ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΚΡΗΣΑΡΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Άγγελος Ιωάννης Χ. Γαλής

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΜΕΛΕΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΚΡΗΣΑΡΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Άγγελος Ιωάννης Χ. Γαλής

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από το ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ………… συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επίκουρος Καθηγητής Χ. Ευαγγελάρας (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Στ. Γεωργίου
- Λέκτορας Σ. Μπερσίμης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασία από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

EVALUATION AND SELECTION OF TWO LEVEL SCREENING DESIGNS FOR FACTORIAL EXPERIMENTS

By
Angelos Ioannis C. Galis

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
July 2014

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χ. Ευαγγελάρα, για την άριστη συνεργασία μας, την καθοδήγηση που μου προσέφερε και για τις γνώσεις που μου παρείχε στο γνωστικό πεδίο των σχεδιασμών κρησαρίσματος.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και η παρουσίαση των σχεδιασμών κρησαρίσματος με κατανοητό τρόπο, έτσι ώστε, ο αναγνώστης να αντιληφθεί τη χρησιμότητα αυτών των οικονομικών σχεδιασμών στην βιομηχανία και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί χρησιμοποιούνται σε παραγοντικά πειράματα. Στην συνέχεια παρουσιάζονται κριτήρια αξιολόγησης των σχεδιασμών κρησαρίσματος που μελετώνται, έτσι ώστε, ο εκάστοτε πειραματιστής να μπορεί να επιλέξει το σωστό σχεδιασμό για τις ανάγκες του πειράματος που διεξάγει.

Ειδικότερα στη διπλωματική αυτή διεξάγεται μελέτη, αξιολόγησης και επιλογή σχεδιασμών κρησαρίσματος δύο επιπέδων σε παραγοντικά πειράματα. Αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρονται βασικές έννοιες για τους σχεδιασμούς κρησαρίσματος. Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετώνται οι προβολικές ιδιότητες σε 3, 4 και 5 διαστάσεις των κορεσμένων σχεδιασμών κρησαρίσματος, που προκύπτουν από πίνακες Hadamard 16 και 20 εκτελέσεων, καθώς επίσης και η συχνότητα εμφάνισης των μη ισοδύναμων προβολών στους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται δύο διαδεδομένα στατιστικά κριτήρια για την ταξινόμηση των σχεδιασμών Hadamard και μελετώνται εκ νέου οι προβολικές ιδιότητες αυτών των σχεδιασμών. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο διεξάγονται εφαρμογές σχεδιασμών κρησαρίσματος 16 και 20 εκτελέσεων.

Abstract

The purpose of this Thesis is to study and present screening designs comprehensibly, so that the reader will be fully aware of the necessity of design in industry, and the way in which these designs are used in factorial experiments. Further, the evaluation criteria of the screening designs are presented, so that it is possible to choose the optimum format for the experiments conducted.

This Thesis comprises the study, evaluation and selection of two level screening design which were applied to factorial experiments. Our Thesis consists of four chapters. The first chapter contains basic information about the screening designs. In the second chapter we examine and study all the inequivalent projections of inequivalent Hadamard matrices of orders 16 and 20 into k =3, 4 and 5 dimensions, as well as their frequencies. In the third chapter two well-known statistical criteria are applied to the classification of Hadamard designs. The projective properties of Hadamard matrices are also studied. Finally, in the fourth chapter, screening designs are considered in practice.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα xiii

Κατάλογος Πινάκων xv

Κατάλογος Σχημάτων xvii

Κατάλογος Συντομογραφιών xix

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος

1.1 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος 1

1.2 Ορθογώνιοι σχηματισμοί 4

1.2.1 Απλοί σχεδιασμοί 7

1.2.1.1 Εισαγωγή στους 2^p παραγοντικούς σχεδιασμούς 7

1.2.1.2 Εισαγωγή στους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς 14

1.2.2 Σύνθετοι σχεδιασμοί 20

1.2.2.1 Σχεδιασμοί Hadamard 20

1.2.2.2 Σχεδιασμοί Plackett – Burman 21

1.3 Παλινδρόμηση μη επαναλαμβανόμενων κορεσμένων σχεδιασμών 23

1.4 Διακριτική ικανότητα και προβολή 24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Προβολική ιδιότητα

2.1 Ορισμός και χρήση της προβολικής ιδιότητας 27

2.2 Προβολικές ιδιότητες κορεσμένων σχηματισμών 28

2.2.1 Προβολικές ιδιότητες σχηματισμών τάξης 16 29

2.2.2 Προβολικές ιδιότητες σχηματισμών τάξης 20 34

2.3 Συμπεράσματα 38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επιλογή σχεδιασμών κρησαρίσματος

3.1 Κριτήρια ταξινόμησης σχεδιασμών 41

3.1.1 J-χαρακτηριστικά και γενικευμένη διακριτική ικανότητα (GRES) 42

3.1.2 Γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης (GWP) 43

3.2 Σχεδιασμοί με 16 εκτελέσεις 44

3.3 Σχεδιασμοί με 20 εκτελέσεις 46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές σχεδιασμών κρησαρίσματος

4.1 Γραμμικό μοντέλο 49

4.2 Εφαρμογές σχεδιασμών με 16 εκτελέσεις 50

4.3 Εφαρμογές σχεδιασμών με 20 εκτελέσεις 56

4.4 Συμπεράσματα 60

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α 63

Α.1 Μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων 65

Α.2 Μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων 71

Παράρτημα Β 75

Β.1 Υπολογισμός του κριτηρίου της γενικευμένης αναλυτική τάξη (GRES) από σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων 77

Β.2 Υπολογισμός του κριτηρίου του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης (GWP) από σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων 79

Βιβλιογραφία 83

Κατάλογος Πινάκων

1.1	*2^{7-4} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός*	5
1.2	*Πειραματικό πλάνο ενός 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού*	8
1.3	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης για έναν 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό*	11
1.4	*Πίνακας αλγεβρικών προσήμων*	12
1.5	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης για έναν 2^p παραγοντικό σχεδιασμό*	14
1.6	*Πίνακας αλγεβρικών προσήμων*	16
1.7	*Πίνακας ταυτόσημων επιδράσεων*	17
1.8	*Ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση I =-ABC*	18
1.9	*Ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση I =ABC*	18
1.10	*Ο 2_{III}^{9-5} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός*	19
1.11	*Κατασκευή Plackett-Burman σχεδιασμών για n = 8, 12, 16, 20, 24 εκτελέσεις*	22
1.12	*Ο σχεδιασμός Plackett-Burman με n = 8 εκτελέσεις*	22
2.1	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 3 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων*	29
2.2	*Οι συχνότητες εμφάνισης των τριών μη ισοδύναμων προβολών 3 διαστάσεων, σε καθένα από τους 5 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων*	30
2.3	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 4 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων*	31
2.4	*Οι συχνότητες εμφάνισης των 5 μη ισοδύναμων προβολών 4 διαστάσεων, σε καθένα από τους 5 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων*	32
2.5	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 5 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων*	33
2.6	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 5 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων*	33
2.7	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 3 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων*	34
2.8	*Οι συχνότητες εμφάνισης των δύο μη ισοδύναμων προβολών 3 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων*	35
2.9	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 4 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων*	35
2.10	*Οι συχνότητες εμφάνισης των 3 μη ισοδύναμων προβολών 4 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων*	36
2.11	*Μη ισοδύναμες προβολές σε 5 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων*	37
2.12	*Οι συχνότητες εμφάνισης των 10 μη ισοδύναμων προβολών 5 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων*	38
3.1	*Οι καλύτερες μη ισοδύναμες στατιστικές κλάσεις προβολών πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων σε 3,4 και 5 παράγοντες*	45
3.2	*Οι καλύτερες μη ισοδύναμες στατιστικές κλάσεις προβολών πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων σε 3,4 και 5 παράγοντες*	47
4.1	*Πίνακας σχεδιασμού H16.0 και προσομοιωμένες τιμές απόκρισης*	51
4.2	*Οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των 15 παραγόντων του σχεδιασμού*	52
4.3	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης*	53
4.4	*Ορίζουσα σχέση και ταυτόσημες επιδράσεις του σχεδιασμού 2_V^{5-1}*	54

4.5	*Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού* 2_V^{5-1}	54
4.6	*Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού*	55
4.7	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης*	55
4.8	*Πίνακας σχεδιασμού H20.1 και προσομοιωμένες τιμές απόκρισης*	56
4.9	*Οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των 19 παραγόντων του σχεδιασμού*	57
4.10	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης*	58
4.11	*Επιδράσεις που δεν εκτιμήθηκαν*	59
4.12	*Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού*	59
4.13	*Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης*	60
A1	*Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.0*	65
A2	*Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.1*	66
A3	*Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.2*	67
A4	*Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.3*	68
A5	*Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.4*	69
A6	*Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.1*	71
A7	*Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.2*	72
A8	*Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.3*	73
B1	*Προβολή τεσσάρων διαστάσεων των σχεδιασμών Hadamard 16 εκτελέσεων και οι συνδυασμοί ABC, ABD, ACD και BCD*	77
B2	*Διαφορές των συντεταγμένων των εκτελέσεων του σχεδιασμού D*	79

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	*Γεωμετρική αναπαράσταση του* 2^2 *παραγοντικού σχεδιασμού*	9
4.1	*Διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων*	52
4.2	*Διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων*	58

Κατάλογος Συντομογραφιών

OA	Orthogonal Array
DF	Degrees of Freedom
H_n	πίνακας Hadamard τάξης *n*
PSE	pseudo standard error
GRES	το κριτήριο της γενικευμένης ανάλυσης τάξης
D	Design
GWP	το κριτήριο του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης
$P_i(j;p)$	τα πολυώνυμα Krawtchouk
$E_j(D)$	η κατανομή απόστασης του σχεδιασμού D
$d_H(c,d)$	η απόσταση Hamming μεταξύ δύο εκτελέσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος

1.1 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος

Οι μέθοδοι στατιστικών πειραματικών σχεδιασμών χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία ως ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας υλοποίησης του προϊόντος. Το εύρος των εφαρμογών που περιλαμβάνουν είναι ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη νέων προϊόντων, η βελτίωση των υφιστάμενων προϊόντων, η αξιολόγηση των ιδιοτήτων των υλικών, καθώς και ο σχεδιασμός για την ανάπτυξη και τη βελτίωση της διαδικασίας κατασκευής.

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί σε πειράματα όπου μελετάται η επίδραση δυο ή περισσοτέρων παραγόντων είναι πολύ αποδοτικοί. Όμως, ο αριθμός των θεραπειών που πρέπει να μελετηθούν για τη διερεύνηση όλων των επιδράσεων που προκαλούν οι παράγοντες στην απόκριση, είναι πολύ μεγάλος. Το απαιτούμενο κόστος και ο απαιτούμενος χρόνος που χρειάζεται για την υλοποίηση αυτών των θεραπειών, σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό, για τη μελέτη όλων των επιδράσεων, συνήθως δεν είναι αποδεκτό. Από την άλλη, ο αριθμός των παραγόντων που επηρεάζουν ένα προϊόν είναι μικρός σε σύγκριση με τον αριθμό των παραγόντων που εξετάζονται.

Σε πειράματα που περιλαμβάνουν αρκετούς παράγοντες είναι συνήθης η χρήση τέτοιων σχεδιασμών με δύο μόνο επίπεδα. Μια πλήρης επανάληψη ενός σχεδιασμού με p παράγοντες, με δύο επίπεδα ο καθένας, απαιτεί $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^p$ παρατηρήσεις και λέγεται 2^p παραγοντικός σχεδιασμός. Σε αυτούς τους σχεδιασμούς, κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα δύο επιπέδων, συνήθως +1 και -1, και κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία πειραματική εκτέλεση, που ορίζεται ως ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων που συμμετέχουν. Τα 2^p είναι πολύ αποδοτικά, γιατί επιτρέπουν τη διερεύνηση πολλών παραγόντων με χρήση ενός σχετικά μικρού αριθμού δοκιμών.

Με την αύξηση όμως του αριθμού των παραγόντων σε έναν 2^p παραγοντικό σχεδιασμό, αυξάνεται πολύ και ο αριθμός των παρατηρήσεων που απαιτούνται για μια πλήρη επανάληψη του σχεδιασμού. Για παράδειγμα, μια πλήρης επανάληψη ενός 2^7 σχεδιασμού απαιτεί 128 παρατηρήσεις. Σε αυτό το σχεδιασμό, μόνο 7 από τους 127 βαθμούς ελευθερίας αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις, και μόνο 21 βαθμοί ελευθερίας στις αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων. Οι υπόλοιποι 99 βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις τριών και περισσότερων παραγόντων.

Από την *αρχή της Ιεραρχίας* γνωρίζουμε ότι οι επιδράσεις χαμηλής τάξης, είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές από τις επιδράσεις υψηλής τάξης. Στην περίπτωση που ορισμένες υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις θεωρηθούν ότι είναι αμελητέες, μπορεί να δοθεί πληροφορία για τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης, με την εκτέλεση μόνο ενός κλάσματος του πλήρους παραγοντικού πειράματος. Αυτοί οι σχεδιασμοί ονομάζονται κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Η κυριότερη χρήση των κλασματικών σχεδιασμών είναι σε πειράματα κρησαρίσματος.

Οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, όταν χρειάζεται να μελετηθεί ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων που πιθανόν να επηρεάζουν την απόκριση ενός πειράματος, αλλά μόνο ένα μικρό υποσύνολο αυτών πιστεύεται ότι είναι σημαντικοί. Το φαινόμενο αυτό καλείται και *αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων*. Σκοπός τους είναι η εύρεση των παραγόντων που έχουν τη σημαντικότερη επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή του πειράματος, ενώ στόχος τους είναι η εξοικονόμηση χρόνου και πόρων. Για το λόγο αυτό συνήθως επιλέγονται σχεδιασμοί που περιορίζουν το κόστος του πειράματος, σε σχέση με τον αριθμό των πειραματικών εκτελέσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν και που δίνουν τα καλύτερα και πιο εύκολα ερμηνεύσιμα αποτελέσματα. Με λίγα λόγια, οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος είναι οικονομικά πειράματα που εστιάζουν στον προσδιορισμό της σχετικής σημασίας των πολλών κυρίων επιδράσεων.

Οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος που έχουν μελετηθεί και χρησιμοποιηθεί περισσότερο για την επίτευξη μείωσης των πειραματικών εκτελέσεων αλλά και για καλύτερα και πιο εύκολα ερμηνεύσιμα αποτελέσματα, είναι οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος δύο επιπέδων. Ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος δύο επιπέδων ορίζεται ένας σχεδιασμός δυο συμβόλων (συνήθως +1 και -1) με n γραμμές και p στήλες, όπου n οι πειραματικές εκτελέσεις και p οι παράγοντες. Αν σε κάθε επιλογή k στηλών του σχεδιασμού, όλες οι πειραματικές εκτελέσεις του πλήρους 2^k παραγοντικού σχεδιασμού εμφανίζονται τουλάχιστον μια φορά η καθεμία, τότε ο σχεδιασμός λέγεται ότι είναι προβολικότητας k (G.Box και J.Tyssedal).

Η προβολική ιδιότητα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Εδώ ο αρχικός σχεδιασμός προβάλλεται σε μικρότερη διάσταση, επιλέγοντας αυτές τις στήλες που αντιστοιχούν στους παράγοντες που εμφανίστηκαν σημαντικοί στην αρχική ανάλυση. Οι Box και Tyssedal όρισαν την προβολικότητα ενός σχεδιασμού κρησαρίσματος δύο επιπέδων έτσι ώστε, όλες οι παραγοντικές επιδράσεις των k αυτών παραγόντων να είναι εκτιμήσιμες με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και ο υπολογισμός της διασποράς του σφάλματος να γίνεται από τις επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις.

Τα πειράματα κρησαρίσματος συνήθως χρησιμοποιούνται στα πρώτα στάδια μιας έρευνας, όταν είναι πολύ πιθανό πολλοί από τους αρχικούς παράγοντες να έχουν μικρή ή μηδενική επίδραση στην απόκριση.

Οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος είναι συνήθως διακριτικής ικανότητας III. Ο λόγος είναι ότι σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III επιτρέπουν σε κάποιον να διερευνήσει τις κύριες επιδράσεις από πολλούς παράγοντες με περιορισμένο αριθμό πειραματικών εκτελέσεων. Μερικές φορές όμως, οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος είναι διακριτικής ικανότητα IV. Στους σχεδιασμούς διακριτικής ικανότητας IV, οι κύριες επιδράσεις συγχέονται στην χειρότερη περίπτωση, με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων. Αυτό είναι καλύτερο από την άποψη σύγχυσης, αλλά οι σχεδιασμοί απαιτούν μεγαλύτερο αριθμό πειραματικών εκτελέσεων από ότι οι σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III.

Οι σχεδιασμοί αυτοί προκύπτουν από πίνακες Hadamard και πιο συγκεκριμένα από κανονικοποιημένους πίνακες Hadamard, αν αφαιρεθεί η πρώτη στήλη με τις μονάδες οπότε προκύπτουν σχεδιασμοί κρησαρίσματος με παραμέτρους (n, n-1, 2, t), όπου t η ισχύ του σχεδιασμού. Μια άλλη κοινή οικογένεια των σχεδίων κρησαρίσματος είναι οι σχεδιασμοί Plackett-Burman, που ονομάστηκε έτσι από τους εφευρέτες του (R.L. Plackett και J.P. Burman). Αυτοί οι σχεδιασμοί είναι διακριτικής ικανότητας III.

Γενικά, σαν σχεδιασμοί κρησαρίσματος p παραγόντων, μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε παραγοντικός σχεδιασμός, που έχει ως εκτελέσεις, οποιοδήποτε υποσύνολο των 2^p πειραματικών εκτελέσεων, του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού p παραγόντων. Το πρόβλημα είναι ότι κάποιες επιλογές, μας δίνουν μη ερμηνεύσιμα αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό, θα ασχοληθούμε με σχεδιασμούς όπου οι στήλες τους είναι ορθογώνιες, έτσι ώστε, οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων να είναι πάντοτε ασυσχέτιστες. Τέτοιοι σχεδιασμοί κρησαρίσματος προκύπτουν από τους ορθογώνιους σχηματισμούς οι οποίοι παρουσιάζονται διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους.

1.2 Ορθογώνιοι σχηματισμοί

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σαν σχεδιασμοί κρησαρίσματος για περιπτώσεις όπου εξετάζεται ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων, εκ των οποίων ένα μικρό υποσύνολο αναμένεται να έχει σημαντική επίδραση σε μία εξαρτημένη μεταβλητή. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν από τον Rao το 1947, ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί για τον υπολογισμό των κύριων επιδράσεων και των αλληλεπιδράσεων χαμηλής τάξης.

Ένας ορθογώνιος σχηματισμός OA(n, p, s, t) είναι ένας n x p πίνακας με στοιχεία επιλεγμένα από ένα σύνολο s διακεκριμένων συμβόλων διατεταγμένων έτσι ώστε, για κάθε επιλογή t στηλών του σχεδιασμού, καθένα από τα s^t διανύσματα γραμμών να εμφανίζονται το ίδιο συχνά. Επομένως είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι το s^t διαιρεί το n. Άρα ισχύς t σημαίνει ότι για οποιαδήποτε επιλογή t στηλών δημιουργείται ένας πλήρης s^t παραγοντικός σχεδιασμός.

Ειδικότερα για τον OA(n, p, s, t) έχουμε,

n: το πλήθος των εκτελέσεων (παρατηρήσεων) του σχεδιασμού

p: το πλήθος των παραγόντων

s: το πλήθος των στάθμεων (επιπέδων) του κάθε παράγοντα

t: η ισχύ (strength) του σχεδιασμού

Οι πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί, καθώς και τα κλάσματα τους, ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των Ορθογώνιων Σχηματισμών. Κάθε OA(n, p, s, t) ορίζει έναν παραγοντικό σχεδιασμό (η κλάσμα αυτού) με n εκτελέσεις, p παράγοντες, s στάθμες ο καθένας και ισχύ t.

Ο Hedayat όρισε έναν ορθογώνιο σχηματισμό OA(n, p, s, t+) σαν έναν ορθογώνιο σχηματισμό, ο οποίος δεν έχει ισχύ t+1, αλλά κάποια επιλογή k < p στηλών του να σχηματίζει έναν ορθογώνιο σχηματισμό OA(n, k, s, t+1).

Είναι φανερό, ότι για κάθε επιλογή k < p στηλών ενός OA(n, p, s, t) ορίζει ένα νέο ορθογώνιο σχηματισμό OA(n, k, s, t’), του οποίου η ισχύς ενδέχεται να είναι μεγαλύτερη του αρχικού. Για παράδειγμα στον πίνακα 1.1 η ισχύς του ορθογώνιου σχηματισμού είναι t = 2, αν όμως αντί για p = 7 πάρουμε k = 4 στήλες (k < p) και ειδικότερα τις στήλες *A, B, C* και *G* ο καινούριος σχηματισμός θα έχει ισχύ t = 3 (στην περίπτωση όμως που επιλέγαμε τις στήλες *D, E, F* και G η ισχύ θα παρέμενε t = 2).

n	A	B	C	D = AB	E = AC	F = BC	G = ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Πίνακας 1.1: 2^{7-4} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός

Υπό τη συνθήκη ότι s = 2 και υποθέτοντας ότι η ισχύς του σχηματισμού είναι τουλάχιστον t = 2, οι σχηματισμοί αυτοί καλούνται και *ορθογώνια σχέδια κυρίων επιδράσεων*, αφού οι κύριες επιδράσεις των p παραγόντων είναι εκτιμήσιμες και επιπλέων, οι εκτιμήσεις των, που βρίσκονται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, είναι ασυσχέτιστες.

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον αριθμό των παραγόντων που μπορούν να μελετήσουν, στους κορεσμένους ορθογώνιους σχηματισμούς και στους μη κορεσμένους ορθογώνιους σχηματισμούς. Ειδικότερα, ένας ορθογώνιος σχηματισμός λέγεται κορεσμένος όταν ο αριθμός των παραγόντων που μπορεί να μελετήσει είναι ο μεγαλύτερος δυνατός, σε συνάρτηση με τον αριθμό των εκτελέσεών του και της ισχύος του. Αντίθετα, ένας σχεδιασμός λέγεται μη κορεσμένος όταν ο αριθμός των παραγόντων που μπορεί να μελετήσει δεν είναι ο μεγαλύτερος δυνατός σε συνάρτηση με τον αριθμό των εκτελέσεών του και της ισχύος του. Από την ανισότητα του Rao ισχύει $k \leq \frac{n-1}{s-1}$ για *t=2*, ενώ όταν *t=3* ισχύει $k \leq \frac{\frac{n}{s}-1}{s-1}+1$. Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με κορεσμένους ορθογώνιους σχηματισμούς όπου *s=2*, κάτι που πρακτικά σημαίνει ότι μπορούν να μελετηθούν μέχρι n-1 παράγοντες.

