος για να υπογράψει ένα συμβόλαιο. Διασφαλίζει το ποσό ενδεχόμενης ζημίας που θα προκύψει για το μέλος στη λήξη του συμβολαίου.
- Το περιθώριο εκκαθάρισης, δηλαδή τη χρηματοοικονομική εγγύηση των νομικών προσώπων, που αφορά στη διεκπεραίωση των υπογραφέντων συναλλαγών.
- Το περιθώριο πελάτη, το οποίο αφορά φυσικά, κυρίως, πρόσωπα (μεσίτες και χρηματιστές ή και market makers) και διασφαλίζει την εκπλήρωση των όρων είτε πρόκειται για μακρές ή είτε για βραχείες θέσεις.

2.3.1.3 ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ (OPTIONS)

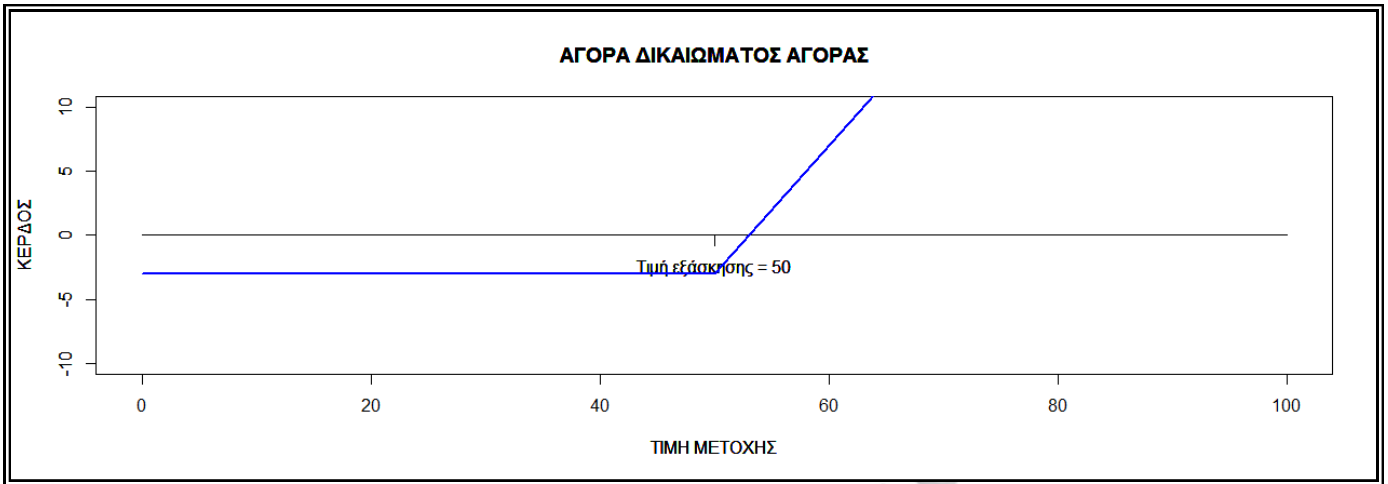
Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) διαφέρουν σημαντικά από τα futures και τα forwards ως προς το ότι ο κάτοχος τους έχει το δικαίωμα να κάνει κάτι, χωρίς όμως να είναι υποχρεωμένος να ασκήσει αυτό το δικαίωμα. Για τον παραπάνω λόγο, η σύναψη ενός συμβολαίου τύπου future ή forward δεν κοστίζει τίποτα σε αντίθεση με τη σύναψη μιας συμφωνίας options, η οποία απαιτεί την καταβολή κάποιου αντιτίμου (option price).

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι τα παρακάτω:

- Το είδος του δικαιώματος που διακρίνεται σε δικαίωμα αγοράς (call option) ή δικαίωμα πώλησης (put option).
- Ο υποκείμενος τίτλος που διακρίνεται σε μετοχές, εμπορεύματα, συνάλλαγμα ή σε δείκτες χρηματιστηρίων.
- Το μέγεθος του συμβολαίου που αφορά το μέγεθος του υποκείμενου τίτλου στο οποίο διαπραγματεύεται το εν λόγω option.
- Η ημερομηνία λήξης που αναφέρεται στο χρόνο εξάσκησης του δικαιώματος.
- Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K η οποία είναι η εκ των προτέρων προκαθορισμένη συμφωνηθείσα τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.
- Το ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος που αναφέρεται στο αντίτιμο που καταβάλει ο αγοραστής ή ο πωλητής αντίστοιχα. Καθώς ο πωλητής αναλαμβάνει ρίσκο για το δικαίωμα που είναι υποχρεωμένος να ασκήσει εάν ο αγοραστής το θελήσει.

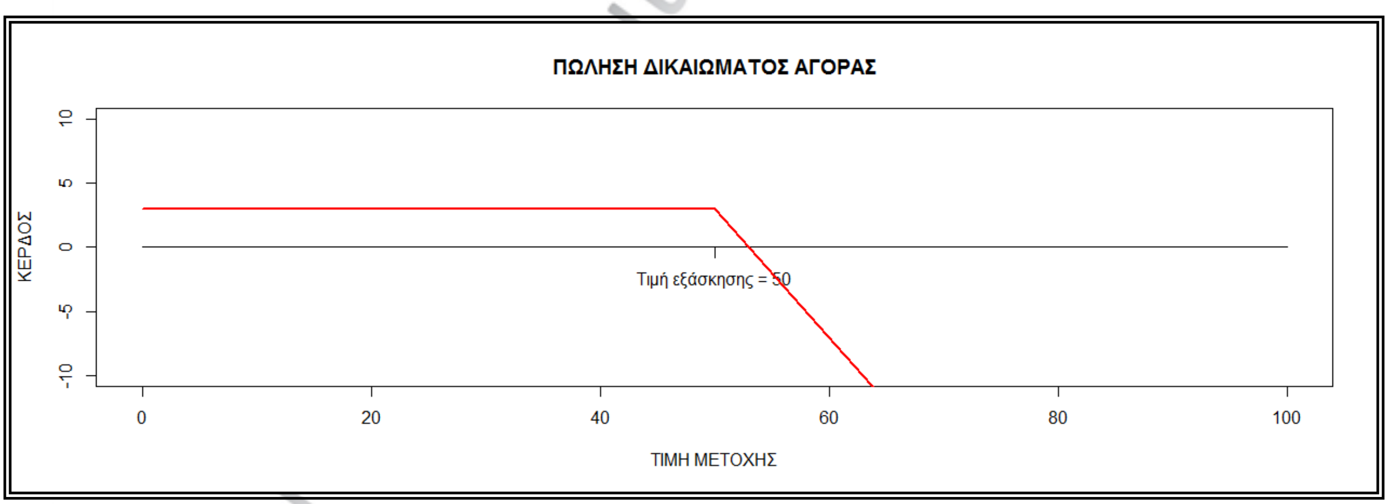
Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες options:

- Τα call options, τα οποία δίνουν στον κάτοχο τους το δικαίωμα να αγοράσει κάποιον τίτλο σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία (ημερομηνία λήξης) για μια συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης). Στην περίπτωση αυτή, ο επενδυτής έχει κέρδος όταν η τιμή της αγοράς για τον εν λόγω τίτλο, στη συγκεκριμένη ημερομηνία, είναι υψηλότερη από αυτήν η οποία προβλέπεται στο συμβόλαιο (option). Αυτό γιατί ο επενδυτής μπορεί, ασκώντας το δικαίωμα του, να αγοράσει τον τίτλο σε χαμηλή τιμή και την αμέσως επόμενη στιγμή να τον πουλήσει στην αγορά στην τιμή που επικρατεί, αποκομίζοντας κέρδος.



Γράφημα 8: Κόστος δικαιώματος = €3, Τιμή Εξάσκησης = €50

- Τα put options, τα οποία δίνουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα να πουλήσει κάποιον τίτλο σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία (ημερομηνία λήξης) για μια συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης). Στην περίπτωση αυτή, ο επενδυτής έχει κέρδος όταν η τιμή της αγοράς, για τον εν λόγω τίτλο, στη συγκεκριμένη ημερομηνία, είναι χαμηλότερη από αυτήν που προβλέπεται στο συμβόλαιο option. Αυτό γιατί ο επενδυτής μπορεί, ασκώντας το δικαίωμα του, να πουλήσει τον τίτλο που κατέχει σε υψηλότερη τιμή από την πραγματική, αποκομίζοντας κέρδος.



Γράφημα 9: Κόστος δικαιώματος = €3, Τιμή Εξάσκησης = €50

Σε κάθε συμβόλαιο option υπάρχουν δύο πλευρές. Στη μία πλευρά βρίσκεται ο επενδυτής, ο οποίος έχει αγοράσει το συμβόλαιο, long position, και στην άλλη πλευρά, ο επενδυτής, ο οποίος έχει πουλήσει ή «γράψει» το συμβόλαιο, short position. Ο δεύτερος λαμβάνει, μεν, ένα ποσό προκαταβολικά, έχει όμως πιθανές μελλοντικές απώλειες. Το κέρδος του ενός αποτελεί τη ζημία του άλλου και το αντίστροφο.

Υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες θέσεων τις οποίες αναφέρουμε επιγραμματικά αλλά θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά σε παρακάτω ενότητα που αφορά τις στρατηγικές αντιστάθμισης κινδύνου:

- **Long position για call option** (αγορά δικαιώματος αγοράς) η οποία προτιμάται στην περίπτωση που εκτιμάται ανοδική τάση στην τιμή του συνδεδεμένου υποκείμενου τίτλου για παράδειγμα κάποια μετοχή. Στην περίπτωση αυτή ο αγοραστής περιμένει ανοδική τάση στην τιμή της μετοχής, επομένως αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει σε προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K έναντι ποσού C, με αποτέλεσμα αν η τιμή της μετοχής την στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι $S(t)$ τότε το κέρδος του αγοραστή να είναι

$$\max\{S(t) - K, 0\} - C \tag{2.1}$$

- **Short position για call option** (πώληση δικαιώματος αγοράς) η οποία προτιμάται στην περίπτωση που εκτιμάται στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση στην τιμή του συνδεδεμένου υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή ο πωλητής πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς με αποτέλεσμα αν η τιμή της μετοχής μείνει στάσιμη ή ελαφρά μειωθεί τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει έναντι ποσού C. Το κέρδος του πωλητή θα είναι

$$C - \max\{S(t) - K, 0\} \tag{2.2}$$

- **Long position για put option** (αγορά δικαιώματος πώλησης) η οποία προτιμάται στην περίπτωση που εκτιμάται καθοδική τάση στην τιμή του συνδεδεμένου υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή ο αγοραστής περιμένει καθοδική τάση στην τιμή του συνδεδεμένου υποκείμενου τίτλου, επομένως αγοράζει το δικαίωμα να πουλήσει σε προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K έναντι ποσού C , τότε το κέρδος του αγοραστή θα είναι

$$\max\{K - S(t), 0\} - C \tag{2.3}$$

- **Short position για put option** (πώληση δικαιώματος πώλησης) η οποία προτιμάται στην περίπτωση που εκτιμάται στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση στην τιμή του συνδεδεμένου υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή ο πωλητής πωλεί ένα δικαίωμα πώλησης με αποτέλεσμα αν η τιμή της μετοχής μείνει στάσιμη ή ελαφρά αυξηθεί τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει έναντι ποσού C και το κέρδος του πωλητή θα είναι

$$C - \max\{K - S(t), 0\} \tag{2.4}$$

Επίσης τα δικαιώματα προαίρεσης (options) διαπραγματεύονται τόσο εντός αγορών (exchange-traded options ή “listed options”) όσο και εκτός αυτών (over-the-counter options ή “dealer options”).

Α) ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟΥ ΚΑΙ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Τα δικαιώματα προαίρεσης κατατάσσονται, επίσης, είτε στα Ευρωπαϊκού είτε στα Αμερικανικού τύπου, διάκριση που δεν έχει καμία σχέση με τη γεωγραφική περιοχή. Η διαφορά τους έγκειται στη χρονική στιγμή άσκησής τους. Συγκεκριμένα, τα Αμερικανικά συμβόλαια μπορούν να ασκηθούν οποτεδήποτε μέχρι την ημερομηνία λήξης τους ενώ τα Ευρωπαϊκά μόνο στην ημερομηνία λήξης τους. Αν και ο μεγαλύτερος όγκος συναλλαγών αφορά σε Αμερικανικά options, τα Ευρωπαϊκά θεωρούνται ευκολότερα ως προς την ανάλυσή τους.

Τα «American options» διακρίνονται στα κλασσικά και στα μη κλασσικά (standard and non standard). Στην περίπτωση των πρώτων (standard American options), η άσκηση του δικαιώματος μπορεί να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος, με την τιμή του να διατηρείται πάντοτε σταθερή. Παρ' όλα αυτά, για διάφορους λόγους, τα κλασσικά αμερικανικά δικαιώματα αγοράς (call options), χωρίς μερίσματα, δεν θα πρέπει να εξασκούνται πριν την ημερομηνία λήξης τους, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα με μερίσματα, τα οποία προτείνεται να εξασκούνται πριν τη λήξη ώστε ο κάτοχος τους να λαμβάνει και τα μερίσματα που διαφορετικά δεν θα λάμβανε (Hull, 2000).

Στην πραγματικότητα, τα American options, τα οποία διαπραγματεύονται σε over-the-counter αγορές, συνήθως παρουσιάζουν μη κλασσικά (non standard) χαρακτηριστικά. Πιο συγκεκριμένα:

- Η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος μπορεί να περιορίζεται σε συγκεκριμένες ημερομηνίες. Σε αυτήν την περίπτωση το δικαίωμα καλείται «Bermudan Option».
- Η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος μπορεί να επιτρέπεται μόνο σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Πιο αναλυτικά ενδέχεται αρχικά και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ("lock-out period") να απαγορεύεται η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος.
- Η τιμή άσκησης του δικαιώματος ενδέχεται να αλλάξει κατά τη διάρκεια ζωής του.

Από την άλλη πλευρά, τα μη κλασσικά αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης («non standard American options»), συνήθως τιμολογούνται με τη binomial μέθοδο τιμολόγησης, κατά την οποία, ο έλεγχος για πρόωρη άσκηση του δικαιώματος προσαρμόζεται ώστε να αντικατοπτρίζει τους όρους του δικαιώματος προαίρεσης.

Οι κυριότερες διαφορές που παρουσιάζουν τα αμερικανικά σε σύγκριση με τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης είναι οι εξής (Stefano M., 2011):

- Τα αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή ενώ τα ευρωπαϊκά μόνο κατά τη λήξη τους.
- Στην περίπτωση των put options, η τιμή ενός αμερικανικού και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος, μπορεί να διαφέρουν ακόμη και για υποκείμενους τίτλους που δεν πληρώνουν μερίσματα.
- Τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης τιμολογούνται με τη μέθοδο Black-Scholes ενώ τα αμερικανικά με μία από τις μεθόδους Whaley, binomial, Monte Carlo κλπ.

Β) ΕΞΩΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

➢ ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Πρόκειται για δικαιώματα, στα οποία η τελική εξόφληση εξαρτάται από τη μέση τιμή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού τίτλου κατά τη διάρκεια τουλάχιστον ενός μέρους της ζωής του. Οποιαδήποτε κι αν ήταν η αιτία της αρχικής ανάπτυξης της, σήμερα η συγκεκριμένη κατηγορία δικαιωμάτων είναι ιδιαίτερα δημοφιλής και προσφέρεται σε εμπορεύματα όπως ο χρυσός, το ασήμι και το λάδι, ενώ χρησιμοποιείται προκειμένου να καλύψει την έκθεση των συναλλαγών στους κινδύνους του ξένου συναλλάγματος. Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των συνηθισμένων δικαιωμάτων και των δικαιωμάτων Ασιατικού τύπου είναι ότι ενώ τα πρώτα είναι κατάλληλα για τη μείωση του κινδύνου μιας συγκεκριμένης θέσης της οποίας το μέγεθος είναι γνωστό ή μιας χρηματοροής, η οποία θα πραγματοποιηθεί σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή (όπως ομόλογα), τα δεύτερα είναι κατάλληλα για τη μείωση του κινδύνου που απορρέει από συνεχείς χρηματορροές των οποίων το μέγεθος και ο χρόνος δεν είναι γνωστά.

Η ιδιαιτερότητα των δικαιωμάτων Ασιατικού τύπου είναι ότι για μία συγκεκριμένη τιμή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού τίτλου κατά την ημερομηνία λήξης, μπορούν να προκύψουν δύο διαφορετικές μέσες τιμές (γεωμετρικός και αριθμητικός μέσος). Κατά συνέπεια, προκειμένου, να καταλήξουμε σε μία τιμή για το δικαίωμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του διωνυμικού δέντρου (binomial tree) κινούμενοι προς την ημερομηνία λήξης. Διαφορετικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον έναν ή τον άλλον μέσο.

➢ LOOKBACK

Σε αυτήν την περίπτωση πρόκειται για δικαιώματα των οποίων η αξία εξαρτάται από την πορεία της τιμής του υποκείμενου τίτλου και από τον χρόνο σύναψης του συμβολαίου μέχρι την λήξη του. Επομένως η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος δεν είναι προκαθορισμένη αλλά είναι η ελάχιστη τιμή που παρατηρήθηκε στο χρονικό διάστημα ισχύος του συμβολαίου.

➢ BARRIER

Ο όρος "barrier option" αποδίδεται σε κάποιο δικαίωμα το οποίο ενεργοποιείται ή απενεργοποιείται ανάλογα με το αν η τιμή του υποκείμενου, σε αυτό, χρηματοοικονομικού τίτλου ανέρχεται ή κατέρχεται ένα συγκεκριμένο επίπεδο, κατά τη διάρκεια ζωής του. Υπάρχουν δύο γενικές κατηγορίες στις οποίες εντάσσονται τα barrier options:

- In-barriers, ευρέως γνωστά ως knock-in options
- Out-barriers, ευρέως γνωστά ως knock-out options.

Εφόσον το όριο (barrier) μπορεί να τεθεί είτε υψηλότερα είτε χαμηλότερα από την τιμή του υποκείμενου χρηματοδοτικού τίτλου που επικρατεί τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή στην αγορά, τόσο τα in-barriers όσο και τα out-barriers options μπορούν να κατηγοριοποιηθούν περαιτέρω σε up-and-out και down-and-out options.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τους διάφορους τύπους των knock-out και knock-in calls και puts options με βάση τη σχέση μεταξύ τιμής και ορίου και το αποτέλεσμα που θα έχει στην τελική αξία του συμβολαίου μια πιθανή μεταβολή της τιμής πέρα από το όριο.

Δικαιώματα Barrier	**ΣΧΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΡΕΧΟΥΣΑΣ ΤΙΜΗΣ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΤΗΝ ΣΤΙΓΜΗ ΣΥΝΑΨΗΣ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟΥ**	**ΠΛΗΡΩΜΕΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΛΗΞΗ.**	
		Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΥΠΕΡ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ	**Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΥΠΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ**
Down-and-out call	ΥΠΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ	ΕΝΕΡΓΟ
Down-and-in call	ΥΠΟ	ΕΝΕΡΓΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ
Up-and-out call	ΥΠΕΡ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ	ΕΝΕΡΓΟ
Up-and-in call	ΥΠΕΡ	ΕΝΕΡΓΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ
Down-and-out put	ΥΠΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ	ΕΝΕΡΓΟ
Down-and-in put	ΥΠΟ	ΕΝΕΡΓΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ
Up-and-out put	ΥΠΕΡ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ	ΕΝΕΡΓΟ
Up-and-in put	ΥΠΕΡ	ΕΝΕΡΓΟ	ΜΗ ΕΝΕΡΓΟ

2.4 ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Αναμφίβολα, η τιμολόγηση αποτελεί το πιο ζωτικής σημασίας τμήμα μιας μελέτης επί των παραγώγων. Σε γενικές γραμμές η τιμολόγηση ενός παραγώγου εξαρτάται από τις παραμέτρους του κάθε περιουσιακού στοιχείου που λειτουργεί ως υποκείμενη αξία. Ιδιαίτερα όσον αφορά για τον υπολογισμό της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης έχει υπάρξει μια πληθώρα μοντέλων συνεχούς και διακριτού χρόνου στην ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία. Ένα από τα πιο δημοφιλή μοντέλα διακριτού χρόνου είναι το δυναμικό μοντέλο αποτίμησης ενώ αντίστοιχα σε συνεχή χρόνο είναι το μοντέλο Black & Scholes που προτάθηκε το 1973 από τους Fisher Black, Myron Scholes και Robert Merton προσφέροντας αναμφισβήτητα σημαντικά στοιχεία στην θεωρία στοχαστικής ανάλυσης και στην αποτίμηση δικαιωμάτων. Ως αποτέλεσμα υπήρξε η τιμητική αναφορά του Fisher Black ύστερα από τον θάνατο του το 1995 και η απονομή βραβείου Nobel στα οικονομικά το 1997 των εν ζωή M.Scholes και R.Merton.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων συνεχούς χρόνου αλλά πρώτα είναι σημαντικό να αναφερθούμε στον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας ή ανέλιξης και έπειτα στην Γεωμετρική κίνηση Brown η οποία και αποτελεί βασικό θεμέλιο στην ανάλυση μοντέλων συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής καθώς περιγράφει μια στοχαστική διαδικασία η οποία αλλάζει τιμές «συνεχώς». Στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν ισχύει επακριβώς καθώς οι τιμές π.χ. των μετοχών είναι διακριτές μεταβλητές και ο χρόνος δεν είναι απόλυτα συνεχής μιας και υπάρχει ωράριο λειτουργίας στα χρηματιστήρια. Όμως αποδεικνύεται ότι η εν λόγω κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών προσεγγίζει ικανοποιητικά την διαδικασία της κίνησης των τιμών ενός χρηματοοικονομικού τίτλου.

2.4.1 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Η εξέλιξη των τιμών ενός χρηματοοικονομικού τίτλου στον χρόνο δεν μπορεί να περιγραφεί μόνο από μια τ.μ καθώς εκτός από την παράμετρο της τιμής υπάρχει και η εξέλιξή της στον χρόνο. Για αυτόν λοιπόν το λόγο γίνεται χρήση μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών που καλούνται στοχαστικές διαδικασίες ή ανελίξεις. Μια κατηγορία στοχαστικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής αποτελούν και οι διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Σε μια τέτοια διαδικασία οι μελλοντικές κινήσεις της μεταβλητής δεν εξαρτώνται από την τιμή της μεταβλητής την χρονική στιγμή που την εξετάζουμε. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα π.χ. η μεταβολή $S_2 - S_1$να είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από την μεταβολή $S_3 - S_2$, κ.ο.κ.

Α) ΚΙΝΗΣΗ BROWN.

Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με τις τ.μ. $X(t)$ να εκφράζουν την τιμή της ποσότητας που μελετάμε την χρονική στιγμή t. Στη συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό μιας κίνησης Brown.

Ορισμός 2.4.1.1 Μια στοχαστική διαδικασία $\{B(t), t \geq 0\}$ καλείται κίνηση Brown με συντελεστή διάχυσης (volatility parameter) σ^2, αν:

- $B(0) = 0$
- έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για όλα τα $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots, B(t_2) - B(t_1), B(t_1)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.
- για κάθε $t \geq 0$, $B(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

Όταν επιπλέον $\sigma = 1$ η διαδικασία καλείται τυπική κίνηση Brown (Standard Brownian Motion) ή διαδικασία Wiener (Wiener process).

