

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΧΡΗΣΗ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΤΑ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ**

Γεώργιος Π. Σταθείας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2013

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΧΡΗΣΗ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΤΑ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ**

Γεώργιος Π. Σταθείας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Χρήστος Αγιακλόγλου (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Μάρκος Κούτρας
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Πιτσέλης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM
IN APPLIED STATISTICS

USE OF FRACTAL METHODS FOR THE
STUDY OF TIME SERIES FINANCIAL DATA

By
Georgios P. Statheas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in
partial fulfilment of the requirements for the degree
of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2013

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογενείας μου για την ηθική συμπαράστασή τους κατά τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας. Επίσης ευχαριστώ τα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης της εργασίας και ιδιαίτερα τον Επιβλέποντα Καθηγητή κ. Χρήστο Αγιακλόγλου για το χρόνο του, για τις υποδείξεις του και για τη συμπαράστασή του.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Περίληψη

Στην εργασία αυτή εξετάζεται η έννοια των μορφοκλασματικών μεθόδων και η χρήση τους για τη μελέτη χρονολογικών σειρών. Ο όρος μορφοκλασματικό (fractal) εκφράζει μία συγκεκριμένη κατηγορία γεωμετρικών σχημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από αρκετά ενδιαφέρουσες ιδιότητες όπως είναι η αυτο-ομοιότητα ν (self-similarity) και η ύπαρξη μίας ή/και πολλών προσδιοριστικών παραμέτρων οι οποίες ονομάζονται μορφοκλασματικές (fractal) και οι οποίες μπορούν να λάβουν ακόμα και μη ακέραιες τιμές. Για τη μελέτη των μορφοκλασματικών σχημάτων μίας διάστασης έχει ορισθεί η μορφοκλασματική διάσταση, γνωστή και ως διάσταση Hausdorff. Επίσης εξετάζονται και άλλες μέθοδο εκτίμησης της μορφοκλασματικής διάστασης, με σημαντικότερη τη box counting. Επιπλέον γίνεται χρήση του εκθέτη του Hurst, ενός μεγέθους εμπνευσμένου από τη θεωρία των μορφοκλασματικών για την εκτίμηση του βαθμού συσχέτισης μεταξύ των παρατηρήσεων μίας χρονολογικής σειράς. Για τις περιπτώσεις ύπαρξης πάνω από μίας μορφοκλασματικής διάστασης έχουν ορισθεί μέθοδοι που επιτρέπουν την μελέτη αυτών. Σημαντικότερες είναι ο τοπικός εκθέτης του Holder και το φάσμα πολυφράκταλ. Η έννοια του πολυφράκταλ σε συνδυασμό με μία γενίκευση της κίνησης Brown η οποία ονομάζεται κλασματική κίνηση Brown αποτελούν τα εργαλεία βάση των οποίων είναι δομημένο ένα πολύ σημαντικό μοντέλο στα χρηματοοικονομικά, το οποίο ονομάζεται πολυφράκταλ μοντέλο απόδοσης τίτλων. Όλες αυτές οι έννοιες εξετάζονται στην πράξη με χρήση εμπειρικών δεδομένων τα οποία και προέρχονται από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών.

Abstract

This thesis examines the concept of fractal methods and their use in the analysis of time series data. The term fractal describes a certain category of geometrical objects, which are characterized by some rather interesting attributes such as self-similarity and the existence of one or more defining parameters, which are called dimensions. Those dimensions are called fractal dimensions and can take values that are not necessarily integer. A mono-parametric fractal is characterized by its fractal dimension, which is also called Hausdorff dimension. Other fractal dimension estimation methods also exist, and the most important of them is the box counting dimension. Another important concept inspired by the fractal theory is the Hurst exponent, which is a method for estimating the degree of correlation between the observations of a time series. For the cases where more than one fractal dimension exists other methods have been defined that allow their study. The most important of them are the local Holder exponent and the multifractal spectrum. Multifractal and a generalization of Brownian motion called fractional Brownian motion are the tools that form the basis for a very important financial model called the Multifractal Model of Asset Returns. All those concepts are examined using empirical data from the Athens Stock Market Exchange.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xi
Κατάλογος Διαγραμμάτων	xiii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικά Σημεία μορφοκλασματικών εννοιών και εφαρμογή τους σε Χρονολογικές σειρές

1.1.	Εισαγωγή	1
1.2.	Ορισμός των μορφοκλασματικών	2
1.3	Βασικές Θεωρητικές Έννοιες από Θεωρία Συνόλων και Συναρτήσεις	3
1.3.1	Βασικές έννοιες από θεωρία συνόλων	3
1.3.2	Βασικές έννοιες συναρτήσεων	5
1.4	Βασικές έννοιες διαστάσεων	6
1.4.1	Τοπολογική διάσταση-διάσταση εμβύθισης	8
1.4.2	Η μορφοκλασματική διάσταση	9
1.5	Η στατιστική R/S	11
1.5.1	Σχέση μεταξύ μορφοκλασματικών και στατιστικής R/S	13
1.6	Εμπειρική εκτίμηση χρονολογικών σειρών με πραγματικά δεδομένα	13
1.6.1	Εκτίμηση της μορφοκλασματικής διάστασης	15
1.6.2	Εμπειρική εκτίμηση δεδομένων με τη Μεθόδου R/S	16
1.7	Ανακεφαλαίωση	19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γενίκευση της έννοιας του μορφοκλασματικού συνόλου και των ιδιοτήτων του

2.1	Εισαγωγή	20
2.2.	Η έννοια του πολυφράκταλ	21
2.2.1	Το διωνυμικό μέτρο και η σχέση του με την έννοια του πολυφράκταλ	21
2.2.2	Γενίκευση του διωνυμικού μέτρου πολυφράκταλ	23
2.3	Βασικές ιδιότητες πολυφράκταλ	24
2.3.1	Ο τοπικός εκθέτης Hölder	24
2.3.2	Το φάσμα πολυφράκταλ	25
2.3.3	Στατιστικές ιδιότητες του "τραχύ" εκθέτη του Hölder και σύνδεση με φάσμα πολυφράκταλ	27

2.4	Η κλασματική κίνηση Brown	30
2.4.1	Η κλασσική κίνηση Brown	30
2.4.2	Η κλασματική κίνηση Brown	32
2.5	Αυτοσυγγένεια και πολυφράκταλ	33
2.6	Στοχαστικές Διαδικασίες πολυφράκταλ	35
2.7	Το μοντέλο πολυφράκταλ απόδοσης τίτλων	36
2.8	Ιδιότητες του πολυφράκταλ μοντέλου απόδοσης τίτλων	37
2.9	Συσχέτιση πολυφράκταλ με πολυφράκταλ μοντέλο απόδοσης τίτλων	39
2.10	Ανακεφαλαίωση	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χρήση Συναρτήσεων διαμέρισης για εκτίμηση Δεδομένων

3.1	Εισαγωγή	41
3.2	Δειγματικό άθροισμα	41
3.3	Διαγράμματα δειγματικού αθροίσματος	42
3.4	Χρήση Ανάλυσης Παλινδρόμησης για τον εντοπισμό συσχετίσεων	53
3.5	Ανακεφαλαίωση	55

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π1	Εκτίμηση της μορφοκλασματικής διάστασης δεδομένων μετοχών του Χρηματιστηρίου Αθηνών	57
Π2	Εκτίμηση του εκθέτη του Hurst για τιμές μετοχών του Χρηματιστηρίου	61
Π3	Υπολογισμός της συνάρτησης διαμέρισης και ανάλυση παλινδρόμησης για χρονολογικές σειρές μετοχών	68

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		87
---------------------	--	----

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1-1 Μετοχές Υψηλής Κεφαλαιοποίησης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και διάστημα παραμονής ως εισηγμένες.	14
1-2 Τιμές της μορφοκλασματικής διάστασης για τις τιμές κλεισίματος των μετοχών του Χρηματιστηρίου και των λογαρίθμων τους.	15
1-3 Τιμές του εκθέτη του Hurst για διαφορά μίας και 5 χρονικών περιόδων.	18
3-1 Εκτίμηση κλίσης ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για $q=1.75$ και $q=2$.	54

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1-1	Η καμπύλη του Koch σε διαδοχικά στάδια	9
1-2	Κάλυψη της καμπύλης του Koch με τετράγωνα σύνολα προοδευτικά μικρότερης διαμέτρου δ	10
1-3	Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης του ΧΑΑ από 1/1/1994 έως 31/12/2012	12
1-4	Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης με διαφορά 1 εργάσιμη ημέρα.	16
1-5	Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης με διαφορά 5 εργάσιμες ημέρες.	17
3-1	Τιμές δειγματικού αθροίσματος του δείκτη μεγάλης κεφαλαιοποίησης για $q=1.50, 1.75, 2.00, 2.25$	42
3-2	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Alpha Bank για $q=1.50, 1.75, 2.00$	43
3-3	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Βιοχάλκο για $q=1.50, 1.75, 2.00$	43
3-4	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Coca-Cola 3E για $q=1.50, 1.75, 2.00$	43
3-5	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Τράπεζας Κύπρου για $q=1.50, 1.75, 2.00$	44
3-6	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΔΕΗ για $q=1.50, 1.75, 2.00$	44
3-7	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΕΛΛΑΚΤΟΡ για $q=1.50, 1.75, 2.00$	45
3-8	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Ελληνικά Χρηματιστήρια για $q=1.50, 1.75, 2.00$	45
3-9	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Ελληνικά Πετρέλαια για $q=1.50, 1.75, 2.00$	45
3-10	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας για $q=1.50, 1.75, 2.00$	46
3-11	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Follie-Follie για $q=1.50, 1.75, 2.00$	46

3-12	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Frigoglass για $q=1.50, 1.75, 2.00$	47
3-13	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Intralot για $q=1.50, 1.75, 2.00$	47
3-14	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Jumbo για $q=1.50, 1.75, 2.00$	48
3-15	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Marfin για $q=1.50, 1.75, 2.00$	48
3-16	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της METKA για $q=1.50, 1.75, 2.00$	49
3-17	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Μυτηλιναίος για $q=1.50, 1.75, 2.00$	49
3-18	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Motor Oil για $q=1.50, 1.75, 2.00$	50
3-19	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΟΛΠ για $q=1.50, 1.75, 2.00$	50
3-20	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΟΠΑΠ για $q=1.50, 1.75, 2.00$	51
3-21	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής του ΟΤΕ για $q=1.50, 1.75, 2.00$	51
3-22	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Τράπεζας Πειραιώς για $q=1.50, 1.75, 2.00$	51
3-23-1	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΤΕΡΝΑ για $q=1.50, 1.75$.	52
3-23-2	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΤΕΡΝΑ για $q=2.00, 2.25$.	52
3-24	Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της TITAN για $q=1.50, 1.75, 2.00$	53

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Ο κλάδος της γεωμετρίας των μορφοκλασματικών (fractals) αναπτύχθηκε κυρίως κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα από μαθηματικούς όπως ο Sierpinski, ο Hausdorff και ο B. Mandelbrot. Στόχος της γεωμετρίας αυτής είναι η μελέτη μίας ιδιαίτερης κατηγορίας γεωμετρικών φαινομένων-των fractals -τα οποία χαρακτηρίζονται από μία έλλειψη κανονικότητας σε σχέση με τα στοιχεία της ευκλείδειας γεωμετρίας. Οι βασικότερες έννοιες των μορφοκλασματικών, οι οποίες και θα εξ

ετασθούν στο παρόν κεφάλαιο είναι οι έννοιες της **διάστασης (dimension)** και της **αυτοομοιότητας (self-similarity)**.

Ως διάσταση fractal ενός συνόλου εννοείται ένα μέτρο της τραχύτητας (**irregularity/roughness**) του, όπου ως τραχύτητα θεωρείται η πολυπλοκότητα και οι έντονες μεταβολές που αυτό εμφανίζει. Ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου είναι μία χρονολογική σειρά, η οποία και μπορεί να εμφανίζει μία σχεδόν γραμμική πορεία στο χρόνο ή αντίθετα να εμφανίζει έντονες αυξομειώσεις οι οποίες ενδεχομένως να έχουν και ισχυρή μεταξύ τους συσχέτιση. Στην πρώτη περίπτωση θεωρείται ότι η χρονοσειρά έχει μικρότερη τραχύτητα από ότι στη δεύτερη και η διάσταση fractal αποτελεί ένα μέτρο της από χρονοσειρά σε χρονοσειρά και γενικότερα από σύνολο σε σύνολο.

Η έννοια της αυτοομοιότητας σημαίνει ότι ένα σύνολο θα διατηρήσει την αναλογία μεταξύ των διαστάσεών του ίδια εάν αλλάξει η κλίμακά του. Για παράδειγμα εάν ένα φράκταλ το οποίο περιέχεται στο δισδιάστατο χώρο και τριπλασιασθεί το πλάτος του, το μήκος του θα αυξηθεί και αυτό 3 φορές.

Βάση των δύο παραπάνω θεμελιωδών εννοιών μπορούν να οικοδομηθούν γενικότερες έννοιες όπως για παράδειγμα η έννοια της αυτοσυγγένειας (self-affinity). Η αυτοσυγγένεια αποτελεί γενίκευση της αυτοομοιότητας με την έννοια ότι οι διαστάσεις ενός φράκταλ δεν μεταβάλλονται όλες στον ίδιο βαθμό αλλά διαφορετικά η κάθε μία από τις άλλες. Επίσης μπορούν να οικοδομηθούν πιο εξειδικευμένες έννοιες που αφορούν ειδικότερα σύνολα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο εκθέτης του Hurst, που αποτελεί ένα δείκτη που εξετάζει το βαθμό συσχέτισης μεταξύ των παρατηρήσεων σε μία χρονολογική σειρά και προκύπτει άμεσα από τη μορφοκλασματική (fractal) διάσταση του συνόλου της χρονολογικής σειράς.

Οι παραπάνω έννοιες αποτελούν την ύλη του παρόντος κεφαλαίου το οποίο και είναι χωρισμένο σε 2 μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μία εισαγωγή στην έννοια των φράκταλς και παρουσιάζονται κάποιες βασικές και σημαντικές τους ιδιότητες. Επίσης παρουσιάζονται κάποιες πολύ χρήσιμες έννοιες για τις ιδιότητες φράκταλ που παρουσιάζονται στις χρονολογικές σειρές. Τέλος αναπτύσσεται η μέθοδος της στατιστικής R/S, η οποία και αποτελεί εφαρμογή της θεωρίας των μορφοκλασματικών σε δεδομένα χρονολογικών σειρών.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται εμπειρική εφαρμογή των δεδομένων του πρώτου μέρους με πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά προέρχονται από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών και αποτελούνται από τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος μίας σειράς μετοχών καθώς και τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης (FTSE/ASE Large Cap). Τα δεδομένα καλύπτουν το διάστημα 1/1/1990-31/12/2012.

1.2 Ορισμός των μορφοκλασματικών

Ο όρος **μορφοκλασματικό (fractal)** πρωτοδιατυπώθηκε τη δεκαετία του 1970 από το θεμελιωτή της γεωμετρίας των fractals **Benoit Mandelbrot** και προέρχεται από τη λατινική λέξη fractus που σημαίνει σπάω σε μικρότερα, ακανόνιστα κομμάτια (θραύω). Οι έννοιες που η λέξη υποδηλώνει είναι η αλλαγή κλίμακας και η μη κανονικότητα των αλλαγών αλλά και η ύπαρξη διαφορετικών διαστάσεων. Στην ελληνική ο όρος φράκταλ μπορεί να αποδοθεί με τις έννοιες μορφοκλασματικός και κλασμοειδής. Στην παρούσα εργασία προτιμήθηκε ο όρος μορφοκλασματικός.

Κατά τον K. Falconer (Fractal Geometry, 2003) ένας ικανοποιητικός ορισμός της έννοιας του fractal είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1.2.1: Ονομάζουμε **μορφοκλασματικό (fractal)** ένα σύνολο σημείων με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Εμφανίζει νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθους του.
2. Ένα επιμέρους τμήμα του είναι όμοιο με ένα άλλο σε αλλαγή κλίμακας. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται αυτοομοιότητα (self-similarity).
3. Ένα φράκταλ συχνά δύναται να δημιουργηθεί με μία επαναληπτική διαδικασία σε κάθε βήμα της οποίας εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος δημιουργίας.
4. Σε πολλές περιπτώσεις η τοπολογική διάσταση του συνόλου είναι μικρότερη της μορφοκλασματικής (fractal) διάστασης που το περιέχει.

1.3. Βασικές θεωρητικές έννοιες από θεωρία συνόλων και συναρτήσεις

Παρακάτω παρουσιάζονται βασικές θεωρητικές αρχές συναρτήσεις και θεωρίας συνόλων. Οι αρχές αυτές έχουν ως στόχο να δώσουν ένα υπόβαθρο για τον ορισμό βασικών εννοιών στα μορφοκλασματικά.

1.3.1. Βασικές έννοιες από θεωρία συνόλων

Οι παρακάτω έννοιες από τη θεωρία συνόλων είναι αναγκαίες ως υπόβαθρο για τον ορισμό της διάστασης φράκταλ όπως και της έννοιας της αυτο-ομοιότητας.

Ορισμός 1.3.1.1: Έστω x, y δύο σημεία του n -διάστατου ευκλείδειου χώρου \mathbf{R}^n με συντεταγμένες:

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n).$$

Τότε ως **ευκλείδεια απόσταση** ορίζεται η ποσότητα:

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Ο ορισμός της ευκλείδειας απόστασης βοηθάει στο να δοθεί ο ορισμός της ανοικτής και της κλειστής σφαίρας:

Ορισμός 1.3.1.2: Έστω x ένα σημείο του n -διάστατου ευκλείδειου χώρου \mathbf{R}^n και έστω ένας αριθμός r τέτοιος ώστε: $r > 0$. Τότε το σύνολο:

$$B(x, r) = \{y : |x - y| \leq r\}$$

ονομάζεται **κλειστή σφαίρα (closed ball)** με κέντρο x και ακτίνα r . Σε περίπτωση που ισχύει η σχέση:

$$B(x, r) = \{y : |x - y| < r\},$$

τότε το σύνολο ονομάζεται **ανοικτή σφαίρα (open ball)**.

Ορισμός 1.3.1.3: Έστω A ένα σύνολο ορισμένο στον n -διάστατο ευκλείδειο χώρο και έστω δ ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\delta > 0$. Τότε το σύνολο των σημείων βρίσκονται σε απόσταση το πολύ δ από το A , δηλαδή το σύνολο της μορφής:

$$\{x : |x - y| < \delta, y \in A\}$$

ονομάζεται **δ -γειτονιά (δ -neighbourhood)** του συνόλου A .

Ορισμός 1.3.1.4: Έστω A ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών. Τότε εαν: $x \geq \lambda$ για κάθε x που ανήκει στο A , ο αριθμός λ ονομάζεται **infimum**.

Ορισμός 1.3.1.5: Έστω A ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών. Τότε εαν: $x \leq \mu$ για κάθε x που ανήκει στο A , ο αριθμός μ ονομάζεται **supremum**.

Η έννοια του supremum είναι απαραίτητη για τον ορισμό της έννοιας της διαμέτρου:

Ορισμός 1.3.1.6: Έστω A ένα μη-κενό σύνολο. Τότε η διάμετρός του ορίζεται ως η ποσότητα:

$$\sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

και συμβολίζεται με $|A|$.

Ορισμός 1.3.1.7: Έστω μία ακολουθία $\{x_k\}$ ορισμένη στον ευκλίδειο χώρο \mathbf{R}^n . Η ακολουθία αυτή θα συγκλίνει στο σημείο x που ανήκει στο \mathbf{R}^n εαν για $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός K τέτοιος ώστε για $k > K$ $|x_k - x| < \varepsilon$. Ο αριθμός x ονομάζεται το **όριο (limit)** της ακολουθίας και συμβολίζεται:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας και της σφαίρας (Ορισμός 1.3.1.2) μπορούν να δωθούν οι ορισμοί του ανοικτού και κλειστού συνόλου.

Ορισμός 1.3.1.8: Έστω A ένα σύνολο του ευκλίδειου χώρου. Τότε εαν σε κάθε σημείο του υπάρχει κλειστή σφαίρα ακτίνας r $B(x,r)$ η οποία περιέχεται στο A , το σύνολο A ονομάζεται **ανοικτό (open)**.

Ορισμός 1.3.1.9: Ένα σύνολο A του ευκλίδειου χώρου ονομάζεται **κλειστό (closed)** εαν για οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_k\}$ που ανήκει σε αυτό το σημείο σύγκλισης της ανήκει επίσης στο A .

Ορισμός 1.3.1.10: Ένα σύνολο A ονομάζεται γειτονιά (neighborhood) ενός σημείου x εαν υπάρχει σφαίρα $B(x,r)$ με κέντρο το x η οποία περιέχεται στο A .

Ορισμός 1.3.1.11: Ένα σύνολο A ονομάζεται συμπαγές (compact) εαν για κάθε συλλογή συνόλων που το καλύπτουν υπάρχει ένα υποσύνολο αυτής το οποίο επίσης καλύπτει το A . Επίσης η τομή συμπαγών συνόλων αποτελεί συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 1.3.1.12: Ένα σύνολο A ονομάζεται **μετρήσιμο (countable)** εαν κάθε ένα στοιχείο του μπορεί να καταγραφεί σε μία λίστα της μορφής x_1, x_2, \dots . Στην περίπτωση αυτή κάθε ένα στοιχείο του A είναι τοποθετημένο σε μία συγκεκριμένη θέση στη λίστα.

Παράδειγμα μετρήσιμου συνόλου αποτελεί το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Επίσης ένα σύνολο που δεν είναι μετρήσιμο ονομάζεται **μη-μετρήσιμο (non countable)**.

Ορισμός 1.3.1.13: Έστω $\{U_i\}$ μία μετρήσιμη συλλογή συνόλων για το σύνολο των οποίων η διάμετρος είναι μικρότερη ή ίση με δ , δηλαδή:

$$0 \leq |U_i| \leq \delta$$

για κάθε i . Επίσης έστω ότι τα σύνολα $\{U_i\}$ καλύπτουν το σύνολο A , δηλαδή ισχύει:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

Τότε η συλλογή συνόλων $\{U_i\}$ ονομάζεται δ -κάλυψη (δ -cover) του A .

1.3.2. Βασικές έννοιες συναρτήσεων

Οι παρακάτω έννοιες αφορούν συναρτήσεις ορισμένες στον n -διάστατο ευκλείδειο χώρο και έχουν ιδιότητες αρκετά χρήσιμες για τη θεωρία των fractal.

Ορισμός 1.3.2.1: Έστω μία συνάρτηση $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Η συνάρτηση S έχει την ιδιότητα της **ισομετρίας (congruence or isometry)** εαν ισχύει:

$$|S(x)-S(y)|=|x-y|.$$

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα ισομετρίας είναι η συνάρτηση: $S(x)=x+a$, όπου a μία σταθερά. Η συγκεκριμένη μορφή ισομετρίας ονομάζεται **μετάφραση (translation)**.

Ορισμός 1.3.2.2: Έστω μία συνάρτηση $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Η συνάρτηση S έχει την ιδιότητα της **περιστροφής (rotation)** εαν ισχύει:

$$|S(x)-a|=|x-a|.$$

Μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των μορφοκλασματικών είναι η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας της οποίας ο ορισμός είναι:

Ορισμός 1.3.2.3: Έστω μία συνάρτηση $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Η συνάρτηση S έχει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας (self-similarity) εαν ισχύει:

$$|S(x)-S(y)|=c|x-y|.$$

Ο ορισμός της αυτο-ομοιότητας έχει ομοιότητες με τον ορισμό της συνάρτησης Holder:

Ορισμός 1.3.2.4: Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Η συνάρτηση f ονομάζεται Holder εαν ισχύει η σχέση:

$$|f(x) - f(y)| \leq c^{\alpha} |x - y|.$$

όπου $c > 0$ και $\alpha > 0$.