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί μπορούν επίσης να ταξινομηθούν ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους σε δύο κατηγορίες, τους απλούς παραγοντικούς σχεδιασμούς και τους σύνθετους παραγοντικούς σχεδιασμούς. Οι απλοί παραγοντικοί σχεδιασμοί κατασκευάζονται για κάθε αριθμό παρατηρήσεων που είναι δύναμη του 2. Ειδικότερα, απλοί παραγοντικοί σχεδιασμοί λέγονται αυτοί στους οποίους δύο οποιεσδήποτε παραγοντικές επιδράσεις είναι ορθογώνιες ή πλήρως αναμεμειγμένες (ταυτόσημες). Όταν δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο στηλών που αντιστοιχούν σε οποιεσδήποτε δύο παραγοντικές επιδράσεις ισούται με 0 (ορθογωνιότητα) ή με ±n (πλήρης ανάμειξη). Αξίζει να σημειωθεί, πως στους απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, η πλήρης ανάμειξη των επιδράσεών τους φαίνεται από το σύνολο των οριζουσών σχέσεων του σχεδιασμού. Τέλος, στην κατηγορία των απλών σχεδιασμών ανήκουν και οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί που παρουσιάζονται στην Παράγραφο 1.2.1.2, καθώς και οι Plackett-Burman σχεδιασμοί οι οποίοι αναλύονται διεξοδικά στην Παράγραφο 1.2.2.2 και προκύπτουν από τους πίνακες Hadamard τάξης $n = 2^p$. Οι σύνθετοι παραγοντικοί σχεδιασμοί κατασκευάζονται για κάθε αριθμό παρατηρήσεων που είναι πολλαπλάσιο του 4. Ειδικότερα, σύνθετοι παραγοντικοί σχεδιασμοί λέγονται αυτοί στους οποίους συμβαίνει το φαινόμενο της μερικής ανάμειξης, δηλαδή δύο οποιεσδήποτε παραγοντικές επιδράσεις δεν είναι ούτε ορθογώνιες ούτε πλήρως αναμεμειγμένες. Παραδείγματα σύνθετων παραγοντικών σχεδιασμών είναι οι Plackett-Burman σχεδιασμοί που προκύπτουν από πίνακες Hadamard τάξης n, όπου το n είναι πολλαπλάσιο του 4 αλλά όχι δύναμη του 2. Την τελευταία δεκαετία οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Οι κύριοι λόγοι για την χρήση σύνθετων σχεδιασμών είναι η οικονομία στο μέγεθος των παρατηρήσεων και η ευελιξία στην επιλογή των συνδυασμών επιπέδων των παραγόντων.

Για κάθε επιλογή n, k και s είναι δυνατόν να σχηματίσουμε διάφορους ορθογώνιους σχηματισμούς με τις συγκεκριμένες αυτές παραμέτρους. Πολλοί από αυτούς όμως είναι ισοδύναμοι. Ισοδύναμοι η ισόμορφοι λέγονται δύο ορθογώνιοι σχηματισμοί αν ο ένας μπορεί να παραχθεί από τον άλλο, με μια σειρά από μεταθέσεις γραμμών ή/και στηλών ή/και συμβόλων σε κάθε στήλη. Επιστημονικά, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η εύρεση μη ισοδύναμων ορθογώνιων σχηματισμών με συγκεκριμένες παραμέτρους, διότι ενδέχεται μερικοί από αυτούς να συμπεριφέρονται καλύτερα σε διάφορες πειραματικές ή ερευνητικές καταστάσεις.

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε εξ’ ολοκλήρου με την ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση όπου s = 2 και παρουσιάζουμε μη ισοδύναμους ορθογώνιους σχηματισμούς που προκύπτουν, όταν οι κορεσμένοι σχεδιασμοί Hadamard προβάλλονται σε μικρές διαστάσεις.

1.2.1 Απλοί σχεδιασμοί

Όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι απλοί παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι ορθογώνιοι σχηματισμοί και κατασκευάζονται για κάθε αριθμό παρατηρήσεων που είναι δύναμη του 2. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των σχεδιασμών αυτών είναι οι εύκολα ερμηνεύσιμες επιδράσεις λόγω της πλήρους ανάμειξης οποιονδήποτε δύο παραγοντικών επιδράσεων. Για αυτούς τους λόγους, οι απλοί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων χρησιμοποιούνται συχνά στην βιομηχανία για το κρησάρισμα ενός μεγάλου αριθμού παραγόντων. Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζονται οι 2^p παραγοντικοί σχεδιασμοί καθώς και τα κλάσματά τους.

1.2.1.1 Εισαγωγή στους 2^p παραγοντικούς σχεδιασμούς

Μια σημαντική κατηγορία παραγοντικών σχεδιασμών, η οποία είναι θεμελιώδης και χρησιμοποιείται ευρέως στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος, είναι οι γνωστοί *2^p παραγοντικοί σχεδιασμοί*. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Douglas C. Montgomery, στο βιβλίο του Design and Analysis of Experiments, 5^{th} edition, αναλύει εκτενώς τους 2^p παραγοντικούς σχεδιασμούς. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια συνοπτική ανάλυση αυτών των σχεδιασμών, για την αναγκαιότητα της κατανόησης των σχεδιασμών κρησαρίσματος που θα μας απασχολήσουν σε παρακάτω κεφάλαιο.

Ο 2^p παραγοντικός σχεδιασμός χρησιμοποιείται όταν έχουμε p παράγοντες και εξετάζουμε δύο μόνο επίπεδα για τον καθένα. Τα επίπεδα του παράγοντα μπορεί να είναι ποσοτικά, όπως είναι δυο τιμές της θερμοκρασίας, του βάρους ή του χρόνου, ή μπορεί να είναι ποιοτικά, όπως είναι δυο διαφορετικοί χειριστές, ή δυο διαφορετικές μηχανές. Τα 2^p είναι πολύ αποδοτικά, γιατί επιτρέπουν τη διερεύνηση πολλών παραγόντων με χρήση ενός σχετικά μικρού αριθμού δοκιμών. Μια πλήρης επανάληψη ενός σχεδιασμού με p παράγοντες, με δύο επίπεδα ο καθένας, απαιτεί $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^p$ παρατηρήσεις και λέγεται *2^p παραγοντικός σχεδιασμός*. Λόγω της ύπαρξης δύο μόνο επιπέδων, οι συμβολισμοί και οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι σε σχέση με εκείνους των παραγοντικών πειραμάτων. Υποθέτουμε ότι όλοι οι παράγοντες είναι σταθεροί και ότι τα πειράματα διενεργούνται σε σχεδιασμούς πλήρους τυχαιοποίησης. Για τη στατιστική συμπερασματολογία, γίνονται οι συνήθεις υποθέσεις της κανονικότητας, της ομοσκεδαστικότητας και της ανεξαρτησίας των σφαλμάτων.

Συμβολισμοί:

Παράγοντες: Συνήθως τους συμβολίζουμε με κεφαλαία λατινικά γράμματα (*A*,*B*,*C* κλπ).

Επίπεδα παραγόντων: Επειδή εξετάζουμε τους παράγοντες σε 2 μόνο επίπεδα θεωρούμε το ένα ως *''χαμηλό''* και το άλλο ως *''υψηλό''*. Για το *χαμηλό* επίπεδο συνήθως χρησιμοποιούμε το «-» και για το *υψηλό* το «+».

Παραγοντικές επιδράσεις: Με κεφαλαία λατινικά γράμματα (*A*,*B*,*C* κλπ), χωρίς να υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Για παράδειγμα με *A* συμβολίζεται η κύρια επίδραση του παράγοντα *A* με *AB* η αλληλεπίδραση των παραγόντων *A* και *B*.

Θεραπείες: Είναι ο συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων και συμβολίζεται με κατάλληλους συνδυασμούς των προσήμων, ή πεζών λατινικών γραμμάτων. Για παράδειγμα όταν σε μία δοκιμή εξετάζουμε τον παράγοντα *A* στο χαμηλό επίπεδο και τον *B* στο υψηλό χρησιμοποιούμε το συμβολισμό « - + » ή το γράμμα *b*.

Αριθμός επαναλήψεων: Συμβολίζεται με το λατινικό γράμμα *n*.

Ο απλούστερος 2^p παραγοντικός σχεδιασμός είναι αυτός με 2 παράγοντες 2 επιπέδων. Αυτός ο σχεδιασμός καλείται *2^2 παραγοντικός σχεδιασμός*. Το παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζεται για την καλύτερη κατανόηση του σχεδιασμού.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε την επίδραση δύο παραγόντων *A* και *B* στο χρόνο αντίδρασης μίας χημικής διαδικασίας. Οι παράγοντες εξετάζονται σε δύο επίπεδα ο καθένας και συγκεκριμένα ο *A* στις τιμές 20 και 50 και ο *B* στις τιμές 15 και 17. Αποφασίζεται να γίνουν n = 3 επαναλήψεις σε κάθε συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων.

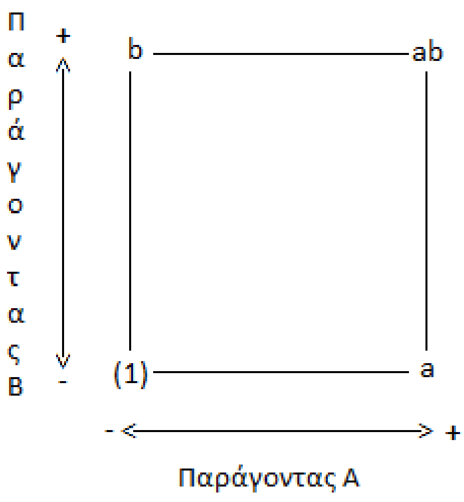
Θεραπεία						AxB	Επανάληψη (n)			Σύνολο
A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*AB*	I	II	III	
20	*15*	*χαμηλή*	*χαμηλή*	-	-	+	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	$(1)=\sum_{j=1}^{n} Y_{1j}$
50	*15*	*υψηλή*	*χαμηλή*	+	-	-	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	$a=\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}$
20	*17*	*χαμηλή*	*υψηλή*	-	+	-	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	$b=\sum_{j=1}^{n} Y_{3j}$
50	*17*	*υψηλή*	*υψηλή*	+	+	+	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	$ab=\sum_{j=1}^{n} Y_{4j}$

Πίνακας 1.2: Πειραματικό πλάνο ενός 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού

Οι τέσσερεις θεραπείες στο σχεδιασμό συνήθως παριστάνονται με μικρά λατινικά γράμματα. Η υψηλή στάθμη οποιουδήποτε παράγοντα στη θεραπεία, συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό γράμμα και η χαμηλή στάθμη ενός παράγοντα, συμβολίζεται με την απουσία του αντίστοιχου γράμματος.

Επομένως: το « *a* » παριστάνει τον συνδυασμό αγωγής του παράγοντα *A* στην υψηλή στάθμη και του παράγοντα *B* στη χαμηλή στάθμη, το « *b* » παριστάνει τον παράγοντα *A* στη χαμηλή στάθμη και τον παράγοντα *B* στην υψηλή στάθμη, το « *ab* » παριστάνει και τους δύο παράγοντες στην υψηλή στάθμη, ενώ το (1) χρησιμοποιείται για να συμβολίσουμε και τους δύο παράγοντες στη χαμηλή στάθμη. Αυτός ο συμβολισμός χρησιμοποιείται σε όλους τους 2^p σχεδιασμούς, ενώ είναι συχνά ευχάριστο να γράφουμε τις θεραπείες με τη σειρά (1), *a, b* και *ab* η οποία αναφέρεται και σαν η τυπική διάταξη των θεραπειών. Στην περίπτωση όπου έχουμε *n* επαναλήψεις, οι συμβολισμοί (1), *a, b* και *ab* παριστάνουν το σύνολο όλων των *n* επαναλήψεων που παίρνονται στη συγκεκριμένη θεραπεία.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού είναι ένα τετράγωνο, του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων (θεραπειών) και φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική αναπαράσταση του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού

Η κύρια επίδραση ενός παράγοντα, ορίζεται σαν η διαφορά των μέσων αποκρίσεων που αντιστοιχούν στα δύο επίπεδα του και δίνεται από τον τύπο:

Για τον παράγοντα *A*,

$$A = \bar{Y}_{A+} - \bar{Y}_{A-} = \frac{1}{2n}\left(a + ab\right) - \frac{1}{2n}(b + (1)) = \frac{1}{2n}(a + ab - b - (1))$$

Για τον παράγοντα *B*,

$$B = \bar{Y}_{B+} - \bar{Y}_{B-} = \frac{1}{2n}\left(b + ab\right) - \frac{1}{2n}(a + (1)) = \frac{1}{2n}(b + ab - a - (1))$$

Η αλληλεπίδραση *AB* ορίζεται σαν η μέση διαφορά μεταξύ της επίδρασης του *A* στην υψηλή στάθμη του *B* και της επίδρασης του *A* στη χαμηλή στάθμη του *B*.

$$AB = \frac{1}{2n}[\left(ab - b\right) - (a - (1))] = \frac{1}{2n}[(ab + (1)) - (a + b)] = \frac{1}{2n}(ab + (1) - a - b)$$

Η εκτίμηση των παραγοντικών επιδράσεων μπορεί εύκολα να γίνει και με την χρήση των αντιθέσεων. Ειδικότερα εκτιμούμε τις αντιθέσεις και τις διαιρούμε με *2n*. Από τα πρόσημα του πίνακα 1.2 εύκολα υπολογίζουμε τις παρακάτω αντιθέσεις. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα της κατάλληλης στήλης του πίνακα, με την αντίστοιχη θεραπεία και προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, για να εκτιμήσουμε την επίδραση του παράγοντα *A*, πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα της στήλης *A*, με την αντίστοιχη θεραπεία κάθε φορά και προσθέτοντας τις θεραπείες μεταξύ τους, παίρνουμε την αντίθεση $l_A = -(1) + a - b + ab$. Τέλος, διαιρώντας με *2n*, υπολογίζουμε την επίδραση του παράγοντα *A*. Ομοίως γίνεται ο υπολογισμός και για την κύρια επίδραση του *B* αλλά και για την αλληλεπίδραση του *AB*. Παρατηρούμε ότι παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα με πριν.

$$l_A = (-(1) + a - b + ab), A = \frac{1}{2n} l_A$$

$$l_B = (-(1) - a + b + ab), B = \frac{1}{2n} l_B$$

$$l_{AB} = ((1) - a - b + ab), AB = \frac{1}{2n} l_{AB}$$

Ο υπολογισμός των παραγοντικών επιδράσεων γενικεύεται σε όλους τους 2^p παραγοντικούς σχεδιασμούς. Να σημειωθεί ότι η στήλη *AB* των πρόσημων έχει προκύψει από το γινόμενο των στηλών *A* και *B*. Ομοίως προκύπτουν και οι στήλες προσήμων των αλληλεπιδράσεων μεγαλύτερου βαθμού, που θα δούμε σε σχεδιασμούς παρακάτω.

Για να εντοπίσουμε ποιες επιδράσεις είναι σημαντικές και ποιες αμελητέες χρησιμοποιούμε την ανάλυση διακύμανσης. Η συνολική μεταβλητότητα *SST* διαιρείται στην ερμηνεύσιμη μεταβλητότητα, στην περίπτωση μας την *SSA, SSB* και *SSAB* από τις μεταβλητές *A, B, AB* και στην ανερμήνευτη μεταβλητότητα *SSE*.

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

Στον πίνακα 1.3 παρουσιάζεται η ανάλυση διακύμανσης για έναν 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό ενώ τα αθροίσματα τετραγώνων για τις επιδράσεις υπολογίζονται με την βοήθεια των αντιθέσεων από τους τύπους:

$$SSA = \frac{1}{4n}(l_A)^2,$$

$$SSB = \frac{1}{4n}(l_B)^2,$$

$$SSAB = \frac{1}{4n}(l_{AB})^2,$$

όπου n = 3 ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος.

Source	SS	DF	MS	F
A	*SSA*	*1*	*SSA/1*	*MSA/MSE*
B	*SSB*	*1*	*SSB/1*	*MSB/MSE*
AB	*SSAB*	*1*	*SSAB/1*	*MSAB/MSE*
Residual	*SSE*	*4(n-1)*	*SSE/4(n-1)*	
Total	*SST*	*4n-1*		

Πίνακας 1.3: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης για έναν 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό

Οι βαθμοί ελευθερίας DF, ισοδυναμούν με το πλήθος των ανεξάρτητων παρατηρήσεων μείον τον αριθμό των παραμέτρων που εκτιμώνται ως ενδιάμεσα στάδια, οι οποίοι απαιτούνται για τον υπολογισμό του εκάστοτε τετραγωνικού αθροίσματος. Για παράδειγμα το πλήθος των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν σε μία κύρια επίδραση, έστω του παράγοντα *A*, είναι 1ας και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$df_A = \text{πλήθος επιπέδων του παράγοντα} - 1$$

Ομοίως υπολογίζονται για τον παράγοντα *B* και για την αλληλεπίδραση *AB*. Ενώ οι βαθμοί ελευθερίας για ολόκληρο το σχεδιασμό είναι 11 (για $n = 3$) και δίνονται από την σχέση:

$$df_{DOE} = \text{πλήθος δοκιμών} - 1$$

Στον 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης είναι:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

Ο υπολογισμός και η κατασκευή του αναλύονται στην παράγραφο 1.3.

Η μέθοδος ανάλυσης που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα για τους 2^2 παραγοντικούς σχεδιασμούς μπορεί να γενικευτεί, στην περίπτωση ενός 2^p παραγοντικού σχεδιασμού, δηλαδή ενός σχεδιασμού με p παράγοντες δυο επιπέδων ο καθένας.

Ειδικότερα στον 2^p παραγοντικό σχεδιασμό υπάρχουν:

$\binom{p}{1} = p$ κύριες επιδράσεις

$\binom{p}{2}$ αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων

,…,

$\binom{p}{p} = 1$ αλληλεπίδραση p παραγόντων

Δηλαδή, σε ένα 2^p παραγοντικό σχεδιασμό το πλήρες μοντέλο παλινδρόμησης θα περιέχει 2^p - 1 επιδράσεις.

Run	A	B	C	D	…	ABCD…P	Θεραπείες
1	-	-	-	-			*(1)*
2	+	-	-	-			*a*
3	-	+	-	-			*b*
4	+	+	-	-			*ab*
5	-	-	+	-			*c*
6	+	-	+	-			*ac*
7	-	+	+	-			*bc*
8	+	+	+	-			*abc*
9	-	-	-	+			*d*
10	+	-	-	+			*ad*
…							…
2^p-1	-	+	+	+			*bcd…p*
2^p	+	+	+	+			*abc…p*

Πίνακας 1.4: Πίνακας αλγεβρικών προσήμων

Ο αριθμός των διαφορετικών θεραπειών, σε ένα 2^p παραγοντικό σχεδιασμό, είναι 2^p και δεν μπορεί να παρουσιαστεί γεωμετρικά στον τρισδιάστατο χώρο (για p > 3) παρά μόνο σε θεωρητικό επίπεδο. Στην περίπτωση του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού που μελετήθηκε παραπάνω η γραφική αναπαράσταση φαίνεται στα σχήματα 1.1. Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα ''-'' και ''+'' για να συμβολίζουμε το ''χαμηλό'' και το ''υψηλό'' επίπεδο του κάθε παράγοντα, μπορούμε να σχεδιάσουμε μία λίστα με τις 2^p θεραπείες (πεζά λατινικά γράμματα) όπως φαίνεται και στον πίνακα 1.4. Όπως συζητήθηκε και παραπάνω, η τυπική διάταξη με την οποία γράφονται οι θεραπείες είναι της μορφής:
(1), *a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad,…, bcd…p, abc…p*.

Ο ορισμός των επιδράσεων σε ένα 2^p παραγοντικό σχεδιασμό (για μεγάλο p) είναι σύνθετος και για την αποφυγή σύγχυσης του αναγνώστη, ο υπολογισμός τους θα γίνει με την βοήθεια των αντιθέσεων. Επειδή όμως, (όπως φαίνεται και από τον πίνακα 1.4) για μεγάλες τιμές του p, ο πίνακας προσήμων δεν είναι βολικό να κατασκευαστεί, χρησιμοποιείται μία εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού των αντιθέσεων. Αρχικά προσδιορίζεται η αντίθεση για την αλληλεπίδραση ABC…P αναπτύσσοντας το δεξί μέλος της:

$$l_{AB\ldots P} = (a \pm 1)(b \pm 1)\cdots(p \pm 1)$$

χρησιμοποιώντας άλγεβρα, όπου στην τελική έκφραση αντικαθιστάται το ''1'' με το (1). Το πρόσημο σε κάθε σύνολο παρενθέσεων είναι αρνητικό, εάν ο παράγοντας συμπεριλαμβάνεται στην αλληλεπίδραση και θετικό, εάν ο παράγοντας δεν συμπεριλαμβάνεται. Όταν υπολογισθούν όλες οι αντιθέσεις, μπορούν να εκτιμηθούν οι επιδράσεις και να υπολογιστούν τα αθροίσματα τετραγώνων σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$AB\ldots P = \frac{2}{N2^p} l_{AB\ldots P}$$

$$SSAB\ldots P = \frac{1}{n2^p} l_{AB\ldots P}^2$$

όπου το *n* συμβολίζει τον αριθμό των επαναλήψεων.

Source	SS	DF	MS	F
A	*SSA*	*1*	*SSA/1*	*MSA/MSE*
B	*SSB*	*1*	*SSB/1*	*MSB/MSE*
C	*SSC*	*1*	*SSC/1*	*MSC/MSE*
AB	*SSAB*	*1*	*SSAB/1*	*MSAB/MSE*
AC	*SSAC*	*1*	*SSAC/1*	*MSAC/MSE*
…				
ABC…P	*SSABC…P*	*1*	*SSABC…P/*	*MSABC…P/MSE*
Residual	*SSE*	$2^p(n\text{-}1)$	$SSE/2^p(n\text{-}1)$	
Total	*SST*	$2^p n\text{-}1$		

Πίνακας 1.5: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης για έναν 2^p παραγοντικό σχεδιασμό

Στον 2^p παραγοντικό σχεδιασμό το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης είναι:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_1 X_2 + ... + \beta_p X_1 X_2 ... X_p + \varepsilon$$

Του οποίου ο υπολογισμός και η κατασκευή του αναλύεται στην παράγραφο 1.3.

Τέλος να σημειωθεί ότι υπάρχουν 2^p - 1 βαθμοί ελευθερίας μεταξύ των 2^p θεραπειών σε έναν 2^p παραγοντικό σχεδιασμό. Για την κάθε επίδραση αντιστοιχεί ένας βαθμός ελευθερίας. Για παράδειγμα για τις *p* κύριες επιδράσεις αντιστοιχούν *p* βαθμοί ελευθερίας.

