ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Ε. ΤΣΙΡΑΚΗ

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Απρίλιος 2013

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την τριμελή εξεταστική επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς σύμφωνα με τον εσωτερικό κανονισμό λειτουργίας του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου. Τα μέλη της επιτροπής ήταν :

-Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (Επιβλέπων καθηγητής)
-Μαχαιράς Νικόλαος
-Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Στο Μάνο

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χατζηκωνσταντινίδη για την πολύτιμη συνεισφορά του στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής για την επίβλεψη της εργασίας.

Περίληψη

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, τα ασφάλιστρα εισπράττονται από την ασφαλιστική εταιρία με σταθερό ρυθμό, δηλαδή θεωρούνται ότι είναι γραμμικές συναρτήσεις του χρόνου. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, θεωρούμε την πιο ρεαλιστική υπόθεση όπου τα συνολικά ασφάλιστρα (όπως και οι συνολικές ζημιές) είναι στοχαστικές ανελίξεις και συγκεκριμένα ακολουθούν τη σύνθετη Poisson στοχαστική ανέλιξη. Θα εξεταστούν δύο μοντέλα κινδύνου. Στο πρώτο θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα και οι συνολικές αποζημιώσεις είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και στο δεύτερο εξετάζουμε μια συγκεκριμένη μορφή εξάρτησης μεταξύ των μεγεθών ατομικών ζημιών, του ύψους των ασφαλίστρων και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή όπου παρουσιάζονται βασικές έννοιες από τη θεωρία χρεοκοπίας, γίνεται αναφορά στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu.

Στο δεύτερο κεφάλαιο υποθέτουμε ένα μοντέλο χρεοκοπίας όπου τόσο η διαδικασία καταβολής των αποζημιώσεων, όσο και η διαδικασία είσπραξης των ασφαλίστρων ικανοποιούν σύνθετες διαδικασίες Poisson. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu του νέου μοντέλου ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, όπως και μια εξίσωση ολοκληρωτικής μορφής. Τέλος η περίπτωση όπου τα ύψη των ασφαλίστρων ακολουθούν Erlang(n,β) κατανομή και η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων είναι αυθαίρετη, μελετάται πιο διεξοδικά. Στα πλαίσια αυτής της περίπτωσης γίνεται και ο υπολογισμός κάποιων μέτρων χρεοκοπίας όπως της απόλυτης χρεοκοπίας και του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.

Στο τρίτο κεφάλαιο επεκτείνουμε το μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα υποθέτοντας την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης εξάρτησης μεταξύ του ύψους των αποζημιώσεων, του ενδιαμέσου χρόνου επέλευσης των ζημιών και του ύψους των ασφαλίστρων. Υποθέτουμε επίσης, ότι οι κατανομές του ύψους των ασφαλίστρων και των ενδιάμεσων χρόνων επέλευσης των αποζημιώσεων ελέγχονται πλήρως από το ύψος των αποζημιώσεων. Όταν τα ύψη των ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένα τότε υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace και τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu. Τέλος, όταν τα ύψη των ασφαλίστρων έχουν συγκεκριμένη μορφή μετασχηματισμού Laplace , αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να βρούμε και το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων προεξοφλημένης ποινής.

ABSTRACT

In the classical model of risk theory, insurance premiums collected by the insurance company at a fixed rate, ie assumed to be linear functions of time. In this thesis, we consider the more realistic assumption considering that the total premiums (as total losses) are stochastic processes and sequence of the complex Poisson stochastic process. We consider two risk models. At first we consider premiums and total compensation are independent of each other and in the second we consider a specific form of dependency among the individual claim sizes, the premium sizes and the interclaim times.

More specifically, the first chapter is an introduction which presents basic concepts in ruin theory, a reference to the defective renewal equation and the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu.

In the second chapter we assume a ruin model where both premiums and claims follow compound Poisson processes. We establish that the expected discounted penalty function satisfies a defective renewal equation and an integral equation. Finally, the case when premiums have Erlang(n,β) distribution and the distribution of the claims is arbitrary is investigated in more depth. Also in the context of this case, we find explicit expressions for specific risk measures, like the ultimate ruin and the surplus before ruin.

In the third chapter, we extend the model with stochastic premiums income by assuming that there exists a specific dependence structure among the claim sizes, interclaim times and premium sizes. We also assume that the distributions of the premium sizes and interclaim times are fully controlled by the claim sizes. When the individual premium sizes are exponentially distributed, the Laplace transforms and the defective renewal equations for the Gerber-Shiu discounted penalty functions are obtained. Finally, when the individual premium sizes have rational Laplace transforms, we prove that the Laplace transform for the discounted penalty functions can also be obtained.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια επισκόπηση των βασικών εννοιών της θεωρίας χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα, θα οριστούν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος καθώς και διάφορα μέτρα κινδύνου, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας, το έλλειμμα και το πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Τέλος, θα γίνει εκτενής αναφορά στη συνάρτηση προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής ή αλλιώς συνάρτηση των Gerber-Shiu, η οποία θα αποτελέσει βασικό στοιχείο μελέτης στα ακόλουθα κεφάλαια.

1.1 Η στοχαστική διαδικασία Poisson

Η στοχαστική διαδικασία Poisson αποτελεί το κατάλληλο πιθανοθεωρητικό μοντέλο για την περιγραφή γεγονότων τα οποία συμβαίνουν με κάποια τυχαιότητα στο χρόνο ή στο χώρο. Τέτοια γεγονότα μπορεί να είναι: οι αφίξεις πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης (τράπεζες, στάσεις λεωφορείων κτλ), ο αριθμός σωματιδίων που εκπέμπονται από μια ραδιενεργή πηγή, τα ατυχήματα σε ένα οδικό δίκτυο, οι απαιτήσεις για αποζημίωση σε μια ασφαλιστική εταιρία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1: *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t): t \geq 0\}$ καλείται ανέλιξη Poisson αν ισχύουν τα εξής:*

1. $N(0) = 0$
2. *Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις*
3. $P(N(t+h) = n+k \mid N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), \; \alpha\nu \;\; k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), \; \alpha\nu \;\; k = 0 \\ o(h), \; \alpha\nu \;\; k \neq 0,1 \; . \end{cases}$

■

Δηλαδή, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός σε ένα πολύ μικρό διάστημα h και επίσης η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη του διαστήματος.

Το σύμβολο $o(h)$ καλείται παράγοντας διόρθωσης, είναι δηλαδή μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα $\frac{o(h)}{h} \to 0$ καθώς $h \to 0^+$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $o(h)$ συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από το h και άρα μπορεί να θεωρηθεί κάτι το αμελητέο αν συγκριθεί με αυτό.

Δύο βασικές ιδιότητες της στοχαστικής ανέλιξης Poisson είναι οι ακόλουθες:

- Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson(λt), τότε για κάθε $t > 0$, η τ.μ. $N(t)$ έχει την κατανομή Poisson(λt), δηλαδή

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda t^{\;k}}{k!}, \;\; k = 0,1,2,...$$

- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων $W_1, W_2, W_3, \ldots$ σε μια διαδικασία Poisson(λt) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την εκθετική(λ) κατανομή.

Ας θεωρήσουμε τώρα, ως παράδειγμα αναφοράς ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων (ζημιών).Υποθέτουμε πως $T_1, T_2, T_3, \ldots$ είναι οι διαδοχικές στιγμές αφίξεων των ζημιών στο χρονικό διάστημα $(0,\infty)$ και $N(t)$ είναι ο συνολικός αριθμός των ζημιών στο διάστημα $(0,t]$, όπου $N(0)=0$. Ισχύει ότι $N(t)=\max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}$, όπου $T_0 = 0$. Για κάθε συγκεκριμένο t, η $N(t)$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}_0$, ενώ η οικογένεια $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και διακριτού χώρου καταστάσεων.

Η στοχαστική διαδικασία $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ αναφέρεται ως διαδικασία αφίξεων ενώ η $\{N(t): t \geq 0\}$ ως απαριθμήτρια διαδικασία αφίξεων. Όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων $W_n = T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η διαδικασία αφίξεων ονομάζεται *ανανεωτική διαδικασία*, διότι με κάθε άφιξη μπορεί να θεωρηθεί πως ξεκινά πάλι από την αρχή για ότι αφορά τις μελλοντικές αφίξεις.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Στη θεωρία χρεοκοπίας σημαντικό ρόλο κατέχει η έννοια της διαδικασίας πλεονάσματος. Συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη μη προβλέψιμων χαρτοφυλακίων οικονομικών επιχειρήσεων, όπου τα έσοδα ή τα έξοδα τους περιέχουν τυχαιότητα μεγέθους ή ρυθμού εμφάνισης.

Για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας πλεονάσματος, θα θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Όπως είναι γνωστό, κάθε ασφαλιστική εταιρία ,συνάπτει συμβόλαια με τους ασφαλισμένους της για την κάλυψη κινδύνων έναντι προκαθορισμένων ασφαλίστρων. Ανά τακτά χρονικά διαστήματα δέχεται πλήθος απαιτήσεων για αποζημιώσεις ζημιών του χαρτοφυλακίου της, μικρής ή μεγάλης διάρκειας. Σκοπός της λοιπόν είναι να αντιμετωπίσει τυχόν απρόσμενες και πολλές φορές δυσμενείς καταστάσεις που μπορεί να θέσουν σε κίνδυνο την εύρυθμη λειτουργία όπως επίσης και την ύπαρξή της (χρεοκοπία). Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να κατέχει πρόσθετα κεφάλαια-αποθεματικά *u (initial reserve)* με τα οποία προσδοκά πως θα καλύψει ζημιές στο χαρτοφυλάκιο της.

Ας μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας στο διάστημα $(0,t]$, όπου ως σημείο αναφοράς θεωρούμε τη σύναψη του πρώτου ασφαλιστήριου συμβολαίου. Τα έσοδα από τα ασφάλιστρα που πληρώνουν οι ασφαλισμένοι και εισπράττονται από την ασφαλιστική εταιρία είναι συνολικά $P(t)$ στο χρονικό διάστημα $(0,t]$, ενώ τα έξοδα που προκύπτουν στο ίδιο παραπάνω διάστημα είναι $S(t)$.

Οπότε, η αξία του χαρτοφυλακίου της – πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t είναι:

$$U(t) = u + P(t) - S(t), \; t \geq 0 \; .$$

Με τον όρο λοιπόν *πλεόνασμα ή αξία*, εννοούμε τη διαφορά του παθητικού από το ενεργητικό μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Στην ουσία, το πλεόνασμα αποτελεί ένα «*περιθώριο ασφαλείας*», δηλαδή το κεφάλαιο για την αντιμετώπιση τυχόν αποκλίσεων στις ασφαλιστικές υποχρεώσεις και στις αξίες του ενεργητικού της εταιρίας. Αν θεωρήσουμε $U(t)$ την τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t, τότε για κάθε $t \geq 0$ η $U(t)$ θα είναι μια τ.μ, άρα το πλεόνασμα δεν είναι τίποτα άλλο από μια στοχαστική διαδικασία, μια ανέλιξη. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι και οι ποσότητες $P(t)$ και $S(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές για συγκεκριμένο t, ενώ για κάθε $t \geq 0$ αποτελούν τις στοχαστικές διαδικασίες ασφαλίστρων και αποζημιώσεων αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από τ.μ $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ που αντιστοιχούν στα ύψη των εξόδων που προκύπτουν στο χρονικό διάστημα $(0,t]$ και μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ που εκφράζει το πλήθος των ζημιογόνων γεγονότων στο ίδιο διάστημα και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. Y_i, $\forall i$, μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων της ασφαλιστικής εταιρίας σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$S(t) = \begin{cases} 0 \ \text{,αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ \text{,αν } N(t) \geq 1 \end{cases}$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από τ.μ $P_1, P_2, P_3, ...$ που αντιστοιχούν στα ύψη των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $(0,t]$ και μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{M(t) : t \geq 0\}$ που εκφράζει το πλήθος των ασφαλίστρων στο ίδιο διάστημα και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. P_i, $\forall i$, μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εσόδων της ασφαλιστικής εταιρίας σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$P(t) = \begin{cases} 0 \ \text{,αν } M(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{M(t)} P_i \ \text{,αν } M(t) \geq 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, μοντελοποιώντας τη διαδικασία πλεονάσματος έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2: *Η διαδικασία πλεονάσματος είναι η στοχαστική ανέλιξη*

$U(t) = u + P(t) - S(t), \quad \forall t \geq 0$, *όπου*

$u = U(0)$*: το αρχικό αποθεματικό που διαθέτει η ασφαλιστική εταιρία,*

$P(t)$*:τα συνολικά ασφάλιστρα (έσοδα) που έχει λάβει η εταιρία από τους ασφαλισμένους της μέχρι τη χρονική στιγμή* t *και*

$S(t)$*:οι συνολικές απαιτήσεις για αποζημίωση που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία (έξοδα) μέχρι τη χρονική στιγμή* t. ▪

1.3 Μέτρα χρεοκοπίας

Όπως είναι γνωστό, η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας $U(t)$ να γίνει για κάποια στιγμή αρνητικό.

Παρακάτω παραθέτουμε τον καθαρά συμβολικό (μη υπολογιστικό) ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας οποτεδήποτε (με άπειρο χρονικό ορίζοντα):

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3: *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u *ορίζεται από την ακόλουθη σχέση :*

$$\psi(u) = P(U(t) < 0 \ \text{για κάποιο } t \geq 0 \,|\, U(0) = u).$$ ▪

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4: *Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u *ορίζεται από την ακόλουθη σχέση :*

$$\delta(u) = P(U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 \,|\, U(0) = u).$$ ▪

Αξίζει να τονιστεί πως πρόκειται για τεχνική χρεοκοπία που δεν έχει σχέση με οποιοδήποτε νομικό ή ακόμα και οικονομικό ορισμό χρεοκοπίας. Στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι ο μοναδικός πόρος της ασφαλιστικής εταιρίας. Αντίθετα η καταβολή μιας αποζημίωσης δεν είναι ένα στιγμιαίο γεγονός. Απαιτεί κάποιο χρονικό διάστημα που συνεπάγεται εισροή ασφαλίστρου πέρα από το εισπραγμένο μέχρι στιγμή T. Η επιχείρηση μπορεί να συνάψει δάνειο ή να αυξήσει το μετοχικό της κεφάλαιο κ.ο.κ. Έτσι, η μαθηματική χρεοκοπία που ορίζεται εδώ δεν ταυτίζεται αναγκαία με την πραγματική χρεοκοπία και είναι απλά ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάπτυξη πρόσθετης χρήσιμης θεωρίας σχετικά με διαδικασίες συνολικών αποζημιώσεων. Πρέπει επίσης να επισημανθεί πως η κλασική θεωρία κινδύνων περιορίζεται στη μελέτη της χρεοκοπίας εξαιτίας των αποζημιώσεων, αγνοώντας άλλα δυνατά αίτια χρεοκοπίας.

Μια τυχαία μεταβλητή που είναι σχετική με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή η χρονική στιγμή την οποία για πρώτη φορά το αποθεματικό λαμβάνει αρνητική τιμή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5: *Η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται παρακάτω ως*

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0 \,|\, U(0) = u\} \\ \infty, \text{ αν } U(t) > 0 \ \forall t > 0 \end{cases}$$

καλείται χρόνος χρεοκοπίας. ▪

Παρατηρούμε ότι

$$P(T = \infty) = P(U(t) > 0 \ \forall t > 0) = 1 - \psi(u) = \delta(u)$$

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι πρόκειται για μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, διότι:

- P(να επέλθει χρεοκοπία) = $P(T < \infty) < 1$
- P(να μην επέλθει χρεοκοπία) = $P(T = \infty) > 0$

Μια άλλη τ.μ που ενδιαφέρει την ασφαλιστική εταιρία σε περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6: *Η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή* $t = T$ *ονομάζεται έλλειμμα (deficit) τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με* $|U(T)|$.

$$|U(T)| = -U(T).$$ ▪

Συνήθως εξετάζουμε την τυχαία μεταβλητή του ελλείμματος κατά απόλυτη τιμή, κάτι το οποίο εξηγείται εξαιτίας της αρνητικής τιμής του.

Μία άλλη τυχαία μεταβλητή που είναι συναφής με την στιγμή της χρεοκοπίας είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7: *Η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιγμή* $t = T$ *ονομάζεται πλεόνασμα (surplus) πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με* $U(T-)$.

$$U(T-) \ = \lim_{t \to T-} U(t).$$ ▪

1.4 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Στη θεωρία χρεοκοπίας, οι ανανεωτικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται ευρέως για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος. Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις και τη λύση τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 (ανανεωτικής εξίσωσης): *Μια εξίσωση που έχει τη μορφή*

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + g(u), \quad u \geq 0$$

ονομάζεται ανανεωτική εξίσωση, όπου
φ *: μια άγνωστη συνάρτηση ,*
G *: μια συνάρτηση κατανομής με* $G(0) = 0$ *και*
g *: μια συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη και συνεχής για u ≥ 0.* ▪

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 (ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης): *Μια εξίσωση που έχει τη μορφή*

$$\varphi(u) = \lambda \int_0^u \varphi(u-x)g(x)dx + g(u), \quad u \geq 0$$

όπου λ *είναι μια σταθερά η οποία ανήκει στο (0,1),* $g(x) = G'(x)$, *ονομάζεται ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).* ▪

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις :

- Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (defective renewal equations) όταν $0 < \lambda < 1$.
- Κανονικές ή μη ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (non defective renewal equations) όταν $\lambda = 1$.

Η λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο, όπως αποδείχθηκε από τους Lin και Willmot το 1999.

1.4.1 Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta} H(u), \quad u \geq 0 \tag{1.1}$$

όπου $\beta \geq 0$, $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής με $G(0) = 0$ και $H(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση για $u \geq 0$.
Ορίζουμε επίσης, τη $\bar{K}(u)$, όπου $\bar{K}(u) = 1 - K(u)$, ως δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής όπως φαίνεται ακόλουθα :

$$\overline{K}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n}\overline{G}^{*n}(u),\ \ u\geq 0 \quad ,$$

όπου $\overline{G}^{*n}(u)$ είναι η ουρά της n-οστής συνέλιξης του $G(u)$.

Με την εισαγωγή της $\bar{K}(u)$, η λύση της (1.1) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της $\bar{K}(u)$.

Για να προχωρήσουμε λοιπόν στη λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα, θα ορίσουμε την έννοια του μετασχηματισμού Laplace.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10: *Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f ορίζεται ως η συνάρτηση $\hat{f}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx, s>0$.* ▪

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1: *Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.1) μπορεί να εκφραστεί ως εξής :*

$$\varphi(u)=\frac{1}{\beta}\int_0^{u}H(u-x)dK(x)+\frac{1}{1+\beta}\mathrm{H}(u)\quad,\ \ u\geq 0 \tag{1.2}$$

ή

$$\varphi(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^{u}\bar{K}(u-x)dH(x)-\frac{H(0)}{\beta}\bar{K}(u)+\frac{1}{\beta}H(u)\ ,\ \ u\geq 0. \tag{1.3}$$

Στην περίπτωση που η $H(u)$ είναι διαφορίσιμη, η $\varphi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση :

$$\varphi(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^{u}\bar{K}(u-x)H'(x)dx-\frac{H(0)}{\beta}\bar{K}(u)+\frac{1}{\beta}H(u),\ \ u\geq 0. \tag{1.4}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\hat{g}(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}dG(u)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $g(x)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $k(x)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\hat{k}(s)=K(0)+\int_0^{\infty}e^{-su}dK(u)=1-\frac{1}{1+\beta}+\int_0^{\infty}e^{-su}dK(u)=$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{1+\beta}}{1-\dfrac{1}{1+\beta}\hat{g}(s)}=\frac{\beta}{1+\beta-\hat{g}(s)}. \tag{1.5}$$

Επίσης, έστω $\hat{\varphi}(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}\varphi(u)du$ και $\hat{H}(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}H(u)du$.

Τότε από την (1.1) με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace, έχουμε ότι :

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{1}{1+\beta}\hat{\varphi}(s)\hat{g}(s)+\frac{1}{1+\beta}\hat{H}(s)\Leftrightarrow(1+\beta)\hat{\varphi}(s)=\hat{\varphi}(s)\hat{g}(s)+\hat{H}(s)\Leftrightarrow$$

$$(1+\beta-\hat{g}(s))\hat{\varphi}(s)=\hat{H}(s)\Leftrightarrow\hat{\varphi}(s)=\frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)}\overset{(1.5)}{=}\frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\hat{k}(s)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\varphi}(s) = \frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\left(\frac{\beta}{1+\beta} + \int_0^\infty e^{-su} dK(u)\right)$$

Με τη βοήθεια αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ,έχουμε ότι :

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}\mathrm{H}(u)\ ,\ \ u \geq 0 .$$

Οπότε, αποδείχθηκε η σχέση (1.2) του θεωρήματος.
Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\int_0^u H(u-x)dK(x) = -\int_0^u H(u-x)d\bar{K}(x) = -H(u-x)\bar{K}(x)\,|_0^u + \int_0^u \bar{K}(x)dH(u-x) =$$

$$= -H(0)\bar{K}(u) + H(u)\bar{K}(0) - \int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x) .$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.2) έχουμε:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\left(-H(0)\bar{K}(u) + H(u)\bar{K}(0) - \int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x)\right) + \frac{1}{1+\beta}\mathrm{H}(u) .$$

Σημειώνοντας ότι $\bar{K}(0) = \dfrac{1}{1+\beta}$, έπονται οι σχέσεις (1.3) και (1.4) . ▪

Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε τη λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης ως προς $\bar{K}(u)$ ώστε να εκμεταλλευτούμε τις καλές ιδιότητες της $\bar{K}(u)$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\int_0^\infty e^{-su}\bar{K}(u)du = \frac{1}{s}\left[1 - \int_0^\infty e^{-su}dK(u)\right]$,οπότε συνδυάζοντας με τη σχέση (1.5) προκύπτει ότι :

$$\int_0^\infty e^{-su}\bar{K}(u)du = \frac{1-\hat{g}(s)}{s(1+\beta-\hat{g}(s))} .$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$\int_0^\infty e^{-su}\bar{K}(u)du = \frac{1}{1+\beta}\hat{g}(s)\int_0^\infty e^{-su}\bar{K}(u)du + \frac{1}{1+\beta}\frac{1-\hat{g}(s)}{s} ,$$

η οποία ανάγεται στην

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \bar{K}(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta}\bar{G}(u),\ \ u \geq 0\ .$$

1.5 Η συνάρτηση των Gerber – Shiu

Το 1998, οι Gerber-Shiu στο άρθρο τους “On the time value of ruin” εισήγαγαν μια συνάρτηση που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία αποτέλεσε τομή στη μελέτη της θεωρίας χρεοκοπίας και θα δώσει πολλές ελπίδες για την εξέλιξη και τη βελτίωσή της. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από πολλούς ερευνητές και θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στον αναλογισμό.