Μία παραλλαγή της συνάρτησης Holder είναι η συνάρτηση Lipschitz, όπου ο εκθέτης α ισούται με 1:

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|.$$

Μία πιο σύνθετη κατηγορία συναρτήσεων οι οποίες είναι βασισμένες στην έννοια της αυτο-ομοιότητας είναι οι αφινικές συναρτήσεις (affine). Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.3.2.4: Έστω μία συνάρτηση $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Εαν ισχύει ότι:

1. Η συνάρτηση είναι γραμμική: $S(x+y) = S(x) + S(y)$, $S(kx) = kS(x)$ για κάθε k .
2. $S(x) = 0$ εαν και μόνο αν $x = 0$.

Τότε υπάρχει συνάρτηση $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ για την οποία ισχύει:

$T(x) = S(x) + a$, όπου a ανήκει στον \mathbf{R}^n . Τότε η συνάρτηση T ονομάζεται αφινική (affine).

Η διαφορά της αφινικής συνάρτησης με τη συνάρτηση αυτο-ομοιότητας είναι στις μεταβολές της. Ενώ η συνάρτηση αυτο-ομοιότητας εμφανίζει τον ίδιο λόγο μεταβολής για όλες τις διαστάσεις της συνάρτησης, η αφινική εμφανίζει διαφορετική κλίμακα μεταβολής σε κάθε διάσταση. Ο λόγος και ο βαθμος μεταβολής εξαρτάται από τις τιμές της παραμέτρου a , οπότε αποτελεί μία μορφή γενίκευσης της συνάρτησης αυτο-ομοιότητας.

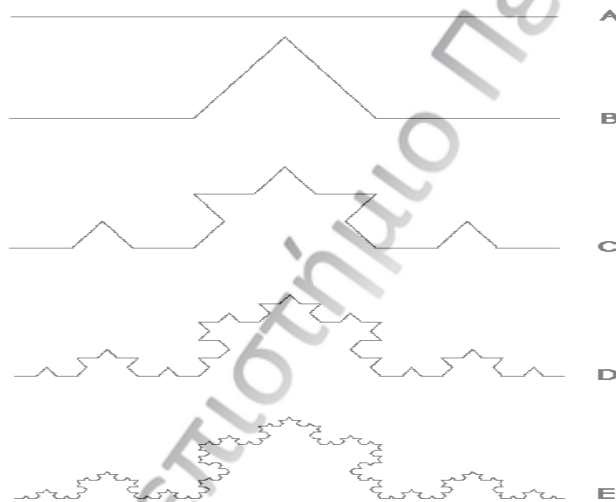
1.4. Βασικές έννοιες διαστάσεων

Η έννοια της μορφοκλασματικής διάστασης γεννήθηκε από την ανάγκη μέτρησης επιφανειών και συνόλων στον n -διάστατο ευκλείδειο χώρο, τα οποία και δεν ήταν σε θέση να μετρηθούν με πιο συμβατικές μεθόδους. Για παράδειγμα έστω ότι ένας χαρτογράφος επιθυμεί να μετρήσει το μήκος μίας ακτογραμμής, η οποία δεν ακολουθεί

μία ευθεία ή μία ομαλή καμπύλη γραμμή. Αν ο χαρτογράφος προσπαθήσει μετρήσει το μήκος με αναλυτικές μεθόδους, τότε καθώς η κλίμακα μέτρησης που χρησιμοποιεί θα τείνει στο 0, το μήκος της ακτογραμμής θα τείνει στο άπειρο. Επίσης θα ισχύει ότι για διαφορετικές τιμές της κλίμακας μέτρησης θα προκύπτει και διαφορετικό μήκος της ακτογραμμής.

Ένα αντίστοιχο παράδειγμα που δείχνει τη δυσκολία μέτρησης του μήκους μίας καμπύλης είναι η καμπύλη του Koch, που αποτελεί ένα από τα γνωστότερα μορφοκλασματικά (fractals) σχήματα που υπάρχουν. Η καμπύλη αυτή δημιουργείται με χρήση μίας επαναληπτικής διαδικασίας, η οποία και μπορεί να συνεχισθεί για άπειρο πλήθος βημάτων.

Το πρώτο βήμα δημιουργίας μίας καμπύλης του Koch είναι να επιλεγεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους. Στη συνέχεια από το ευθύγραμμο τμήμα αφαιρείται το τμήμα μεταξύ $[1/3, 2/3]$ και αντικαθίσταται από 2 τμήματα μήκους ίσου με το $1/3$ του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος. Στα 4 τμήματα μήκους $1/3$ που δημιουργούνται επαναλαμβάνεται η αρχική διαδικασία με τη δημιουργία νέων τμημάτων. Η διαδικασία θεωρητικά μπορεί να συνεχισθεί επ' άπειρον. Στο παρακάτω διάγραμμα εμφανίζεται μία καμπύλη του Koch σε διαφορετικά στάδια της.



Διάγραμμα 1-1: Η καμπύλη του Koch σε διαδοχικά στάδια. Σε κάθε ένα από αυτά το κάθε ένα ευθύγραμμο του αμέσως προηγούμενου σταδίου αντικαθίσταται από 4 μικρότερα. Κάθε ένα από αυτά αποτελεί μικρογραφία του σταδίου B. (Πηγή: <http://www2.southeastern.edu/Academics/Faculty/jbell/fractals.html>)

Στην καμπύλη του Koch το κάθε ένα ευθύγραμμο τμήμα αντικαθίσταται από 4 μικρότερα όπου το κάθε ένα από αυτά έχει μήκος ίσο με το $1/3$ του ευθύγραμμου τμήματος που αντικαθιστά. Αυτό έχει ως συνέπεια το μήκος της καμπύλης σε κάθε ένα βήμα της διαδικασίας να ισούται με τα $4/3$ του μήκους του αμέσως προηγούμενου

βήματος. Τελική συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι η καμπύλη του Koch θα τείνει σε άπειρο μήκος, οπότε θα είναι αδύνατη η μέτρησή της και η εξαγωγή συμπερασμάτων για αυτή.

Για την αντιμετώπιση του φαινομένου της αδυναμίας αυτής τόσο για θεωρητικές κατασκευές όσο και για τον πραγματικό κόσμο, η γεωμετρία των φράκταλ έχει αναπτύξει ένα μέγεθος που ονομάζεται **μορφοκλασματική διάσταση (fractal dimension)**. Διαισθητικά η μορφοκλασματική διάσταση αποτελεί ένα μέτρο της τραχύτητας (**roughness**) ενός συνόλου σημείων στον n -διάστατο χώρο. Η βασική λογική πίσω από τη μορφοκλασματική διάσταση είναι πως για δύο διαφορετικά σύνολα που περιέχονται στον ίδιον διαστάσεων χώρο, το σύνολο με τη μεγαλύτερη διάσταση έχει και μεγαλύτερη τραχύτητα και χαρακτηρίζεται για το λόγο αυτό από μεγαλύτερη πολυπλοκότητα.

Στις επόμενες υποενότητες ορίζονται πιο αυστηρά οι έννοιες της μορφοκλασματικής διάστασης καθώς και μίας άλλης μεθόδου εκτίμησης της τραχύτητας που ονομάζεται διάσταση μέτρησης κιβωτίων (box counting). Επίσης ορίζονται συμπληρωματικές έννοιες όπως είναι η τοπολογική διάσταση και η διάσταση εμβύθισης.

1.4.1. Τοπολογική διάσταση-διάσταση εμβύθισης

Ορισμός 1.4.1.1: Ένα σύνολο S έχει τοπολογική διάσταση 0 εαν κάθε σημείο αυτού έχει περιοχές τόσο μικρές ώστε το σύνορό τους δεν τέμνει το S .

Ένα σύνολο S έχει τοπολογική διάσταση k εαν κάθε σημείο του όσο μικρές περιοχές και αν έχει το σύνορό τους τέμνει το S σε ένα σύνολο τοπολογικής διάστασης $k-1$.

Παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι το μονοσύνολο με τοπολογική διάσταση 0, η ευθεία με τοπολογική διάσταση 1 (αφού σε κάθε σημείο της υπάρχει περιοχή που τέμνει μονοσύνολα διαστάσεως 0), το επίπεδο με τοπολογική διάσταση 2 (αφού για κάθε σημείο του υπάρχει περιοχή οσοδήποτε μικρή που τέμνει ευθεία τοπολογικής διαστάσεως 1).

Από τον ορισμό 1.2.1 του μορφοκλασματικού (fractal) ισχύει ότι η τοπολογική διάσταση ενός συνόλου είναι μικρότερη της διάστασης φράκταλ που το περιέχει.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη διάσταση εμβύθισης:

Ορισμός 1.4.1.2. Ως διάσταση εμβύθισης (embedded) n ορίζουμε τον n -διάστατο ευκλείδειο χώρο στον οποίο περιέχεται ένα αντικείμενο.

Για παράδειγμα ένα γεωμετρικό σχήμα (π.χ. τρίγωνο) περιέχεται στο δυσδιάστατο χώρο και έχει διάσταση εμβύθισης 2. Αντίστοιχα μία πυραμίδα περιέχεται στον τρισδιάστατο χώρο και έχει διάσταση εμβύθισης 3.

Ένα άλλο εξίσου ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η γραφική παράσταση μίας χρονολογικής σειράς το οποίο και περιέχεται στο δυσδιάστατο χώρο εμφανίζοντας έτσι διάσταση εμβύθισης 2.

1.4.2 Η μορφοκλασματική διάσταση

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, η μορφοκλασματική διάσταση αποτελεί ένα μέτρο της τραχύτητας ενός αντικειμένου. Για τον ορισμό της είναι απαραίτητο να ορισθεί πρώτα μία άλλη ποσότητα που ονομάζεται **s-διάστατο μέτρο του Hausdorff**:

Ορισμός 1.4.2.1: Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbf{R}^n και s ένας μη αρνητικός αριθμός. Τότε για κάθε $\delta > 0$ θα ισχύει ότι:

$$H^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \{U_i\} \delta\text{-κάλυψη του } A \right\}$$

Καθώς η ποσότητα δ τείνει στο 0, για το όριο της παραπάνω σχέσης θα ισχύει:

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H^s_\delta(A)$$

Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται **s-διάστατο μέτρο του Hausdorff** και μπορεί να ορισθεί για οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbf{R}^n .

Η μορφοκλασματική διάσταση, ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 1.4.2.2: Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbf{R}^n . Έστω επίσης $H^s(A)$ ένα **s-διάστατο μέτρο του Hausdorff** για το A . Τότε από το σύνολο των δυνατών τιμών του s υπάρχει μία για την οποία ισχύει:

$$\inf \{s \geq 0 : H^s(A) = 0\}$$

Η τιμή αυτή του s ονομάζεται **μορφοκλασματική διάσταση** και συμβολίζεται με $\dim_H F$. Εναλλακτικά η μορφοκλασματική διάσταση ονομάζεται και **διάσταση Hausdorff** ή **διάσταση Hausdorff-Besicovitch**.

Λόγω της δυσκολίας στον υπολογισμό της διάστασης Hausdorff έχουν ορισθεί εναλλακτικές μέθοδοι αξιολόγησης της τραχύτητας (roughness) μίας χρονοσειράς. Η σημαντικότερη και ευρύτερα χρησιμοποιούμενη από αυτές ονομάζεται μέθοδος μέτρησης κιβωτίων (box counting) και ο ορισμός της είναι:

Ορισμός 1.4.2.3.: Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbf{R}^n . Έστω επίσης $N_\delta(A)$ το ελάχιστο πλήθος συνόλων με διάμετρο το πολύ δ τα οποία καλύπτουν το A . Τότε η κατώτερη διάσταση μέτρησης κιβωτίων ισούται με

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

ενώ η ανώτερη διάσταση ισούται με:

$$\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

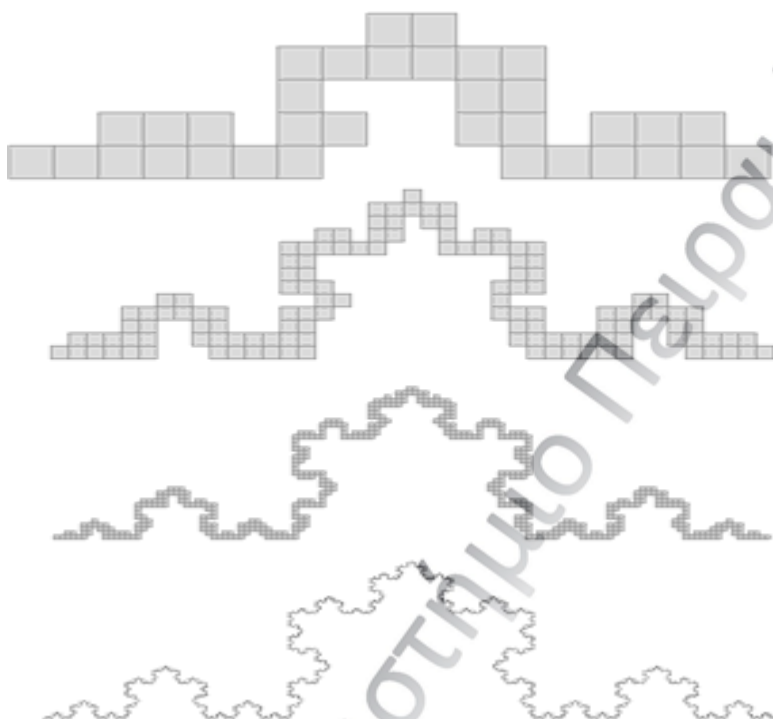
όπου:

$\underline{\dim_{\mathbb{B}} F}$, $\overline{\dim_{\mathbb{B}} F}$ το κάτω και το άνω όριο αντίστοιχα.

Εαν το άνω και το κάτω όριο ισούνται τότε η διάσταση μέτρησης κιβωτίων (box counting dimension) υπάρχει, συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{B}} F$ και ισούται με:

$$\dim_{\mathbb{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta}$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η λογική της μέτρησης κιβωτίων στην καμπύλη του Koch:



Διάγραμμα 1-2: Κάλυψη της καμπύλης του Koch με τετράγωνα σύνολα προοδευτικά μικρότερης διαμέτρου δ (Πηγή: <http://hypertextbook.com/chaos/33.shtml>)

Όπως επισημάνθηκε και σε παράδειγμα στην αρχή της ενότητας 1.4, το μήκος της καμπύλης του Koch τείνει στο άπειρο καθώς επαναλαμβάνεται η αρχική διαδικασία. Θέτοντας $\delta=1$ όλη η καμπύλη του Koch καλύπτεται από ένα σύνολο διαμέτρου το πολύ 1. Θέτοντας $\delta=1/3$, όλη η καμπύλη του Koch καλύπτεται από 4 τετράγωνα πλευράς $1/3$ το καθένα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τα ολοένα και μικρότερα ευθύγραμμα τμήματα της καμπύλης θα προκύπτουν σε κάθε διαδοχικό βήμα 4 φορές περισσότερα σύνολα από το προηγούμενο με διάμετρο του καθενός εξ αυτών το πολύ το $1/3$ της διαμέτρου του προηγούμενου βήματος. Στην περίπτωση αυτή για τη διάσταση μέτρησης κιβωτίων θα ισχύει:

$$\dim_{\mathbb{B}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{-\log \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι:

$$\dim_{\mathbb{R}} F = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

Αντίστοιχοι υπολογισμοί δείχνουν ότι η ευθεία έχει διάσταση ίση με 1, το επίπεδο ίση με 2 και ο τρισδιάστατος χώρος ίση με 3. Η γεωμετρία των φράκταλ εστιάζει περισσότερο στα αντικείμενα μη ακέραιης διάστασης.

1.5 Η στατιστική R/S

Η μέθοδος R/S αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα από το Βρετανό υδρολόγο Hurst από μελέτες που έκανε για την ποσότητα νερού που ρέει ετησίως στον ποταμό Νείλο. Έχοντας υπολογίσει την ποσότητα αυτή θα ήταν εύκολο να εκτιμηθεί το βέλτιστο ύψος για κατασκευή φράγματος στον ποταμό.

Από τη μελέτη των καταχωρημένων στοιχείων για το Νείλο ο Hurst διαπίστωσε ότι τα δεδομένα δεν ακολουθούσαν μορφή τυχαίου περιπάτου με ανεξαρτησία μεταξύ των χρονικών περιόδων. Αντίθετα φαινόταν να εμφανίζουν μία μορφή συσχέτισης μεταξύ τους. Για τη μελέτη της ύπαρξης αυτής της συσχέτισης και του βαθμού αυτής, ο Hurst ανέπτυξε τη μέθοδο R/S, όπου R/S σημαίνει rescaled statistics.

Η μέθοδος R/S συνίσταται στη μελέτη του σταθμισμένου αθροίσματος της διαφοράς μεταξύ της τιμής της χρονολογικής σειράς σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο και του μέσου όρου της. Από το ύψος της διαφοράς μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την ύπαρξη ανεξαρτησίας ή όχι μεταξύ των παρατηρήσεων της χρονοσειράς.

Έστω μία χρονολογική σειρά που επεκτείνεται σε $N+1$ χρονικές περιόδους. Το σύνολο με τις τιμές της χρονολογικής σειράς συμβολίζεται ως:

$$P_{N+1} = \{p_1, \dots, p_{N+1}\}$$

,όπου p_i η τιμή της χρονολογικής σειράς τη χρονική περίοδο t_i . Αντίστοιχα μπορεί να ορισθεί και μία χρονοσειρά που υπολογίζει τις διαφορές μεταξύ των διαφορετικών χρονικών περιόδων της αρχικής σειράς:

$$r_i(\tau) = p(t_i) - p(t_i - \tau), i = 1, \dots, N$$

Ανάλογα με τις τιμές του τ μπορούν να υπολογισθούν και διαφορετικές χρονικές διαφορές. Για παράδειγμα για $\tau=1$ μπορεί να υπολογισθεί διαφορά μίας εργάσιμης ημέρας αν θεωρηθεί ότι τα δεδομένα αφορούν ημερήσιες τιμές. Αντίστοιχα μπορούν να υπολογισθούν διαφορές μεγαλύτερων χρονικών περιόδων.

Το επόμενο βήμα είναι ο χωρισμός της χρονολογικής σειράς σε μικρότερες. Η αρχική σειρά χωρίζεται σε D μικρότερες, κάθε μία εκ των οποίων διαθέτει M πλήθος παρατηρήσεων. Κάθε μία εκ των χρονοσειρών συμβολίζεται με $\mathbf{Id}, \mathbf{M}(\mathbf{t})$ όπου: $d=1, \dots, D$. Το βήμα αυτό μπορεί να ακολουθηθεί είτε με την αρχική χρονοσειρά είτε με κάποια εκ των χρονοσειρών των διαφορών. Η μέση τιμή της χρονοσειράς ορίζεται (για τη σειρά των διαφορών) ως:

$$E_{H,d}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^H r_{k,d}(\tau)$$

Αντίστοιχα μπορεί να ορισθεί και η μέση τιμή για την αρχική σειρά.

Η τυπική απόκλιση ορίζεται (για τη σειρά των διαφορών) ως:

$$S_{H,d}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^H (r_{k,d}(\tau) - E_{H,d}(\tau))^2}$$

Αντίστοιχος είναι ο ορισμός για την αρχική σειρά.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της απόκλισης από το μέσο όρο, το οποίο και υπολογίζεται σχετικά εύκολα εφόσον έχει ήδη ορισθεί η μέση τιμή;

$$X_{H,d}(\tau) = \sum_{i=1}^k (r_{i,d}(\tau) - E_{H,d}(\tau))$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $k=1, \dots, M$. Βάση της σχέσης αυτής μπορεί να ορισθεί και το εύρος των τιμών κάθε μίας εκ των υποσειρών:

$$R_{H,d}(\tau) = \max \{X_{1,d}(\tau), \dots, X_{H,d}(\tau)\} - \min \{X_{1,d}(\tau), \dots, X_{H,d}(\tau)\}$$

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της τυπικής απόκλισης για κανονικοποίηση του εύρους των παρατηρήσεων κάθε μίας υποσειράς. Για κάθε υποσειρά προκύπτει:

$$(R/S)_{H(\tau)} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \frac{R_{H,d}(\tau)}{S_{H,d}(\tau)}$$

Η τιμή του εκθέτη του Hurst προκύπτει με χρήση της παραπάνω σχέσης:

$$(R/S)_{H(\tau)} \propto M^{H(\tau)}$$

Με χρήση λογαρίθμων και μετά από πράξεις προκύπτει ότι:

$$\frac{\log (R/S)_{H(\tau)}}{\log (M)} \propto H(\tau)$$

Ο εκθέτης του Hurst είναι ανάλογος του πηλίκου μεταξύ του λογαρίθμου του αθροίσματος του κανονικοποιημένου εύρους των υποσειρών και του λογαρίθμου του πλήθους των παρατηρήσεων της υποσειράς. Για την εκτίμηση του εκθέτη για τις διάφορες τιμές του M χρησιμοποιείται ένα διάγραμμα log-log. Η τιμή του εκθέτη του Hurst είναι ίση με την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων που προκύπτει από τις τιμές των λογαρίθμων. Ένα σχετικό παράδειγμα φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

Διάγραμμα 1-3: Διάγραμμα log-log μεταξύ της τιμής του R/S και του πλήθους των παρατηρήσεων της χρονοσειράς. Τα δεδομένα αφορούν τιμές αργού πετρελαίου για το διάστημα 1981-2000 και αφορούν χρονοσειρά διαφοράς 22 χρονικών περιόδων που αντιστοιχεί σε μήνα (Πηγή: Jose Alvarez-Ramirez, Myriam Cisneros-Multifractal Hurst Analysis of Crude Oil Prices)

Για τον εκθέτη του Hurst ισχύουν 3 ενδεχόμενα. Καταρχάς σε περιπτώσεις όπου ισούται με 0.5, θεωρείται πως οι υπό εξέταση τιμές της χρονολογικής σειράς είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Εάν ο εκθέτης λαμβάνει τιμές μεταξύ 0.5 και 1, θεωρείται πως οι τιμές της χρονολογικής σειράς έχουν θετική συσχέτιση μεταξύ τους και

χαρακτηρίζονται από “επιμονή” (persistence). Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή των τιμών μίας χρονολογικής σειράς σε μία χρονική περίοδο αυξάνει την πιθανότητα να συνεχισθεί η μεταβολή και σε άλλες χρονικές περιόδους προς την ίδια κατεύθυνση.

Η τελευταία περίπτωση που ισχύει είναι ο εκθέτης του Hurst να λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και του 0.5, οπότε χαρακτηρίζεται από αντίστροφη “επιμονή” (antipersistence). Αυτό έχει τις αντίστροφες συνέπειες της “επιμονής”.

1.5.1 Σχέση μεταξύ μορφοκλασματικών και στατιστικής R/S

Ο εκθέτης του Hurst και η μορφοκλασματική διάσταση εμφανίζουν άμεση συσχέτιση για δεδομένα χρονολογικών σειρών. Όπως διαπίστωσε ο Hurst η σχέση μεταξύ του εκθέτη του Hurst και της μορφοκλασματικής διάστασης δίνεται από τη σχέση:

$$D=2-H,$$

όπου D είναι η μορφοκλασματική διάσταση και H είναι ο εκθέτης του Hurst. Η συγκεκριμένη σχέση είναι ιδιαίτερα πολύτιμη για την επόμενη ενότητα που ακολουθεί και στην οποία γίνεται εμπειρική εξέταση του φαινομένου των μορφοκλασματικών σε χρονολογικές σειρές.