Άμεσα προκύπτει λοιπόν ότι οποιαδήποτε κίνηση Brown μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μιας κίνησης Wiener αν $B(t) = \sigma X(t)$ όπου $X(t)$ η διαδικασία Wiener. Επίσης, επειδή οι προσαυξήσεις της διαδικασίας Wiener είναι ανεξάρτητες και στάσιμες για κάθε $t \geq 0$ και $X(t) \sim N(0, t)$, προκύπτει ότι μετά από χρόνο Δt θα ισχύει $\Delta X \sim N(0, \Delta t)$ και άρα $\Delta X = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ με $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Ορισμός 2.4.1.2 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ λέγεται κίνηση Brown με παραμέτρους μ (drift parameter) και σ^2 (volatility ή variance parameter) ή γενικευμένη διαδικασία

Wiener με συμβολισμό $BM(\mu, \sigma^2)$, αν:

(i) $X(0) = 0$

(ii) έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(iii) για κάθε $t \geq 0, X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Β) ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Θα παραθέσουμε τώρα όλα τα στοιχεία που χρειαζόμαστε για να προσομοιώσουμε την κίνηση Brown στο R. Θα προσομοιώσουμε αρχικά την γενικευμένη διαδικασία Wiener παράγοντας μόνο ένα μονοπάτι και θέτοντας $\mu = 3$ και $\sigma = 5$.

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε $i = 1$ και $X_{t_0} = 0$.

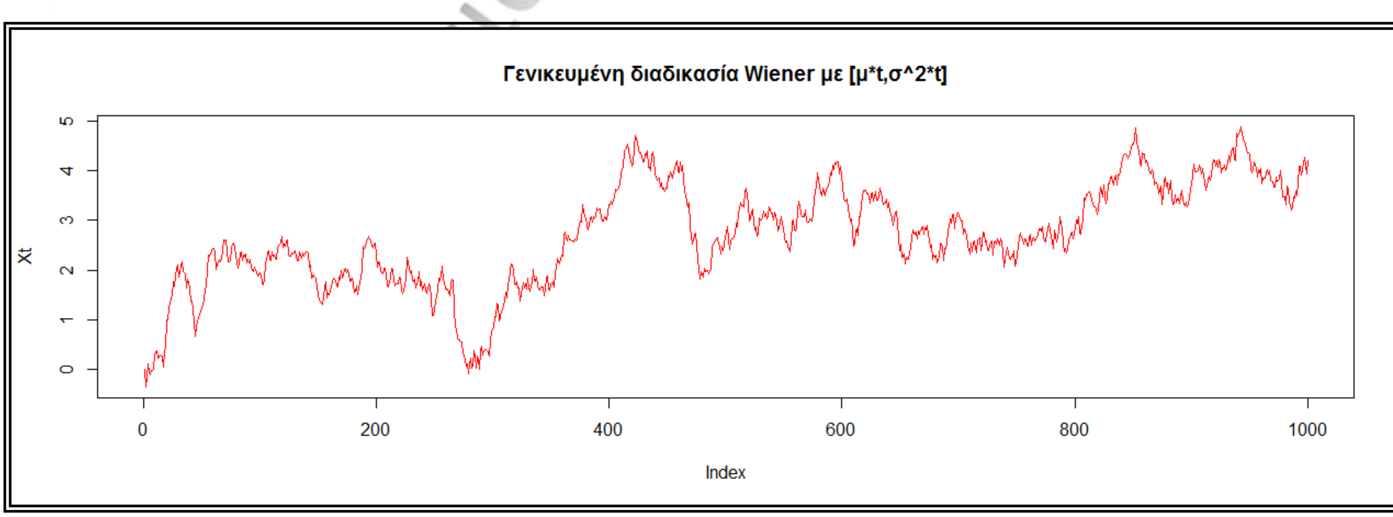
ΒΗΜΑ 2: Για κάθε $i = 1,2, \dots, NSteps$ παράγουμε $\Delta X_i \sim N\big(\mu(t_i - t_{i-1}), \sigma^2(t_i - t_{i-1})\big)$

ΒΗΜΑ 3: Θέτουμε

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = X_{t_{i-1}} + \Delta X_i$$

ΒΗΜΑ 4: Παριστάνουμε γραφικά την κίνηση Brown που έχουμε παράγει.

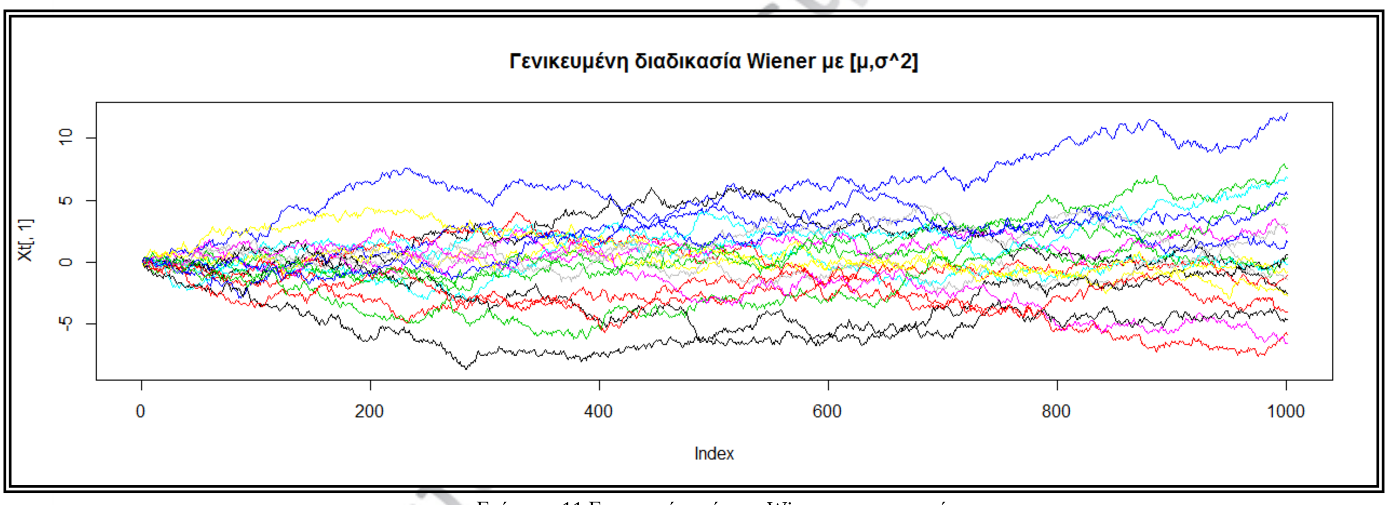
```
# Προσομοίωση της κίνησης Brown με N(μ*t,σ^2*t)#
NSteps=1000; T=1; sigma=5; mi=3
dt = T/NSteps;
dXt= rnorm(NSteps, mi*dt, sigma*sqrt(dt));
Xt=cumsum(dXt);
Xt[1]=0;
plot(Xt, t="l", main="Γενικευμένη διαδικασία Wiener με [μ*t,σ^2*t]", col="red");
```



Γράφημα 10: Γενικευμένη κίνηση Wiener με ένα μονοπάτι.

Συμπληρωματικά μπορούμε να παραθέσουμε τον κώδικα για την παραγωγή n στον αριθμό μονοπάτια με τις ίδιες παραμέτρους, αρκεί να κάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα για κάθε μονοπάτι ξεχωριστά.

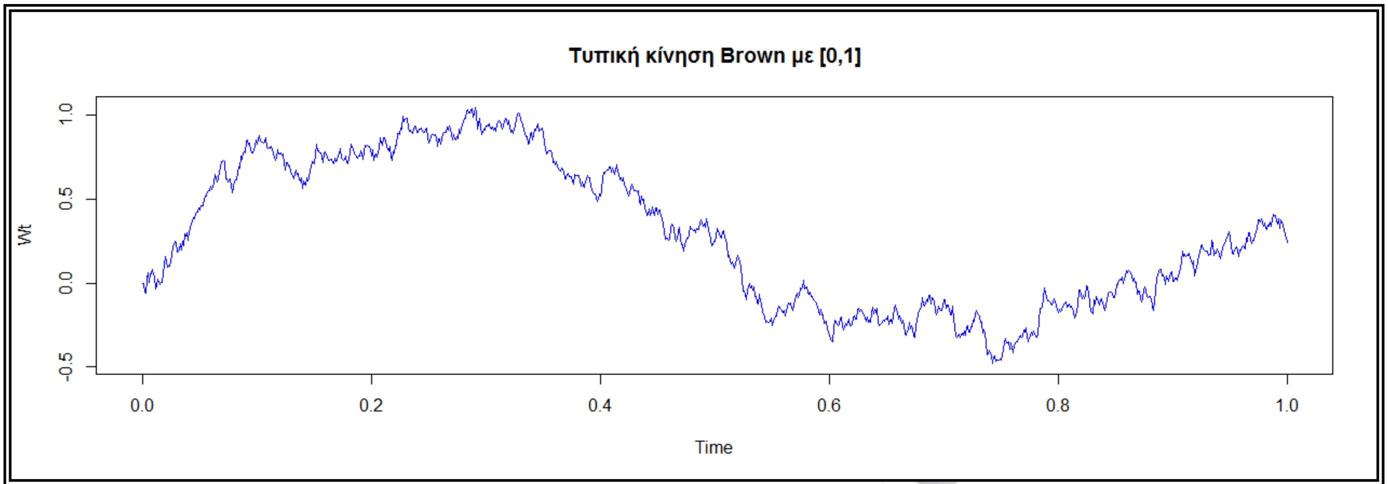
```
# Προσομοίωση της κίνησης Brown με NPaths και N(μ,σ^2)#
BrownianPath<- function(NSteps,t,T,mi,sigma)
               {dt = (T-t)/NSteps;
               dXt=rnorm(NSteps, mi*dt,sigma*sqrt(dt) );
               Xt=c(0,cumsum(dXt));
               return(Xt)
               }
NSteps=1000;NPaths=20;t=0;T=1;sigma=5;mi=0.3
Xt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
for (i in 1:NPaths)
    {Xt[,i] <- BrownianPath(NSteps,t,T,mi,sigma)}
    plot(Xt[,1],t="l", main="Γενικευμένη διαδικασία Wiener με [μ,σ^2]",
    ylim=c(min(Xt), max(Xt)))
for (i in 2:NPaths) { lines(Xt[,i], col=i) }
```



Γράφημα 11 Γενικευμένη κίνηση Wiener με *n*- μονοπάτια.

Αντίστοιχα μπορούμε να παραθέσουμε τους ανάλογους κώδικες για την προσομοίωση της τυπικής κίνησης Brown όπως την ορίσαμε παραπάνω με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma = 1$.

```
# Προσομοίωση της τυπικής κίνησης Brown με N(0,1)
NSteps = 1000;
T=1;
dt = T/NSteps;
dWt=sqrt(dt) * rnorm(NSteps, 0, 1 );
Wt=cumsum(dWt);
Wt=c(0,Wt);
t = seq(0,T, by=dt);
plot(t, Wt, t="l", main="Τυπική κίνηση Brown με [0,1]", col="blue", xlab = "Time");
```



Γράφημα 12: Τυπική κίνηση Wiener με ένα μονοπάτι.

Γ) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Ορισμός 2.4.1.3 Μια στοχαστική ανέλιξη $\{Y(t), t \geq 0\}$ καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ (drift parameter) και σ^2 (volatility parameter) και συμβολίζεται $GBM(\mu, \sigma^2)$ αν ισχύει για κάθε $t \geq 0$ ότι:

(i) Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln \frac{Y(t+k)}{Y(k)} \sim N(t\mu, t\sigma^2)\, , k > 0.$$

(ii) Η τυχαία μεταβλητή $Y(t+k)/Y(k)$είναι ανεξάρτητη από τις $Y(u), 0 \ \leq u \leq k$

Είναι προφανές ότι αν $\{X\ (t), t \geq 0\}\sim\ BM\ (\mu, \sigma^2)$ τότε η $Y(t) =\ e^{X(t)}$ λέγεται γεωμετρική κίνηση Brown και ισχύει ότι $\{Y\ (t), t\ \geq 0\} \sim GBM\ (\mu, \sigma^2)$.

Δ) ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Παραθέτουμε τον κώδικα για την προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brownμε μόνο ένα μονοπάτι και με παραμέτρους $T = 1$ (ο χρόνος μέχρι την λήξη), $mi\ = 0.05$, $sigma\ = 0.30$, $Y_0\ = 100$, όπου Y_0 είναι η αρχική τιμή που θα ξεκινάει η γεωμετρική κίνηση Brown.

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε $i = 1$ και $X_{t_0} = 0$.

ΒΗΜΑ 2: Για κάθε $i = 1,2,\dots,NSteps$ παράγουμε $\Delta X_i \sim N\big(\mu(t_i - t_{i-1}), \sigma^2(t_i - t_{i-1})\big)$

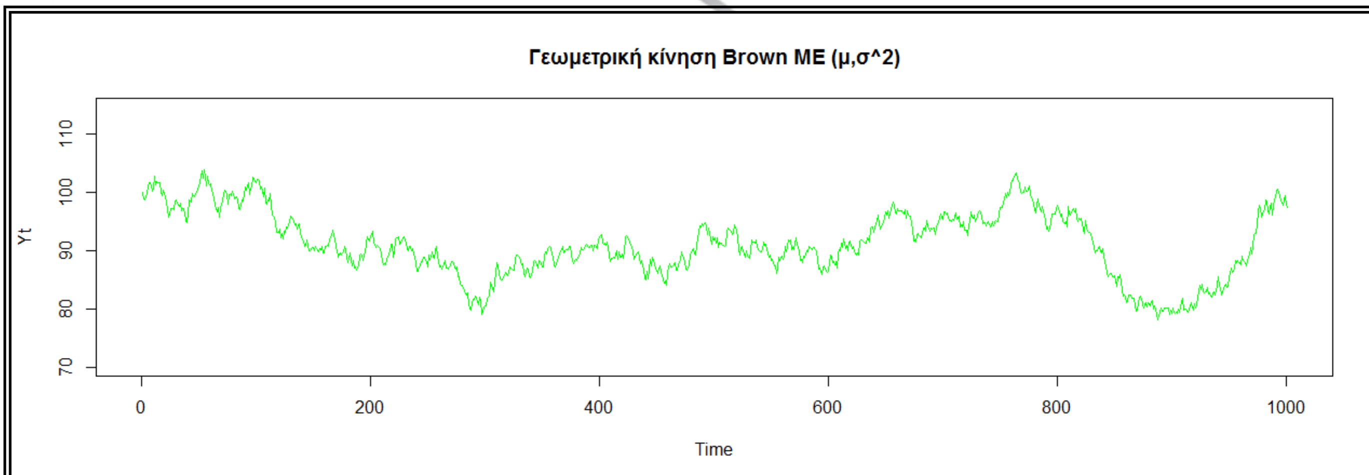
ΒΗΜΑ 3: Θέτουμε

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$$

ΒΗΜΑ 4: Μετασχηματίζουμε τις τιμές X_t της κίνησης Brown σε $Y_t = \exp X_t$ η οποία θα ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή

ΒΗΜΑ 5: Παριστάνουμε γραφικά την Γεωμετρική κίνηση Brown που έχουμε παράγει.

```
NSteps <- 1000; T<-1; mi <- 0.05; sigma <- 0.30; Y0 <- 100;dt = T/NSteps;
dXt=rnorm(NSteps, mi*dt, sigma*sqrt(dt));
Xt=c(0,cumsum(dXt));
Yt<- Y0 * exp(Xt);
plot(Yt, t="l", main="Γεωμετρική κίνηση Brown ΜΕ (μ,σ^2)",
ylim=c(0.90*min(Yt),1.10*max(Yt)), col="green", xlab = "Time");
```



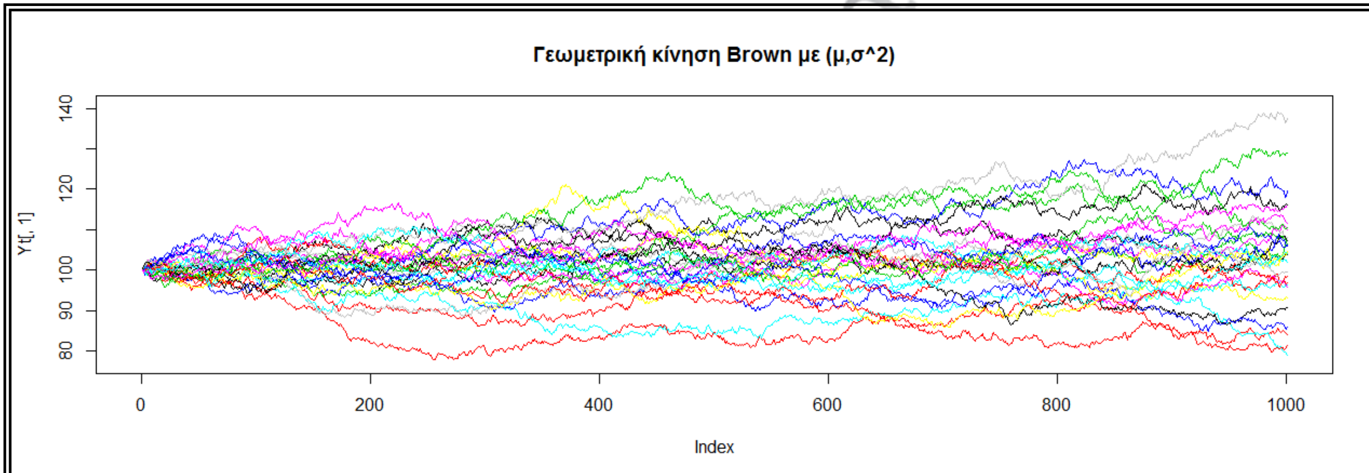
Γράφημα13: Γεωμετρική κίνηση Brown με ένα μονοπάτι.

Επιπλέον είναι χρήσιμο να υλοποιήσουμε και τον αντίστοιχο κώδικα για την προσομοίωση *n* στον αριθμό μονοπάτια γεωμετρικής κίνησης Brown ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

```
# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ GBM(μ,σ^2) ΜΕ Ν-ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ#
GBMPaths<- function(NSteps, NPaths, t, T, mi, sigma, Y0)
             {
dt = (T-t)/NSteps;
Xt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
Yt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
               for (i in 1:NPaths)
```

```
                   {
Xt[,i] <- c(0,cumsum(rnorm(NSteps, mi*dt,sigma*sqrt(dt))));
Yt[,i] <- Y0 * exp(Xt[,i]);
                   }
                  return(Yt)
                   }
NSteps=1000; NPaths=30; t=0.5; T=1; mi=0.05; sigma=0.20; Y0=100;
Yt<- GBMPaths(NSteps, NPaths, t, T, mi, sigma, Y0)

 plot(Yt[,1], t="l", main="Γεωμετρική κίνηση Brown με (μ,σ^2)",
ylim=c(0.99*min(Yt), 1.01*max(Yt)))
 for (i in 2:NPaths) { lines(Yt[,i], col=i) }
```



Γράφημα14: Γεωμετρική κίνηση Brown με *n* μονοπάτια.

Όπως είδαμε παραπάνω η κίνηση Brown μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά μια στοχαστική διαδικασία με τυχαίες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις των τιμών ενός τίτλου. Παρατηρούμε όμως ότι παράγει και αρνητικές τιμές κάτι που δεν είναι ρεαλιστικό όταν επιζητούμε να περιγράψουμε τις τιμές ενός υποκείμενου τίλιου που όπως είναι φυσικό παίρνει μόνο θετικές τιμές. Επίσης αυτή η κίνηση δεν αποδίδει την εξής αρχή των τιμών των υποκείμενων τίτλων ότι η αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση θα πρέπει να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την τιμή. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}=\frac{\Delta S}{S}=\mu\Delta t$$

Επιπλέον επειδή η απόδοση στην τιμή ενός υποκείμενου τίτλου δεν είναι ποτέ σταθερή πόσο μάλλον βέβαιη, θα πρέπει να εισάγουμε στην παραπάνω σχέση τον παράγοντα της αβεβαιότητας που θα είναι $\sigma\Delta W$ όπου ΔW μια προσαύξηση της διαδικασίας Wiener. Έτσι θα έχουμε την εξής σχέση:

$$\Delta S/S=\mu\Delta t+\sigma\Delta W \tag{2.5}$$

Και θεωρώντας $\Delta t\longrightarrow 0$ θα έχουμε από την παραπάνω σχέση

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{2.6}$$

Μέσω του λήμματος Itô αποδεικνύεται ότι η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση ικανοποιείται όταν η $S(t)$ είναι μια γεωμετρική κίνηση Brownμε τάση $\mu - \sigma^2/2$ και συντελεστή διάχυσης σ^2.

2.4.2 ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK & SCHOLES

Από διάφορους ερευνητές στο παρελθόν προτάθηκαν πολλά μοντέλα που αφορούσαν στην τιμολόγηση των options. Μεταξύ αυτών και οι Sprenkle [1961], Ayres [1963], Boness [1964], Samuelson [1965], Baumol, Malkiel and Quandt [1966] and Chen [1970]. Όμως τα μοντέλα τους δεν ήταν ολοκληρωμένα καθώς όλα τους περιείχαν διάφορες αυθαίρετες παραμέτρους (arbitrary parameters).

Το 1973 από τους Fisher Black και Myron Scholes δημιουργήθηκε το μοντέλο που χρησιμοποιείται ευρέως για την τιμολόγηση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και είναι γενικά αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Βασική παραδοχή του μοντέλου είναι ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown. Υποθέτοντας επίσης, ότι το δικαίωμα είναι συνάρτηση μιας πηγής αβεβαιότητας και συγκεκριμένα της τιμής του υποκείμενου τίτλου και κάνοντας χρήση ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης που περιλαμβάνει ένα ομόλογο και το υποκείμενο αγαθό, επιτράπηκε η εξαγωγή ενός αναλυτικού τύπου .

Προκειμένου να εφαρμοστεί η τιμολόγηση των δικαιωμάτων με βάση την τιμή ενός υποκείμενου τίτλου, απαιτείται η υπόθεση «ιδανικών» συνθηκών για την αγορά. Συγκεκριμένα:

- Υπάρχει η δυνατότητα να επενδύσουμε όλα τα κέρδη από τα δικαιώματα που εκδίδουμε.
- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brownμε παραμέτρους μ (drift), σ (volatility).
- Οι συναλλαγές δεν περιλαμβάνουν κόστη και δεν φορολογούνται (fiction less market).
- Παρέχεται η δυνατότητα συναλλαγής οποιασδήποτε ποσότητας του υποκείμενου τίτλου.
- Δεν αποδίδεται μέρισμα κατά την διάρκεια που ισχύει το δικαίωμα.
- Δεν δίνεται η ευκαιρία για κέρδος χωρίς ρίσκο (Arbitrage).
- Οι συναλλαγές είναι διαρκείς.
- Το επιτόκιο των ομολόγων χωρίς κίνδυνο της αγοράς είναι σταθερό, γνωστό και ίσο με rμέχρι την λήξη του δικαιώματος (Risk Free Interest Rate).
- Το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκό (εξάσκηση μόνο την ημέρα λήξης).