1.2.1.2 Εισαγωγή στους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς

Καθώς μεγαλώνει ο αριθμός των παραγόντων σε έναν 2^p παραγοντικό σχεδιασμό, ο αριθμός των παρατηρήσεων που απαιτούνται για μια πλήρη επανάληψη του σχεδιασμού αυξάνεται πάρα πολύ γρήγορα. Για παράδειγμα, μια πλήρης επανάληψη ενός 2^7 σχεδιασμού απαιτεί 128 παρατηρήσεις. Σε αυτό το σχεδιασμό μόνο 7 από τους 127 βαθμούς ελευθερίας αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις και μόνο 21 βαθμοί ελευθερίας, στις αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων. Οι υπόλοιποι 99 βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις τριών και περισσότερων παραγόντων. Δεν είναι όμως όλες οι επιδράσεις σημαντικές.

Στην περίπτωση που ορισμένες υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις θεωρηθούν ότι είναι αμελητέες, μπορεί να δοθεί πληροφορία για τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης, με την εκτέλεση μόνο ενός κλάσματος του πλήρους παραγοντικού πειράματος. Αυτοί οι σχεδιασμοί ονομάζονται *κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί* και βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά πρακτικά προβλήματα.

Η επιτυχής χρήση των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών βασίζεται σε τρεις βασικές αρχές:

Βασικές αρχές για τις παραγοντικές επιδράσεις:

- **Ιεραρχία:** Επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές από αυτές υψηλής τάξης.
- **Σποραδικότητα:** Ο αριθμός των σημαντικών επιδράσεων σε ένα παραγοντικό πείραμα είναι μικρός.
- **Κληρονομικότητα:** Για να είναι μια αλληλεπίδραση σημαντική πρέπει όλοι οι «γονείς» της να είναι σημαντικοί.

Ενώ η κυριότερη χρήση των κλασματικών σχεδιασμών είναι σε πειράματα κρησαρίσματος, πειράματα δηλαδή στα οποία μετέχουν πολλοί παράγοντες με σκοπό την αναγνώριση εκείνων των παραγόντων που έχουν μεγάλες επιδράσεις.

Έστω ότι ένας ερευνητής μελετάει *p* παράγοντες αλλά δεν είναι εφικτό (π.χ. λόγω έλλειψης πόρων) να εκτελέσει και τις 2^p θεραπείες. Είναι δυνατό όμως να εκτελέσει ένα υποσύνολο αυτών των θεραπειών, έστω το ένα-δεύτερο αυτών. Το ένα-δεύτερο κλάσμα του 2^p παραγοντικού σχεδιασμού ονομάζεται και *2^{p-1} παραγοντικός σχεδιασμός*. Για παράδειγμα σε έναν 2^3 σχεδιασμό με $2^3 = 8$ θεραπείες υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι για την εκτέλεση τεσσάρων μόνο παρατηρήσεων. Χρησιμοποιώντας το ένα-δεύτερο κλάσμα του 2^3 σχεδιασμού κατασκευάζεται ένας σχεδιασμός με $2^{3-1} = 4$ θεραπείες. Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο μεθοδολογίες για την κατασκευή ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού.

<u>Μέθοδος 1:</u>

Ένας κλασματικός 2^{3-1} παραγοντικός σχεδιασμός μπορεί να κατασκευαστεί αν επιλέξουμε μια στήλη του πίνακα προσήμων και κρατήσουμε αυτές τις γραμμές που η συγκεκριμένη στήλη επιλογής έχει το ίδιο επίπεδο. Έστω ότι επιλέγουμε την στήλη *ABC* και το ‘χαμηλό’ επίπεδο (στον πίνακα 1.6). Κρατώντας μόνο το οριζόντιο γραμμοσκιασμένο κομμάτι, έχουμε τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού τριών παραγόντων.

Run	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Θεραπείες
1	+	-	-	-	+	+	+	-	*(1)*
4	+	+	+	-	+	-	-	-	*ab*
6	+	+	-	+	-	+	-	-	*ac*
7	+	-	+	+	-	-	+	-	*bc*
2	+	+	-	-	-	-	+	+	*a*
3	+	-	+	-	-	+	-	+	*b*
5	+	-	-	+	+	-	-	+	*c*
8	+	+	+	+	+	+	+	+	*abc*

Πίνακας 1.6: Πίνακας αλγεβρικών προσήμων

Παρατηρείται ότι ο σχεδιασμός που επιλέχτηκε αποτελείται από αυτές τις αγωγές που έχουν την ένδειξη «-» στην στήλη της αλληλεπίδρασης *ABC*. Επιπλέον φαίνεται ότι η επίδραση *ABC* «γεννά» τον σχεδιασμό και για το λόγο αυτό ονομάζεται και *γεννήτορας* του συγκεκριμένου κλάσματος. Συχνά θα αναφερόμαστε σε ένα γεννήτορα, όπως ο *ABC*, σαν μια «λέξη». Επιπλέον, παρατηρείται ότι η μοναδιαία στήλη -*I* ουσιαστικά ταυτίζεται με τη στήλη *ABC* (το γεννήτορα δηλαδή), επομένως $I = -ABC$. Η τελευταία σχέση λέγεται *ορίζουσα σχέση του σχεδιασμού*. Κάθε κλασματικός σχεδιασμός χαρακτηρίζεται από την ή τις ορίζουσες σχέσεις του.

Παρατηρώντας το γραμμοσκιασμένο μέρος του Πίνακα 1.6, παρατηρούμε ότι η στήλη *A* είναι αντίθετη από την στήλη *BC*, η στήλη *B* είναι αντίθετη από την *AC* και τέλος η στήλη *C* είναι αντίθετη από την στήλη *AB*. Συνεπώς, όταν θα εκτιμήσουμε τις κύριες επιδράσεις *A, B* και *C* μέσω των κατάλληλων αντιθέσεων, ταυτόχρονα θα εκτιμήσουμε και τις αλληλεπιδράσεις -*BC*, -*AC* και -*AB* αντίστοιχα. Δυο ή περισσότερες επιδράσεις που έχουν την ιδιότητα να συγχέονται σε ένα κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, καλούνται *ταυτόσημες επιδράσεις*.

Μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν οι επιδράσεις αυτές που συγχέονται, αν γράψουμε σε μία στήλη όλες τις παραγοντικές επιδράσεις και στην συνέχεια, σε μία δεύτερη στήλη να γράψουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με την ορίζουσα σχέση, (λαμβάνουμε υπόψη ότι CC = I). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 1.7.

Επίδραση	I = -ABC	Ταυτόσημες επιδράσεις
A	*A(-ABC) = -BC*	*A, -BC*
B	*B(-ABC) = -AC*	*B, -AC*
AB	*AB(-ABC) = -C*	*AB, -C*
C	*C(-ABC) = -AB*	*C, -AB*
AC	*AC(-ABC) = -B*	*AC, -B*
BC	*BC(-ABC) = -A*	*BC, -A*
ABC	*ABC(-ABC) = -I*	*ABC, -I*

Πίνακας 1.7: Πίνακας ταυτόσημων επιδράσεων

Ο προσδιορισμός του συνόλου των ταυτόσημων επιδράσεων καλείται και *προσδιορισμός της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων*. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν υπάρχουν περισσότερες από μία ορίζουσες εξισώσεις, (συμβαίνει σε κλασματικούς σχεδιασμούς όπου επιλέγονται θεραπείες κατά πολύ λιγότερες από τις θεραπείες του πλήρους σχεδιασμού), ο προσδιορισμός της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων μπορεί να είναι ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία.

Την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήθηκε παραπάνω, για την κατασκευή του κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού 2^{3-1}, θα ακολουθούσαμε και αν επιλέγαμε κάποια άλλη (επίδραση) στήλη του πίνακα 1.6 (π.χ. την BC). Σε κάθε περίπτωση όμως, η επιλογή της κατάλληλης επίδρασης είναι πολύ σημαντική καθώς κάποιες ορίζουσες δίνουν καλύτερους σχεδιασμούς από κάποιες άλλες. Ο τρόπος σύγκρισης αυτών των σχεδιασμών γίνεται με τον βαθμό διακριτικής τους ικανότητας, η οποία αναλύεται εκτενώς στην παράγραφο 1.4.

<u>Μέθοδος 2:</u>

Ένας άλλος τρόπος για να κατασκευαστεί το ½ κλάσμα του 2^p παραγοντικού σχεδιασμού, είναι γράφοντας αρχικά ένα βασικό σχεδιασμό, που να περιλαμβάνει όλες τις αγωγές ενός πλήρους 2^{p-1} παραγοντικού σχεδιασμού και στη συνέχεια, προσθέτοντας τον p-οστό παράγοντα, ως κάποια αλληλεπίδραση των p-1 παραγόντων. Η αλληλεπίδραση αυτή αποτελεί και το γεννήτορα του κλάσματος. Για παράδειγμα, για να κατασκευαστεί ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με γεννήτορα τον *ABC* που παρουσιάστηκε και στη μέθοδο 1, αρχικά κατασκευάζεται ένας 2^2 πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός (όπως φαίνεται και στον πίνακα 1.8) και στην συνέχεια στην θέση της αλληλεπίδρασης -*AB* προσθέτεται ο παράγοντας C.

A	B	C = (-AB)
-	-	-
+	-	+
-	+	+
+	+	-

Πίνακας 1.8: Ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση I =-ABC

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας κάθε επίδραση με την ορίζουσα σχέση του σχεδιασμού όπως φαίνεται στον πίνακα 1.7.

Κλείνοντας, κρίνεται αναγκαίο να σημειωθεί ότι δύο σχεδιασμοί είναι ισοδύναμοι όταν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με εναλλαγές, ή γραμμών, ή και στηλών, ή και με εναλλαγή προσήμων σε μία η περισσότερες στήλες. Για παράδειγμα ο σχεδιασμός του πίνακα 1.8 είναι ισοδύναμος με τον σχεδιασμό του πίνακα 1.9.

A	B	C = (AB)
-	-	+
+	-	-
-	+	-
+	+	+

Πίνακας 1.9: Ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση I =ABC

Μια άλλη περίπτωση κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού είναι το ένα-τέταρτο κλάσμα του 2^p παραγοντικού σχεδιασμού το οποίο ονομάζεται και *2^{p-2} παραγοντικός σχεδιασμός*. Ο σχεδιασμός αυτός περιλαμβάνει 2^{p-2} δοκιμές, έχει δύο γεννήτορες και δύο αρχικές ορίζουσες σχέσεις. Ο 2^{p-2} σχεδιασμός κατασκευάζεται γράφοντας αρχικά έναν βασικό σχεδιασμό που να περιλαμβάνει όλες τις αγωγές ενός πλήρους 2^{p-2} παραγοντικού σχεδιασμού και στη συνέχεια προσθέτοντας 2 στήλες με τον *p-1* παράγοντα και τον *p*-οστό παράγοντα, ως κάποιες κατάλληλες αλληλεπιδράσεις των *p-2* παραγόντων (όμοια με την μέθοδο 2). Οι αλληλεπιδράσεις αυτές αποτελούν και τους γεννήτορες του κλάσματος. Από τις δύο αρχικές ορίζουσες σχέσεις προκύπτει και μία τρίτη πολλαπλασιάζοντάς τις μεταξύ τους. Οι ταυτόσημες επιδράσεις υπολογίζονται βάση αυτών των τριών οριζουσών σχέσεων. Δηλαδή πολλαπλασιάζοντας την κάθε επίδραση με την κάθε ορίζουσα ξεχωριστά, (όπως έγινε και για τον υπολογισμό των ταυτόσημων επιδράσεων στον 2^{p-1} σχεδιασμό). Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε και την μέθοδο 1.

Η αναγκαιότητα για κλάσματα μικρότερου βαθμού, από τα κλάσματα του ½ και ¼ που μελετήσαμε, επέρχεται όταν το πλήθος των παραγόντων αυξάνεται σημαντικά. Γενικά, ο σχεδιασμός μικρότερων κλασμάτων γίνεται με την ίδια μέθοδο με αυτήν που μελετήσαμε και προηγουμένως. Ένα κλάσμα του 2^p παραγοντικού σχεδιασμού που περιλαμβάνει 2^{p-k} δοκιμές, καλείται *2^{p-k} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός*. Οι σχεδιασμοί αυτού του τύπου απαιτούν την επιλογή k ανεξαρτήτων γεννητόρων και k αρχικών οριζουσών σχέσεων. Το πλήθος των συνολικών οριζουσών σχέσεων είναι 2^{k-1} και ο υπολογισμός τους προκύπτει από τα γινόμενα των k αρχικών οριζουσών σχέσεων ανά δύο, τρεις, κ.ο.κ.

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων μπορεί να βρεθεί, πολλαπλασιάζοντας τη στήλη κάθε επίδρασης με τις ορίζουσες σχέσεις, ενώ το πλήθος τους είναι 2^k (δηλαδή κάθε επίδραση θα έχει 2^{k-1} ταυτόσημες επιδράσεις). Επειδή όμως δεν μπορούμε να έχουμε ξεκάθαρη εικόνα για τις 2^k ταυτόσημες επιδράσεις, συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η αρχή της ιεραρχίας των επιδράσεων και ο υπολογισμός της επίδρασης να χρεώνεται στην επίδραση με την μεγαλύτερη ιεραρχία και να θεωρούνται οι ταυτόσημες επιδράσεις μεγαλύτερης τάξης

Run	A	B	C	D	E=ACD	F=ABCD	G=ABD	H=ABC	J=BCD
1	-	-	-	-	-	+	-	-	-
2	-	-	-	+	+	-	+	-	+
3	-	-	+	-	+	-	-	+	+
4	-	-	+	+	-	+	+	+	-
5	-	+	-	-	-	-	+	+	+
6	-	+	-	+	+	+	-	+	-
7	-	+	+	-	+	+	+	-	-
8	-	+	+	+	-	-	-	-	+
9	+	-	-	-	+	-	+	+	-
10	+	-	-	+	-	+	-	+	+
11	+	-	+	-	-	+	+	-	+
12	+	-	+	+	+	-	-	-	-
13	+	+	-	-	+	+	-	-	+
14	+	+	-	+	-	-	+	-	-
15	+	+	+	-	-	-	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Πίνακας 1.10: Ο 2^{9-5}_{III} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός

αμελητέες. Όταν όμως ανάμεσα στις ταυτόσημες επιδράσεις υπάρχουν κάποιες με την ίδια ιεραρχία, ο διαχωρισμός δεν είναι άμεσος. Για το λόγο αυτό η επιλογή των γεννητόρων, θα πρέπει να γίνεται με προσοχή, έτσι ώστε πιθανές σημαντικές επιδράσεις να μην είναι ταυτόσημες μεταξύ τους.

Στον πίνακα 1.10 παρουσιάζεται η κατασκευή ενός 2^{9-5} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού, διακριτικής ικανότητας *III,* με γεννήτορες τους *E=ACD, F=ABCD, G=ABD, H=ABC* και *J=BCD*. Οι συνολικές ορίζουσες σχέσεις είναι (2^5 -1=31) και οι ταυτόσημες επιδράσεις είναι (2^5 = 32).

1.2.2 Σύνθετοι σχεδιασμοί

Σύνθετοι σχεδιασμοί, όπως οι σχεδιασμοί Plackett-Burman ή άλλοι ορθογώνιοι σχηματισμοί, χρησιμοποιούνται ευρέως στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος, λόγω της οικονομίας στο μέγεθος του αριθμού των παρατηρήσεων και την ευελιξία στην επιλογή των συνδυασμών επιπέδων των παραγόντων (Wu and Hamada 2000). Το προτέρημα των σύνθετων σχεδιασμών συγκριτικά με τους απλούς σχεδιασμούς, είναι ότι κατασκευάζονται για κάθε αριθμό παρατηρήσεων που είναι πολλαπλάσιο του 4. Καλύπτοντας έτσι τα κενά ανάμεσα στους απλούς σχεδιασμούς όσον αφορά την ποικιλία του αριθμού των θεραπειών.

Σε αντίθεση με τους απλούς σχεδιασμούς, οι σύνθετοι σχεδιασμοί μπορεί να παρουσιάσουν μία σύνθετη δομή στις ταυτόσημες επιδράσεις, έτσι ώστε ένας μεγάλος αριθμός επιδράσεων να μην είναι ούτε ορθογώνιες, ούτε πλήρως αναμεμειγμένες, δημιουργώντας δυσκολία στη σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό οι σύνθετοι σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται συνήθως για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων των παραγόντων. Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζονται οι σχεδιασμοί Hadamard καθώς και οι σχεδιασμοί Plackett - Burman.

1.2.2.1 Σχεδιασμοί Hadamard

Στη γενικότερη κατηγορία των ορθογώνιων σχεδιασμών ανήκουν και οι πίνακες Hadamard. Ειδικότερα ένας πίνακας Hadamard H_n τάξης *n,* είναι ένας *nxn* πίνακας με στοιχεία +1 και -1, για τον οποίο ισχύει $H_n^T H_n = H_n H_n^T = nI_n$ όπου I_n ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n.

Ένας πίνακας Hadamard λέγεται *κανονικοποιημένος* αν η πρώτη του γραμμή και η πρώτη του στήλη αποτελούνται από μονάδες. Τότε όλες οι υπόλοιπες $n - 1$ στήλες του θα αποτελούνται από ίσο αριθμό +1 και -1. Είναι εύκολο να κανονικοποιήσουμε έναν πίνακα Hadamard τάξης *n*, πολλαπλασιάζοντας με -1 οποιαδήποτε γραμμή ή και στήλη χρειάζεται. Με αυτήν τη διαδικασία παίρνουμε έναν ισοδύναμο πίνακα Hadamard τάξης *n*. Ειδικότερα, δύο πίνακες Hadamard τάξης n είναι ισοδύναμοι, αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με μία σειρά από αντιμεταθέσεις γραμμών ή και στηλών ή και πολλαπλασιασμό γραμμών η και στηλών με -1.

Αν αφαιρεθεί η πρώτη στήλη με τις μονάδες, σε οποιοδήποτε κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard, παίρνουμε έναν κορεσμένο ορθογώνιο σχηματισμό της μορφής OA(n, n-1, 2, 2). Ορθογώνιοι σχηματισμοί αυτής της μορφής αποτελούν μια ιδεατή επιλογή ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος και συχνά αναφέρονται ως σχεδιασμοί Hadamard.

Η μελέτη των προβολικών ιδιοτήτων των σχεδιασμών Hadamard, ιδίως για τις τάξεις όπου υπάρχουν περισσότεροι του ενός μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την τελική επιλογή σχεδιασμού κρησαρίσματος. Μια ιδιαίτερη κατηγορία σχεδιασμών Hadamard, είναι οι Plackett - Burman που αναλύονται διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.

1.2.2.2 Σχεδιασμοί Plackett - Burman

Μια ειδική κατηγορία ορθογώνιων σχηματισμών είναι οι Plackett-Burman σχεδιασμοί. Οι Plackett και Burman το 1946 ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων στους παραγοντικούς σχεδιασμούς. Για τους σχεδιασμούς δύο επιπέδων βρήκαν ότι είναι δυνατόν να εκτιμηθούν μέχρι και n – 1 παράγοντες με την μέγιστη ακρίβεια σε n εκτελέσεις, δεδομένου ότι το n είναι ένα πολλαπλάσιο του 4. Οι Plackett και Burman έδωσαν όλους τους συνδυασμούς για $n \leq 100$, εκτός από την περίπτωση για n = 92 που δόθηκε από τους Baumert, Colomb και Hall το 1962. Νωρίτερα, ο Paley είχε δημοσιεύσει ακολουθίες των οποίων οι κυκλικές μεταθέσεις έδιναν ορθογώνιους σχηματισμούς OA(n, n - 1, 2, 2), που τις περισσότερες φορές συμπίπτουν με τους σχεδιασμούς Plackett-Burman. Παρόλα αυτά η ονομασία τους, σαν σχεδιασμοί πειραμάτων, οφείλεται στους Plackett και Burman διότι πρώτοι αυτοί τους χρησιμοποίησαν για το σκοπό αυτό.

Ο τρόπος κατασκευής τους είναι κυκλικές μεταθέσεις μίας δοσμένης εκτέλεσης ή block εκτελέσεων, όπως αυτές δόθηκαν από τους Plackett και Burman σε μια εργασία τους το 1946 στο επιστημονικό περιοδικό Biometrika. Στον πίνακα 1.11 παρουσιάζονται οι εκτελέσεις που χρειάζονται για να κατασκευαστούν τέτοιοι σχεδιασμοί για *n* = 8, 12, 16, 20 και 24 εκτελέσεις. Αρχικά κατασκευάζουμε άλλες *n – 2* εκτελέσεις, με κυκλικές μεταθέσεις της δοσμένης εκτέλεσης και στο τέλος προσθέτουμε μια επιπλέων εκτέλεση, με τους παράγοντες στην στάθμη -1. Στον πίνακα 1.12 φαίνεται ο σχεδιασμός Plackett-Burman με n = 8 εκτελέσεις.

n	Εκτέλεση
8	+++−+−−
12	++−+++−−−+−
16	++++−+−++−−+−−−
20	++−−++++−+−+−−−−++−
24	+++++−+−++−−++−−+−+−−−−

Πίνακας 1.11: Κατασκευή Plackett-Burman σχεδιασμών για n = 8, 12, 16, 20, 24 εκτελέσεις

Για την πλήρη αντιστοίχισή τους με τους σχεδιασμούς Hadamard αρκεί να αντικαταστήσουμε το + με +1 και το – με -1 , όπου εμφανίζεται.

+++−+−−
−+++−+−
−−+++−+
+−−+++−
−+−−+++
+−+−−++
++−+−−+
−−−−−−−−

Πίνακας 1.12: Ο σχεδιασμός Plackett-Burman με n = 8 εκτελέσεις

Αν το *n* είναι δύναμη του 2, όπως *n* = 8, 16, 32, 64, οι σχεδιασμοί συμπίπτουν με τους 2^{p-k} κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς και καλούνται γεωμετρικοί σχεδιασμοί από τους Plackett και Burman. Όλοι οι άλλοι σχεδιασμοί αναφέρονται ως μη-γεωμετρικοί. Οι μη-γεωμετρικοί Plackett-Burman σχεδιασμοί επιτρέπουν ένα οικονομικό κρησάρισμα πολλών παραγόντων με λίγες παρατηρήσεις.