Ας θεωρήσουμε για δοθέν $u \geq 0$, την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας $f(x,y,t\,|\,u)$ των τ.μ. του ελλείμματος, του πλεονάσματος και του χρόνου χρεοκοπίας. Τότε,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y,t\,|\,u)dxdydt = P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u)\,.$$

Η παραπάνω σ.π.π. καλείται ελαττωματική αφού $\psi(u)<1$, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρίας στη μονάδα του χρόνου κατά μέσο όρο είναι μεγαλύτερα από τα έξοδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11: *Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber-Shiu , ορίζεται ως εξής:*

$$\varphi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta t}w(U(T-),|U(T)|)I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]\,, \qquad (1.6)$$

όπου $w(x,y)$ *είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση των* $x>0$, $y>0$ *η οποία καλείται συνάρτηση ποινής ,*

δ *η ένταση ανατοκισμού και*

$I(.)$ *η δείκτρια συνάρτηση*

$$I(A)=\begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει το ενδεχόμενο } A \\ 0, & \text{διαφορετικά .} \end{cases}$$ ▪

Προφανώς, ισχύει ότι :

$$\varphi_\delta(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)f(x,y,t\,|\,u)dxdydt\,.$$

1.5.1 Ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Ορίζοντας, λοιπόν, κάθε φορά διαφορετικές τιμές για την ένταση ανατοκισμού δ καθώς και για την συνάρτηση ποινής $w(x,y)$, παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να λάβει διαφορετικές μορφές. Μερικά παραδείγματα που το αποδεικνύουν αυτό, είναι τα ακόλουθα :

- Για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας:
  $$\varphi_0(u)=P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u)\,.$$
- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=1$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας:
  $$\varphi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]=\psi_\delta(u)\,.$$
- Για $\delta>0$ και $w(x_1,x_2)=I(X_1\leq x)I(X_2\leq y)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$ και του ελλείμματος $|U(T)|$τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται $F_\delta(x,y\,|\,u)$:
  $$\varphi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I(U(T-)\leq x)I(|U(T)|\leq y)I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]=$$
  $$=F_\delta(x,y\,|\,u)\,.$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_1 \le x)I(X_2 \le y)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$ και του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται $F(x, y \mid u)$:

$$\begin{aligned}\varphi_0(u) &= E(I(U(T-) \le x)I(|U(T)| \le y)I(T < \infty) \mid U(0) = u) = \\ &= P(U(T-) \le x), |U(T)| \le y, T < \infty \mid U(0) = u) = \\ &= F(x, y \mid u).\end{aligned}$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_1 = x)I(X_2 = y)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται $f_\delta(x, y \mid u)$:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x)I(|U(T)| = y)I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \\ &= f_\delta(x, y \mid u).\end{aligned}$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_1 \le x)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος $U(T-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) \le x)I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \\ &= F_\delta(x \mid u).\end{aligned}$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_2 \le y)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(|U(T)| \le y)I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \\ &= F_\delta(y \mid u).\end{aligned}$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_1 = x)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας του πλεονάσματος $U(T-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x)I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \\ &= f_\delta(x \mid u).\end{aligned}$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(X_2 = y)$ στη σχέση (1.6), λαμβάνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y)I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \\ &= f_\delta(y \mid u).\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα και ανεξαρτησία μεταξύ του ύψους των αποζημιώσεων και του ύψους των ασφαλίστρων

2.1 Εισαγωγή

Στο κλασικό μοντέλο, το οποίο είναι γνωστό ως Cramer-Lundberg μοντέλο, η διαδικασία των αποζημιώσεων περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson και τα ασφάλιστρα εισπράττονται από την ασφαλιστική εταιρία με σταθερό ρυθμό κατά τη διάρκεια του χρόνου, κάτι το οποίο σημαίνει ότι το ποσό των ασφαλίστρων που θα εισπραχθούν στο μέλλον είναι γνωστό.

Στην εργασία αυτή, θα γενικεύσουμε το κλασικό μοντέλο και θα υποθέσουμε ότι και τα ασφάλιστρα περιγράφονται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Η ιδέα αυτή για πρώτη φορά είχε προταθεί σε μια εργασία του Boucherie κ.α.(6). Ακολούθως, έχουν ασχοληθεί με το γενικευμένο μοντέλο κι άλλοι, όπως οι Boikov(5), Temnov(14) και Melnikov(12). Έτσι, εν αντιθέσει με το κλασικό μοντέλο, όπου μόνο η διαδικασία των αποζημιώσεων είναι τυχαία, γίνονται επιπλέον οι υποθέσεις ότι και η διαδικασία των ασφαλίστρων περιγράφεται με τυχαίο τρόπο αλλά και πως υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των συνολικών αποζημιώσεων και των ασφαλίστρων. Μελετώντας λοιπόν, το νέο μοντέλο, παρατηρούμε ότι κατέχει σημαντική θέση στη θεωρία κινδύνου κυρίως για δυο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι λόγω των υποθέσεων, το μοντέλο απλοποιείται αρκετά με αποτέλεσμα να μπορούν να υπολογιστούν διάφορα μέτρα κινδύνου πιο εύκολα. Ενώ ο δεύτερος είναι η δυνατότητα επέκτασης της έρευνας σε μοντέλα τα οποία είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα. Μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό ότι σε χώρες αναπτυσσόμενες όπου ο αριθμός των ασφαλισμένων είναι χαμηλός, όπως επίσης και σε μικρές ασφαλιστικές εταιρίες όπου το ύψος των ασφαλίστρων παρουσιάζει μεγαλύτερη πτητικότητα απ’ότι στην περίπτωση των μεγάλων αντίστοιχα εταιριών, το μοντέλο παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα- προβλέψεις.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα δοθεί μια εκτενής μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu για το γενικευμένο μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα , θα περιγραφεί αναλυτικά η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τις υποθέσεις του νέου μοντέλου και θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ολοκληρωτική εξίσωση , η λύση της οποίας γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, παρουσιάζοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση στις ειδικές περιπτώσεις όπου το ύψος των ασφαλίστρων είτε ακολουθεί εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\beta)$, είτε κατανομή $\mathrm{Erlang}(n,\beta)$.

2.2 Περιγραφή μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα

Έστω $S(t)$ η σύνθετη διαδικασία Poisson που μοντελοποιεί τη διαδικασία των αποζημιώσεων και έστω $N(t)$ η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των αποζημιώσεων (ζημιών) που επέρχονται μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt . Υποθέτουμε επίσης ότι τη χρονική στιγμή

$t=0$ το πλήθος των αποζημιώσεων προς απαίτηση είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει ότι $N(0)=0$.

Οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με κατανομή Y_1 στο $(0,\infty)$ και συνάρτηση κατανομής $F(y),\ y>0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα ύψη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα από τον αριθμό των αποζημιώσεων.

Ομοίως, έστω $P(t)$ η σύνθετη διαδικασία Poisson που μοντελοποιεί τη διαδικασία είσπραξης των ασφαλίστρων, θεωρούμε πως η $M(t)$ παριστάνει τον αριθμό των ασφαλίστρων που εισπράττονται μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο μt. Οι τυχαίες μεταβλητές $P_1, P_2, P_3, \ldots$ εκφράζουν τα μεγέθη των ασφαλίστρων που καταβάλλονται , είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με κατανομή P_1 στο $(0,\infty)$ και συνάρτηση κατανομής $G(x),\ x>0$. Υποθέτουμε επίσης ότι τα μεγέθη των ασφαλίστρων είναι ανεξάρτητα από το πλήθος των ασφαλίστρων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1: *Με τις παραπάνω υποθέσεις, η διαδικασία πλεονάσματος μοντελοποιείται ως εξής:*

$$U(t)=u+\sum_{i=1}^{M(t)} P_i-\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ \ t\geq 0. \qquad (2.1)$$

■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1: Αν $M(t)=0$ ή $N(t)=0$, τότε στο χρονικό διάστημα (0,t] δεν υπήρξε καμία είσπραξη ασφαλίστρου ή απαίτηση για αποζημίωση, δηλαδή $\sum_{i=1}^{M(t)} P_i=0$ ή $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i=0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2: Αν θεωρήσουμε τώρα πως χρεοκοπία συμβαίνει με πιθανότητα 1 όταν το πλεόνασμα για πρώτη φορά γίνει αρνητικό. Για να μην προκύψει κάτι τέτοιο αρκεί να θεωρήσουμε πως τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρίας στη μονάδα του χρόνου κατά μέσο όρο είναι μεγαλύτερα από τα έξοδα.

Δηλαδή, θέλουμε

$$E(P(t))>E(S(t))\Rightarrow E(P_1)E(M(t))>E(Y_1)E(N(t))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu t E(P_1)>\lambda t E(Y_1)\Rightarrow \mu E(P_1)>\lambda E(Y_1),\ \text{αφού } t>0. \qquad (2.2)$$

Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος της σχέσης αυτής έχουμε το μέσο ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων στη μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο επί το μέσο ασφάλιστρο. Δηλαδή, στην ουσία το αριστερό μέλος δηλώνει τη μέση τιμή των εσόδων για την ασφαλιστική εταιρία στη μονάδα του χρόνου. Ομοίως, στο δεξιό μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο επί τη μέση αποζημίωση. Οπότε, το δεξιό μέλος δηλώνει τη μέση τιμή των εξόδων για την ασφαλιστική εταιρία στη μονάδα του χρόνου.

Θεωρώντας ως $\theta>0$, το περιθώριο ασφαλείας έχουμε ότι:

$$\mu \mathrm{E}(P)=(1+\theta)\lambda \mathrm{E}(Y).$$

Διαισθητικά, το περιθώριο ασφαλείας μπορεί να είναι το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της ασφαλιστικής εταιρίας , κάλυψης κάποιων λειτουργικών εξόδων, φόρων

και προμηθειών. Στην ουσία, φανερώνει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο , γι΄αυτό ισχύει ότι $0 < \theta < 1$.
Εκτός από την υπόθεση ότι $\theta > 0$, απαιτούμε και $u > 0$,συνθήκη που άλλωστε επιβάλλεται και νομοθετικά, όπως παραδείγματος χάριν το ελάχιστο μετοχικό κεφάλαιο, το περιθώριο φερεγγυότητας κ.λ.π.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3: Θα ορίσουμε με διαφορετικό τρόπο τη διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$. Ας θεωρήσουμε $J(t) = M(t) + N(t)$, την απαριθμήτρια συνάρτηση των αποζημιώσεων και των εισπράξεων ασφαλίστρων μέχρι τη χρονική στιγμή t, η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $(\lambda+\mu)t$.Έστω επίσης, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. B_i, $i = 1, 2, \ldots$ που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας, την πιθανότητα να επέλθει είσπραξη ασφαλίστρου και πιθανότητα αποτυχίας , την πιθανότητα να επέλθει απαίτηση για αποζημίωση.
Δηλαδή,

$$B_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ. } \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \\ 0, & \text{με πιθ. } \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

Ορίζουμε τις τ.μ. $X_i = I(B_i = 1)P_i - I(B_i = 0)Y_i$, $i = 1, 2, \ldots$ οπότε η διαδικασία πλεονάσματος (2.1) μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{J(t)} X_i, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Στην ουσία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η διαδικασία πλεονάσματος της σχέσης (2.1) είναι ίση κατά κατανομή με αυτήν της σχέσεως (2.3).
Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}E(P_i) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}E(Y_i) \\ &= \frac{\mu E(P_i) - \lambda E(Y_i)}{\lambda+\mu} \\ &= \frac{\mu E(P_1) - \lambda E(Y_1)}{\lambda+\mu} \\ &> 0 \quad \text{μέσω της σχέσης (2.2).} \end{aligned}$$

Για τα επόμενα θα συμβολίζουμε με $m(u)$ τη συνάρτηση Gerber–Shiu για το νέο μοντέλο, η οποία έχει οριστεί στο Κεφάλαιο 1 (1.5) όπως και στο κλασικό μοντέλο, ως εξής :

$$m(u) = E\left[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u\right], \quad u \geq 0.$$

2.3 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber – Shiu

Στην παράγραφο αυτή, θα βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber–Shiu κάτω από τις υποθέσεις του κλασικού μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα.

Αρχικά, αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση που είναι άμεσο αποτέλεσμα της σχέσης (2.2) και αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1: *Κάτω από τον ορισμό 2.1 , η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi_0(u) \in (0,1)$, *για* $u \geq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $u \in [0,\infty)$. Θεωρώ την τ.μ. T_M ως το χρόνο μέχρι να εισπραχθεί το πρώτο ασφάλιστρο, όπου ακολουθεί εκθετική κατανομή με σ.π.π $P(T_M = t) = \mu e^{-\mu t},\ t > 0$. Επίσης, θεωρώ πως μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο ασφάλιστρο, έχουν εμφανιστεί κ ζημιές, το ύψος των οποίων είναι μεγαλύτερο από ξ, δηλ. υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ και $\xi > 0$ ώστε να επέλθει χρεοκοπία πριν υπάρξει εισροή του πρώτου ασφάλιστρου. Οπότε,

$$\psi_0(u) \geq P(N(T_M) \geq \kappa \ \textit{και}\ Y_1, Y_2, ..., Y_\kappa > \xi) \overset{N.Y_i \text{ ανεξ.}}{=} P(N(T_M) \geq \kappa) P(Y_1, Y_2, ..., Y_\kappa > \xi) =$$
$$= P(N(T_M) \geq \kappa) \bar{F}^\kappa(\xi).$$

Οπότε δεσμεύοντας ως προς το χρόνο είσπραξης του πρώτου ασφαλίστρου έχουμε ότι:

$$\psi_0(u) \geq \bar{F}^\kappa(\xi) \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} P(N(T_M) = \kappa) dt =$$
$$= \bar{F}^\kappa(\xi) \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} dt =$$
$$= \bar{F}^\kappa(\xi) \mu \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \int_0^\infty t^\kappa e^{-(\lambda+\mu)t} dt > 0 \ .$$

Άρα απεδείχθη ότι $\psi_0(u) > 0$ για κάθε $u \in [0,\infty)$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι ,

$$\delta_0(0) = 1 - \psi_0(0) =$$
$$= P(T = \infty \mid U(0) = 0) \overset{(2.3)}{=} P(\sum_{i=1}^{J(t)} X_i \geq 0,\ \forall t \geq 0) =$$
$$= P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 0,\ n = 1,2,3,...) > 0$$, το οποίο θα αποδειχθεί επαγωγικά.

Για $n = 1$, έχουμε ότι $P(X_1 \geq 0) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} > 0$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq 0) > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $P(\sum_{i=1}^{k+1} X_i \geq 0) > 0$ για κάθε k.

Έχουμε ότι $P(\sum_{i=1}^{k+1} X_i \geq 0) = P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq -X_{k+1}) =$

$$= P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq -P_{k+1})P(X_{k+1} = P_{k+1}) + P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq Y_{k+1})P(X_{k+1} = -Y_{k+1})$$

$$> P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq -P_{k+1})P(X_{k+1} = P_{k+1}) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} P(\sum_{i=1}^{k} X_i \geq -P_{k+1})$$

> 0 , άρα απεδείχθη το επαγωγικό βήμα.

Οπότε ισχύει ότι $\delta_0(0) > 0$, δηλαδή $\psi_0(0) < 1$.

Η $\psi_0(u)$ όμως είναι φθίνουσα συνάρτηση, δηλ. $\forall u \geq 0$ ισχύει ότι $\psi_0(u) \leq \psi_0(0) < 1$.

Οπότε απεδείχθη το ζητούμενο, δηλ. $0 < \psi_0(u) < 1,\ \forall u \geq 0$. ▪

Η Πρόταση 2.1 έχει δυο σημαντικές εφαρμογές. Η πρώτη είναι ότι η χρεοκοπία δεν είναι βέβαιη αλλά ούτε και μπορεί να αποφευχθεί. Η δεύτερη, που θα μας βοηθήσει στη συνέχεια, είναι ότι είναι απαραίτητη προκειμένου να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση Gerber–Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Για τη συνέχεια, είναι απαραίτητα τα ακόλουθα:

Έστω $\mathbb{R}_+^2 = [0,\infty)^2$ και $B(\mathbb{R}^2)$ η borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^2$. Με το v συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας στο χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}_+^2, B(\mathbb{R}_+^2))$, που επάγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $U(T-)$ και T , δεδομένου ότι $U(0) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση $v([0,x]\times[0,t]) = P(U(T-) \leq x, T \leq t \,|\, U(0) = 0)\ \ \forall x \geq 0,\ t > 0$.

Έστω $p_x(y), y > 0$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. του ελλείμματος $|U(T)|$, δεδομένου ότι $U(T-) = x$ και $T = t$ για κάποια $x > 0, t > 0$.

Αυτή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σχετίζεται πλήρως με τη συμπεριφορά της τ.μ $Y_1 - x$ δεδομένου ότι $Y_1 > x$. Οπότε $p_x(y) = \dfrac{f(x+y)}{\overline{F}(x)},\ \ y > 0$.

Το επόμενο θεώρημα είναι σημαντικό καθώς επιβεβαιώνει πως η συνάρτηση των Gerber–Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1: *Κάτω από τις υποθέσεις της παραγράφου 2.1 και θεωρώντας ως m(u) τη συνάρτηση Gerber – Shiu , ισχύει ότι :*

$$m(u) = \varphi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y)dy + H_{\delta,w}(u) \qquad (2.4)$$

όπου $0 < \varphi_\delta < 1$ *και*

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} v(dx \times dt), \qquad (2.5)$$

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(y) v(dx \times dt),\ \ y>0, \qquad (2.6)$$

$$H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt) dy,\ \ u \geq 0. \qquad (2.7)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Καταρχήν , παρατηρούμε ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $|U(T)|, U(T-)$ και T , δεδομένου ότι $U(0)=0$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των v και $p_x(y)$.

Πιο συγκεκριμένα αν $x, y, t \geq 0$ τότε

$$P(U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T \leq t \,|\, U(0)=0) = \int_0^y \int_0^x \int_0^t p_{x^*}(y^*) v(dx^* \times dt^*) dy^* .$$

Δεσμεύουμε ως προς την πρώτη πτώση από το αρχικό αποθεματικό u , οπότε έχουμε ότι :

$$m(u) = \int_0^u m(u-y) e^{-\delta t} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty p_x(y) v(dx \times dt) \right) dy +$$

$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt) dy \quad , \quad u \geq 0 .$$

Θέτουμε λοιπόν, $H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt) dy$.

Παρατηρούμε ότι , με χρήση του θεωρήματος Fubini (βλ. Παράρτημα Α2) προκύπτει ότι $\int_0^\infty e^{-\delta t} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty p_x(y) v(dx \times dt) \right) dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} v(dx \times dt)$.

Δηλαδή, αν θέσουμε $f_\delta(y) = \dfrac{1}{\varphi_\delta} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(y) v(dx \times dt),\ y>0$ με $\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} v(dx \times dt)$

έχουμε ότι η f_δ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Επίσης, ισχύει ότι $\varphi_\delta \leq \varphi_0 = v(\mathbb{R}_+^2) = \psi_0(0)$, από το οποίο εύκολα συμπεραίνουμε ότι $0 < \varphi_\delta < 1$ λόγω της Πρότασης 2.1. Συνεπώς, αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί τη σχέση (2.4). ▪

Το επόμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.1 και απλοποιεί τη δομή της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για μια ειδική περίπτωση της συνάρτησης ποινής w.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.4: Αν υποθέσουμε ότι $w(x,y)=1$, για $x \geq 0, y > 0$, τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Laplace ψ_δ του χρόνου χρεοκοπίας όπως έχουμε ήδη δει στο πρώτο κεφάλαιο και ικανοποιεί την παρακάτω απλοποιημένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\psi_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \psi_\delta(u-y) dF_\delta(y) + \varphi_\delta \overline{F}_\delta(u), u \geq 0 , \tag{2.8}$$

αφού $H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt) dy$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(y) v(dx \times dt) dy = \varphi_\delta \overline{F}_\delta(u) .$$

Το Θεώρημα 2.1 έχει το πλεονέκτημα να είναι αρκετά γενικό κάτι όμως που μας δυσκολεύει όταν θέλουμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τα φ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε πιο ακριβείς εκφράσεις για τη συνάρτηση m με κόστος βέβαια περισσότερων υποθέσεων. Για να το καταφέρουμε αυτό, θα χαρακτηρίσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu μέσω του μετασχηματισμού Laplace της και έπειτα με αντιστροφή θα παράγουμε τη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής m. Αξίζει να σημειωθεί ότι για να είναι ο μετασχηματισμός Laplace της m καλά ορισμένος για όλα τα $s \geq 0$, θα πρέπει η συνάρτηση m να είναι ολοκληρώσιμη, κάτι για το οποίο αρκεί $E\left[Y_1^2\right] < \infty$ Labbe-Sedova(13). Τέλος για να είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μοναδικός θα πρέπει η m να είναι και συνεχής Labbe-Sedova(13).

Στο παρακάτω παράδειγμα, θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή και η συνάρτηση ποινής w έχει συγκεκριμένη μορφή ούτως ώστε να μπορεί να βρεθεί μια κλειστή μορφή για τη συνάρτηση Gerber – Shiu.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1: Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι η $w(x,y) = e^{-zx} w_1(y),\ z \geq 0$ με $w_1 : (0,\infty) \to [0,\infty)$ και $f(x) = ae^{-ax},\ a > 0$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u)$.

Από την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση , που αποδείξαμε στο Θεώρημα 2.1, έχουμε:

$$m(u) = \varphi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y) dy + H_{\delta,w}(u).$$

Με χρήση των μετασχηματισμών Laplace προκύπτει ότι

$$\hat{m}(s) = \varphi_\delta \hat{m}(s) \hat{f}_\delta(s) + \hat{H}_{\delta,w}(s)$$

$$\Leftrightarrow \hat{m}(s) = \frac{\hat{H}_{\delta,w}(s)}{1 - \varphi_\delta \hat{f}_\delta(s)}.$$

Για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της m, αρκεί να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\hat{f}_\delta(s)$ και $\hat{H}_{\delta,w}(s)$.

Αρχικά,

$$p_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} = \frac{ae^{-a(x+y)}}{1-(1-e^{-ax})} = ae^{-ay},\ \ y > 0.$$

Οπότε

- $$H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt) dy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-z(u+x)} w_1(y-u) ae^{-ay} v(dx \times dt) dy$$

$$= \int_u^\infty w_1(y-u) ae^{-ay} dy \times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-z(u+x)} v(dx \times dt)$$

$$= e^{-au} \int_u^\infty w_1(y-u) ae^{-a(y-u)} dy \times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-z(u+x)} v(dx \times dt)$$

$$= a_{\delta,z} e^{-(a+z)u},$$

όπου $a_{\delta,z} = E(w_1(Y))\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t - zx}v(dx \times dt)$.