Είναι προφανές ότι η πραγματικότητα αποκλίνει κατά πολύ από τις παραπάνω υποθέσεις που τέθηκαν, όμως το γεγονός αυτό δεν μειώνει καθόλου την σημασία της μεθοδολογίας των Black & Scholes στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Δημιουργούμε λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο , όπως αναφέραμε και παραπάνω, από ένα ομόλογο χωρίς κίνδυνο και μια ποσότητα του υποκείμενου τίτλου, έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο αυτό να αποδίδει τελικό κέρδος ίσο με το αυτό του δικαιώματος. Από την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού προκύπτει ένας γενικός τύπος που εκφράζει την αρχική αξία C του δικαιώματος (risk free pricing formula). Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι

$$C = e^{-rT} E_Q(V) \tag{2.7}$$

όπου r είναι το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς, T είναι ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος, V είναι η τελική αξία του δικαιώματος και Q είναι το μέτρο ουδέτερου ρίσκου.

2.4.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO

Στην εκτίμηση της αξίας ενός δικαιώματος με πολλαπλές πηγές αβεβαιότητας ή με περίπλοκα χαρακτηριστικά τα οποία καθιστούν δύσκολη έως αδύνατη την εκτίμηση μέσω του μοντέλου Black & Scholes, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ουδέτερη στον κίνδυνο αποτίμηση δημιουργώντας μέσω προσομοίωσης ένα μεγάλο αριθμό από μονοπάτια τιμών του υποκείμενου τίτλου και υπολογίζοντας την αξία του δικαιώματος για κάθε μονοπάτι εκτιμά την αναμενόμενη τιμή αυτής.

Η προσέγγιση αυτή έχει κάποια ιδιαίτερα στοιχεία που την καθιστούν εφαρμόσιμη σε πολύπλοκα μοντέλα και επιτρέπουν τα ακόλουθα:

- Μοντελοποίηση ενός δικαιώματος υποθέτοντας ότι ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown με drift σταθερό και σταθερή μεταβλητότητα.
- Η πηγή αβεβαιότητας μπορεί να είναι μεταβλητή.
- Επιτρέπεται από το εν λόγω μοντέλο μια σύνθεση στην αβεβαιότητα, δηλαδή για ένα υποκείμενο τίτλο που είναι εκφρασμένο σε συνάλλαγμα εμπεριέχει επιπρόσθετη αβεβαιότητα το επιτόκιο συναλλάγματος. Επιτρέπει λοιπόν την προσομοίωση της αξίας ύστερα από την ξεχωριστή προσομοίωση της τιμής του τίτλου και του συναλλαγματικού επιτοκίου ξεχωριστά.
- Προσομοιώνεται επίσης και η αξία δικαιώματος επί πολλαπλών υποκείμενων τίτλων.
- Δύναται η χρήση της εν λόγω προσέγγισης για κάθε στοχαστική διαδικασία. Επίσης η στοχαστική διαδικασία μπορεί να δοθεί και με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανίζει άλματα.

Ακόμη και στις περιπτώσεις όπου η χρήση άλλων μεθόδων τιμολόγησης των παράγωγων προϊόντων είναι ανέφικτη, είναι δυνατή η χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο (*risk neutral pricing formula*)

$$C(t) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}f(\mathrm{Z}_T) \tag{2.8}$$

όπου $f(\mathrm{Z}_T^t)$είναι η αξία του δικαιώματος στην λήξη του (στο χρόνο *T*), όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο αυτό είναι

$$\mathrm{Z}_T = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-tu}\right\} \tag{2.9}$$

με $u \sim N(0,1)$.

Επομένως χρειάζεται να προσομοιώσουμε M φορές την τυχαία μεταβλητή u, και από αυτήν να υπολογίσουμε σύμφωνα με την σχέση (2.11) M φορές την τυχαία μεταβλητή Z_T. Τέλος υπολογίζουμε τον μέσο των M τιμών τωνZ_T που παρήχθησαν και παίρνουμε την παρούσα του αξία (Monte Carlo estimation).

ΒΗΜΑ 1: Ορίζουμε την συνάρτηση που θα πραγματοποιεί την προσομοίωση Monte Carlo και θα εξαρτάται από x (η τιμή του option την στιγμή t), t (η χρονική στιγμή εκτίμησης), T (διάρκεια του δικαιώματος), r (το επιτόκιο), $sigma$ (η μεταβλητότητα του δικαιώματος), M (πλήθος προσομοιώσεων)

ΒΗΜΑ 2: Παράγουμε M στο πλήθος τυχαίες μεταβλητές u από κανονική κατανομή.

ΒΗΜΑ 3: Δημιουργούμε έναν πίνακα με τις τιμές $Z_T^{t,x} = x\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}u\right\}$.

Καθώς κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου ισχύει $\mu = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$

ΒΗΜΑ 4: Εκτιμούμε την μέση τιμή $\mathrm{E}f\left(Z_T^{t,x}\right)$ και υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος (από τις οριακές συνθήκες που δώσαμε σε παραπάνω ενότητα) σε παρούσα αξία πολλαπλασιάζοντας την με τον όρο $e^{-r(T-t)}$.

```
#ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO SIMULATION#
MCPrice<- function(SO ,t ,T ,r ,sigma ,M ,K)
            {
             u <- rnorm(M);
             Y <- SO * exp((r - 0.5 * sigma^2) * (T - t) + sigma *sqrt(T - t) * u);
             return(exp(-r*(T - t))*mean(pmax(Y-K,0)))
            }
SO=100; K=105; r=0.05; t=0.1; T=2; sigma=0.1; M=1000000;
CMC<- MCPrice(SO ,t ,T ,r ,sigma ,M ,K)
CMC
[1] 7.914475
```

2.4.4 ΕΥΡΩΠΑΪΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Στην συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο των Black & Scholes για ένα δικαίωμα αγοράς. Η ανάλυση είναι όμοια και για ένα δικαίωμα πώλησης.

Η δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K μέσω του τύπου των Black & Scholes δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C(S_t, t) = S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2) \qquad (2.10)$$

Όπου

- Φ: η αθροιστική κατανομή της τυπικής κατανομής
- $(T-t)$: η διάρκεια μέχρι την λήξη του δικαιώματος
- S_t : η spot τιμή του υποκείμενου τίτλου
- K : η τιμή εξάσκησης
- r: ετήσιο risk free rate
- σ : η μεταβλητότητα των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου
- $d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T-t}$
- $d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς γίνεται άμεσα ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε $d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ και $d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T-t}$.

ΒΗΜΑ 2: Υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος από την συνάρτηση

$$C(S_t,t) = S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2)$$

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς με $K = 100$, $r = 0.05$, $t = 0.1$, $T = 2$, $sigma = 0.1$ και $S0 = 100$.

```
#ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK & SCHOLES
call.price<- function(S0, t, T, r, sigma,K)
      {
       d1<- (log(S0/K) + (r + 0.5 * sigma^2) * (T - t))/(sigma * sqrt(T - t))
       d2<- d1 - sigma * sqrt(T - t)
       S0 * pnorm(d1) - K * exp(-r * (T - t)) * pnorm(d2)
      }
S0 <- 100; K <- 105; r <- 0.05; t<-0.1; T <- 2; sigma <- 0.1
C <- call.price(S0, t, T, r,sigma, K)
C
[1] 7.927004
```

Αντίστοιχα η δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης K δίνεται από την παρακάτω σχέση (put call parity):

$$P(S_t, t) = C(S_t, t) + e^{-r(T-t)}K - S_t, \tag{2.11}$$

οπότε η εύρεση της δίκαιης τιμής ενός δικαιώματος πώλησης προκύπτει άμεσα από την δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος αγοράς και θα έχουμε τον παρακάτω κώδικα.

```
put.price<- call.price(SO, t, T, r, sigma, K)+exp(-r * (T - t))* K - SO;
PBS<-put.price
PBS
[1] 3.411162
```

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε μέσω της μεθόδου Monte Carloπου αναφέραμε παραπάνω τις τιμές ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης με τα ίδια χαρακτηριστικά και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες τιμές μέσω του τύπου των Black & Scholes που έχουμε υπολογίσει.

```
#MONTE CARLO ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ#
MCPrice<- function(SO ,t ,T ,r ,sigma ,M ,K)
            {
             u <- rnorm(M);
             Y <- SO * exp((r - 0.5 * sigma^2) * (T - t) + sigma *sqrt(T - t) * u);
             return(exp(-r*(T - t))*mean(pmax(Y-K,0)))
            }

#ΤΥΠΟΣ BLACK & SCHOLES#
call.price<- function(S0, t, T, r, sigma,K)
      {
       d1<- (log(S0/K) + (r + 0.5 * sigma^2) * (T - t))/(sigma * sqrt(T - t))
       d2<- d1 - sigma * sqrt(T - t)
S0 * pnorm(d1) - K * exp(-r * (T - t)) * pnorm(d2)
}

    #ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΙΜΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΕΝΟΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΕΝΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ#
S0 <- 50; K <- 58 ; r <- 0.05 ; t<-0;T <- 1 ; sigma <- 0.25
#ΜΕ 1000 ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ
set.seed(123) #ΔΕΣΜΕΥΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΥΣ ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ
M <- 1000
CMC<- MCPrice(S0 ,t ,T ,r ,sigma ,M ,K)
CMC
[1] 3.099342
C <- call.price(S0, t, T, r,sigma, K)
C
[1] 3.043108
PMC<- CMC+ exp(-r * (T - t))* K- S0;
P
```

```
[1] 8.270649
P<- C+ exp(-r * (T - t))* K- S0;
P
[1] 8.214414
#ΜΕ 1e+06 ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ
set.seed(123)
M <- 1e+06
CMC<- MCPrice(S0 ,t ,T ,r ,sigma ,M ,K)
CMC
[1] 3.039979
C <- call.price(S0, t, T, r, sigma, K)
C
[1] 3.043108
PMC <- CMC + exp(-r * (T - t))* K - S0;
PMC
[1] 8.211285
P <- C + exp(-r * (T - t))* K - S0;
P
[1] 8.214414
```

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όσο περισσότερες φορές εκτελέσουμε την προσομοίωση τόσο πλησιάζουμε στην τιμή που έχουμε υπολογίσει με τον ακριβή τύπο των Black & Scholes που στην εν λόγω περίπτωση είναι διαθέσιμος.

2.4.5 ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Μια από τις βασικότερες κατηγορίες παραγώγων όπως αναφέρθηκε επιγραμματικά στην ενότητα (2.3.2) είναι τα Εξωτικά Δικαιώματα Προαίρεσης γνωστά ως Exotic Options. Στην συνέχεια θα αναλύσουμε πιο διεξοδικά τις παρακάτω κατηγορίες αυτών των δικαιωμάτων.

- **ASIAN**
- **BARRIER**
- **LOOKBACK**

Α) ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ (ASIAN OPTIONS)

Η βασική διαφορά στην τιμολόγηση αυτών των δικαιωμάτων είναι ο υπολογισμός του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου των τιμών του υποκείμενου τίτλου για την περίοδο $[0,T]$. Θα δώσουμε παρακάτω τις τιμές αυτών των μέσων G_Tκαι A_T:

$$G_T = \lim_{n\to\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right]^{\frac{1}{n}} = \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt\right] \quad (2.12)$$

$$A_T = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt \quad (2.13)$$

Ο υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος ασιατικού τύπου με βάση τους παρακάτω τύπους καθίσταται ιδιαίτερα εύκολος καθώς εξαρτάται είτε από τον γεωμετρικό μέσο είτε από τον αριθμητικό μέσο των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επίσης υπάρχουν δυο ειδών παράγωγα Ασιατικού τύπου, για παράδειγμα ενός δικαιώματος αγοράς με βάση τον αριθμητικό μέσο, που είναι τα παρακάτω:

1. Floating strike ASIAN call Payoff $C_{FL} = \max(S_T - A_T, 0)$.
2. Fixed strike ASIAN call Payoff $C_{FX} = \max(A_T - K, 0)$.

Στην πρώτη περίπτωση η τιμή εξάσκησης είναι κυμαινόμενη και εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου για κάθε στιγμή μέχρι την χρονική λήξη του δικαιώματος, ενώ στην δεύτερη είναι σταθερή και ίση με K. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια διαδικασία μέσω της οποίας θα έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης Ασιατικού τύπου, για την πρώτη αλλά και για την δεύτερη περίπτωση που έχουμε αναφέρει. Αυτό θα γίνει υπολογίζοντας και τους δύο μέσους για κάθε μονοπάτι τιμών ενός υποκείμενου τίτλου που θα παράγουμε και θα ακολουθούν την γεωμετρική κίνηση Brown.

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα βήματα που θα πραγματοποιούμε για να υπολογίσουμε την δίκαιη τιμή του δικαιώματος για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Floating strike ASIAN call Payoff $C_{FL} = \max(S_T - A_T, 0)$.
2. Fixed strike ASIAN call Payoff $C_{FX} = \max(A_T - K, 0)$.
3. Floating strike ASIAN call Payoff $C_{GFL} = \max(S_T - G_T, 0)$.
4. Fixed strike ASIAN call Payoff $C_{GFX} = \max(G_T - K, 0)$.
5. Floating strike ASIAN put Payoff $P_{FL} = \max(A_T - S_T, 0)$.
6. Fixed strike ASIAN put Payoff $P_{FX} = \max(K - A_T, 0)$.
7. Floating strike ASIAN put Payoff $P_{GFL} = \max(G_T - S_T, 0)$.
8. Fixed strike ASIAN put Payoff $P_{GFX} = \max(K - G_T, 0)$.

ΒΗΜΑ1: Υπολογίζουμε $NPaths$ το πλήθος μονοπάτια για $NSteps$ τιμές ενός υποκείμενου τίτλου με αρχική τιμή S_0.

ΒΗΜΑ 2: Για κάθε $j = 1,0,\dots,NPaths$ θέτουμε

mean $\mathrm{A_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$ και $\mathrm{meanG_T} = \left[\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right]^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log S(t_i)\right)$.

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε τις αξίες των παραπάνω δικαιωμάτων με βάση τις οριακές συνθήκες που έχουμε δώσει παραπάνω για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με $t = 0.5,\ T = 1,\ r = 0.05,\ sigma = 0.20,\ S0 = 100,\ k = 105$.

```
#ΠΑΡΑΓΩΓΗ NSteps ΤΙΜΩΝ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ ΓΙΑ NPaths ΑΡΙΘΜΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ#
GBMPaths<- function(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
           {
            dti = (T-t)/NSteps;
            mi <- r-0.5*sigma^2;
            Xt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
            Yt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
```

```
            for (i in 1:NPaths)
                 {
                  Xt[,i] <- c(0,cumsum(rnorm(NSteps, mi*dti,sigma*sqrt(dti))));
                  Yt[,i] <- Y0 * exp(Xt[,i]);
                 }
                return(Yt)
           }
NSteps=1000; NPaths=30; t=0.5; T=1; r=0.05; sigma=0.20; Y0=100; k=105;
set.seed(123)
St <- GBMPaths(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
MeanAt<- NULL
MeanCt<- NULL
        for (i in 1:NPaths)
            {
             MeanAt[i] <- mean(St[,i])
             MeanCt[i] <- exp(mean(log(St[,i])))
            }
#Arithmetic Rate For CALL OPTION#
AsianFixedCall<- mean(pmax(MeanAt-k,0))
AsianFixedCall
[1] 1.203665
AsianFloatingCall<- mean(pmax(St[NSteps+1]-MeanAt,0))
AsianFloatingCall
[1] 9.514583
#Geometric Rate For CALL OPTION#
AsianGeoFixedCall<- mean(pmax(MeanCt-k,0))
AsianGeoFixedCall
[1] 1.160861
AsianGeoFloatingCall<- mean(pmax(St[NSteps+1]-MeanCt,0))
AsianGeoFloatingCall
[1] 9.615638

#Arithmetic Rate For PUT OPTION#
AsianFixedPut<- mean(pmax(0,k-MeanAt))
AsianFixedPut
[1] 6.341739
AsianFloatingPut<- mean(pmax(MeanAt-St[NSteps+1],0))
AsianFloatingPut
[1] 0.2730949
#Geometric Rate For PUT OPTION#
AsianGeoFixedPut<- mean(pmax(k-MeanCt,0))
AsianGeoFixedPut
[1] 6.427117
AsianGeoFloatingPut<- mean(pmax(MeanCt-St[NSteps+1],0))
AsianGeoFloatingPut
[1] 0.2459675
```

Η χρήση αυτών των δικαιωμάτων έγινε ευρέως γνωστή έχοντας δύο βασικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα αντίστοιχα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου:(i)κοστίζουν λιγότερο και (ii) είναι λιγότερο ευαίσθητα στις αλλαγές των τιμών του υποκείμενου τίτλου με τον οποίο είναι συνδεδεμένα.

Β) ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ BARRIER

Στα συγκεκριμένα δικαιώματα η κεντρική ιδέα είναι ότι υπάρχει ένα όριο V στην τιμή του υποκείμενου τίτλου που είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα, βάση του οποίου ορίζεται ανά περίπτωση η οριακή συνθήκη των πληρωμών του δικαιώματος και κατ΄ επέκταση η αξία του. Σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες: τα down και τα up Barrier, και δύο υποκατηγορίες τα in και τα out. Πιο συγκεκριμένα, για ένα δικαίωμα αγοράς και για ένα δικαίωμα πώλησης με όριο (Barrier) V, αρχική τιμή $S(0)$ και $\min_{t\leq x\leq T} S(x)$ η ελάχιστη τιμή του υποκείμενου τίτλου από τον χρόνο t που εξετάζεται το δικαίωμα μέχρι την λήξη (T) θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις ανά κατηγορία με τις αντίστοιχες πληρωμές.

1) Στην περίπτωση που $V < S(0)$ έχουμε τα **down and in και down and out** δικαιώματα με $C_{di}(t)$, $C_{do}(t)$ και $P_{di}(t)$, $P_{do}(t)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους για down and in, down and out δικαιώματα αγοράς και down and in, down and out δικαιώματα πώλησης, με τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $\min_{t\leq x\leq T} S(x) \leq V$ τότε $C_{di}(t) = \max(S(T) - K, 0)$ και $P_{di}(t) = \max(K - S(T), 0)$
2) Αν $\min_{t\leq x\leq T} S(x) \geq V$ τότε $C_{do}(t) = \max(S(T) - K, 0)$ και $P_{do}(t) = \max(K - S(T), 0)$

για τις οποίες θα ισχύει

$$C_{di}(T) + C_{do}(T) = C(T)$$
$$P_{di}(T) + P_{do}(T) = P(T)$$

2) Στην περίπτωση που $V > S(0)$ έχουμε τα **up and in και up and out** δικαιώματα με $C_{ui}(t)$, $C_{uo}(t)$ και $P_{ui}(t)$, $P_{uo}(t)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους για up and in, up and out δικαιωμάτων αγοράς και up and in, up and out δικαιωμάτων πώλησης, με τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $\min_{t\leq x\leq T} S(x) \geq V$ τότε $C_{ui}(t) = \max(S(T) - K, 0)$ και $P_{ui}(t) = \max(K - S(T), 0)$
2) Αν $\min_{t\leq x\leq T} S(x) \leq V$ τότε $C_{uo}(t) = \max(S(T) - K, 0)$ και $P_{uo}(t) = \max(K - S(T), 0)$

για τις οποίες θα ισχύει

$$C_{ui}(T) + C_{uo}(T) = C(T)$$
$$P_{ui}(T) + P_{uo}(T) = P(T)$$

Ο κώδικας που θα δοθεί παρακάτω στηρίζεται στην Monte Carlo προσομοίωση και εξετάζει κάθε περίπτωση για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης.

ΒΗΜΑ1: Υπολογίζουμε $NPaths$ στον αριθμό μονοπάτια για $NSteps$ τιμές ενός υποκείμενου τίτλου με αρχική τιμή Y_0.

ΒΗΜΑ 2: Για κάθε $i = 1,0,\dots,NPaths$ υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή του τίτλου ($\min S_t$).

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε τις αξίες των δικαιωμάτων υπό τους ελέγχους $S_0 > V$ και $\min S_t \leq V$ και με βάση τις οριακές συνθήκες που έχουμε δώσει παραπάνω για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με $t = 0.5$, $T = 1$, $r = 0.05$, $sigma = 0.20$, $Y_0 = 100$, $V = 99$,$K_c = 95$ (τιμή εξάσκησης δικαιώματος αγοράς),$K_p = 110$ (τιμή εξάσκησης δικαιώματος πώλησης), προεξοφλώντας με τον παράγοντα $e^{-r(T-t)}$.

```
#ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ BARRIER ΤΥΠΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ #
GBMPaths<- function(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
           {
            dt = (T-t)/NSteps;
            mi <- r-0.5*sigma^2;
            Xt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
            Yt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
            for (i in 1:NPaths)
           {
            Xt[,i] <- c(0,cumsum(rnorm(NSteps, mi*dt,sigma*sqrt(dt))));
            Yt[,i] <- Y0 * exp(Xt[,i]);
           }
           return(Yt)
          }
NSteps=1000; NPaths=30; t=0.5; T=1; r=0.05; sigma=0.20; Y0=100; k=105;
set.seed(123)
St<- GBMPaths(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
MinSt<- NULL ; Price<-NULL; V=99; Kc=95; Kp=110;
for (i in 1:(NPaths))
{
MinSt[i] <- min(St[,i])
}
#AN S0>V TOTE EXOYME TA ΠΑΡΑΚΑΤΩ OPTIONS#
#DOWN AND IN BARRIER CALL OPTION#
for (i in 1:(NPaths))
{
 if (MinSt[i]<= V & Y0>V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,St[NSteps+1]-Kc))
 else Price[i]<-0
}
cdiBarrierPrice<-mean(Price)
cdiBarrierPrice
[1] 12.83819
 #DOWN AND IN BARRIER PUT OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]<= V & Y0>V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,Kp-St[NSteps+1]))
       else Price[i]<-0
```

```
  }
pdiBarrierPrice<-mean(Price)
pdiBarrierPrice
[1] 0.8161516
 #DOWN AND OUT BARRIER CALL OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]> V & Y0>V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,St[NSteps+1]-Kc))
       else Price[i]<-0
  }
cdoBarrierPrice<-mean(Price)
cdoBarrierPrice
[1] 0.9170134
 #DOWN AND OUT BARRIER PUT OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]> V & Y0>V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,Kp-St[NSteps+1]))
      else Price[i]<-0
  }
pdoBarrierPrice<-mean(Price)
pdoBarrierPrice
[1] 0.05829654
 #AN S0<V TOTE EXOYME TA ΠΑΡΑΚΑΤΩ OPTIONS#
 #ΘΕΤΟΥΜΕ S0=Y0=98 ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΤΙΜΕΣ ΣΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΘΑ ΕΧΟΥΜΕ
ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ#
Y0=98
St <- GBMPaths(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
#UP AND IN BARRIER CALL OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]>= V & Y0<V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,St[NSteps+1]-Kc))
     else Price[i]<-0
  }
cuiBarrierPrice<-mean(Price)
cuiBarrierPrice
[1] 0.2192442
 #UP AND IN BARRIER PUT OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]>= V & Y0<V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,Kp-St[NSteps+1]))
     else Price[i]<-0
  }
puiBarrierPrice<-mean(Price)
puiBarrierPrice
[1] 0.7560658
 #UP AND OUT BARRIER CALL OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
```

```
  {
   if (MinSt[i]< V & Y0<V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,St[NSteps+1]-Kc))
       else Price[i]<-0
  }
cuoBarrierPrice<-mean(Price)
cuoBarrierPrice
[1] 3.069418
 #UP AND OUT BARRIER PUT OPTION#
 for (i in 1:(NPaths))
  {
   if (MinSt[i]< V & Y0<V)(Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,Kp-St[NSteps+1]))
       else Price[i]<-0
  }
puoBarrierPrice<-mean(Price)
puoBarrierPrice
[1] 10.58492
```

Γ) ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ LOOKBACK

Στην περίπτωση των Lookback δικαιωμάτων μπορούμε να αναφερθούμε σε δύο βασικές κατηγορίες, σε εκείνα τα δικαιώματα που οι πληρωμές τους εξαρτώνται από μια σταθερή τιμή εξάσκησης (Fixed Strike Price), και σε εκείνα που η τιμή εξάσκησης είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη του δικαιώματος (Floating Strike Price). Επιπλέον για τον υπολογισμό των πληρωμών τέτοιων δικαιωμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του υποκείμενου τίτλου για το χρονικό διάστημα από την στιγμή που εξετάζουμε το δικαίωμα μέχρι την λήξη του ανάλογα με το αν είναι δικαίωμα αγοράς ή δικαίωμα πώλησης. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν οι εξής δύο βασικές περιπτώσεις για τα δικαιώματα Lookback:

Στην περίπτωση που έχουμε σταθερή τιμή εξάσκησης προκύπτουν οι εξής πληρωμές για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης αντίστοιχα:

- $C_{\text{fxlookback}}(t) = \max(\max_{t\leq x\leq T} S(x) - K, 0)$
- $P_{\text{fxlookback}}(t) = \max(K - \min_{t\leq x\leq T} S(x) \ ,0)$

Ενώ στην περίπτωση που έχουμε κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης προκύπτουν οι εξής πληρωμές για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης αντίστοιχα:

- $C_{\text{fllookback}}(t) = \max(S(T) - \min_{t\leq x\leq T} S(x), 0)$
- $\mathrm{P}_{\text{fllookback}}(t) = \max(\max_{t\leq x\leq T} S(x) - S(T),0)$

Ο κώδικας που θα δοθεί παρακάτω στηρίζεται στην Monte Carlo προσομοίωση και εξετάζει κάθε περίπτωση για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με κοινή τιμή εξάσκησης K επί τον ίδιο υποκείμενο τίτλο.

