

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Απεικόνιση της Δομής Αντικειμένων

με Ψηφιακή Ανάλυση

Δεδομένων Κυματικής Σκέδασης

Διδακτορική Διατριβή

Κωνσταντίνου Γ. Γκυρτή

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2002

*στη μητέρα μου Ασήμω,
στον αδελφό μου Δημήτρη
που ...έφυγαν τόσο νωρίς*

*στη σύζυγό μου Γιούλα,
στο γιο μας Δημήτρη
για την κατανοήσή τους*

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Αντίστροφα προβλήματα σκέδασης	1
1.2	Ιστορική αναδρομή	4
1.3	Αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής	14
1.4	Δομή της διδακτορικής διατριβής	15
1.5	Συνεισφορά στην ερευνητική περιοχή	16
1.6	Ευχαριστίες	16
2	Σήματα και συστήματα	19
2.1	Βασικές έννοιες σημάτων	19
2.1.1	Μονοδιάστατα σήματα συνεχούς χρόνου	21
2.1.2	Μονοδιάστατα σήματα διακριτού χρόνου	22
2.1.3	Διδιάστατα και πολυδιάστατα σήματα	23
2.1.4	Συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου	24
2.1.5	Δέλτα του Kronecker	28
2.2	Μετασχηματισμοί Fourier	30
2.2.1	(Συνεχής) Μετασχηματισμός Fourier	30
2.2.2	Σειρές Fourier	33

2.2.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier	34
2.2.4 Ταχείς αλγόριθμοι ΔΜF	35
2.2.5 Μετασχηματισμοί Fourier σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις	45
2.3 Δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου	47
2.3.1 Περιοδική δειγματοληψία	48
2.3.2 Τυχαία ή μη περιοδική δειγματοληψία	51
2.4 Βασικές έννοιες συστημάτων	57
2.4.1 Η έννοια του συστήματος	57
2.4.2 Βασικές κατηγορίες συστημάτων	59
2.4.3 Βασικές ιδιότητες συστημάτων	60
2.4.4 Γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα συνεχούς χρόνου	62
2.4.5 Γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα διακριτού χρόνου	66
2.4.6 Μη γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα Volterra	66
3 Διερεύνηση αντικειμένων με κυματικούς παλμούς	77
3.1 Μαθηματικά μοντέλα του φυσικού μηχανισμού παραγωγής δεδομένων	77
3.2 Σειρές Born	83
3.3 Σειρές Rytov	86
3.4 Το θεώρημα γενικευμένης προβολής - τομής	92
4 Απεικόνιση με αντίστροφη σκέδαση	99

4.1	Εισαγωγή	99
4.2	Αντιστροφή γραμμικού όρου σειρών Born - Rytov . . .	101
4.3	Αντιστροφή σειράς Born	103
4.4	Αντιστροφή σειράς Rytov	110
4.4.1	Υλοποίηση των αλγορίθμων αντιστροφής	113
4.5	Η περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας	116
4.6	Προσομοίωση με υπολογιστή	117
4.6.1	Α' προσομοίωση	118
4.6.2	Β' προσομοίωση	124
4.6.3	Γ' προσομοίωση	138
5	Στοχαστικά αντίστροφα προβλήματα	149
5.1	Ένα ευθύ μοντέλο	149
5.2	Εξομαλυμένη αντιστροφή και η πιθανοτική της εξή- γηση	150
5.3	Μετασχηματισμός διάδοσης στάσιμων στοχαστικών αν- τικειμένων	152
5.4	Ανακατασκευή Wiener στην ΠΤ	156
6	Αντιστροφή δεδομένων περιορισμένης γωνιακής κάλυ- ψης	165
6.1	Εισαγωγή	165
6.1.1	Μέθοδος Kaczmarz	167
6.2	Οι αλγεβρικές τεχνικές ανακατασκευής στην ΠΤ	171
6.3	Οι αλγόριθμοι φιλτραρισμένης οπισθοδιάδοσης	174

6.4 Μη γραμμικά προβλήματα δεδομένων περιορισμένης γωνιακής κάλυψης	177
7 Απεικόνιση περιοδικώς μεταβαλλομένων αντικειμένων	181
7.1 Το ευθύ πρόβλημα	181
7.2 Αντιστροφή δεδομένων	185
7.3 Μελέτη αλγορίθμων με προσομοίωση	186
7.3.1 Α' προσομοίωση	188
7.3.2 Β' προσομοίωση	201
7.3.3 Γ' προσομοίωση	207
8 Επίλογος	213

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Διάταξη “από πηγάδι σε πηγάδι”.	6
1.2 Διάταξη κατακόρυφης σεισμικής απεικόνισης.	7
2.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης δέλτα.	26
2.2 Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πε- ταλούδας στο ΔMFAX.	38
2.3 Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔMFAX.	40
2.4 Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔMFAΣ.	44
2.5 Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πε- ταλούδας στο ΔMFAΣ.	45
2.6 Σχηματική αναπαράσταση της δειγματοληψίας σήμα- τος συνεχούς χρόνου.	49
2.7 Εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $p_r(t)$ όταν $p_1(t)$ είναι (α) ομοιόμορφη και (β) εκθετική.	54
2.8 Η μέθοδος της τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας.	56
2.9 Σχηματική αναπαράσταση του συστήματος.	57
3.1 Σκέδαση ενός επίπεδου κύματος από ένα δυναμικό σκέδασης V	78

3.2	Η κλασική διάταξη σάρωσης της ΠΤ.	93
3.3	Γραφική αναπαράσταση του θεωρήματος γενικευμένης προβολής τομής.	97
4.1	<u>Α' Προσομοίωση</u> :Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born (δ) πρώτη προσέγγιση Born (ε) δεύτερη προσέγγιση Born (στ) τρίτη προσέγγιση Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.	120
4.2	<u>Α' προσομοίωση</u> :Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης.	121
4.3	<u>Α' προσομοίωση</u> :Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης.	122
4.4	<u>Α' προσομοίωση</u> :Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης.	123

- 4.5 B' προσομοίωση:Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born (δ) πρώτη προσέγγιση Born (ε) δεύτερη προσέγγιση Born (στ) τρίτη προσέγγιση Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή. 126
- 4.6 B' προσομοίωση:Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης. 127
- 4.7 B' προσομοίωση:Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης. 128
- 4.8 B' προσομοίωση:Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης. 129

- 4.9 B' προσομοίωση:Σκεδαζόμενα κύματα (α) τρίτης τάξης προσέγγιση Born χωρίς θόρυβο (β) τρίτης τάξης προσέγγιση Born με θόρυβο έτσι ώστε $\Sigma\Theta\Sigma=25\text{dB}$. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή. 131
- 4.10 B' προσομοίωση:Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 61 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° 132
- 4.11 B' προσομοίωση:Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 201 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° . . . 133
- 4.12 B' προσομοίωση:Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) όταν εφαρμόστηκε σε 361 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° 134

- 4.13 B' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 61 προβολές με Θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° . . . 135
- 4.14 B' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 201 προβολές με Θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° . . . 136
- 4.15 B' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 361 προβολές με Θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° . . . 137
- 4.16 Γ' Προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή. 139
- 4.17 Γ' Προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Rytov (β) δεύτερος όρος Rytov (γ) τρίτος όρος Rytov. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή. 140

- 4.18 Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης. 142
- 4.19 Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης. 143
- 4.20 Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης. 144
- 4.21 Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov πρώτης τάξης. 145

4.22	<u>Γ' Προσομοίωση</u> : Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov δευτέρας τάξης.	146
4.23	<u>Γ' Προσομοίωση</u> : Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov τρίτης τάξης.	147
7.1	<u>Α' Προσομοίωση ($q = 1$)</u> : Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$	190
7.2	<u>Α' Προσομοίωση ($q = 1$)</u> : Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t	191
7.3	<u>Α' Προσομοίωση ($q = 1$)</u> : Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$	192

- 7.4 A' Προσομοίωση ($q = 1$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 193
- 7.5 A' Προσομοίωση ($q = 1$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t 194
- 7.6 A' Προσομοίωση ($q = 10$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 196
- 7.7 A' Προσομοίωση ($q = 10$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t 197
- 7.8 A' Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 198

7.9 <u>A' Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.</u>	199
7.10A' <u>Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t.</u>	200
7.11B' <u>Προσομοίωση</u> : Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.	202
7.12B' <u>Προσομοίωση</u> : Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .	203
7.13B' <u>Προσομοίωση</u> : Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.	204
7.14B' <u>Προσομοίωση</u> : Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.	205

- 7.15B' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t 206
- 7.16Γ' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά- νεται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 208
- 7.17Γ' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά- νεται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t 209
- 7.18Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συ- ναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 210
- 7.19Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$ 211
- 7.20Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t 212

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΚΡΟΝΥΜΙΩΝ

ΕΠΣ	Ε υθύ Π ρόβλημα Σ κέδασης
ΑΠΣ	Α ντίστροφο Π ρόβλημα Σ κέδασης
ΠΤ	Π εριθλαστική Τ ομογραφία
ΘΓΠΤ	Θ εώρημα Γ ενικευμένης Π ροβολής Τ ομής
ΤΜF	Τ αχύς Μ ετασχηματισμός F ourier
ΑΦΟ	Α λγόριθμος Φ ιλτραρισμένης Ο πισθοδιάδοσης
ΜF	Μ ετασχηματισμός F ourier
ΑΜF	Α ντίστροφος Μ ετασχηματισμός F ourier
ΔΜF	Δ ιακριτός Μ ετασχηματισμός F ourier
ΑΔΜF	Α ντίστροφος Δ ιακριτός Μ ετασχηματισμός F ourier
ΔΜFΑΧ	Δ ιακριτός Μ ετασχηματισμός F ourier με Α ποδεκίαση στο Χ ρόνο
ΔΜFΑΣ	Δ ιακριτός Μ ετασχηματισμός F ourier με Α ποδεκίαση Σ υχνότητας
ΓΧΑΣ	Γ ραμμικό Χ ρονικώς Α ναλλοίωτο Σ ύστημα
ΑΑΔΤ	Α λγόριθμος Α ντιστροφής Δ εύτερης Τ άξης
ΣΘΣ	Σ ηματο Θ ορυβική Σ χέση
ΜΤΡ	Μ έθοδος Τ ων Ρ οπών
ΑΤΑ	Α λγεβρικές Τ εχνικές Α νακατασκευής
ΤΕΤΑ	Τ αυτόχρονες Ε παναληπτικές Τ εχνικές Α νακατασκευής
ΠΠΓΚ	Π ροβλήματα Π εριορισμένης Γ ωνιακής Κ άλυψης

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

k	κυματαριθμός
λ	μήκος κύματος
c_0	ταχύτητα κύματος
\hat{u}	μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα τ
\hat{v}	μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα s
θ	γωνία που σχηματίζει ο άξονας τ με τον άξονα x_1
f	αντικειμενική συνάρτηση
\tilde{f}	διδιάστατος MF της f ως προς χωρικές μεταβλητές
\hat{f}	μονοδιάστατος MF της f ως προς χρονική μεταβλητή
$P_\theta f$	γενικευμένη προβολή συνάρτησης f
f_{rec}	εκτίμηση (ανακατασκευή) της f
f_s	ανέλιξη αντικειμενικών συναρτήσεων
$f_{s,\text{rec}}$	ανακατασκευή της f_s
ψ	ολικό κύμα
ψ_0	προσπίπτον κύμα
ψ^s	σκεδαζόμενο κύμα
ψ_n	n -οστός όρος σειράς Born
W_n	n -οστός όρος σειράς Rytov
B_θ	τελεστής οπισθοδιάδοσης γενικευμένης προβολής $P_\theta f$
\mathcal{B}	τελεστής ΑΦΟ
\mathcal{G}_n	μονωνυμικός τελεστής Born τάξης n
\mathcal{W}_n	μονωνυμικός τελεστής Rytov τάξης n

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντίστροφα προβλήματα σκέδασης

Ένα κύμα είναι ένα σήμα το οποίο μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου και χωρικών συντεταγμένων. Τα κυματικά φαινόμενα είναι πολύ συνήθη στη φύση, καθώς κύματα διεγείρονται και διαδίδονται σε κάθε φυσικό μέσο. Τα μηχανικά συστήματα παρουσιάζουν κυματικά φαινόμενα με τη μορφή σεισμικών ή ακουστικών κυμάτων, καθώς και κυμάτων σε υγρά μέσα. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν μια πολύ ευρεία περιοχή συχνοτήτων, από τα χαμηλής συχνότητας βιολογικά κύματα και ραδιοκύματα μέχρι τα μικροκύματα, τα οπτικά κύματα και τις, πολύ υψηλής συχνότητας, ακτινοβολίες Χι και Γάμμα. Οι σύγχρονες θεωρίες της δομής της ύλης είναι κατά βάση κυματικής φύσεως, δηλαδή απαρτίζονται από μοντέλα κυματικών (κβαντομηχανικών) εξισώσεων. Από την εξήγηση του Rayleigh για το γαλάζιο χρώμα του ουρανού μέχρι τη σημερινή

απεικόνιση της δομής αντικειμένων με χρήση υπολογιστή, τα κυματικά φαινόμενα έχουν γοητεύσει αλλά και περιπλέξει φυσικούς, μαθηματικούς και μηχανικούς, προκαλώντας πάντα το ενδιαφέρον τους.

Παρά τη μεγάλη ποικιλία τους, τα κυματικά φαινόμενα ερμηνεύονται με τη χρήση σχετικώς περιορισμένου αριθμού μαθηματικών μοντέλων, τα οποία μπορούν να συνοψιστούν σε ένα μικρό αριθμό διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων. Σε γενικές γραμμές, οι εξισώσεις αυτές είναι μοντέλα φαινομένων, τα οποία λαμβάνουν χώρα όταν ένα κύμα προσπίπτει σε ανομοιογένειες του μέσου διάδοσής του. Ο προσδιορισμός του αποτελέσματος που προκαλεί μια δεδομένη (γνωστή) ανομοιογένεια στο (γνωστό) προσπίπτον κύμα αποτελεί το **Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης - ΕΠΣ** (*direct scattering problem*). Ο προσδιορισμός της δομής (και η αναπαράστασή της με τη μορφή πολυδιάστατων εικόνων) ενός ανομοιογενούς αντικειμένου από παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο αυτό επιδρά σε προσπίπτοντα κύματα αποτελεί το **Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης - ΑΠΣ** (*inverse scattering problem*). Με μαθηματικούς όρους, το ΑΠΣ συνίσταται στην ανακατασκευή των συντελεστών της μερικής διαφορικής εξίσωσης την οποία ικανοποιεί το κύμα και/ή στον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού της από τη συμπεριφορά μιας ή περισσότερων λύσεών της [83, 63, 35]. Εφαρμογές από συναφή επιστημονικά πεδία, όπως είναι ο προσδιορισμός της κρυσταλικής δομής, η τομογραφία ακτίνων Χ, η ιατρική τομογραφία υπερήχων, η ακουστική και ηλεκτρομαγνητική χαρτογράφηση του υπεδάφους, η οπτική και

συνεστιακή (confocal) μικροσκοπία με ακτίνες Χι και τέλος η αντίστροφη σκέδαση ελαστικών κυμάτων μπορούν να αντιμετωπιστούν με την ίδια ενοποιημένη μαθηματική θεωρία του ΑΠΣ.¹

Ο προσδιορισμός της δομής, αντικείμενο του ΑΠΣ, συνίσταται συνήθως σε μια προσπάθεια εκτίμησης της χωρικής κατανομής του μιγαδικού δείκτη διάθλασης του αντικειμένου με αντιστροφή της μαθηματικής απεικόνισης (η οποία θα οριστεί αυστηρά στα επόμενα) που συσχετίζει το υπό διερεύνηση κύμα, το δείκτη διάθλασης και το μετρήσιμο ολικό κύμα. Αυτός ο στόχος δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί, λόγω της ενυπάρχουσας μη μοναδικότητας, μη τοπικότητας και μη γραμμικότητας της απεικόνισης από το δείκτη διάθλασης στο σκεδαζόμενο κύμα σε κάθε ένα πείραμα σκέδασης. Το πρόβλημα της μη μοναδικότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί εν μέρει με τη χρήση πολλαπλών πειραμάτων σκέδασης, όπου το αντικείμενο ερευνάται από διάφορα προσπίπτοντα κύματα διαφορετικών κατευθύνσεων και το σύνολο των μετρήσεων σκέδασης είναι διαθέσιμο για αντιστροφή. Το θέμα της μη γραμμικότητας είναι σημαντικά δυσκολότερο στην αντιμετώπισή του. Η μέχρι τώρα έρευνα έχει παρουσιάσει μόνο θεωρητικά μαθηματικά αποτελέσματα ή επαναληπτικούς αλγόριθμους μεγάλου υπολογιστικού κόστους, αλλά όχι υλοποιήσιμους στην πράξη αλγόριθμους ανακατασκευής για ακριβή, μη γραμμικά ΑΠΣ.

¹Μαθηματικώς ισοδύναμα ΑΠΣ προκύπτουν και σε άλλες περιοχές τεχνολογικού σχεδιασμού, όπως στο σχεδιασμό κεραιών, οι οποίες όταν τροφοδοτούνται με προδιαγεγραμμένα ρεύματα, εκπέμπουν κατά προδιαγεγραμμένα πρότυπα.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Γένεση της Περιθλαστικής Τομογραφίας

Τα τελευταία είκοσι χρόνια έχει χρησιμοποιηθεί μια προσέγγιση του ΑΠΣ, η οποία βασίζεται σε γραμμικές προσεγγίσεις Born ή Rytov και έχει οδηγήσει σε ένα νέο επιστημονικό κλάδο της Τομογραφικής Απεικόνισης, που ονομάζεται **Περιθλαστική Τομογραφία - ΠΤ (Diffraction Tomography)** [42, 11, 13, 43]. Η πρώτη εφαρμογή της γραμμικής αντίστροφης σκέδασης ανάγεται χρονικώς στο 1912, όταν ο Von Laue προέτρεψε τους Friedrich και Knipping να πειραματιστούν στην περίθλαση ακτίνων Χι από κρυστάλλους, με σκοπό να ελέγξουν την υπόθεση ότι οι ακτίνες Χι έχουν μήκος κύματος της τάξης 10^{-10}m . Το πείραμα ήταν επιτυχές και οδήγησε, σε λιγότερο από ένα χρόνο, στον πρώτο προσδιορισμό της δομής με χρήση ακτίνων Χι. Από τότε, οι διερευνήσεις με ακτίνες Χι χρησιμοποιούνται τυπικώς στον προσδιορισμό της δομής των κρυστάλλων με τη χρήση αλγορίθμων ανακατασκευής, που βασίζονται στο μοντέλο σκέδασης του Born και τη μέτρηση της κατανομής της έντασης στο μακρινό πεδίο. Πράγματι, η θεμελίωση της μοντέρνας γραμμικοποιημένης ΠΤ βασίζεται στο **Θεώρημα Γενικευμένης Προβολής Τομής - ΘΓΠΤ** της εξίσωσης (3.35), το οποίο αποτελεί τον πυρήνα του προσδιορισμού της κρυσταλλικής δομής μέσω ακτίνων Χι και τη βάση της πρωτοποριακής εργασίας του Wolf [42].

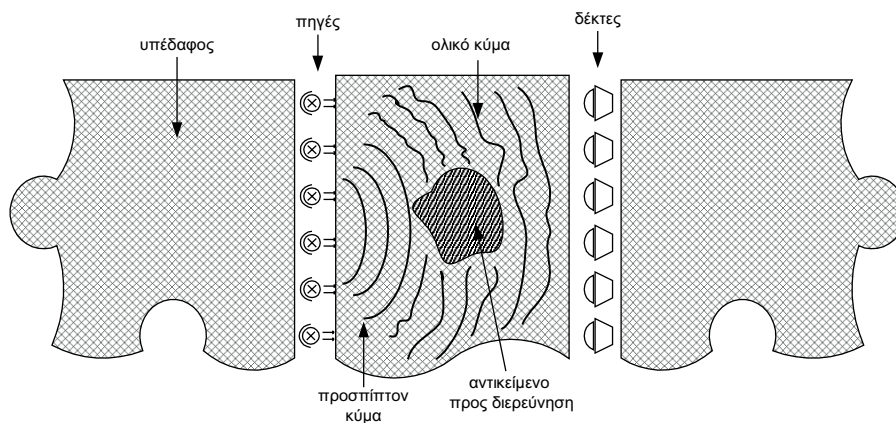
Πραγματικά, ο Wolf έθεσε στην εργασία [42] τη βάση των μεθόδολογιών, με τις οποίες οι μετρήσεις τους εγγύς πεδίου μπορούν να

χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή ανακατασκευών της δομής αντικειμένων στα πλαίσια του μοντέλου του Born. Η εργασία του Wolf επεκτάθηκε το 1974 από τους Iwata και Nagata [64] για τον προσδιορισμό της δομής μιας λιγότερο περιοριστικής κλάσης αντικειμένων, αυτών που ικανοποιούν την προσέγγιση Rytov παρά την προσέγγιση του Born. Το 1979, ο Mueller, κ.ά. [84] χρησιμοποίησαν τις ίδιες ιδέες με αυτές των προσεγγίσεων Born και Rytov και παρουσίασαν αλγόριθμους βασισμένους στην παρεμβολή του μετασχηματισμού Fourier για το αντίστροφο πρόβλημα της τομογραφίας υπερήχων. Το 1982, ο Devaney παρουσίασε έναν αλγόριθμο αντιστροφής, υλοποιήσιμο με **Ταχείς Μετασχηματισμούς Fourier – TMF** (*Fast Fourier Transform*), ο οποίος ονομάστηκε **Αλγόριθμος Φιλτραρισμένης Οπισθοδιάδοσης – ΑΦΟ** (*filtered backpropagation algorithm*) της ΠΤ [15]. Ο ΑΦΟ χρησιμοποιήθηκε για την αντιστροφή μετρήσεων σκεδαζομένου κύματος κάτω από τις προσεγγίσεις Born και Rytov. Όταν τα πειράματα σκέδασης γίνονται σε μήκος κύματος λ , ο ΑΦΟ επιστρέφει μια εκτίμηση της άγνωστης κατανομής του δείκτη διάθλασης, της οποίας το φασματικό περιεχόμενο είναι ίδιο με αυτό της πραγματικής κατανομής πάνω σε έναν κυκλικό δίσκο στο χώρο Fourier ακτίνας $\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2}$ και μηδενικό οπουδήποτε αλλού [15].

Νεώτερες εξελίξεις

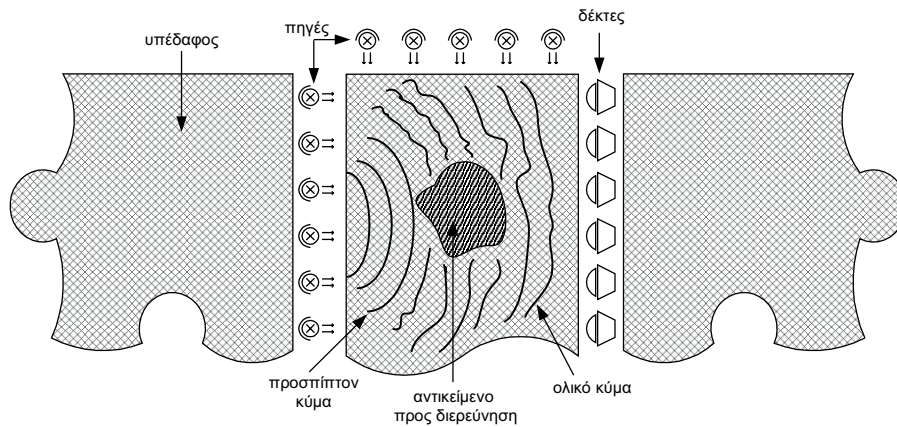
Ο ΑΦΟ έχει αναγνωριστεί ως αυτός που προσφέρει την πιο υψηλή πιστότητα στην ανακατασκευή εικόνων [94] και παραλλαγές του

έχουν παρουσιαστεί από τον Devaney [12], τους Witten κ.ά. [62, 23], τους Deming και Devaney [90] και τέλος τους Hansen και Johanson [95] για χρήση σε διατάξεις λήψης μετρήσεων που χρησιμοποιούνται σε γεωφυσικές τομογραφικές διερευνήσεις. Ο Devaney [12] πρότεινε ΑΦΟ για την απεικόνιση υπεδάφους χρησιμοποιώντας “φωτισμό” με επίπεδα κύματα και μετρήσεις είτε σε διάταξη “από πηγάδι σε πηγάδι” (*borehole-to-borehole*) (Σχήμα 1.1) είτε σε διάταξη κατακόρυφης σεισμικής απεικόνισης (*vertical seismic profiling configuration*) (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.1: Διάταξη “από πηγάδι σε πηγάδι”.

Από την άλλη πλευρά οι Molyneux και Witten [62] πρότειναν μια μορφή του ΘΓΠΤ που ισχύει σε μια μονοστατική διάταξη μετρήσεων (κοινή θέση πηγής και δέκτη) και χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τομογραφική απεικόνιση από μετρήσεις *αντάρ διείσδυσης στο υπέδαφος* (*ground penetrating radar*). Ακολουθώντας, οι Witten, Molyneux



Σχήμα 1.2: Διάταξη κατακόρυφης σεισμικής απεικόνισης.

και Nyquist [23] επιβεβαίωσαν τους αλγόριθμους [62] με μετρήσεις που συλλέχθηκαν σε δύο περιοχές που περιείχαν ανομοιογένειες σε μικρό βάθος. Οι Deming και Devaney [90], καθώς και οι Hansen και Johansen [95] ασχολήθηκαν επίσης με την υποεπιφανειακή απεικόνιση χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ραντάρ διεύθυνσης στο υπέδαφος. Οι αλγόριθμοι των Deming και Devaney [90] υπολογίζουν τον ψευδοαντίστροφο του γραμμικοποιημένου μοντέλου σκεδαζομένου κύματος του ραντάρ διεύθυνσης στο υπέδαφος, αγνοώντας τη διεπαφή που διαχωρίζει τον αέρα και το χώμα. Από την άλλη πλευρά η προσέγγιση των Hansen και Johansen [95] ενσωματώνει τη διεπαφή αέρος-εδάφους μέσα στο κυματικό μοντέλο και χρησιμοποιεί ασυμπτωτικές επεκτάσεις του μοντέλου που ισχύουν για αντικείμενα ενταφιασμένα σε μεγάλο βάθος (πρακτικώς, σε δύο ή περισσότερα μήκη κύματος) μέσα στο έδαφος, οι οποίες είναι αντι-

στρέψιμες μέσω αλγορίθμων υλοποιήσιμων με TMF.

Παραλλαγές της ιδέας της φιλτραρισμένης οπισθοδιάδοσης έχουν προταθεί για εναλλακτικές διατάξεις λήψης μετρήσεων [12, 62, 23, 90, 95], καθώς και για να αντιμετωπιστεί η παρουσία θορύβου στις μετρήσεις [50, 51], η διαθεσιμότητα μόνο γωνιακώς περιορισμένων μετρήσεων [66, 67] και η επιθυμία για τοπική ανακατασκευή εικόνας. Το πρόβλημα της ανακατασκευής της γραμμικοποιημένης ΠΤ από μετρήσεις σκεδαζομένου κύματος που έχουν θόρυβο, αντιμετωπίστηκε από τους Tsihrintzis (Τσιχριντζής) και Devaney [50, 51], οι οποίοι έδειξαν ότι το *φίλτρο βέλτιστης εκτίμησης (φίλτρο Wiener)* λαμβάνει πάλι τη μορφή ενός ΑΦΟ. Προσφάτως, το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίστηκε από τον Pan, ο οποίος παρουσίασε μια κλάση αλγορίθμων ανακατασκευής της ΠΤ με έλεγχο του θορύβου [105]. Από την άλλη πλευρά, το μαθηματικό πλαίσιο της επίλυσης του προβλήματος της αντιστροφής γωνιακώς περιορισμένων μετρήσεων (χωρίς θόρυβο) σκεδαζομένου κύματος αντιμετωπίστηκε αρχικά από τον Devaney [15] και αργότερα δόθηκε λύση της μορφής αλγεβρικών (επαναληπτικών) αλγορίθμων ανακατασκευής τύπου Kaczmark από τους Ladas (Λαδάς) και Devaney [66, 67]. Τέλος, οι Melamed και Heyman [100], καθώς και οι Melamed, Heyman και Felsen [101, 102] αντιμετώπισαν το πρόβλημα της τοπικής ανακατασκευής εικόνας από γραμμικοποιημένες μετρήσεις ΠΤ.

Σε μερικά πρακτικά ΑΠΣ, δεν είναι δυνατό να μετρηθούν και η φάση και η ένταση των κυμάτων που σκεδάζονται από το προς διερεύνηση αντικείμενο. Στην οπτική τομογραφία, για παράδειγμα, η

υψηλή συχνότητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δεν επιτρέπει την απ' ευθείας μέτρηση της φάσης. Στην ακουστική *Τομογραφία Χρόνου Πτήσης (Traveltime Tomography)* από την άλλη πλευρά, η εξασθένιση μπορεί να μην είναι μετρήσιμη και έτσι ο αλγόριθμος ανακατασκευής εικόνας πρέπει να βασίζεται μόνο σε μετρήσεις φάσης. Ευτυχώς, η διαδικασία μετάδοσης του κύματος τείνει να *αναμειξει* τη φάση του κύματος και την πληροφορία της έντασης καθώς διαδίδεται το κύμα. Με αυτό τον τρόπο, σε μεγάλη απόσταση από το αντικείμενο, η κατανομή της φάσης του κύματος περιέχει κωδικοποιημένη πληροφορία έντασης και, αντίστροφα, η κατανομή της φάσης του κύματος μπορεί να ανακτηθεί από την έντασή του. Αυτό το γεγονός έχει αναγνωρισθεί από τους Kawata κ.ά. [93], από τους Devaney κ.ά. [14, 16, 17, 72] κατά την ανάπτυξη αλγορίθμων ανακατασκευής εικόνας, καθώς και από τους Tsihrintzis (Τσιχριντζής) και Devaney [47] στα πλαίσια της ανίχνευσης και αναγνώρισης αντικειμένου και της εκτίμησης της θέσης του.

Στις περισσότερες από τις ανωτέρω εξελίξεις θεωρείται ότι το υπό διερεύνηση αντικείμενο είναι ενσωματωμένο σε ένα *ομογενές (homogeneous)* μέσο, δηλαδή ένα μέσο του οποίου οι ιδιότητες είναι σταθερές σε σχέση με τη θέση στο χώρο. Γενικεύσεις σε μη ομογενή μέσα είναι δυνατές σε ορισμένες περιπτώσεις. Οι εργασίες των Deming και Devaney [90], καθώς και των Hansen και Johansen [95], για παράδειγμα, αντιμετωπίζουν ΑΠΣ στα οποία το μέσο αποτελείται από δύο ημι-άπειρα μέσα, τα οποία διαχωρίζονται από μια επίπεδη επιφάνεια. Γενικώς, οι Devaney και Zhang [18] αντιμετώπισαν

ΑΠΣ, στα οποία το μέσο αποτελείται από έναν αυθαίρετο αριθμό μέσων που διαχωρίζονται μεταξύ τους από μη παράλληλα επίπεδα. ΑΠΣ ανίχνευσης και αναγνώρισης αντικειμένου και εκτίμησης της θέσης του αντιμετωπίστηκαν από τους Tsihrintzis (Τσιχριντζής), Johansen και Devaney [54]. Η γενική τυπική θεωρία της επίτευξης γραμμικοποιημένων προσεγγιστικών μοντέλων για κύματα σκεδαζόμενα από αντικείμενα ενσωματωμένα σε μη ομογενή μέσα παρουσιάστηκε από τους Beylkin και Oristaglio [55] και η γενική τυπική διαδικασία για ανακατασκευή εικόνας από τέτοιες γραμμικοποιημένες μετρήσεις σκεδαζομένου κύματος περιγράφηκε από τους Devaney και Oristaglio στο [22].

Η γραμμικοποιημένη ΠΤ έχει φτάσει στις μέρες μας στη φάση της εφαρμογής της σε πρωτότυπους εμπορικούς τομογράφους υπερήχων [76, 49], υπεδάφους [79, 30, 31, 28, 96] και οπτικών συστημάτων απεικόνισης [72]. Ιδιαίτερος επιτυχής ήταν οι αλγόριθμοι γεωφυσικής ΠΤ όταν εφαρμόστηκαν σε προβλήματα υπεδάφους απεικόνισης, όπως η διεξαγωγή μεταλλευτικών ερευνών και η παρακολούθηση αποθεμάτων [40], ο εντοπισμός υπόγειων στοών μεταξύ Βόρειας και Νότιας Κορέας [31], η αναζήτηση υπολειμμάτων δεινοσαύρων στην έρημο του New Mexico [30], η χαρτογράφηση περιοχών με θαμμένα απορρίματα [28] και ο εντοπισμός αρχαιολογικών ευρημάτων [96]. Η επιτυχία των αλγορίθμων γραμμικοποιημένης ΠΤ εξαρτάται από τις δύο προϋποθέσεις της γραμμικότητας και της διαθεσιμότητας ενός ικανού αριθμού πειραμάτων, αν και σε πολλές περιπτώσεις η προϋπόθεση της γραμμικότητας δεν

ισχύει, καθώς διάφοροι περιορισμοί (οικονομικοί, ασφάλειας, λειτουργικότητας, γεωμετρικοί και φυσικής) περιορίζουν τον αριθμό των πειραμάτων σκέδασης, τα οποία μπορούν να πραγματοποιηθούν και/ή παρουσιάζουν μετρήσεις με χαμηλή **Σηματοθορυβική Σχέση - ΣΘΣ** (*signal-to-noise ratio*). Αν και οι αλγεβρικές τεχνικές ανακατασκευής ελαττώνουν την επίδραση της διαθεσιμότητας μόνο ενός μικρού αριθμού πειραμάτων σκέδασης, οι επιδράσεις της μη γραμμικότητας είναι δυσκολότερο να αντιμετωπιστούν και αυτό παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα της τρέχουσας έρευνας.

Κατά την έννοια μιας πρώτης κατηγορίας ερευνητικών προβλημάτων, περισσότερο απλά ΑΠΣ αντιμετωπίστηκαν από τους Tshirintzis (Τσιχριντζής) και Devaney, αρχικώς στο πλαίσιο της γραμμικοποιημένης [20, 47, 49, 52] και αργότερα της ακριβούς [48, 49, 53, 54] θεωρίας σκέδασης, όπου και αναπτύχθηκαν σημαντικές εφαρμογές [29, 49]. Ο σκοπός των προβλημάτων αυτών, που στηρίχθηκαν εν μέρει σε ένα προηγούμενο πρόβλημα της Υπολογιστικής Τομογραφίας με ακτίνες Χι [36], ήταν η εκτίμηση της άγνωστης θέσης ενός κατά τα άλλα πλήρως γνωστού αντικειμένου, από μετρήσεις (με θόρυβο) του σκεδαζομένου κύματος. Αποδείχθηκε ότι για μονοχρωματικό επίπεδο κύμα διερεύνησης, η βέλτιστη (με την έννοια της μέγιστης πιθανοφάνειας) εκτίμηση θέσης θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω ενός ΑΦΟ, στον οποίο υπερτίθενται επιμέρους εικόνες που σχηματίστηκαν με φιλτραρισμένη οπισθοδιάδοση μετρήσεων σκεδαζομένου κύματος για διαφορετικές κατευθύνσεις διερεύνησης. Ο αλγόριθμος παράγει μια *εικόνα* της λογαριθμικής συ-

νάρτησης πιθανοφάνειας της Θ έσης του αντικειμένου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανίχνευση και αναγνώριση, καθώς και για εκτίμηση Θ έσης. Η διαδικασία ανίχνευσης/εκτίμησης/αναγνώρισης είναι βέλτιστη (με την έννοια της μέγιστης πιθανοφάνειας) για κάθε δεδομένο αριθμό πειραμάτων σκέδασης και επιστρέφει καλές εκτιμήσεις ακόμα και από ένα μόνο πείραμα, με την προϋπόθεση το μήκος κύματος της ακτινοβολίας διερεύνησης να είναι συγκρίσιμο με τις τυπικές διαστάσεις του αντικειμένου-στόχου [20].

Κατά την έννοια μιας δεύτερης κατηγορίας ερευνητικών προβλημάτων, αντιμετωπίζονται πρακτικώς σημαντικά προβλήματα τομογραφικής απεικόνισης, όπου το αντικείμενο αποτελείται από έναν αριθμό διακριτών σκεδαστών. Όπως τονίστηκε από τους Azimi και Kak [68], καθώς και από τους Slaney, Kak και Larsen [74], ακόμα και όταν κάθε σκεδαστής είναι αρκετά ασθενής για να ισχύει κάποιο από τα γραμμικά μοντέλα προσέγγισης, πολλαπλές αλληλεπιδράσεις (σκεδάσεις) μεταξύ σκεδαστών μειώνουν την απόδοση των γραμμικοποιημένων αλγορίθμων ανακατασκευής της ΠΤ. Η κατάσταση μπορεί να βελτιωθεί μερικώς αν οι αλγόριθμοι ανακατασκευής βασίζονται σε υψηλότερης τάξης (μη γραμμικά) μοντέλα σκέδασης και πράγματι τυπικές σειρές επίλυσης του ΑΠΣ έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία [87, 88, 89, 19, 106, 107, 4, 5]. Πιο συγκεκριμένα, στα [19, 106, 107] χρησιμοποιήθηκαν αναπτύγματα (βασισμένα στη Θ εωρία διαταραχών) του **Μετασχηματισμού Fourier** - **MF** (*Fourier transform*) του αντικειμένου για την ανάπτυξη αλγορίθμων ανακατασκευής αυθαίρετης τάξης. Οι αλγόριθμοι περιελάμβαναν τους

γραμμικούς αλγόριθμους ανακατασκευής ως ιδιαίτερες περιπτώσεις. Από την άλλη πλευρά, πρόσφατες προσπάθειες ([85, 6] και αναφορές μέσα σε αυτά) για την αντιστροφή ενός μοντέλου σκέδασης δεύτερης τάξης είχαν ως αποτέλεσμα αλγόριθμους της μορφής επαναληπτικών αριθμητικών λύσεων συστημάτων τετραγωνικών εξισώσεων και επέδειξαν υψηλότερη ποιότητα από τα αντίστοιχα γραμμικά μοντέλα. Προσφάτως, μη γραμμικοί τομογραφικοί αλγόριθμοι ανακατασκευής αναπτύχθηκαν για την απεικόνιση από μετρήσεις σκεδαζομένου κύματος, που μοντελοποιήθηκαν από έναν αυθαίρετα μεγάλο αριθμό όρων των σειρών Born ή Rytov. Οι αλγόριθμοι διατήρησαν τη μορφή μη γραμμικών τελεστικών σειρών Volterra, με τον ΑΦΟ της ΠΤ ως τον κύριο γραμμικό όρο.

Οι πρώτες και οι τελευταίες μορφές των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα και χρησιμοποιούνται στην επίλυση ΑΠΣ οδήγησαν σε έναν τεράστιο όγκο βιβλιογραφίας, η οποία, σε συνδυασμό με τη διαθεσιμότητα υπολογιστικής δύναμης χαμηλού κόστους, άνοιξε την πόρτα σε νέες εφαρμογές και νέα συστήματα απεικόνισης. Έτσι, ο όρος *Περιθλαστική Τομογραφία* θα μπορούσε, ίσως, να αντικατασταθεί με τον πιο γενικό όρο *Τομογραφία Αντίστροφης Σκέδασης (Inverse Scattering Tomography)*, που περιλαμβάνει και τη χρήση μη γραμμικών προσεγγιστικών μεθόδων στην ανακατασκευή εικόνας, καθώς και τη μελέτη άλλων ΑΠΣ πέρα από το παραδοσιακό πρόβλημα της ανακατασκευής του μιγαδικού δείκτη διάθλασης. Φαίνεται, πάντως, ότι η σχετική βιβλιογραφία για τα ΑΠΣ έχει κατακερματιστεί και διασκορπιστεί σε διάφορα περιοδικά

και η πρόοδος της ελέγχεται μόνο από μια εξειδικευμένη κοινότητα. Οι ορισμοί των προβλημάτων και οι αλγόριθμοι τομογραφικής ανακατασκευής εξάγονται από την επονομαζόμενη *κλασική διάταξη διερεύνησης (classical scan configuration)* [11, 10, 13, 52], επίσης γνωστή στη συμβατική τομογραφία με ακτίνες Χι ως *διάταξη παράλληλων ακτίνων (parallel beam configuration)* [57, 8]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υλοποίηση των αλγορίθμων μέσω της χρήσης TMF. Ωστόσο, οι αλγόριθμοι μπορούν να επεκταθούν και σε πιο γενικές διατάξεις μέτρησης –ίσως με απώλεια της υλοποιησιμότητάς τους– με χρήση αλγορίθμων TMF.

1.3 Αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής

Αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτελεί, η σε βάθος, μελέτη αποδοτικών υπαρχόντων και προτεινομένων υπολογιστικών αλγορίθμων τομογραφικής απεικόνισης αντικειμένων (και ανάλυσης της εικόνας τους) από δεδομένα κυματικής σκέδασης.

Για λόγους απλότητας, γίνεται η υπόθεση ότι τα δεδομένα κυματικής σκέδασης έχουν συλλεχθεί με τη λεγόμενη *κλασική διάταξη σάρωσης*. Οι αλγόριθμοι όμως μπορούν, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, να τροποποιηθούν ώστε να εφαρμόζονται και σε δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με άλλες διατάξεις σάρωσης.

1.4 Δομή της διδακτορικής διατριβής

Η διδακτορική διατριβή είναι οργανωμένη σε οκτώ κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται οι βασικές αρχές των σημάτων και των συστημάτων. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η απλούστερη μορφή μαθηματικών μοντέλων του φυσικού μηχανισμού παραγωγής δεδομένων σε προβλήματα σκέδασης, μελετάται η ανάπτυξη της λύσης του ΕΠΣ σε σειρές Born και σειρές Rytov και παρουσιάζεται το ΘΓΠΤ. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται γραμμικοί και μη γραμμικοί αλγόριθμοι αντιστροφής των σειρών Born και Rytov, καθώς και προσομοιώσεις των αλγορίθμων αυτών με τη βοήθεια του υπολογιστή. Στο Κεφάλαιο 5 μελετώνται στοχαστικά αντίστροφα προβλήματα και παρουσιάζεται το φίλτρο ανακατασκευής Wiener στην ΠΤ. Στο Κεφάλαιο 6 μελετώνται προβλήματα απεικόνισης από δεδομένα περιορισμένης γωνιακής κάλυψης και παρουσιάζονται αντίστοιχες τεχνικές ανακατασκευής στην ΠΤ. Στο Κεφάλαιο 7 μελετάται η απεικόνιση περιοδικώς μεταβαλλομένων αντικειμένων και παρουσιάζονται προσομοιώσεις των αλγορίθμων αντιστροφής με τη βοήθεια του υπολογιστή. Τέλος, στο Κεφάλαιο 8 εξάγονται συμπεράσματα και προτείνονται μελλοντικές ερευνητικές δραστηριότητες.

1.5 Συνεισφορά στην ερευνητική περιοχή

Η συνεισφορά της παρούσας διδακτορικής διατριβής στην ερευνητική περιοχή έγκειται στην *ανάπτυξη αλγορίθμων τομογραφικής απεικόνισης σκεδαστών των οποίων η δομή μεταβάλλεται περιοδικώς με το χρόνο*.

Το πρόβλημα αυτό δεν έχει μελετηθεί στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία, παρά την πληθώρα των δυνατών τεχνολογικών εφαρμογών των λύσεών του. Προβλήματα απεικόνισης, όπως της απεικόνισης του πνεύμονα εν ζωή (*in vivo*) ή ενταφιασμένων αντικειμένων τα οποία μπορούν να διεγερθούν σε μηχανική ταλάντωση, εμπίπτουν στο αντικείμενο της παρούσας διατριβής και είναι δυνατόν να επιλυθούν με τους προτεινόμενους αλγόριθμους.

1.6 Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή ξεκίνησε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς κ. Αντωνίου Παναγιωτόπουλου και ολοκληρώθηκε υπό την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή του ιδίου Πανεπιστημίου κ. Γεωργίου Τσιχριντζή. Από τη θέση αυτή αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τους προαναφερομένους Καθηγητές, χωρίς τη βοήθεια, την υποστήριξη και την ενθάρρυνση των οποίων η ολοκλήρωση της διατριβής αυτής θα ήταν αδύνατη.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω και στα άλλα δύο μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, Καθηγητές του Πανεπιστημίου Πειραιώς κ.κ. Νικόλαο Αλεξανδρή και Αριστείδη Σαπουνάκη για την υποστήριξη που μου προσέφεραν κατά την εκπόνηση της διατριβής αυτής. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Στέφανο Κόλλια, καθώς και όλους τους Καθηγητές του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τη βοήθειά τους κατά την εκπόνηση της διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τη σύζυγό μου Γιούλα και το γιο μας Δημήτρη τόσο για την ηθική τους συμπαράσταση όσο και για την κατανόηση που επέδειξαν καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής.

Κεφάλαιο 2

Σήματα και συστήματα

2.1 Βασικές έννοιες σημάτων

Ο όρος *σήμα* (*signal*) υποδηλώνει μια συνάρτηση που απεικονίζει μια ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές ενός συνόλου I (πεδίου ορισμού) σε μια ή περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές ενός συνόλου U (πεδίου τιμών).

Ένα *μονοδιάστατο* (*one-dimensional, 1-D*) σήμα εκφράζει τη μεταβολή μιας μεταβλητής, έστω x , σε σχέση με μια άλλη μεταβλητή, έστω t . Δηλαδή, ορίζεται ως μια συνάρτηση $x(\cdot)$ τέτοια ώστε $t \rightarrow x(t)$. Συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή t αναφέρεται στο χρόνο και λαμβάνει τιμές από το πεδίο ορισμού I του σήματος, ενώ η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $x(t)$. Οι τιμές του σήματος περιορίζονται στο πεδίο τιμών του U .

Τα ακόλουθα αποτελούν τυπικά παραδείγματα σημάτων με τεχνολογικό ενδιαφέρον:

- διαφορές δυναμικού μεταξύ σημείων σε ηλεκτρομαγνητικά κυκλώματα ως συναρτήσεις του χρόνου
- λόγος, μουσική, διάφοροι ήχοι και άλλα ακουστικά σήματα ως συναρτήσεις του χρόνου
- διδιάστατες εικόνες, δηλαδή απεικονίσεις της κατανομής μιας φυσικής ιδιότητας ως συνάρτησης δύο χωρικών συντεταγμένων
- σήματα βίντεο, δηλαδή ακολουθίες διδιάστατων εικόνων, κάθε μια από τις οποίες έχει καταγραφεί και αντιστοιχεί σε διαφορετική χρονική στιγμή
- βιοϊατρικά σήματα, όπως το εγκεφαλογράφημα, το καρδιογράφημα, κ.ά.
- ακολουθίες δυαδικών ψηφίων τις οποίες διαχειρίζεται η Κεντρική Μονάδα Επεξεργασίας ενός υπολογιστή
- ακολουθίες δυαδικών ψηφίων αποθηκευμένες σε ένα ηλεκτρονικό αρχείο
- ακολουθίες δυαδικών ψηφίων που μεταδίδονται μέσω τηλεπικοινωνιακών δικτύων.

Τα σήματα, ανάλογα με τις τιμές των συνόλων ορισμού I και τιμών U , μπορούν να ταξινομηθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

- *Συνεχούς χρόνου (continuous-time)*, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές τους λαμβάνουν τιμές σε ένα συνεχές σύνολο.

- *Διακριτού χρόνου (discrete-time)*, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές τους λαμβάνουν τιμές σε ένα διακριτό σύνολο.
- *Αναλογικά (analog)*, όταν οι επιτρεπτές τιμές τους καλύπτουν ένα συνεχές σύνολο.
- *Ψηφιακά (digital)*, όταν οι επιτρεπτές τιμές τους καλύπτουν ένα διακριτό σύνολο.

Κάτω από ορισμένες γενικές συνθήκες, ένα σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να αναπαρασταθεί ακριβώς (χωρίς απώλεια της πληροφορίας) από ένα σήμα διακριτού χρόνου, αποτελούμενο από την ακολουθία των τιμών (*δειγμάτων-samples*) του σήματος συνεχούς χρόνου σε τακτές χρονικές στιγμές. Η διαδικασία ορισμού των δειγμάτων ενός σήματος συνεχούς χρόνου καθορίζεται από θεωρήματα και μεθόδους δειγματοληψίας, τα πιο σημαντικά από τα οποία θα παρουσιαστούν σε επόμενα τμήματα αυτού του κεφαλαίου.

2.1.1 Μονοδιάστατα σήματα συνεχούς χρόνου

Αν το πεδίο ορισμού ενός σήματος καθορίζεται από μια μεταβλητή, τότε το σήμα ονομάζεται *μονοδιάστατο (one-dimensional, 1-D)*. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός μονοδιάστατου σήματος μεταβάλλεται σε ένα συνεχές διάστημα, δηλαδή το πεδίο ορισμού I είναι ένα διάστημα, πιθανώς απείρου μήκους, της ευθείας \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, τότε το σήμα καλείται *σήμα συνεχούς χρόνου*. Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις σημάτων συνεχούς χρόνου, $I = \mathbb{R}$ ή

$I = \mathbb{R}^+$, όπου \mathbb{R}^+ συμβολίζει το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

Μερικά βασικά σήματα συνεχούς χρόνου είναι τα ακόλουθα :

- Το μοναδιαίο βήμα (*unit step*), που δίνεται από τη σχέση

$$u_s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Το γραμμικό (*linear*) σήμα, που δίνεται από τη σχέση

$$u_r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Το ημιτονοειδές (*sinusoid*) σήμα, που δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \sin \omega t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 Μονοδιάστατα σήματα διακριτού χρόνου

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός μονοδιάστατου σήματος λαμβάνει τιμές από ένα διακριτό σύνολο, δηλαδή αν το πεδίο ορισμού I είναι ένα διακριτό σύνολο, τότε το αντίστοιχο σήμα λέγεται *σήμα διακριτού χρόνου*. Οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου συναντώνται όταν $I = \mathbb{Z}$ ή όταν $I = \mathbb{Z}^+$, όπου \mathbb{Z}^+ παριστάνει το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών.

Ένα σήμα διακριτού χρόνου παριστάνεται ως μια ακολουθία αριθμών. Στα σήματα διακριτού χρόνου, η ανεξάρτητη μεταβλητή παριστάνεται συνήθως με n , η αντίστοιχη τιμή του σήματος με $x(n)$, και η χρονική εξέλιξη με $n \rightarrow x(n)$.

Μερικά βασικά σήματα διακριτού χρόνου είναι:

- Το μοναδιαίο βήμα, που δίνεται από τη σχέση

$$u_s(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{όπου } n \in \mathbb{Z}$$

- Το γραμμικό σήμα, που δίνεται από τη σχέση

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad \text{όπου } n \in \mathbb{Z}$$

- Το ημιπονοειδές σήμα $x(n) = \sin \omega n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.3 Διδιάστατα και πολυδιάστατα σήματα

Αν το πεδίο ορισμού ενός σήματος χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή δύο διαστάσεων, το σήμα ονομάζεται *διδιάστατο* (*two-dimensional, 2-D*). Ένα διδιάστατο σήμα εκφράζει τη μεταβολή μιας μεταβλητής f σε σχέση με δύο άλλες μεταβλητές x και y . Δηλαδή, ορίζεται ως μια συνάρτηση $f(\cdot, \cdot)$, με πεδίο ορισμού $I = I_1 \times I_2$, τέτοια ώστε $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ [2].

Αν στο πεδίο ορισμού I ενός διδιάστατου σήματος οι δύο μεταβλητές x και y μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο, τότε αυτό ονομάζεται *σήμα συνεχούς χρόνου (χώρου)*. Τότε, τα I_1 και I_2 είναι διαστήματα της ευθείας \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών. Αν τα I_1 και I_2 είναι υποσύνολα των ακεραίων \mathbb{Z} , το διδιάστατο σήμα ονομάζεται *διακριτού χρόνου*.

Το διδιάστατο μοναδιαίο βήμα συνεχούς χρόνου (χώρου) είναι

$$u_s(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για το σήμα αυτό ισχύει $u_s(x, y) = u_s(x)u_s(y)$.

Όμοια, το διδιάστατο μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου δίνεται από τον τύπο

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1 = 0 \text{ και } n_2 = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ισχύει $u(n_1, n_2) = u(n_1)u(n_2)$.

Αν το πεδίο ορισμού ενός σήματος χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή m διαστάσεων το σήμα ονομάζεται *πολυδιάστατο (multidimensional, m -D)*. Το πεδίο ορισμού του I γράφεται $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m$ και αν τα I_1, I_2, \dots, I_m είναι διαστήματα της ευθείας \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, τότε το σήμα είναι συνεχούς χρόνου, ενώ αν είναι υποσύνολα των ακεραίων \mathbb{Z} , το σήμα είναι διακριτού χρόνου.

2.1.4 Συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου

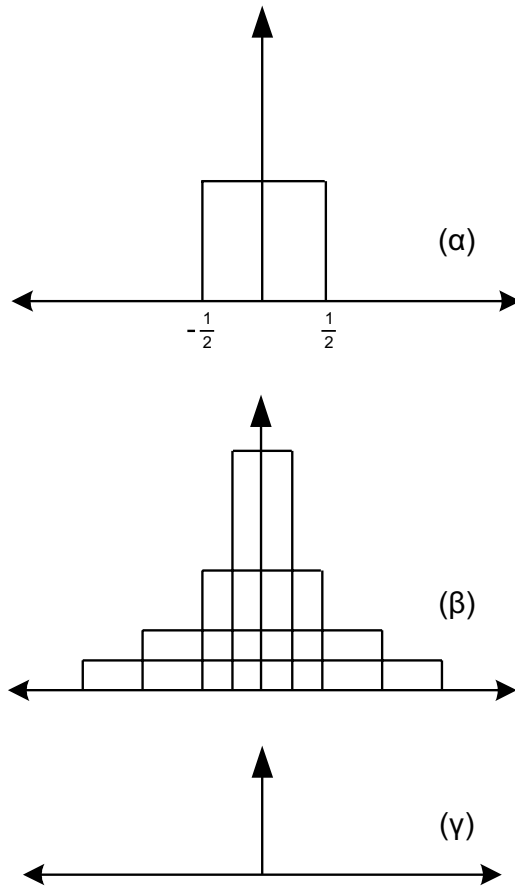
Υπάρχει μια ειδική “συνάρτηση”, η οποία είναι χρήσιμη στην ανάλυση σημάτων. Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να οριστεί με μαθηματική αυστηρότητα ως μία συνήθης συνάρτηση, αλλά μόνο ως μια γενικευμένη συνάρτηση [108]. Εδώ θα εκφραστεί χωρίς μαθηματική αυστηρότητα ως το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων σε τρόπο ώστε να επιτευχθεί απλότητα και χρησιμότητα, χωρίς τις έννοιες της αυστηρής θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων.

Πρώτα χρειάζεται να οριστεί μια συνάρτηση rect (μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός - *unit square pulse*), η οποία έχει τον ακόλουθο τύπο

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής ορίζεται μια ακολουθία συναρτήσεων, η οποία δίνεται από τον τύπο $\delta_n(t) = n \text{rect}(nt)$. Τα ορθογώνια τα οποία αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της ακολουθίας αυτής έχουν το ίδιο εμβαδόν, που είναι ίσο με τη μονάδα. Το ύψος τους αυξάνεται καθώς το $n \rightarrow \infty$, ενώ αντιστοίχως το πλάτος τους μειώνεται.

Το “όριο” αυτής της ακολουθίας συναρτήσεων είναι ένα ορθογώνιο με άπειρο ύψος και μηδενικό πλάτος, έτσι ώστε κατά κάποιο τρόπο το εμβαδόν του να παραμένει ίσο με τη μονάδα. Το όριο αυτό συνήθως υποδηλώνεται όπως στο Σχήμα 2.1 και συμβολίζεται με $\delta(t)$.



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης δέλτα.

Η εξήγηση αυτή οδηγεί στον “ορισμό” της *συνάρτησης δέλτα* (*delta function*) ή *συνάρτησης Dirac* (*Dirac function*), με τύπο

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t),$$

η οποία ικανοποιεί την σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Η συνάρτηση δέλτα $\delta(t)$ ονομάζεται και *κρουσική συνάρτηση συνεχούς χρόνου* (*continuous time impulse function*) και ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα “δειγματοληψίας”

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t') dt = x(t'),$$

όπου το $\delta(t - t')$ αποτελεί μία κρουσική συνάρτηση μετατοπισμένη στη θέση $t = t'$. Έτσι, από αυτή την ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα, μπορεί να θεωρηθεί ότι το $\delta(t - t')$ “δειγματίζει” ένα σήμα $x(t)$ στο σημείο $t = t'$.

Ιδιότητες συνάρτησης δέλτα

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0)$, για κάθε συνάρτηση $x(\cdot)$ συνεχή στο $t = 0$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t') dt = x(t')$, για κάθε συνάρτηση $x(\cdot)$ συνεχή στο $t = t'$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} x(0)$, για κάθε συνάρτηση $x(\cdot)$ συνεχή στο $t = 0$. Άρα $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$.

$$5. \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi st} ds.$$

$$6. \text{ Έστω } u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (\text{βηματική συνάρτηση})$$

Τότε ισχύει $u'(t) = \delta(t)$, όπου $u'(t)$ παριστάνει την παράγωγο της $u(t)$.

Η συνάρτηση δέλτα στις δύο διαστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης δέλτα επεκτείνεται και στις δύο διαστάσεις, όπου ορίζεται ως εξής:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y).$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x, y)dx dy = f(0, 0),$$

για κάθε συνάρτηση $f(\cdot, \cdot)$ που είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Για τη συνάρτηση αυτή ισχύουν οι γενικεύσεις όλων των ιδιοτήτων της μονοδιάστατης συνάρτησης δέλτα.

2.1.5 Δέλτα του Kronecker

Στην ανάλυση των σημάτων διακριτού χρόνου χρησιμοποιείται εκτενώς η έννοια της ακολουθίας. Μια ακολουθία η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου

είναι η συνάρτηση δέλτα διακριτού χρόνου (*discrete time delta function*), ή δέλτα του Kronecker (*Kronecker delta*) και ορίζεται ως εξής:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Η ακολουθία αυτή παίζει τον ίδιο ρόλο στα σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου με αυτόν που παίζει η συνάρτηση δέλτα στα σήματα συνεχούς χρόνου και ικανοποιεί ανάλογες ιδιότητες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση δέλτα διακριτού χρόνου δεν απαιτεί έννοιες της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων, όπως η συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου. Ο ανωτέρω ορισμός της συνάρτησης δέλτα διακριτού χρόνου είναι μαθηματικά αυστηρός.

Ιδιότητες συνάρτησης δέλτα διακριτού χρόνου

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1.$
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n) = x(0).$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n - n') = x(n').$

Το δέλτα του Kronecker στις δύο διαστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης δέλτα διακριτού χρόνου επεκτείνεται στις δύο διαστάσεις, όπου δίνεται από τον τύπο

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1 = 0 \text{ και } n_2 = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2.2 Μετασχηματισμοί Fourier

Οι μετασχηματισμοί Fourier αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για ανάλυση σημάτων και συστημάτων και επιτρέπουν την ποσοτική περιγραφή της ψηφιοποίησης και της δειγματοληψίας σημάτων και την ανάλυση των συνελκτικών φίλτρων και του θορύβου.

2.2.1 (Συνεχής) Μετασχηματισμός Fourier

Ο (συνεχής) **Μετασχηματισμός Fourier** - **MF** (*Fourier transform*) είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ο οποίος, στη γενική περίπτωση, απεικονίζει μια μιγαδική συνάρτηση n μεταβλητών σε μια άλλη μιγαδική συνάρτηση n μεταβλητών.

Ο MF ενός μονοδιάστατου συνεχούς σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ ορίζεται ως το συνεχές σήμα συνεχούς χρόνου $X(s)$, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi st} dt$$

όπου $i = \sqrt{-1}$. Η μεταβλητή s είναι μια παράμετρος, η οποία αναφέρεται ως *συχνότητα (frequency)*.

Ο **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier** - **AMF** (*Inverse Fourier Transform*) του σήματος $X(s)$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{-i2\pi st} ds.$$

Παρατηρείται ότι η μόνη διαφορά ανάμεσα στο MF και τον AMF βρίσκεται στο πρόσημο του εκθέτη στο μιγαδικό εκθετικό. Η σχέ-

ση ανάμεσα στο MF και τον AMF δίνεται από τον ακόλουθο τύπο αντιστροφής:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}, \text{ δηλαδή } x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(s)\}.$$

Τα σήματα $x(t)$ και $X(s)$ ονομάζονται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier (Fourier Transform pairs) και η μεταξύ τους αντιστοιχία είναι 1-1 με την έννοια του ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος.

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται μερικά χρήσιμα ζεύγη MF στον οποίο $\text{sinc}(\xi) \equiv \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$ με $\text{sinc}(0) = 1$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}.$$

2. Συμμετρίες

$$(\alpha') \quad x(t) = x(-t) \Rightarrow X(s) = X(-s).$$

$$(\beta') \quad x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(s) = -X(-s).$$

$$(\gamma') \quad \text{Όταν } x(t) \text{ πραγματική συνάρτηση} \Rightarrow X(s) = X^*(-s),$$

όπου * υποδηλώνει το μιγαδικό συζυγή.

3. Μετατόπιση

$$g(t) = x(t - a) \Rightarrow G(s) = e^{i2\pi a} X(s).$$

ΟΝΟΜΑ	$x(t)$	$X(s)$
Παλμός Gauss	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
Τετραγωνικός παλμός	$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$2 \operatorname{sinc}(2s) = \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s}$
Τριγωνικός παλμός	$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - t , & t \leq 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$(\operatorname{sinc})^2(s) = \frac{\sin^2(\pi s)}{(\pi s)^2}$
Φθίνον εκθετικό	$e^{\alpha t }, \alpha < 0$	$\frac{-2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 s^2}$
Συνάρτηση δέλτα	$\delta(t)$	1
Μοναδιαίο βήμα	$u_s(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s) + \frac{i}{\pi s}]$
Ημιτονοειδές σήμα	$\sin(2\pi s_0 t)$	$-\frac{i}{2}[\delta(s + s_0) - \delta(s - s_0)]$
Μιγαδικό εκθετικό	$e^{i2\pi s_0 t}$	$\delta(s - s_0)$

Πίνακας 2.1: Πίνακας ζευγών μετασχηματισμού Fourier.

4. Ομοιότητα

$$g(t) = x(at) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

5. Θεώρημα Parseval (αναφέρεται και ως Θεώρημα Plancherel)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(s)|^2 ds.$$

2.2.2 Σειρές Fourier

Αν ένα σήμα έχει τιμή μηδέν ή αν επαναλαμβάνεται περιοδικώς εκτός ενός διαστήματος $[-T/2, T/2]$, μπορεί να οριστεί η ακόλουθη σειρά *Fourier* (*Fourier series*):

$$X_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i2\pi n \frac{t}{T}} dt = \mathcal{F}\{x(t)\} \Big|_{s=\frac{n}{T}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με βάση τον προηγούμενο τύπο, στο σήμα $x(t)$ αντιστοιχίζεται σε μια άπειρη ακολουθία μιγαδικών συντελεστών X_n , δηλαδή ο ΜΦ του σήματος αυτού, κατά κάποιο τρόπο εκφυλίζεται σε σειρά *Fourier*.

Η ανωτέρω σειρά *Fourier* αντιστρέφεται από τον τύπο

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-i2\pi n \frac{t}{T}}.$$

Με τον τύπο αντιστροφής ανακατασκευάζεται το σήμα $x(t)$ ως υπέρθεση μιγαδικών εκθετικών διαφορών συχνοτήτων με πλάτη X_n .

Για πραγματικό σήμα $x(t)$, η σειρά *Fourier* μπορεί να εκφραστεί και από τον ακόλουθο τύπο:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

όπου

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Σε αυτή τη σειρά, το πραγματικό σήμα $x(t)$ ανακατασκευάζεται ως υπέρθεση δύο σειρών που έχουν πραγματικούς συντελεστές.

2.2.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Έστω $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ σήμα διακριτού χρόνου με διάρκεια (μήκος) N δείγματα. Ως ευθύς **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier** - **ΔΜΦ** (*Discrete Fourier Transform*) του σήματος αυτού ορίζεται το σήμα διακριτού χρόνου

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{i2\pi \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ως **Αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier** - **ΑΔΜΦ** (*Inverse Discrete Fourier Transform*) του σήματος $X(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ορίζεται το σήμα

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ισχύει $g(n) = x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Ο ΔΜΦ μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσέγγιση του συνεχούς ΜΦ. Πραγματικά, αν στον τύπο $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi st} dt$ θεωρηθεί $s = \frac{m}{\Delta t}$, συνάγεται ότι

$$X\left(\frac{m}{\Delta t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi \frac{mt}{\Delta t}} dt.$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει η προσέγγιση

$$X\left(\frac{m}{\Delta t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi\frac{mt}{\Delta t}} dt \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{i2\pi\frac{mn}{N}},$$

ισχύει $X(m) \equiv X\left(\frac{m}{\Delta t}\right) \approx \Delta t \Delta\text{MF}\{x(n\Delta t), n = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$.

Για να έχει νόημα η προσέγγιση αυτή, πρέπει αφενός η απόσταση Δt μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων να είναι αρκετά μικρή και αφετέρου το πλήθος N των δειγμάτων να είναι αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε να καλύπτεται το σήμα συνεχούς χρόνου με επαρκή διακριτική ικανότητα και στο μεγαλύτερο μέρος της διάρκειάς του.

2.2.4 Ταχείς αλγόριθμοι ΔΜF

Για τον υπολογισμό, με βάση το ορισμό, του ΔΜF ενός σήματος N δειγμάτων απαιτείται σημαντική υπολογιστική πολυπλοκότητα (της τάξης του N^2). Όμως, υπάρχουν και αλγόριθμοι που έχουν πολυπλοκότητα της τάξης $N \log_2 N$ και είναι γνωστοί ως *ταχείς μετασχηματισμοί Fourier (Fast Fourier Transform)*[75]. Οι αλγόριθμοι αυτοί παρουσιάζουν την καλύτερη (ταχύτερη) συμπεριφορά όταν το N είναι δύναμη του 2. Για παράδειγμα, όταν $N = 1024$, το κέρδος σε υπολογιστική ισχύ είναι της τάξης $\frac{N^2}{N \log_2 N} \approx 100$. Το κέρδος σε υπολογισμούς αυξάνεται με αύξηση του N .

Η βασική ιδέα στους ΤΜF είναι ότι ο ΔΜF μπορεί να εκφραστεί ως πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{W}} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \text{ όπου } \underline{\underline{W}} = [W_{nm}]_{N \times N} = [e^{i\frac{2\pi nm}{N}}]_{N \times N}.$$

Όμοια

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^\dagger \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

με $\underline{\underline{W}}^\dagger = \underline{\underline{W}}^{*\top} = \underline{\underline{W}}^*$.

Οι πίνακες $\underline{\underline{W}}$ και $\underline{\underline{W}}^\dagger$ έχουν πολλές συμμετρίες. Όταν $N = 2^p$, μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε p πίνακες τάξεως $N \times N$ που περιέχουν επαναλαμβανόμενες τιμές, μηδενικά και μονάδες.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier με αποδεκάτιση χρόνου

Έστω $x(n)$ ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, όπου $0 \leq n \leq N-1$ και N είναι άρτιος. Αν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι τα σήματα που αποτελούνται από τις άρτιες και τις περιττές τιμές του $x(n)$ αντιστοίχως, ισχύει

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Τότε λέγεται ότι τα σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ λαμβάνονται με *αποδεκάτιση (decimation) του σήματος $x(n)$ με το 2*. Και τα δύο σήματα έχουν διάρκεια $\frac{N}{2}$. Ορίζοντας $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, ο ΔΜΦ του $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(k) = \sum_{n=0,2,4,\dots} x(n)\omega_N^{nk} + \sum_{n=1,3,5,\dots} x(n)\omega_N^{nk},$$

ή

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\omega_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\omega_N^{2(n+1)k}. \quad (2.1)$$

Επειδή $\omega_N^2 = e^{-i\frac{2\pi}{N}2} = \omega_{N/2}$, η εξίσωση (2.1) γίνεται

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n)\omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)\omega_{N/2}^{nk},$$

οπότε

$$X(k) = X_1(k) + \omega_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.2)$$

Με τη χρήση της εξίσωσης (2.2), οι πρώτες $\frac{N}{2}$ τιμές του ΔΜF μπορούν να υπολογιστούν από το ΔΜF των $\frac{N}{2}$ αποδεκατισθέντων σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$. Λόγω της περιοδικότητας του ΔΜF ισχύει

$$X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k), \quad X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_2(k). \quad (2.3)$$

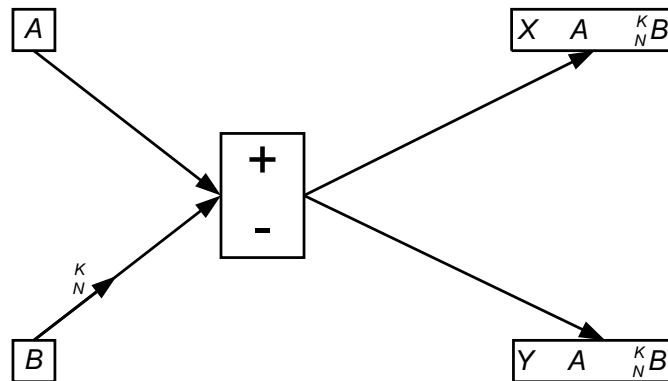
Επίσης, επειδή $\omega_N^{\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$, ισχύει

$$\omega_N^{k+\frac{N}{2}} = \omega_N^k \omega_N^{\frac{N}{2}} = -\omega_N^k. \quad (2.4)$$

Από τις εξισώσεις (2.2), (2.3) και (2.4) συνάγονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$X(k) = X_1(k) + \omega_N^k X_2(k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (2.5)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - \omega_N^k X_2(k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πεταλούδας στο ΔMFAX.

Για τον υπολογισμό του $X(k)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δομή της πεταλούδας (*butterfly structure*), που φαίνεται στο Σχήμα (2.2).

Με τη δομή αυτή συνδυάζονται οι μετασχηματισμοί $X_1(k)$ και $X_2(k)$, έτσι ώστε οι δύο αριθμοί A και B να μετασχηματίζονται στους X και Y σύμφωνα με τον κανόνα

$$X = A + \omega_N^k B$$

$$Y = A - \omega_N^k B.$$

Στη δομή της πεταλούδας χρησιμοποιείται ένας πολλαπλασιαστής και ένας αθροιστής.

Όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (2.5)–(2.6), για τον υπολογισμό του $X(k)$ από το $X_1(k)$ και το $X_2(k)$ χρησιμοποιούνται $\frac{N}{2}$ πεταλούδες, κάθε μια από τις οποίες απαιτεί έναν πολλαπλασιασμό. Στην πράξη, μερικές από αυτές δεν εκτελούν πολλαπλασια-

σμό. Για παράδειγμα, στο Σχήμα (2.3) η πεταλούδα που αντιστοιχεί στον παράγοντα $\omega_{16}^0 = 1$. Έτσι η πολυπλοκότητά της δεν υπερβαίνει τις $\frac{N}{2}$ πράξεις (πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις). Αν οι ΔΜΦ $X_1(k)$ και $X_2(k)$ υπολογισθούν κατευθείαν από τις εξισώσεις αυτές, απαιτείται ένα σύνολο πράξεων που δεν υπερβαίνει το $2(N/2)^2 + N/2 = N^2 + N/2$. Οπότε, με τη χρήση των εξισώσεων (2.5)–(2.6) επιτυγχάνεται ελάττωση κατά περίπου 50% των υπολογισμών σε σχέση με τον απευθείας υπολογισμό του ΔΜΦ από τον ορισμό του.

Η ελάττωση της πολυπλοκότητας είναι περισσότερο σημαντική όταν ο N είναι δύναμη του 2 ($N = 2^p$), οπότε η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται. Έτσι στην περίπτωση $N = 2^p$, ο υπολογισμός καθενός από τα $X_1(k)$ και $X_2(k)$ μπορεί να γίνει αναδρομικά από τη δομή πεταλούδας που χρησιμοποιεί ΔΜΦ $N/4$ -σημείων, δύο για το καθένα. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από $p - 1$ βήματα δημιουργούνται $N/2$ ΔΜΦ, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 2 σημεία.

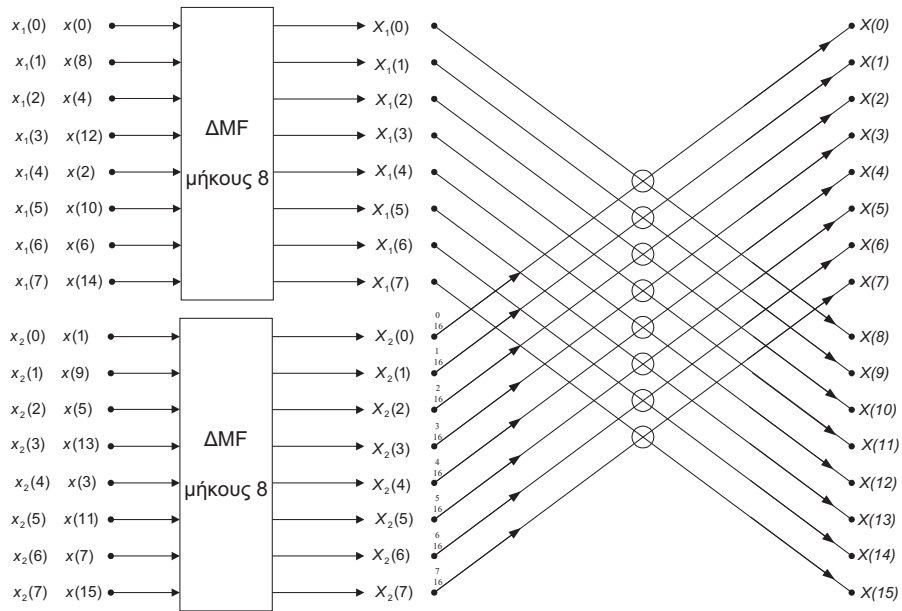
Ένας ΔΜΦ 2-σημείων αποτελείται μόνο από έναν αθροιστή, καθώς $\omega_2^0 = 1$, $\omega_2^1 = -1$ και

$$X(0) = x(0) + x(1)$$

$$X(1) = x(0) - x(1).$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η ανάπτυξη του βασικού **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier με Αποδεκίαση στο Χρόνο - ΔΜΦΑΧ** (*Discrete Fourier Transform with Decimation in Time*). Στο Σχήμα 2.3

παρουσιάζεται η περίπτωση ακολουθιών 16-σημείων. Από το Σχή-



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔMFAX.

μα 2.3 φαίνεται ότι, για να εμφανίζονται στην έξοδο οι τιμές του ΔMF σε σειρά, απαιτείται η αναδιάταξη των όρων του σήματος εισόδου. Δηλαδή, χρειάζεται ένας τρόπος δεικτοδότησης, έτσι ώστε τα δεδομένα να μετατίθενται στη μορφή

$$(x(0), x(8), x(4), x(12), x(2), x(10), x(6), x(14), \\ x(1), x(9), x(5), x(13), x(3), x(11), x(7), x(15)).$$

Για τον ορισμό της δεικτοδότησης, οι δείκτες μετατρέπονται στη δυαδική τους μορφή και στη συνέχεια αντιστρέφονται τα ψηφία της μορφής αυτής όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2.2.

Αρχική διάταξη	Δυαδική μορφή	Αντεστραμμένη δυαδική μορφή	Αναδιάταξη
0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

Πίνακας 2.2: Πίνακας ορισμού δεικτοδότησης.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier με αποδεκάτιση συχνότητας

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα βασίζεται στην ιδέα της υποδιαίρεσης της ακολουθίας των τιμών του σήματος σε άρτιους και περιττούς δείκτες. Στη συνέχεια εφαρμόζεται μια διαφορετική τμηματοποίηση, όπου η μια από τις υπακολουθίες δημιουργείται από τις πρώτες $N/2$ τιμές του αρχικού σήματος, ενώ η άλλη αποτελείται από τις τελευταίες $N/2$ τιμές. Αποδεικνύεται ότι αυτή η τμηματοποίηση οδηγεί σε μια διάταξη αντιστροφής ψηφίου του ΔΜF της ακολουθίας και η λαμβανόμενη διάταξη καλείται **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier με Αποδεκάτιση Συχνότητας - ΔΜFΑΣ** (*Discrete Fourier Transform with Decimation in Frequency*).

Για τον υπολογισμό της διάταξης αυτής ορίζονται οι ακολουθίες $x_1(n)$ και $x_2(n)$, μήκους $N/2$, ως εξής:

$$x_1(n) = x(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.7)$$

$$x_2(n) = x\left(n + \frac{N}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.8)$$

Τότε ο ΔΜF γίνεται

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)\omega_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)\omega_N^{nk}, \quad (2.9)$$

ενώ με τη χρήση των εξισώσεων (2.7) και (2.8) γίνεται

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + e^{-i\pi k} x_2(n)]\omega_N^{nk}. \quad (2.10)$$

Επειδή $e^{-i\pi k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k \text{ άρτιος,} \\ -1, & \text{αν } k \text{ περιττός,} \end{cases}$ υπολογίζονται οι άρτιες και οι περιττές τιμές του $X(k)$ ξεχωριστά. Έτσι, η εξίσωση (2.10) δίνει

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] \omega_N^{nk} \quad (2.11)$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) - x_2(n)] \omega_N^{nk} \omega_N^{nk}. \quad (2.12)$$

Αν τεθεί

$$f(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

και

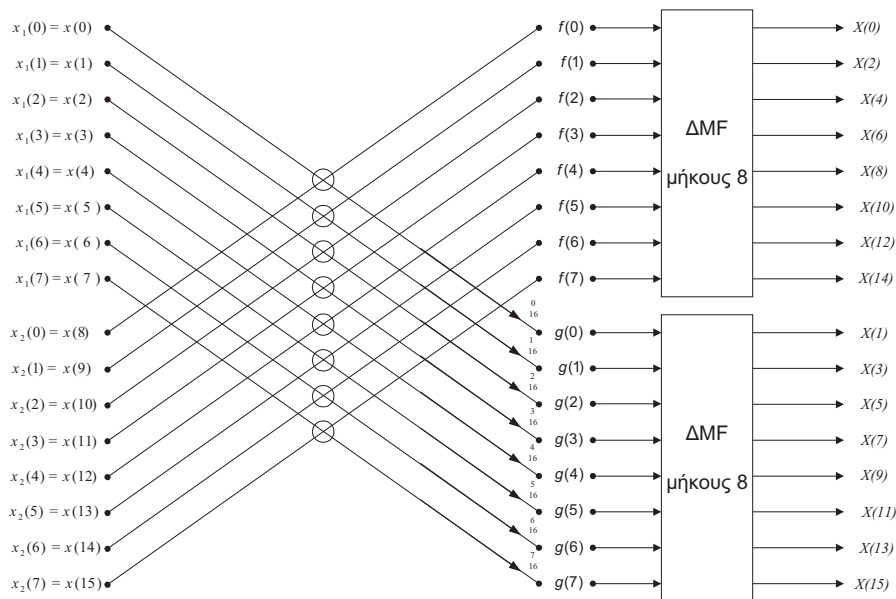
$$g(n) = [x_1(n) - x_2(n)] \omega_N^{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

ισχύει

$$X(2k) = F(k), \quad X(2k+1) = G(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

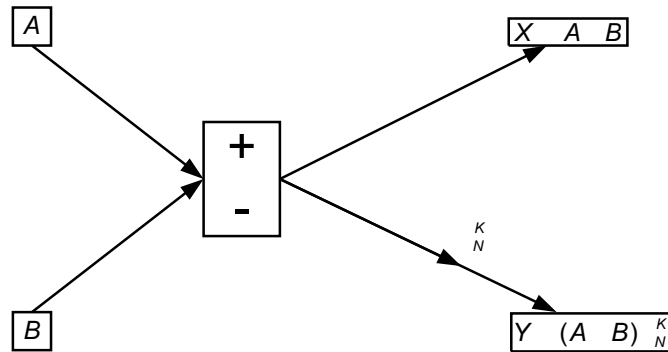
Επομένως, ο υπολογισμός του ΔΜΦ μήκους N ανάγεται στον υπολογισμό δύο ΔΜΦ $N/2$ -σημείων. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4 για $N = 16$.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία για καθεμία από τις ακολουθίες $f(n)$ και $g(n)$. Αν $N = 2^p$, ο αλγόριθμος τερματίζεται μετά από p βήματα. Στον ΔΜΦΑΣ αντιστοιχεί πεταλούδα η οποία διαφέρει από την πεταλούδα του ΔΜΦΑΧ στο ότι ο πολλαπλασιασμός με ω_N^n γίνεται μετά την αφαίρεση. Στον αλγόριθμο του ΔΜΦΑΣ, τα δεδομένα εισάγονται σε κανονική διάταξη και



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔΜΦΑΣ.

στην έξοδο παράγεται μια ακολουθία σε διάταξη αντιστροφής ψηφίου. Ο ΔΜΦΑΣ και ο ΔΜΦΑΧ έχουν την ίδια πολυπλοκότητα, δηλαδή $\frac{1}{2}N \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N \log_2 N$ μιγαδικές προσθέσεις. Ακόμη, και οι δυο αλγόριθμοι εκτελούν τους υπολογισμούς στις ίδιες θέσεις μνήμης. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος πίνακας χρησιμοποιείται για την αποθήκευση τόσο των δεδομένων εισόδου, όσο και των δεδομένων εξόδου.



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πεταλούδας στο ΔΜΦΑΣ.

2.2.5 Μετασχηματισμοί Fourier σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις

Για σήματα που εξαρτώνται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, ο ΜΦ και ο αντίστροφός του ορίζονται ως

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

και

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i2\pi(ux+vy)} du dv,$$

αντιστοίχως. Οι μεταβλητές u και v αντιστοιχούν σε συχνότητα κατά μήκος των x και y αξόνων αντιστοίχως. Ο ΔΜΦ ενός διδιάστατου σήματος $f(m, n)$, $0 \leq m, n \leq N - 1$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{i2\pi \frac{km+ln}{N}}, \quad 0 \leq k, l \leq N - 1,$$

ενώ ο αντίστροφός του ορίζεται ως

$$f(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k, l) e^{-i2\pi \frac{km+ln}{N}}, \quad 0 \leq m, n \leq N-1.$$

Ο ΔΜF του σήματος $f(m, n)$, $0 \leq m, n \leq N-1$ διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\underline{\underline{f}} = [f(m, n)], \quad \underline{\underline{F}} = [F(k, l)], \quad \underline{\underline{W}} = [w_{kn}] = \left[e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \right].$$

Τότε $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{W}} \underline{\underline{f}} \underline{\underline{W}}$ και $\underline{\underline{f}} = \frac{1}{N^2} \underline{\underline{W}}^* \underline{\underline{F}} \underline{\underline{W}}^*$.

Ο διδιάστατος MF έχει όλες τις ιδιότητες του μονοδιάστατου MF και γενικεύεται σε περισσότερες από δύο διαστάσεις. Για τις δύο διαστάσεις ισχύουν επιπλέον οι επόμενες δύο ιδιότητες, οι οποίες γενικεύονται και σε περισσότερες από δύο διαστάσεις

1. Διαχωρισσιμότητα.

Αν $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, τότε $F(u, v) = F_1(u)F_2(v)$. Δηλαδή, αν ένα διδιάστατο σήμα εκφράζεται ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων σημάτων, από τα οποία το πρώτο εξαρτάται από μία μεταβλητή x και το δεύτερο από μια μεταβλητή y , τότε ο MF του διδιάστατου σήματος είναι ίσος με το γινόμενο των MF των μονοδιάστατων σημάτων.

2. Περιστροφικότητα.

Αν $g(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$, τότε $G(u, v) = F(u \cos \theta + v \sin \theta, -u \sin \theta + v \cos \theta)$. Δηλαδή, αν ένα διδιάστατο σήμα περιστρέφεται κατά γωνία θ , τότε και ο MF του σήματος αυτού στρέφεται κατά τη γωνία αυτή.

2.3 Δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου

Μια σημαντική κατηγορία σημάτων διακριτού χρόνου προκύπτει από τη *δειγματοληψία (sampling)* σημάτων συνεχούς χρόνου. Η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητη όταν σήματα συνεχούς χρόνου πρόκειται να υποστούν επεξεργασία με ψηφιακά μέσα και πραγματοποιείται από ειδικές διατάξεις, οι οποίες καλούνται *αναλογικο-ψηφιακοί μετατροπείς (analog-to-digital converters)*.

Όταν ένα σήμα συνεχούς χρόνου πρόκειται να ψηφιοποιηθεί και αναζητείται η άριστη τεχνική δειγματοληψίας, πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά το φάσμα του σήματος, ο αποδεκτός μέσος ρυθμός δειγματοληψίας και ο τρόπος επεξεργασίας του σήματος.

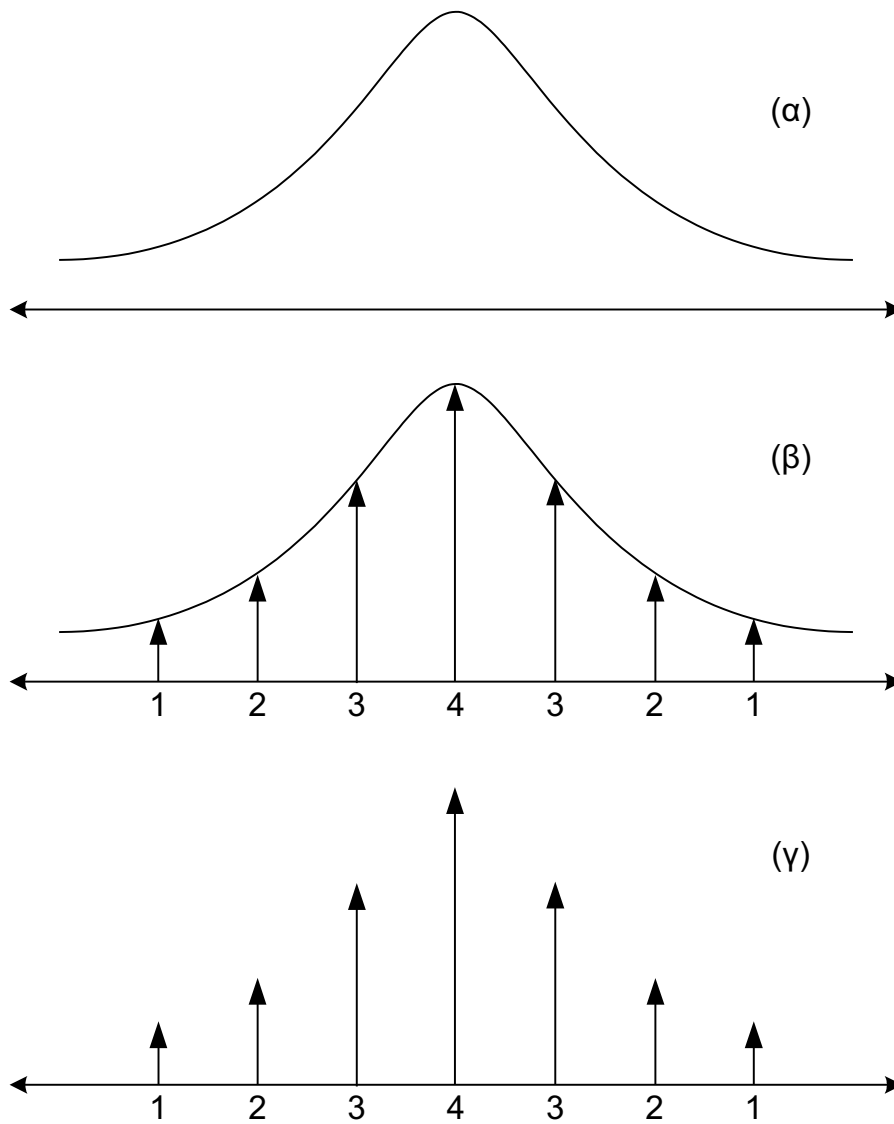
Η διαδικασία της δειγματοληψίας πρέπει να εκτελεστεί έτσι, ώστε η ακολουθία των δειγμάτων που θα προκύψει να αναπαριστάνει το αρχικό σήμα με όσο το δυνατόν μικρότερη απώλεια πληροφορίας. Αν το φάσμα του σήματος μπορεί να περιοριστεί, όπως απαιτείται από το θεώρημα δειγματοληψίας, τότε η περιοδική δειγματοληψία εφαρμόζεται για διάφορους λόγους. Πρώτον, γιατί είναι η απλούστερη μέθοδος και μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα. Δεύτερον, γιατί οι περιοδικές ακολουθίες δειγμάτων σήματος υφίστανται εύκολα ψηφιακή επεξεργασία. Τέλος, γιατί έχουν αναπτυχθεί πολλοί ταχείς και αποτελεσματικοί αλγόριθμοι για την υλοποίηση αντιστοίχων ψηφιακών φίλτρων.

2.3.1 Περιοδική δειγματοληψία

Θεωρώντας ένα θετικό αριθμό T και ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, λαμβάνονται δείγματα του $x(t)$ ανά T χρονικές μονάδες. Προκύπτει ένα σήμα διακριτού χρόνου $x_d(\cdot)$ που δίνεται από τον τύπο $x_d(n) = x(nT)$. Καταχρηστικά, γράφεται $x(n) = x(nT)$. Ένα σήμα διακριτού χρόνου, που προκύπτει από σήμα συνεχούς χρόνου μέσω δειγματοληψίας, ονομάζεται *δειγματοποιημένο (sampled signal)*. Η ποσότητα T ονομάζεται *περίοδος δειγματοληψίας (sampling period)* και $1/T$ είναι ο *ρυθμός (sampling rate)* ή *συχνότητα δειγματοληψίας (sampling frequency)*.

Στο Σχήμα 2.6 απεικονίζεται η διακριτή αναπαράσταση ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ με δειγματοληψία των τιμών του σε ένα σύνολο σημείων. Η διακριτή αναπαράσταση μπορεί να εκφραστεί ως μια λίστα των τιμών 1,2,3,4,3,2,1. Είναι, επίσης, δυνατό να αναπαρασταθούν τα δείγματα του σήματος ως ένα απλό διάνυσμα στον πολυδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα, το σύνολο των επτά δειγμάτων του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα στον 7-διάστατο χώρο, όπου το πρώτο στοιχείο του είναι ίσο με το 1, το δεύτερο με 2, το τρίτο με 3, κ.ο.κ.

Για τη δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου ισχύει το ακόλουθο θεώρημα (Whittaker, Shannon, Nyquist).



Σχήμα 2.6: Σχηματική αναπαράσταση της δειγματοληψίας σήματος συνεχούς χρόνου.

Το θεώρημα δειγματοληψίας

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Έστω ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(\cdot)$ και μια ακολουθία $\{x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ δειγμάτων του, τα οποία λαμβάνονται περιοδικώς με περίοδο T_s , δηλαδή $x(n) = x(nT_s)$ για κάθε n . Αν (α) το σήμα έχει MF $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi st} dt$ τέτοιο ώστε $X(s) = 0$, όταν $|s| > s_0$ για κάποια συχνότητα s_0 και (β) η συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{1}{T_s}$ είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας s_0 του σήματος $x(\cdot)$, τότε η ακολουθία $\{x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ επαρκεί για να ανακατασκευάσει το σήμα $x(\cdot)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Πιο συγκεκριμένα:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \frac{\pi(t-nT_s)}{T_s}}{\frac{\pi(t-nT_s)}{T_s}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - nT_s}{T_s} \right)$$

όπου $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$.

Σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις, το θεώρημα δειγματοληψίας έχει περισσότερες μορφές. Αν $x(v)$ είναι ένα d -διάστατο σήμα ($v \in \mathbb{R}^d$) ορίζεται ένα σχήμα δειγματοληψίας (sampling scheme) ως

$$x_{n_1 \dots n_d} = x(n_1 v_1 + \dots + n_d v_d),$$

όπου v_1, \dots, v_d είναι μια βάση του χώρου \mathbb{R}^d . Όταν τα διανύσματα v_1, \dots, v_d είναι η συνήθης βάση, τότε υπάρχει μια άμεση γενίκευση της μονοδιάστατης δειγματοληψίας.

2.3.2 Τυχαία ή μη περιοδική δειγματοληψία

Η εφαρμογή της τυχαίας δειγματοληψίας μπορεί να αποδειχθεί πιο ευεργετική όταν δεν είναι επιθυμητό ή όταν δεν είναι δυνατό να φιλτραριστούν τα σήματα πριν τη μετατροπή τους από συνεχούς χρόνου σε διακριτά. Στις περιπτώσεις αυτές η τυχαία δειγματοληψία μπορεί να μειώσει σημαντικά τα λάθη που οφείλονται στο φαινόμενο της *αναδίπλωσης (aliasing)*, το οποίο μπορεί να καταστρέψει την επεξεργασία των ψηφιακών σημάτων.

Πάντως, το σωστό αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί μόνο όταν η τυχαία δειγματοληψία πραγματοποιηθεί κατάλληλα, με κάποια από τις υπάρχουσες τεχνικές. Οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι είναι αυτές στις οποίες χρησιμοποιούνται *ανελίζεις τυχαίων σημείων (random point processes)*.

Ανελίζεις τυχαίων σημείων

Τα *στιγμιότυπα δειγματοληψίας (sampling instants)* συνήθως παριστάνονται ως σημεία στον άξονα του χρόνου. Ακολουθίες τέτοιων σημείων μπορούν να θεωρηθούν ως ανελίζεις σημείων. Παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο γιατί οι ιδιότητες των δειγματοσιμμένων σημάτων εξαρτώνται πρώτα απ' όλα από τα χαρακτηριστικά αυτών των ανελίζεων.

Μια σχετικώς μεγάλη ποικιλία ανελίζεων τυχαίων σημείων έχει διατυπωθεί για τυχαία δειγματοληψία και έχει ερευνηθεί ένας αριθμός από αυτές για το πότε μειώνουν το φαινόμενο της αναδίπλω-

σης. Η θεωρία τέτοιων ανελιξεων έχει αναπτυχθεί βαθμιαία από τους Beutler και Leneman [45, 46], καθώς και από το Masry [41]. Παρόμοια προβλήματα έχουν επίσης μελετηθεί σε αυτό που ονομάζεται *θεωρία ανανέωσης (renewal theory)* και πολλά χρήσιμα αποτελέσματα ερευνών βρίσκονται στο βιβλίο του Cox [39] και παρόμοιες εκδόσεις.

Παρ' όλη τη μεγάλη ποικιλία των ανελιξεων τυχαίων σημείων που έχουν αναπτυχθεί, λίγες μόνο από αυτές είναι κατάλληλες για εφαρμογές τυχαίας δειγματοληψίας, με κυριότερες τις ακόλουθες: *περιοδική δειγματοληψία με τρέμουλο (periodic sampling with jitter)*, *συσχετισμένη αθροιστική ανέλιξη σημείων (correlated additive point process)*, *δειγματοληψία με τυχαίες παραλείψεις (sampling with random skips)* και τέλος η *αθροιστική τυχαία δειγματοληψία (additive random sampling)*, η οποία παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στα επόμενα.

Αθροιστική τυχαία δειγματοληψία

Στην αθροιστική τυχαία δειγματοληψία, το σήμα δειγματίζεται στις χρονικές στιγμές $t_k = t_{k-1} + \tau_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, όπου τ_k είναι η υλοποίηση μιας τυχαίας μεταβλητής. Αυτός ο τρόπος τυχαίας δειγματοληψίας προτάθηκε το 1960 από τους Shapiro και Silverman [58] και στην αρχή βασίστηκε στην υπόθεση ότι τα διαδοχικά διαστήματα δειγματοληψίας $\{\tau_k, \tau_{k-1}\}$ ήταν στατιστικώς ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα. Τα χαρακτηριστικά των δειγμάτων αυτών ήταν η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ , ενώ ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας ήταν ίσος με $\frac{1}{\mu}$.

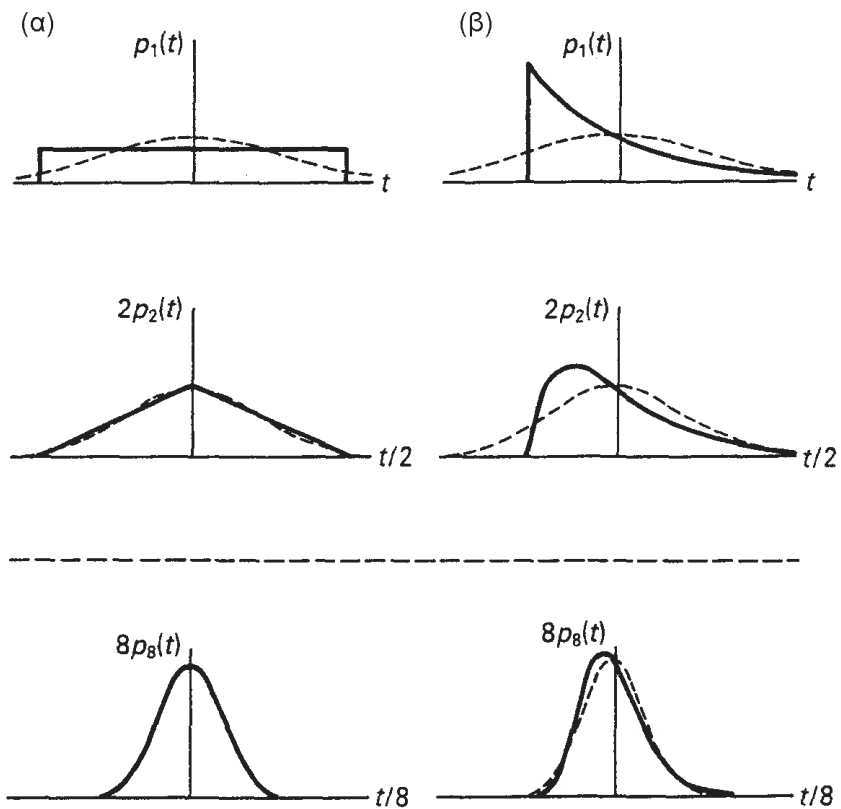
Αν θεωρηθούν τα χρονικά διαστήματα $[0, t_k] = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$ προκύπτουν τυχαίες μεταβλητές που χαρακτηρίζονται από την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\{p_k(t)\}$. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_\tau(t) \\ p_2(t) &= p_1(t) * p_\tau(t) \\ &\dots\dots\dots \\ p_k(t) &= p_{k-1}(t) * p_\tau(t), \end{aligned}$$

όπου * συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης, όπως αυτή ορίζεται στην παράγραφο 2.4.4. Από το κεντρικό ορικό θεώρημα της Στατιστικής (*Central Limit Theorem in Statistics - Bellanger*) [69] ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα:

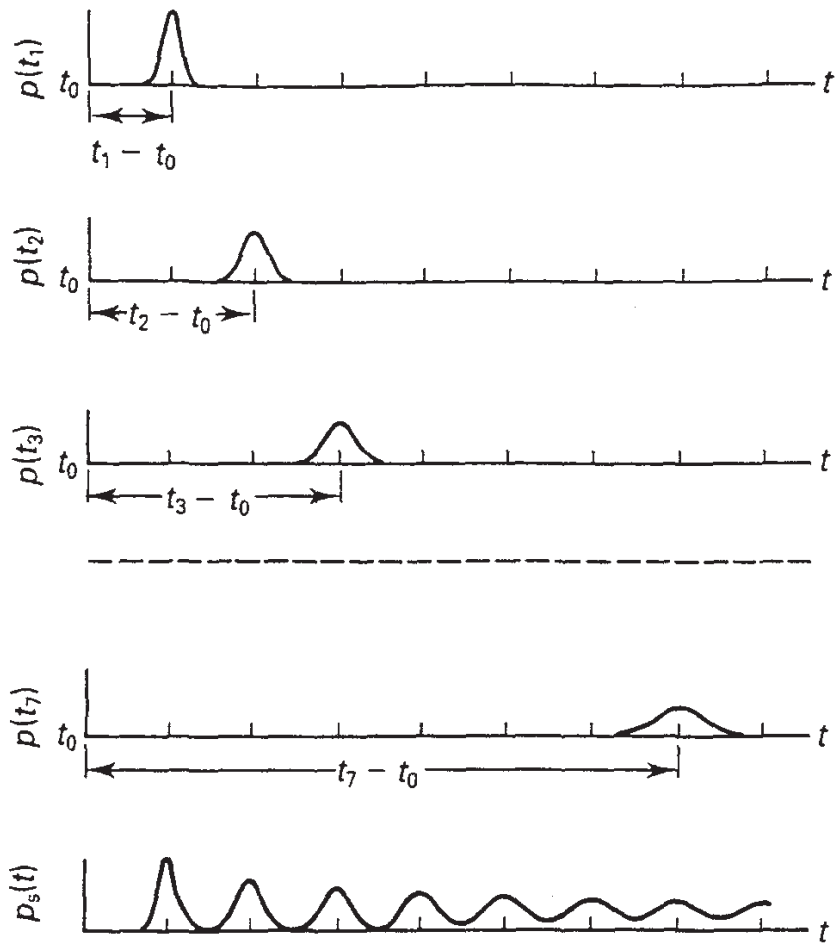
Αν η τυχαία μεταβλητή t_k παριστάνει το καθαρό άθροισμα k στατιστικώς ανεξαρτήτων συνιστωσών μεταβλητών $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, τότε όποια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας k αν έχουν οι συνιστώσες αυτές, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k = t_k$ τείνει στην κανονική κατανομή, καθώς το k τείνει στο άπειρο.

Έτσι, όποια μέθοδος τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας και αν εφαρμοστεί, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_\tau(t)$ μπορεί να ποικίλει σημαντικά από περίπτωση σε περίπτωση χωρίς να χειροτερεύουν οι συνθήκες δειγματοληψίας, καθώς η συνάρτηση πυκνότητας $p(t)$ του δείγματος Θ α τείνει πάντα στο σταθερό επίπεδο $\frac{1}{\mu}$, όταν το t αυξάνει. Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει $p(t) = \frac{1}{\mu}$.



Σχήμα 2.7: Εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $p_r(t)$ όταν $p_1(t)$ είναι (α) ομοιόμορφη και (β) εκθετική.

Στο Σχήμα 2.7 εμφανίζονται οι μετασχηματισμοί των συναρτήσεων πυκνότητας $p_k(t)$, στις περιπτώσεις που η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_r(t)$ έχει (α) κανονική και (β) εκθετική κατανομή. Σημειωτέον ότι οι κλίμακες στα σχήματα είναι διαφορετικές από τη μία συνάρτηση στην άλλη. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αθροίσματος των r χρονικών διαστημάτων συμβολίζεται με $p_r(t)$ και οι αναμενόμενες τιμές με μ_r . Και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές της $p_r(t)$ αλλάζουν, καθώς ο αριθμός r των διαστημάτων δειγματοληψίας που αθροίζονται αυξάνεται από το 1 στο 8. Η μέθοδος της τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, η συνάρτηση $p(t)$ τείνει να γίνει επίπεδη όταν το t υπερβαίνει κάποιες τιμές T_α . Η τιμή της T_α εξαρτάται από το $p_r(t)$ και προφανώς από την αποδεκτή απόκλιση του $p_r(t)$ από το αποδεκτό σταθερό επίπεδο $\frac{1}{\mu}$. Εν τούτοις, αυτή η περίπτωση είναι μόνο για συγχρονισμένη δειγματοληψία με $t_0 = 0$. Αν η δειγματοληψία είναι σταθερή, π.χ. όταν το t_0 είναι μια κατάλληλα κατανεμημένη μεταβλητή, $p(t) = \frac{1}{\mu}$ για ολόκληρο το χρονικό διάστημα στο οποίο το σήμα δειγματίζεται. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση όλες οι στιγμιαίες τιμές του σήματος δειγματίζονται με την ίδια πιθανότητα.

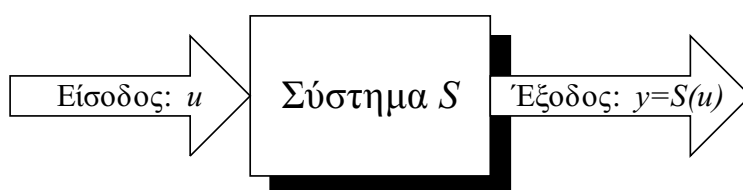


Σχήμα 2.8: Η μέθοδος της τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας.

2.4 Βασικές έννοιες συστημάτων

2.4.1 Η έννοια του συστήματος

Οι όροι *σύστημα (system)* ή *φίλτρο (filter)* αναφέρονται συνώνυμα σε ένα μετασχηματισμό (τελεστή) που απεικονίζει ένα ή περισσότερα σήματα (*σήματα εισόδου - input signals*) από κάποιο σύνολο I σε ένα ή περισσότερα σήματα (*σήματα εξόδου - output signals*) από ένα σύνολο U . Ένα σύστημα, επομένως, θα συμβολίζεται ως $y = S(u)$, όπου u είναι το σήμα εισόδου, y το σήμα εξόδου και S συμβολίζει το μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στο σύστημα. Ένα σύστημα μπορεί να αποδοθεί από την παράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: Σχηματική αναπαράσταση του συστήματος.

Τα ακόλουθα αποτελούν τυπικά παραδείγματα συστημάτων με άμεσο τεχνολογικό ενδιαφέρον:

- υπολογιστές, οι οποίοι δέχονται δεδομένα από τις συσκευές εισόδου, τα επεξεργάζονται και τα αποδίδουν στις συσκευές εξόδου

- ηλεκτρονικοί ενισχυτές, οι οποίοι δέχονται στην είσοδο σήματα που παριστάνουν ομιλία, μουσική, ήχους και άλλα ακουστικά σήματα, τα “ενισχύουν” και τα αποδίδουν στις μονάδες εξόδου
- φίλτρα διδιάστατων εικόνων, τα οποία δέχονται στην είσοδο απεικονίσεις της κατανομής μιας ιδιότητας των εικόνων αυτών και τις αποδίδουν στην έξοδο “φιλτραρισμένες”
- μηχανολογικά συστήματα, όπως δορυφόροι, αεροπλάνα, ρομποτικοί βραχίονες, αυτοκίνητα, κ.ά., όπου ως είσοδοι θεωρούνται οι δυνάμεις που επηρεάζουν την κίνησή τους και ως έξοδοι οι μετατοπίσεις ή οι ταχύτητές τους
- συστήματα επεξεργασίας βιοϊατρικών σημάτων
- συστήματα επεξεργασίας και ανάλυσης οικονομικών στοιχείων
- συστήματα επεξεργασίας και ανάλυσης μετεωρολογικών δεδομένων
- συστήματα επεξεργασίας και ανάλυσης οικονομικών στοιχείων
- πρωτόκολλα διαβίβασης πακέτων δεδομένων σε ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο.

2.4.2 Βασικές κατηγορίες συστημάτων

Τα συστήματα, ανάλογα με τη φύση των εισόδων που δέχονται και των εξόδων τους, διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες. Οι πιο βασικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

- *αιτιατά (deterministic)*, όπως θα οριστούν στην επόμενη ενότητα 2.4.3
- *στοχαστικά (stochastic)* ή *τυχαία (random)*, όταν τα σήματα εξόδου που αντιστοιχούν σε νομοτελειακά σήματα εισόδου είναι στοχαστικά
- *μιας εισόδου - μιας εξόδου (one input - one output)*, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι μονοκαναλικά
- *μονοδιάστατα (one-dimensional)*, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι μονοδιάστατα
- *διδιάστατα (two-dimensional)*, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι διδιάστατα
- *πολυδιάστατα (multi-dimensional)*, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι πολυδιάστατα
- *συνεχούς χρόνου (continuous-time)*, όταν οι εισοδοί και οι έξοδοι είναι σήματα συνεχούς χρόνου
- *διακριτού χρόνου (discrete-time)*, όταν οι εισοδοί και οι έξοδοι είναι σήματα διακριτού χρόνου.

2.4.3 Βασικές ιδιότητες συστημάτων

Γραμμικότητα: Ένα σύστημα ονομάζεται *γραμμικό (linear)*, όταν το σήμα εξόδου που αντιστοιχεί στο γραμμικό συνδυασμό δύο σημάτων εισόδου είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των σημάτων εξόδου που αντιστοιχούν σε καθένα από τα σήματα εισόδου. Δηλαδή, το σύστημα $S(\cdot)$ είναι γραμμικό, αν και μόνο αν,

$$S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 S(u_1) + \alpha_2 S(u_2)$$

για κάθε α_1, α_2 και οποιαδήποτε σήματα εισόδου u_1, u_2 .

Αιτιατότητα: Ένα σύστημα ονομάζεται *αιτιατό (causal)*, όταν το σήμα εισόδου τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος εισόδου σε χρονικές στιγμές που προηγούνται της στιγμής t . Δηλαδή, το σύστημα S είναι αιτιατό, αν και μόνο αν, για κάθε χρονική στιγμή t και για κάθε ζεύγος σημάτων u, v , για το οποίο $u(\tau) = v(\tau), \tau < t$, ισχύει $S(u)(t) = S(v)(t)$.

Χρονικώς αναλλοίωτο: Ένα σύστημα ονομάζεται *χρονικώς αναλλοίωτο (time invariant)*, όταν μια χρονική μετατόπιση του σήματος εισόδου προκαλεί την ίδια χρονική μετατόπιση και στο σήμα εξόδου. Δηλαδή, θέτοντας $u_\tau(t) = u(t - \tau)$, το σύστημα S είναι χρονικώς αναλλοίωτο, αν και μόνο αν, $S(u_\tau)(t) = S(u)(t - \tau)$ για κάθε σήμα εισόδου u , κάθε μετατόπιση τ και κάθε χρονική στιγμή t . Ένα χρονικώς αναλλοίωτο σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα *συναρτησιακό (functional)*. Πραγματικά, ορίζοντας το συναρτησιακό $\sigma : U \rightarrow R$

ως $\sigma(u) = S(u)(0)$, η τιμή του σήματος εξόδου του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μπορεί να εκφραστεί με βάση τη σχέση $S(u)(t) = S(u_t)(0) = s(u_t)$. Αυτή η 1-1 αντιστοιχία των χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων και των συναρτησιακών σε ορισμένες περιπτώσεις διευκολύνει την ανάλυση.

Ευστάθεια: Ένα σύστημα θα ονομάζεται *ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (BIBO stable - Bounded Input Bounded Output stable)*, αν το σύστημα απεικονίζει κάθε φραγμένο σήμα εισόδου σε φραγμένο σήμα εξόδου. Δηλαδή, το σύστημα S είναι ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου αν, για κάθε σήμα εισόδου u για το οποίο υπάρχει μια σταθερά $m(u)$ τέτοια ώστε $|u(t)| < m(u)$ για κάθε t , υπάρχει αντίστοιχη σταθερά $M(u)$ τέτοια ώστε $|S(u)(t)| < M(u)$ για κάθε t .

Συνέχεια: Ένα σύστημα είναι *συνεχές (continuous)*, όταν παραπλήσια σήματα εισόδου απεικονίζονται σε παραπλήσια σήματα εξόδου. Ο αυστηρός ορισμός της έννοιας της συνέχειας ενός συστήματος απαιτεί τον ορισμό μετρικών d_U και d_I στους χώρους (σύνολα) U και I των σημάτων εισόδου και εξόδου αντιστοίχως. Το σύστημα S είναι συνεχές αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $d_I(S(u), S(v)) < \varepsilon$, όταν $d_U(u, v) < \delta$. Στη γενική περίπτωση το δ είναι συνάρτηση τόσο του ε , όσο και των σημάτων u και v . Στην περίπτωση που το δ εξαρτάται μόνο από το ε και είναι ανεξάρτητο του

σήματος εισόδου, το σύστημα θα ονομάζεται *ομοιόμορφα συνεχές* (*uniformly continuous*).

Φθίνουσα μνήμη: Η έννοια του συστήματος με *φθίνουσα μνήμη* (*fading memory system*) είναι μια πιο περιοριστική μορφή της έννοιας του συνεχούς συστήματος. Ένα σύστημα έχει φθίνουσα μνήμη όταν σήματα εισόδου, τα οποία είναι παραπλήσια στο παρόν και στο εγγύς παρελθόν απεικονίζονται από το σύστημα σε παραπλήσια σήματα εξόδου, ακόμα και αν στο μακρινό παρελθόν δεν είναι παραπλήσια. Δηλαδή, ένα σύστημα έχει φθίνουσα μνήμη όταν υπάρχει μια φθίνουσα συνάρτηση $w : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ με $w(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $d_I(S(u), S(v)) < \varepsilon$, όταν $d_U(u_w, v_w) < \delta$, όπου $u_w(t) = u(t)w(-t)$ και $v_w(t) = v(t)w(-t)$.

2.4.4 Γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα συνεχούς χρόνου

Έστω $x(\cdot)$ το σήμα εισόδου ενός **Γ**ραμμικού, **Χ**ρονικώς **Α**ναλλοίωτου **Σ**υστήματος - **ΓΧΑΣ** με αντίστοιχο σήμα εξόδου $y(\cdot)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης δέλτα ισχύει

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \text{ για κάθε } t.$$

Έστω ότι το σύστημα διεγείρεται με σήμα εισόδου μια συνάρτηση δέλτα και αποκρίνεται με σήμα εξόδου μια συνάρτηση $h(\cdot)$. Επειδή το σύστημα είναι χρονικώς αναλλοίωτο, η απόκρισή του σε

διέγερση $\delta(\cdot - \tau)$ θα είναι $h(\cdot - \tau)$. Επίσης, επειδή επιπροσθέτως είναι γραμμικό, η απόκρισή του στο σήμα εισόδου θα είναι $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$, όποιο και αν είναι το σήμα εισόδου $x(\cdot)$.

Η συνάρτηση $h(\cdot)$, δηλαδή η απόκριση του συστήματος σε σήμα εισόδου $\delta(\cdot)$, ονομάζεται *κρουσική απόκριση (impulse response)* του συστήματος και καθορίζει πλήρως το σύστημα, με την έννοια ότι προσδιορίζει την απόκριση σε οποιοδήποτε σήμα εισόδου. Το σήμα εξόδου είναι μια υπέρθεση (με βάρη που καθορίζονται από τις τιμές του σήματος εισόδου) χρονικώς μετατοπισμένων κρουσικών αποκρίσεων.

Ισχύει

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται *ολοκλήρωμα συνέλιξης (convolutional integral)* των συναρτήσεων $x(\cdot)$ και $h(\cdot)$. Η συνάρτηση $y(\cdot)$ ονομάζεται *συνέλιξη (convolution)* των συναρτήσεων $x(\cdot)$ και $h(\cdot)$ και συμβολίζεται με $y = x * h$.

Γενίκευση στις δύο διαστάσεις

Η διδιάστατη συνάρτηση δέλτα ορίζεται ως $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ και ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)\delta(x, y) = u(0, 0),$$

όπου $u(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Επίσης ικανοποιεί και τις γενικεύσεις όλων των ιδιοτήτων της μονοδιάστατης συνάρτησης δέλτα.

Ένα διδιάστατο ΓΧΑΣ χαρακτηρίζεται από μια διδιάστατη απόκριση $h(\cdot, \cdot)$, τέτοια ώστε από σήμα εισόδου $u(\cdot, \cdot)$ το σύστημα να παράγει σήμα εξόδου $v(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Αιτιατότητα και ευστάθεια ΓΧΑΣ

Ένα ΓΧΑΣ με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$ είναι αιτιατό όταν και μόνο όταν $h(0) = 0$, για $t < 0$, όπως προκύπτει από τη σχέση $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$.

Ένα ΓΧΑΣ με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$ είναι ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου, όταν και μόνο όταν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty.$$

Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς ΓΧΑΣ

Έστω το ΓΧΑΣ συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$. Τότε ισχύει

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Αν ως σύστημα εισόδου θεωρηθεί το μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας s που δίνεται από τον τύπο $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$, ισχύει

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{-i2\pi st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi s\tau} h(\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Επειδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi s\tau} h(\tau) d\tau = H(s),$$

από την (2.14) συνεπάγεται ότι

$$y_s(t) = H(s) x_s(t).$$

Από τα προηγούμενα είναι δυνατόν να παρατηρηθούν τα ακόλουθα :

- Η απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑΣ με σήμα εισόδου $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$ είναι το ίδιο σήμα εισόδου $x_s(t)$ πολλαπλασιασμένο επί μια σταθερά $H(s)$.
- Η μιγαδική σταθερά $H(s)$ είναι ακριβώς η τιμή του MF της κρουστικής απόκρισης $h(\cdot)$ του συστήματος για συχνότητα s .
- Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$ λέγονται *ιδιοσημάτια* (*eigen-signals*) οποιουδήποτε ΓΧΑΣ με αντίστοιχη *ιδιοτιμή* (*eigen-value*) $H(s)$.
- Ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi s\tau} h(\tau) d\tau = H(s)$ και $h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{-i2\pi s\tau} ds$.

Η συνάρτηση $H(\cdot)$ ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς* (*transfer function*) του συστήματος.

Αν για οποιοδήποτε σήμα εισόδου $x(\cdot)$ με MF

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi st} dt$$

θεωρηθεί το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$ με MF

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{i2\pi st} dt,$$

διαπιστώνεται εύκολα ότι ισχύει $Y(s) = X(s)H(s)$. Δηλαδή, ο ΜΦ της απόκρισης ενός ΓΧΑΣ είναι ίσος με το γινόμενο των ΜΦ $X(\cdot)$ του σήματος και της συνάρτησης μεταφοράς $H(\cdot)$ του συστήματος.

2.4.5 Γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα διακριτού χρόνου

Ένα γραμμικό, χρονικώς αναλλοίωτο, σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από μια κρουστική απόκριση $h(n)$, έτσι ώστε το σήμα εξόδου $y(n)$ που αντιστοιχεί σε σήμα εισόδου $x(n)$ να δίνεται από τη συνέλιξη του διακριτού χρόνου

$$y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')h(n-n') = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n-n')h(n').$$

Για τα ΓΧΑΣ διακριτού χρόνου ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές των ΓΧΑΣ συνεχούς χρόνου.

2.4.6 Μη γραμμικά χρονικώς αναλλοίωτα συστήματα Volterra

Τα συστήματα Volterra αποτελούν τη φυσική επέκταση των συνελκτικών μοντέλων των γραμμικών, χρονικώς αναλλοίωτων συστημάτων, σε μη γραμμικά συστήματα. Το σήμα εξόδου ενός συνελκτικού μοντέλου αποτελείται από την υπέρθεση (άθροισμα) χρονικώς μετατοπισμένων αντιγράφων του σήματος εισόδου με βάρη που προσδιορίζονται από τις τιμές της κρουστικής απόκρισης. Επεκτείνοντας αυτή την ιδέα και σε μη γραμμικά συστήματα, τα χρονικώς

μετατοπισμένα αντίγραφα του σήματος εισόδου πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους ανά δύο ή περισσότερα και υπερτίθενται με κατάλληλα βάρη.

Ομογενή συστήματα Volterra

Τα ομογενή συστήματα Volterra ορίζονται ως ακολούθως:

1. Ομογενή συστήματα Volterra μηδενικής τάξης.

Ένα ομογενές σύστημα Volterra μηδενικής τάξης είναι ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με τη σχέση $y(t) = h_0$, όπου h_0 είναι κάποια σταθερά (ανεξάρτητη του χρόνου).

2. Ομογενή συστήματα Volterra πρώτης τάξης.

Ένα ομογενές σύστημα Volterra πρώτης τάξης είναι ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h_1(\tau)d\tau, \quad (2.15)$$

όπου $h_1(\cdot)$ είναι μια μονοδιάστατη συνάρτηση. Δηλαδή, ένα ομογενές σύστημα Volterra πρώτης τάξης είναι ένα γραμμικό, χρονικώς αναλλοίωτο σύστημα με κρουσική απόκριση $h_1(\cdot)$.

Για τα συστήματα αυτά ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το μονοδιάστατο σήμα $h_1(\cdot)$ ονομάζεται *πυρήνας (kernel)* του συστήματος.

- Αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow cy(\cdot)$, δηλαδή αν το σήμα εισόδου πολλαπλασιάζεται επί μία σταθερά c , τότε και το σήμα εξόδου πολλαπλασιάζεται επί τη σταθερά αυτή.

3. Ομογενή συστήματα Volterra δεύτερης τάξης.

Ένα ομογενές σύστημα Volterra δεύτερης τάξης είναι ένα σύστημα, του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με τη σχέση

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1)x(\tau_2)h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)h_2(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

όπου $h_2(\cdot, \cdot)$ είναι μια διδιάστατη συνάρτηση. Για τα συστήματα αυτά ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το διδιάστατο σήμα $h_2(\cdot, \cdot)$ ονομάζεται *πυρήνας* του συστήματος.
- Αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow c^2y(\cdot)$, δηλαδή αν το σήμα εισόδου πολλαπλασιάζεται επί μία σταθερά c , τότε το σήμα εξόδου πολλαπλασιάζεται επί τη σταθερά αυτή υψωμένη στο τετράγωνο.
- Αν $h_2(\tau_1, \tau_2) \rightarrow g(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1)$, τότε η σχέση εισόδου-εξόδου (δηλαδή, το “σύστημα”) δεν αλλάζει. Επομένως, για να γίνεται η περιγραφή του συστήματος από ένα μοναδικό πυρήνα, θεωρούνται μόνο *συμμετρικοποιημένοι* πυρήνες $h_2^s(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}[h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)]$.

4. Ομογενή συστήματα Volterra τάξης n .

Ένα ομογενές σύστημα Volterra τάξης n είναι ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με τη σχέση

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \dots x(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,\end{aligned}\tag{2.17}$$

όπου $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ είναι μια n -διάστατη συνάρτηση. Για τα συστήματα αυτά ισχύουν τα ακόλουθα :

- Το n -διάστατο σήμα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ ονομάζεται *πυρήνας* του συστήματος.
- Αν $x(\cdot) \rightarrow c x(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow c^n y(\cdot)$, δηλαδή αν το σήμα εισόδου πολλαπλασιάζεται επί μία σταθερά c , τότε το σήμα εξόδου πολλαπλασιάζεται επί τη σταθερά αυτή υψωμένη στην τάξη του συστήματος.
- Αν γίνει οποιαδήποτε μετάθεση των ορισμάτων της συνάρτησης $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$, τότε η σχέση εισόδου-εξόδου (δηλαδή, το “σύστημα”) δεν αλλάζει. Επομένως, για να γίνεται η περιγραφή του συστήματος από ένα μοναδικό πυρήνα, θεωρούνται μόνο *συμμετρικοποιημένοι* πυρήνες [1].

Κρουστική απόκριση ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n

Έστω η απόκριση ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n σε σήμα εισόδου $\delta(\cdot)$ (κρουστική απόκριση)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1) \dots \delta(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= h_n(t_1, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση ενός γραμμικού, χρονικώς αναλλοίωτου συστήματος, η κρουστική απόκριση ενός ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n , δεν επαρκεί για να περιγραφεί πλήρως το σύστημα. Πραγματικά, η εξίσωση (2.18) δείχνει ότι η κρουστική απόκριση του ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n εξαρτάται μόνο από τις τιμές της “διαγωνίου” του πυρήνα $h(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\tau_1 = \dots = \tau_n = t$.

Έστω ένα σύστημα με n σήματα εισόδου $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ και το σήμα εξόδου $y(\cdot)$ που περιγράφεται από τη σχέση

$$y_{x_1 x_2 \dots x_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau_1) \dots x_n(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (2.19)$$

Το σύστημα αυτό είναι γραμμικό, χρονικώς αναλλοίωτο και έχει κρουστική απόκριση $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$. Αν $x_1(t) = \dots = x_n(t) = x(t)$, τότε

$$\begin{aligned} y_{x_1 x_2 \dots x_n}(t) &= \\ &= y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \dots x(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

Επομένως, η έξοδος ενός ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n μιας εισόδου με πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$, μπορεί να υπολογιστεί ως η έξο-

δος ενός γραμμικού, χρονικώς αναλλοίωτου συστήματος n εισόδων με κρουστική απόκριση $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$.

Αιτιατότητα και ευστάθεια ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n

Μπορεί να δειχθεί ότι ένα ομογενές σύστημα Volterra τάξης n είναι

- *αιτιατό*, αν και μόνο αν, $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = 0$ για $\tau_1 < 0$ ή $\tau_2 < 0$ ή ... ή $\tau_n < 0$
- *ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου*, αν (αλλά όχι αναγκαστικά, για $n \geq 2$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n < \infty.$$

Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n

Έστω το ομογενές σύστημα Volterra τάξης n με πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ και σήμα εισόδου $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$. Τότε, η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y_s(t) = e^{-i2\pi nst} H_n(s, \dots, s),$$

όπου $H_n(s, \dots, s) = H_n(s_1, \dots, s_n)|_{s_1=\dots=s_n=s}$ είναι ο n -διάστατος MF του πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$. Η έξοδος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με συχνότητα ίση με τη συχνότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος πολλαπλασιασμένη επί την τάξη n του συστήματος. Η συνάρτηση $H_n(s, \dots, s)$ ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς* του συστήματος.

Μη ομογενή (πολυωνυμικά) συστήματα Volterra τάξης n

Ένα μη ομογενές (πολυωνυμικό) σύστημα Volterra τάξης n είναι ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με τη σχέση

$$y(t) = h_0 + \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \dots x(\tau_k) h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (2.20)$$

για κάποιους πυρήνες $h_k(\cdot, \dots, \cdot)$. Για τα συστήματα αυτά ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν $x(\cdot) \rightarrow c x(\cdot)$, τότε $y(\cdot)$ είναι πολυώνυμο του c τάξης n , όπου ο συντελεστής του όρου c^k είναι ένας όρος Volterra τάξης k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h_0 + \sum_{k=1}^n h_k(t, \dots, t).$$

- Το σύστημα είναι αιτιατό όταν και μόνο όταν κάθε όρος είναι αιτιατός.
- Το σύστημα είναι ευσταθές αν (αλλά όχι αναγκαστικά) κάθε όρος είναι ευσταθής.
- Η αρμονική απόκριση του συστήματος σε σήμα εισόδου $e^{-i2\pi st}$ είναι

$$h_0 + \sum_{k=1}^n H_k(s, \dots, s) e^{-i2\pi st}.$$

Θεωρήματα προσέγγισης χρονικώς αναλλοίωτου, αιτιατού συστήματος με φθίνουσα μνήμη από πολυωνυμικό σύστημα

Η προσέγγιση μη γραμμικών συστημάτων από πολυωνυμικά συστήματα Volterra στηρίζεται σε δύο διαφορετικές θεωρίες, την *αναλυτική* και την *πολυωνυμική*.

A. Αναλυτική θεωρία

Σύμφωνα με την αναλυτική θεωρία, αν η μαθηματική απεικόνιση από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου έχει παραγώγους (Frechet ή Gateau) κάθε τάξης, το ανάπτυγμα (πεπερασμένο άθροισμα ή άπειρη σειρά) Volterra προκύπτει ως ανάπτυγμα δυναμοσειράς σε ένα φραγμένο σύνολο. Αυτή η προσέγγιση προτάθηκε αρχικά από το Volterra και αργότερα χρησιμοποιήθηκε σε τεχνολογικές εφαρμογές από το Wiener και άλλους.

Η αναλυτική θεωρία ταυτοποιεί τους ομογενείς όρους Volterra με παραγώγους της απεικόνισης από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου και έχει, επομένως, τις εξής ιδιότητες:

- Το ανάπτυγμα ισχύει για ένα σύνολο σημάτων εισόδου $x(\cdot)$ με $\sup_t |x(t)| \leq M$ για κάποιο M , δηλαδή για κάποιο φραγμένο σύνολο σημάτων εισόδου. Επομένως, το ανάπτυγμα είναι κατάλληλο για συστήματα διεγερόμενα από “ασθενή” σήματα.
- Επειδή χρειάζεται να υπολογιστούν οι παράγωγοι της απεικόνισης από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου, πρέπει η απεικόνιση να είναι γνωστή με ανάλογη ακρίβεια.

- Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος δεν απαιτείται πληροφορία εισόδου – εξόδου.
- Η υλοποίηση του αναπτύγματος γίνεται από μια οικογένεια μη γραμμικών εξισώσεων και μια γραμμική απεικόνιση από την κατάσταση στην έξοδο.

B. Πολυωνυμική θεωρία

Η πολυωνυμική θεωρία βασίζεται σε μία γενίκευση του κλασικού θεωρήματος του Weierstrass του απειροστικού λογισμού. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Έστω Σ ένα συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο) σύνολο σημάτων εισόδου $x(\cdot)$, καθένα από τα οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια ($t \in [0, T]$) και πεπερασμένη ενέργεια $\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$. Επίσης, έστω ένα χρονικώς αναλλοίωτο (αιτιατό) συνεχές σύστημα $y(t) = S(x)(t)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα (αιτιατό) πολυωνυμικό σύστημα Volterra $\hat{y}(t) = \hat{S}(x)(t)$ τέτοιο, ώστε για κάθε σήμα εισόδου $x(\cdot) \in \Sigma$ και κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ να ισχύει $|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Έστω Σ ένα σύνολο σημάτων εισόδου $x(\cdot)$, καθένα από τα οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- το σήμα ορίζεται για $-\infty < t < \infty$
- το σήμα είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου
- το σήμα είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει m τέτοιο ώστε $|x(t)| < m$, για κάθε t

- υπάρχει M τέτοιο ώστε $\sup_{-\infty < t < \infty} |x(t - \tau) - x(t)| < M$, για κάθε $\tau > 0$.

Επίσης, έστω ένα χρονικώς αναλλοίωτο (αιτιατό) συνεχές σύστημα $y(t) = S(x)(t)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πολυωνυμικό σύστημα Volterra $\hat{y}(t) = \hat{S}(x)(t)$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x(\cdot) \in \Sigma$ και κάθε $-\infty < t < \infty$ να ισχύει $|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon$.

Η πολυωνυμική θεωρία προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων έχει τις εξής ιδιότητες:

- Το ανάπτυγμα αφορά σε συμπαγή σύνολα σημάτων ή παραλλαγές τους.
- Το σύστημα δεν απαιτείται παρά να είναι συνεχές (ή γενικότερα με φθίνουσα μνήμη).
- Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος απαιτείται μόνο πληροφορία εισόδου-εξόδου και όχι κατ' ανάγκη γνώση της μαθηματικής απεικόνισης εισόδου-εξόδου, όπως στην αναλυτική θεωρία.
- Το ανάπτυγμα υλοποιείται από μια οικογένεια γραμμικών εξισώσεων κατάστασης και μια μη γραμμική απεικόνιση από την κατάσταση στην έξοδο.

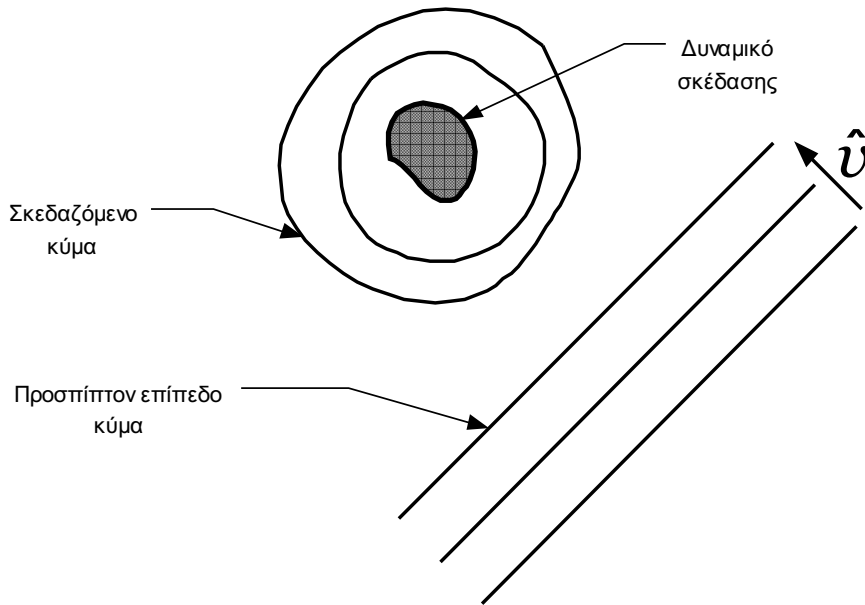
Κεφάλαιο 3

Διερεύνηση αντικειμένων με κυματικούς παλμούς

3.1 Μαθηματικά μοντέλα του φυσικού μη- χανισμού παραγωγής δεδομένων

Έστω ένα μονοχρωματικό επίπεδο κύμα, που ικανοποιεί την εξίσωση $\psi_0(x, \omega) = e^{ik\langle \hat{v}, x \rangle} = e^{i\frac{\omega}{c_0}\langle \hat{v}, x \rangle}$ και έχει κυματαριθμό $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$, όπου λ και c_0 είναι το μήκος και η ταχύτητα κύματος, αντίστοιχως. Το κύμα διαδίδεται κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \hat{v} μέσα σε ένα ομογενές μέσο και προσπίπτει σε μια πεπερασμένη περιοχή σκέδασης $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$. Η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται από μια κατανομή δυναμικού σκέδασης $V(x)$, το οποίο στην περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης δίνεται από τον τύπο $V(x) = 2k^2 f(x)$, όπου η $f(x) = \frac{1}{2}(n^2(x) - 1)$ αποτελεί την

αντικειμενική συνάρτηση (object function) και $n(x) = \sqrt{\frac{\mu(x)\epsilon(x)}{\mu_0\epsilon_0}}$ αποτελεί την κατανομή του μιγαδικού δείκτη διάθλασης της περιοχής σκέδασης.¹



Σχήμα 3.1: Σκέδαση ενός επίπεδου κύματος από ένα δυναμικό σκέδασης V .

Το αποτέλεσμα της πρόσπτωσης του κύματος πάνω στο αντικείμενο σκέδασης είναι ο σχηματισμός ενός ολικού κύματος $\psi(x_0)$, όπως αυτό παρατηρείται στο σημείο x_0 , το οποίο διαδίδεται μέσα

¹Στην περίπτωση της ακουστικής σκέδασης, $V(x)\psi(x) = k^2\gamma_k(x)\psi(x) + \nabla[\gamma_\rho(x)\nabla\psi(x)]$, όπου $\gamma_k(x) = \frac{\kappa(x)-\kappa_0}{\kappa_0}$, $\gamma_\rho(x) = \frac{\rho(x)-\rho_0}{\rho_0}$ με $\kappa(x)$ και $\rho(x)$ να είναι αντιστοίχως οι μιγαδικές κατανομές συμπιεστότητας (compressibility) και πυκνότητας μάζας (density) του αντικειμένου σκέδασης και κ_0 και ρ_0 αυτές του υποδάθρου.

στο ανομοιογενές μέσο που αποτελείται από το ομογενές υπόβα-
 θρο και τον ανομοιογενή σκεδαστή. Το ολικό κύμα ικανοποιεί τη
 χρονικώς ανεξάρτητη, ανομοιογενή εξίσωση του Helmholtz [78]

$$(\nabla_{x_0}^2 + k^2)\psi(x_0) = -V(x_0)\psi(x_0), \quad (3.1)$$

όπου $\nabla_{x_0}^2$ υποδηλώνει τον τελεστή Laplace στις δύο ή τρεις διαστά-
 σεις.

Θεωρώντας ότι η έκφραση στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.1)
 αποτελεί μια δευτερογενή πηγή (η οποία όμως είναι άγνωστη, κα-
 θώς εξαρτάται από το άγνωστο ολικό κύμα ψ), η λύση της εξίσωσης
 (3.1) μπορεί να αναλυθεί στο άθροισμα του γνωστού προσπίπτοντος
 κύματος ψ_0 (που ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση Helmholtz) και
 ενός *σκεδαζόμενου κύματος (scattered wave)* ψ^s (του οποίου η δη-
 μιουργία οφείλεται μόνο στην παρουσία της περιοχής σκέδασης \mathcal{V}).
 Συγκεκριμένα:

$$\psi(x_0) = \psi_0(x_0) + \psi^s(x_0), \quad (3.2)$$

όπου

$$\psi^s(x_0) = - \int_{\mathcal{V}} V(x')\psi(x')G(x_0 - x')dx'. \quad (3.3)$$

Η εξίσωση (3.2), με το σκεδαζόμενο κύμα να ικανοποιεί την (3.3),
 είναι γνωστή ως *εξίσωση Lippman-Schwinger* [78]. Με G συμβολί-
 ζεται μια συνάρτηση Green, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla^2 + k^2)G(x, x') = \delta(x - x').$$

Για να επιλεγεί μονοσήμαντα η συνάρτηση Green που έχει φυσική
 σημασία, απαιτείται να ικανοποιείται μια περιοριστική συνθήκη στο

άπειρο. Από την αρχή της αιτιατότητας της Φυσικής, η κατάλληλη συνοριακή συνθήκη είναι η *συνθήκη ακτινοβολίας (radiation condition)* του Sommerfeld [78], η οποία στις δύο διαστάσεις επιβάλλει $\sqrt{|x|}(\frac{\partial\psi}{\partial|x|} - ik\psi) \rightarrow 0$, καθώς $k|x| \rightarrow \infty$. Ισοδύναμα, η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld στις δύο διαστάσεις απαιτεί, όταν $k|x| \rightarrow \infty$, το σκεδαζόμενο κύμα να συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά ως ένα αποκλίνον κυλινδρικό κύμα $A(\phi, k\hat{v})\frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}$, όπου ϕ συμβολίζει τη γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης παρατήρησης του σκεδαζομένου κύματος και της σταθερής αναφοράς του συστήματος συντεταγμένων.

Η, γενικώς μιγαδική, ποσότητα A είναι γνωστή ως *πλάτος σκέδασης (scattering magnitude)* και αποτελεί ένα μη γραμμικό συναρτησιακό του δυναμικού σκέδασης $V(x)$. Ειδικότερα, το πλάτος σκέδασης είναι ανάλογο προς το χωρικό MF του γινομένου² $V\psi$ του δυναμικού σκέδασης και του ολικού κύματος αποτιμούμενο στο “ενεργειακό κέλυφος” (*energy shell*) $|K| = k$, όπου K είναι διδιάσταση χωρική συχνότητα, συζυγής της χωρικής μεταβλητής x . Αποδεικνύεται ότι η γνώση του πλάτους σκέδασης προσδιορίζει μονοσήμαντα το σκεδαζόμενο κύμα ψ^s , οπουδήποτε έξω από την περιοχή σκέδασης \mathcal{V} .

Ο υπολογισμός της “αιτιατής” συνάρτησης Green G , όπως ορίστηκε προηγουμένως, μπορεί να εκτελεστεί χρησιμοποιώντας κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό πεδίο. Το αποτέ-

²Το γινόμενο $V\psi$ αποτελεί μια δευτερογενή πηγή.

λεσμα είναι

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|), & \text{στις δύο διαστάσεις,} \\ -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, & \text{στις τρεις διαστάσεις,} \end{cases} \quad (3.4)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι το ευθύ πρόβλημα της θεωρίας σκέδασης μπορεί να οριστεί ως αυτό του προσδιορισμού της λύσης ψ^s της εξίσωσης (3.3) ή, ισοδύναμα, του πλάτους σκέδασης A από γνώση του δυναμικού σκέδασης V και του προσπίπτοντος κύματος ψ_0 . Η έκφραση της λύσης του προβλήματος σε αναλυτική μορφή δεν είναι προφανής στη γενική περίπτωση, καθώς η απεικόνιση από το δυναμικό σκέδασης V στο σκεδαζόμενο κύμα ψ^s , για ένα δεδομένο προσπίπτον κύμα ψ_0 , είναι μη γραμμική και μη τοπική. Πάντως έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι *καλώς τεθειμένο* (*well-posed*) κατά Hadamard. Πιο συγκεκριμένα [34, 83]:

Για δεδομένο δυναμικό V , στην κλάση που περιγράφεται προηγουμένως, υπάρχει ένα μοναδικό σκεδαζόμενο κύμα ψ^s , το οποίο προέρχεται από την αλληλεπίδραση του δυναμικού V με ένα γνωστό προσπίπτον κύμα ψ_0 , το οποίο εξαρτάται συνεχώς από το δυναμικό V .

Για την πρακτική επίλυση του προβλήματος αυτού έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές, όπως προσεγγίσεις διαταραχών, ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, αριθμητικές προσεγγίσεις, καθώς και αναλυτικές λύσεις σε ορισμένες περιπτώσεις [34, 83].

Το ΑΠΣ είναι αυτό της συναγωγής μιας εκτίμησης του δυναμι-

κού σκέδασης V από γνώση του προσπίπτοντος κύματος ψ_0 και μέτρηση του σκεδαζομένου κύματος ψ^s (ή ισοδύναμα, του πλάτους σκέδασης A). Το ΑΠΣ παρουσιάζει τις ίδιες δυσκολίες της μη γραμμικότητας με το ευθύ πρόβλημα. Επιπλέον, είναι ένα *κακώς τεθειμένο* (*ill-posed*) πρόβλημα λόγω της ύπαρξης μη σκεδαζόντων σκεδαστών και της ασυνεχούς εξάρτησης των λύσεων του από τις μετρήσεις σκεδαζομένων κυμάτων.

Για να γίνει ευκολότερη η διαδικασία παρακολούθησης του ΑΠΣ χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ένας μεγάλος αριθμός από διερευνητικά προσπίπτοντα κύματα ψ_0 , τα οποία έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις διάδοσης και/ή διαφορετικούς κυματαριθμούς. Έχει αποδειχθεί, ότι όταν τα δεδομένα των σκεδαζομένων κυμάτων συλλέγονται “φωτίζοντας” το δυναμικό σκέδασης από όλες τις δυνατές κατευθύνσεις με σταθερής ενέργειας (σταθερού κυματαριθμού) προσπίπτοντα κύματα, το δυναμικό σκέδασης ορίζεται μονοσήμαντα [9, 21]. Με παρόμοιο τρόπο, αρχικώς, έχει αποδειχθεί για μονοδιάστατες περιπτώσεις και κατόπιν για τριδιάστατες, ότι η γνώση του πλάτους σκέδασης A για κατάλληλες τιμές του κυματαριθμού $k \in [0, \infty)$, προσδιορίζει επίσης μοναδικά ένα δυναμικό σκέδασης ανεξάρτητο του κυματαριθμού [80, 81, 82, 83]. Παρ’ όλα αυτά, η αντιστροφή της μη γραμμικής αντιστοιχίας από το δυναμικό σκέδασης στο σκεδαζόμενο κύμα παραμένει μόνο μερικώς λελυμένο πρόβλημα και οι υπάρχουσες λύσεις δεν είναι αναγκαστικά εύκολα εφαρμόσιμες στην πράξη.

3.2 Σειρές Born

Οι σειρές Born είναι εφαρμογή των σειρών Volterra (δηλαδή σειρών Taylor με μνήμη) στο πρόβλημα του υπολογισμού του σκεδαζόμενου κύματος, που προκύπτει όταν ένα δεδομένο προσπίπτον κύμα σκεδάζεται από ένα αντικείμενο με δυναμικό σκέδασης V . Οι σειρές Born συγκλίνουν κάτω από κάποιες συνθήκες ασθενούς σκέδασης που θα εξεταστούν αργότερα. Επομένως, οι σειρές αυτές αποτελούν ένα ανάπτυγμα Liouville–Neumann της απεικόνισης από το δυναμικό σκέδασης V στο σκεδαζόμενο κύμα ψ^s , για δεδομένο προσπίπτον κύμα ψ_0 . Για να διευκολυνθεί ο υπολογισμός των σειρών Born, γίνεται εισαγωγή μιας παραμέτρου “μικρότητας” ϵ και το δυναμικό σκέδασης V αντικαθίσταται στην εξίσωση (3.1) με ϵV , οπότε στη νέα εξίσωση αναζητείται η λύση $\psi(x_0; \epsilon)$. Θεωρώντας ότι η λύση είναι μια αναλυτική συνάρτηση της παραμέτρου ϵ γύρω από το σημείο $\epsilon = 0$, η λύση αυτή μπορεί να αναπτυχθεί σε μια σειρά Taylor γύρω από το $\epsilon = 0$,

$$\psi(x_0; \epsilon) = \psi_0(x_0) + \epsilon\psi_1(x_0) + \epsilon^2\psi_2(x_0) + \dots, \quad (3.5)$$

η οποία συγκλίνει για αρκετά “μικρό” ϵ . Οι όροι $\psi_0(x_0)$, $\epsilon\psi_1(x_0)$, $\epsilon^2\psi_2(x_0)$, ... είναι οι διορθώσεις (διαταραχές) μηδενικής, πρώτης, δεύτερης, ... τάξης που πρέπει να γίνουν στο προσπίπτον κύμα $\psi_0(x_0)$ προκειμένου να υπολογιστεί το ολικό κύμα $\psi(x_0; \epsilon)$. Ασφαλώς, αυτή η προσέγγιση είναι συμβατή με το γεγονός ότι το σκεδαζόμενο κύμα $\psi^s(x_0; \epsilon) = \epsilon\psi_1(x_0) + \epsilon^2\psi_2(x_0) + \dots$ οφείλεται μόνο στην παρουσία του δυναμικού σκέδασης ϵV και στην περίπτωση απου-

σίας του (όταν $\epsilon = 0$) το ολικό κύμα $\psi(x_0; \epsilon = 0)$ είναι απλώς ίσο με το προσπίπτον κύμα $\psi_0(x_0)$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.5) στην εξίσωση (3.1) και εξισώνοντας τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του ϵ και στα δύο μέλη της εξίσωσης που προκύπτει, συνεπάγονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{x_0}^2 + k^2)\psi_0(x_0) &= 0 \\
 (\nabla_{x_0}^2 + k^2)\psi_1(x_0) &= -V(x_0)\psi_0(x_0) \\
 (\nabla_{x_0}^2 + k^2)\psi_2(x_0) &= -V(x_0)\psi_1(x_0) \\
 &\vdots \\
 (\nabla_{x_0}^2 + k^2)\psi_n(x_0) &= -V(x_0)\psi_{n-1}(x_0) \\
 &\vdots .
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Η λύση των εξισώσεων (3.6) είναι

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x_0) &= - \int_{\mathcal{V}} V(x')\psi_0(x')G(x_0 - x')dx' \\
 \psi_2(x_0) &= - \int_{\mathcal{V}} V(x')\psi_1(x')G(x_0 - x')dx' \\
 &\vdots \\
 \psi_n(x_0) &= - \int_{\mathcal{V}} V(x')\psi_{n-1}(x')G(x_0 - x')dx' \\
 &\vdots .
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Στις εξισώσεις (3.7) με G υποδηλώνεται η συνάρτηση Green της εξίσωσης (3.4).

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό, πως ο n -οστός όρος της σειράς Born υπολογίζεται με τη βοήθεια του προηγούμενου του

όρου, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Υπολογίζοντας τους πρώτους N επιθυμητούς όρους της σειράς Born, το ολικό κύμα ψ , το οποίο προκύπτει από την αλληλεπίδραση του δυναμικού σκέδασης V με το προσπίπτον κύμα ψ_0 , υπολογίζεται από τη σχέση $\psi(x_0) = \psi_0(x_0) + \psi^s(x_0)$, όπου το σκεδαζόμενο κύμα προσεγγίζεται από τη σχέση

$$\psi^s(x_0) \approx \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0) + \dots + \psi_N(x_0). \quad (3.8)$$

Η τελευταία μπορεί να θεωρηθεί δεκτική, αν η εξίσωση (3.5) ισχύει και για $\epsilon = 1$.

Η προσέγγιση Born πρώτης τάξης, η οποία αναφέρεται και απλώς ως *προσέγγιση Born*, έχει χρησιμοποιηθεί σε μεγάλη έκταση στη θεωρία της κβαντομηχανικής σκέδασης. Είναι προφανές από τις εξισώσεις (3.6) ότι η προσέγγιση Born υπολογίζει το σκεδαζόμενο κύμα ψ^s από την εξίσωση (3.2), αντικαθιστώντας το ολικό κύμα ψ με το προσπίπτον κύμα ψ_0 στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.3), δηλαδή:

$$\psi^s(x_0) \approx \psi_1(x_0) = - \int_{\mathcal{V}} V(x') \psi_0(x') G(x_0 - x') dx'. \quad (3.9)$$

Για είναι δυνατή αυτή η προσέγγιση, χρειάζεται να ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις: (α) μέσα στην περιοχή σκέδασης να ισχύει $|\psi^s| \ll |\psi_0|$, (β) ο όγκος της περιοχής σκέδασης να είναι πολύ μικρός, (γ) ο κυματαριθμός k του προσπίπτοντος κύματος να είναι χαμηλός. Για οπτικές και ακουστικές σκεδάσεις οι συνθήκες αυτές μπορούν να ποσοτικοποιηθούν προσεγγιστικά από τη σχέ-

ση $V_m k D \ll 1$, όπου $V_m = \max_{x \in \mathcal{V}} |V(x)|$ και D είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου της περιοχής σκέδασης \mathcal{V} .

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η προσέγγιση του Born είναι αρκετά περιοριστική, καθώς απαιτείται το μέγεθος και η ένταση του αντικειμένου σκέδασης να είναι μικρά. Επιπλέον, είναι προσέγγιση χαμηλής συχνότητας, καθώς απαιτείται και η συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος να είναι χαμηλή.

3.3 Σειρές Rytov

Οι σειρές Rytov αναπτύχθηκαν αρχικά για υπολογισμούς σκέδασης κυμάτων σε τυχαία και τυρβώδη μέσα και ως μια προσέγγιση της ακριβούς σκέδασης με πεδίο ισχύος ευρύτερο από αυτό των σειρών Born. Προκύπτουν ως ανάπτυγμα διαταραχών της μιγαδικής φάσης (δηλαδή του μιγαδικού λογαρίθμου), παρά του ίδιου του κύματος.

Ξεκινώντας, στην εξίσωση (3.1) το V αντικαθίσταται με το ϵV και ως λύση τίθεται η έκφραση

$$\psi(x_0; \epsilon) = e^{ikW(x_0; \epsilon)}, \quad (3.10)$$

όπου $W(x_0; \epsilon)$ είναι η μιγαδική φάση του ολικού κύματος κανονικοποιημένη από τον κυματριθμό (*wavenumber-normalized complex phase*). Από τις εξισώσεις (3.10) και (3.3) αποδεικνύεται ότι η φάση W ικανοποιεί τη μη γραμμική εξίσωση Ricatti

$$\nabla W \cdot \nabla W + \frac{1}{ik} \nabla^2 W - 1 = \frac{\epsilon}{k^2} V. \quad (3.11)$$

Μέχρι στιγμής δεν έχει γίνει κάποια προσέγγιση και οι εξισώσεις (3.11) και (3.1) είναι μαθηματικώς ισοδύναμες. Η λύση της εξίσωσης (3.11) με σειρά Rytov επιτυγχάνεται αν αντικατασταθεί σε αυτήν η τυπική σειρά

$$W(x_0; \epsilon) = W_0(x_0) + \epsilon W_1(x_0) + \epsilon^2 W_2(x_0) + \dots \quad (3.12)$$

με $\psi_0 = e^{ikW_0}$, οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\nabla_{x_0} W_0 \cdot \nabla_{x_0} W_0 + \frac{1}{ik} \nabla_{x_0}^2 W_0 = 1 \quad (3.13)$$

$$2\nabla_{x_0} W_0 \cdot \nabla_{x_0} W_1 + \frac{1}{ik} \nabla_{x_0}^2 W_1 = \frac{1}{ik} V \quad (3.14)$$

$$2(\nabla_{x_0} W_0 \cdot \nabla_{x_0} W_2 + \nabla_{x_0} W_1 \cdot \nabla_{x_0} W_1) + \frac{1}{ik} \nabla_{x_0}^2 W_2 = 0 \quad (3.15)$$

⋮

$$2(\nabla_{x_0} W_0 \cdot \nabla_{x_0} W_n + \nabla_{x_0} W_1 \cdot \nabla_{x_0} W_{n-1} + \dots) + \frac{1}{ik} \nabla_{x_0}^2 W_n = 0 \quad \therefore (3.16)$$

Από τις προηγούμενες εξισώσεις γίνεται φανερό, πως ο n -οστός όρος W_n της σειράς Rytov υπολογίζεται με τη βοήθεια όλων των προηγούμενων όρων $W_{n-1}, W_{n-2}, \dots, W_0$, για $n = 1, 2, 3, \dots$

Η προσέγγιση Rytov πρώτης τάξης, η οποία αναφέρεται και απλώς ως *προσέγγιση Rytov*, αποτελείται από μια προσέγγιση της φάσης W του κύματος μόνο με το άθροισμα των όρων μηδενικής και πρώτης τάξης μέσω της σχέσης $W(x_0) \approx W_0(x_0) + W_1(x_0)$. Ο όρος

W_1 υπολογίζεται από τη σχέση (3.14) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $W_0(x_0) = \langle \hat{v}, x_0 \rangle$, οπότε προκύπτει η σχέση

$$W_1 = e^{-ikW_0} F. \quad (3.17)$$

Η ποσότητα F ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla_{x_0}^2 + k^2)F = -\frac{V}{ik} e^{-ikW_0}, \quad (3.18)$$

η οποία επιλύεται με χρήση τεχνικών συναρτήσεων Green και προκύπτει η έκφραση

$$F(x_0) = -\frac{1}{ik} \int_{\mathcal{V}} V(x') G(x_0 - x') e^{ikW_0(x')} dx'. \quad (3.19)$$

Από τις εξισώσεις (3.17) και (3.19) συνάγεται ότι ο πρώτος όρος W_1 δίνεται από τη σχέση

$$W_1(x_0) = -\frac{e^{-ikW_0(x_0)}}{ik} \int_{\mathcal{V}} V(x') G(x_0 - x') e^{ikW_0(x')} dx'. \quad (3.20)$$

Για τον υπολογισμό του όρου W_n της σειράς (3.12), η εξίσωση (3.16) ξαναγράφεται ως

$$2\nabla W_0 \cdot \nabla W_n + \frac{1}{ik} \nabla^2 W_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \nabla W_j \cdot \nabla W_{n-j} \quad (3.21)$$

και εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Rytov. Το αποτέλεσμα είναι το δεύτερο μέλος της (3.20), όπου ο όρος $2f$ έχει αντικατασταθεί από τον όρο $-\sum_{j=1}^{n-1} \nabla W_j \cdot \nabla W_{n-j}$ και επομένως

$$W_n(x_0) = \frac{ke^{-ikW_0(x_0)}}{i} \int_{\mathcal{V}} dx' \cdot \left[-\sum_{j=1}^{n-1} \nabla W_j \cdot \nabla W_{n-j} \right] (x') G(x_0 - x') e^{ikW_0(x')}. \quad (3.22)$$

Το ολικό κύμα στο σημείο παρατήρησης x_0 εκφράζεται από την πρώτη προσέγγιση Rytov ως

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &\approx e^{-ik[W_0(x_0)+W_1(x_0)]} = \\ &= \exp \left\{ ik \langle \hat{v}, x_0 \rangle - e^{-ik\langle \hat{v}, x_0 \rangle} \int_{\mathcal{V}} V(x') G(x_0 - x') e^{ik\langle \hat{v}, x' \rangle} dx' \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Επομένως, η προσέγγιση Rytov, σε αντίθεση με την προσέγγιση Born, καταλήγει σε μία μη γραμμική απεικόνιση από το δυναμικό σκέδασης στο ολικό κύμα και στο σκεδαζόμενο κύμα. Παρ' όλα αυτά, είναι μια γραμμικοποιημένη προσέγγιση για το ΕΠΣ, με την έννοια ότι έχει γραμμικοποιηθεί η απεικόνιση από την αντικειμενική συνάρτηση στη μιγαδική φάση του ολικού κύματος. Η προσέγγιση Rytov είναι λιγότερο περιοριστική από αυτήν του Born, καθώς ισχύει κάτω από τη συνθήκη $|\nabla W_1|^2 \ll V_m k^2$, στην οποία δεν εμφανίζεται άμεσα το μέγεθος του σκεδαστή.

Τα κύρια μειονεκτήματα της προσέγγισης Rytov είναι (α) λειτουργεί με τη φάση των κυμάτων παρά με τα ίδια τα κύματα, πράγμα το οποίο δημιουργεί προβλήματα αναδίπλωσης της φάσης σε εφαρμογές αντίστροφης σκέδασης, και (β) είναι μια προσέγγιση *κουτινού πεδίου (near field)*. Καθώς θεωρούνται σημεία παρατήρησης x_0 πιο μακριά από την περιοχή σκέδασης, η προσέγγιση Rytov εκφυλίζεται γρήγορα και στο μακρινό πεδίο ταυτίζεται με την προσέγγιση Born. Αυτό το τελευταίο έχει οδηγήσει σε μια τροποποιημένη προσέγγιση Rytov, η οποία συνδυάζει στοιχεία και από τα δύο μοντέλα (Born και Rytov), και ονομάζεται *υβριδικό μοντέλο*

(hybrid model).

Ένας όρος του μοντέλου Rytov τάξης n , μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια όρων του μοντέλου Born τάξης $1, 2, \dots, n$. Πράγματι, η αντικατάσταση των όρων Born και Rytov στην εξίσωση (3.10) δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n = \exp \left(ik \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n W_n \right), \quad (3.24)$$

η οποία μετά από ανάπτυξη γύρω από το $\epsilon = 0$ και εξίσωση των συντελεστών ίσων δυνάμεων του ϵ , δίνει

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{ik} \log \psi_0 \\ W_1 &= \frac{1}{ik} \frac{\psi_1}{\psi_0} \\ W_2 &= \frac{1}{ik} \left[\frac{\psi_2}{\psi_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_1}{\psi_0} \right)^2 \right] \\ W_3 &= \frac{1}{ik} \left[\frac{\psi_3}{\psi_0} - \frac{\psi_2 \psi_1}{\psi_0 \psi_0} + \frac{\psi_1^3}{3!} \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Παρόμοιες σχέσεις μπορούν να σχηματιστούν για να εκφράσουν έναν όρο του μοντέλου Born τάξης n ως συνάρτηση των όρων του μοντέλου Rytov τάξης $1, 2, \dots, n$. Οι εξισώσεις (3.25) δίνουν ένα (χωρίς μνήμη ως προς τη μεταβλητή x) μετασχηματισμό από τους όρους Born στους όρους Rytov.

Και οι δύο προσεγγίσεις -Born και Rytov- έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς για προβλέψεις στις θεωρίες της ευθείας και της αντίστροφης σκέδασης. Τα πεδία εφαρμογής τους, καθώς και τα σχετικά μειονεκτήματα και πλεονεκτήματά τους, έχουν διερευνηθεί σε μεγάλο βαθμό και έχουν ελεγχθεί με πειραματικά αποτελέσματα. Σε

πολλές εφαρμογές οι σειρές Rytov δείχνουν να δίνουν καλύτερα αποτελέσματα, ενώ σε άλλες –όπως για παράδειγμα στις γεωφυσικές εφαρμογές του ΑΠΣ– η προσέγγιση του Born έχει αποδειχθεί επαρκής. Πάντως ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο μοντέλο Rytov με βάση το γεγονός ότι οι πειραματισμοί έχουν δείξει ότι παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια προσέγγισης από αυτή του Born στα προβλήματα σκέδασης που αντιμετωπίζονται στην ΠΤ.

Στη συνέχεια, τα προηγούμενα γενικά μοντέλα εξειδικεύονται σε μια από τις πιο σημαντικές διατάξεις που χρησιμοποιούνται στην ΠΤ, γνωστή ως *κλασική διάταξη σάρωσης (classical scan configuration)*. Η διάταξη αυτή είναι μια άμεση επέκταση της *διάταξης παράλληλης δέσμης ακτίνων (parallel beam configuration)* της συμβατικής Υπολογιστικής Τομογραφίας. Αποδεικνύεται ότι το αντίστροφο πρόβλημα της ΠΤ μπορεί να λάβει μια μορφή, η οποία απαιτεί αντιστροφή ενός συγκεκριμένου γραμμικού μετασχηματισμού, γνωστού ως *μετασχηματισμού διάδοσης (propagation transform)*. Αυτή η διατύπωση του αντιστρόφου προβλήματος της ΠΤ είναι παρόμοια με το αντίστροφο πρόβλημα της συμβατικής Υπολογιστικής Τομογραφίας (εκεί απαιτείται αντιστροφή ενός μετασχηματισμού Radon μιας συνάρτησης) και ανάγεται σε αυτό στο όριο του μικρού μήκους κύματος, όπως αναφέρεται στο τέλος της επόμενης παραγράφου.

3.4 Το θεώρημα γενικευμένης προβολής – τομής

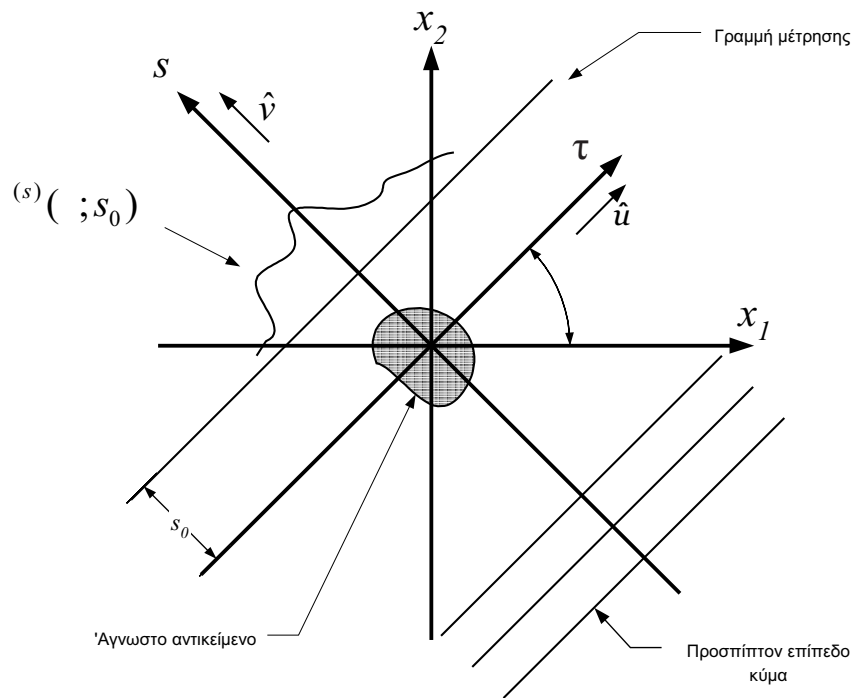
Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστούν, για λόγους απλότητας, μόνο διδιάστατα αντικείμενα, καθώς η γενίκευση σε τρεις (ή περισσότερες) διαστάσεις επιτυγχάνεται χωρίς δυσκολία. Θεωρείται ένας κυλινδρικός σκεδαστής απείρου μήκους, ο οποίος σε κυματαριθμό k έχει κατανομή $n(x, k)$ του μιγαδικού δείκτη διάθλασης. Ο σκεδαστής αυτός είναι εμφυτευμένος σε ένα ομοιογενές μέσο χωρίς απόσβεση (υποβάθρο), του οποίου ο δείκτης διάθλασης $n_b(k)$ είναι πραγματικός και σταθερός. Η απόκλιση του δείκτη διάθλασης του σύνθετου αντικειμένου (αντικειμένου σκέδασης και υποβάθρου) από εκείνον του υποβάθρου ορίζεται ως η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Πιο συγκεκριμένα³

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(x, k)}{n_b^2(k)} - 1 \right) \approx \frac{n(x, k)}{n_b(k)} - 1. \quad (3.26)$$

Η προσεγγιστική σχέση στο δεξιό μέλος της (3.26) ισχύει στην περίπτωση ενός αντικειμένου ασθενούς σκέδασης, ο δείκτης διάθλασης του οποίου αποτελεί μόνο μια μικρή διαταραχή σε σχέση με εκείνον του υποβάθρου.

Ο σκεδαστής “φωτίζεται” από μονοχρωματικά επίπεδα κύματα, των οποίων το μοναδιαίο διάνυσμα διάδοσης βρίσκεται σε ένα επίπεδο \mathcal{P} κάθετο στον άξονα του αντικειμένου.

³Προφανώς, η αντικειμενική συνάρτηση είναι, στη γενική περίπτωση, συνάρτηση και του κυματαριθμού k , δηλαδή $f(x, k)$.



Σχήμα 3.2: Η κλασική διάταξη σάρωσης της ΠΤ.

Το μεταδιδόμενο κύμα μετριέται πάνω σε μια ευθεία γραμμή $x_0 = \tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}$, $\tau_0 \in \mathbb{R}^1$, s_0 σταθερά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Τα \hat{u} και \hat{v} είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με άξονες τ και s αντιστοίχως. Το σύστημα αυτό έχει κοινή αρχή με ένα σταθερό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες x_1 και x_2 και έχει περιστραφεί σε σχέση με αυτό έτσι, ώστε ο άξονας τ να σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_1 . Επομένως ισχύει

$$\tau = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \text{ και } s = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta.$$

Το πλάτος και η φάση του κύματος το οποίο σκεδάζεται από το αντικείμενο μετράται πάνω στις ευθείες μέτρησης $x_0 = \tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}$, για ένα σύνολο Θ “γωνιών παρατήρησης” θ . Ο σκοπός των μετρήσεων είναι να εξαχθεί μια εκτίμηση της κατανομής του μιγαδικού δείκτη διάθλασης του σκεδαστή.

Για τα διδιάστατα αντικείμενα που εξετάζονται εδώ, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως (αρχή παραγράφου 3.1), η αντικειμενική συνάρτηση σχετίζεται με το δυναμικό σκέδασης V μέσω της εξίσωσης

$$V = 2k^2 f. \quad (3.27)$$

Ο λόγος της εισαγωγής και της αντικειμενικής συνάρτησης f , πέρα από το ήδη ορισμένο δυναμικό σκέδασης V , γίνεται φανερός στα επόμενα, όπου θα αποδειχθεί ότι στο όριο μικρού μήκους κύματος (δηλαδή όταν $k \rightarrow \infty$), οι γραμμικοποιημένες προσεγγίσεις Born και Rytov οδηγούν στο συνήθη μετασχηματισμό Radon της αντικειμενικής συνάρτησης f .

Ξεκινώντας, τα μοντέλα Born και Rytov υπολογίζονται για τα κύματα που σκεδάζονται από ένα δυναμικό του τύπου (3.27) όταν “φωτίζονται” από ένα κύμα $\psi_\theta(x) = e^{ik\langle \hat{v}, x \rangle} = e^{iks}$ που διαδίδεται κατά τη κατεύθυνση του άξονα s , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Η εξίσωση (3.9) δίνει το μοντέλο του Born

$$\psi_\theta^B(x_0) = -2k^2 \int_V G(x_0 - x') f(x') e^{ik\langle \hat{v}, x' \rangle} dx', \quad (3.28)$$

ενώ το μοντέλο του Rytov υπολογίζεται από την εξίσωση (3.20)

$$W_{\theta}^R(x_0) = -2k^2 e^{-iks_0} \int_V G(x_0 - x') f(x') e^{ik\langle \hat{v}, x' \rangle} dx'. \quad (3.29)$$

Στο σημείο αυτό εισάγεται το ανάπτυγμα του Weyl για τη συνάρτηση Green G

$$G(\tau' \hat{u} + s' \hat{v}) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip\tau'} \frac{e^{im|s'|}}{m} \approx -\frac{i}{4\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau'} \frac{e^{im|s'|}}{m}, \quad (3.30)$$

$$\text{όπου } m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - p^2}, & \text{για } |p| \leq k \\ i\sqrt{p^2 - k^2}, & \text{για } |p| > k. \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.30) περιέχει δύο φάσματα επίπεδων κυμάτων, το *ομογενές* (*homogeneous*) (αντιστοιχεί σε $|p| \leq k$) και το *παροδικό* (*evanescent*) (αντιστοιχεί σε $|p| > k$). Το ανάπτυγμα μπορεί να περικοπεί μόνο στο ομογενές φάσμα του, όπως φαίνεται από την προσέγγιση στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.30), αν το αντίστοιχο σημείο παρατήρησης x_0 θεωρηθεί τουλάχιστον μερικά μήκη κύματος μακριά από την περιοχή σκέδασης \mathcal{V} . Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.30) στην εξίσωση (3.28) συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \psi_{\theta}^B(\tau_0; s_0) &\approx \\ &\approx \frac{2ik^2}{4\pi} \iint_{\mathcal{V}} d\tau' ds' \int_{-k}^k dp e^{ip(\tau_0 - \tau')} \frac{e^{im(s_0 - s')}}{m} f(\tau' \hat{u} + s' \hat{v}) e^{iks'} = \\ &= \frac{ik^2}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \frac{e^{ims_0}}{m} \iint_{\mathcal{V}} d\tau' ds' e^{-ip\tau'} e^{-i(m-k)s'} f(\tau' \hat{u} + s' \hat{v}) = \\ &= \frac{ik^2}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \frac{e^{ims_0}}{m} \tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}], \end{aligned} \quad (3.31)$$

στην οποία με \tilde{f} συμβολίζεται ο διδιάστατος MF της f . Παρόμοια, από τη συνάρτηση (3.29) συνάγεται ότι

$$W_{\theta}^R(\tau_0; s_0) \approx \frac{k}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \frac{e^{i(m-k)s_0}}{m} \tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]. \quad (3.32)$$

Ορίζοντας ως

$$P_{\theta}f(\tau_0; s_0) = \begin{cases} \frac{e^{-iks_0}}{ik} \psi_{\theta}^B(\tau_0; s_0), & \text{όταν ισχύει το μοντέλο του Born,} \\ W_{\theta}^R(\tau_0; s_0), & \text{όταν ισχύει το μοντέλο του Rytov,} \end{cases}$$

τα δύο γραμμικά μοντέλα της ΠΤ ενοποιούνται σε μια ενιαία θεωρία γραμμικού μετασχηματισμού. Αυτή η ενοποίηση έχει αναγνωρισθεί και έχει οριστεί με μαθηματική αυστηρότητα στο [11].

Ειδικότερα, το αντίστροφο πρόβλημα της ΠΤ έχει οριστεί στο [11] ως αυτό της εκτίμησης της αντικειμενικής συνάρτησης f από γνώση του “μετασχηματισμού διάδοσης” (*propagation transform*) $P_{\theta}f$. Ο μετασχηματισμός διάδοσης σχετίζεται με την f μέσα από τη συνέλιξη

$$P_{\theta}f(\tau_0; s_0) = \iint_{\mathcal{V}} d\tau' ds' \Gamma_{\theta}(\tau_0 - \tau', s_0 - s') f(\tau'\hat{u} + s'\hat{v}), \quad (3.33)$$

όπου $\tau_0 \in \mathbb{R}^1$, s_0 είναι μια σταθερά, $\theta \in \Theta \subset [0, 2\pi)$ και ο πυρήνας Γ_{θ} εκφράζεται σε φασματική μορφή ως

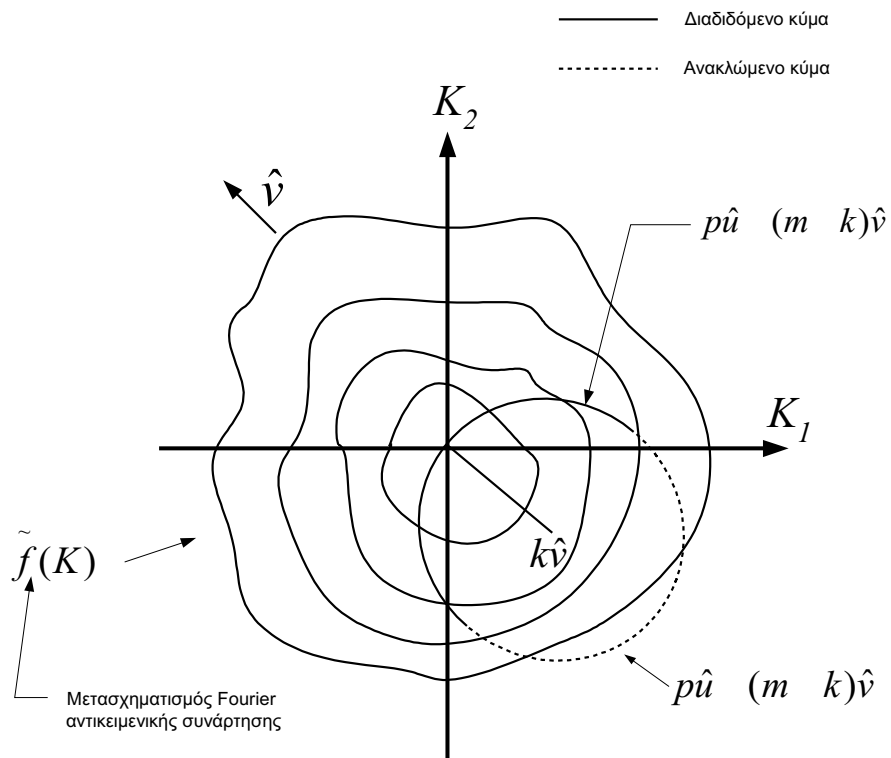
$$\Gamma_{\theta}(\tau', s') = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp \frac{k}{m} e^{[ip\tau' + (m-k)s']}. \quad (3.34)$$

Οι εξισώσεις (3.33) και (3.34) καταλήγουν σε μια απλή σχέση όταν θεωρούνται στο πεδίο του MF. Αυτή η σχέση, όταν αντικατασταθεί

η εξίσωση (3.34) στην εξίσωση (3.33), δίνει

$$\widetilde{P_\theta f}(p; s_0) = \begin{cases} \frac{k}{m} e^{(m-k)s_0} \tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}], & \text{όταν } |p| \leq k, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Η εξίσωση (3.35) είναι γνωστή ως *θεώρημα γενικευμένης προβολής-τομής (generalized projection-slice theorem)* και αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Γραφική αναπαράσταση του θεωρήματος γενικευμένης προβολής-τομής.

Με λόγια, το ΘΓΠΤ της εξίσωσης (3.35) υποδηλώνει ότι ο μονοδιάστατος MF $\widetilde{P}_\theta f$ του μετασχηματισμού διάδοσης είναι ανάλογος προς το διδιάστατο MF \tilde{f} της αντικειμενικής συνάρτησης f πάνω σε μια ημικυκλική τομή. Το ΘΓΠΤ έχει αποτελέσει τη βάση για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος της ΠΤ με παρεμβολή Fourier ή φιλτραρισμένη οπισθοδιάδοση, ενώ η εξίσωση (3.33) αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη των επαναληπτικών αλγορίθμων της ΠΤ.

Όπως δηλώθηκε και προηγουμένως, αυτή η διατύπωση του αντιστρόφου προβλήματος της ΠΤ είναι απόλυτα συμβατή με τη διατύπωση του αντιστρόφου προβλήματος της συνήθους Υπολογιστικής Τομογραφίας και ανάγεται σε αυτή στην οριακή περίπτωση του μικρού μήκους κύματος. Πράγματι:

$$k \rightarrow \infty, \left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow 1, (m - k) \rightarrow 0,$$

καθώς το $\lambda \rightarrow 0$. Αντιστοίχως ο πυρήνας $\Gamma_\theta(\tau', s')$ ανάγεται στον

$$\Gamma_\theta(\tau', s') \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip\tau'} = \delta(\tau'), \quad \text{καθώς } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.36)$$

γεγονός που οδηγεί στον συνηθισμένο μετασχηματισμό Radon [57, 44]

$$\begin{aligned} P_\theta f(\tau_0) &= \iint_{\mathcal{V}} d\tau' ds' \delta(\tau_0 - \tau') f(\tau' \hat{u} + s' \hat{v}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds' f(\tau_0 \hat{u} + s' \hat{v}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Κεφάλαιο 4

Απεικόνιση με αντίστροφη σκέδαση

4.1 Εισαγωγή

Οι πρώτοι αλγόριθμοι απεικόνισης με αντίστροφη σκέδαση βασίζονταν σε διάφορες μεθόδους παρεμβολής του MF της αντικειμενικής συνάρτησης. Το ΘΓΠΤ υποδεικνύει ότι, μετρώντας τις γενικευμένες προβολές $P_{\theta}f$ μίας συνάρτησης $f(x_1, x_2)$ για ένα σύνολο γωνιών $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ και μετασχηματίζοντας κατά Fourier κάθε μια από τις προβολές αυτές, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι τιμές του MF $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$ επί ημικυκλίων στο επίπεδο (K_{x_1}, K_{x_2}) . Αν ήταν γνωστός ένας άπειρος αριθμός τέτοιων προβολών, τότε ο MF $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$ θα ήταν γνωστός σε κάθε σημείο με κέντρο $(K_{x_1} = 0, K_{x_2} = 0)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ του επιπέδου (K_{x_1}, K_{x_2}) και η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ θα

μπορούσε να προσδιοριστεί με μία απλή διαδικασία αντιστρόφου MF.

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ έχει πεδίο ορισμού που περιέχεται στο τετράγωνο $-\frac{a}{2} \leq x_1, x_2 \leq \frac{a}{2}$, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική προσέγγιση

$$f(x_1, x_2) \approx \frac{1}{a^2} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{f}\left(\frac{m}{a}, \frac{n}{a}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{mx_1}{a} + \frac{nx_2}{a}\right)},$$

$-\frac{a}{2} \leq x_1, x_2 \leq \frac{a}{2}$ για $(N + 1) \times (N + 1)$ γνωστούς συντελεστές Fourier. Η έκφραση αυτή μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά με τη χρήση ταχέων αλγορίθμων MF.

Μια δυσκολία που προκύπτει έγκειται στο ότι η χρήση κάποιου ταχέως αλγορίθμου MF προϋποθέτει ομοιόμορφα κατανομημένα δείγματα του μετασχηματισμού $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$. Όμως, από ένα πεπερασμένο πλήθος προβολών μπορούν άμεσα να υπολογιστούν ανομοιόμορφα κατανομημένα δείγματά του και, πιο συγκεκριμένα, δείγματα με μεγαλύτερη πυκνότητα στην περιοχή του σημείου $(K_{x_1} = 0, K_{x_2} = 0)$ και με μικρότερη μακριά από αυτό. Το αποτέλεσμα της ανωτέρω ανομοιομορφίας είναι να αναπαριστούνται οι διάφορες συνιστώσες του MF $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$ με διαφορετική ακρίβεια στον τύπο αντιστροφής και να επιστρέφεται μία παραμορφωμένη εκτίμηση (ανακατασκευή) της συνάρτησης $f(x_1, x_2)$. Για το λόγο αυτό, από τα δείγματα του MF $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$ που προκύπτουν από τις μετρήσεις των γενικευμένων προβολών, πρώτα εκτιμώνται με κάποια μέθοδο παρεμβολής (*interpolation*) δείγματα του $\tilde{f}(K_{x_1}, K_{x_2})$

πάνω σε ένα ορθογώνιο πλέγμα και έπειτα ακολουθεί η αντιστροφή τους με χρήση ενός ταχέως αλγορίθμου.

4.2 Αντιστροφή γραμμικού όρου σειρών

Born - Rytov

Ο ΑΦΟ υπερνικά τις παραμορφώσεις που είναι εμφανείς σε ανακατασκευές που παράχθηκαν με χρήση αλγορίθμων παρεμβολής του MF. Στην ενότητα αυτή εξάγεται ο ΑΦΟ με έναν τρόπο απλό. Για την ανάπτυξη του αλγορίθμου ΑΦΟ είναι απαραίτητο το ακόλουθο λήμμα :

ΛΗΜΜΑ 4.1 *Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων [50]*

$$\begin{aligned} K(p, \theta) &\equiv p\hat{u} + (m - k)\hat{v} = \\ &= [p \cos \theta - (m - k) \sin \theta] \hat{x}_1 + [p \sin \theta + (m - k) \cos \theta] \hat{x}_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

με \hat{x}_1, \hat{x}_2 τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x_1, x_2 αντιστοίχως, οδηγεί στην έκφραση

$$\delta[p\hat{u} + (m - k)\hat{v} - p'\hat{u}' - (m' - k)\hat{v}'] dp' = \frac{2\delta(p - p')\delta(\theta - \theta')}{|\frac{kp}{m}|} dp'. \quad (4.2)$$

Απόδειξη: Από την Ιακωβιανή J του μετασχηματισμού συντεταγμένων (4.1)

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial p} & \frac{\partial K_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial K_2}{\partial p} & \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{kp}{m},$$

και για μια αυθαίρετη συνάρτηση $l(p', \theta')$ συνεχή στο $p' = p, \theta' = \theta$ συνάγεται

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-k}^k dp' l(p', \theta') \delta[p\hat{u} + (m-k)\hat{v} - p'\hat{u}' - (m'-k)\hat{v}'] = \\ = 2 \int_{\mathcal{D}} dK' \frac{l[K'(p', \theta')]}{\frac{|kp'|}{|m'|}} \delta(K - K') = 2 \frac{l[K(p, \theta)]}{\frac{|kp|}{|m|}}, \end{aligned}$$

όπου \mathcal{D} είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας $k\sqrt{2}$, στο χώρο Fourier. Ο παράγοντας 2 προκύπτει από το γεγονός ότι η ολοκλήρωση του θ' από το 0 στο 2π στο αριστερό τμήμα της ανωτέρω εξίσωσης έχει ως αποτέλεσμα τη διπλή κάλυψη του κυκλικού δίσκου \mathcal{D} . Η τελευταία εξίσωση επιβεβαιώνει την εξίσωση (4.2) του λήμματος. \square

Για την ανάπτυξη του ΑΦΟ, θεωρείται ο τύπος αντιστροφής του MF

$$\begin{aligned} f_{\text{rec}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|K| < k\sqrt{2}} dK e^{ipt} e^{i\langle K, x \rangle} \tilde{f}(K) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp |p| e^{ipt} e^{i(m-k)s \frac{k|p|}{m}} \tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Από το ΘΓΠΤ συνάγεται ότι

$$\frac{k}{m} e^{i(m-k)s_0} \tilde{f}_{\text{rec}}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] = \widetilde{P_\theta} f(p, s_0)$$

ή

$$\frac{k}{m} \tilde{f}_{\text{rec}}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] = e^{-i(m-k)s_0} \widetilde{P_\theta} f(p, s_0). \quad (4.4)$$

Από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) προκύπτει η εξίσωση

$$f_{\text{rec}}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp |p| e^{ip\tau} e^{i(m-k)(s-s_0)} \widetilde{P_\theta} f(p, s_0), \quad (4.5)$$

στην οποία $x = \tau\hat{u} + s\hat{v}$. Η εξίσωση (4.5) αποτελεί τον ΑΦΟ που αναφέρεται σε προηγούμενα σημεία αυτής της διατριβής.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η εκτίμηση (ανακατασκευή) f_{rec} στο πεδίο του MF έχει το ίδιο περιεχόμενο χωρικών συχνοτήτων με την άγνωστη συνάρτηση f πάνω σε έναν κυκλικό δίσκο \mathcal{D} ακτίνας $k\sqrt{2}$ και μηδενικό περιεχόμενο συχνοτήτων έξω από το δίσκο αυτό. Επομένως, ο ΑΦΟ επιστρέφει μια ανακατασκευή f_{rec} , η οποία αντιστοιχεί σε μια φιλτραρισμένη (με βαθυπερατό φίλτρο) έκδοση της άγνωστης αντικειμενικής συνάρτησης f .

Από την πρώτη εμφάνισή του και μετά ο ΑΦΟ έχει τροποποιηθεί και επεκταθεί έτσι, ώστε με τη χρήση του να επιτυγχάνεται ανακατασκευή από μετρήσεις άλλων γεωμετριών. Επίσης, η αποδοτικότητά του έχει ελεγχθεί και επαληθευτεί μέσα από πειραματικά δεδομένα και δεδομένα που προκύπτουν από προσομοίωση με υπολογιστή.

4.3 Αντιστροφή σειράς Born

Έστω ότι στο Σχήμα 3.2 το σκεδαζόμενο κύμα κατά μήκος της γραμμής $x_0 = \tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}$, $\tau_0 \in \mathbb{R}^1$ και s_0 σταθερά, προσεγγίζεται πολύ καλά από τους πρώτους N όρους της σειράς Born, όπως στην εξίσωση (3.8).

Αν $G(x - x')$ συμβολίζει τη συνάρτηση Green αποκλίνοντος κύ-

ματος του τελεστή Helmholtz, τότε θεωρείται το ανάπτυγμα του Weyl

$$\begin{aligned}
 G[(\tau - \tau')\hat{u} + (s - s')\hat{v}] &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(\tau - \tau')} \frac{e^{im|s - s'|}}{m} \\
 &\approx -\frac{i}{4\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip(\tau - \tau')} \frac{e^{im|s - s'|}}{m} \\
 &\equiv G_L[(\tau - \tau')\hat{u} + (s - s')\hat{v}], \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

όπου

$$m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - p^2}, & \text{όταν } |p| \leq k \\ i\sqrt{p^2 - k^2}, & \text{όταν } |p| > k. \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα Weyl στην εξίσωση (4.6) αναλύει τη συνάρτηση Green σε μια υπέρθεση επίπεδων κυμάτων (ομογενών για $|p| \leq k$ και παροδικών για $|p| > k$). Τα παροδικά κύματα εξασθενούν εκθετικά σε συνάρτηση με το $|s - s'|$. Η προσέγγιση G_L στο τελευταίο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.6) είναι μια βαθυπερατή προσέγγιση της συνάρτησης Green G , η οποία αποτελείται μόνο από συνιστώσες ομογενών επίπεδων κυμάτων και ισχύει για $|s - s'| \gg \lambda$.

Ορίζονται τώρα οι χώροι Hilbert \mathcal{F} , \mathcal{F}_L και \mathcal{P} ως εξής:

- $\mathcal{F} = L^2(\mathcal{D}_a)$, όπου \mathcal{D}_a είναι ένας κύκλος του επιπέδου \mathbb{R}^2 , ο οποίος έχει ακτίνα a και περιέχει την περιοχή σκέδασης \mathcal{V} .
- $\mathcal{F}_L = \{(f_L|_{\mathcal{D}_a}) : \exists(f|_{\mathcal{D}_a}) \in \mathcal{F}\}$ έτσι ώστε

$$\tilde{f}_L(K) = \begin{cases} \tilde{f}(K), & \text{για } |K| \leq k\sqrt{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- \mathcal{P} είναι ο χώρος των συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται στο $\mathbb{R}^1 \times [0, 2\pi)$ και έχουν, ως προς την πρώτη μεταβλητή, μηδενικό φασματικό περιεχόμενο έξω από το διάστημα $[-k, k]$.

Στη συνέχεια ορίζονται οι μη γραμμικοί τελεστές

$$\mathcal{G}_n : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{P}, \quad (4.7)$$

όπου

$$(\mathcal{G}_n f_L)(\tau_0, \theta) = \frac{e^{-iks_0}}{ik} \psi_n^L(\tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}, \theta) \quad (4.8)$$

και $\psi_n^L(\tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}, \theta)$ είναι ο n -οστός όρος των σειρών Born του σκεδαζομένου κύματος κατά μήκος της γραμμής μέτρησης $x = \tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}$, φιλτραρισμένος ως προς τ_0 με βαθυπερατό φίλτρο στο διάστημα $[-k, k]$. Από τις εξισώσεις (3.7) φαίνεται ότι \mathcal{G}_n είναι ένας ομογενής τελεστής Volterra τάξης n

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_n f_L)(\tau_0, \theta) &= \\ &= \frac{e^{-iks_0} (-2k^2)^n}{ik} \cdot \int_{\mathcal{V}} dx^{(1)} G_L(x_0 - x^{(1)}) \cdot \int_{\mathcal{V}} dx^{(2)} G(x^{(1)} - x^{(2)}) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \int_{\mathcal{V}} dx^{(n)} G(x^{(n-1)} - x^{(n)}) e^{ik \langle \hat{v}, x^{(n)} \rangle} f(x^{(1)}) \cdot f(x^{(2)}) \cdot \dots \cdot f(x^{(n)}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Στην εξίσωση (4.9) f είναι η συνάρτηση που ανήκει στο \mathcal{F} και προκύπτει από την αναλυτική συνέχιση του MF της συνάρτησης f_L . Η επιλογή της G_L (σε αντίθεση με τη G) στην πρώτη ολοκλήρωση ισχύει πρακτικώς όσο η απόσταση μέτρησης s_0 είναι της τάξης μερικών τουλάχιστον μηκών κύματος, ώστε να επιτυγχάνεται εξασθένιση των συνιστωσών των παροδικών κυμάτων του σκεδαστή έξω

από το αντικείμενο ($s_0 \gg \lambda$). Πάντως, οι συνιστώσες των παροδικών κυμάτων μέσα στο αντικείμενο θα δώσουν, γενικώς, αφορμή για υψηλότερης τάξης συνιστώσες ομογενών κυμάτων στις αλληλεπιδράσεις πολλαπλής σκέδασης και έτσι το συνολικό ανάπτυγμα της συνάρτησης Green G χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί για τις υπόλοιπες ολοκληρώσεις.

Για να γίνει πιο ελκυστική από πλευράς υπολογισμών η παράσταση των μη γραμμικών μετασχηματισμών της εξίσωσης (4.9), γίνεται χρήση του αναπτύγματος Weyl της εξίσωσης (4.6). Ισχύει

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_n f_L)(\tau_0, \theta) &= \frac{e^{-iks_0}}{ik} \frac{2ik^2}{4\pi} \iint_{\mathcal{V}} d\tau^{(1)} ds^{(1)} \int_{-k}^k dp \cdot \\
&\cdot e^{ip(\tau_0 - \tau^{(1)})} \frac{e^{im(s_0 - s^{(1)})}}{m} f(\tau^{(1)}\hat{u} + s^{(1)}\hat{v}) e^{iks^{(1)}} = \\
&= \frac{ke^{-ips_0}}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \frac{e^{ims_0}}{m} \iint_{\mathcal{V}} d\tau^{(1)} ds^{(1)} \cdot \\
&\cdot e^{-ip\tau^{(1)}} e^{-i(m-k)s^{(1)}} f(\tau^{(1)}\hat{u} + s^{(1)}\hat{v}) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \frac{ke^{i(m-k)s_0}}{m} \tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

όπου \tilde{f} παριστάνει το διδιάστατο MF της f . Η εξίσωση (4.10) είναι απλώς ένα ανάπτυγμα του ΘΓΠΤ. Επίσης, επαληθεύει το γεγονός ότι οι προτεινόμενοι (μη γραμμικοί) μετασχηματισμοί διάδοσης περιλαμβάνουν τη συνήθη περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών διάδοσης ως μια ειδική περίπτωση. Από τις σχέσεις (4.10) αποδείχθηκε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός διάδοσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης f μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τη χρή-

ση ενός TMF. Οι μη γραμμικοί μετασχηματισμοί $\mathcal{G}_n f$ της εξίσωσης (4.9) δεν υπολογίζονται άμεσα με τη χρήση ενός TMF, διότι απαιτείται ο υπολογισμός του MF της αντικειμενικής συνάρτησης f πάνω σε ένα σύνολο μιγαδικών συχνοτήτων. Πάντως, όταν χρησιμοποιούνται οι φιλτραρισμένες με βαθυπερατό φίλτρο προσεγγίσεις του αναπτύγματος Weyl –μια επαρκής προσέγγιση για επαρκώς υψηλό κυματαριθμό– οι μη γραμμικοί μετασχηματισμοί διάδοσης είναι δυνατόν να υπολογιστούν, κατά προσέγγιση, από αλγόριθμους που βασίζονται σε TMF.

Ορίζεται τώρα ο γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{B} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}_L \quad (4.11)$$

με

$$(\mathcal{B}d)(x = \tau\hat{u} + s\hat{v}) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp |p| \cdot e^{ip\tau} e^{i(m-k)(s-s_0)} \tilde{d}(p, \theta). \quad (4.12)$$

Ο τελεστής $(\mathcal{B}|\mathcal{P})$ είναι ο αντίστροφος του $(\mathcal{G}_1|\mathcal{F}_L)$ όπως αυτός ορίζεται στην εξίσωση (4.5).

Έστω ο μη ομογενής τελεστής Volterra τάξης N

$$\mathcal{G}^N = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_N : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{P}, \quad (4.13)$$

όπου

$$(\mathcal{G}^N f_L)(\tau_0, \theta) = \frac{e^{-ik s_0}}{ik} (\psi_1^L + \psi_2^L + \dots + \psi_N^L)(\tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}, \theta) \quad (4.14)$$

και $\psi_n^L(\tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}, \theta)$, $n = 1, 2, \dots$, είναι ο n -οστός όρος της σειράς Born του σκεδαστή κατά μήκος της γραμμής μέτρησης

$x_0 = \tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}$, φιλτραρισμένος ως προς τ_0 με βαθυπερατό φίλτρο στο διάστημα $[-k, k]$. Την ύπαρξη ενός τοπικού αντιστρόφου για τον τελεστή \mathcal{G}^N και την αναπαράστασή του από συγκλίνουσες σειρές εγγυάται η ύπαρξη του αντιστρόφου $(\mathcal{B}|\mathcal{P})$ του γραμμικού όρου $(\mathcal{G}_1|\mathcal{F}_L)$. Ειδικότερα, υπάρχει μια περιοχή στο χώρο δεδομένων \mathcal{P} στην οποία ο τελεστής

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_n + \dots \quad (4.15)$$

είναι ο αντίστροφος του \mathcal{G}^N , όπου \mathcal{B}_n είναι ένας ομογενής τελεστής Volterra των δεδομένων, τάξης n . Ειδικότερα ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \mathcal{B} \\ \mathcal{B}_2 &= -\mathcal{B}\mathcal{G}_2\mathcal{B} \\ \mathcal{B}_3 &= \mathcal{B}\mathcal{G}_2\mathcal{B}\mathcal{G}_2\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{G}_3\mathcal{B} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Εδώ παρατηρείται ότι οι όροι $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots$ είναι *καθολικοί (universal)*, με την έννοια ότι δεν εξαρτώνται από την τάξη N του ευθέως μοντέλου \mathcal{G}^N . Έτσι, οι τελεστές (4.15) μπορούν να περικοπούν στην επιθυμητή τάξη n και να επιστρέψουν αλγόριθμους αντιστροφής τάξης n ως προς τα δεδομένα. Για παράδειγμα, ο συνήθης ΑΦΟ ορίζει έναν καθολικό αλγόριθμο αντιστροφής ο οποίος είναι πρώτης τάξης (γραμμικός) ως προς τα δεδομένα. Η γενική θεωρία του Volterra για τα μη γραμμικά συστήματα είναι δυνατόν να εφαρμοστεί για να εκτιμήσει ένα όριο του σφάλματος από την αποκοπή των σειρών (4.15) σε έναν αυθαίρετο όρο. Το όριο αυτό είναι συνάρτηση της

αντικειμενικής συνάρτησης και δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί προκαταβολικά. Μια πρακτική προσέγγιση για τον προσδιορισμό του όρου, στον οποίο πρέπει να τερματιστούν οι σειρές (4.15), είναι ο έλεγχος της νόρμας κάθε νέου όρου στις (4.15) και ο τερματισμός όταν αυτή ελαχιστοποιηθεί αρκετά.

Μια δεύτερη παρατήρηση δείχνει ότι, αν τα δεδομένα μοντελοποιούνται επαρκώς από τον πρώτο όρο του Born (δηλαδή $\psi^{(s)} = \psi_1$ και $\psi_2 = \psi_3 = \dots = 0$), τότε κάθε όρος υψηλότερης τάξης στις σειρές (4.15) επιστρέφει μια μηδενική συνεισφορά στην ανακατασκευή της εικόνας, όπως αποκαλύπτεται από μια προσεκτική εξέταση των σχέσεων (4.16). Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι οι αλγόριθμοι που προκύπτουν είναι ουσιαστικά της μορφής της μη γραμμικώς φιλτραρισμένης οπισθοδιάδοσης των μετρήσεων. Πράγματι, οι τελεστές της (4.15) μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\mathcal{B}(\mathcal{I} - \mathcal{G}_2\mathcal{B} + \mathcal{G}_2\mathcal{B}\mathcal{G}_2\mathcal{B} - \mathcal{G}_3\mathcal{B} - \dots) \quad (4.17)$$

όπου $\mathcal{I} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Ουσιαστικά, ο όρος που περικλείεται στις παρενθέσεις της (4.17) είναι ένα ανώτερης τάξης, μη γραμμικό φίλτρο Volterra, το οποίο εφαρμόζεται στα δεδομένα και έτσι οι όροι της σειράς οδηγούν σε μια ολόκληρη κλάση *μη γραμμικών ΑΦΟ* για την αντιστροφή δεδομένων ΠΤ.

4.4 Αντιστροφή σειράς Rytov

Έστω ότι στη διάταξη του Σχήματος 3.2 η μιγαδική φάση¹ του ολικού κύματος κατά μήκος της γραμμής $x_0 = \tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}$, $\tau_0 \in \mathbb{R}^1$, s_0 : σταθερά, προσεγγίζεται καλά από τους πρώτους N όρους των σειρών Rytov, χωρίς να αποκλείεται η πιθανότητα το $N \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$W(x_0) \approx W_0(x_0) + W_1(x_0) + \dots + W_N(x_0). \quad (4.18)$$

Ορίζονται οι χώροι Hilbert \mathcal{F} , \mathcal{F}_L και \mathcal{P} ως εξής:

- $\mathcal{F} = L^2(\mathcal{D}_a)$, όπου \mathcal{D}_a είναι ένας κύκλος του επιπέδου \mathbb{R}^2 , ο οποίος έχει ακτίνα a και περιέχει την περιοχή σκέδασης \mathcal{V} .
- $\mathcal{F}_L = \{(f_L | \mathcal{D}_a) : \exists (f | \mathcal{D}_a) \in \mathcal{F}\}$, έτσι ώστε

$$\tilde{f}_L(K) = \begin{cases} \tilde{f}(K), & \text{για } |K| \leq k\sqrt{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- \mathcal{P} είναι ο χώρος των συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται στο $\mathbb{R}^1 \times [0, 2\pi)$ και έχουν, ως προς την πρώτη μεταβλητή, μηδενικό φασματικό περιεχόμενο έξω από το διάστημα $[-k, k]$.

Επίσης, ορίζονται οι μη γραμμικοί τελεστές

$$\mathcal{W}_n : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{P}, \quad (4.19)$$

όπου

$$(\mathcal{W}_n f_L)(\tau_0, \theta) = W_n^L(\tau_0 \hat{u} + s_0 \hat{v}, \theta) \quad (4.20)$$

¹Δηλαδή ο μιγαδικός λογάριθμος.

και $W_n^L(\tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}, \theta)$ είναι ο n -οστός όρος της σειράς Rytov της μιγαδικής φάσης του ολικού κύματος κατά μήκος της γραμμής μέτρησης $x_0 = \tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}$, κανονικοποιημένης από τον κυματαριθμό και φιλτραρισμένης από βαθυπερατό φίλτρο ως προς τ_0 στο διάστημα $[-k, k]$. Από τις εξισώσεις (3.25) είναι φανερό ότι το W_n είναι ένας τελεστής Volterra τάξης n .

Ορίζεται τώρα ο γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{B} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}_L \quad (4.21)$$

με

$$(\mathcal{B}d)(x = \tau\hat{u} + s\hat{v}) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp |p| e^{ip\tau} e^{i(m-k)(s-s_0)} \tilde{d}(p, \theta). \quad (4.22)$$

Ο τελεστής $(\mathcal{B}|\mathcal{P})$ είναι ο αντίστροφος του τελεστή $(\mathcal{W}_1|\mathcal{F}_L)$ όπως αυτός ορίζεται στην εξίσωση (4.5)

Έστω ο μη ομογενής τελεστής Volterra τάξης N (όπου δεν αποκλείεται η πιθανότητα $N \rightarrow \infty$)

$$\mathcal{W}^N = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_N : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{P}, \quad (4.23)$$

όπου

$$(\mathcal{W}^N f_L)(\tau_0, \theta) = \frac{e^{iks_0}}{ik} (W_1^L + W_2^L + \dots + W_N^L)(\tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}, \theta) \quad (4.24)$$

και $W_n^L(\tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}, \theta)$, $n = 1, 2, \dots$, είναι ο n -οστός όρος των σειρών Rytov για το σκεδαζόμενο κύμα κατά μήκος της γραμμής μέτρησης $x_0 = \tau_0\hat{u} + s_0\hat{v}$, φιλτραρισμένος από βαθυπερατό φίλτρο ως προς το τ_0 στο διάστημα $[-k, k]$. Την ύπαρξη ενός τοπικού αντιστρόφου για

τον τελεστή \mathcal{W}^N και την αναπαράστασή του με συγκλίνουσες σειρές εγγυάται η ύπαρξη του αντιστρόφου $(\mathcal{B}|\mathcal{F}_L)$ του γραμμικού όρου $(\mathcal{W}_1|\mathcal{P})$. Ειδικότερα, υπάρχει μια περιοχή στο χώρο δεδομένων \mathcal{P} , στην οποία ο αντίστροφος του \mathcal{W}^N είναι ο τελεστής

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_n + \dots, \quad (4.25)$$

όπου \mathcal{B}_n είναι ένας μη ομογενής τελεστής Volterra των μετρήσεων τάξης n .

Ειδικότερα ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \mathcal{B} \\ \mathcal{B}_2 &= -\mathcal{B}\mathcal{W}_2\mathcal{B} \\ \mathcal{B}_3 &= \mathcal{B}\mathcal{W}_2\mathcal{B}\mathcal{W}_2\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{W}_3\mathcal{B} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Εδώ παρατηρείται ότι οι όροι $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots$ είναι καθολικοί, με την έννοια ότι δεν εξαρτώνται από την τάξη N του ευθέως μοντέλου \mathcal{W}^N . Έτσι οι τελεστές (4.25) μπορούν να περικοπούν στην επιθυμητή τάξη n και να επιστρέψουν τους αλγόριθμους αντιστροφής ΠΤ τάξης n ως προς τα δεδομένα. Για παράδειγμα, ο συνήθης ΑΦΟ ορίζει έναν καθολικό αλγόριθμο αντιστροφής ο οποίος είναι πρώτης τάξης (γραμμικός) ως προς τα δεδομένα. Επίσης, από μια προσεκτική εξέταση των σχέσεων (4.26) διαφαίνεται ότι, αν τα δεδομένα ανακατασκευάζονται επαρκώς από τον πρώτης τάξης όρο του Rytov -δηλ. $\delta W = W_1$ και $W_2 = W_3 = \dots = 0$ - τότε κάθε όρος από τους (4.25) μεγαλύτερης τάξης επιστρέφει μια ταυτοτική μηδενική συνεισφο-

ρά στην ανακατασκευή της εικόνας. Αυτό το γεγονός πιστοποιείται επίσης και στις προσομοιώσεις της παραγράφου 4.6. Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι οι αλγόριθμοι που προκύπτουν είναι ουσιαστικά της μορφής της μη γραμμικώς φιλτραρισμένης οπισθοδιάδοσης των μετρήσεων. Πράγματι, οι τελεστές της (4.25) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\mathcal{B}(\mathcal{I} - \mathcal{W}_2\mathcal{B} + \mathcal{W}_2\mathcal{B}\mathcal{W}_2\mathcal{B} - \mathcal{W}_3\mathcal{B} - \dots), \quad (4.27)$$

όπου $\mathcal{I} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Ουσιαστικά, ο όρος που περικλείεται στις παρενθέσεις της (4.27) είναι ένα ανώτερης τάξης, μη γραμμικό φίλτρο Volterra το οποίο εφαρμόζεται στα δεδομένα και έτσι οι όροι της σειράς (4.25) δίνουν αφορμή για μια ολόκληρη κλάση *μη γραμμικών ΑΦΟ* για την αντιστροφή δεδομένων της ΠΤ.

4.4.1 Υλοποίηση των αλγορίθμων αντιστροφής

Η υλοποίηση των προτεινομένων μη γραμμικών αλγορίθμων ανακατασκευής της ΠΤ συνίσταται σε αρκετά βήματα και απαιτεί την υλοποίηση αντιστοίχων αλγοριθμικών υπομονάδων. Ειδικότερα, ξεχωριστές υπομονάδες που είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν είναι οι ακόλουθες:

1. Ένας εκτιμητής της μιγαδικής φάσης (μιγαδικού λογαρίθμου) του μετρούμενου ολικού κύματος και ένας αλγόριθμος για το *ξετύλιγμα της φάσης (phase unwrapper)*. Η εκτίμηση της μιγαδικής φάσης του ολικού κύματος από μετρήσεις μπορεί να

απαιτεί τη χρήση ενός αλγορίθμου για το ξεδίπλωμα φάσης όταν τα δεδομένα παρουσιάζουν θόρυβο. Το πρόβλημα δεν είναι δύσκολο στις περιπτώσεις πλήρως τριδιάστατων εικόνων και στην πραγματικότητα γίνεται ευκολότερο σε περισσότερες διαστάσεις. Μια πρακτική προσέγγιση συνίσταται σε δύο προληπτικές μετρήσεις: α) στην εκμετάλλευση του γεγονότος ότι το σήμα του κύματος περιορίζεται από τη μηδενική τιμή του μετασχηματισμού έξω από το διάστημα $[-k, k]$. Δηλαδή, οι μετρήσεις φιλτράρονται με βαθυπερατά φίλτρα ανάλογα με τη μείωση του επιπέδου του θορύβου και β) στην αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας πέρα από το ρυθμό Nyquist. Σε προηγούμενα ανεξάρτητα πειράματα με τις θεωρίες της γραμμικοποιημένης ΠΤ έγινε δυνατό να απεικονιστούν διδιάστατα αντικείμενα, όπου το πρόβλημα της αναδίπλωσης φάσης είναι εντονότερο από τις μετρήσεις σκεδαζομένων κυμάτων σε έναν πρότυπο υπερηχογράφο, σε ένα πρότυπο οπτικό μικροσκόπιο και αρκετές συσκευές απεικόνισης του υπεδάφους (ακουστικές και ραντάρ διεύθυνσης στο υπέδαφος). Αν σε μερικές εφαρμογές χρειάζεται μια καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος ξετυλίγματος φάσης, προτείνεται αυτή που βασίζεται στην προσέγγιση της φάσης με ένα χαμηλού βαθμού προσεγγιστικό πολυώνυμο, του οποίου οι συντελεστές υπολογίζονται από τις μετρήσεις.

2. Ένας υλοποιητής του διδιάστατου ή τριδιάστατου ΑΦΟ ή αντι-

στοίχου γραμμικού αλγορίθμου αντιστροφής, ο οποίος μπορεί να βασίζεται στη χρήση ενός TMF, είναι στη σημερινή εποχή μια συνηθισμένη διαδικασία. Αν και ο ΑΦΟ είναι ιδιαίτερος εύρωστος σε υψηλά επίπεδα θορύβου, είναι πιθανό σε κάποιες περιπτώσεις (για παράδειγμα όταν το κύμα εξετάζεται μόνο από ένα πολύ περιορισμένο αριθμό κατευθύνσεων) να απαιτείται η κανονικοποίηση του γραμμικού αλγορίθμου. Για την εξουδετέρωση των αποτελεσμάτων του θορύβου, υπάρχει ένας αριθμός από σχετικές κανονικοποιήσεις του ΑΦΟ [105]. Ειδικότερα στην αναφορά [105] προτείνεται και εξετάζεται μια άπειρη κλάση εξομαλυμένων αλγορίθμων αντιστροφής, η οποία αναπαράγει το θόρυβο διαφορετικά.

3. Αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των όρων Born μιας συνάρτησης δύο ή τριών διαστάσεων με τη χρήση μιας προσέγγισης που βασίζεται στον TMF. Γι' αυτούς τους αλγόριθμους δεν απαιτείται εξομάλυνση γιατί οι αντίστοιχοι τελεστές είναι φραγμένοι και συνεπώς συνεχείς.
4. Υλοποιητές των μετασχηματισμών των όρων του Born σε όρους του Rytov.
5. Συνδυαστές όλων των ανωτέρω υπομονάδων.

4.5 Η περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας

Ένα ιδιαίτερο σημαντικό πρόβλημα απεικόνισης είναι εκείνο όπου τα αντικείμενα σκέδασης έχουν κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή είναι σκεδαστές των οποίων οι ιδιότητες μεταβάλλονται μόνο σε συνάρτηση της αξονικής απόστασης από το κέντρο τους και έτσι η αντικειμενική τους συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = f_r(r), \quad r = |x|. \quad (4.28)$$

Αυτό το σημαντικό πρόβλημα εμφανίζεται σε πρακτικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα η ανακατασκευή της δομής οπτικών ινών ή μεγάλων μορίων ή θαμμένων σωλήνων, αλλά εδώ χρησιμοποιείται για την αναλυτική μελέτη, καθώς και τη μελέτη μέσω προσομοίωσης με υπολογιστή ανακατασκευαστικών αλγορίθμων της ΠΤ. Ανάλογα, τόσο με τον ΑΦΟ (4.5) όσο και με τα μη γραμμικά μοντέλα (4.24) επιτυγχάνεται μια απλούστερη μορφή, στην οποία χρησιμοποιούνται οι μονοδιάστατοι μετασχηματισμοί Fourier-Bessel.

Πράγματι, αν

$$\tilde{f}_r(|K|) = 2\pi \int_0^\infty dr r J_0(|K|r) f_r(r), \quad (4.29)$$

τότε για το MF της αντικειμενικής συνάρτησης f ισχύει

$$\tilde{f}(|K|) = \tilde{f}_r(|K|) \quad (4.30)$$

και το ΘΓΠΤ δίνει

$$\widetilde{P_\theta f}(p; s_0) = \begin{cases} \frac{k}{m} e^{i(m-k)s_0} \tilde{f}_r[\sqrt{2k(k-m)}], & \text{για } |p| \leq k \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (4.31)$$

όπου η γενικευμένη προβολή $P_\theta f$ είναι ανεξάρτητη από τη γωνία παρατήρησης θ . Τότε ο ΑΦΟ δίνεται από τη σχέση

$$f_{\text{rec}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^k dp p e^{i(k-m)s_0} J_0[r\sqrt{2k(k-m)}] \widetilde{P_\theta f}(p; s_0), \quad r = |x|, \quad (4.32)$$

όπου η ολοκλήρωση ως προς τη γωνία παρατήρησης θ έχει εξαλειφθεί. Γενικώς, τα μη γραμμικά μοντέλα (4.24) μπορούν να υπολογιστούν με έναν παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, ο πρώτος όρος του Born δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{\psi}_1(p\hat{u} + s_0\hat{v}) = \begin{cases} \frac{ik^2}{m} e^{ims_0} \tilde{f}_r[r\sqrt{2k(k-m)}], & \text{για } |p| \leq k \\ \frac{ik^2}{m} e^{ims_0} \tilde{f}_r(|p|\sqrt{2}) & \text{για } |p| > k, \end{cases} \quad (4.33)$$

και δίνει τη δυνατότητα για τον υπολογισμό του πρώτου όρου W_1 των σειρών Rytov.

4.6 Προσομοίωση με υπολογιστή

Οι προτεινόμενοι μη γραμμικοί αλγόριθμοι ανακατασκευής ΠΤ εφαρμόστηκαν και εξετάστηκαν με τη χρήση του υπολογιστή σε τρεις προσομοιώσεις, ακολουθώντας τα βήματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.4.1. Και στις τρεις περιπτώσεις το αντικείμενο σκέδασης παρουσίαζε κυλινδρική συμμετρία και, στην περίπτωση των

δεδομένων χωρίς θόρυβο, ήταν δυνατόν να ανακατασκευαστεί από ένα απλό πείραμα σκέδασης.

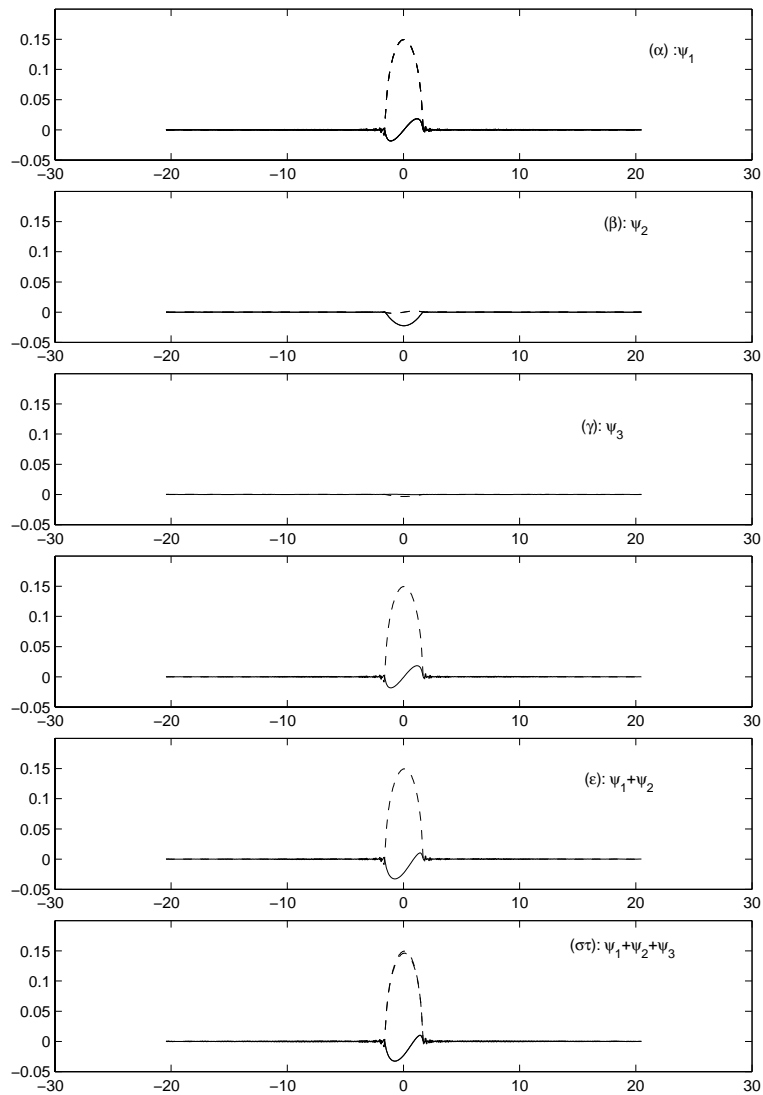
4.6.1 Α' προσομοίωση

Στην πρώτη περίπτωση το σκεδαζόμενο αντικείμενο αποτελούνταν από έναν απλό κυκλικό δίσκο ακτίνας 2, μέσα στον οποίο η αντικειμενική συνάρτηση ήταν σταθερή και ίση με 0,001, δηλαδή:

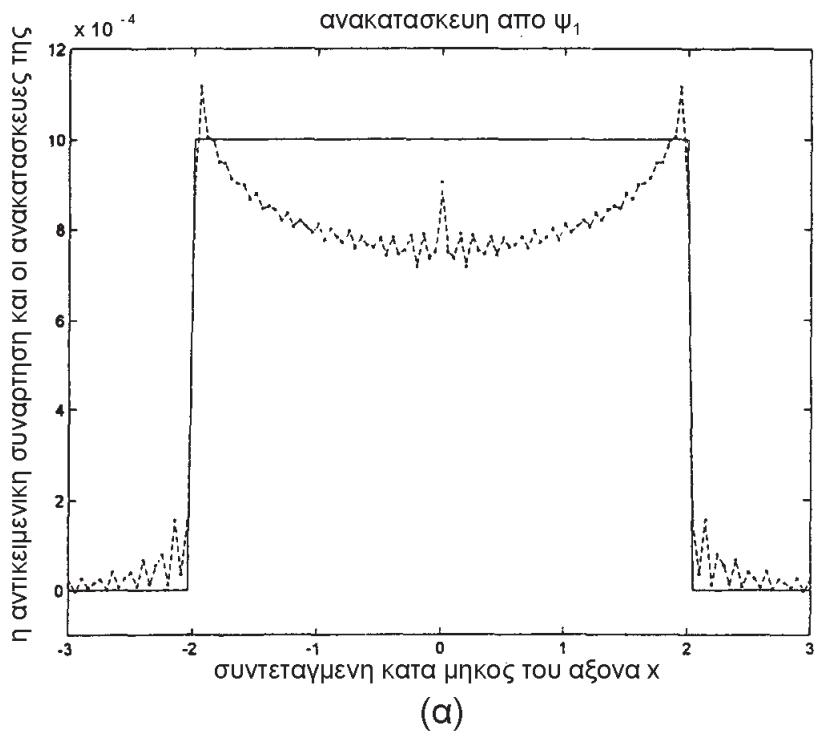
$$f(x) = \begin{cases} 0,001, & \text{για } |x| \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (4.34)$$

Ο κυματαριθμός ήταν $k = 12\pi$ και αντιστοιχούσε σε μήκος κύματος $\lambda = \frac{1}{6}$, δηλαδή η διάμετρος του αντικειμένου ήταν ίση με δώδεκα (12) μήκη κύματος. Στο Σχήμα 4.1 αναπαρίστανται γραφικά το πραγματικό (συνεχής γραμμή) και το φανταστικό (διακεκομμένη γραμμή) μέρος του πρώτου (Σχήμα 4.1(α')), του δεύτερου (Σχήμα 4.1(β')) και του τρίτου (Σχήμα 4.1(γ')) όρου Born, καθώς και οι πρώτης (Σχήμα 4.1(δ')), δεύτερης (Σχήμα 4.1(ε')) και τρίτης (Σχήμα 4.1(στ')) τάξης προσεγγίσεις Born του σκεδαζομένου κύματος για μια απόσταση μέτρησης $s_0 = 0$. Στα Σχήματα (4.2-4.4) εμφανίζονται οι ανακατασκευές της αντικειμενικής συνάρτησης από τον ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και τον **Αλγόριθμο Αντιστροφής Δεύτερης Τάξης - ΑΑΔΤ** (*second order inversion algorithm*) (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) σε σύγκριση με τη γραφική της παράσταση (σταθερή γραμμή). Πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση του σκεδαζομένου κύματος από τον πρώτο όρο Born εμφανίζεται στο

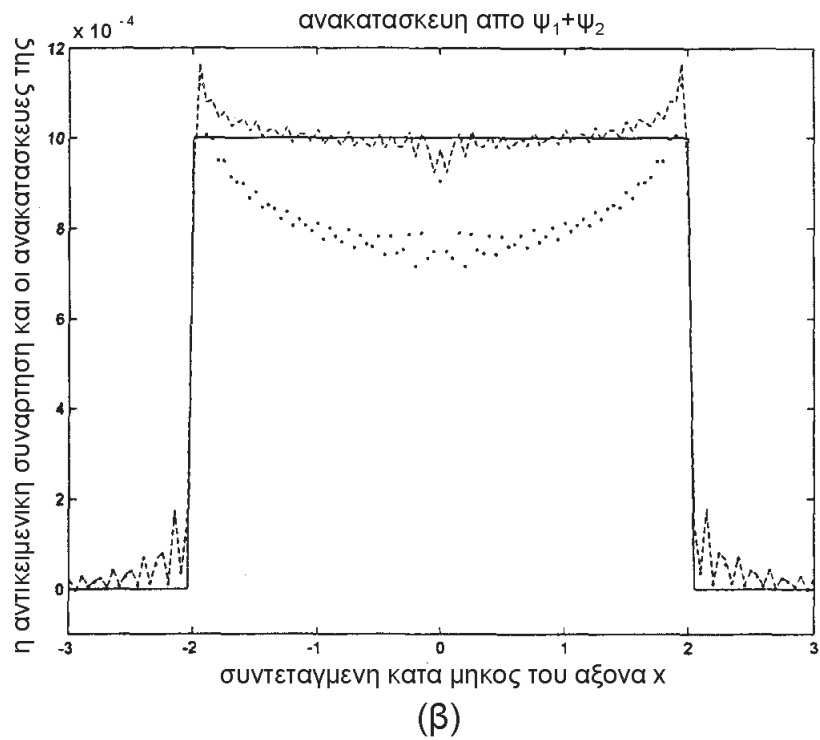
Σχήμα 4.2, από το δεύτερο όρο Born στο Σχήμα 4.3 και από τον τρίτο όρο Born στο Σχήμα 4.4. Από αυτά φαίνεται καθαρά ότι ο ΑΑΔΤ παράγει την ίδια με τον ΑΦΟ ανακατασκευή, όταν οι μετρήσεις αποτελούνται μόνο από την προσέγγιση Born πρώτης τάξης, αλλά υπερτερεί του ΑΦΟ σε αξιοπιστία και απόδοση, όταν οι μετρήσεις αποτελούνται από την προσέγγιση δεύτερης ή τρίτης τάξης.



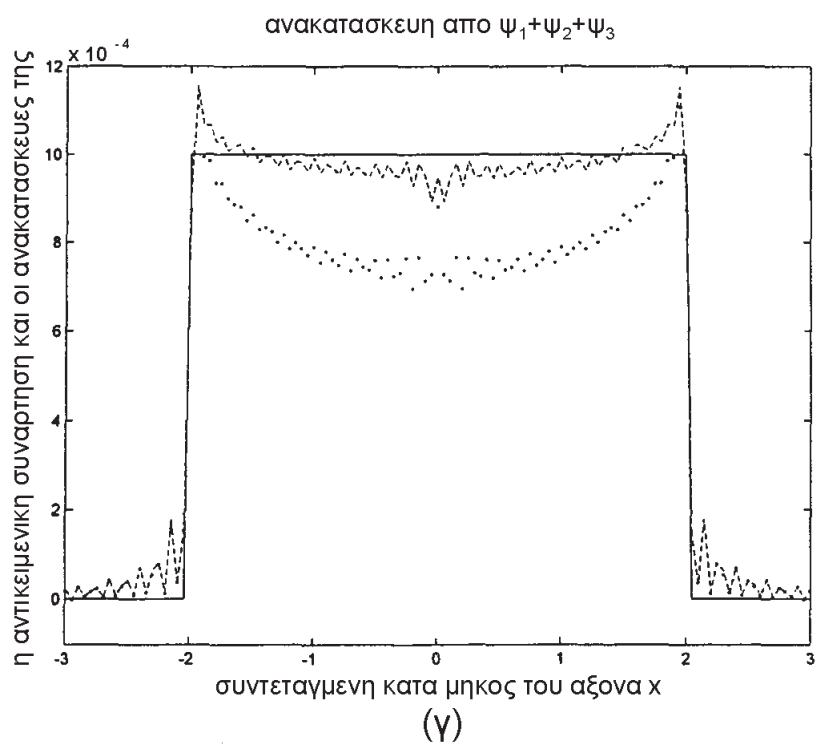
Σχήμα 4.1: Α' Προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born (δ) πρώτη προσέγγιση Born (ε) δεύτερη προσέγγιση Born (στ) τρίτη προσέγγιση Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.



Σχήμα 4.2: Α' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης.



Σχήμα 4.3: Α' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης.



Σχήμα 4.4: Α' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης.

4.6.2 Β' προσομοίωση

Στην προσομοίωση αυτή, ο σκεδαστής αποτελούνταν από έναν κυκλικό πυρήνα και τρεις ομόκεντρες επενδύσεις. Ένα τέτοιο αντικείμενο αποτελεί, ίσως, ένα ρεαλιστικό μοντέλο για κυλινδρικά αντικείμενα, όπως είναι οι οπτικές ίνες, τα μεγάλα μόρια ή οι θαμμένοι σωλήνες.

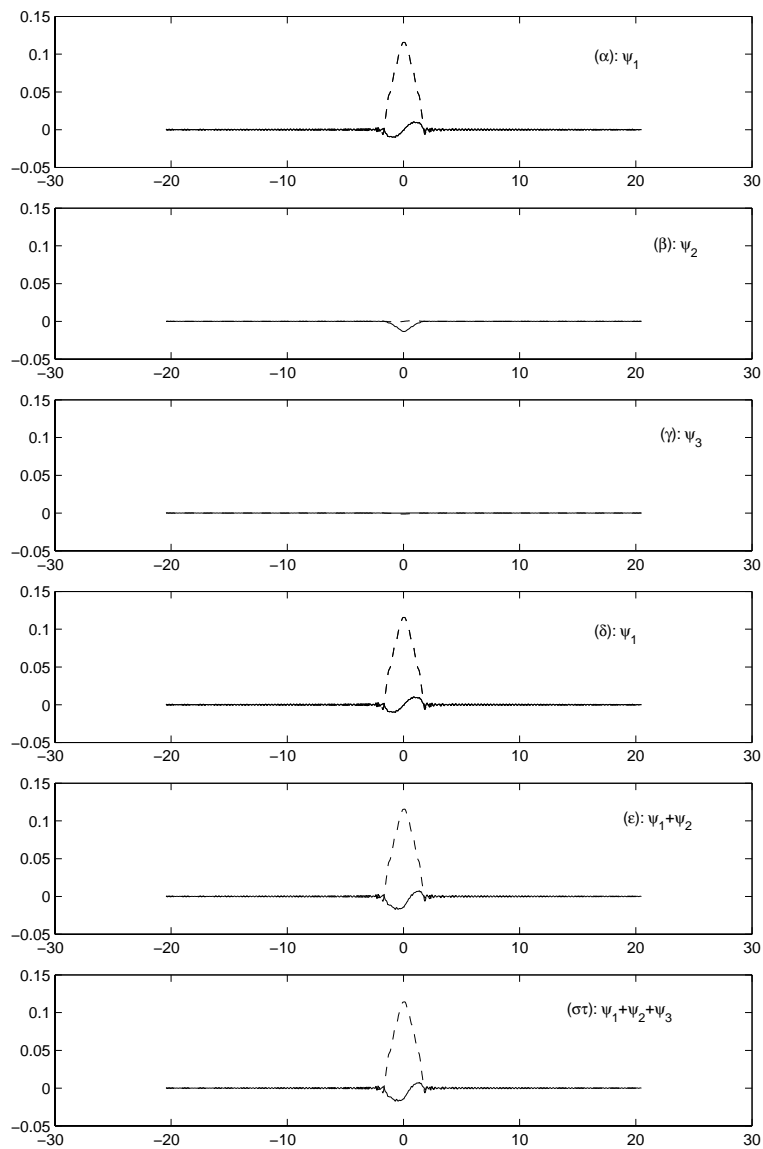
Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση δινόταν από τον ακόλουθο τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 0,0025, & \text{για } |x| \leq 0,25 \\ 0,002, & \text{για } 0,25 \leq |x| \leq 0,6 \\ 0,0015, & \text{για } 0,6 \leq |x| \leq 1,2 \\ 0,001, & \text{για } 1,2 \leq |x| \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (4.35)$$

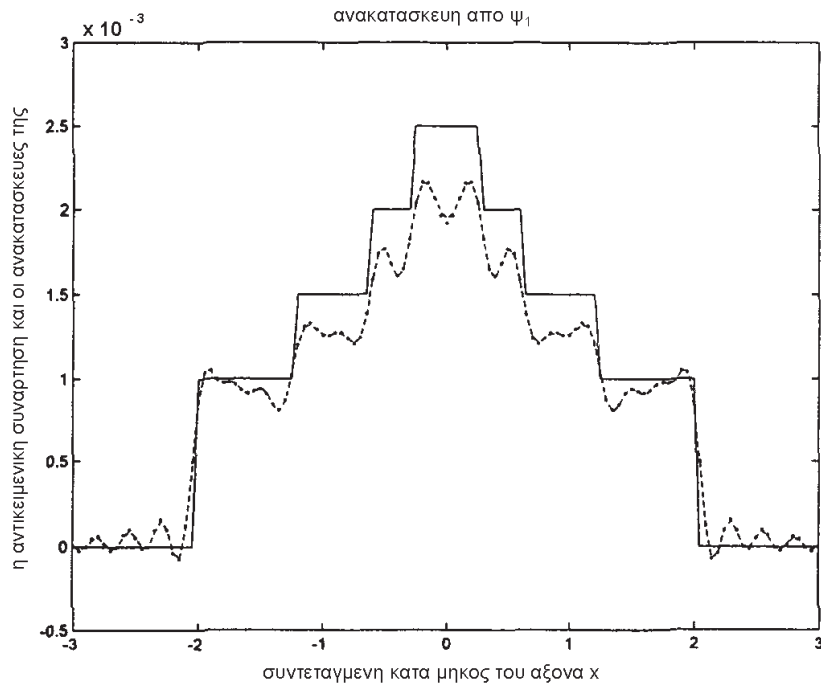
Ο κυματαριθμός ήταν $k = 6\pi$, που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος $\lambda = \frac{1}{3}$ και η απόσταση μέτρησης ήταν $s_0 = 0$. Στο Σχήμα 4.5 απεικονίζονται οι τρεις πρώτοι όροι του Born και οι προσεγγίσεις του αντικειμένου σκέδασης σε αναλογία με το Σχήμα 4.1. Προφανώς, η συνεισφορά του τρίτου όρου του Born είναι αμελητέα σε σχέση με τους δύο πρώτους όρους και έτσι ο τερματισμός της σειράς Born στο δεύτερο όρο της φαίνεται να είναι αποτελεσματικός. Στα Σχήματα (4.6–4.8) παριστάνονται οι ανακατασκευές της αντικειμενικής συνάρτησης που επιστρέφονται από τον ΑΦΟ και τον ΑΑΔΤ σε αντιστοιχία με τα Σχήματα (4.2–4.4). Προφανώς, ο ΑΑΔΤ επιστρέφει

την ίδια ανακατασκευή με τον ΑΦΟ όταν τα δεδομένα αποτελούνται μόνο από τον πρώτο όρο του Born. Πάντως, στις άλλες περιπτώσεις ο ΑΦΟ δεν εμφανίζει με αρκετή ευκρίνεια τον πυρήνα του αντικειμένου, ενώ ο ΑΑΔΤ επιστρέφει μια ακριβέστερη ανακατασκευή και αναδεικνύει τον πυρήνα.

Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαίο να τονιστεί ότι οι κυματισμοί που παρατηρούνται στην ανακατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης σε περιοχές όπου η αρχική αντικειμενική συνάρτηση είναι ομοιογενής οφείλονται στο γεγονός ότι οι αλγόριθμοι ανακατασκευής δρουν ως βαθυπερατά φίλτρα. Έτσι, οι παρατηρούμενοι κυματισμοί είναι φαινόμενα Gibbs, τα οποία μπορούν να εξαλειφθούν μέσω της χρήσης ενός βαθυπερατού φίλτρου εξομάλυνσης. Μια τέτοια προσέγγιση έχει ακολουθηθεί επιτυχώς στο [10] και οι ανακατασκευές που προέκυψαν, αν και είναι πιο ομαλοποιημένες, δεν είναι οι βέλτιστες από την άποψη των ελαχίστων τετραγώνων.

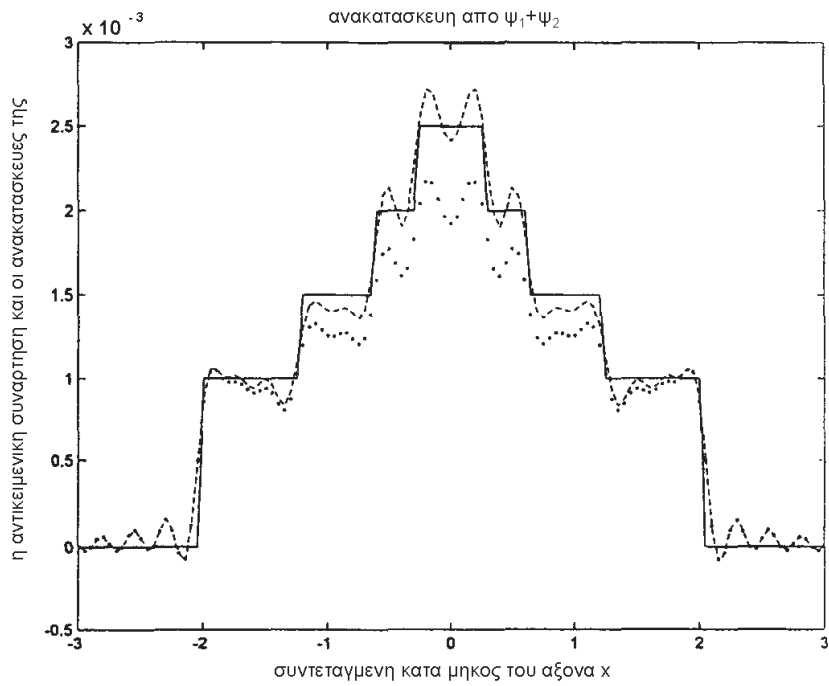


Σχήμα 4.5: B' προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born (δ) πρώτη προσέγγιση Born (ε) δεύτερη προσέγγιση Born (στ) τρίτη προσέγγιση Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.



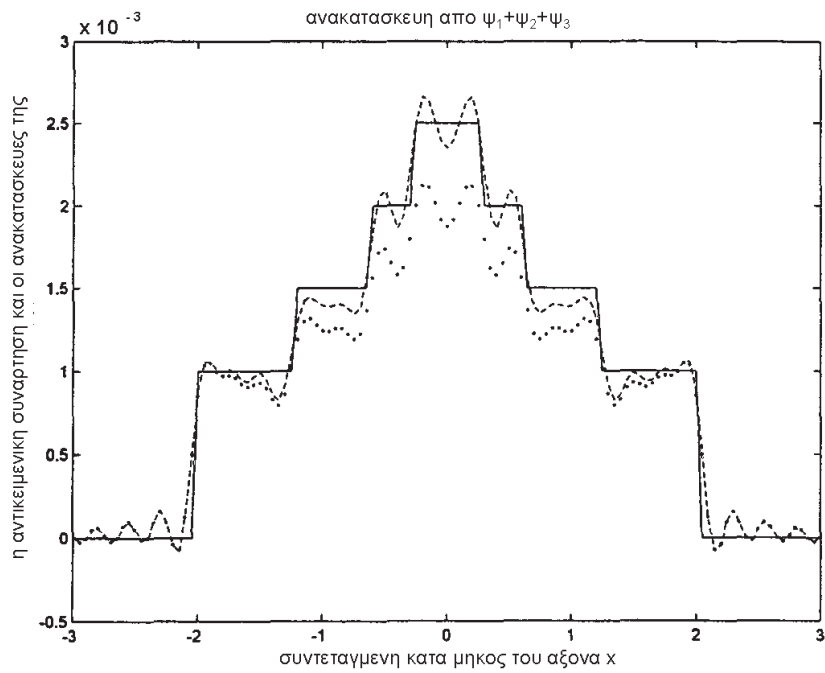
(α)

Σχήμα 4.6: Β' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης.



(β)

Σχήμα 4.7: Β' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης.



(γ)

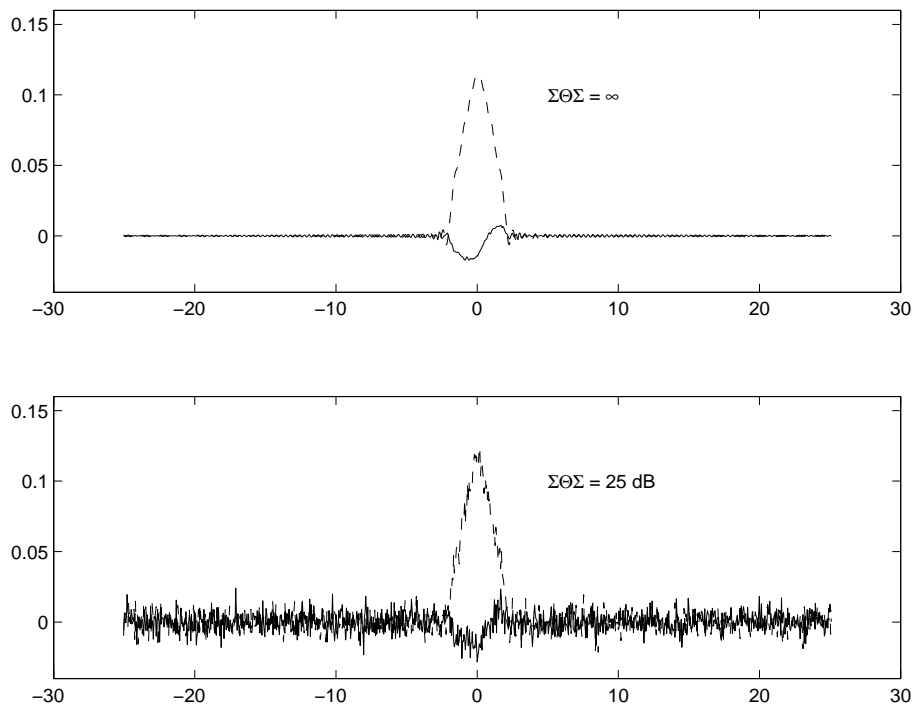
Σχήμα 4.8: Β' προσομοίωση: Ανακατασκευή της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) με τη χρήση του ΑΦΟ (γραμμή διακεκομμένη με τελείες) και του ΑΑΔΤ (γραμμή διακεκομμένη με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η επίδοση των προτεινόμενων αλγορίθμων όταν τα δεδομένα εισόδου περιορίζονται σε γωνιακή κάλυψη και ΣΘΣ. Στο Σχήμα 4.9 παριστάνονται η προσέγγιση Born τρίτης τάξης ($\psi_1 + \psi_2 + \psi_3$) για το σκεδαζόμενο κύμα ψ_s και μια τυπική μέτρηση με θόρυβο.

Ο θόρυβος ήταν μια αθροιστική Γκαουσιανή ανέλιξη λευκού θορύβου με διακύμανση σ^2 . Η επιλογή της διακύμανσης έγινε έτσι, ώστε η ΣΘΣ (που ορίζεται ως $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(s)}(t_0\hat{u}) + s_0\hat{v}|^2 dt_0/\sigma^2$) να είναι 25dB, πιθανώς μια τιμή αρκετά χαμηλή.

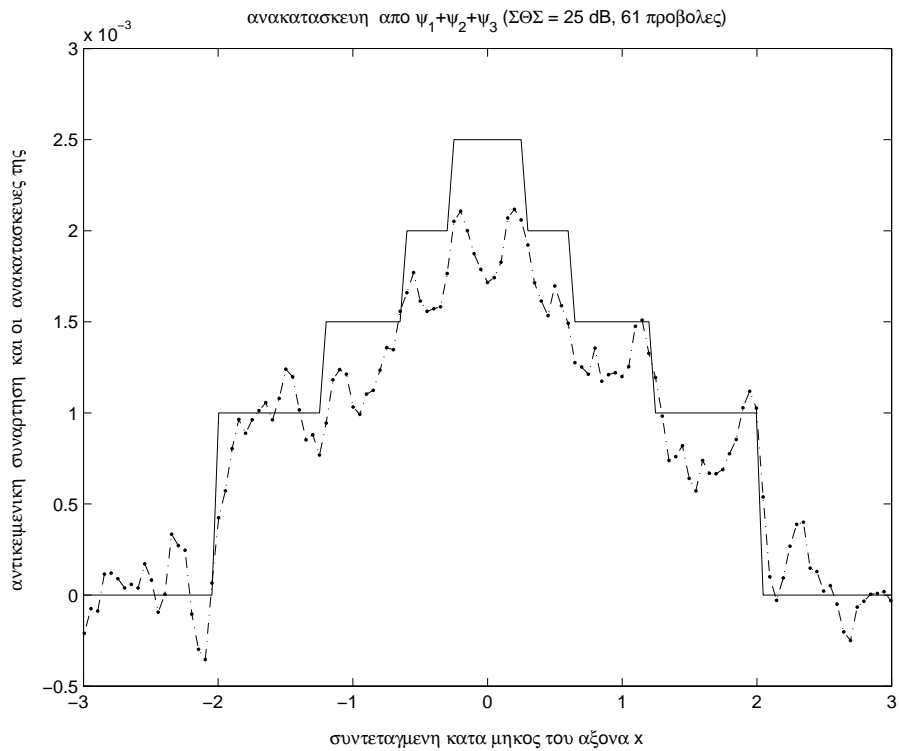
Στα Σχήματα (4.10–4.12) συγκρίνονται η αρχική αντικειμενική συνάρτηση και η ανακατασκευή της που επιστρέφεται από τον ΑΦΟ, μετά από εφαρμογή σε 61, 201 και 361 προβολές. Οι προβολές έχουν μετρηθεί σε ισοκατανεμημένες γωνίες με συνολική κάλυψη 360 μοιρών. Φαίνεται εύκολα ότι οι ανακατασκευές είναι παραπλήσιες με τις ανακατασκευές που έχουν επιτευχθεί από τα άνευ θορύβου δεδομένα με πλήρη γωνιακή κάλυψη (Σχήμα 4.8). Στην πραγματικότητα, η ΣΘΣ έχει βελτιωθεί από την επίδραση του βαθυπερατού φίλτρου στα δεδομένα. Καθώς ο αριθμός των τομογραφικών προβολών αυξάνεται, η ΣΘΣ βελτιώνεται όπως φαίνεται στα Σχήματα (4.10–4.12). Η ευρωστία του ΑΦΟ απέναντι σε θόρυβο και περιορισμένη γωνιακή κάλυψη δεν είναι άγνωστη στη σχετική βιβλιογραφία [10].

Στα Σχήματα (4.13–4.15) συγκρίνονται η αρχική αντικειμενική συνάρτηση και η ανακατασκευή της που επιστρέφεται από τον ΑΑΔΤ, μετά από εφαρμογή σε 61, 201 και 361 προβολές. Οι προ-

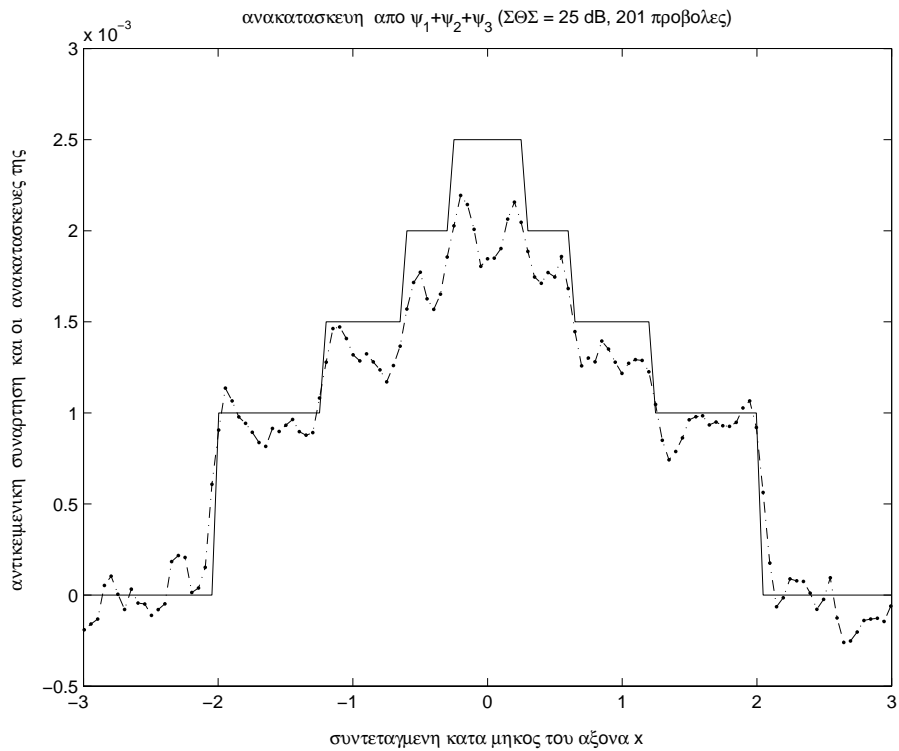


Σχήμα 4.9: B' προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) τρίτης τάξης προσέγγιση Born χωρίς θόρυβο (β) τρίτης τάξης προσέγγιση Born με θόρυβο έτσι ώστε $\Sigma\Theta\Sigma=25\text{dB}$. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.

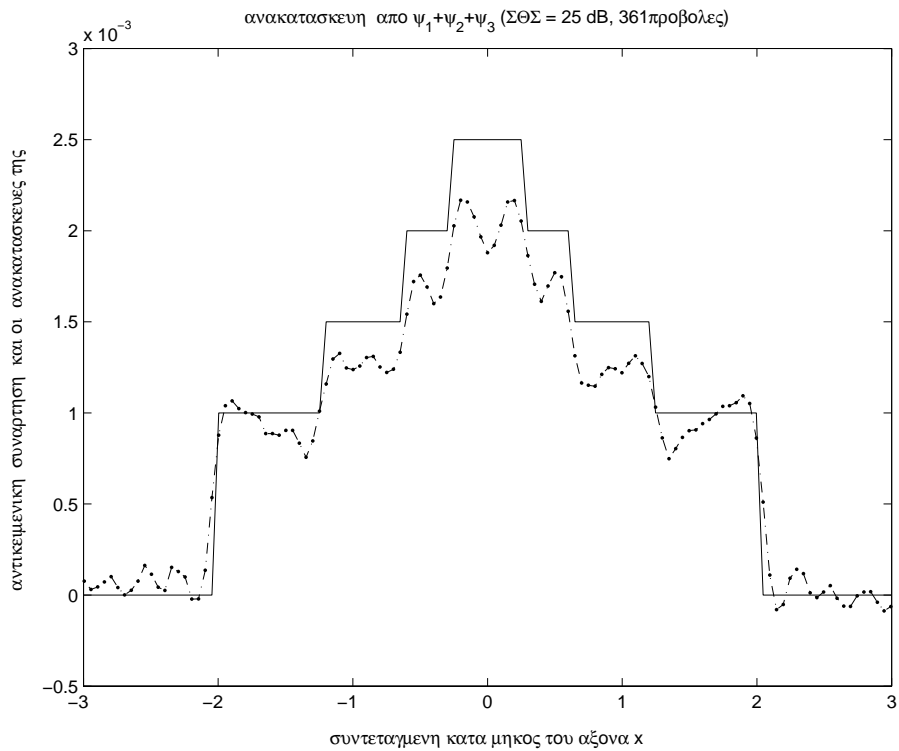
βολές έχουν μετρηθεί σε ισοκατανεμημένες γωνίες με συνολική κάλυψη 360 μοίρες. Εύκολα φαίνεται ότι οι ανακατασκευές είναι παραπλήσιες με τις ανακατασκευές που έχουν επιτευχθεί από τα άνευ θορύβου δεδομένα με πλήρη γωνιακή κάλυψη (Σχήμα 4.8) και ο ΑΑΔΤ υπερτερεί του ΑΦΟ στις αντίστοιχες προσομοιώσεις.



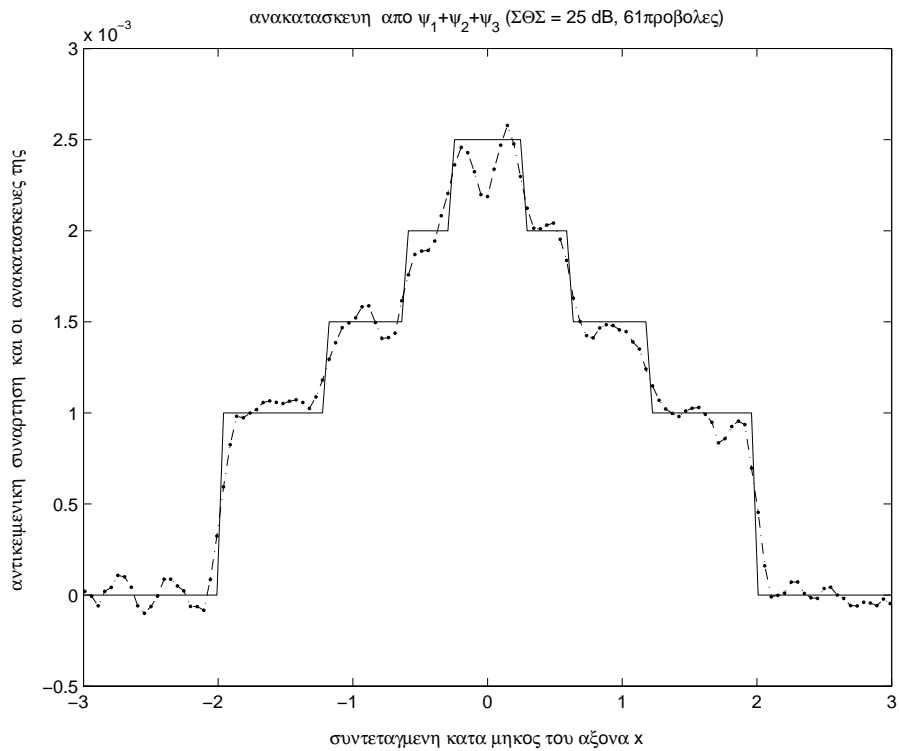
Σχήμα 4.10: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 61 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .



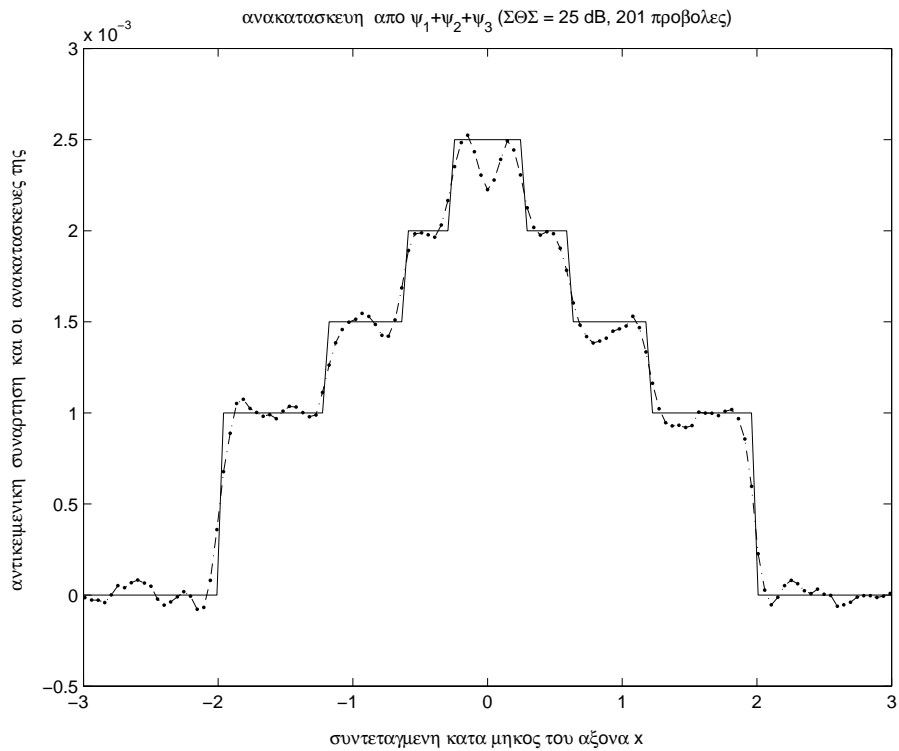
Σχήμα 4.11: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 201 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .



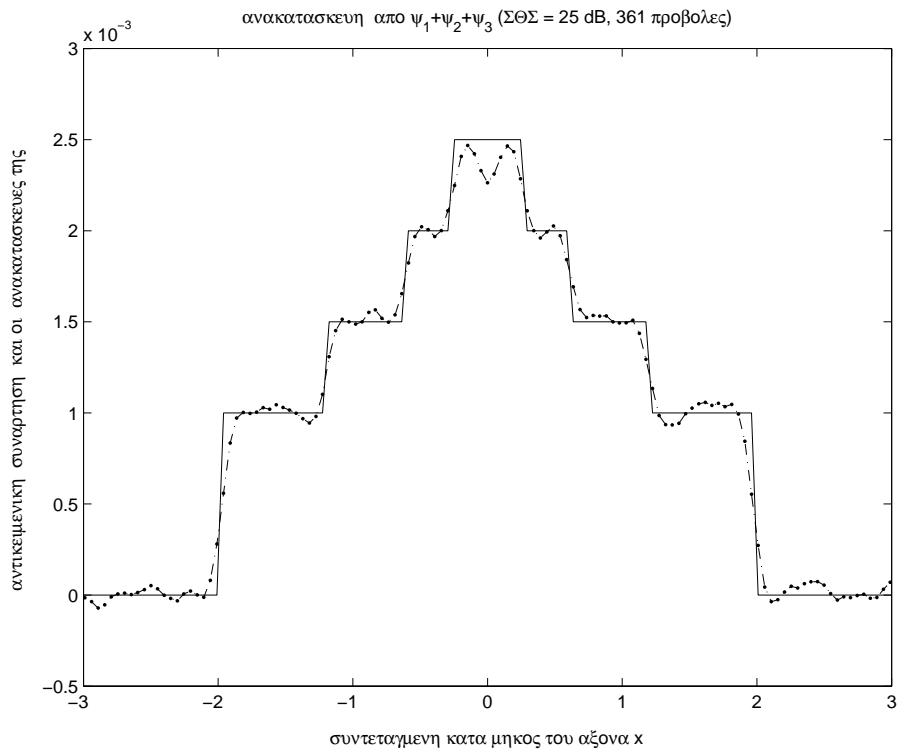
Σχήμα 4.12: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) όταν εφαρμόστηκε σε 361 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .



Σχήμα 4.13: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 61 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .



Σχήμα 4.14: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 201 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .



Σχήμα 4.15: Β' προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της με χρήση του ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) σε 361 προβολές με θόρυβο, μετρημένες σε γωνίες ισοκατανεμημένες στις 360° .

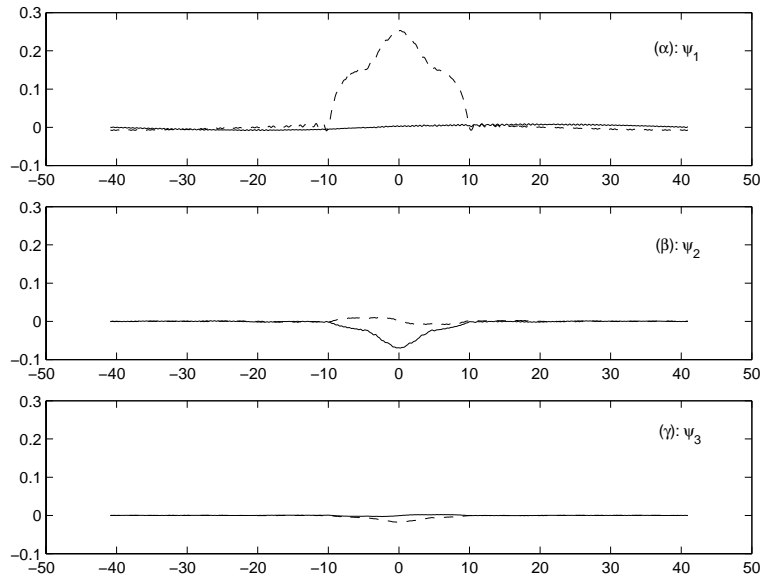
4.6.3 Γ' προσομοίωση

Και στην περίπτωση αυτή, ο σκεδαστής αποτελούνταν από έναν κυκλικό πυρήνα και τρεις ομόκεντρες επενδύσεις. Συγκεκριμένα, η αντικειμενική συνάρτηση δινόταν από τον ακόλουθο τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} 0,0025, & \text{για } |x| \leq 0,75 \\ 0,002, & \text{για } 0,75 \leq |x| \leq 1,8 \\ 0,0015, & \text{για } 1,8 \leq |x| \leq 2,6 \\ 0,001, & \text{για } 2,6 \leq |x| \leq 10 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (4.36)$$

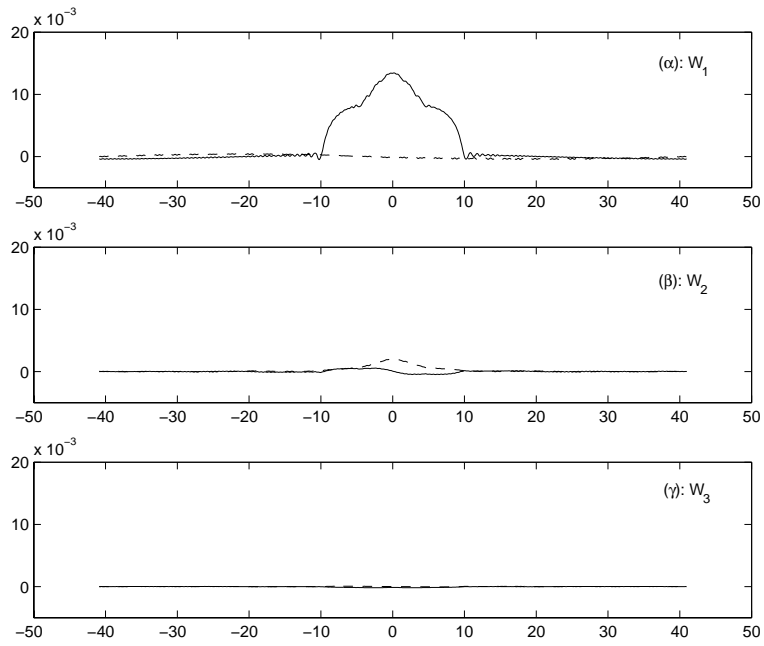
Ο κυματαριθμός ήταν $k = 6\pi$, που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος $\lambda = \frac{1}{3}$ και η απόσταση μέτρησης ήταν $s_0 = 0$. Αυτό ήταν ένα σαφώς μεγάλο αντικείμενο, με διάμετρο εξήντα (60) μήκη κύματος, για το οποίο η σειρά Born συγκλίνει αργά. Ο ρυθμός δειγματοληψίας ήταν 0,04, που αντιστοιχεί σε περίπου οκτώ (8) δείγματα για κάθε μήκος κύματος, δηλαδή περίπου τέσσερις (4) φορές το ρυθμό του Nyquist. Έτσι, η πυκνότητα δειγματοληψίας είναι αρκετά υψηλή ώστε να δώσει καλή αριθμητική προσέγγιση για τα σήματα συνεχούς χώρου και τους αλγόριθμους που μελετήθηκαν. Δυστυχώς, οι ακριβείς λύσεις του σκεδαζομένου κύματος δεν είναι γνωστές στην αναλυτική τους μορφή. Πάντως, αν οι σειρές Born και Rytov συγκλίνουν, το όριο τους θα είναι οι ακριβείς λύσεις. Στο Σχήμα 4.16 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών πρώτων όρων του Born και στο Σχήμα 4.17 αυτές των τριών πρώτων όρων του Rytov. Από αυτές

φαίνεται καθαρά ότι υπάρχει μια γεωμετρική ομοιότητα μεταξύ των όρων του Born και του Rytov.



Σχήμα 4.16: Γ' Προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Born (β) δεύτερος όρος Born (γ) τρίτος όρος Born. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.

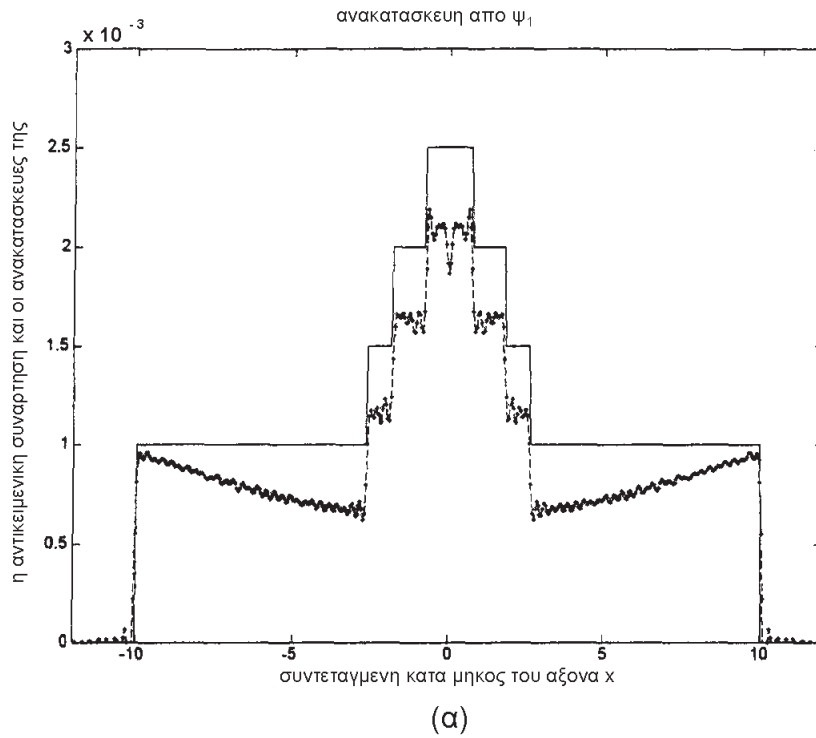
Το μέγεθος του τρίτου όρου του Born είναι περίπου έξι (6) φορές μικρότερο από αυτό του πρώτου, δηλαδή $(\frac{\max|\psi_1|}{\max|\psi_3|} \approx 6)$, ενώ για τους αντίστοιχους όρους του Rytov ισχύει $(\frac{\max|\psi_1|}{\max|\psi_3|} \approx 30)$. Έτσι οι σειρές του Rytov προσφέρουν, για το σκεδαζόμενο κύμα, ακριβέστερο μοντέλο της μιγαδικής φάσης από αυτό των σειρών του Born. Αυτό είναι σύμφωνο και με προηγούμενες έρευνες για το πεδίο εφαρμογής των προσεγγίσεων Born και Rytov.



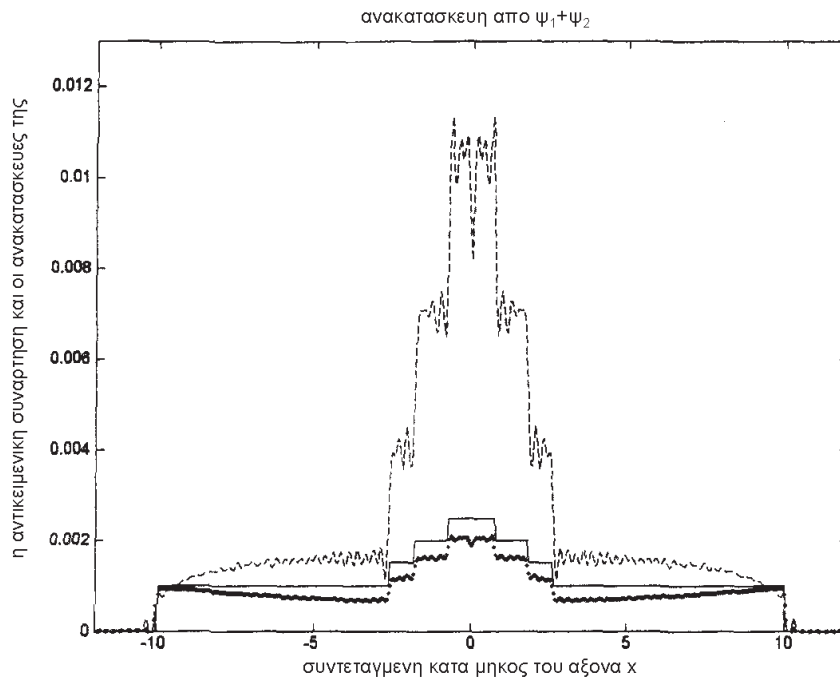
Σχήμα 4.17: Γ' Προσομοίωση: Σκεδαζόμενα κύματα (α) πρώτος όρος Rytov (β) δεύτερος όρος Rytov (γ) τρίτος όρος Rytov. Το πραγματικό (φανταστικό) μέρος των μετρήσεων παριστάνεται με συνεχή (διακεκομμένη) γραμμή.

Στα Σχήματα (4.18-4.20) φαίνονται οι ανακατασκευές της αντικειμενικής συνάρτησης, οι οποίες δημιουργούνται από τον ΑΦΟ και τον ΑΑΔΤ που βασίζεται στις προσεγγίσεις του Born. Είναι φανερό ότι η διαδικασία της αντιστροφής που βασίζεται στις σειρές αυτές αποκλίνει. Στα Σχήματα (4.21-4.23) φαίνονται οι ανακατασκευές της αντικειμενικής συνάρτησης, οι οποίες δημιουργούνται από τον ΑΦΟ και τον ΑΑΔΤ που βασίζεται στις προσεγγίσεις του Rytov.

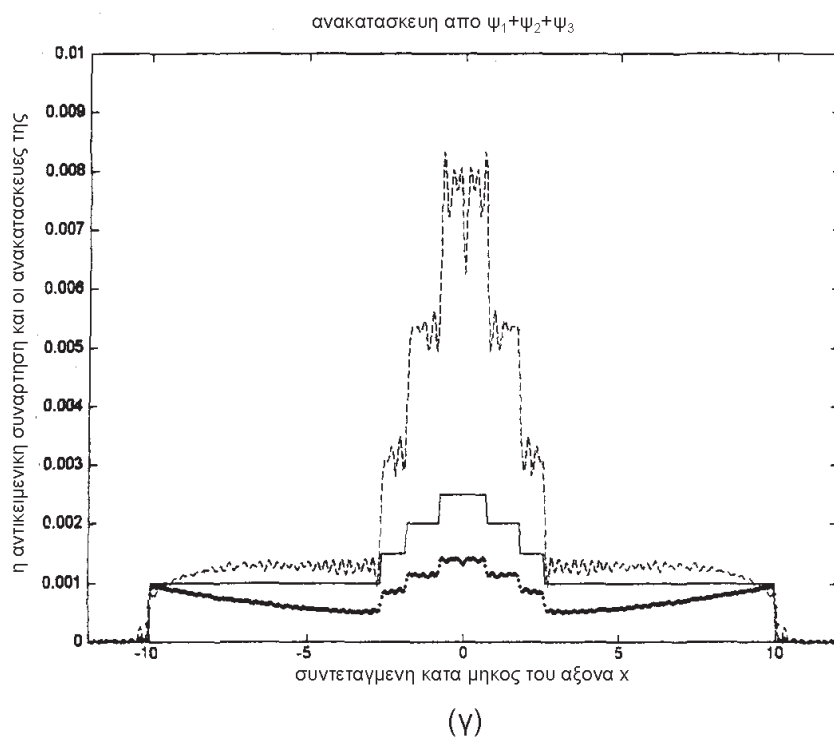
Σχόλια: Είναι φανερό ότι ο ΑΑΔΤ δημιουργεί την ίδια ανακατασκευή με τον ΑΦΟ, στην περίπτωση που τα δεδομένα αποτελούνται μόνο από τον πρώτο όρο του Rytov. Το γεγονός αυτό αναμενόταν και από τη θεωρία. Πάντως, στις άλλες περιπτώσεις ο ΑΦΟ υπολείπεται του ΑΑΔΤ κατά ένα μεγάλο περιθώριο, ειδικά στην περιοχή κοντά στον πυρήνα του αντικειμένου.



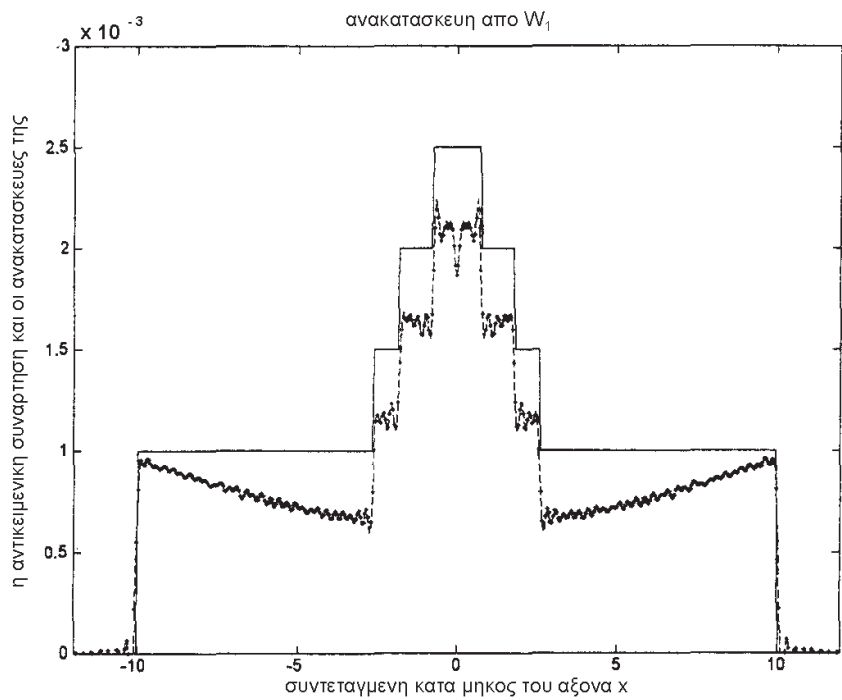
Σχήμα 4.18: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born πρώτης τάξης.



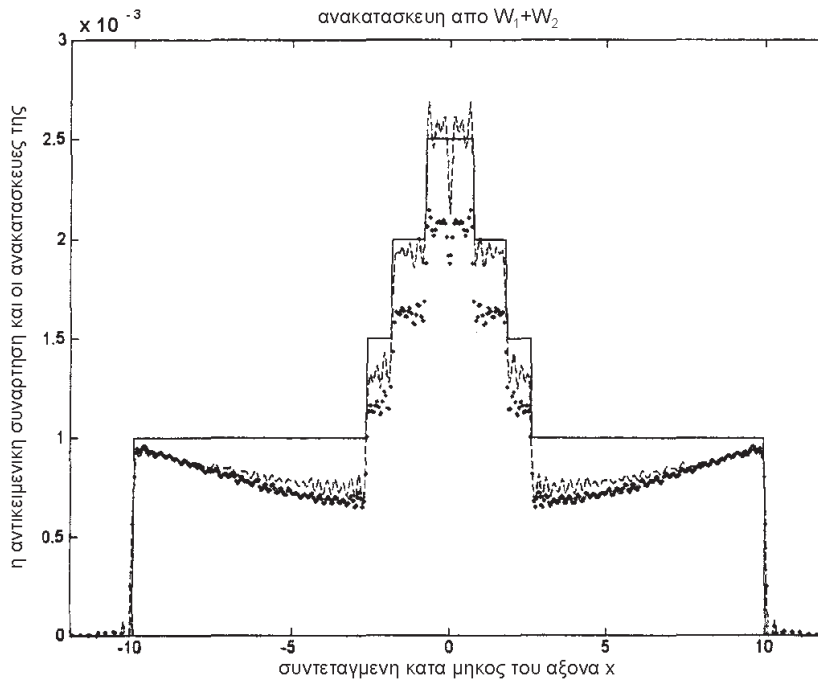
Σχήμα 4.19: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born δεύτερης τάξης.



Σχήμα 4.20: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Born τρίτης τάξης.

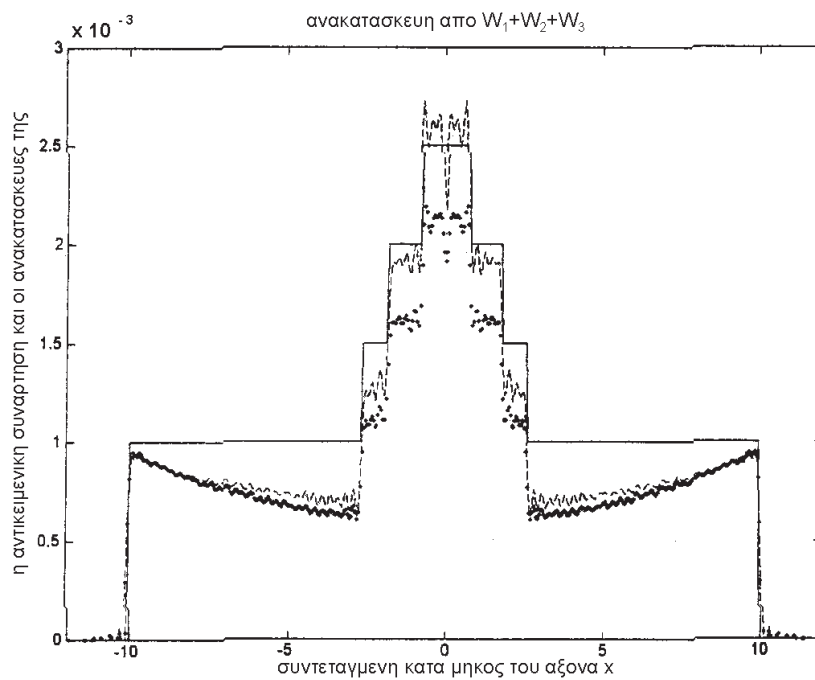


Σχήμα 4.21: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov πρώτης τάξης.



(β)

Σχήμα 4.22: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov δεύτερης τάξης.



(γ)

Σχήμα 4.23: Γ' Προσομοίωση: Γραφική αναπαράσταση της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης (συνεχής γραμμή) και των ανακατασκευών της από τον ΑΦΟ (διακεκομμένη γραμμή με τελείες) και τον ΑΑΔΤ (διακεκομμένη γραμμή με παύλες) από δεδομένα προσέγγισης Rytov τρίτης τάξης.

Κεφάλαιο 5

Στοχαστικά αντίστροφα προβλήματα

5.1 Ένα ευθύ μοντέλο

Έστω ένα πρόβλημα αντίστροφης σκέδασης, στο οποίο η ακριβής, μη γραμμική φυσική σχέση μεταξύ των παρατηρουμένων σκεδαζομένων κυμάτων και της αντικειμενικής συνάρτησης f , αναπαρίσταται ακριβώς από τη γραμμική σχέση που επιτυγχάνεται από τη χρήση των πρώτων προσεγγίσεων Born και Rytov. Το μοντέλο που συνδέει τα δεδομένα και την αντικειμενική συνάρτηση στο πλαίσιο των προσεγγίσεων πρώτης τάξης, λαμβάνει τη μορφή μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm πρώτης τάξης (εξίσωση Lippmann-Schwinger), η οποία μετά από *διακριτοποίηση (discretization)* με τη **Μέθοδο των Ροπών - MTP (Method of Moments)** και με χρήση μιας

βάσης παλμών, παράγει ένα διακριτό μοντέλο της μορφής

$$\underline{y}_i = \underline{T}_i \underline{f} + \underline{n}_i. \quad (5.1)$$

Στην εξίσωση (5.1), \underline{y}_i είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων του σκεδαζομένου κύματος, \underline{T}_i είναι ο πίνακας του τελεστή της MTP που συνδέεται με τον πυρήνα του ολοκληρώματος Fredholm, \underline{f} είναι το διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του αναπτύγματος της αντικειμενικής συνάρτησης και \underline{n}_i αναπαριστά ένα διάνυσμα προσθετικού θορύβου. Το διάνυσμα θορύβου θεωρείται ως ένα ασυσχέτιστο τυχαίο διάνυσμα μηδενικού μέσου, δηλαδή $\underline{n}_i \sim (0, r_i \underline{I})$, όπου \underline{I} είναι ένας μοναδιαίος πίνακας με κατάλληλο μέγεθος.¹ Ορίζεται τώρα το “συνεπτυγμένο” μοντέλο δεδομένων ως

$$\underline{y} = \underline{T} \underline{f} + \underline{n}, \quad (5.2)$$

όπου $\underline{y} = [\underline{y}_1^T \ \underline{y}_2^T \ \dots \ \underline{y}_K^T]^T$, και τα \underline{T} και \underline{n} ορίζονται κατάλληλα. Ο σκοπός του ΑΠΣ είναι ο προσδιορισμός της \underline{f} από τα δεδομένα \underline{y} και το μοντέλο της εξίσωσης (5.2).

5.2 Εξομαλυμμένη αντιστροφή και η πιθανοτική της εξήγηση

Μια συνήθης τεχνική [33] για την επίλυση γραμμικών αντιστρόφων προβλημάτων της μορφής της εξίσωσης (5.2) είναι η επιλογή της

¹Η παράσταση $\underline{x} \sim (\underline{m}, \underline{P})$ δείχνει ότι το τυχαίο διάνυσμα \underline{x} έχει μέσο όρο \underline{m} και πίνακα συνδιακύμανσης \underline{P} .

εκτίμησης της \underline{f} σύμφωνα με

$$\underline{f}_{\text{rec}} = \arg \min_{\underline{f}} \|\underline{y} - \underline{T}\underline{f}\|_{\mathcal{R}^{-1}}^2 + \|\underline{f}\|_{\underline{L}^T \underline{L}}^2, \quad (5.3)$$

όπου $\|\underline{x}\|_{\underline{M}}^2 = \underline{x}^T \underline{M} \underline{x}$. Ο πρώτος όρος της (5.3) ενισχύει την πιστότητα των δεδομένων, αφού ο παράγοντας βάρους \mathcal{R}^{-1} αντανακλά τη σχετική ποιότητα καθενός από τα σύνολα μετρήσεων, ενώ ο δεύτερος όρος μπορεί εναλλακτικά να θεωρηθεί ως ένας όρος εξομάλυνσης ή ως ένα πρότερο στατιστικό μοντέλο για την \underline{f} . Ειδικότερα, όπως αναφέρεται και στο [73], αυτός ο δεύτερος όρος είναι ισοδύναμος με ένα πρότερο μοντέλο² της μορφής

$$\underline{L}\underline{f} = \underline{w}, \quad \underline{w} \sim (0, \underline{I}). \quad (5.4)$$

Έτσι, η φύση της εξομάλυνσης ή η προηγούμενη γνώση καλύπτεται από τη δομή του πίνακα \underline{L} . Κοινές επιλογές γι' αυτόν τον όρο αναφέρονται στις [70, 61, 27, 60]. Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης στην εξίσωση (5.3) εισάγει μια λύση $\underline{f}_{\text{rec}}$, η οποία ικανοποιεί τις *κανονικές εξισώσεις (normal equations)*

$$(\underline{T}^T \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{T} + \underline{L}^T \underline{L}) \underline{f}_{\text{rec}} = \underline{T}^T \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{y}. \quad (5.5)$$

Όπως αναφέρεται στην [73], αυτή η λύση $\underline{f}_{\text{rec}}$ μπορεί να διερμηνευτεί ως η **Γραμμική Εκτίμηση Ελαχίστων Τετραγώνων - ΓΕΕΤ (Linear Least Squares Estimate)** της \underline{f} , όταν δίνονται οι μετρήσεις

²Ας σημειωθεί ότι θεωρείται ένα πρότερο μοντέλο μηδενικού μέσου όρου για την \underline{f} μόνο για απλότητα στην παράσταση. Δεν αυξάνεται η πολυπλοκότητα αν συμπεριληφθεί ένας πρότερος μέσος όρος.

θορύβου στην εξίσωση (5.2) με $\underline{n} \sim (0, \underline{\mathcal{R}})$ και πρότερα στατιστικά στοιχεία για την \underline{f} , που υποδηλώνονται από την (5.4). Συγκεκριμένα, η \underline{f} έχει μηδενική μέση τιμή και την $\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}}$ ως αντίστροφη της συνδιακύμανσής της. Επιπλέον, ο πίνακας συνδιακύμανσης της εκτίμησης λάθους, δηλαδή η συνδιακύμανση της $\underline{f} - \underline{f}_{\text{rec}}$ είναι

$$\mathcal{E}\{(\underline{f} - \underline{f}_{\text{rec}})(\underline{f} - \underline{f}_{\text{rec}})^T\} = (\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{\mathcal{R}}}^{-1} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{L}}^T)^{-1}. \quad (5.6)$$

5.3 Μετασχηματισμός διάδοσης στάσιμων στοχαστικών αντικειμένων

Έστω ένα διδιάστατο αντικείμενο σκέδασης, που διερευνάται με μονοχρωματικά επίπεδα κύματα σε ένα σύνολο από τομογραφικά πειράματα περίθλασης. Ο σκεδαστής χαρακτηρίζεται από μια αντικειμενική συνάρτηση f , η οποία θεωρείται ως υλοποίηση μιας διδιάστατης *στοχαστικής ανέλιξης στάσιμης με την ευρεία έννοια (wide sense stationary random process)*³ και με μηδενική μέση τιμή.⁴

³Ασφαλώς, καμία στοχαστική ανέλιξη ορισμένη σε πεπερασμένο πεδίο ορισμού δεν μπορεί να είναι στάσιμη με κάποια έννοια. Παρ' όλα αυτά, θεωρώντας ότι η περιοχή συσχέτισης της ανέλιξης είναι μικρή σε σχέση με το τυπικό μέγεθος του όγκου σκέδασης και ότι τα σκεδαζόμενα κύματα μετριοούνται μακριά από την περιοχή σκέδασης, δικαιολογείται η υπόθεση της στασιμότητας με την ευρεία έννοια της διαδικασίας της αντικειμενικής συνάρτησης [103].

⁴Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί ότι η διαδικασία f έχει μέση τιμή μηδέν. Μπορεί ακόμα να θεωρηθούν τυχαίες αντικειμενικές συναρτήσεις με γνωστή, χωρικός αμετάβλητη, μη μηδενική μέση τιμή, ως τυχαίες αντικειμενικές συναρτήσεις με μηδενική μέση τιμή, με κατάλληλο μετασχηματισμό σε έναν

Έστω ότι με $\mathcal{R}_f(x)$ συμβολίζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αυτής της ανάλιξης με αντίστοιχο χωρικό φάσμα $\mathcal{S}_f(K)$, όπου K είναι μια διδιάστατη μεταβλητή Fourier, συζυγής της χωρικής μεταβλητής x . Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρεται στην ετεροσυσχέτιση ανάμεσα στην ανάλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης f και στην ανάλιξη του μετασχηματισμού διάδοσης $P_\theta f$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 Η ετεροσυσχέτιση ανάμεσα στην αντικειμενική συνάρτηση f και στο μετασχηματισμό διάδοσης $P_\theta f$ είναι ίση με το μετασχηματισμό διάδοσης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης \mathcal{R}_f της ανάλιξης f , δηλαδή

$$\mathcal{E}\{f(\tau\hat{u} + s\hat{v})\overline{P_\theta f}(\tau_0; s_0)\} = P_\theta \mathcal{R}_f(\tau - \tau_0; s - s_0). \quad (5.7)$$

Απόδειξη: Για λόγους απλότητας εισάγεται ο συμβολισμός $x \equiv \tau\hat{u} + s\hat{v}$. Έτσι, η αντικατάσταση της ταυτότητας του MF και η χρήση του ΘΓΠΤ (3.35) δίνει

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{f(x)\overline{P_\theta f}(\tau_0; s_0)\} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \int_{-k}^k dp e^{i\langle K, x \rangle} e^{-ip\tau_0} \mathcal{E}\{\tilde{f}(K)\overline{P_\theta f}(p; s_0)\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \int_{-k}^k dp e^{i\langle K, x \rangle} e^{-ip\tau_0} \frac{k}{m} e^{-i(m-k)s_0} \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{E}\{\tilde{f}(K)\overline{\tilde{f}}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

“ενεργό” κυματαριθμό k του υποβάθρου [103]. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις γνωστής, χωρικός μεταβαλλόμενη μέση τιμή είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με τη χρήση μιας τεχνικής, που παρουσιάζεται στο [24, σ. 279] και συζητείται στο τέλος της ενότητας αυτής.

Για μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη f με πυκνότητα φάσματος $\mathcal{S}_f(K)$, το θεώρημα Wiener-Khintchin [77] δίνει

$$\mathcal{E}\{\tilde{f}(K)\overline{\tilde{f}[p\hat{u}+(m-k)\hat{v}]}\} = (2\pi)^2\mathcal{S}_f(K)\delta[K-p\hat{u}-(m-k)\hat{v}]. \quad (5.9)$$

Αν η εξίσωση (5.9) αντικατασταθεί πάλι στην εξίσωση (5.8), παράγει

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{f(x)\overline{P_\theta f(\tau_0; s_0)}\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{i\langle p\hat{u}+(m-k)\hat{v}, x \rangle} e^{-ip\tau_0} \frac{k}{m} e^{-i(m-k)s_0} \mathcal{S}_f[p\hat{u}+(m-k)\hat{v}] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip(\tau-\tau_0)} \frac{k}{m} e^{i(m-k)(s-s_0)} \mathcal{S}_f[p\hat{u}+(m-k)\hat{v}]. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (5.10) είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την εξίσωση (5.7), αν στο ΘΓΠΤ (3.35) ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η φασματική πυκνότητα $\mathcal{S}_f(K)$ είναι απλώς ο MF της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $\mathcal{R}_f(x)$ [77].

Η παρουσίαση του επόμενου θεωρήματος 5.2 (Στοχαστικό Θεώρημα Γενικευμένης Προβολής-Τομής) απαιτεί το λήμμα 4.1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 *Ο μετασχηματισμός διάδοσης $P_\theta f$ μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης f δεν υπάρχει με την έννοια των μέσων τετραγώνων, αλλά είναι ένας λευκαντικός μετασχηματισμός (whitening transform) ως προς τη μεταβλητή θ . Το μονοδιάστατο χωρικό φάσμα του μετασχηματισμού διάδοσης (κατάλληλα φιλτραρισμένο) είναι ανάλογο προς ένα ημικύκλιο του διδιάστατου χωρικού φάσματος της ανέλιξης*

της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}\{P_\theta f(\tau_0; s_0) \overline{P'_\theta f(\tau'_0; s'_0)}\} = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip(\tau_0 - \tau'_0)} \frac{k}{m} e^{i(m-k)(s_0 - s'_0)} \frac{\mathcal{S}_f[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]}{\frac{|p|}{4\pi}} \delta(\theta - \theta').
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Απόδειξη: Ο MF και το ΘΓΠΤ (3.35) δίνουν

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}\{P_\theta f(\tau_0; s_0) \overline{P'_\theta f(\tau'_0; s'_0)}\} = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-k}^k dp \int_{-k}^k dp' e^{i(p\tau_0 - p'\tau'_0)} \mathcal{E}\{\widetilde{P_\theta f(p; s_0)} \overline{\widetilde{P'_\theta f(p'; s'_0)}}\} = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-k}^k dp \int_{-k}^k dp' e^{i(p\tau_0 - p'\tau'_0)} \frac{k}{m} \frac{k}{m'} e^{i[(m-k)s_0 - (m'-k)s'_0]} \cdot \\
& \quad \cdot \mathcal{E}\{\tilde{f}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \overline{\tilde{f}[p'\hat{u}' + (m'-k)\hat{v}']}\} = \\
& = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2} \int_{-k}^k dp \int_{-k}^k dp' e^{i(p\tau_0 - p'\tau'_0)} \frac{k}{m} \frac{k}{m'} e^{i[(m-k)s_0 - (m'-k)s'_0]} \cdot \\
& \quad \cdot \mathcal{S}_f[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \delta[p\hat{u} + (m-k)\hat{v} - p'\hat{u}' - (m'-k)\hat{v}'],
\end{aligned} \tag{5.12}$$

όπου και πάλι γίνεται η χρήση Θεωρήματος Wiener-Khintchin [77]. Η έκφραση στο δεύτερο μέρος της εξίσωσης (5.12) μπορεί να λάβει τη μορφή της εξίσωσης (5.11), αν αντικαθισταθεί η σχέση της εξίσωσης (4.2) του Λήμματος 4.1 που αποδείχθηκε προηγουμένως.

Η εξίσωση (5.11) έχει τη μορφή της εξίσωσης (3.35) του ΘΓΠΤ, όπου ο “κατάλληλα φιλτραρισμένος μετασχηματισμός διάδοσης” που απαιτήθηκε στο Θεώρημα 5.2 ορίζεται ως

$$\Pi_\theta f(\tau_0; s_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip\tau_0} \sqrt{\frac{|p|}{4\pi}} \widetilde{P_\theta f(p; s_0)}. \tag{5.13}$$

Ο μετασχηματισμός $\Pi_\theta f$ αντιστοιχεί σε συνελκτικό φιλτράρισμα του μετασχηματισμού διάδοσης $P_\theta f$ με φίλτρο του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\sqrt{\frac{|p|}{4\pi}}$, $|p| \leq k$. Πράγματι, από τις εξισώσεις (5.13) και (5.11) φαίνεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Pi_\theta f(\tau_0; s_0) \overline{\Pi_{\theta'} f(\tau'_0; s'_0)}\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp e^{ip(\tau_0 - \tau'_0)} \frac{k}{m} e^{i(m-k)(s_0 - s'_0)} \mathcal{S}_f[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \delta(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (5.14)$$

η οποία έχει τη μορφή της εξίσωσης (3.35) του ΘΓΠΤ.

Μια άμεση εφαρμογή της εξίσωσης (5.11) ή, ισοδύναμα, της εξίσωσης (5.14) είναι η επίλυση του *στοχαστικού* αντιστρόφου προβλήματος της ΠΤ, στο οποίο ζητείται μια εκτίμηση του διδιάστατου χωρικού φάσματος της διαδικασίας της αντικειμενικής συνάρτησης f από γνώση του μονοδιάστατου χωρικού φάσματος του μετασχηματισμού διάδοσης $P_\theta f$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Αυτή η διατύπωση του αντιστρόφου προβλήματος της ΠΤ βρίσκει άμεση εφαρμογή στα γεωφυσικά και ιατρικά προβλήματα της ΠΤ [32, 38] και η λύση που δίνεται εδώ μπορεί να αποδεί ωφέλιμη. Τα θεωρήματα 5.1 και 5.2 χρησιμοποιούνται στην επόμενη ενότητα, όπου υπολογίζεται το φίλτρο Wiener για το αντίστροφο πρόβλημα της ΠΤ.

5.4 Ανακατασκευή Wiener στην ΠΤ

Έστω ένας σκεδαστής, ο οποίος περιγράφεται από μια αντικειμενική συνάρτηση f_s που ανήκει σε μια στοχαστική ανέλιξη αντικειμενικών

συναρτήσεων. Ο σκεδαστής βρίσκεται τοποθετημένος σε ένα μέσο διάδοσης κυμάτων και περιβάλλεται από μια τυχαία κατανομή άλλων σκεδαστών, που χαρακτηρίζονται συνολικά από μια συνάρτηση f_n . Η συνάρτηση f_n ανήκει σε μια ανέλιξη που θεωρείται στάσιμη με την ευρεία έννοια και με μηδενική μέση τιμή.

Έστω τώρα το σύστημα, που αποτελείται από το σκεδαστή και το μέσο που τον περιβάλλει. Από το σύστημα αυτό συλλέγεται ένα σύνολο τομογραφικών δεδομένων

$$y(\tau_0, \theta) = \alpha(\tau_0, \theta) + \mathcal{N}(\tau_0, \theta) \quad , \quad -\infty < \tau_0 < \infty \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (5.15)$$

όπου

$$\alpha(\tau_0, \theta) = r_\theta(\tau_0) *_{\tau_0} P_\theta f_s(\tau_0; s_0) \quad (5.16)$$

είναι μια “Θολή” έκδοση του μετασχηματισμού διάδοσης του εξεταζομένου σκεδαστή f_s , με το φίλτρο r_θ να συμπεριλαμβάνεται ως μοντέλο της ανέλιξης μέτρησης. Ο όρος \mathcal{N} αναπαριστά μια ανέλιξη θορύβου, η οποία οφείλεται και στο θόρυβο f_n του μέσου και σε ένα αθροιστικό θόρυβο μέτρησης n με μηδενική μέση τιμή. Δηλαδή:

$$\mathcal{N}(\tau_0, \theta) = r_\theta(\tau_0) *_{\tau_0} P_\theta f_n(\tau_0; s_0) + n(\tau_0, \theta). \quad (5.17)$$

Θεωρώντας ότι η ανέλιξη θορύβου n είναι λευκή (ασυσχέτιστη) ως προς τη μεταβλητή θ ισχύει

$$\mathcal{E}\{n(\tau_0, \theta)\bar{n}(\tau'_0, \theta')\} = \mathcal{R}_n(\tau_0 - \tau'_0; \theta)\delta(\theta - \theta'),$$

και εφαρμόζοντας την εξίσωση (5.11) του Στοχαστικού ΘΓΠΤ στην

ανέλιξη Θ ορύβου του υποβάθρου f_n , προκύπτει για τον ολικό Θ ορύβο \mathcal{N} μια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της μορφής

$$\mathcal{E}\{\mathcal{N}(\tau_0, \theta)\overline{\mathcal{N}}(\tau'_0, \theta')\} = \mathcal{R}_{\mathcal{N}}(\tau_0 - \tau'_0; \theta)\delta(\theta - \theta'). \quad (5.18)$$

Αντιστοίχως το φάσμα ισχύος του συνολικού Θ ορύβου είναι της μορφής $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(p; \theta)\delta(\theta - \theta')$. Η εξάρτηση όλων των ανωτέρω ποσοτήτων από την απόσταση μέτρησης s_0 έχει αποσιωπηθεί καθώς η s_0 θεωρείται σταθερή για όλες τις γωνίες παρατήρησης $\theta \in [0, 2\pi)$.

Μπορεί τώρα να διατυπωθεί το πρόβλημα της ανακατασκευής, ως εκείνο που επιτυγχάνει μια εκτίμηση \hat{f}_s της αντικειμενικής συνάρτησης f_s του εξεταζομένου σκεδαστή με γραμμική επεξεργασία των δεδομένων y της εξίσωσης (5.15). Δηλαδή, αναζητείται μια ανακατασκευή της γενικής μορφής

$$f_{s,\text{rec}}(x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0 b(x; \tau_0, \theta)y(\tau_0, \theta), \quad (5.19)$$

όπου το γραμμικό φίλτρο b προσδιορίζεται σύμφωνα με το κριτήριο του ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος

$$\mathcal{E}\{|f_s(x) - f_{s,\text{rec}}(x)|^2\} = \min, \text{ σε κάθε } x. \quad (5.20)$$

Παρ' όλο που η προσοχή περιορίζεται σε μια κλάση *γραμμικών* εκτιμητών της f_s , είναι γνωστό ότι, εάν οι διαδικασίες f_s και \mathcal{N} είναι από κοινού Γκαουσιανές, ο βέλτιστος γραμμικός εκτιμητής Θ α είναι επίσης βέλτιστος σε οποιαδήποτε κλάση (μη γραμμικών) εκτιμητών [77]. Επίσης, σημειώνεται ότι το κριτήριο βελτιστότητας της εξίσωσης (5.20) αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο *σημειακής εκτίμησης*

(point estimation) και είναι ισχυρότερο από τα μοντέλα εκτίμησης διαστήματος (interval estimation) [77].

Στη συνέχεια, το κριτήριο της σχέσης (5.20) ξαναγράφεται στην ισοδύναμη μορφή [77]

$$\mathcal{E}\{[f_s(x) - f_{s,\text{rec}}(x)]\bar{f}_{s,\text{rec}}(x)\} = 0, \text{ για κάθε } x. \quad (5.21)$$

Ανάπτυξη της εξίσωσης (5.21) δίνει

$$\mathcal{E}\{|f_{s,\text{rec}}(x)|^2\} = \mathcal{E}\{f_s(x)\bar{f}_{s,\text{rec}}(x)\}, \text{ για κάθε } x. \quad (5.22)$$

Η αντικατάσταση της έκφρασης της $f_{s,\text{rec}}$ από την εξίσωση (5.19) στην εξίσωση (5.22), οδηγεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm [77]

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0 \bar{b}(x; \tau_0, \theta) \cdot \\ & \quad \cdot \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0' b(x; \tau_0', \theta') \mathcal{R}_y(\tau_0 - \tau_0'; \theta') \delta(\theta - \theta') = \\ & = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0 \bar{b}(x; \tau_0, \theta) \mathcal{R}_{f_s y}(x; \tau_0, \theta), \text{ για κάθε } x, \quad (5.23) \end{aligned}$$

όπου \mathcal{R}_y παριστάνει τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των μετρήσεων y και $\mathcal{R}_{f_s y}$ παριστάνει την ετεροσυσχέτιση μεταξύ της συνάρτησης σκέδασης f_s και των δεδομένων y . Εύκολα, η εξίσωση (5.23) απλοποιείται στην

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0' b(x; \tau_0', \theta) \mathcal{R}_y(\tau_0 - \tau_0'; \theta) = \mathcal{R}_{f_s y}(x; \tau_0, \theta), \quad (5.24)$$

για κάθε x και για όλα τα $\tau_0 \in \mathbb{R}^1$ και $\theta \in [0, 2\pi)$. Μετά την εφαρμογή του MF ως προς τη μεταβλητή τ_0 και στα δύο μέλη της εξίσωσης (5.24), υπολογίζεται η βέλτιστη λύση του γραμμικού φίλτρου

στη μορφή

$$\tilde{b}(x; p, \theta) = \frac{\mathcal{S}_{f_s y}(x; p, \theta)}{\mathcal{S}_y(p; \theta)}. \quad (5.25)$$

Στην εξίσωση (5.25), $\mathcal{S}_{f_s y}$, \mathcal{S}_y είναι οι MF των $\mathcal{R}_{f_s y}$, \mathcal{R}_y αντιστοίχως. Σημειωτέον ότι, λόγω του προσθετικού θορύβου μέτρησης στα δεδομένα y , το φάσμα $\mathcal{S}_y(p; \theta)$ δεν θα μηδενίζεται σε καμία επιθυμητή συχνότητα p .

Τα φάσματα $\mathcal{S}_{f_s y}$ και \mathcal{S}_y υπολογίζονται εύκολα ως

$$\mathcal{S}_{f_s y}(x; p, \theta) = \overline{\tilde{r}_\theta(p)} \mathcal{S}_{f_s P_\theta f_s}(x; p) \quad (5.26)$$

και

$$\mathcal{S}_y(p; \theta) = |\tilde{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_N(p; \theta). \quad (5.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.10) και (5.11), οι εξισώσεις (5.26-5.27) γράφονται με τη μορφή

$$\mathcal{S}_{f_s y}(x; p, \theta) = \overline{\tilde{r}_\theta(p)} \frac{k}{m} e^{i(m-k)(s-s_0)} \mathcal{S}_{f_s}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \quad (5.28)$$

και

$$\mathcal{S}_y(p; \theta) = |\tilde{r}_\theta(p)|^2 \frac{k}{m} \frac{\mathcal{S}_{f_s}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]}{\frac{|p|}{4\pi}} + \mathcal{S}_N(p; \theta), \quad (5.29)$$

με $s = \langle x, \hat{v} \rangle$. Η αντικατάσταση των εξισώσεων (5.28-5.29) στις εξισώσεις (5.25) δίνει για το βέλτιστο φίλτρο

$$\tilde{b}(x; p, \theta) = \frac{\overline{\tilde{r}_\theta(p)} \frac{k}{m} \mathcal{S}_{f_s}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] e^{i(m-k)(s-s_0)}}{|\tilde{r}_\theta(p)|^2 \frac{k}{m} \frac{\mathcal{S}_{f_s}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}]}{\frac{|p|}{4\pi}} + \mathcal{S}_N(p; \theta)} \quad (5.30)$$

ή, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.11),

$$\tilde{b}(x; p, \theta) = \frac{|p| \overline{\tilde{r}_\theta(p)} \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p)}{4\pi |\tilde{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_N(p; \theta)} e^{i(m-k)(s-s_0)}. \quad (5.31)$$

Τρεις διαδοχικές πράξεις φιλτραρίσματος μπορούν να εντοπιστούν μέσα στην έκφραση του b στην εξίσωση (5.31) (και να συγκριθούν με τις αντίστοιχες πράξεις που ορίζονται στην εξίσωση (4.5)), δηλαδή

1. το συνηθισμένο φίλτρο “ρο” της ΠΤ με συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{|p|}{4\pi}, |p| \leq k,$$

2. ένα μονοδιάστατο φίλτρο Wiener

$$\frac{\bar{r}_\theta(p) \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p)}{|\bar{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_N(p; \theta)},$$

το οποίο υπολογίζει βέλτιστα το μετασχηματισμό διάδοσης $P_\theta f_s$ του υπό διερεύνηση σκεδαστή f_s από τις μετρήσεις με θόρυβο y , και

3. η συνήθης λειτουργία οπισθοδιάδοσης, η οποία αντιστοιχεί στον πυρήνα $e^{i(m-k)(s-s_0)}$. Έτσι, αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα [50].

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3 (Το φίλτρο Wiener για την ΠΤ)

Η βέλτιστη κατά Wiener εκτίμηση $f_{s,\text{rec}}$ μιας στάσιμης με την ευρεία έννοια στοχαστικής ανέλιξης f_s από παρατηρήσεις με θόρυβο του μετασχηματισμού της διάδοσης $P_\theta f_s$ επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός ΑΦΟ

$$f_{s,\text{rec}}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp e^{ip\tau} |p| \frac{\bar{r}_\theta(p) \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p)}{|\bar{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_N(p; \theta)}$$

$$e^{i(m-k)(s-s_0)} \tilde{y}(p, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta B_\theta(h_\theta *_{\tau_0} y_\theta)(x), \quad (5.32)$$

όπου $x = \tau\hat{u} + s\hat{v}$, B_θ ο συνήθης τελεστής οπισθοδιάδοσης της ΠΤ και h_θ είναι το τροποποιημένο φίλτρο

$$\tilde{h}_\theta(p) = \frac{|p|}{4\pi} \frac{\overline{\tilde{r}_\theta(p)} \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p)}{|\tilde{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_\mathcal{N}(p; \theta)}. \quad (5.33)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια άμεση γενίκευση παρόμοιων αποτελεσμάτων, τα οποία επιτυγχάνονται στο πλαίσιο της συνήθους Υπολογιστικής Τομογραφίας και της Θεωρία του μετασχηματισμού Radon [25] και συγκλίνει σ' εκείνα στο όριο μικρού μήκους κύματος ($\lambda \rightarrow 0$ και $k \rightarrow \infty$).

Η εκτίμηση $f_{s,\text{rec}}$ έχει μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\mathcal{E}\{|f_s - f_{s,\text{rec}}|^2\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \int dK \mathcal{S}_{f_s}(K) - 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k}^k dp \tilde{h}_\theta(p) \frac{k}{m} \mathcal{S}_{f_s}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \right\}, \quad (5.34)$$

το οποίο δεν εξαρτάται από το σημείο x στο χώρο του αντικειμένου στον οποίο συγκρίνονται η αντικειμενική συνάρτηση f_s και η ανακατασκευή της $f_{s,\text{rec}}$. Αυτό είναι αναμενόμενο από την υπόθεση της στασιμότητας της ανέλιξης των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Στην περίπτωση που η ανέλιξη των αντικειμενικών συναρτήσεων f_s έχει ένα χωρικός μεταβαλλόμενο μέσο, χρειάζεται να γίνει μια τροποποίηση της Θεωρίας. Ειδικότερα, η μονοδιάστατη βέλτιστη διαδικασία φιλτραρίσματος για την εκτίμηση του μετασχηματισμού διάδοσης $P_\theta f_s$ της υπό διερεύνηση αντικειμενικής συνάρτησης f_s από τις τομογραφικές μετρήσεις y_θ λαμβάνει τη μορφή [24][σ.279]

$$\widehat{P_\theta f_s} = \mathcal{E}\{P_\theta f_s\} + w_\theta *_{\tau_0} [y_\theta - \mathcal{E}\{y_\theta\}], \quad (5.35)$$

όπου $\mathcal{E}\{P_\theta f_s\}$ είναι ο μέσος μετασχηματισμός διάδοσης της ανάλυσης των αντικειμενικών συναρτήσεων f_s . Το μοντέλο δεδομένων των εξισώσεων (5.15)-(5.17) δίνει

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{y_\theta\} &= r_\theta *_{\tau_0} \mathcal{E}\{P_\theta f_s\} + \mathcal{E}\{\mathcal{N}_\theta\} \\ &= r_\theta *_{\tau_0} \mathcal{E}\{P_\theta f_s\},\end{aligned}\quad (5.36)$$

όπου το φίλτρο w_θ είναι το συνηθισμένο μονοδιάστατο φίλτρο του Wiener

$$\tilde{w}_\theta(p) = \frac{\bar{r}_\theta(p) \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p)}{|\bar{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_\mathcal{N}(p; \theta)}.\quad (5.37)$$

Η αντικατάσταση των εξισώσεων (5.36) και (5.37) στην εξίσωση (5.35) δίνει

$$\widehat{P_\theta f_s} = (\mathcal{I} - w_\theta *_{t_0} r_\theta) *_{t_0} \mathcal{E}\{P_\theta f_s\} + w_\theta *_{t_0} y_\theta,\quad (5.38)$$

όπου \mathcal{I} είναι ένα μοναδιαίο φίλτρο. Η εξίσωση (5.38) εύκολα μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\widehat{P_\theta f_s} = w_\theta *_{t_0} y_\theta + m_\theta *_{t_0} \mathcal{E}\{P_\theta f_s\},\quad (5.39)$$

όπου

$$\tilde{m}_\theta(p) = \frac{\mathcal{S}_\mathcal{N}(p; \theta)}{|\bar{r}_\theta(p)|^2 \mathcal{S}_{P_\theta f_s}(p) + \mathcal{S}_\mathcal{N}(p; \theta)}.\quad (5.40)$$

Κεφάλαιο 6

Αντιστροφή δεδομένων περιορισμένης γωνιακής κάλυψης

6.1 Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι απεικόνισης της ΠΤ, που αναφέρονται στα προηγούμενα Κεφάλαια 4 και 5, είναι *μη επαναληπτικοί (non-iterative)*: ουσιαστικά, προσπαθούν να αντιστρέψουν την απεικόνιση από την αντικειμενική συνάρτηση στα δεδομένα του σκεδαζομένου κύματος σε ένα και μοναδικό βήμα. Ωστόσο, υπάρχουν *επαναληπτικές (iterative)* μέθοδοι, οι οποίες ξεκινούν με μια αρχική εκτίμηση του υπό ανακατασκευή αντικειμένου και κατόπιν βελτιώνουν αυτή την αρχική εκτίμηση μέσα από μια ακολουθία εκτιμήσεων. Αυτή η

ακολουθία πιθανόν να συγκλίνει σε μια βέλτιστη ανακατασκευή μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων.

Στη συμβατική Υπολογιστική Τομογραφία, οι αντίστοιχες επαναληπτικές μέθοδοι χωρίζονται σε δύο γενικές κατηγορίες:

1. τις **Αλγεβρικές Τεχνικές Ανακατασκευής - ΑΤΑ** (*algebraic reconstruction techniques*) και
2. τις **Ταυτόχρονες Επαναληπτικές Τεχνικές Ανακατασκευής - ΤΕΤΑ** (*simultaneous iterative reconstruction techniques*).

Χρονικώς, οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι της Υπολογιστικής Τομογραφίας αναπτύχθηκαν πριν από τους μη επαναληπτικούς. Συγκεκριμένα, οι ΑΤΑ χρησιμοποιήθηκαν στους πρώτους εμπορικούς σαρωτές που δημιουργήθηκαν από τον Hounsfield [56]. Στη σημερινή εποχή, ωστόσο, μη επαναληπτικοί αλγόριθμοι αντιστροφής, (κατά βάση, παραλλαγές του *αλγορίθμου φιλτραρισμένης αντιστροφής προβολής (filtered backprojection algorithm)*), χρησιμοποιούνται ευρέως στους εμπορικούς ιατρικούς τομογράφους, γιατί προσφέρουν υψηλή ταχύτητα εκτέλεσης και υψηλή ποιότητα στις ανακατασκευές όταν διατίθεται μεγάλος αριθμός γωνιών παρατήρησης (δηλαδή πολλές τομογραφικές λήψεις).

Το ΘΓΠΤ της ΠΤ έχει καταστεί ο ακρογωνιαίος λίθος για την ανάπτυξη αλγορίθμων ανακατασκευής της μορφής του ΑΦΟ [13] και μιας μορφής ανάλογης των αλγορίθμων ΤΕΤΑ της Υπολογιστικής Τομογραφίας [66, 65]. Στην επόμενη ενότητα συνοψίζεται η ανάπτυξη των επαναληπτικών αλγορίθμων της μορφής ΑΤΑ για την

ΠΤ, διατυπωμένη στο πλαίσιο των προσεγγίσεων Born και Rytov. Αυτή η μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στα λεγόμενα **Προβλήματα Περιορισμένης Γωνιακής Κάλυψης - ΠΠΓΚ** (*Limited-View Problems*), τα οποία προκύπτουν σε ορισμένες εφαρμογές της ΠΤ. Στην επίλυση των προβλημάτων αυτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν και μη επαναληπτικοί αλγόριθμοι, όπως ο ΑΦΟ. Όμως, σε περίπτωση μικρού αριθμού γωνιών διερεύνησης δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός των φίλτρων που απαιτούνται στον ΑΦΟ. Η χρήση του συνηθισμένου φίλτρου “ρσ” στα ΠΠΓΚ είναι κατάλληλη μόνο όταν ο αριθμός γωνιών διερεύνησης είναι μεγάλος γιατί, όταν είναι μικρός οδηγεί σε σοβαρά *τεχνουργήματα* (*artifacts*) ανακατασκευής. Η δομή των ΑΤΑ της ΠΤ είναι μια γενίκευση των ΑΤΑ της Υπολογιστικής Τομογραφίας και προκύπτει μέσα από μια αυστηρή μαθηματική διαδικασία. Η μαθηματική θεμελίωση των ΑΤΑ προέρχεται από τη μέθοδο Kaczmarz, η οποία εξετάζεται στην επόμενη ενότητα.

6.1.1 Μέθοδος Kaczmarz

Κατ’ αρχήν, ο Kaczmarz [92] έθεσε το επόμενο πρόβλημα και πρότεινε τη λύση που ακολουθεί:¹

¹Η γενίκευση για τελεστές σε χώρους Hilbert άπειρης διάστασης και η απόδειξη για τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων προβολής οφείλονται στον Halperin [59]. Μια παρόμοια τεχνική για χώρους Hilbert πεπερασμένης διάστασης προτάθηκε από τον Young [37] και είναι γνωστή ως μέθοδος *επαναληπτικής υπερχαλάρωσης* (*successive over-relaxation*). Μια άριστη πραγματεία για την

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Έστω χώροι Hilbert \mathcal{H} , \mathcal{H}_n , $n = 1, 2, \dots, N$, και ένα σύνολο γραμμικών και συνεχών τελεστών $A_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n$, οι οποίοι αντιστοιχίζουν τα διανύσματα $\psi \in \mathcal{H}$ στα διανύσματα $\alpha_n \in \mathcal{H}_n$, δηλαδή $A_n \psi = \alpha_n$. Θεωρώντας ότι τα δεδομένα σχηματίζουν ένα σύνολο $\{\alpha_n : n = 1, 2, \dots, N\}$, να βρεθεί ένα διάνυσμα (λύση) $\psi \in \mathcal{H}$, το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$A_n \psi = \alpha_n \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1)$$

ΛΥΣΗ: Με \mathcal{N}_n συμβολίζονται οι μηδενικοί χώροι των τελεστών A_n , δηλαδή $\mathcal{N}_n = \{\psi \in \mathcal{H} : A_n \psi = 0\}$. Θεωρώντας ότι το σύνολο των εξισώσεων (6.1) επιδέχεται τουλάχιστον μια λύση ψ , έστω $\mathcal{P}_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ο τελεστής προβολής μέσα στο σύνολο

$$K_n = \{x : x = \psi + z, z \in \mathcal{N}_n\}.$$

Επίσης, έστω \mathcal{P} ο σύνθετος τελεστής

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_N \dots \mathcal{P}_1. \quad (6.2)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων (6.1) είναι το όριο μιας ακολουθίας

$$\psi^{(j+1)} = \mathcal{P} \psi^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.3)$$

με $\psi^{(0)} \in \mathcal{H}$ αυθαίρετο. \square

Για μια αρχική εκτίμηση $\psi^{(0)}$ η οποία ανήκει στο άμεσο άθροισμα (*direct sum*) των τελεστών A_n^\dagger , για παράδειγμα $\psi^{(0)} = 0$, και για εφαρμογή των μεθόδων αυτών στα προβλήματα ανακατασκευής της Υπολογιστικής Τομογραφίας μπορεί να βρεί κάποιος στο [44].

το σύστημα εξισώσεων (6.1) το οποίο επιδέχεται μόνο μια λύση, η ακολουθία στην εξίσωση (6.3) συγκλίνει σε ένα διάνυσμα $\psi^{(\infty)} \in \mathcal{H}$, το οποίο επιλύει το σύστημα, δηλαδή $A_n \psi^{(\infty)} = \alpha_n, n = 1, 2, \dots, N$. Αν το σύστημα επιδέχεται περισσότερες από μία λύσεις, τότε $\psi^{(\infty)}$ είναι η λύση με ελάχιστη νόρμα. Αυτό συνεπάγεται ότι το $\psi^{(\infty)}$ είναι ορθογώνιο στο χώρο $\bigcap_{n=1}^N \mathcal{N}_n$. Ωστόσο, θα πρέπει να τονιστεί ότι όταν το σύστημα (6.1) δεν έχει λύση, η μέθοδος Kaczmarz, γενικά, δεν συγκλίνει σε μια λύση ελαχίστων τετραγώνων. Δηλαδή, η μέθοδος Kaczmarz είναι αυστηρά εφαρμόσιμη μόνο στις περιπτώσεις όπου το σύστημα των εξισώσεων (6.1) είναι υπο-προσδιορισμένο (*under-determined*) και η επανάληψη του Kaczmarz συγκλίνει στη λύση με τη μικρότερη νόρμα στην περίπτωση όπου το σύστημα έχει περισσότερες από μία λύσεις.

Για την εφαρμογή των επαναλήψεων στην εξίσωση (6.3), πρέπει να εκφραστεί ο \mathcal{P}_n ως συνάρτηση του A_n και του συζυγούς (*adjoint*) τελεστή του A_n^\dagger . Έστω ένα διάνυσμα $\psi \in \mathcal{H}$. Καθώς ο \mathcal{P}_n είναι ο τελεστής προβολής στο σύνολο K_n , το διάνυσμα $\mathcal{P}_n \psi - \psi$ είναι ορθογώνιο στο μηδενικό χώρο \mathcal{N}_n . Επομένως, υπάρχει ένα διάνυσμα $u_n \in \mathcal{H}_n$, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathcal{P}_n \psi = \psi + A_n^\dagger u_n. \quad (6.4)$$

Αλλά $A_n \mathcal{P}_n \psi = \alpha_n$ από τον ορισμό του τελεστή προβολής. Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (6.4) από αριστερά με A_n και αναδιατάσσοντας τους όρους, προκύπτει για το διάνυσμα u_n η

ακόλουθη έκφραση

$$u_n = (A_n A_n^\dagger)^{-1}(\alpha_n - A_n \psi). \quad (6.5)$$

Ο τελεστής $A_n A_n^\dagger$ έχει έναν αντίστροφο, καθώς A_n θεωρείται ότι είναι ένας τελεστής “επί”. Επομένως, ο σύνθετος τελεστής $A_n A_n^\dagger$ και ο συζυγής του είναι “ένα προς ένα” και “επί”. Αντικαθιστώντας την έκφραση του u_n στην εξίσωση (6.4), προκύπτει μια έκφραση για την επίδραση του τελεστή \mathcal{P}_n στα διανύσματα του \mathcal{H}

$$\mathcal{P}_n \psi = \psi + A_n^\dagger (A_n A_n^\dagger)^{-1}(\alpha_n - A_n \psi). \quad (6.6)$$

Συμπεραίνεται ότι το $(j+1)$ -οστό στοιχείο της ακολουθίας (6.3) μπορεί να υπολογιστεί από το j -οστό στοιχείο σύμφωνα με τον κανόνα

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi^{(j)} \\ \psi_n &= \psi_{n-1} + A_n^\dagger (A_n A_n^\dagger)^{-1}(\alpha_n - A_n \psi_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \psi^{(j+1)} &= \psi_N. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Οι επαναλήψεις του Kaczmarz στην εξίσωση (6.7) είναι σε μία μορφή εφαρμόσιμη σε υπολογισμούς, εφόσον μπορεί να καθοριστεί η δράση του συζυγούς A_n^\dagger και του σύνθετου τελεστή $A_n A_n^\dagger$. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής της γενικής μεθόδου του Kaczmarz για την επίτευξη επαναληπτικών λύσεων, γνωστών ως ATA, των ΠΠΓΚ.

6.2 Οι αλγεβρικές τεχνικές ανακατασκευής στην ΠΤ

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$ ανήκει στο χώρο Hilbert $\mathcal{F} = L^2(\mathcal{D}_\alpha)$ των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του κυκλικού δίσκου \mathcal{D}_α , που έχει ακτίνα α και ανήκει στο επίπεδο \mathbb{R}^2 . Ένας τελεστής διάδοσης P_θ απεικονίζει συναρτήσεις του χώρου \mathcal{F} αυτού σε συναρτήσεις του χώρου \mathcal{P}_θ των συναρτήσεων περιορισμένου εύρους ζώνης (*band-limited functions*) στο $L^2(\mathbb{R})$. Το γεγονός ότι $P_\theta f(\tau)$ είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη και περιορισμένης ζώνης προκύπτει αμέσως από το ΘΓΠΤ. Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα εσωτερικά γινόμενα στους χώρους \mathcal{F} και \mathcal{P}_θ αντιστοίχως

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{F}} = \int f_1^*(x) f_2(x) dx \quad (6.8)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2)_{\mathcal{P}_\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^*(t) \alpha_2(t) dt. \quad (6.9)$$

Ο συζυγής $P_\theta^\dagger f(\tau)$ του τελεστή διάδοσης ορίζεται μέσω της εξίσωσης

$$(P_\theta f, \alpha)_{\mathcal{P}_\theta} = (f, P_\theta^\dagger \alpha)_{\mathcal{F}}, \quad (6.10)$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και $\alpha \in \mathcal{P}_\theta$, όπου ο μετασχηματισμός διάδοσης ορίστηκε στις εξισώσεις (3.33-3.35). Αντικαθιστώντας τους ορισμούς

των εσωτερικών γινομένων και τον τελεστή διάδοσης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned}
(P_\theta f, \alpha)_{\mathcal{P}_\theta} &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (P_\theta f)^*(\tau) \alpha(\tau) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp (\widetilde{P_\theta f})^*(p) \tilde{\alpha}(p) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{k}{m} e^{-i(m-k)s_0} \widetilde{M_\theta f}^* [p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \tilde{\alpha}(p) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-L}^L ds f^*(\tau, s) \int_{-k}^k dp \frac{k}{m} \tilde{\alpha}(p) e^{i[p\tau + (m-k)(s-s_0)]}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις συνεπάγεται ότι ο συζυγής τελεστής είναι απλώς

$$P_\theta^\dagger \alpha(\tau, s) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{M}_\theta \int_{-k}^k dp \frac{k}{m} \tilde{\alpha}(p) e^{i[p\tau + (m-k)(s-s_0)]}, \tag{6.12}$$

όπου \mathcal{M}_θ είναι η μάσκα-λωρίδα

$$\mathcal{M}_\theta f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } |s| \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases} \tag{6.13}$$

$x = \tau\hat{u} + s\hat{v}$ και a είναι η ακτίνα του πεδίου ορισμού \mathcal{D}_a της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$.

Είναι σαφές ότι η εφαρμογή του συζυγούς τελεστή επιστρέφει μια συνάρτηση με περιορισμένο εύρος κατά την κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη στη κατεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος και χωρικά περιορισμένη στην κατεύθυνση διάδοσης. Άρα, η συνάρτηση αυτή είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη. Ο συζυγής

τελεστής σχετίζεται με την έννοια της *οπισθοδιάδοσης* (*backpropagation*). Πράγματι, από την εξίσωση (6.12) συνάγεται ότι η εφαρμογή του συζυγούς τελεστή στη συνάρτηση $\alpha(\tau)$ είναι ισοδύναμη με την οπισθοδιάδοση μιας φιλτραρισμένης έκδοσης της συνάρτησης, με ένα φίλτρο του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι k/m .

Για την εφαρμογή της μεθόδου Kaczmarz απαιτείται ορισμός της δράσης του σύνθετου τελεστή $P_\theta P_\theta^\dagger$, που ορίζεται στο χώρο \mathcal{P}_θ , δηλαδή $P_\theta P_\theta^\dagger : \mathcal{P}_\theta \rightarrow \mathcal{P}_\theta$. Έστω η συνάρτηση $\alpha(\tau)$ στο χώρο δεδομένων \mathcal{P}_θ . Τότε

$$\begin{aligned} \widetilde{P_\theta P_\theta^\dagger \alpha}(p) &= \frac{k}{m} e^{-i(m-k)s_0} \widetilde{P_\theta^\dagger \alpha}[p\hat{u} + (m-k)\hat{v}] \\ &= 2L \frac{k^2}{m^2} \tilde{\alpha}(p). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Έτσι, ο σύνθετος τελεστής πολλαπλασιάζει το MF της συνάρτησης $\alpha(\tau)$ με $2ak^2/m^2$. Τότε συνάγεται ότι ο αντίστροφος του σύνθετου τελεστή είναι απλώς ο

$$(P_\theta P_\theta^\dagger)^{-1} \alpha(\tau) = \frac{1}{4\pi a} \int_{-k}^k dp \frac{m^2}{k^2} \tilde{\alpha}(p) e^{ip\tau}. \quad (6.15)$$

Σε αυτό το σημείο, η μέθοδος Kaczmarz εφαρμόζεται άμεσα και οι επαναλήψεις που δίνονται από την εξίσωση (6.7) λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} f_0 &= f^{(j)}(x) \\ f_n &= f_{n-1}(x) + \frac{1}{4\pi a} \mathcal{M}_{\theta_n} \int_{-k}^k dp \frac{m}{k} e^{i[p\tau + (m-k)(s-s_0)]} \\ &\quad \cdot [\tilde{\alpha}_{\theta_n}(p) - \widetilde{P_{\theta_n} f_{n-1}}(p)] \\ f^{(j+1)}(x) &= f_N(x). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Εδώ θα μπορούσε να σημειωθεί ότι οι επαναλήψεις συγκλίνουν σε μια ανακατασκευή η οποία ικανοποιεί τα δεδομένα, δηλαδή $P_\theta f = \alpha_\theta$. Επιπλέον, η ανακατασκευή είναι εκείνη η λύση η οποία, μεταξύ όλων των λύσεων, έχει τη μικρότερη νόρμα. Επιπλέον, στο όριο του μηδενιζόμενου μήκους κύματος, $\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), επιτυγχάνεται

$$(m - k) \rightarrow 0, \quad m/k \rightarrow 1$$

και η επανάληψη Kaczmarz στην εξίσωση (6.16) ανάγεται στην

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{1}{4\pi a} \mathcal{M}_{\theta_n} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} [\tilde{\alpha}_{\theta_n}(p) - P_{\theta_n} \tilde{f}_{n-1}(p)]$$

ή

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{1}{2a} \mathcal{M}_{\theta_n} (\alpha_{\theta_n} - P_{\theta_n} f_{n-1})(x).$$

Αυτή είναι η μορφή της επανάληψη Kaczmarz στην περίπτωση της Υπολογιστικής Τομογραφίας [44]. Έτσι, ο επαναληπτικός αλγόριθμος που παρουσιάστηκε εδώ για την περίπτωση της ΠΤ, είναι μια γενίκευση της συνήθους ATA της Υπολογιστικής Τομογραφίας και ανάγεται στο όριο του μηδενιζόμενου μήκους κύματος.

6.3 Οι αλγόριθμοι φιλτραρισμένης οπισθοδιάδοσης

Τα προβλήματα ανακατασκευής από δεδομένα περιορισμένης γωνιακής κάλυψης στην ΠΤ μπορούν, επίσης, να θεμελιωθούν σε μια γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση, της οποίας ο πυρήνας είναι συνελικτικός, δηλαδή στην εξίσωση (3.33) με πυρήνα όπως ορίζεται στην

εξίσωση (3.34). Το επόμενο **Θεώρημα** [13] είναι ένα βασικό αποτέλεσμα, το οποίο δηλώνει ότι η διδιάστατη συνέλιξη μιας οπισθοδιάδοσης είναι ίση με την οπισθοδιάδοση μιας μονοδιάστατης συνέλιξης. Από αυτό συνάγεται ότι οι ανακατασκευές στην ΠΤ μπορούν να δημιουργηθούν με τη χρήση ενός ΑΦΟ, του οποίου τα φίλτρα είναι απλώς οι προβολές ενός κατάλληλου διδιάστατου αποσυνελκτικού φίλτρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 Έστω $L(x)$ ένα διδιάστατο φίλτρο με MF $\tilde{L}(K)$. Τότε $L * * B_\theta \alpha = B_\theta l_\theta * \alpha$, όπου l_θ είναι το μονοδιάστατο φίλτρο, του οποίου ο MF είναι $\tilde{l}_\theta(p) = \tilde{L}(p\hat{u} + (k - m)\hat{v})$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη αυτού του **Θεωρήματος** σημειώνεται πρώτα ότι η οπισθοδιάδοση $B_\theta \alpha \in L^2(\mathcal{D}_a)$ κάθε συνάρτησης $\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$B_\theta \alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k \tilde{\alpha}(p) e^{i[p\tau + (m-k)(s-s_0)]} dp, \quad (6.19)$$

όπου $\tilde{\alpha}(p)$ είναι ο μονοδιάστατος MF της α . Εάν και στα δύο μέλη της (6.19) εφαρμοστεί η συνέλιξη με το διδιάστατο φίλτρο L , συνάγεται ότι

$$L * * B_\theta \alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k \tilde{L}[p\hat{u} + (k - m)\hat{v}] \tilde{\alpha}(p) e^{i[p\tau + (m-k)(s-s_0)]} dp. \quad (6.20)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (6.20) αναγνωρίζεται από την εξίσωση (6.19) ως η οπισθοδιάδοση της συνάρτησης, της οποίας ο MF είναι $\tilde{L}[p\hat{u} + (m - k)\hat{v}] \tilde{\alpha}(p)$. Τότε το **Θεώρημα** προκύπτει από το γνωστό

γεγονός ότι ο MF του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι ίσος με τη συνέλιξη των MF των συναρτήσεων. \square

Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα φίλτρα l_θ δεν είναι οι μετασχηματισμοί οπισθοδιάδοσης των διδιάστατων φίλτρων L . Πάντως, στο όριο μηδενιζόμενου μήκους κύματος ($\lambda \rightarrow 0$) αυτά τα φίλτρα γίνονται ίσα με τις προβολές του φίλτρου L και το θεώρημα καταλήγει σε αναδιατύπωση ενός γνωστού αντιστοίχου αποτελέσματος της Υπολογιστικής Τομογραφίας.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, η λύση των προβλημάτων δεδομένων περιορισμένης γωνιακής κάλυψης στην ΠΤ μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή ενός ΑΦΟ. Πιο συγκεκριμένα, συνάγεται ότι

$$f_{\text{rec}} = L ** \sum_{\theta \in \Theta} B_\theta P_\theta f = \sum_{\theta \in \Theta} B_\theta l_\theta * P_\theta f. \quad (6.21)$$

Το πρόβλημα της ανακατασκευής στην ΠΤ μπορεί έτσι να εστιαστεί στη μορφή ενός προβλήματος διδιάστατης αποσυνέλιξης, όπου υπολογίζεται ένα “βέλτιστο” φίλτρο αποσυνέλιξης L και τα φίλτρα l_θ υπολογίζονται από τη σχέση $\tilde{l}_\theta(p) = \tilde{L}[p\hat{u} + (k - m)\hat{v}]$. Το φίλτρο αποσυνέλιξης επιλέγεται έτσι, ώστε ο τελεστής $L ** \sum_{\theta \in \Theta} B_\theta P_\theta$ να προσεγγίζει τον ταυτοτικό τελεστή επί των συναρτήσεων στο \mathbb{R}^2 .

6.4 Μη γραμμικά προβλήματα δεδομένων περιορισμένης γωνιακής κάλυψης

Για τη διεύρυνση του συνόλου των ανακατασκευάσιμων αντικειμενικών συναρτήσεων σε περισσότερες ρεαλιστικές εφαρμογές, μπορεί να εφαρμοστεί επαναληπτική γραμμικοποίηση της απεικόνισης από την αντικειμενική συνάρτηση στις μετρήσεις του σκεδαζομένου κύματος. Μια πολύ δημοφιλής επαναληπτική μέθοδος είναι αυτή των Newton-Kantorovič [26], όπου η εκτίμηση της επόμενης αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται με γραμμικοποίηση της απεικόνισης από την αντικειμενική συνάρτηση στις μετρήσεις του σκεδαζομένου κύματος στην περιοχή της τρέχουσας εκτίμησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Η επονομαζόμενη και *διαστρεβλωμένη επαναληπτική μέθοδος του Born (distorted iterative Born method)* [104] μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ισοδύναμη αυτής των Newton-Kantorovič. Γενικότερα, η επόμενη εκτίμηση της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί ως $f_{\text{rec},n+1} = F f_{\text{rec},n}$, όπου F είναι ένας κατάλληλος τελεστής. Είναι γνωστό [26] ότι η ακολουθία $\{f_{\text{rec},n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, αν F είναι ένας *τελεστής συστολής (contraction mapping)*. Αυτό ισχύει για τη μέθοδο Newton-Kantorovič, αν η αρχική εκτίμηση $f_{\text{rec},0}$ είναι αρκετά κοντά στη λύση. Η σύγκλιση των μεθόδων του Born (διαστρεβλωμένων και μη) αποτελεί ένα θέμα έρευνας που επαληθεύεται από κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα στο [104]. Ειδικότερα, υπάρχουν αντικειμενικές συναρτήσεις, για παράδειγμα αυτές που μεταβάλλονται γρήγορα στο χώρο [3],

των οποίων δεν συγκλίνει η ακολουθία εκτιμήσεων. Σημειωτέον ότι, γενικώς, στην επίλυση κακώς τεθειμένων προβλημάτων με επαναληπτικές μεθόδους χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι εξομάλυνσης (*regularization methods*) της λύσης.

Μια διαφορετική προσέγγιση αποτελεί η διγραμμική μέθοδος [97, 91]. Σε αυτή την προσέγγιση ορίζεται ένα συναρτησιακό σφάλματος, το οποίο εξαρτάται και από την άγνωστη αντικειμενική συνάρτηση και από το άγνωστο κύμα μέσα στο σκεδαστή. Το συναρτησιακό σφάλματος ελαχιστοποιείται, αλλά μπορεί να παρουσιάσει αρκετά τοπικά ελάχιστα [97]. Επιπλέον, όταν αξιολογείται σε συνδυασμό με ένα τοπικό ελάχιστο, το συναρτησιακό σφάλματος μπορεί να είναι κοντά στο μηδέν. Επομένως, όπως εξηγείται στο [97], η επιλογή της βάσης στην οποία αναπτύσσονται τα εσωτερικά κύματα, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη μείωση των παραμέτρων του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Μια άλλη μεθοδολογία αποτελείται από την κατασκευή μιας προσέγγισης της αντίστροφης απεικόνισης του σκεδαζομένου κύματος με χρήση ενός νευρωνικού δικτύου. Οι παράμετροι του νευρωνικού δικτύου υπολογίζονται κατά την φάση της εκπαίδευσης με σκοπό την ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού σφάλματος, το οποίο έχει γενικώς λανθασμένες λύσεις [71]. Μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης, το υπολογιστικό κόστος της αξιολόγησης του αντιστρόφου τελεστή είναι χαμηλό.

Μια τέταρτη μέθοδος ανακατασκευής παρουσιάστηκε και αναλύθηκε στο [85]. Η μέθοδος βασίστηκε στην αντιστροφή ενός τετρα-

γωνικού μοντέλου για την προσέγγιση της μη γραμμικής σχέσης μεταξύ του σκεδαζομένου κύματος και της άγνωστης αντικειμενικής συνάρτησης. Το σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στο ότι η κλάση των ανακτήσιμων αντικειμενικών συναρτήσεων μεγεθύνθηκε αναφορικά με τις γραμμικές μεθόδους και συμπεριέλαβε μεγαλύτερα αντικείμενα με υψηλότερη διαφορά τιμής του δείκτη διάθλασης σε σχέση με το μέσο και ταχύτερα μεταβαλλόμενες αντικειμενικές συναρτήσεις. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου αυτής ήταν το ότι το συναρτησιακό σφάλματος εμφάνιζε τοπικά ελάχιστα. Παρ' όλα αυτά, η ανάλυση του συναρτησιακού σφάλματος κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής βρέθηκε να αποτελεί μια αποτελεσματική μέθοδο μελέτης του προβλήματος των τοπικών ελαχίστων [98].

Ειδικότερα, τα τοπικά ελάχιστα εξαφανίζονται αν ο λόγος του αριθμού των ανεξαρτήτων δεδομένων προς τον αριθμό των αγνώστων παραμέτρων είναι αρκετά υψηλός.² Επομένως, όταν καθο-

²Η ιδέα της αντιμετώπισης αντιστρόφων τετραγωνικών προβλημάτων προτάθηκε αρχικά για το πρόβλημα της ανάκτησης φάσης [99, 98] και επεκτάθηκε στην ανακατασκευή της διηλεκτρικής σταθεράς [7, 85] και αγωγιμότητας [86]. Παρά την τυπική ομοιότητά τους, οι ανακατασκευές διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας είναι προβλήματα με διαφορετικές ιδιότητες: στην πρώτη περίπτωση παρουσιάζονται φαινόμενα κυματικής διάδοσης που οφείλονται σε δράσεις υψηλής συχνότητας και δεδομένα μετρούμενα στην περιοχή μακρινού πεδίου (μακριά από το αντικείμενο), ενώ στη δεύτερη παρουσιάζονται φαινόμενα κυματικής διάχυσης που οφείλονται στις δράσεις χαμηλών συχνοτήτων και δεδομένα μετρούμενα στην περιοχή του εγγύς πεδίου (κοντά στο αντικείμενο). Μια αξιοσημείωτη συνέπεια είναι το ότι, στην περίπτωση των υψηλών συχνοτήτων, τα δεδομένα μπο-

ριστεί μια φορά ο αριθμός των ανεξαρτήτων δεδομένων είναι πιο ακριβές να ανακατασκευαστεί ένα μικρό σύνολο παραμέτρων (με αποφυγή των τοπικών ελαχίστων) παρά ένα μεγαλύτερο σύνολο (με παρουσία λανθασμένων λύσεων). Τελικά, αποδείχθηκε ότι η αξιόπιστη αντιστροφή ενός καλύτερου μοντέλου επιτρέπει τη βελτίωση της ανάλυσης σε σχέση με τις συνήθεις γραμμικές μεθόδους.

ρεί να αναπαρασταθούν από ένα καλώς ορισμένο αριθμό ανεξαρτήτων μετρήσεων, γιατί οι συνιστώσες του σκεδαζομένου κύματος, αναφορικά με μια βάση αναπαράστασης, φθίνουν απότομα στο μηδέν. Αντιθέτως, στην περίπτωση των χαμηλών συχνοτήτων, οι συνιστώσες φθίνουν ομαλώς και, επομένως, υπάρχει η ανάγκη επιλογής του σημείου στο οποίο πρέπει να αποκοπεί η αναπαράσταση.

Κεφάλαιο 7

Απεικόνιση περιοδικώς μεταβαλλομένων αντικειμένων

7.1 Το ευθύ πρόβλημα

Έστω ότι στην κλασική ερευνητική διάταξη της ΠΤ (Σχήμα 3.2) η δομή του υπό διερεύνηση αντικειμένου μεταβάλλεται περιοδικώς με το χρόνο, δηλαδή υπάρχει μια χρονική σταθερά $\alpha \neq 0$ τέτοια, ώστε:

$$f(x, t) = f(x, t + \alpha), \quad \text{για όλα τα } t. \quad (7.1)$$

Καθώς η αντικειμενική συνάρτηση f μεταβάλλεται περιοδικώς με το χρόνο, είναι χρήσιμο να εκφραστεί με τη μορφή σειρών Fourier.

Συγκεκριμένα:

$$f(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x) e^{-\frac{i2\pi lt}{\alpha}}, \quad (7.2)$$

όπου οι συντελεστές των χρονικών αρμονικών δίνονται από τη σχέση

$$f_l(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(x, t) e^{i\frac{2\pi lt}{\alpha}} dt. \quad (7.3)$$

Ισοδύναμα, ο MF της αντικειμενικής συνάρτησης f ως προς τη χρονική μεταβλητή t μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση

$$\hat{f}(x, \omega) = \int e^{i\omega t} f(x, t) dt = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x) \delta\left(\omega - \frac{2\pi l}{\alpha}\right), \quad (7.4)$$

όπου δ παριστάνει τη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Το αντικείμενο διερευνάται με επίπεδους κυματικούς παλμούς της μορφής

$$p\left(t - \frac{\langle x, \hat{v} \rangle}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\left(t - \frac{\langle x, \hat{v} \rangle}{c}\right)} \hat{p}(\omega), \quad (7.5)$$

όπου η κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \hat{v} επιτρέπεται να σχηματίζει αυθαίρετες γωνίες θ με τον άξονα x_1 . Για κάθε γωνία πρόσπτωσης θ , τα αντίστοιχα δεδομένα του σκεδαζομένου κύματος συμβολίζονται με $d(\tau, \theta, t)$ και μετρώνται πάνω στην ευθεία $\tau = (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \in \mathbb{R}$ για ένα χρονικό διάστημα που καλύπτει μια χρονική περίοδο. Το αντίστροφο πρόβλημα, που αντιμετωπίζεται στο παρόν κεφάλαιο, είναι αυτό της εκτίμησης της χρονικώς περιοδικής αντικειμενικής συνάρτησης f από δεδομένα (μετρήσεις) $d(\tau, \theta, t)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta \subset [0, 2\pi)$, $t \in [0, \alpha)$. Χωρίς βλάβη της

γενικότητας, έχει υποτεθεί ότι οι μετρήσεις ελήφθησαν στο χρονικό διάστημα $[0, \alpha]$.¹

Για το σχηματισμό ενός χρήσιμου μοντέλου για τις μετρήσεις σκεδαζομένου κύματος, εκφράζονται πρώτα τα δεδομένα αυτά με τη μορφή ενός αναπτύγματος AMF

$$d(\tau, \theta, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\omega}{c}}^{\frac{\omega}{c}} dp e^{ip\tau} \tilde{d}(p, \theta, \omega), \quad (7.6)$$

όπου το σύμβολο $\hat{}$ συμβολίζει ένα MF σε σχέση με τη χρονική μεταβλητή και το σύμβολο $\tilde{}$ συμβολίζει ένα MF σε σχέση με τη χωρική μεταβλητή (τ σε αυτή την περίπτωση). Συγκεκριμένα:

$$\tilde{f}[p\hat{u} + (m - \frac{\omega}{c})\hat{v}, \omega] = \int dx e^{-i\langle [p\hat{u} + (m - \frac{\omega}{c})\hat{v}], x \rangle} \int e^{i\omega t} f(x, t) dt. \quad (7.7)$$

Από το ΘΓΠΤ (εξίσωση (3.35)), συνάγεται ότι

$$\tilde{d}(p, \theta, \omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{c} \frac{e^{i(m - \frac{\omega}{c})s_0}}{m} \hat{p}(\omega) \tilde{f}[p\hat{u} + (m - \frac{\omega}{c})\hat{v}, \omega], & |p| \leq \frac{\omega}{c} \\ 0, & |p| > \frac{\omega}{c}. \end{cases} \quad (7.8)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7.8) την εξίσωση (7.6) και με χρήση

¹Στην πράξη, δεδομένα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης θ α μετρηθούν σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα, αλλά, λόγω της χρονικής περιοδικότητας της αντικειμενικής συνάρτησης, μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδύναμα όλες οι μετρήσεις λαμβάνονται στο διάστημα $[0, \alpha]$. Αυτό γίνεται εμφανές στην εξίσωση (7.11), από την οποία προκύπτει ότι τα δεδομένα σκεδαζομένου κύματος μεταβάλλονται περιοδικώς με το χρόνο σε συγχρονισμό με την περιοδική μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης.

της εξίσωσης (7.4), συνάγεται ότι

$$d(\tau, \theta, t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi\ell t}{\alpha}} \hat{p} \left(\frac{2\pi|\ell|}{\alpha} \right) \frac{|\ell|}{c\alpha} \int_{-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}}^{\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}} dp \cdot \\ \cdot e^{ip\tau} \frac{e^{i(m-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha})s_0}}{m} \tilde{f}_\ell \left[p\hat{u} + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} \right) \hat{v} \right], \quad (7.9)$$

όπου

$$\tilde{f}_\ell(K) = \int e^{-i\langle K, x \rangle} f_\ell(x) dx \quad (7.10)$$

είναι ο MF του αρμονικού συντελεστή f_ℓ ως προς τη χωρική μεταβλητή x .

Η εξίσωση (7.9) λαμβάνει εύκολα τη μορφή

$$d(\tau, \theta, t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d_\ell(\tau, \theta) e^{-i\frac{2\pi\ell t}{\alpha}}, \quad (7.11)$$

όπου

$$d_\ell(\tau, \theta) = \hat{p} \left(\frac{2\pi\ell}{\alpha} \right) \frac{|\ell|}{c\alpha} \int_{-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}}^{\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}} dp \cdot \\ \cdot e^{ip\tau} \frac{e^{i(m-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha})s_0}}{m} \tilde{f}_\ell \left[p\hat{u} + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} \right) \hat{v} \right]. \quad (7.12)$$

Η εξίσωση (7.11) δείχνει ότι, για κάθε προσπίπτοντα επίπεδο κυματικό παλμό, τα δεδομένα σκεδαζομένου κύματος μεταβάλλονται περιοδικώς με το χρόνο σε συγχρονισμό² με την περιοδική μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης. Το γεγονός ότι το ακριβές σχήμα του προσπίπτοντος παλμού δεν είναι πρωτίστης σημασίας δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη. Πράγματι, η θεωρήση της γραμμικότητας

²Δηλαδή με την ίδια χρονική συχνότητα.

της απεικόνισης από την αντικειμενική συνάρτηση στις μετρήσεις του σκεδαζομένου κύματος για κάθε προσπίπτοντα κυματικό παλμό διαλευκαίνει το θέμα αυτό.

Από την εξίσωση (7.12) προκύπτει ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο f , ισχύει

$$d_{\ell=0}(\tau, \theta) \equiv 0,$$

για κάθε τ, θ . Αυτό υποδηλώνει ότι τα δεδομένα $d(\tau, \theta)$ δεν περιέχουν πληροφορία για τη συνεχή συνιστώσα $d_{\ell=0}(x)$ του αντικειμένου και, επομένως, δεν είναι δυνατή η εκτίμηση της συνιστώσας αυτής από τα δεδομένα. Στην Γ' Προσομοίωση της Ενότητας 7.3 επαληθεύεται αυτή η παρατήρηση.

7.2 Αντιστροφή δεδομένων

Η εξίσωση (7.12) συνδέει τους αρμονικούς συντελεστές f_ℓ της αντικειμενικής συνάρτησης f με τους αρμονικούς συντελεστές d_ℓ των μετρήσεων d του σκεδαζομένου κύματος μέσα από μια σχέση, η οποία είναι ευθέως ανάλογη με το ΘΓΠΤ της εξίσωσης (3.35). Επιπλέον, οι αρμονικοί συντελεστές d_ℓ στο αριστερό της μέρος μπορούν να υπολογιστούν από τα δεδομένα d ως αρμονικοί συντελεστές σειρών Fourier

$$d_\ell(\tau, \theta) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha e^{i\frac{2\pi\ell t}{\alpha}} d(\tau, \theta, t) dt \quad (7.13)$$

και, επομένως, μπορούν να θεωρηθούν ως γνωστοί. Έτσι, το πρόβλημα της ανακατασκευής της χωροχρονικώς μεταβαλλομένης αντικειμενικής συνάρτησης f ανάγεται στο πρόβλημα της ανακατασκευής

των χωρικός μεταβαλλομένων αρμονικών συντελεστών f_ℓ από γνώση των αρμονικών συντελεστών $d_\ell(\tau, \theta)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta \subset [0, 2\pi)$ των μετρήσεων.

Η ανακατασκευή κάθε αρμονικού όρου f_ℓ , $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$, μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω των συνηθισμένων αλγορίθμων ανακατασκευής της ΠΤ. Εάν οι γωνίες πρόσπτωσης θ των κυμάτων καλύπτουν μεγάλο αριθμό κατευθύνσεων, το σύνολο Θ θα είναι πυκνό και η ανακατασκευή μπορεί να επιτευχθεί μέσω του ΑΦΟ της εξίσωσης (4.5). Εάν ο αριθμός των γωνιών διερεύνησης θ είναι περιορισμένος, τότε το σύνολο Θ είναι περιορισμένο και η ανακατασκευή μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω ΑΤΑ.

7.3 Μελέτη αλγορίθμων με προσομοίωση

Στην προσομοίωση μέσω υπολογιστή θα εφαρμοστούν οι προτεινόμενες μεθοδολογίες ανακατασκευής σε αντικείμενα, τα οποία αποτελούνται και από χρονικώς αμετάβλητα (σταθερά) τμήματα και από τμήματα τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Όπως είναι φανερό, θέτοντας $\omega = 0$ στην εξίσωση (7.8), τα δεδομένα $d(\tau, \theta, t)$ δεν περιέχουν πληροφορία για το χρονικώς αμετάβλητο τμήμα του αντικειμένου. Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατή η εκτίμησή (ανακατασκευή) του από τα δεδομένα $d(\tau, \theta, t)$. Πληροφορία για το χρονικώς αμετάβλητο τμήμα του αντικειμένου περιέχεται μόνο σε μεταβατικές (evanescent) συνιστώσες των σκεδαζομένων κυμάτων και η παρουσία θορύβου δυσχεραίνει την ανάκτησή της. Μια αξιόπιστη αλγοριθ-

μική προσέγγιση για την ανακατασκευή του χρονικώς αμετάβλητου τμήματος του αντικειμένου αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Θα παρουσιαστούν τρεις προσομοιώσεις, στις οποίες το αντικείμενο διατηρεί μια κυκλική συμμετρία καθ' όλη τη χρονική περίοδο. Επομένως, μπορεί να ανακατασκευαστεί από ένα μοναδικό προσπίπτοντα παλμό χρησιμοποιώντας τον ΑΦΟ.

Συγκεκριμένα, στις προσομοιώσεις ως αντικειμενική συνάρτηση θεωρείται η ακόλουθη:

$$f(x, y, t) = F(x, y)g(t). \quad (7.14)$$

Τότε $f(x, y, t) = \sum_{\ell} f_{\ell}(x, y)e^{-i\frac{2\pi\ell t}{\alpha}}$, όπου

$$f_{\ell}(x, y) = C_{\ell} F(x, y) \quad (7.15)$$

και

$$C_{\ell} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} g(t)e^{i\frac{2\pi\ell t}{\alpha}} dt. \quad (7.16)$$

Θεωρώντας

$$F(x, y) = A \text{circ}(x, y; R) = \begin{cases} A, & \text{εάν } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (7.17)$$

λαμβάνει κανείς

$$\begin{aligned} \tilde{F}(K_x, K_y) &= 2\pi A \int_0^R dr r J_0\left(r\sqrt{K_x^2 + K_y^2}\right) \\ &= \frac{2\pi AR}{K_x^2 + K_y^2} J_1\left(R\sqrt{K_x^2 + K_y^2}\right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι $p(t) = \delta(t)$ ($\hat{p}(\omega) = 1$), οι εξισώσεις (7.8) και (7.12) δίνουν

$$\begin{aligned}\tilde{d}_\ell(p, \theta) &= \frac{2\pi|\ell|/(c\alpha)}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(m-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha})s_0}}{m} \tilde{f}_\ell \left[p\hat{u} + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} \right) \hat{v} \right] \\ &= \frac{|\ell|}{c\alpha} \cdot \frac{e^{i(m-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha})s_0}}{m} \tilde{f}_\ell \left[p\hat{u} + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} \right) \hat{v} \right],\end{aligned}\quad (7.19)$$

όπου $m = \sqrt{\left(\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}\right)^2 - p^2}$. Αλλά, από τις εξισώσεις (7.15) και (7.18)

$$\tilde{f}_\ell \left[p\hat{u} + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} \right) \hat{v} \right] = C_\ell \frac{2\pi AR}{\rho} J_1(R\rho),\quad (7.20)$$

όπου $\rho = \sqrt{p^2 + \left(m - \frac{2\pi|\ell|}{c\alpha}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\pi|\ell|}{c\alpha} \left(\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} - m\right)}$. Έτσι

$$\tilde{d}_\ell(p, \theta) = \frac{|\ell|}{c\alpha} \frac{e^{i(m-\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha})s_0}}{m} C_\ell \frac{2\pi AR}{\rho} J_1(R\rho),\quad (7.21)$$

με $\rho = \sqrt{\frac{4\pi|\ell|}{c\alpha} \left(\frac{2\pi|\ell|}{c\alpha} - m\right)}$ και $\theta \in [0, 2\pi)$.³

Στα επόμενα εξετάζονται τρεις περιπτώσεις για τη $g(t)$, που αντιστοιχούν σε διαφορετικά σύνολα συντελεστών C_ℓ . Ο συντελεστής C_0 είναι μηδενικός (αντικειμενική συνάρτηση μηδενικού χρονικού μέσου όρου, δηλαδή μηδενικής χρονικώς αμετάβλητης συνιστώσας) στην πρώτη και δεύτερη περίπτωση και μη μηδενικός (αντικειμενική συνάρτηση μη μηδενικού χρονικού μέσου όρου) στην τρίτη.

7.3.1 Α' προσομοίωση

Θεωρείται η συνάρτηση

$$g(t) = \cos \frac{2\pi qt}{\alpha}, \quad 0 \leq t \leq \alpha,\quad (7.22)$$

³Για $p = 0$, η κατάλληλη τιμή για \tilde{d}_ℓ είναι $\tilde{d}_\ell(p = 0, \theta) = \frac{1}{2} C_\ell AR^2$.

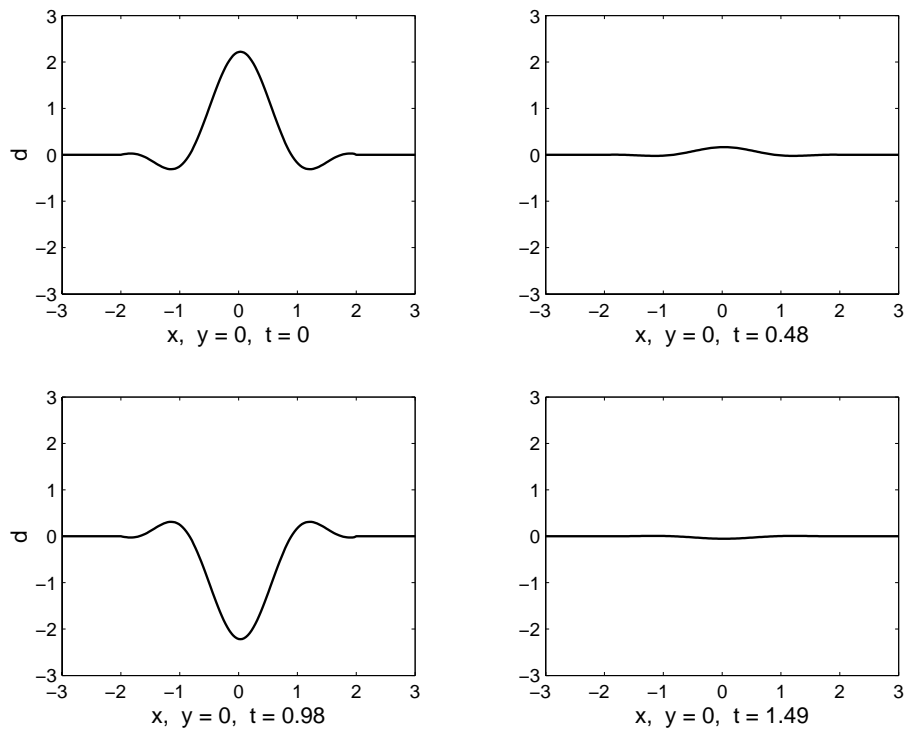
όπου q ακέραιος. Για την συνάρτηση αυτή, ισχύει

$$C_\ell = \begin{cases} 0, & \ell = 0 \\ \frac{1}{2}, & \ell = \pm q \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (7.23)$$

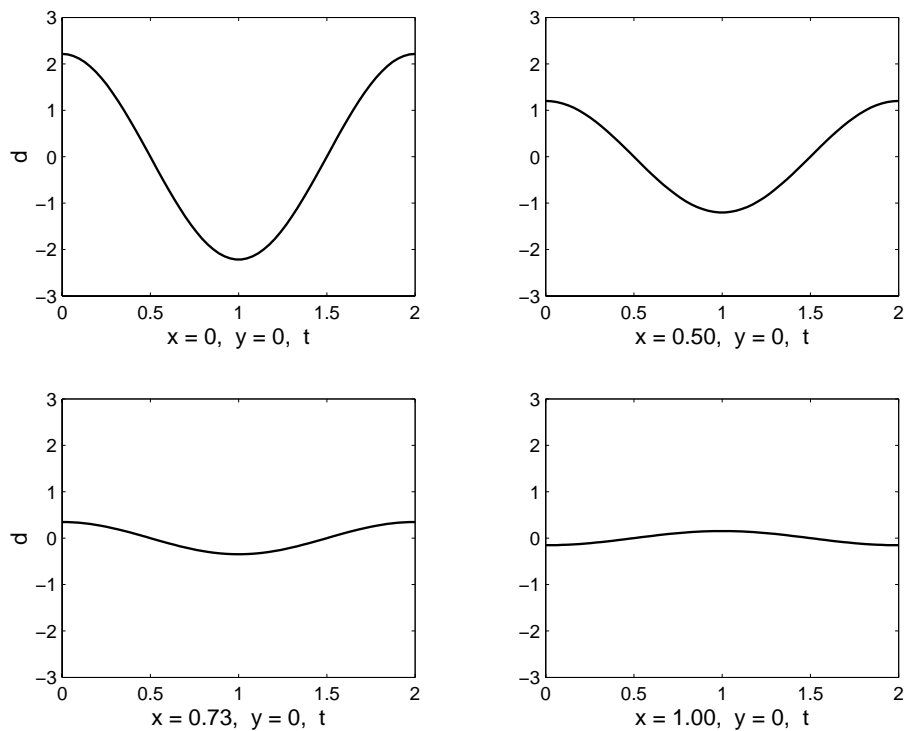
A.1: Τα Σχήματα (7.1-7.5) αντιστοιχούν σε $q = 1$.

Στα Σχήματα 7.1 και 7.2, παρουσιάζονται ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις του σκεδαζόμενου κύματος, που προκύπτει από την εξίσωση (7.22) με $q = 1$.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 7.1 το σκεδαζόμενο κύμα παρουσιάζεται στις χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$. Αντιστοίχως, στο Σχήμα 7.2 το σκεδαζόμενο κύμα παρουσιάζεται στα σημεία ($x = 0, y = 0$), ($x = 0.50, y = 0$), ($x = 0.73, y = 0$), ($x = 1.00, y = 0$) του χώρου ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής t .

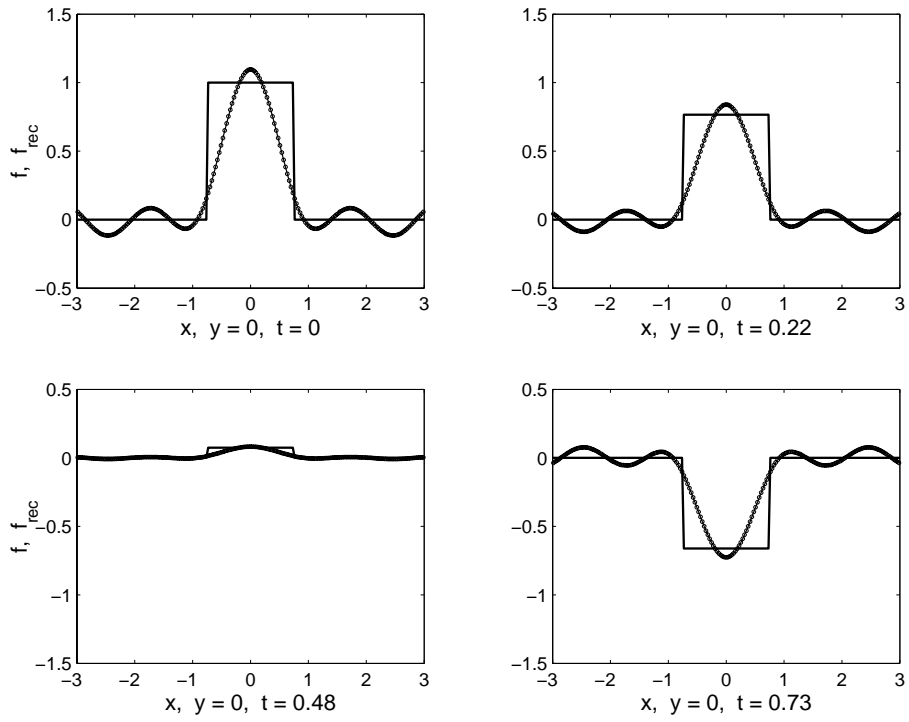


Σχήμα 7.1: Α' Προσομοίωση ($q = 1$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

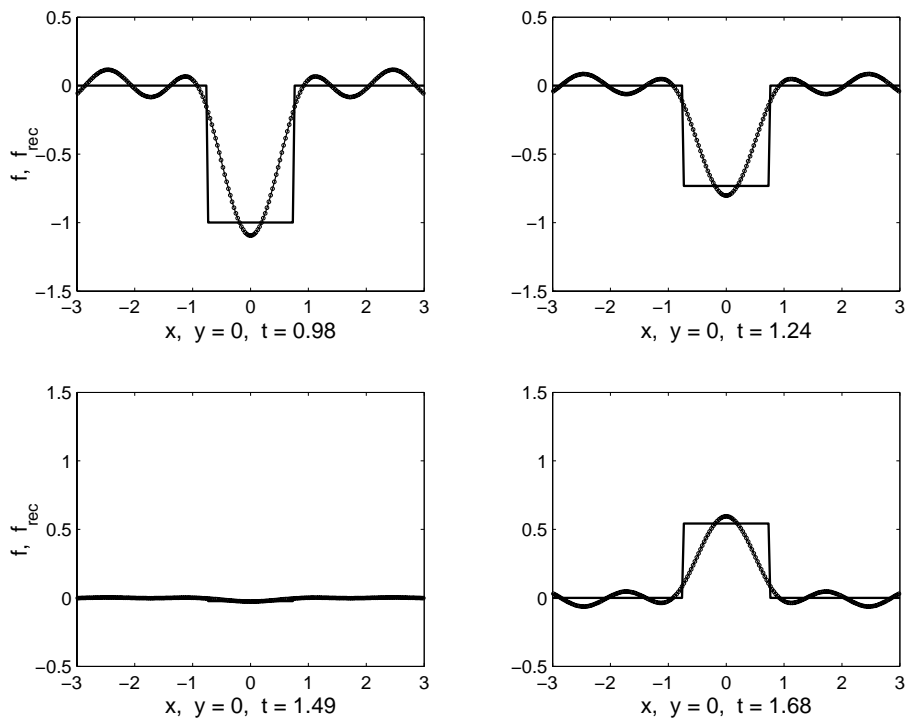


Σχήμα 7.2: Α' Προσομοίωση ($q = 1$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .

Στο Σχήμα 7.3 (7.4) παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) στις χρονικές στιγμές $t = 0, 0.22, 0.48$ και 0.73 ($t = 0.98, 1.24, 1.49$ και 1.68) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

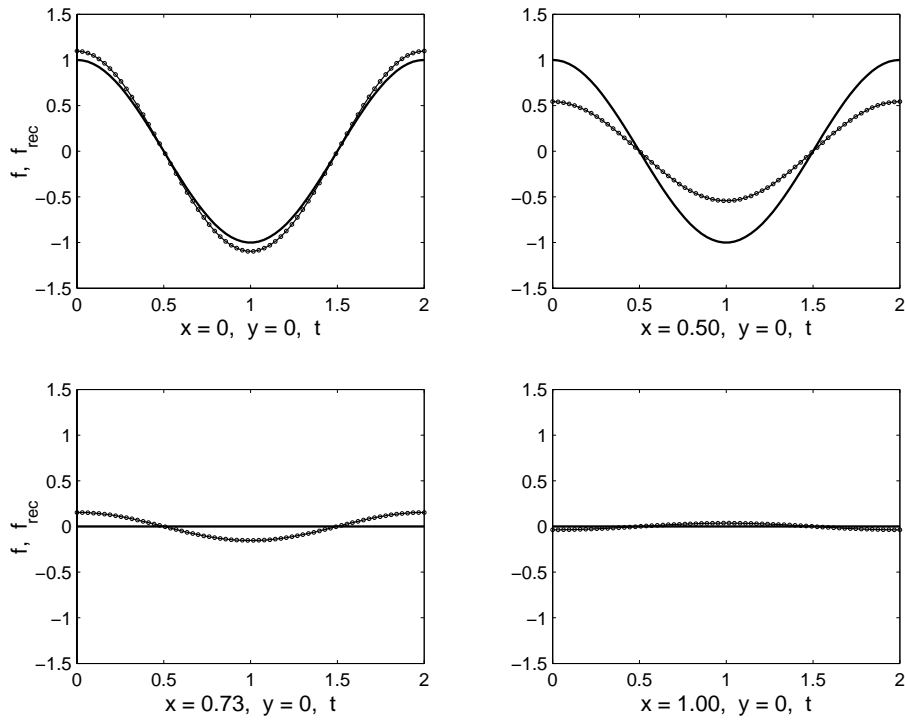


Σχήμα 7.3: A' Προσομοίωση ($q = 1$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.



Σχήμα 7.4: A' Προσομοίωση ($q = 1$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

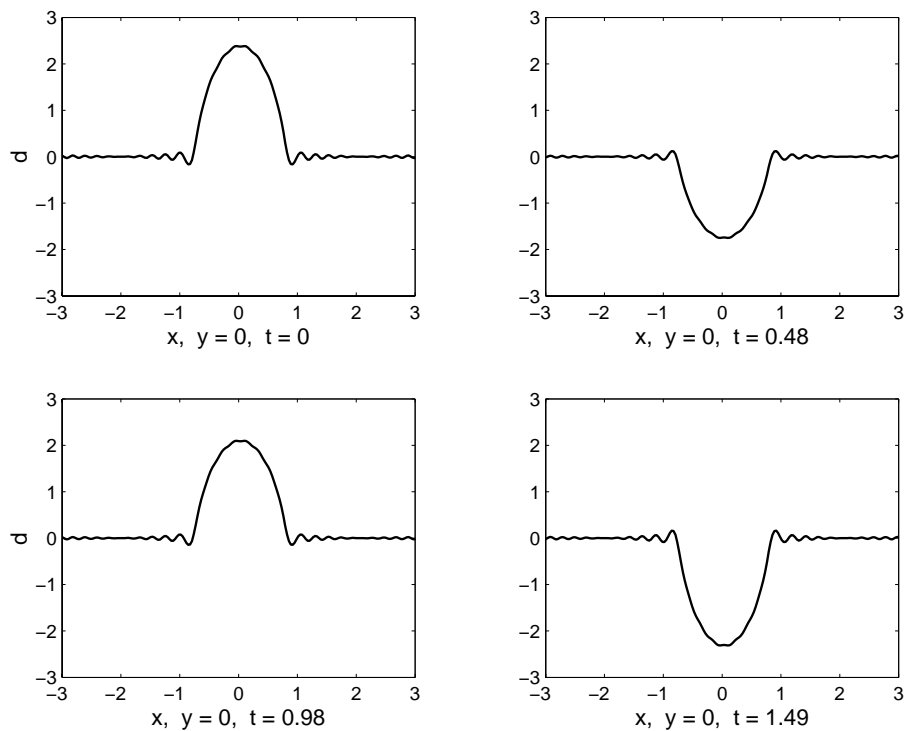
Στο Σχήμα 7.5 παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, y = 0$), ($x = 0.50, y = 0$), ($x = 0.73, y = 0$), ($x = 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .



Σχήμα 7.5: Α' Προσομοίωση ($q = 1$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .

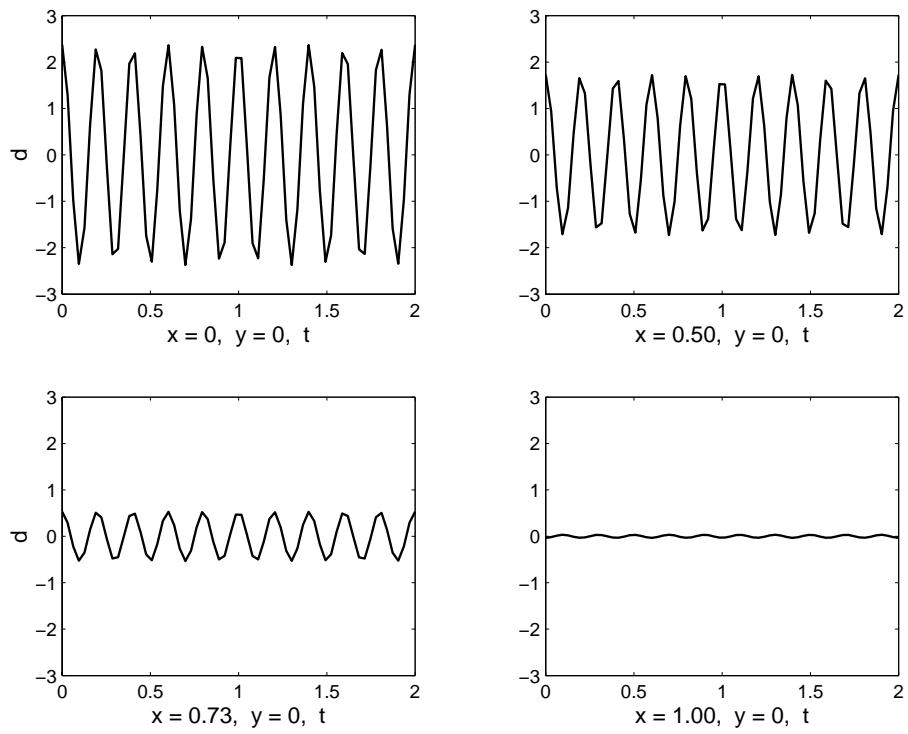
A.2: Τα Σχήματα (7.6-7.10) αντιστοιχούν σε $q = 10$.

Στα Σχήματα 7.6 και 7.7 παρουσιάζονται ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις του σκεδαζομένου κύματος, που προκύπτει από την εξίσωση (7.22) με $q = 10$. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 7.6 το σκεδαζόμενο κύμα παρουσιάζεται στις χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$. Αντιστοίχως, στο Σχήμα 7.7 το σκεδαζόμενο κύμα παρουσιάζεται στα σημεία $(x = 0, y = 0)$, $(x = 0.50, y = 0)$, $(x = 0.73, y = 0)$, $(x = 1.00, y = 0)$ του χώρου ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .

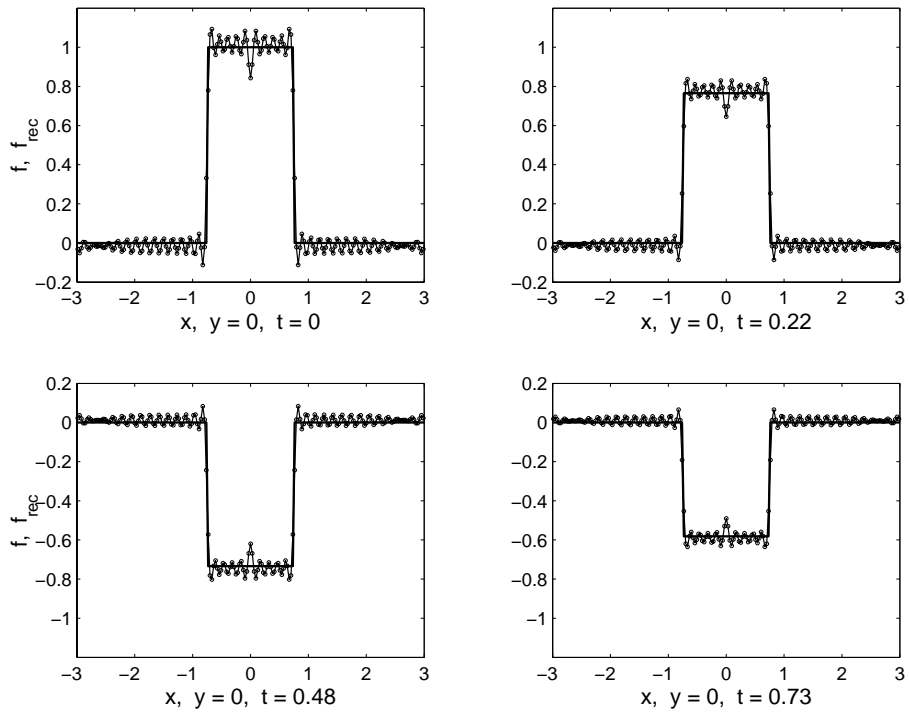


Σχήμα 7.6: A' Προσομοίωση ($q = 10$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

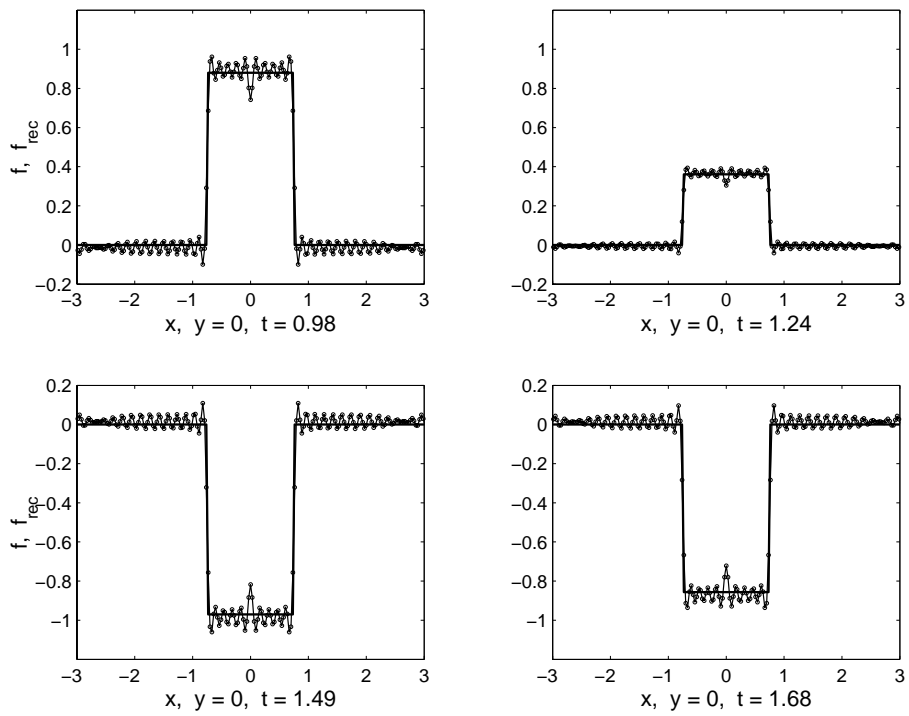
Στο Σχήμα 7.8 (7.9) παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) στις χρονικές στιγμές $t = 0, 0.22, 0.48$ και 0.73 ($t = 0.98, 1.24, 1.49$ και 1.68) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.



Σχήμα 7.7: Α' Προσομοίωση ($q = 10$): Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστάται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .

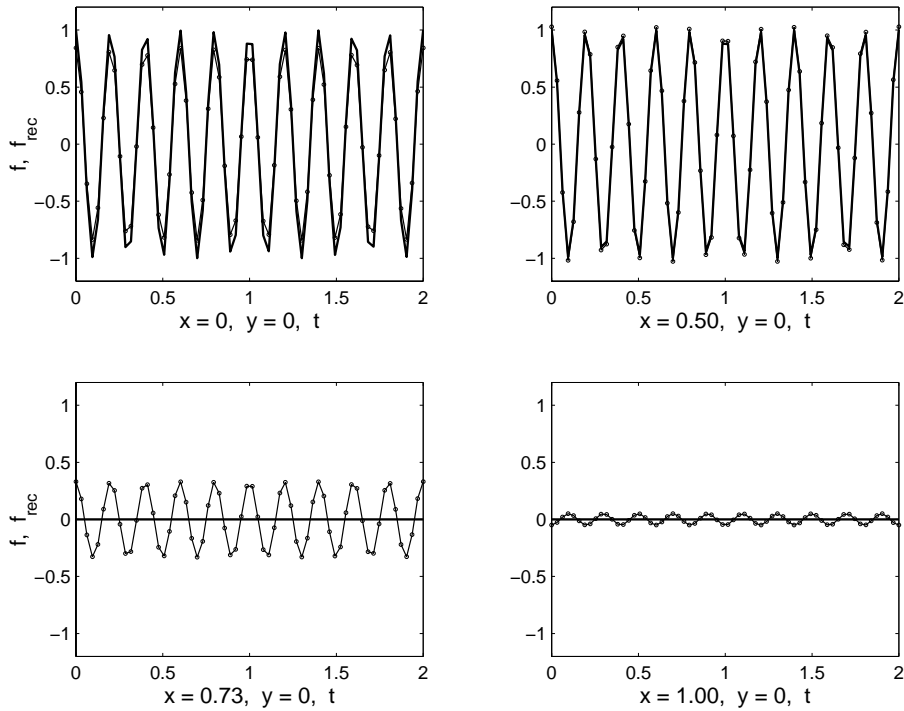


Σχήμα 7.8: A' Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.



Σχήμα 7.9: A' Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

Στο Σχήμα 7.10 παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο $(x = 0, y = 0)$, $(x = 0.50, y = 0)$, $(x = 0.73, y = 0)$, $(x = 1.00, y = 0)$ ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .



Σχήμα 7.10: A' Προσομοίωση ($q = 10$): Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο $(x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0)$ ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .

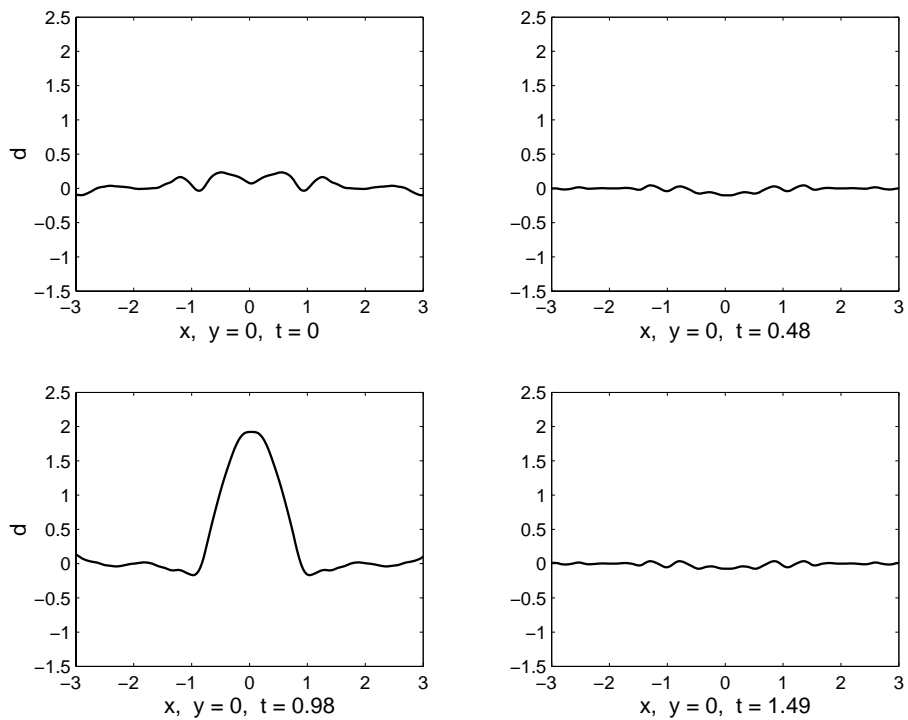
7.3.2 Β' προσομοίωση

Θεωρείται η συνάρτηση

$$g(t) = -0.75 \cos \frac{2\pi t}{\alpha} + 0.50 \cos \frac{8\pi t}{\alpha} + 0.35 \cos \frac{12\pi t}{\alpha} + 0.25 \cos \frac{20\pi t}{\alpha}, \text{ για } 0 \leq t \leq \alpha. \quad (7.24)$$

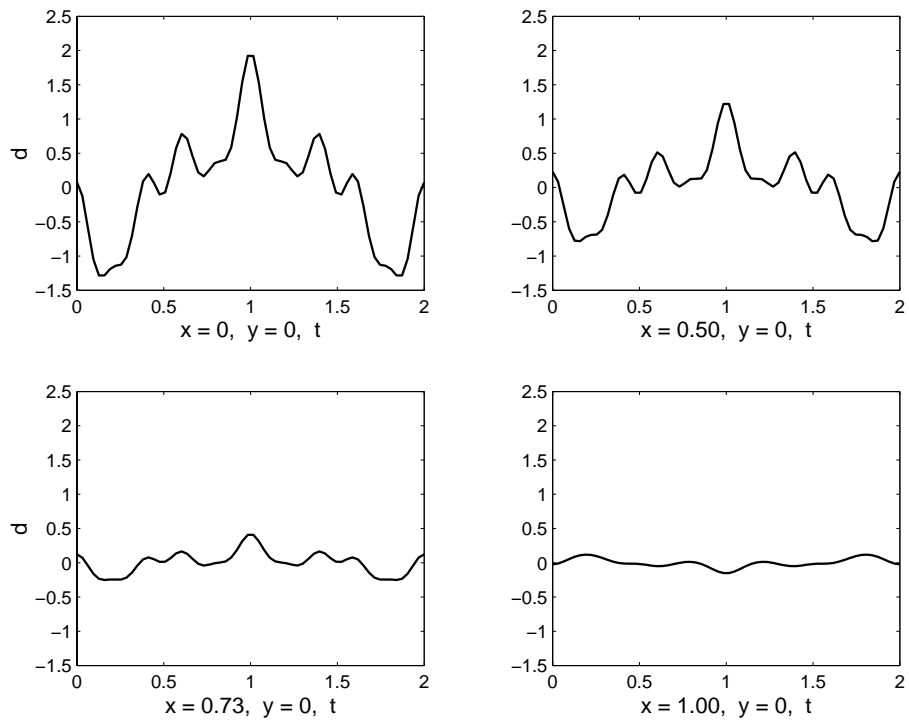
Για τη συνάρτηση αυτή ισχύει

$$c_\ell = \begin{cases} 0, & \text{όταν } \ell = 0 \\ -0.75, & \text{όταν } \ell = \pm 1 \\ 0.50, & \text{όταν } \ell = \pm 4 \\ 0.35, & \text{όταν } \ell = \pm 6 \\ 0.25, & \text{όταν } \ell = \pm 10 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

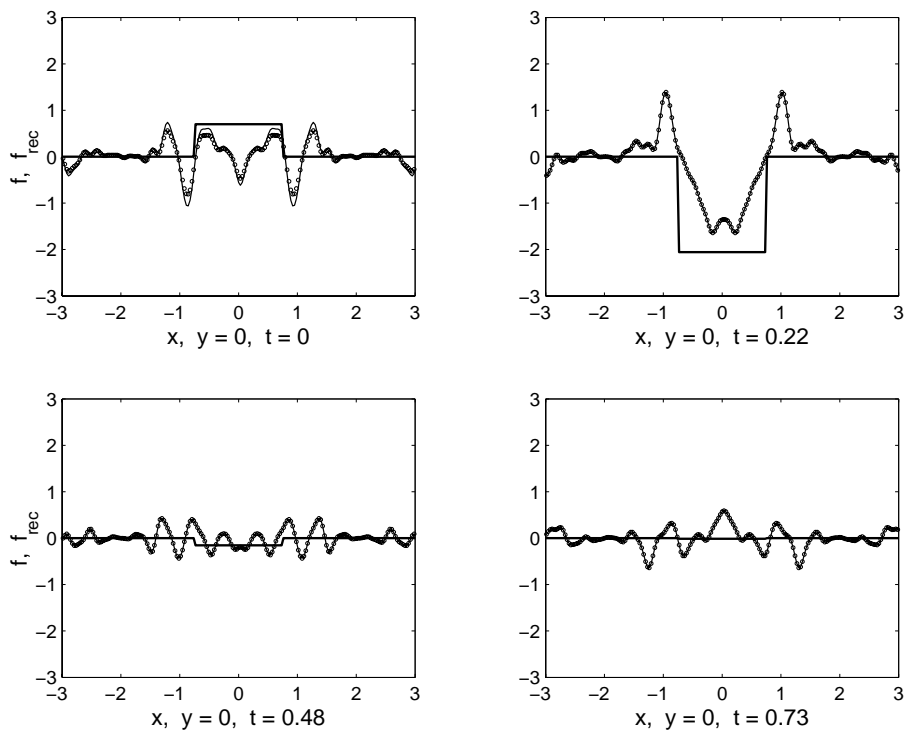


Σχήμα 7.11: Β' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά-
νεται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση
της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

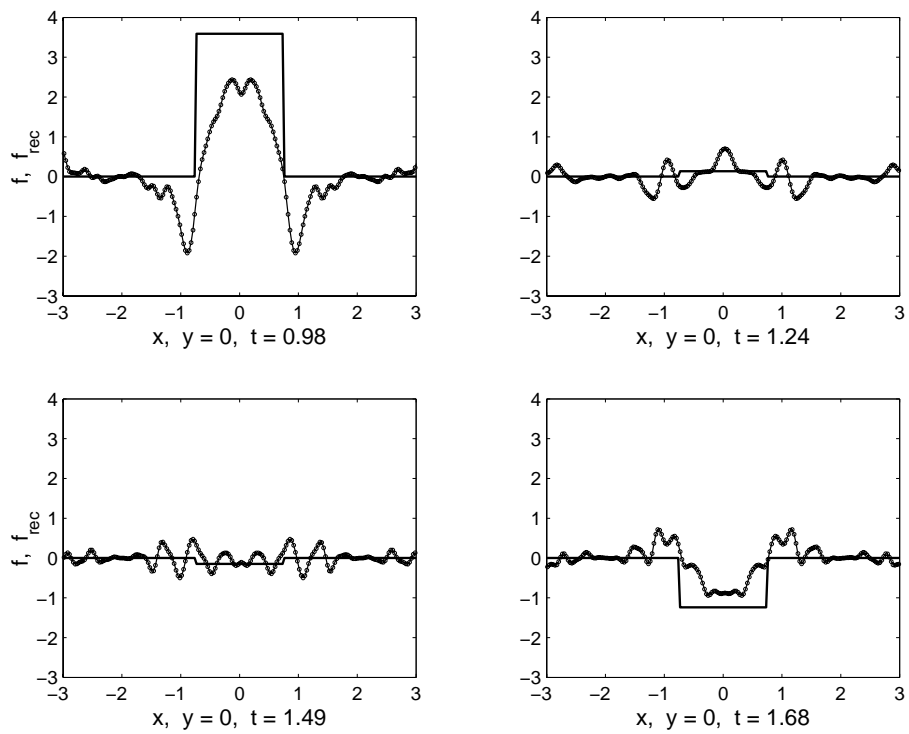
Στο Σχήμα 7.13 (7.14) παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρ-
τηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή)
στις χρονικές στιγμές $t = 0, 0.22, 0.48$ και 0.73 ($t = 0.98, 1.24, 1.49$
και 1.68) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό
 $y = 0$.



Σχήμα 7.12: Β' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά-
νεται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως
συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .

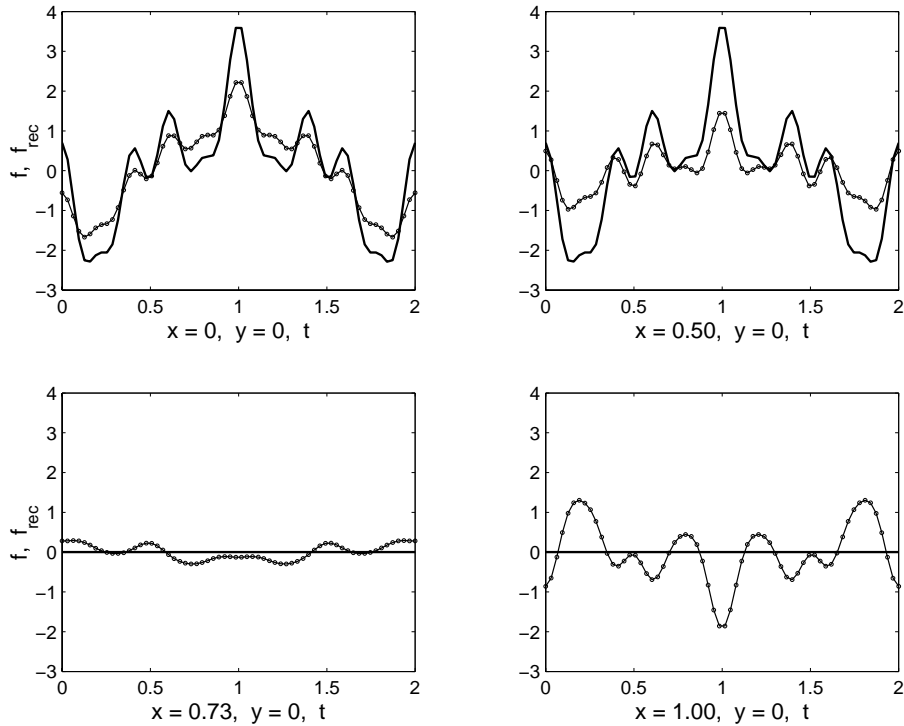


Σχήμα 7.13: Β' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.



Σχήμα 7.14: Β' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

Στο Σχήμα 7.15 παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, y = 0$), ($x = 0.50, y = 0$), ($x = 0.73, y = 0$), ($x = 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .



Σχήμα 7.15: Β' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .

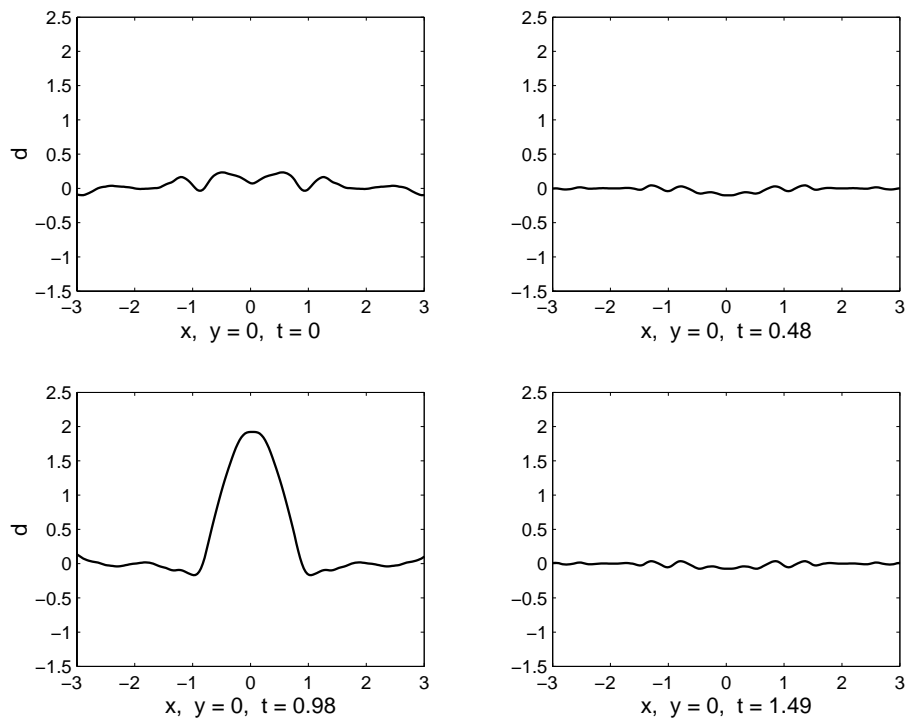
7.3.3 Γ' προσομοίωση

Θεωρείται η συνάρτηση

$$g(t) = 1 - 0.75 \cos \frac{2\pi t}{\alpha} + 0.50 \cos \frac{8\pi t}{\alpha} + 0.35 \cos \frac{12\pi t}{\alpha} + 0.25 \cos \frac{20\pi t}{\alpha}, \text{ για } 0 \leq t \leq \alpha. \quad (7.25)$$

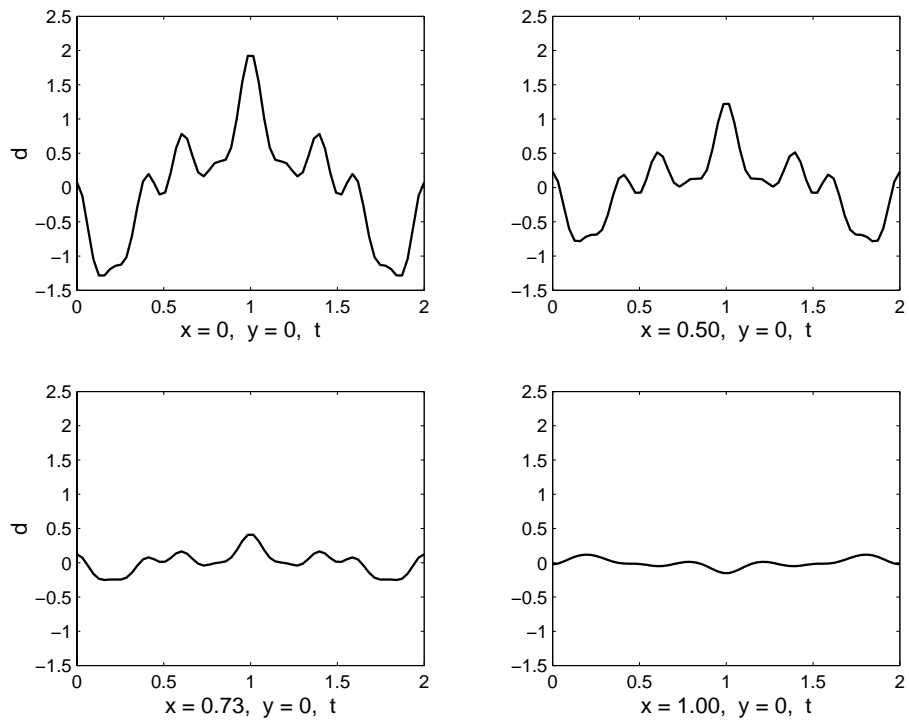
Για τη συνάρτηση αυτή ισχύει

$$c_\ell = \begin{cases} 1.00, & \text{όταν } \ell = 0 \\ -0.75, & \text{όταν } \ell = \pm 1 \\ 0.50, & \text{όταν } \ell = \pm 4 \\ 0.35, & \text{όταν } \ell = \pm 6 \\ 0.25, & \text{όταν } \ell = \pm 10 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

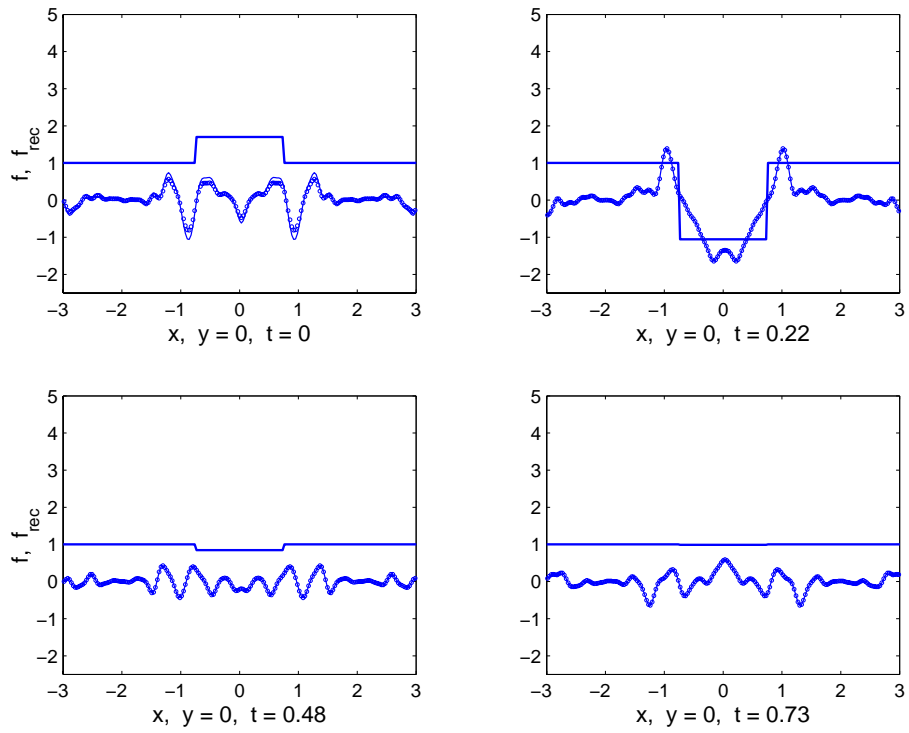


Σχήμα 7.16: Γ' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά-
νεται σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.48, 0.98, 1.49$) ως συνάρτηση
της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

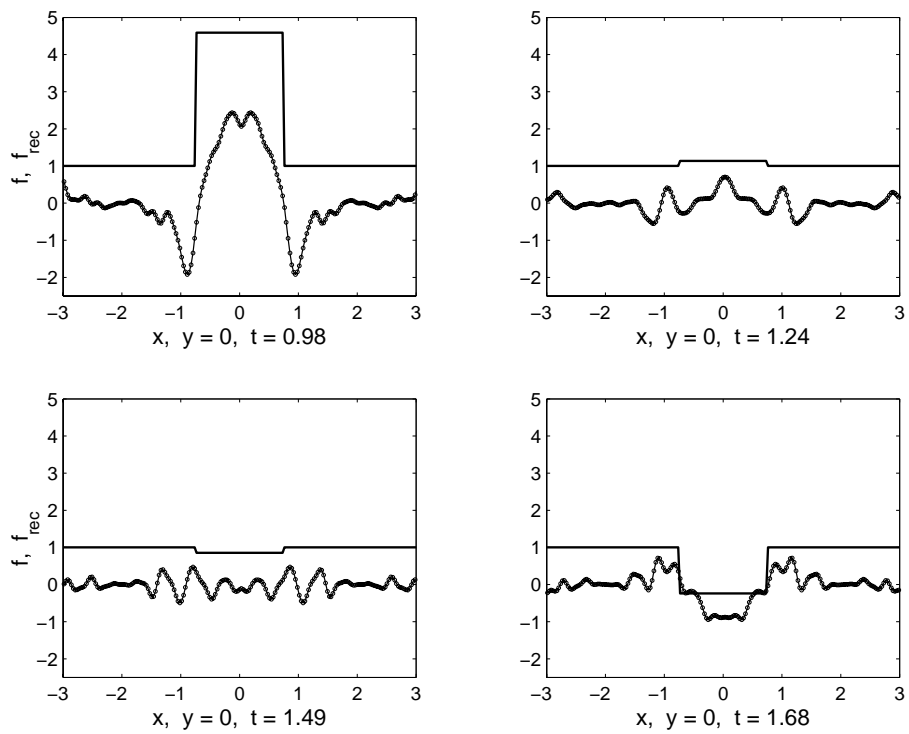
Στο Σχήμα 7.18 (7.19) παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρ-
τηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή)
στις χρονικές στιγμές $t = 0, 0.22, 0.48$ και 0.73 ($t = 0.98, 1.24, 1.49$
και 1.68) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό
 $y = 0$.



Σχήμα 7.17: Γ' Προσομοίωση: Το σκεδαζόμενο κύμα αναπαριστά-
νεται σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως
συνάρτηση της χρονικής μεταβλητής t .

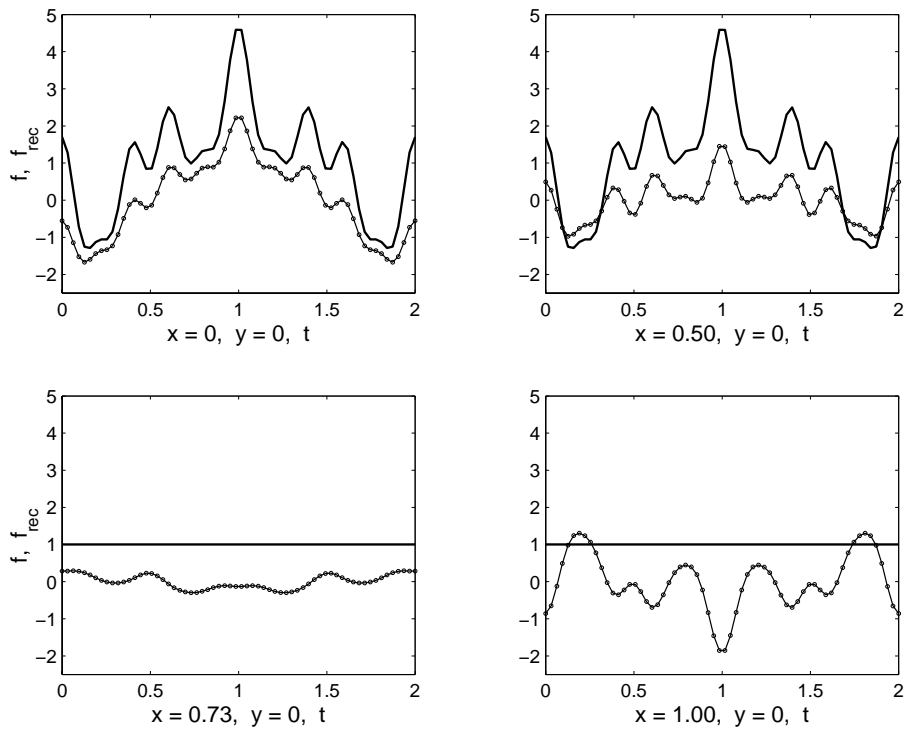


Σχήμα 7.18: Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0, 0.22, 0.48, 0.73$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.



Σχήμα 7.19: Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 χρονικές στιγμές ($t = 0.98, 1.24, 1.49, 1.68$) ως συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x για σταθερό $y = 0$.

Στο Σχήμα 7.20 παρουσιάζεται η αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, y = 0$), ($x = 0.50, y = 0$), ($x = 0.73, y = 0$), ($x = 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .



Σχήμα 7.20: Γ' Προσομοίωση: Αντικειμενική συνάρτηση (συνεχής γραμμή) και ανακατασκευή της (εστιγμένη γραμμή) σε 4 σημεία στο χώρο ($x = 0, 0.50, 0.73, 1.00, y = 0$) ως συναρτήσεις της χρονικής μεταβλητής t .

Κεφάλαιο 8

Επίλογος

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκαν *αλγόριθμοι τομογραφικής απεικόνισης σκεδαστών των οποίων η δομή μεταβάλλεται περιοδικώς με το χρόνο*. Το πρόβλημα ανάπτυξης τέτοιου είδους αλγορίθμων δεν είχε μελετηθεί στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία, παρά την πληθώρα των δυνατών τεχνολογικών εφαρμογών των λύσεών του.

Πιο αναλυτικά, η δομή της διατριβής έχει ως ακολούθως: στο πρώτο κεφάλαιο έγινε μια εισαγωγή στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης και παρουσιάστηκε μια ιστορική αναδρομή στους τρόπους αντιμετώπισής τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο δόθηκαν βασικές αρχές της θεωρίας σημάτων και συστημάτων, οι οποίες απαιτούνται για την πληρέστερη παρουσίαση της διατριβής. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η απλούστερη μορφή μαθηματικών μοντέλων του φυσικού μηχανισμού παραγωγής δεδομένων σε προβλήματα σκέδασης, μελετήθηκε η ανάπτυξη της λύσης του ευθέως προβλήματος σκέδασης σε σειρές Born και σειρές Rytov και παρουσιά-

στηκε το θεώρημα γενικευμένης προβολής-τομής. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν γραμμικοί και μη γραμμικοί αλγόριθμοι αντιστροφής των σειρών Born και Rytov, καθώς και προσομοιώσεις των αλγορίθμων αυτών με τη βοήθεια υπολογιστή. Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετήθηκαν στοχαστικά αντίστροφα προβλήματα και παρουσιάστηκε το φίλτρο ανακατασκευής Wiener για περιθλαστική τομογραφία. Στο έκτο κεφάλαιο μελετήθηκαν προβλήματα απεικόνισης από δεδομένα περιορισμένης γωνιακής κάλυψης.

Στο έβδομο κεφάλαιο μελετήθηκε η ανάπτυξη αλγορίθμων απεικόνισης αντικειμένων, των οποίων η δομή και οι ιδιότητες μεταβάλλονται περιοδικώς με το χρόνο. Η μελέτη συμπληρώθηκε με παρουσίαση προσομοιώσεων των προτεινομένων αλγορίθμων αντιστροφής με τη βοήθεια υπολογιστή. Το πρόβλημα της ανακατασκευής αντικειμένων, των οποίων η δομή και οι ιδιότητες μεταβάλλονται περιοδικώς με το χρόνο προκύπτει σε ένα σημαντικό αριθμό πρακτικών εφαρμογών απεικόνισης, όπως είναι η απεικόνιση του πνεύμονα εν ζωή (in vivo) ή η απεικόνιση ενταφιασμένων αντικειμένων τα οποία μπορούν να διεγερθούν σε μηχανική ταλάντωση. Αποδείχθηκε ότι το ανωτέρω πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της ανακατασκευής των χωρικά μεταβαλλομένων χρονικών αρμονικών συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης από γνώση των αντιστοίχων χρονικών αρμονικών των δεδομένων. Για να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα έγινε χρήση ήδη γνωστών αλγορίθμων ανακατασκευής, όπως είναι ο Αλγόριθμος Φιλτραρισμένης Οπισθοδιάδοσης ή οι Αλγεβρικές Τεχνικές Ανακατασκευής. Για λόγους απλότητας, θεωρήθηκε ότι τα

δεδομένα κυματικής σκέδασης έχουν συλλεχθεί με τη λεγόμενη κλασική διάταξη σάρωσης. Οι αλγόριθμοι όμως μπορούν, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, να τροποποιηθούν ώστε να εφαρμόζονται και σε δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με άλλες διατάξεις σάρωσης.

Τα συμπεράσματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής οδηγούν στην ανάγκη για περαιτέρω έρευνα και μελέτη των προτεινομένων μεθοδολογιών ανακατασκευής επί πραγματικών δεδομένων. Παράλληλα, άλλες ερευνητικές δραστηριότητες οδηγούν προς την κατεύθυνση της γενίκευσης των προτεινομένων μεθοδολογιών ανακατασκευής στο πεδίο της μη γραμμικής περιθλαστικής τομογραφίας. Τέλος, σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον έχει η μελέτη αντιστοιχών προβλημάτων απεικόνισης από δεδομένα κυματικής διάχυσης.

Βιβλιογραφία

- [1] Χ. Δουληγέρης και Γ. Τσιχριντζής. *Αρχές και Εφαρμογές Σημάτων και Συστημάτων*. (υπό έκδοση, 2003).
- [2] Γ. Α. Τσιχριντζής. *Ανάλυση Εικόνας*. Εκδόσεις Βαρβαρήγου, Πειραιεύς, 2002.
- [3] A. Addivinola, A. Brancasio, G. Leone and R. Pierri. Microwave tomography by a quadratic model: numerical results for the cylindrical case. Στο *Proc. Int. Conf. Electromagnetics in Advanced Applications*, Turin, 1995.
- [4] A B Weglein and F A Gasparotto and P M Carvalho and R H Stolt. An inverse-scattering series method for attenuating multiples in seismic reflection data. *Geophysics*, 62:1975–1989, 1997.
- [5] A B Weglein and K H Matson. Inverse scattering internal multiple attenuation: an analytic example and subevent interpretation. Στο *SPIE Proceedings, Volume 3453: Mathematical Methods in Geophysical Imaging*, σελίδες 1008–1017. SPIE, 1998.
- [6] A Brancaccio and R Pierri. Information content of Born scattered fields: results in the circular cylindrical case. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15:1909–1917, 1998.
- [7] A. Brancaccio, V. Pascazio and R. Pierri. A quadratic model for inverse profiling: the one-dimensional case. *J. Electromag. Waves Appl.*, 9:673–96, 1995.
- [8] A C Kak and M Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press , New York, 1988.
- [9] A. J. Devaney. Nonuniqueness in the inverse scattering problem. *J. Math. Phys.*, 19:1526, 1978.

- [10] A. J. Devaney. A computer simulation study of diffraction tomography. *IEEE Trans. Bio. Eng.*, BME-30:377, 1982.
- [11] A. J. Devaney. A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography. *Ultrasonic Imaging*, 4:336, 1982.
- [12] A. J. Devaney. Geophysical diffraction tomography. *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing*, GE-22:3, 1984.
- [13] A. J. Devaney. Reconstructive tomography with diffracting wavefields. *Inverse Problems*, 2:161, 1986.
- [14] A. J. Devaney. Structure determination from intensity measurements in scattering experiments. *Physical Review Letters*, 62:2385, 1989.
- [15] A. J. Devaney. The limited-view problem in diffraction tomography. *Inverse Problems*, 5:501, 1989.
- [16] A. J. Devaney. Inverse scattering and diffraction tomography using intensity data. Στο *Acoustical Imaging, Vol. 18*, επιμελητής: Hua Lee and Glen Wade. Plenum Press, New York, 1990.
- [17] A. J. Devaney. Diffraction tomographic reconstruction from intensity data. *IEEE Trans. Image Processing*, IP-1:221-228, 1992.
- [18] A. J. Devaney and D. Zhang. Geophysical diffraction tomography in a layered background. *Wave Motion*, 14:243, 1991.
- [19] A J Devaney and E Wolf. A new perturbation expansion for inverse scattering from three-dimensional finite-range potentials. *Physics Letters*, 89A(6):269-272, 1982.
- [20] A J Devaney and G A Tsihrintzis. Maximum likelihood estimation of object location in diffraction tomography. *IEEE Trans. Signal Processing*, SP-39(3):672, 1991.
- [21] A. J. Devaney and G. C. Sherman. Nonuniqueness in inverse source and scattering problems. *IEEE Trans. Ant. and Propag.*, AP-30:1034, 1982.
- [22] A. J. Devaney and M. L. Oristaglio. Inversion Procedure for Inverse Scattering within the Distorted Wave Born Approximation. *Physical Review Letters*, 51:237, 1983.
- [23] A J Witten and J E Molyneux and J E Nyquist. Ground penetrating radar tomography: Algorithms and case studies. *IEEE Trans. Geo. Rem Sens.*, GRS-32:461-467, 1994.

- [24] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [25] A. K. Jain and S. Ansari. Radon transform theory for random fields and optimum image reconstruction from noisy projections. Στο *Proc. ICASSP 84*, σελίδα 12A.7.1, San Diego, California, 1984.
- [26] A N Kolmogorov and S V Fomin. *Elements de la Theorie des Fonctions et de l' analyse Fonctionnelle*. Mir, Moscow, 1973.
- [27] A Q Howard and W C Chew and M C Moldoveanu. A new correction to the Born approximation. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 28(3):394-399, May 1990.
- [28] A Witten. Sounding out buried waste. *Civil Engineering*, 60:62-64, 1990.
- [29] A Witten. Application of a maximum likelihood estimator to tunnel detection. *Inverse Problems*, 7:L49-L55, 1991.
- [30] A Witten and D Gillette and W C King and J Sypniewski. Geophysical diffraction tomography at a dinosaur site. *Geophysics*, 57:187-195, 1992.
- [31] A Witten and W C King. Acoustical imaging of subsurface features. *J. Envir. Eng.*, 116:166, 1990.
- [32] C L Byrne and M A Fiddy. Images as power spectra: Reconstruction as a Wiener filter approximation. *Inverse Problems*, 4:399, 1988.
- [33] C W Groetsch. *The Theory of Tikhonov Regularization fro Fredholm Euations of the First Kind*. Pitman, Boston, Massachusetts, 1984.
- [34] D. Colton and P. Monk. The inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. Στο *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, επιμελήτης: D. Colton and R. Ewing and W. Rundell. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [35] D Colton and R Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. (2nd edition).
- [36] D J Rossi and A S Willsky. Reconstruction from Projections Based on Detection and Estimation of Objects, Parts I and II: Performance Analysis and Robustness Analysis. *IEEE Trans. Acous., Speech, and Signal Process.*, ASSP-32:886, 1984.

- [37] D. M. Young. *Iterative solution of large linear systems*. Academic Press, New York, 1971.
- [38] D Rouseff and R P Porter. Diffraction tomography and the stochastic inverse scattering problem. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89:1599, 1991.
- [39] D.R. Cox. *Renewal Theory*. Chapman and Hall, London, 1967.
- [40] E J Witterholt and J L Kretzsehmar and K L Jay. The application of crosshole electromagnetic wave measurements to mapping of a steam flood. Στο *Proc. Petroleum Society of CIM*. Petroleum Society of CIM, 1982.
- [41] E. Masry. Alias-free sampling: an alternative conceptualization and its applications. *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-24 (3):317–246, 1978.
- [42] E Wolf. Three dimensional structure determination of semi transparent objects from holographic data. *Opt. Commun.*, 1:153, 1969.
- [43] E Wolf. Principles and development of diffraction tomography. Στο *Trends in Optics*, επιμελητής: A Consortini. Academic Press, San Diego, 1996.
- [44] F Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, New York, 1986.
- [45] F.J. Beutler and O. A. Leneman. Random sampling of random processes: stationary point processes. *Inf. Control*, 9 (4):325–46, 1966.
- [46] F.J. Beutler and O. A. Leneman. The theory of stationary point processes. *Acta Math.*, 116:159–97, 1966.
- [47] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Estimation of object location from diffraction tomographic intensity data. *IEEE Trans. Signal Processing*, SP-39(9):2136, 1991.
- [48] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Maximum likelihood estimation of object location in diffraction tomography, Part II: Strongly scattering objects. *IEEE Trans. Signal Processing*, sp-39(6):1466, 1991.
- [49] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Application of a maximum likelihood estimator in an experimental study of ultrasonic diffraction tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-12:545–554, 1993.

- [50] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Stochastic diffraction tomography: Theory and computer simulation. *Signal Processing*, 39:49–64, 1993.
- [51] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Stochastic geophysical diffraction tomography. *Int. J. Imag. Syst. Techn.*, 5:239–242, 1994.
- [52] G A Tsihrintzis and A J Devaney. Maximum Likelihood Techniques in Ultrasonic Diffraction Tomography. Στο *Medical Imaging Techniques and Applications, Vol. 6*, επιμελήτης: C T Leondes, σελίδες 43–126. Gordon and Breach Publ., Newark, NJ, 1998.
- [53] G A Tsihrintzis and A J Devaney and E Heyman. Estimation of object location from wideband scattering data. *IEEE Trans. Image Proc.*, IP-8:996–1001, 1999.
- [54] G A Tsihrintzis and P M Johansen and A J Devaney. Buried object detection and location estimation from electromagnetic field measurements. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-47:1742–1744, 1999.
- [55] G. Beylkin and M. L. Oristaglio. Distorted-wave Born and distorted-wave Rytov approximation. *Opt. Commun.*, 53:213, 1985.
- [56] G. N. Hounsfield. Computerized transverse axial scanning tomography: Part I, description of the system. *Br. J. Radiol.*, 46:1016, 1973.
- [57] G T Herman. *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York, 1980.
- [58] H.S. Shapiro and R.A. Silverman. Alias-free sampling of random noise. *SIAM J. Appl. Math.*, 8 (2):245–8, 1960.
- [59] I. Halperin. The product of projection operators. *Acta Sci. Math.*, 23:96, 1962.
- [60] J A Scales and A Gersztenkorn. Robust methods in inverse theory. *Inverse problems*, 4:1071–1091, 1988.
- [61] J Cullum. The effective choice of the smoothing norm in regularization. *Math. Computation*, 33(145):149–170, Jan 1979.
- [62] J E Molyneux and A J Witten. Diffraction tomographic imaging in a monostatic measurement geometry. *IEEE Trans. Geo. Rem Sens.*, GRS-31:507–511, 1993.

- [63] K Chadan and D Colton and L Paivarinta and W Rundell. *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*. SIAM , Philadelphia, 1997.
- [64] K. Iwata and R. Nagata. Calculation of refractive index distribution from interferograms using the Born and Rytov's approximation. *Japan J. Appl. Phys.*, 14:379, 1974.
- [65] K T Ladas. *Iterative Methods in Diffraction Tomography*. Ph.D. Dissertation, Northeastern University, Boston, Massachusetts, 1991.
- [66] K T Ladas and A J Devaney. Generalized ART algorithm for diffraction tomography. *Inverse Problems*, 7:109, 1991.
- [67] K T Ladas and A J Devaney. Iterative methods in geophysical diffraction tomography. *Inverse Problems*, 8:119-132, 1992.
- [68] M Azimi and A C Kak. Distortion in diffraction tomography caused by multiple scattering. *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-2:176-195, 1983.
- [69] M. Bellanger. *Digital Processing of Signals: Theory and practise*. John Wiley, New York, 1988.
- [70] M Bertero and C De Mol and E R Pike. Linear inverse problems with discrete data II: Stability and regularisation. *Inverse problems*, 4:573-594, 1988.
- [71] M Bianchini and M Gori and M Maggini. On the problem of local minima in recurrent neural networks. *IEEE Trans. Neural Network*, 5:167-77, 1994.
- [72] M H Maleki and A J Devaney and A Schatzberg. Tomographic reconstruction from optical scattered intensities. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9:1356-1363, 1992.
- [73] M R Luetgen and W C Karl and A S Willsky. Efficient Multiscale Regularization with Applications to Computation of Optical Flow. *IEEE Trans. Im. Proc.*, IP-3:41-64, 1994.
- [74] M Slaney and A C Kak and L E Larsen. Limitations of imaging with first-order diffraction tomography. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, MTT-32:860-874, 1984.
- [75] N Kalouptsidis. *Signal Processing Systems: Theory and Design*. Wiley, New York, NY, 1978.

- [76] N Sponheim and L-J Gelius and I Johansen and J J Stannnes. Quantitative results in ultrasonic tomography of large objects using line sources and curved detector arrays. *IEEE Trans. Ultra., Ferroelec., and Freq. Con.*, UFFC-38:370, 1991.
- [77] N Wiener. *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. Wiley, New York, 1949.
- [78] P M Morse and H Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Parts I,II*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [79] R B Pratt and M H Worthington. The application of diffraction tomography to cross-hole seismic data. *Geophysics*, 53:1284, 1988.
- [80] R G Newton. Inverse scattering. I. One dimension. *J. Math. Phys.*, 21(3):493, 1980.
- [81] R G Newton. Inverse scattering. II. Three dimensions. *J. Math. Phys.*, 21(7):1698, 1980.
- [82] R G Newton. Inverse scattering. III. Three dimensions, continued. *J. Math. Phys.*, 22(10):2191, 1981.
- [83] R G Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [84] R. K. Mueller and M. Kaveh and G. Wade. Reconstructive tomography and applications to ultrasonics. *Proc. IEEE*, 67:567, 1979.
- [85] R Pierri and A Brancaccio. Imaging of a rotationally symmetric dielectric cylinder by a quadratic approach. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14:2777-2785, 1997.
- [86] R. Pierri, G. Rubinacci and A. Tamburrino. A quadratic approach for the reconstruction of conductivity profiles using eddy current. *IEEE Trans. Magn.*, 32:1310-13, 1996.
- [87] R T Prosser. Formal solutions of inverse scattering problems. *J. Math. Phys.*, 10:1819-1822, 1969.
- [88] R T Prosser. Formal solutions of inverse scattering problems, II. *J. Math. Phys.*, 17:1775-1779, 1976.
- [89] R T Prosser. Formal solutions of inverse scattering problems, III. *J. Math. Phys.*, 21:2648-2653, 1980.

- [90] R W Deming and A J Devaney. Diffraction tomography for multi-monostatic ground penetrating radar imaging. *Inverse Problems*, 13:29-45, 1997.
- [91] S Barkeshli and R G Lautzenheizer. An iterative method for inverse scattering problems based on an exact gradient search. *Radio Science*, 29:1119-1130, 1994.
- [92] S Kaczmarz. Angenaehrte Aufloesung von Systemen linearer Gleichungen. *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A.*, σελίδα 355, 1937.
- [93] S. Kawata and Y. Touki and S. Minami. Optical microscopic tomography. Στο *Inverse Optics II*, επιμελητής: A.J. Devaney and R.H.T. Bates. SPIE 558, 1985.
- [94] S X Pan and A C Kak. A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography. *IEEE Trans. Acous., Speech, and Signal Process.*, ASSP-31:1262, 1982.
- [95] T B Hansen and P M Johansen. Inversion scheme for ground penetrating radar that takes into account the air-soil interface. *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing*, Jan. 2000.
- [96] T E Levy and A Witten. Denizens of the Desert. *Archaeology Magazine*, σελίδες 36-40, 1996.
- [97] T Isernia and V Pascazio and R Pierri. A non-linear estimation method in tomographic imaging. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 35:910-23, 1997.
- [98] T. Isernia, G. Leone and R. Pierri. Phase retrieval of radiated fields. *Invere Problems*, 11:183-203, 1995.
- [99] T. Isernia, G. Leone, R. Pierri and F. Soldovieri. On the local minima in phase reconstruction algorithms. *Radio Sci.*, 31:1887-99, 1996.
- [100] T Melamed and E Heyman. Spectral analysis of time-domain diffraction tomography. *Radio Science*, 32:593-603, 1997.
- [101] T Melamed and E Heyman and L B Felsen. Local spectral analysis of short-pulse excited scattering from weakly inhomogeneous media; Part I: Forward scattering. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-47:1208-1217, 1999.
- [102] T Melamed and E Heyman and L B Felsen. Local spectral analysis of short-pulse excited scattering from weakly inhomogeneous media; Part II: Inverse scattering. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-47:1218-1227, 1999.

- [103] U. Frisch. Wave propagation and scattering in random media. Στο *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, επιμελήτης: Bhattacharyya and Reed. Academic Press, New York, 1968.
- [104] W C Chew and Y M Wang. Reconstruction of two-dimensional permittivity using the distorted Born iterative method. *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-29:218-225, 1990.
- [105] X Pan. Unified reconstruction theory for diffraction tomography, with consideration of noise control. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15:2312-2326, 1998.
- [106] Z-Q Lu. JKM perturbation theory, relaxation perturbation theory, and their applications to inverse scattering: Theory and reconstruction algorithms. *IEEE Trans. Ultra., Ferroelec., and Freq. Con.*, UFFC-33:722-730, 1986.
- [107] Z-Q Lu and Y-Y Zhang. Acoustical tomography based on the second-order transform perturbation approximation. *IEEE Trans. Ultra., Ferroelec., and Freq. Con.*, UFFC-43:296-302, 1996.
- [108] A.H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions with Application*. Dover Publication, New York, 1965.