1.3 Παλινδρόμηση μη επαναλαμβανόμενων κορεσμένων σχεδιασμών

Προκειμένου να ερμηνευτούν με μεγαλύτερη ακρίβεια οι επιδράσεις των παραγόντων στην μεταβλητή απόκρισης, χρησιμοποιείται για το στατιστικό έλεγχο το μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης. Η γενική μορφή του μοντέλου σε ένα κορεσμένο ορθογώνιο σχεδιασμό n-1 παραγόντων 2 επιπέδων ο καθένας είναι:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \ldots + \beta_r X_{i1} X_{i2} + \ldots + \beta_m X_{i1} X_{i2} \ldots X_{i(n-1)} + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \text{ και } 0 < r < m$$

όπου,

- Y_i είναι η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής για την i παρατήρηση
- $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{i(n-1)}$ είναι κωδικοποιημένες μεταβλητές με τιμές +1 και -1 για τους παράγοντες $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (υψηλή - χαμηλή)
- $X_{i1}X_{i2} \ldots X_{i(n-1)}$ είναι μια κωδικοποιημένη μεταβλητή με τιμές +1 και -1 για την αλληλεπίδραση $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ (προκύπτει από το γινόμενο των τιμών της X_{i1}, X_{i2}, και $X_{i(n-1)}$)
- $\beta_0 = \hat{\mu} = \overline{Y}$, $\beta_1 = \frac{A1}{2}$, $\beta_2 = \frac{A2}{2}, \ldots, \beta_m = \frac{A1A2 \ldots An-1}{2}$, οι συντελεστές παλινδρόμησης οι οποίοι υπολογίζονται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και είναι ίσοι με το ½ της αντίστοιχης επίδρασης
- ε_i τα ανεξάρτητα σφάλματα $N(0,\sigma^2)$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι εξαιτίας της πολυπλοκότητας των πράξεων στην μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, οι υπολογισμοί γίνονται συνήθως με την χρήση υπολογιστή. Επίσης, ο λόγος για τον οποίο οι συντελεστές παλινδρόμησης είναι ίσοι με το ½ της αντίστοιχης επίδρασης, παρουσιάζεται αναλυτικά στο '*Modern Experimental Design'* , *Thomas P. Ryan (2007).*

Ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι το κατά πόσον μερικοί από τους όρους του μοντέλου έχουν σημαντική συνεισφορά στην εξήγηση της διακύμανσης που παρατηρείται στην μεταβλητή απόκρισης. Η πολλαπλή παλινδρόμηση παρέχει τη στατιστική συμπερασματολογία για τον καθορισμό του κατά πόσον μια μεταβλητή είναι σημαντική με τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\beta_j=0$, έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\beta_j \neq 0$, $j = 1,2,\ldots,m$. Αν η H_0 δεν απορριφθεί, για κάποια τιμή του j, συμπεραίνεται ότι η αντίστοιχη μεταβλητή δεν έχει σημαντική συνεισφορά στο μοντέλο. Στην περίπτωση αυτή, ο αντίστοιχος όρος διαγράφεται από το μοντέλο απλοποιώντας με αυτόν τον τρόπο τη διαδικασία.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως στους μη επαναλαμβανόμενους κορεσμένους σχεδιασμούς 2 επιπέδων, οι βαθμοί ελευθερίας δεν επαρκούν για τον υπολογισμό του σφάλματος, παρά το γεγονός ότι είναι αρκετοί για την εκτίμηση των n-1 επιδράσεων. Για τον λόγο αυτόν έχουν προταθεί διάφοροι μέθοδοι εντοπισμού των ενεργών επιδράσεων (βλέπε M. Hamada και N. Balakrishnan 1998).

1.4 Διακριτική ικανότητα και προβολή

Ένα βασικό κριτήριο για την επιλογή του καταλληλότερου κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού είναι η διακριτική του ικανότητα (*resolution*). Το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας, ή ευκρίνειας, ή αναλυτικής τάξης παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Box και Hunter το 1961. Με τον όρο διακριτική ικανότητα R ενός σχεδιασμού εννοούμε, ότι καμία επίδραση p-παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από R-p παράγοντες. Για την διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού συνήθως χρησιμοποιούμε την ρωμαϊκή αρίθμηση. Για παράδειγμα το ½ κλάσμα του 2^3 σχεδιασμού με ορίζουσα σχέση την $I = -ABC$ ή $I = ABC$ είναι ένας 2_{III}^{3-1} (διακριτικής ικανότητας *III*) σχεδιασμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι, όταν έχουμε σχεδιασμό με συμπληρωματικές ορίζουσες, δεν έχει σημασία ποιον κλασματικό σχεδιασμό από τους δυο θα επιλέξουμε, γιατί και οι δύο έχουν την ίδια διακριτική ικανότητα. Παρακάτω ορίζονται οι σχεδιασμοί αναλυτικής τάξης *III, IV* και *V* οι οποίοι είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται περισσότερο.

- **Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III.** Στους σχεδιασμούς αυτούς, καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων και αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων μπορεί να είναι ταυτόσημες μεταξύ τους.
- **Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας IV.** Στους σχεδιασμούς αυτούς, καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, ή με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση δυο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων είναι ταυτόσημες με άλλες αλληλεπιδράσεις δυο ή περισσότερων παραγόντων.
- **Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας V.** Στους σχεδιασμούς αυτούς, καμία κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη

κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων.

Γενικά, η διακριτική ικανότητα ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού με δυο στάθμες, είναι το μήκος της μικρότερης λέξης που χρησιμοποιείται σε ορίζουσα σχέση σαν γεννήτορας. Ακόμα περιγράφει το μέγεθος της σύγχυσης μεταξύ των επιδράσεων. Ένας σχεδιασμός με μικρή διακριτική ικανότητα, έχει ορίζουσες σχέσεις που είναι μικρές σαν μήκος λέξεων, κάτι το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξη ταυτόσημων επιδράσεων χαμηλής τάξης. Σύμφωνα με την αρχή της ιεραρχίας, επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές, άρα δεν ενδείκνυται η επιλογή ενός σχεδιασμού στον οποίο επιδράσεις χαμηλής τάξης συγχέονται μεταξύ τους. Συνήθως είναι επιθυμητό, να χρησιμοποιούνται (για δεδομένο αριθμό παρατηρήσεων) κλασματικοί σχεδιασμοί που έχουν την υψηλότερη δυνατή διακριτική ικανότητα, καθώς η υψηλή διακριτική ικανότητα βάζει λιγότερους περιορισμούς στις υποθέσεις που απαιτούνται, όσον αφορά ποιες αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες, με σκοπό να πάρουμε μια μοναδική ερμηνεία για τα δεδομένα.

Η έννοια της διακριτικής ικανότητας είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια της ισχύος του σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, ένας ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ t ορίζει έναν κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας $R = t+1$. Στον πίνακα 1.1 δίνεται για παράδειγμα ένας OA(8, 7, 2, 2), διακριτικής ικανότητας R = 2+1=3.

Οποιοσδήποτε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R, περιέχει πλήρεις παραγοντικούς σχεδιασμούς (ενδεχομένως επαναλαμβανόμενους παραγοντικούς σχεδιασμούς) σε οποιοδήποτε υποσύνολο R-1 παραγόντων. Για παράδειγμα αν επιλέξουμε τους παράγοντες A και B στον 2_{III}^{9-5} (κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός που παρουσιάζεται στον πίνακα 1.10) παρατηρούμε ότι περιέχει έναν 4 φορές επαναλαμβανόμενο 2^2 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό.

Αυτό είναι πολύ σημαντικό για έναν πειραματιστή που εξετάζει αρκετούς παράγοντες, που ενδεχομένως τον ενδιαφέρουν, αλλά πιστεύει ότι μόνον R-1 από αυτούς θα έχουν σημαντικές επιδράσεις. Αν η εικασία του πειραματιστή είναι σωστή, τότε ο κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R που επέλεξε, θα προβάλλεται σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό στους R-1 σημαντικούς παράγοντες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Προβολική ιδιότητα

2.1 Ορισμός και χρήση της προβολικής ιδιότητας

Στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος, όπου χρειάζεται να μελετηθεί ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων που πιθανόν να επηρεάζουν την απόκριση ενός πειράματος, αλλά μόνο ένα μικρό υποσύνολο αυτών πιστεύεται ότι είναι σημαντικοί, η προβολική ιδιότητα παίζει ουσιαστικό ρόλο. Ο ρόλος της είναι η ανάλυση των αποτελεσμάτων, όπου ο αρχικός σχεδιασμός προβάλλεται σε μικρότερη διάσταση, επιλέγοντας αυτές τις στήλες που αντιστοιχούν στους παράγοντες που εμφανίστηκαν σημαντικοί στην αρχική ανάλυση.

Ένας σχεδιασμός λέγεται ότι είναι *προβολικότητας k*, όταν σε κάθε επιλογή k στηλών (παραγόντων) του σχεδιασμού, όλες οι πειραματικές εκτελέσεις του πλήρους 2^k παραγοντικού σχεδιασμού εμφανίζονται τουλάχιστον μια φορά η καθεμία (G. Box και J. Tyssedal). Οι Box και Tyssedal όρισαν με τέτοιο τρόπο την προβολικότητα k, ώστε όλες οι παραγοντικές επιδράσεις αυτών των k παραγόντων (μαζί με την μέση τιμή) να είναι εκτιμήσιμες με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και ο υπολογισμός της διασποράς του σφάλματος να γίνεται από τις πιθανές επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις.

Τέλος, η προβολικότητα των σχεδιασμών αποτελεί ένα χρήσιμο κριτήριο επιλογής σχεδιασμών κρησαρίσματος, διότι παρέχει πληροφορία για την ικανότητα εκτίμησης αλληλεπιδράσεων των παραγόντων που θα βρεθούν σημαντικοί μετά από το αρχικό κρησάρισμα. Για παράδειγμα, αν ένας σχεδιασμός είναι προβολικότητας k και δεν έχει περισσότερους από k σημαντικούς παράγοντες, τότε δεν έχει σημασία ποιοί παράγοντες είναι σημαντικοί, γιατί μπορούν να εκτιμηθούν όλες οι κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις των σημαντικών παραγόντων όταν ο σχεδιασμός προβάλλεται σε αυτούς τους παράγοντες. Όμως, ο ορισμός των Box και Tyssedal είναι ιδιαίτερα περιοριστικός, καθώς οι περισσότεροι σχεδιασμοί που προκύπτουν από πίνακες Hadamard έχουν προβολικότητα $k = 2$.

2.2 Προβολικές ιδιότητες κορεσμένων σχηματισμών

Όπως αναφέρθηκε στο $1^{ο}$ κεφάλαιο, οι κορεσμένοι σχηματισμοί προκύπτουν αν σε οποιοδήποτε κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard αφαιρεθεί η πρώτη στήλη με τις μονάδες. Ορθογώνιοι σχηματισμοί της μορφής OA(n, n-1, 2, 2) αποτελούν μια ιδεατή επιλογή ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος και συχνά αναφέρονται ως σχεδιασμοί Hadamard.

Η μελέτη των προβολικών ιδιοτήτων των σχεδιασμών Hadamard, ιδίως για τις τάξεις αυτές όπου υπάρχουν περισσότεροι του ενός μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την τελική επιλογή του σχεδιασμού κρησαρίσματος. Ιδιαίτερη σημασία για την σωστή επιλογή έχει και η συχνότητα εμφάνισης των προβολών αυτών.

Η συχνότητα εμφάνισης των προβολών σε ένα σχεδιασμό είναι ένα σημαντικό κριτήριο επιλογής ενός σχεδιασμού. Αυτό συμβαίνει γιατί αν στο σχεδιασμό που επιλέξουμε, δεν έχει μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης η προβολή με τις καλύτερες ιδιότητες για τους παράγοντες που εκτιμήθηκαν ως σημαντικοί, σημαίνει ότι θα προκληθεί κόστος (σε χρήμα, χρόνο, πληροφορία κλπ), που θα μπορούσε να είχε αποφευχθεί αν κάναμε καλύτερη επιλογή. Ειδικότερα, στην 2η φάση του κρησαρίσματος, που ουσιαστικά προβάλλονται σε ένα σχεδιασμό όλοι οι παράγοντες που εκτιμήθηκαν ως σημαντικοί από την 1η φάση, επιθυμούμε να ″τύχει″, οι σημαντικοί παράγοντες να είναι στις θέσεις του σχεδιασμού που υπάρχει η επιθυμητή προβολή.

Σε ένα σχεδιασμό ποτέ δεν είναι όλοι οι παράγοντες σημαντικοί (αρχή της σποραδικότητας). Για το λόγο αυτό πρέπει να επιλέγονται προσεχτικά οι παράγοντες που τοποθετούνται σε κάθε στήλη του σχεδιασμού, ώστε να εξασφαλίζεται η διεξαγωγή μιας αποδοτικής και αποτελεσματικής 2ης φάσης κρησαρίσματος. Σε αυτή τη παράγραφο παρουσιάζονται όλες οι μη ισοδύναμες προβολές των μη ισοδύναμων σχεδιασμών Hadamard με n = 16 και 20 εκτελέσεις, σε k = 3, 4, 5 διαστάσεις, καθώς και οι συχνότητες τους. Οι πληροφορίες αυτές αντλήθηκαν από την εργασία των H. Evangelaras, S.Georgiou, και C.Koukouvinos με τίτλο Inequivalent projections of Hadamard matrices of orders 16 and 20 το 2003.

2.2.1 Προβολικές ιδιότητες σχηματισμών τάξης 16

Στο παράρτημα Α1 παρουσιάζονται οι πέντε μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων, (H16.i για i = 0, 1, …, 4) από τους οποίους αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη με τα « + », παίρνουμε τους πέντε μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο σχεδιασμός H16.0 είναι ισοδύναμος με το σχεδιασμό Plackett-Burman. Ο σχεδιασμός H16.0 παράγει έναν απλό 2^{15-11} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό 16 εκτελέσεων, οι προβολές του οποίου ανήκουν στην κατηγορία των απλών κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών 16 εκτελέσεων. Παρακάτω μελετώνται οι προβολικές ιδιότητες σε k = 3, 4 και 5 διαστάσεις και των πέντε μη ισοδύναμων σχεδιασμών Hadamard.

Για k = 3, υπάρχουν 455 πιθανές επιλογές τριών στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε τρεις μη ισοδύναμους τύπους προβολών σύμφωνα με τον ορισμό της ισοδυναμίας των ΟΑ. Οι τρεις μη ισοδύναμοι τύποι προβολών (16.3.1, 16.3.2 και 16.3.3) παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1. Ο πρώτος αριθμός (π.χ. 16) αναφέρεται στον αριθμό των εκτελέσεων του σχεδιασμού, ο δεύτερος (π.χ. 3) αναφέρεται στη διάσταση της προβολής και ο τρίτος (π.χ. 1) υποδεικνύει την καθεμία από τις μη ισοδύναμες προβολές. Ομοίως θα ορίζονται και παρακάτω όλες οι μη ισοδύναμες προβολές.

Αριθμός	I =ABC			Προβολές		
εκτέλεσης	A	B	C	16.3.1	16.3.2	16.3.3
2	+	-	-	2	4	1
3	-	+	-	2	4	1
5	-	-	+	2	4	1
8	+	+	+	2	4	1
	I = -ABC					
1	-	-	-	2	0	3
4	+	+	-	2	0	3
6	+	-	+	2	0	3
7	-	+	+	2	0	3

Πίνακας 2.1: Μη ισοδύναμες προβολές σε 3 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων

Από τον πίνακα 2.2 φαίνεται ότι δύο από τις μη ισοδύναμες προβολές, οι 16.3.1 και 16.3.2, προκύπτουν από όλους τους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων, ενώ η τρίτη 16.3.3 προκύπτει από τους τέσσερεις σχεδιασμούς Hadamard που είναι μη ισοδύναμοι με το σχεδιασμό Plackett-Burman (H16.0). Ειδικότερα, η προβολή 16.3.1 αποτελείται από δυο επαναλήψεις ενός πλήρη 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού. Η προβολή 16.3.2 αποτελείται από τέσσερεις επαναλήψεις ενός 2_{III}^{3-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσα σχέση I = ABC και χρειάζεται 4 ακόμα εκτελέσεις για να περιέχει έναν πλήρη 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό. Τέλος η προβολή 16.3.3 αποτελείται από μια επανάληψη ενός πλήρη 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού και από δύο επαναλήψεις ενός 2_{III}^{3-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III με ορίζουσα σχέση I = -ABC.

Σχεδιασμοί	Προβολές		
Hadamard	16.3.1	16.3.2	16.3.3
H16.0	420	35	-
H16.1	372	19	64
H16.2	348	11	96
H16.3	336	7	112
H16.4	336	7	112

Πίνακας 2.2: Οι συχνότητες εμφάνισης των τριών μη ισοδύναμων προβολών 3 διαστάσεων, σε καθένα από τους 5 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων

Στον πίνακα 2.2 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης των προβολών με τρείς στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων. Προτιμάται η επιλογή του σχεδιασμού στον οποίο εμφανίζεται μία συγκεκριμένη προβολή τις περισσότερες φορές. Για παράδειγμα, επειδή καλύτερη προβολή είναι η 16.3.1, ο σχεδιασμός που θα επιλεγόταν για την διεξαγωγή του πειράματός θα ήταν ο H16.0, μιας και η πιθανότητα εμφάνισής της είναι μεγαλύτερη, στην περίπτωση που τρείς παράγοντες ήταν σημαντικοί.

Για k = 4, υπάρχουν 1365 πιθανές επιλογές τεσσάρων στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε πέντε μη ισοδύναμους τύπους προβολών, οι οποίοι παρουσιάζονται στον πίνακα 2.3. Οι τρείς από αυτές 16.4.1, 16.4.4 και 16.4.5 προκύπτουν και από τους πέντε μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων, ενώ οι προβολές 16.4.2 και 16.4.3, προκύπτουν από τους τέσσερεις σχεδιασμούς Hadamard, που είναι μη ισοδύναμοι με το σχεδιασμό Plackett-Burman (H16.0). Ειδικότερα, η προβολή 16.4.4 αποτελείται από έναν πλήρη 2^4 παραγοντικό σχεδιασμό. Η προβολή 16.4.5 αποτελείται από δύο επαναλήψεις ενός 2_{IV}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας IV, με ορίζουσα σχέση I = ABCD. Ομοίως, και η προβολή 16.4.2

αποτελείται, από μια αυτή τη φορά επανάληψη ενός 2_{IV}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας IV, με ορίζουσα σχέση I = ABCD καθώς παρατηρούνται και μερικές ακόμα εκτελέσεις. Η προβολή 16.4.1, αποτελείται από δύο επαναλήψεις ενός 2_{III}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσα σχέση I = ABC. Τέλος η προβολή 16.4.3 αποτελείται από ένα 2_{III}^{4-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας III με ορίζουσα σχέση I = ABC, καθώς και από μερικές ακόμα εκτελέσεις.

Αριθμός	I =ABCD				Προβολές				
εκτέλεσης	A	B	C	D	16.4.1	16.4.2	16.4.3	16.4.4	16.4.5
1	-	-	-	-	0	2	1	1	2
4	+	+	-	-	0	1	0	1	2
6	+	-	+	-	0	1	1	1	2
7	-	+	+	-	0	2	0	1	2
10	+	-	-	+	2	1	2	1	2
11	-	+	-	+	2	2	1	1	2
13	-	-	+	+	2	2	2	1	2
16	+	+	+	+	2	1	1	1	2
	I = -ABCD								
2	+	-	-	-	2	1	1	1	0
3	-	+	-	-	2	0	2	1	0
5	-	-	+	-	2	0	1	1	0
8	+	+	+	-	2	1	2	1	0
9	-	-	-	+	0	0	0	1	0
12	+	+	-	+	0	1	1	1	0
14	+	-	+	+	0	1	0	1	0
15	-	+	+	+	0	0	1	1	0

Πίνακας 2.3: Μη ισοδύναμες προβολές σε 4 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων

Στον πίνακα 2.4 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης των προβολών με τέσσερεις στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων. Προτιμάται η επιλογή του σχεδιασμού, στον οποίο εμφανίζεται η επιθυμητή προβολή τις περισσότερες φορές. Σε αυτή την περίπτωση ο σχεδιασμός που προτιμάται είναι ο H16.0, γιατί εμφανίζεται περισσότερες φορές η επιθυμητή προβολή (16.4.4).

Σχεδιασμοί Hadamard	Προβολές				
	16.4.1	16.4.2	16.4.3	16.4.4	16.4.5
H16.0	420	-	-	840	105
H16.1	228	192	288	600	57
H16.2	132	288	432	480	33
H16.3	84	336	504	420	21
H16.4	84	336	504	420	21

Πίνακας 2.4: Οι συχνότητες εμφάνισης των 5 μη ισοδύναμων προβολών 4 διαστάσεων, σε καθένα από τους 5 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων

Για k = 5, υπάρχουν 3003 πιθανές επιλογές πέντε στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε έντεκα μη ισοδύναμους τύπους προβολών οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 2.5. Οι τρείς από αυτές 16.5.2, 16.5.4, και 16.5.11 εμφανίζονται και στους πέντε σχεδιασμούς Hadamard με 16 εκτελέσεις ενώ, η προβολή 16.5.1 δεν εμφανίζεται καμία φορά στους σχεδιασμούς H16.3 και H16.4. Ειδικότερα, η προβολή 16.5.1 αποτελείται από ένα 2_{V}^{5-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας V, με ορίζουσα σχέση I = ABCDE. Η προβολή 16.5.2 αποτελείται από δύο επαναλήψεις ενός 2_{III}^{5-2} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσες σχέσεις I = ACD και I = ABE. Η προβολή 16.5.4 αποτελείται από ένα 2_{III}^{5-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσα σχέση I = ABC. Τέλος η προβολή 16.5.11 αποτελείται από ένα 2_{IV}^{5-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας IV, με ορίζουσα σχέση I = BCDE.

Αριθμός	I =ABCDE					Προβολές										
εκτέλεσης	A	B	C	D	E	16.5.1	16.5.2	16.5.3	16.5.4	16.5.5	16.5.6	16.5.7	16.5.8	16.5.9	16.5.10	16.5.11
2	+	-	-	-	-	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	-	+	-	-	-	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
5	-	-	+	-	-	1	0	1	1	0	0	2	1	1	0	0
8	+	+	+	-	-	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	1
9	-	-	-	+	-	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	+	+	-	+	-	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
14	+	-	+	+	-	1	2	0	0	1	0	0	1	1	2	1
15	-	+	+	+	-	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
17	-	-	-	-	+	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
20	+	+	-	-	+	1	2	0	0	1	0	1	1	1	2	1
22	+	-	+	-	+	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
23	-	+	+	-	+	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
26	+	-	-	+	+	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1

27	-	+	-	+	+	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
29	-	-	+	+	+	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
32	+	+	+	+	+	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	I = -ABCDE															
1	-	-	-	-	-	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
4	+	+	-	-	-	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
6	+	-	+	-	-	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	-	+	+	-	-	0	2	0	0	0	1	0	1	1	2	1
10	+	-	-	+	-	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
11	-	+	-	+	-	0	2	2	1	0	0	1	0	1	1	1
13	-	-	+	+	-	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
16	+	+	+	+	-	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
18	+	-	-	-	+	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
19	-	+	-	-	+	0	0	2	1	0	1	1	0	0	0	1
21	-	-	+	-	+	0	2	1	1	1	1	0	0	1	1	1
24	+	+	+	-	+	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
25	-	-	-	+	+	0	2	0	0	1	0	2	1	1	2	1
28	+	+	-	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	+	-	+	+	+	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
31	-	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Πίνακας 2.5: Μη ισοδύναμες προβολές σε 5 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων

Στον πίνακα 2.6 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης των προβολών με πέντε στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων. Προτιμάται η επιλογή του σχεδιασμού στον οποίο εμφανίζεται η επιθυμητή προβολή τις περισσότερες φορές. Ειδικότερα, η επιθυμητή προβολή είναι η 16.5.1, η οποία από τον πίνακα είναι εμφανές ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στον σχεδιασμό H16.0.