ΒΗΜΑ1: Υπολογίζουμε $NPaths$ στον αριθμό μονοπάτια για $NSteps$ τιμές ενός υποκείμενου τίτλου με αρχική τιμή Y_0.

ΒΗΜΑ 2: Για κάθε $i = 1,0, \ldots, NPaths$ υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή ($\min S_t$) και την μέγιστη τιμή ($\max S_t$) του τίτλου.

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε τις αξίες των παραπάνω δικαιωμάτων με βάση τις οριακές συνθήκες που έχουμε δώσει παραπάνω για ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με $t = 0.5$, $T = 1$, $r = 0.05$, $sigma = 0.20$, $Y_0 = 100$, $V = 99$, $K = 105$ (κοινή τιμή εξάσκησης δικαιωμάτων), προεξοφλώντας με τον παράγοντα $e^{-r(T-t)}$.

```
#ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ LOOKBACK ΤΥΠΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ#
GBMPaths<- function(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
           {
            dt = (T-t)/NSteps;
            mi <- r-0.5*sigma^2;
            Xt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
            Yt<- matrix(0, ncol=NPaths, nrow=NSteps+1)
            for (i in 1:NPaths)
                {
                 Xt[,i] <- c(0,cumsum(rnorm(NSteps, mi*dt,sigma*sqrt(dt))));
                 Yt[,i] <- Y0 * exp(Xt[,i]);
                 }
            return(Yt)
           }
NSteps=1000; NPaths=30; t=0.5; T=1; r=0.05; sigma=0.20; Y0=100; k=105;
set.seed(123)
St<- GBMPaths(NSteps, NPaths, t, T, r, sigma, Y0)
MinSt<- NULL ; MaxSt<-NULL; Price<-NULL;
for (i in 1:(NPaths))
    {
MinSt[i] <- min(St[,i])
    }
for (i in 1:(NPaths))
    {
     MaxSt[i] <- max(St[,i])
    }
#FLOATING STRIKE LOOKBACK CALL OPTION#
for (i in 1:(NPaths))
    {
    Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,St[NSteps+1]-MinSt[i])
    }
cflookbackPrice<-mean(Price)
cflookbackPrice
[1] 18.79961
```

```
#FLOATING STRIKE LOOKBACK PUT OPTION#
for (i in 1:(NPaths))
    {
    Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,MaxSt[i]-St[NSteps+1])
    }
pflookbackPrice<-mean(Price)
pflookbackPrice
[1] 4.190718
#FIXED STRIKE LOOKBACK CALL OPTION#
for (i in 1:(NPaths))
    {
    Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,MaxSt[i]-k)
    }
pfxlookbackPrice<-mean(Price)
pfxlookbackPrice
[1] 6.413431
#FIXED STRIKE LOOKBACK PUT OPTION#
for (i in 1:(NPaths))
    {
    Price[i]<-exp(-r*(T-t))*max(0,k-MinSt[i])
    }
pfxlookbackPrice<-mean(Price)
pfxlookbackPrice
[1] 14.79751
```

2.4.6. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΕΠΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΤΙΤΛΩΝ (MULTI ASSET)

Μια επιπλέον κατηγορία των δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα είναι τα multi – asset δικαιώματα. Είναι δικαιώματα προαίρεσης με παραπάνω από έναν υποκείμενο τίτλο. Στην εν λόγω ενότητα θα αναλύσουμε τέτοιου είδους δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου με σκοπό την τιμολόγηση τους κάτω από το μέτρο του ουδέτερου κινδύνου.

Σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται επιπλέον οι εξής περιπτώσεις δικαιωμάτων ανάλογα με την συνθήκη πληρωμών τους.

- **Exchange options**: Αναφερόμαστε σε δικαιώματα που μας δίνουν την δυνατότητα να ανταλλάξουμε έναν υποκείμενο τίτλο με έναν άλλον που μπορεί να είναι και διαφορετικού νομίσματος. Αν η διαφορά είναι θετική το εξασκούμε το δικαίωμα και έχουμε κέρδος, διαφορετικά η ζημιά μας είναι το κόστος του δικαιώματος. Η συνάρτηση κέρδους στην περίπτωση αυτή είναι

  $$\max(S_1 - cS_2, 0)$$

  όπου cμια σταθερά ισοτιμίας για τίτλους διαφορετικών νομισμάτων.
- **Quanto options**: Αναφερόμαστε σε δικαιώματα που συσχετίζουν δύο τίτλους, όπου ο ένας από τους δύο μπορεί να είναι το επιτόκιο ανταλλαγής νομισμάτων. Στην

περίπτωση αυτή κάποιες από τις συναρτήσεις κέρδους μπορεί να είναι για παράδειγμα οι παρακάτω:

$$S_1 \max(S_2 - K, 0)$$

$$\max(S_1 S_2 - K, 0)$$

- **Basket options**: Αναφερόμαστε σε δικαιώματα επί nτο πλήθος υποκείμενων τίτλων. Η συνάρτηση κέρδους σε αυτήν την περίπτωση εξαρτάται από το άθροισμα των τιμών όλων των τίτλων και είναι η παρακάτω:

$$\max(\sum_{i=1}^{n}(a_i S_i) - K, 0)$$

- **Extreme options**: Αναφερόμαστε και πάλι σε δικαιώματα επί nτο πλήθος υποκείμενων τίτλων. Σε αυτή όμως την περίπτωση η συνάρτηση κέρδους εξαρτάται μόνο από εκείνον τον τίτλο που έχει την μέγιστη τιμή στην λήξη του δικαιώματος.

$$\max(\max(S_1, \dots, S_n) - K, 0)$$

2.4.6.1. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ MULTI ASSET ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Στην τιμολόγηση κάθε δικαιώματος μέσω προσομοίωσης το πιο σημαντικό μέρος είναι η προσομοίωση των τιμών των υποκείμενων προϊόντων. Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι στην προσομοίωση των τιμών ενός τίτλου σημαντικό ρόλο είχε η διασπορά που παρουσιάζεται στις τιμές του, ανεξάρτητα από την μέθοδο τιμολόγησης που χρησιμοποιούσαμε. Για αυτό λοιπόν σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε με ποιο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε την μεταβλητότητα δύο τίτλων που , συσχετίζονται μεταξύ τους. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι ο μετασχηματισμός Cholesky ο οποίος θα αποδειχτεί για δύο τ.μ από κανονική κατανομή όμως επεκτείνεται για m στον αριθμό τ.μ.

Μετασχηματισμός Cholesky: Έστω

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Δηλαδή Z_1, Z_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ από N(0,1).Θέτουμε

$$X_1 = Z_1 \text{και} X_2 = Z_2\sqrt{1-\rho^2} + \rho Z_1.$$

Τότε το τυχαίο διάνυσμα

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Η απόδειξη είναι άμεση. Αρκεί να υπολογίσουμε τις παραμέτρους των τ.μ. X_1 και X_2 καθώς ακολουθούν δισδιάστατη κανονική κατανομή ως γραμμικός μετασχηματισμός ανεξαρτήτων τ.μ που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Θα είναι

$$E(X_1) = E(Z_1) = 0, E(X_2) = E(Z_2)\sqrt{1-\rho^2} + \rho E(Z_1) = 0 + 0$$

και

$$Var(X_1) = Var(Z_1) = 1$$
$$Var(X_2) = Var\left(Z_2\sqrt{1-\rho^2} + \rho Z_1\right) = (1-\rho^2)Var(Z_2) + \rho^2 Var(Z_1) = 1$$
$$Cov(X_1, X_2) = Cov\left(Z_1, Z_2\sqrt{1-\rho^2} + \rho Z_1\right) = Cov(Z_1, Z_2)\sqrt{1-\rho^2} + Cov(Z_1, Z_1)\rho = \rho$$

Οπότε θα έχουμε ότι οι τιμές δύο τίτλων που συσχετίζονται την χρονική στιγμή T θα είναι:

$$S_1(T) = S_1(t)e^{(r-\sigma_1{}^2/2)(T-t)+\sigma_1 X_1\sqrt{T-t}}$$
$$S_2(T) = S_2(t)e^{(r-\sigma_2{}^2/2)(T-t)+\sigma_2 X_2\sqrt{T-t}}$$

Όπου το $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$ παράγεται από τα Z_1, Z_2όπως περιγράφεται παραπάνω

Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα μπορούμε να παράγουμε τιμές από δύο τίτλους με τα εξής χαρακτηριστικά:

$S_1(t) = 10$,$S_2(t) = 10$, $t = 0.5$, $T = 1$, $sigma1 = 0.3$, $sigma2 = 0.4$, $\rho = 0.2$, $r = 0.05$

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε N=10000 στον αριθμό $Z_1 \sim N(0,1)$ και $Z_2 \sim N(0,1)$.

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $X_1 = Z_1$ και $X_2 = Z_2\sqrt{1-\rho^2} + \rho Z_1$

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε $S_i(T) = S_i(t)e^{(r-sigma\ _i{}^2/2)(T-t)+sigma\ _i X_i\sqrt{(T-t)}}$

```
S0<-c(10,10); r<-0.5; sigma1<-0.3; sigma2<-0.4; ρ<-0.2; t<-0.5; T<-1; N<-10000;
set.seed(123)
z1<-rnorm(N,0,1)
z2<-rnorm(N,0,1)
x1<-z1
x2<-ρ*z1+z2*sqrt(1-ρ^2)
s1<-S0[1]*exp((r-sigma1^2/2)*(T-t)+sigma1*sqrt(T-t)*x1)
s2<-S0[2]*exp((r-sigma2^2/2)*(T-t)+sigma2*sqrt(T-t)*x2)
```