Άρα, $\hat{H}_{\delta,w}(s) = \dfrac{a_{\delta,z}}{s+a+z}$.

Όμως, $f_\delta(y) = ae^{-ay}$, $y > 0$, άρα $\hat{f}_\delta(s) = \dfrac{a}{a+s}$.

Οπότε,

$$\hat{m}(s) = \frac{\dfrac{a_{\delta,z}}{s+a+z}}{1-\varphi_\delta\dfrac{a}{a+s}} = \frac{a_{\delta,z}(a+s)}{(a+s-a\varphi_\delta)(s+a+z)} = \frac{a_{\delta,z}(a+s)}{(s+a(1-\varphi_\delta))(s+a+z)} .$$

Με τη χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace και τη βοήθεια του θεωρήματος επέκτασης του Heaviside (βλ. παράρτημα Α7) καταλήγουμε ότι :

$$m(u) = b_{z,\delta}(a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u} + ze^{-(a+z)u}) \text{ ,όπου } \quad b_{z,\delta} = \frac{E(w_1(Y))\int e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)}{z+a\varphi_\delta} .$$

■

2.4 Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber – Shiu

Στην παράγραφο αυτή, θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Αυτή η εξίσωση είναι σημαντική γιατί έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα εξετάσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu στις ειδικές περιπτώσεις όπου το ύψος των στοχαστικών ασφαλίστρων ακολουθεί κατανομή εκθετική (β) και Erlang (n,β).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2: *Η συνάρτηση Gerber – Shiu ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:*

$$(\lambda+\mu+\delta)m(u) = \mu\int_0^\infty m(u+x)dG(x) + \lambda\left(\int_0^u m(u-y)dF(y) + \zeta(u)\right),\quad u \ge 0, \qquad (2.9)$$

όπου $\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)dF(y)$. *(2.10)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας θεωρήσουμε την τ.μ T_N ως το χρόνο μέχρι την πρώτη ζημιά, με σ.π.π. $P(T_N = t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$ και την τ.μ T_M ως το χρόνο μέχρι το πρώτο ασφάλιστρο, με σ.π.π. $P(T_M = t) = \mu e^{-\mu t}$, $\mu > 0$. Αν θέσουμε $Z = \min(T_M, T_N)$, ισχύει ότι $P(Z = t) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Διότι,

$$F_z(t) = P(Z \le t) = P(\min(T_M, T_N) \le t) = 1 - P(\min(T_M, T_N) > t) . \qquad (2.11)$$

Όμως, $\min(T_M, T_N) = \begin{cases} T_N & , \text{αν } T_N < T_M \\ T_M & , \text{ διαφορετικά.} \end{cases}$

Άρα,

$$P(\min(T_M, T_N) > t) = P(T_N > t \ \kappa\alpha\iota \ T_M > t) = P(T_N > t)P(T_M > t) = e^{-\lambda t}e^{-\mu t} =$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \quad . \tag{2.12}$$

Οπότε η σχέση (2.11) μέσω της (2.12) γίνεται :

$$F_Z(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} \quad \text{δηλαδή,} \quad Z \sim Exp(\lambda+\mu) .$$

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του γεγονότος που θα συμβεί πρώτα, είτε επέλευση ζημιάς είτε εισροή ασφάλιστρου, η συνάρτηση Gerber-Shiu από το θεώρημα ολικής πιθανότητας γίνεται :

$$m(u) = \int_0^\infty m(u \mid Z = t)P(Z = t)dt = \int_0^\infty m(u \mid Z = t)(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt =$$
$$= \int_0^\infty (m(u \mid Z = t, T_N < T_M)P(T_N < T_M) + m(u \mid Z = t, T_N \geq T_M)P(T_N \geq T_M)) \times$$
$$\times (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt =$$
$$= \int_0^\infty \lambda m(u \mid Z = t, T_N < T_M) + \mu m(u \mid Z = t, T_N \geq T_M)e^{-(\lambda+\mu)t}dt \quad .$$

- Αν εισπραχθεί πρώτα ασφάλιστρο ύψους π.χ x, η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$.
- Αν συμβεί πρώτα ζημιά ύψους π.χ. y, σε περίπτωση που η ζημιά είναι μικρότερη από το αρχικό αποθεματικό δηλ. $y<u$, η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$, διαφορετικά εφαρμόζεται συνάρτηση ποινής.

Οπότε,

$$m(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\lambda(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)f(y)dy) + \mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx\right]dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}dt \times \left[\lambda(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \zeta(u)) + \mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx\right],$$

όπου $\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)dF(y)$.

Άρα,

$$m(u)(\lambda+\mu+\delta) = \lambda(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \zeta(u)) + \mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx .$$

Δηλ. απεδείχθη το ζητούμενο. ▪

Στην ειδική περίπτωση όπου $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$, για $x \geq 0, y > 0$ έχουμε την ακόλουθη σχέση για τη πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_0:

$$\psi_0(u)(\lambda+\mu)=\lambda\left(\int_0^u \psi_0(u-y)f(y)dy+\overline{F}(u)\right)+\mu\int_0^\infty \psi_0(u+x)g(x)dx, u\geq 0,$$

αφού $\zeta(u)=\int_u^\infty w(u,y-u)dF(y)=\int_u^\infty f(y)dy=\overline{F}(u)$.

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2 είναι να υπολογίσουμε τα φ_δ και $b_{\delta,z}$ του Παραδείγματος 2.1, όπως παρουσιάζονται ακολούθως .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2: Θα αποδείξουμε ότι η φ_δ αποτελεί μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\varphi_\delta\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a)+\lambda$$

στο $(0,1)$ και

$$b_{z,\delta}=\frac{\lambda E(w_1(Y))}{a\lambda+z\left[\lambda+\delta+\mu(1-g(a+z)\right]}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έχουμε αποδείξει στο Παράδειγμα 2.1 ότι

$$m(u)=b_{z,\delta}(a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}+ze^{-(a+z)u}),$$

όπου, $$b_{z,\delta}=\frac{E(w_1(Y))\int e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)}{z+a\varphi_\delta}\quad . \qquad (2.13)$$

Οπότε, μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε:

$$m(u)(\lambda+\mu+\delta)=\lambda(\int_0^u m(u-y)f(y)dy+\zeta(u))+\mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\mu+\delta)b_{z,\delta}a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}+(\lambda+\mu+\delta)b_{z,\delta}ze^{-(a+z)u}=$$

$$=\mu\int_0^\infty b_{z,\delta}(a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)(u+x)}+ze^{-(a+z)(u+x)})g(x)dx+$$

$$+\lambda\left[\int_0^u b_{z,\delta}(a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)(u-y)}+ze^{-(a+z)(u-y)})f(y)dy+\zeta(u)\right],$$

όπου $$\zeta(u)=\int_u^\infty w(u,y-u)f(y)dy=\int_u^\infty e^{-zu}w_1(y-u)f(y)dy=$$

$$=\int_u^\infty e^{-zu}w_1(y-u)ae^{-ay}dy=\int_u^\infty e^{-(a+z)u}w_1(y-u)ae^{-a(y-u)}dy=$$

$$=e^{-(a+z)u}E(w_1(Y)).$$

Οπότε,

$$0=\lambda e^{-(a+z)u}E(w_1(Y))+b_{z,\delta}\left[-(\lambda+\mu+\delta)a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}-(\lambda+\mu+\delta)ze^{-(a+z)u}\right]+$$

$$+b_{z,\delta}\left[\mu\int_0^\infty (a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)(u+x)}+ze^{-(a+z)(u+x)})g(x)dx+\lambda\int_0^u (a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)(u-y)}+ze^{-(a+z)(u-y)})f(y)dy\right]\Leftrightarrow$$

$$\lambda e^{-(a+z)u}E(w_1(Y))+b_{z,\delta}\left[a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}\left(-\lambda-\mu-\delta+\mu\int_0^\infty e^{-a(1-\varphi_\delta)x}g(x)dx\right)\right]+$$

$$+ze^{-(a+z)u}\left(-\lambda-\mu-\delta+\int_0^\infty e^{-(a+z)x}g(x)dx\right)+a\lambda\left(\int_0^u a\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)(u-y)}e^{-ay}dy+\int_0^u ze^{-(a+z)(u-y)}e^{-ay}dy\right)=0$$

Όμως,

- $\int_0^u (ze^{-(a+z)(u-y)})e^{-ay}dy = ze^{-(a+z)u}\int_0^u e^{zy}dy = e^{-au}-e^{-(a+z)u}$
- $\int_0^u (a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)(u-y)})e^{-ay}dy = a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}\int_0^u e^{-a\varphi_\delta y}dy = e^{-au(1-\varphi_\delta)}-e^{-au}$

Αφού φ_δ ανεξάρτητο του z και w_1 , τότε για $z=0$ και $w_1(y)=1$, έχουμε:

$0=\lambda e^{-au}+b_{0,\delta}\left[a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}(-\lambda-\mu-\delta+\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a))+a\lambda(e^{-au(1-\varphi_\delta)}-e^{-au})\right].$

Όμως, $b_{0,\delta}=\dfrac{1}{a}$ από την (2.13) .

Άρα έχουμε,

$0=\lambda e^{-au}+\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}(-\lambda-\mu-\delta+\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a))+\lambda(e^{-au(1-\varphi_\delta)}-e^{-au})\Leftrightarrow$

$\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}(\lambda+\mu+\delta)=\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u}(\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a))+\lambda e^{-au(1-\varphi_\delta)}\Leftrightarrow$

$\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\varphi_\delta\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a)+\lambda.$

Προφανώς, $\varphi_\delta\in(0,1)$ και είναι η λύση της εξίσωσης :

$$\varphi(\lambda+\mu+\delta)=\varphi\mu\hat{g}((1-\varphi)a)+\lambda \qquad (2.14)$$

Θέτουμε $v=(1-\varphi)a$, $v\in(0,a)$ στη σχέση (2.14) και έχουμε :

$\varphi(\lambda+\mu+\delta)=\varphi\mu\hat{g}(v)+\lambda\Leftrightarrow\dfrac{a-v}{a}(\lambda+\mu+\delta)=\dfrac{a-v}{a}\mu\hat{g}(v)+\lambda\Leftrightarrow$

$\lambda+\mu+\delta=\mu\hat{g}(v)+\lambda\dfrac{a}{a-v}.$

Δηλ. $h(v)=\mu\hat{g}(v)$, όπου $h(v)=\lambda+\mu+\delta-\lambda\dfrac{a}{a-v}$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η $\hat{g}(v)$ είναι κυρτή, αφού
  $\mu\hat{g}(v)=\int\mu e^{-vs}g(s)ds$
  $(\mu\hat{g}(v))'=\int -s\mu e^{-vs}g(s)ds$
  $(\mu\hat{g}(v))''=\int s^2\mu e^{-vs}g(s)ds>0.$
- Η $h(v)$ είναι κοίλη, αφού
  $h(v)=\lambda+\mu+\delta-\lambda\dfrac{a}{a-v}$
  $h'(v)=-a\lambda(a-v)^{-2}$
  $h''(v)=-2a\lambda(a-v)^{-3}<0.$

Όμως, για $v=0$ έχουμε : $h(0)=\mu+\delta$ και $\mu\hat{g}(0)=\mu\int g(s)ds=\mu$.

Άρα, $h(0)>\mu\hat{g}(0)$.

Άρα, η λύση φ_δ της εξίσωσης (2.14) είναι μοναδική.

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3: (Εκθετικό ύψος αποζημιώσεων και Erlang(n,β) ύψος ασφαλίστρων) Υποθέτουμε ότι το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί κατανομή Erlang(n,β) με σ.π.π

$$g(x)=\frac{\beta^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\beta x},\quad x\geq 0,\quad \beta>0,\quad ,n=1,2,3,...$$

Οπότε από το Παράδειγμα 2.2 (σχέση 2.14) έχουμε ότι ,

$$\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\varphi_\delta\mu\hat{g}((1-\varphi_\delta)a)+\lambda \quad ,$$

όπου $\hat{g}(s)$: μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. των ασφαλίστρων.

Όμως, $\hat{g}((1-\varphi_\delta)a)=\left(\dfrac{\beta}{\beta+(1-\varphi_\delta)a}\right)^n$.

Άρα, η σχέση (2.14) αν θέσουμε $v=\dfrac{\beta+(1-\varphi_\delta)a}{\beta}$ και αντικαταστήσουμε το φ_δ σαν συνάρτηση του v , δηλαδή $\varphi_\delta=\dfrac{\beta(1-v)-a}{a}$, γίνεται :

$$p(v)=v^{n+1}\beta(\lambda+\mu+\delta)-v^n\left[\beta(\lambda+\mu+\delta)+a(\mu+\delta)\right]-v\beta\mu+\mu(a+\beta),$$

με $v\in\left(1,1+\dfrac{a}{\beta}\right)$, αφού $\varphi_\delta\in(0,1)$.

Για παράδειγμα στη περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν την εκθετική κατανομή ($n=1$) και $\delta=0$, προκύπτει ότι $\varphi_0=\dfrac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}$.

Από το Παράδειγμα 2.1 για $z=0$ και $w_1(y)=1,\ y>0$ έχουμε $b_{\delta,z}=\dfrac{1}{a}$ και

$$\psi_0(u)=P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\varphi_0e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\left(\frac{\alpha\mu-\beta\lambda}{\lambda+\mu}\right)u},\ u\geq 0 .$$

2.5 Η μελέτη της συνάρτησης Gerber – Shiu για εκθετικά ύψη ασφαλίστρων

Στην παράγραφο αυτή, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για εκθετική κατανομή ύψους ασφαλίστρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3: *Κάτω από τις συνθήκες που ικανοποιεί το μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και υποθέτοντας ότι το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί εκθετική κατανομή και η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων ικανοποιεί τη σχέση* $E(Y_1^2)<\infty$, *έχουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :*

$$m(u)=\varphi_\delta\int_0^u m(u-y)f_\delta(y)dy+H_{\delta,w}(u)\ ,$$

όπου

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\overline{F}(0)\right], \qquad (2.15)$$

$$f_\delta(y) = \frac{\lambda}{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left[f(y)+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}f(y)\right], \qquad (2.16)$$

$$H_{\delta,w}(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\zeta(u)+\zeta(u)\right] \qquad (2.17)$$

και ρ_1 *η ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος της εξίσωσης Lundberg.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι :

$$(\lambda+\mu+\delta)m(u) = \mu\int_0^\infty m(u+x)dG(x)+\lambda\left(\int_0^u m(u-y)dF(y)+\zeta(u)\right),\ \ u\geq 0,$$

όπου $\zeta(u)=\int_u^\infty w(u,y-u)dF(y)$.

Οπότε με χρήση μετασχηματισμών Laplace προκύπτει ότι :

$$(\lambda+\mu+\delta)\hat{m}(s) = \lambda\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\hat{A}(s),$$

όπου $A(u)=\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx$.

Προκειμένου να βρεθεί η μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu, αρκεί να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{A}(s)$.

$$\hat{A}(s) = \int_0^\infty e^{-su}A(u)du = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m(u+x)g(x)dxdu =$$

$$= \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m(u+x)\beta e^{-\beta x}dxdu = \qquad \text{θέτουμε } y=u+x$$

$$= \beta\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty m(y)e^{-\beta(y-u)}dydu =$$

$$= \beta\int_0^\infty e^{-su}T_\beta m(u)du =$$

$$= \beta\hat{T}_\beta m(s)\ .$$

Οπότε, έχουμε: $(\lambda+\mu+\delta)\hat{m}(s) = \lambda\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta\hat{T}_\beta m(s)$,

δηλ. $(\lambda+\mu+\delta)\hat{m}(s) = \lambda\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta\dfrac{\hat{m}(s)-\hat{m}(\beta)}{\beta-s} \Leftrightarrow$

$$(\beta-s)(\lambda+\mu+\delta)\hat{m}(s) = (\beta-s)\lambda\hat{m}(s)\hat{f}(s)+(\beta-s)\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta(\hat{m}(s)-\hat{m}(\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\hat{m}(s)\ \ (\beta-s)(\lambda+\mu+\delta)-(\beta-s)\lambda\hat{f}(s)-\mu\beta\ \ = +(\beta-s)\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta\hat{m}(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\hat{m}(s) = \frac{(\beta-s)\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta\hat{m}(\beta)}{(\beta-s)(\lambda+\mu+\delta)-(\beta-s)\lambda\hat{f}(s)-\mu\beta} \Leftrightarrow$$

$$\hat{m}(s) = \frac{(\beta-s)\lambda\hat{\zeta}(s)+\mu\beta\hat{m}(\beta)}{(\beta-s)(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))-\mu\beta}\ . \qquad (2.18)$$

Παρατηρώ ότι ο παρονομαστής $(\beta - s)(\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(s)) - \mu\beta$ της παραπάνω εξίσωσης γράφεται $\beta(\lambda+\delta) - \beta\lambda \hat{f}(s) - s(\lambda+\mu+\delta) + s\hat{f}(s)$.
Σκοπός μας είναι να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και του αριθμητή προκειμένου να απλοποιηθεί περαιτέρω το κλάσμα.
Θέτουμε $A(s) = (\beta - s)\lambda\hat{\zeta}(s) + \mu\beta\hat{m}(\beta)$, τον αριθμητή της κλασματικής εξίσωσης (2.18) και $B(s) = \beta(\lambda+\delta) - \beta\lambda \hat{f}(s) - s(\lambda+\mu+\delta) + s\hat{f}(s)$, τον παρονομαστή της .

Παρατηρούμε ότι:

$$\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta) = \beta\lambda \hat{f}(s) - s\lambda \hat{f}(s) \Leftrightarrow$$
$$\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta) = (\beta - s)\lambda \hat{f}(s) \Leftrightarrow$$
$$\lambda \hat{f}(s) = \frac{\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta)}{\beta - s}.$$

Θέτουμε $h(s) = \lambda \hat{f}(s)$ και $a(s) = \dfrac{\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta)}{\beta - s}$.

Όμως, ισχύουν:

- $h'(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-sx}(-x) f(x)dx < 0$ και $h''(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-sx} x^2 f(x)dx > 0$.
- $a'(s) = \dfrac{-(\lambda+\mu+\delta)(\beta - s) + (\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta))}{(\beta - s)^2} < 0$,
  αφού $-(\lambda+\mu+\delta)(\beta - s) + (\beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\mu+\delta)) = -\mu\beta < 0$.
- $h(0) = \lambda \hat{f}(0) = \lambda$.
- $a(0) = \dfrac{\beta\lambda + \beta\delta}{\beta} = \lambda + \delta$.

Άρα $a(0) > h(0)$.
Δηλ. υπάρχει ρ_1 μοναδική ρίζα του παρονομαστή $B(s)$.
Επειδή $\hat{m}(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ και ρ_1 ρίζα του παρονομαστή $B(s)$, πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή $A(s)$, γιατί αν δεν ήταν θα έπρεπε $\hat{m}(s) = \infty$, άτοπο , αφού $\hat{m}(s) < \infty$.

Οπότε ισχύουν τα ακόλουθα :

- $A(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - \rho_1)\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) = \mu\beta\hat{m}(\beta)$.

Άρα, ο αριθμητής $A(s)$ γίνεται :

$$\begin{aligned}
A(s) &= (\beta - s)\lambda\hat{\zeta}(s) - \mu\beta\hat{m}(\beta) - (\beta - \rho_1)\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) + \mu\beta\hat{m}(\beta) = \\
&= (\beta - s)\lambda\hat{\zeta}(s) - (\beta - \rho_1)\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) = \\
&= \beta\lambda\hat{\zeta}(s) - s\lambda\hat{\zeta}(s) - \beta\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) + \rho_1\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) = \\
&= \beta\lambda(\hat{\zeta}(s) - \hat{\zeta}(\rho_1)) - s\lambda\hat{\zeta}(s) + \rho_1\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) = \\
&= \beta\lambda(\hat{\zeta}(s) - \hat{\zeta}(\rho_1)) - s\lambda\hat{\zeta}(s) + \rho_1\lambda\hat{\zeta}(\rho_1) - \lambda\rho_1\hat{\zeta}(s) + \lambda\rho_1\hat{\zeta}(s) = \\
&= \beta\lambda(\hat{\zeta}(s) - \hat{\zeta}(\rho_1)) - \lambda\hat{\zeta}(s)(s - \rho_1) - \lambda\rho_1(\hat{\zeta}(s) - \hat{\zeta}(\rho_1)).
\end{aligned}$$

- $B(\rho_1)=0 \Leftrightarrow (\beta-\rho_1)\Big[(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\hat{f}(\rho_1)\Big]=\mu\beta$.