Σχεδιασμοί Hadamard	Προβολές										
	16.5.1	16.5.2	16.5.3	16.5.4	16.5.5	16.5.6	16.5.7	16.5.8	16.5.9	16.5.10	16.5.11
H16.0	168	315	-	1680	-	-	-	-	-	-	840
H16.1	72	99	288	768	192	576	-	192	288	144	384
H16.2	24	39	240	408	288	672	384	288	336	120	204
H16.3	-	21	168	252	336	672	672	336	336	84	126
H16.4	-	21	168	252	336	672	672	336	336	84	126

Πίνακας 2.6: Οι συχνότητες εμφάνισης των 11 μη ισοδύναμων προβολών 5 διαστάσεων, σε καθένα από τους 5 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων

2.2.2 Προβολικές ιδιότητες σχηματισμών τάξης 20

Στο παράρτημα Α2 παρουσιάζονται οι τρείς μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard n = 20, (H20.i για i = 1, 2, 3), από τους οποίους παίρνουμε τους τρείς μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 20 εκτελέσεων. Αξίζει να σημειωθεί, ότι ο σχεδιασμός H20.1 είναι ισοδύναμος με το σχεδιασμό Plackett-Burman. Παρακάτω μελετώνται οι προβολικές ιδιότητες (*Projection properties*) σε k = 3, 4 και 5 διαστάσεις, των τριών μη ισοδύναμων σχεδιασμών Hadamard.

Για k = 3 υπάρχουν 969 πιθανές επιλογές τριών στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε δύο μη ισοδύναμους τύπους προβολών σύμφωνα με τον ορισμό της ισοδυναμίας των ΟΑ. Οι δύο μη ισοδύναμοι τύποι προβολών (20.3.1 και 20.3.2) παρουσιάζονται στον πίνακα 2.7.

Οι δύο μη ισοδύναμες προβολές εμφανίζονται σε όλους τους σχεδιασμούς Hadamard με 20 εκτελέσεις. Ειδικότερα, η προβολή 20.3.1 αποτελείται από μία επανάληψη ενός 2^3 πλήρη παραγοντικού σχεδιασμού και από τρεις επαναλήψεις ενός 2_{III}^{3-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσα σχέση I = ABC. Η προβολή 20.3.2 αποτελείται από δύο επαναλήψεις ενός πλήρους 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού και από μία επανάληψη ενός 2_{III}^{3-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III με ορίζουσα σχέση I = ABC.

Αριθμός	I =ABC			Προβολές	
εκτέλεσης	A	B	C	20.3.1	20.3.2
2	+	-	-	4	3
3	-	+	-	4	3
5	-	-	+	4	3
8	+	+	+	4	3
	I = -ABC				
1	-	-	-	1	2
4	+	+	-	1	2
6	+	-	+	1	2
7	-	+	+	1	2

Πίνακας 2.7: Μη ισοδύναμες προβολές σε 3 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων

Στον πίνακα 2.8 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης των προβολών με τρείς στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων. Γενικά, ο σχεδιασμός στον οποίο εμφανίζεται μία συγκεκριμένη προβολή περισσότερες φορές, η επιλογή του προτιμάται.

Παρόλα αυτά στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται ισότητα στη συχνότητα εμφάνισης των προβολών, μεταξύ των μη ισοδύναμων σχεδιασμών Hadamard 20 εκτελέσεων. Επομένως η επιλογή σχεδιασμού βασιζόμενη στη συχνότητα εμφάνισης της προβολής μπορεί να είναι τυχαία.

Σχεδιασμοί Hadamard	Προβολές	
	20.3.1	20.3.2
H20.1	57	912
H20.2	57	912
H20.3	57	912

Πίνακας 2.8: Οι συχνότητες εμφάνισης των δύο μη ισοδύναμων προβολών 3 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων

Για k = 4 υπάρχουν 3876 πιθανές επιλογές τεσσάρων στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε τρεις μη ισοδύναμους τύπους προβολών οι οποίοι παρουσιάζονται στον πίνακα 2.9. Οι τρείς αυτές προβολές εμφανίζονται

Αριθμός εκτέλεσης	I =ABCD				Προβολές		
	A	B	C	D	20.4.1	20.4.2	20.4.3
1	-	-	-	-	2	2	2
4	+	+	-	-	2	2	2
6	+	-	+	-	2	2	1
7	-	+	+	-	1	1	0
10	+	-	-	+	3	2	3
11	-	+	-	+	2	1	2
13	-	-	+	+	2	1	1
16	+	+	+	+	2	1	1
	I = -ABCD						
2	+	-	-	-	0	0	0
3	-	+	-	-	1	1	1
5	-	-	+	-	1	1	2
8	+	+	+	-	1	1	2
9	-	-	-	+	0	1	0
12	+	+	-	+	0	1	0
14	+	-	+	+	0	1	1
15	-	+	+	+	1	2	2

Πίνακας 2.9: Μη ισοδύναμες προβολές σε 4 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων

σε όλους τους σχεδιασμούς Hadamard με 20 εκτελέσεις. Ειδικότερα η προβολή 20.4.1 αποτελείται από μία επανάληψη ενός 2_{IV}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας IV, με ορίζουσα σχέση I = ABCD καθώς παρατηρούνται και μερικές ακόμα εκτελέσεις. Ομοίως, η προβολή 20.4.2 αποτελείται από μία επανάληψη ενός 2_{IV}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας IV, με ορίζουσα σχέση I = ABCD καθώς παρατηρούνται και σε αυτήν μερικές ακόμα εκτελέσεις. Η προβολή 20.4.3 αποτελείται από μία επανάληψη ενός 2_{III}^{4-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού διακριτικής ικανότητας III, με ορίζουσα σχέση I = -ABD καθώς παρατηρούνται και μερικές ακόμα εκτελέσεις. Ακόμα μπορεί να παρατηρηθεί ότι στις προβολές (20.4.1 και 20.4.3) υπάρχει μια τριπλή εκτέλεση καθώς και ότι στην προβολή 20.4.2 υπάρχουν πέντε διπλές εκτελέσεις. Τέλος, στην περίπτωση που θα θέλαμε να εξασφαλίσουμε έναν πλήρη 2^4 παραγοντικό σχεδιασμό θα έπρεπε να προσθέσουμε 4, 1 και 4 εκτελέσεις αντίστοιχα στις προβολές 20.4.1, 20.4.2 και 20.4.3.

Στον πίνακα 2.10 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης των προβολών με τέσσερεις στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων. Γενικά, προτιμάται η επιλογή του σχεδιασμού, στον οποίο εμφανίζεται η επιθυμητή προβολή τις περισσότερες φορές.

Σχεδιασμοί Hadamard	Προβολές		
	20.4.1	20.4.2	20.4.3
H20.1	228	2736	912
H20.2	228	2736	912
H20.3	228	2736	912

Πίνακας 2.10: Οι συχνότητες εμφάνισης των 3 μη ισοδύναμων προβολών 4 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων

Παρόλα αυτά, στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται ισότητα στη συχνότητα εμφάνισης των προβολών μεταξύ των μη ισοδύναμων σχεδιασμών Hadamard 20 εκτελέσεων. Επομένως η επιλογή σχεδιασμού, βασιζόμενη στην συχνότητα εμφάνισης της προβολής, μπορεί να είναι τυχαία.

Για k = 5 υπάρχουν 11628 πιθανές επιλογές πέντε στηλών από έναν σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων, που μπορούν να καταταχθούν σε δέκα μη ισοδύναμους τύπους προβολών οι οποίοι παρουσιάζονται στον πίνακα 2.11. Όλες οι προβολές, εκτός από την 20.5.2, εμφανίζονται και στους τρεις σχεδιασμούς Hadamard με 20 εκτελέσεις. Η προβολή 20.5.2 δεν εμφανίζεται καμία φορά στον σχεδιασμό H20.1. Παρατηρώντας τον πίνακα 2.11 εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε ποιες εκτελέσεις λείπουν (και πρέπει να προσθέσουμε) σε κάθε σχεδιασμό, για να σχηματίσουμε ένα πλήρη 2^5 σχεδιασμό, ή ένα 2_V^{5-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας V.

Αριθμός	I =ABCDE					Προβολές									
εκτέλεσης	A	B	C	D	E	20.5.1	20.5.2	20.5.3	20.5.4	20.5.5	20.5.6	20.5.7	20.5.8	20.5.9	20.5.10
2	+	-	-	-	-	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
3	-	+	-	-	-	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	-	-	+	-	-	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
8	+	+	+	-	-	0	1	1	0	1	0	0	2	2	1
9	-	-	-	+	-	2	0	0	0	0	1	0	1	1	0
12	+	+	-	+	-	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
14	+	-	+	+	-	2	1	1	2	1	1	1	0	0	0
15	-	+	+	+	-	0	1	1	1	1	0	1	1	2	1
17	-	-	-	-	+	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
20	+	+	-	-	+	1	0	1	1	1	2	1	0	1	2
22	+	-	+	-	+	1	2	1	1	0	1	2	0	0	1
23	-	+	+	-	+	0	2	2	1	0	0	2	1	0	0
26	+	-	-	+	+	1	2	2	1	0	1	1	1	1	1
27	-	+	-	+	+	2	2	1	1	1	0	1	0	0	1
29	-	-	+	+	+	0	0	1	1	1	1	0	1	1	2
32	+	+	+	+	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	I = -ABCDE														
1	-	-	-	-	-	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2
4	+	+	-	-	-	2	2	1	1	0	0	1	0	0	0
6	+	-	+	-	-	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
7	-	+	+	-	-	2	0	0	1	1	2	0	0	0	1
10	+	-	-	+	-	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2
11	-	+	-	+	-	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
13	-	-	+	+	-	0	2	1	0	0	0	1	1	0	0
16	+	+	+	+	-	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
18	+	-	-	-	+	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
19	-	+	-	-	+	0	0	0	0	1	1	0	2	2	1
21	-	-	+	-	+	2	0	0	0	1	1	0	1	2	1
24	+	+	+	-	+	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
25	-	-	-	+	+	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0
28	+	+	-	+	+	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
30	+	-	+	+	+	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
31	-	+	+	+	+	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Πίνακας 2.11: Μη ισοδύναμες προβολές σε 5 διαστάσεις όλων των μη ισοδύναμων πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων

Στον πίνακα 2.12 φαίνεται αναλυτικά η συχνότητα εμφάνισης κάθε προβολής με πέντε στήλες, σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων. Γενικά, προτιμάται η επιλογή του σχεδιασμού, στον οποίο εμφανίζεται η επιθυμητή προβολή τις περισσότερες φορές.

Σχεδιασμοί Hadamard	Προβολές									
	20.5.1	20.5.2	20.5.3	20.5.4	20.5.5	20.5.6	20.5.7	20.5.8	20.5.9	20.5.10
H20.1	171	-	684	1368	1881	1539	1368	3078	513	1026
H20.2	216	180	504	1728	1296	1944	1008	3888	288	576
H20.3	192	60	624	1488	1680	1680	1248	3360	430	866

Πίνακας 2.12: Οι συχνότητες εμφάνισης των 10 μη ισοδύναμων προβολών 5 διαστάσεων, σε καθένα από τους 3 μη ισοδύναμούς πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων

2.3 Συμπεράσματα

Όπως είδαμε από αυτό το κεφάλαιο η προβολική ιδιότητα είναι πολύ σημαντική, γιατί προβάλλοντας τον αρχικό σχεδιασμό στους σημαντικούς παράγοντες μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για κάποιες από τις αλληλεπιδράσεις τους. Ειδικότερα, όταν η επιλογή του σχεδιασμού είναι σωστή, οι προβολές αυτές μας παρέχουν περισσότερη πληροφορία.

Για την διεξαγωγή ενός πειράματος αρχικά έχει σημασία να εντοπιστούν όλοι οι μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί Hadamard για έναν συγκεκριμένο αριθμό εκτελέσεων *n*. Στη συνέχεια, θα πρέπει να βρεθούν οι καλύτερες προβολές σε όλες τις *k* διαστάσεις που εκτιμάται ότι θα προβληθεί ο αρχικός σχεδιασμός. Επίσης, θα πρέπει να υπολογιστούν οι συχνότητες εμφάνισης των μη ισοδύναμων προβολών σε όλους τους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς. Τέλος, πρέπει να επιλεγεί ο καταλληλότερος σχεδιασμός Hadamard *n* εκτελέσεων ο οποίος για κάθε *k* διάσταση θα δίνει την καλύτερη προβολή με την μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα.

Από το παρόν κεφάλαιο διαπιστώθηκε ότι ο καταλληλότερος σχεδιασμός Hadamard 16 εκτελέσεων σε 3, 4 και 5 διαστάσεις είναι ο H16.0. Ειδικότερα, η καλύτερη προβολή σε 3 διαστάσεις είναι η 16.3.1 η οποία αποτελείται από δυο επαναλήψεις ενός πλήρη 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού και έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στον H16.0. Η καλύτερη προβολή σε 4 διαστάσεις είναι η 16.4.4 η οποία αποτελείται από έναν πλήρη 2^4 παραγοντικό σχεδιασμό και έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στον H16.0. Τέλος, η καλύτερη προβολή σε 5 διαστάσεις είναι η 16.5.1 η οποία αποτελείται από μία επανάληψη ενός 2_V^{5-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού και έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στον H16.0. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι η προβολή 16.5.1 μπορεί να έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στον σχεδιασμό H16.0 συγκριτικά με τους άλλους σχεδιασμούς, παρόλα αυτά η πιθανότητα εμφάνισης ακόμα και σε αυτόν παραμένει σε πολύ χαμηλά επίπεδα, γεγονός το οποίο μας οδηγεί στην διερεύνηση τις πιθανότητας εμφάνισης και των αμέσως επόμενων καλύτερων προβολών στους υπό μελέτη σχεδιασμούς.

Ο καταλληλότερος σχεδιασμός Hadamard 20 εκτελέσεων σε 3, 4 και 5 διαστάσεις δεν είναι το ίδιο εύκολο να εντοπιστεί μόνο με την μελέτη της προβολικής ιδιότητας. Ειδικότερα, η καλύτερη προβολή σε 3 διαστάσεις είναι η 20.3.2, η οποία αποτελείται από δύο επαναλήψεις ενός πλήρους 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού και από μία επανάληψη ενός 2_{III}^{3-1} κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού, ενώ φαίνεται να έχει ακριβώς την ίδια πιθανότητα εμφάνισης σε όλους τους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard. Σε 4 και 5 διαστάσεις είναι δύσκολο να εντοπιστεί η καλύτερη προβολή, γεγονός το οποίο οδηγεί στην ανάπτυξη κριτηρίων ταξινόμησης των υπό μελέτη σχεδιασμών. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο κριτήρια ταξινόμησης για την ευκολότερη και πιο αξιόπιστη σύγκριση των σχεδιασμών κρησαρίσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επιλογή σχεδιασμών κρησαρίσματος

3.1 Κριτήρια ταξινόμησης σχεδιασμών

Οι ορθογώνιοι παραγοντικοί σχεδιασμοί μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες: τους απλούς και τους σύνθετους (οι οποίοι αναλύθηκαν εκτενώς στο $1^{ο}$ κεφάλαιο). Τα κριτήρια ταξινόμησης διευκολύνουν την σύγκριση των σχεδιασμών ώστε να επιλέγεται ο καλύτερος σχεδιασμός με σχετική ευκολία.

Οι απλοί σχεδιασμοί είναι δημοφιλείς σχεδιασμοί οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως σε ποικίλες πειραματικές διαδικασίες, εξαιτίας της ευκολίας στην ερμηνεία και την κατασκευή τους. Για τον λόγο αυτό, υπάρχουν πολλά χρήσιμα κριτήρια για τη σύγκριση και την ταξινόμηση των απλών παραγοντικών σχεδιασμών. Τα δημοφιλέστερα από αυτά είναι η Ελάχιστη Απόκλιση (*minimum aberration*) (Fries and Hunter, 1980), η Εκτιμητική Δυνατότητα (*estimation capacity*) (Cheng and Mukerjee, 1998), η Ομοιομορφία (*uniformity*) (Fang and Mukerjee, 2000) και η Διακριτική Ικανότητα (Box and Hunter, 1961) η οποία αναλύθηκε διεξοδικά στην Παράγραφο 1.4. Το μειονέκτημα αυτών των κριτηρίων είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τη σύγκριση των απλών παραγοντικών σχεδιασμών.

Η ανάγκη για τη σύγκριση και την ταξινόμηση ορθογώνιων παραγοντικών σχεδιασμών (απλών και σύνθετων), οδήγησε στην εύρεση γενικότερων κριτηρίων. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο διαδεδομένα στατιστικά κριτήρια για την ταξινόμηση τέτοιων σχεδιασμών και μελετάμε εκ νέου τις προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών Hadamard 16 και 20 εκτελέσεων, δίνοντας περισσότερο βάρος στην εύρεση προβολών με διαφορετικές στατιστικές ιδιότητες. Οι πληροφορίες αυτές αντλήθηκαν από την επιστημονική εργασία των H. Evangelaras, και C. Koukouvinos με τίτλο Another Look at Projection Properties of Hadamard Matrices.

3.1.1 J-χαρακτηριστικά και γενικευμένη διακριτική ικανότητα (GRES)

Οι Deng και Tang, το 1999, πρότειναν τη γενικευμένη διακριτική ικανότητα (*generalized resolution*) ως κριτήριο ταξινόμησης σύνθετων παραγοντικών σχεδιασμών. Η γενικευμένη διακριτική ικανότητα ουσιαστικά είναι μια επέκταση της έννοιας της διακριτικής ικανότητας, η οποία παρουσιάστηκε από τους Box και Hunter για τους απλούς παραγοντικούς σχεδιασμούς (παρουσιάζεται στην Παράγραφο 1.4). Σύμφωνα με το κριτήριο της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας, ένας ορθογώνιος σχεδιασμός θεωρείται σαν ένα σύνολο από p στήλες $D=\{d_1,...,d_p\}$. Τότε, για $1 \le k \le p$ και για κάθε k-υποσύνολο $s=\{d_{j1},...,d_{jk}\}$ ορίζουμε τα J-χαρακτηριστικά του σχεδιασμού ως:

$$J_k(s) = \left| \sum_{i=1}^{n} d_{ij1},...,d_{ijk} \right| \tag{3.1}$$

όπου d_{ij1} είναι το i στοιχείο της στήλης d_{j1}.

Αν r είναι ο μικρότερος ακέραιος, τέτοιος ώστε να ισχύει $\max_{|s|=r} J_r(s) > 0$ και η μεγιστοποίηση γίνεται για όλα τα υποσύνολα των r διακεκριμένων στηλών του D, τότε η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού D ορίζεται ως:

$$GRES(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n] \tag{3.2}$$

Εφόσον ο σχεδιασμός D είναι ορθογώνιος είναι ξεκάθαρο ότι ισχύει $J_1(s) = J_2(s) = 0$. Γενικά, αν έχουμε ένα σύνολο στηλών *s*, η ποσότητα $J_k(s)$ έχει απλή ερμηνεία. Ουσιαστικά μετράει τη συσχέτιση μιας επίδρασης που περιέχει i-παράγοντες με την επίδραση που περιέχει (k-i)-παράγοντες, όπου $i \in s$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε $s=\{A,B,C\}$, όπου *A*, *B* και *C* είναι τρεις στήλες που αντιστοιχούν σε τρεις παράγοντες του σχεδιασμού, τότε $J_3(s)/n$ είναι ο συσχετισμός μεταξύ της κύριας επίδρασης *A* με την αλληλεπίδραση δύο παραγόντων *BC* (ή της *B* με την *AC* ή της *C* με την *AB*), όπου *n* ο αριθμός των δοκιμών. Για τους απλούς σχεδιασμούς (σχεδιασμούς με ορίζουσα σχέση), η συσχέτιση μεταξύ συγκεκριμένων επιδράσεων οι οποίες σχηματίζουν μια λέξη με ελάχιστο μέγεθος, είναι ίση με ένα. Επομένως, η γενικευμένη διακριτική ικανότητα των απλών σχεδιασμών είναι ίση με την διακριτική ικανότητα όπως ορίστηκε από τους Box and Hunter το 1961. Στο παράρτημα B1 παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας κάποιων μη ισοδύναμων προβολών σε σχεδιασμούς Hadamard 16 και 20 εκτελέσεων.

3.1.2 Γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης (GWP)

Το κριτήριο της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας που αναλύθηκε παραπάνω δεν επαρκεί για την κατηγοριοποίηση των παραγοντικών σχεδιασμών. Αυτό συμβαίνει γιατί δύο ή περισσότεροι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί μπορεί να έχουν την ίδια γενικευμένη διακριτική ικανότητα. Για το λόγο αυτό και για την αποτελεσματικότερη ταξινόμηση των σχεδιασμών, παρουσιάζεται παρακάτω και το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης (*generalized wordlength pattern*).

Οι Ma και Fang, το 2001, πρότειναν ένα ισχυρότερο κριτήριο το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους απλούς και σύνθετους παραγοντικούς σχεδιασμούς. Έστω ότι D είναι ένας ορθογώνιος παραγοντικός σχεδιασμός με n εκτελέσεις και p παράγοντες (στήλες), όπου κάθε παράγοντας έχει s επίπεδα. Το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης του σχεδιασμού D ορίζεται ως εξής:

$$W^g(D) = \{A_1^g(D), \ldots, A_p^g(D)\} \tag{3.3}$$

όπου,

$$A_i^g(D) = \frac{1}{n(s-1)} \sum_{j=0}^{p} P_i(j;p) E_j(D), \quad i = 1, \ldots, p \tag{3.4}$$

και

$$P_i(j;p) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r (s-1)^{i-r} \binom{j}{r} \binom{p-j}{i-r} \tag{3.5}$$

είναι τα πολυώνυμα Krawtchouk και $E_j(D)$, j=1,…,p είναι η κατανομή απόστασης του σχεδιασμού D και ορίζεται ως εξής:

$$E_j(D) = \frac{\#\{(c,d) \mid, c,d \in D, d_H(c,d) = j\}}{n}, \quad j = 0, \ldots, p \tag{3.6}$$

όπου $d_H(c,d)$ είναι η απόσταση Hamming μεταξύ των δύο εκτελέσεων c και d του D (το οποίο είναι, ο αριθμός των συντεταγμένων που διαφέρουν σε αυτές τις εκτελέσεις). Στην παρούσα εργασία δεν υπάρχει λόγος για την περεταίρω ανάλυση του πολυώνυμου Krawtchouk και των ιδιοτήτων του, δείτε MacWilliams και Sloane (1997).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι D_1 και D_2 είναι δύο μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί. Ας υποθέσουμε επίσης ότι t ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $A_t^g(D_1) \neq A_t^g(D_2)$. Τότε, αν $A_t^g(D_1) < A_t^g(D_2)$, λέμε ότι ο σχεδιασμός D_1 έχει μικρότερη ελάχιστη απόκλιση από το σχεδιασμό D_2 και κατ' επέκταση έχει και μικρότερη σύγχυση, συνεπώς προτιμάται.