Σύμφωνα με τις συναρτήσεις κέρδους που δώσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναφέραμε για τα multi – asset δικαιώματα.

```
#EXCHANGE OPTIONS#
c<-0.3
Vexchange<-exp(-r*(T-t))*mean(pmax(s1-c*s2,0))
```

```
Vexchange
[1] 7.001661
#QUANTO OPTIONS#
k<-11; c<-1.3;
Vquanto<-exp(-r*(T-t))*mean(s1*pmax(s2-k,0))
Vquanto
[1] 25.52334
#BASKET OPTIONS#
a1<-1; a2<-1;
Vbasket<-exp(-r*(T-t))*mean(pmax(a1*s1+a2*s2,0))
Vbasket
[1] 19.97053
#EXTREME OPTIONS#
k<-11;
Vextreme<-exp(-r*(T-t))*mean(pmax(max(s1,s2)-k,0))
Vextreme
[1] 21.71294
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

3.1 ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΙ ΚΙΝΔΥΝΟΙ

3.1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Λόγω της γενικότερης αστάθειας των χρηματοοικονομικών αγορών και της συνεχούς αύξησής της ήταν αναγκαία η αποτελεσματικότερη διαχείριση των κινδύνων, με συνέπεια την ανάγκη για καινοτομίες όπως τα συστήματα διαχείρισης κινδύνου. Έτσι λοιπόν, η δημιουργία νέων χρηματοοικονομικών εργαλείων καθίσταται απολύτως απαραίτητη για την αποτελεσματικότερη διαχείριση κινδύνων, όπως του συναλλάγματος, των επιτοκίων αλλά και της αγοράς. Φυσικά, η παραπάνω εξέλιξη επήλθε σταδιακά με το πέρασμα του χρόνου και παράλληλα με τις συνεχείς αυξανόμενες ανάγκες διαχείρισης κινδύνων παλαιών και νέων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Θα αναφέρουμε επιγραμματικά μερικά από τα σημαντικότερα αυτά στάδια που αποτέλεσαν τους βασικότερους σταθμούς στην εξέλιξη της διαχείρισης κινδύνου (Καραγκούνης Ν., 2003).

- Bond Duration (1938)
- Markowitz mean-variance framework (1952)
- Sharpest capital asset pricing model (1963)
- Multiple factor models (1966)
- Black-Scholes option pricing model (1973)
- Binomial option model (1979)
- RAROC risk-adjusted return (1983)
- Limits on exposure by duration bucket (1986)
- Risk-weighted assets for banks limits on ‘Greeks’ (1988)
- Stress Testing (1992)
- Value at Risk (1993)
- Risk Metrics (1994)
- Credit Metrics (1997)
- Integration of credit and market risk (1998)
- Enterprise wide risk management (2000)

Στην ιστορία αυτής της εξέλιξης δεν υπήρχαν μόνο σταθμοί που προχώρησαν ένα βήμα παρακάτω την διαχείριση κινδύνου αλλά και σταθμοί που κατέστησαν με αρκετά ζημιογόνο τρόπο την ανάγκη για εξέλιξη. Μερικούς από τους οποίους θα αναφέρουμε επιγραμματικά παρακάτω.

Το 1994, παρουσιάστηκαν απώλειες της τάξεως των 1,6 δις δολαρίων ύστερα από την μη αναμενόμενη συνεχή αύξηση των επιτοκίων από την ομοσπονδιακή τράπεζα σε ένα χαρτοφυλακίου του οποίου διαχειριστής ήταν ο Bob Cirton. Ενός χαρτοφυλακίου που η ζημία θα ήταν πολύ μικρότερη εάν ο ίδιος δεν είχε επιτύχει αρχικά ιδιαίτερα υψηλή μόχλευση με την συγκέντρωση τόσο των επενδύσεων του δήμου Orange Country 7,5 δις δολαρίων και ύστερα από την επιτυχή επένδυση τους την προσαύξηση στο εν λόγω χαρτοφυλάκιο την περιουσία και άλλων δήμων. Στο πρόβλημα της μόχλευσης προστέθηκε και η στρατηγική που επιλέχθηκε με επενδύσεις σε δομημένα ομόλογα που ήταν επιλεγμένα έτσι ώστε να επιφέρουν κέρδος μόνο στην περίπτωση της συνεχόμενης καθόδου των επιτοκίων το οποίο και έγινε, όμως δεν κράτησε αρκετά σε σχέση με την διάρκεια των ομολόγων.

Το 1993, μια αμερικάνικη θυγατρική της εταιρείας Metallgesellshaft αγόρασε προθεσμιακά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης πάνω στην τιμή του πετρελαίου για μεγάλη διάρκεια προσφέροντας έτσι σταθερή τιμή στους πελάτες της για μεγάλες χρονικές περιόδους. Όμως η ποσότητα αυτών των συμβολαίων ήταν τέτοια που μπορούσε να προμηθεύσει με 180 εκ. βαρέλια πετρέλαιο για περίοδο 10 χρόνων. Έτσι ο μόνος τρόπος αντιμετώπισης πιθανής αύξησης της τιμής του πετρελαίου ήταν η αντίστοιχη ύπαρξη μελλοντικών συμβολαίων μεγάλης διάρκειας με τους προμηθευτές της για να ανταπεξέλθει στις ανάγκες των πελατών της. Όμως δεν υπήρχαν τόσα συμβόλαια μεγάλης διάρκειας οπότε υποχρεώθηκε να αγοράσει μικρότερης διάρκειας χωρίς να μπορεί να αποφύγει τις επιπτώσεις από την μείωση στην τιμή του πετρελαίου. Η ζημιά ήταν της τάξεως του 1,3 δις δολαρίων. Η μη ύπαρξη κεφαλαίου κάλυψης αυτής της ζημιάς έκανε την μετοχή της εταιρείας να χάσει τα 2/3 της αξίας της.

3.1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στην διαχείριση κινδύνου που απορρέει από την σύνθεση και την διαχείριση χαρτοφυλακίων που αποτελούνται από χρηματοοικονομικά προϊόντα και συγκεκριμένα δικαιώματα προαίρεσης όπως αυτά που έχουν αναλυθεί στο 2^{ο} κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

Αναφερόμενοι λοιπόν σε μια ευρύτερη έννοια του κινδύνου μπορούμε να τον ορίσουμε ως την έκθεση στην αβεβαιότητα που πηγάζει από την άγνοια της έκβασης που υπάρχει σε όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Δηλαδή είναι η πιθανότητα που υπάρχει στην εμφάνιση ενός μη επιθυμητού αποτελέσματος σε μια δραστηριότητα. Συγκεκριμένα μπορούμε να ορίσουμε τον κίνδυνο, κυρίως στον οικονομικό τομέα, ως την μεταβλητότητα των μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων που μεταβάλουν την αξία τόσο του ενεργητικού όσο και του παθητικού (σε μερικές περιπτώσεις) μέρους μιας εταιρείας.

Μια ευρύτερη κατηγοριοποίηση των κινδύνων είναι η διάκριση τους σε επιχειρηματικούς και μη. Δηλαδή, ως επιχειρηματικοί αναφέρονται οι κίνδυνοι που αναλαμβάνονται με απώτερο σκοπό την αύξηση της αξίας τόσο μιας εταιρείας όσο και της αξίας ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων. Αντίθετα, υπάρχουν και οι μη επιχειρηματικοί κίνδυνοι που διακρίνονται περαιτέρω σε στρατηγικούς και χρηματοοικονομικούς. Οι πρώτοι αφορούν στην αβεβαιότητα της γενικής οικονομικής κατάστασης και των πολιτικών συνθηκών γενικότερα, με βασικότερο παράδειγμα την συνεχόμενη μείωση των εξόδων για αμυντικούς σκοπούς από χώρες ύστερα από την κατάρρευση της Σοβιετικής ένωσης την δεκαετία του 80 που είχε επίσης ως αποτέλεσμα την σημαντική μείωση των εσόδων πολλών βιομηχανιών. Ενώ οι δεύτεροι που αναφέρονται ως χρηματοοικονομικοί ορίζονται εκείνοι οι κίνδυνοι που η ύπαρξη τους οφείλεται στην μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων των χρηματοοικονομικών συναλλαγών. Παρ' όλ' αυτά η κερδοφορία αλλά και η προστιθέμενη αξία τόσο στην αξία μιας εταιρείας όσο και στην αξία ενός χαρτοφυλακίου ,σε σημαντικό βαθμό, εξαρτάται από την επιτυχή διαχείριση αυτών των κινδύνων.

3.1.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Ειδικότερα στην περίπτωση της διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου η παραπάνω διάκριση αναφέρεται στους συστηματικούς κινδύνους που δεν δύναται να εξαλειφτούν και αφορούν εξωτερικούς παράγοντες όπως οι διεθνείς οικονομικές κρίσεις και στους μη συστηματικούς που η εξάλειψή τους είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης μιας πετυχημένης ή μη διαχείρισης του εν λόγω χαρτοφυλακίου. Στη συνέχεια κρίνεται χρήσιμο να αναφερθούμε επιγραμματικά στα παρακάτω είδη χρηματοοικονομικών κινδύνων οι οποίοι αφορούν γενικότερα στην απόδοση χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων.

- Κίνδυνος αγοράς
- Επιτοκιακός κίνδυνος
- Πιστωτικός κίνδυνος
- Τεχνολογικός και λειτουργικός κίνδυνος
- Συναλλαγματικός κίνδυνος
- Κίνδυνος χώρας
- Κίνδυνος διακανονισμού πληρωμών
- Κίνδυνος ρευστότητας
- Νομικός κίνδυνος
- Κίνδυνος αξιοπιστίας
- Κίνδυνος αφερεγγυότητας

Παρακάτω θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε κάθε κίνδυνο ξεχωριστά σε επίπεδο μιας επιχείρησης και ειδικότερα ενός χρηματοοικονομικού ιδρύματος (τράπεζα) καθώς τόσο στο ενεργητικό όσο και στο παθητικό ενός τέτοιου ιδρύματος μπορεί κανείς να αναγνωρίσει όλα τα είδη συναλλαγών που αναμφισβήτητα εμπεριέχουν όλα τα παραπάνω είδη κινδύνων.

- **Κίνδυνος αγοράς**

Αναφερόμενοι ίσως στον βασικότερο και ίσως στον πιο συχνά εμφανιζόμενο κίνδυνο που είναι ο κίνδυνος αγοράς ο οποίος προέρχεται από την αβεβαιότητα γενικά όλων των παραμέτρων της αγοράς, μπορούμε βασιζόμενοι στην χρηματοοικονομική θεωρία να τον ορίσουμε ως την διασπορά των μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων τίτλων του χαρτοφυλακίου που είναι αποτέλεσμα αιφνίδιων διακυμάνσεων των χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί ότι ο εν λόγω κίνδυνος εμπεριέχεται τόσο στις θετικές όσο και στις αρνητικές αποκλίσεις των αναμενόμενων τιμών των χρηματοοικονομικών μεταβλητών.

- **Επιτοκιακός Κίνδυνος**

Ο επιτοκιακός κίνδυνος προκύπτει από την μη αναμενόμενη μεταβολή των επιτοκίων και είναι δυνατόν να επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό η κερδοφορία ή αντίστοιχα η ζημιά στην αξία του ενεργητικού. Ειδικότερα στην περίπτωση των χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων η εν λόγω επίδραση του επιτοκιακού κινδύνου αναφέρεται στην διαφορά αξίας του ενεργητικού από την αξία του παθητικού μεταφέροντας μέσω παρούσας αξίας όλες τις εισροές και εκροές των παραπάνω στοιχείων. Παράλληλα λοιπόν με μια μεταβολή στα επιτόκια επηρεάζεται και ο παράγοντας του κινδύνου αγοράς καθώς μεταβάλλεται η αξία του ενεργητικού.

- **Πιστωτικός Κίνδυνος**

Ιδίως στην περίπτωση των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, ως πιστωτικός κίνδυνος αναφέρεται ο κίνδυνος που υπάρχει λόγω της μη επαρκούς ανταπόκρισης των υποχρεώσεων, είτε του ιδρύματος προς τους πιστωτές του, είτε των δανειζόμενων προς το εκάστοτε ίδρυμα. Στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου ο εν λόγω κίνδυνος έχει αντίκρισμα στο ασφάλιστρο που είτε καταβάλλεται είτε εισπράττεται ανάλογα με την θέση που επιλέγουμε στην επένδυσή μας.

- **Τεχνολογικός και Λειτουργικός Κίνδυνος**

Ο συγκεκριμένος κίνδυνος βρίσκεται κυρίως στην λειτουργία των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και αναφέρεται στις ζημιές που μπορούν να προκληθούν λόγω μη επαρκούς πρόληψης, στην κακή λειτουργία των συστημάτων, των ανθρώπινων σφαλμάτων, των ενδεχόμενων αποτυχιών στην διαχείριση και των διάφορων εξωγενών παραγόντων όπως σεισμοί, πυρκαγιές κ.λπ. Σε αυτόν τον κίνδυνο εμπεριέχεται και ο κίνδυνος λόγω ανεπάρκειας στην τεχνολογία συστημάτων και καλείται τεχνολογικός.

- **Συναλλαγματικός Κίνδυνος**

Αποτελεί μια ειδική περίπτωση του κινδύνου αγοράς και η ύπαρξη του οφείλεται στις διακυμάνσεις των αξιών των νομισμάτων σε κάθε ανοιχτή θέση σε συνάλλαγμα που έχουμε επιλέξει για το χαρτοφυλάκιο μας.

- **Κίνδυνος Χώρας**

Αναφέρεται στην δυνατότητα ή μη της κάθε χώρας να εξυπηρετήσει τα ήδη υπάρχοντα αλλά και μελλοντικά της χρέη που αναμένει μέσω της δημιουργίας συναλλάγματος. Ο εν λόγω κίνδυνος συνδέεται με τρείς υποκατηγορίες κινδύνων που είναι ο κίνδυνος απαγόρευσης πληρωμών με κυβερνητική παρέμβαση, ο κίνδυνος απαγόρευσης μεταφοράς συναλλάγματος και ο γενικευμένος κίνδυνος.

➢ **Κίνδυνος Διακανονισμού Πληρωμών**

Αναφέρεται στην πιθανότητα αθέτησης της συμφωνίας από τον ένα αντισυμβαλλόμενο, ενώ ο άλλος έχει ήδη εκπληρώσει την χρηματική του πλευρά της συμφωνίας. Φυσικά η ραγδαία εξέλιξη στα χρησιμοποιούμενα συστήματα πληρωμών καθιστά των αναφερόμενο κίνδυνο όλο και λιγότερο σημαντικό σε σημείο πλήρους εξάλειψής του.

➢ **Κίνδυνος Ρευστότητας**

Στην περίπτωση των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ο εν λόγω κίνδυνος βρίσκεται στην μη επαρκή κάλυψη των υποχρεώσεων του ιδρύματος λόγω της μη ύπαρξης αρκετής διαθέσιμης ρευστότητας βραχυπρόθεσμα.

➢ **Νομικός Κίνδυνος**

Τόσο στην περίπτωση των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων όσο και στην διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου, η πλήρης κατανόηση αλλά και η συνεχής ενημέρωση του εκάστοτε νομικού πλαισίου που διέπει την λειτουργία των τραπεζών και των χρηματιστηρίων αντίστοιχα αποτρέπει την επίδραση του νομικού κινδύνου που θα είχε ως αποτέλεσμα την σημαντική υποτίμηση των στοιχείων του ενεργητικού μιας τράπεζας και των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου αντίστοιχα.

➢ **Κίνδυνος Αξιοπιστίας**

Κυρίως αναφέρεται στον κίνδυνο φήμης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων λόγω συχνών αποτυχιών των συστημάτων, της διαχείρισης ή των διαθέσιμων προϊόντων. Η παρουσία του αναφερόμενου κινδύνου αποτελεί σημαντικό πλήγμα του τραπεζικού συστήματος καθώς επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την εμπιστοσύνη όλων των συμμετεχόντων.

➢ **Κίνδυνος Αφερεγγυότητας**

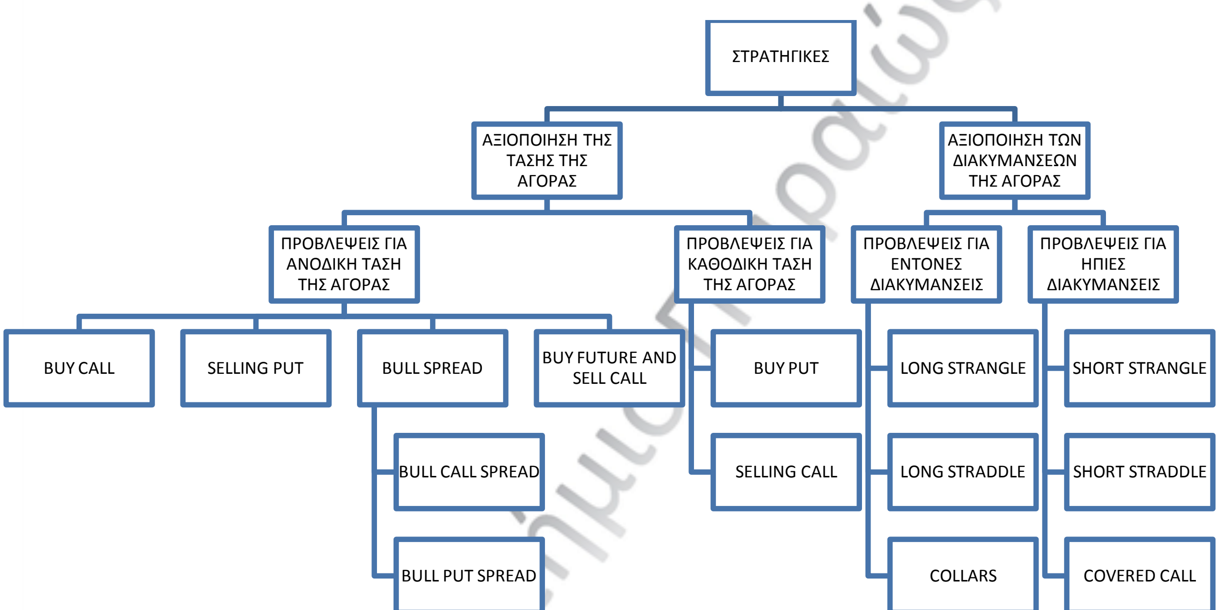
Ο εν λόγω κίνδυνος είναι πιθανόν να εμφανιστεί ως συνέπεια του κινδύνου ρευστότητας, χώρας, του επιτοκιακού κινδύνου και πολλών άλλων που μεταβάλλουν την αξία του ενεργητικού με αποτέλεσμα το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα να μην είναι σε θέση να καλύψει ενδεχόμενες απώλειες στην αξία των περιουσιακών στοιχείων σε σχέση με τις υποχρεώσεις της.

3.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Κάθε επενδυτής σκοπεύει στην μέγιστη αμοιβή έναντι κινδύνων που αναλαμβάνει μέσω της διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου. Η σωστή λήψη αποφάσεων αλλά και η μέτρηση όλων των παραπάνω κινδύνων συμβάλλουν στην καλύτερη επίτευξη του παραπάνω στόχου ο οποίος έχει ως αντίκρισμα το λεγόμενο πριμ κινδύνου το οποίο και είναι ανάλογο του κινδύνου που αναλαμβάνεται και της αποδοτικότητας των επενδύσεων χωρίς κίνδυνο.

Η καλύτερη διαχείριση αλλά και η αξιολόγηση της επιθυμητής αμοιβής έναντι ανάληψης κάποιων από τους παραπάνω κινδύνους, βασίζεται στη γνώση των επιμέρους κατηγοριών αλλά και της έκτασης που μπορούν αυτοί να πάρουν στην σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου. Επιπλέον είναι σκόπιμο να γνωρίζουμε κάποιες από τις βασικότερες μεθόδους αντιστάθμισης κινδύνων που είναι βασισμένες στις λεγόμενες στρατηγικές παραγώγων. Θα αναφερθούμε στις συγκεκριμένες στρατηγικές αναλυτικότερα αφού πρώτα διακρίνουμε τις τρείς κατηγορίες που αυτές χωρίζονται και τις επιμέρους στρατηγικές:

- Στρατηγικές που αξιοποιούν τις τάσεις της αγοράς
- Στρατηγικές που αξιοποιούν τις διακυμάνσεις της αγοράς



Διάγραμμα 2: Επενδυτικές στρατηγικές.

3.2.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΥ ΑΞΙΟΠΟΙΟΥΝ ΤΙΣ ΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Α) ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΑΝΟΔΙΚΗ ΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Όταν ο επενδυτής προβλέπει ανοδική τάση στην αγορά, αγοράζοντας για παράδειγμα μια μετοχή, αναλαμβάνει το ρίσκο, να μην ανέβει τελικά η τιμή της μετοχής. Για να ασφαλιστεί απέναντι στον συγκεκριμένο κίνδυνο, μια κίνηση αντιστάθμισης είναι να αγοράσει έναντι κάποιου ασφαλίστρου ένα παράγωγο που αντιστοιχεί στην αντίθετη θέση με αυτή που θα έχει ήδη κατέχοντας την μετοχή. Με την παραπάνω κίνηση υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις, είτε να επαληθευθεί η πρόβλεψη του επενδυτή για ανοδική τάση της αγοράς, επομένως το κέρδος του επενδυτή να αντιστοιχεί στην διαφορά μεταξύ του κέρδους από την αγορά των μετοχών αφαιρώντας το ασφάλιστρο του παραγώγου, είτε να εμφανιστεί καθοδική πορεία στην αγορά και κατ' επέκταση στην τιμή της μετοχής, οπότε το κέρδος του επενδυτή σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζεται στην διαφορά μεταξύ του κόστους των μετοχών και του κέρδους από την αγορά του παραγώγου.

ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (Long call)

Στην περίπτωση που αναμένουμε ανοδική τάση της αγοράς, η πιο συνηθισμένη επενδυτική στρατηγική είναι η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς καθώς δίνεται η δυνατότητα στον επενδυτή αγοράζοντας ένα τέτοιο δικαίωμα να κερδίσει από την αύξηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου έχοντας ως κόστος μόνο την αξία του δικαιώματος. Σε αντίθετη περίπτωση όπου μπορεί να υπάρξει μείωση στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, για παράδειγμα μιας μετοχής, τότε η ζημία που καλείται να επωμιστεί ο επενδυτής περιορίζεται μόνο στο κόστος του δικαιώματος καθώς ο επενδυτής δεν θα ασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει. Στο παρακάτω διάγραμμα μπορούμε να δούμε από πιο σημείο της τιμής του υποκείμενου τίτλου (μιας μετοχής) ο επενδυτής μας αρχίζει μέσω αυτής της στρατηγικής να παρουσιάζει κέρδος το οποίο και υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης κέρδους.

$$P_{call} = \max(S - K, 0) - C \tag{3.1}$$

όπου K η τιμή εξάσκησης και C το κόστος αγοράς του δικαιώματος.

Γράφημα 15: Long call

ΑΓΟΡΑ Σ.Μ.Ε ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (Long Future and Short Call)

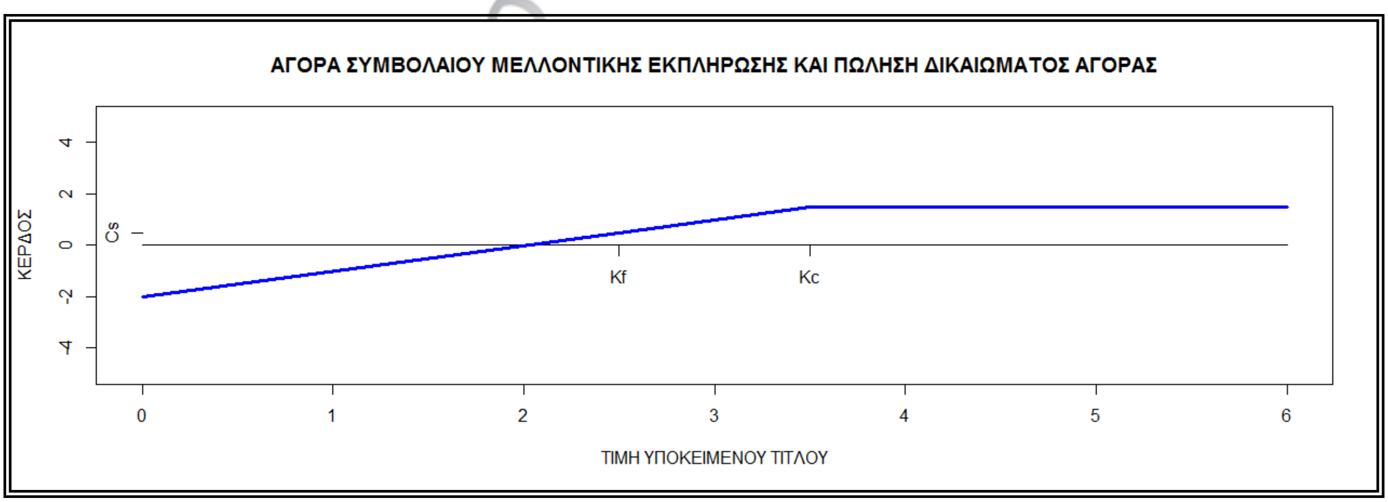
Η συγκεκριμένη στρατηγική αντισταθμίζει τον κίνδυνο από την αγορά ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης σε ένα δείκτη ή ένα εμπόρευμα με το οποίο συμφωνούμε να αγοράσουμε, για παράδειγμα ένα εμπόρευμα, σε συγκεκριμένη τιμή και χρόνο αναλαμβάνοντας τον κίνδυνο η αγορά να μην εμφανίσει ανοδική πορεία με αποτέλεσμα να χρειαστεί να υποστούμε ζημιά ίση με την διαφορά της τιμής που συμφωνήσαμε να αγοράσουμε και της τρέχουσας τιμής του εμπορεύματος. Έτσι λοιπόν πουλώντας ένα δικαίωμα αγοράς επί του εμπορεύματος εξασφαλίζουμε ότι η ζημιά μας θα είναι μικρότερη κατά το ποσό του ασφαλίστρου που θα εισπράξουμε από τον αγοραστή του δικαιώματος καθώς ο ίδιος δεν θα το εξασκήσει.

ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΕΠΕΝΔΥΤΗ	ΑΞΙΑ Σ.Μ.Ε ΕΝΟΣ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΟΣ
ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (CALLOPTION)
ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΠΟΡΕΙΑΑΓΟΡΑΣ	ΑΝΟΔΙΚΗ

Για παράδειγμα έστω ότι συμφωνούμε σε δύο μήνες να αγοράσουμε ένα εμπόρευμα στην τιμή των 2,5€ ανά τεμάχιο και παράλληλα να πουλήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς επί του ίδιου εμπορεύματος με αξία 0,50€ και τιμή εξάσκησης στα 3,5€ ανά τεμάχιο. Τότε αν η τιμή του εμπορεύματος αυξηθεί στα 3,5€ ανά τεμάχιο, εμείς θα έχουμε κερδίσει 1€ από το Σ.Μ.Ε και 0,50€ από το optionκαθώς ο αγοραστής δεν θα το ασκήσει παρά μόνο αν η τιμή ξεπεράσει την τιμή άσκησης του δικαιώματος. Αν τώρα η αγορά κινηθεί καθοδικά και η τιμή του εμπορεύματος από 2,5€ μειωθεί στα 1,5€ τότε θα έχουμε ζημιά από το Σ.Μ.Ε κατά 1€ η οποία όμως θα μειωθεί κατά 0,50€ από το ασφάλιστρο του option.Το κέρδος υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης.

$$\begin{gathered} P = -P_{call} + P_{future} \\ -P_{call} = C_s - \max(S - K_c, 0) \\ P_{future} = S - K_f \end{gathered} \tag{3.2}$$

όπου K_c η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, C_s το ασφάλιστρο και K_f η τιμή εξάσκησης του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.



Γράφημα 16: Buy future and short call

BULL SPREAD

A) BULL CALL SPREAD

Σ’ αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε μια κάθετη στρατηγική χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα αγοράς με σκοπό την εκμετάλλευση μιας πιθανής μέτριας αύξησης της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Η συγκεκριμένη στρατηγική μας βοηθά να διατηρήσουμε υψηλές αποδόσεις εξασφαλίζοντας περιορισμένες ζημιές στην περίπτωση εκείνη που η αγορά τελικά δεν κινηθεί ανοδικά. Αυτή η στρατηγική επιτυγχάνεται με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς, με την τιμή εξάσκησης του πρώτου να είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης του δεύτερου. Η διαφορά στις τιμές εξάσκησης των δύο συμβολαίων καθορίζει το ύψος της ζημιάς σε περίπτωση που η αγορά κινηθεί καθοδικά. Το κέρδος υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης.

$$\begin{gathered} P = -P_{call\,1} + P_{call\,2} \\ -P_{call\,1} = C_s - \max(S - K_s, 0) \\ P_{call\,2} = \max(S - K_l, 0) - C_l \end{gathered} \tag{3.3}$$

όπου με δείκτη s αναφερόμαστε στην θέση πώλησης και l στην θέση αγοράς με τα αντίστοιχα ασφάλιστρα και τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης.

Γράφημα 17:Bull Call Spread

B) BULL PUT SPREAD

Αντίστοιχα μπορούμε να εκμεταλλευτούμε μια ανοδική κίνηση της αγοράς εξασφαλίζοντας υψηλές αποδόσεις με περιορισμένο ρίσκο χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα πώλησης. Πουλώντας δηλαδή ένα δικαίωμα πώλησης και παράλληλα αγοράζοντας ένα δικαίωμα πώλησης με την τιμή εξάσκησης του πρώτου να είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης του δεύτερου εξασφαλίζουμε ότι η ζημιά μας θα είναι περιορισμένη στο ύψος της διαφοράς μεταξύ της αξίας των δύο δικαιωμάτων στην περίπτωση εκείνη που δεν θα εμφανιστεί ανοδική πορεία στην αγορά. Αντίθετα εξασφαλίζουμε υψηλό κέρδος εάν η αγορά κινηθεί ανοδικά. Το κέρδος υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης.

$$P = -P_{put\,1} + P_{put\,2} \tag{3.4}$$
$$-P_{put\,1} = P_s - \max(K_s - S, 0)$$
$$P_{put\,2} = \max(K_l - S, 0) - P_l$$

όπου με δείκτη s αναφερόμαστε στην θέση πώλησης και l στην θέση αγοράς με τα αντίστοιχα ασφάλιστρα και τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης.