Άρα, ο παρονομαστής $B(s)$ γίνεται :

$$
\begin{aligned}
B(s) &= (\beta-s)\Big[(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\hat{f}(s)\Big]-\mu\beta = \\
&= (\beta-s)\Big[(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\hat{f}(s)\Big]-\mu\beta-\Big[(\beta-\rho_1)((\lambda+\mu+\delta)-\lambda\hat{f}(\rho_1))-\mu\beta\Big] = \\
&= -(s-\rho_1)(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\beta\hat{f}(s)+\lambda s\hat{f}(s)+\lambda\beta\hat{f}(\rho_1)-\lambda\rho_1\hat{f}(\rho_1) = \\
&= -(s-\rho_1)(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\beta(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))+\lambda s\hat{f}(s)+\lambda\rho_1\hat{f}(s)-\lambda\rho_1\hat{f}(s)-\lambda\rho_1\hat{f}(\rho_1) = \\
&= -(s-\rho_1)(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\beta(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))+\lambda\hat{f}(s)(s-\rho_1)+\lambda\rho_1(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1)) .
\end{aligned}
$$

Άρα, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\hat{m}(s) &= \frac{A(s)}{B(s)} = \\
&= \frac{\beta\lambda(\hat{\zeta}(s)-\hat{\zeta}(\rho_1))-\lambda\hat{\zeta}(s)(s-\rho_1)-\lambda\rho_1(\hat{\zeta}(s)-\hat{\zeta}(\rho_1))}{-(s-\rho_1)(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\beta(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))+\lambda\hat{f}(s)(s-\rho_1)+\lambda\rho_1(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))} = \\
&= \frac{\beta\lambda(\hat{\zeta}(s)-\hat{\zeta}(\rho_1))-\lambda\hat{\zeta}(s)(s-\rho_1)-\lambda\rho_1(\hat{\zeta}(s)-\hat{\zeta}(\rho_1))}{-(s-\rho_1)(\lambda+\mu+\delta)-\lambda\beta(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))+\lambda\hat{f}(s)(s-\rho_1)+\lambda\rho_1(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))}\,\frac{s-\rho_1}{s-\rho_1} = \\
&= \frac{-\beta\lambda\hat{T}_{\rho_1}\zeta(s)-\lambda\hat{\zeta}(s)+\lambda\rho_1\hat{T}_{\rho_1}\zeta(s)}{-(\lambda+\mu+\delta)+\lambda\beta\hat{T}_{\rho_1}f(s)+\lambda\hat{f}(s)-\lambda\rho_1\hat{T}_{\rho_1}f(s)} = \\
&= \frac{-\lambda(\beta-\rho_1)\hat{T}_{\rho_1}\zeta(s)-\lambda\hat{\zeta}(s)}{-(\lambda+\mu+\delta)+\lambda\hat{f}(s)-\lambda(\beta-\rho_1)\hat{T}_{\rho_1}f(s)} .
\end{aligned}
$$

Οπότε,

$$-(\lambda+\mu+\delta)\hat{m}(s)+\lambda\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\lambda(\beta-\rho_1)\hat{m}(s)\hat{T}_{\rho_1}f(s)=-\lambda(\beta-\rho_1)\hat{T}_{\rho_1}\zeta(s)-\lambda\hat{\zeta}(s).$$

Με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace έχουμε ότι :

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda+\mu+\delta)m(u)+\lambda\int_0^u m(u-y)f(y)dy+\lambda(\beta-\rho_1)\int_0^u m(u-y)T_{\rho_1}f(y)dy = \\
&= -\lambda(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\zeta(u)-\lambda\zeta(u).
\end{aligned}
$$

Δηλαδή,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu+\delta)m(u)=\lambda\int_0^u m(u-y)f(y)dy+\lambda(\beta-\rho_1)\int_0^u m(u-y)T_{\rho_1}f(y)dy+ \\
&+\lambda(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\zeta(u)+\lambda\zeta(u) \Leftrightarrow \\
&m(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u m(u-y)f(y)dy+(\beta-\rho_1)\int_0^u m(u-y)T_{\rho_1}f(y)dy\right)+ \\
&\qquad +\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}((\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\zeta(u)+\zeta(u)).
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $H_{\delta,w}(u)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}((\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\zeta(u)+\zeta(u))$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^{\infty}(f(y)+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}f(y))dy\right)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}(1+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\overline{F}(0)).$$

Θεωρώντας λοιπόν, $\varphi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}\overline{F}(0)\right]$, προκύπτει ότι

$$f_\delta(y)=\frac{\lambda}{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left[f(y)+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}f(y)\right].$$

Οπότε απεδείχθη το ζητούμενο. ▪

2.6 Η μελέτη της συνάρτησης Gerber – Shiu για ύψη ασφαλίστρων που ακολουθούν τη κατανομή Erlang(n,β)

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη περίπτωση όπου το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί Erlang κατανομή με παραμέτρους n και β, όπου n θετικός ακέραιος και $\beta>0$, χωρίς να γίνεται καμιά υπόθεση για τη κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ότι η συνάρτηση Gerber – Shiu ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.1 κάτω από την υπόθεση της συγκεκριμένης κατανομής του ύψους των ασφαλίστρων. Πριν φθάσουμε όμως σε αυτό το αποτέλεσμα το πρώτο μας βήμα είναι να βρούμε το χαρακτηρισμό του μετασχηματισμού Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής.

Καταρχήν, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\gamma(u)=\int_0^u m(u-y)dF(y)+\zeta(u),\ u\geq 0,$$

κάτι που απλοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση (2.9). Είναι σημαντικό βέβαια να συμπληρώσουμε ότι οι συναρτήσεις $\gamma(u)$ και $\zeta(u)$ επιδέχονται μετασχηματισμό Laplace. Αρχικά, η συνάρτηση w είναι φραγμένη από τον ορισμό της και αφού $E\ Y_1<\infty$, η συνάρτηση ζ είναι ολοκληρώσιμη οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της. Επίσης, η ολοκληρωσιμότητα της γ προέρχεται από την ολοκληρωσιμότητα της m αν $E\left[Y_1^2\right]<\infty$, όπως έχουμε ήδη αναφέρει αλλά και από της ζ κάνοντας χρήση του θεωρήματος Fubini(βλ. Παραρτημα Α2).

Η επόμενη πρόταση έχει ως στόχο να μας δώσει ένα χαρακτηρισμό για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber–Shiu με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.2.

Πριν από αυτό όμως, το επόμενο λήμμα είναι απαραίτητο γιατί μας δίνει βασικές ιδιότητες της σ.π.π. της κατανομής Erlang(n,β) που θα είναι πολύτιμες για τη συνέχεια.

ΛΗΜΜΑ 2.1: *Για* $n>1$ *και* $\beta>0$, *η τ.μ.* X *με σ.π.π.* $g(x)=\frac{\beta^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\beta x},\ x\geq 0$ *ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $g^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,2,...,n-2$ *και* $g^{(n-1)}(0)=\beta^n$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)=0 \ , \ \text{για} \ \ x\geq 0$$

(iii) $$\int_0^{\infty}|\,g^{(k)}(u)\,|\,du<\infty, \ \text{για} \ \ k=0,1,2,...,n\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αποδεικνύεται με επαγωγικό τρόπο μία κλειστή μορφή για τη κ-οστή παράγωγο της g ,όπου $k=0,1,2,...,n-1$

$$g^{\,k}\,(x)=-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\beta^{k-i}g^{\,i}\,(x)+\frac{\beta^{n}}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}e^{\beta x}\,.$$

Ιδιαίτερα για $k=n-1$, προκύπτει $g^{\,n-1}\,(x)=-\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{\,i}\,(x)+\beta^{n}e^{\beta x}$.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι για $x=0$ στις προηγούμενες σχέσεις έχουμε την (i).

Παραγωγίζοντας τη $g^{\,n-1}$ έχουμε τα εξής :

$$g^{\,n}\,(x)=-\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{\,i+1}\,(x)-\beta^{n+1}e^{-\beta x}=$$

$$=-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\beta^{n-i}g^{\,i}\,(x)-\beta\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{\,i}\,(x)=$$

$$=-\sum_{i=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]\beta^{n-i}g^{\,i}\,(x)-\beta^{n}g(x)\overset{\tau\rho\iota\gamma.Pascal}{=}-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\beta^{n-i}g^{\,i}\,(x),$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη (ii).

Επίσης , επαγωγικά από την (i) και (ii) εύκολα έπεται και η σχέση (iii).

■

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση που μας δίνει το χαρακτηρισμό για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber–Shiu.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2: *Υποθέτουμε ότι το μέγεθος των ασφαλίστρων ακολουθεί κατανομή* $Erlang\,(n,\beta)$ *και τα μεγέθη των αποζημιώσεων ικανοποιούν τη σχέση* $E\left[Y_1^2\right]<\infty$. *Τότε, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber–Shiu, δίνεται από τον τύπο:*

$$\left[(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))(\beta-s)^{n}-\mu\beta^{n}\right]\hat{m}(s)=\lambda(\beta-s)^{n}\hat{\zeta}(s)-p_{n-1}(s),\ s\geq 0\ ,$$

όπου p_{n-1} *είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n-1 βαθμού.*

Επιπλέον εάν $p_1,p_2,...,p_n\in\mathbb{C}$ *είναι* n *διαφορετικές ανά δύο ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος της παρακάτω εξίσωσης, γνωστής και ως γενικευμένης εξίσωσης Lundberg,*

$$L(s)=\left[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)\right](\beta-s)^{n}-\mu\beta^{n}=0, \tag{2.19}$$

τότε το πολυώνυμο p_{n-1} *μπορεί να γραφτεί και ως*

$$p_{n-1}(s)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^{n}\hat{\zeta}(\rho_j)}{\pi_{nj}(\rho_j)}\pi_{nj}(s), \tag{2.20}$$

όπου

$$\pi_{nj}(s) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } n = j = 1 \\ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (s - \rho_l), & \text{εάν } n = 2,3,4,\ldots \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases} .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζουμε τη συνάρτηση,

$$l(u) = \int_0^{\infty} m(u+x) g(x) dx = \int_u^{\infty} m(x) g(x-u) dx . \tag{2.21}$$

Επειδή η m είναι συνεχής, από τις σχέσεις (i) και (iii) του Λήμματος 2.1 και τον κανόνα του Leibniz (βλ. Παράρτημα Α3) προκύπτει ότι :

$$l^{(k)}(u) = (-1)^k \int_u^{\infty} g^{(k)}(x-u) m(x) dx, \quad u \geq 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{2.22}$$

και
$$l^{(n)}(u) = (-1)^n \int_u^{\infty} g^{(n)}(x-u) m(x) dx + (-1)^n \beta^n m(u), \quad u \geq 0. \tag{2.23}$$

Επειδή η m είναι ολοκληρώσιμη, τότε από τη σχέση (iii) του Λήμματος 2.1 μας επιτρέπεται να ορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{l}^{\,k}(s)$ για όλα τα $s \geq 0, \ k = 1,2,\ldots,n.$

Έτσι ορίζοντας $S_l(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} l^{(k)}(u), \quad u \geq 0$ (2.24)

από τη σχέση (ii) του Λήμματος 2.1 και των (2.22) , (2.23) μετά από πράξεις οδηγούμαστε στο γεγονός ότι $S_l(u) = \beta^n m(u), \ u \geq 0$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της S_l στο σημείο s είναι $\hat{S}_l(s) = \beta^n \hat{m}(s), \ s \geq 0$ (2.25)

Επίσης από μια ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace (βλ. Παράρτημα Α4), έχουμε ότι :

$\hat{l}^{\,k}(s) = s^k \hat{l}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j l^{\,k-1-j}(0), \ s \geq 0, \ \ k = 0,1,\ldots,n$ το οποίο σε συνδυασμό με την (2.24) , μας δίνει ότι $\hat{S}_l(s) = (\beta - s)^n \hat{l}(s) + \dfrac{p_{n-1}(s)}{\mu}, \ s > 0$, (2.26)

όπου το p_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n-1 βαθμού.

Αντικαθιστώντας , λοιπόν, τη σχέση (2.25) στην (2.26) έχουμε :

$$\mu(\beta - s)^n \hat{l}(s) = \mu \beta^n \hat{m}(s) - p_{n-1}(s), \quad s \geq 0$$

Όμως, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση (2.9) του Θεωρήματος 2.2 έχουμε ότι :

$$(\lambda + \mu + \delta)\hat{m}(s) = \lambda \hat{m}(s) \hat{f}(s) + \lambda \hat{\zeta}(s) + \mu \hat{l}(s) \Leftrightarrow$$

$$(\beta - s)^n \left[(\lambda + \mu + \delta)\hat{m}(s) - \lambda \hat{m}(s) \hat{f}(s) - \lambda \hat{\zeta}(s) \right] = \mu \beta^n \hat{m}(s) - p_{n-1}(s) \Leftrightarrow$$

$$\hat{m}(s) = \frac{\lambda(\beta - s)^n \hat{\zeta}(s) - p_{n-1}(s)}{(\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(s))(\beta - s)^n - \mu \beta^n} . \tag{2.27}$$

Οπότε, αποδείχθηκε το ζητούμενο. ▪

Ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος είναι γνωστός ως η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ είναι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg και είναι εμφανές από τη σχέση (2.27) ότι

$p_{n-1} = \lambda(\beta - \rho_j)^n \hat{\zeta}(\rho_j), \quad j = 1, 2, ..., n.$ Επειδή το p_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n-1 βαθμού και οι $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ είναι διακριτές ρίζες τότε με τη βοήθεια των πολυωνύμων Lagrange (βλ.Παράρτημα Α8) έπεται η (2.20).

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (2.20) για το πολυώνυμο που εμπλέκεται στο μετασχηματισμό Laplace της σχέσης (2.27) στη Πρόταση 2.2 , θα πρέπει απαραίτητα να υπάρχουν n το πλήθος διακριτές μιγαδικές ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος στη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, κάτι το οποίο όμως δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστικό αφού όπως αποδεικνύεται στο επόμενο λήμμα πάντα υπάρχουν n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος, άρα το μόνο που μένει είναι να εξεταστεί αν είναι και διακριτές .

ΛΗΜΜΑ 2.2: *Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος. Επιπλέον, όταν $\delta = 0$, μία από αυτές τις n ρίζες είναι μηδέν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $z = \dfrac{\beta - s}{\beta}$ τότε η εξίσωση Lundberg γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu = \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z)). \tag{2.28}$$

Έστω $\delta > 0$, τότε επιλέγουμε $r \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $(\mu + \delta)r^n > \mu$ και θεωρούμε το σύνολο C_z όπου $z \in \mathbb{C}$ τ.ω. $|z|=r$.

Τότε και οι δύο συναρτήσεις , δηλ. οι $(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu$ και $\lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))$, είναι αναλυτικές στο C_z και το εσωτερικό του.

Για όλα τα $z \in C_z$, ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} |(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu| &\overset{\tau\rho\iota\gamma.\alpha\nu\iota\sigma.}{\geq} (\lambda + \mu + \delta)|z|^n - \mu \\ &= \lambda r^n + (\mu + \delta)r^n - \mu \\ &> \lambda r^n \\ &= \lambda |z|^n \\ &\geq |\lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))|. \end{aligned}$$

Άρα, $|(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu| > |\lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))|$.

Οπότε, από το θεώρημα Rouche (βλ. Παράρτημα Α5), προκύπτει ότι η $(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu$ και η $(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu - \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του C_z. Επίσης, και οι n ρίζες του προηγούμενου ανήκουν στο κύκλο $\left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \left(\dfrac{\mu}{\lambda + \mu + \delta} \right)^{1/n} \right\}$, το οποίο είναι εσωτερικό του C_z, αφού $\dfrac{\mu}{\lambda + \mu + \delta} < 1$.

Έτσι, η $(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu - \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))$ έχει ακριβώς n ρίζες στο εσωτερικό του C_z .

Άρα, η εξίσωση Lundberg έχει τον ίδιο αριθμό ριζών στο C_s όπου $s \in \mathbb{C}$ τ.ω. $|\beta - s| = r\beta$. Δεδομένου ότι το εσωτερικό του C_s περιέχεται ολόκληρο στο πρώτο και στο τέταρτο τεταρτημόριο, αφού $\beta > 0$ και $r\beta < \beta$ και οι n ρίζες θα έχουν θετικό πραγματικό μέρος .

Στη περίπτωση που ισχύει ότι $\delta = 0$ τότε η σχέση (2.28) γράφεται :

$$F(z) = (\lambda+\mu)z^n - \mu - \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z)) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι μηδενίζεται για $z = 1$, οπότε η F δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rouche αφού δεν είναι αναλυτική γενικά στο κλειστό χωρίο όπου $|z| \le 1$. Επομένως θα χρειαστούμε μία τροποποίηση του θεωρήματος Rouche, (βλ. Παράρτημα Α6).

Αν θέσουμε λοιπόν, $f(z) = (\lambda+\mu)z^n - \mu$ και $\varphi(z) = \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))$, τότε παρατηρούμε ότι στο χωρίο C_z όπου $z \in \mathbb{C}$ τ.ω. $|z| = 1$ και $z \ne 1$, ισχύουν τα ακόλουθα :

$$|f(z)| = |(\lambda+\mu)z^n - \mu| \overset{\tau\rho\iota\gamma.\alpha\nu\iota\sigma.}{\ge} (\lambda+\mu)|z|^n - \mu = \lambda + \mu - \mu = \lambda \text{ και}$$

$$|\varphi(z)| = \left|\lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))\right| = \lambda |z|^n \hat{f}(\beta(1-z)) \le \lambda \int_0^\infty \left|e^{-\beta(1-z)y}\right| dF(y) = \lambda \int_0^\infty e^{-\beta y} \left|e^z\right|^{\beta y} dF(y) < \lambda$$

Οπότε ισχύει ότι $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι $(\lambda+\mu)z^n - \mu\,|_{z=1} = \lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))\,|_{z=1}$ και τελικά

$$\left.\frac{\dfrac{d}{dz}\left[(\lambda+\mu)z^n - \mu\right] - \dfrac{d}{dz}\left[\lambda z^n \hat{f}(\beta(1-z))\right]}{(\lambda+\mu)z^n - \mu}\right|_{z=1} = \frac{n\mu - \lambda\beta E\ Y_1}{\lambda} > 0.$$

Έτσι ικανοποιούνται όλες οι αναγκαίες συνθήκες του τροποποιημένου θεωρήματος Rouche και αφού έχουμε αποδείξει ότι οι ρίζες της συνάρτησης f είναι n το πλήθος στο χωρίο $|z| < 1$ τότε οι ρίζες του F είναι $n-1$ στο ίδιο χωρίο. ▪

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4: Είναι εμφανές από την εξίσωση (2.19), ότι η συνάρτηση του Lundberg L είναι συνεχής και ισχύουν τα ακόλουθα:

$$L(0) = \left[\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(0)\right]\beta^n - \mu\beta^n = \beta^n(\mu+\delta) - \mu\beta^n = \delta\beta^n \text{ και}$$

$$L(\beta) = -\mu\beta^n < 0.$$

Έτσι εάν $\delta > 0$, έχουμε ότι $L(0) > 0$ και η L έχει μία ρίζα $\rho_1 \in (0,\beta)$, ενώ αν $\delta = 0$ τότε $\rho_1 = 0$ είναι μία ρίζα .

Στην περίπτωση που $n = 1$, το πολυώνυμο $p_0(s) = \lambda(\beta - \rho_1)\hat{\zeta}(\rho_1)$ είναι ένας σταθερός αριθμός. Στη περίπτωση όπου $w(x,y) = 1,\ x \ge 0, y \ge 0$ ισχύει ότι $\hat{\zeta}(0) = E(Y_1)$ και επιπλέον αν $\delta = 0$, προκύπτει $p_0(s) = \lambda\beta E(Y_1)$.

Για $n = 2$, παρατηρούμε ότι $L(2\beta) = \lambda\beta^2(1 - \hat{f}(2\beta)) + \delta\beta^2 > 0$. Επειδή όμως $L(\beta) < 0$ και η L είναι συνεχής , υπάρχει αναγκαστικά μία ρίζα ρ_2 στο διάστημα $(\beta, 2\beta)$. Τότε η ύπαρξη δύο διακριτών ριζών αποδεικνύεται αφού ισχύει η σχέση $0 \le \rho_1 < \beta < \rho_2 < 2\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5: Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, όταν $w(x,y) = 1,\ x \ge 0, y \ge 0$, γίνεται

$$\hat{\psi}_\delta(s)=\frac{1}{s}-\frac{(\mu+\delta)(\beta-s)^n-\mu\beta^n+sp_{n-1}(s)}{s\left[\left[\lambda(1-\hat{f}(s))+\mu+\delta\right](\beta-s)^n-\mu\beta^n\right]}.$$

Επιπλέον αν υποθέσουμε ότι η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων είναι Erlang (k,a), τότε το παραπάνω γίνεται

$$\hat{\psi}_\delta(s)=\frac{1}{s}-\frac{(a+s)^k\left[(\mu+\delta)(\beta-s)^n-\mu\beta^n+sp_{n-1}(s)\right]}{s\left[\lambda(\beta-s)^n\left[(a+s)^k-a^k\right]+(a+s)^k\left[(\mu+\delta)(\beta-s)^n-\mu\beta^n\right]\right]}.$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο κλάσμα είναι στην ουσία ο λόγος ενός πολυωνύμου βαθμού $k+n$, διαιρεμένο με ένα πολυωνύμου βαθμού $k+n+1$, το οποίο μπορούμε να αντιστρέψουμε κάνοντας χρήση του θεωρήματος επέκτασης του Heaviside (βλ. Παράρτημα Α7) και να βρούμε το $\psi_\delta(u)$.

Χρήσιμο για τα επόμενα είναι να εισάγουμε τον τελεστή Dickson-Hipp για τον ορισμό του οποίου και ορισμένες ιδιότητες του (βλ. Παράρτημα Α1). Εν συνεχεία, εφόσον έχουμε βρει το μετασχηματισμό Laplace της m, στόχος μας είναι κάτω από τις συγκεκριμένες υποθέσεις του μοντέλου που εξετάζουμε, να βρούμε τη μορφή της ανανεωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu.
Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4: *Κάτω από τις συνθήκες που ικανοποιεί το μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και υποθέτοντας ότι το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί κατανομή* $Erlang(n,\beta)$, *η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων ικανοποιεί τη σχέση* $E(Y_1^2)<\infty$ *και οι ρίζες* $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ *της εξίσωσης Lundberg έχουν θετικό πραγματικό μέρος και είναι διακριτές, η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :*

$$m(u)=\varphi_\delta\int_0^u m(u-y)f_\delta(y)dy+H_{\delta,w}(u)\ ,$$

όπου

$$\varphi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}T_{\rho_j}\overline{F}(0)\right], \tag{2.29}$$

$$f_\delta(y)=\frac{\lambda}{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left[f(y)+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(y)\right], \tag{2.30}$$

$$H_{\delta,w}(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[\zeta(u)+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}T_{\rho_j}\zeta(u)\right]. \tag{2.31}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $S_\zeta(u)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\zeta^{(k)}(u),\ \ u\geq 0.$ (2.32)

Με τη βοήθεια μιας ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\hat{\zeta}^{(k)}(s)=s^k\zeta(s)-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{s}{j}\zeta^{(k-1-j)}(0),\ \ s\geq 0.$$

Οπότε, σε συνδυασμό με τη σχέση (2.32), έχουμε ότι το πολυώνυμο

$$\hat{S}_{\zeta}(s)-(\beta-s)^n\hat{\zeta}(s),\quad s\geq 0 \tag{2.33}$$

είναι βαθμού $n-1$.

Αντικαθιστώντας την (2.33) στο μετασχηματισμό Laplace της m, που αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε ότι :

$$L(s)\hat{m}(s)=\lambda\hat{S}_{\zeta}(s)+\hat{p}_{n-1}(s)\,, \tag{2.34}$$

όπου $p_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

Κάνοντας πάλι χρήση των πολυωνύμων Lagrange, το πολυώνυμο $p_{n-1}(s)$ έχει τη μορφή

$$p_{n-1}(s)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_{\zeta}(\rho_j)}{\pi_{nj}(\rho_j)}\pi_{nj}(s)\,.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στη σχέση (2.34) έχουμε:

$$L(s)\hat{m}(s)=\lambda\left(\hat{S}_{\zeta}(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_{\zeta}(\rho_j)}{\pi_{nj}(\rho_j)}\pi_{nj}(s)\right),\quad s\geq 0\,. \tag{2.35}$$

∎

Εν συνεχεία ,θα βρούμε μια νέα μορφή της εξίσωσης Lundberg συναρτήσει των ριζών της, με τη βοήθεια του παρακάτω λήμματος.