Ένας σχεδιασμός D λέγεται ότι έχει ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση, αν δεν υπάρχει κανένας άλλος σχεδιασμός ιδίων διαστάσεων που να έχει μικρότερη γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση. Γενικά, προτιμούνται οι παραγοντικοί σχεδιασμοί με μικρό $A_t^g(D)$, όταν το t είναι επίσης μικρό. Στο παράρτημα Β2 παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης κάποιων μη ισοδύναμων προβολών, σε σχεδιασμούς Hadamard 16 και 20 εκτελέσεων. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι σχεδιασμοί που δίνουν διαφορετικό GRES ή GWP δεν είναι ισόμορφοι.

3.2 Σχεδιασμοί με 16 εκτελέσεις

Για την μελέτη 15 παραγόντων δύο επιπέδων, υπάρχουν πέντε μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων, οι οποίοι μας δίνουν πέντε μη ισοδύναμους κορεσμένους ορθογώνιους σχεδιασμούς με 16 εκτελέσεις. Στο πίνακα 3.1 παρουσιάζονται όλες οι μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών με 3, 4 και 5 παράγοντες ταξινομημένες από την καλύτερη προς την χειρότερη με βάση τα δύο στατιστικά κριτήρια που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Επίσης παρουσιάζεται και η συχνότητα εμφάνισης των προβολών αυτών σε κάθε σχεδιασμό Hadamard 16 εκτελέσεων.

Από τις 455 πιθανές επιλογές τριών στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 16 εκτελέσεις, προκύπτουν τρείς μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών. Από τον πίνακα 3.1 φαίνεται ότι η κλάση 16.3.1 είναι η καλύτερη, σύμφωνα με τα κριτήρια, αφού έχει τη μεγαλύτερη γενικευμένη διακριτική ικανότητα και το καλύτερο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Επίσης παρατηρούμε ότι η κλάση αυτή εμφανίζεται 420 φορές στον σχεδιασμό H16.0. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν κάποιος πειραματιστής επιλέξει το σχεδιασμό H16.0 για τον εντοπισμό ενεργών παραγόντων, έχει πιθανότητα πάνω από 90% να εμφανιστεί η συγκεκριμένη κλάση προβολών. Επομένως, ο σχεδιασμός Hadamard H16.0 είναι ο καλύτερος για την μελέτη τριών παραγόντων γιατί δίνει την καλύτερη κλάση προβολών με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης.

Ομοίως, από τις 1365 πιθανές επιλογές τεσσάρων στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 16 εκτελέσεις, προκύπτουν πέντε μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών. Από τον πίνακα 3.1 φαίνεται ότι η κλάση 16.4.1 είναι η καλύτερη σύμφωνα με τα κριτήρια, μιας και έχει τη μεγαλύτερη γενικευμένη διακριτική ικανότητα και το καλύτερο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Επίσης παρατηρούμε ότι η κλάση αυτή εμφανίζεται 840 φορές στον σχεδιασμό H16.0, δηλαδή έχει μεγάλη πιθανότητα, πάνω από 60%, να εμφανιστεί η συγκεκριμένη κλάση προβολών. Επομένως, ο σχεδιασμός Hadamard H16.0 είναι ο καλύτερος για την μελέτη τεσσάρων παραγόντων γιατί δίνει την καλύτερη κλάση προβολών με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης.

Κλάση	**GWP**	**GRES**	**H16.0**	**H16.1**	**H16.2**	**H16.3**	**H16.4**
16.3.1	(0,0,0)	4	420	372	348	336	336
16.3.2	(0,0,0.25)	3.5	-	64	96	112	112
16.3.3	(0,0,1)	3	35	19	11	7	7
16.4.1	(0,0,0,0)	5	840	600	480	420	420
16.4.2	(0,0,0,1)	4	105	57	33	21	21
16.4.3	(0,0,0.25,0.25)	3.5	-	192	288	336	336
16.4.4	(0,0,0.5,0)	3.5	-	288	432	504	504
16.4.5	(0,0,1,0)	3	420	228	132	84	84
16.5.1	(0,0,0,0,1)	5	168	72	24	-	-
16.5.2	(0,0,0,1,0)	4	840	384	204	126	126
16.5.3	(0,0,0.25,0.5,0.25)	3.5	-	192	288	336	336
16.5.4	(0,0,0.5,0.5,0)	3.5	-	576	672	672	672
16.5.5	(0,0,0.75,0,0.25)	3.5	-	192	288	336	336
16.5.6	(0,0,1,0,0)	3.5	-	288	336	336	336
16.5.7	(0,0,1,0.5,0)	3.5	-	-	384	672	672
16.5.8	(0,0,1,1,0)	3.5	-	144	120	84	84
16.5.9	(0,0,1,0,0)	3	1680	768	408	252	252
16.5.10	(0,0,1.5,0.5,0)	3	-	288	240	168	168
16.5.11	(0,0,2,1,0)	3	315	99	39	21	21

Πίνακας 3.1: Οι καλύτερες μη ισοδύναμες στατιστικές κλάσεις προβολών πινάκων Hadamard 16 εκτελέσεων σε 3,4 και 5 παράγοντες

Με παρόμοιο τρόπο, από τις 3003 πιθανές επιλογές πέντε στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 16 εκτελέσεις, προκύπτουν έντεκα μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών. Από τον πίνακα 3.1 φαίνεται ότι η κλάση 16.5.1 είναι η καλύτερη όσον αφορά τα κριτήρια της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας και του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης. Από την άλλη όμως, η πιθανότητα εμφάνισης της συγκεκριμένης κλάσεις προβολών είναι πολύ μικρή, όποιος σχεδιασμός Hadamard και αν επιλεγεί, ενώ σε κάποιους η πιθανότητα είναι ακόμα και μηδενική. Ειδικότερα, στην καλύτερη περίπτωση όπου ο πειραματιστής θα επιλέξει το σχεδιασμού H16.0, η πιθανότητα να εμφανιστεί η συγκεκριμένη κλάση προβολών είναι μικρότερη του 6%. Σε αυτή τη περίπτωση η επιλογή του σχεδιασμού βασίζεται στην κρίση του εκάστοτε ερευνητή.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι από τους πέντε μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων, με βάση τους σχεδιασμούς στους οποίους αυτοί προβάλλονται, φαίνεται ότι ο σχεδιασμός H16.0 (ισοδύναμος του σχεδιασμού Plackett-Burman 16 εκτελέσεων) μας δίνει πάντοτε και με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, την καλύτερη κλάση προβολών για κάθε επιλογή τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων.

3.3 Σχεδιασμοί με 20 εκτελέσεις

Υπάρχουν τρεις μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων, οι οποίοι μας δίνουν τρεις μη ισοδύναμους κορεσμένους ορθογώνιους σχεδιασμούς με 20 εκτελέσεις, για την μελέτη 19 παραγόντων δύο επιπέδων. Στο πίνακα 3.2 παρουσιάζονται όλες οι μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών με 3, 4 και 5 παράγοντες, ταξινομημένες από την καλύτερη προς την χειρότερη σύμφωνα με τα δύο στατιστικά κριτήρια που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Επίσης παρουσιάζεται και η συχνότητα εμφάνισης των προβολών αυτών σε κάθε μη ισοδύναμο σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων.

Από τις 969 πιθανές επιλογές τριών στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 20 εκτελέσεις, προκύπτουν δύο μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών. Από τον πίνακα 3.2 φαίνεται ότι η κλάση 20.3.1 είναι η καλύτερη σύμφωνα με τα κριτήρια, μιας και έχει τη μεγαλύτερη γενικευμένη διακριτική ικανότητα και το καλύτερο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Επίσης παρατηρούμε ότι η κλάση αυτή εμφανίζεται 912 φορές και στους τρεις μη ισοδύναμους πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όποιο σχεδιασμό Hadamard και αν επιλέξει ένας πειραματιστής η πιθανότητα να εμφανιστεί η επιθυμητή κλάση προβολών είναι πάρα πολύ μεγάλη, περίπου 95%.

Ομοίως, από τις 3876 πιθανές επιλογές τεσσάρων στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 20 εκτελέσεις, προκύπτουν τρεις μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών. Από τον πίνακα φαίνεται ότι η κλάση 20.4.1 είναι η καλύτερη, σύμφωνα με τα κριτήρια, μιας και έχει το καλύτερο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Επίσης παρατηρούμε ότι η κλάση αυτή εμφανίζεται 2736 φορές και στους τρεις μη ισοδύναμους πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων. Δηλαδή έχει μεγάλη πιθανότητα, πάνω από 70%, να εμφανιστεί η συγκεκριμένη κλάση προβολών, ανεξαρτήτως ποιον σχεδιασμό Hadamard 20 εκτελέσεων επιλέξει ο ερευνητής.

Κλάση	GWP	GRES	H20.1	H20.2	H20.3
20.3.1	(0,0,0.04)	3.8	912	912	912
20.3.2	(0,0,0.36)	3.4	57	57	57
20.4.1	(0,0,0.16,0.04)	3.8	2736	2736	2736
20.4.2	(0,0,0.16,0.36)	3.8	228	228	228
20.4.3	(0,0,0.48,0.04)	3.4	912	912	912
20.5.1	(0,0,0.4,0.2,0)	3.8	1881	1296	1680
20.5.2	(0,0,0.4,0.2,0.16)	3.8	1368	1728	1488
20.5.3	(0,0,0.4,0.52,0)	3.8	1539	1944	1680
20.5.4	(0,0,0.4,0.52,0.16)	3.8	684	504	624
20.5.5	(0,0,0.72,0.2,0)	3.4	3078	3888	3360
20.5.6	(0,0,0.72,0.2,0.16)	3.4	1368	1008	1248
20.5.7	(0,0,0.72,0.52,0)	3.4	1026	576	864
20.5.8	(0,0,1.04,0.2,0)	3.4	513	288	432
20.5.9	(0,0,1.04,0.52,0)	3.4	171	216	192
20.5.10	(0,0,1.04,0.52,0.16)	3.4	-	180	60

Πίνακας 3.2: Οι καλύτερες μη ισοδύναμες στατιστικές κλάσεις προβολών πινάκων Hadamard 20 εκτελέσεων σε 3,4 και 5 παράγοντες

Με παρόμοιο τρόπο, από τις 11628 πιθανές επιλογές πέντε στηλών από ένα σχεδιασμό Hadamard με 20 εκτελέσεις, προκύπτουν δέκα μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2. Από τον πίνακα φαίνεται ότι η κλάση 20.5.1 είναι η καλύτερη σύμφωνα με τα κριτήρια, μιας και έχει το καλύτερο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Επίσης παρατηρούμε ότι στην καλύτερη περίπτωση όπου ο πειραματιστής θα επιλέξει το σχεδιασμό H20.1, η κλάση αυτή εμφανίζεται 1881 φορές, δηλαδή έχει πιθανότητα περίπου 16% να εμφανιστεί η συγκεκριμένη κλάση προβολών.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι από τους τρεις μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 20 εκτελέσεων, με βάση τους σχεδιασμούς στους οποίους αυτοί προβάλλονται, φαίνεται ότι ο σχεδιασμός H20.1 (ισοδύναμος του σχεδιασμού Plackett-Burman 20 εκτελέσεων) δίνει πάντοτε, και με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, την καλύτερη κλάση προβολών για κάθε επιλογή τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές σχεδιασμών κρησαρίσματος

4.1 Γραμμικό μοντέλο

Είναι συνηθισμένο, ένας μεγάλος αριθμός p παραγόντων να αναφέρεται ότι έχει σημαντικές επιδράσεις, αλλά τελικά μόνο ένα μικρό υποσύνολο k αυτών να είναι όντως σημαντικό (*αρχή της Σποραδικότητας*). Ο αριθμός των θεραπειών που πρέπει να μελετηθούν για την διερεύνηση όλων των επιδράσεων που προκαλούν οι παράγοντες p στην απόκριση είναι πολύ μεγάλος. Επειδή όμως είναι επιθυμητό το κόστος του πειράματος να είναι περιορισμένο, και βασιζόμενοι στην *αρχή της Ιεραρχίας* που λέει ότι οι επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές από αυτές υψηλής τάξης, αρχικά ελέγχεται ποιες από τις κύριες επιδράσεις είναι ισχυρές (μέθοδος κρησαρίσματος).

Ιδεατή περίπτωση σχεδιασμού κρησαρίσματος είναι η εύρεση ενός κορεσμένου σχεδιασμού Hadamard. Σε αυτούς τους σχεδιασμούς, κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα δύο επιπέδων και κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία πειραματική εκτέλεση που ορίζεται ως ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων που συμμετέχουν. Αν έχουμε p παράγοντες προς εξέταση, σκοπός είναι να πάρουμε εκτιμήσεις για τις κύριες επιδράσεις των p παραγόντων που συμμετέχουν στο πείραμα, σύμφωνα με το γραμμικό μοντέλο:

$$y = \beta_0 + (\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i) + \varepsilon \quad i = 1, 2, ..., p$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων και τη διαδικασία της πολλαπλής παλινδρόμησης, όπου τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2. Σε αυτήν την διαδικασία έχει γίνει σιωπηλά η παραδοχή, ότι αλληλεπιδράσεις παραγόντων δεν έχουν καμία επίδραση στην ανάλυση. Η X_i είναι μια κωδικοποιημένη μεταβλητή με τιμές +1 και –1 για κάθε παράγοντα A_i με i = 1,2,…,p. Ουσιαστικά, ο πίνακας X του μοντέλου είναι ένας πίνακας Hadamard με μια στήλη μόνο με μονάδες που αντιστοιχεί στην μέση τιμή (για το β_0).

Μετά την αρχική ανάλυση και την εκτίμηση των σημαντικών κύριων επιδράσεων, ολόκληρος ο σχεδιασμός προβάλλεται σε ένα σχεδιασμό λιγότερων διαστάσεων ο οποίος περιέχει τους k παράγοντες που βρέθηκαν σημαντικοί στην αρχική ανάλυση. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή και η εκτίμηση κάποιων αλληλεπιδράσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το τελικό μοντέλο περιέχει όλους τους παράγοντες και τις αλληλεπιδράσεις που βρέθηκαν να επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται δύο εφαρμογές για την καλύτερη παρουσίαση και κατανόηση της προβολικής ιδιότητας των κριτηρίων ταξινόμησης και του γραμμικού μοντέλου.

4.2 Εφαρμογές σχεδιασμών με 16 εκτελέσεις

Σε αυτή τη παράγραφο παρατίθεται ένα επεξηγηματικό παράδειγμα των προβολικών ιδιοτήτων των σχεδιασμών Hadamard, κάνοντας χρήση προσομοιωμένων πειραματικών δεδομένων 16 εκτελέσεων. Παράλληλα μέσω του παραδείγματος φαίνεται με κατανοητό τρόπο, η χρησιμότητα των κριτηρίων ταξινόμησης. Τέλος, παρουσιάζονται στην πράξη οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος.

Υποθέτοντας ότι ένας πειραματιστής έχει 15 παράγοντες να ελέγξει (οι οποίοι συμβολίζονται με τα γράμματα A-P) σε μια πειραματική περίπτωση, στην οποία αναμένει μόνο λίγοι από αυτούς να είναι στατιστικά σημαντικοί και θεωρώντας ότι από την εμπειρία του έχει μια εικόνα για το ποιοι από αυτούς και περίπου πόσοι είναι σημαντικοί, διεξάγει το παρακάτω πείραμα. Προκειμένου να ελέγξει ποιοι από αυτούς είναι στατιστικά σημαντικοί και ποιοί όχι, χρησιμοποιεί τον σχεδιασμό H16.0 που είναι ισοδύναμος του σχεδιασμού Plackett-Burman 16 εκτελέσεων που όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.2 μας δίνει πάντοτε και με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης την καλύτερη κλάση προβολών για κάθε επιλογή τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων. Επειδή ο πειραματιστής πιστεύει ότι 5 συγκεκριμένοι παράγοντες είναι πιθανότερο να επηρεάζουν την απόκριση, τους τοποθετεί στις κατάλληλες στήλες του σχεδιασμού έτσι ώστε στην περίπτωση που επαληθευτούν οι προσδοκίες του, ο αρχικός σχεδιασμός να προβληθεί με σιγουριά στην καλύτερη δυνατή προβολή. Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζεται ο σχεδιασμός που χρησιμοποιήθηκε και οι προσομοιωμένες τιμές απόκρισης για κάθε μία από τις 16 εκτελέσεις.

Να σημειωθεί ότι το σφάλμα που 'επιλέχτηκε' είναι $\varepsilon_i \sim N(0,2)$ για i = 1,2,…16. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των προσομοιωμένων τιμών απόκρισης (true model) είναι $Y=2*B+2*C+2*D+2*H+2*N+\varepsilon_i$. Ο πειραματιστής πιστεύει ότι οι παράγοντες *B, C, D, H* και *N* είναι πιθανώς και αυτοί που επηρεάζουν την απόκριση και γι' αυτόν τον λόγο θέλει, αν όντως βρεθούν σημαντικοί, να μπορεί να τους μελετήσει χρησιμοποιώντας την προβολική ιδιότητα. Οι στήλες του σχεδιασμού, στις οποίες ανατέθηκαν οι συγκεκριμένοι παράγοντες, επιλέχτηκαν έτσι ώστε στην περίπτωση που όντως βρεθούν σημαντικοί, να προβληθεί ο σχεδιασμός στην καλύτερη δυνατή προβολή όπως αυτές ταξινομήθηκαν από τα κριτήρια ταξινόμησης στο πίνακα 3.1 ανεξαρτήτως πιθανότητας εμφάνισης της κάθε προβολής. Με αυτό τον τρόπο αν ένας πειραματιστής υποψιάζεται ότι κάποιοι παράγοντες είναι σημαντικοί, μπορεί να τους τοποθετήσει στις κατάλληλες στήλες του σχεδιασμού έτσι ώστε στην περίπτωση που η υπόθεσή του βγει αληθής, να προβληθεί ο σχεδιασμός στη βέλτιστη προβολή.

Παράγοντες		**M**	**B**	**C**	**D**	**O**	**F**	**E**	**H**	**G**	**P**	**L**	**J**	**N**	**A**	**K**	**Y**
Στήλες		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
Εκτελέσεις	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10,25
	2	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2,04
	3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	2,88
	4	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	2,84
	5	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	5,42
	6	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	3,33
	7	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-6,70
	8	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	4,83
	9	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2,47
	10	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1,43
	11	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-5,04
	12	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-0,88
	13	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	2,63
	14	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-4,12
	15	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-7,33
	16	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-8,47

Πίνακας 4.1: Πίνακας σχεδιασμού H16.0 και προσομοιωμένες τιμές απόκρισης

Προκειμένου να εκτιμηθούν οι κύριες επιδράσεις κάθε παράγοντα, υπολογίστηκαν τα εσωτερικά γινόμενα κάθε στήλης με τη στήλη *Y* του πίνακα 4.1 και το αποτέλεσμα διαιρέθηκε με *16/2=8.* Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων των 15 κύριων επιδράσεων των παραγόντων του σχεδιασμού παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2.

Μία πρώτη εικόνα που δίνει ο πίνακας 4.2 των κυρίων επιδράσεων είναι ότι οι εκτιμήσεις των παραγόντων *B, C, D, H* και *N* είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες. Επομένως φαίνεται ότι θα είναι και στατιστικά σημαντικές. Επειδή σε αυτό το σημείο οι βαθμοί ελευθερίας δεν επαρκούν για των υπολογισμό του σφάλματος (το οποίο χρειάζεται για την περεταίρω στατιστική ανάλυση), παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1 και το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των επιδράσεων. Με τον τρόπο αυτό παρουσιάζεται μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το σύνολο των κύριων επιδράσεων.

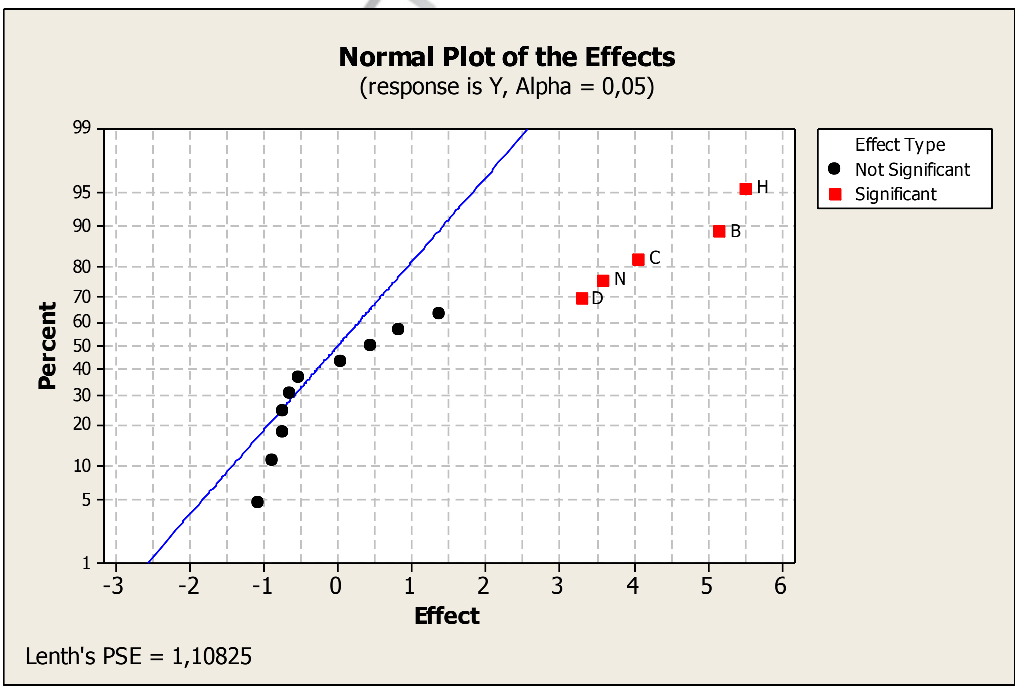
Factorial Fit: Y versus A; B; C; D; E; F; G; H; J; K; L; M; N; O; P

Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef
Constant		0,3473
M	0,4483	0,2242
B	5,1637	2,5819
C	4,0759	2,0380
D	3,2993	1,6496
O	0,8348	0,4174
F	-1,0689	-0,5344
E	-0,7337	-0,3668
H	5,5252	2,7626
G	-0,7440	-0,3720
P	-0,8668	-0,4334
L	1,3723	0,6862
J	-0,5190	-0,2595
N	3,5876	1,7938
A	0,0568	0,0284
K	-0,6329	-0,3165

Πίνακας 4.2: Οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των 15 παραγόντων του σχεδιασμού

Από το σχήμα 4.1 παρατηρείται ότι οι επιδράσεις των παραγόντων *B, C, D, H* και *N* είναι



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων

σημαντικές. Για να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω αποτελέσματα πραγματοποιείται παλινδρόμηση της μεταβλητής απόκρισης *Y* για κάθε παράγοντα. Για τη διεξαγωγή της παλινδρόμησης εξασφαλίζονται μερικοί βαθμοί ελευθερίας εξαιρώντας τους παράγοντες που από τον πίνακα 4.1 φαίνεται να έχουν επίδραση μικρότερη του 1. Ειδικότερα οι παράγοντες που ο πειραματιστής έκρινε ότι δεν είναι σημαντικοί και δεν συμπεριέλαβε στην ανάλυση για την εξοικονόμηση βαθμών ελευθερίας, είναι οι *A, E, G, J, K, M, O* και *P*.