Γράφημα 18: Bull Put Spread

ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ (Short Put)

Με τα δικαιώματα πώλησης μας δίνεται η δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε μια πιθανή ανοδική πορεία στην τιμή μιας μετοχής πουλώντας σε κάποιον το δικαίωμα να πουλήσει στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Με αυτήν την στρατηγική αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, όπως είναι λογικό, ο αγοραστής δεν θα ασκήσει το δικαίωμα του και εμείς θα έχουμε κέρδος την αξία του δικαιώματος. Όσο η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται και εμείς επαναλαμβάνουμε την ίδια στρατηγική θα μπορούμε να παράγουμε ένα συνεχές εισόδημα το οποίο και υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης κέρδους.

$$-P_{put} = C - \max(K - S, 0) \tag{3.5}$$

όπου K η τιμή εξάσκησης και C το κόστος αγοράς του δικαιώματος που λαμβάνουμε.

Γράφημα 19: Short Put

B) ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΚΑΘΟΔΙΚΗ ΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Είναι λογικό όταν είμαστε σε θέση να προβλέψουμε μια πιθανή καθοδική τάση στην αγορά να επιθυμούμε να εκμεταλλευτούμε αυτήν την κατάσταση με την κατάλληλη στρατηγική όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση της πιθανής ανοδικής τάσης στην αγορά. Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα και έχοντας μια ανοιχτή θέση πώλησης έχουμε την δυνατότητα να πουλήσουμε υψηλότερα έναν υποκείμενο τίτλο που δεν θα έχουμε στην κατοχή μας όταν η τιμή του θα έχει πέσει. Ο κίνδυνος που αναλαμβάνουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι να υπάρξει άνοδος στην τιμή και εμείς να αναγκαστούμε να αγοράσουμε σε πολύ υψηλότερη τιμή από την τιμή που έχουμε συμφωνήσει να πουλήσουμε. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο η αντιστάθμιση αυτού του κινδύνου με την χρήση ενός παραγώγου με αντίθετη θέση μπορεί να μας παρέχει την μέγιστη δυνατή ασφάλεια. Παρακάτω θα δούμε δυο βασικές μεθόδους που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε μια τέτοια πιθανή καθοδική τάση στην αγορά εξασφαλίζοντας την λιγότερη πιθανή ζημιά.

ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ (Long Put)

Στην περίπτωση λοιπόν που εκτιμούμε ότι η αγορά θα έχει καθοδική τάση μπορούμε να αγοράσουμε ένα δικαίωμα πώλησης, για παράδειγμα επί μιας μετοχής, με τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τιμή που πιθανόν να φτάσει η μετοχή μας στην λήξη του συμβολαίου. Στην περίπτωση που η μετοχή βρίσκεται ήδη στην κατοχή μας τότε το κέρδος μας θα είναι η διαφορά του κόστους του δικαιώματος και του κόστους αγοράς της μετοχής από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Στην άλλη περίπτωση μπορούμε να αγοράσουμε την μετοχή στην τιμή που θα έχει φτάσει στην λήξη του συμβολαίου και να την πουλήσουμε σύμφωνα με το δικαίωμα που έχουμε αγοράσει. Τότε το κέρδος μας θα είναι η διαφορά του κόστους του δικαιώματος και της τιμής της μετοχής στην λήξη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος το οποίο και υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης κέρδους.

$$P_{put} = \max(K - S, 0) - C \tag{3.6}$$

όπου K η τιμή εξάσκησης και C το κόστος αγοράς του δικαιώματος.

Γράφημα 20: Long Put

ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (Short Call)

Όπως εμείς μπορεί να προβλέπουμε καθοδική τάση στην αγορά, έτσι αντίστοιχα κάποιος μπορεί να προβλέπει ανοδική τάση. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πουλήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς με αποτέλεσμα αν η πρόβλεψη μας επαληθευτεί ο αγοραστής του δικαιώματος να μην ασκήσει το δικαίωμα του και εμείς να έχουμε ως κέρδος την αξία του δικαιώματος. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την στρατηγική για όσο η αγορά έχει καθοδική τάση εμείς θα είμαστε σε θέση να παράγουμε ένα συνεχές εισόδημα. Όμως αν συμβεί το αντίθετο ο κίνδυνος που έχουμε αναλάβει χωρίζεται σε δυο περιπτώσεις. Πρώτον αν έχουμε στην κατοχή μας τον υποκείμενο τίτλο που διαπραγματεύεται το δικαίωμα τότε ο κίνδυνος περιορίζεται και αναφερόμαστε στα covered calls, διαφορετικά ο κίνδυνος είναι απεριόριστος και αναφερόμαστε αντίστοιχα στα naked calls.Για την πρώτη περίπτωση το κέρδος υπολογίζεται βάσει της παρακάτω συνάρτησης.

$$-P_{call} = C - \max(S - K, 0) \tag{3.7}$$

όπου K η τιμή εξάσκησης και C το κόστος αγοράς του δικαιώματος που λαμβάνουμε.

Γράφημα 21: Short Call

3.2.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΥ ΑΞΙΟΠΟΙΟΥΝ ΤΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

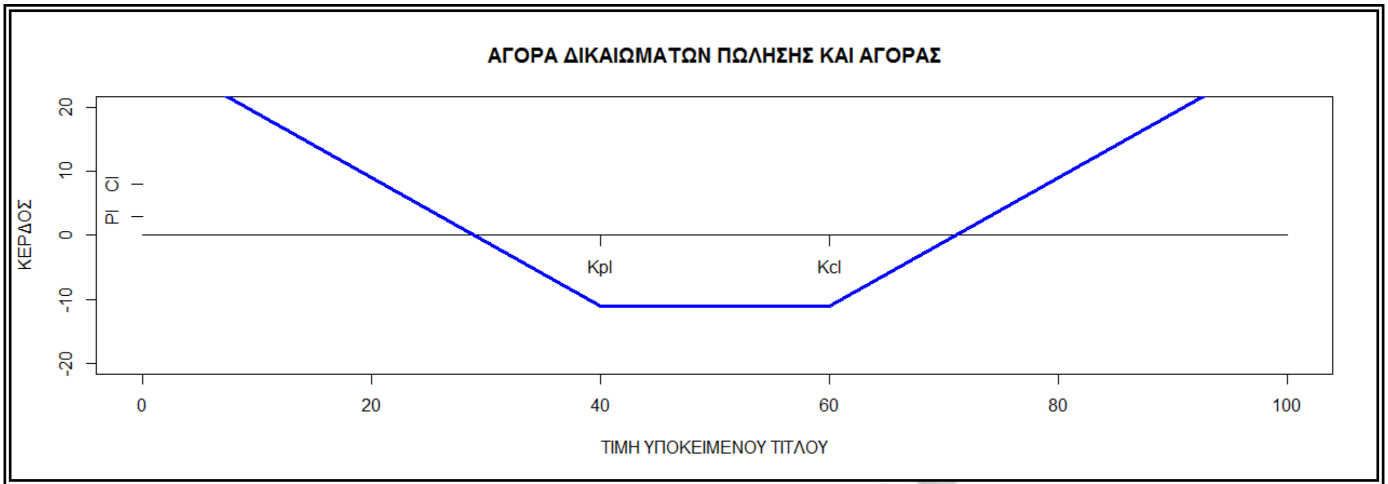
Α) ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΕΝΤΟΝΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Όταν ένας επενδυτής αναμένει η τιμή ενός υποκείμενου τίτλου να μεταβληθεί σε μεγάλο βαθμό είτε αρνητικά είτε θετικά μπορεί να επιλέξει μια από τις παρακάτω στρατηγικές με σκοπό να επιτύχει το μέγιστο δυνατό κέρδος αναλαμβάνοντας τον ελάχιστο κίνδυνο. Ένας επενδυτής αγοράζοντας πάντα τον ίδιο αριθμό δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης μπορεί χρησιμοποιώντας τους παρακάτω συνδυασμούς δικαιωμάτων να επιτύχει τον παραπάνω σκοπό.

LONG STRANGLE

Με αυτήν την στρατηγική ένας επενδυτής μπορεί να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (call option out of the money) και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (put option out of the money) και μικρότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς. Τα δυο αυτά δικαιώματα θα πρέπει να έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης και να αφορούν τον ίδιο υποκείμενο τίτλο. Εάν η τιμή του υποκείμενου τίτλου απομακρυνθεί αρκετά είτε από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς είτε από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης το κέρδος αυξάνεται, ενώ αν περιοριστεί ανάμεσα σε αυτές τις δυο τιμές η ζημιά του επενδυτή θα είναι μόνο το κόστος των δικαιωμάτων. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$P = P_{call} + P_{put} \tag{3.8}$$
$$P_{call} = \max(K_{pl} - S) - P_l$$
$$P_{put} = \max(S - K_{cl}) - C_l$$



Γράφημα 22: Long Strangle

LONG STRADDLE

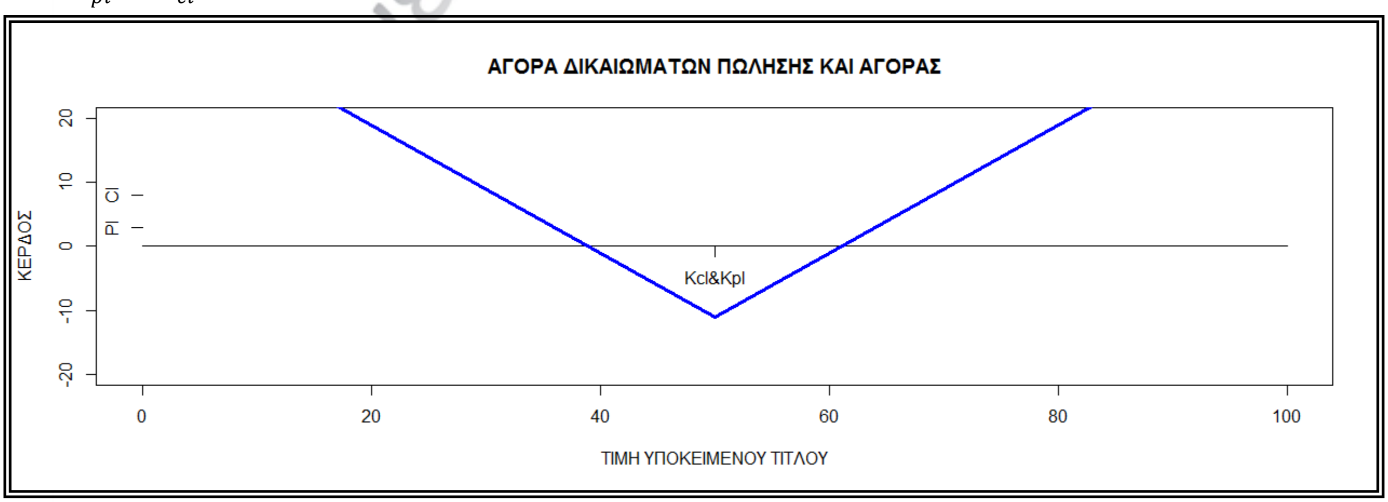
Σε αυτήν την περίπτωση ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (call option out of the money) και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (put option out of the money) και ίση με την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς έχοντας την ίδια ημερομηνία λήξης. Ο κάτοχος του long straddleθα έχει κέρδος μόνο στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου απομακρυνθεί αρκετά από την κοινή τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων ανεξάρτητα από την κατεύθυνση, σε αντίθετη περίπτωση η ζημιά που μπορεί να εμφανιστεί περιορίζεται στο κόστος των δικαιωμάτων. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$P = P_{call} + P_{put} \tag{3.9}$$

$$P_{put} = \max\left(K_{pl} - S, 0\right) - P_l$$

$$P_{call} = \max(S - K_{cl}, 0) - C_l$$

όπου $K_{pl} = K_{cl}$



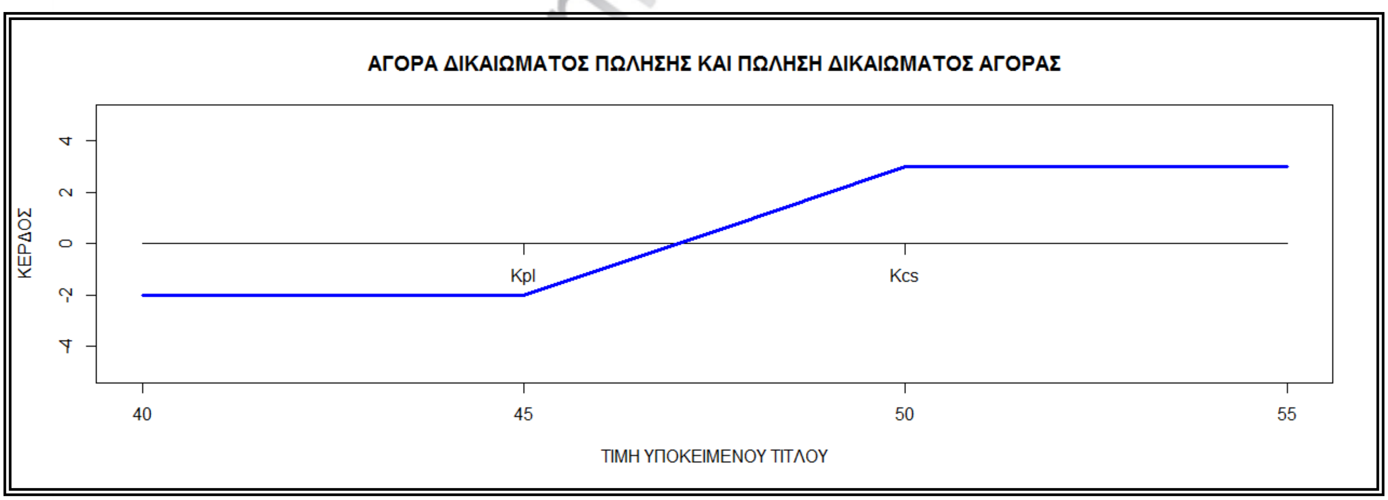
Γράφημα 23: Long Straddle

COLLARS

Η στρατηγική collars προτείνεται όταν ένας επενδυτής που έχει στην κατοχή του έναν αριθμό ενός τίτλου και έχει πουλήσει τον αντίστοιχο αριθμό σε δικαιώματα αγοράς επί του ιδίου τίτλου (covered call) επιθυμεί να εξασφαλιστεί από μια πιθανή έντονη πτώση στην τιμή του τίτλου. Αγοράζει λοιπόν το δικαίωμα να πουλήσει και περιορίζει την μέγιστη πιθανή ζημιά που εμφανίζεται αν η τρέχουσα τιμή του τίτλου είναι μικρότερη ή ίση με την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης. Έτσι η μέγιστη ζημιά περιορίζεται στην διαφορά της τιμής του τίτλου στην λήξη του δικαιώματος από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης ενώ αντίστοιχα το μέγιστο κέρδος υπολογίζεται από την διαφορά της τιμής του τίτλου στην λήξη του δικαιώματος αγοράς από την τιμή εξάσκησης του ίδιου δικαιώματος. Κέρδος επιτυγχάνεται όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς είναι μικρότερη ή ίση με την τρέχουσα τιμή του τίτλου την στιγμή λήξης του δικαιώματος. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} P &= -P_{call} + P_{put} + P_{stock} \\ P_{put} &= \max\left(K_{pl} - S, 0\right) - P_l \\ P_{call} &= \max(S - K_{cs}, 0) - C_s \\ P_{stock} &= S - S_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

όπου $K_{pl} < K_{cs}$ και S_0 η τιμή αγοράς του υποκείμενου τίτλου (για παράδειγμα κάποιας μετοχής).



Γράφημα 24: Collars

Β) ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΗΠΙΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Σε αυτήν την κατηγορία βρίσκονται τρείς στρατηγικές που μπορεί ένας επενδυτής να χρησιμοποιήσει όταν αναμένει η τιμή ενός τίτλου να κυμανθεί στα ίδια επίπεδα για ένα χρονικό διάστημα. Κάνοντας χρήση λοιπόν των παρακάτω στρατηγικών ο επενδυτής είναι σε θέση να περιορίσει την μέγιστη πιθανή ζημιά που μπορεί να επιφέρει η επενδυτική στρατηγική που έχει επιλέξει.

SHORT STRANGLE

Εδώ ο επενδυτής πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (call option out of the money) και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης μικρότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς και με ίδια ημερομηνία λήξης επί του ιδίου τίτλου. Η εν λόγω στρατηγική επιλέγεται όταν αναμένεται η τιμή του τίτλου να μην παρουσιάσει έντονη μεταβλητότητα μέχρι την λήξη των δικαιωμάτων επιφέροντας μέγιστο δυνατό κέρδος την αξία των δικαιωμάτων που πουλήθηκαν από τον επενδυτή εφόσον η τιμή του τίτλου περιοριστεί ανάμεσα στις δύο τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων την χρονική στιγμή λήξης τους. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$P = -P_{call} - P_{put} \tag{3.11}$$
$$-P_{put} = P_s - \max(K_{ps} - S, 0)$$
$$-P_{call} = C_s - \max(S - K_{cs}, 0)$$

όπου $K_{ps} < K_{cs}$

Γράφημα 25: Short Strangle

SHORT STRADDLE

Σε αυτήν την στρατηγική ο επενδυτής πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με ίδια όμως τιμή εξάσκησης και ίδια ημερομηνία λήξης επί του ιδίου τίτλου. Τα δύο αυτά δικαιώματα είναι επίσης out of money, δηλαδή το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου και το δικαίωμα πώλησης έχει τιμή εξάσκησης χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου. Το μέγιστο δυνατό κέρδος που μπορεί να επιτύχει ο επενδυτής σε αυτήν την περίπτωση θα είναι η αξία των δικαιωμάτων που έχει πουλήσει εάν στην λήξη των δικαιωμάτων η τιμή του τίτλου είναι ίση με την κοινή τιμή εξάσκησης των δύο δικαιωμάτων. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$P = -P_{call} + -P_{put} \tag{3.12}$$

$$-P_{put} = P_s - \max(K_{ps} - S, 0)$$

$$-P_{call} = C_s - \max(S - K_{cs}, 0)$$

όπου $K_{ps} = K_{cs}$

Γράφημα 26: Short Straddle

COVERED CALL

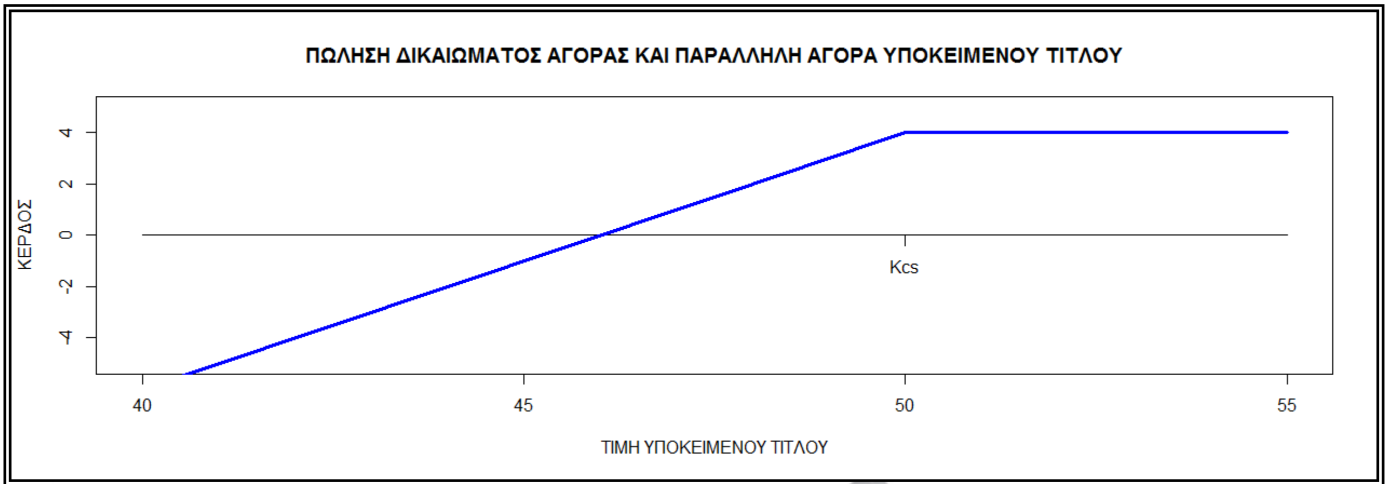
Η συγκεκριμένη στρατηγική χαρακτηρίζεται ως μια συντηρητική στρατηγική καθώς επιλέγεται για να καλύψει τον κίνδυνο από την πιθανή μείωση στην τιμή ενός τίτλου που ο επενδυτής έχει στην κατοχή του (overwrite) ή αγοράζει παράλληλα με την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης υψηλότερη από την τιμή του τίτλου(out of the money) όπως σε αυτήν την περίπτωση. Εάν η τιμή του τίτλου συνεχίζει να μειώνεται μέχρι την λήξη του συμβολαίου τότε η ζημιά του επενδυτή συνεχώς αυξάνεται αλλά περιορίζεται από την καταβολή της αξίας του δικαιώματος αγοράς που πουλήθηκε από τον επενδυτή. Στην ουσία η ζημιά προέρχεται από την μη προβλεπόμενη έντονη μεταβλητότητα προς αρνητική κατεύθυνση της τιμής του τίτλου. Αντίθετα το μέγιστο δυνατό κέρδος θα είναι ίσο με την αξία του τίτλου και την αξία του δικαιώματος και μόνο αν η τιμή του τίτλου είναι ίση ή μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς καθώς ο αγοραστής σε αυτήν την περίπτωση δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του. Η συνάρτηση κέρδους αυτής της στρατηγικής δίνεται παρακάτω.

$$P = -P_{call} + P_{stock} \tag{3.13}$$

$$-P_{call} = \max(S - K_{cs}, 0) - C_s$$

$$P_{stock} = S - S_0$$

όπου S_0 η τιμή αγοράς του υποκείμενου τίτλου για παράδειγμα κάποιας μετοχής.



Γράφημα 27: Covered Call

3.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στην διαχείριση κινδύνου με την χρήση των μεθόδων προσομοίωσης μπορούμε να παράγουμε έναν μεγάλο αριθμό πιθανόν σεναρίων. Στην συνέχεια μπορούμε να μετρήσουμε το μέγεθος του κινδύνου που αναλαμβάνει ένας επενδυτής επιλέγοντας μια επενδυτική στρατηγική με την χρήση των μέτρων κινδύνου και κυρίως της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Το συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου είναι το πιο ευρέως γνωστό και ο υπολογισμός του στηρίχτηκε σε ένα από τα διάφορα συστήματα υπολογισμού του κινδύνου που ανεπτύχθησαν την δεκαετία του 80 γνωστά ως Risk Metrics.

Η μέθοδος Value at Risk μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση οποιουδήποτε κινδύνου που είναι μετρήσιμος καθώς ορίζεται ως η μέγιστη αναμενόμενη ζημιά σε συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα, η αξία σε κίνδυνο (VaR_a) συνήθως ορίζεται ως το κάτω a-ποσοστημόριο της κατανομής του κέρδους ή του λογαρίθμου της απόδοσης, έστω X. Δηλαδή,

$$P(X < VaR_a) = a \Leftrightarrow VaR_a = F_X^{-1}(a) \tag{3.14}$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Το εν λόγω μέτρο κινδύνου όπως είπαμε είναι ευρέως γνωστό καθώς παρουσιάζει μερικά πλεονεκτήματα όπως ότι λαμβάνει υπόψη την διασπορά στο χαρτοφυλάκιο αλλά και την μεταβλητότητα των τίτλων που αυτό περιλαμβάνει. Τέλος ένα σημαντικό πλεονέκτημα του VaR είναι ότι μετρά την μέγιστη πιθανή ζημιά σε επίπεδο $(1-\alpha)\%$ από τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου ως μια και μοναδική έννοια, δίνοντας έτσι την δυνατότητα σύγκρισης χαρτοφυλακίων βάσει ενός μόνο μέτρου.

Παρά το γεγονός ότι αυτό το μέτρο κινδύνου παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα, παρουσιάζει επίσης σημαντικά μειονεκτήματα. Ένα απ’ αυτά είναι ότι σε μεταβατικές περιόδους της αγοράς το μέτρο αυτό δεν λαμβάνει υπόψη επιπρόσθετους κινδύνους όπως για παράδειγμα πιθανές ρευστοποιήσεις. Επίσης η αποτίμηση του VaR για μια περίοδο είναι αναξιόπιστη για την χρήση της για μια μεγαλύτερη περίοδο. Τέλος, για την εκτίμηση του VaR λαμβάνονται υπόψη τα δεδομένα του δείγματος και όχι οι πραγματικές παράμετροι οι οποίες και επηρεάζουν την αξία του χαρτοφυλακίου και με την αύξηση του αριθμού αυτών των παραμέτρων μεγαλώνει το πιθανό σφάλμα στην εκτίμηση για το VaR ενός χαρτοφυλακίου.

3.3.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ (VALUE AT RISK)

Σήμερα τρείς είναι οι προσεγγίσεις εκείνες που χρησιμοποιούνται περισσότερο για την εκτίμηση της VaR. Θα αναφερθούμε επιγραμματικά και στις τρείς αυτές μεθόδους αλλά κυρίως θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση Monte Carlo.

Α) ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ – ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ (DELTA – NORMAL)

Για την συγκεκριμένη μέθοδο γίνεται χρήση της διακύμανσης αν το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει ένα τίτλο ή και της συνδιακύμανσης αν περιλαμβάνει περισσότερους από έναν τίτλους. Αυτή η μέθοδος βασίζεται σε δύο υποθέσεις,

- Η διακύμανση παραμένει διαχρονικά σταθερή.
- Οι λογαριθμικές αποδόσεις των τίτλων ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει αυτή η μέθοδος είναι ότι χρησιμοποιεί ιστορικές τιμές για τον υπολογισμό του μέσου και της διακύμανσης και επιπλέον υπό την υπόθεση της κανονικής κατανομής ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο γίνεται ακόμα πιο εύκολος. Αντίθετα τα μειονεκτήματα που παρουσιάζονται είναι ότι οι πραγματικές αποδόσεις παρουσιάζουν ακραίες τιμές που δεν αποτυπώνονται στην κανονική κατανομή. Επίσης ο υπολογισμός τόσο της διακύμανσης όσο και της συνδιακύμανσης γίνεται αρκετά δύσκολός όταν ο αριθμός των τίτλων γίνεται αρκετά μεγάλος. Τέλος με αυτήν την μέθοδο παίρνουμε ως δεδομένο ότι οι μελλοντικές τιμές θα έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις ιστορικές.

Επιγραμματικά θα αναφέρουμε την εξέλιξη της παραπάνω προσέγγισης με σκοπό την βελτιστοποίηση των αποτελεσμάτων στον υπολογισμό του VaR.

- Delta – gamma - Monte Carlo
- Delta – gamma – delta
- Delta – gamma – minimization
- Delta – gamma –Johnson
- Delta – gamma –Cornish - Fisher

Β) ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ (HISTORICAL SIMULATION)

Στην συγκεκριμένη μέθοδο δεν έχουμε καμία υπόθεση και ενώ γίνεται χρήση των ιστορικών μετρήσεων αυτές δεν χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του μέσου και της διακύμανσης αλλά για την εκτίμηση των μελλοντικών τιμών. Αυτή η μέθοδος είναι μια μη – παραμετρική μέθοδος καθώς όπως αναφέραμε δεν γίνεται καμία υπόθεση για την κατανομή των τιμών και κατ' επέκταση των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν χρειάζεται ιδιαίτερες γνώσεις για την χρήση της. Αντίθετα όπως και στην προηγούμενη μέθοδο βασιζόμαστε στις ιστορικές μετρήσεις για την εκτίμηση των μελλοντικών κάτι που είναι αρκετά αυθαίρετο. Τέλος απαιτείται αρκετά μεγάλος αριθμός τιμών που κάνει τους υπολογισμούς αρκετά πολύπλοκους.

Η εξέλιξη της παραπάνω προσέγγισης έχει ως εξής:

- Bootstrapped historical simulation
- Combing kernel estimation with historical simulation
- Hybrid approach – combining exponential smoothing historical simulation

Γ) ΜΕΘΟΔΟΣ MONTE CARLO

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί και στο 2^{ο} κεφάλαιο στην Monte Carlo προσομοίωση με την βοήθεια της Γεωμετρικής κίνησης Brown μας δίνεται η δυνατότητα να παράγουμε έναν μεγάλο αριθμό σεναρίων των τιμών ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος. Μ' αυτόν τον τρόπο και βασιζόμενοι στην θεωρία των μεγάλων αριθμών μπορούμε να υπολογίσουμε την VaR ενός χαρτοφυλακίου.

Στην μέθοδο αυτή δεν χρησιμοποιείται καμία υπόθεση κατανομής επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν μη γραμμικούς τίτλους όπως είναι και τα παράγωγα προϊόντα. Επίσης δεν βασίζεται σε ιστορικές μετρήσεις για τον υπολογισμό μελλοντικών τιμών. Αντίθετα, το λογισμικό που χρησιμοποιείται είναι αρκετά πολύπλοκο για αυτό και χρειάζονται ιδιαίτερες γνώσεις στατιστικής.

Η εξέλιξη της παραπάνω προσέγγισης έχει ως εξής:

- Quasi – Monte Carlo
- Grid Monte Carlo
- Modified grid Monte Carlo

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΤΙΤΛΩΝ

3.4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (NORMAL)

Όπως αναφέραμε παραπάνω μια από τις προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της VaR είναι η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης γνωστής επίσης ως Normal. Για τον υπολογισμό της μέγιστης πιθανής ζημιάς σε επίπεδο $(1-\alpha)\%$ για ένα χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή, υποθέτουμε ότι η λογαριθμική απόδοση του χαρτοφυλακίου ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ.

Α) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΤΙΤΛΟΥ

Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από έναν τίτλο (για παράδειγμα μια μετοχή) τότε θα ισχύει

$$\text{αν } Z \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ τότε } R(t) = \log\frac{S_t}{S_0} \sim \mathrm{N}(\mu t, \sigma^2 t) \text{με } R(t) = \mu t + \sigma\sqrt{t}\cdot Z \qquad (3.15)$$

όπου

$R(t)$: η λογαριθμική απόδοση της μετοχής.

μ: η τάση των αποδόσεων

σ: η μεταβλητότητα των αποδόσεων

Τότε η VaR για χρονικό ορίζοντα t θα δίνεται από την σχέση

$$P(R(t) < VaR_a) = a \Leftrightarrow P\left(\mu t + \sigma\sqrt{t}Z < VaR_a\right) = a \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{VaR_a - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\frac{VaR_a - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = -z_a$$

και άρα

$$VaR_a = -z_a \cdot \sigma\sqrt{t} + \mu t \qquad (3.16)$$

όπου

z_a: το άνω a-ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής

Παρακάτω θα δώσουμε τον πιο απλό αλγόριθμο υπολογισμού τηςVaR σε ένα παράδειγμα ενός τίτλου με λογαριθμικές αποδόσεις που παρουσιάζουν μέσο $\mu = 0.01$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.3$ σε επίπεδο $\alpha_1 = 5\%$, $\alpha_2 = 1\%$ και με χρονικό ορίζοντα $t = 1$. Θα προσομοιώσουμε $n = 10000$ τιμές αποδόσεων και θα υπολογίσουμε αντίστοιχα την μέγιστη ζημιά VaR95 σε επίπεδο 95% και VaR99 σε επίπεδο 99%.

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε nστον αριθμό ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 0.01$ και $\sigma = 0.3$

ΒΗΜΑ 2: Ταξινομούμε με αύξουσα σειρά τις παραπάνω αποδόσεις

ΒΗΜΑ 3: Παίρνουμε την $n\alpha_1$ τιμή ως την μέγιστη ζημιά σε επίπεδο 95% και αντίστοιχα την $n\alpha_2$ τιμή ως την μέγιστη ζημιά σε επίπεδο 99%

```
n<- 10000; a1<- 0.05; a2<- 0.01; m<- 0.01; sigma<- 0.3
k1<-floor(n*a1)
k2<-floor(n*a2)
```

```
R<- rnorm(n, m, sigma)
SR<- sort(R)
VaR95<- SR[k1]
VaR95
[1] -0.4821083
VaR99<- SR[k2]
VaR99
[1] -0.680706
```

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου μας ήταν S_0 =1.000.000€ σε χρονικό ορίζοντα $t = 1$ η ελάχιστη λογαριθμική απόδοση που μπορεί να εμφανιστεί στο 95% των πιθανών λογαριθμικών αποδόσεων στο χαρτοφυλάκιο μας θα είναι -0.48 και η αντίστοιχη ζημιά θα είναι ίση

$$S_0 - S_t = S_0(1 - e^{VaR}) = 1000000(1 - e^{-0.48}) = 381217$$

Αντίστοιχα η ελάχιστη λογαριθμική απόδοση που μπορεί να εμφανιστεί στο 99% των πιθανών λογαριθμικών αποδόσεων στο χαρτοφυλάκιο μας θα είναι -0.68 και η αντίστοιχη ζημιά θα είναι ίση 490.000€ περίπου.

B) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΕΠΙ ΔΥΟ ΤΙΤΛΩΝ

Στην παραπάνω ενότητα εξετάσαμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την VaR της λογαριθμικής απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου που περιέχει μόνο ένα χρηματοοικονομικό τίτλο για παράδειγμα μια μετοχή της οποίας οι λογαριθμικές αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε την περίπτωση υπολογισμού VaR ενός χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει δύο περιουσιακά στοιχεία υπό την υπόθεση ότι τα κέρδη από αυτά τα περιουσιακά στοιχεία σε μια χρονική περίοδο ακολουθούν κανονική κατανομή. Θα ισχύει

$$P(PF < VaR_a^P) = a$$

Με PF θα συμβολίζεται το κέρδος ενός χαρτοφυλακίου με δύο τίτλους, με αντίστοιχα κέρδη X και Y, που ακολουθούν αντίστοιχα $\mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $\mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Επομένως θα έχουμε

$$P(X + Y < VaR_a^P) = a \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{(X+Y) - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}} < \frac{VaR_a^P - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}}\right) = a$$

Ο τύπος υπολογισμού του VaR με την προσέγγιση Normal είναι ο εξής

$$VaR_a^P = (\mu_X + \mu_Y) - \Sigma z_\alpha \tag{3.17}$$

όπου

$$\Sigma = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{3.16}$$

$$\rho = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

και

z_a: το άνω α-ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής

3.4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

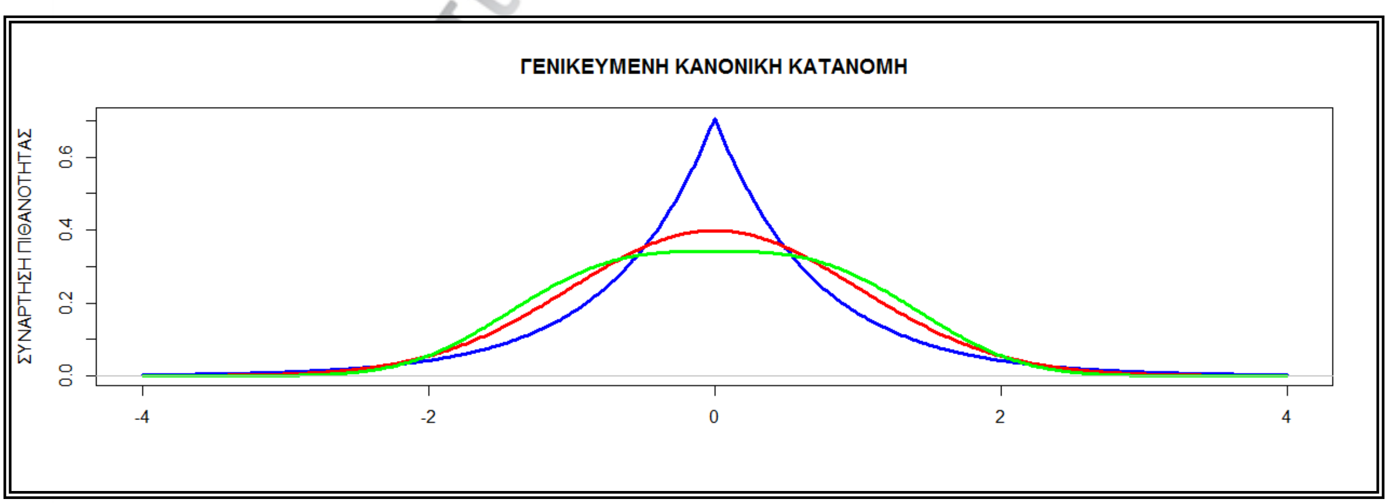
Είναι λογικό οι αποδόσεις στην πραγματικότητα να παρουσιάζουν ακραίες τιμές κάτι που δεν αποτυπώνεται στην καμπύλη της κανονικής κατανομής αλλά σε κατανομές που έχουν βαριές ουρές. Μια από αυτές που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στα χρηματοοικονομικά είναι η γενικευμένη κανονική κατανομή γνωστή ως Generalized Error Distribution (GED). Πρώτα θα δώσουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά αυτής της κατανομής και ύστερα θα υπολογίσουμε το VaR όπως στο παραπάνω παράδειγμα.

Η γενικευμένη κανονική κατανομή με παράμετρο ξ έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \frac{\xi \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot |x/\xi|^{\xi}\right)}}{\lambda \cdot 2^{1+1/\xi} \cdot \Gamma(1/\xi)}$$

όπου

$$\lambda = \left[\frac{2^{-2/\xi}\,\Gamma(1/\xi)}{\Gamma(3/\xi)}\right]^{1/2}$$



Με την κόκκινη καμπύλη έχουμε την τυπική κανονική κατανομή για $\xi = 2$ με την μπλε καμπύλη έχουμε την γενικευμένη κατανομή για $\xi = 1$ και με την πράσινη καμπύλη έχουμε για $\xi = 3$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για $\xi < 2$ έχουμε μια κατανομή της οποίας η καμπύλη παρουσιάζει αρκετά βαριά ουρά, το οποίο είναι αρκετά σύνηθες στις αποδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος βασίζεται στην μέθοδο της απόρριψης (με βοηθητική κατανομή την εκθετική) μέσω του οποίου παράγουμε την παραπάνω κατανομή GED. Με τον αλγόριθμο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το VaR για έναν χρηματοοικονομικό τίτλο με $\mu = 0.04\%$, $\sigma = 1{,}16\%$, σε επίπεδο $\alpha_1 = 5\%$ και $\alpha_2 = 1\%$, με χρονικό ορίζοντα μιας μέρας και για $\xi = 1.2$.

ΒΗΜΑ 1: Δίνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης κανονικής κατανομής (GED)

ΒΗΜΑ 2: Δίνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας εκθετικής με παράμετρο 1.

ΒΗΜΑ 3: Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$και θέτουμε $Y = -\log U_1$

ΒΗΜΑ 4: Παράγουμε $U_2 \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 5: Έστω $\xi = 1.2$ (παράμετρος κατανομής) και $c = 1.2$ (σταθερά μεθόδου απόρριψης) τότε εάν $U_2 < f_{\text{GED}}\ (Y,\xi)/(f_{\text{EXP}}\ (Y) \cdot c)$ θέτουμε $b = Y$ αλλιώς πάμε στο Βήμα 3.

ΒΗΜΑ 6: Παράγουμε $U_3 \sim U(0,1)$. Εάν $U_3 < 0{,}5$ τότε θέτουμε $b = -b$

ΒΗΜΑ 7: Θέτουμε $R = \mu + \sigma \cdot b$ όπου $\mu = 0{,}04\%$ και $\sigma = 1{,}16\%$

ΒΗΜΑ 8: Ταξινομούμε τις παραπάνω τιμές και παίρνουμε την $N \cdot 0{,}05$ τιμή ως την μέγιστη πιθανή ζημιά για επίπεδο 95% και την $N \cdot 0{,}01$ τιμή ως την μέγιστη πιθανή ζημιά για επίπεδο 99%.

```
funGED<-function(x,ξ){
lamda<- ((2^(-2/ξ)*gamma(1/ξ))/gamma(3/ξ))^0.5
        positiveGED<-2*(ξ*exp(-0.5*(x/lamda)^ξ))/(gamma(1/ξ)*lamda*2^(1+1/ξ))
          }
N<-1000; ξ<-1.2; c<-1.2;
                for(j in 1:10){
                 b<-c(rep(0,N))
                 for(i in 1:N) {
                   u2<-1; Y<-2
                   while(u2>funGED(Y,ξ)/(exp(-Y)*c)) {
                    u1<-runif(1); Y<--log(u1); u2<-runif(1); b[i]<-Y }
}
#παραγωγή αρνητικών τιμών με πιθανότητα 1/2#
#λόγω συμμετρίας μέσω της ομοιόμορφης κατανομής#

for(k in 1:N) {
                   u3<-runif(1)
                   if(u3<0.5) {
b[k]<--b[k]}
```

```
}
#τυποποίηση των παραγώμενων τιμών με μέσο 0.04% και τυπική απόκλιση 1.16% #
R<-(0.04+1.16*b)/100; sR<-sort(R)
VaR95<- sR[N*0.05]
VaR99<- sR[N*0.01]
}
VaR95
[1] -0.01899317
VaR99
[1] -0.03020948
```

3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VALUE AT RISK ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ (DELTA NORMAL)

3.5.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ DELTA

Στην διαχείριση κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου σημαντικό ρόλο κατέχει μια κατηγορία δεικτών με την ονομασία Greek Letters. Ειδικά στα χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν παράγωγα δικαιώματα, όπως τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης, σημαντικός δείκτης στην αντιστάθμιση κινδύνου είναι ο δείκτης Delta.

Η φυσική ερμηνεία αυτού του δείκτη είναι ότι μας δίνεται η δυνατότητα να εκφράσουμε την μεταβολή στην αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος σε σχέση με την μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου τίτλου με τον οποίο είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα. Για την ακρίβεια για κάθε μια μονάδα που μεταβάλλεται η αξία του τίτλου η αξία του δικαιώματος μεταβάλλεται κατά d μονάδες αν έχουμε ανοιχτή θέση ή $-d$ μονάδες αν έχουμε κλειστή θέση αντίστοιχα. Στους παρακάτω υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή του d καθώς το πρόσημο αντιπροσωπεύει την θέση και δεν επηρεάζει καθόλου τα αποτελέσματά μας.

Α) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ DELTA ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ BLACK & SCHOLES.

Παρακάτω θα δώσουμε τον ορισμό του δείκτη Delta σύμφωνα με το μοντέλο των Black & Scholes όπως αυτός δόθηκε π.χ. από τον (Hull, 2009).

Ο δείκτης Delta ορίζεται ως η μερική παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς την αξία του υποκείμενου τίτλου και είναι ίση με το d_1 σημείο της αθροιστικής τυπικής κανονικής κατανομής, όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

Από το μοντέλο των Black & Scholes το Delta ενός δικαιώματος αγοράς (με αξία C) και ενός δικαιώματος πώλησης (με αξία P) αντίστοιχα είναι

$$\frac{\partial C}{\partial S} = |N(d_1)| \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\partial P}{\partial S} = |N(d_1) - 1| \tag{3.17}$$

όπου $N(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής. Η απόδειξη των παραπάνω εκφράσεων για το Delta είναι η εξής: Από το μοντέλο των Black & Scholes έχουμε αναφέρει ότι η δίκαιη (no-arbitrage) τιμή ενός δικαιώματος αγοράς είναι

$$C = e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+) = S \cdot N(d_1) - e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot N(d_2) \qquad (\alpha)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \qquad (\beta)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} \qquad (\gamma)$$

παρατηρούμε τώρα ότι η παράγωγος του d_1ως προς S θα είναι

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \qquad (\delta)$$

οπότε για ένα δικαίωμα αγοράς από την (α) θα έχουμε ότι το Delta είναι

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} [S \cdot \varphi(d_1) - e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \varphi(d_2)]$$

όπου φ είναι η σ.π.π. της $N(0,1)$. όμως λόγω της (γ) έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \varphi(d_2) &= e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \varphi\left(d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}\right) = e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}\right)^2}{2}} \\
&= e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-d_1{}^2}{2}} \cdot e^{\frac{-\left(-2 \cdot d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T} - \sigma^2 \cdot T\right)}{2}} \\
&= e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \varphi(d_1) \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot e^{\frac{-\sigma^2 \cdot T}{2}} \\
&= K \cdot \varphi(d_1) \cdot e^{-r \cdot T - \left(\frac{\sigma^2 \cdot T}{2}\right) + \ln\left(\frac{S}{K}\right) + r \cdot T + \left(\frac{\sigma^2 \cdot T}{2}\right)} \\
&= K \cdot \varphi(d_1) \cdot \frac{S}{K} = S \cdot \varphi(d_1)
\end{aligned}$$

οπότε θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial S} &= N(d_1) + \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} [S \cdot \varphi(d_1) - e^{-r \cdot T} \cdot K \cdot \varphi(d_2)] \\
&= N(d_1) + \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} [S \cdot \varphi(d_1) - S \cdot \varphi(d_1)] = N(d_1)
\end{aligned}$$

ομοίως για ένα δικαίωμα πώλησης προκύπτει ότι

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Παρακάτω θα δώσουμε τον απλό κώδικα υπολογισμού του Delta σύμφωνα με το μοντέλο των Black & Scholes με τον υπολογισμό της αξίας των δικαιωμάτων όπως δόθηκε στο 2°Κεφάλαιο.

BHMA 1:Θέτουμε $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}$

BHMA 2: Θέτουμε $d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$

BHMA 3: Θέτουμε $C = S \cdot N(d_1) - e^{-r\cdot T} \cdot K \cdot N(d_2)$

BHMA 4: Θέτουμε $\text{delta}_{\text{call}} = |N(d_1)|$, $\text{delta}_{\text{put}} = |N(d_1) - 1|$

```
SO=1269; K=1300; r=0.15/100; t=0; T=1; sigma=16/100
d1 <- (log(SO/K) + (r +0.5 * sigma^2) * (T - t))/(sigma * sqrt(T - t));
d2 <- d1 -sigma * sqrt(T - t);
CBS <- SO * pnorm(d1) - K * exp(-r * (T - t)) * pnorm(d2);
calldelta<- abs(pnorm(d1))
calldelta
[1] 0.4754928
putdelta<- abs(pnorm(d1)-1)
putdelta
[1] 0.5245072
```

Ισχύει ότι όσο περισσότερο αυτός ο δείκτης πλησιάζει στο 0 τόσο καλύτερα έχουμε αντισταθμίσει τον κίνδυνο των παραγώγων απέναντι στις μεταβολές των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επίσης όταν έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς οι τίτλοι με μεγάλες διασπορές μας παρέχουν καλύτερη αντιστάθμιση απέναντι στον κίνδυνο αγοράς ενώ αντίθετα για ένα δικαίωμα πώλησης αυτό επιτυγχάνεται με τίτλους που παρουσιάζουν μικρότερες διασπορές.

B) ΕΚΤΙΜΗΣΗ DELTA ΜΕΣΩ MONTE CARLO ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Ο δείκτης Delta ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προσομοιώνοντας τις τιμές του υποκείμενου τίτλου βάση της γεωμετρικής κίνησης Brown εκτιμάται από τον παρακάτω τύπο:

$$delta = \frac{\partial}{\partial S} C = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial S} \hat{E}[F(S_T)|S_0 = S] \tag{3.18}$$

όπου $F(S_T)$ είναι η αξία στην λήξη (στο χρόνο T) του παραγώγου (Chan & Wong, 2006). Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω τύπος είναι ίσος με

$$delta = e^{-rT} \hat{\mathrm{E}}\left[F(S_T) \cdot \frac{W_T}{S\cdot\sigma\sqrt{\cdot T}}\right],$$

όπου $W_t, t \geq 0$ είναι η τυπική κίνηση Brown.

BHMA 1: Παράγουμε M στο πλήθος τελικές τιμές ενός υποκείμενου τίτλου με τυπική απόκλιση σ και μέσο $\mu = (r - \sigma^2/2)$ από την σχέση $S_T^i = S_0 \cdot \exp\left[(r - \sigma^2/2) \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot u_i\right]$, u_i~N(0,1) .

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $C_i = e^{-rT} \cdot \max(S_T^i - K, 0)$, $P_i = e^{-rT} \cdot \max(K - S_T^i, 0)$

$$CD_i = C_i \cdot u_i / (\sigma \cdot \sqrt{T} \cdot S_0) \text{ , } PD_i = P_i \cdot u_i / (\sigma \cdot \sqrt{T} \cdot S_0)$$

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε $P_{Call} = \text{mean}(C_i)$, $P_{Put} = \text{mean}(P_i)$,

$$delta_{Call} = |\text{mean}(CD_i)|, delta_{Put} = |\text{mean}(PD_i)|.$$

```
S0=1269; K=1300; r=0.15/100; t=0; T=1; sigma=16/100; M=1000;
CMC <-rep(0, M)
PMC <-rep(0, M)
Y <-rep(0, M)
CD <- rep(0, M)
PD <- rep(0, M)
for (i in 1:M) {
u <- rnorm(1,0,1);
Y[i] <- S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * (T - t) + sigma *sqrt(T - t) * u);
CMC[i] <- exp(-r*(T - t))*mean(pmax(Y[i]-K,0))
PMC[i] <- exp(-r*(T - t))*mean(pmax(K-Y[i],0))
CD[i] <- CMC[i]*u/(S0*sigma*sqrt(T-t))
PD[i] <- PMC[i]*u/(S0*sigma*sqrt(T-t))
}
CallPrice<- mean(CMC)
CallPrice
[1] 74.64976
deltaCall<- abs(mean(CD))
deltaCall
[1] 0.5624596
PutPrice<- mean(PMC)
PutPrice
[1] 92.75114
deltaPut<- abs(mean(PD))
deltaPut
[1] 0.4969867
```

3.5.2. ΜΕΘΟΔΟΣ DELTA NORMAL

Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται κυρίως σε χαρτοφυλάκια που οι αποδόσεις δεν παρουσιάζουν γραμμικότητα όπως είναι τα παράγωγα. Χρησιμοποιούμε λοιπόν έναν παράγοντα Delta που αντιπροσωπεύει την ευαισθησία των αποδόσεων σε σχέση με τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση που έχουμε ένα παράγωγο, η ευαισθησία της απόδοσής του σε σχέση με την τιμή του τίτλου από την οποία εξαρτάται παρουσιάζεται με το d που υπολογίσαμε παραπάνω.

Υποθέτοντας ότι η λογαριθμική απόδοση $X_t = \log\frac{S_{t+1}}{S_t}$,η οποία είναι περίπου ίση με $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$ για μικρά χρονικά διαστήματα, ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$,θα έχουμε

$$DV_{t+1} \approx d \cdot (S_{t+1} - S_t) \approx d \cdot S_t \cdot X_t$$

όπου

DV_{t+1}: η μεταβολή στην αξία του παραγώγου

σ^2: η ημερήσια διασπορά στην αξία του τίτλου

Επομένως η σχέση που μας δίνει την VaR για μια μέρα μέσω της μεθόδου Delta Normal είναι ο εξής:

$$\mathrm{VaR_a}(t,T) \approx d \cdot S_t \cdot VaR_a(X_t) = d \cdot S_t(0 - z_a\sigma) \quad (3.19)$$

Οπότε με βάση την παραπάνω σχέση και σύμφωνα με το παράδειγμα που δώσαμε στον υπολογισμό του delta, το VaR για τα δικαιώματα προαίρεσης και τα επίπεδα εμπιστοσύνης που έχουμε δώσει θα υπολογιστούν με τον παρακάτω κώδικα.

```
a1<-0.05; a2<-0.01; sigma=16/100; S0=1269;
deltaPut=0.4969867; deltaCall=0.5624596
VaRcall95<-qnorm (a1)*sigma*S0*deltaCall
VaRcall95
[1] -187.8452
VaRcall99<-qnorm(a2)*sigma*S0*deltaCall
VaRcall99
[1] -265.6731
VaRPut95<-qnorm(a1)*sigma*S0*deltaPut
VaRPut95
[1] -165.9792
VaRPut99<-qnorm(a2)*sigma*S0*deltaPut
VaRPut99
[1] -234.7475
```

3.6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VALUE AT RISK ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ (MONTE CARLO)

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο υπολογισμού της μέγιστης πιθανής ζημιάς σε επίπεδο εμπιστοσύνης $(1-\alpha)\%$ ενός παράγωγου προϊόντος. Επειδή οι αποδόσεις των παράγωγων προϊόντων δεν παρουσιάζουν γραμμικότητα όπως οι μετοχές ή άλλοι χρηματοοικονομικοί τίτλοι όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενες ενότητες, μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το VaR με μεθόδους όπως η Delta-Normal. Η παρακάτω προσέγγιση μας απαλλάσσει από οποιαδήποτε υπόθεση σε σχέση με τις μεταβολές στην αξία ενός παραγώγου καθώς χρησιμοποιούμε μόνο την Monte Carlo προσομοίωση για την παραγωγή σεναρίων για τις αποδόσεις των παράγωγων δικαιωμάτων και υπολογίζουμε την μέγιστη πιθανή ζημιά από τις εκτιμούμενες πιθανές αποδόσεις βάση των σεναρίων.

Με την μέθοδο Monte Carlo όπως έχουμε αναφέρει μας δίνεται η δυνατότητα να προσομοιώνουμε σενάρια με την εξέλιξη των τιμών ενός υποκείμενου τίτλου. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το VaR ενός παράγωγου προϊόντος για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών αρκεί να υποθέσουμε ότι η τελική τιμή που προσομοιώνουμε αφορά παράγωγα δικαιώματα που λήγουν σε 10 μέρες με αρχική τιμή του ενός να είναι η τελική τιμή του προηγούμενου με ημερήσια συχνότητα και προεξοφλώντας τις τελικές τιμές για 10 μέρες. Με σκοπό να γίνει πιο κατανοητή η προσέγγιση αυτή θα δώσουμε ένα παράδειγμα με την παραγωγή ενός μόνο σεναρίου για 365 ημέρες της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης $K = 1300$, αρχική τιμή $S0 = 1269$, $\sigma = 16\%$ και επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου $r = 0.15\%$.

ΒΗΜΑ 1: Παράγουμε μία τυχαία μεταβλητή από κανονική κατανομή και υπολογίζουμε την $1^{η}$ τελική τιμή με αρχική τιμή S_0.

ΒΗΜΑ 2: Παράγουμε 364 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κανονική κατανομή και τις αντίστοιχες τελικές τιμές του υποκείμενου τίτλου.

```
t=1/365; r=0.15/100; σ=16/100; s0=1269; k=1300; nsteps=365;
x<-rep(0, nsteps+1)
u<-rnorm(1,0,1)
x[1]<-s0*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)
for (i in 1:nsteps) {
u<-rnorm(1,0,1)
x[i+1]<-x[i]*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)}
x[1:30]#Δίνουμε τις πρώτες 30 τιμές
[1] 1273.841 1257.876 1276.441 1279.767 1261.706 1274.018 1260.608 1262.375
[9] 1262.807 1264.159 1249.122 1268.458 1256.762 1247.524 1237.107 1240.712
[17] 1242.594 1248.389 1252.561 1235.553 1212.623 1195.450 1183.111 1161.452
[25] 1168.931 1161.592 1149.274 1165.721 1161.802 1166.668
```

Η λογική της Monte Carlo προσομοίωσης είναι ότι μπορούμε να παράγουμε ένα μεγάλο αριθμό σεναρίων. Βασιζόμενοι επίσης στο νόμο των μεγάλων αριθμών θα προσομοιώσουμε την τελική τιμή για 365 ημέρες ενός υποκείμενου τίτλου ουσιαστικά γνωρίζοντας μόνο την διασπορά.

Στον παρακάτω κώδικα θα δώσουμε την προσομοίωση 365 τελικών τιμών σε 100 σενάρια και θα παρουσιάσουμε τις 5 πρώτες τιμές για τα πρώτα 7 σενάρια.

```
t=1/365; r=0.15/100; σ=16/100; s0=1269; k=1300; nsteps=365; npaths=100
y<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
x<-rep(0, nsteps+1)
for  (j in 1:npaths) {
u<-rnorm(1,0,1)
x[1]<-s0*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)
for (i in 1:nsteps) {
u<-rnorm(1,0,1)
```

```
x[i+1]<-x[i]*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)
y[i,j]<-x[i]
}
}
y[1:5,1:7]
         [,1]     [,2]     [,3]     [,4]     [,5]     [,6]     [,7]
[1,] 1263.582 1259.822 1278.455 1278.283 1257.073 1273.856 1276.011
[2,] 1262.796 1228.056 1274.520 1272.453 1264.875 1283.162 1279.025
[3,] 1263.296 1230.198 1268.783 1257.957 1270.264 1278.282 1263.689
[4,] 1265.828 1227.125 1270.382 1257.178 1292.368 1267.968 1242.778
[5,] 1262.367 1250.264 1267.503 1249.972 1269.703 1273.021 1249.810
```

Α) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΓΙΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ

Στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, όπως έχουμε αναφέρει, η τελική αξία του συμβολαίου εξαρτάται μόνο από την διαφορά της τιμής εξάσκησης από την τελική αξία του υποκείμενου τίτλου. Στον παρακάτω κώδικα χρησιμοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα για τον υπολογισμό της τελικής ημερήσιας αξίας του υποκείμενου τίτλου θα υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου και την παρούσα αξία αυτού προεξοφλώντας για 10 μέρες θεωρώντας ότι αυτή είναι η διάρκεια του συμβολαίου και ύστερα θα υπολογίσουμε το VaR για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών. Η αξία του συμβολαίου όπως έχουμε αναφέρει θα είναι

$$\mathrm{P_{future}} = \mathrm{S_T} - \mathrm{K}$$

Β) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗΣ

Ο κώδικας για τον υπολογισμό του VaR για τα δικαιώματα προαίρεσης είναι ακριβώς ο ίδιος μέχρι το σημείο υπολογισμού της τελικής αξίας από όπου και θα δώσουμε τον ανάλογο κώδικα. Στα παράγωγα δικαιώματα προαίρεσης η αξία ενός δικαιώματος αγοράς όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω είναι:

$$\mathrm{P_{CALL}} = \max(S_T - K, 0)$$

Γ) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VAR ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ STRADDLE

Στην στρατηγική αυτή όπως έχουμε αναλύσει παραπάνω υπάρχει η δυνατότητα της ταυτόχρονης αγοράς (short straddle) ή πώλησης (long straddle) ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης, επί τον ίδιο υποκείμενο τίτλο και με την ίδια χρονική διάρκεια. Στην προκειμένη ανάλυση δεν μας ενδιαφέρει αν γίνεται αγορά ή πώληση των δικαιωμάτων οπότε και αγνοούμε εντελώς τα κόστη αγοράς ή τα οφέλη πώλησης αντίστοιχα.

Η μόνη διαφορά στον κορμό του κώδικα είναι ο υπολογισμός των πληρωμών που ουσιαστικά είναι το άθροισμά των πληρωμών από ένα δικαίωμα αγοράς και από ένα δικαίωμα πώλησης.

ΒΗΜΑ 1:Παράγουμε 364 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κανονική κατανομή και τις αντίστοιχες τελικές τιμές του υποκείμενου τίτλου.

ΒΗΜΑ 2: Προεξοφλούμε για 10 μέρες τις αποδόσεις των υποθετικών συμβολαίων.

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε την μέση τιμή των πληρωμών του συμβολαίου όλων των σεναρίων για κάθε μέρα.

ΒΗΜΑ 4: Υπολογίζουμε την απόδοση των συμβολαίων βάση των παρακάτω σχέσεων $\mathrm{RP}_{\mathrm{FUTURE}} = \log(\mathrm{P}_{\mathrm{FUTURE}}\,(t+1)/\mathrm{P}_{\mathrm{FUTURE}}\,(t)) \cdot 100$, $\mathrm{RP}_{\mathrm{CALL}} = \log(\mathrm{P}_{\mathrm{CALL}}\,(t+1)/\mathrm{P}_{\mathrm{CALL}}\,(t)) \cdot 100$, $\mathrm{RP}_{\mathrm{PUT}} = \log(\mathrm{P}_{\mathrm{PUT}}\,(t+1)/\mathrm{P}_{\mathrm{PUT}}\,(t)) \cdot 100$

ΒΗΜΑ 3: Ταξινομούμε τις παραπάνω αποδόσεις και υπολογίζουμε την μέγιστη πιθανή ζημιά σε επίπεδο 95% και 99%.

```
t=1/365; T=10/365; r=0.15/100; σ=16/100; s0=1269; k=1300; nsteps=365; npaths=100
y<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
x<-rep(0, nsteps+1)
FUTUREPAYOFF<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
CALLPAYOFF<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
PUTPAYOFF<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
STRADDLEPAYOFF<-matrix(0, ncol=npaths, nrow= nsteps)
for  (j in 1:npaths) {
u<-rnorm(1,0,1)
x[1]<-s0*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)
for (i in 1:nsteps) {
u<-rnorm(1,0,1)
x[i+1]<-x[i]*exp((r-0.5*σ^2)*t+σ*sqrt(t)*u)
y[i,j]<-x[i]
FUTUREPAYOFF[i,j]<-exp(-r*T)*(x[i]-k)
CALLPAYOFF[i,j]<-exp(-r*T)*pmax(x[i]-k,0)
PUTPAYOFF[i,j]<-exp(-r*T)*pmax(k-x[i],0)
STRADDLEPAYOFF[i,j]<-CALLPAYOFF[i,j]+PUTPAYOFF[i,j]
}
}
FUTURE<-rep(0,nsteps)
CALL<-rep(0,nsteps)
PUT<-rep(0,nsteps)
STRADDLE<-rep(0,nsteps)
for (i in 1:nsteps){
FUTURE[i]<- mean(FUTUREPAYOFF[i,])
CALL[i]<- mean(CALLPAYOFF[i,])
PUT[i]<- mean(PUTPAYOFF[i,])
STRADDLE[i]<-mean(STRADDLEPAYOFF[i,])
```

```
}
```

#ΓΙΑ ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ#

```
returnsfuture<-rep(0,nsteps-10)
for (i in 1:nsteps-9) {
returnsfuture[i]<-(log(FUTURE[i+10]/FUTURE[9+i]))*100
}
sreturnsfuture<-sort(returnsfuture)
a1<-0.05; a2<-0.01; N<-nsteps-10;
VAR95<-sreturnsfuture[floor(N*a1)]
VAR95
[1] -5.265175
VAR99<-sreturnsfuture[floor(N*a2)]
VAR99
[1] -7.442352
```

#ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΑΓΟΡΑΣ#

```
returnscall<-rep(0,nsteps-10)
for (i in 1:nsteps-9) {
returnscall[i]<-(log(CALL[i+10]/CALL[9+i]))*100
}
sreturnscall<-sort(returnscall)
a1<-0.05; a2<-0.01; N<-nsteps-10;
VAR95<-sreturnscall[floor(N*a1)]
VAR95
[1] -2.76828
VAR99<-sreturnscall[floor(N*a2)]
VAR99
[1] -4.314576
```

#ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΩΛΗΣΗΣ#

```
returnsput<-rep(0,nsteps-10)
for (i in 1:nsteps-9) {
returnsput[i]<-(log(PUT[i+10]/PUT[9+i]))*100
}
sreturnsput<-sort(returnsput)
a1<-0.05; a2<-0.01; N<-nsteps-10;
VAR95<-sreturnsput[floor(N*a1)]
VAR95
[1] -1.80792
VAR99<-sreturnsput[floor(N*a2)]
VAR99
[1] -3.120498
```

#ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ STRADDLE#

```
returnsstraddle<-rep(0,nsteps-10)
for (i in 1:nsteps-9) {
```

```
returnsstraddle[i]<-(log(STRADDLE[i+10]/STRADDLE[9+i]))*100
}
sreturnsstraddle<-sort(returnsstraddle)
a1<-0.05; a2<-0.01; N<-nsteps-10;
VAR95<-sreturnsstraddle[floor(N*a1)]
VAR95
[1] -1.316217
VAR99<-sreturnsstraddle[floor(N*a2)]
VAR99
[1] -2.31268
```

Είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε μέσω του VaR ποια από τις τρείς επενδυτικές στρατηγικές παρουσιάζει το λιγότερο κίνδυνο, βάσει της μέγιστης πιθανής ζημιάς. Το δικαίωμα αγοράς παρουσιάζει μεγαλύτερο κίνδυνο σε σχέση με την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης, αντίστοιχα όμως παρουσιάζει και μεγαλύτερα κέρδη. Ενώ η στρατηγική Straddle παρουσιάζει τον μικρότερο κίνδυνο σε σχέση με την καθαρή αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης επαληθεύοντας έτσι την λογική αντιστάθμισης κινδύνου που παρουσιάσαμε στις στρατηγικές αντιστάθμισης. Τέλος τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Σ. Μ. Ε) ενέχουν τον μεγαλύτερο κίνδυνο καθώς η συμφωνηθείσα πράξη στην λήξη του συμβολαίου δεν είναι προαιρετική όπως στα δικαιώματα προαίρεσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ:

1. Χαράλαμπος Λ. Αγκυρόπουλος (2007), *Αποτίμηση Κινδύνων Χαρτοφυλακίων με τη Μέθοδο VAR μέσω Προσομοίωσης* (Διπλωματική εργασία, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»), Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
2. Μιχάλης Σφακιανάκης (2011), *Προσομοίωση και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Πατάκη.
3. Παναγιώτης Χ. Αγγελόπουλος (2001), *Εισαγωγή Στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*, Εκδόσεις Σταμούλη.
4. Μπούτσικας Μ. (2004), *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις (ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»), Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
5. Μπούτσικας Μ. (2005), *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα - Εισαγωγή στην Στοχαστική Χρηματοοικονομική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις (ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»), Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
6. Γραμβουσάκη Γαρυφαλλιά (2009), *Παράγωγα Προϊόντα: Η Χρήση Τους Στην Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων* (Διπλωματική εργασία). Πολυτεχνείο Κρήτης.

ΑΓΓΛΙΚΗ:

1. Ngai Hang Chan and Hoi Ying Wong (2006), *Simulation Techniques in Financial Risk Management*, Wiley.
2. Stefano M. Iacus. (2011), *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*, Wiley.
3. Fabrice Douglas Rouah and Gregory Vainberg (2007), *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA*, Wiley.
4. Manuel Ammann and Christian Reich (2001), VaR for nonlinear financial instruments — linear approximation or full Monte Carlo? *Financial Markets and Portfolio Management* 15, Issue 3, pp 363-378.
5. John C. Hull (2011), *Options, Futures and Other Derivatives*. 8th Edition, Prentice Hall International Editions.
6. Jaeckel, P. (2002) *Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley.
7. Glasserman, P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (Stochastic Modelling and Applied Probability), Springer.

8. Mkhize, Ngenisile Grace Zanele (2007), *The Pricing Theory Of Asian Options*, (M.Sc. Dissertation). University of KwaZulu-Natal, Westville.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικας γραφημάτων 3ου κεφαλαίου

```
#BUY CALL#

Kcl = 50
maxprice= 60
minprice= 40
Cl=3
ymax =  10
ymin = -10

plot(c(minprice,Kcl,maxprice),c(0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcl,labels="K")
axis(2,pos=0,at=Cl,labels="C")

S = c(minprice,Kcl,maxprice)
        profitslongcall<- pmax(S-Kcl,0)-Cl
        lines(S,profitslongcall,type='l',col="blue",lwd=3)

#BUY FUTURE AND SELL CALL#

Kcs = 3.5
Kfl = 2.5
maxprice= 6
minprice= 0
Cs=0.5
ymax =  5
ymin = -5

plot(c(minprice,Kcs,Kfl,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟΥ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ
ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kc")
axis(1,pos=0,at=Kfl,labels="Kf")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")

S = c(minprice,Kfl,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
```

```
        profitslongfuture<-(S-Kfl)
        lines(S,profitsshortcall+profitslongfuture,type='l',col="blue",lwd=3)

#BULL CALL SPREAD#

Kcs=50
Kcl=40
maxprice=60
minprice=30
Cs=3
Cl=8
ymax=10
ymin=-10

plot(c(minprice,Kcl,Kcs,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kcs")
axis(1,pos=0,at=Kcl,labels="Kcl")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")
axis(2,pos=0,at=Cl,labels="Cl")

S = c(minprice,Kcl,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        profitslongcall<-pmax(S-Kcl,0)-Cl
        lines(S,profitsshortcall+profitslongcall,type='l',col="blue",lwd=3)

#BULL PUT SPREAD#

Kps=50
Kpl=40
maxprice=60
minprice=30
Ps=8
Pl=3
ymax=10
ymin=-10

plot(c(minprice,Kpl,Kps,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΩΛΗΣΗΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kps,labels="Kps")
axis(1,pos=0,at=Kpl,labels="Kpl")
axis(2,pos=0,at=Ps,labels="Ps")
axis(2,pos=0,at=Pl,labels="Pl")
```

```
S = c(minprice,Kpl,Kps,maxprice)
        profitsshortput<- Ps-pmax(Kps-S,0)
        profitslongput<-pmax(Kpl-S,0)-Pl
        lines(S,profitsshortput+profitslongput,type='l',col="blue",lwd=3)

#SELLING PUT#

Kps = 50
maxprice= 60
minprice= 40
Ps=3
ymax =  10
ymin = -10

plot(c(minprice,Kps,maxprice),c(0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kps,labels="K")
axis(2,pos=0,at=Ps,labels="C")

S = c(minprice,Kps,maxprice)
        profitsshortput<- Ps-pmax(Kps-S,0)
        lines(S,profitsshortput,type='l',col="blue",lwd=3)

#BUY PUT#

Kpl = 50
maxprice= 60
minprice= 40
Pl=3
ymax =  10
ymin = -10

plot(c(minprice,Kpl,maxprice),c(0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kpl,labels="K")
axis(2,pos=0,at=Pl,labels="C")

S = c(minprice,Kpl,maxprice)
        profitslongput<- pmax(Kpl-S,0)-Pl
        lines(S,profitslongput,type='l',col="blue",lwd=3)
```

```
#SELL CALL#

Kcs = 50
maxprice= 60
minprice= 40
Cs=3
ymax =  10
ymin = -10

plot(c(minprice,Kcs,maxprice),c(0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="K")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="C")

S = c(minprice,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        lines(S,profitsshortcall,type='l',col="blue",lwd=3)

#LONG STRANGLE#

Kcl=60
Kpl=40
maxprice=100
minprice=0
Cl=8
Pl=3
ymax=20
ymin=-20

plot(c(minprice,Kpl,Kcl,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcl,labels="Kcl")
axis(1,pos=0,at=Kpl,labels="Kpl")
axis(2,pos=0,at=Cl,labels="Cl")
axis(2,pos=0,at=Pl,labels="Pl")

S = c(minprice,Kpl,Kcl,maxprice)
        profitslongcall<- pmax(S-Kcl,0)-Cl
        profitslongput<-pmax(Kpl-S,0)-Pl
        lines(S,profitslongcall+profitslongput,type='l',col="blue",lwd=3)

#LONG STRADDLE#
```

```
Kcl=50
Kpl=50
maxprice=100
minprice=0
Cl=8
Pl=3
ymax=20
ymin=-20

plot(c(minprice,Kpl,Kcl,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcl,labels="Kcl&Kpl")
axis(2,pos=0,at=Cl,labels="Cl")
axis(2,pos=0,at=Pl,labels="Pl")

S = c(minprice,Kpl,Kcl,maxprice)
        profitslongcall<- pmax(S-Kcl,0)-Cl
        profitslongput<-pmax(Kpl-S,0)-Pl
        lines(S,profitslongcall+profitslongput,type='l',col="blue",lwd=3)

#COLLARS#

Kcs=50
Kpl=45
S0=48
maxprice=55
minprice=40
Cs=2
Pl=1
ymax=5
ymin=-5

plot(c(minprice,Kpl,S0,Kcs,maxprice),c(0,0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ"))

axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kcs")
axis(1,pos=0,at=Kpl,labels="Kpl")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")
axis(2,pos=0,at=Pl,labels="Pl")

S = c(minprice,Kpl,S0,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        profitslongput<-pmax(Kpl-S,0)-Pl
```

```
        profitslongstock<-S-S0

lines(S,profitsshortcall+profitslongput+profitslongstock,type='l',col="blue",lwd=3)

#SHORT STRANGLE#

Kcs=60
Kps=40
maxprice=100
minprice=0
Cs=8
Ps=3
ymax=20
ymin=-20

plot(c(minprice,Kps,Kcs,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kcs")
axis(1,pos=0,at=Kps,labels="Kps")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")
axis(2,pos=0,at=Ps,labels="Ps")

S = c(minprice,Kps,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        profitsshortput<-Ps-pmax(Kps-S,0)
        lines(S,profitsshortcall+profitsshortput,type='l',col="blue",lwd=3)

#SHORT STRADDLE#

Kcs=45
Kps=45
maxprice=100
minprice=0
Cs=8
Ps=3
ymax=20
ymin=-20

plot(c(minprice,Kps,Kcs,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΟΡΑΣ"))
axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kcs")
axis(1,pos=0,at=Kps,labels="Kps")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")
```

```
axis(2,pos=0,at=Ps,labels="Ps")

S = c(minprice,Kps,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        profitsshortput<-Ps-pmax(Kps-S,0)
        lines(S,profitsshortcall+profitsshortput,type='l',col="blue",lwd=3)


#COVERED CALL#

Kcs=50
S0=48
maxprice=55
minprice=40
Cs=2
ymax=5
ymin=-5

plot(c(minprice,S0,Kcs,maxprice),c(0,0,0,0),
       xlab = "ΤΙΜΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΙΤΛΟΥ",
       ylab = "ΚΕΡΔΟΣ",type='l',ylim=c(ymin,ymax))
       title(paste("ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΑΓΟΡΑ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ
ΤΙΤΛΟΥ"))

axis(1,pos=0,at=Kcs,labels="Kcs")
axis(2,pos=0,at=Cs,labels="Cs")

S = c(minprice,S0,Kcs,maxprice)
        profitsshortcall<- Cs-pmax(S-Kcs,0)
        profitslongstock<-S-S0
        lines(S,profitsshortcall+profitslongstock,type='l',col="blue",lwd=3)
```

```
dged<-function(x,mean=0,sd=1,ξ=2)
      {
       z=(x-mean)/sd
       lamda<- ((2^(-2/ξ)*gamma(1/ξ))/gamma(3/ξ))^0.5
       g=ξ/(lamda*(2^(1+1/ξ))*gamma(1/ξ))
       density=g*exp(-0.5*(abs(z/lamda))^ξ)/sd
       density
      }
x=seq(-4,4,length=501)
y=dged(x,mean=0,sd=1,ξ=1)
plot(x,y,type="l",col="blue",lwd=3,main="ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ
ΚΑΤΑΝΟΜΗ",ylab="ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ",xlab="")
y=dged(x,mean=0,sd=1,ξ=2)
lines(x,y,col="red",lwd=3)
```

```
y=dged(x,mean=0,sd=1,ξ=3)
lines(x,y,col="green",lwd=3)
abline(h=0,col="grey")
```