1.6. Εμπειρική εκτίμηση χρονολογικών σειρών με πραγματικά δεδομένα

Για την εμπειρική μελέτη του υποδείγματος θα γίνει χρήση οικονομικών δεδομένων τα οποία προέρχονται από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει χρήση τιμών κλεισίματος μετοχών εταιρειών εισηγμένων στο ΧΑΑ. Επίσης θα γίνει χρήση και του δείκτη Large Cap που αφορά μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης.

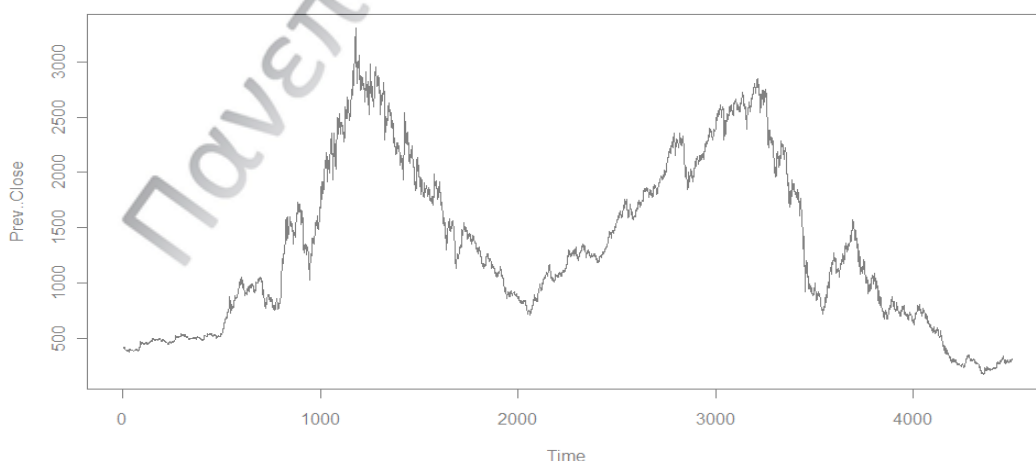
Τα παραπάνω δεδομένα αφορούν ημερήσιες τιμές κλεισίματος, περιέχουν μόνο ημέρες συνεδριάσεων και καλύπτουν το διάστημα από 1/1/1990 έως 31/12/2012. Προφανή εξαίρεση αποτελούν οι μετοχές εταιρειών οι οποίες δεν ήταν εισηγμένες στο Χρηματιστήριο από 1/1/1990 και για τις οποίες τα δεδομένα καλύπτουν το χρονικό διάστημα από την ημερομηνία εισαγωγής της μετοχής μέχρι και τις 31/12/2012. Τα δεδομένα έχουν αντληθεί από την ιστοσελίδα του Capital.gr (www.capital.gr), η οποία και είναι εξειδικευμένη σε οικονομικά και χρηματιστηριακά θέματα και διατηρεί ιστορικά στοιχεία για μεγάλες χρονικές περιόδους. Αναλυτικά οι υπό μελέτη μετοχές εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

A/A	Όνομασία Μετοχής	Συντόμευση ΧΑΑ	Τιμές Από:	Τιμές Εως:	Διάρκεια
1	Alpha Bank	ΑΛΦΑ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
2	Βιοχάλκο	ΒΙΟΧΚ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
3	ΔΕΗ	ΔΕΗ	13/12/2001	31/12/2012	11 έτη.
4	Coca-Cola 3 Ε	ΕΕΕΚ	16/07/1991	31/12/2012	21 έτη.
5	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	21/04/1994	31/12/2012	18 έτη.
6	ΕΛΠΕ	ΕΛΠΕ	30/06/1998	31/12/2012	14 έτη.
7	ΕΤΕ	ΕΤΕ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
8	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΕΧΑΕ	21/08/2000	31/12/2012	12 έτη.
9	Intralot	ΙΝΛΟΤ	03/11/1999	31/12/2012	13 έτη.
10	Τράπεζα Κύπρου	ΚΥΠΡ	08/11/2000	31/12/2012	12 έτη.
11	ΜΕΤΚΑ	ΜΕΤΚ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
12	MARFIN INVESTMENT GROUP	ΜΙΓ	25/05/2001	31/12/2012	11 έτη.
13	ΜΟΤΟΡ ΟΪΛ	ΜΟΗ	07/08/2001	31/12/2012	11 έτη.
14	JUMBO	ΜΠΕΛΑ	20/06/1997	31/12/2012	15 έτη.
15	ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ	ΜΥΤΙΛ	01/08/1995	31/12/2012	17 έτη.
16	ΟΛΠ	ΟΛΠ	31/07/2003	31/12/2012	9 έτη.
17	ΟΠΑΠ	ΟΠΑΠ	25/04/2001	31/12/2012	11 έτη.
18	ΟΤΕ	ΟΤΕ	19/04/1996	31/12/2012	16 έτη.
19	Τράπεζα Πειραιώς	ΠΕΙΡ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
20	ΤΕΡΝΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ	ΤΕΝΕΡΓ	24/09/2007	31/12/2012	5 έτη.
21	ΤΙΤΑΝ	ΤΙΤΚ	01/01/1990	31/12/2012	23 έτη.
22	FRIGOGLASS	ΦΡΙΓΟ	02/12/1999	31/12/2012	13 έτη.
23	ΚΑΕ-Follie Follie	ΦΦΓΚΡΠ	31/03/1998	31/12/2012	14 έτη.

24	FTSE ΧΑ/ Large Cap	FTSE ΧΑ/ Large Cap	30/12/1994	31/12/2012	18 έτη.
----	--------------------	--------------------	------------	------------	---------

Πίνακας 1-1: Μετοχές Υψηλής Κεφαλαιοποίησης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και διάστημα παραμονής ως εισηγμένες.

Το παρακάτω διάγραμμα εμφανίζει τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης Large Cap (παλαιότερα γνωστός ως FTSE/ASE-20).



Διάγραμμα 1-3: Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης του ΧΑΑ από 1/1/1994 έως 31/12/2012. (Πηγή δεδομένων: www.capital.gr. Η επεξεργασία έγινε με χρήση του στατιστικού πακέτου R).

Από μία πρώτη εξέταση του γραφήματος του Δείκτη διαπιστώνεται ότι η συμπεριφορά του αλλάζει αρκετά έντονα σε βάθος χρόνου. Αρχικά παρατηρείται μία πορεία σχεδόν παράλληλη με τον άξονα των Χ, η οποία σε κάποια φάση γίνεται ελαφρά αυξητική και στη συνέχεια έντονα αυξητική. Η περίοδος αυτή συμπίπτει με την περίοδο ραγδαίας ανόδου του Χρηματιστηρίου της περιόδου 1997-1999 οπότε και η αξία πολλών μετοχών πολλαπλασιάστηκε. Στις μετοχές αυτές περιλαμβάνονται και όσες από τις μετοχές του παραπάνω πίνακα ήταν εισηγμένες στο Χρηματιστήριο αυτή την περίοδο.

Ύστερα από μία πτωτική περίοδο η οποία διήρκεσε ως το 2003 ο Δείκτης επανήλθε σε ανοδική τροχιά μέχρι τα τέλη του 2007 οπότε και άρχισε μία δεύτερη περίοδος πτώσης. Με εξαίρεση ένα μικρό διάλειμμα ανόδου στα μισά της περιόδου η πτώση αυτή συνεχίστηκε μέχρι και τα τέλη του 2012 με την ίδια καθοδική τάση.

Μία πρώτη διαπίστωση από το διάγραμμα είναι ότι αν και η συμπεριφορά του δείκτη αλλάζει από ανοδική σε καθοδική και μετά πάλι από ανοδική σε πάλι καθοδική, παρατηρείται η ίδια “επίμονη” συμπεριφορά. Οι τιμές του δείκτη εμφανίζουν μία αρκετά έντονη θετική συσχέτιση η οποία διατηρείται για μεγάλες χρονικές περιόδους.

1.6.1 Εκτίμηση της μορφοκλασματικής διάστασης

Η εκτίμηση της μορφοκλασματικής διάστασης έγινε για τις αρχικές τιμές των μετοχών και για τις λογαριθμισμένες τιμές αυτών. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

A/A	Ονομασία Μετοχής	Συντόμευση ΧΑΑ	Μορφοκλασματική Διάσταση για τιμές Κλεισίματος	Μορφοκλασματική Διάσταση για Λογάριθμο Τιμών Κλεισίματος
1	Alpha Bank	ΑΛΦΑ	1.301309	1.332399
2	Βιοχάλκο	ΒΙΟΧΚ	1.335590	1.327606
3	ΔΕΗ	ΔΕΗ	1.314838	1.363173
4	Coca-Cola 3 E	ΕΕΕΚ	1.382876	1.353765
5	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	1.364767	1.413795
6	ΕΛΠΕ	ΕΛΠΕ	1.430593	1.383667
7	ΕΤΕ	ΕΤΕ	1.350073	1.403188
8	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΕΧΑΕ	1.362409	1.343356
9	Intralot	ΙΝΛΟΤ	1.544610	1.458096
10	Τράπεζα Κύπρου	ΚΥΠΡ	1.287392	1.244597
11	ΜΕΤΚΑ	ΜΕΤΚ	1.410524	1.401713
12	MARFIN INVESTMENT GROUP	ΜΙΓ	1.293026	1.342745

Πίνακας 1-2: Τιμές της μορφοκλασματικής διάστασης για τις τιμές κλεισίματος των μετοχών του Χρηματιστηρίου και των λογαρίθμων τους

A/A	Όνομασία Μετοχής	Συντόμηση ΧΑΑ	Μορφοκλασματική Διάσταση για τιμές Κλεισίματος	Μορφοκλασματική Διάσταση για λογάριθμο τιμών Κλεισίματος
13	ΜΟΤΟΡ ΟΪΛ	ΜΟΗ	1.359776	1.350726
14	JUMBO	ΜΠΕΛΑ	1.325002	1.361044
15	ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ	ΜΥΤΙΛ	1.275276	1.297200
16	ΟΛΠ	ΟΛΠ	1.467408	1.486901
17	ΟΠΑΠ	ΟΠΑΠ	1.413473	1.349332
18	ΟΤΕ	ΟΤΕ	1.375532	1.346668
19	Τράπεζα Πειραιώς	ΠΕΙΡ	1.291634	1.292480
20	ΤΕΡΝΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ	ΤΕΝΕΡΓ	1.308322	1.299751
21	ΤΙΤΑΝ	ΤΙΤΚ	1.342310	1.313642
22	FRIGOGLASS	ΦΡΙΓΟ	1.362409	1.343356
23	ΚΑΕ-Follie Follie	ΦΦΓΚΡΠ	1.384135	1.396718
24	FTSE XA/ Large Cap	FTSE XA/ Large Cap	1.362409	1.343356

Πίνακας 1-2: (συνέχεια)

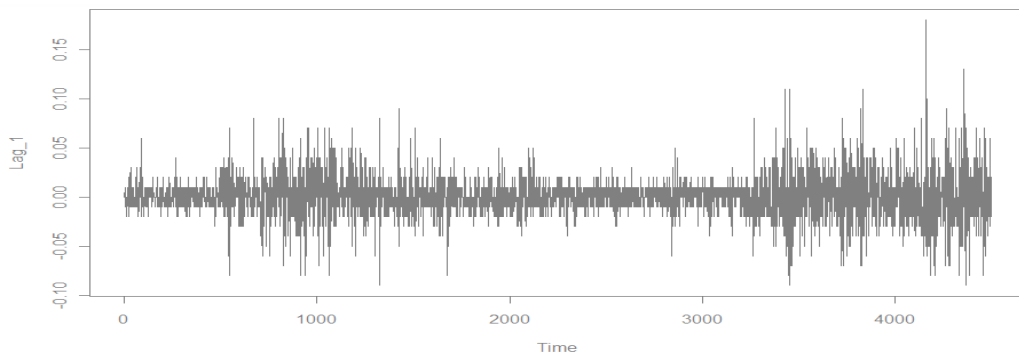
Από τη σχέση $D=2-H$ ή την ισοδύναμή της $H=2-D$ προκύπτει ότι ο εκθέτης του Hurst ως συνάρτηση της μορφοκλασματικής διάστασης λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 0.5 για το σύνολο σχεδόν των μετοχών. Η μοναδική εξαίρεση που δείχνει να υπάρχει είναι η μετοχή της Intralot, η οποία λαμβάνει τιμή λίγο μεγαλύτερη του 1,5.

Από το παραπάνω στοιχείο προκύπτει ότι σχεδόν το σύνολο των μετοχών εμφανίζουν “επιμονή” (persistence) στη συμπεριφορά τους. Όπως είναι αναμενόμενο, το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται και με το Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης. Από τη στιγμή τώρα που οι υπό εξέταση μετοχές είναι οι μεγαλύτερες στο ελληνικό χρηματιστήριο είναι αρκετά λογική υπόθεση ότι το ίδιο φαινόμενο της “επιμονής” εμφανίζεται και για μικρότερες μετοχές.

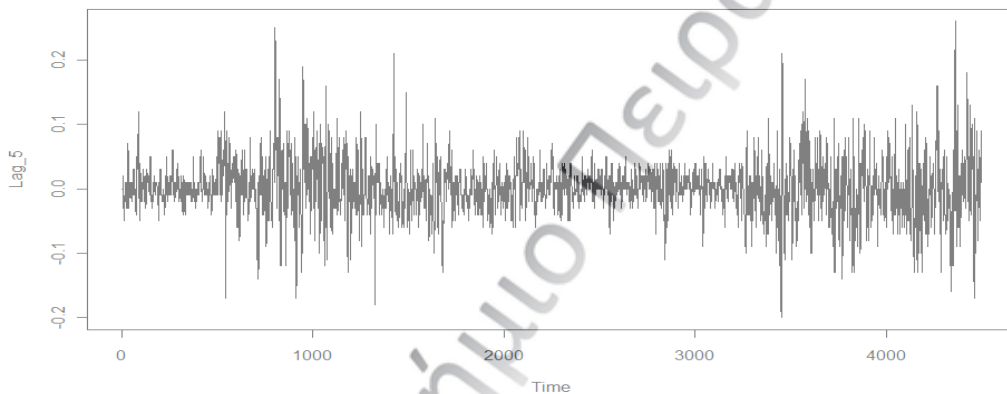
1.6.2 Εμπειρική εκτίμηση δεδομένων με τη Μεθόδου R/S

Όπως και στην περίπτωση της εξέτασης της μορφοκλασματικής (fractal) διάστασης, για τη μελέτη το εκθέτη του Hurst χρησιμοποιούνται τα δεδομένα του Χρηματιστηρίου Αθηνών. Τα δεδομένα μελετώνται τόσο για την αρχική χρονολογική σειρά όσο και για τις χρονολογικές σειρές των διαφορών για 1,5 χρονικές περιόδους που αντίστοιχα εκφράζουν τις διαφορές για 1 εργάσιμη ημέρα, 1 εργάσιμη εβδομάδα.

Τα παρακάτω διαγράμματα εμφανίζουν τις τιμές των διαφορών του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης:



Διάγραμμα 1-4: Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης με διαφορά 1 εργάσιμη ημέρα.



Διάγραμμα 1-5: Τιμές του Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης με διαφορά 5 εργάσιμες ημέρες.

Αν και δεν υπάρχει πλήρης αντιστοίχιση μεταξύ των ημερήσιων και των εβδομαδιαίων διαφορών παρατηρούμε και στις 2 περιπτώσεις το ίδιο φαινόμενο, δηλαδή μία τάση για συσσώρευση των περιόδων έντονης μεταβλητότητας. Ειδικότερα διαπιστώνεται ότι μία πρώτη περίοδος έντονης μεταβλητότητας ξεκίνησε με την απότομη άνοδο του χρηματιστηρίου στα τέλη της δεκαετίας του 1990 και υποχώρησε αρκετά λίγα χρόνια αργότερα στο 2003. Η δεύτερη περίοδος έντονης μεταβλητότητας ξεκίνησε το 2007 και συνεχίζεται ως και το τέλος του 2012 που είναι και το τελικό σημείο ελέγχου.

Εαν οι τιμές των μετοχών ή του Δείκτη ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους θα περίμενε κανείς ομαλότερη κίνηση της γραφικής παράστασης σε κάθε ένα διάγραμμα. Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές του εκθέτη του Hurst για τις υπό εξέταση μετοχές και για το Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης.

A/A	Ονομασία Μετοχής	Συντόμευση ΧΑΑ	Διαφορά 1 περιόδου	Διαφορά 5 περιόδου
1	Alpha Bank	ΑΛΦΑ	0.564542	0.7558471
2	Βιοχάλκο	ΒΙΟΧΚ	0.5974858	0.7803446
3	ΔΕΗ	ΔΕΗ	0.5626763	0.7735194
4	Coca-Cola 3 Ε	ΕΕΕΚ	0.5491912	0.7533695
5	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	0.5580389	0.7839357
6	ΕΛΠΕ	ΕΛΠΕ	0.5435143	0.771523
7	ΕΤΕ	ΕΤΕ	0.5789398	0.7482772
8	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΕΧΑΕ	0.6063912	0.7844458
9	Intralot	ΙΝΛΟΤ	0.5830504	0.794007
10	Τράπεζα Κύπρου	ΚΥΠΡ	0.5643485	0.7704139
11	ΜΕΤΚΑ	ΜΕΤΚ	0.5790911	0.7566902
12	MARFIN INVESTMENT GROUP	ΜΙΓ	0.5608163	0.7735467
13	ΜΟΤΟΡ ΟΪΛ	ΜΟΗ	0.571974	0.776852
14	JUMBO	ΜΠΕΛΑ	0.5547997	0.7817138
15	ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ	ΜΥΤΙΛ	0.5936011	0.7929281
16	ΟΛΠ	ΟΛΠ	0.5672726	0.8198967
17	ΟΠΑΠ	ΟΠΑΠ	0.5563558	0.7851037
18	ΟΤΕ	ΟΤΕ	0.5674585	0.7646975
19	Τράπεζα Πειραιώς	ΠΕΙΡ	0.5426451	0.7422545
20	ΤΕΡΝΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ	ΤΕΝΕΡΓ	0.6063413	0.8255992
21	ΤΙΤΑΝ	ΤΙΤΚ	0.547506	0.750944
22	FRIGOGLASS	ΦΡΙΓΟ	0.5789398	0.7482772
23	ΚΑΕ-Follie Follie	ΦΦΚΡΠ	0.5590597	0.7987764
24	FTSE XA/ Large Cap	FTSE XA/ Large Cap	0.6088827	0.7977181

Πίνακας 1-3: Τιμές του εκθέτη του Hurst για διαφορά μίας και 5 χρονικών περιόδων.

Όπως διαπιστώνεται από τους παραπάνω πίνακες στο σύνολο σχεδόν των περιπτώσεων ο εκθέτης του Hurst λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 0.5. Επίσης ο εκθέτης λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές υποδηλώνοντας έτσι ισχυρότερη θετική συσχέτιση όταν το διάστημα της διαφοράς μεγαλώνει. Γενικά η απόδοση από μέρα σε μέρα εμφανίζει ασθενέστερη συσχέτιση από την απόδοση από εβδομάδα σε εβδομάδα. Βάση των παραπάνω είναι βάσιμος ο ισχυρισμός ότι υπάρχει επιμονή (persistence) στις τιμές των μετοχών του χρηματιστηρίου.

1.9 Ανακεφαλαίωση

Στο Κεφάλαιο 1 εξετάστηκαν και ορίστηκαν θεμελιώδεις έννοιες των φράκταλ και ορίστηκαν οι διαστάσεις Hausdorff (fractal) και box counting. Επίσης ορίστηκε η στατιστική R/S της συνάρτησης η οποία και εκφράζει το βαθμό συσχέτισης των τιμών της χρονολογικής σειράς σε βάθος χρόνου σύμφωνα με τον εκθέτη του Hurst.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου έγινε υπολογισμός των μορφοκλασματικών διαστάσεων των μετοχών και του Γενικού Δείκτη Υψηλής Κεφαλαιοποίησης. Επίσης υπολογίστηκε η τιμή του εκθέτη του Hurst για κάθε μία από τις μετοχές όπως και για το Γενικό Δείκτη. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία υπολογισμού ήταν ως ένα βαθμό αυτοματοποιημένη με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων από το στατιστικό πακέτο R.

Το συμπέρασμα που προέκυψε από τη μελέτη των εμπειρικών στοιχείων είναι η ύπαρξη θετικής συσχέτισης μεταξύ των παρατηρήσεων. Η συσχέτιση αυτή εμφανίζεται και στον υπολογισμό της μορφοκλασματικής (fractal) διάστασης αλλά και στον υπολογισμό του εκθέτη του Hurst.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ

1. Εισαγωγή

Αν και έννοια της μορφοκλασματικής διάστασης είναι αρκετή σε πολλές περιπτώσεις να ορίσει τις ιδιότητες ενός αντικειμένου, υπάρχουν φορές που δεν είναι επαρκής. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχουν μορφοκλασματικά σύνολα τα οποία δεν εμφανίζουν τον ίδιο τρόπο επέκτασης όπως τα απλούστερα σύνολα. Ενώ ένα μορφοκλασματικό σύνολο όπως η καμπύλη του Koch επεκτείνεται με χρήση πάντα του ίδιου επαναληπτικού κανόνα γενίκευσης, υπάρχουν άλλα μορφοκλασματικά τα οποία ακολουθούν διαφορετικούς κανόνες γενίκευσης σε κάθε βήμα ή που ακολουθούν διαφορετικούς κανόνες γενίκευσης σε κάθε διάστασή του n -διάστατου χώρου στον οποίο περιέχονται. Κρίνεται επομένως αναγκαία μία γενίκευση των αρχικών εννοιών.

Μία γενίκευση της έννοιας του μορφοκλασματικού (fractal) συνόλου που εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ονομάζεται πολυφράκταλ (multifractal). Στο πολυφράκταλ ένα σύνολο θεωρείται ότι περιγράφεται από παραπάνω από μία διαστάσεις. Ουσιαστικά θεωρείται πως στη θέση της μορφοκλασματικής διάστασης που λαμβάνει μία μόνο τιμή υπάρχει μία συνάρτηση η οποία και μπορεί να λάβει πολλές διαφορετικές τιμές. Αντίστοιχο φαινόμενο παρατηρείται και με τον εκθέτη του Hurst, ο οποίος επίσης μπορεί να αντικατασταθεί με μία συνάρτηση η οποία λαμβάνει ένα πλήθος τιμών.

Στο πρώτο μέρος του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται η έννοια του πολυφράκταλ (multifractal). Επίσης παρουσιάζονται βασικά στοιχεία του, όπως είναι ο τοπικός εκθέτης του Hölder (local Hölder exponent) που αποτελεί μία μορφή γενίκευσης του εκθέτη του Hurst που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μία άλλη πολύ σημαντική έννοια που παρουσιάζεται είναι η έννοια του φάσματος πολυφράκταλ (multifractal spectrum) και η οποία αποτελεί μία μορφή γενίκευσης της διάστασης πολυφράκταλ. Τόσο το φάσμα πολυφράκταλ όσο και ο εκθέτης του Hölder έχουν το χαρακτηριστικό ότι δε λαμβάνουν μία μόνο τιμή αλλά αποτελούν συναρτήσεις που λαμβάνουν ένα πλήθος τιμών.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται μία παρουσίαση ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο και είναι βασισμένο στην έννοια του πολυφράκταλ. Το μοντέλο

αυτό είναι το Πολυφράκταλ Μοντέλο Απόδοσης Τίτλων (Multifractal Model of Asset Returns) το οποίο αναπτύχθηκε το 1997 από τους B. Mandelbro-A. Fisher-L. Calvet.