Από τον πίνακα 4.3 φαίνεται ότι οι παράγοντες *B, C, D, H* και *N* είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Επομένως επιβεβαιώνεται η αρχική υποψία του ερευνητή για την σημαντικότητα των παραγόντων *B, C, D, H* και *N*. Προκειμένου να μελετήσει ο ερευνητής αυτά τα αποτελέσματα προβάλει το σχεδιασμό σε 5 διαστάσεις και παίρνει την προβολή 16.5.1 (που παρουσιάστηκε στην υποπαράγραφο 2.2.1) η οποία αποτελείται από ένα 2_V^{5-1} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό με ορίζουσα σχέση $I = BCDHN$.

Analysis of Variance for Y (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	7	402,349	402,349	57,478	33,67	0,000
B	1	106,657	106,657	106,657	62,48	0,000
C	1	66,452	66,452	66,452	38,93	0,000
D	1	43,541	43,541	43,541	25,51	0,001
F	1	4,570	4,570	4,570	2,68	0,140
H	1	122,111	122,111	122,111	71,53	0,000
L	1	7,533	7,533	7,533	4,41	0,069
N	1	51,485	51,485	51,485	30,16	0,001
Residual Error	8	13,656	13,656	1,707		
Total	15	416,005				

Πίνακας 4.3: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ο ερευνητής θα μπορέσει να πάρει μια εικόνα για το ποιές κύριες επιδράσεις, αλλά και ποιές αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, επηρεάζουν την απόκριση. Ειδικότερα από τον πίνακα 4.4 φαίνεται ότι καμία κύρια επίδραση, ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων, δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων. Γεγονός το οποίο του επιτρέπει να έχει ξεκάθαρη εικόνα για αυτές τις επιδράσεις, αν θεωρήσει ότι επιδράσεις μεγαλύτερης τάξης είναι αμελητέες.

Effects Plot for Y

```
Alias Structure

I + B*C*D*H*N   B*C + D*H*N     D*H + B*C*N
                B*D + C*H*N     D*N + B*C*H
B + C*D*H*N     B*H + C*D*N     H*N + B*C*D
C + B*D*H*N     B*N + C*D*H
D + B*C*H*N     C*D + B*H*N
H + B*C*D*N     C*H + B*D*N
N + B*C*D*H     C*N + B*D*H
```

Πίνακας 4.4: Ορίζουσα σχέση και ταυτόσημες επιδράσεις του σχεδιασμού 2_V^{5-1}

Στον πίνακα 4.5 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των κυρίων επιδράσεων και των αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων, της προβολής του σχεδιασμού H16.0 στους πέντε παράγοντες που παρουσιάστηκαν σημαντικοί *B, C, D, H* και *N*.

Factorial Fit: Y versus B; C; D; H; N

```
Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term        Effect     Coef
Constant             0,3473
B           5,1637   2,5819
C           4,0759   2,0380
D           3,2993   1,6496
H           5,5252   2,7626
N           3,5876   1,7938
B*C         0,4483   0,2242
B*D        -1,0689  -0,5344
B*H        -0,8668  -0,4334
B*N        -0,6329  -0,3165
C*D        -0,7337  -0,3668
C*H         1,3723   0,6862
C*N         0,0568   0,0284
D*H        -0,5190  -0,2595
D*N        -0,7440  -0,3720
H*N         0,8348   0,4174
```

Πίνακας 4.5: Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού 2_V^{5-1}

Επειδή για άλλη μια φορά οι βαθμοί ελευθερίας δεν επαρκούν, ο ερευνητής εξαιρεί τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων *DH, DN,* και *HN* γιατί θεωρεί ότι δεν είναι σημαντικές και έτσι εξοικονομεί τους απαραιτήτους βαθμούς ελευθερίας για την περεταίρω ανάλυση.

Από τους πίνακες 4.6 και 4.7 παρατηρείται, ότι όλες οι κύριες επιδράσεις είναι σημαντικές. Δηλαδή οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων *B, C, D, H* και *N* επηρεάζουν σημαντικά την μεταβλητή απόκρισης σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Αντίθετα, οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων δεν φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση.

Factorial Fit: Y versus B; C; D; H; N

Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		0,3473	0,3559	0,98	0,401
B	5,1637	2,5819	0,3559	7,26	0,005
C	4,0759	2,0380	0,3559	5,73	0,011
D	3,2993	1,6496	0,3559	4,64	0,019
H	5,5252	2,7626	0,3559	7,76	0,004
N	3,5876	1,7938	0,3559	5,04	0,015
B*C	0,4483	0,2242	0,3559	0,63	0,573
B*D	-1,0689	-0,5344	0,3559	-1,50	0,230
B*H	-0,8668	-0,4334	0,3559	-1,22	0,310
B*N	-0,6329	-0,3165	0,3559	-0,89	0,439
C*D	-0,7337	-0,3668	0,3559	-1,03	0,378
C*H	1,3723	0,6862	0,3559	1,93	0,149
C*N	0,0568	0,0284	0,3559	0,08	0,941

Πίνακας 4.6: Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού

Analysis of Variance for Y (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	5	390,246	390,246	78,049	38,52	0,006
B	1	106,657	106,657	106,657	52,64	0,005
C	1	66,452	66,452	66,452	32,79	0,011
D	1	43,541	43,541	43,541	21,49	0,019
H	1	122,111	122,111	122,111	60,26	0,004
N	1	51,485	51,485	51,485	25,41	0,015
2-Way Interactions	7	19,680	19,680	2,811	1,39	0,429
B*C	1	0,804	0,804	0,804	0,40	0,573
B*D	1	4,570	4,570	4,570	2,26	0,230
B*H	1	3,005	3,005	3,005	1,48	0,310
B*N	1	1,602	1,602	1,602	0,79	0,439
C*D	1	2,153	2,153	2,153	1,06	0,378
C*H	1	7,533	7,533	7,533	3,72	0,149
C*N	1	0,013	0,013	0,013	0,01	0,941
Residual Error	3	6,079	6,079	2,026		
Total	15	416,005				

Πίνακας 4.7: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Από όλα τα παραπάνω ο ερευνητής καταλήγει ότι το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσει είναι της μορφής:

$$y=0,35+2,58*B+2,04*C+1,65*D+2,76*H+1,79*N$$

Στην περίπτωση που τον ωφελεί η μεγιστοποίηση της μεταβλητής απόκρισης *y*, θα χρειαστεί να πάρει όλους τους παράγοντες στο υψηλό επίπεδο (+1). Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να πάρει όλους τους παράγοντες στο χαμηλό επίπεδο (-1).

4.3 Εφαρμογές σχεδιασμών με 20 εκτελέσεις

Σε αυτή τη παράγραφο παρατίθεται ένα επεξηγηματικό παράδειγμα των προβολικών ιδιοτήτων των σχεδιασμών Hadamard, κάνοντας χρήση προσομοιωμένων πειραματικών δεδομένων 20 εκτελέσεων. Παράλληλα, παρουσιάζονται στην πράξη οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος.

Υποθέτοντας ότι ένας πειραματιστής έχει 19 παράγοντες να ελέγξει (οι οποίοι συμβολίζονται με τα γράμματα A-T) σε μια πειραματική περίπτωση, στην οποία αναμένει μόνο λίγοι από αυτούς να είναι στατιστικά σημαντικοί, διεξάγει το παρακάτω πείραμα. Προκειμένου να ελέγξει ποιοι από αυτούς είναι στατιστικά σημαντικοί και ποιοί όχι, χρησιμοποιεί τον σχεδιασμό H20.1 (που είναι ισοδύναμος του σχεδιασμού Plackett-Burman 20 εκτελέσεων), ο οποίος όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.3 μας δίνει πάντοτε και με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης την καλύτερη κλάση προβολών για κάθε επιλογή τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων. Επειδή ο πειραματιστής δεν γνωρίζει ποιοι παράγοντες είναι πιθανότερο να επηρεάζουν την απόκριση, τους τοποθετεί τυχαία στις στήλες του σχεδιασμού. Στον πίνακα 4.8 παρουσιάζεται ο σχεδιασμός που χρησιμοποιήθηκε και οι προσομοιωμένες τιμές απόκρισης για κάθε μία από τις 20 εκτελέσεις.

Να σημειωθεί ότι το σφάλμα που 'επιλέχτηκε' είναι $\varepsilon_i \sim N(0,2)$ για i = 1,2,…20. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των προσομοιωμένων τιμών απόκρισης (true model) είναι $Y=2*B+2*G+2*K+2*N+2*O+\varepsilon_i$. Η επιλογή των παραγόντων *B, G, K, N*

	Παρ/ντες	**E**	**B**	**A**	**T**	**C**	**L**	**G**	**H**	**R**	**K**	**M**	**P**	**N**	**O**	**Q**	**F**	**J**	**S**	**D**	**Y**
	Στήλες	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	
Εκτελέσεις	**1**	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-9,33
	2	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0,81
	3	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1,88
	4	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	0,57
	5	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-3,30
	6	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-2,62
	7	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-2,54
	8	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	3,41
	9	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1,59
	10	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-5,15
	11	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1,81
	12	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	11,19
	13	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-0,85
	14	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1,20
	15	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	7,93
	16	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-4,40
	17	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-3,88
	18	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-2,89
	19	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	9,23
	20	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	3,16

Πίνακας 4.8: Πίνακας σχεδιασμού H20.1 και προσομοιωμένες τιμές απόκρισης

και *O* είναι τυχαία. Ο ερευνητής μη έχοντας καμία υποψία για το ποιοι παράγοντες μπορεί όντως να επηρεάζουν τη μεταβλητή απόκρισης το μόνο που μπορεί να κάνει είναι η καλύτερη δυνατή επιλογή σχεδιασμού έτσι ώστε ο σχεδιασμός να έχει την μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα να προβληθεί στη βέλτιστη προβολή. Στην περίπτωση αυτού του προβλήματος ο σχεδιασμός αυτός είναι ο H20.1 που παρουσιάζεται παρακάτω.

Προκειμένου να εκτιμηθούν οι κύριες επιδράσεις κάθε παράγοντα, υπολογίστηκαν τα εσωτερικά γινόμενα κάθε στήλης με τη στήλη *Y* του πίνακα 4.8 και το αποτέλεσμα διαιρέθηκε με *20/2=10*. Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων των 19 κύριων επιδράσεων των παραγόντων του σχεδιασμού, παρουσιάζονται στον πίνακα 4.9.

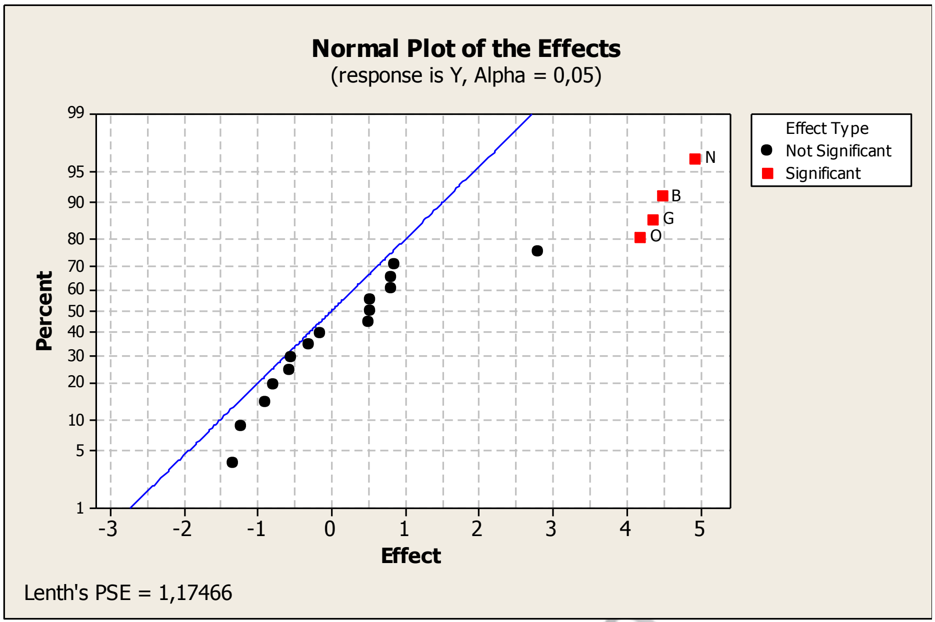
Factorial Fit: Y versus A; B; ...

Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef
Constant		0,2106
E	0,8208	0,4104
B	4,4870	2,2435
A	0,8493	0,4247
T	-0,5407	-0,2704
C	0,5218	0,2609
L	-0,3056	-0,1528
G	4,3598	2,1799
H	-1,3340	-0,6670
R	0,5385	0,2693
K	2,8166	1,4083
M	0,8244	0,4122
P	-0,9015	-0,4508
N	4,9350	2,4675
O	4,2010	2,1005
Q	-0,5643	-0,2822
F	-0,1456	-0,0728
J	0,5125	0,2562
S	-1,2186	-0,6093
D	-0,7831	-0,3916

Πίνακας 4.9: Οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των 19 παραγόντων του σχεδιασμού

Μία πρώτη εικόνα που δίνει ο πίνακας 4.9 των κυρίων επιδράσεων είναι ότι οι εκτιμήσεις των παραγόντων *B, G, N* και *O* είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες. Επομένως φαίνεται ότι θα είναι και στατιστικά σημαντικές. Επειδή σε αυτό το σημείο οι βαθμοί ελευθερίας δεν επαρκούν για των υπολογισμό του σφάλματος (για την περεταίρω στατιστική ανάλυση), παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2 και το διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των επιδράσεων. Με τον τρόπο αυτό παρουσιάζεται μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το σύνολο των κύριων επιδράσεων.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα κανονικής πιθανότητας των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων

Από το σχήμα 4.2 παρατηρείται ότι οι επιδράσεις των παραγόντων *B*, *G*, *N* και *O* είναι σημαντικές. Για να επιβεβαιωθούν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα πραγματοποιείται παλινδρόμηση της μεταβλητής απόκρισης *Y* για κάθε παράγοντα. Για την διεξαγωγή της πολλαπλής παλινδρόμησης εξασφαλίζονται μερικοί βαθμοί ελευθερίας, εξαιρώντας τους παράγοντες που από τον πίνακα 4.9 φαίνεται να έχουν επίδραση μικρότερη του 1. Ειδικότερα οι παράγοντες που ο πειραματιστής έκρινε ότι δεν είναι σημαντικοί και δεν συμπεριέλαβε στην ανάλυση για την εξοικονόμηση βαθμών ελευθερίας, είναι οι *A*, *C*, *D*, *E*, *F*, *J*, *L*, *M*, *P*, *Q*, *R* και *T*. Τέλος από τον πίνακα 4.10 φαίνεται ότι οι παράγοντες *B*, *G*, *K*, *N* και *O* είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Analysis of Variance for Y (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	7	461,711	461,711	65,959	31,34	0,000
B	1	100,668	100,668	100,668	47,83	0,000
G	1	95,041	95,041	95,041	45,16	0,000
H	1	8,898	8,898	8,898	4,23	0,062
K	1	39,666	39,666	39,666	18,85	0,001
N	1	121,772	121,772	121,772	57,86	0,000
O	1	88,241	88,241	88,241	41,93	0,000
S	1	7,425	7,425	7,425	3,53	0,085
Residual Error	12	25,255	25,255	2,105		
Total	19	486,966				

Πίνακας 4.10: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Προκειμένου ο ερευνητής να μελετήσει περεταίρω τους παράγοντες που εκτιμήθηκαν ότι επηρεάζουν στατιστικά σημαντικά την μεταβλητή απόκρισης, προβάλει τον αρχικό σχεδιασμό στους πέντε παράγοντες *B, G, K, N* και *O*, έτσι ώστε να μπορεί να ελέγξει και μερικές αλληλεπιδράσεις. Επειδή όμως συμβαίνει το φαινόμενο της μερικής ανάμειξης, (δηλαδή δύο οποιεσδήποτε παραγοντικές επιδράσεις δεν είναι ούτε ορθογώνιες ούτε πλήρως αναμεμειγμένες) ο ερευνητής δεν μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια όλες τις επιδράσεις. Ειδικότερα, στον πίνακα 4.11 παρουσιάζονται οι επιδράσεις που δεν μπόρεσαν να εκτιμηθούν και εξαιρέθηκαν από την ανάλυση.

Residual Plots for Y

```
The following terms cannot be estimated and were removed:
K*O       B*G*K*N
B*K*N     B*G*K*O
B*G*O     B*G*N*O
B*K*O     B*K*N*O
B*N*O     G*K*N*O
G*K*N     B*G*K*N*O
G*K*O
G*N*O
K*N*O
```

Πίνακας 4.11:Επιδράσεις που δεν εκτιμήθηκαν

Στο πίνακα 4.12 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των κυρίων επιδράσεων των πέντε προβαλλόμενων παραγόντων, καθώς και κάποιες αλληλεπιδράσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού.

Factorial Fit: Y versus B; G; K; N; O

Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		0,2955	0,3268	0,90	0,433
B	4,5671	2,2836	0,3470	6,58	0,007
G	4,2913	2,1456	0,3751	5,72	0,011
K	2,9101	1,4551	0,3950	3,68	0,035
N	4,3831	2,1915	0,3751	5,84	0,010
O	5,2140	2,6070	0,3950	6,60	0,007
B*G	0,6365	0,3183	0,3751	0,85	0,459
B*K	0,2811	0,1405	0,3950	0,36	0,746
B*N	-1,4794	-0,7397	0,3751	-1,97	0,143
B*O	0,1053	0,0526	0,3950	0,13	0,902
G*K	1,3649	0,6825	0,4585	1,49	0,233
G*N	-0,4131	-0,2066	0,4013	-0,51	0,642
G*O	2,9985	1,4992	0,4585	3,27	0,047
K*N	-1,9335	-0,9668	0,4585	-2,11	0,126
N*O	-0,2873	-0,1437	0,5646	-0,25	0,816
B*G*K	-0,6655	-0,3327	0,4659	-0,71	0,527
B*G*N	-0,1840	-0,0920	0,4179	-0,22	0,840

Πίνακας 4.12: Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων του σχεδιασμού

Από τον πίνακα 4.13 της ανάλυσης διακύμανσης παρατηρείται ότι όλες οι κύριες επιδράσεις είναι σημαντικές καθώς και η αλληλεπίδραση των παραγόντων G και O. Ειδικότερα οι επιδράσεις *B, G, K, N, O* και *GO* επηρεάζουν σημαντικά την μεταβλητή απόκρισης σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Analysis of Variance for Y (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	5	445,388	370,471	74,0942	42,67	0,005
B	1	100,668	75,209	75,2089	43,32	0,007
G	1	95,041	56,799	56,7988	32,71	0,011
K	1	39,666	23,565	23,5651	13,57	0,035
N	1	121,772	59,254	59,2542	34,13	0,010
O	1	88,241	75,646	75,6462	43,57	0,007
2-Way Interactions	9	35,483	36,361	4,0401	2,33	0,263
B*G	1	2,562	1,250	1,2497	0,72	0,459
B*K	1	0,002	0,220	0,2199	0,13	0,746
B*N	1	4,816	6,750	6,7501	3,89	0,143
B*O	1	1,210	0,031	0,0308	0,02	0,902
G*K	1	8,469	3,846	3,8462	2,22	0,233
G*N	1	0,251	0,460	0,4599	0,26	0,642
G*O	1	8,278	18,562	18,5620	10,69	0,047
K*N	1	9,793	7,718	7,7183	4,45	0,126
N*O	1	0,102	0,112	0,1124	0,06	0,816
3-Way Interactions	2	0,887	0,887	0,4433	0,26	0,790
B*G*K	1	0,802	0,886	0,8857	0,51	0,527
B*G*N	1	0,084	0,084	0,0841	0,05	0,840
Residual Error	3	5,209	5,209	1,7363		
Pure Error	3	5,209	5,209	1,7363		
Total	19	486,966				

Πίνακας 4.13: Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Από όλα τα παραπάνω ο ερευνητής καταλήγει ότι το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσει είναι της μορφής:

$$y=2,28*B+2,15*G+1,46*K+2,19*N+2,61*O+1,5*GO$$

Στην περίπτωση που τον ωφελεί η μεγιστοποίηση της μεταβλητής απόκρισης *y,* θα χρειαστεί να πάρει όλους τους παράγοντες στο υψηλό επίπεδο (+1). Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να πάρει όλους τους παράγοντες στο χαμηλό επίπεδο (-1).

4.4 Συμπεράσματα

Από τους κορεσμένους σχεδιασμούς κρησαρίσματος 16 και 20 εκτελέσεων που μελετηθήκαν σε αυτό το κεφάλαιο, παρατηρήθηκε ότι η αρχική ανάλυση ήταν επιτυχής. Δηλαδή, η στατιστική ανάλυση που διεξήχθη διέκρινε σωστά τους ενεργούς παράγοντες, παρά το γεγονός ότι η επιρροή τους ήταν μικρή συγκριτικά με το σφάλμα. Παρόλα αυτά ένας ερευνητής μετά τον αρχικό προσδιορισμό των ενεργών παραγόντων ενός πειράματος, ενδιαφέρεται να εκτιμήσει και τις αλληλεπιδράσεις των παραγόντων που βρέθηκαν σημαντικοί. Αυτό είναι εφικτό σε ένα βαθμό, όπως φάνηκε και από τα πειράματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, και εξαρτάται από την επιλογή του σωστού σχεδιασμού κρησαρίσματος.

Στην εφαρμογή που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 4.2, ο ερευνητής ο οποίος είχε μια αρχική εικόνα για τα δεδομένα του, κατάφερε να προβάλει τον αρχικό του σχεδιασμό στους ενεργούς παράγοντες και με αυτό τον τρόπο να εκτιμήσει και τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, θεωρώντας ότι οι αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερης τάξης είναι αμελητέες.

Στην εφαρμογή που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 4.3, παρά το γεγονός ότι ο ερευνητής, μετά τον αρχικό προσδιορισμό των ενεργών παραγόντων, εκτίμησε μερικές αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων και κάποιες τριών παραγόντων, χωρίς να χρειαστεί να κάνει κάποια εικασία για αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερης τάξης, λόγω ταύτισης. Δεν κατάφερε να εκτιμήσει κάποιες αλληλεπιδράσεις δυο, τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων.