ΛΗΜΜΑ 2.3: *Εάν οι ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg έχουν θετικό πραγματικό μέρος και είναι διακριτές, τότε η συνάρτηση $L(s)$ έχει την παρακάτω μορφή:*

$$L(s)=\left\{(-1)^n(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))+\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}T_{\rho_j}f\right)(0)\right\}\prod_{j=1}^{n}(s-\rho_j)\,. \tag{2.36}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις $h_0,h_1,...,h_n$,

όπου $h_k(s)=\begin{cases}(\beta-s)^n,\ \text{εάν}\ k=0\\ \dfrac{h_{k-1}(s)-h_{k-1}(\rho_k)}{s-\rho_k},\ \text{εάν}\ k=1,2,...,n,\ \ s\geq 0\end{cases}$

Με επαγωγή και με χρήση του ορισμού π_{kj} προκύπτει εύκολα ότι :

$$h_k(s)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)(\rho_j-s)}+\frac{(\beta-s)^n}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_k)}\,.$$

Για $k=1,2,...,n$, θέτουμε

$$\Lambda_k(s)=(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))h_k(s)+\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{kj}(\rho_j)}T_{\rho_j}f\right)(0)\,. \tag{2.37}$$

Έπειτα, θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$L(s)=\prod_{j=1}^{k}(s-\rho_j)\times\Lambda_k(s),\quad s\geq 0\quad \text{και}\quad k=1,2,...,n\,. \tag{2.38}$$

Από τον ορισμό της L και από το γεγονός ότι $L(\rho_1)=0$, έχουμε ότι

$$L(s)=L(s)-L(\rho_1)=$$
$$=(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))\left[(\beta-s)^n-(\beta-\rho_1)^n\right]-\lambda(\beta-\rho_1)^n(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1)),$$
η οποία απλοποιείται και γίνεται ίση με τη σχέση (2.38), για $k=1$.
Τώρα, υποθέτουμε ότι η σχέση (2.38) ισχύει για $k=l-1\in(1,2,...,n-1)$.
Θα αποδείξουμε ότι η σχέση (2.38) ισχύει για $k=l$.
Αφού οι $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ είναι διακριτές ρίζες της συνάρτησης L, τότε από τη σχέση (2.38), για $k=l-1$ προκύπτει ότι

$$\Lambda_{l-1}(\rho_1)=0.$$

Από τη σχέση (2.37) για $k=l-1$, έχουμε:

$$\Lambda_{l-1}(s)=\Lambda_{l-1}(s)-\Lambda_{l-1}(\rho_1)=$$
$$=(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))(h_{l-1}(s)-h_{l-1}(\rho_1))-\lambda h_{l-1}(\rho_1)(\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1))+$$
$$+\lambda(T_s-T_{\rho_l})\sum_{j=1}^{l-1}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{l-1j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(0)=$$
$$=(s-\rho_l)\left\{(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))h_l(s)+\lambda T_s(h_{l-1}(\rho_l))T_{\rho_l}f-\sum_{j=1}^{l-1}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{l-1j}(\rho_j)}T_{\rho_l}T_{\rho_j}f(0)\right\}$$

Δηλαδή,

$$\Lambda_{l-1}(s)=(s-\rho_l)((\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))h_l(s))+$$
$$+(s-\rho_l)\left\{\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{l-1}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{l-1j}(\rho_j)}T_{\rho_l}f+\frac{(\beta-\rho_l)^n}{(\rho_l-\rho_1)(\rho_l-\rho_2)...(\rho_l-\rho_{l-1})}T_{\rho_l}f\right)(0)\right\}+$$
$$+(s-\rho_l)\left\{\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{l-1}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{l-1j}(\rho_j)}\frac{(T_{\rho_j}-T_{\rho_l})f}{\rho_j-\rho_l}\right)(0)\right\}.$$

Απλοποιώντας, καταλήγουμε στη σχέση (2.38) για $k=l$. Το συμπέρασμα έπεται αμέσως για $k=n$, αποδεικνύοντας ότι

$$h_n(s)=(-1)^n.$$

Για να το δείξουμε αυτό, υποθέτουμε ότι $q(s)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}\pi_{nj}(s)+(\beta-s)^n$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, $h_n(s)=\dfrac{q(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_n)}$.

Επειδή, η συνάρτηση h_n είναι λόγος δύο πολυωνύμων βαθμού n με τις ίδιες ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ και επιπλέον, ο συντελεστής του s^n είναι $(-1)^n$ για τη συνάρτηση q, καταλήγουμε ότι $h_n(s)=(-1)^n$ (εκτός όταν $s=\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$).
Συνεχίζοντας, λοιπόν, την απόδειξη και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 και τη σχέση (2.32), έχουμε ότι:

$$\left\{(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))(-1)^n+\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{kj}(\rho_j)}T_{\rho_j}f\right)(0)\right\}\hat{m}(s)=$$

$$= \lambda(-1)^n \left\{ \frac{\hat{S}_\zeta(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_n)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{S}_\zeta(\rho_j)}{\pi_{nj}(\rho_j)(s-\rho_j)} \right\} =$$

$$= \lambda T_s T_{\rho_1} ... T_{\rho_n} S_\zeta(0), \;\; s \neq \rho_1, ..., \rho_n .$$

Κάνοντας αντιστροφή, οδηγούμαστε στην εξής σχέση

$$m(u) = \int_0^u m(u-y) h_\delta(y) dy + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} T_{\rho_1} ... T_{\rho_n} \zeta^{(k)}(u), \;\; u \geq 0 \quad (2.39)$$

όπου $h_\delta(y) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \left\{ f(y) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)} T_{\rho_j} f(y) \right\}, \;\; y \geq 0$.

Ο τελευταίος όρος της σχέσης (2.39), δηλ.
ο $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} T_{\rho_1} ... T_{\rho_n} \zeta^{(k)}(u)$, μπορεί να απλοποιηθεί , χρησιμοποιώντας το επόμενο λήμμα. ▪

ΛΗΜΜΑ 2.4: *Για* $n \geq 1$ *και* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \in \mathbb{C}$, *διακριτοί μιγαδικοί αριθμοί , τότε έχουμε*

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\rho_l^{\,j}}{\pi_{nl}(\rho_l)} = \begin{cases} 0 \;, \textit{εάν} \;\; j = 0,1,2,...,n-2 \\ 1 \;, \textit{εάν} \;\; j = n-1. \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\pi_{nl}(\rho_l)} = \begin{cases} 1 \;, \text{ εάν } n = 1 \\ 0 \;, \text{ εάν } n = 2,3,... \end{cases}$$

Ορίζουμε διαδοχικά, μια ακολουθία συναρτήσεων, όπως στο προηγούμενο λήμμα,
με $h_0(s) = s$ και $h_n(s) = \dfrac{h_{n-1}(s) - h_{n-1}(\rho_n)}{s-\rho_n}, \;\; n \geq 1$.
Τότε, έπεται εύκολα ότι $h_1 = 1$ και $h_n = 0, \;\; n \geq 2$.
Επίσης, προκύπτει ότι

$$h_n(s) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\rho_l}{\pi_{nl}(\rho_l)(\rho_l - s)} + \frac{s}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_n)}, \text{ για } s \neq \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n . \qquad (2.40)$$

Εάν κανένας από τους αριθμούς $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ δεν είναι μηδέν, τότε από την εξίσωση (2.28) για $s = 0$, έπεται το συμπέρασμα.
Εάν, τώρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\rho_1 = 0$, τότε η σχέση (2.40) γίνεται:

$$h_n(s) = \sum_{l=2}^{n} \frac{\rho_l}{\pi_{nl}(\rho_l)(\rho_l - s)} + \frac{1}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_n)}, \text{ για } s \neq \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n .$$

Επεκτείνοντας την h_n λόγω συνέχειας στο 0, καταλήγουμε πάλι στο συμπέρασμα. Επομένως, για $j=0$ και για κάθε $n \geq 1$, ισχύει το ζητούμενο.

Παρατηρούμε, όμως, ότι $\sum_{l=1}^{n} \frac{{\rho_l}^n}{\pi_{nl}(\rho_l)} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{{\rho_l}^{l-1}}{\pi_{n-1l}(\rho_l)} + \rho_n \sum_{l=1}^{n} \frac{{\rho_l}^{l-1}}{\pi_{nl}(\rho_l)}$, για όλα τα $j \geq 1$ και $n \geq 2$. Τότε, με επαγωγή ως προς j και n, αποδεικνύεται το λήμμα.

Τότε, διαδοχικά, έχουμε τα ακόλουθα:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} T_{\rho_1} ... T_{\rho_n} \zeta^{(k)}(u) =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\pi_{nl}(\rho_l)} \left\{ {\rho_l}^k T_{\rho_l} \zeta(u) - \sum_{j=0}^{k-1} {\rho_l}^j \zeta^{(k-1-j)}(u) \right\} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\beta - \rho_l)^n}{\pi_{nl}(\rho_l)} T_{\rho_l} \zeta(u) + (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} \zeta^{(k-1-j)}(u) \sum_{l=1}^{n} \frac{{\rho_l}^j}{\pi_{jl}(\rho_l)}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\beta - \rho_l)^n}{\pi_{nl}(\rho_l)} T_{\rho_l} \zeta(u) + \zeta(u), \;\; u \geq 0 .$$

■

Το επόμενο βήμα της απόδειξης είναι να υπολογιστούν οι ποσότητες φ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$ της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Θα αρχίσουμε με το προσδιορισμό των ποσοτήτων φ_δ και f_δ. Από τη σχέση (2.39) παρατηρούμε ότι οι ποσότητες φ_δ και f_δ δεν εξαρτώνται από τη συνάρτηση ποινής w, οπότε αρκεί για ευκολία και χ.β.τ.γ να υποθέσουμε ότι $w(x,y)=1$, για όλα τα $x \geq 0$ και $y > 0$. Τότε άμεσα προκύπτει ότι $\zeta(u) = \overline{F}(u)$.

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι $\int_u^\infty T_{\rho_l} f(y)dy = T_{\rho_l} \overline{F}(u)$ με $u \geq 0$ και $l = 1,2,...,n$.

Λόγω της σχέσης (2.39) , η $\psi_\delta(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u \psi_\delta(u-y) h_\delta(y)dy + \int_u^\infty h_\delta(y)dy, \;\; u \geq 0 . \tag{2.41}$$

Παρατηρούμε όμως ότι για $u = 0$, η σχέση (2.41) γίνεται $\psi_\delta(0) = \int_0^\infty h_\delta(y)dy$.

Αλλά είναι γνωστό ότι $\varphi_\delta = \psi_\delta(0)$ λόγω της σχέσης (2.8), άρα $\varphi_\delta = \int_0^\infty h_\delta(y)dy$.

Επομένως λόγω του ότι η $h_\delta(y)$ είναι γνωστή και επειδή ισχύει ότι :

$\int_0^\infty T_{\rho_l} f(y)dy = T_{\rho_l} \overline{F}(0)$ έπεται η (2.29).

Για να βρούμε τη συνάρτηση f_δ, ορίζουμε την $f_\delta^*(y) = \frac{h_\delta(y)}{\varphi_\delta}$, παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της ψ_δ της σχέσης (2.41) καταλήγουμε ότι :

$$(1-\varphi_\delta \hat{f}_\delta^*(s))\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{\varphi_\delta(1-\hat{f}_\delta^*(s))}{s}, \quad s \geq 0 .$$

Με τον ίδιο τρόπο από την εξίσωση (2.8) και παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace φθάνουμε στην ακόλουθη σχέση :

$$(1-\varphi_\delta \hat{f}_\delta(s))\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{\varphi_\delta(1-\hat{f}_\delta(s))}{s}, \quad s \geq 0 .$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\hat{f}_\delta(s) = \hat{f}_\delta^*(s), \ s \geq 0$ οπότε και $f_\delta(y) = f_\delta^*(y), \ \forall y \geq 0$, άρα από τον ορισμό της $f_\delta^*(y)$ συμπεραίνουμε την (2.30).
Συγκρίνοντας τώρα τις σχέσεις (2.39), (2.4) και επειδή $h_\delta(y) = \varphi_\delta f_\delta^*(y) = \varphi_\delta f_\delta(y)$ τότε προκύπτει και η $H_{\delta,w}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.5: Για να υπολογιστεί πιο αποτελεσματικά το φ_δ, όπως φαίνεται από τη σχέση (2.29), μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω επιχείρημα:

- Εάν $\rho_j = 0$,τότε $T_{\rho_j}\overline{F}(0) = \int_0^\infty \overline{F}(y)dy = E(Y_1)$.
- Εάν $\rho_j \neq 0$, τότε $T_{\rho_j}\overline{F}(0) = 1 - T_{\rho_j}T_0 f(0) = \dfrac{\left[1-\hat{f}(\rho_j)\right]}{\rho_j}$.

Τότε επειδή ρ_j είναι ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg ($L(\rho_j)=0$), έχουμε σε συνδυασμό με την σχέση (2.19) τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
L(\rho_j) = 0 &\Rightarrow (\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(\rho_j))(\beta-\rho_j)^n - \mu\beta^n = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\lambda(1-\hat{f}(\rho_j)) + \mu + \delta)(\beta-\rho_j)^n = \mu\beta^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lambda(1-\hat{f}(\rho_j))(\beta-\rho_j)^n = \mu\beta^n - (\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lambda(\beta-\rho_j)^n T_{\rho_j}\overline{F}(0) = \frac{\mu\beta^n - (\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^n}{\rho_j} .
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6: (Μοντέλο με εκθετικά ύψη ασφαλίστρων και Erlang$(2,\beta)$)
Εάν τα ύψη των ασφαλίστρων ακολουθούν εκθετική κατανομή, τότε η ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg $\rho_1 \in [0,\beta)$ όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 2.4. Πιο συγκεκριμένα αν $\delta = 0$ τότε $\rho_1 = 0$, αλλά εάν $\delta \neq 0$ τότε $\rho_1 \in (0,\beta)$.
Έπεται από τη προηγούμενη παρατήρηση μία πιο απλοποιημένη μορφή της φ_δ , τότε από τη σχέση για $n=1$ έχουμε τα εξής:

- Για $\delta > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
\varphi_\delta &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}(1+(\beta-\rho_1)T_{\rho_j}\overline{F}(0)) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} + \frac{\lambda(\beta-\rho_1)T_{\rho_j}\overline{F}(0)}{\lambda+\mu+\delta} = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} + \frac{\mu\beta-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)}{(\lambda+\mu+\delta)\rho_1} = \ldots = 1 - \frac{\beta\delta}{(\lambda+\mu+\delta)\rho_1} .
\end{aligned}$$

- Για $\delta = 0$, ισχύει μετά από πράξεις ότι:

$$\varphi_\delta = 1 - \frac{\beta\delta(\mu E(P_1) - \lambda E(Y_1))}{\lambda+\mu} .$$

Στην περίπτωση που $n=2$ έχουμε τα εξής:

- Για $\delta>0$ έχουμε :

$$\varphi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(1-\frac{(\beta-\rho_1)^2T_{\rho_1}\overline{F}(0)}{\rho_1-\rho_2}-\frac{(\beta-\rho_2)^2T_{\rho_2}\overline{F}(0)}{\rho_2-\rho_1}\right)=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}-\frac{\lambda(\beta-\rho_1)^2T_{\rho_1}\overline{F}(0)}{(\lambda+\mu+\delta)(\rho_1-\rho_2)}-\frac{\lambda(\beta-\rho_2)^2T_{\rho_2}\overline{F}(0)}{(\lambda+\mu+\delta)(\rho_2-\rho_1)}=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}-\frac{1}{(\lambda+\mu+\delta)(\rho_1-\rho_2)}\left(\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)^2}{\rho_1}\right)+\frac{1}{(\lambda+\mu+\delta)(\rho_1-\rho_2)}\times$$

$$\times\left(\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2}\right)=\ldots=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}-\frac{\delta\beta^2}{(\lambda+\mu+\delta)\rho_1\rho_2}+\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}+\frac{\delta}{\lambda+\mu+\delta}=1-\frac{\delta\beta^2}{(\lambda+\mu+\delta)\rho_1\rho_2}.$$

- Για $\delta=0$, προκύπτει μετά από πράξεις ότι:

$$\varphi_\delta=1-\frac{\beta^2(\mu E(P_1)-\lambda E(Y_1))}{(\lambda+\mu)\rho_2}.$$

2.7 Μέτρα χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή, θα προσπαθήσουμε με τη βοήθεια της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu, να βρούμε αναλυτικές εκφράσεις για διάφορα μέτρα όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας $G(y\,|\,u)$.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Θεώρημα 2.1 της Παραγράφου 2.3, η συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής m, ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$m(u)=\varphi_\delta\int_0^u m(u-y)\,f_\delta(y)dy+H_{\delta,w}(u)\ ,$$

όπου $0<\varphi_\delta<1$ και

$$\varphi_\delta=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}v(dx\times dt),$$

$$f_\delta(y)=\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}p_x(y)v(dx\times dt),\ \ y>0\ ,$$

$$H_{\delta,w}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(u+x,y-u)p_x(y)v(dx\times dt)dy,\ \ u\ge 0\,.$$

Γνωρίζουμε ότι $m(u)=E\left[e^{-\delta t}w(U(T-),|U(T)|)I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]$.

Παρατηρούμε ότι για $\delta=0$ και

$$w(u+x,y-u)=I(|U(T)|\le z)=I(y-u\le z)=I(y\le z+u)=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{αν } y\le z+u\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

έχουμε ότι $m(u)=G(u,z)$, δηλαδή τη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Επίσης, $H_{\delta,w}(u)=H(u)=\int_u^{u+z}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}p_x(y)v(dx\times dt)dy=\int_u^{u+z}\varphi_0 f_0(y)dy=\varphi_0\int_u^{u+z}f_0(y)dy=$

$$=\varphi_0(\overline{F_0}(u)-\overline{F_0}(u+z))$$

Άρα, η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας $G(u,z)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$G(u,z)=\varphi_0\int_0^u G(u-y,z)f_0(y)dy+\varphi_0(\overline{F_0}(u)-\overline{F_0}(u+z)),\quad u\geq 0 \tag{2.42}$$

Ισχύει ότι,

$G(u,z)=P(|U(T)|\leq z,T<\infty|U(0)=u)$ και $\overline{G}(u,z)=P(|U(T)|>z,T<\infty|U(0)=u)$,

οπότε $G(u,z)+\overline{G}(u,z)=P(T<\infty|U(0)=u)=\psi(u)$,

δηλαδή $\overline{G}(u,z)=\psi(u)-G(u,z)$ (2.43)

Από τη σχέση (2.8) για $\delta=0$, έχουμε ότι

$$\psi(u)=\varphi_0\int_0^u\psi(u-y)f_0(y)dy+\varphi_0\overline{F}_0(u),u\geq 0 \tag{2.44}$$

Οπότε η σχέση (2.43) μέσω της (2.44) γίνεται:

$$\overline{G}(u,z)=\varphi_0\int_0^u\psi(u-y)f_0(y)dy+\varphi_0\overline{F}_0(u)-\varphi_0\int_0^u G(u-y,z)f_0(y)dy+\varphi_0(\overline{F_0}(u)-\overline{F_0}(u+z))=$$

$$=\varphi_0\int_0^u\overline{G}(u-y,z)f_0(y)dy+\varphi_0\overline{F_0}(u+z),$$

η λύση της οποίας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\overline{G}(u,z)=\frac{1}{1-\varphi_0}\int_0^u\varphi_0\overline{F_0}(u+z-y)(1-\psi(y))'dy+\varphi_0\overline{F_0}(u+z)=$$

$=\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^u\overline{F_0}(u+z-y)(-\psi(y))'dy+\varphi_0\overline{F_0}(u+z)$, η οποία μπορεί να γραφεί

$$\overline{G}(u,z)=\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(u+z)-\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(z)\psi(u)+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^u\psi(u-y)f_0(y+z)dy=$$

$$=\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}(\overline{F_0}(u+z)-\overline{F_0}(z)\psi(u))+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_z^{u+z}\psi(u+z-t)f_0(t)dt\ .$$

Παρατηρούμε ότι :

$$\int_z^{u+z}\psi(u+z-t)f_0(t)dt=\int_0^{u+z}\psi(u+z-t)f_0(t)dt-\int_0^z\psi(u+z-t)f_0(t)dt=$$

$$=\frac{\psi(u+z)-\varphi_0\overline{F_0}(u+z)}{\varphi_0}-\int_0^z\psi(u+z-t)f_0(t)dt\,.$$

Άρα,

$$\overline{G}(u,z)=\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}(\overline{F_0}(u+z)-\overline{F_0}(z)\psi(u))+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\left(\frac{\psi(u+z)-\varphi_0\overline{F_0}(u+z)}{\varphi_0}-\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt\right)$$

$$=-\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(z)\psi(u)+\frac{\psi(u+z)}{1-\varphi_0}-\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt\,.$$

Επομένως,

$$G(u,z)=\psi(u)-\overline{G}(u,z)=\psi(u)+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(z)\psi(u)-\frac{\psi(u+z)}{1-\varphi_0}+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt$$

$$=\left(1+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(z)\right)\psi(u)-\frac{\psi(u+z)}{1-\varphi_0}+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt=$$

$$=\left(\overline{F_0}(z)+F_0(z)+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\overline{F_0}(z)\right)\psi(u)-\frac{\psi(u+z)}{1-\varphi_0}+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt=$$

$$=F_0(z)\psi(u)+\frac{1}{1-\varphi_0}(\overline{F_0}(z)\psi(u)-\psi(u+z))$$

$$+\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}\int_0^z\psi(u+z-t)\,f_0(t)dt,u\geq 0\,. \qquad (2.45)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7: Στην Ενότητα 2.4, στο Παράδειγμα 2.3 έχει βρεθεί μια αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, όπου το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο β και το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική με παράμετρο α, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$\psi(u)=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\left(\frac{\alpha\mu-\beta\lambda}{\lambda+\mu}\right)u},\ u\geq 0\,.$$

Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων α,β,λ,μ, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και έπειτα τη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $G(u,z)$.

Αν θέσουμε $\alpha=1,\beta=1,\lambda=2,\mu=3$ έχουμε ότι $\psi(u)=\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}u},\ u\geq 0$.