Το μοντέλο MMAR στη βασική του μορφή διατυπώνεται ως: $X(t)=BH[\theta(t)]$, όπου ισχύουν τα εξής:

1. $X(t)$ είναι ο λογάριθμος της απόδοσης ενός τίτλου. Έστω $P(t)$ ο υπό μελέτη χρηματοοικονομικός τίτλος τη χρονική περίοδο t . Τότε: $X(t)=\log P(t)-\log P(0)$.
2. BH είναι μία κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian motion). Η κλασματική κίνηση Brown αποτελεί γενίκευση της κίνησης Brown με βασικότερη αλλαγή το γεγονός ότι οι μεταβολές των τροχιών της δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά έχουν συσχέτιση που εξαρτάται από το δείκτη H . Παρουσίαση της κίνησης Brown γίνεται και στο παρόν κεφάλαιο.
3. $\theta(t)$ είναι μία συνάρτηση η οποία και χρησιμεύει για να μοντελοποιήσει το χρόνο συναλλαγών και ονομάζεται συνάρτηση χρόνου συναλλαγής (trading time) ή συνάρτηση χρονικής παραμόρφωσης (**time deformation process**). Η συνάρτηση αυτή είναι βασισμένη στο μέτρο πολυφράκταλ, είναι γνησίως αύξουσα αλλά δεν είναι γραμμική. Η λογική της είναι να προσομειώσει περιόδους πιο έντονης και λιγότερο έντονης μεταβλητότητας.

2.2 Η έννοια του πολυφράκταλ

Ένα πολυφράκταλ είναι ένα μορφοκλασματικό σύνολο (fractal), το οποίο και δημιουργείται με χρήση διαφορετικών κανόνων κλιμάκωσης (scaling rules). Αντίθετα ένα απλό μορφοκλασματικό σχήμα δημιουργείται με χρήση μόνο ενός γενικού κανόνα και για αυτό και ονομάζεται και μονοφράκταλ (unifractal/monofractal). Δυστυχώς δεν είναι πάντοτε εύκολος ο διαχωρισμός μεταξύ μονοφράκταλ και πολυφράκταλ αλλά υπάρχουν κάποιοι κανόνες οι οποίοι βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των 2 έννοιών.

2.2.1. Το διωνυμικό μέτρο και η σχέση του με την έννοια του πολυφράκταλ

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει σε πρώτη φάση παρουσίαση του διωνυμικού πολυφράκταλ που ορίζεται στο διάστημα $[0,1]$ και αποτελεί το απλούστερο που υπάρχει. Στη συνέχεια θα γίνει γενίκευση αυτού σε πιο σύνθετες μορφές. Το διωνυμικό μέτρο αποτελεί το αποτέλεσμα μίας επαναληπτικής διαδικασίας μεγάλου πλήθους βημάτων.

Έστω 2 αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$m_0 + m_1 = 1, m_0, m_1 > 0$$

Επίσης έστω ότι το μέτρο του διαστήματος $[0,1]$ ισούται με 1 δηλαδή:

$$\mu([0,1])=1.$$

Στο πρώτο στάδιο της κατασκευής του μέτρου, το διάστημα $[0,1]$ χωρίζεται σε 2 ίσου μήκους διαστήματα, τα οποία είναι τα $[0,1/2]$ και $[1/2,1]$ και για κάθε ένα από αυτά το μέτρο ισούται με:

$$\mu([0,1/2])=m_0 \quad , \quad \mu([1/2,1])=m_1$$

Στο δεύτερο στάδιο της κατασκευής, το κάθε ένα εκ των 2 υποδιαστημάτων του πρώτου βήματος χωρίζεται σε 2 μικρότερα ίσου μήκους οπότε προκύπτουν 4 υποδιαστήματα τα οποία είναι τα $[0,1/4]$, $[1/4,2/4]$, $[2/4,3/4]$, $[3/4,1]$. Το πρώτο εκ των δύο νέων υποδιαστημάτων πολλαπλασιάζεται επί του κάθε αρχικού υποδιαστήματος πολλαπλασιάζεται επί m_0 και το δεύτερο επί m_1 οπότε ισχύει:

$$\mu_1[0, 1/4] = m_0 m_0, \quad \mu_1[1/4, 1/2] = m_0 m_1, \quad \mu_1[1/2, 3/4] = m_1 m_0, \quad \mu_2[3/4, 1] = m_1 m_1$$

Στο n -οστό βήμα, το αρχικό διάστημα $[0,1]$ έχει υποστεί n βήματα υποδιαιρέσεων και αποτελείται από 2^n υποδιαστήματα, κάθε ένα εκ των έχει τη μορφή:

$$[t, t+2^{-n}], \quad t = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{2^i}, \quad r_i = 0, 1, \quad \text{δηλαδή } r_i \text{ δυαδικός.}$$

Κάθε ένα εκ των υποδιαστημάτων της παραπάνω μορφής χωρίζεται σε 2 υποδιαστήματα της μορφής:

$$[t, t+2^{-n} - 2^{-(n+1)}], \quad [t+2^{-n} - 2^{-(n+1)}, t+2^{-n}]$$

Τα παραπάνω υποδιαστήματα πολλαπλασιάζονται επί m_0 επί m_1 αντίστοιχα. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται για όλα υποδιαστήματα του βήματος n . Επίσης ορίζεται η ακόλουθη ποσότητα:

$$f_0 + f_1 = k, \quad f_0, f_1 > 0.$$

Η αριθμός f_1 εκφράζει το πλήθος των περιπτώσεων όπου ο δυαδικός αριθμός r λαμβάνει την τιμή 0 στο βήμα k της διαδικασίας και αντίστοιχα ο f_2 το πλήθος των περιπτώσεων που λαμβάνει την τιμή 1. Στην περίπτωση αυτή το διάστημα $[t, t+2^{-k}]$ στο k βήμα της διαδικασίας έχει μέτρο:

$$\mu[t, t+2^{-k}] = m_0^{f_0} m_1^{f_1}$$

Η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία μπορεί να συνεχισθεί θεωρητικά επ' άπειρον και το μέτρο της να δώσει το διωνυμικό μέτρο.

Το διωνυμικό μέτρο πολυφράκταλ έχει δύο βασικές ιδιότητες,. Η πρώτη ιδιότητα είναι ότι αποτελεί ένα συνεχές μέτρο πιθανότητας (καθώς το πλήθος των επαναληπτικών βημάτων αυξάνεται και τείνει στο άπειρο) με μηδενική μάζα σε κάθε σημείο του. Η δεύτερη ιδιότητα είναι ότι η συνολική μάζα του μέτρου παραμένει σταθερή σε κάθε ένα βήμα της διαδικασίας. Η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται **συντηρητική ή μικροκανονική (conservative or microcanonical)**.

2.2.2 Γενίκευση του διωνυμικού μέτρου

Το διωνυμικό μέτρο που ορίστηκε στην παραπάνω υποενότητα μπορεί να γενικευθεί. Παρακάτω εμφανίζονται διαδοχικά βήματα γενίκευσης του μέτρου.

Μία απλή μορφή γενίκευσης είναι αν αντί του διωνυμικού μέτρου επιλεγεί πολυωνυμικό Στην περίπτωση αυτή σε κάθε βήμα της διαδικασίας το διάστημα $[0,1]$ χωρίζεται σε κάθε βήμα της διαδικασίας σε b υποδιαστήματα, όπου $b > 2$. Αντίστοιχα υπάρχει b πλήθος μέτρων ανά υποσύνολο του $[0,1]$ όπως φαίνεται και από την παρακάτω σχέση:

$$(m_0, \dots, m_b), \sum_{i=0}^b m_i = 1$$

Αντίστοιχη λογική παρατηρείται και για τα υπόλοιπα επαναληπτικά βήματα.

Ένα επιπλέον βήμα επέκτασης είναι η τυχαιοποίηση της πολλαπλασιαστικής ποσότητας του παραπάνω βήματος. Στην περίπτωση αυτή αντί για ένα b -τιμο μέτρο το οποίο και λαμβάνει προκαθορισμένες τιμές υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή $M\beta$ με προκαθορισμένες τιμές:

$$(m_0, \dots, m_b), \sum_{i=0}^b m_i = 1$$

Σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, το μέτρο του υποσυνόλου του προηγούμενου βήματος πολλαπλασιάζεται με μία από τις τιμές της μεταβλητής. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό για συγκεκριμένο υποσύνολο ισούται με:

$$(p_0, \dots, p_b), \sum_{i=0}^b p_i = 1$$

Ο μόνος περιορισμός που υπάρχει είναι το μέτρο σε κάθε βήμα της διαδικασίας να ισούται με το αρχικό μέτρο, δηλαδή να είναι ίσο με 1.

Μία τρίτη μορφή γενίκευσης υπάρχει όταν οι πολλαπλασιαστές της τυχαίας μεταβλητής $M\beta$ αντί να έχουν συγκεκριμένες και εκ των προτέρων γνωστές τιμές λαμβάνουν τυχαίες τιμές. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **πολλαπλασιαστική αλληλουχία (multiplicative cascade)** και βάση αυτής κατασκευάζεται η κλάση των πολλαπλασιαστικών μέτρων (multiplicative measures). Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι οι πολλαπλασιαστές έχουν την ίδια κατανομή. Η γενίκευση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική και για το λόγο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικότερα παρακάτω.

Έστω M_0 ο πολλαπλασιαστής για το πρώτο βήμα της αλληλουχίας. Έστω $M_0 = M$ για λόγους απλότητας και

$$\sum M_\beta = 1$$

για διατήρηση της μάζας ίσης με 1 σε κάθε βήμα της αλληλουχίας. Στο πρώτο βήμα το διάστημα $[0,1]$ χωρίζεται σε b διαφορετικά υποδιαστήματα ίσα μεταξύ τους. Στο συνέχεια η τυχαία ποσότητα $M\beta$ κατανέμεται στο υποδιάστημα β , όπου $0 \leq \beta \leq b$.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για k βήματα. Στο k βήμα ισχύει για το τυχαίο διάστημα Δt :

$$[t, t + \Delta t], \Delta t = b^{-k}, t = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{2^i}, r_i = 0, 1, \dots, (b-1).$$

Το μέτρο του παραπάνω διαστήματος ισούται με:

$$\mu(\Delta t) = M(r_1) M(r_1, r_2) \dots M(r_1, \dots, r_k)$$

δηλαδή το μέτρο είναι ίσο με το γινόμενο των πολλαπλασιαστικών μέτρων μέχρι το βήμα αυτό. Προφανώς η παραπάνω σχέση ισχύει και αν υψωθούν και τα δύο μέλη της στη δύναμη q :

$$\mu(\Delta t)^q = M(r_1)^q M(r_1, r_2)^q \dots M(r_1, \dots, r_k)^q$$

Βάση της σχέσης αυτής και του γεγονότος ότι οι πολλαπλασιαστές είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους ισχύει ότι:

$$E[\mu(\Delta t)^q] = E[M^q]^k$$

Στα παραπάνω βήματα μπορεί να υπάρξει μία πολύ σημαντική γενίκευση εάν αντί της παραδοχής ότι η μάζα παραμένει ίση με 1 σε κάθε βήμα της διαδικασίας ισχύσει ότι:

$$\sum E(M_\beta) = 1$$

Στην περίπτωση αυτή η μάζα διατηρείται σταθερή μόνο κατά μέσο όρο και όχι στο σύνολο των περιπτώσεων. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο ονομάζεται **κανονικό (canonical)**. Η συνολική μάζα του μέτρου είναι τυχαία, ενώ για το τυχαίο διάστημα Δt θα ισχύει:

$$\mu(\Delta t) = M(r_1) M(r_1, r_2) \dots M(r_1, \dots, r_k) \Omega(r_1, \dots, r_k)$$

όπου με Ω συμβολίζεται το τυχαίο μέτρο. Με την ίδια λογική θα ισχύει:

$$E[\mu(\Delta t)^q] = E[M^q]^k E[\Omega^q]$$

2.3. Βασικές ιδιότητες πολυφράκταλ

Στην ενότητα ορίζονται και παρουσιάζονται κάποιες από τις βασικότερες ιδιότητες των πολυφράκταλ. Οι δύο βασικότερες είναι ο τοπικός εκθέτης του Hölder και το φάσμα πολυφράκταλ.

2.3.1 Ο τοπικός εκθέτης του Hölder

Η έννοια του τοπικού εκθέτη του Hölder παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με αυτή του εκθέτη του Hurst ως ένα μέτρο εκτίμησης του βαθμού συσχέτισης μεταξύ των τιμών μίας χρονολογικής σειράς. Ο ορισμός του είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 2.3.1.1: Έστω g μία συνάρτηση ορισμένη στη γειτονιά (neighborhood) γύρω από μία συγκεκριμένη τιμή t . Ο αριθμός $\alpha(t)$ ο οποίος και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\alpha(t) = \text{Sup} \{ \beta \geq 0 : |g(t + \Delta t) - g(t)| = O(|\Delta t|^\beta), \Delta t \rightarrow 0 \}$$

ονομάζεται εκθέτης του Hölder της συνάρτησης g στο σημείο t .

Μία εναλλακτική μορφή του εκθέτη του Hölder δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\text{Sup} \left[\frac{\ln L(t, \Delta t)}{\ln(\Delta t)} \right] \right], \quad L(t, \Delta t) = |g(t + \Delta t) - g(t)|$$

Από τον ορισμό είναι εμφανές ότι ο εκθέτης αποτελεί συνάρτηση του t . Ορίζεται πάντα για κάθε συνάρτηση και οι τιμές που μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο $(-\infty, +\infty)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση g είναι φραγμένη (bounded) γύρω από το t , ο εκθέτης λαμβάνει μόνο μη αρνητικές τιμές.

Όταν ισχύει η σχέση: $|g(t+\Delta t)-g(t)| \sim Ct(\Delta t)^{\alpha(t)}$, όπου η Ct θετικός ακέραιος που λαμβάνει σταθερές τιμές, τότε ο εκθέτης του Hölder ερμηνεύεται ως η τοπική κλίμακα (local scale) της συνάρτησης. Επίσης, σε αντίθεση με τον εκθέτη του Hurst ο εκθέτης του Hölder δεν παραμένει σταθερός αλλά λαμβάνει ένα πλήθος διαφορετικών τιμών. Για την εύρεση των τιμών αυτών είναι απαραίτητος ο ορισμός μίας νέας έννοιας που ονομάζεται φάσμα πολυφράκταλ (multifractal spectrum).

2.3.2 Το φάσμα πολυφράκταλ

Για την καλύτερη παρουσίαση της κατανομής των εκθετών του Hölder σε ένα μέτρο πολυφράκταλ ορίζεται ένα νέο μέγεθος που ονομάζεται φάσμα πολυφράκταλ (multifractal spectrum) και το οποίο συμβολίζουμε με $f(\alpha)$. Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα που μπορεί να δωθεί στο φάσμα πολυφράκταλ είναι η ιδιότητα της μορφοκλασματικής διάστασης (Mandelbrot 1997b). Πιο συγκεκριμένα εαν A είναι ένα σύνολο από τοπικούς εκθέτες του Hölder, τότε το φάσμα αποτελεί τη μορφοκλασματική διάσταση του A .

Έστω το διάστημα $[0, T]$. Το διάστημα αυτό χωρίζεται σε b ίσα μεταξύ τους υποδιαστήματα κάθε ένα εκ των οποίων χωρίζεται και πάλι σε b υποδιαστήματα. Μετά από k πλήθος τέτοιων βημάτων, το αρχικό διάστημα έχει χωρισθεί σε b^k ίσα μεταξύ τους υποδιαστήματα. Σε κάθε ένα βήμα και για κάθε ένα εκ των b^k υποδιαστημάτων γίνεται υπολογισμός της ποσότητας

$$L(t_i, b^{-k} T) = |g(t_i + b^{-k} T) - g(t_i)|$$

Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.3.2.1: Ο “τραχύς” (coarse) εκθέτης του Hölder ισούται με την ποσότητα:

$$\alpha_k(t_i) = \frac{\ln L(t_i, b^{-k} T)}{\ln(b^{-k})}$$

Έστω τώρα ότι οι “τραχείς” εκθέτες του Hölder κατατάσσονται κατά αύξουσα σειρά. Έστω επίσης ότι το εύρος των τιμών τους χωρίζεται σε μικρότερα και μη αλληλοεπικαληπτόμενα διαστήματα της μορφής $(a_j, a_j + \Delta a]$. Στη συνέχεια ορίζεται το μέγεθος $N_k(a_j)$, το οποίο και εκφράζει το πλήθος από τους “τραχείς” εκθέτες του Hölder το οποίο και περιέχεται σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Στην περίπτωση ορίζεται το όριο:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(a)}{b^k}$$

Το παραπάνω όριο εκφράζει το όριο της αναλογίας μεταξύ εκθετών ανά διάστημα και συγκλίνει στην πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο έχει εκθέτη α .

Κατά τον B. Mandelbrot (Mandelbrot 1997b), το μειονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης είναι ότι συνήθως ένας εκ των εκθετών υπερισχύει και το όριο των τιμών από τους “τραχείς” εκθέτες συγκλίνει σε αυτόν. Αυτό έχει ως συνέπεια να χάνεται η δυνατότητα που έχει ο εκθέτης του Hölder να εντοπίζει πιο πολύπλοκες συνθήκες από αυτές που επικρατούν σε ένα απλό μορφοκλασματικό διότι θα λαμβάνει μία μόνο τιμή αντί για πολλές. Για το λόγο αυτό ο B. Mandelbrot (Mandelbrot 1997b) πρότεινε τη λογαρίθμηση του “τραχύ” εκθέτη οπότε προέκυψε η παρακάτω ποσότητα:

Ορισμός 2.3.2.2 : Έστω μία συνάρτηση $g(t) > 0$ όπου: $L(t, \Delta t) = |g(t + \Delta t) - g(t)|$,

$$\alpha_k(t_i) = \frac{\ln L(t_i, b^{-k} T)}{\ln(b^{-k})}$$

Τότε έστω το όριο:

$$f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln N_k(\alpha)}{\ln b^k} \right]$$

Εαν το όριο υπάρχει και είναι μεγαλύτερο του 0, τότε η συνάρτηση g είναι πολυφράκταλ. Επίσης η ποσότητα $f(\alpha)$ ονομάζεται **φάσμα πολυφράκταλ (multifractal spectrum)**.

2.3.3 Στατιστικές ιδιότητες του "τραχύ" εκθέτη του Hölder και σύνδεση με φάσμα πολυφράκταλ

Έστω ένα μέτρο μ το οποίο και ορίζεται ως το όριο μιας πολλαπλασιαστικής αλληλουχίας με τον τρόπο που αναπτύχθηκε στην υποενότητα 2.2.1. Σε πρώτη φάση το μέτρο θεωρείται συντηρητικό για λόγους απλότητας και στη συνέχεια γίνεται γενίκευση σε κανονικό .

Στην ενότητα 2.2.1 ορίστηκε το μέτρο:

$$\mu(\Delta t) = \mu[t, t + \Delta t] = M(r_1) M(r_1, r_2) \dots M(r_1, \dots, r_k)$$

όπου:

$$\Delta t = b^{-k}, \quad t = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{2^i}, \quad r_i = 0, 1, \dots, (b-1).$$

Με βάση το παραπάνω μέτρο ο "τραχύς" εκθέτης του Holder μπορεί να ορισθεί ως:

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \frac{\ln \mu[t, t + \Delta t]}{\ln \Delta t} = \frac{\ln [M(r_1) M(r_1, r_2) \dots M(r_1, \dots, r_k)]}{\ln (b^{-k})} \\ &= -\frac{1}{k} [\log_b M(r_1) + \dots + \log_b M(r_1, \dots, r_k)] \end{aligned}$$

Ο εκθέτης του Holder μπορεί να θεωρηθεί ως επιλογές (draws) μίας τυχαίας μεταβλητής (έστω a_k). Υπάρχουν 2 τρόποι για να έχουμε αυτές τις τυχαίες επιλογές:

Εαν το μέτρο είναι ντετερμινιστικό τότε το τυχαίο βρίσκεται στην επιλογή του διαστήματος $[t, t + \Delta t]$ και γίνεται με τυχαία επιλογή του αριθμού

$$t = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{2^i}, \quad r_i = 0, 1, \dots, (b-1)$$

που γίνεται με τυχαίο συνδιασμό αριθμών από το r_i ... Εαν πάλι το μέτρο είναι στοχαστικό το t και κατ' επέκταση και το διάστημα $[t, t + \Delta t]$ θεωρούνται σταθερά . Η τυχειότητα εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι οι πολλαπλασιαστές, οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$M(r_1) M(r_1, r_2) \dots M(r_1, \dots, r_k)$$

Ο "τραχύς" εκθέτης μπορεί να χρησιμεύσει για να εκτιμηθεί το φάσμα πολυφράκταλ ενός μέτρου μ . Διαισθητικά για να γίνει αυτό δημιουργούνται ιστογράμματα των τιμών του εκθέτη. Μία διαφορετική προσέγγιση είναι να γίνουν σε τυχαίες επιλογές της a_k και να υπολογισθεί το φάσμα από την ασυμπτωτική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής.

Θεωρώντας τις τιμές των πολλαπλασιαστών M σε κάθε βήμα της διαδικασίας του μέτρου ως ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές προκύπτει ότι:

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i, \quad V_i = -\log_b M(r_1, \dots, r_i)$$

που είναι ο μέσος όρος ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών. Για μεγάλες τιμές του k μπορεί να γίνει ανάλυση της μεταβλητής α_k με χρήση του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών (I.N.M.A.), του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ.) και της Θεωρίας Μεγάλων Αποκλίσεων (Θ.Μ.Α.).

Από τον I.N.M.A ισχύει ότι η α_k συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην ποσότητα:

$$\alpha_0 = E[V_1] = -E[\log_b M]$$

Καθώς το k τείνει στο άπειρο αναμένεται ότι οι "τραχείς" εκθέτες του Holder συσσωρεύονται στη γειτονιά του α_0 . Δημιουργείται δηλαδή ένα φαινόμενο συσσώρευσης για την ποσότητα

$$\frac{N_k(\alpha)}{b^k}$$

όπως είχε αναλυθεί σε προηγούμενη ενότητα.

Στη συνέχεια εξετάζονται οι εκθέτες του Hölder για τιμές διαφορετικές της επικρατούσας τιμής α_0 . Έστω: T_k το σύνολο των υποδιαστημάτων για τα οποία ο εκθέτης του Hölder είναι μεγαλύτερος από $(\alpha_0+1)/2$, όπου α_0 η επικρατούσα τιμή του εκθέτη του Hölder. Καθώς το k τείνει στο άπειρο αναμένουμε το σύνολο των υποσυνόλων να έχουν εκθέτες που να ικανοποιούν τη σχέση: $(\alpha_0+1)/2$. Όμως η συνολική μάζα των κελιών αυτών όπως προκύπτει και από την ακόλουθη σχέση

$$\sum_{t \in T_k} \mu[t, t + \Delta t] = \sum_{t \in T_k} (\Delta t)^{\alpha(t)} \leq b^k (\Delta t)^{(\alpha_0+1)/2} = b^{-k(\alpha_0-1)/2}$$

φράσσεται από μία ποσότητα που τείνει στο 0 καθώς το k τείνει στο άπειρο. Επομένως η μάζα του μέτρου πολυφράκταλ μηδενίζεται όπου το t ανήκει στο T_k . Αυτό έχει ως συνέπεια το σύνολο της μάζας να συγκεντρώνεται στα υπόλοιπα υποσύνολα του διαστήματος.