Γενικεύοντας τη διαδικασία επιλογής σχεδιασμού κρησαρίσματος για *n* εκτελέσεις, η σωστή επιλογή σχεδιασμού έχει ως εξής. Για την διεξαγωγή ενός πειράματος αρχικά έχει σημασία να εντοπιστούν όλοι οι μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί Hadamard για έναν συγκεκριμένο αριθμό εκτελέσεων *n*. Αν για παράδειγμα ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει 23 παράγοντες θα πρέπει αρχικά να εντοπίσει όλους τους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 24 εκτελέσεων. Στη συνέχεια, θα πρέπει να βρεθούν όλες οι μη ισοδύναμες κλάσεις προβολών σε όλες τις *k* διαστάσεις που εκτιμάται ότι θα προβληθεί ο αρχικός σχεδιασμός σύμφωνα με την αρχή της σποραδικότητας. Επίσης, θα πρέπει να υπολογιστούν οι συχνότητες εμφάνισης των μη ισοδύναμων κλάσεων προβολών σε όλους τους μη ισοδύναμους σχεδιασμούς και να ταξινομηθούν σύμφωνα με τα κριτήρια ταξινόμησης. Αν για παράδειγμα, ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει 23 παράγοντες σε 3 διαστάσεις θα πρέπει να βρει όλες τις $\binom{23}{3} = 1771$ πιθανές επιλογές τριών στηλών και να τις ταξινομήσει σύμφωνα με τα κριτήρια ταξινόμησης και να τις τοποθετήσει στην κατάλληλη τάξη προβολών. Τέλος, πρέπει να επιλεγεί ο καταλληλότερος σχεδιασμός Hadamard *n* εκτελέσεων ο οποίος για κάθε *k* διάσταση θα δίνει την καλύτερη κλάση προβολής με την μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης.

Από την εργασία αυτή φαίνεται ότι με τους σχεδιασμούς κρησαρίσματος ένας ερευνητής μπορεί να πάρει σημαντικές πληροφορίες για τους παράγοντες που επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης, με ένα σχετικά μικρό αριθμό εκτελέσεων του πειράματος. Ακόμα, προβάλλοντας τον αρχικό του σχεδιασμό στους ενεργούς παράγοντες, μπορεί να εκτιμήσει και κάποιες αλληλεπιδράσεις των παραγόντων αυτών. Τέλος, χρησιμοποιώντας ο ερευνητής των κατάλληλο σχεδιασμό, είναι πιθανότερο να πάρει μία προβολή η οποία θα του παρέχει περισσότερα και πιο ξεκάθαρα αποτελέσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται οι μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 και 20 εκτελέσεων οι οποίοι χρειάζονται για την εύρεση και τον υπολογισμό των συχνοτήτων των μη ισοδύναμων προβολών, καθώς και για τον υπολογισμό των κριτηρίων ταξινόμησης που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διπλωματική. Οι πληροφορίες για τους πίνακες Hadamard που ακολουθούν αντλήθηκαν από την ιστοσελίδα N. J. A. Sloane. Στον σύνδεσμο http://neilsloane.com/hadamard/ ο αναγνώστης μπορεί να αντλήσει πληροφορίες για σχεδιασμούς Hadamard μέχρι και 256 εκτελέσεων.

A.1 Μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων

Παρακάτω παρουσιάζονται οι πέντε μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 16 εκτελέσεων, από τους οποίους αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη με τα « + » παίρνουμε τους πέντε μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός H16.0 που φαίνεται στον πίνακα A1, είναι ισοδύναμος με το σχεδιασμό Plackett-Burman 16 εκτελέσεων.

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
8	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
10	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
11	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
12	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
13	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
14	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
15	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
16	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+

Πίνακας A1: Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.0

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
8	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
10	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
11	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
12	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+
13	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
14	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+
15	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
16	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-

Πίνακας Α2: Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.1

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
8	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
10	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
11	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+
12	+	+	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-
13	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
14	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+
15	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+
16	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-

Πίνακας Α3: Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.2

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
8	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
10	+	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+	+	+
11	+	+	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-
12	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+
13	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
14	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	-
15	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+
16	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-

Πίνακας Α4: Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.3

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-
3	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-
5	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+
6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-
8	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+
9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
10	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+
11	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
12	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
13	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
14	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
15	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+
16	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-

Πίνακας Α5: Πίνακας Hadamard 16 εκτελέσεων H16.4

Α.2 Μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων

Παρακάτω παρουσιάζονται οι τρείς μη ισοδύναμοι πίνακες Hadamard 20 εκτελέσεων από τους οποίους αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη με τα « + » παίρνουμε τους τρείς μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 20 εκτελέσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός H20.1 είναι ισοδύναμος με το σχεδιασμό Plackett-Burman.

1	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+
3	+	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-
4	+	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-
5	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+
6	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+
7	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+
8	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+
9	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-
10	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+
11	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-
12	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+
13	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-
14	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-
15	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-
16	+	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-
17	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+
18	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+
19	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-
20	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	+

Πίνακας Α6: Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.1

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
4	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-
5	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+
7	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
8	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+
9	+	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-
10	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-
11	+	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+
12	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
13	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+
14	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-
15	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-
16	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-
17	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-
18	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+
19	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+
20	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-

Πίνακας Α7: Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.2

1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
4	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-
5	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+
7	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
8	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+
9	+	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-
10	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-
11	+	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	+
12	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	+
13	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-
14	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-
15	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
16	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+
17	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-
18	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-
19	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+
20	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-

Πίνακας Α8: Πίνακας Hadamard 20 εκτελέσεων H20.3

Παράρτημα Β

Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των δύο στατιστικών κριτηρίων (που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3), για την ταξινόμηση των ορθογώνιων παραγοντικών σχεδιασμών. Ο τρόπος υπολογισμού αναλύεται μέσα από ένα παράδειγμα. Ειδικότερα περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού της γενικευμένης αναλυτικής τάξης και του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης για την κλάση 16.4.3. Αξίζει να σημειωθεί ότι με την ίδια μεθοδολογία υπολογίστηκαν και οι υπόλοιπες κλάσεις που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

B.1 Υπολογισμός του κριτηρίου της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας (GRES) από σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων

Για να υπολογιστεί η γενικευμένη διακριτική ικανότητα, αρχικά θα πρέπει να υπολογιστούν τα j-χαρακτηριστικά. Η μεθοδολογία έχει ως εξής: Εφόσον ο σχεδιασμός D είναι ορθογώνιος, ισχύει ότι $J_1(s) = J_2(s) = 0$, επομένως σειρά έχει ο υπολογισμός των J_3 (από τον τύπο 3.1). Αν τα J_3 ισούνται και αυτά με το μηδέν σειρά έχει ο υπολογισμός των J_4, J_5, κοκ ανάλογα με τον αριθμό των παραγόντων του σχεδιασμού. Στην συνέχεια ο υπολογισμός της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας γίνεται από τον τύπο 3.2.

Σε αυτό το παράδειγμα μελετάμε την κλάση 16.4.3. Από τον πίνακα 3.1 φαίνεται ότι όλοι οι μη ισοδύναμοι σχεδιασμοί Hadamard 16 εκτελέσεων (εκτός από τον 16.0) προβάλλονται σε αυτήν τη κλάση προβολών. Στον πίνακα B1 προβάλλεται ένας από τους τέσσερεις μη ισοδύναμους σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων (16.1 ή 16.2 ή 16.3 ή 16.4) σε ένα σχεδιασμό με 4 στήλες (A, B, C και D).

Εκτέλεση	A	B	C	D	ABC	ABD	ACD	BCD
1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	-	+	+	-	-	+	+	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	-	+	-	+	+	-	+	-
7	-	-	+	+	+	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	+	+	-	-	+	+	-
11	-	+	-	+	+	-	+	-
12	-	-	+	+	+	+	-	-
13	+	-	-	-	+	+	+	-
14	+	+	+	-	+	-	-	-
15	+	+	-	+	-	+	-	-
16	+	-	+	+	-	-	+	-

Πίνακας B1: Προβολή τεσσάρων διαστάσεων των σχεδιασμών Hadamard 16 εκτελέσεων και οι συνδυασμοί ABC, ABD, ACD και BCD

Για τον υπολογισμό του J_3 παρουσιάζονται στον ίδιο πίνακα και οι συνδυασμοί ABC, ABD, ACD και BCD. Για το ABC, από το άθροισμα της στήλης του γινομένου, προκύπτει ότι $J_3(s) = 0$. Ομοίως, για το ABD, από το άθροισμα της στήλης του γινομένου, προκύπτει ότι $J_3(s) = 0$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζουμε και το $J_3(s) = 0$ του ACD. Τέλος, για το BCD από το άθροισμα της στήλης του γινομένου προκύπτει ότι $J_3(s) = 8$. Επομένως, η μέγιστη τιμή του $J_3(s)$ είναι 8 άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα είναι $GRES(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n] = 3 + [1 - 8/16] = 3.5$ και έτσι δεν χρειάζεται να προχωρήσουμε σε περεταίρω διερεύνηση j-χαρακτηριστικών για μεγαλύτερο k.

B.2 Υπολογισμός του κριτηρίου του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης (GWP) από σχεδιασμούς Hadamard 16 εκτελέσεων

Το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης $W^g(D) = \{A_1^g(D), \ldots, A_p^g(D)\}$ υπολογίζεται από τον τύπο (3.4). Αρχικά υπολογίζεται η κατανομή απόστασης του σχεδιασμού D από τον τύπο (3.6) όπου $d_H(c,d)$ είναι η απόσταση Hamming μεταξύ των δύο εκτελέσεων c και d του D η οποία είναι, ο αριθμός των συντεταγμένων που διαφέρουν σε αυτές τις εκτελέσεις. Η μεθοδολογία έχει ως εξής, ο σχεδιασμός μας είναι οι στήλες (A, B, C, D) του πίνακα B1. Αν τώρα η εκτέλεση c είναι η εκτέλεση 1 η C_1 και d η εκτέλεση 2 η C_2 ο αριθμός των συντεταγμένων που διαφέρουν σε αυτές τις εκτελέσεις είναι $d_H(C_1,C_2) = d_H(C_2,C_1) = 2$, δηλαδή διαφέρουν σε 2 συντεταγμένες. Με αυτό τον τρόπο παρουσιάζονται στον πίνακα B2 όλες οι διαφορές των συντεταγμένων των εκτελέσεων $C_1, C_2, \ldots, C_{16}$.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
C_1	0	2	2	2	2	2	2	4	0	2	2	2	1	3	3	3
C_2	2	0	2	2	2	2	4	2	2	2	2	4	1	1	1	3
C_3	2	2	0	2	2	4	2	2	2	2	4	2	1	1	3	1
C_4	2	2	2	0	4	2	2	2	2	0	2	2	3	1	3	3
C_5	2	2	2	4	0	2	2	2	2	4	2	2	1	3	1	1
C_6	2	2	4	2	2	0	2	2	2	2	0	2	3	3	1	3
C_7	2	4	2	2	2	2	0	2	2	2	2	0	3	3	3	1
C_8	4	2	2	2	2	2	2	0	4	2	2	2	3	1	1	1
C_9	0	2	2	2	2	2	2	4	0	2	2	2	1	3	3	3
C_{10}	2	2	2	0	4	2	2	2	2	0	2	2	3	1	3	3
C_{11}	2	2	4	2	2	0	2	2	2	2	0	2	3	3	1	3
C_{12}	2	4	2	2	2	2	0	2	2	2	2	0	3	3	3	1
C_{13}	1	1	1	3	1	3	3	3	1	3	3	3	0	2	2	2
C_{14}	3	1	1	1	3	3	3	1	3	1	3	3	2	0	2	2
C_{15}	3	1	3	3	1	1	3	1	3	3	1	3	2	2	0	2
C_{16}	3	3	1	3	1	3	1	1	3	3	3	1	2	2	2	0

Πίνακας B2: Διαφορές των συντεταγμένων των εκτελέσεων του σχεδιασμού D

Αφού συγκρίθηκαν ανά δυο και οι 16 γραμμές του πίνακα B1 (και παρουσιάζονται στον πίνακα B2) καθώς και κάθε μια με τον εαυτό της προχωράμε στον υπολογισμό της κατανομής της απόστασης του σχεδιασμού D την $E_j(D)$.

$$E_j(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d) = j\}}{n}, \quad j = 0, \ldots, p$$

$$E_0(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d) = 0\}}{16} = \frac{24}{16} = 1.5$$

$$E_1(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d)=1\}}{16} = \frac{40}{16} = 2.5$$

$$E_2(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d)=2\}}{16} = \frac{120}{16} = 7.5$$

$$E_3(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d)=3\}}{16} = \frac{56}{16} = 3.5$$

$$E_4(D) = \frac{\#\{(c,d)\,|, c,d \in D, d_H(c,d)=4\}}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

Στην συνέχεια υπολογίζονται τα πολυώνυμα Krawtchouk *$P_1(j;4)$, $P_2(j;4)$, $P_3(j;4)$* και *$P_4(j;4)$* από τον τύπο 3.5.

$$P_i(j;4) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{j}{r}\binom{4-j}{i-r}, \quad j=0,\dots,p \quad \text{και} \quad i=1,\dots,p$$

Τα πολυώνυμα Krawtchouk $P_1(j;4)$ είναι:

$$P_1(0;4) = \sum_{r=0}^{1} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{0}{r}\binom{4-0}{1-r} = (-1)^0 (2-1)^{1-0} \binom{0}{0}\binom{4-0}{1-0} + (-1)^1 (2-1)^{1-1} \binom{0}{1}\binom{4-0}{1-1} =$$

$$\binom{0}{0}\binom{4}{1} = 4$$

$$P_1(1;4) = \sum_{r=0}^{1} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{1}{r}\binom{4-1}{1-r} = \binom{1}{0}\binom{3}{1} - \binom{1}{1}\binom{3}{0} = 2$$

$$P_1(2;4) = \sum_{r=0}^{1} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{2}{r}\binom{4-2}{1-r} = \binom{2}{0}\binom{2}{1} - \binom{2}{1}\binom{2}{0} = 0$$

$$P_1(3;4) = \sum_{r=0}^{1} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{3}{r}\binom{4-3}{1-r} = \binom{3}{0}\binom{1}{1} - \binom{3}{1}\binom{1}{0} = -2$$

$$P_1(4;4) = \sum_{r=0}^{1} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{4}{r}\binom{4-4}{1-r} = -\binom{4}{1}\binom{0}{0} = -4$$

Τα πολυώνυμα Krawtchouk $P_2(j;4)$ είναι:

$$P_2(0;4) = \sum_{r=0}^{2} (-1)^r (2-1)^{1-r} \binom{0}{r}\binom{4-0}{2-r} = \binom{0}{0}\binom{4}{2} = 6$$

$$P_2(1;4)=\sum_{r=0}^{2}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{1}{r}\binom{4-1}{2-r}=\binom{1}{0}\binom{3}{2}-\binom{1}{1}\binom{3}{1}=0$$

$$P_2(2;4)=\sum_{r=0}^{2}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{2}{r}\binom{4-2}{2-r}=\binom{2}{0}\binom{2}{2}-\binom{2}{1}\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\binom{2}{0}=-2$$

$$P_2(3;4)=\sum_{r=0}^{2}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{3}{r}\binom{4-3}{2-r}=-\binom{3}{1}\binom{1}{1}+\binom{3}{2}\binom{1}{0}=0$$

$$P_2(4;4)=\sum_{r=0}^{2}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{4}{r}\binom{4-4}{2-r}=\binom{4}{2}\binom{0}{0}=6$$

Τα πολυώνυμα Krawtchouk $P_3(j;4)$ είναι:

$$P_3(0;4)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{0}{r}\binom{4-0}{3-r}=\binom{0}{0}\binom{4}{3}=4$$

$$P_3(1;4)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{1}{r}\binom{4-1}{3-r}=\binom{1}{0}\binom{3}{3}-\binom{1}{1}\binom{3}{2}=-2$$

$$P_3(2;4)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{2}{r}\binom{4-2}{3-r}=-\binom{2}{1}\binom{2}{2}+\binom{2}{2}\binom{2}{1}=0$$

$$P_3(3;4)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{3}{r}\binom{4-3}{3-r}=\binom{3}{2}\binom{1}{1}-\binom{3}{3}\binom{1}{0}=2$$

$$P_3(4;4)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{4}{r}\binom{4-4}{3-r}=-\binom{4}{3}\binom{0}{0}=-4$$

Τα πολυώνυμα Krawtchouk $P_4(j;4)$ είναι:

$$P_4(0;4)=\sum_{r=0}^{4}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{0}{r}\binom{4-0}{4-r}=\binom{0}{0}\binom{4}{4}=1$$

$$P_4(1;4)=\sum_{r=0}^{4}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{1}{r}\binom{4-1}{4-r}=-\binom{1}{1}\binom{3}{3}=-1$$

$$P_4(2;4)=\sum_{r=0}^{4}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{2}{r}\binom{4-2}{4-r}=\binom{2}{2}\binom{2}{2}=1$$

$$P_4(3;4)=\sum_{r=0}^{4}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{3}{r}\binom{4-3}{4-r}=-\binom{3}{3}\binom{1}{1}=-1$$

$$P_4(4;4)=\sum_{r=0}^{4}(-1)^r(2-1)^{1-r}\binom{4}{r}\binom{4-4}{4-r}=\binom{4}{4}\binom{0}{0}=1$$

Έχοντας υπολογίσει τα πολυώνυμα Krawtchouk και την κατανομή της απόστασης του σχεδιασμού D, υπολογίζουμε το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης από τον τύπο:

$$A_i^g(D)=\frac{1}{n(s-1)}\sum_{j=0}^{p}P_i(j;p)E_j(D),\quad i=1,\dots,p$$

$$A_1^g(D)=\frac{1}{16(2-1)}\sum_{j=0}^{4}P_1(j;1)E_j(D)=\frac{1}{16}*(4*1.5+2*2.5+0*7.5-2*3.5-4*1)=0$$

$$A_2^g(D)=\frac{1}{16(2-1)}\sum_{j=0}^{4}P_2(j;1)E_j(D)=\frac{1}{16}*(6*1.5+0*2.5-2*7.5+0*3.5+6*1)=0$$

$$A_3^g(D)=\frac{1}{16(2-1)}\sum_{j=0}^{4}P_3(j;1)E_j(D)=\frac{1}{16}*(4*1.5-2*2.5+0*7.5+2*3.5-4*1)=0.25$$

$$A_4^g(D)=\frac{1}{16(2-1)}\sum_{j=0}^{4}P_4(j;1)E_j(D)=\frac{1}{16}*(1*1.5-1*2.5+1*7.5-1*3.5+1*1)=0.25$$

Επομένως το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης είναι: $W^g(D)=\{0,0,0.25,0.25\}$

Βιβλιογραφία

Ευαγγελάρας, Χ. (2004), *Ορθογώνιοι σχηματισμοί και προβολικές ιδιότητες*, Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

Box, G. E. P. and J. S. Hunter (1961), The 2^{k-p} fractional factorial designs, *Technometrics*, 27:173 - 180.

Box, G. and J. Tyssedal (1996), Projective properties of certain orthogonal arrays, *Biometrika*. 83:950-955

Cheng, C. S. (2006), Projection properties of factorial designs for factor screening. Screening: *Methods for experimentation in industry, drug discovery, and genetics,* ed A. Dean and S. Lewis, pp.156-168.

Cheng, C. S. and R. Mukerjee (1998), Regular fractional factorial designs with minimum aberration and maximum estimation capacity, *The Annals of Statistics*, 26:2289-2300.

Deng, L. Y. and B. Tang (1999), Generalized resolution and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other non-regular factorial designs, *Statistica Sinica*, 9:1071-1082.

Evangelaras, H., S. Georgiou, and C. Koukouvinos (2003) Inequivalent projection of Hadamard matrices of order 16 and 20, *Metrika*, 57:29 - 35.

Evangelaras, H., S. Georgiou, and C. Koukouvinos (2004) Evaluation of Inequivalent projection of Hadamard matrices of order 24, *Metrika*, 59:51-73.

Evangelaras, H. and C. Koukouvinos (2004) Another Look at Projection Properties of Hadamard Matrices, *COMMUNICATIONS IN STATISTICS Theory and Methods*, Vol. 33, No. 7, pp. 1607-1620.

Fang, K. T. and R. Mukerjee (2000), Connection between uniformity and aberration in regular fractions of two-level factorials, *Biometrika*, 87:193-198.

Fries, A. and W. G. Hunter (1980), Minimum aberration 2^{k-p} designs, *Technometrics*, 22:601-608.

Hall Jr., M. (1961) Hadamard matrices of order 16, *J. P. L. Research Summary*, No. 36-10, 1:21-26.

Hall Jr., M. (1965) Hadamard matrices of order 20, *J. P. L. Technical Report*, No. 32-761.

Hamada, M. and N. Balakrishnan (1998), Analyzing unreplicated factorial experiments: A review with some new proposals, *Statistica Sinica*, 8:1-41

Hedayat, A.S. (1990), New properties of orthogonal arrays and their statistical applications, Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments. *ed. S. Ghosh, Dekker, New York*. 407-422

Hedayat, A.S. and H. Pesotan (1992), Two level factorial designs for main effects and selected two-factor interactions, *Statistica Sinica*, 2:453-464

Lin, Dennis K.J. (2003) "Industrial Experimentation for Screening," *Handbook of Statistics in Industry*, ed. C.R. Rao and R. Khattree, North Holland: New York, 22:33-73

Lin, Dennis K. J. and Norman R. Draper (1995), Screening properties of certain two-level designs, *Metrika* 42:99-118

Loeppky, J. L., R. R. Sitter and B.Tang (2007), Nonregular designs with desirable projection properties, *Technometrics*: 49:4

Ma, C. X. and K. T. Fang (2001), A note on generalized aberration in factorial designs, *Metrika* 53:85-93.

MacWilliams, F. J., N. J. A. Sloane (1977). The Theory of Error Correcting Codes. Amsterdam: North Holland Pub. Co.

Montgomery, D.C. (1997), Design and Analysis of Experiments, 5th Edition, *John Wiley & Sons*. 6:218-243, 8:303-348

Montgomery, D.C. and Cheryl L. Jennings (2006), An overview of industrial screening experiments. Screening: *Methods for experimentation in industry, drug discovery, and genetics,* ed A. Dean and S. Lewis, pp.1-20.

Paley, R. E. A. C. (1933), On orthogonal matrices, *J. Math. Phys* 12:311-320.

Plackett, R.L. and J.P. Burman (1946). The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika*. Vol. 33, No. 4, pp. 305-325.

Rao, C.R. (1947), Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays, *Journal of the Royal Statistical Society*. 9:128-139.

Ryan, Thomas P. (2007), Modern experimental design, *John Wiley & Sons*. 4:153

Xu, Hongquan, Frederick K. H. Phoa and Weng Kee Wong (2009), Recent developments in nonregular fractional factorial designs, *Statistics Surveys*, 3:18-46

Ye, K. (2004), A note on regular fractional factorial designs, *Statistica Sinica* 14:1069-1074.