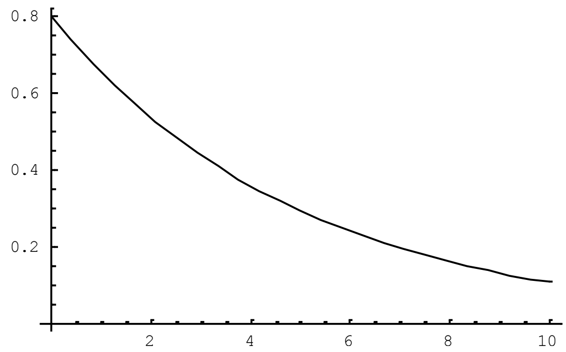
Από το Θεώρημα 2.3 της Παραγράφου 2.5, έχει αποδειχθεί ότι $f_\delta(y)=\frac{\lambda}{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left[f(y)+(\beta-\rho_1)T_{\rho_1}f(y)\right]$. Για $\delta=0$, έχουμε ότι $\rho_1=0$ οπότε

$$f_0(y)=\frac{\lambda}{\varphi_0(\lambda+\mu)}\ f(y)+\beta T_0 f(y)\ =\frac{2}{4}\left[f(y)+\overline{F}(y)\right]=\frac{1}{2}\left[e^{-y}+e^{-y}\right]=e^{-y}\sim Exp(1)\,.$$

Οπότε, η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $G(u,z)$ της σχέσης (2.45) γίνεται :

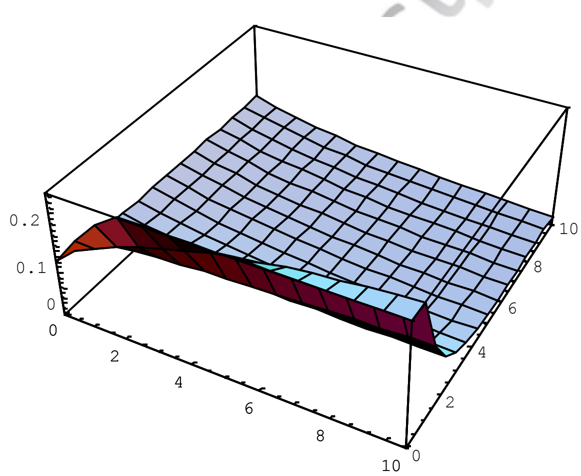
$$G(u,z)=\ (1-e^{-z})\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}u}+5\left(e^{-z}-\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}\ u+z}\right)+4\int_0^z\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}\ u+z-t}\ e^{-t}dt,u\geq 0\,.$$

Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν $u \in [0,10]$ και η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος όταν $u \in [0,10]$ και $z \in (0,10]$.



Σχήμα 1.1

Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας για εκθετικά ύψη ασφαλίστρων στην περίπτωση όπου $u \in [0,10]$.



Σχήμα 1.2

Η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος για εκθετικά ύψη ασφαλίστρων όταν $u \in [0,10]$ και $z \in (0,10]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8: Στην Ενότητα 2.4, στο Παράδειγμα 2.3 έχουμε υποθέσει ότι το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους n και β και ότι το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική με παράμετρο α.
Στην ειδική περίπτωση όπου $n = 2, \beta = 1, a = 1, \lambda = 2, \mu = 3$ και $\delta = 0$, υπολογίζουμε το πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού $p(v)$, που είναι το ακόλουθο:

$$p(v) = 5v^3 - 8v^2 - 3v + 6.$$

Επιλύοντας την εξίσωση $p(v)=0$, βρίσκουμε τις τρεις ρίζες του πολυωνύμου $p(v)$, οι οποίες είναι οι $v_1=1$, $v_2=\frac{1}{10}(3-\sqrt{129})$ και $v_3=\frac{1}{10}(3+\sqrt{129})$.

Για να ισχύει όμως ότι $\varphi_\delta \in (0,1)$, όπως έχει δειχθεί και στο Παράδειγμα 2.3, πρέπει η ρίζα του πολυωνύμου να ανήκει στην προκειμένη περίπτωση στο διάστημα $(1,2)$. Δηλαδή, δεκτή ρίζα είναι μόνο η $v_3=\frac{1}{10}(3+\sqrt{129})$, οπότε άμεσα μπορεί να υπολογιστεί ότι $\varphi_0=0.564223$ από τη σχέση $v=\dfrac{\beta+(1-\varphi_0)a}{\beta}$.

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, είναι η ακόλουθη:

$$\psi(u)=\varphi_0 e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}=0.564223e^{-0.435777u},\ u\geq 0 .$$

Θα υπολογίσουμε τώρα η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $G(u,z)$.

Από το Θεώρημα 2.4 και τη σχέση (2.30) έχουμε ότι :

$$f_\delta(y)=\frac{\lambda}{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left[f(y)+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{nj}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(y)\right],\ y\geq 0 .$$

Για $\delta=0, \lambda=2, \mu=3$, έχουμε ότι :

$$f_0(y)=\frac{2}{5\varphi_0}\left[f(y)-\sum_{j=1}^{2}\frac{(1-\rho_j)^n}{\pi_{2j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(y)\right].$$

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης Lundberg $L(s)$, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$L(s)=\left[\lambda+\mu+\delta-\lambda f(s)\right](\beta-s)^n-\mu\beta^n=0 .$$

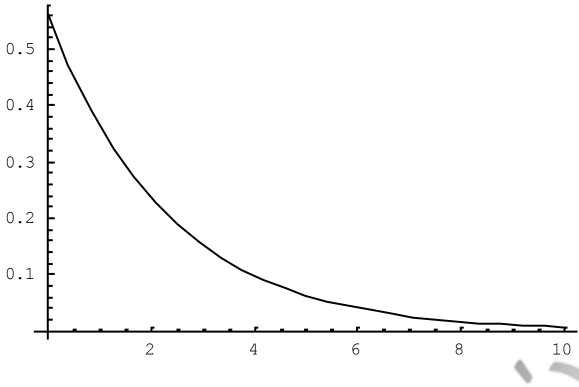
Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων που έχουμε παραθέσει παραπάνω, καταλήγουμε στην επίλυση της $5s^3-7s^2-4s=0$, οι ρίζες της οποίας είναι οι $s_1=0$ και $s_2=\frac{1}{10}(7+\sqrt{129})$.

Οπότε αντικαθιστώντας και εκτελώντας πράξεις έχουμε ότι $f_0(y)=e^{-y}\sim Exp(1)$.

Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $G(u,z)$ της σχέσης (2.45) γίνεται:

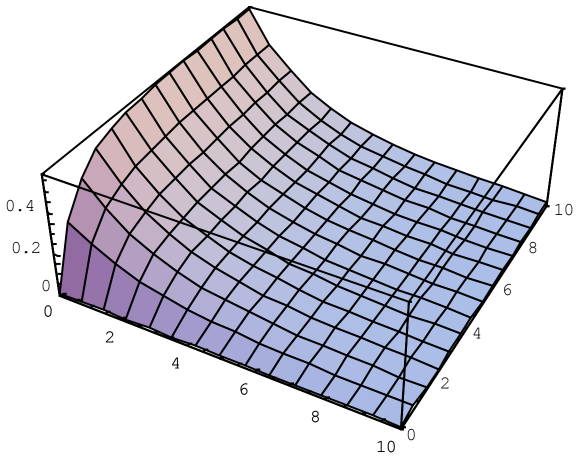
$$\begin{aligned} G(u,z) &= 0.730529(-1.77235e^{-0.435777u-y}+1.77235e^{-0.435777(u+y)})+0.564223e^{-0.435777u}(1-e^{-y}) \\ &= +2.29475(0.564223e^{-0.435777u-y}-0.564223e^{-0.435777(u+y)}) \end{aligned}$$

Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν $u \in [0,10]$ και η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος όταν $u \in [0,10]$ και $z \in (0,10]$.



Σχήμα 1.3

Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας για ύψη ασφαλίστρων Erlang(2,1) στην περίπτωση όπου $u \in [0,10]$



Σχήμα 1.4

Η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος για ύψη ασφαλίστρων Erlang(2,1) όταν $u \in [0,10]$ και $z \in (0,10]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και συγκεκριμένη εξάρτηση μεταξύ ύψους ασφαλίστρων και αποζημιώσεων

3.1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη μελετήσει στο Κεφάλαιο 2, το μοντέλο της διαδικασίας πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα και ανεξαρτησία μεταξύ του ύψους των ζημιών και των ασφαλίστρων. Αυτό βέβαια δεν προσεγγίζει την πραγματικότητα αφού η υπόθεση της ανεξαρτησίας στην ουσία δεν υφίσταται. Πολλές φορές στις ασφαλιστικές εταιρίες τα ασφάλιστρα αναπροσαρμόζονται κατάλληλα βάσει του δείκτη ζημιών του χαρτοφυλακίου τους. Το ύψος της ζημιάς μπορεί επίσης να επηρεάσει και το χρόνο που θα μεσολαβήσει μέχρι να συμβεί η επόμενη ζημιά. Για το λόγο αυτό, θα μελετήσουμε ένα δεύτερο μοντέλο, πιο ρεαλιστικό από το προηγούμενο, όπου υπάρχει ένα είδος συγκεκριμένης εξάρτησης μεταξύ αυτών των τριών μεταβλητών και το οποίο θα παρουσιαστεί στην ακόλουθη παράγραφο.

3.2 Περιγραφή μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα

Θεωρούμε ότι η $\mathrm{M}(t)$ παριστάνει τον αριθμό των ασφαλίστρων που εισπράττονται από την ασφαλιστική εταιρία μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο λ, όπου $\lambda > 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots$ εκφράζουν το ύψος των ασφαλίστρων που καταβάλλονται. Έστω επίσης ότι η $N(t)$ παριστάνει τον αριθμό των αποζημιώσεων (ζημιών) που επέρχονται μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο μ και ενδιάμεσους χρόνους V_i, μέχρι την επέλευση της i ζημιάς. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ υποθέτουμε ότι ισχύει $N(0) = 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με κατανομή Y στο $(0, \infty)$ και σ.κ. $F(y), y > 0$, σ.π.π $f(y)$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy$.

Υποθέτουμε επίσης ότι οι τ.μ. που αναφέρονται στο ύψος των ασφαλίστρων και στο πλήθος των ζημιών εξαρτώνται με ένα συγκεκριμένο τρόπο από την τ.μ. του ύψους των ζημιών. Πιο συγκεκριμένα,

- Εάν το ύψος της ζημιάς Y_i είναι μεγαλύτερο ή ίσο από B_i, τότε ο χρόνος V_{i+1} που μεσολαβεί μέχρι να συμβεί η επόμενη ζημιά είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_1}$, δηλ. $V_{i+1} \sim \exp(\lambda_1)$ και το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί τ.μ. με σ.κ. $F_1(\cdot)$, μέσο μ_1 και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_1(\cdot)$.

- Αλλιώς, ο χρόνος V_{i+1} που μεσολαβεί μέχρι να συμβεί η επόμενη ζημιά είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_2}$, δηλ. $V_{i+1} \sim \exp(\lambda_2)$ και το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί τ.μ. με σ.κ. $F_2(\cdot)$, μέσο μ_2 και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_2(\cdot)$.

Οι τ.μ. B_i είναι ανεξάρτητες με τις τ.μ. Y_i και ακολουθούν την κατανομή $\mathrm{B}(\cdot)$.
Όμως, επειδή δε γνωρίζουμε το ύψος της πρώτης ζημιάς που θα συμβεί , για να προβλέψουμε όπως παραπάνω τι κατανομή ακολουθεί ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι να συμβεί η πρώτη ζημιά, θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_1}$ ή $\frac{1}{\lambda_2}$.
Αντίστοιχα, η τ.μ. του ύψους του ασφαλίστρων έχει σ.κ. $F_i(\cdot)$, εφόσον ο ενδιάμεσος χρόνος V_1 μέχρι να επέλθει η πρώτη ζημιά είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_i}$.

Αν ορίσουμε $T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$, την τ.μ. που παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται ώστε να συμβούν n ζημιές, το πλεόνασμα μέχρι τη n-οστή ζημιά μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{M(T_n)} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i =$$
$$= u + (\sum_{i=1}^{M(T_1)} X_i) + (\sum_{i=M(T_1)+1}^{M(T_2)} X_i) + \ldots + (\sum_{i=M(T_{n-1})+1}^{M(T_n)} X_i) - \sum_{i=1}^{n} Y_i =$$
$$= u + \sum_{i=1}^{M(T_1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1} (Y_k - \sum_{i=M(T_k)+1}^{M(T_{k+1})} X_i) - Y_n =$$
(κατά κατανομή)
$$= u + \sum_{i=1}^{M(V_1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1} (Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i) - Y_n \quad ,$$

αφού $V_1 = T_1$ και $V_{k+1} = T_{k+1} - T_k$ και τα $Y_k - \sum_{i=M(T_k)+1}^{M(T_{k+1})} X_i$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα και ίσα κατά κατανομή με $Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i$.

Τότε τα $Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα και ισοδυναμούν με τα $Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι από το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u+\sum_{i=1}^{M(V_1)}X_i-Y_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(Y_k-\sum_{i=1}^{M(V_{k+1})}X_i\right)}{n}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(Y_k-\sum_{i=1}^{M(V_{k+1})}X_i\right)}{n}=-E\left(Y_1-\sum_{i=1}^{M(V_2)}X_i\right)=$$

$$=P(Y\geq B)\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1}+P(Y<B)\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2}-\mu\ .$$

Οπότε σαν αναγκαία συνθήκη προκειμένου η U_n να είναι οριακά θετική, έχουμε την ακόλουθη :

$$P(Y\geq B)\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1}+P(Y<B)\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2}-\mu>0\,. \tag{3.1}$$

Για τα ακόλουθα ορίζουμε για $\delta\geq 0$, τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως

$$\varphi(u)=E\left[e^{-\delta t}w(U(T-),|U(T)|)I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right].$$

3.3 Η μελέτη της συνάρτησης Gerber – Shiu

Ας ορίζουμε $\varphi_i(u)$, $i=1,2,$ την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber- Shiu στην περίπτωση που ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι να συμβεί η πρώτη ζημιά είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_i}$, $i=1,2$.

Δεσμεύοντας λοιπόν, ως προς το πρώτο γεγονός, θα υπολογιστεί η συνάρτηση των Gerber – Shiu και θα δειχθεί ότι ικανοποιεί μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace στην ειδική περίπτωση όπου το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί εκθετική κατανομή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1: *Κάτω από τις υποθέσεις της παραγράφου 3.2, η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει την ακόλουθη μορφή :*

$$\varphi_1(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}A_1(u)+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}\omega(u)+$$
$$+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u\varphi_1(u-y)\xi_1(y)dy+\int_0^u\varphi_2(u-y)\xi_2(y)dy\right) \tag{3.2}$$

και $$\varphi_2(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}A_2(u)+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\omega(u)+$$
$$+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\left(\int_0^u\varphi_1(u-y)\xi_1(y)dy+\int_0^u\varphi_2(u-y)\xi_2(y)dy\right), \tag{3.3}$$

όπου, $\xi_1(y)=f(y)B(y)$, $\xi_2(y)=f(y)\overline{B}(y)$

$$\textit{και} \;\; A_1(u)=\int_0^{\infty}\varphi_1(u+x)\,f_1(x)dx \;\;,\;\; A_2(u)=\int_0^{\infty}\varphi_2(u+x)\,f_2(x)dx\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας θεωρήσουμε W_1 το χρόνο μέχρι να εισπραχθεί το πρώτο ασφάλιστρο , με σ.π.π. $P(W_1)=\lambda e^{-\lambda t}$, λ>0 και V_1 το χρόνο μέχρι να συμβεί η πρώτη ζημιά , με σ.π.π.

$$P(V_1=t)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\ ,\ \lambda_1>0 \qquad \text{ή} \qquad P(V_1=t)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\ ,\ \lambda_2>0\,. \qquad .$$

Αν θέσουμε $Z=\min(W_1,V_1)$, ισχύει ότι $P(Z=t)=(\lambda+\lambda_i)e^{-(\lambda+\lambda_i)t}$, $\lambda_i>0$, $i=1,2$.

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του γεγονότος που θα συμβεί πρώτα, είτε ζημιά είτε εισροή ασφαλίστρου, η συνάρτηση Gerber-Shiu από το ΘΟΠ γίνεται :

$$\varphi_i(u)=\int_0^{\infty}\varphi_i(u\,|\,Z=t)P(Z=t)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\varphi_i(u\,|\,Z=t)(\lambda+\lambda_i)e^{-(\lambda+\lambda_i)t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}[\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1<V_1)P(W_1<V_1)+$$

$$+\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1>V_1)P(W_1>V_1)](\lambda+\lambda_i)e^{-(\lambda+\lambda_i)t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1<V_1)\lambda+\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1>V_1)\lambda_i\ e^{-(\lambda+\lambda_i)t}dt,$$

$$\times(\lambda+\lambda_i)e^{-(\lambda+\lambda_i)t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1<V_1)\lambda+\varphi_i(u\,|\,Z=t,W_1>V_1)\lambda_i\ e^{-(\lambda+\lambda_i)t}dt,\ \ \text{με } i=1,2\,. \quad (3.4)$$

- Αν εισπραχθεί πρώτα ασφάλιστρο ύψους π.χ x, η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$.
- Αν συμβεί πρώτα ζημιά ύψους π.χ. y, σε περίπτωση που η ζημιά είναι μικρότερη από το αρχικό αποθεματικό δηλ. $y<u$, η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$ και ανάλογα αν το ύψος της ζημιάς είναι επίσης μεγαλύτερο ή ίσο από B, έχουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu $\varphi_1(u)$, ενώ αν είναι μικρότερο από B , έχουμε τη $\varphi_2(u)$.
- Σε περίπτωση που το ύψος της ζημιάς είναι μεγαλύτερο από το αρχικό αποθεματικό δηλ. $y>u$, εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής.

Οπότε, η σχέση (3.4) γράφεται ως εξής :

$$\varphi_i(u)=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}e^{-(\lambda+\lambda_i)t}\times$$

$$\times\left[\lambda_i\left(\int_0^{u}\varphi_i(u-y)P(Y=y)dy+\int_u^{\infty}w(u,y-u)P(Y=y)dy\right)+\lambda\int_0^{\infty}\varphi_i(u+x)\,f_i(x)dx\right]dt\,. \ (3.5)$$

Όμως,

$$\int_0^u \varphi_i(u-y)P(Y=y)dy = \int_0^u \varphi_i(u-y)P(Y=y, y \geq B)P(y \geq B) + P(Y=y, y<B)P(y<B)dy$$

$$= \int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy \,. \qquad (3.6)$$

Επομένως, η σχέση (3.5) μέσω της (3.6) γίνεται :

$$\varphi_i(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\lambda+\lambda_i)t} \{\lambda \int_0^\infty \varphi_i(u+x)\, f_i(x)dx + \lambda_i \int_u^\infty w(u, y-u)\, f(y)dy +$$

$$\lambda_i (\int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy)\}dt \ , \ i=1,2 \,.$$

Δηλαδή, για $i=1$ έχουμε ότι :

$$\varphi_1(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\lambda+\lambda_1)t} \{\lambda \int_0^\infty \varphi_1(u+x)\, f_1(x)dx + \lambda_1 \int_u^\infty w(u, y-u)\, f(y)dy +$$

$$\lambda_1 \left(\int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy \right)\}dt$$

και για $i=2$,

$$\varphi_2(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\lambda+\lambda_2)t} \{\lambda \int_0^\infty \varphi_2(u+x)\, f_2(x)dx + \lambda_2 \int_u^\infty w(u, y-u)\, f(y)dy +$$

$$\lambda_2 \left(\int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy \right)\}dt \,.$$

Αν θέσουμε $\omega(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)\, f(y)dy$, τότε :

$$\varphi_1(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\lambda+\lambda_i)t} \{\lambda \int_0^\infty \varphi_1(u+x) f_1(x)dx + \lambda_1 \omega(u) +$$

$$\lambda_1 \left(\int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy \right)\}dt$$

και

$$\varphi_2(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\lambda+\lambda_2)t} \{\lambda \int_0^\infty \varphi_2(u+x)\, f_2(x)dx + \lambda_2 \omega(u) +$$

$$\lambda_2 \left(\int_0^u \varphi_1(u-y)\, f(y)B(y)dy + \int_0^u \varphi_2(u-y)\, f(y)\overline{B}(y)dy \right)\}dt \,.$$

Απλοποιώντας ακόμα περισσότερο τις παραπάνω εξισώσεις, έχουμε :

$$\varphi_1(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta} \int_0^\infty \varphi_1(u+x)\, f_1(x)dx + \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}\omega(u) +$$

$$+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u \varphi_1(u-y)f(y)B(y)dy+\int_0^u \varphi_2(u-y)f(y)\overline{B}(y)dy\right)$$

και

$$\varphi_2(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}\int_0^\infty \varphi_2(u+x)f_2(x)dx+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\omega(u)+$$

$$+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\left(\int_0^u \varphi_1(u-y)f(y)B(y)dy+\int_0^u \varphi_2(u-y)f(y)\overline{B}(y)dy\right).$$

Αν θέσουμε $\xi_1(y)=f(y)B(y)$, $\xi_2(y)=f(y)\overline{B}(y)$ και $A_1(u)=\int_0^\infty \varphi_1(u+x)f_1(x)dx$, $A_2(u)=\int_0^\infty \varphi_2(u+x)f_2(x)dx$, προκύπτουν οι σχέσεις (3.2) και (3.3) του Θεωρήματος 3.1. ▪

3.3.1 Η ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu για εκθετικό ύψος ασφαλίστρων

Στην υποενότητα αυτή, θα βρεθεί μια πιο συγκεκριμένη μορφή της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace και κάτω από την υπόθεση της εκθετικής κατανομής του ύψους των ασφαλίστρων.
Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί εκθετική κατανομή με σ.π.π $f_i(x)=\frac{1}{\mu_i}e^{-\frac{1}{\mu_i}x}$, $x>0$, $i=1,2$ θα απλοποιηθεί περαιτέρω η μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu που είχε δοθεί στο Θεώρημα 3.1 της προηγούμενης παραγράφου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2: *Υποθέτοντας ότι το ύψος των ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένο, οι μετασχηματισμοί Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{h_1(s)-\dfrac{\lambda\chi_2(s)\hat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 s)}-\dfrac{\lambda\lambda_2\hat{\xi}_2(s)\hat{\varphi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s)-\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}}, \tag{3.7}$$

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{h_2(s)-\dfrac{\lambda\chi_1(s)\hat{\varphi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}-\dfrac{\lambda\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s)-\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}}, \tag{3.8}$$

όπου

$$h_1(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)},$$

$$h_2(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda\lambda_2}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 s)} \quad \text{και}$$

$$\chi_i(s)=1-\frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_i+\delta)(1-\mu_i s)}-\frac{\lambda_i\xi_i(s)}{\lambda+\lambda_i+\delta},\quad i=1,2\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Στο Θεώρημα 3.1, αποδείξαμε ότι :

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}\hat{A}_1(s)+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}\hat{\omega}(s)+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}(\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s))$$

και

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}\hat{A}_2(s)+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\hat{\omega}(s)+\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}(\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s))\,.$$

Δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$(\lambda+\lambda_1+\delta)\hat{\varphi}_1(s)=\lambda\hat{A}_1(s)+\lambda_1(\hat{\omega}(s)+\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s)) \tag{3.9}$$

και

$$(\lambda+\lambda_2+\delta)\hat{\varphi}_2(s)=\lambda\hat{A}_2(s)+\lambda_2(\hat{\omega}(s)+\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s))\,. \tag{3.10}$$

Για τον υπολογισμό όμως των $\hat{\varphi}_1(s)$ και $\hat{\varphi}_2(s)$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\hat{A}_1(s)$ και $\hat{A}_2(s)$.

Ας υπολογίσουμε λοιπόν, το μετασχηματισμό Laplace $\hat{A}_i(s)$.

$$\hat{A}_i(s)=\int_0^\infty e^{-su}A(u)du=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty \varphi_i(u+x)f_i(x)dxdu=$$

$$=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty \varphi_i(u+x)\frac{1}{\mu_i}e^{-\frac{1}{\mu_i}x}dxdu= \qquad \text{θέτουμε } y=u+x$$

$$=\frac{1}{\mu_i}\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \varphi_i(y)e^{-\frac{1}{\mu_i}y-u}dydu=$$

$$=\frac{1}{\mu_i}\int_0^\infty e^{-su}T_{\frac{1}{\mu_i}}\varphi_i(u)du=$$

$$=\frac{1}{\mu_i}\hat{T}_{\frac{1}{\mu_i}}\varphi_i(s)=\frac{1}{\mu_i}\frac{\hat{\varphi}_i(s)-\hat{\varphi}_i(\frac{1}{\mu_i})}{\frac{1}{\mu_i}-s}=\frac{\hat{\varphi}_i(s)-\hat{\varphi}_i(\frac{1}{\mu_i})}{1-\mu_i s},\quad i=1,2\,.$$

Οπότε, οι σχέσεις (3.9) και (3.10) αντίστοιχα γίνονται:

$$(\lambda+\lambda_1+\delta)\hat{\varphi}_1(s)=\lambda\frac{\hat{\varphi}_1(s)-\hat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{1-\mu_1 s}+\lambda_1(\hat{\omega}(s)+\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s))$$

και

$$(\lambda+\lambda_2+\delta)\hat{\varphi}_2(s)=\lambda\frac{\hat{\varphi}_2(s)-\hat{\varphi}_2\left(\dfrac{1}{\mu_2}\right)}{1-\mu_2 s}+\lambda_2(\hat{\omega}(s)+\hat{\varphi}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{\varphi}_2(s)\hat{\xi}_2(s)).$$

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς $\hat{\varphi}_2(s)$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει το ζητούμενο. ▪

Σκοπός μας είναι η περαιτέρω απλοποίηση των ποσοτήτων $\hat{\varphi}_1(s)$ και $\hat{\varphi}_2(s)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1: *Ο παρονομαστής $B(s)$ των παραπάνω ποσοτήτων , δηλ. ο*

$$\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, έστω $\rho_1(s)$ και $\rho_2(s)$ με θετικό πραγματικό μέρος .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πολλαπλασιάζοντας το παρονομαστή με τη ποσότητα $(1-\mu_i(s))$ για $i=1,2$, έχουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{2}(\chi_i(s)(1-\mu_i(s)))=\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\lambda_i(1-\mu_i(s))\hat{\xi}_i(s)}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right),$$

η οποία ισότητα είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη :

$$\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)=\left(1-\mu_1 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}\right)\frac{\lambda_2(1-\mu_2(s))\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}+$$

$$+\left(1-\mu_2 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}\right)\frac{\lambda_1(1-\mu_1(s))\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}. \quad (3.11)$$

Οπότε τώρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Rouche.

Έστω $r>0$ ένας αρκετά μεγάλος αριθμός και σύνολο S_r το οποίο περιέχει ένα ημικύκλιο με ακτίνα r που διατρέχει το μιγαδικό επίπεδο από το $-ir$ στο ir με τη φορά του ρολογιού. Θα δείξουμε ότι για $s\in S_r$ το μέτρο του αριστερού μέλους της σχέσης (3.11) είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το μέτρο του δεξιού μέλους.

Δύο άμεσα αποτελέσματα που θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια είναι τα ακόλουθα :

- πρώτον, για s στο μιγαδικό άξονα έχουμε ότι $\dfrac{|\lambda_i-\lambda_i\mu_i s|}{|\lambda_i+\delta-(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_i s|}<1$, για $i=1,2$ και
- δεύτερον, για s στο ημικύκλιο έχουμε $\forall\varepsilon>0$

$$\frac{\left|\dfrac{1}{\mu_i}-s\right|}{\left|\dfrac{\lambda_i+\delta}{(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_i}-s\right|}<1+\varepsilon$$, όπου r αρκετά μεγάλο.

Οπότε για $i=1,2$ έχουμε:

$$\frac{|\lambda_i-\lambda_i\mu_i s|}{|\lambda_i+\delta-(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_i s|}=\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i+\delta}\frac{\left|\frac{1}{\mu_i}-s\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_i}-s\right|}<\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i+\delta}(1+\varepsilon)\leq 1.$$

Επομένως για r αρκετά μεγάλο έχουμε τα ακόλουθα:

$$\left|\left(1-\mu_1 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}\right)\frac{\lambda_2(1-\mu_2(s))\xi_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}+\left(1-\mu_2 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}\right)\frac{\lambda_1(1-\mu_1(s))\xi_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\right|=$$

$$=\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|\left|\frac{\lambda_2(1-\mu_2(s))\xi_2(s)}{\lambda_2+\delta-(\lambda+\lambda_2+\delta)\mu_2 s}+\frac{\lambda_1(1-\mu_1(s))\xi_1(s)}{\lambda_1+\delta-(\lambda+\lambda_1+\delta)\mu_1 s}\right|=$$

$$\leq\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|\left(\frac{|\lambda_2(1-\mu_2(s))||\xi_2(s)|}{|\lambda_2+\delta-(\lambda+\lambda_2+\delta)\mu_2 s|}+\frac{|\lambda_1(1-\mu_1(s))||\xi_1(s)|}{|\lambda_1+\delta-(\lambda+\lambda_1+\delta)\mu_1 s|}\right)<$$

$$<\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|(|\xi_2(s)|+|\xi_1(s)|)\leq$$

$$\leq\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|(|\xi_2(s)|+|\xi_1(0)|)=$$

$$=\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|.$$

Βλέπουμε ότι και τα δύο μέλη είναι συναρτήσεις αναλυτικές για $s\in S_r$. Τότε από θεώρημα Rouche, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση (3.11) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την ακόλουθη εξίσωση στο εσωτερικό του S_r

$$\left|\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}\right)\right|=0.$$

Προφανώς όμως η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες στο εσωτερικό του S_r οπότε και η εξίσωση (3.11) έχει επίσης δύο ρίζες στο εσωτερικό του S_r.
Τελικά για $r\to\infty$ η απόδειξη είναι πλήρης.

∎

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1 : Θα συμβολίζουμε τη μικρότερη ρίζα με $\rho_1(\delta)$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\lim_{\delta\to 0}\rho_1(\delta)=0$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι αυτές οι δύο ρίζες είναι διακριτές και τις συμβολίζουμε με ρ_1,ρ_2. Επειδή $\varphi_i(s)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(s)>0$,οι ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες και των αριθμητών (3.7),(3.8). Και οι δύο περιπτώσεις δίνουν τις ακόλουθες εξισώσεις για τα $\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right),\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)$.

$$\frac{\lambda\chi_2(\rho_i)\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1\rho_i)}+\frac{\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(\rho_i)\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2\rho_i)}=$$
$$=h_1(\rho_i)\hat{\omega}(\rho_i)\ ,i=1,2. \qquad (3.12)$$

Επιλύοντας την (3.12), υπολογίζουμε τα $\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$και $\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)$ και αντίστοιχα τα $\hat{\varphi}_1(s)$, $\hat{\varphi}_2(s)$ μπορούν πλέον να υπολογιστούν.

Ακολούθως, θα παρουσιαστεί ένα αριθμητικό παράδειγμα προκειμένου να υπολογιστούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας στην περίπτωση όπου τα ύψη των αποζημιώσεων και το Β είναι εκθετικά κατανεμημένα .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1: Υποθέτοντας ότι $B(x)=1-e^{-0.5x}$ και $F(y)=1-e^{-y}$ και θέτοντας $\lambda=1,\lambda_1=0.4,\lambda_2=0.5,\mu_1=0.5,\mu_2=1,\delta=0,w=1,$ η συνάρτηση Gerber-Shiu $\varphi_i(u),i=1,2$ γίνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_i(u),i=1,2$.

Συγκεκριμένα, από τη σχέση $\chi_1(s)\chi_2(s)=\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$ και αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων, έχουμε:

$$\left[1-\frac{1}{1.4(1-0.5s)}-\frac{0.4}{1.4}\left(\frac{1}{1+s}-\frac{1}{1.5+s}\right)\right]\left[1-\frac{1}{1.5(1-s)}-\frac{0.5}{1.5(1.5+s)}\right]=\frac{0.2}{1.4\times1.5}\left(\frac{1}{1+s}-\frac{1}{1.5+s}\right)\frac{1}{1.5+s}$$

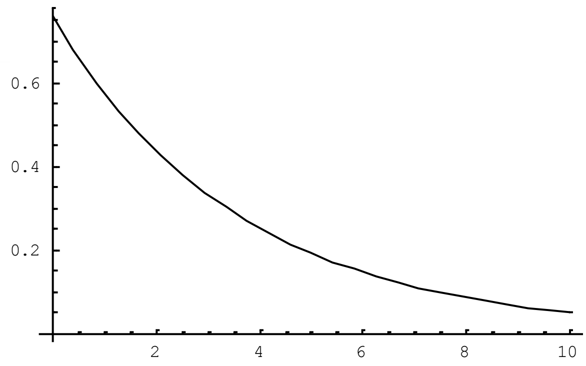
Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση, βρίσκουμε τις τέσσερις ρίζες της εξίσωσης Lundberg, οι οποίες είναι οι ακόλουθες $s_1=0,s_2=0.523,s_3=-0.271,s_4=-1.514$.

Με τη βοήθεια των ριζών, επιλύοντας την εξίσωση (3.12) βρίσκουμε τα $\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)=0,333621,\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)=0,541487$.

Τελικά μέσω αντιστροφής των μετασχηματισμών Laplace,προκύπτει ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_i(u),i=1,2$ είναι οι ακόλουθες :

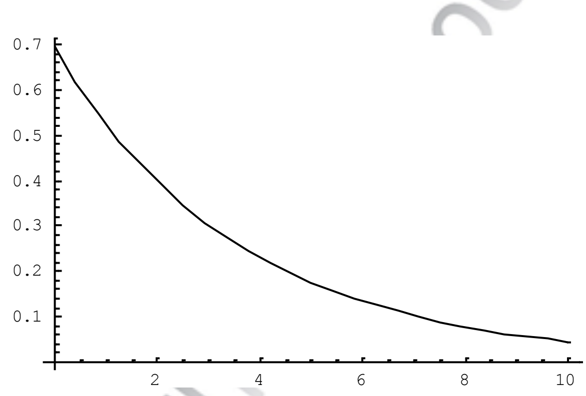
$$\psi_1(u)=0.7487e^{-0.271u}+0.0136e^{-1.514u}$$
$$\psi_2(u)=0.6815e^{-0.271u}+0.0128e^{-1.514u}.$$

Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ αντίστοιχα, όταν το αρχικό αποθεματικό $\mathrm{u}\in[0,10]$.



Σχήμα 3.1

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ όταν το αρχικό αποθεματικό $\text{u} \in [0,10]$



Σχήμα 3.2

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_2(u)$ όταν το αρχικό αποθεματικό $\text{u} \in [0,10]$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3: *Ας υποθέσουμε ότι το ύψος των ασφαλίστρων ακολουθεί εκθετική κατανομή , τότε οι συναρτήσεις Gerber- Shiu , $\varphi_1(u)$ και $\varphi_2(u)$, ικανοποιούν τις ακόλουθες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις:*

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^u \varphi_1(u-x)G(x)dx + B_1(u)\,, \tag{3.13}$$

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^u \varphi_2(u-x)G(x)dx + B_2(u)\,, \tag{3.14}$$

όπου,

$$G(x)=\sum_{k=1}^{2}\Big[h_{k_1}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)+h_{k_2}(\rho_1 T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)-T_{\rho_2}\xi_k(x))+h_{k_1}(\xi_k(x)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}\xi_k(x)+\rho_1^{2}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x))\Big]$$

$$B_1(u)=\frac{\lambda_1\omega(u)}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{1}{\mu_1\mu_2}\left[\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\omega(u)+\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\omega(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_2(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_2(u)\right]$$

$$B_1(u)=\frac{\lambda_2\omega(u)}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{1}{\mu_1\mu_2}\left[\frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\omega(u)+\frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\omega(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_1(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_1(u)\right]$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έχουμε αποδείξει στο Θεώρημα 3.2 ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber- Shiu, $\varphi_1(u)$ και $\varphi_2(u)$, δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{h_1(s)-\dfrac{\lambda\chi_2(s)\hat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 s)}-\dfrac{\lambda\lambda_2\hat{\xi}_2(s)\hat{\varphi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s)-\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}}$$

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{h_2(s)-\dfrac{\lambda\chi_1(s)\hat{\varphi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}-\dfrac{\lambda\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s)-\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}},$$

όπου

$$h_1(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}$$

$$h_2(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda\lambda_2}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 s)}$$

$$\chi_i(s)=1-\frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_i+\delta)(1-\mu_i s)}-\frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(s)}{\lambda+\lambda_i+\delta},\quad i=1,2.$$

Σκοπός μας είναι να γράψουμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των παραπάνω κλασμάτων σε μια κατάλληλη μορφή έτσι ώστε μέσω αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, να έχουμε τις σχέσεις (3.13) και (3.14).

Πολλαπλασιάζοντας τον κοινό παρονομαστή των κλασμάτων με τον παράγοντα $(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)$, έχουμε :

$$(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\right)=\ldots=$$

$$\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\mu_1 s\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2 s\right)-H(s),$$

όπου

$$H(s)=(1-\mu_1 s)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2 s\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}+(1-\mu_2 s)\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\mu_1 s\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}$$

$$= h_{11}\hat{\xi}_1(s)+\ h_{12}s\hat{\xi}_1(s)\ +h_{13}s^2\hat{\xi}_1(s)+h_{21}\hat{\xi}_2(s)+\ h_{22}s\hat{\xi}_2(s)\ +\ h_{23}s^2\hat{\xi}_2(s)\ ,$$

όπου

$$h_{11}=\frac{\lambda_1(\lambda_2+\delta)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)},\quad h_{21}=\frac{\lambda_2(\lambda_1+\delta)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$h_{12}=-\left[\frac{(\lambda_2+\delta)\mu_1}{\lambda+\lambda_2+\delta}+\mu_2\right]\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta},\ h_{22}=-\left[\frac{(\lambda_1+\delta)\mu_2}{\lambda+\lambda_1+\delta}+\mu_1\right]\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta},$$

$$h_{13}=\frac{\lambda_1\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_1+\delta},\quad h_{23}=\frac{\lambda_2\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}.$$

Έστω ότι $\mathrm{I}(s)=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\mu_1 s\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2 s\right)-\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)$

Προφανώς, πρόκειται για ένα πολυώνυμο βαθμού πρώτου, το οποίο ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\mathrm{I}(\rho_i)=H(\rho_i)\ ,\ i=1,2\,.$$

Με τη βοήθεια της παρεμβολής Lagrange, έχουμε ότι:

$$\mathrm{I}(s)=\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}H(\rho_1)+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}H(\rho_2)\ .$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει ότι :

$$(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\right)=\ldots=$$

$$=\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)+\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}H(\rho_1)+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}H(\rho_2)-H(s)=$$

$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left\{\mu_1\mu_2-\frac{\frac{H(s)-H(\rho_2)}{s-\rho_2}-\frac{H(s)-H(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τελεστή Dickson- Hipp, έχουμε για $k=1,2$ και $i=1,2$

$$\frac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=-T_sT_{\rho_i}\xi_k(0),$$

$$\frac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\breve{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\frac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\hat{\xi}_k(s)+\rho_i\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\hat{\xi}_k(s)\ -\rho_iT_sT_{\rho_i}\xi_k(0)$$

$$\frac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i{}^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\frac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i{}^2\hat{\xi}_k(s)+\rho_i{}^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i{}^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=(s-\rho_i)\hat{\xi}_k(s)$$
$$-\rho_i{}^2T_sT_{\rho_i}\xi_k(0)$$

Αντίστοιχα για $k=1,2$, έχουμε:

$$\frac{\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_1T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)-\rho_2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}=T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)$$

$$\frac{\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_1\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=$$
$$\frac{\rho_1T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)-\rho_1T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}=\rho_1T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)$$

$$\frac{\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_2{}^2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_1{}^2\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2\hat{\xi}_k(s)-\rho_1\hat{\xi}_k(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}-$$
$$\frac{\rho_2{}^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1{}^2T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}=$$
$$\hat{\xi}_k(s)-\frac{\rho_2{}^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1{}^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1{}^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1{}^2T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}=$$
$$=\hat{\xi}_k(s)-(\rho_2-\rho_1)T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1{}^2T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0).$$

Οπότε :

$$\hat{G}(s)=\frac{\dfrac{H(s)-H(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{H(s)-H(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\left[h_{k_1}\frac{\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}+h_{k_2}\frac{\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_1\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\left[h_{k_3}\frac{\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_2{}^2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_1{}^2\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\left[h_{k1}T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)+h_{k_2}\rho_1T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+h_{k_3}\hat{\xi}_k(s)-(\rho_2-\rho_1)T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\rho_1{}^2T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του μετασχηματισμού Laplace, $\hat{\varphi}_1(s)$, με τον παράγοντα $(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)$, έχουμε :

$$(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\left[h_1(s)\hat{\omega}(s)-\frac{\lambda\chi_2(s)\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 s)}-\frac{\lambda\lambda_1\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}\right]=$$

$$=\tau_{11}(s)\hat{\omega}(s)+\tau_{12}(s)\hat{\xi}_2(s)-\frac{\lambda\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2 s\right)= M_1(s),$$

όπου

$$\tau_{11}(s)=\frac{\lambda_1(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda\lambda_1(1-\mu_1 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\tau_{12}(s)=\frac{\lambda\lambda_2\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)(1-\mu_2 s)-\lambda\lambda_1\hat{\varphi}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)(1-\mu_1 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}.$$

Έστω ότι $$K(s)=\frac{\lambda\hat{\varphi}_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2 s\right).$$

Προφανώς, πρόκειται για ένα πολυώνυμο βαθμού πρώτου, το οποίο ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$K(\rho_i)=\tau_{11}(\rho_i)\hat{\omega}(\rho_i)+\tau_{12}(\rho_i)\hat{\xi}_2(\rho_i) \quad , \; i=1,2.$$

Με τη βοήθεια της παρεμβολής Lagrange, έχουμε ότι:

$$K(s)=\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}K(\rho_1)+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}K(\rho_2)\ .$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει ότι :

$$M_1(s)=\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}(\tau_{11}(s)\hat{\omega}(s)+\tau_{11}(\rho_1)\hat{\omega}(\rho_1))+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}(\tau_{11}(s)\hat{\omega}(s)+\tau_{11}(\rho_2)\hat{\omega}(\rho_2))+$$

$$+\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}(\tau_{12}(s)\hat{\xi}_2(s)-\tau_{12}(\rho_1)\hat{\xi}_2(\rho_1))+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}(\tau_{12}(s)\hat{\xi}_2(s)-\tau_{12}(\rho_2)\hat{\xi}_2(\rho_2))=$$

$$=\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1}\hat{\omega}(s)-\tau_{11}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}\omega(0)\right)+$$

$$+\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}\hat{\omega}(s)-\tau_{11}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}\omega(0)\right)\times$$

$$\times\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_1)}{s-\rho_1}\hat{\xi}_2(s)-\tau_{12}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)\right)+$$

$$+\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}\hat{\xi}_2(s)-\tau_{12}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\right)=$$

$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\dfrac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1}-\dfrac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\hat{\omega}(s)-\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0)\right)$$

$$-(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\dfrac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_1}-\dfrac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\hat{\xi}_2(s)-\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0)\right)$$

$$-(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)-\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\right)=$$

$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\lambda_1\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_1+\delta}\hat{\omega}(s)-\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0)-\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0)\right)$$

$$-(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)-\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\right).$$

Ομοίως,

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του μετασχηματισμού Laplace $\hat{\varphi}_2(s)$,με τον παράγοντα $(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)$, έχουμε :

$$M_2(s)=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\lambda_2\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\hat{\omega}(s)-\frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0)-\frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0)\right)$$

$$-(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_1(0)-\frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_1(0)\right),$$

όπου

$$\tau_{21}(s)=\frac{\lambda_2(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda\lambda_2(1-\mu_2 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)},$$

$$\tau_{22}(s)=\frac{\lambda\lambda_1\hat{\varphi}_2\left(\dfrac{1}{\mu_2}\right)(1-\mu_2 s)-\lambda\lambda_2\hat{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_1}\right)(1-\mu_2 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}.$$

Έχοντας πλέον γράψει τους αριθμητές και τους παρονομαστές των μετασχηματισμών Laplace , $\hat{\varphi}_1(s)$ και $\hat{\varphi}_2(s)$, στην παρακάτω μορφή:

$$\hat{\varphi}_i(s)=\frac{M_i s}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)(\mu_1\mu_2-\hat{G}(s))}=\frac{\dfrac{M_i s}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}}{1-\dfrac{\hat{G}(s)}{\mu_1\mu_2}}.$$

Κάνοντας λοιπόν πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$\hat{\varphi}_i(s)=\frac{1}{\mu_1\mu_2}\hat{\varphi}_i(s)\hat{G}(s)+\frac{M_i s}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}.$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace, οδηγούμαστε στο ζητούμενο. Για να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι ελλειμματικές ανανεωτικές, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^\infty G(x)dx<1\Rightarrow\frac{1}{\mu_1\mu_2}\hat{G}(0)<1.$$

$$\frac{\hat{G}(s)}{\mu_1\mu_2}=1-\frac{(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\right)}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}.$$

Τότε ,για $s=0$ έχουμε:

$$\frac{\hat{G}(0)}{\mu_1\mu_2}=1-\frac{1}{\mu_1\mu_2\rho_1\rho_2}\left(\chi_1(0)\chi_2(0)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\right)=$$

$$=1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)-(\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\mu_1\mu_2\rho_1\rho_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$<1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)(\hat{\xi}_2(0)+\hat{\xi}_1(0))}{\mu_1\mu_2\rho_1\rho_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)} \tag{3.15}$$

$$=1.$$

Στη περίπτωση όπου δ=0, αρχικά θα θέσουμε $s=\rho_1(\delta)$ στη σχέση :

$$\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)},$$

η οποία τότε γίνεται :

$$\prod_{i=1}^{2}\left[(\lambda+\lambda_i+\delta)-\frac{\lambda}{1-\mu_i\rho_1(\delta)}-\lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta))\right]=\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta)).$$

Έπειτα, παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς δ και θέτοντας $\delta=0$, έχουμε τα εξής :

$$\rho_1'(0)=\frac{\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))+\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))}{\lambda_1\lambda_2(\hat{\xi}_1'(0)+\hat{\xi}_2'(0))+\lambda\lambda_2\mu_1(1-\hat{\xi}_2(0))+\lambda\lambda_1\mu_2(1-\hat{\xi}_1(0))}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\lambda_1}P(B\le Y)+\dfrac{1}{\lambda_2}P(B>Y)}{\dfrac{\lambda\mu_1}{\lambda_1}P(B\le Y)+\dfrac{\lambda\mu_2}{\lambda_2}P(B>Y)}>0,$$

όπου το τελευταίο βήμα είναι συνέπεια της σχέσης (3.1). Ακολούθως παίρνοντας το όριο για $\delta \to 0^+$ στη σχέση (3.15) και εφαρμόζοντας τον κανόνα του del’ Hospital, προκύπτει ότι :

$$\frac{\hat{G}(0)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{1}{\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)} \times \lim_{\delta\to 0^+} \frac{\delta^2 + (\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0)) + \lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0)))\delta}{\rho_1(\delta)}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_1 P(B>Y) + \lambda_2 P(B\le Y)}{\rho_1'(0)\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)} < 1.$$

Έτσι οι εξισώσεις (3.13) και (3.14) αποδείχθηκε ότι είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2: Ακριβείς αναλυτικές λύσεις των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων, μπορούν να βρεθούν με τη βοήθεια σύνθετων γεωμετρικών κατανομών, όπως φαίνεται και στο Θεώρημα 1.1. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι λύσεις των εξισώσεων (3.13),(3.14) είναι της μορφής :

$$\varphi_i(u) = \frac{1}{\mu_1\mu_2 - 1}\int_0^u B_i(u-x)dK(x) + B_i(u), \text{ για } i=1,2,$$

όπου $\overline{K}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)^n \overline{G}(x)$.

3.3.2 Η ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu για συγκεκριμένη μορφή μετασχηματισμών Laplace του ύψους των ασφαλίστρων

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τη περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός Laplace του ύψους των ασφαλίστρων είναι της μορφής :

$$\hat{f}_i(s) = \frac{q_i(s)}{\prod_{j=1}^{m_i}(s+\lambda_{ij})^{n_{ij}}}, \ i=1,2, \tag{3.16}$$

όπου $m_i, n_{ij} \in \mathbb{N}^+$, $n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{im_i} = k_i$ και $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, ..., \lambda_{ij}$ με $\lambda_{ij_1} \ne \lambda_{ij_2}$ για $j_1 \ne j_2$ πιθανώς μιγαδικοί αριθμοί με θετικό πραγματικό μέρος, το $q_i(s)$ ικανοποιεί τη σχέση $q_i(0) = \prod_{j=1}^{m_i}\lambda_{ij}^{n_{ij}}$ το οποίο είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k_i - 1$. Η σχέση (3.16) μπορεί να γραφτεί μέσω της ανάλυσης σε απλά κλάσματα ως

$$\hat{f}_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{i j_1 j_2}\left(\frac{\lambda_{ij_1}}{s+\lambda_{ij_1}}\right)^{j_2},$$

όπου $$q_{i\,j_1 j_2} = \frac{1}{\lambda_{ij_1}^{\;j_2}(n_{ij_1} - j_2)!}\frac{d^{n_{ij_1}-j_2}}{ds^{n_{ij_1}-j_2}}\left\{\prod_{k=1,k\neq j_1}^{m_i}\frac{q_i(s)}{(s+\lambda_{ik})^{n_{ik}}}\right\}\Bigg|_{s=-\lambda_{ij_1}}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι τα $\lambda_{\iota j}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Η σχέση (3.16) στην ουσία μας δείχνει ότι οι συναρτήσεις κατανομών F_1 και F_2 είναι μίξη Erlang κατανομών.

Άρα για $i = 1, 2$ έχουμε :

$$F_i(x) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{i\,j_1 j_2} F_{ij_1 j_2}(x),$$

όπου $F_{ij_1 j_2}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{j_2-1}\frac{(\lambda_{ij_1}x)^k}{k!}e^{-\lambda_{ij_1}x}$ είναι κατανομή Erlang(j_2) με παράμετρο λ_{ij_1} .

Εάν $X_{ij_1 j_2}^{\,1}, X_{ij_1 j_2}^{\,2}, ..., X_{ij_1 j_2}^{\,j_2}$ είναι j_2 το πλήθος ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο $\frac{1}{\lambda_{ij_1}}$.

Τότε η $X_{ij_1 j_2}^{\,1} + X_{ij_1 j_2}^{\,2} + ... + X_{ij_1 j_2}^{\,j_2}$ έχει συνάρτηση κατανομής $F_{ij_1 j_2}$.

Εάν $\mathrm{Re}(s) > \max_j \lambda_{ij}$, τότε έχουμε :

$$\hat{A}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty \varphi_i(u+x)dF_i(x)du = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}\varphi_i(u+x)dudF_i(x)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2}\int_0^\infty T_s\varphi_i(x)dF_{ij_1 j_2}(x) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2} E\left[T_s\varphi_i(X_{ij_1 j_2}^{\,1} + X_{ij_1 j_2}^{\,2} + ... + X_{ij_1 j_2}^{\,j_2})\right]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2}\lambda_{ij_1 j_2} E\int_0^\infty T_s\varphi_i(x + X_{ij_1 j_2}^{\,2} + ... + X_{ij_1 j_2}^{\,j_2})e^{-\lambda_{ij_1}x}dx$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2}\lambda_{ij_1 j_2} ET_s T_{\lambda_{ij_1}}\varphi_i(X_{ij_1 j_2}^{\,2} + ... + X_{ij_1 j_2}^{\,j_2}) = \ldots = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2}\lambda_{ij_1}^{j_2} ET_s T_{\lambda_{ij_1}}^{j_2}\varphi_i(0),$$

όπου $T_{\lambda_{ij_1}}^{j_2} = T_{\lambda_{ij_1}}...T_{\lambda_{ij_1}}$,όπου τα $T_{\lambda_{ij_1}}$ j_2 φορές.

Επίσης από την ιδιότητα (v) του τελεστή Dickson-Hipp (βλ. Παράρτημα A1) προκύπτει τελικά ότι :

$$\hat{A}_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1 j_2}\lambda_{ij_1}^{j_2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i(s)}{(\lambda_{ij_1} - s)^{j_2}} - \sum_{j=1}^{j_2}\frac{T_{\lambda_{ij_1}}^{j}\varphi_i(0)}{(\lambda_{ij_1} - s)^{j_2+1-j}}\right)$$

$$= \hat{f}_i(-s)\hat{\varphi}_i(s) - L_i(s), \tag{3.17}$$

όπου $L_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}}\sum_{j=1}^{j_2}\frac{T_{\lambda_{ij_1}}^{j}\varphi_i(0)}{(\lambda_{ij_1} - s)^{j_2+1-j}}$.

Συνδυάζοντας λοιπόν, τη σχέση (3.17) με τις (3.9),(3.10) έχουμε :

$$\left[1-\frac{\lambda\hat{f}_1(-s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\right]\hat{\varphi}_1(s)-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\hat{\varphi}_2(s)=\frac{\lambda_1\hat{\omega}(s)-\lambda L_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta} \tag{3.18}$$

$$\left[1-\frac{\lambda\hat{f}_2(-s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}\right]\hat{\varphi}_2(s)-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}\hat{\varphi}_1(s)=\frac{\lambda_2\hat{\omega}(s)-\lambda L_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}. \tag{3.19}$$

Επιλύοντας τις (3.18) και (3.19) ως προς $\hat{\varphi}_1(s)$ και $\hat{\varphi}_2(s)$ καταλήγουμε στις :

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{\left[\lambda_1(\lambda+\lambda_2+\delta)-\lambda\lambda_1\hat{f}_2(-s)\right]\hat{\omega}(s)-\lambda v_2(s)L_1(s)-\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(s)L_2(s)}{v_1(s)v_2(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)} \tag{3.20}$$

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{\left[\lambda_2(\lambda+\lambda_1+\delta)-\lambda\lambda_2\hat{f}_1(-s)\right]\hat{\omega}(s)-\lambda v_1(s)L_2(s)-\lambda\lambda_2\hat{\xi}_1(s)L_1(s)}{v_1(s)v_2(s)-\lambda_1\lambda_2(s)\hat{\xi}_2(s)}\quad, \tag{3.21}$$

όπου $v_i(s)=\lambda+\lambda_i+\delta-\lambda\hat{f}_i(-s)-\lambda_i\hat{\xi}_i(-s)$, $i=1,2$.

Παρατηρούμε ότι οι $\hat{\varphi}_1(s)$, $\hat{\varphi}_2(s)$ έχουν κοινό παρανομαστή ο οποίος είναι μία αναλυτική συνάρτηση του s, για όλα τα s με $\mathrm{Re}(s)\geq 0$ εκτός των σημείων που αποτελούν πόλους της συνάρτησης, δηλαδή στα λ_{ij}. Για να γίνει αναλυτική για όλα τα $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, θα θέσουμε $\Lambda_i(s)=\prod_{j=1}^{m_i}(s-\lambda_{ij})^{n_{ij}}$ για $i=1,2$ και θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή των σχέσεων (3.18) και (3.19) με τη ποσότητα $\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)$, έτσι προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{Q_1(s)\hat{\omega}(s)-\lambda v_2(s)\Lambda_2(s)\Lambda_1(s)L_1(s)-\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s)}{v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)} \tag{3.22}$$

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{Q_2(s)\hat{\omega}(s)-\lambda v_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s)-\lambda\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\Lambda_2(s)\Lambda_1(s)L_1(s)}{v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)}, \tag{3.23}$$

όπου

$$Q_1(s)=\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)\left[\lambda_1(\lambda+\lambda_2+\delta)-\lambda\lambda_1\hat{f}_2(-s)\right],$$

$$Q_2(s)=\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)\left[\lambda_2(\lambda+\lambda_1+\delta)-\lambda\lambda_2\hat{f}_1(-s)\right].$$

Από τις σχέσεις (3.22) και (3.23) γνωρίζουμε ότι τα $\hat{\varphi}_1(s)$, $\hat{\varphi}_2(s)$ μπορούν να βρεθούν αν υπολογιστούν οι συντελεστές των πολυωνύμων βαθμού k_i-1 $\Lambda_1(s)L_1(s)$ και $\Lambda_2(s)L_2(s)$ αντίστοιχα.

Όμως ισχύει ότι $\Lambda_i(s)L_i(s)=\sum_{n=1}^{k_i-1} L_{in}s^{n-1}$, όποτε πρέπει να υπολογιστούν συνολικά k_1+k_2 συντελεστές L_{in}. Για αυτό το σκοπό θα δοθεί χωρίς απόδειξη το επόμενο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3.1: *Ο κοινός παρανομαστής των σχέσεων (3.22) και (3.23) έχει ακριβώς* k_1+k_2 *ρίζες, έστω* $\rho_1,...,\rho_{k_1+k_2}$ *με* $\mathrm{Re}(\rho_i)\geq 0$. ▪

Υποθέτοντας τώρα ότι οι $\rho_1,...,\rho_{k_1+k_2}$ είναι διακριτές και δεδομένου ότι οι $\hat{\varphi}_1(s)$, $\hat{\varphi}_2(s)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, τότε οι $\rho_1,...,\rho_{k_1+k_2}$ είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των (3.22) και (3.23). Επιπλέον και οι δύο περιπτώσεις δίνουν τις ακόλουθες k_1+k_2 γραμμικές εξισώσεις :

$$\lambda v_2(\rho_i)\Lambda_2(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_1} L_{1n}\rho_i^{n-1}+\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(\rho_i)\Lambda_1(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_2} L_{2n}\rho_i^{n-1}=Q_1(\rho_i)\hat{\omega}(\rho_i),$$

όπου $i=1,2,...,k_1+k_2$.

Επιλύοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορούμε να υπολογίσουμε τα L_{in}.Έτσι οι μετασχηματισμοί Laplace των $\hat{\varphi}_1(s)$ και $\hat{\varphi}_2(s)$ έχουν καθοριστεί πλήρως.

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, αξίζει να σημειωθεί ότι μπορεί να γενικευθεί ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιούνται τα ύψη των ασφαλίστρων, των αποζημιώσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ δυο γεγονότων υποθέτοντας μια μαρκοβιανή διαδικασία. Γενικότερα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια διαδικασία διάχυσης όπως για παράδειγμα η τυπική κίνηση Brown.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στα παρακάτω, θα παρουσιάσουμε σημαντικά θεωρήματα και ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν στα Κεφάλαια 2 και 3 για τη μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Ένα μαθηματικό εργαλείο το οποίο αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace, είναι ο τελεστής Dickson-Hipp ο οποίος εισήχθη για πρώτη φόρα στην αναλογιστική έρευνα μέσω της εργασίας των Dickson-Hipp το 2001 .

ΟΡΙΣΜΟΣ Α1: *Για* $r \in \mathbb{C}$*, με* $\mathrm{Re}(r) \geq 0$*, ο τελεστής Dickson-Hipp ο οποίος δρα πάνω σε μία συνάρτηση* $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, με* $\int_0^\infty |\varphi(x)| dx < \infty$ *, ορίζεται ως :*

$$T_r\varphi(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)}\varphi(y)dy, \quad x \geq 0.$$

Στο σημείο αυτό, θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες του τελεστή Dickson-Hipp.

(i) Αν $x = 0$,τότε προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace, δηλαδή $T_r\varphi(0) = \varphi(r)$.

(ii) Ο τελεστής T_r είναι μεταθετικός, δηλαδή ισχύει :

$$T_{r_1}T_{r_2}\varphi(x) = T_{r_2}T_{r_1}\varphi(x) = \frac{T_{r_1}\varphi(x) - T_{r_2}\varphi(x)}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{C}, x \geq 0.$$

Ιδιαίτερα εάν $x = 0$, έχουμε ένα αποτέλεσμα που περιέχει μετασχηματισμούς Laplace

$$T_{r_1}T_{r_2}\varphi(0) = \frac{\varphi(r_1) - \varphi(r_2)}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{C}, \quad x \geq 0.$$

(iii) Εάν $\varphi \in C^k[0,\infty), k \geq 0$ και $r \in \mathbb{C}$, τότε

$$T_r\varphi^{(k)}(x) = r^k T_r\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k-1} r^j \varphi^{(k-1-j)}(x), \; x \geq 0.$$

(iv) $T_{r_1}T_{r_2}...T_{r_k}\varphi(y) = (-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{r_j}\varphi(y)}{\pi_{kj}(r_j)}, \quad y \geq 0$ και

(v) $T_sT_{r_1}T_{r_2}...T_{r_k}\varphi(0) = (-1)^k\left[\frac{\hat{\varphi}(s)}{(s-r_1)(s-r_2)...(s-r_k)} - \sum_{j=1}^{k}\frac{\hat{\varphi}(r_j)}{(s-r_j)\pi_{kj}(r_j)}\right], \quad s \geq 0$.

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ Α2 (Fubini): *Έστω* (Ω_1, A_1, μ_1) *και* (Ω_2, A_2, μ_2) *σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και* $X : \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu_1 \otimes \mu_2$*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δηλαδή η* X *είναι* $A_1 \otimes A_2$ *−μετρήσιμη και* $\int_\Omega |X| \, d\mu_1 \otimes \mu_2 < \infty$*), τότε:*

(i) Για μ_1*- σχεδόν όλα τα* $\omega_1 \in \Omega_1$ *η* $X_{\omega_1} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *ώστε* $X_{\omega_1}(\omega_2) = X(\omega_1, \omega_2)$ *είναι* μ_2*- ολοκληρώσιμη και η* $X_{\omega_2} : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *ώστε* $X_{\omega_2}(\omega_1) = X(\omega_1, \omega_2)$ *είναι* μ_1*- ολοκληρώσιμη για* μ_2*- σχεδόν όλα τα* $\omega_2 \in \Omega_2$*.*

(ii) Οι συναρτήσεις $I_X : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *και* $J_X : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *ώστε*

$$I_X(\omega_1)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1} d\mu_2, \text{ αν } X_{\omega_1} \text{ είναι } \mu_2\text{-ολοκληρώσιμη} \\ 0, \text{ αλλού}\end{cases} \quad \textit{και}$$

$$J_X(\omega_2)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega_1} X_{\omega_2} d\mu_1, \text{ αν } X_{\omega_2} \text{ είναι } \mu_1\text{-ολοκληρώσιμη} \\ 0, \text{ αλλού}\end{cases}$$

είναι μ_1 *και* μ_2 *- ολοκληρώσιμες αντίστοιχα .*

(iii) Ισχύει ότι

$$\int\limits_{\Omega} X d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int\limits_{\Omega_1} I_X d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2} J_X d\mu_2$$

$$\int\limits_{\Omega} X d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\nu(d\omega_2)\mu(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)\mu(d\omega_1)\nu(d\omega_2).$$

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ Α3 (κανόνας του Leibniz): *Ας υποθέσουμε ότι* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *συνεχής και η μερική παράγωγος ως προς* y , $\dfrac{df}{dy}$, *υπάρχει και είναι συνεχής στο διάστημα* $[a,b]\times[c,d]$. *Έστω* $u(t)$ *και* $v(t)$ *είναι συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις από το* $[c,d]$ *στο* $[a,b]$, *όπου*

$$F(t)=\int\limits_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)dx.$$

Τότε η F *είναι διαφορίσιμη και*

$$F'(t)=f(v(t),t)v'(t)-f(u(t),t)u'(t)+\int\limits_{u(t)}^{v(t)}\frac{df}{dx}(x,t)dx.$$

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ Α4 : *Εάν* $F(t)=f(s)$ *τότε*

$$F^{(n)}(t)=s^n f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-...-sF^{(n-2)}(0)-F^{(n-1)}(0).$$

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ Α5 (αρχή του Rouche): *Ας θεωρήσουμε δυο συναρτήσεις* f *και* g , *ολόμορφες σε μια περιοχή του κλειστού δίσκου* $\overline{\Delta(a,R)}=(z:\ |z-a|\le R)$ *και ας υποθέσουμε ότι*

$$|g(\zeta)|<|f(\zeta)| \text{ για κάθε } \zeta\in C(a,R)=(\zeta:\ |\zeta-a|=R),$$

τότε #(ριζών της f + g *) = #(ριζών της* f *).*

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ Α6 (τροποποίηση της αρχής του Rouche): *Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις* f *και* g , *οι οποίες είναι αναλυτικές στο ανοικτό δίσκο* $(z:\ |z|<1)$ *και συνεχείς στο σύνορο* $(z:\ |z|=1)$ *και ισχύουν τα ακόλουθα :*

$$| f(z)|_{|z|=1, z\neq 1} > \ | g(z)|_{|z|=1, z\neq 1} \quad \text{και} \quad f(1) = -g(1) \neq 0 .$$

Επίσης, υπάρχουν οι παράγωγοι των συναρτήσεων f *και* g *στο σημείο* $z=1$ *και ισχύει ότι* $\dfrac{f'(1)+g'(1)}{f(1)} > 0$ *, τότε#(ριζών της* f + g *) = #(ριζών της* f *) -1 .*

▪

ΘΕΩΡΗΜΑ A7 (Επέκτασης του Heaviside): *Έστω* $P(s)$ *και* $Q(s)$ *πολυώνυμα βαθμού* m *και* n *αντίστοιχα, όπου* $n > m$. *Εάν* $Q(s)$ *έχει* n *διακριτές απλές ρίζες στα σημεία* $s_1, s_2, ..., s_n$ *, τότε* $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ *είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $f(t)$ *της οποίας ο τύπος είναι ο ακόλουθος:*

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} .$$

▪

Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange A8: *Δοσμένων μιγαδικών αριθμών* c_k *και* ρ_k *,* $k = 1,2,...,n$ *, με* $\rho_k \neq \rho_l$ *για* $k \neq l$ *, υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο* $P(z)$ *, βαθμού* $< n$ *, έτσι ώστε* $P(\rho_k) = c_k$ *για* $k = 1,2,...,n$ *.*

▪

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) M.Abramowitz, I.A Stegun, Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical tables, New York, 1970

(2) Z.-H. Bao, The expected discounted penalty at ruin in the risk process with random income, Applied Mathematics and Computation 179 (2006) 559-566.

(3) Z.-H. Bao, Z.-X. Ye, The Gerber-Shiu discounted penalty function in the delayed renewal risk process with random income, Applied Mathematics and Computation 184 (2007) 857-863.

(4) E. Biffis, M. Morales, On the expected discounted penalty function of three ruin-related random variables in a general Levy risk model, Insurance: Mathematics and Economics, 28 pages, submitted for publication.

(5) A. V. Boikov, The Cramer-Lundberg model with stochastic premium process, Theory of Probabilistic Applications 47 (2002) 489-493.

(6) R.J. Boucherie, O.J. Boxma, K. Sigman, A note on negative customers, GI/G/1 workload, and risk processes. Probability in Engineering and Informational Systems 11 (1997) 305-311.

(7) D.C.M. Dickson, C. Hipp, On the time to ruin for Erlang(2) risk process, Insurance: Mathematics and Economics 29 (2001) 333-344.

(8) H. U. Gerber, E.S.W. Shiu, On the time value of ruin, North American Actuarial Journal 2 (1998) 48-78.

(9) H. U. Gerber, E.S.W. Shiu, The time value of ruin in a Sparre Andersen model, North American Actuarial Journal 9 (2005) 49-84.

(10) V.I. Klimenok, On the modification of Rouche's theorem for the queueing theory problems, Queueing Systems 38 (2001) 431-434.

(11) J.E. Marsden, M.J. Hoffman, Elementary Classical Analysis, Freeman, San Francisco, 1993.

(12) A. Melnikov, Risk Analysis in Finance and Insurance. Chapman and Hall, Boca Raton, 2004.

(13) C. Labbe, K.P. Sendova, The expected discounted penalty function under a risk model with stochastic income, Applied Mathematics and Computation 215 (2009) 1852-1867.

(14) G. Temnov, Risk processes with random income, Journal of Mathematical Sciences 123 (1) (2004) 3780-3794.

(15) Z. Zhang, H. Yang, On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (2010) 44-57.

(16) Γ. Κουμουλλής , Σ, Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2005.

(17) Σ. Κ. Μερκουράκης, Τ.Ε. Χατζηαφράτης, Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2005.