Μία ακόμα σημαντική ιδιότητα του φάσματος πολυφράκταλ είναι βασισμένη στο Κεντρικό Οριασκό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.). Έστω ότι η

$$V_1 = -\log_b M(r_1)$$

έχει πεπερασμένη διακύμανση σ^2 . Τότε με χρήση του (Κ.Ο.Θ.) θα έχουμε:

$$\sqrt{k} (\alpha_k - \alpha_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Ο συγκεκριμένος όρος μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{N_k}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/k}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma/\sqrt{k}}\right)^2\right]$$

οπότε με χρήση λογαρίθμων προκύπτει η σχέση:

$$f(\alpha) \sim 1 - \frac{1}{2 \ln b} \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma}\right)^2$$

Το φάσμα πολυφράκταλ είναι τοπικά τετραγωνικό (quadratic) γύρω από τον εκθέτη α_0 που αποτελεί τον επικρατέστερο εκθέτη.

Για να δημιουργηθεί το φάσμα πολυφράκταλ γίνεται σε πρώτη φάση διαχωρισμός στο διάστημα $[0, T]$ σε b^k διαστήματα καθένα εκ των οποίων έχει μήκος $\Delta t = b^{-k} T$. Επίσης κατατάσσεται το εύρος των τιμών των εκθετών του Hölder από τη μικρότερη ως τη μεγαλύτερη και γίνεται διαχωρισμός του εύρους των τιμών αυτών σε ίσα μεταξύ τους διαστήματα $\Delta\alpha$. Συμβολίζουμε με $N_k(\alpha')$ το πλήθος από τους "τραχείς" εκθέτες του Hölder στο διάστημα $(\alpha', \alpha' + \Delta\alpha]$. Για μεγάλες τιμές του k μπορεί να γραφεί η σχέση:

$$\frac{1}{k} \log_b \left[\frac{N_k(\alpha')}{b^k} \right] \sim \frac{1}{k} \log_b P[\alpha' < \alpha_k \leq \alpha' + \Delta\alpha]$$

Για καλύτερη κατανόηση της παραπάνω σχέσης δίνεται το ακόλουθο θεώρημα του Cramer (παρατίθεται χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα 2.3.3.1: Έστω X_t μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Τότε ισχύει:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln P\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i > \alpha\right] = \text{Inf}_q \{ \ln [E[\exp(q\alpha - qX_1)]] \}$$

για κάθε $\alpha > E(X_1)$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα στην τυχαία μεταβλητή α_k θα ισχύει ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_b P[\alpha < \alpha_k] = \text{Inf}_q \{ \log_b [E[\exp(q\alpha - qV_1) \ln b]] \}$$

για κάθε $\alpha > \alpha_0$, όπου αντικαταστήθηκε ο λογάριθμος με βάση το e από το λογάριθμο με βάση το b . Η ίδια ιδιότητα ισχύει και για $\alpha < \alpha_0$.

Θέτοντας

και δοθέντος ότι

$$V_1 = -\log_b M$$

θα ισχύει με αντικατάσταση ότι:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \text{Inf}_q \{ \log_b [E[\exp(q\alpha + q \log_b M) \ln b]] \} \\ &= \text{Inf}_q \{ \log_b [E[b^{(q\alpha + q \log_b M)}]] \} = \text{Inf}_q [\alpha q + \log_b (EM^q)] \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση: Το φάσμα πολυφράκταλ είναι ο μετασχηματιστής Legendre της συνάρτησης κλιμάκωσης $\tau(q)$ και δίνεται από την σχέση

$$\text{Inf}_q [\alpha q - \tau(q)]$$

Η συνάρτηση κλιμάκωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\tau(q) = -\log_b (EM^q) - 1$$

Η συνάρτηση κλιμάκωσης αποτελεί σημαντική έννοια για το πολυφράκταλ μοντέλο απόδοσης τίτλων και θα αναπτυχθεί και στην αντίστοιχη ενότητα.

2.4 Η κλασματική κίνηση Brown

Ένα από τα δομικά συστατικά του μοντέλου MMAR είναι η κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian Motion). Για καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου παρουσιάζεται στην επόμενη υποενότητα η κλασσική κίνηση Brown και στη μεθεπόμενη παρουσιάζεται και η γενίκευση της με χρήση της παραμέτρου H .

2.4.1 Η κλασσική κίνηση Brown

Έστω μία στοχαστική διαδικασία η οποία πραγματοποιεί κίνηση τυχαίου περιπάτου στο χρόνο. Έστω επίσης ότι η στοχαστική διαδικασία σε διακριτά ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα τ κάνει άλματα μεγέθους d είτε προς τα πάνω με πιθανότητα 0.5 είτε προς τα κάτω με πιθανότητα 0.5.

Έστω $X_\tau(t)$ η τιμή που λαμβάνει η στοχαστική διαδικασία τη χρονική στιγμή t . Τότε τη χρονική στιγμή $t+\tau$ θα ισχύει:

$$P[X_\tau(t+\tau)=X_\tau(t)+d]=P[X_\tau(t+\tau)=X_\tau(t)-d]=0.5.$$

Υποθέτοντας στη συνέχεια ότι τη χρονική στιγμή 0 η διαδικασία ισούται με 0 ισχύει:

$$X_\tau(t) = d(Y_1 + \dots + Y_n)$$

όπου οι τιμές της στοχαστικής διαδικασίας Y είναι ανεξάρτητες και ισχύει:

$$P[Y_1 = 1] = \dots = P[Y_n = 1] = 0.5, \quad P[Y_1 = -1] = \dots = P[Y_n = -1] = 0.5$$

και όπου η ποσότητα n ισούται με το ακέραιο μέρος της διαίρεσης t/τ . Θέτοντας

$$\delta = \sqrt{\tau} \text{ προκύπτει η ποσότητα: } X_\tau(t) = \sqrt{\tau} (Y_1 + \dots + Y_n)$$

Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τη στοχαστική διαδικασία $Y(t)$ θα ισχύει ότι το άθροισμα των τιμών της καθώς αυτό τείνει στο άπειρο θα συγκλίνει στην τυποποιημένη κανονική κατανομή. Για την τυχαία μεταβλητή

$$X_\tau(t) = \sqrt{\tau} (Y_1 + \dots + Y_n)$$

επομένως η μέση τιμή θα ισούται με 0 και η τυπική απόκλιση θα ισούται με

$$(\sqrt{\tau})^2 (t/\tau) = t$$

Επίσης θα ισχύει ότι η για αρκετά μικρές τιμές του τ , η διαφορά

$$X_\tau(t+h) - X_\tau(t)$$

προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση h .

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που ισχύει είναι η ανεξαρτησία των παρατηρήσεων. Έστω $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ μία αύξουσα αλληλουχία χρονικών στιγμών. Τότε οι διαφορές $X_\tau(t_2) - X_\tau(t_1), \dots, X_\tau(t_k) - X_\tau(t_{k-1})$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι παραπάνω κινήσεις αφορούσαν ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με διακριτά μεταξύ τους βήματα απόστασης τ . Η κίνηση Brown προκύπτει εάν πάρουμε το όριο του παραπάνω υποδείγματος όπως το τ τείνει στο 0.

Μία τυχαία διαδικασία X είναι μία κίνηση Brown εάν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

2. $P(X(0)=0)=1$, δηλαδή η διαδικασία ξεκινάει από την αρχή των αξόνων.
3. $X(t)$ συνεχής συνάρτηση του t .
4. Για κάθε $0 \leq t$ και για κάθε $h > 0$ η αύξηση (increment) $X(t+h) - X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση h και δίνεται από τη σχέση:

$$P[X(t+h) - X(t) \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2h}\right) du$$

5. Για την αύξουσα αλληλουχία χρονικών στιγμών $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ οι διαφορές $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κίνησης Brown προκύπτει από την ενότητα 3 του ορισμού της όπου παρατηρούμε πως η κατανομή των αυξήσεων (increments) για κάθε

περίπτωση είναι ανεξάρτητη του t , επομένως είναι στάσιμη (stationary).

Μία ακόμα ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κίνησης Brown είναι η συμπεριφορά της υπό αλλαγή κλίμακας, ιδιότητα ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη του φαινομένου της αυτο-ομοιότητας (self-similarity):

$$\begin{aligned} P[X(t+gh) - X(t) \leq x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi gh}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2gh}\right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi gh}} \int_{-\infty}^{xg^{-1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2h}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{xg^{-1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2h}\right) dy = P[X(t+h) - X(t) \leq xg^{-1/2}] \end{aligned}$$

Η κίνηση Brown παραμένει σταθερή υπό αλλαγή κλίμακας.

Αν και η κίνηση Brown έχει πολλαπλές εφαρμογές στις στοχαστικές διαδικασίες και στις εφαρμογές τους σε άλλους τομείς όπως τα χρηματοοικονομικά είναι αρκετά περιοριστική ως προς τις ιδιότητές της. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί και άλλες διαδικασίες, όπως για παράδειγμα η κλασματική κίνηση Brown στην οποία δεν ισχύει ο όρος της ανεξαρτησίας.

2.4.2 Η κλασματική κίνηση Brown

Η γενίκευση της κλασσικής κίνησης Brown ονομάζεται κλασματική κίνηση Brown (fractional Brownian motion) και έχει ως βασική της διαφορά την έλλειψη ανεξαρτησίας μεταξύ των αυξήσεων (increments) της διαδικασίας.

Ορισμός 2.2.2.1: Με τον όρο κλασματική κίνηση Brown με δείκτη H ορίζεται μία στοχαστική διαδικασία με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $P(X(0)=0)=1$, δηλαδή η διαδικασία ξεκινάει από την αρχή των αξόνων.
2. Για κάθε $0 \leq t$ και για κάθε $k > 0$ η αύξηση (increment) $X(t+k)-X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση k^{2H} και δίνεται από τη σχέση

$$P[X(t+k) - X(t) \leq x] = \frac{1}{k^H} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2k^{2H}}\right) du$$

Βάση του παραπάνω ορισμού υπάρχει στασιμότητα στην κίνηση λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της X από την παράμετρο t . Επίσης από τον ορισμό ισχύει

$$E[X(t)^2] = t^{2H}, \quad E[(X(t+k) - X(t))^2] = k^{2H}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι:

$$E[X(t+k)X(t)] = \frac{1}{2} [t^{2H} + (t+k)^{2H} - k^{2H}].$$

Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ισούται με:

$$E[X(t)(X(t+k) - X(t))] = \frac{1}{2} [(t+k)^{2H} - t^{2H} - k^{2H}]$$

Για τη συνάρτηση συνδιακύμανσης ισχύει ότι:

1. Εάν $H=1/2$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ισούται με 0, οπότε και υπάρχει ανεξαρτησία.
2. Εάν $H<1/2$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης λαμβάνει αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα να έχουμε αρνητική συσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση αυτή αύξηση της τιμής της στοχαστικής διαδικασίας για μία χρονική στιγμή αυξάνει την πιθανότητα μείωσης της τιμής της για μία άλλη χρονική στιγμή.
3. Εάν $H>1/2$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης λαμβάνει αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα να έχουμε αρνητική συσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση αυτή αύξηση της τιμής της στοχαστικής διαδικασίας για μία χρονική στιγμή αυξάνει την πιθανότητα αύξησης της τιμής της για μία άλλη χρονική στιγμή.

Τα παραπάνω θυμίζουν τον εκθέτη του Hurst, έννοια που ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην πραγματικότητα οι δύο έννοιες ταυτίζονται στην περίπτωση της κλασματικής κίνησης Brown.

2.5 Αυτοσυγγένεια και πολυφράκταλ

Σε πρώτη φάση ορίζεται η έννοια της αυτοσυγγένειας (self-affinity).

Ορισμός 2.5.1: Μία στοχαστική διαδικασία ονομάζεται αυτοσυγγενής (self-affine) εάν:

$$\{X(ct)\} \stackrel{d}{=} \{c^H X(t)\}, c, H > 0$$

Στα πολυφράκταλ εξετάζεται η γενικότερη σχέση της μορφής

$$X(ct) \stackrel{d}{=} M(c) X(t) \quad (2)$$

όπου η X και η M είναι τυχαίες συναρτήσεις. Η συνάρτηση M ονομάζεται παράγον κλιμάκωσης (scaling factor) και είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη του t .

Υποθέτοντας αυστηρή στασιμότητα (strict stationarity) θα ισχύει:

$$X(t+c\Delta t) \stackrel{d}{=} M(c)[X(t+\Delta t) - X(t)] \quad (3)$$

ενώ θέτοντας

$$H(c) = \log_c [M(c)] \quad \text{η σχέση (2) γίνεται}$$

$$X(ct) \stackrel{d}{=} c^{H(c)} X(t)$$

Η παραπάνω δίνει στα πολυφράκταλ μεγαλύτερη ευελιξία όσον αφορά τη μαθηματική μοντελοποίηση σε σχέση με τις απλά αυτοσυγγενείς διαδικασίες, διότι ο εκθέτης H μπορεί να λάβει παραπάνω από μία τιμή. Μία άλλη σημαντική ιδιότητα των πολυφράκταλ μπορεί να αναπτυχθεί από τη σχέση :

$$X(t+c\Delta t) \stackrel{d}{=} M(c)[X(t+\Delta t) - X(t)]$$

Στη συνέχεια θεωρείται ότι για τον παράγοντα κλιμάκωσης M ικανοποιείται η σχέση

$$M(ab) \stackrel{d}{=} M_1(a) M_2(b)$$

όπου: M_1, M_2 ανεξάρτητα αντίγραφα της M . Στην περίπτωση αυτή ικανοποιείται η σχέση:

$$E[|X(t)|^q] = c(q) t^{\tau(q)+1} \quad (5),$$

όπου $c(q), \tau(q)$ είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις του q .

Η παραπάνω σχέση θεωρείται σημαντικότερη για τις διαδικασίες πολυφράκταλ διότι βάση αυτής μπορεί να ορισθεί εάν μία διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί πολυφράκταλ ή όχι. Με τη σχέση (5) αυτή η ιδιότητα πολυφράκταλ (multifractality) μπορεί να ορισθεί ως μία καθολική (global) ιδιότητα των ροπών της συνάρτησης.

Σε αντίθεση με τη σχέση (5), η σχέση

$$X(ct) \stackrel{d}{=} M(c) X(t)$$

είναι κάπως πιο περιοριστική και δεν καλύπτει όλες τις περιπτώσεις πολυφράκταλ.

Στη σχέση

$$E[|X(t)|^q] = c(q) t^{\tau(q)+1}$$

το σημείο όπου θα δωθεί η μεγαλύτερη βαρύτητα είναι στη συνάρτηση $\tau(q)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση κλιμάκωσης και είναι πάντοτε κυρτή (concave) όπως θα φανεί και σε επόμενη ενότητα.

Για τη συνάρτηση κλιμάκωσης διακρίνονται δύο ενδιαφέρουσες υποπεριπτώσεις:

1. Εάν $q=0$, τότε: $\tau(0)=-1$.
2. Εάν η στοχαστική διαδικασία X είναι αυτοσυγγενής (self-affine) $\tau(q)=Hq-1$, τότε η συνάρτηση κλιμάκωσης είναι γραμμική και εξαρτάται πλήρως από την παράμετρο q .

2.6 Στοχαστικές Διαδικασίες πολυφράκταλ

Οι έννοιες που παρουσιάστηκαν σε παραπάνω ενότητες για το μέτρο πολυφράκταλ μπορούν να γενικευθούν για το πεδίο των στοχαστικών ανελίξεων. Αυτό γίνεται βάση του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 2.6.1: Μία στοχαστική διαδικασία ονομάζεται πολυφράκταλ εφόσον έχει στάσιμες προσαυξήσεις (stationary increments) και ικανοποιεί τη σχέση:

$$E[|X(t)|^q] = c(q) t^{\tau(q)+1} \text{ για κάθε } t \in T \text{ και για κάθε } q \in Q$$

Τα διαστήματα T, Q είναι υποσύνολα της γραμμής των πραγματικών αριθμών, έχουν μήκος μεγαλύτερο του 0, $0 \in T, [0,1]$ υποσύνολο του Q και οι συναρτήσεις $c(q), \tau(q)$ έχουν ως πεδίο ορισμού το Q . Η συνάρτηση τ ονομάζεται **συνάρτηση κλιμάκωσης (scaling function)**.

Ένα παράδειγμα διαδικασίας πολυφράκταλ είναι οι αυτοσυγγενείς (self-affine) διαδικασίες. Έστω μία αυτοσυγγενής διαδικασία με δείκτη αυτοσυγγένειας H . Ισχύει:

$$\{X(t)\} \stackrel{d}{=} \{t^H X(1)\}$$

επομένως:

$$E[|X(t)|^q] = E[|t^H X(1)|^q] = t^{Hq} E[|X(1)|^q] = c(q) t^{\tau(q)+1},$$

όπου:

$$E[|X(1)|^q] = c(q)$$

και $\tau(q) = Hq - 1$.

Στις αυτοσυγγενείς διαδικασίες η συνάρτηση κλιμάκωσης είναι γραμμική και εξαρτάται μόνο από έναν παράγοντα, τον παράγοντα H . Όταν η συνάρτηση κλιμάκωσης είναι γραμμική, τότε η διαδικασία ονομάζεται **μονοφράκταλ (unifractal)** ή **μονοκλιμακωτή (uniscaling)** και αποτελεί απλουστευμένη περίπτωση της διαδικασίας πολυφράκταλ.

Σε μία συνάρτηση πολυφράκταλ η συνάρτηση κλιμάκωσης $\tau(q)$ είναι κοίλη και αυτό προκύπτει με χρήση της ανισότητας του Holder (βλ. Καί 1.2) και χρήση του παραπάνω ορισμού για τα πολυφράκταλ. Θέτοντας $w_1, w_2 > 0$ τέτοιους ώστε $w_1 + w_2 = 1$ έχουμε:

$$E[|X(t)|^q] \leq E[|X(t)|^{q_1}]^{w_1} E[|X(t)|^{q_2}]^{w_2}$$

οπότε με χρήση λογαρίθμων ισχύει

$$\ln[c(q)] + \tau(q) \ln t \leq [w_1 \tau(q_1) + w_2 \tau(q_2)] \ln t + [w_1 \ln[c(q_1)] + w_2 \ln[c(q_2)]]$$

Διαιρώντας με $\ln t < 0$ ενώ $t \rightarrow 0$ προκύπτει

$$\tau(q) \geq w_1 \tau(q_1) + w_2 \tau(q_2),$$

που αποδεικνύει την κοιλότητα.

Βάση των παραπάνω μία διαδικασία πολυφράκταλ μπορεί να ορισθεί ως μία ιδιότητα κλιμάκωσης των ροπών της στοχαστικής διαδικασίας που μπορεί να οδηγήσει σε εύκολα επαληθεύσιμες ιδιότητες.

2.7 Το μοντέλο πολυφράκταλ απόδοσης τίτλων

Βάση των προηγούμενων εννοιών θα ορισθεί το μοντέλο πολυφράκταλ απόδοσης τίτλων. Για συντομία από εδώ και παρακάτω το μοντέλο αυτό θα αναφέρεται ως **MMAR**. Η τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου ορίζεται ως μία διαδικασία με πολλά επίπεδα κλιμάκωσης (multiscaling). Οι μεταβολές της μεταβλητότητας στο μοντέλο εκφράζονται με τη χρήση μίας συνάρτησης χρόνου συναλλαγής (trading time).

Ορισμός 2.7.1 : Έστω $B(t)$ μία στοχαστική διαδικασία και $\theta(t)$ μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t . Τότε η στοχαστική διαδικασία $X(t)=B[\theta(t)]$ ονομάζεται **σύνθετη (compound)**. Ο δείκτης t εκφράζει τον πραγματικό χρόνο και ο δείκτης $\theta(t)$ εκφράζει το **χρόνο συναλλαγής (trading time)**. Ο χρόνος συναλλαγής επίσης ονομάζεται **διαδικασία χρονικής παραμόρφωσης (time deformation process)**.

Στο MMAR, η συνάρτηση χρόνου συναλλαγής ισούται με την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας ενός μέτρου πολυφράκταλ (βλ. και υποενότητα 2.2.2.) και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα και να εμφανίζει μνήμη αλλά και βαριές ουρές, στοιχεία τα οποία θα περάσουν στη και στην αρχική διαδικασία μέσω της σύνθεσης της με τη συνάρτηση χρόνου συναλλαγής.

Έστω ένας χρηματοοικονομικός τίτλος (π.χ. μία μετοχή) όπου: $\{P(t): 0 \leq t \leq T\}$. Ορίζεται μία στοχαστική διαδικασία X τέτοια ώστε: $X(t)=\ln P(t)-\ln P(0)$ και γίνονται δεκτές οι ακόλουθες υποθέσεις:

Η $X(t)$ είναι μία σύνθετη διαδικασία της μορφής

$$X(t) = B_H[\theta(t)]$$

όπου θ χρόνος συναλλαγής και B μία κλασματική κίνηση Brown με δείκτη H .

Η διαδικασία του χρόνου συναλλαγής $\theta(t)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία με συνεχείς, μη φθίνουσες διαδρομές και στάσιμες επαυξήσεις (increments), η οποία αποτελεί αθροιστική συνάρτηση ενός πολυωνυμικού μέτρου πολυφράκταλ (βλ. Και .

Οι διαδικασίες του B , θ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Βάση των παραπάνω υποθέσεων προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα (δίνεται χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα 2.7.1: Έστω η στοχαστική διαδικασία $X(t)=BH[\theta(t)]$. Τότε η X είναι πολυφράκταλ, έχει στάσιμες επαυξήσεις (increments) και ισχύει η σχέση

$$\tau X(q)=\tau\theta(Hq).$$

2.8 Ιδιότητες του πολυφράκταλ μοντέλου απόδοσης τίτλων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο χρόνος συναλλαγής είναι η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας ενός αυτοσυγγενούς μέτρου. Όμως οι ροπές του έχουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά ανάλογα με το αν το μέτρο είναι συντηρητικό ή κανονικό. Πιο συγκεκριμένα:

Εαν το μέτρο είναι συντηρητικό ($\sum \mathbf{M}_B = \mathbf{1}$ για το $[0,1]$) τότε η μάζα του στο διάστημα $[0,T]$ που ουσιαστικά αποτελεί γενίκευση του διαστήματος $[0,1]$ είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση χρόνου συναλλαγής $\theta(t)$ που αποτελεί αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας του μέτρου συναλλαγής είναι φραγμένη και οι ροπές της στοχαστικής διαδικασίας $X(t) = B_H[\theta(t)]$

είναι πεπερασμένες ανεξάρτητα από την τάξη τους. Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία χρονοσειρών με ήπια μεταβλητότητα και "ελαφρές" ουρές.

Εαν το μέτρο είναι κανονικό ($\sum \mathbf{E}(\mathbf{M}_B) = \mathbf{1}$ για το $[0,1]$), τότε όπως ορίστηκε και σε παραπάνω ενότητα (2.2.) η μάζα του μέτρου είναι τυχαία και εξαρτάται από μία τυχαία μεταβλητή Ω , η οποία και καθορίζει τη συμπεριφορά των ουρών αυτού. Όπως έχει αποδειχθεί (Mandelbrot 1997a) οι ουρές της μεταβλητής Ω ακολουθούν την κατανομή Pareto και οι ροπές τους τείνουν στο άπειρο με αποτέλεσμα η μεταβλητότητα να χαρακτηρίζεται ως "άγρια".

Σα συνέπεια στην περίπτωση που το μέτρο είναι κανονικό και η τυχαία μεταβλητή Ω ακολουθεί στις ουρές την κατανομή Pareto υπάρχει ένας εκθέτης $q'(\theta)>1$ τέτοιος ώστε:

Εαν $q'(\theta)>q\geq 1$ τότε η ροπή $E(\theta^q)$ είναι πεπερασμένη ενώ τείνει στο άπειρο για $q'(\theta)\leq q$.

Εαν $1>q>0$ τότε η συνάρτηση κλιμάκωσης $\tau(q)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές ενώ για $q'(\theta)>q\geq 1$ η συνάρτηση λαμβάνει θετικές τιμές.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συσχέτιση μεταξύ των επαυξήσεων της στοχαστικής διαδικασίας. Ορίζουμε τη σχέση

$$Z(t,\Delta t)=Z(t+\Delta t)-Z(t),$$

όπου Z μία οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία και Δt μία σταθερή (πεπερασμένη) ποσότητα.

Η συνάρτηση συνδιακύμανσης ορίζεται ως εξής:

$$\gamma_k(t) = \text{Cov}[Z(a, \Delta t), Z(a+t, \Delta t)]$$

Δεδομένου ότι η Z έχει στάσιμες προσαυξήσεις θα ισχύει ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης θα είναι ανεξάρτητη του a . Βάση αυτών έχουμε το ακόλουθο θεώρημα (παρατίθεται χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα 2.8.1: Έστω $BH(t)$ μία κίνηση Brown χωρίς τάση (drift), όπου $H=1/2$. Τότε ισχύει:

Εάν η $E(\theta^{1/2})$ είναι πεπερασμένη, τότε η διαδικασία $X(t)$ είναι martingale ως προς τη φυσική της διήθηση (filtration).

Εάν η $E(\theta)$ είναι πεπερασμένη, τότε οι επαυξήσεις της $X(t)$ είναι ασυσχέτιστες και η συνάρτηση συνδιακύμανσης $\gamma_X(t)$ ισούται με 0 για κάθε $t \geq \Delta t$.

Το παραπάνω θεώρημα βασίζεται στις ιδιότητες martingale της απλής κίνησης Brown (όπου $H=1/2$) και δεν ισχύει για τη γενικότερη περίπτωση όπου ο εκθέτης H δεν ισούται με $1/2$. Για την περίπτωση αυτή έχουμε το ακόλουθο θεώρημα (παρατίθεται χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα 2.8.2: Εάν η $E(\theta^{2H})$ είναι πεπερασμένη, τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ικανοποιεί για όλα τα $t \geq \Delta t$ τη σχέση:

$$\gamma_X(t) = \frac{c_\theta(t) \text{Var}[B_H(1)]}{2} [(t + \Delta t)^m + (t - \Delta t)^m - 2t^m], \quad m = \tau_\theta(2H)$$

Η παραπάνω σχέση λαμβάνει θετικές τιμές για $H > 1/2$ και αρνητικές για $H < 1/2$.

Ένα επιπλέον στοιχείο που θα εξεταστεί στην παρούσα ενότητα είναι η εξάρτηση των απολύτων τιμών των αποδόσεων. Θεωρώντας τη Z ως μία στοχαστική διαδικασία με στάσιμες επαυξήσεις ορίζεται:

$$\delta_Z(t, q) = \text{Cov}[|Z(a, \Delta t)|^q, |Z(a+t, \Delta t)|^q]$$

Από την ποσότητα αυτή προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.8.3: Εάν $H \geq 1/2$, $E(\theta^{Hq})$ πεπερασμένη τότε ισχύει:

$$\delta_X(t, q) \geq \delta_\theta(t, Hq) [E|B_H(1)|^q]^2$$

για κάθε μη αρνητικό q και για κάθε $t \geq \Delta t$. Επίσης για $H=1/2$ η παραπάνω ποσότητα σχέση ισχύει για την ισότητα μόνο.

2.9 Συσχέτιση πολυφράκταλ με πολυφράκταλ μοντέλο απόδοσης τίτλων

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η συμπεριφορά του φάσματος πολυφράκταλ το οποίο δημιουργείται από το μοντέλο MMAR. Σε πρώτη φάση ορίζεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.9.1: Έστω $X(t)$ μία στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε να εκπληρώνει τις προϋποθέσεις του μοντέλου MMAR. Τότε τόσο η διαδικασία $X(t)$ όσο και η διαδικασία

$$P(t) : X(t) = \ln P(t) - \ln P(0)$$

έχουν φάσμα πολυφράκταλ τέτοιο ώστε

$$f(\alpha) = f_{\theta}(\alpha/H).$$

Απόδειξη: Η απειροελάχιστη μεταβολή της X γύρω από την ημερομηνία t ικανοποιεί τη σχέση:

$$|X(t + \Delta t) - X(t)| = |B_H[\theta(t + \Delta t)] - B_H[\theta(t)]| \sim |\theta(t + \Delta t) - \theta(t)|^H \sim |\Delta t|^{H\alpha_{\theta}(t)},$$

όπου η ποσότητα $\alpha_{\theta}(t)$ εκφράζει τον εκθέτη του Holder για τη συνάρτηση χρόνου συναλλαγής θ στο t .

Ο εκθέτης του Holder για τη X η οποία αποτελεί σύνθεση κλασματικής κίνησης Brown με εκθέτη του Holder ίσο με H για κάθε σημείο και της συνάρτησης χρόνου συναλλαγής στο σημείο t είναι ίσος με $H\alpha_{\theta}(t)$. Το σύνολο των σημείων στα οποία ο εκθέτης του Holder είναι ίσος με α είναι με αυτή τη λογική το ίδιο με το σύνολο των σημείων στα οποία ο εκθέτης Holder του χρόνου συναλλαγής ισούται με α/H . (διότι $\alpha = H\alpha_{\theta}(t)$).

Τέλος δεδομένου ότι η στοχαστική διαδικασία $P(t)$ εκφράζει μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση του X , θα έχει τον ίδιο εκθέτη του Holder με τη X και επομένως και το ίδιο φάσμα πολυφράκταλ.

Βάση του παραπάνω θεωρήματος διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο MMAR περιέχει ένα σύνολο από τοπικούς εκθέτες του Holder. Επίσης διαπιστώνουμε ότι η ιδιότητα πολυφράκταλ προκαλείται από τη συνάρτηση χρόνου συναλλαγής η οποία δεν έχει σταθερές τιμές.

Η μακρά μνήμη του μοντέλου έχει κάποιες ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες. Αν θεωρήσουμε ως $T(\alpha)$ το σύνολο των σημείων όπου ο εκθέτης του Holder ισούται με α θα έχουμε αρκετά σύνολα της μορφής αυτής με διάσταση φράκταλ $f(\alpha)$ τέτοια ώστε $0 < f(\alpha) < 1$. Τα στοιχεία που τα αποτελούν συσσωρεύονται σε διαφορετικά σημεία του διαστήματος $[0, T]$, γεγονός που εξηγεί τις περιόδους μεγάλων και μικρών μεταβολών στις τιμές.

Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο είναι η στατιστική αυτο-ομοιότητα (statistical self-similarity) του συνόλου $T(\alpha)$. Αυτό σημαίνει ότι μετά από την κατάλληλη αλλαγή κλίμακας τα υποσύνολα του $T(\alpha)$ έχουν την ίδια διασπορά σημείων με το αρχικό

σύνολο $T(\alpha)$. Αυτό έχει σα συνέπεια η γνώση του συνόλου $T(\alpha)$ για μία περίοδο να περιέχει χρήσιμες πληροφορίες για επόμενες περιόδους, ιδιότητα που εξηγεί τη μακρά μνήμη της διαδικασίας.

2.10 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε στα βασικότερα σημεία του το σημαντικότερο ως τώρα μοντέλο χρηματοοικονομικών με χρήση μεθόδων fractals (MMAR) το οποίο και αναπτύχθηκε το 1997 από τους Mandelbrot, Fisher, Calvet. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στη χρήση της κλασματικής κίνησης Brown καθώς και σε μία διαδικασία που μετατρέπει το χρόνο συναλλαγής μέσω μίας διαδικασίας πολυφράκταλ. Η βασική σχέση του είναι η: $BH[\theta(t)] = \ln P(t) - \ln P(0)$, όπου B μία κλασματική κίνηση Brown και μία πολυφράκταλ συνάρτηση του χρόνου συναλλαγής.

Στη συνέχεια εξετάζονται οι τοπικές ιδιότητες του μοντέλου (φάσμα πολυφράκταλ- τοπικός εκθέτης του Holder) με στόχο να εξαχθούν πολύτιμες ιδιότητες για την καλύτερη εκτίμηση εμπειρικών δεδομένων. Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο είναι η σχέση μεταξύ των τοπικών και των γενικών ιδιοτήτων που προκύπτει από Θεώρημα με την τελική σχέση να είναι η.

$$|X(t + \Delta t) - X(t)| = |B_H[\theta(t + \Delta t)] - B_H[\theta(t)]| \sim |\theta(t + \Delta t) - \theta(t)|^H \sim |\Delta t|^{H\alpha_\theta(t)},$$

όπου συσχετίζονται οι μεταβολές μεταξύ των τιμών του μοντέλου με τις μεταβολές στον εκθέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

3.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η λειτουργία του Πολυφράκταλ Μοντέλου Απόδοσης Τίτλων (MMAR) σε πραγματικά δεδομένα. Όπως και στο Κεφάλαιο 1, το μοντέλο εξετάζεται με χρήση δεδομένων του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Τα δεδομένα αυτά όπως και στο Κεφάλαιο 1 αφορούν ημερήσιες τιμές κλεισίματος του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου καθώς και συγκεκριμένων μετοχών υψηλής κεφαλαιοποίησης για τη χρονική περίοδο 1/1/1990-31/12/2012.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου γίνεται χρήση μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε το 1997 από τους Mandelbrot-Fisher-Calvet για την εκτίμηση εμπειρικών δεδομένων του μοντέλου MMAR. Η μεθοδολογία αυτή βασίζεται στην εκτίμηση του δειγματικού αθροίσματος των παρατηρήσεων και χρήση μεθοδολογίας ανάλυσης παλινδρόμησης για την εκτίμηση βασικών παραμέτρων του μοντέλου.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται χρήση μοντέλων ανάλυσης παλινδρόμησης για τον καλύτερο έλεγχο της κλίσης της καμπύλης που προκύπτει από τα εμπειρικά δεδομένα. Με τον τρόπο αυτό ελέγχεται η ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των χρονολογικών σειρών.

3.2. Δειγματικό Άθροισμα

Έστω μία χρονολογική σειρά $P(t)$ η οποία εκφράζει την τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Έστω επίσης η χρονολογική σειρά $X(t) = \ln P(t) - \ln P(0)$, η οποία εκφράζει το λογάριθμο της απόδοσης του υπό εξέταση χρηματοοικονομικού τίτλου.

Το διάστημα $[0, T]$ χωρίζεται σε N ίσου μήκους υποδιαστήματα (όπου N ακέραιος). Κάθε ένα εκ των υποδιαστημάτων έχει μήκος Δt . Στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση δειγματικού αθροίσματος (sample sum) ή συνάρτηση διαμέρισης (partition function) της X ως εξής:

$$S(q, T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |X(i\Delta t + \Delta t) - X(i\Delta t)|^q. \quad (3.1.1)$$

Όπως ορίστηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο μία στοχαστική διαδικασία X είναι πολυφράκταλ εφόσον:

$$E[|X(t)|^q] = c(q) t^{\tau(q)+1}$$

Εαν η διαδικασία X στη σχέση (1) είναι πολυφράκταλ, τότε (μετά από πράξεις) προκύπτει: $E[S(q, T, \Delta t)] = Nc(q) (\Delta t)^{\tau(q)+1}$

Λογαριθμίζοντας τη συνάρτηση προκύπτει μετά από πράξεις η:

$$\ln[\mathbf{E}[S(q, T, \Delta t)]] = \tau_x(q) \ln(\Delta t) + (\ln c(q) + \ln T)$$

η οποία θυμίζει τη μορφή μίας συνάρτησης απλής γραμμικής παλινδρόμησης με συντελεστή της ευθείας τη συνάρτηση $\tau(q)$, η οποία είναι η συνάρτηση κλιμάκωσης.

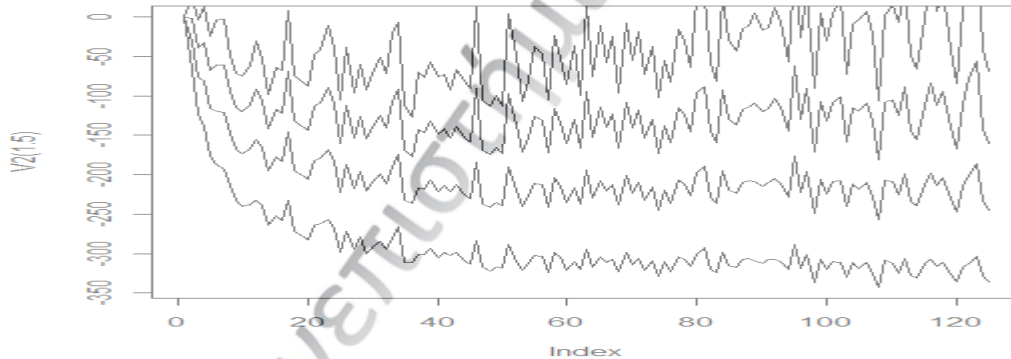
Από τη στιγμή που το μοντέλο MMAR αποτελείται και από μία κλασματική κίνηση Brown με δείκτη H , ο Mandelbrot (Mandelbrot 1997c) δίνει την ακόλουθη σχέση ως αναγκαία για τον ορισμό του δείκτη ως:

$$\tau(1/H)=0,$$

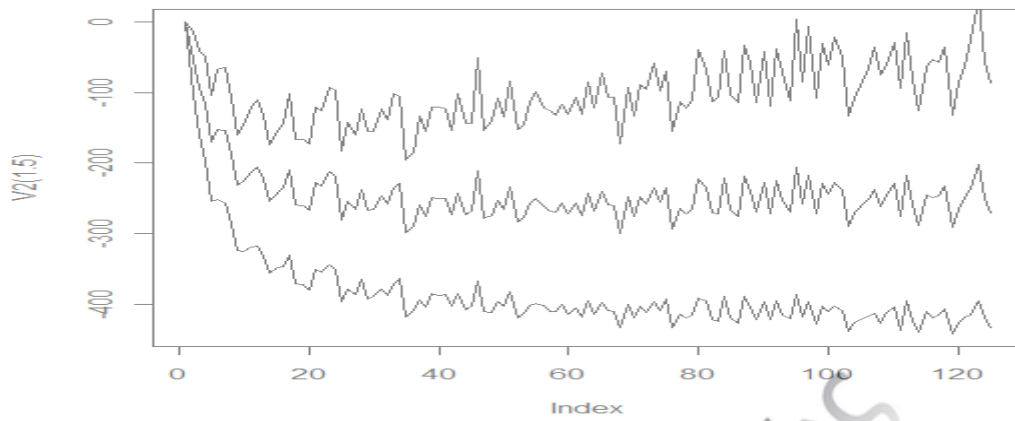
Δεδομένου ότι η συνάρτηση κλιμάκωσης αποτελεί το συντελεστή της ευθείας της παλινδρόμησης που ορίστηκε παραπάνω, για τον υπολογισμό της θα πρέπει να βρεθεί κατάλληλο q τέτοιο ώστε η συνάρτηση διαμέρισης να είναι παράλληλη στον άξονα των X .

3.3. Διαγράμματα δειγματικού αθροίσματος

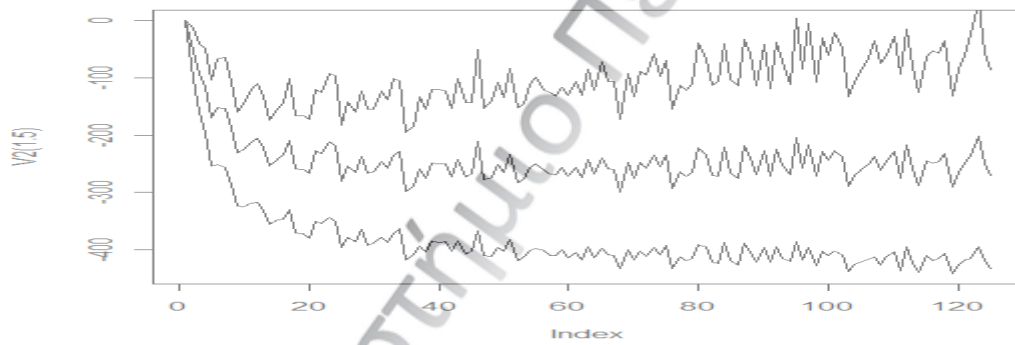
Αρχικά ορίζονται οι συναρτήσεις του δειγματικού αθροίσματος. Στη συνέχεια τα δεδομένα επεξεργάζονται με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου R και προκύπτει ένα διάγραμμα για κάθε μία μετοχή (βλ. Παράρτημα Π3). Σε κάθε διάγραμμα εμφανίζονται οι τιμές του δειγματικού αθροίσματος ανάλογα με το πλήθος εργασιμων ημερών της διαμέρισης Δt και ανάλογα με τις τιμές του εκθέτη q . Το πλήθος των ημερών κυμαίνεται από εως 125 που αντιστοιχεί στο πλήθος εργασιμων ημερών του εξαμήνου.



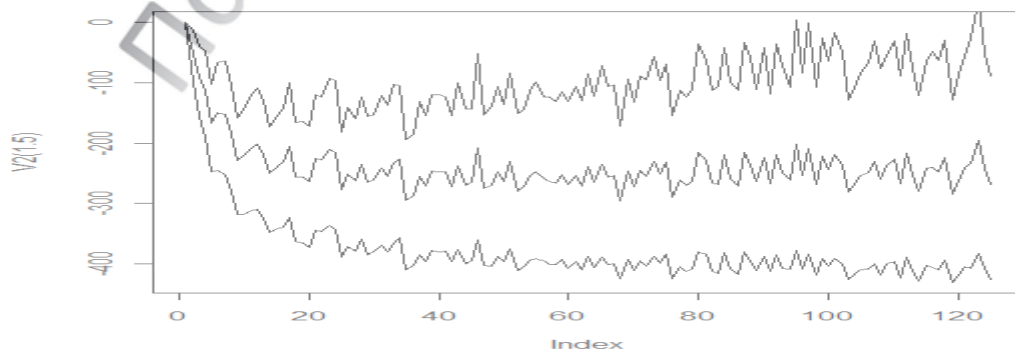
Διάγραμμα 3-1 Τιμές δειγματικού αθροίσματος του δείκτη μεγάλης κεφαλαιοποίησης για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00, 2.25$.



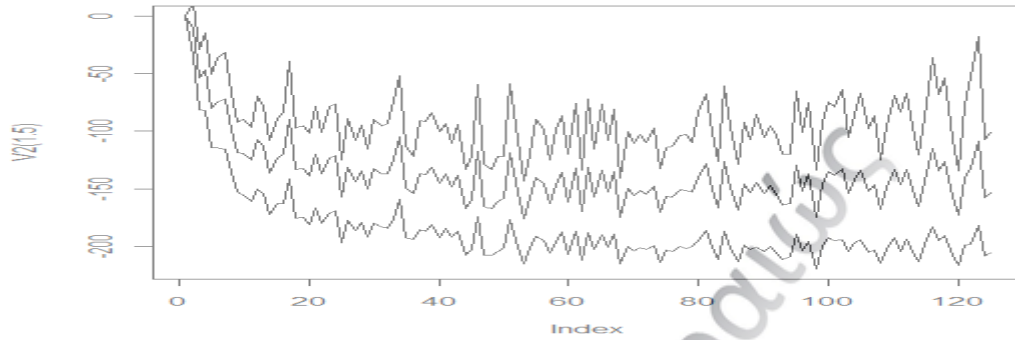
Διάγραμμα 3-2. Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Alpha Bank για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



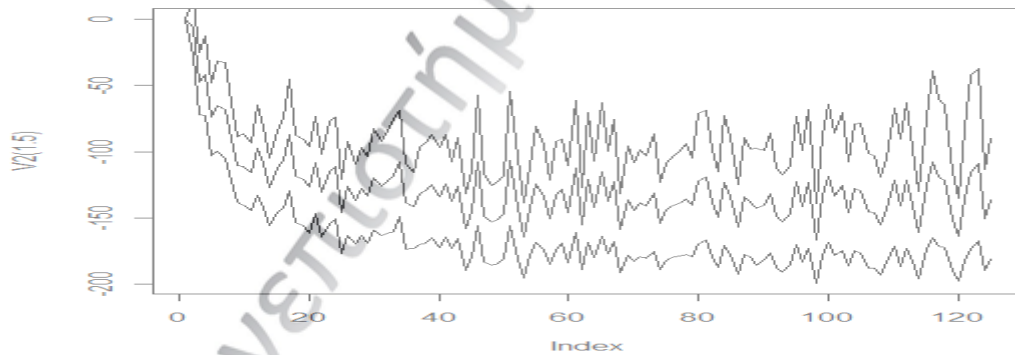
Διάγραμμα 3-3 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Βιοχάλκο για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



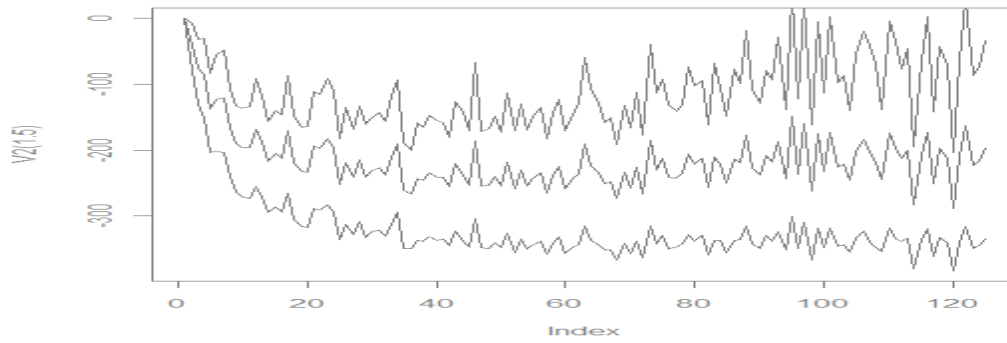
Διάγραμμα 3-4 (προηγούμενη σελίδα) Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Coca Cola 3ε για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



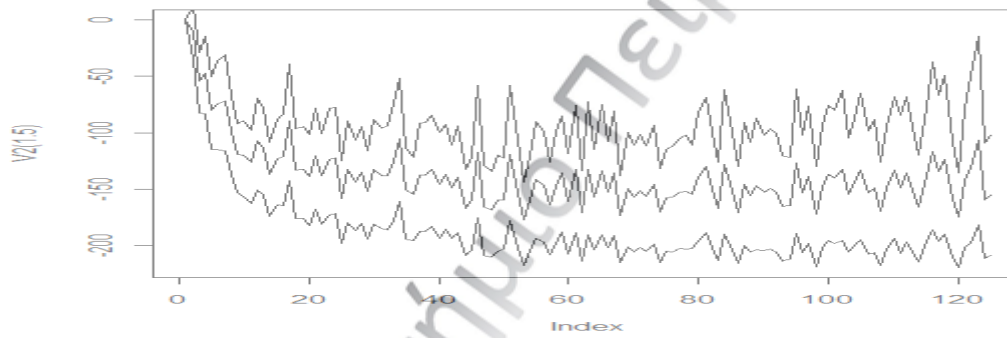
Διάγραμμα 3-5 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Τράπεζας Κύπρου για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



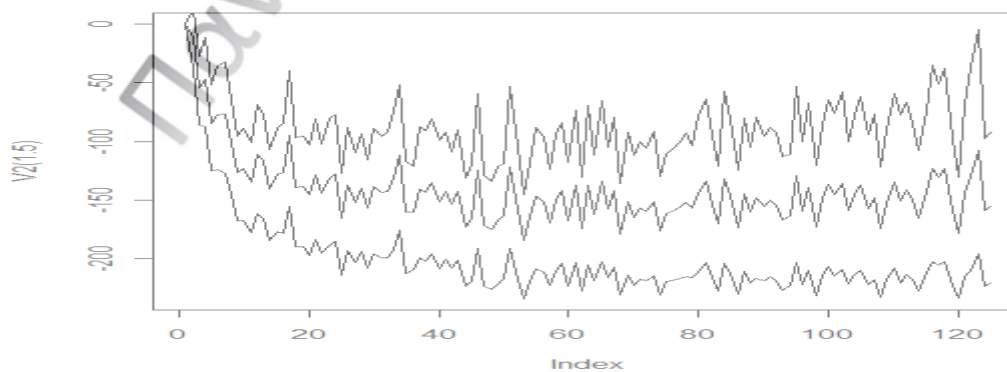
Διάγραμμα 3-6 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΔΕΗ για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



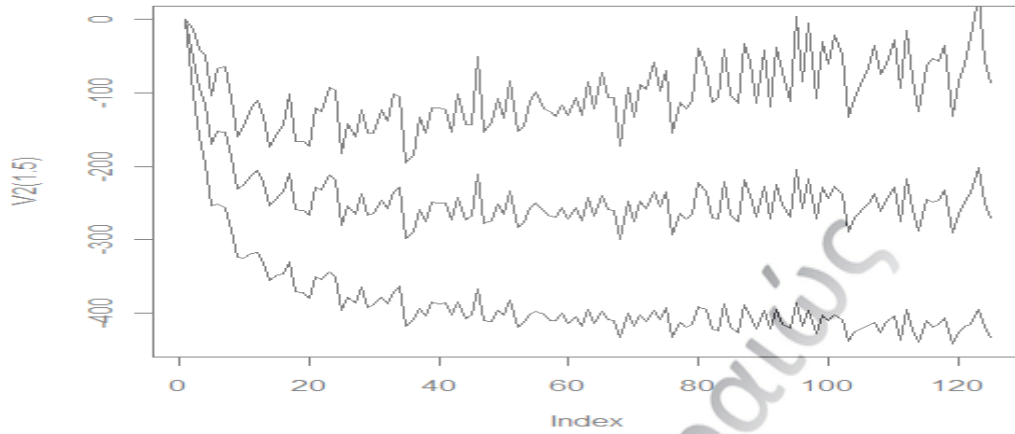
Διάγραμμα 3-7 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΕΛΛΑΚΤΟΡ για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



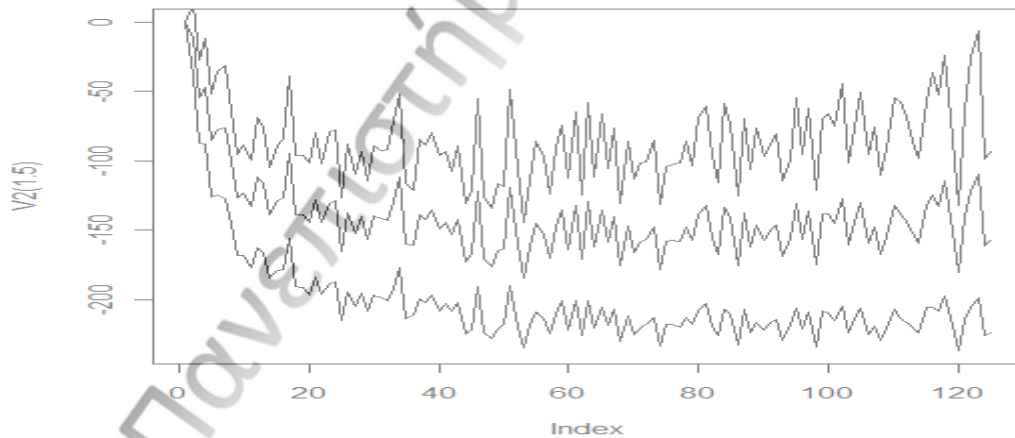
Διάγραμμα 3-8 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Ελληνικά Χρηματιστήρια για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



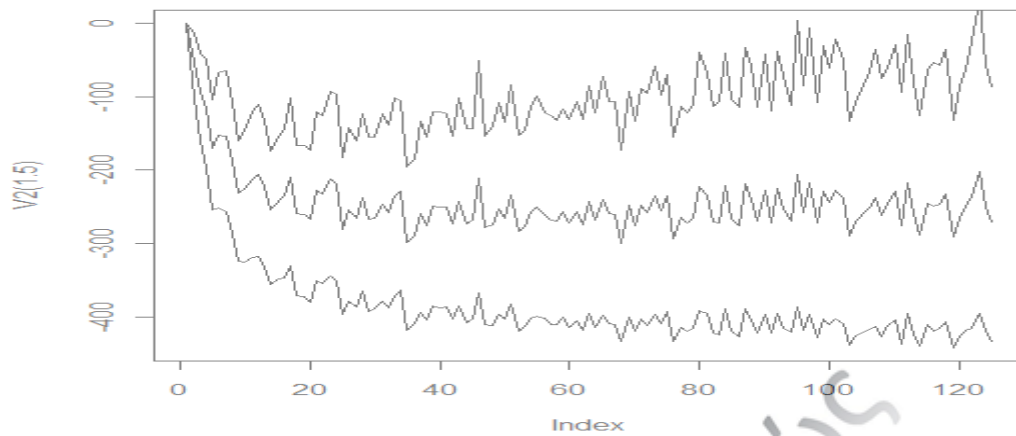
Διάγραμμα 3-9 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Ελληνικά Πετρέλαια για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



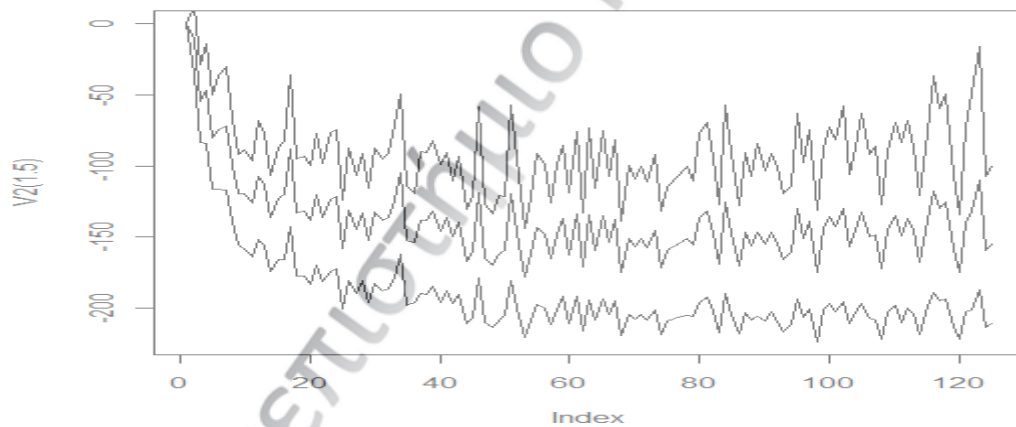
Διάγραμμα 3-10 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



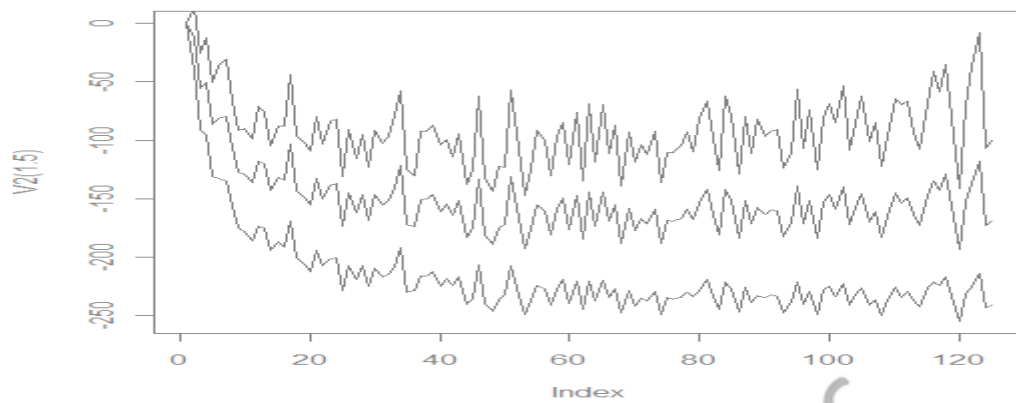
Διάγραμμα 3-11 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Follie-Follie για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



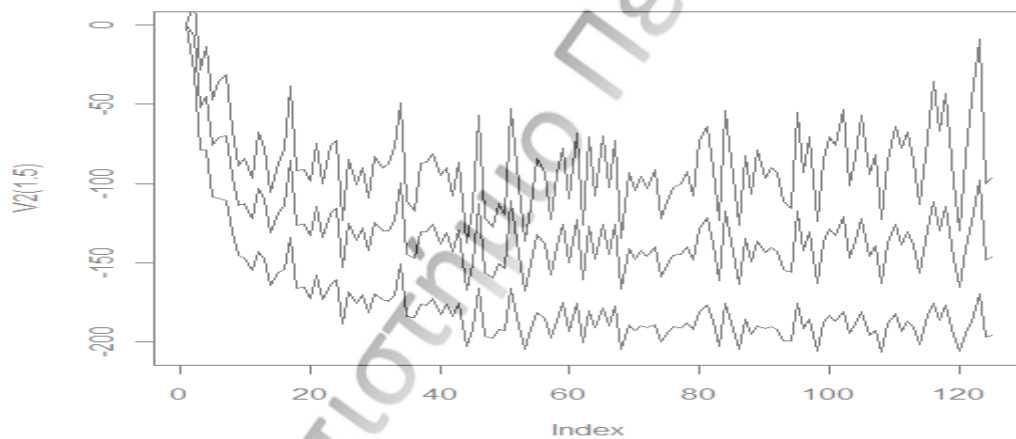
Διάγραμμα 3-12 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Frigoglass για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



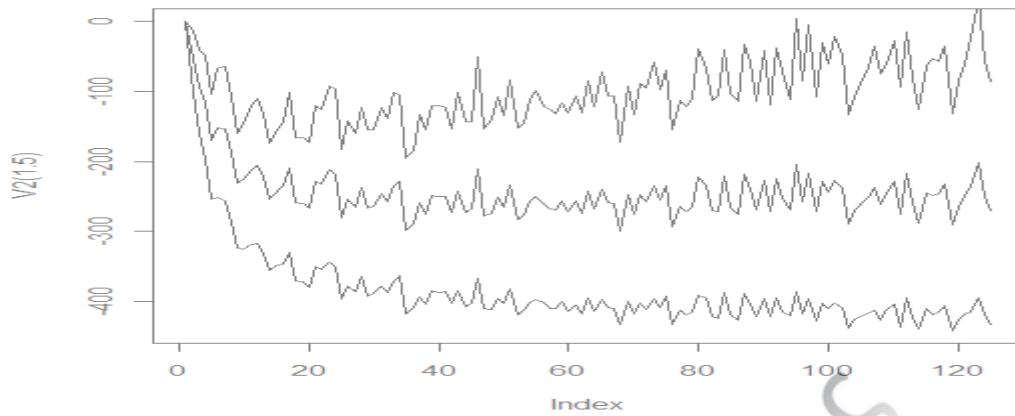
Διάγραμμα 3-13 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Intralot για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



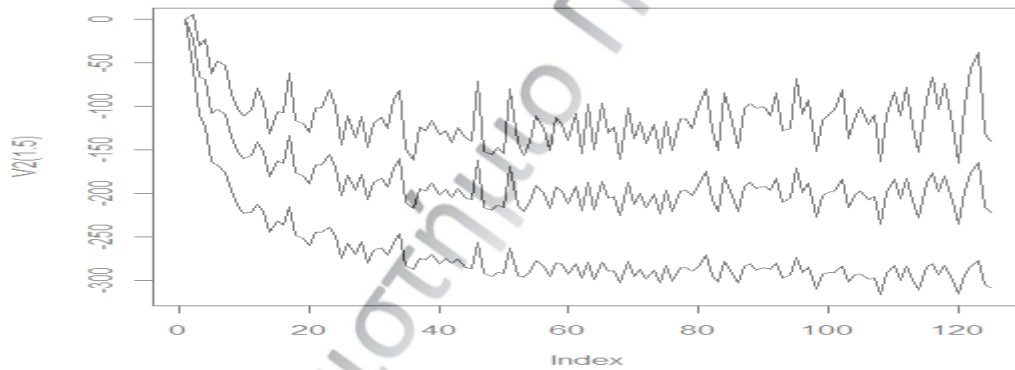
Διάγραμμα 3-14 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Jumbo για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



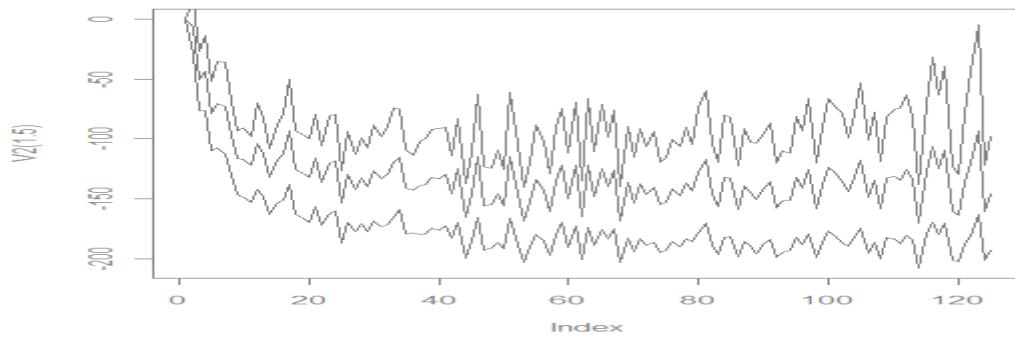
Διάγραμμα 3-15 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Marfin για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



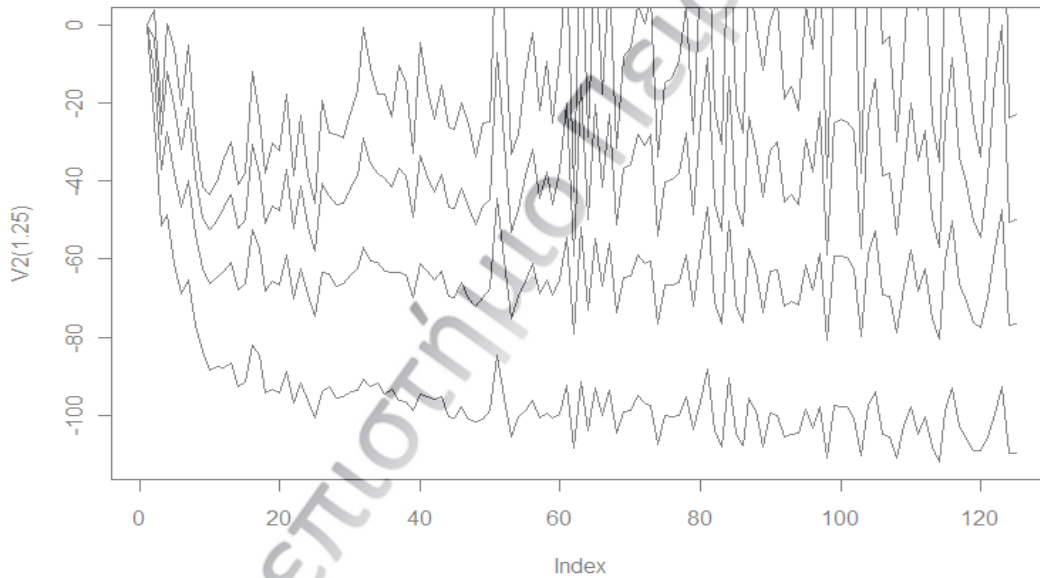
Διάγραμμα 3-16 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της ΜΕΤΚΑ για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



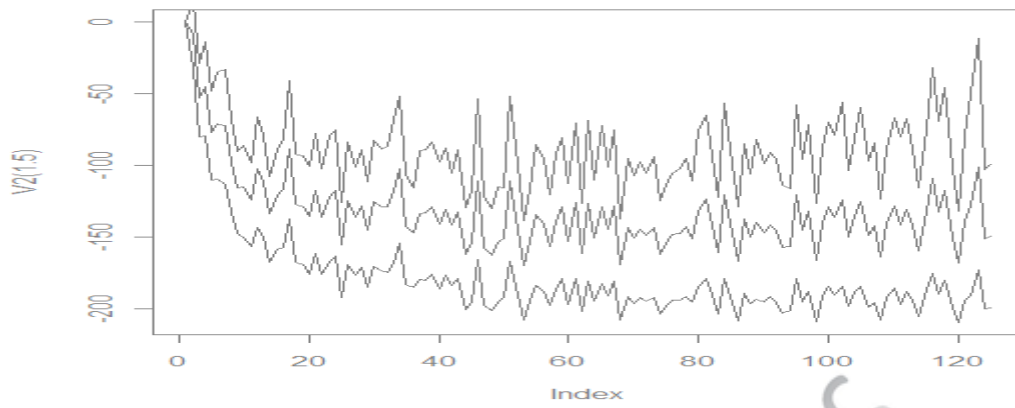
Διάγραμμα 3-17 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Μυτηλιναίος για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



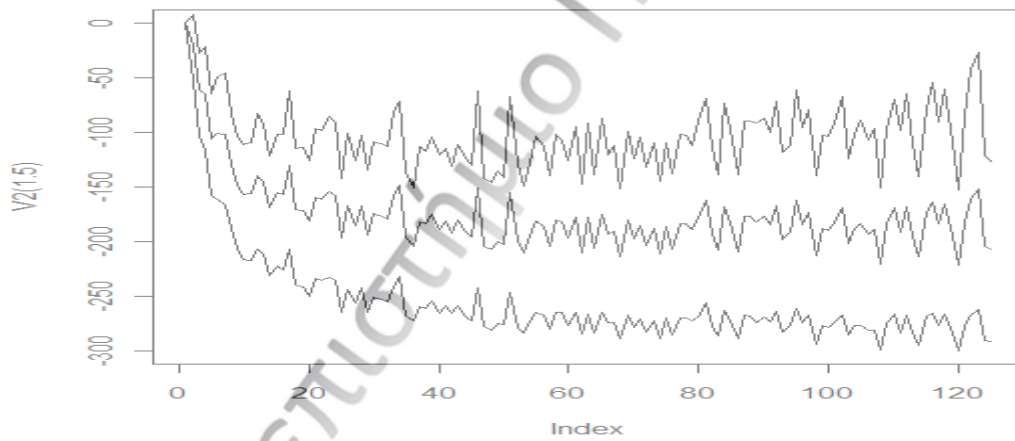
Διάγραμμα 3-18 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Motor Oil για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



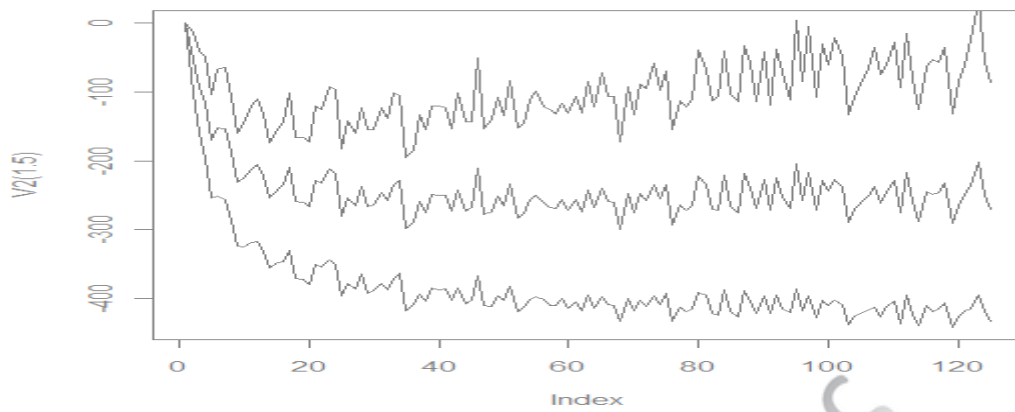
Διάγραμμα 3-19 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής του ΟΛΠ (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.25, 1.50, 1.75, 2.00$.



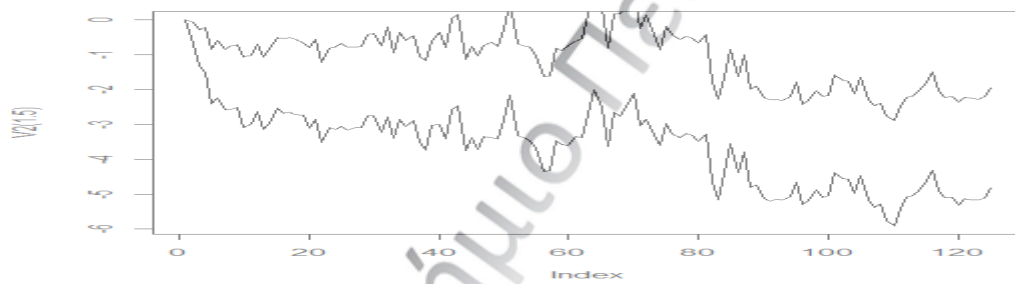
Διάγραμμα 3-20 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής του ΟΠΑΠ (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



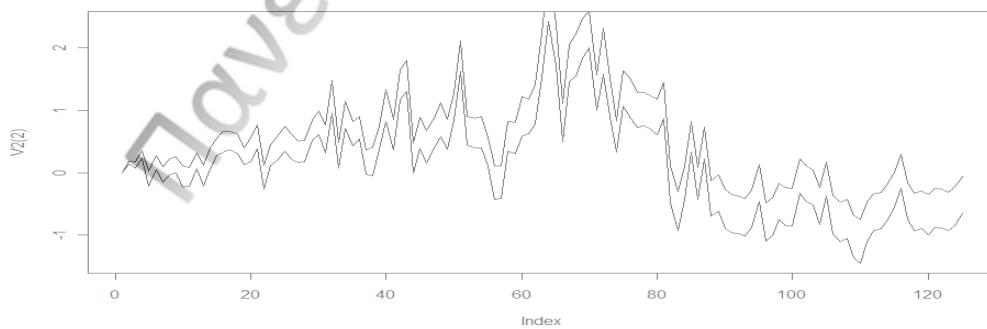
Διάγραμμα 3-21 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής του ΟΤΕ (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



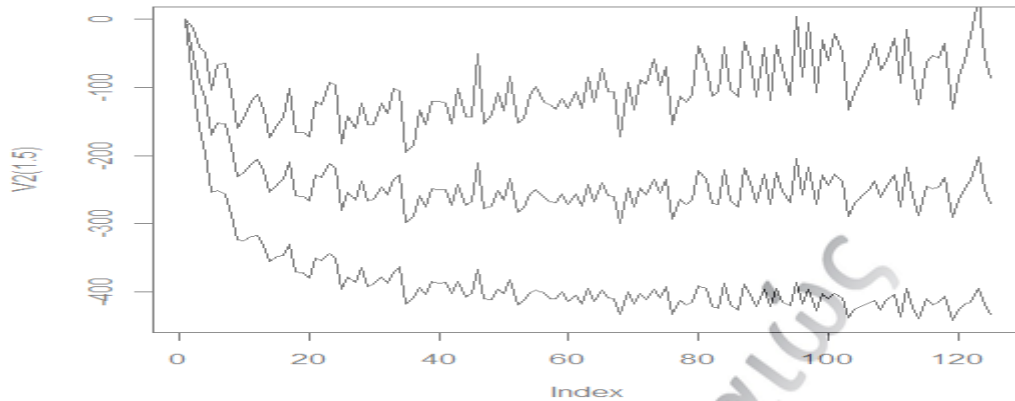
Διάγραμμα 3-22 Τιμές δειγματικού αθροίσματος της μετοχής της Τράπεζας Πειραιώς (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.



Διάγραμμα 3-23-1: Τιμές δειγματικού αθροίσματος μετοχής ΤΕΡΝΑ για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75$.



Διάγραμμα 3-23-2: Τιμές δειγματικού αθροίσματος μετοχής ΤΕΡΝΑ για (από κάτω προς τα πάνω) $q=2.00, 2.25$.



Διάγραμμα 3-24: Τιμές δειγματικού αθροίσματος μετοχής TITAN για (από κάτω προς τα πάνω) $q=1.50, 1.75, 2.00$.

Αν και τα διαγράμματα δεν αποτελούν μία απόλυτα αξιόπιστη μορφή εξαγωγής συμπερασμάτων, είναι σε θέση να δώσουν κάποιες ενδιαφέρουσες ενδείξεις. Η πρώτη ένδειξη που προκύπτει είναι ότι η συνάρτηση διαμέρισης (partition function) δείχνει να γίνεται παράλληλη με τον άξονα των X για τιμές του q μεταξύ 1.75 και 2. Οι τιμές αυτές εκφράζουν τιμές του H (εκθέτης του Hurst) ελαφρά μεγαλύτερες του 0.5 υποδηλώνοντας έτσι μία θετική συσχέτιση μεταξύ των τιμών των χρονολογικών σειρών, όπως είχε καταγραφεί και στο κεφάλαιο 1.

Ένα δεύτερο αποτέλεσμα που εμφανίζει ενδιαφέρον είναι η ύπαρξη μίας συγκεκριμένης τάσης για τη συνάρτηση διαμέρισης. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση είναι έντονα φθίνουσα για μικρές τιμές του Δt , σταθεροποιείται για μεγαλύτερες τιμές και δείχνει σε κάποιες περιπτώσεις να γίνεται αύξουσα για αρκετά μεγάλο Δt . Αυτό κατά το Mandelbrot (Mandelbrot 1997c) αποτελεί ένδειξη πολυφράκταλ διαδικασίας, η οποία εμφανίζει διαφορετικές ιδιότητες ανάλογα με τη χρονική κλίμακα.

3.3 Χρήση Ανάλυσης Παλινδρόμησης για τον εντοπισμό συσχετίσεων

Στην παρούσα ενότητα εκτιμάται η κλίση κάθε μίας εκ των καμπυλών (των οποίων τα διαγράμματα υπολογίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα) της συνάρτησης διαμέρισης με χρήση μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης. Στον ακόλουθο πίνακα εκτιμώνται τα δεδομένα ανά μετοχή και ανά τιμή της q :

A/A	Όνομασία Μετοχής	Συντόμευση ΧΑΑ	Εκτίμηση Κλίσης q=1,75	Εκτίμηση Κλίσης q=2,00
1	Alpha Bank	ΑΛΦΑ	-0.43480	0.5988
2	Βιοχάλκο	ΒΙΟΧΚ	-0.43376	0.5995
3	ΔΕΗ	ΔΕΗ	-0.37659	-0.17715
4	Coca-Cola 3 Ε	ΕΕΕΚ	-0.41198	0.6075
5	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	ΕΛΛΑΚΤΩΡ	-0.3250	0.4782
6	ΕΛΠΕ	ΕΛΠΕ	-0.35937	-0.0444
7	ΕΤΕ	ΕΤΕ	-0.43354	0.5997
8	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΕΧΑΕ	-0.39154	-0.13459
9	Intralot	ΙΝΛΟΤ	-0.39211	-0.12591
10	Τράπεζα Κύπρου	ΚΥΠΡ	-0.38928	-0.13572
11	ΜΕΤΚΑ	ΜΕΤΚ	-0.43354	0.5997
12	MARFIN INVESTMENT GROUP	ΜΙΓ	-0.35305	-0.10372
13	ΜΟΤΟΡ ΟΪΛ	ΜΟΗ	-0.33329	-0.09339
14	JUMBO	ΜΠΕΛΑ	-0.4000	0.5850
15	ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ	ΜΥΤΙΛ	-0.55365	-0.15392
16	ΟΛΠ	ΟΛΠ	0.03235	0.25627
17	ΟΠΑΠ	ΟΠΑΠ	-0.36562	-0.11661
18	ΟΤΕ	ΟΤΕ	-0.47938	-0.06983
19	Τράπεζα Πειραιώς	ΠΕΙΡ	-0.43354	0.5997
20	ΤΕΡΝΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ	ΤΕΝΕΡΓ	-0.015714	-0.010111
21	ΤΙΤΑΝ	ΤΙΤΚ	-0.43354	0.5997
22	FRIGOGLASS	ΦΡΙΓΟ	-0.43354	0.5997
23	ΚΑΕ-Follie Follie	ΦΦΓΚΡΠ	-0.33495	-0.001748
24	FTSE XA/Large Cap	FTSE XA/Large Cap	-0.58430	-0.15907

Πίνακας 3-1 Εκτίμηση κλίσης ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για $q=1.75$ και $q=2$.

Όπως αναμενόταν και από τα διαγράμματα, η κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων που προκύπτει με χρήση απλής γραμμικής παλινδρόμησης αυξάνεται καθώς αυξάνεται η q . Όμως σε αρκετές περιπτώσεις διαπιστώνεται μία αρνητική κλίση της ευθείας ακόμα για $q=2$. Αν και το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά ενδεικτικό και δεν μπορεί να αποτελέσει ισχυρή βάση τεκμηρίωσης, δείχνει ότι σε αρκετές μετοχές ο εκθέτης του Hurst που προκύπτει από τη σχέση $1/H=q$ μπορεί να λάβει τιμές μικρότερες του 0.5 υπονοώντας αρνητική συσχέτιση. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει να έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 1. Ενδιαφέρον έχει ότι αρνητική κλίση λαμβάνει και ο Γενικός Δείκτης που απαρτίζεται από τις περισσότερες από τις υπό εξέταση μετοχές.

3.4. Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύθηκαν εμπειρικά δεδομένα με στόχο την εύρεση συσχετίσεων. Για την ανάλυση έγινε χρήση μίας νέας μορφής συνάρτησης, η οποία και ονομάζεται συνάρτηση διαμέρισης.

Διαπιστώθηκε από την εκτίμηση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων ότι για συγκεκριμένες τιμές μετοχών εμφανίζεται μία ένδειξη αρνητικής συσχέτισης για μεγάλο αριθμό μετοχών. Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα διότι δείχνει να έρχεται σε αντίθεση με τη σχεδόν καθολική θετική συσχέτιση που εμφανίζουν οι χρονοσειρές των μετοχών στο Κεφάλαιο 1.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Π1: Εκτίμηση της μορφοκλασματικής διάστασης δεδομένων μετοχών του Χρηματιστηρίου Αθηνών (Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.6.1, σελ. 15)

```
library(foreign)
library(fractal)
library(fractaldim)
library(fArma)
library(MASS)
```

```
Alpha <-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Alpha.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Alpha)
summary(Alpha)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
a
b
```

```
Bioxalko<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Bioxalko.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Bioxalko)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
CocaCola3e<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/CocaCola3e.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(CocaCola3e)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Cyprus_Bank<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Cyprus_Bank.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Cyprus_Bank)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Dei<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Dei.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Dei)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Ellaktor<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Ellaktor.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Ellaktor)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Elpe<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Elpe.csv" , header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Elpe)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Ete<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Ete.csv" , header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Ete)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Eurobank<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Eurobank.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Eurobank)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Ellinika_Xrim<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes
2012/Ellinika_Xrim.csv" , header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Ellinika_Xrim)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Frigoglass<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Frigoglass.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Frigoglass)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
FTSE_Large_Cap<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes
2012/FTSE_Large_Cap.csv" , header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(FTSE_Large_Cap)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Intralot<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Intralot.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Intralot)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Jumbo<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Jumbo.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Jumbo)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Follie_Follie<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Follie_Follie.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Follie_Follie)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Marfin<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Marfin.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Marfin)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Metka<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Metka.csv" , header=TRUE
, sep=";" ,dec=",")
attach(Metka)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Mitilinaios<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Mitilinaios.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Mitilinaios)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Motor_Oil<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Motor_Oil.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Motor_Oil)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Olp<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Olp.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Olp)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Opap<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Opap.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Opap)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Ote<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Ote.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Ote)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Peiraios<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Peiraios.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Peiraios)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Terna<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Terna.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Terna)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

```
Titan<-read.csv(file="C:/Users/George/Desktop/Metoxes 2012/Titan.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Titan)
a<-fd.estimate(Prev..Close,methods = "boxcount")
b<-fd.estimate(log(Prev..Close),methods = "boxcount")
c(a,b)
```

Π2 Εκτίμηση της εκθέτη του Hurst για τιμές μετοχών του Χρηματιστηρίου (Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.6.2, σελ. 18)

```
library(foreign)
library(fractal)
library(fractaldim)
library(fArma)
library(MASS)
```

```
Alpha <-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Alpha.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Alpha)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b
```

```
Bioxalko<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Bioxalko.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Bioxalko)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b
```

```
CocaCola3e<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/CocaCola3e.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(CocaCola3e)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b
```

```

Cyprus_Bank<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Cyprus_Bank.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Cyprus_Bank)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Dei<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Dei.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Dei)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Ellaktor<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ellaktor.csv", header=TRUE , sep=";" ,
,dec=",")
attach(Ellaktor)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Elpe<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Elpe.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Elpe)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Ete<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ete.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Ete)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Ellinika_Xrim<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ellinika_Xrim.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Ellinika_Xrim)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```
detach(Ellinika_Xrim)
```

```

Frigoglass<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Frigoglass.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")
attach(Frigoglass)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

FTSE_Large_Cap<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/FTSE Large Cap.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(FTSE_Large_Cap)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Intralot<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Intralot.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Intralot)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Jumbo<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Jumbo.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Jumbo)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Follie_Follie<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Follie_Follie.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Follie_Follie)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Marfin<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Marfin.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Marfin)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```



```

Metka<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Metka.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Metka)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Mitilinaios<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Mitilinaios.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(Mitilinaios)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Motor_Oil<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Motor_Oil.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")
attach(Motor_Oil)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Olp<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Olp.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Olp)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Opap<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Opap.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Opap)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Ote<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ote.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Ote)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Peiraios<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Peiraios.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Peiraios)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```

Terna<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Terna.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Terna)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b

```

```
Titan<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Titan.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Titan)
L<-Prev..Close
V<-function(i){ c((1+i):(length(L))) }
L_1<-L[V(2)]-L[V(1)]
L_5<-L[V(6)]-L[V(1)]
a<-RoverS(L_1, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
b<-RoverS(L_5, n.block.min=8, scale.ratio=2, scale.min=20)
a
b
```

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Π3: Υπολογισμός της συνάρτησης διαμέρισης και της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τις χρονολογικές σειρές των μετοχών (Ενότητες 3.2-3.3, σελ. 42-54).

```
library(foreign)
library(fractal)
library(fractalDim)
library(fArma)
library(MASS)
```

```
Alpha<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Alpha.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec="," )
attach(Alpha)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)
```

```
Bioxalko<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Bioxalko.csv", header=TRUE , sep=";" ,
,dec="," )
attach(Bioxalko)
L<-log(Prev..Close)
```

```

N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125)))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

CocaCola3e<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/CocaCola3e.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec=",")
attach(CocaCola3e)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),

```

```
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
```

```
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
```

```
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
```

```
plot(V2(1.50),type="l")
```

```
lines(V2(1.75))
```

```
lines(V2(2.00))
```

```
lines(V2(2.25))
```

```
lines(V2(2.50))
```

```
## Regression Analysis
```

```
x<-c(1:125)
```

```
y<-V(2.50)
```

```
v<-lm(y~x)
```

```
plot(x,y)
```

```
abline(v)
```

```
summary(v)
```

```
anova(v)
```

```
Cyprus_Bank<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Cyprus_Bank.csv", header=TRUE ,
sep=";" ,dec="," )
```

```
attach(Cyprus_Bank)
```

```
L<-log(Prev..Close)
```

```
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
```

```
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
```

```
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
```

```
V<-function(q){
```

```
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
```

```
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
```

```
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
```

```
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
```

```
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
```

```
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
```

```
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
```

```
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
```

```
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
```

```
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
```

```
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
```

```
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
```

```

V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Dei<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Dei.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Dei)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)

```

```

plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Ellaktor<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ellaktor.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")
attach(Ellaktor)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Elpe<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Elpe.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Elpe)
L<-log(Prev..Close)

```



```

N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125)))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Ete<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ete.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec="," )
attach(Ete)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),

```

```

S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

Ellinika_Xrim<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ellinika_Xrim.csv", header=TRUE ,
sep=";",dec=",")
attach(Ellinika_Xrim)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))

```

```

lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

b

```
detach(Ellinika_Xrim)
```

```

Frigoglass<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Frigoglass.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")
attach(Frigoglass)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){ V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)

```

```

abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

FTSE_Large_Cap<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/FTSE Large Cap.csv",
header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(FTSE_Large_Cap)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Intralot<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Intralot.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")
attach(Intralot)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }

```

```

S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

Jumbo<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Jumbo.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Jumbo)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),

```

```

S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Follie_Follie<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Follie_Follie.csv", header=TRUE ,
sep=";",dec=",")
attach(Follie_Follie)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))

```

```
## Regression Analysis
```

```
x<-c(1:125)  
y<-V(2.50)  
v<-lm(y~x)  
plot(x,y)  
abline(v)  
summary(v)  
anova(v)
```

```
Marfin<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Marfin.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec="," )  
attach(Marfin)  
L<-log(Prev..Close)  
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }  
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }  
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }  
V<-function(q){  
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),  
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),  
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),  
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),  
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),  
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),  
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),  
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),  
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),  
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),  
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),  
,  
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),  
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}  
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }  
plot(V2(1.50),type="l")  
lines(V2(1.75))  
lines(V2(2.00))  
lines(V2(2.25))  
lines(V2(2.50))  
## Regression Analysis  
x<-c(1:125)  
y<-V(2.50)  
v<-lm(y~x)  
plot(x,y)  
abline(v)  
summary(v)  
anova(v)
```

```
Metka<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Metka.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec="," )
```

attach(Metka)

```
L<-log(Prev..Close)
```

```
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
```

```
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
```

```
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
```

```
V<-function(q){
```

```
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),  
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),  
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),  
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),  
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),  
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),  
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),  
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),  
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),  
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),  
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
```

```
,  
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),  
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125)))}
```

```
V2<-function(q){ V(q)-S(q,1) }
```

```
plot(V2(1.50),type="l")
```

```
lines(V2(1.75))
```

```
lines(V2(2.00))
```

```
lines(V2(2.25))
```

```
lines(V2(2.50))
```

```
## Regression Analysis
```

```
x<-c(1:125)
```

```
y<-V(2.50)
```

```
v<-lm(y~x)
```

```
plot(x,y)
```

```
abline(v)
```

```
summary(v)
```

```
anova(v)
```

```
Mitilinaios<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Mitilinaios.csv", header=TRUE ,
```

```
sep=";" ,dec=",")
```

```
attach(Mitilinaios)
```

```
L<-log(Prev..Close)
```

```
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
```

```
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
```

```
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
```

```
V<-function(q){
```

```
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),  
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),  
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),  
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
```



```
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
```

```
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125)))}
```

```
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
```

```
plot(V2(1.50),type="l")
```

```
lines(V2(1.75))
```

```
lines(V2(2.00))
```

```
lines(V2(2.25))
```

```
lines(V2(2.50))
```

```
## Regression Analysis
```

```
x<-c(1:125)
```

```
y<-V(2.50)
```

```
v<-lm(y~x)
```

```
plot(x,y)
```

```
abline(v)
```

```
summary(v)
```

```
anova(v)
```

```
Motor_Oil<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Motor_Oil.csv", header=TRUE , sep=";" ,
,dec=",")
```

```
attach(Motor_Oil)
```

```
L<-log(Prev..Close)
```

```
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
```

```
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
```

```
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
```

```
V<-function(q){
```

```
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
```

```
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
```

```
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
```

```
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
```

```
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
```

```
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
```

```
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
```

```
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
```

```
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
```

```
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
```

```
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
```

```
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
```

```
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125)))}
```

```
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
```

```

plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Olp<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Olp.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")
attach(Olp)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt) { seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt) { (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt) { sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q) {
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q) { V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)

```

```
summary(v)
anova(v)
```

```
Opap<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Opap.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Opap)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)
```

```
Ote<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Ote.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Ote)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
```

```

c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)

```

```

S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}

```

```

V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }

```

```

plot(V2(1.50),type="l")

```

```

lines(V2(1.75))

```

```

lines(V2(2.00))

```

```

lines(V2(2.25))

```

```

lines(V2(2.50))

```

```

## Regression Analysis

```

```

x<-c(1:125)

```

```

y<-V(2.50)

```

```

v<-lm(y~x)

```

```

plot(x,y)

```

```

abline(v)

```

```

summary(v)

```

```

anova(v)

```

```

Peiraios<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Peiraios.csv", header=TRUE , sep=";"
,dec=",")

```

```

attach(Peiraios)

```

```

L<-log(Prev..Close)

```

```

N<-function(Dt) { seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }

```

```

P<-function(q,i,Dt) { (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }

```

```

S<-function(q,Dt) { sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }

```

```

V<-function(q) {

```

```

c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),

```

```

S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),

```

```

S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),

```

```

S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),

```

```

S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),

```

```

S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),

```

```

S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),

```

```

S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),

```

```

S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),

```

```

S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),

```

```

S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

Terna<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Terna.csv", header=TRUE , sep=";" ,dec=",")
attach(Terna)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110)
,
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)

```

```

y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

```

Titan<-read.csv(file="C:/Dissertation/Data/Titan.csv", header=TRUE , sep=";", dec=",")
attach(Titan)
L<-log(Prev..Close)
N<-function(Dt){ seq(1:(length(Prev..Close)/Dt)) }
P<-function(q,i,Dt){ (abs(L[i*Dt+Dt]-L[i*Dt]))^q }
S<-function(q,Dt){ sum(P(q,N(Dt),Dt),na.rm=TRUE) }
V<-function(q){
c(S(q,2),S(q,2),S(q,3),S(q,4),S(q,5),S(q,6),S(q,7),S(q,8),S(q,9),S(q,20),
S(q,11),S(q,12),S(q,13),S(q,14),S(q,15),S(q,16),S(q,17),S(q,18),S(q,19),S(q,20),
S(q,21),S(q,22),S(q,23),S(q,24),S(q,25),S(q,26),S(q,27),S(q,28),S(q,29),S(q,30),
S(q,31),S(q,32),S(q,33),S(q,34),S(q,35),S(q,36),S(q,37),S(q,38),S(q,39),S(q,40),
S(q,41),S(q,42),S(q,43),S(q,44),S(q,45),S(q,46),S(q,47),S(q,48),S(q,49),S(q,50),
S(q,51),S(q,52),S(q,53),S(q,54),S(q,55),S(q,56),S(q,57),S(q,58),S(q,59),S(q,60),
S(q,61),S(q,62),S(q,63),S(q,64),S(q,65),S(q,66),S(q,67),S(q,68),S(q,69),S(q,70),
S(q,71),S(q,72),S(q,73),S(q,74),S(q,75),S(q,76),S(q,77),S(q,78),S(q,79),S(q,80),
S(q,81),S(q,82),S(q,83),S(q,84),S(q,85),S(q,86),S(q,87),S(q,88),S(q,89),S(q,90),
S(q,91),S(q,92),S(q,93),S(q,94),S(q,95),S(q,96),S(q,97),S(q,98),S(q,99),S(q,100),
S(q,101),S(q,102),S(q,103),S(q,104),S(q,105),S(q,106),S(q,107),S(q,108),S(q,109),S(q,110),
S(q,111),S(q,112),S(q,113),S(q,114),S(q,115),S(q,116),S(q,117),S(q,118),S(q,119),S(q,120),
S(q,121),S(q,122),S(q,123),S(q,124),S(q,125))}
V2<-function(q){V(q)-S(q,1) }
plot(V2(1.50),type="l")
lines(V2(1.75))
lines(V2(2.00))
lines(V2(2.25))
lines(V2(2.50))
## Regression Analysis
x<-c(1:125)
y<-V(2.50)
v<-lm(y~x)
plot(x,y)
abline(v)
summary(v)
anova(v)

```

Βιβλιογραφία

Ξένη

Chen Hui-Wen, Huang Shian-Chang, Huang Ming-Hsiang (2011). Multifractality Analysis for Stock Market Characteristics, *Middle Eastern Finance and Economics*, 9, 64-74.

Falconer Kenneth (2003). *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd New York.

Fisher A., Calvet L. (2002). Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence, *The Review of Economics and Statistics* VOL. LXXXIV, 3, 381-406.

Hurst H.E. (1950). Long term storage of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civil Eng.* 116,770–808.

Mandelbrot B, van Ness John (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review* Vol. 10 October 1968, 4, 422-437.

Mandelbrot B, Hudson R.L. (2004). *The (mis)behaviour of markets: A fractal view of risk, ruin, and Reward*, Profile Books, London.

Mandelbrot B. , Fisher A., Calvet L. (1997). A Multifractal model of Asset Returns, *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1164, 1-39.

Mandelbrot B. , Fisher A., Calvet L. (1997). Large Deviation Theory and the Distribution of Price Changes, *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1165, 1-30.

Mandelbrot B. , Fisher A., Calvet L. (1997). Multifractality of Deutchmark/US Dollar Exchange Rates, *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1166, 1-40.

Malhar Kale-Ferry (2011). Butar Fractal Analysis of Time Series and Distribution, *J. Math. Sci. Math. Ed.*, 5, 8–19.

Peters E. (1996). *Chaos and order in the capital markets : a new view of Cycles, Prices, and Market Volatility*, Wiley Finance Editions.

Ramirez-Alvarez Jose, Cisneros Miriam, Ibarra-Valdez Carlos, Soriano Angel (2002). Multifractal Hurst Analysis of Crude Oil Prices, *Physica A*, 313, 351-370.

Turiel A., Perez-Vicente C.J. (2003). Multifractal geometry in stock market time series, *Physica A*, 322 , 629–649.

Zhi-Qiang Jiang, Wei-Xing Zhou (2008). Multifractal analysis of Chinese stock volatilities based on partition function approach, *Physica A*, 387, 4881–4888.

Ελληνική

Αραχωβίτης Ι. (2001). Εισαγωγή στη Χαοτική Δυναμική & στα Fractals, Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Μπούντης Τ. (2004). Ο θαυμαστός κόσμος των fractal. Μία περιήγηση στη νέα επιστήμη του χάους και της πολυπλοκότητας, Leader Books.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς