



**Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**«Η ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΕ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ :**

**ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΚΑΙ ΝΕΑ ΠΕΔΙΑ
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ»**

Ιωάννη Γ. Σμυρλή

Πειραιάς 2003

ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΣΜΥΡΛΗΣ

Η ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗ
ΔΕΔΟΜΕΝΑ : ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΚΑΙ ΝΕΑ ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

Υποβληθείσα στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς

Η Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε στη Συνεδρίαση της Γενικής
Συνέλευσης του Τμήματος την 14-6-2002, εγκρίνει την παρούσα διατριβή
ως πληρούσα τις προϋποθέσεις για την απονομή του τίτλου

Διδάκτορα της Στατιστικής

Η Εξεταστική Επιτροπή

Παναγιώτης Παπαϊωάννου,

Καθηγητής, Πρόεδρος του Τμήματος
Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Θεόδωρος Αρτίκης

Καθηγητής του Τμήματος Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς

Δημήτρης Δεσπότης

Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Πληροφορικής του Πανεπιστημίου
Πειραιώς
(Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

Μάρκος Κούτρας

Καθηγητής του Τμήματος Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς

Φώτης Γεωργιακόδης

Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς
(Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

Παναγιώτης Μηλιώτης,

Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Εφηρμοσμένης Πληροφορικής του
Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

Δημήτρης Γκιώκας

Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος
Οικονομικών Επιστημών, Τομέα
Μαθηματικών και Πληροφορικής του
Πανεπιστημίου Αθηνών

Ευχαριστίες

Προς το Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς εκφράζω τις ευχαριστίες μου για την αποδοχή και την υποστήριξη της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας.

Ιδιαίτερος ευχαριστώ τον Πρόεδρο του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης Καθηγητή κ. Παναγιώτη Παπαϊωάννου ο οποίος ανέλαβε, ως μέλος ΔΕΠ του Τμήματος, στο τελικό στάδιο της διατριβής, τη διεκπαιρέωσή της από τη θέση του επιβλέποντος καθηγητή.

Η επίπονη διαδικασία της εκπόνησης της διατριβής αυτής δεν θα είχε ολοκληρωθεί χωρίς την αποφασιστική συμβολή του Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δημήτρη Δεσπότη ο οποίος επέβλεψε και καθοδήγησε όλη την πολύχρονη ερευνητική προσπάθεια. Προς τον κ. Δεσπότη εκφράζω την βαθιά μου ευγνωμοσύνη διότι ως αυστηρός, απαιτητικός και δίκαιος δάσκαλος μου υπέδειξε το δρόμο της διαρκούς προσπάθειας για την κατάκτηση υψηλών στόχων.

Ιδιαίτερος ευχαριστώ ακόμη τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Φώτη Γεωργιακόδη για την πολύτιμη συνδρομή του στη διαμόρφωση του όλου ερευνητικού έργου καθώς επίσης και τον Καθηγητή κ. Δημήτριο Αθανασόπουλο για την υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της προσπάθειας αυτής.

Τέλος στον πτυχιούχο του Τμήματος Πληροφορικής κ. Γιώργο Μαυρογιώργο εκφράζω τις ευχαριστίες μου για τη συμβολή του στην ανάπτυξη του λογισμικού που αναφέρεται στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής.

«Η έγκριση της Διατριβής υπό του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλοί αποδοχή των γνωμών του συγγραφέως»

(Ν. 5343/1932, αρθ. 202)

Περίληψη

Στην προσπάθεια βελτίωσης των συστημάτων παραγωγής, η μέτρηση της αποδοτικότητάς τους αποτελεί σημαντικό πρόβλημα προς επίλυση. Η έννοια της αποδοτικότητας σχετίζεται με την ικανότητα μιας μονάδας να μετασχηματίζει, με γενικώς άγνωστο μηχανισμό παραγωγής, τις εισροές που καταναλίσκει, σε παραγόμενες εκροές. Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος για την αποτίμηση της αποδοτικότητας ενός συνόλου συγκρίσιμων και ομοιογενών μονάδων, πέραν των παραδοσιακών οικονομετρικών μεθόδων, είναι η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (Data Envelopment Analysis-DEA). Η μέθοδος αυτή είναι μια μη παραμετρική μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού η οποία υπολογίζει το όριο της αποδοτικότητας ενός συνόλου μονάδων παραγωγής και επιτυγχάνει να διαχωρίσει αυτές σε αποδοτικές ή μη. Για τις μη αποδοτικές μονάδες παρέχεται δυνατότητα εκτίμησης των περιθωρίων βελτίωσης (είτε με μείωση των εισροών είτε με αύξηση των εκροών τους) ώστε να καταστούν αποδοτικές.

Θεμελιώδης υπόθεση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης είναι ότι τα δεδομένα των επιδόσεων των μονάδων εκφράζονται με συνεχείς μεταβλητές σε κλίμακα πραγματικών αριθμών. Όμως σε πολλά προβλήματα, οι ακριβείς τιμές των δεδομένων δεν είναι γνωστές εξ' αιτίας είτε της φύσεως του προβλήματος είτε των αντικειμενικών δυσκολιών και των σφαλμάτων κατά τη διαδικασία μέτρησής τους. Στις περιπτώσεις αυτές το κλασσικό μοντέλο με το οποίο θεμελιώθηκε η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Οι ερευνητικές προσπάθειες για επέκταση της μεθόδου προς την κατεύθυνση αυτή είναι μέχρι σήμερα περιορισμένες.

Η παρούσα διατριβή, ακολουθώντας νομοτελειακό (deterministic) πλαίσιο, προτείνει για την Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων νέα μεθοδολογική και τεχνική προσέγγιση. Επεκτείνει την μέθοδο σε προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν δεδομένα με ακριβείς και μη ακριβείς τιμές. Η έννοια «μη ακριβή δεδομένα» (imprecise data) στην παρούσα διατριβή δεν συνδέεται με την θεωρία ασαφούς λογικής (fuzzy logic) αλλά αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου τα δεδομένα λαμβάνουν είτε μορφή διαστημάτων με σταθερά όρια εντός των οποίων κυμαίνονται οι πραγματικές άγνωστες τιμές (interval data) είτε έχουν τη μορφή δεδομένων διάταξης (ordinal data).

Με βάση το αρχικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης για ακριβείς τιμές και με τη βοήθεια κατάλληλων μετασχηματισμών, διατυπώνεται κατ' αρχήν ένα γενικότερο μοντέλο, ικανό να χειριστεί δεδομένα μορφής διαστημάτων. Ο κλασικός ορισμός της Περιβάλλουσας Ανάλυσης αποδεικνύεται πως αποτελεί ειδική περίπτωση του νέου αυτού γενικότερου μοντέλου. Σύμφωνα με αυτό, στις μονάδες παρέχεται ελευθερία να ορίζουν τα επιπέδων τιμών εντός των διαστημάτων με τον πλέον ευνοϊκό γι' αυτές τρόπο. Τούτο έχει σαν αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η τιμή της αποδοτικότητας των μονάδων εντός εύρους τιμών, τα όρια (ελάχιστη και μέγιστη τιμή) του οποίου εκτιμώνται με κατάλληλα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού. Τα όρια αυτά χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση των μονάδων σε κλάσεις των ισχυρώς αποδοτικών, αποδοτικών και μη αποδοτικών.

Η νέα μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθείται διευκολύνει την περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων. Συγκεκριμένα επιτρέπει να εξετασθεί η ευαισθησία των τιμών αποδοτικότητας και να διερευνηθεί η ανταγωνιστική ικανότητα των μονάδων με τη βοήθεια δεικτών αντοχής οι οποίοι εκφράζουν ποσοτικά τον βαθμό στον οποίο μια αποδοτική μονάδα διατηρεί την αποδοτικότητά της όταν οι λοιπές ανταγωνιστικές μονάδες βελτιώνουν τις επιδόσεις τους. Επιπλέον, στις περιπτώσεις μη αποδοτικών μονάδων για μία συγκεκριμένη εισροή / εκροή, υπολογίζεται τιμή κατωφλίου υπό μορφή προς επίτευξη στόχου ώστε με την βελτίωση αυτή, οι μη αποδοτικές μονάδες να καταστούν αποδοτικές.

Η ύπαρξη δεδομένων διάταξης σε προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης έχει εξετασθεί από παλαιότερες ερευνητικές εργασίες. Η παρούσα διατριβή διερευνά διεξοδικά την ειδική περίπτωση κατά την οποία το σύνολο των δεδομένων αποτελείται αποκλειστικά από δεδομένα της μορφής αυτής και προτείνει μοντέλα κατάταξης των αποδοτικών μονάδων και εκτίμησης της αποδοτικότητας υπό κοινή οπτική γωνία για όλες τις μονάδες. Η γενικότερη περίπτωση κατά την οποία στο ίδιο σύνολο δεδομένων συνυπάρχουν δεδομένα με ακριβείς και μη ακριβείς τιμές, καλύπτεται με τη διατύπωση ενός γενικευμένου μοντέλου Περιβάλλουσας Ανάλυσης.

Η ανωτέρω μεθοδολογία που επιτρέπει τη χρήση δεδομένων με μη ακριβείς τιμές στη Περιβάλλουσα Ανάλυση, επεκτείνει τις δυνατότητες της μεθόδου και της επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί σε νέα πεδία εφαρμογών. Ο

υπολογισμός της αποδοτικότητας αντί να βασίζεται σε δεδομένα αποτίμησης των επιδόσεων των μονάδων, μπορεί πλέον να πραγματοποιείται επί εκτιμήσεων μελλοντικών επιδόσεων, εκφράζοντας τη αναμενόμενη στο μέλλον αποδοτικότητα των μονάδων. Η χρήση δεδομένων με μη ακριβείς τιμές διευκολύνει επίσης να ενταχθούν σε ένα ανταγωνιστικό πλαίσιο νέες υποθετικές, υπό σχεδίαση μονάδες και γι' αυτές να εκτιμηθεί η αποδοτικότητά τους συγκριτικά με τις υπόλοιπες. Ακόμη επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων στα οποία εμφανίζονται ελλείπουσες τιμές (missing data).

Η παρούσα διατριβή, μέσω της νέας μεθοδολογίας που αναπτύσσει, διευρύνει περαιτέρω τα πεδία εφαρμογών της Περιβάλλουσας Ανάλυσης σε νέους γνωστικούς χώρους. Συγκεκριμένα στο χώρο του Μάρκετινγκ, η θεώρηση των προϊόντων ως επιχειρησιακές προς αξιολόγηση μονάδες, επιτρέπει να αξιοποιηθεί η Περιβάλλουσα Ανάλυση με ασαφή δεδομένα ως μέθοδος σύγκρισης και ποιοτικής αξιολόγησης αυτών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η αξία κάθε προϊόντος διαμορφώνεται από τα επιμέρους χαρακτηριστικά τους τα οποία συνήθως είναι είτε ποιοτικά (αξιοπιστία, οικονομία, ευκολία χρήσης κλπ) είτε εκφράζονται με δεδομένα διαστημάτων (τιμή πώλησης, κόστος χρήσης στην ευνοϊκότερη και δυσμενέστερη περίπτωση κλπ). Με κατάλληλη σύνθεση εισροών (προς ελαχιστοποίηση) και εκροών (προς μεγιστοποίηση), η Περιβάλλουσα Ανάλυση με μη ακριβείς τιμές είναι σε θέση να αναδείξει τα προϊόντα εκείνα τα οποία έχουν την μεγαλύτερη συνολική χρησιμότητα και αξία με το χαμηλότερο δυνατό κόστος (best value for money). Η ανωτέρω ιδέα της αξιολόγησης προϊόντων επιτρέπει περαιτέρω τη διατύπωση πρότασης για ένα πλαίσιο συστήματος υποστήριξης αποφάσεων το οποίο ονομάστηκε «εικονικός σύμβουλος επιλογής- virtual opinion leader». Μέσω αυτού οι καταναλωτές χρησιμοποιώντας το διαδίκτυο (Internet), θα μπορούν να διευρύνουν το γνωστικό τους πεδίο για τα προϊόντα και την αγορά αλλά κυρίως θα μπορούν να αξιολογήσουν ποιοτικά τα προϊόντα ορίζοντας το κατάλληλο μοντέλο σύμφωνα με τις προσωπικές τους προτιμήσεις.

Τα ανωτέρω, αναπτύσσονται σύμφωνα με την ακόλουθη δομή : στο πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο επιχειρείται μια εκτενής επισκόπηση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου και αναφέρονται και σχολιάζονται οι διάφορες επεκτάσεις και ερευνητικές

κατευθύνσεις που μέχρι σήμερα έχουν προταθεί. Στη συνέχεια, η διατριβή διαιρείται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος αναφέρεται στο θεωρητικό υπόβαθρο της νέας μεθοδολογικής προσέγγισης που προτείνεται ενώ το δεύτερο μέρος αφιερώνεται σε πεδία εφαρμογών. Συγκεκριμένα στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα μοντέλα Περιβάλλουσας Ανάλυσης τα οποία χειρίζονται δεδομένα διαστημάτων ενώ στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται περαιτέρω η περίπτωση των δεδομένων διάταξης και επιχειρείται η διατύπωση του γενικού μοντέλου για ασαφή δεδομένα. Στο τέταρτο κεφάλαιο σχολιάζονται νέα πεδία εφαρμογών τα οποία εφαρμόζονται για την αξιολόγηση υποκαταστημάτων Τραπεζών. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αρχικά η ιδέα της κατάταξης προϊόντων ως προς ποιοτικούς δείκτες με τη βοήθεια της Περιβάλλουσας Ανάλυσης, η οποία και εφαρμόζεται στην αξιολόγηση των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας της Ελληνικής αγοράς. Στη συνέχεια αναλύεται ένα πλαίσιο αξιολόγησης προϊόντων στο διαδίκτυο.

Τέλος, στα πλαίσια της διατριβής αυτής, για την επίλυση προβλημάτων της Περιβάλλουσας Ανάλυσης και ιδιαιτέρως εκείνων με δεδομένα με μη ακριβείς τιμές, αναπτύχθηκε ειδικό λογισμικό το οποίο λειτουργεί ως πρόσθετο βοηθητικό εργαλείο (add-in) ενσωματωμένο στο περιβάλλον του προγράμματος Microsoft Excel. Το λογισμικό αυτό παρουσιάζεται συνοπτικά σε ξεχωριστή ενότητα. Στον επίλογο επιχειρείται η ανακεφαλαίωση της ερευνητικής προσπάθειας, διατυπώνονται συμπεράσματα και προτείνονται νέες ερευνητικές κατευθύνσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή, επισκόπηση της Περιβάλλουσας

Ανάλυσης Δεδομένων

1.1	Το πρόβλημα της μέτρησης της αποδοτικότητας των επιχειρησιακών μονάδων	11
1.2	Σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων, όριο αποδοτικότητας, κλίμακες αποδόσεων, προσανατολισμός εισροών / εκροών	14
1.3	Θεωρητική θεμελίωση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης	
1.3.1	Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού της Περιβάλλουσας Ανάλυσης υπό τη συνθήκη κλίμακας σταθερών αποδόσεων	18
1.3.2	Εναλλακτική διατύπωση του γραμμικού προβλήματος Περιβάλλουσας Ανάλυσης	22
1.3.3	Περαιτέρω διερεύνηση της αποδοτικότητας των μονάδων	24
1.4	Ειδικά θέματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης	
1.4.1	Μεταβαλλόμενη κλίμακα αποδόσεων, το μοντέλο Banker, Charnes, Cooper - BCC	27
1.4.2	Κατάταξη των αποδοτικών μονάδων	30
1.4.3	Έκφραση προτιμήσεων σε προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης	34
1.4.4	Εκτίμηση αποδοτικότητας σε δεδομένα χρονολογικών σειρών	37
	Βιβλιογραφία	39

Μέρος Ι: Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με ασαφή δεδομένα

Κεφάλαιο 2: Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα διαστημάτων

2.1	Εισαγωγή	47
2.2	Το μοντέλο για δεδομένα διαστημάτων	51
2.3	Εκτίμηση των ορίων των τιμών της αποδοτικότητας	57
2.4	Ταξινόμηση των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα	65
2.5	Κατάταξη των αποδοτικών μονάδων	68
2.6	Δείκτες αντοχής της αποδοτικότητας	70
2.7	Ανάλυση των ορίων βελτίωσης των μη αποδοτικών μονάδων	75
2.8	Η περίπτωση των δεδομένων διαστημάτων υπό την προϋπόθεση της μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων	82
	Βιβλιογραφία	86

Κεφάλαιο 3: Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα διάταξης.

Το γενικευμένο μοντέλο για όλους τους τύπους των δεδομένων.

3.1	Επισκόπηση της βιβλιογραφίας	89
3.2	Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης	92
3.3	Κατάταξη των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα	100
3.4	Περαιτέρω διάταξη των αποδοτικών μονάδων	102
3.5	Κοινές τιμές επιπέδων διάταξης για όλες τις μονάδες	104
3.6	Το γενικευμένο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης	109
3.7	Εκτίμηση της σφαιρικής αποδοτικότητας στη γενική περίπτωση των ασαφών δεδομένων	115
	Βιβλιογραφία	118

Μέρος II : Εφαρμογές

Κεφάλαιο 4: Η Περιβάλλουσα Ανάλυση δεδομένων σε νέα πεδία εφαρμογών

4.1	Η Περιβάλλουσα Ανάλυση σε δεδομένα προβλέψεων	123
4.2	Τοποθέτηση νέων μονάδων	135
4.3	Χειρισμός δεδομένων με ελλείπουσες τιμές	138
	Βιβλιογραφία	144

Κεφάλαιο 5: Η Περιβάλλουσα Ανάλυση για την κατάταξη προϊόντων ως προς ποιοτικούς δείκτες

5.1	Κατάταξη προϊόντων με βάση το κριτήριο της συμφερότερης αγοράς.	145
5.2	Αξιολόγηση των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας της Ελληνικής αγοράς	149
5.3	Ο «εικονικός σύμβουλος επιλογής» : Ένα πλαίσιο αξιολόγησης και επιλογής προϊόντων στο Διαδίκτυο	170
	Βιβλιογραφία	183

Κεφάλαιο 6: Λογισμικό για την επίλυση προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης

185

Συμπεράσματα, ερευνητικές κατευθύνσεις

195

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή, επισκόπηση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων

1.1 Η μέτρηση της αποδοτικότητας των μονάδων παραγωγής

Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στις μεθόδους βελτίωσης των μονάδων παραγωγής προκειμένου αυτές να λειτουργούν αποδοτικά στο ανταγωνιστικό χώρο της παγκόσμιας οικονομίας. Προϋπόθεση για τη βελτίωση των μονάδων αυτών αποτελεί η μελέτη της αποδοτικότητάς τους η οποία τεχνικά πραγματοποιείται από ένα σύνολο στοχαστικών και νομοτελειακών διαδικασιών το οποίο ονομάζεται **ανάλυση ορίου αποδοτικότητας** (frontier analysis). Το σύνολο αυτό αποτελεί ένα ενιαίο πλαίσιο αξιολόγησης το οποίο αποδέχεται τις ιδιαιτερότητες κάθε επιμέρους συστήματος και αποδίδει με δίκαιο και αντικειμενικό τρόπο την πραγματική συνολική επίδοση των μονάδων. Εντός του πλαισίου αυτού, κυρίαρχο ρόλο παίζει η ποσοτική εκτίμηση της αποδοτικότητας κάθε μονάδας.

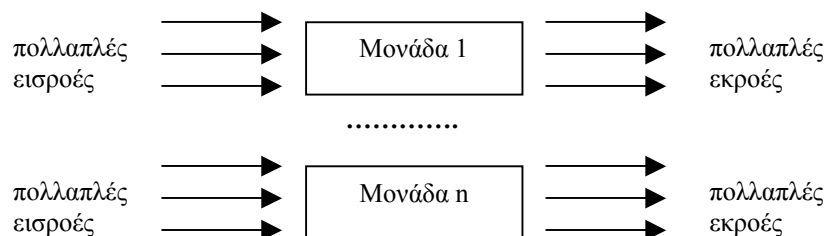
Ως **αποδοτικότητα** (efficiency) ορίζεται η ικανότητα μιας μονάδας να μετασχηματίζει αποτελεσματικά, με γενικώς άγνωστο μηχανισμό παραγωγής, τις εισροές που καταναλίσκει, σε παραγόμενες εκροές. Οι παραδοσιακές οικονομετρικές μέθοδοι [Cobb and Douglas (1928)], προκειμένου να εκτιμήσουν την αποδοτικότητα, απέβλεπαν στο να υπολογίσουν θεωρητικά αναλυτικές **συναρτήσεις παραγωγής** στις οποίες στη συνέχεια εφαρμόζαν τα πραγματικά δεδομένα. Η προφανής λόγω πολυπλοκότητας δυσκολία της εκτίμησης των συναρτήσεων παραγωγής για κάθε διαφορετικό πρόβλημα ξεχωριστά και τα σφάλματα στα δεδομένα των εμπειρικών παρατηρήσεων, προέτρεψαν τον Farrell (1957) να ανατρέψει την προσέγγιση αυτή και να διατυπώσει νέα μεθοδολογία εκτίμησης της αποδοτικότητας. Η μεθοδολογία αυτή αγνοεί την εσωτερική διαδικασία παραγωγής, θεωρώντας ότι η

συνάρτηση που την εκφράζει είναι πολύπλοκη και συνεπώς αδύνατον να εκτιμηθεί στη γενική της περίπτωση. Βασίζεται μόνο στις εμπειρικές μετρήσεις των εισροών και εκροών, οι οποίες σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις είναι μετρήσιμες. Ο Farrell, βασιζόμενος σε παλαιότερες μελέτες [Knight (1933)] εξέφρασε την αποδοτικότητα των μονάδων παραγωγής με το **δείκτη συνολικής παραγωγικότητας** (total productivity factor) ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος των συνολικών εκροών προς τις συνολικές εισροές :

$$\frac{\text{Συνολικές Εκροές}}{\text{Συνολικές εισροές}}$$

Το έργο του Farrell θεωρείται ως το σημείο εκκίνησης της όλης προσπάθειας διότι εισήγαγε τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της αποδοτικότητας και ανέλυσε αυτήν σε επιμέρους στοιχεία.

Σε συνέχεια του έργου του Farrell, οι Charnes, Cooper και Rhodes (1978) θεμελίωσαν την πολύ διαδεδομένη πλέον «Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων - Data Envelopment Analysis - DEA», εισάγοντας μια νέα τεχνική αποτίμησης της αποδοτικότητας. Η τεχνική αυτή είναι μία μη παραμετρική μέθοδος, βασιζόμενη σε μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού, η οποία επιτυγχάνει να εκτιμήσει ποσοτικά την μέγιστη τιμή της σχετικής αποδοτικότητας των παραγωγικών μονάδων. Η Περιβάλλουσα Ανάλυση υποθέτει την ύπαρξη ενός συνόλου μονάδων παραγωγής, των Μονάδων Απόφασης (Decision Making Units – DMUs), οι οποίες λειτουργούν σε ένα ενιαίο πλαίσιο, είναι συγκρίσιμες, ομοιογενείς και καταναλώνουν τις ίδιες πολλαπλές εισροές και παράγουν τις ίδιες πολλαπλές εκροές, όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα :



Τόσο οι εισροές όσο και οι εκροές είναι ποικιλόμορφες, μετρήσιμες σε διαφορετικές συνήθως κλίμακες μέτρησης και οριζόμενες αναλόγως της φύσης του προβλήματος και της διαθεσιμότητας των δεδομένων. Οι εισροές αποτελούν «αγαθά» προς εξοικονόμηση (μικρότερα επίπεδα κατανάλωσης είναι περισσότερο επιθυμητά), οι δε εκροές «αγαθά» προς μεγιστοποίηση (μεγαλύτερα επίπεδα παραγωγής είναι περισσότερο επιθυμητά). Η ύπαρξη πολλαπλών εισροών και εκροών καθιστά τις συγκρίσεις των μονάδων δύσκολες, δεδομένου ότι μία μονάδα είναι δυνατόν να υπερέχει άλλων σε μερικές μόνο εισροές ή εκροές αλλά ταυτοχρόνως να υστερεί σε άλλες.

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με τη συνεισφορά πολλών ερευνητών έχει επεκταθεί και εφαρμοσθεί σε πολλούς γνωστικούς χώρους. Η έννοια των Μονάδων Απόφασης έχει πλέον διευρυνθεί και λαμβάνει κάθε φορά συγκεκριμένη υπόσταση, αναλόγως του πεδίου εφαρμογής. Σε ποικίλες εφαρμογές της Περιβάλλουσας Ανάλυσης ως μονάδες θεωρούνται τα διοικητικά τμήματα μιας επιχείρησης, οι οργανισμοί του δημοσίου, οι σχολικές και οι πανεπιστημιακές μονάδες, τα υποκαταστήματα τραπεζών, ακόμα και οι προσφερόμενες υπηρεσίες, οι εργαζόμενοι, τα επιχειρηματικά σχέδια, οι διαδικασίες, τα χαρτοφυλάκια, τα καταναλωτικά προϊόντα, τα ασφαλιστικά συμβόλαια, οι πιστωτικές κάρτες κλπ.

Οι πλέον χαρακτηριστικές εφαρμογές και μερικές ειδικές τεχνικές της μεθόδου παρουσιάζονται στο ειδικό τεύχος *Annals of Operations Research* 1997, Vol. 73 (1997) το οποίο είναι αφιερωμένο στην Περιβάλλουσα Ανάλυση. Οι εργασίες των Seiford και Lewin (1990), Ali και Seiford (1993), Cooper, Seiford, Tone (1999) αποτελούν τις πλέον αναλυτικές επισκοπήσεις της μεθόδου. Η εργασία των Dyson, Allen et.al (2001) ανακεφαλαιώνει τα πλέον σημαντικά προβλήματα που ανακύπτουν όταν η Περιβάλλουσα Ανάλυση χρησιμοποιείται σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές και προτείνει τρόπους αντιμετώπισής τους.

1.2 Σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων, όριο αποδοτικότητας, κλίμακες αποδόσεων, προσανατολισμός εισροών/εκροών

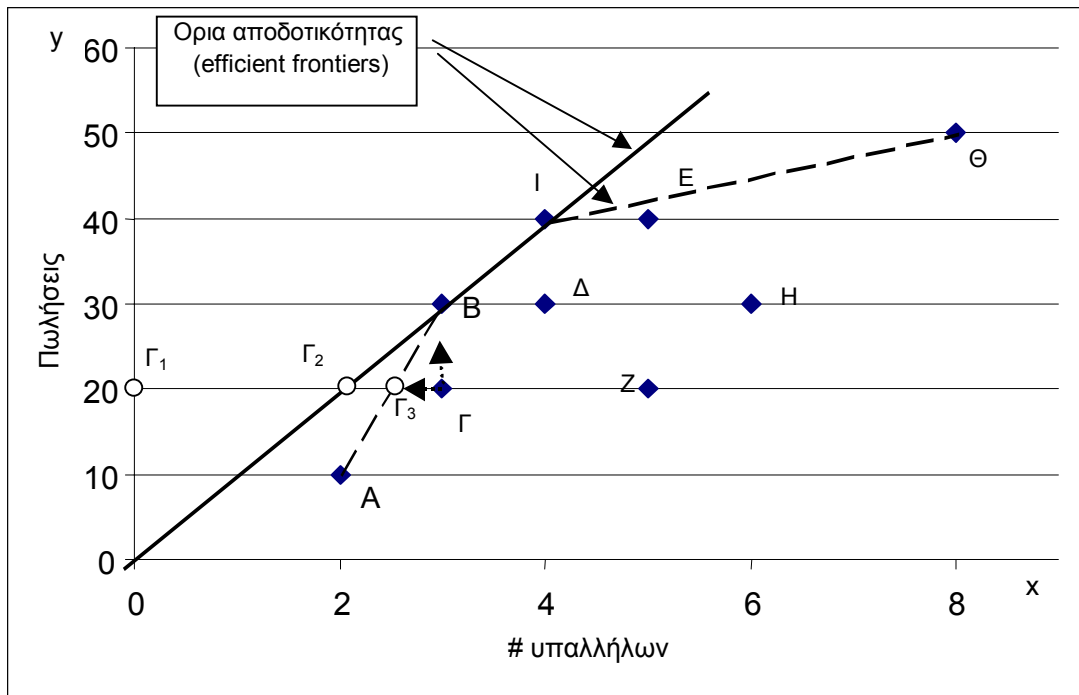
Για την κατανόηση των βασικών εννοιών της Περιβάλλουσας Ανάλυσης, πριν από τον τυπικό ορισμό των σχετικών εννοιών, παραθέτουμε το ακόλουθο απλό αριθμητικό παράδειγμα με μία εισροή και μια εκροή: οκτώ υποκαταστήματα A,B,..,I μιας επιχείρησης αξιολογούνται ως προς την αποδοτικότητά τους η οποία μετριέται με τον δείκτη των πωλήσεων ανά υπάλληλο, δείκτης ο οποίος έχει συχνή χρήση και αναφορά σε προβλήματα διοίκησης επιχειρήσεων και ανάλυσης επενδύσεων. Ως μοναδική εισροή που εκφράζει τους πόρους του υποκαταστήματος θεωρούμε τον αριθμό των υπαλλήλων και ως μοναδική εκροή, το σύνολο των πωλήσεων (σε εκατομμύρια δραχμές) τις οποίες το υποκατάστημα επιτυγχάνει. Στον Πίνακα 1.1 εμφανίζεται το σύνολο των δεδομένων των υποκαταστημάτων τα οποία στο παράδειγμα αυτό παίζουν το ρόλο των προς αξιολόγηση επιχειρησιακών μονάδων. Στην τρίτη γραμμή του πίνακα υπολογίζεται ο λόγος «Πωλήσεις / Υπάλληλο» ο οποίος εκφράζει ποσοτικά την αποδοτικότητα της κάθε μονάδας ως ο λόγος της εκροής προς την εισροή. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά, οι μονάδες B και I είναι οι πλέον αποδοτικές με λόγο 10 και η μονάδα Z η λιγότερο αποδοτική με λόγο 0,4. Στην τελευταία γραμμή εμφανίζεται η ο λόγος της αποδοτικότητας κάθε μονάδας ως προς την αποδοτικότητα της μονάδας B (σχετική αποδοτικότητα).

Πίνακας 1.1 - Αριθμητικό παράδειγμα μιας μονάδας εισόδου και μιας εξόδου

Υποκατάστημα	A	B	Γ	Δ	Ε	Z	H	Θ	I
# υπαλλήλων (x)	2	3	3	4	5	5	6	8	4
Πωλήσεις (y)	10	30	20	30	40	20	30	50	40
Πωλήσεις/Υπάλληλο	5,00	10,00	6,67	7,50	8,00	4,00	5,00	6,25	10,00
Σχετική Αποδοτικότητα	0,5	1	0,67	0,75	0,8	0,4	0,5	0,625	1

Τα δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος αναπαριστώνται γραφικά σε δύο άξονες στο ακόλουθο Σχήμα 1.1.

Σχήμα 1.1 - Γραφική παράσταση των μονάδων του παραδείγματος και του ορίου αποδοτικότητας.



Η κλίση της ευθείας (γωνία με τον άξονα x) που συνδέει την αρχή των αξόνων και το κάθε σημείο, αναπαριστά τον λόγο «Πωλήσεις / # Υπαλλήλων» δηλαδή την αποδοτικότητα της μονάδας. Όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση αυτή τόσο μεγαλύτερη θεωρείται η αποδοτικότητα του κάθε υποκαταστήματος. Τη μεγαλύτερη κλίση (αποδοτικότητα) αυτή έχουν τα υποκαταστήματα B και I τα οποία παρουσιάζουν αναλογικά τις μεγαλύτερες πωλήσεις σε σχέση με τον αριθμό υπαλλήλων που διαθέτουν. Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία με την μεγαλύτερη σχετική αποδοτικότητα, χαρακτηριζόμενα ως **αποδοτικά** (σημεία B και I), ονομάζεται **όριο αποδοτικότητας** (efficient frontier) και περιβάλλει (envelops) τα σημεία που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες μονάδες με την έννοια ότι αυτά βρίσκονται δεξιά και κάτω από την ευθεία αυτή. Η ιδιότητα αυτή του ορίου αποδοτικότητας να περιβάλλει το σύνολο των σημείων των μονάδων, έχει δώσει το όνομά της στην μέθοδο. Ο χώρος των σημείων που περιβάλλεται από το όριο αποδοτικότητας ονομάζεται **σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων**

(production possibility set). Σχετικά με το ανωτέρω Σχήμα 1.1 διευκρινίζεται ότι η τεθλασμένη γραμμή ΑΒΙΘ που εμφανίζεται ως διακεκομμένη, αποτελεί επίσης όριο αποδοτικότητας το οποίο όμως αντιστοιχεί στην περίπτωση μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Το όριο αποδοτικότητας εξυπηρετεί την οριοθέτηση στόχων και αποτελεί σημείο αναφοράς μέτρησης (benchmark) για τις μη αποδοτικές μονάδες. Η απόσταση μιας μη αποδοτικής μονάδας από το όριο αποδοτικότητας εκφράζει σε ποιο βαθμό αυτή μπορεί να βελτιωθεί προκειμένου να καταστεί αποδοτική. Τα σημεία προβολής των μη αποδοτικών μονάδων επί του ορίου αποδοτικότητας αποτελούν στόχους για την επίτευξη της αποδοτικότητας. Στο χώρο των δύο διαστάσεων όπως αυτός του παραδείγματος, κάθε μη αποδοτική μονάδα καθίσταται αποδοτική με δύο ισοδύναμους τρόπους : είτε με **προσανατολισμό εισροών** (input-orientation), μειώνοντας τις εισροές της διατηρώντας σταθερές τις εκροές της είτε με **προσανατολισμό εκροών** (output-orientation), αυξάνοντας τις εκροές της διατηρώντας σταθερές τις εισροές της. Για παράδειγμα η μη αποδοτική μονάδα Γ προβάλλεται επί του ορίου αποδοτικότητας στα σημεία Γ₂ (2,20) και Β (3,30) τα οποία αντιστοιχούν σε μείωση των εισροών κατά 1 και αύξηση των εκροών κατά 10 μονάδες αντιστοίχως. Τα σημεία Γ₂,Β αποτελούν μονάδες «στόχους» για την μονάδα Γ και ονομάζονται **εικονικές μονάδες** (virtual DMUs). Κάθε σημείο του τμήματος Γ₂Β επί του ορίου αποδοτικότητας εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των σημείων Γ₂ και Β και ορίζει μία νέα εκδοχή βελτίωσης της μονάδας Γ, πέραν αυτών των Γ₂, Β. Στις περιπτώσεις όπου μία μονάδα βελτιώνει τις επιδόσεις της και καθίσταται αποδοτική, η σχετική αποδοτικότητα των υπολοίπων δεν μεταβάλλεται.

Η απεικόνιση του ορίου αποδοτικότητας που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1 με έντονη ευθεία γραμμή, στηρίζεται στην υπόθεση της **κλίμακας σταθερών των αποδόσεων** (Constant Return to Scale – CRS). Σύμφωνα με αυτήν, κάθε μεταβολή της εισροής x κατά ένα σταθερό παράγοντα λ (από x σε λx), η εκροή y μεταβάλλεται κατά τον ίδιο παράγοντα (από y σε λy).

λγ) . Όμως, η υπόθεση της κλίμακας των σταθερών αποδόσεων δεν ισχύει πάντοτε σε όλες τις εφαρμογές. Σε άλλες περιπτώσεις, η φύση του προβλήματος επιτρέπει στις μονάδες να μην δεσμεύουν τις εκροές τους. Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν στην **κλίμακα μεταβαλλόμενων αποδόσεων** (Variable Return to Scale – VRS) κατά την οποία το όριο αποδοτικότητας ορίζεται από την κυρτή τεθλασμένη γραμμή $ABI\Theta$ (κυρτή θήκη – convex hull, στη γενική περίπτωση πολλαπλών εισροών, εκροών) και ως αποδοτικές εμφανίζονται πλέον οι μονάδες A, B, I και Θ . Μάλιστα το τμήμα AB αντιστοιχεί σε **κλίμακα αυξανόμενων αποδόσεων** (IRS-μικρές αυξήσεις στις εισροές συνεπάγονται μεγαλύτερης κλίμακας αυξήσεις στις εκροές) ενώ το τμήμα I Θ σε **κλίμακα μειούμενων αποδόσεων** (DRS-αυξήσεις επί των εισροών συνεπάγονται μικρότερης κλίμακας αυξήσεις επί των εκροών). Οι μονάδες B, I εξακολουθούν και στην περίπτωση αυτή να παραμένουν αποδοτικές ενώ ως αποδοτικές εμφανίζονται επιπλέον και οι A, Θ . Η μη αποδοτική μονάδα Γ προβάλλεται επί του νέου ορίου αποδοτικότητας, στο σημείο Γ_3 αντί του Γ_2 στην περίπτωση σταθερής κλίμακας αποδόσεων. Οι μονάδες Γ, Γ_2 και Γ_3 παράγουν όλες το ίδιο επίπεδο εκροής και διαφέρουν μόνο κατά το επίπεδο εισροής που καταναλώνουν. Ως αποδοτικότητα του σημείου Γ, με την υπόθεση προσανατολισμού εισροών, ορίζεται ο λόγος μείωσης των εισροών μέχρις του ορίου αποδοτικότητας, δηλαδή ο $(\Gamma_1\Gamma_2)/(\Gamma_1\Gamma)$. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων, η τιμή της αποδοτικότητας μεταβάλλεται στις περιπτώσεις διαφορετικού προσανατολισμού εισροών και εκροών, σε αντίθεση με τη σταθερή κλίμακα αποδόσεων όπου η τιμή της αποδοτικότητας παραμένει η ίδια ανεξαρτήτως του προσανατολισμού. Τούτο είναι εμφανές για την περίπτωση της μονάδας Γ η οποία για προσανατολισμό εκροών προβάλλεται επί του τμήματος του ορίου αποδοτικότητας σταθερής κλίμακας αποδόσεων στο σημείο B, ενώ για προσανατολισμό εισροών προβάλλεται επί του ορίου μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων Γ_3 . Στη περίπτωση αυτή η αποδοτικότητα είναι ο λόγος $(\Gamma_1\Gamma_3)/(\Gamma_1\Gamma)$.

1.3. Θεωρητική θεμελίωση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της Περιβάλλουσας Ανάλυσης και διατυπώνονται τα σχετικά με αυτήν μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού.

1.3.1 Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού της Περιβάλλουσας Ανάλυσης υπό τη συνθήκη κλίμακας σταθερών αποδόσεων.

Σύμφωνα με τη θεμελίωση της μεθόδου στην εργασία των Charnes, Cooper, Rhodes (1978), η σχετική αποδοτικότητα μίας μονάδας j_0 , εκ των υπό αξιολόγηση μονάδων οι οποίες παράγουν $Y^j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}) \in R_+^s$ εκροές $j=1, \dots, n$ από $X^j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \in R_+^m$ εισροές, ορίζεται από το λόγο

$$h_{j_0} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}},$$

δηλαδή από το πηλίκο του σταθμισμένου αθροίσματος των εκροών της προς το σταθμισμένο άθροισμα των εισροών της. Οι συντελεστές στάθμισης u_r και v_i είναι άγνωστοι προς υπολογισμό παράμετροι ενώ οι τιμές των εισροών x_{ij} και των εκροών y_{rj} είναι γνωστές και εκφράζονται με ακριβείς πραγματικούς αριθμούς. Ο υπολογισμός της αποδοτικότητας h_{j_0} της μονάδας j_0 , με την προϋπόθεση ότι ισχύει κλίμακα σταθερών αποδόσεων, πραγματοποιείται από το μαθηματικό μοντέλο :

$$\begin{aligned} \max h_{j_0} &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}} \\ \text{s.t.} & \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, j = 1, \dots, n \\ u_r, v_i &\geq 0 \quad \forall r, i \end{aligned} \quad (1.1)$$

Σε αυτό ζητείται να εκτιμηθούν οι συντελεστές στάθμισης u_r και v_i οι τιμές των οποίων μεγιστοποιούν την τιμή της αποδοτικότητας της μονάδας j_0 .

Το σύνολο των n περιορισμών
$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, \dots, n$$
 φράσσει το πρόβλημα

και εξασφαλίζει για όλες τις μονάδες τιμές αποδοτικότητας θετικές και μικρότερες μίας σταθεράς (συνήθως του αριθμού 1), επιτυγχάνοντας με τον τρόπο αυτό συγκριτική εκτίμηση της αποδοτικότητας. Το μοντέλο (1.1) επιλυόμενο n φορές, μία για κάθε μονάδα ξεχωριστά, υπολογίζει τις τιμές της αποδοτικότητας της υπό εκτίμηση μονάδας. Οι μονάδες εκείνες οι οποίες επιτυγχάνουν με μία τουλάχιστον βέλτιστη θετική λύση του (1.1), έστω $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ με $\mathbf{u}^* > 0, \mathbf{v}^* > 0$, τιμή αποδοτικότητας ίση με 1 ($h_j = 1$) ορίζονται ως **αποδοτικές** (CCR-efficient), ενώ οι υπόλοιπες **μη αποδοτικές**. Προκειμένου να χαρακτηρισθεί μία μονάδα ως αποδοτική, για την επίλυση του προβλήματος της, ο περιορισμός $u_r, v_i \geq 0$ αντικαθίσταται από τον περιορισμό $u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i$, όπου ε είναι μία σταθερά. Η σταθερά αυτή ορίζεται ως μικρότερος δυνατός θετικός αριθμός (infinitesimal, non-Archimedean) (βλ. Ali, Seiford (1993)) ο οποίος λαμβάνει πολύ μικρές τιμές πχ. 10^{-6} . Η τεχνική αυτή εξασφαλίζει για τις προς υπολογισμό μεταβλητές $v_i, u_r, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s$ μη μηδενικές, θετικές τιμές. Οι παράγοντες $u_r y_{rj}, v_i x_{ij}$ ονομάζονται **εικονικά βάρη** (virtual weights) ενώ τα σταθμισμένα αθροίσματα των συνολικών εισροών και εκροών $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}$ **εικονικές εισροές** (virtual inputs) και **εικονικές εκροές** (virtual outputs) αντιστοίχως.

Το πρόβλημα (1.1) είναι μη γραμμικό πρόβλημα και λαμβάνει την ισοδύναμη γραμμική μορφή (1.2) (βλ. Cooper, Seiford, Tone (1999) p. 24) με τη βοήθεια αντιστρέψιμου μετασχηματισμού (ορισμός του παρανομαστή της αντικειμενικής συνάρτησης ίσου με 1 και μεταφορά του στους περιορισμούς).

$$\begin{aligned}
 \max h_{j_0} &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Το ανωτέρω γραμμικό πρόγραμμα (1.2) για την μονάδα j_0 έχει την ακόλουθη ανεπτυγμένη μορφή ως εξής :

$$\begin{aligned}
 \max h_{j_0} &= u_1 y_{1j_0} + u_2 y_{2j_0} + \dots + u_s y_{sj_0} \\
 \text{s.t.} \\
 v_1 x_{1j_0} &+ v_2 x_{2j_0} + \dots + v_m x_{mj_0} + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \\
 -v_1 x_{11} &- v_2 x_{21} - \dots - v_m x_{m1} + u_1 y_{11} + u_2 y_{12} + \dots + u_s y_{1s} \leq 0 \\
 -v_1 x_{12} &- v_2 x_{22} - \dots - v_m x_{m2} + u_1 y_{21} + u_2 y_{22} + \dots + u_s y_{2s} \leq 0 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 -v_1 x_{1n} &- v_2 x_{2n} - \dots - v_m x_{mn} + u_1 y_{n1} + u_2 y_{n2} + \dots + u_s y_{ns} \leq 0 \\
 v_1 & \geq \varepsilon \\
 & v_2 \geq \varepsilon \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & v_m \geq \varepsilon \\
 & u_1 \geq \varepsilon \\
 & u_2 \geq \varepsilon \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & u_s \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Στο γραμμικό πρόγραμμα (1.2), αντί της μεγιστοποίησης του λόγου

$$h_{j_0} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}},$$

ζητείται η μεγιστοποίηση των εικονικών εκροών με την

προϋπόθεση ότι οι εικονικές εισροές διατηρούνται σταθερές (ίσες με 1). Στο πρόβλημα αυτό οι τιμές x_{ij}, y_{rj} που εκφράζουν τις επιδόσεις των μονάδων στις

εισροές / εκροές είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί ενώ άγνωστες προς υπολογισμό είναι οι $m+s$ το πλήθος συντελεστές στάθμισης $v_i, u_r \quad i=1,..m, r=1,..s$.

Από την παρατήρηση ότι οι τιμές $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ της βέλτιστης λύσης στο γραμμικό πρόβλημα (1.2) μιας μη αποδοτικής μονάδας j_0 , καθιστούν αποδοτική τουλάχιστον μία άλλη μονάδα $j \in \{1,2,..n\}$, προκύπτει το σύνολο

$$E_0 = \left\{ j : \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} = \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \right\}$$

το οποίο ορίζεται ως **σύνολο αναφοράς** (reference set, peer group). Η μη επίτευξη της αποδοτικότητας της μονάδας j_0 οφείλεται στην ύπαρξη των μονάδων του συνόλου E_0 υπό την έννοια ότι οι επιδόσεις τους είναι εκείνες που αναγκάζουν την μονάδα j_0 να εμφανισθεί ως μη αποδοτική συγκριτικά με αυτές. Μια αποδοτική μονάδα είναι δυνατόν να εμφανίζεται στα σύνολα αναφοράς περισσότερων μη αποδοτικών μονάδων καθιστώντας με τον τρόπο αυτό την βέλτιστη λύση της μη μοναδική.

Σύμφωνα με τη βασική θεωρία γραμμικού προγραμματισμού, στο πρόβλημα (1.2) αντιστοιχεί ένα δυϊκό πρόβλημα το οποίο προκύπτει από τον Πίνακα 1.1 όπου σε κάθε περιορισμό του προβλήματος (1.2) αντιστοιχεί μία κύρια μεταβλητή του δυϊκού (1.3) και αντιστρόφως.

Πίνακας 1.1 - Αντιστοιχίες μεταξύ κύριου και δυϊκού προβλήματος

Περιορισμός	Κύρια μεταβλητή	Κύρια μεταβλητή	Περιορισμός
$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} = 1$	θ	$v \geq 0$	$\theta X^{j_0} - \lambda X^j \geq 0$
$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$	$\lambda \in R_+^n$	$u \geq 0$	$Y^{j_0} - \lambda Y^j \leq 0$

Από τον ανωτέρω μετασχηματισμό, το δυϊκό πρόβλημα του (1.2) για τη μονάδα j_0 είναι το εξής :

$$\begin{array}{l}
 \min \theta^* = \theta \\
 \theta X^{j_0} - \lambda X^j \geq 0 \\
 Y^{j_0} - \lambda Y^j \leq 0 \\
 \lambda \in R_+^n, j = 1, \dots, n
 \end{array} \quad (1.3)$$

Η μορφή (1.2) του μοντέλου Περιβάλλουσας Ανάλυσης ονομάζεται μορφή **πολλαπλασιαστών** (multipliers) αλλά και **αμυντική μορφή** (defensive LP model) διότι οι υπόλοιπες μονάδες, μέσω των τιμών των συντελεστών u, v , υπερασπίζονται την αποδοτικότητά τους.

1.3.2 Εναλλακτική διατύπωση του γραμμικού προβλήματος Περιβάλλουσας Ανάλυσης

Εναλλακτικά ως προς την διατύπωση των Charnes, Cooper, Rhodes (1978), η ανωτέρω μορφή (1.3) του γραμμικού προγράμματος της Περιβάλλουσας Ανάλυσης, είναι δυνατόν να προκύψει απ' ευθείας εκ της θεωρητικής θεμελίωσης της Περιβάλλουσας Ανάλυσης ως εξής :

Σε μία διαδικασία παραγωγής, θεωρούμε ότι οι προς αξιολόγηση μονάδες αναπαριστώνται ως σημεία (X^j, Y^j) ενός $m+s$ διαστάσεων διανυσματικού χώρου (τα m, s δηλώνουν τον αριθμό των διαστάσεων που απαιτούνται για να εκφράσουν τις εισροές και εκροές αντιστοίχως), όπου $X^j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \in R_+^m$, $Y^j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}) \in R_+^s$ αποτελούν τις εμπειρικά εκτιμώμενες πολλαπλές εισροές και εκροές των μονάδων $j=1, \dots, n$. Υπό την προϋπόθεση της σταθερής κλίμακας αποδόσεων (CRS), το σύνολο

$$\Pi_{CRS} = \{(X, Y) \in R_+^{m+s} \mid X \geq \lambda X^j, \quad Y \leq \lambda Y^j, \quad \lambda \in R_+^n\} \quad (1.4)$$

εκφράζει το **σύνολο των παραγωγικών δυνατοτήτων** (production possibility set), του συνόλου δηλαδή των σημείων τα οποία περιβάλλει το όριο αποδοτικότητας. Οι κυριότερες ιδιότητες του συνόλου Π_{CRS} είναι :

A1	Κυρτότητα	Εάν $(X^j, Y^j) \in \Pi_{CRS}$, $j=1, \dots, n$ τότε $(\sum_{j=1}^n \lambda_j X^j, \sum_{j=1}^n \lambda_j Y^j) \in \Pi_{CRS}$ για όλους τους θετικούς δείκτες λ_j για τους οποίους $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$
A2	Σημεία με μεγαλύτερες εισροές ή με μικρότερες εκροές από κάποιο σημείο του Π_{CRS} αποτελεί επίσης σημείο του Π_{CRS}	i. Εάν $(X^j, Y^j) \in \Pi_{CRS}$ και $X^{*j} \geq X^j$, τότε $(X^{*j}, Y^j) \in \Pi_{CRS}$ ii. Εάν $(X^j, Y^j) \in \Pi_{CRS}$ και $Y^{*j} \leq Y^j$, τότε $(X^j, Y^{*j}) \in \Pi_{CRS}$
A3	Σημείο που είναι πολλαπλάσιο άλλου, είναι επίσης σημείο του Π_{CRS}	Εάν $(X^j, Y^j) \in \Pi_{CRS}$ τότε $(kX^j, kY^j) \in \Pi_{CRS}, \forall k > 0$.

Υπο την προϋπόθεση του προσανατολισμού εισροών (ομοίως αποδεικνύεται και για την περίπτωση προσανατολισμού εκροών), ένα σημείο (X^{j_0}, Y^{j_0}) χαρακτηρίζεται ως μη αποδοτικό εάν υπάρχει άλλο σημείο του συνόλου εφικτής παραγωγής Π_{CRS} , έστω το (X^k, Y^k) , το οποίο να παράγει την ίδια ή μεγαλύτερη ποσότητα εκροών ($Y^k \geq Y^{j_0}$) από ποσότητα εισροών, μειωμένη αναλογικά, ταυτοχρόνως (radial contraction) για όλες τις επιμέρους εισροές ($X^k \leq \theta X^{j_0}, 0 \leq \theta \leq 1$). Εάν υποθέσουμε ότι στο Π_{CRS} υπάρχουν πολλά τέτοια σημεία (X^k, Y^k) με την ιδιότητα αυτή και αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές θ , τότε ως αποδοτικότητα του σημείου j_0 ορίζεται η ελάχιστη από τις τιμές αυτές. Τούτο εκφράζεται ως

$$h_{j_0} = \min \{ \theta \mid X^k \leq \theta X^{j_0}, Y^k \geq Y^{j_0}, (X^k, Y^k) \in \Pi_{CRS} \} \quad (1.5)$$

Με βάση τον ορισμό (1.4) του συνόλου Π_{CRS} , η ανωτέρω έκφραση (1.5) λαμβάνει τη μορφή :

$$h_{j_0} = \min\{\theta \mid \lambda X^j \leq \theta X^{j_0}, \quad \lambda Y^j \geq Y^{j_0}, \quad \lambda \in R_+^n\} \quad (1.6)$$

Η έκφραση αυτή επιτρέπει ώστε το πρόβλημα της εκτίμησης της αποδοτικότητας των μονάδων να διατυπωθεί και να επιλυθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ταυτόσημο με το (1.3) στο οποίο ελαχιστοποιείται η παραμέτρος θ και άγνωστη προς εκτίμηση μεταβλητή είναι το διάνυσμα $\lambda \in R_+^n$. Σχετικά με την έκφραση (1.6), εάν για ένα σημείο (X^{j_0}, Y^{j_0}) δεν υπάρχει περιθώριο αναλογικής μείωσης της εισροής του X^{j_0} ώστε να παραμένει σημείο του Π_{CRS} , ο παράγον θX^{j_0} ο οποίος εκφράζει την μείωση αυτή θα ισούται με X^{j_0} , δηλαδή η τιμή του θ θα πρέπει να είναι ίση με 1. Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν στα αποδοτικά σημεία το σύνολο των οποίων, ως υποσύνολο του συνόλου Π_{CRS} , ορίζει το όριο αποδοτικότητας.

1.3.3 Περαιτέρω διερεύνηση της αποδοτικότητας των μονάδων.

Η μορφή (1.3) του γραμμικού προβλήματος, συγκρινόμενη με τη μορφή (1.2), παρέχει τη δυνατότητα περαιτέρω διερεύνησης της αποδοτικότητας των μονάδων. Συγκεκριμένα επιτρέπει, για τα μη αποδοτικά σημεία ($\theta^* < 1$), την εκτίμηση της ελλείπουσας ποσότητας εκροών και της πλεονάζουσας ποσότητας εισροών προκειμένου αυτά να καταστούν αποδοτικά. Επιπλέον, κατηγοριοποιεί περαιτέρω τα αποδοτικά σημεία και παρέχει, μέσω του ορισμού του συνόλου αναφοράς, τη δυνατότητα προσδιορισμού των σημείων εκείνων που κατά τη συγκριτική αξιολόγηση εξαναγκάζουν ένα συγκεκριμένο σημείο να μην είναι αποδοτικό.

Παρατηρούμε ότι η επιπρόσθετη ποσότητα εισροών και η ελλείπουσα ποσότητα εκροών ενός σημείου j_0 από κάθε άλλο σημείο (X^j, Y^j) , ορίζεται από τα διανύσματα των διαφορών $s^- = \theta X^{j_0} - \lambda X^j$ και $s^+ = \lambda Y^j - Y^{j_0}$,

$s^+ \in R_+^m, s^- \in R_+^s$ (slacks) για κάθε εφικτή λύση (θ, λ) του προβλήματος (1.3). Ειδικώς για την περίπτωση της βέλτιστης τιμής θ^* , οι διαφορές αυτές λαμβάνουν ποικίλες τιμές, μεταξύ αυτών και τις μέγιστες τιμές τους, έστω s^{+*}, s^{-*} . Οι τιμές αυτές, για κάθε σημείο j , είναι δυνατόν να προσδιορισθούν σε δεύτερο βήμα υπολογισμού, με κατάλληλο γραμμικό πρόγραμμα (βλ. Cooper, Seiford, Tone (1999)) το οποίο μεγιστοποιεί το άθροισμα $s^{+*} + s^{-*}$ διατηρώντας τη βέλτιστη τιμή θ^* . Από την παρατήρηση ότι η τιμή $1 - \theta^*$ αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη δυνατή αναλογία μείωσης των εισροών εφόσον το θ^* αντιστοιχεί στην ελάχιστη, προκύπτει ότι η διαφορά $\Delta X^{j_0} = (1 - \theta^*)X^{j_0} + s^{-*}$ είναι η ποσότητα κατά την οποία πρέπει να ελαττωθούν οι εισροές του μη αποδοτικού σημείου j_0 προκειμένου αυτό να καταστεί αποδοτικό. Ομοίως, η αντίστοιχη ποσότητα για τις εκροές είναι η $\Delta Y^{j_0} = s^{+*}$. Οι ανωτέρω βελτιώσεις ορίζουν ως προβολή επί του ορίου αποδοτικότητας το σημείο $(\bar{X}^{j_0}, \bar{Y}^{j_0})$,

$$\begin{aligned}\bar{X}^{j_0} &= X^{j_0} - \Delta X^{j_0} = \theta^* X^{j_0} - s^{-*} \leq X^{j_0}, \\ Y^{j_0} &= Y^{j_0} + \Delta Y^{j_0} = Y^{j_0} + s^{+*} \geq Y^{j_0}\end{aligned}$$

το οποίο αποτελεί στόχο βελτίωσης για το σημείο j_0 .

Τα σημεία τα οποία πληρούν τις συνθήκες :

- (i) $\theta^* = 1$,
- (ii) $s^{+*} = 0, s^{-*} = 0$

ονομάζονται σύμφωνα με τον ορισμό του Koopmans (1951), **πλήρως αποδοτικά** (CCR-efficient, radial efficient, fully efficient, Pareto-Koopmans efficient). Η συνθήκη (ii) προσδιορίζει τα σημεία εκείνα τα οποία δεν είναι δυνατόν να βελτιώσουν μία εισροή ή εκροή χωρίς να χειροτερέψουν τις επιδόσεις τους σε κάποια άλλη αντιστοίχως. Τα σημεία που πληρούν μόνο τη συνθήκη (i), για τα οποία ισχύει δηλαδή $s^{+*} \neq 0$ και/ή $s^{-*} \neq 0$, ονομάζονται

ασθενώς αποδοτικά (weak efficient). Στην περίπτωση αυτή το σύνολο αναφοράς ορίζεται ως

$$E_0 = \{j \mid \lambda_j^* > 0\},$$

όπου λ^* είναι η βέλτιστη τιμή του $\lambda \in R_+^n$ η οποία προκύπτει από το γραμμικό πρόγραμμα προσδιορισμού των τιμών s^{+*}, s^{-*} . Αποδεικνύεται (βλ. Cooper, Seiford, Tone (1999) p. 48-50) ότι κάθε θετικός γραμμικός συνδυασμός των μονάδων του E_0 είναι επίσης αποδοτική μονάδα και ότι ο στόχος βελτίωσης $(\bar{X}^{j_0}, \bar{Y}^{j_0})$ ενός μη αποδοτικού σημείου προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των μονάδων του συνόλου E_0 .

1.4 Ειδικά θέματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης

1.4.1 Κλίμακα μεταβαλλόμενων αποδόσεων, το μοντέλο Banker, Charnes, Cooper - BCC

Η μεταβαλλόμενη κλίμακα των αποδόσεων (variable returns to scale-VRS) σε μία διαδικασία παραγωγής ορίζεται όταν μία σταθερή ποσοστιαία αύξηση επί των εισροών έχει ως αποτέλεσμα είτε μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση στις εκροές (αυξανόμενη κλίμακα απόδοσης, increasing returns to scale-IRS) είτε μικρότερη ποσοστιαία αύξηση στις εκροές (κλίμακα μειούμενη απόδοσης, decreasing returns to scale-DRS). Η ιδέα των μεταβαλλόμενων κλιμάκων αποδόσεων οφείλεται στους Banker, Charnes, Cooper (1984) οι οποίοι πρώτοι αποδέσμευσαν την αναλογική μεταβολή των εισροών και εκροών των μονάδων και διατύπωσαν το σχετικό μοντέλο BCC το οποίο για προσανατολισμό εισροών ως εξής :

Μοντέλο BCC	Δυϊκό Μοντέλο BCC
$\min \theta_B$ $s.t.$ $\theta_B X^{j_0} - \lambda X^j \geq 0$ $\lambda Y^j - Y^{j_0} \geq 0$ $e\lambda = 1,$ $\lambda \geq 0, j = 1, \dots, n$	$\max h_{j_0} = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} - u_0$ $s.t.$ $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} = 1$ $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - u_0 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.8)$ $u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i$ <p style="text-align: center;">u_0 χωρίς περιορισμο</p>

Η διαφορά από το μοντέλο CCR βρίσκεται στον παράγοντα u_0 (αντιστοίχως στον περιορισμό $e\lambda = 1$ του αρχικού μοντέλου) ο οποίος για κάθε μονάδα αφαιρείται από τις εκροές χωρίς να υπόκειται στον περιορισμό μη αρνητικότητας. Ο παράγοντας u_0 μαζί με τους συντελεστές των εισροών /

εκροών v_i, u_r αποτελεί τις προς εκτίμηση μεταβλητές του ανωτέρω δυϊκού προβλήματος BCC (1.8).

Στο μοντέλο BCC ο ορισμός και η σημασία των διαφορών s^{+*}, s^{-*} παραμένει ως έχει. Κάθε μονάδα η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (i) $\theta_B^* = 1$, (ii) $s^{+*} = 0, s^{-*} = 0$ θεωρείται **αποδοτική κατά BCC**, διαφορετικά μη αποδοτική. Το σύνολο αναφοράς $E_0 = \{j \mid \lambda_j^* > 0\}$ καθώς επίσης και η βελτιωμένη μονάδα $(\bar{X}^{j_0}, \bar{Y}^{j_0})$ μιας μη αποδοτικής μονάδας, ορίζονται όπως ακριβώς και στο μοντέλο CCR.

Από τη βασική θεωρία της Περιβάλλουσας Ανάλυσης προκύπτει ότι για το μοντέλο BCC, συγκρινόμενο με το CCR, ισχύουν επιπλέον οι ακόλουθες προτάσεις :

1. Εάν μία μονάδα έχει την ελάχιστη τιμή μίας εισροής ή τη μέγιστη τιμή μιας εκροής (column minimum-maximum), αυτή είναι BCC-αποδοτική. Παράδειγμα τέτοιας μονάδας αποτελεί τόσο η μονάδα A του σχήματος 1.1 ($x=2$) η οποία έχει την μικρότερη τιμή εισροής στο πρόβλημα, όσο και η μονάδα Θ που έχει την μεγαλύτερη τιμή εκροής ($y=50$).
2. Κάθε βέλτιστη τιμή αποδοτικότητας θ η οποία προκύπτει από το BCC είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αντίστοιχη τιμή θ του CCR για το ίδιο πρόβλημα, αφού στο μοντέλο BCC υπάρχει ο επιπλέον περιορισμός $e\lambda = 1$.
3. Το σύνολο των αποδοτικών μονάδων κατά CCR είναι υποσύνολο των αποδοτικών μονάδων κατά BCC.
4. Στο σύνολο αναφοράς E_0 μιας μη αποδοτικής μονάδας δεν ανήκουν ταυτοχρόνως αποδοτικές μονάδες των τμημάτων αυξανόμενης και μειούμενης κλίμακας αποδόσεων.

Στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης τίθεται το ερώτημα εάν, σύμφωνα με τα δεδομένα, οι μονάδες ακολουθούν κλίμακα σταθερών ή μεταβαλλόμενων αποδόσεων. Για το πρόβλημα αυτό έχουν προταθεί τρεις

διαφορετικές προσεγγίσεις, ενώ οι εργασία των Seiford, Zhu (1999) επιχειρεί μία συστηματική επισκόπησή τους. Αρχικά οι Banker, Charnes, Cooper (1984) και στη συνέχεια οι Banker και Thrall (1992) απέδειξαν ότι κριτήριο για την ταξινόμηση των αποδοτικών μονάδων σε τμήματα του ορίου αποδοτικότητας με αυξανόμενη, σταθερή και μειούμενη κλίμακα αποδόσεων αποτελεί το πρόσημο της τιμής u_0^* η οποία είναι η βέλτιστη τιμή του παράγοντα u_0 στο δυϊκό μοντέλο 1.8. Στον κατωτέρω πίνακα συνοψίζονται τα κριτήρια αυτά :

Εάν $u_0^* < 0$	στο σημείο (X^{j_0}, Y^{j_0}) επί του ορίου αποδοτικότητας επικρατούν αποδόσεις αυξανόμενης κλίμακας (Increasing Returns to scale-IRS)
Εάν $u_0^* = 0$	στο σημείο (X^{j_0}, Y^{j_0}) επί του ορίου αποδοτικότητας επικρατούν αποδόσεις σταθερής κλίμακας (Constants Returns to scale-CRS)
Εάν $u_0^* > 0$	στο σημείο (X^{j_0}, Y^{j_0}) επί του ορίου αποδοτικότητας επικρατούν αποδόσεις μειούμενης κλίμακας (Decreasing Returns to scale-CRS)

Για τον έλεγχο της κλίμακας αποδόσεων, ο Banker (1993) πρότεινε εναλλακτικά στατιστικό έλεγχο υποθέσεων επί των κατανομών των τιμών αποδοτικότητας (δοκιμή Kolomogorof-Smirnof), όταν το πρόβλημα επιλυθεί με το μοντέλο CCR και το μοντέλο BCC.

Συμπληρωματικά με τα μοντέλα CCR και BCC της κλίμακας σταθερών και μεταβαλλόμενων αποδόσεων, ορίστηκε από τους Derpins, Simar Tulkens (1984) το μοντέλο FDH (Free Disposal Hull) το οποίο τροποποιεί το σχήμα του ορίου αποδοτικότητας και του αποδίδει μορφή κατά βήματα γραμμικής συνάρτησης. Σύμφωνα με αυτό, οι γραμμικοί συνδυασμοί των αποδοτικών μονάδων που αντιστοιχούν σε υποθετικές μονάδες επί του ορίου αποδοτικότητας, θεωρούνται πλέον αποδοτικές και το όριο αποδοτικότητας περιλαμβάνει μόνο τις μονάδες του κάθε συγκεκριμένου προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή η μορφή του ορίου αποδοτικότητας έχει τη μορφή της κατά βήματα γραμμικής συνάρτησης. Για τη περίπτωση FDH, ο τυπικός ορισμός του συνόλου εφικτής παραγωγής είναι

$$\Pi_{FDH} = \{(X, Y) \in R_+^{m+s} \mid X \geq \sum_{j=1}^n X^j, \quad Y \leq \sum_{j=1}^n Y^j, \quad Y \geq 0\},$$

η δε αποδοτικότητα των μονάδων εκτιμάται από το μικτό γραμμικό μοντέλο για πραγματικές και ακέραιες τιμές :

$$\begin{aligned} \min \theta^* &= \theta \\ \theta X^{j_0} - \lambda X^j &\geq 0 \\ Y^{j_0} - \lambda Y^j &\leq 0 \\ e\lambda &= 1 \\ \lambda_j &\in \{0,1\}, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.9)$$

Άλλες σχετικές εργασίες με το μοντέλο FDH είναι των Athanassopoulos, Storbeck (1995) και M.Thrall (1999).

1.4.2 Κατάταξη των αποδοτικών μονάδων

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει περαιτέρω τις αποδοτικές μονάδες. Σε πολλές εφαρμογές το πλήθος των αποδοτικών μονάδων, συγκρινόμενο με τον συνολικό αριθμό των μονάδων, είναι σχετικά μεγάλο με αποτέλεσμα τα συμπεράσματα για την αποδοτικότητα των μονάδων να είναι φτωχά. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα εμφανής όταν στο σύνολο των δεδομένων ορίζονται πολλές εισροές / εκροές ή όταν ο αριθμός των μονάδων είναι περιορισμένος. Πολλές ερευνητικές εργασίες αφιερώνονται στο πρόβλημα της περαιτέρω κατάταξης των αποδοτικών μονάδων ενώ μία συνοπτική επισκόπησή τους αναπτύσσεται από τους Sinuany-Stern, Adler, Friedman (2000). Για το πρόβλημα αυτό της κατάταξης των αποδοτικών μονάδων, σε δεύτερο μεταγενέστερο στάδιο από αυτό της επίλυσης του βασικού προβλήματος, εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές και προσεγγίσεις, οι κυριότερες των οποίων ομαδοποιούνται ως εξής :

- *Τεχνικές επί του διασταυρούμενου πίνακα αποδόσεων (cross-efficiency table) [Sexton et.al (1986)].*

Ο διασταυρούμενος πίνακας αποδόσεων $C=(c_{ij})$ για τις n μονάδες του συνόλου των δεδομένων είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, κάθε στοιχείο c_{ij} του οποίου είναι η τιμή της αποδοτικότητας της μονάδας j όπως αυτή εκτιμάται κατά την επίλυση του προβλήματος για την μονάδα i , δηλαδή $c_{ij} = h_j(u^i, v^i)$. Η ανάγνωση του πίνακα αυτού κατά στήλες δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το σύνολο των μονάδων αποτιμά την αποδοτικότητα της συγκεκριμένης μονάδας. Διάφορα στατιστικά μέτρα (π.χ. μέση τιμή, λόγος τυπικής απόκλισης προς μέση τιμή, ασυμμετρία κλπ.) εφαρμοζόμενα επί των τιμών αποδοτικότητας κάθε μονάδας, εκφράζουν ποσοτικά την αποδοχή (peer appraisal) που αυτή έχει από τις υπόλοιπες μονάδες του συνόλου. Το κριτήριο αυτό είναι ικανό να διατάξει τις αποδοτικές μονάδες και να αναδείξει εκείνες που αναγνωρίζονται από την πλειονότητα ως περισσότερο αποδοτικές.

- *Εκτίμηση της υπερ-αποδοτικότητας (super efficiency)*

Οι Andersen και Petersen (1993), διατυπώνουν με απλή τροποποίηση του αρχικού μοντέλου (1.2) ένα νέο μοντέλο (modified DEA-MDEA), εξαιρώντας από τον περιορισμό $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$ την υπό εκτίμηση μονάδα ($j \neq j_0$), επιτρέποντας σε αυτήν να ορίσει τιμή αποδοτικότητας μεγαλύτερη του 1 (όχι άνω φραγμένη). Το μοντέλο MDEA έχει ως εξής :

$$\begin{aligned}
\max h_{j_0} &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}, \\
s.t. \\
\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 1 \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, j_0, n, j \neq j_0 \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Οι αποδοτικές μονάδες, σύμφωνα με το ανωτέρω μοντέλο, έχουν διακριτές τιμές αποδοτικότητας οι οποίες χρησιμοποιούνται για την περαιτέρω κατάταξή τους ενώ η τιμή της αποδοτικότητας των μη αποδοτικών μονάδων δεν μεταβάλλεται. Το μοντέλο (1.10), σε ειδικές περιπτώσεις δεδομένων, παρουσιάζει δύο μειονεκτήματα: α) εκτιμά υπερβολικά μεγάλες τιμές αποδοτικότητας (βλ. Wilson (1995)) και β) καθιστά το πρόβλημα μη εφικτό (βλ. Thrall (1996), Mehrabian et.all (1999)). Για τα μειονεκτήματα αυτά έχουν προταθεί ανάλογες τροποποιήσεις και βελτιώσεις.

- *Εκτίμηση κοινών πολλαπλασιαστών, η σφαιρική αποδοτικότητα (global efficiency)*

Η ιδέα της σφαιρικής αποδοτικότητας βασίζεται σε τεχνικές υπολογισμού κοινών πολλαπλασιαστών u_r, v_i για όλες τις μονάδες, αίροντας με τον τρόπο αυτό την πλήρη ελευθερία κάθε μονάδας να επιλέξει προς όφελος της τις τιμές των πολλαπλασιαστών. Η κοινή οπτική γωνία για ολόκληρο το σύνολο των μονάδων αποτελεί δίκαιη και αντικειμενική συγκριτική εκτίμηση των επιδόσεών τους. Οι τεχνικές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της σφαιρικής αποδοτικότητας είναι διαφορετικές : οι Ganley και Cubbin (1992) θέτουν ως κριτήριο την μεγιστοποίηση του αθροίσματος των λόγων εισροών / εκροών, ο Troutt MD (1997) την μεγιστοποίηση της ελάχιστης αποδοτικότητας, οι Friedman και Sinuany-Stern (1997)

προτείνουν την στατιστική μέθοδο Canonical Correlation Analysis και ο Despotis (2002) διατυπώνει παραμετρικό μοντέλο ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων από τις αρχικές τιμές αποδοτικότητας, βασιζόμενο σε μεθόδους της πολυκριτήριας ανάλυσης δεδομένων.

- *Εφαρμογή μεθόδων πολυμεταβλητής στατιστικής ανάλυσης και ασαφούς λογικής*

Διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της κατάταξης των αποδοτικών μονάδων αποτελεί η εφαρμογή διαχωριστικής ανάλυσης (Discriminant Analysis) επί ενδιάμεσων αποτελεσμάτων προερχόμενων από την επίλυση του αρχικού μοντέλου. Οι Sinuany-Stern et. al (1994) εκτιμούν γραμμική συνάρτηση διαχωρισμού των μονάδων σε αποδοτικές και μη αποδοτικές, οι τιμές της οποίας κατατάσσουν τις αποδοτικές μονάδες. Επίσης οι Sinuany-Stern Friedman (1997) με την ίδια ακριβώς ιδέα εφαρμόζουν διαχωριστική ανάλυση επί των λόγων των τιμών αποδοτικότητας των μονάδων. Οι Karsak (1998) και Hougaard (1999) ανέπτυξαν μεθόδους ασαφούς λογικής οι οποίες σε δεύτερο στάδιο από την επίλυση του αρχικού μοντέλου, αξιοποιούσαν επιπρόσθετες πληροφορίες ειδικών για να κατατάξουν τις αποδοτικές μονάδες.

Τέλος, διάφορες άλλες τεχνικές έχουν προταθεί για την κατάταξη των αποδοτικών μονάδων. Οι Torgersen et al (1996) εκτιμούν ποσοτικά την σημασία κάθε αποδοτικής μονάδας ως μονάδας αναφοράς (benchmark) όλων των μη αποδοτικών. Οι Sinuany-Stern et. al (2000) εφαρμόζουν μεθόδους προερχόμενες από την πολυκριτήρια ανάλυση δεδομένων όπως η Analytical Hierarchical Process (AHP). Οι Sexton et. al (1986), Chilingirian και Sherman (1996) προτείνουν ως κριτήριο αποδοτικότητας την

ικανότητα κάθε μονάδας να ρυθμίζει περισσότερο ισορροπημένες και όχι ακραίες τιμές των πολλαπλασιαστών (balanced weights).

1.4.3 Έκφραση προτιμήσεων σε προβλήματα περιβάλλουσας ανάλυσης

Σε πολλές εφαρμογές Περιβάλλουσας Ανάλυσης είναι εκ των προτέρων γνωστές διάφορες πληροφορίες οι οποίες είναι απαραίτητο να ενσωματωθούν στο πρόβλημα. Οι πληροφορίες αυτές αφορούν είτε γενικές συνθήκες και εκτιμήσεις για τα δεδομένα (value judgments) είτε προτιμήσεις σχετικά με τη σημασία και συνεισφορά των εισροών και εκροών στη διαμόρφωση της αποδοτικότητας. Ο πλέον συνήθης τρόπος έκφρασης των αρχικών αυτών πληροφοριών είναι η εισαγωγή στο γραμμικό πρόγραμμα, κατάλληλων περιορισμών επί των τιμών των συντελεστών u , v , των αντιστοίχων εισροών και εκροών. Το αρχικό μοντέλο (1.2), παρέχοντας πλήρη ευελιξία στις μονάδες να εκτιμήσουν τις τιμές των συντελεστών των εισροών / εκροών προς όφελός τους, μπορεί να ορίσει ακραίες τιμές των συντελεστών αυτών με αποτέλεσμα είτε να υποτιμώνται είτε να υπερεκτιμώνται οι αντίστοιχες εισροές / εκροές στον καθορισμό των τιμών αποδοτικότητας. Οι ακραίες αυτές τιμές είναι δυνατόν να αντιβαίνουν λογικά προς τις γνωστές αρχικές πληροφορίες του κάθε προβλήματος και κατά συνέπεια να οδηγούν σε λανθασμένες τιμές αποδοτικότητας. Η ύπαρξη περιορισμών επί των συντελεστών u , v , στο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης σταθερών αποδόσεων CCR διαφοροποιεί την ερμηνεία της αποδοτικότητας ως το μέτρο της συνολικής αναλογικής μείωσης των εισροών (αύξησης των εκροών αντιστοίχως) και περιορίζει την έκταση του ορίου αποδοτικότητας και συνεπώς τον αριθμό των αποδοτικών μονάδων. Στην εργασία των Allen et al. (1997) παρουσιάζονται οι κυριότεροι τύποι περιορισμών επί των συντελεστών οι οποίοι αναλόγως της μορφής τους κατατάσσονται σε περιορισμούς τύπου απολύτων τιμών, περιορισμών σχέσεων λόγου, διάταξης, εικονικών συντελεστών, τύπου κωνικών λόγων κλπ και αναλύονται ως εξής :

- *Περιορισμοί απολύτων τιμών (absolute value)*

Οι περιορισμοί αυτού του τύπου έχουν τη γενική μορφή $a \leq u_r, v_i \leq \beta$ όπου οι τιμές a, β είναι σταθερές οι οποίες είτε εκτιμώνται αναλόγως του προβλήματος, είτε παρέχονται απευθείας από εμπειρογνώμονες [βλ. Beasley (1990), Kornbluth (1991)], είτε εκφράζουν μέγιστη-ελάχιστη τιμή παραμέτρων του προβλήματος π.χ. σχέση «κόστους-τιμής» στην εργασία των Thompson et al (1990). Ο τύπος αυτός των περιορισμών χρησιμοποιείται μόνον όταν οι πολλαπλασιαστές έχουν αποκτήσει συγκεκριμένη έννοια π.χ. κόστος ανά μονάδα παραγωγής. Παραδείγματα των περιορισμών της μορφής αυτής αναφέρονται στις εργασίες των Roll et al (1991), Roll και Golany (1993), Dyson και Thanasoulis (1988). Οι περιορισμοί απολύτων τιμών, σε μερικές περιπτώσεις οδηγούν σε εσφαλμένη εκτίμηση της αποδοτικότητας και των τιμών στον στόχον για τις μη αποδοτικές μονάδες. Στην εργασία του Podinovski (1999) εντοπίζονται οι περιπτώσεις αυτές και προτείνονται παραλλαγές του βασικού μοντέλου για την αποφυγή των σφαλμάτων.

- *Περιορισμοί Σχέσεων Λόγου (assurance region)*

Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζουν σχέσεις λόγου μεταξύ δύο ή περισσότερων εισροών/ εκροών και αναφέρονται ως τύπου I (μορφές :

$$a \leq \frac{u_{r1}}{u_{r2}} \leq \beta, \quad a \leq \frac{v_{i1}}{v_{i2}} \leq \beta \quad \text{και} \quad a v_{i1} + \beta v_{i2} \leq \gamma u_r) \quad \text{ή ως τύπου II (μορφή$$

: $\alpha u_r \leq v_i$). Οι σταθερές a, β, γ ορίζονται ως ανωτέρω. Τους περιορισμούς αυτούς χρησιμοποίησαν σε διάφορες εφαρμογές οι Thompson et al. (1986) (1996), (1997) και Thanasoulis et al (1995). Λόγω του γεγονότος ότι ο λόγος δύο μεταβλητών δεν έχει αντιστοιχεί πάντοτε σε φυσική έννοια (π.χ. αριθμός καθηγητών ανά φοιτητή, αριθμός τιμολογίων ανά πελάτη), οι

περιορισμοί του τύπου αυτού έχουν σημαντική εξάρτηση από τις κλίμακες μέτρησης των μεταβλητών που συμμετέχουν σε αυτούς. Αποδεικνύεται ότι κάτω από ειδικές συνθήκες, οι περιορισμοί τύπου II οδηγούν σε μη εφικτό γραμμικό πρόβλημα. Επίσης, οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν πάντοτε τις ίδιες τιμές αποδοτικότητας ανεξαρτήτως προσανατολισμού εισροών / εκροών.

- *Περιορισμοί διάταξης*

Οι περιορισμοί διάταξης $\varepsilon \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots, \quad v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \dots \geq \varepsilon$ αποδίδουν σχέσεις μεγαλύτερης ή μικρότερης συγκριτικής σημασίας των εισροών/ εκροών στη διαμόρφωση της αποδοτικότητας των μονάδων. Η εργασία του Golany (1988) εισήγαγε τους περιορισμούς αυτούς και απέδειξε μαζί με τους Ali et al (1991) ότι ισοδυναμούν με κατάλληλους αθροιστικούς μετασχηματισμούς των εισροών και εκροών.

- *Περιορισμοί εικονικών συντελεστών (virtual weights)*

Ο τύπος αυτός των περιορισμών δεν έχει εξετασθεί επαρκώς στη βιβλιογραφία. Λαμβάνει τις μορφές $\alpha \leq \frac{u_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq \beta, \quad \alpha \leq u_r y_{rj} \leq \beta$ και περιορίζει με απόλυτες τιμές α, β την αξία των εισροών/ εκροών. Οι κυριότερες εργασίες στο πεδίο αυτό είναι των Beasley (1990) και Wong και Beasley (1990), όπου και προτείνονται μερικές παραλλαγές, όπως η εφαρμογή των περιορισμών μόνο στο γραμμικό πρόβλημα που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες μονάδες και ο περιορισμός της «μέσης τυπικής μονάδας» (χρήση της έκφρασης $\sum_{j=1}^n \frac{y_{rj}}{n}$ αντί της y_{rj}). Οι περιορισμοί του τύπου αυτού παρουσιάζουν διαφορές στις τιμές της αποδοτικότητας όταν

χρησιμοποιηθεί μοντέλο προσανατολισμένο είτε στις εισροές είτε στις εκροές.

- *Περιορισμοί κωνικών λόγων (cone ratio)*

Οι περιορισμοί αυτού του τύπου ορίστηκαν από τους Charnes et al. (1990), (1991) και αποτελούν γενίκευση τόσο των περιορισμών διάταξης όσο και των περιορισμών σχέσεων λόγου. Υποθέτουν ότι οι τιμές των διανυσμάτων των συντελεστών περιορίζονται σε περιοχές του πολυδιάστατου χώρου που έχουν μορφή πολυεδρικών κυρτών κώνων (polyhedral convex cones).

Εκτός των ανωτέρω περιπτώσεων, σε μερικά προβλήματα απαιτείται η χρήση συνδυασμού διαφόρων τύπων περιορισμών (βλ. Cooper, Seiford, Tone (1999), σελ. 163-167).

1.4.4 Εκτίμηση αποδοτικότητας σε δεδομένα χρονολογικών σειρών

Το βασικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης εξετάζει την αποδοτικότητα διαφόρων μονάδων με βάση τις επιδόσεις τους σε μία δεδομένη χρονική στιγμή χωρίς να είναι σε θέση να επεξεργαστεί δεδομένα που αναφέρονται στην εξέλιξη της επίδοσης τους. Οι Charnes et al. (1984) πρώτοι εισήγαγαν την έννοια της χρονικής ανάλυσης (window-analysis) για την εκτίμηση της αποδοτικότητας σε δεδομένα χρονολογικών σειρών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή συγκρίνονται οι επιδόσεις των μονάδων σε περισσότερα του ενός χρονικά στιγμιότυπα και αναζητούνται οι μονάδες εκείνες που επιτυγχάνουν μεγαλύτερες τιμές αποδοτικότητας στις περισσότερες χρονικές στιγμές. Ο Fare (1992) όρισε τους δείκτες Malmquist ως το γεωμετρικό μέσο των τιμών αποδοτικότητας για δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t και $t+1$ και χρησιμοποίησε τους δείκτες αυτούς για να διακρίνει τις αποδοτικές μονάδες.

Οι δείκτες Malmquist έχουν εφαρμογή σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων χρονολογικών σειρών. Οι πιο πρόσφατες και χαρακτηριστικές ερευνητικές εργασίες στο πεδίο αυτό είναι των από πολλούς ερευνητές και οι κυριότερες και πρόσφατες εργασίες σε δεδομένα είναι των Cummins (1999), Lothgren και Tambour (1999), Linna (1998), Berg. (1992).

Βιβλιογραφία

- Allen R., A. Athanassopoulos, R.G. Dyson, and E. Thanassoulis (1997), “Weights Restrictions and Value Judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, Development and Future Directions”, *Annals of Operations Research*, vol. 73, pp. 13-34
- Ali A., L.Seiford (1993), “The mathematical programming approach to efficiency analysis” In Fried H., K. Lovell, S. Schmidt : The measurement of productive efficiency : Techniques and applications, *Oxford University Press*, New York
- Ali A.I., W.D. Cook, and L.M. Seiford (1991), “Strict vs. Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, vol. 37, no. 6
- Ali Al., Seiford M. (1993) “Computational accuracy and infinitesimal in DEA”, *INFOR* 31, pp.290-297-243
- Andersen P. Petersen N.C. (1993), “A procedure for ranking efficient units in DEA”, *Management Science*, 39 (10), 1261-1294
- Athanassopoulos A. and J. Storbeck (1995), “Non parametric models for Spatial Efficiency”, *Journal of Productivity Analysis*, 6 (2).
- Banker R. (1993), “Maximum likelihood, consistency and DEA : a statistical foundation”, *Management Science*, Vol. 39, pp.1265-1273
- Banker R. and R. Thrall (1992), “Estimation of returns to scale using data envelopment analysis”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 62, pp.74-84
- Banker R., Charnes A., Cooper W. (1984), “Some models for estimating technical and scale inefficiencies in DEA”, *Management Science*, Vol. 30 (9) pp. 1078-1092
- Beasley J.E.(1990), “Comparing University Departments”, *Omega-International Journal of Management Science*, vol. 18, no. 2

- Berg S.A., F.R. Forsund, and E.S. Jansen (1992), Malmquist Indices of Productivity Growth During the Deregulation of Norwegian Banking, 1980-89, *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 94 (Supplement)
- Charnes A., W.W. Cooper, (1962), "Programming with linear fractional functionals", *Naval Res. Logist*, Quart. 9 (3,4) pp. 181-185
- Charnes A., W.W. Cooper, Z.M. Huang, and D.B. Sun (1990), "Polyhedral Cone-Ratio DEA Models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks", *Journal of Econometrics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 73-91
- Charnes A., Clark T., Cooper W.W., Golany B. (1985), "A development study of DEA for Measuring of Maintenance Units in the U.S. Air Force", *Analys of Operations Research* vol. 2, pp. 95-112
- Charnes A., W.W. Cooper, Z.M. Huang, and D.B. Sun (1991), "Relations Between Half-Space and Finitely Generated Cones in Polyhedral Cone-Ratio DEA Models", *International Journal of Systems Science*, vol. 22, no. 11, pp. 2057-2077
- Chilingerian J.A. and H.D. Sherman (1996), "Benchmarking Physician Practice Patterns With DEA: a Multi- Stage Approach for Cost Containment", *Annals of Operations Research*, vol. 67, pp. 83-116
- Cobb C.W, P.H.Douglas (1928), " A theory of Production", *American Economic Review*, Vol. 18, pp 139-165
- Cooper W.W., L.M. Seiford, K. Tone, "Data Envelopment Analysis, A comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software", *Kluwer Academic Publishers*, 1999, ISBN 0-7923-8693-0
- Cooper W.W., Z.M. Huang, V. Lelas, S.X. Li, and O.B. Olesen (1998), "Chance Constrained Programming Formulations for Stochastic Characterizations of Efficiency and Dominance in DEA", *Journal of Productivity Analysis*, vol. 9, no. 1, pp. 53-79
- Cummins J.D, S. Tennyson, and M.A. Weiss (1999), Consolidation and Efficiency in the US Life Insurance Industry, *Journal of Banking & Finance*, vol. 23, no. 2-4, pp. 325-357

- Deprins D., L.Simar, H.Tulkens (1984) “Measuring labor efficiency in Post Offices” in M.Marchand Petisteanu and Tulkens eds. The performance of public enterprises : concepts and measurement. Amsterdam, North Holland pp.175
- Despotis D.K (2002), “Improving the discriminating power of DEA : Focus on globally efficient units”, *Journal of Operational Research Society*, vol. 53, pp. 314-323
- Dyson R.G, R.Allen, A.S Camanho, V.V. Podinovski, C.S. Sarrico, E.A. Shale (2001), “Pitfalls and Protocols in DEA”, *European Journal of Operational Research*, vol. 132 pp. 245-259
- Dyson R.G. and E. Thanassoulis (1988), “Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis”, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 39, no. 6, pp. 563-576
- Farrell M. (1957), “The measurement of productive efficiency”, *Journal of Royal Statistics Society*, Vol.120, pp.253-284
- Friedman L., Sinuany-Strern Z (1997), “Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context”, *European Journal of Operational Research* 100, pp.629-637
- Ganley J.A, Cubbin S.A (1992), “Public sector efficiency measurement : Applications of Data Envelopment Analysis”, North Holland
- Golany B. (1988), “A Note on Including Ordinal Relations Among Multipliers in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, vol. 34, no. 8, pp. 1029-1033
- Hougaard J.L.(1999), Fuzzy Scores of Technical Efficiency, *European Journal of Operational Research*, vol. 115, no. 3, pp. 529-541
- Karsak E.E. (1998), A Two-Phase Robot Selection Procedure, *Production Planning & Control*, vol. 9, no. 7, pp. 675-684
- Knight F. (1993), “The economic organization”, New York, Harper and Row.
- Koopmans (1951) “Activity analysis of production and allocation”, John Willey and Sons, New York

-
- Kornbluth J.S.H.(1991), “Analyzing Policy Effectiveness Using Cone Restricted Data Envelopment Analysis”, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 42, no. 12, pp. 1097-1104.
- Linna M. (1998), “Measuring Hospital Cost Efficiency With Panel Data Models”, *Health Economics*, vol. 7, no. 5, pp. 415-427
- Lothgren M. and M. Tambour (1999), “Bootstrapping the Data Envelopment Analysis Malmquist Productivity Index”, *Applied Economics*, vol. 31, no. 4, pp. 417-425
- Mehrabian S., Alirezaee M.R., Jahanshahloo G.R, (1999), “A complete efficiency ranking of decision making units in DEA”, *Computational Optimization and Applications*, 14, pp. 261-266
- Podinovski V.V. (1999), “Side Effects of Absolute Weight Bounds in DEA Models”, *European Journal of Operational Research*, vol. 115, no. 3, pp. 583-595
- R.M.Thrall (1999), “What is the Economic Meaning of FDH?” *Journal of Productivity Analysis*, 11, pp. 243-250.
- Roll Y. and B. Golany (1993), “Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA”, *Omega-International Journal of Management Science*, vol. 21, no. 1, pp. 99-109.
- Roll Y., W.D. Cook, and B. Golany (1991), “Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis”, *IIE Transactions*, vol. 23, no. 1, pp. 2-9.
- Seiford L.M, Zhu J, (1999), “An investigation of returns to scale in DEA”, *Omega-International Journal of Management Science*, vol. 1, pp.1-11
- Sexton T.R., R.H. Silkman, and A.J. Hogan (1986), “Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions” In: R.H. Silkman, ed. *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*, pp. 73-105, 1986. New Directions for Program Evaluation. American Evaluation Association. San Francisco, Jossey Bass, Inc.

- Sinuany-Stern Z., Adler N., Friedman L., (2000), “Summary review of ranking methods in Data Envelopment Analysis context”, *Proceedings of EURO XVII 17th European Conference on Operational Research*, Budapest, Hungary, July 16-19, 2000
- Sinuany-Stern Z., Mehrez A., Hadad Y., (2000), “An AHP/DEA methodology for ranking decision making units”, *International Transactions in Operational Research*, 7, 109-124
- Thanassoulis E., A. Boussfofiane, and R.G. Dyson (1995), “Exploring Output Quality Targets in the Provision of Perinatal-Care in England Using Data Envelopment Analysis”, *European Journal of Operational Research*, vol. 80, no. 3, pp. 588-607.
- Thompson R.G., E.J. Brinkmann, P.S. Dharmapala, M.D. Gonzalezlima, and R.M. Thrall (1997), “DEA/AR Profit Ratios and Sensitivity of 100 Large US Banks”, *European Journal of Operational Research*, vol. 98, no. 2, pp. 213-229.
- Thompson R.G., F.D.Jr. Singleton, R.M. Thrall, and B.A. Smith, (1986), “Comparative Site Evaluation for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas”, *Interfaces*, vol. 16, no. 6, pp. 35-49.
- Thompson R.G., L.N. Langemeier, C.-T. Lee, E. Lee, R.M. Thrall (1990), “The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming”, *Journal of Econometrics*, vol. 46, no. 1,2, pp. 93-108.
- Thompson R.G., P.S. Dharmapala, D.B. Humphrey, W.M. Taylor, and R.M. Thrall (1996), “Computing DEA/AR Efficiency and Profit Ratio Measures With an Illustrative Bank Application”, *Annals of Operations Research*, vol. 68, pp. 303-327.
- Thompson R.G., P.S. Dharmapala, E.J. Gatewood, S. Macy, and R.M. Thrall (1996), “DEA/Assurance Region SBDS Efficiency and Unique Projections”, *Operations Research*, vol. 44, no. 4, pp. 533-542.
- Thrall R.M. (1996), “Duality, classification and slacks in DEA”, *Annals of Operations Research*, 66.

- Torgersen A.M., Forsund F.R., Kittelsen S.A.C (1996), "Slack-adjusted efficiency measures and ranking of efficient units", *Journal of Productivity Analysis*, 7, 379-398.
- Troutt M.D (1997), "Derivation of Maxmin Efficiency Ratio model from the maximum decisional efficiency principle", *Annals of Operations Research* 100 : 629-637
- Wilson P.W. (1995), "Detecting influential observations in data envelopment analysis", *Journal of Productivity Analysis*, 4, 27-45.
- Wong Y.-H.B. and J.E. Beasley (1990) "Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis", *Journal of the Operational Research Society*, vol. 41, no. 9, pp. 829-835.

Μέρος Ι :

**Η Περιβάλλουσα
Ανάλυση με μη ακριβή
δεδομένα**

Κεφάλαιο 2

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση για δεδομένα διαστημάτων

2.1 Εισαγωγή

Η βασική ιδέα της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων στηρίζεται στη θεμελιώδη υπόθεση ότι τα δεδομένα των εισροών και εκροών έχουν ακριβείς τιμές και εκφράζονται από συνεχείς μεταβλητές σε κλίμακα πραγματικών αριθμών (ratio scale). Η υπόθεση αυτή των συνεχών μεταβλητών εξάλλου ισχύει για τις περισσότερες μεθόδους ανάλυσης δεδομένων. Σε διάφορα όμως προβλήματα εκτίμησης της αποδοτικότητας διαπιστώνεται συχνά ότι οι ακριβείς τιμές των δεδομένων των εισροών-εκροών δεν είναι γνωστές λόγω σφαλμάτων μέτρησης, αντικειμενικών δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά την εκτίμησή τους ή ακόμη λόγω της ειδικής φύσεων των εννοιών που αυτά εκφράζουν, π.χ. ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Για τις περιπτώσεις αυτές των δεδομένων με μη ακριβείς τιμές έχουν προταθεί διαφορετικές προσεγγίσεις και παραλλαγές της μεθόδου. Μία από τις διάφορες αυτές εκδοχές αποτελεί η *Στοχαστική Περιβάλλουσα Ανάλυση* (Stochastic DEA) η οποία εφαρμόζεται στις ειδικές εκείνες περιπτώσεις προβλημάτων όπου υπεισέρχονται τυχαία σφάλματα στις μετρήσεις των εισροών-εκροών. Η προσέγγιση αυτή εισάγει στο γραμμικό πρόβλημα υπολογισμού της αποδοτικότητας των μονάδων τυχαίες μεταβλητές και επιχειρεί να διαχωρίσει τις αποδοτικές από τις μη αποδοτικές μονάδες, αφαιρώντας το μέρος της εκτιμώμενης αποδοτικότητας που προέρχεται από τα σφάλματα.

Προς τη Στοχαστική Ανάλυση έχουν κατευθυνθεί διάφορες ερευνητικές προσπάθειες οι οποίες αναλόγως της τεχνικής και που ακολουθούν κατατάσσονται ως εξής :

1. *Τεχνικές Προγραμματισμού με πιθανοθεωρητικούς περιορισμούς (chance constrained programming).*

Την τεχνική αυτή ακολουθούν οι εργασίες των Sengupta (1998), Olesen και Petersen (1995), Cooper et.al (1998) σύμφωνα με τις οποίες οι επιδόσεις των μονάδων λαμβάνουν την μορφή :

$$X_{ij} = \bar{x}_{ij} + c_{ij}, Y_{rj} = \bar{y}_{rj} + d_{rj}$$

όπου οι c_{ij} , d_{rj} θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές με γνωστή κατανομή που εκφράζουν για τις εισροές, εκροές αντιστοίχως, τις μέγιστες πιθανές αποκλίσεις γύρω από γνωστές μέσες τιμές $\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{rj}$. Στη συνέχεια διαμορφώνεται κατάλληλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με σύνολο περιορισμών που περιέχει συνθήκες που αναφέρονται στις τιμές των πιθανοτήτων των αποκλίσεων c_{ij}, d_{rj} . Στο πρόβλημα αυτό, όπως και στην κλασική Περιβάλλουσα Ανάλυση, άγνωστα προς εκτίμηση είναι τα διανύσματα των πολλαπλασιαστών. Μέσω αυτών υπολογίζεται η αποδοτικότητα των μονάδων.

2. *Τεχνικές προγραμματισμού στόχων (goal programming).*

Οι Retzlaff-Roberts και Morey (1995) εκτιμούν την αποδοτικότητα των μονάδων εμμέσως, ορίζοντας την απόστασή τους από το όριο αποδοτικότητας ως προς εκτίμηση στοχαστική μεταβλητή. Με μοντέλα προγραμματισμού στόχων τα οποία διατυπώνουν, αποδίδουν τη μη επίτευξη της αποδοτικότητας των μονάδων είτε σε σφάλματα μετρήσεων είτε σε πραγματική συγκριτική αδυναμία των επιδόσεών τους.

3. Τεχνικές προσομοιώσεων.

Η τεχνική αυτή ορίζει την αποδοτικότητα των μονάδων ως άγνωστη τυχαία μεταβλητή και προσπαθεί να την εκτιμήσει μέσω προσομοίωσης. Ένα παράδειγμα της τεχνικής αυτής αποτελεί η εργασία των Premachandra et. al (1998) στην οποία, σε ικανό αριθμό επαναλήψεων, επιχειρείται να συγκριθούν ως προς την αποδοτικότητα διαφορετικά χαρτοφυλάκια και να διαχωριστούν οι αποδοτικές επενδύσεις.

Πέραν της κατεύθυνσης της Στοχαστικής Περιβάλλουσας Ανάλυσης, η θεωρία ασαφούς λογικής (fuzzy logic) αποτελεί επίσης ένα πλαίσιο ανάπτυξης μεθόδων για τον χειρισμό δεδομένων με μη ακριβείς τιμές. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, οι εισροές και οι εκροές θεωρούνται ότι εμπεριέχουν αοριστία και εκφράζονται με τη βοήθεια διαστημάτων και συναρτήσεων που υποδηλώνουν το βαθμό ένταξης σε αυτά (membership functions). Στη συνέχεια τα συμβατικά μοντέλα της Περιβάλλουσας Ανάλυσης προσαρμόζονται κατάλληλα και αποτιμούν για κάθε διαφορετική τιμή των συναρτήσεων ένταξης την αποδοτικότητα των μονάδων. Χαρακτηριστικές εργασίες από το πεδίο αυτό είναι των Sengupta (1992^α), (1992^β), Triantis K. και O. Girod, (1998).

Από τον χώρο της νομοτελειακής Περιβάλλουσας Ανάλυσης προέρχεται μία πρόσφατη πρόταση για τον χειρισμό δεδομένων με μη ακριβείς τιμές η οποία αποτυπώνεται σε δύο πρόσφατες ερευνητικές εργασίες των Cooper, Park, και Yu (1999, 2001). Σε αυτές διατυπώνεται ένα γενικευμένο μοντέλο (Imprecise-DEA, IDEA) το οποίο επιλύει προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν ακριβή και μη ακριβή δεδομένα. Ως μη ακριβή δεδομένα ορίζονται τα δεδομένα εκείνα στα οποία αντί μιας πραγματικής τιμής συνήθως είναι γνωστό είτε το εύρος στο οποίο αυτή μπορεί να κυμαίνεται (δεδομένα μορφής διαστημάτων-interval data) είτε η σχέση της (μεγαλύτερη, μικρότερη) συγκριτικά με άλλες τιμές (δεδομένα διάταξης – ordinal data). Στην περίπτωση των δεδομένων με μη ακριβείς τιμές, στο μοντέλο

Περιβάλλουσας Ανάλυσης εκτός από τους συντελεστές που δηλώνουν τη σημασία κάθε εισροής και εκροής απαιτείται να εκτιμηθεί και η πραγματική τιμή των δεδομένων είτε εντός των διαστημάτων είτε ως τιμή διάταξης. Η απαίτηση αυτή καθιστά το πρόβλημα υπολογισμού της αποδοτικότητας κάθε μονάδας μη γραμμικό. Η εργασία των Cooper, Park, και Yu βασίζεται στην τεχνική κοινού μετασχηματισμού σε όλους τους τύπους των δεδομένων (διαίρεση όλων των στοιχείων μιας εισροής και εκροής με την μέγιστη τιμή τους), ορισμού νέων μεταβλητών που διαμορφώνουν γραμμικό πρόβλημα και εισαγωγή κατάλληλων κλασματικών περιορισμών επί των συντελεστών, αναλόγως του τύπου των δεδομένων. Η προσέγγιση αυτή πλεονεκτεί στο γεγονός ότι περιγράφει ένα ενιαίο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης για όλους τους τύπους των δεδομένων. Όμως έχει μεγάλη εξάρτηση από τα συγκεκριμένα δεδομένα του προβλήματος. Η εισαγωγή μιας νέας μονάδας ή αλλαγή στις τιμές των δεδομένων απαιτεί νέους μετασχηματισμούς και εκ νέου ορισμό των μεταβλητών. Το σημαντικότερο όμως στοιχείο είναι ότι δεν παρέχει την κατάλληλη τεχνική ώστε να αναλυθούν σε βάθος οι συνθήκες που διαμορφώνουν τις τιμές αποδοτικότητας στις περιπτώσεις δεδομένων με μη ακριβείς τιμές.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μία νέα μεθοδολογική προσέγγιση η οποία επιτυγχάνει να εξετάσει σε βάθος την αποδοτικότητα των μονάδων όταν τα δεδομένα του προβλήματος έχουν την μορφή διαστημάτων με σταθερά όρια και οι ακριβείς τιμές των εισροών και εκροών δεν είναι γνωστές. Η προσέγγιση που ακολουθείται βασίζεται σε διαφορετική τεχνική από αυτή των Cooper, Park, και Yu (1999) και επιτρέπει κατ' αρχήν να διατυπωθεί ένα μοντέλο ικανό να χειρίζεται σύνολα δεδομένων στα οποία υπάρχουν ταυτοχρόνως δεδομένα με ακριβείς τιμές και δεδομένα μορφής διαστημάτων. Το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί γενίκευση του αντιστοίχου μοντέλου CCR αφού όταν τα δεδομένα είναι ακριβή λαμβάνει μορφή ταυτόσημη με αυτό. Η συγκεκριμένη τεχνική προσέγγιση που ακολουθείται επιτρέπει, υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις ασάφειας, να εκτιμηθεί η

αποδοτικότητα των μονάδων και να ορισθεί ένα κάτω φράγμα (ελάχιστη τιμή) της αποδοτικότητας. Επίσης διευκολύνει στο να μελετηθεί η ευαισθησία των τιμών αποδοτικότητας μέσω δεικτών αντοχής που ορίζονται για το σκοπό αυτό και που δηλώνουν το βαθμό στον οποίο οι αποδοτικές μονάδες είναι σε θέση να διατηρήσουν την αποδοτικότητά τους όταν οι λοιπές μονάδες του συνόλου αφεθούν ελεύθερες να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους. Τα ανωτέρω βοηθούν στο να διαχωριστούν οι μονάδες του προβλήματος σε ομάδες των ισχυρώς αποδοτικών, των αποδοτικών και των μη αποδοτικών και να πραγματοποιηθεί περαιτέρω διάκριση και κατάταξη του συνόλου των αποδοτικών μονάδων. Για τις μη αποδοτικές μονάδες και για επιλεγμένες εισροές / εκροές, ορίζεται επιπλέον μία τιμή κατωφλίου, πέραν της οποίας η κάθε μονάδα από μη αποδοτική, καθίσταται αποδοτική. Τέλος, διερευνάται η ειδική περίπτωση των προβλημάτων όπου οι εισροές / εκροές λαμβάνουν μόνον ακέραιες και όχι πραγματικές τιμές και προτείνονται κατάλληλοι μετασχηματισμοί.

Σχετικά με τα ανωτέρω, στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται κατάλληλα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού και παρέχονται επεξηγηματικά αριθμητικά παραδείγματα.

2.2 Το μοντέλο για τα δεδομένα διαστημάτων

Υποθέτουμε ότι σε ένα πρόβλημα Περιβάλλουσας Ανάλυσης υπάρχουν n μονάδες, η κάθε μία από τις οποίες δέχεται m εισροές και παράγει s εκροές. Με y_{rj} δηλώνεται η συγκεκριμένη τιμή της εκροής r ($r=1, \dots, s$) για την υπό εκτίμηση μονάδα j ($j=1, \dots, n$) και με x_{ij} η τιμή της εισροής i ($i=1, \dots, m$) για την ίδια μονάδα j αντιστοίχως. Αντιθέτως προς το αρχικό μοντέλο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης, υποθέτουμε ότι όλες οι τιμές των εισροών / εκροών είναι αρχικά άγνωστες και περιορίζονται σε διαστήματα με σταθερά

όρια, δηλαδή $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ και $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$. Η παραδοχή αυτή εισάγει επιπλέον στο πρόβλημα προς εκτίμηση τις μεταβλητές x_{ij} και y_{rj} , εκτός των αρχικών $u_1, \dots, u_r, \dots, u_s$ και $v_1, \dots, v_i, \dots, v_m$ οι οποίες αναπαριστούν τους συντελεστές των εισροών και εκροών αντίστοιχα. Για τις μεταβλητές x_{ij} και y_{rj} επιπλέον θεωρούμε ότι :

- (i) είναι συνεχείς πραγματικοί αριθμοί δηλαδή μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή στα αντίστοιχα διαστήματα
- (ii) λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές (συμπεριλαμβανομένου και του μηδέν)
- (iii) δεν είναι γνωστή καμία πληροφορία για την κατανομή των τιμών τους εντός των διαστημάτων

Για την καλύτερη κατανόηση των μετασχηματισμών και των σχετικών μοντέλων που ακολουθούν, στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η τυπική δομή των δεδομένων για προβλήματα με δεδομένα διαστημάτων. Στη γενική περίπτωση, σε κάθε μία μονάδα και στις αντίστοιχες σε αυτήν εισροές / εκροές αντιστοιχούν δύο στήλες, μία για την ελάχιστη τιμή και μία για τη μέγιστη τιμή. Οι δύο αυτές τιμές ταυτίζονται όταν στο πρόβλημα υπάρχουν εισροές / εκροές με ακριβείς τιμές.

Πίνακας 2.1 - Η τυπική δομή των δεδομένων για τα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με δεδομένα διαστημάτων .

Μονάδα <i>j</i>	Εισροές						Εκροές					
	<i>x_{ij}</i>		...		<i>x_{mj}</i>		<i>y_{ij}</i>		...		<i>y_{sj}</i>	
1	<i>x₁₁^L</i>	<i>x₁₁^U</i>	<i>x_{m1}^L</i>	<i>x_{m1}^U</i>	<i>y₁₁^L</i>	<i>y₁₁^U</i>	<i>y_{s1}^L</i>	<i>y_{s1}^U</i>
2	<i>x₁₂^L</i>	<i>x₁₂^U</i>	<i>x_{m2}^L</i>	<i>x_{m2}^U</i>	<i>y₁₂^L</i>	<i>y₁₂^U</i>	<i>y_{s2}^L</i>	<i>y_{s2}^U</i>
...
<i>j</i>	<i>x_{1j}^L</i>	<i>x_{1j}^U</i>	<i>x_{mj}^L</i>	<i>x_{mj}^U</i>	<i>y_{1j}^L</i>	<i>y_{1j}^U</i>	<i>y_{sj}^L</i>	<i>y_{sj}^U</i>
...
<i>n</i>	<i>x_{1n}^L</i>	<i>x_{1n}^U</i>	<i>x_{mn}^L</i>	<i>x_{mn}^U</i>	<i>y_{1n}^L</i>	<i>y_{1n}^U</i>	<i>y_{sn}^L</i>	<i>y_{sn}^U</i>

Οι άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές x_{ij} και y_{rj} , όταν τεθούν στο ακόλουθο αρχικό μοντέλο CCR (1.2), σε συνδυασμό με τις επίσης άγνωστες προς εκτίμηση τιμές των πολλαπλασιαστών v_i, u_r , δημιουργούν τους παράγοντες $x_{ij}v_i$ και $y_{rj}u_r$ οι οποίοι ως γινόμενα προς εκτίμηση μεταβλητών, καθιστούν το πρόβλημα μη γραμμικό.

$$\begin{aligned}
 \max h_{j_0} &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 s.t. & \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Για το μετασχηματισμό του σε αντίστοιχο γραμμικό εισάγουμε, για τις εισροές και εκροές αντιστοίχως, νέες μεταβλητές s_{ij} και t_{rj} , μέσω των οποίων εκφράζεται κάθε άγνωστη τιμή $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ και y_{rj} ως εξής :

$$x_{ij} = x_{ij}^L + s_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \text{ με } 0 \leq s_{ij} \leq 1$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L + t_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L), r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n \text{ με } 0 \leq t_{rj} \leq 1$$

Οι ανωτέρω μετασχηματισμοί προβάλλουν τα x_{ij} και y_{rj} στο διάστημα $[0,1]$ και οι νέες μεταβλητές s_{ij} και t_{rj} εκφράζουν την απόσταση των άγνωστων τιμών x_{ij} και y_{rj} από τα κάτω άκρα x_{ij}^L, y_{rj}^L των διαστημάτων. Από των ορισμούς προκύπτει ότι τις ακραίες τιμές τους 0 και 1 λαμβάνουν όταν οι αντίστοιχες μεταβλητές x_{ij} και y_{rj} συμπέσουν με τα άκρα των διαστημάτων, δηλαδή όταν $s_{ij} = 0$, τότε $x_{ij} = x_{ij}^L$ και όταν $s_{ij} = 1$ τότε $x_{ij} = x_{ij}^U$. Ομοίως εάν $t_{rj} = 0$, τότε $y_{rj} = y_{rj}^L$ και εάν $t_{rj} = 1$ τότε $y_{rj} = y_{rj}^U$. Επιπλέον οι τιμές $s_{ij} = \frac{1}{2}$ και $t_{rj} = \frac{1}{2}$, αντιστοιχούν σε τιμές των x_{ij} και y_{rj} στο μέσον του διαστήματος, δηλαδή στα σημεία $\frac{x_{ij}^U + x_{ij}^L}{2}$ και $\frac{y_{rj}^U + y_{rj}^L}{2}$.

Όταν οι ανωτέρω μετασχηματισμοί εφαρμοσθούν στο αρχικό μοντέλο CCR της Περιβάλλουσας Ανάλυσης (1.2), προκύπτουν για τις εικονικές εισροές / εκροές οι εκφράσεις

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = \sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^L + s_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L)] = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L),$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} = \sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^L + t_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)] = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)$$

Στις εκφράσεις αυτές, τα γινόμενα $v_i s_{ij}$ και $u_r t_{rj}$ εξακολουθούν να περιέχουν δύο άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές και για το λόγο αυτό το αρχικό πρόβλημα παραμένει μη γραμμικό. Όμως εάν τα γινόμενα αυτά λάβουν τη μορφή νέων μεταβλητών, q_{ij} και p_{rj} , όταν δηλαδή $q_{ij} = v_i s_{ij}$ και $p_{rj} = u_r t_{rj}$, το πρόβλημα λαμβάνει τελικώς γραμμική μορφή. Τούτο διότι, με τον νέο μετασχηματισμό αυτό, οι ανωτέρω εκφράσεις για τις εισροές και εκροές, λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &= \sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^L + s_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L)] = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \\ &= \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} &= \sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^L + t_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)] = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) \\ &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) \end{aligned}$$

στις οποίες τα v_i , u_r , q_{ij} και p_{rj} είναι οι μόνιμοι άγνωστοι παράγοντες προς υπολογισμό.

Για τις νέες μεταβλητές q_{ij} που αντιστοιχούν στις εισροές ισχύει ο επιπλέον περιορισμός

$$0 \leq q_{ij} \leq v_i, \forall i, j,$$

αφού $0 \leq s_{ij} (= \frac{q_{ij}}{v_i}) \leq 1$ και $v_i \geq \varepsilon$ για κάθε i και j . Ομοίως, για μεταβλητές

των εκροών p_{rj} ισχύει

$$0 \leq p_{rj} \leq u_r, \forall r, j.$$

Με βάση τους ανωτέρω διαδοχικούς μετασχηματισμούς, το αρχικό μοντέλο CCR για μία υπό εκτίμηση μονάδα j_0 , από την αρχική μορφή (1.2) λαμβάνει τη μορφή (2.1) στην οποία άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές είναι οι v_i , u_r καθώς επίσης και οι q_{ij} και p_{rj} :

$$\begin{aligned}
\max h_{j_0} &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) \\
s.t. & \\
\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) &= 1 \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
p_{rj} - u_r &\leq 0 \quad r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n \\
q_{ij} - v_i &\leq 0 \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
p_{rj} &\geq 0, \quad q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Το ανωτέρω μοντέλο (2.1) είναι ικανό να χειριστεί σε ένα πρόβλημα δεδομένα ακριβή και μη ακριβή υπό μορφή διαστημάτων και αποτελεί γενική περίπτωση του αντιστοιχού CCR, όπως αποδεικνύεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1 : Το αρχικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης CCR με ακριβείς τιμές δεδομένων προκύπτει ως ειδική περίπτωση του (2.1).

Απόδειξη : Εάν για κάθε μονάδα και για όλες τις εισροές και εκροές, συμπίψουν τα δύο άκρα των διαστημάτων δηλαδή εάν $x_{ij}^U = x_{ij}^L$ και $y_{ij}^U = y_{ij}^L \forall i, j$, τότε στο μοντέλο (2.1) μηδενίζονται οι παράγοντες $p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)$, $q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L)$ των αθροισμάτων και αφαιρούνται οι μεταβλητές p_{rj} και q_{ij} μαζί με τους περιορισμούς $p_{rj} - u_r \leq 0$ και $q_{ij} - v_i \leq 0$. Η νέα μορφή που προκύπτει είναι ταυτόσημη με το μοντέλο CCR (1.2) που αναφέρεται στο εισαγωγικό μέρος. Εάν για μερικές μόνον μονάδες ή / και εισροές, εκροές οι τιμές είναι ακριβείς, τα άκρα των αντιστοιχών διαστημάτων συμπίψουν και το μοντέλο (2.1) είναι σε θέση να αντιμετωπίσει μεικτά σύνολα με ακριβή και μη ακριβή δεδομένα. ■

Στο μοντέλο (2.1), μία προς εκτίμηση μονάδα j_0 , προκειμένου να μεγιστοποιήσει την αποδοτικότητά της συγκριτικά με τις άλλες μονάδες, δεν επιλέγει μόνο τους συντελεστές των εισροών και εκροών v_i, u_r όπως συμβαίνει στο αρχικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης. Επιπλέον, ορίζει, εμμέσως από την εκτίμηση των τιμών των q_{ij_0} και p_{rj_0} , τις αρχικά άγνωστες τιμές των x_{ij_0} και y_{rj_0} προκειμένου να επιτύχει τη μέγιστη τιμή της αποδοτικότητας της. Πράγματι, από την επίλυση του αντιστοιχού προβλήματος και τον υπολογισμό της βέλτιστης τιμής της αποδοτικότητας, εκτιμώνται οι τιμές των q_{ij_0} και p_{rj_0} από τις οποίες προκύπτουν στη συνέχεια τιμές για τις s_{ij_0} και t_{rj_0} από τις σχέσεις $s_{ij_0} = \frac{q_{ij_0}}{v_i}, t_{rj_0} = \frac{p_{rj_0}}{u_r}$. Βάσει αυτών προκύπτουν ευθέως τιμές επιπέδων x_{ij_0} και y_{rj_0} εντός των αντιστοιχών διαστημάτων οι οποίες καθορίζουν και την αποδοτικότητα των μονάδων. Τα επίπεδα τιμών x_{ij_0} και y_{rj_0} δεν έχουν συγκεκριμένη ιδιότητα και θεωρητικά, για την μονάδα j_0 , υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί τιμών $x_{1j_0}, x_{2j_0}, \dots, x_{mj_0}$ και $y_{1j_0}, y_{2j_0}, \dots, y_{sj_0}$ οι οποίοι επιτυγχάνουν την ίδια τιμή αποδοτικότητας. Από τα ανωτέρω επίσης προκύπτει ότι τα x_{ij_0} και y_{rj_0} λαμβάνουν τιμές στα άκρα των διαστημάτων δηλαδή $x_{ij_0} = x_{ij_0}^L, y_{rj_0} = y_{rj_0}^L$ και $x_{ij_0} = x_{ij_0}^U, y_{rj_0} = y_{rj_0}^U$ εάν και μόνον εάν οι μεταβλητές q_{ij_0} και p_{rj_0} λαμβάνουν ακραίες τιμές δηλαδή όταν $q_{ij_0} = 0, p_{rj_0} = 0$ και $q_{ij_0} = v_i, p_{rj_0} = u_r$.

2.3 Εκτίμηση ορίων για τις τιμές αποδοτικότητας.

Με την ελευθερία που παρέχεται στις μονάδες του προβλήματος να ορίζουν τις άγνωστες τιμές x_{ij} και y_{rj} των επιδόσεών τους εντός των διαστημάτων, θεωρητικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί τιμών που έχουν ως αποτέλεσμα την εκτίμηση της μέγιστης τιμής αποδοτικότητας. Εμπειρικά

μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι ο πλέον ευνοϊκός συνδυασμός για μία υπό εκτίμηση μονάδα j_0 είναι να ορίσει τις τιμές των εισροών της στα κάτω όρια, ελαχιστοποιώντας τους πόρους που καταναλώνει και τις τιμές των εκροών της στα άνω όρια μεγιστοποιώντας την απόδοση της. Στην ευνοϊκή αυτή περίπτωση, οι υπόλοιπες μονάδες, επιλέγουν την δυσμενέστερη θέση των επιδόσεών τους δηλαδή να μεγιστοποιήσουν τις εισροές και να ελαχιστοποιήσουν τις εκροές. Αυτή ακριβώς είναι και η πλέον ευνοϊκή περίπτωση για κάθε υπό εκτίμηση μονάδα j_0 . Το κατωτέρω Σχήμα 2.1 αποδίδει γραφικά την ευνοϊκή θέση των εισροών και εκροών για την μονάδα j_0 σε αντιδιαστολή με τις υπόλοιπες μονάδες. Με το σύμβολο **I** αναπαρίσταται η θέση της τιμής εντός του αντιστοίχου διαστήματος που ορίζεται για κάθε μονάδα.

	<i>Εισροή 1</i>	...	<i>Εισροή m</i>	<i>Εκροή 1</i>	...	<i>Εκροή s</i>
Μονάδα 1	_____ I	...	_____ I	I _____	...	I _____
.....
Μονάδα j_0	I _____	...	I _____	_____ I	...	_____ I
.....
Μονάδα n	_____ I	...	_____ I	I _____	...	I _____

Σχήμα 2.1 - Η ευνοϊκή διάταξη των επιπέδων των εισροών / εκροών για την υπό εκτίμηση μονάδα j_0

Εάν ορίσουμε ως $h_{j_0}^U$ την (μέγιστη) τιμή της αποδοτικότητας για τον ανωτέρω ευνοϊκό συνδυασμό, στην πρόταση 2.2 που ακολουθεί αποδεικνύεται ότι η τιμή αυτή ισούται με την βέλτιστη λύση του μοντέλου (2.1).

Πρόταση 2.2 : Για κάθε μονάδα j_0 , η αποδοτικότητα $h_{j_0}^*$ η οποία προκύπτει από τη βέλτιστη λύση του μοντέλου (2.1) είναι ίση με την τιμή $h_{j_0}^U$ της αποδοτικότητας στη πλέον ευνοϊκή περίπτωση επιλογής τιμών εντός των διαστημάτων για την μονάδα αυτή.

Απόδειξη : Παρατηρούμε ότι η τιμή $h_{j_0}^U$ για την πλέον ευνοϊκή περίπτωση της μονάδας j_0 όπως αυτή ορίζεται ανωτέρω, αποτελεί βέλτιστη λύση του ακόλουθου μοντέλου (2.2) Περιβάλλουσας Ανάλυσης με σταθερά δεδομένα :

$$\begin{aligned}
 \max h_{j_0}^U &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^U \\
 \text{s.t.} & \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L &\leq 0 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \ ; \ j \neq j_0 \\
 u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Το μοντέλο αυτό έχει τη μορφή CCR ενώ ο δεύτερος περιορισμός που έχει τεθεί και αναφέρεται στην μονάδα j_0 εξασφαλίζει την ευνοϊκή διαφοροποίησή της από τις υπόλοιπες μονάδες. Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι $h_{j_0}^* = h_{j_0}^U$. Διαπιστώνεται ότι η τιμή $h_{j_0}^U$ αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη λύση

$$\begin{aligned}
 &(u_r, r = 1, \dots, s), (v_i, i = 1, \dots, m) \\
 &(q_{ij_0} = 0, i = 1, \dots, m), (p_{rj_0} = u_r, r = 1, \dots, s) \\
 &(q_{ij} = v_i, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, j \neq j_0) \\
 &(p_{rj} = 0, r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n, j \neq j_0)
 \end{aligned}$$

του γραμμικού προβλήματος (2.1) η οποία είναι εφικτή αλλά όχι κατ' ανάγκη βέλτιστη. Η λύση αυτή εφαρμοζόμενη στο μοντέλο (2.1) το μετασχηματίζει σε μορφή ταυτόσημη με το μοντέλο (2.2). Τούτο γιατί στο γραμμικό πρόβλημα (2.1) μηδενίζονται οι παράγοντες που περιέχουν τους όρους $q_{ij_0} = 0$ και $p_{rj} = 0$ και μετασχηματίζονται αναλόγως οι υπόλοιποι. Έτσι η τιμή $h_{j_0}^U$ ως προκύπτουσα από εφικτή λύση, είναι μικρότερη ή ίση από τη βέλτιστη δηλαδή $h_{j_0}^* \geq h_{j_0}^U$. Εξ' ορισμού όμως η τιμή $h_{j_0}^U$ αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή αποδοτικότητας της μονάδας j_0 , άρα θα είναι μεγαλύτερη ή ίση κάθε άλλης και συνεπώς της $h_{j_0}^*$. Τούτο εκφράζεται με την σχέση $h_{j_0}^* \leq h_{j_0}^U$. Οι δύο προηγούμενες σχέσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $h_{j_0}^* = h_{j_0}^U$. ■

Το μοντέλο (2.2) είναι ένα μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα όπου οι τιμές των εισροών / εκροών εκτιμώνται μεν προς το συμφέρον της κάθε προς εκτίμηση μονάδας j_0 αλλά δυσμενώς προς τις άλλες μονάδες. Όταν όμως ζητηθεί να εκτιμηθεί η αποδοτικότητα για διαφορετική μονάδα από την j_0 , τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και το σύνολο των περιορισμών μεταβάλλονται δραστικά και συνθέτουν ένα νέο εντελώς διαφορετικό γραμμικό πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό η εκτίμηση της αποδοτικότητας για όλες τις μονάδες απαιτεί τον σχηματισμό αντιστοιχών διαφορετικών προβλημάτων και καθιστά την επίλυση του συνολικού προβλήματος εξαιρετικά επίπονη διαδικασία. Πέραν τούτου, η δημιουργία νέων κάθε φορά προβλημάτων δεν συμβαδίζει με τη λογική των προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης όπου το σύνολο των περιορισμών παραμένει σταθερό και μεταβάλλονται μόνο τα μέρη του προβλήματος που αφορούν την υπό εκτίμηση μονάδα. Το μοντέλο (2.1) αίρει αυτή την αδυναμία και εκτιμά με ενιαίο τρόπο τις μέγιστες τιμές αποδοτικότητας των μονάδων σε δεδομένα μορφής διαστημάτων.

Μεταξύ των πρακτικά άπειρων δυνατών τιμών που μπορεί να λάβει η αποδοτικότητα μιας μονάδας σε ένα πρόβλημα με δεδομένα υπό την μορφή

διαστημάτων συνδυάζοντας διαφορετικές τιμές εισροών και εκροών, υπάρχει και μία ελάχιστη τιμή. Η τιμή αυτή προκύπτει, αναλόγως προς την μέγιστη τιμή, από τη δυσμενέστερη περίπτωση για κάθε μονάδα δηλαδή από τη περίπτωση κατά την οποία όλες οι εισροές της μεγιστοποιούνται λαμβάνοντας τιμές στο άνω άκρο του διαστήματος και οι εκροές της ελαχιστοποιούνται λαμβάνοντας τιμές στο κάτω άκρο του διαστήματος. Οι υπόλοιπες μονάδες λαμβάνουν την ευνοϊκότερη γι' αυτές θέση ελαχιστοποιώντας τις εισροές τους και μεγιστοποιώντας τις εκροές τους. Η περίπτωση αυτή αποδίδεται γραφικά στο ακόλουθο Σχήμα 2.2.

	<i>Εισροή 1</i>	...	<i>Εισροή m</i>	<i>Εκροή 1</i>	...	<i>Εκροή s</i>
Μονάδα 1	I _____	...	I _____	_____ I	...	_____ I
.....
Μονάδα j_0	_____ I	...	_____ I	I _____	...	I _____
.....
Μονάδα n	I _____	...	I _____	_____ I	...	_____ I

Σχήμα 2.2 - Η δυσμενής διάταξη των επιπέδων των εισροών / εκροών για την υπό εκτίμηση μονάδα j_0 που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας

Εάν συμβολίσουμε με $h_{j_0}^L$ την ελάχιστη αυτή τιμή της αποδοτικότητας για την μονάδα j_0 , τότε αυτή προκύπτει ως βέλτιστη λύση από το ακόλουθο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης (2.3) με ακριβή δεδομένα στο οποίο άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές είναι οι μόνοι οι συντελεστές των εισροών και εκροών v_i, u_r .

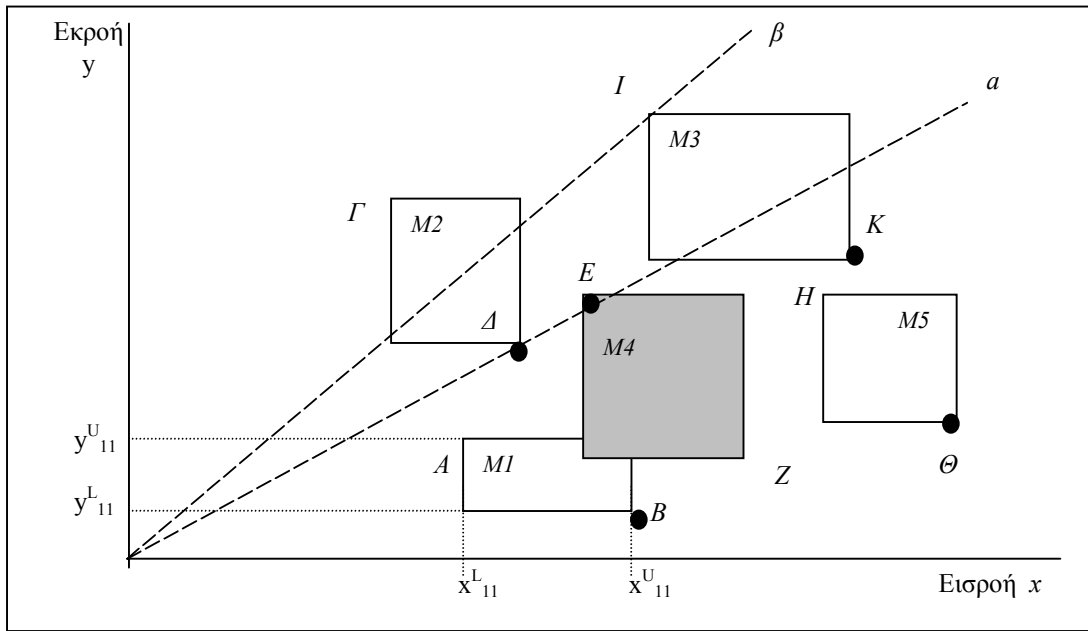
$$\begin{aligned}
& \max h_{j_0}^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^U = 1 \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^U \leq 0 \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j = 1, \dots, n ; j \neq j_0 \\
& u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Η ελάχιστη τιμή $h_{j_0}^L$ της αποδοτικότητας κάθε μονάδας j_0 δεν πρέπει να συγγέεται με τις τιμές της αποδοτικότητας όπως αυτές υπολογίζονται στα προβλήματα που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες μονάδες (cross-efficiency score). Η τιμή της αποδοτικότητας που υπολογίζει κάθε άλλη μονάδα εφαρμόζοντας τους πολλαπλασιαστές v_i, u_r τους οποίους εκτίμησε προς όφελός της, θα είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση από την ελάχιστη $h_{j_0}^L$. Τούτο διότι πάντοτε θα υπάρχει ένα μοντέλο της μορφής (2.3) το οποίο θα επιτρέπει στην υπό εκτίμηση μονάδα κάθε φορά να εκτιμά τα βάρη προς όφελός της.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, τα μοντέλα (2.1) και (2.3) έχουν σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό ενός άνω ($h_{j_0}^*$) και ενός κάτω φράγματος ($h_{j_0}^L$) τιμών αποδοτικότητας, εντός του εύρους των οποίων θα κυμαίνεται κάθε οποιαδήποτε άλλη τιμή αποδοτικότητας που προκύπτει από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των εισροών και εκροών.

Για την επεξήγηση των ανωτέρω παραθέτουμε ενδεικτικά το Σχήμα 2.3 το οποίο αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με δεδομένα μορφής διαστήματος, όπου πέντε μονάδες M1,...,M5 αξιολογούνται ως προς μία μόνο εισροή και μία μόνο εκροή. Οι μονάδες, στην περίπτωση των δεδομένων διαστημάτων, δεν αντιστοιχούν σε σημεία του δισδιάστατου χώρου όπως στην περίπτωση των δεδομένων με ακριβείς τιμές, αλλά σε

ορθογώνια παραλληλόγραμμα η έκταση των οποίων ορίζεται από τα άκρα $x_{ij}^L, x_{ij}^U, y_{ij}^L, y_{ij}^U$ όπως ενδεικτικά παρουσιάζεται στο σχήμα για την μονάδα M1.



Σχήμα 2.3 - Γραφική παράσταση προβλήματος Περιβάλλουσας Ανάλυσης με δεδομένα διαστημάτων με μία εισροή και μία εκροή.

Όλα τα εσωτερικά σημεία των παραλληλόγραμμων αντιστοιχούν σε τιμές των εισροών x_{ij} και εκροών y_{ij} οι οποίες είναι δυνατόν να προκύψουν ως επιλογή της κάθε μονάδας από την επίλυση του αντιστοίχου γι' αυτήν προβλήματος. Η άνω αριστερή γωνία του κάθε παραλληλόγραμμου αντιστοιχεί στον πλέον ευνοϊκό συνδυασμό εισροών – εκροών για κάθε μονάδα, στο σημείο δηλαδή όπου οι εισροές λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή τους και οι εκροές τη μέγιστη. Αντιθέτως η κάτω δεξιά γωνία αντιστοιχεί στο δυσμενέστερο συνδυασμό κάθε μονάδα, στο οποίο οι εισροές λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους και οι εκροές την ελάχιστη. Σε κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών εντός των διαστημάτων, το όριο αποδοτικότητας στην περίπτωση σταθερών αποδόσεων-CCR θα είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και θα τέμνει τις περιοχές ορισμού των τιμών των μονάδων

(παραλληλόγραμμα) σε ορισμένα σημεία. Οι μονάδες των οποίων οι περιοχές θα περιβάλλονται εξ' ολοκλήρου απο το όριο, προφανώς θα είναι μη αποδοτικές για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Εάν εκλάβουμε ως υπό εκτίμηση μονάδα την M_4 , από το ανωτέρω σχήμα προκύπτει ότι στην ευνοϊκή γι' αυτή περίπτωση, θα ορισθεί το σημείο E , ενώ για τις υπόλοιπες μονάδες M_1, M_2, M_3, M_5 , τα σημεία B, Δ, K , και Θ αντιστοίχως. Στην εκδοχή αυτή, το όριο αποδοτικότητας θα είναι η διακεκομμένη γραμμή με την ένδειξη α που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει την μονάδα M_4 στο σημείο E . Σε αυτή τη περίπτωση οι μονάδες M_2 και M_4 θα είναι αποδοτικές ενώ M_1, M_3, M_5 μη αποδοτικές. Σε μερικές άλλες εκδοχές του προβλήματος, η μονάδα M_4 θα είναι μη αποδοτική. Τέτοια περίπτωση αποτελεί το πρόβλημα που αντιστοιχεί στο όριο της ευθείας β , όταν δηλαδή η μονάδα M_3 ορίζει τα ευνοϊκότερη γι' αυτήν επίπεδα τιμών.

Απο το ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι η μονάδα M_1 σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αποδοτική διότι και στη πλέον ευνοϊκή γι' αυτήν περίπτωση, η γραμμή του ορίου η οποία θα πρέπει να τέμνει τουλάχιστον σε ένα σημείο τις περιοχές των μονάδων M_2 και M_3 , αφήνει δεξιά-κάτω όλη τη περιοχή της μονάδας M_2 . Αντιθέτως προς την M_1 , η μονάδα M_2 θα είναι πάντοτε αποδοτική. Ακόμη και στην δυσμενέστερη γι' αυτή περίπτωση επιλογής του σημείου Δ , το όριο περιβάλλει ένα τουλάχιστον σημείο απο όλες τις άλλες μονάδες.

Το ανωτέρω παράδειγμα αναδεικνύει ότι αναλόγως των δεδομένων του προβλήματος, εμφανίζονται περιπτώσεις μονάδων που είτε είναι αποδοτικές σε κάθε συνδυασμό εισροών / εκροών των υπολοίπων μονάδων, είτε είναι πάντοτε μη αποδοτικές είτε τέλος είναι άλλοτε αποδοτικές και άλλοτε μη αποδοτικές. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται στην παράγραφο που ακολουθεί.

2.4 Ταξινόμηση των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα

Με τη ευελιξία που έχουν οι μονάδες να ορίζουν στα αντίστοιχα προβλήματα συγκριτικής εκτίμησης της αποδοτικότητάς τους τα ευνοϊκότερα γι' αυτές επίπεδα τιμών εντός των διαστημάτων, έχουν την ευκαιρία να εμφανισθούν ως αποδοτικές. Έτσι, το πλήθος των αποδοτικών μονάδων στην περίπτωση των δεδομένων διαστημάτων, αναμένεται να είναι σημαντικά μεγαλύτερο, αναλογικά με το μοντέλο Περιβάλλουσα Ανάλυση για ακριβή δεδομένα. Η περαιτέρω διάκριση αλλά και η κατάταξη των αποδοτικών μονάδων, καθίσταται πλέον περισσότερο αναγκαία.

Το διάστημα $[h_j^L, h_j^*]$ που καθορίζεται από τα όρια της ελάχιστης και μέγιστης τιμής αποδοτικότητας κάθε μονάδας j , είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την ταξινόμηση των μονάδων. Για το σκοπό αυτό ορίζονται τα σύνολα :

$$E^{++} = \{j \in J / h_j^L = 1\}$$

$$E^+ = \{j \in J / h_j^L < 1 \text{ and } h_j^* = 1\}$$

$$E^- = \{j \in J / h_j^* < 1\}$$

στα οποία το J παριστά το σύνολο των δεικτών $\{1, \dots, n\}$ των μονάδων.

Το σύνολο E^{++} αποτελείται από τις *ισχυρώς αποδοτικές μονάδες* οι οποίες έχουν ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας ίση με 1, δηλαδή παραμένουν αποδοτικές σε κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών εισροών / εκροών. Το σύνολο E^+ αποτελείται από τις *αποδοτικές μονάδες* οι οποίες όμως δεν διατηρούν την αποδοτικότητά τους στην δυσμενή γι' αυτές περίπτωση. Το σύνολο E^- αποτελείται από τις μονάδες οι οποίες πάντοτε παραμένουν *μη αποδοτικές* ακόμα για στον πιο ευνοϊκό για εκείνες συνδυασμό των εισροών, εκροών.

Σε κάθε πρόβλημα, το σύνολο E^+ των αποδοτικών μονάδων είναι πάντοτε μη κενό όπως ακριβώς συμβαίνει και στο αρχικό μοντέλο

Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα. Αντιθέτως, αναλόγως των δεδομένων του προβλήματος, τα σύνολα E^{++} και E^- μπορεί να είναι κενά δηλαδή μην υπάρχει καμία ισχυρώς αποδοτική μονάδα και όλες οι μονάδες να είναι αποδοτικές.

Γενικεύοντας την ανωτέρω ταξινόμηση των μονάδων, η ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας h_j^L μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για την κατάταξη των αποδοτικών μονάδων του συνόλου E^+ . Οι μονάδες που επιτυγχάνουν υψηλή τιμή της ελάχιστης αποδοτικότητας δηλαδή μικρό εύρος τιμών $[h_j^L, 1]$, είναι πλησιέστερα στο να ενταχθούν στο σύνολο E^{++} από τις μονάδες με συγκριτικά χαμηλότερες τιμές ελάχιστης αποδοτικότητας.

Για την επεξήγηση των εννοιών και των μοντέλων που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 2.1, 2.2 και 2.3 δίνεται το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα.

Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω ότι πέντε μονάδες αξιολογούνται ως προς την αποδοτικότητά τους σύμφωνα με τις εισροές / εκροές του Πίνακα 2.2, όλες με δεδομένα διαστημάτων.

Πίνακας 2.2 - Αριθμητικό παράδειγμα με δεδομένα μορφής διαστημάτων

Μονάδα j	Εισροές				Εκροές			
	x_{1j}		x_{2j}		y_{1j}		y_{2j}	
1	12	15	0.21	0.48	138	144	21	22
2	10	17	0.1	0.7	143	159	28	35
3	4	12	0.16	0.35	157	198	21	29
4	19	22	0.12	0.19	158	181	21	25
5	14	15	0.06	0.09	157	161	28	40

Τα μοντέλα (2.1) και (2.3) εφαρμοζόμενα στα δεδομένα του Πίνακα 2.2, δίνουν τιμές αποδοτικότητας από τις οποίες προκύπτει ταξινόμηση των μονάδων σύμφωνα με την οποία η μονάδα #5 είναι ισχυρώς αποδοτική, οι μονάδες #1,#2,#3 αποδοτικές ενώ η #4 μη αποδοτική. Τα σχετικά αποτελέσματα εμφανίζονται στον Πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3 -Τιμές αποδοτικότητας και ταξινόμηση των μονάδων

Μονάδα j	h_j^L	h_j^*	Κατάταξη
1	0.224	1	E^+
2	0.227	1	E^+
3	0.823	1	E^+
4	0.445	0.907	E^-
5	1	1	E^{++}

Η μονάδα #5 ταξινομείται στο σύνολο E^{++} χωρίς μάλιστα να υπερिशχύει των άλλων σε όλα τα κριτήρια (non dominating unit) παρά μόνον στη δεύτερη εισροή, δηλαδή $x_{2,5}^U < x_{2,j}^L, j = 1,2,3,4$. Οι αποδοτικές μονάδες του συνόλου E^+ κατατάσσονται ως προς την ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας h_j^L με την σειρά : μονάδα #3, μονάδα #2 και μονάδα #1.

Η αξιοποίηση της ελάχιστης τιμής αποδοτικότητας h_j^L ως κριτηρίου για την κατάταξη των αποδοτικών μονάδων αποτελεί μια πρώτη απλή προσέγγιση. Στην επόμενη ενότητα εξετάζεται η χρήση του διασταυρούμενου πίνακα αποδόσεων (cross efficiency table) και η δυνατότητα επεξεργασίας των στοιχείων του προς την κατεύθυνση της περαιτέρω κατάταξης των αποδοτικών μονάδων.

2.5 Κατάταξη των αποδοτικών μονάδων

Όπως ακριβώς για τα δεδομένα με ακριβείς τιμές, έτσι και στην περίπτωση των δεδομένων μορφής διαστημάτων, η επίλυση των σχετικών προβλημάτων δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει περαιτέρω τις αποδοτικές μονάδες. Όμως η τεχνική του διασταυρούμενου πίνακα αποδοτικότητας (cross-efficiency table) (βλ. Κεφ. 1, παράγραφος 1.4.2) για τη κατάταξη των αποδοτικών μονάδων είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση των δεδομένων μορφής διαστημάτων. Διευκρινίζεται ότι ο διασταυρούμενος πίνακας αποδοτικότητας είναι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $C^* = \{h_{ij}^*\}$, όπου h_{ij}^* είναι η τιμή της αποδοτικότητας της μονάδας i όπως εκτιμάται από την επίλυση του προβλήματος που αντιστοιχεί στη μονάδα j . Οι τιμές h_{ij}^* εκφράζουν την «αποδοχή» (peer appraisal) της μονάδας i από τις υπόλοιπες μονάδες του προβλήματος. Εκ του ορισμού αυτού προκύπτει ότι οι τιμές h_{ii}^* της διαγωνίου ταυτίζονται με τα όρια των τιμών αποδοτικότητας h_i^* .

Η κατάλληλη επεξεργασία των στοιχείων του πίνακα C^* είναι σε θέση να υποδείξει κατάταξη των αποδοτικών μονάδων. Για παράδειγμα, η εφαρμογή των βασικών στατιστικών μέτρων επί των στηλών του διασταυρούμενου πίνακα αποδοτικότητας, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην ενότητα 1.4.2 του Κεφαλαίου 1, καταδεικνύει τον βαθμό αποδοχής της αποδοτικής μονάδας από τις υπόλοιπες μονάδες του προβλήματος και είναι σε θέση να ορίσει περαιτέρω κατάταξη των αποδοτικών μονάδων. Παραδείγματα τέτοιων στατιστικών μέτρων για την εκτίμηση της συνολικής αποδοχής των μονάδων αποτελούν η μέση τιμή $\bar{h}_j^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ij}^*$ και η σχετική

τυπική απόκλιση (coefficient of variation $V = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (h_{ij}^* - \bar{h}_j^*)^2}}{\bar{h}_j^*}$).

Από τον διασταυρούμενο πίνακα C^* , ως άμεσο επακόλουθο, είναι δυνατόν να ορισθεί για μία συγκεκριμένη μονάδα i το σύνολο

$$R_j^* = \{i : h_{ij}^* = 1\}$$

το οποίο περιλαμβάνει τις μονάδες εκείνες οι οποίες στο αντίστοιχο πρόβλημα της μονάδας j εμφανίζονται ως αποδοτικές. Το σύνολο αυτό έχει παρόμοιο ορισμό με εκείνον του συνόλου αναφοράς (reference set) για προβλήματα με ακριβή δεδομένα.

Τα ανωτέρω εφαρμοζόμενα στο αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 2.1 δίνουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.4 στα οποία παρουσιάζονται οι μέσες τιμές αποδοτικότητας αποδοχής, το σύνολο R_i^* , η συχνότητα εμφάνισης κάθε μονάδας σε αυτό και οι δείκτες μέσης τιμής και σχετικής τυπικής απόκλισης.

Πίνακας 2.4 - Ο διασταυρούμενος πίνακας αποδόσεων και οι τιμές των κριτηρίων κατάταξης

Μονάδα j	1	2	3	4	5	R_j^*	Συχνότητα εμφάνισης σε σύνολα αναφοράς
1	1	1	1	0,740003	1	{2,3,5}	2
2	1	1	1	0,698054	1	{1, 3,5}	4
3	0,958599	1	1	0,740003	1	{2, 5}	4
4	1	1	1	0,907066	1	{1,2,3,5}	
5	0,958599	1	1	0,740003	1	{2,3}	4
\bar{h}_j^*	0,983439	1	1	0,765026	1		
Σχετική τυπική απόκλιση	0,023	0	0	0,106	0		

Από τον ανωτέρω Πίνακα 2.4 προκύπτει ότι η μονάδα #5 που ανήκει στο σύνολο E^{++} έχει την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης στα σύνολα αποδοτικότητας των άλλων μονάδων και συνεπώς την απόλυτη αποδοχή. Οι αποδοτικές μονάδες #1, #2, #3 του συνόλου E^+ , εάν ληφθούν ως κριτήρια τόσο η μέση τιμή \bar{h}_j^* της αποδοτικότητας τους στα επιμέρους προβλήματα όσο και η σχετική τυπική απόκλιση, κατατάσσονται ως εξής: {#2,#3}, {#1}.

Η κατάταξη αυτή συμπίπτει με εκείνη που προκύπτει εάν χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο η ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας. Η ίδια επίσης κατάταξη προκύπτει και από την συχνότητα εμφάνισης της κάθε μονάδας στα σύνολα R_j^* η οποία παρουσιάζεται στη τελευταία στήλη του Πίνακα 2.4.

2.6. Δείκτες αντοχής της αποδοτικότητας

Η συγκεκριμένη μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθήθηκε για χειρισμό των δεδομένων διαστημάτων, σε αντίθεση με αυτή των Cooper, Park, και Yu (1999), επιτρέπει να διερευνηθεί στη συνέχεια η αντοχή (robustness, endurance) των αποδοτικών μονάδων. Στην ενότητα αυτή, σε μία επακόλουθη των βασικών υπολογισμών διαδικασία, εξετάζεται κατά πόσο κάθε μία αποδοτική μονάδα του συνόλου E^+ είναι σε θέση να διατηρήσει την αποδοτικότητά της όταν οι λοιπές μονάδες του προβλήματος βελτιώνουν τη θέση τους, όταν δηλαδή μειώνουν τα επίπεδα των εισροών τους και αυξάνουν τα επίπεδα των εκροών τους, περιοριζόμενα πάντοτε στα όρια των διαστημάτων. Η βελτίωση αυτή που επιχειρείται δεν είναι απαραίτητως αναλογική για όλες τις εισροές και εκροές ούτε και η ίδια ποσοτικά για όλες τις μονάδες. Είναι δυνατόν να επιτευχθεί με επανεκτίμηση των επιπέδων όλων των εισροών και όλων των εκροών των μονάδων ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό άθροισμα των εκροών τους και να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό άθροισμα των εισροών. Η διαδικασία αυτή αφορά προφανώς μόνο τις αποδοτικές μονάδες του συνόλου E^+ και όχι για τις μονάδες των ομάδων E^{++} και E^- (οι μονάδες του συνόλου E^{++} διατηρούν πάντοτε την αποδοτικότητά τους για οποιαδήποτε θέση των τιμών των άλλων μονάδων ενώ και οι μονάδες του συνόλου E^- δεν επιτυγχάνουν ποτέ να γίνουν αποδοτικές).

Για την διερεύνηση της αντοχής της αποδοτικότητας μιας μονάδας j_0 , διατυπώνουμε το ακόλουθο μοντέλο (2.4) :

$$\begin{aligned}
 \max &= \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^n p_{rj} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} \\
 \text{s.t.} & \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) = 1 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4) \\
 & p_{rj} - u_r \leq 0 \quad r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n \\
 & q_{ij} - v_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
 & p_{rj} \geq 0, q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j
 \end{aligned}$$

Στο ανωτέρω μοντέλο (2.4) άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές εξακολουθούν να είναι οι v_i , u_r , q_{ij} και p_{rj} . Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου αυτού επιδιώκει να βελτιώσει αθροιστικά τις επιδόσεις όλων των μονάδων μέσω της μεγιστοποίησης του αθροίσματος των μεταβλητών p_{rj} που αντιστοιχούν στις εκροές και ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των μεταβλητών q_{ij} που αντιστοιχούν στις εισροές για όλες τις μονάδες του προβλήματος. Ο πρώτος περιορισμός του μοντέλου εξασφαλίζει ότι η υπό εκτίμηση μονάδα j_0 είναι αποδοτική, ενώ οι λοιποί περιορισμοί παραμένουν ως έχουν στο μοντέλο (2.1). Η επίλυση του ανωτέρω μοντέλου (2.4) έχει σαν αποτέλεσμα, μέσω των τιμών των q_{ij} , p_{rj} , v_i και u_r , να ορισθούν νέες τιμές $\overline{x_{ij}}$, $\overline{y_{rj}}$ για όλες τις μονάδες, οι οποίες βελτιώνουν την συνολική επίδοσή τους. Για κάθε τέτοια τιμή εισροής $\overline{x_{ij}}$, υπολογίζεται ο λόγος $\frac{x_{ij}^U - \overline{x_{ij}}}{x_{ij}^U - x_{ij}^L}$ ο οποίος εκφράζει την απόσταση, υπό μορφή ποσοστού, της βελτιωμένης θέσης $\overline{x_{ij}}$ από το άνω άκρο x_{ij}^U . Όσο μία μονάδα βελτιώνει την επίδοσή της,

τόσο η τιμή $\overline{x_{ij}}$ της εισροής πλησιάζει το κάτω άκρο x_{ij}^L και η τιμή του λόγου πλησιάζει τη τιμή 1. Όσο περισσότερο οι λοιπές μονάδες είναι σε θέση να βελτιώσουν τα επίπεδα των εισροών τους και η μονάδα j_0 να παραμένει αποδοτική, τόσο περισσότερο αυτή θεωρείται ισχυρή ως προς την αποδοτικότητά της. Ομοίως, όταν από σχετικά μικρές βελτιώσεις των μονάδων η μονάδα j_0 χάνει την αποδοτικότητά της, τότε η αντοχή της στην προσπάθεια βελτίωσης των υπολοίπων είναι μικρή. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για τους λόγους των εκροών $\frac{\overline{y_{rj}} - y_{rj}^L}{y_{rj}^U - y_{rj}^L}$. Λαμβάνοντας αθροιστικά

για όλες τις μονάδες, πλην της υπό εκτίμησης j_0 , τους λόγους βελτίωσης τους και διαιρώντας με τους παράγοντες $m(n-1), s(n-1)$, διαμορφώνονται οι ακόλουθοι δύο δείκτες αντοχής, ρ και σ για τις εισροές και εκροές αντιστοίχως, οι οποίοι εκφράζουν τον μέσο βαθμό βελτίωσης των υπολοίπων μονάδων υπό την προϋπόθεση ότι η μονάδα j_0 παραμένει αποδοτική :

$$\rho_{j_0} = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \sum_{i=1}^m \frac{\overline{x_{ij}^U} - \overline{x_{ij}^L}}{x_{ij}^U - x_{ij}^L}, \quad \sigma_{j_0} = \frac{1}{s(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \sum_{r=1}^s \frac{\overline{y_{rj}} - y_{rj}^L}{y_{rj}^U - y_{rj}^L} \quad (2.5)$$

Οι δείκτες αντοχής ρ και σ για κάθε μονάδα j_0 , εκ του ορισμού τους λαμβάνουν τιμές στο διάστημα μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 \leq \rho_{j_0}, \sigma_{j_0} \leq 1$. Η μέγιστη τιμή τους, όταν δηλαδή $\rho_{j_0} = 1$ ($\sigma_{j_0} = 1$ αντιστοίχως), ερμηνεύεται ως διατήρηση της αποδοτικότητας, ακόμη και στην περίπτωση όπου οι λοιπές μονάδες του προβλήματος λάβουν τις ελάχιστες (μέγιστες αντιστοίχως) δυνατές τιμές των εισροών (εκροών αντιστοίχως) τους. Αντιθέτως μικρές τιμές δεικτών αντοχής κοντά στο 0 σημαίνουν ότι η μονάδα j_0 χάνει πολύ εύκολα την αποδοτικότητά της από έστω και μία μικρή προσπάθεια

βελτίωσης των υπολοίπων μονάδων. Οι τιμές ρ_{j_0}, σ_{j_0} συγκρινόμενες μεταξύ τους για μία μονάδα j_0 , δηλώνουν το μέγεθος της διαφοράς των επιδόσεων της μονάδας j_0 , συνολικά για τις εισροές / εκροές σε σχέση με αυτές των άλλων μονάδων.

Σημειώνεται ότι οι τύποι των δεικτών αντοχής ορίζονται μόνο στα δεδομένα διαστημάτων δηλαδή όταν $x_{ij}^U - x_{ij}^L \neq 0$ και $y_{rj}^U - y_{rj}^L \neq 0$ και όχι στα δεδομένα με ακριβείς τιμές. Όταν συμβαίνει στις εισροές / εκροές μερικών μονάδων να υπάρχουν ακριβή δεδομένα, τότε θα πρέπει ο τύπος υπολογισμού των δεικτών να προσαρμόζεται κατάλληλα και να αγνοεί τις τιμές αυτές οι οποίες μηδενίζουν τον παρανομαστή.

Τονίζεται επίσης ότι στις τιμές των $\overline{x_{ij}}, \overline{y_{rj}}$ οι οποίες ελήφθησαν ως βάση για τον υπολογισμό των δεικτών δεν πρέπει να αποδίδεται ιδιαίτερη αξία δεδομένου ότι αντιστοιχούν σε μία από τις πολλές τιμές οι οποίες βελτιστοποιούν τα αθροίσματα της αντικειμενικής συνάρτησης του μοντέλου (2.4).

Οι δείκτες αντοχής, πέραν της σημαντικής πληροφορίας που παρέχουν για την ευαισθησία της αποδοτικότητας των μονάδων κάτω από προϋποθέσεις ασάφειας των δεδομένων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης και για την κατάταξη των αποδοτικών μονάδων του συνόλου E^+ ξεχωριστά ως προς τις εισροές και εκροές. Για την πλήρη κατάταξη τους είναι δυνατό, αναλόγως του προβλήματος, να χρησιμοποιηθεί μία σύνθεση των δεικτών αυτών (π.χ. ο μέσος όρος, ένα σταθμισμένο άθροισμα).

Το μοντέλο (2.4) εφαρμοζόμενο στα δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος του Πίνακα 2.1 για μία αποδοτική μονάδα π.χ. την μονάδα #1, δίνει τιμές επιπέδων $\overline{x_{ij}}, \overline{y_{rj}}$ οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.4. Στις παρενθέσεις εμφανίζονται οι αντίστοιχες τιμές για την μονάδα #1, όπως

αυτές εκτιμήθηκαν στο μοντέλο (2.2). Οι νέες τιμές επιπέδων $\overline{x_{ij}}$, $\overline{y_{rj}}$ είναι βελτιωμένες σε σχέση με τις αρχικές. Σύμφωνα με αυτές, οι τιμές των δεικτών αντοχής είναι: $\rho_1 = 0.73, \sigma_1 = 0.25$.

Πίνακας 2.5 - Βελτιωμένες επιδόσεις των μονάδων του παραδείγματος για τον υπολογισμό δεικτών αντοχής της #1.

Μονάδα j	Εισροές		Εκροές	
	$\overline{x_{1j}}$	$\overline{x_{2j}}$	$\overline{y_{1j}}$	$\overline{y_{2j}}$
1	12 (12)	0.21 (0.21)	144 (144)	22 (22)
2	14.15 (17)	0.1 (0.7)	143 (143)	28 (28)
3	12 (12)	0.16 (0.35)	157 (157)	21 (21)
4	19 (22)	0.12 (0.19)	181 (158)	25 (21)
5	14.54 (15)	0.06 (0.09)	157 (157)	28 (28)
		$\rho_1=0.73$	$\sigma_1=0.25$	

Οι δείκτες αντοχής συνοπτικά για τις όλες μονάδες του αριθμητικού παραδείγματος, εκτός της μη αποδοτικής μονάδας #4, όπως προκύπτουν από το μοντέλο (2.4) είναι οι εξής:

Πίνακας 2.6 - Δείκτες αντοχής για τις αποδοτικές μονάδες του παραδείγματος

Μονάδα j	Δείκτες αντοχής	
	ρ	σ
1	0.73	0.25
2	1	0.86
3	1	1
4	-	-
5	1	1

Από τον ανωτέρω πίνακα προκύπτει ότι η μονάδα #3 με τιμές δεικτών ίσες με 1, διατηρεί την αποδοτικότητά της ακόμα και στην περίπτωση που οι λοιπές μονάδες ορίσουν τιμές στα άκρα των διαστημάτων τους με τον πιο ευνοϊκό γι' αυτές τρόπο. Η μονάδα #2 έχει μόνο ως προς τις εισροές δείκτη #1 ενώ η μονάδα #1 έχει μεγαλύτερη αντοχή αποδοτικότητας ως προς τις εισροές, όπως φαίνεται από τη σύγκριση των αντιστοιχών τιμών των ρ και σ . Η διάταξη των μονάδων του συνόλου E^+ (μονάδα #1, μονάδα #2, μονάδα #3) με βάση τους δείκτες αντοχής, συμβαίνει να είναι η ίδια ακριβώς με εκείνη της ελάχιστης τιμής της αποδοτικότητας. Για την μονάδα #5 η οποία ανήκει στο σύνολο E^{++} , προφανώς οι δείκτες αντοχής είναι ίσοι με 1.

2.7 Ανάλυση των ορίων βελτίωσης των μη αποδοτικών μονάδων

Στην Περιβάλλουσα Ανάλυση με ακριβή δεδομένα, παρέχεται η δυνατότητα, μέσω του δυϊκού προβλήματος, να εκτιμηθούν για τις μη αποδοτικές μονάδες τα περιθώρια βελτίωσης (μείωση των εισροών, αύξηση των εκροών) ώστε αυτές να καταστούν αποδοτικές. Τα περιθώρια αυτά για κάθε μη αποδοτική μονάδα ορίζουν νέες υποθετικές μονάδες-στόχους επί του ορίου αποδοτικότητας. Μάλιστα συμβαίνει, η αντικατάσταση της μη αποδοτικής από μια τέτοια αποδοτική μονάδα-στόχο, να μην επηρεάζει την αποδοτικότητα των υπολοίπων μονάδων.

Στις περιπτώσεις προβλημάτων με μη ακριβή δεδομένα με τη μορφή διαστημάτων, τα όρια των διαστημάτων θεωρούνται σταθερά και οι μη αποδοτικές μονάδες, με οποιονδήποτε συνδυασμό τιμών μέσα στα όρια αυτά δεν επιτυγχάνουν να εμφανισθούν αποδοτικές. Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποία μία μη αποδοτική μονάδα να διευρύνει τα όρια των διαστημάτων της ώστε να καταστεί αποδοτική. Συγκεκριμένα διερευνάται, ενδεικτικά για μία μόνο εισροή μιας μη αποδοτικής μονάδας, το πόσο αυτή πρέπει κατ' ελάχιστο να μειώσει περαιτέρω το κάτω όριο του

διαστήματος της, ώστε η μονάδα αυτή να καταστεί αποδοτική. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται για την συγκεκριμένη μονάδα και την συγκεκριμένη εισροή, τιμή κατωφλίου αποδοτικότητας. Η διαδικασία αυτή της βελτίωσης των ορίων για επίτευξη της αποδοτικότητας, αν και ανάλογη εκείνης των προβλημάτων με ακριβή δεδομένα, είναι περισσότερο προσαρμοσμένη στην φιλοσοφία των δεδομένων διαστημάτων αφού προϋποθέτει ότι όλες οι μονάδες εξ' αρχής ρυθμίζουν τα επίπεδα των τιμών τους χωρίς αυτά να θεωρούνται δεδομένα από την επίλυση του προηγούμενου προβλήματος.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία διατυπώνονται αναλόγως και στην περίπτωση βελτίωσης (αύξηση του άνω ορίου) μιας εκροής.

Προκειμένου να διατυπωθεί το μοντέλο για την εύρεση του κατωφλίου αποδοτικότητας, θεωρούμε ότι η μονάδα j_0 εκτιμάται ως μη αποδοτική από το μοντέλο (2.1) και ζητείται να μειωθεί κατ' ελάχιστο το κάτω όριο $x_{kj_0}^L$ της εισροής k και να φθάσει σε μία νέα μικρότερη τιμή, έστω $\overline{x_{kj_0}}$. Προκειμένου να ισχύει $\overline{x_{kj_0}} < x_{kj_0}$, θα πρέπει η ποσότητα s_{kj_0} η οποία προκύπτει από την παράσταση $\overline{x_{kj_0}} = x_{kj_0}^L + s_{kj_0} (x_{kj_0}^U - x_{kj_0}^L)$ να δεχθεί αρνητικές τιμές, συνεπώς και ο λόγος $\frac{q_{kj_0}}{v_k} = s_{kj_0}$ να είναι αρνητικός. Τούτο συμβαίνει μόνον όταν το q_{kj_0} είναι αρνητικό αφού $v_k > 0$. Η ελάχιστη μείωση του $x_{kj_0}^L$ έως της τιμής $\overline{x_{kj_0}}$ προκύπτει από μεγιστοποίηση του s_{kj_0} , δεδομένου ότι η μεταβλητή αυτή δέχεται πάντοτε αρνητικές τιμές. Το μοντέλο που επιτυγχάνει την εύρεση τιμής $\overline{x_{kj_0}}$ κατωφλίου αποδοτικότητας είναι το ακόλουθο :

$$\begin{array}{l}
 \max z \\
 \text{s.t.} \\
 (u, v, Q, P) \in S \\
 q_{kj_0} - zv_k \geq 0
 \end{array} \quad (2.6)$$

Σε αυτό, η μεταβλητή z εκφράζει τον προς μεγιστοποίηση λόγο $\frac{q_{kj_0}}{v_k}$, οι

$$u = (u_r, r = 1, \dots, s), v = (v_i, i = 1, \dots, m), \quad Q = (q_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad \text{και}$$

$P = (p_{rj}, r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n)$, είναι οι μεταβλητές του προβλήματος σε μορφή διανύσματος και το S αποτελεί τον χώρο των λύσεων οι οποίες ικανοποιούν το κάτωθι σύνολο των περιορισμών :

$$\begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) = 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) = 0 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (j \neq j_0) \\
 p_{rj} - u_r \leq 0 \quad r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n \\
 q_{ij} - v_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\
 u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
 p_{rj} \geq 0 \quad \forall r, j \\
 q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq k, j \neq j_0 \\
 q_{kj_0} \text{ ελεύθερο}
 \end{array} \quad (2.7)$$

Το μοντέλο (2.6) είναι μη γραμμικό λόγω του γινομένου zv_k στον τελευταίο περιορισμό ο οποίος περιέχει δύο άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές. Για την επίλυσή του εφαρμόζεται η μέθοδος των διαδοχικών διχοτομήσεων (bisection search) η οποία προέρχεται από το χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης δεδομένων [βλ. Despotis (1996)]. Σύμφωνα με αυτή, αρχικά εκτιμάται μία πρώτη τιμή του z , έστω $z = z^0$ και στη συνέχεια

αναζητούνται νέες βελτιωμένες τιμές με διαδοχικές διχοτομήσεις του διαστήματος $[z^0, 0]$ μέχρις ότου οι τελικές τιμές είναι διαφέρουν κατ' ελάχιστο ή συμπέσουν. Αναλυτικά, για το μοντέλο (2.6) η μέθοδος των διαδοχικών διχοτομήσεων έχει ως εξής :

Βήμα 1.

Επιλύεται το γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{array}{ll} \max & q_{kj_0} \\ \text{s.t.} & \\ & (u, v, Q, P) \in S \end{array} \quad (2.8)$$

και βρίσκονται οι βέλτιστες τιμές $q_{kj_0}^0$, v_k^0 των q_{kj_0} , v_k . Ο λόγος $z^0 = \frac{q_{kj_0}^0}{v_k^0}$

έχει αρνητική τιμή και αντιστοιχεί σε μία λύση του αρχική προβλήματος (2.6) χωρίς όμως κατ' ανάγκην να είναι και η βέλτιστη. Η βέλτιστη λύση θα βρίσκεται στο διάστημα $[z^0, 0]$.

Βήμα 2.

Επί του αρχικού διαστήματος $[z^0, 0]$ πραγματοποιείται αναζήτηση της βέλτιστης τιμής με διαδοχικές διχοτομήσεις των διαστημάτων ως εξής :

εξετάζουμε την τιμή $\frac{z^0}{2}$ η οποία συμπίπτει με το μέσον του διαστήματος

$[z^0, 0]$ εάν ικανοποιεί τους περιορισμούς (2.7) του προβλήματος και

αναλόγως επιλέγεται προς περαιτέρω εξέταση είτε το διάστημα $[z^0, \frac{z^0}{2}]$ είτε

το $[\frac{z^0}{2}, 0]$. Στην συνέχεια εξετάζεται εάν το μέσον του επιλεγμένου

διαστήματος ικανοποιεί τους περιορισμούς (2.7) του προβλήματος και

ομοίως ορίζεται ένα νέο διάστημα μικρότερου εύρους. Στο νέο αυτό

διάστημα ελέγχεται η ικανοποίηση των περιορισμών κ.ο.κ έως ότου να προκύψει διάστημα με όρια έστω \underline{z}, \bar{z} , τα οποία να απέχουν ελάχιστα. Πρακτικά τούτο ελέγχεται μέσω της συνθήκης $\bar{z} - \underline{z} \leq \varepsilon$, όπου ε ένας πολύ μικρός αριθμός π.χ. 10^{-5} που ορίζεται στην αρχή της επαναληπτικής διαδικασίας. Ως βέλτιστη τιμή z^* ορίζεται ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος δηλαδή $z^* = \bar{z} \cong \underline{z}$. Η βέλτιστη τιμή z^* προσδιορίζει επίσης και τη συνολική βέλτιστη λύση (u^*, v^*, Q^*, P^*) του προβλήματος (2.6). Η τελική τιμή του κατωφλίου προκύπτει τελικώς από τον τύπο

$$\overline{x_{kj_0}} = x_{kj_0}^L + z^* (x_{kj_0}^U - x_{kj_0}^L).$$

Για την επεξήγηση των ανωτέρω, εφαρμόζουμε τη διαδικασία στο αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 2.2 για την μη αποδοτική μονάδα #4 και για την πρώτη εισροή x_{1j} . Το μοντέλο (2.6) εκτιμά τιμές $q_{1,4}^* = -0.034154$ και $v_1^* = 0.054083$ από τις οποίες προκύπτει ότι $\overline{x_{1,4}} = 17.105$. Η τιμή αυτή ορίζει το κατώφλιο, πέραν του κάτω όριου που είναι η τιμή 19, προκειμένου η μονάδα #4 να καταστεί αποδοτική. Ομοίως για την δεύτερη εισροή της ίδιας μονάδας #4 προκύπτει τιμή κατωφλίου $\overline{x_{2,4}} = 0.1038$ και $q_{2,4}^* = -2.236360$ και $v_2^* = 9.637718$.

Σχετικά με τα επίπεδα τιμών των άλλων μονάδων όταν μέσω του μοντέλου (2.6) επιδιώκεται η εύρεση του κατωφλίου που καθιστά τη μονάδα αποδοτική, διαπιστώνεται ότι αυτά δεν έχουν τις ίδιες τιμές όπως όταν επιλύεται το πρόβλημα εξ' αρχής με το μοντέλο (2.2). Μάλιστα, με την νέα διάταξη των ορίων του διαστήματος της υπό εξέταση μονάδας, μερικές μονάδες από αποδοτικές γίνονται μη αποδοτικές και αντιστρόφως. Τούτο προκύπτει ως φυσική συνέπεια της ελευθερίας που παρέχεται από τα δεδομένα διαστημάτων στις μονάδες να ρυθμίσουν προς το συμφέρον τους τα επίπεδα των τιμών τους. Η αλλαγή της κατάταξης ως προς την

αποδοτικότητα μεταξύ των επιλύσεων των προβλημάτων (2.2) και (2.6) διαπιστώνεται και στο αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 2.2.

Συγκεκριμένα ο Πίνακας 2.6 που ακολουθεί εμφανίζει τα επίπεδα των τιμών όπως αυτά εκτιμήθηκαν κατά τον υπολογισμό της αποδοτικότητας της μονάδας #4.

Πίνακας 2.7 - Τα επίπεδα τιμών των μονάδων και οι τιμές των συντελεστών βαρύτητας όταν εκτιμάται η αποδοτικότητα της μονάδας #4.

Μονάδα	Εισροές		Εκροές	
	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}
1	12	0.21	141.1872	21
2	13.4545	0.1	143	28
3	12	0.35	157	21
4	19	0.12	181	25
5	15	0.09	157	28
	$v_1=0.049057$	$v_2=0.566013$	$u_1=0.005011$	$u_2=0.000001$

Η μονάδα #4 ως μη αποδοτική, όταν προβληθεί επί του ορίου αποδοτικότητας αντιστοιχεί σε μία άλλη υποθετική μονάδα η οποία έχει βελτιωμένες επιδόσεις. Μέσω του δυϊκού μοντέλου οι επιδόσεις της μονάδας αυτής είναι (17.2343, 0.1088, 181, 32.9853).

Εάν η διαδικασία εύρεσης του κατωφλίου αποδοτικότητας εφαρμοσθεί για την μονάδα #4 ως προς την πρώτη εισροή, τα επίπεδα τιμών όλων των μονάδων ορίζονται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν του Πίνακα 2.7 ως εξής:

Πίνακας 2.8 - Τα επίπεδα τιμών των μονάδων και οι τιμές αποδοτικότητας όταν εκτιμάται το κατώφλιο αποδοτικότητας της μονάδας #4 ως προς την πρώτη εισροή x_{1j} .

Μονάδα	Εισροές		Εκροές		Αποδοτικότητα
	\bar{x}_{1j}	\bar{x}_{2j}	\bar{y}_{1j}	\bar{y}_{2j}	
1	12	0.21	138	21	0.9774
2	13.45	0.1	143	28	1
3	12	0.35	157	21	1
4	17.105	0.12	181	25	1
5	15	0.09	157	28	1

Από τον ανωτέρω πίνακα παρατηρούμε ότι τα επίπεδα των τιμών της μονάδας #1 έχουν μεταβληθεί σε σχέση με τον Πίνακα 2.7 και μάλιστα η μονάδα #1 έχει καταστεί από αποδοτική, μη αποδοτική . Οι άλλες μονάδες παρέμειναν αποδοτικές διατηρώντας τα ίδια επίπεδα τιμών τους.

2.8 Η περίπτωση των δεδομένων διαστημάτων υπο την προϋπόθεση μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων (μοντέλο BCC)

Κατ' αναλογία με το μοντέλο BCC (1.8) για προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα, για την περίπτωση προβλημάτων με δεδομένα διαστημάτων, είναι δυνατόν να ορισθεί αντίστοιχο μοντέλο BCC (2.9) Τούτο διαφέρει από το (2.1) μόνο κατά τον παράγοντα u_0 ο οποίος αποτελεί επίσης προς εκτίμηση μεταβλητή και εξασφαλίζει μη αναλογική μεταβολή των εκροών σχετικώς ως προς τις εισροές.

$$\begin{aligned}
 \max h_{j_0} &= \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) - u_0 \\
 s.t. & \\
 \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) - u_0 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 p_{rj} - u_r &\leq 0 \quad r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n \\
 q_{ij} - v_i &\leq 0 \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \\
 u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
 p_{rj} &\geq 0, q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Το ανωτέρω μοντέλο, εφαρμοζόμενο στα δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος του Πίνακα 2.2, εκτιμά τις νέες τιμές αποδοτικότητας h_j^* οι οποίες εμφανίζονται στον κατωτέρω Πίνακα 2.9. Στον ίδιο πίνακα, με ανάλογο μοντέλο του (2.3), υπολογίζεται η ελάχιστη τιμή αποδοτικότητας των μονάδων h_j^L , οι τιμές της παραμέτρου u_0 καθώς επίσης και η τελική τους κατάταξη.

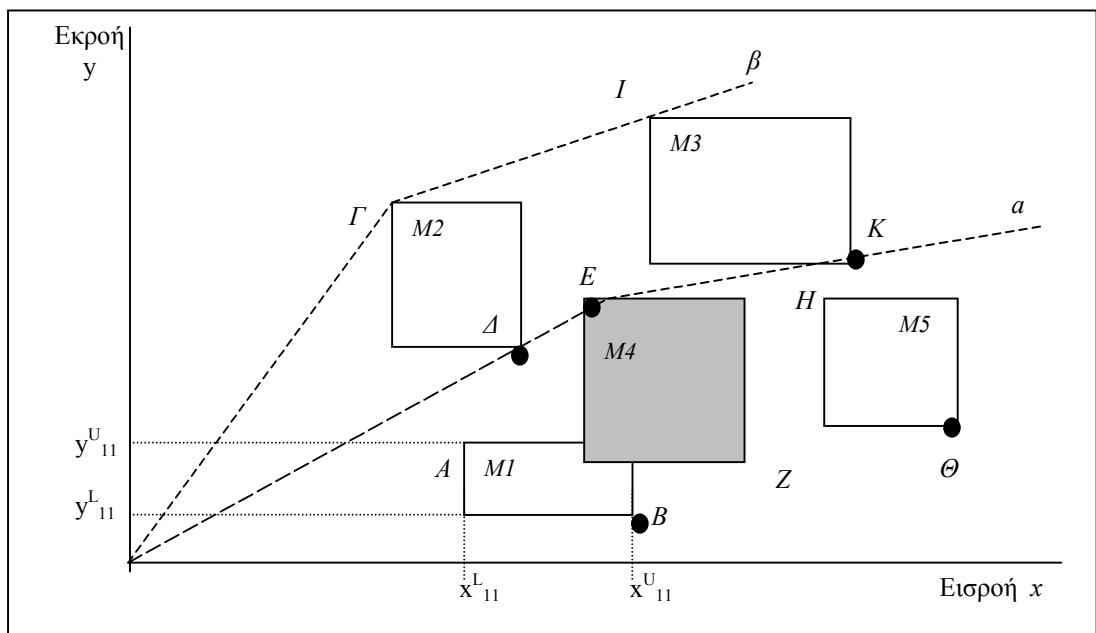
Πίνακας 2.9 –Οι τιμών αποδοτικότητας και οι κατάταξη των μονάδων στις περιπτώσεις CCR, BCC

Μονάδα j	CCR			BCC			
	h_j^L	h_j^*	Κατάταξη	h_j^L	h_j^*	u_0	Κατάταξη
1	0.224	1	E ⁺	0.317	1	0,99	E ⁺
2	0.227	1	E ⁺	0.235	1	2.09	E ⁺
3	0.823	1	E ⁺	0.833	1	0.39	E ⁺
4	0.445	0.907	E ⁻	0.487	1	4.95	E ⁺
5	1	1	E ⁺⁺	1	1	2.37	E ⁺⁺

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των περιπτώσεων CCR, BCC για δεδομένα διαστημάτων, επιβεβαιώνονται οι διαφορές οι οποίες ισχύουν και για δεδομένα με ακριβείς τιμές (βλ. ενότητα 1.4.1, Κεφ.1). Συγκεκριμένα :

1. Οι τιμές αποδοτικότητας στην περίπτωση BCC είναι μεγαλύτερες ή ίσες απο την περίπτωση CCR.
2. Με την ελευθερία που παρέχεται στις μονάδες απο την άρση του περιορισμού σταθερής κλίμακας αποδόσεων, μερικές μονάδες απο μη αποδοτικές, καθίστανται αποδοτικές. Παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης στον Πίνακα 2.9 αποτελεί η μονάδα #4. Έτσι το σύνολο των CCR-αποδοτικών είναι υποσύνολο των BCC-αποδοτικών
3. Όλες οι ισχυρώς αποδοτικές μονάδες (σύνολο E⁺⁺) κατα CCR είναι επίσης ισχυρώς αποδοτικές κατά BCC λόγω του οτι οι τιμές αποδοτικότητας στην περίπτωση BCC είναι μεγαλύτερες ή ίσες απο τις αντίστοιχες CCR.

Στην περίπτωση του μοντέλου BCC, η μορφή του ορίου αποδοτικότητας προσαρμόζεται ανάλογα, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των προβλημάτων με ακριβείς τιμές. Στο παράδειγμα του προβλήματος που αναπαριστάται στο Σχήμα 2.4 που ακολουθεί, το όριο αποδοτικότητας στην ευνοϊκή περίπτωση της μονάδας M_4 μεταβάλλεται ώστε να περιλαμβάνει και το σημείο K , καθιστώντας την μονάδα M_3 αποδοτική. Η μονάδα M_1 και στην περίπτωση αυτή καθίσταται μη αποδοτική διότι σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να περιληφθεί κάποιο σημείο της σε όριο αποδοτικότητας που συγχρόνως να περιβάλλει σημεία άλλων μονάδων.



Σχήμα 2.4 - Γραφική παράσταση προβλήματος Περιβάλλουσας Ανάλυσης με δεδομένα διαστημάτων με μία εισροή και μία εκροή, υπο την προϋπόθεση μεταβαλλόμενης κλίμακας αποδόσεων.

Από ίδιο σχήμα προκύπτει επίσης ότι η μονάδα M_4 είναι αποδοτική (ανήκει στο σύνολο E^+) αφού υπάρχει κάποια διάταξη ορίου αποδοτικότητας, όπως η διακεκομμένη γραμμή β , η οποία να την καθιστά μη αποδοτική και να περιβάλλει όλα τα σημεία της.

Οι μονάδες M_2 και M_3 είναι ισχυρώς αποδοτικές και μάλιστα το όριο που ορίζεται από τα σημεία Γ και I , αποτελεί και την πλέον ευνοϊκή περίπτωση αξιολόγησης για τις μονάδες αυτές.

Βιβλιογραφία

- Cooper, W.W, Park K.S., Yu G , (2001), “IDEA with column maximum Decision Making Units”, *Journal of the Operational Research Society*, vol.52, pp. 176-181
- Cooper, W.W, Park K.S., Yu G , (2001), “IDEA and AR-IDEA : models for dealing with imprecise data in DEA”, *Management Science*, Vol 45, pp.597-607
- Despotis D.K (1996) “Fractional minmax goal programming : A unified approach to priority estimation and preference analysis in MCDM”, *Journal of the Operational Research Society* 47 pp. 945-953
- Olsen O.B., Petersen N.C,(1995), “Chance constrained efficiency evaluations”, *Management Science*, 41(3), pp. 442-457
- Premachandra IM, J.G Powell, J.Shi,(1998) “Measuring the Relative efficiency of fund management strategies in New Zealand using a spreadsheet-based stochastic data envelopment analysis model”, *Omega-International Journal of Management Science*, Vol. 26, No 2, pp319-331
- Retzlaff-Roberts D.L, Morey R.C (1993), “A goal programming method of stochastic allocative data envelopment analysis”, *EJOR*, 71, 379-397
- Sengupta J.K. (1992^a), “A Fuzzy-Systems Approach in Data Envelopment Analysis”, *Computers & Mathematics With Applications*, vol. 24, no. 8-9, pp. 259-266.
- Sengupta J.K.(1992^b), “Measuring Efficiency by a Fuzzy Statistical Approach”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 46, no. 1, pp. 73-80
- Sengupta J. (1998), “Stochastic data envelopment analysis : a new approach”, *Applied Economic Letters*, 5, 287-290
- Triantis K. and O. Girod, (1998), “A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in a Fuzzy Environment”, *Journal of Productivity Analysis*, vol. 10, no. 1, pp. 85-102.

Κεφάλαιο 3

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση σε δεδομένα διάταξης. Το γενικευμένο μοντέλο για όλους τους τύπους των δεδομένων

Τα δεδομένα διάταξης (ordinal data) δεν ορίζονται με ακριβείς τιμές πραγματικών αριθμών. Οι τιμές τους είναι συμβολικές και εκφράζουν ομαδοποίηση σε πεπερασμένο αριθμό κατηγοριών. Αναπαριστώνται είτε με αριθμούς (1,2,3,...) είτε με λέξεις (Άριστο / Πολύ καλό / Καλό / Μέτριο / Κακό, Πολύ Σημαντικό, Σημαντικό, Καθόλου Σημαντικό) ή ακόμη και σύμβολα (XXL / XL / L / M / S). Η κλίμακα των 5 κατηγοριών (από το «Εξαιρετικά Σημαντικό»=1 έως το «Καθόλου Σημαντικό»=5), γνωστή ως κλίμακα “Likert”, είναι η πλέον συνήθης κλίμακα στις εφαρμογές του χώρου διοίκησης επιχειρήσεων. Στα δεδομένα διάταξης καμία αριθμητική πράξη δεν είναι επιτρεπτή. Μεταξύ των τιμών δύο διαφορετικών κατηγοριών ορίζονται μόνο σχέσεις διάταξης «*μεγαλύτερο /ή ίσο από*» και «*μικρότερο /ή ίσο από*».

Τα δεδομένα διάταξης χρησιμοποιούνται συνήθως για να αναπαραστήσουν ποιοτικές έννοιες π.χ. βαθμός προτίμησης προϊόντων από καταναλωτές, επίπεδο ικανοποίησης πελατών, επίδοση διοικητικών στελεχών κλπ. οι οποίες δεν είναι άμεσα μετρήσιμες με ακριβή δεδομένα. Προβλήματα με δεδομένα διάταξης απαιτούν ειδικό χειρισμό διαφορετικό από εκείνο των δεδομένων με πραγματικούς αριθμούς και για το λόγο αυτό στην πολυμεταβλητή στατιστική ανάλυση δεδομένων έχουν προταθεί ειδικές μέθοδοι όπως η ανάλυση αντιστοιχιών (correspondence analysis) και ανάλυση ομοιογένειας (Homogeneity analysis-HOMALS).

Ειδικά για την Περιβάλλουσα Ανάλυση, το αρχικό μοντέλο της, όπως προτάθηκε από τους Charnes, Cooper and Rhodes αδυνατεί να επιλύσει προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν δεδομένα διάταξης διότι τα δεδομένα αυτά δεν εκφράζονται με ακριβείς πραγματικές τιμές. Η παραδοχή ότι τα επίπεδα διάταξης, εκφρασμένα σε αριθμητική κλίμακα (1,2,3, ..), αποτελούν ισαπέχοντα σημεία μιας μεταβλητής με συνεχείς τιμές, είναι εσφαλμένη και αυθαίρετη εκτίμηση. Υπονοεί για παράδειγμα ότι μία μονάδα με επίπεδο διάταξης ίσο με 4 ότι έχει διπλάσια επίδοση από άλλη μονάδα με επίπεδο 2, πράγμα το οποίο δεν ισχύει και εάν υιοθετηθεί θα οδηγήσει σε εσφαλμένες τιμές αποδοτικότητας των μονάδων.

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά πραγματοποιείται μία συνοπτική επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας για δεδομένα διάταξης στην Περιβάλλουσα Ανάλυση και στη συνέχεια εξετάζεται διεξοδικά η περίπτωση προβλημάτων στα οποία διατυπώνονται αποκλειστικά με δεδομένα διάταξης. Στη συνέχεια διατυπώνεται το γενικευμένο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα και ακολουθεί η παρουσίαση της τεχνικής του υπολογισμού της σφαιρικής αποδοτικότητας των μονάδων για την περαιτέρω διάκριση και κατάταξη των αποδοτικών μονάδων.

3.1 Επισκόπηση της βιβλιογραφίας

Οι γνωστές δημοσιευμένες εργασίες για το χειρισμό των δεδομένων διάταξης σε προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων προέρχονται κυρίως από τους W.Cook, M.Kress και L. Seiford και είναι σχετικά περιορισμένες. Η πρώτη εργασία τους [W. Cook, M. Kress and L. Seiford (1993)] αντιμετώπισε το πρόβλημα ύπαρξης μίας μόνο μεταβλητής τύπου διάταξης σε σύνολο δεδομένων με πραγματικές τιμές και σε επόμενη [W. Cook, M. Kress and L. Seiford (1996)] παρουσιάστηκε ένα γενικότερο μοντέλο αναφερόμενο στη βιβλιογραφία ως μοντέλο *CKS* το οποίο χειρίζεται προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν και δεδομένα διάταξης. Με βάση τις ανωτέρω εργασίες των Cook, Kress, Seiford, διατυπώθηκαν διάφορες επεκτάσεις του μοντέλου *CKS* και εφαρμογές, οι χαρακτηριστικότερες των οποίων είναι των Cook, Doyle, Green, Kress, (1997) και Sarkis, Talluri (1999). Προηγουμένως στο χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης δεδομένων είχαν διατυπωθεί παρόμοια μοντέλα με ανάλογη τεχνική που επιτρέπουν τη χρήση δεδομένων διάταξης σε προβλήματα συνάθροισης (aggregation). Οι σημαντικότερες εργασίες από το ερευνητικό αυτό πεδίο είναι των W.Cook (1991) και W.Cook, M.Kress (1990), (1991).

Το μοντέλο *CKS* (Cook-Kress-Seiford) χρησιμοποιεί συγκεκριμένη τεχνική για να αντιμετωπίσει προβλήματα με δεδομένα διάταξης. Για κάθε εισροή x_{ij} / εκροή y_{rj} τύπου διάταξης με k διαφορετικά επίπεδα, εισάγονται στο πρόβλημα k το πλήθος νέες δυαδικές μεταβλητές $\gamma_{ij}^l, \delta_{rj}^l, l = 1, \dots, k$, μία για κάθε επίπεδο διάταξης, έτσι ώστε
$$\gamma_{ij}^l = \begin{cases} 0, & x_{ij} \neq l \\ 1, & x_{ij} = l \end{cases}, \quad \delta_{rj}^l = \begin{cases} 0, & y_{rj} \neq l \\ 1, & y_{rj} = l \end{cases} \quad \text{να}$$
 λαμβάνουν δηλαδή τιμή 1 μόνο στο επίπεδο l και 0 σε κάθε άλλο επίπεδο διάταξης. Το σύνολο των νέων μεταβλητών $\gamma_{ij}^l, \delta_{rj}^l$, αντικαθιστούν στο μοντέλο τις μεταβλητές διάταξης x_{ij}, y_{rj} και έτσι δημιουργείται ένα νέο

πρόβλημα με τεχνητό σύνολο δεδομένων (artificial data set) το οποίο στις εργασίες των Cook, Kress και Seiford αποδεικνύεται ότι έχει τη μορφή του μοντέλου CCR. Οι τιμές των πολλαπλασιαστών v_i^l, u_r^l που αντιστοιχούν στις νέες μεταβλητές $\gamma_{ij}^l, \delta_{rj}^l$ λαμβάνουν τιμές πραγματικών αριθμών. Οι τιμές αυτές εκφράζουν την σημασία που η κάθε μονάδα προσδίδει στα δεδομένα διάταξης, δεν επιδέχονται ιδιαίτερη ερμηνεία αλλά χρησιμοποιούνται τεχνικά ως ενδιάμεσο βήμα για την ποσοτική έκφραση της αποδοτικότητας. Στο μοντέλο CKS η αύξουσα / φθίνουσα σημασία των επιπέδων διάταξης εξασφαλίζεται από αντίστοιχους περιορισμούς επί των τιμών των συντελεστών πχ. $v_i^1 > v_i^2 > \dots > v_i^k$. Τεχνικά οι περιορισμοί αυτοί υλοποιούνται μέσω μίας διαχωριστικής παραμέτρου δ η οποία εισάγεται στο πρόβλημα, το εύρος των τιμών της οποίας είναι καθοριστικό για τις τιμές της αποδοτικότητας των μονάδων. Ο ρόλος του διαχωριστικού αυτού παράγοντα σε προβλήματα με δεδομένα διάταξης, σχολιάζεται στη συνέχεια.

Πρόσφατα, όπως ήδη έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, οι Cooper, Park και Yu (1999) διατύπωσαν το μοντέλο IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) για την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν, μεταξύ των άλλων, και δεδομένα διάταξης. Η εργασία των Cooper, Park και Yu (1999) για με ακριβή δεδομένα ακολουθεί άλλη τεχνική προσέγγιση αλλά καταλήγει στο ίδιο ακριβώς μοντέλο. Συγκεκριμένα, εξ' αρχής για κάθε διαφορετικό επίπεδο διάταξης, ορίζει μία νέα μεταβλητή η οποία εκφράζει την άγνωστη πραγματική τιμή που η κάθε μονάδα αποδίδει στο συγκεκριμένο επίπεδο διάταξης. Η μεταβλητή αυτή συμμετέχει στη διαμόρφωση των τιμών των εικονικών εισροών / εκροών χωρίς στάθμιση.

Οι ανωτέρω προσεγγίσεις θεωρούν ότι τα δεδομένα διάταξης έχουν περιορισμένη συμμετοχή στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων και ότι συνήθως επικρατούν τα δεδομένα με ακριβείς τιμές. Υποθέτουν δηλαδή ότι ο βαθμός ασάφειας στα διάφορα προβλήματα λόγω ακριβώς της περιορισμένης χρήσης μεταβλητών διάταξης, είναι σχετικά

μικρός. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις όπως στην αξιολόγηση του έργου διοικητικών στελεχών, στην αποτίμηση έργων, στην αξιολόγηση ερευνητικών προγραμμάτων κλπ, τόσο οι εισροές όσο και οι εκροές είναι αποκλειστικά σε μορφή διάταξης. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος της μορφής αυτής για την αξιολόγηση ερευνητικών έργων αναφέρεται στην εργασία των Cook, Kress, Seiford (1996). Τα προβλήματα αυτού του τύπου απαιτούν ειδικό χειρισμό και επινόηση πρόσθετων μεθόδων για την ερμηνεία της αποδοτικότητας. Τούτο διότι στις περιπτώσεις προβλημάτων με δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης οι ακριβείς τιμές αποδοτικότητας των μονάδων δεν έχουν πρακτική αξία και ο διαχωρισμός των επιπέδων επιβάλλεται να είναι ο μέγιστος δυνατός ώστε να εξασφαλίζεται επαρκής διάκριση των μονάδων ως προς την αποδοτικότητά τους. Επιπλέον η ασάφεια των δεδομένων επιτρέπει την εκτίμηση κοινών, για όλες τις μονάδες, τιμών επιπέδων διάταξης, καθιστώντας πλέον αυτές απολύτως συγκρίσιμες. Τα θέματα αυτά που προκύπτουν από δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης, δεν έχουν εξετασθεί επαρκώς μέχρι σήμερα και επιχειρείται να διερευνηθούν στην παρούσα ενότητα.

Στη συνέχεια διατυπώνεται το μοντέλο για δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης το οποίο ταυτοχρόνως επιτυγχάνει τον μέγιστο διαχωρισμό των τιμών των επιπέδων διάταξης. Η παρατήρηση ότι οι τιμές της αποδοτικότητας των μονάδων όπως εκφράζονται με πραγματικούς αριθμούς, δεν έχουν ιδιαίτερη αξία για την περίπτωση των προβλημάτων με δεδομένα διάταξης, οδηγεί περαιτέρω στη ανάπτυξη μίας τεχνικής η οποία υπολογίζει την τάξη μεγέθους της αποδοτικότητας των μονάδων. Ακολούθως εξετάζονται τα προβλήματα της εκτίμησης κοινών τιμών επιπέδων διάταξης για όλες τις μονάδες.

3.2 Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης

Ακολουθώντας την τεχνική προσέγγιση των Cooper, Park και Yu (1999) για τα δεδομένα διάταξης, θεωρούμε ότι σε ένα πρόβλημα ζητείται να εκτιμηθεί η αποδοτικότητα των μονάδων με την προϋπόθεση ότι οι m εισροές και οι s εκροές του συνόλου των δεδομένων, έχουν όλες τη μορφή δεδομένων διάταξης. Έστω επιπλέον ότι κάθε εισροή i έχει K_i διαφορετικά επίπεδα διάταξης τα οποία συμβολικά χαρακτηρίζονται ως $1, 2, 3, \dots, K_i$ (ομοίως κάθε εκροή r έχει L_r επίπεδα διάταξης). Αναφερόμενοι στις εισροές και σε μία μονάδα j , σε κάθε επίπεδο k της εισροής i αντιστοιχεί μία άγνωστη, προς εκτίμηση πραγματική τιμή που συμβολίζεται με x_{ij}^k . Σύμφωνα με τον συμβολισμό αυτό, οι εισροές της μονάδας j θα είναι οι $x_{1j}^{k_1}, x_{2j}^{k_2}, \dots, x_{mj}^{k_m}$, όπου τα k_1, k_2, \dots, k_m δηλώνουν το αντίστοιχο επίπεδο δηλαδή $k_1 \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}$, $k_2 \in \{1, 2, 3, \dots, K_2\}$, ..., $k_m \in \{1, 2, 3, \dots, K_m\}$. Ομοίως οι εκροές της μονάδας j θα είναι οι $y_{1j}^{l_1}, y_{2j}^{l_2}, \dots, y_{sj}^{l_s}$, με $l_1 \in \{1, 2, 3, \dots, L_1\}$, $l_2 \in \{1, 2, 3, \dots, L_2\}$, ..., $l_s \in \{1, 2, 3, \dots, L_s\}$.

Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα θεωρούμε επίσης ότι στις εκροές το επίπεδο 1 έχει τη μεγαλύτερη αξία («εξαιρετικά σημαντικό»), το επίπεδο 2 την αμέσως μικρότερη («λιγότερο σημαντικό»), κ.ο.κ και το K_i έχει την μικρότερη αξία όλων («καθόλου σημαντικό»). Με την αποδοχή αυτή, για κάθε εισροή i οι ανωτέρω άγνωστες τιμές των επιπέδων θα ικανοποιούν τους περιορισμούς διάταξης :

$$\delta_1 < x_{ij}^1 < x_{ij}^2 < \dots < x_{ij}^{K_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Η πραγματική τιμή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο σε αξία επίπεδο 1, λόγω των εισροών οι οποίες είναι προς ελαχιστοποίηση, θα λαμβάνει τη μικρότερη από όλες θετική τιμή. Τούτο εκφράζεται με τον περιορισμό $\delta_1 < x_{ij}^1$, όπου δ_1 είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Ομοίως για κάθε εκροή r θα ισχύει :

$$y_{rj}^1 > y_{rj}^2 > \dots > y_{rj}^{L_r} > \delta_1, j = 1, 2, \dots, n$$

Οι ανωτέρω γνήσιες διατάξεις, προκειμένου να ενσωματωθούν σε αντίστοιχα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, διατυπώνονται ως ακολούθως με τη χρήση μιας νέας, βοηθητικής παραμέτρου δ ($\delta > 0$) :

$$x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k \geq \delta, k = 1, 2, \dots, K_i$$

και $y_{rj}^l - y_{rj}^{l+1} \geq \delta, l = 1, 2, \dots, L_r, \delta > 0$

Η παράμετρος δ , λόγω των διαφορετικών κλιμάκων διάταξης που μπορεί να έχουν οι εισροές / εκροές καθώς επίσης και λόγω της ελευθερίας των μονάδων να ορίζουν προς όφελός τους τις αποστάσεις των επιπέδων διάταξης, θα έπρεπε να είναι διαφορετική για κάθε εισροή / εκροή. Αποδεικνύεται όμως ότι δεν βλάπτεται η γενικότητα όταν ορισθεί για όλες τις μονάδες και για όλα τα επίπεδα διάταξης αυτών, μία μοναδική παράμετρος δ . Συγκεκριμένα για το θέμα αυτό ο R. Thrall (1995) προτείνει τεχνική η οποία εξομοιώνει τις διαφορετικές κλίμακες μέτρησης των μεταβλητών διάταξης, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται η λύση του προβλήματος από την αποδοχή ενός μοναδικού διαχωριστικού παράγοντα δ , κοινού για όλες τις μεταβλητές διάταξης. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Cook, Kress, Seiford (1996) το κάτω φράγμα των απολύτων τιμών των επιπέδων, χωρίς βλάβη της γενικότητας λόγω των εξαιρετικά μικρών τιμών που λαμβάνει, μπορεί να τεθεί ίσο με τον διαχωριστικό παράγοντα δ .

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, όταν οι μεταβλητές x_{ij}^k, y_{rj}^l λάβουν τη θέση των παραγόντων $v_i x_{ij}, u_r y_{rj}$ στο γραμμικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα (2.1) και προστεθούν οι περιορισμοί

$x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k \geq \delta, k = 1, 2, \dots, K_i, y_{rj}^l - y_{rj}^{l+1} \geq \delta, l = 1, 2, \dots, L_r$ που υλοποιούν τις σχέσεις διάταξης, διαμορφώνεται το μοντέλο (3.1) το οποίο υπολογίζει την αποδοτικότητα για μία μονάδα j_0 :

$$\begin{aligned}
 \max h_0 &= \sum_{r=1}^s y_{rj_0}^{l_r} \\
 s.t. & \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij_0}^{k_i} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r} - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i} &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k &\geq \delta, k = 1, 2, \dots, K_i - 1, i = 1, \dots, m, \\
 y_{rj}^l - y_{rj}^{l+1} &\geq \delta, l = 1, 2, \dots, L_r - 1, j = 1, \dots, s, \\
 x_{ij}^1, y_{rj}^{L_r} &\geq \delta, \delta > 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Στο ανωτέρω μοντέλο οι μεταβλητές x_{ij}^k, y_{rj}^l είναι προς υπολογισμό ενώ η παράμετρος δ είναι σταθερά, η τιμή της οποίας επηρεάζει τις τιμές αποδοτικότητας των μονάδων. Ο ρόλος της παραμέτρου αυτής σχολιάζεται ιδιαίτερα στη συνέχεια.

Η επίλυση του ανωτέρω προγράμματος υπολογίζει, για κάθε μονάδα ξεχωριστά, τις πραγματικές τιμές των μεταβλητών x_{ij}^k, y_{rj}^l ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των επιπέδων των εισροών και εκροών, είναι δηλαδή $(k_1 + k_2 + \dots + k_m) + (l_1 + l_2 + \dots + l_s)$. Λόγω του αυξημένου αριθμού μεταβλητών, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη σχέση αριθμού μεταβλητών και αριθμού μονάδων, δεδομένου ότι οι Banker, Charnes, Cooper (1984) επισημαίνουν ότι κλονίζεται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της Περιβάλλουσας Ανάλυσης όταν ο αριθμός των μονάδων να είναι μικρότερος από τον τριπλάσιο αριθμό των μεταβλητών ενός προβλήματος.

Η σημασία της διαχωριστικής παραμέτρου δ

Σε προβλήματα με μεικτούς τύπους δεδομένων, οι τιμές του δ , παίζουν καθοριστικό ρόλο στις τιμές της αποδοτικότητας, γεγονός το οποίο εντοπίζεται και από τους Ali και Seiford (1993). Αποδεικνύεται [βλ. Cook, Kress, Seiford (1996)] ότι η αποδοτικότητα h_0 είναι συνάρτηση εξαρτώμενη από το δ και μάλιστα φθίνουσα. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για την περίπτωση προβλημάτων αποκλειστικά με δεδομένα διάταξης. Πολύ μικρές απόλυτες τιμές του δ (πχ. 10^{-6} , 10^{-7}) έχουν σαν συνέπεια οι τιμές αποδοτικότητας των μονάδων να πλησιάζουν το 1 και οι περισσότερες μονάδες να εμφανίζονται ως αποδοτικές. Αντιθέτως, μεγάλες τιμές του δ καθιστούν το πρόβλημα, τουλάχιστον για μερικές μονάδες, αδύνατο να επιλυθεί (infeasible). Επισημαίνεται ότι οι διαφορετικές τιμές του δ επηρεάζουν μόνο τις απόλυτες τιμές της αποδοτικότητας των μονάδων, χωρίς όμως να μεταβάλλουν την διάταξη των μη αποδοτικών μονάδων.

Για την κατανόηση των ανωτέρω παραθέτουμε το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 3.1 με μία μεταβλητή εισόδου (I1) και δύο μεταβλητές εξόδου (O1, O2), όλες με μορφή διάταξης και με τρία επίπεδα τιμών. Οι τιμές της αποδοτικότητας εκτιμώνται με το μοντέλο (3.1) για ενδεικτικές τιμές του δ ίσες με 0.00001 , 0.01 και 0.14 .

Πίνακας 3.1 – Παράδειγμα υπολογισμού αποδοτικότητας με διαφορετικές τιμές του δ

Μονάδα	I1	O1	O2	Τιμές Αποδοτικότητας		
				$\delta=0.00001$	$\delta=0.01$	$\delta=0.14$
#1	1	1	2	1	1	1
#2	3	1	1	0,99999	0,99	0,86
#3	2	1	1	1	1	1
#4	2	1	2	0,99999	0,99	0,86
#5	1	3	3	0,99997	0,97	0,58
#6	2	2	3	0,99997	0,97	0,58
#7	1	1	3	0,99999	0,99	0,86
#8	3	1	3	0,99997	0,97	0,58
#9	2	3	2	0,99997	0,97	0,58
#10	1	2	1	1	1	1

Από τον Πίνακα 3.1 διαπιστώνουμε ότι για τις διαφορετικές τιμές του δ οι αποδοτικές μονάδες δεν μεταβάλλονται αλλά οι τιμές αποδοτικότητας των υπολοίπων μη αποδοτικών αυξάνονται και πλησιάζουν το 1 όσο το δ λαμβάνει μικρότερες τιμές. Ωστόσο η διάταξη των μη αποδοτικών μονάδων παραμένει σταθερή. Για υψηλές τιμές του δ π.χ. $\delta=0.17$, το πρόβλημα για μερικές μονάδες όπως π.χ. για τη μονάδα #2 καθίσταται μη επιλύσιμο, ενώ για σημαντικά μικρές τιμές π.χ. $\delta=10^{-7}$, η τιμή αποδοτικότητας όλων των μονάδων ελάχιστα διαφοροποιείται από το 1, καθιστώντας όλες τις μονάδες πρακτικά αποδοτικές.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, σε κάθε πρόβλημα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με δεδομένα διάταξης, είναι επιθυμητές οι όσο το δυνατόν μεγαλύτερες τιμές του δ προκειμένου να επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση των επιπέδων διάταξης και συνεπώς εντονότερη διάκριση των τιμών αποδοτικότητας. Στο γραμμικό πρόβλημα κάθε μονάδας υπάρχει μία μέγιστη τιμή του δ η οποία καθιστά το πρόβλημα υπολογισμού της αποδοτικότητάς της επιλύσιμο και ταυτοχρόνως εξασφαλίζει το μέγιστο δυνατό διαχωρισμό των πραγματικών τιμών που αντιστοιχούν στα επίπεδα διάταξης. Εάν θεωρήσουμε ότι η $\hat{\delta}_j$ είναι μία τέτοια τιμή για τη μονάδα j , τότε προφανώς η μικρότερη η τιμή όλων των $\hat{\delta}_j$, δηλαδή η

$$\delta_{\max} = \min_{j=1, \dots, n} \{\hat{\delta}_j\}$$

αποτελεί και την μέγιστη τιμή η οποία ταυτοχρόνως καθιστά εφικτά προς επίλυση τα προβλήματα για όλες τις μονάδες. Οι Cook, Kress, Seiford (1996) προτείνουν κατάλληλο μοντέλο για τον υπολογισμό των τιμών των $\hat{\delta}_j$. Το μοντέλο αυτό, επιλύεται πριν από τον υπολογισμό της αποδοτικότητας των μονάδων, n φορές (μία φορά ξεχωριστά για κάθε μονάδα) και έχει το ίδιο σύνολο περιορισμών με το μοντέλο (3.1) αλλά στην αντικειμενική συνάρτηση

επιδιώκεται η μεγιστοποίηση της τιμής του αντίστοιχου δ . Εάν η διαδικασία αυτή εφαρμοστεί στα δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος του Πίνακα 3.1, υπολογίζονται οι τιμές $\hat{\delta}_j$ ως εξής :

Πίνακας 3.2 - Η μέγιστη τιμή του δ για κάθε μονάδα που καθιστά το αντίστοιχο πρόβλημα επιλύσιμο

Μονάδα	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
$\hat{\delta}_j$	0.2	0.1426	0.16667	0.16667	0.2	0.16667	0.2	0.1426	0.16667	0.2

Η ελάχιστη από τις ανωτέρω τιμές (0.1426) που αντιστοιχεί στις μονάδες #2 και #8 καθιστά, για όλες τις μονάδες το πρόβλημα υπολογισμού της αποδοτικότητας εφικτό και συνεπώς αυτή συνιστάται ως η πλέον κατάλληλη για τα δεδομένα του παραδείγματος.

Η ανωτέρω διαδικασία επιβαρύνει το κάθε πρόβλημα περιβάλλουσας ανάλυσης με την επίλυση n επιμέρους προβλημάτων για τον υπολογισμό των τιμών $\hat{\delta}_j$. Προκειμένου να αποφευχθεί η επιβάρυνση αυτή προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο (3.2) το οποίο, χρησιμοποιώντας τεχνική πολλαπλών στόχων (multi-objective programming), επιτυγχάνει, παραλλήλως με τον υπολογισμό της αποδοτικότητας κάθε μονάδας, να υπολογίσει και την αντίστοιχη τιμή $\hat{\delta}_j$.

$$\begin{aligned}
 & \max h_0 = \sum_{r=1}^s y_{rj_0}^{l_r} + M\delta \\
 & s.t. \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij_0}^{k_i} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r} - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k \geq \delta, k = 1, 2, \dots, K_i - 1, i = 1, \dots, m, \\
 & y_{rj}^l - y_{rj}^{l+1} \geq \delta, l = 1, 2, \dots, L_r - 1, j = 1, \dots, s, \\
 & x_{ij}^1, y_{rj}^{L_r} \geq \delta, \delta > 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Διατηρώντας τις ίδιες προς εκτίμηση μεταβλητές και το ίδιο σύνολο περιορισμών με το (3.1), το μοντέλο (3.2), περιλαμβάνει στην αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση τον όρο $M\delta$, όπου M είναι σταθερά η οποία λαμβάνει μεγάλη απόλυτη τιμή. π.χ. 10^4 .

Η συμμετοχή του παράγοντα $M\delta$ στην αντικειμενική συνάρτηση ισοσταθμίζει τη συνεισφορά του δ , δεδομένου ότι η τιμή του δ μπορεί να προκύψει αρκούντως μικρή και ο όρος $\sum_{r=1}^s y_{rj_0}^l$ είναι πάντοτε μικρότερος του 1. Η εμπειρική αυτή σύνθεση των πολλαπλών στόχων σε ανάλογες περιπτώσεις [βλ. Cook W. (1991)] χαρακτηρίζεται ως εικασία (conjecture) δεδομένου ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποδειχθεί θεωρητικά ότι η βέλτιστη λύση του (3.2) ταυτίζεται με τη βέλτιστη λύση του (3.1) και ταυτοχρόνως επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή του δ .

Το ανωτέρω μοντέλο (3.2) εφαρμοζόμενο στο σύνολο δεδομένων του αριθμητικού παραδείγματος, εκτιμά ταυτόσημες τιμές αποδοτικότητας με το μοντέλο (3.1) και αντίστοιχες τιμές $\hat{\delta}_j$ με εκείνες του Πίνακα 3.2, όπως εμφανίζονται στον Πίνακα 3.3 που ακολουθεί.

Πίνακας 3.3 - Οι τιμές του $\hat{\delta}_j$ και οι αντίστοιχες τιμές αποδοτικότητας εκτιμώμενες με το μοντέλο (3.2)

Μονάδα	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
$\hat{\delta}_j$	0.2	0.142	0.166	0.166	0.2	0.166	0.2	0.142	0.166	0.2
Αποδοτικότητα	1	0.8571	1	0.8333	0.4	0.5	0.8	0.5714	0.5	1

Από τον Πίνακα 3.3 επιβεβαιώνεται ότι οι μονάδες #1, #3 και #10 παραμένουν αποδοτικές ενώ οι υπόλοιπες μη αποδοτικές έχουν την μεγαλύτερη δυνατή διαφοροποίηση ως προς την αποδοτικότητά τους.

Στα ανωτέρω, οι τιμές της διαχωριστικής παραμέτρου δ επιλέγονται χωρίς καμία άλλη υπόθεση πέραν του στόχου επίτευξης της μέγιστης δυνατής

τιμής. Όμως η παράμετρος δ σε συνδυασμό με κατάλληλους περιορισμούς των x_{ij}^k και y_{ij}^l μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εκφραστούν μέσω αυτής προτιμήσεις είτε μεταξύ δύο διαφορετικών εισροών / εκροών είτε μεταξύ των επιπέδων μιας συγκεκριμένης εισροής / εκροής. Η ιδέα αυτή είναι δυνατόν να μεταφερθεί στην Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων από την σχετική εργασία των Cook, Kress (1991) για προβλήματα πολυκριτήριας ανάλυσης. Για παράδειγμα, ο περιορισμός του τύπου $y_{r_1j}^{L_{r_1}} - y_{r_2j}^{L_{r_2}} > \delta$ που αναφέρεται στα μέγιστα επίπεδα L_{r_1}, L_{r_2} δύο διαφορετικών εκροών r_1, r_2 εκφράζει μεγαλύτερη συνολική προτίμηση της εκροής r_1 έναντι αυτής της r_2 . Επίσης, σύμφωνα με τον Thompson et al. (1995) οι περιορισμοί λόγου του τύπου $f \leq \frac{y_{ij}^k}{y_{ij}^{k+1}} \leq g$ (τα f, g είναι σταθερές) για διαδοχικά επίπεδα διάταξης, εκφράζουν την πιθανή διαφορά προτίμησης για τα επίπεδα αυτά. Ανάλογο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται όταν χρησιμοποιηθούν διαφορετικές τιμές του δ , αυξανόμενες / μειούμενες αναλόγως των επιπέδων. Οι ανωτέρω περιορισμοί καθώς επίσης και άλλοι διαφορετικού τύπου, χρησιμοποιούνται όπως ακριβώς και εκείνοι των πολλαπλασιαστών στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβή δεδομένα, αναλόγως των πρόσθετων πληροφοριών που μπορεί να παρέχονται σε ένα πρόβλημα.

3.3 Κατάταξη των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα

Με αφορμή την προηγούμενη παρατήρηση ότι για τις διαφορετικές τιμές του δ η διάταξη των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα δεν μεταβάλλεται, διατυπώνουμε την άποψη ότι στις περιπτώσεις όπου στο πρόβλημα υπάρχουν αποκλειστικά μεταβλητές διάταξης ο υπολογισμός μίας ακριβούς τιμής αποδοτικότητας, αν και τεχνικά επαρκής, στη πράξη δεν παρέχει σημαντική πληροφορία. Η απόλυτη τιμή της δεν εκφράζει την ανάλογη διαφορά υπεροχής των μονάδων όπως ακριβώς συμβαίνει στα προβλήματα με δεδομένα πραγματικών αριθμών. Η μέτρηση της αποδοτικότητας των μονάδων με τιμές που να δηλώνουν περισσότερο τάξη μεγέθους παρά απόλυτες πραγματικές τιμές, εκτιμάται ότι προσεγγίζει καλύτερα τη φιλοσοφία των δεδομένων διάταξης.

Ο διαχωρισμός των μονάδων σε ομάδες ίδιου επιπέδου αποδοτικότητας μπορεί, με βάση τις πραγματικές τιμές αποδοτικότητας όπως αυτές υπολογίζονται από το μοντέλο (3.2), να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους, είτε εμπειρικά με απλή παρατήρηση σε προβλήματα με μικρό αριθμό μονάδων είτε με εφαρμογή στατιστικών μεθόδων π.χ. ανάλυσης συστάδων (cluster analysis). Στην ενότητα αυτή προτείνεται μια διαδικασία διαδοχικής επίλυσης προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης στα οποία ο αριθμός των μονάδων σταδιακά περιορίζεται καθώς εξαιρούνται κάθε φορά οι αποδοτικές μονάδες. Αναλυτικά η διαδικασία αυτή έχει ως εξής : το αρχικό πρόβλημα επιλύεται για όλες $R_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ μονάδες και εντοπίζονται οι αποδοτικές. Έστω ότι το σύνολο δεικτών των αποδοτικών αυτών μονάδων είναι το σύνολο $D_1 = \{j \in R_1 \mid h_j = 1\}$. Εάν από το πρόβλημα εξαιρεθούν οι μονάδες του συνόλου D_1 , δημιουργείται ένα νέο πρόβλημα με τις υπόλοιπες $R_2 = R_1 / D_1$ μονάδες το οποίο επιλυόμενο δημιουργεί ένα νέο σύνολο αποδοτικών μονάδων, το $D_2 = \{j \in R_2 \mid h_j = 1\}$. Ομοίως εάν από το νέο αυτό πρόβλημα εξαιρεθούν οι αποδοτικές μονάδες σχηματίζεται ένα νέο σύνολο

μονάδων, το $R_3 = R_1 / D_1 \cup D_2$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβανόμενη παράγει διαδοχικά σύνολα D_1, D_2, D_3, \dots τα οποία διαχωρίζουν το αρχικό σύνολο των μονάδων σε ομάδες φθίνουσας αποδοτικότητας. Με βάση αυτόν τον διαχωρισμό υπολογίζεται σειρά κατάταξης των μονάδων ως προς τη τάξη μεγέθους της αποδοτικότητας ως εξής : οι μονάδες του συνόλου D_1 λαμβάνουν τον αριθμό 1, οι μονάδες του συνόλου D_2 τον αριθμό $|D_1| + 1$ (πλήθος στοιχείων του $D_1 + 1$), οι μονάδες του συνόλου D_3 τον αριθμό $|D_1 \cup D_2| + 1$ κλπ. Εάν η ανωτέρω διαδικασία εφαρμοσθεί στα δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος, οι μονάδες κατατάσσονται ως εξής :

Πίνακας 3.4 - Κατάταξη των μονάδων ως προς την αποδοτικότητα

Μονάδα	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
Αποδοτικότητα	1	0.8571	1	0.8333	0.4	0.5	0.8	0.5714	0.5	1
Κατάταξη	1	4	1	4	7	7	4	7	7	1

Σε κάθε ομάδα εκ των $\{\#1, \#3, \#10\}$, $\{\#2, \#4, \#7\}$, $\{\#5, \#6, \#8, \#9\}$, όλες οι μονάδες θεωρούνται ότι έχουν αποδοτικότητα ίσης τάξης μεγέθους αλλά μικρότερη από τις μονάδες της προηγούμενης ομάδας και μεγαλύτερη από τις μονάδες της επόμενης ομάδας.

3.4 Περαιτέρω διάταξη των αποδοτικών μονάδων

Λόγω της ελευθερίας που παρέχεται στις μονάδες να επιλέγουν τιμές επιπέδων διάταξης, το πλήθος των αποδοτικών μονάδων συχνά αναμένεται να είναι σχετικά μεγάλο. Το πρόβλημα της περαιτέρω κατάταξης των αποδοτικών μονάδων αντιμετωπίζεται με διαφορετικές τεχνικές οι οποίες ήδη έχουν αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1 (ενότητα 1.4.2). Μερικές από τις τεχνικές αυτές είναι δυνατόν να μεταφερθούν και στη περίπτωση των προβλημάτων με δεδομένα αποκλειστικά τύπου διάταξης. Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται η ανάλογη για δεδομένα διάταξης εξέταση του διασταυρούμενου πίνακα αποδοτικότητας (cross efficiency table) ο οποίος περιέχει τις τιμές αποδοτικότητας των μονάδων όπως αυτές εκτιμήθηκαν κάτω από την οπτική γωνία κάθε μονάδας ξεχωριστά.

Στην περίπτωση των προβλημάτων με δεδομένα διάταξης, αντί της απόλυτης τιμής αποδοτικότητας η οποία δεν έχει πρακτική αξία, για την περαιτέρω διάκριση των αποδοτικών μονάδων και διάταξή τους ως προς την αποδοτικότητα τους, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο η συχνότητα με την οποία μία συγκεκριμένη μονάδα εμφανίζεται στο σύνολο αναφοράς των υπολοίπων μονάδων. Οι αποδοτικές μονάδες που εμφανίζουν την μεγαλύτερη συχνότητα θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν ως ισχυρώς αποδοτικές έναντι των υπολοίπων αποδοτικών.

Για την επεξήγηση των ανωτέρω, με βάση το μοντέλο (3.2) για τα δεδομένα του προηγούμενου αριθμητικού παραδείγματος, υπολογίζεται ο κάτωθι διασταυρούμενος πίνακας ο οποίος περιέχει τη σειρά κατάταξης των αποδοτικών μονάδων #1, #3 και #10 στα αντίστοιχα προβλήματα των υπολοίπων. Στην τελευταία γραμμή, εμφανίζεται η συχνότητα με την οποία αυτές παρουσιάζονται στα σύνολα αναφοράς των υπολοίπων μονάδων.

Πίνακας 3.5 - Διασταυρούμενος πίνακας αποδοτικότητας για περαιτέρω διάταξη των αποδοτικών μονάδων

Μονάδα	Αποδοτικές Μονάδες		
	1	3	10
#1	1	1	5
#2	1	1	3
#3	1	1	3
#4	1	1	3
#5	1	1	1
#6	1	1	1
#7	1	1	1
#8	1	1	1
#9	1	1	1
#10	1	1	1
Συχνότητα Αποδοτικότητας	10	10	6

Από τον ανωτέρω πίνακα προκύπτει ότι η αποδοτική μονάδα #10 υπολείπεται των άλλων δύο αποδοτικών αφού εμφανίζεται να είναι αποδοτική μόνο σε 6 περιπτώσεις λοιπών μονάδων. Αντιθέτως οι μονάδες #1, #3 εμφανίζονται σε όλα τα προβλήματα ως αποδοτικές. Σύμφωνα με τα ανωτέρω η διάταξη των αποδοτικών ως εξής :

$$\#1, \#3 > \#10 .$$

Η περίπτωση της εκτίμησης σφαιρικής αποδοτικότητας (global efficiency) η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια, αποτελεί επίσης ένα ακόμη τρόπο κατάταξης των αποδοτικών μονάδων.

3.5 Κοινές τιμές επιπέδων για όλες τις μονάδες

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα διάταξης επιτρέπει σε κάθε μονάδα ξεχωριστά να εκτιμήσει πραγματικές τιμές επιπέδων διάταξης με ευνοϊκό τρόπο γι' αυτήν. Με τη ρύθμιση αυτή, κάθε μονάδα εμφανίζει τη δική της εκδοχή για την στάθμιση των εισροών / εκροών η οποία πολλές φορές διαφέρει σημαντικά από τις υπόλοιπες. Στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβείς τιμές έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές (βλ. Κεφάλαιο 1, ενότητα 1.4.2) με τις οποίες εκτιμάται προσεγγιστικά μία μοναδική κοινή, για όλες τις μονάδες, εκδοχή που αντιστοιχεί σε κοινές τιμές πολλαπλασιαστών. Η προσέγγιση αυτή προσφέρει μια αντικειμενική και δίκαιη αντιμετώπιση όλων των μονάδων, καθιστώντας απολύτως συγκρίσιμες τις επιδόσεις τους και διευκολύνοντας την περαιτέρω κατάταξη τους.

Ανάλογες τεχνικές με τα ακριβή δεδομένα είναι δυνατόν να εφαρμοσθούν και σε προβλήματα με δεδομένα διάταξης. Σε ένα δεύτερο στάδιο ανάλυσης, είναι δυνατόν να επιλυθεί κατάλληλο μοντέλο το οποίο να εκτιμά νέες τιμές αποδοτικότητας με κοινές για όλες τις μονάδες τιμές επιπέδων υπό την προϋπόθεση ότι οι μονάδες θα διατηρήσουν, όσο το δυνατόν περισσότερο, τις αρχικές τιμές αποδοτικότητάς τους. Η τεχνική αυτή στην περίπτωση των δεδομένων διάταξης έχει ως εξής :

Έστω h_j^* η τιμή της αποδοτικότητας της μονάδας j όταν επιλύεται το πρόβλημα (3.2) με δεδομένα διάταξης και h_j η τιμή της αποδοτικότητας της ίδιας μονάδας υπό την προϋπόθεση ότι έχουν εκτιμηθεί κοινές για όλες τις μονάδες τιμές επιπέδων. Η τιμή h_j είναι μικρότερη ή ίση της h_j^* δεδομένου ότι η αποδοτικότητα h_j^* είναι η μέγιστη που η κάθε μονάδα μπορεί να επιτύχει με κάθε συνδυασμό τιμών επιπέδων διάταξης. Με βάση τον ορισμό

της αποδοτικότητας $h_j = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i}}$ ως του λόγου του αθροίσματος των

εκροών προς τις εισροές και με την παρατήρηση ότι η απόκλιση $h_j^* - h_j$ θα

είναι θετική, προκύπτει ότι και η έκφραση $h_j^* - \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i}}$, όπου $x_{ij}^{k_i}$, $y_{rj}^{l_r}$ είναι

οι κοινές τιμές επιπέδων διάταξης, θα είναι θετική. Εάν ορισθεί

$d_j = h_j^* - h_j$, ο περιορισμός $d_j \geq 0$ λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$\sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r} - h_j^* \sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i} + d_j \leq 0 \quad j=1, \dots, n$. Η διατήρηση, σε όσο το δυνατόν

μεγαλύτερο βαθμό, των αρχικών τιμών αποδοτικότητας h_j^* όταν ορισθούν

νέες τιμές επιπέδων διάταξης, επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση του

αθροίσματος $\sum_{j=1}^n d_j$. Από τα ανωτέρω προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό

πρόγραμμα στο οποίο άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές είναι οι τιμές

επιπέδων $x_{ij}^{k_i}$, $y_{rj}^{l_r}$ και οι αποκλίσεις d_j , ενώ η τιμή h_j^* λαμβάνεται από την

επίλυση του μοντέλου (3.1) για κάθε μονάδα j .

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j=1}^n d_j \\
 & s.t. \\
 & \sum_{r=1}^s y_{rj}^{l_r} - h_j^* \sum_{i=1}^m x_{ij}^{k_i} + d_j \leq 0 \quad j=1, \dots, n \\
 & x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k > \delta, k=1,2,\dots,K_i, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n, \delta > 0 \\
 & y_{rj}^l - y_{rj}^{l+1} > \delta, l=1,2,\dots,L_r, r=1,\dots,s, j=1,\dots,n, \delta > 0 \\
 & x_{ij}^1, y_{rj}^l \geq 0 \\
 & d_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Σχετικά με τα ανωτέρω παρατηρούνται τα εξής :

1. Η προσέγγιση της απόλυτης τιμή της αποδοτικότητας ως στόχου ταιριάζει περισσότερο στα δεδομένα με συνεχείς τιμές όπου η απόλυτη τιμή της αποδοτικότητας έχει ανάλογη σημασία. Όπως ήδη έχει τονισθεί, στα δεδομένα διάταξης οι πραγματικές τιμές των h_j^* , h_j δεν επιδέχονται ιδιαίτερη ερμηνεία αλλά ενδιαφέρει κυρίως η τάξη μεγέθους τους, χρησιμοποιούνται δε ως μέσον επίτευξης των κοινών τιμών επιπέδων διάταξης. Με δεδομένο ότι οι τιμές των d_j αναμένεται να είναι μικρές, η τάξη μεγέθους των τιμών αποδοτικότητας h_j εκτιμάται ότι δεν θα μεταβληθεί σημαντικά σε σχέση με τις αρχικές h_j^* ώστε να διαφοροποιηθεί η κατάταξη των μονάδων. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι οι τιμές h_j^* της αποδοτικότητας έχουν την μεγαλύτερη δυνατή απόκλιση εφόσον έχει δοθεί η μέγιστη τιμή στη διαχωριστική παράμετρο δ .
2. Οι τιμές των $x_{ij}^{k_i}$, $y_{rj}^{l_r}$ όπως θα υπολογισθούν για όλες τις μονάδες, αποτελούν μία λύση του προβλήματος από την οποία μπορούν να εξαχθούν μερικά συμπεράσματα για την σημασία που οι μονάδες στο σύνολό τους αποδίδουν σε κάθε εισροή / εκροή προκειμένου να διαμορφώσουν την αποδοτικότητά τους. Βασιζόμενοι σε ανάλογη παρατήρηση των Cook, Kress (1991), εκτιμούμε ότι το άθροισμα των τιμών των επιπέδων όπως αυτά έχουν «συμφωνηθεί» από όλες τις μονάδες, αποτελεί ένδειξη για το πόσο σημαντική είναι η αντίστοιχη εισροή / εκροή για τη διαμόρφωση της αποδοτικότητας των μονάδων του προβλήματος.

3. Στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης η προσπάθεια της εκτίμησης κοινών πολλαπλασιαστών για όλες τις μονάδες δεν είναι πάντοτε επιτυχής. Η μορφή των δεδομένων είναι δυνατόν να μην επιτρέπει τη ικανοποιητική προσέγγιση των τιμών αποδοτικότητας με περιορισμό τις κοινές τιμές των πολλαπλασιαστών. Στην περίπτωση όμως των δεδομένων διάταξης, λόγω της ασάφειας των τιμών των επιπέδων διάταξης, οι μονάδες έχουν μεγαλύτερη ευελιξία να προσδιορίσουν τα επίπεδα διάταξης με τρόπο ώστε να μην αποκλίνουν σημαντικά οι νέες τιμές αποδοτικότητας. Έτσι το πρόβλημα (3.3) αναμένεται πάντοτε να δίνει ικανοποιητική προσέγγιση με σχετικά μικρές τιμές των d_j .

Το μοντέλο (3.3) εφαρμοζόμενο στο αριθμητικό παράδειγμα με την μέγιστη τιμή του $\delta=0,1426$, δίνει τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.6 στα οποία δεν παρατηρείται σημαντική απόκλιση d_j των νέων τιμών αποδοτικότητας.

Πίνακας 3.6 - Τιμές αποδοτικότητας για κοινές τιμές επιπέδων

Μονάδα	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
h_j^*	1	0,8571	1	0,8333	0,4	0,5	0,8	0,5714	0,5	1
h_j	0,99945	0,8571	1	0,833	0,4	0,49992	0,79963	0,57122	0,49999	1
d_j	0,0006	0	0	0,0003	0	8E-05	0,00037	0,00018	1E-05	0

Στις ανωτέρω νέες τιμές αποδοτικότητας αντιστοιχούν κοινές για όλο το πρόβλημα τιμές επιπέδων διάταξης οι οποίες προσδιορίζουν την αποδεκτή από όλες τις μονάδες και «δίκαιη» οπτική γωνία αξιολόγησης (Πίνακας 3.7).

Πίνακας 3.7 - Οι κοινές τιμές των επιπέδων

Επίπεδο	I1	O1	O2
1	0,7133	0,428	0,4281
2	0,8562	0,2852	0,2852
3	0,9988	0,1426	0,1426
Άθροισμα	2,5682	0,8558	0,8559

Από τον Πίνακα 3.7 διαπιστώνουμε επίσης ότι η εισροή I1 έχει το μεγαλύτερο άθροισμα τιμών επιπέδων 2,5682 το οποίο αποτελεί ένδειξη ότι η εισροή αυτή παίζει αποφασιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της αποδοτικότητας. Οι εκροές O1 και O2 έχουν σχεδόν ίδιες τιμές επιπέδων με αποτέλεσμα να θεωρούνται απολύτως ισοδύναμες ως προς τη συμμετοχή τους στη διαμόρφωση της αποδοτικότητας. Οι παρατηρήσεις αυτές ερμηνεύουν την συμπεριφορά της αποδοτικότητας για μερικές μονάδες του παραδείγματος. Η μονάδα #2 παρά την άριστη επίδοση στις εκροές δεν γίνεται αποδοτική λόγω της χαμηλής τιμής στην εισροή η οποία έχει και την μεγαλύτερη βαρύτητα. Η μονάδα #3 με την ίδια απόδοση με την #2 στις εκροές είναι αποδοτική λόγω της βελτιωμένης επίδοσης της στην εισροή. Οι μονάδες #6, #9 και #1 και #10 έχουν τις ίδιες τιμές στην εισροή αλλά διαφορετικές στις εκροές, λόγω όμως της ίσης βαρύτητάς τους, έχουν την ίση τιμή αποδοτικότητας.

3.6 Το γενικευμένο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή δεδομένα

Σε προβλήματα εκτίμησης της αποδοτικότητας συνήθως συνυπάρχουν εισροές και εκροές που εκφράζονται με δεδομένα όλων των τύπων : με ακριβείς τιμές (exact data), με μορφή διαστημάτων (interval data) και μορφή διάταξης (ordinal data). Για τη γενική αυτή περίπτωση, συνθέτοντας τα μοντέλα (2.1) και (3.1) για δεδομένα διαστημάτων και δεδομένα διάταξης αντιστοίχως, διαμορφώνουμε το γενικευμένο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης, ικανό να χειρίζεται δεδομένα όλων των τύπων σε ένα πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό :

$I = \{1, \dots, s\}$	το σύνολο των δεικτών για τις εισροές
$R = \{1, \dots, m\}$	το σύνολο των δεικτών για τις εκροές
C^I	το σύνολο των δεικτών για τις συνεχείς μεταβλητές των εισροών ($C^I \subseteq I$)
O^I	το σύνολο των δεικτών για τις μεταβλητές διάταξης των εισροών ($O^I \subseteq I, C^I \cup O^I = I$)
C^R	το σύνολο των δεικτών για τις συνεχείς μεταβλητές των εκροών ($C^R \subseteq R$)
O^R	το σύνολο των δεικτών για τις μεταβλητές διάταξης των εκροών ($O^R \subseteq R, C^R \cup O^R = R$)

Σύμφωνα με τον ανωτέρω συμβολισμό διατυπώνεται το ακόλουθο μοντέλο (3.4) για όλους τους τύπους των δεδομένων. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην αρχή ότι η συνολική συνεισφορά των δεδομένων διάταξης στη διαμόρφωση των εικονικών τιμών των εισροών / εκροών προστίθεται σε εκείνη των δεδομένων διαστημάτων ώστε να διαμορφωθεί τελικώς η τιμή

της αποδοτικότητας κάθε μονάδας. Η διαμόρφωση αυτή της αποδοτικότητας από επιμέρους παράγοντες που αντιστοιχούν στους διαφόρους τύπους δεδομένων κυριαρχεί σε όλες τις μέχρι σήμερα προσεγγίσεις των Cook-Kress (1996), Cooper-Park-Yu (1999) για την επίλυση προβλημάτων με μικτούς τύπους δεδομένων. Το μοντέλο αυτό έχει τη συνοπτική μορφή :

(3.4)

$$\begin{aligned} \max h_{j_0} &= \sum_{r \in C^R} u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) + \sum_{r \in O^R} p_{rj_0} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{i \in C^I} v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) + \sum_{i \in O^I} q_{ij_0} &= 1 \\ \sum_{r \in C^R} u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) + \sum_{r \in O^R} p_{rj} - \sum_{i \in C^I} v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) - \sum_{i \in O^I} q_{ij} &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ p_{rj} - u_r &\leq 0 \quad r \in C^R ; j = 1, \dots, n \\ q_{ij} - v_i &\leq 0 \quad i \in C^I ; j = 1, \dots, n \\ u_r, v_i &\geq \varepsilon \quad r \in C^R ; i \in C^I \\ p_{rj} &\geq 0, q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j \\ \text{περιορισμοί διάταξης των } \{p_{rj}, j = 1, \dots, n\}, r \in O^R \\ \text{περιορισμοί διάταξης των } \{q_{ij}, j = 1, \dots, n\}, i \in O^I \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω αρχή, στο μοντέλο (3.4) οι συνολικές εκροές αποτελούνται από τον παράγοντα $\sum_{r \in C^R} u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L)$ ο οποίος αναφέρεται στα δεδομένα διάταξης και από τον παράγοντα $\sum_{r \in O^R} p_{rj_0}$ ο οποίος εκφράζει τις εκροές με μορφή διάταξης. Αντίστοιχη διατύπωση έχουν και οι εκφράσεις των εισροών. Οι περιορισμοί διάταξης που αναφέρονται στο ανωτέρω μοντέλο (3.4) είναι οι ίδιοι όπως ακριβώς έχουν αναπτυχθεί στο μοντέλο (3.1) για δεδομένα διάταξης.

Εάν στο πρόβλημα δεν υπάρχουν δεδομένα διάταξης δηλαδή όταν $O^R = \emptyset$, $O^I = \emptyset$, τότε παράγοντες $\sum_{r \in O^R} p_{rj_0}$ και $\sum_{i \in O^I} q_{ij_0}$ που αντιστοιχούν στα δεδομένα διάταξης καθώς επίσης και οι περιορισμοί των μεταβλητών q_{ij}, p_{rj} εξαφανίζονται και το μοντέλο μετασχηματίζεται στο (2.1). Ομοίως όταν $C^R = \emptyset$, $C^I = \emptyset$, όταν δηλαδή υπάρχουν μόνον μεταβλητές διάταξης, οι αντίστοιχοι όροι των συνεχών δεδομένων εξαφανίζονται και το μοντέλο λαμβάνει την μορφή (3.2). Από τις παρατηρήσεις αυτές αποδεικνύεται ότι το μοντέλο (3.4) αποτελεί τη γενική έκφραση του μοντέλου Περιβάλλουσας Ανάλυσης για με ακριβή δεδομένα. Ο υπολογισμός των ελαχίστων τιμών αποδοτικότητας, η κατάταξη των μονάδων στα σύνολα E^{++} , E^+ και E^- καθώς επίσης και η εκτίμηση των δεικτών αντοχής όπως αυτά περιγράφονται στο Κεφάλαιο 3, μεταφέρονται και στη γενική περίπτωση του μοντέλου (3.4) με την προϋπόθεση ότι θα προβλεφθεί στα σχετικά μοντέλα και ο αντίστοιχος παράγοντας που αφορά τα δεδομένα διάταξης.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Για την επεξήγηση της γενικευμένης αυτής περίπτωσης θεωρούμε το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 3.10 το οποίο για λόγους σύγκρισης έχει ληφθεί αυτούσιο από την αντίστοιχη για με ακριβή δεδομένα εργασία των Cooper, Park, Yu (1999).

Πίνακας 3.10 - Αριθμητικό παράδειγμα με όλους τους τύπους των δεδομένων από την εργασία των Cooper, Park, Yu (1999).

Μονάδα j	Εισροές		Εκροές	
	Ακριβείς τιμές x_{1j}	Διαστήματα x_{2j}	Ακριβείς τιμές y_{1j}	Διάταξης y_{2j}
#1	100	0.6 0.7	2000	4
#2	150	0.8 0.9	1000	2
#3	150	1 1	1200	5
#4	200	0.7 0.8	900	1
#5	200	1 1	600	3

Στο παράδειγμα υπάρχουν δύο εισροές (μία με ακριβή δεδομένα και μία με δεδομένα διαστήματος) και δύο εκροές (μία με ακριβή δεδομένα και μία με δεδομένα διάταξης). Στα δεδομένα διάταξης (εκροή y_{2j}), η τιμή 5 αντιστοιχεί στο υψηλότερο επίπεδο διάταξης και η τιμή 1 στο χαμηλότερο.

Στον Πίνακα 3.11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης του παραδείγματος για δύο διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων ε και δ (βλ. μοντέλα (2.1) και (3.1)), τόσο με το προτεινόμενο στην εργασία αυτή μοντέλο (3.4) όσο και με το αντίστοιχο της IDEA στην εργασία των Cooper, Park, Yu (1999). Διαπιστώνεται ότι τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις ταυτίζονται μέχρι του πέμπτου δεκαδικού ψηφίου.

Πίνακας 3.11 - Αποτελέσματα της επίλυσης με τα μοντέλα (3.4) και IDEA

Μονάδα j	$\varepsilon = 10^{-10}, \delta = 10^{-6}$		$\varepsilon = 10^{-8}, \delta = 10^{-6}$	
	IDEA	Μοντέλο (4.1)	IDEA	Μοντέλο (4.1)
#1	1	1	1	1
#2	0.87500	0.87500	0.87499	0.87499
#3	1	1	1	1
#4	1	1	0.99999	0.99999
#5	0.70000	0.70000	0.69999	0.69998

Από την επίλυση του (3.4), ενδεικτικά για την αποδοτική μονάδα #1, προέκυψαν οι τιμές των εισροών / εκροών του Πίνακα όπως αυτή η μονάδα εκτίμησε προς όφελός της. Στη αντίστοιχη στήλη της εκροή διάταξης y_{2j}

εμφανίζονται σε παρένθεση οι πραγματικές τιμές, όπως εκτιμήθηκαν για κάθε επίπεδο διάταξης.

Πίνακας 3.12 - Τιμές των εισροών / εκροών από την επίλυση του (3.4) για την μονάδα #1.

<i>Μονάδα</i>	<i>Εισροές</i>		<i>Εκροές</i>	
	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}
#1	100	0.6	2000	4(3E-06)
#2	150	0.8	1000	2(1E-06)
#3	150	1	1200	5(4E-06)
#4	200	0.7	900	1(0E+00)
#5	200	1	600	3(2E-06)

Στον Πίνακα 3.13 που ακολουθεί παρουσιάζεται η τυποποιημένη μορφή του γραμμικού προγράμματος που αντιστοιχεί στην επίλυση του (3.4) για την μονάδα #1. Από αυτό διαπιστώνεται ότι μόνο η αντικειμενική συνάρτηση και ο περιορισμός #6 μεταβάλλονται όταν εκτιμηθεί η αποδοτικότητα κάθε άλλης μονάδας.

Πίνακας 3.13 : Η τυποποιημένη μορφή του γραμμικού προβλήματος (3.4) το οποίο επιλύεται για την μονάδα 1

#	v_1	v_2	u_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}	q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}	q_{25}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	RHS	
1	-100	-0.6	2000						-0.1										1					\leq 0	
2	-150	-0.8	1000							-0.1										1					\leq 0
3	-150	-1	1200																		1				\leq 0
4	-200	-0.7	900									-0.1										1			\leq 0
5	-200	-1	600																				1		\leq 0
6	100	0.6							0.1																= 1
7	-1			1																					\leq 0
8	-1				1																				\leq 0
9	-1					1																			\leq 0
10	-1						1																		\leq 0
11	-1							1																	\leq 0
12		-1							1																\leq 0
13		-1								1															\leq 0
14		-1									1														\leq 0
15		-1										1													\leq 0
16		-1											1												\leq 0
17			-1											1											\leq 0
18			-1												1										\leq 0
19			-1													1									\leq 0
20			-1														1								\leq 0
21			-1															1							\leq 0
22																			1						\geq δ
23																				1				-1	\geq δ
24																					-1			1	\geq δ
25																						1		-1	\geq δ
			2000																	1					max obj

$$v_1, v_2, u_1 \geq \varepsilon, \quad q_{ij} \geq 0, i=1,2; j=1,\dots,5, \quad p_{rj} \geq 0, r=1,2; j=1,\dots,5$$

3.7 Εκτίμηση της σφαιρικής αποδοτικότητας σε προβλήματα με μη ακριβή δεδομένα

Στην ενότητα αυτή διερευνάται το πρόβλημα της εκτίμησης σφαιρικών τιμών αποδοτικότητας σε προβλήματα με μη ακριβή δεδομένα. Όπως ήδη έχει αναφερθεί στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1 (ενότητα 1.3.2), η σφαιρική αποδοτικότητα των μονάδων επιτυγχάνεται με τον ορισμό κοινών, για όλες τις μονάδες, πολλαπλασιαστών u_r, v_i και χρησιμοποιείται για την περαιτέρω διάκριση και κατάταξη των αποδοτικών μονάδων.

Σε πρόσφατη ερευνητική εργασία (Despotis (2002)), για την περίπτωση των προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ακριβείς τιμές, διατυπώθηκε το μοντέλο (3.5) το οποίο υπολογίζει τη σφαιρική αποδοτικότητα των μονάδων.

$$\begin{aligned}
 & \min t - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j + (1-t)z \\
 & \text{s.t.} \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} + d_j = h_j^*, j = 1, \dots, n \\
 & d_j - z \leq 0, j = 1, \dots, n \\
 & u_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
 & z \geq 0, d_j \geq 0 \quad \forall j
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Στο γραμμικό πρόβλημα (3.5) άγνωστες προς εκτίμηση μεταβλητές είναι οι πολλαπλασιαστές u_r, v_i οι οποίοι είναι κοινοί για όλες τις μονάδες. Μέσω της λύσης του προβλήματος αυτού υπολογίζονται οι τιμές αποδοτικότητας των μονάδων. Η τεχνική επίλυσης του προβλήματος υπολογισμού της σφαιρικής αποδοτικότητας βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της απόστασης μεταξύ των τιμών αποδοτικότητας των μονάδων h_j^* όπως αυτές εκτιμώνται από το αρχικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης και των νέων τιμών που υπολογίζονται από

τον λόγο $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}$. Για το σκοπό αυτό η απόσταση των τιμών αποδοτικότητας

ορίζεται, μέσω της παραμέτρου t , $0 \leq t \leq 1$, ως σύνθεση δύο τύπων αποστάσεων : της μέσης απόκλισης $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j$ (απόσταση τύπου L_1), και της ελαχιστοποίησης του άνω φράγματος των αποκλίσεων d_j (απόσταση τύπου L_∞), όπως αυτή εκφράζεται μέσω της παραμέτρου z . Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου (3.5) συνθέτει σε μία παράσταση τις δύο αποστάσεις αυτές. Τεχνικά, για τιμή της παραμέτρου $t=1$, υλοποιείται αποκλειστικά το πρώτο μέρος της αντικειμενικής συνάρτησης και για $t=0$ υλοποιείται αποκλειστικά το δεύτερο μέρος. Για ενδιάμεσες τιμές του t υλοποιείται κατ' αναλογία η σύνθεση των δύο.

Για την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος (3.5) διαχωρίζονται οι περιπτώσεις για $t=0$ και $0 < t < 1$, διαμορφώνονται καταλλήλως τα σχετικά προβλήματα και επιλυόμενα εκτιμούν τιμές αποδοτικότητας των μονάδων. Ως σφαιρική αποδοτικότητα λαμβάνεται ο μέσος όρος των τιμών αποδοτικότητας.

Προκειμένου για τη σφαιρική αποδοτικότητα σε μη ακριβή δεδομένα, διατυπώνεται το πρόβλημα (3.6) το οποίο προκύπτει ως συνδυασμός του ανωτέρω μοντέλου (3.5) με εκείνου (μοντέλο (3.4)) της γενικής περίπτωσης προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή δεδομένα. Στο (3.6), αντί των πολλαπλασιαστών u_r, v_i εκτιμώνται, για όλες τις μονάδες, κοινές τιμές των μεταβλητών u_r, v_i, p_{rj}, q_{ij} . Το πρόβλημα (3.6) επιλύεται, όπως ακριβώς και το πρόβλημα (3.5) διαδοχικά για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου t , $t=0$ και $0 < t < 1$, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στη σχετική εργασία (Despotis (2002)).

$$\begin{aligned}
 & \min t \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j + (1-t)z \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{r \in C^R} u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) + \sum_{r \in O^R} p_{rj} - h_j^* \left(\sum_{i \in C^I} v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) + \sum_{i \in O^I} q_{ij_0} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \frac{\sum_{r \in C^R} u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) + \sum_{r \in O^R} p_{rj}}{\sum_{i \in C^I} v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) + \sum_{i \in O^I} q_{ij_0}} + d_j = h_j^*, \quad j = 1, \dots, n \\
 & d_j - z \\
 & u_r \geq \varepsilon, \quad v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \\
 & z \geq 0 \\
 & p_{rj} - u_r \leq 0 \quad r \in C^R ; j = 1, \dots, n \\
 & q_{ij} - v_i \leq 0 \quad i \in C^I ; j = 1, \dots, n \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon \quad r \in C^R ; i \in C^I \\
 & p_{rj} \geq 0, \quad q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j \\
 & \text{περιορισμο } i \text{ διάταξης των } \{p_{rj}, j = 1, \dots, n\}, r \in O^R \\
 & \text{περιορισμο } i \text{ διάταξης των } \{q_{ij}, j = 1, \dots, n\}, i \in O^I
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Μία εφαρμογή υπολογισμού της σφαιρικής αποδοτικότητας μονάδων με μη ακριβή δεδομένα παρουσιάζεται στην ενότητα 5.2 του Κεφαλαίου 2.

Βιβλιογραφία

- Ali A.I., L.M.Seiford (1993), “Computational accuracy and infinitesimals in data envelopment analysis”, *INFOR* 31(4) pp.290-297.
- Banker R.D., A.Charnes, W.W.Cooper (1984) “Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis”, *Management Science* 39, pp.1078-1092
- Charnes A., W. Cooper, Q.L.Weii and Z.M.Huang (1990) “Cone ratio data envelopment analysis and multiobjective programming”, *Int. J. Syst. Sci.* 20, pp.1099-1118
- Cook W. (1991), “A multiple criteria decision model with ordinal preference data”, *European Journal of Operational Research*, 54 pp.191-198
- Cook W., M. Kress, (1991) “A multiple criteria decision model with ordinal preference data”, *European Journal of Operational Research* 54, pp.191-198
- Cook W., J. Doyle, R. Green, M.Kress (1997) “Multiple criteria modeling and ordinal data : evaluation in terms of subsets of criteria”, *European Journal of Operational Research* 98, pp.602-609
- Cook W., M. Kress and L. Seiford (1993) “On the use of ordinal data in data envelopment analysis”, *Journal of Operational Research Society* 44, pp.133-140
- Cook W., M. Kress and L. Seiford (1996) “Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors”, *Journal of Operational Research Society* 47, pp. 945-953
- Cook W., M.Kress (1990), “A Data Envelopment Model for aggregating preference rankings”, *Management Science*, Vol. 36, No.11, pp.1302-1311
- Cook, W. D., Doyle, J., Green, R. and Kress, M., “Multiple criteria modeling and ordinal data: Evaluation in terms of subsets of criteria”, *European Journal of Operational research* 98 (1997) pp.602-609.

- Copper, W. W., Park, K. S and Yu, G, “IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA”, *Management Science* 45 (1999) 597-607.
- Despotis (2002) D., “Improving the discriminating power of DEA: Focus on globally efficient units”, *Journal of Operational Research Society*, vol.53, pp.314-323
- R.M. Thrall(1995) “On DEA projections”. Working Paper 114, Rice University.
- Sarkis, J. and Talluri S. (1999), “A decision model for evaluation of flexible manufacturing systems in the presence of both cardinal and ordinal factors”, *International Journal of Production Research* 37 pp.2927-2938.
- Thompson,R.G., P.S.Dharmapala, R.M. Thrall (1995) “Linked-cone DEA profit ratios and technical efficiency with applications to Illinois coal mines” *International Journal of Production Economy* 39, pp.99-115

Μέρος ΙΙ : Εφαρμογές

Κ ε φ α λ α ι ο 4

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων σε νέα πεδία εφαρμογών

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση στην εκδοχή της για μη ακριβή δεδομένα, επιτρέπει την ανάπτυξη εφαρμογών σε νέα γνωστικά πεδία, εκεί όπου το αρχικό μοντέλο με τα ακριβή δεδομένα δεν θα είχε δυνατότητα εφαρμογής. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται διάφορες χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων εφαρμογών σε πραγματικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, προτείνονται εφαρμογές για την εκτίμηση της αποδοτικότητας των μονάδων στις περιπτώσεις όπου : (i) τα δεδομένα αναφέρονται σε μελλοντικές προβλέψεις, (ii) σε ένα πρόβλημα τοποθετούνται νέες υποθετικές προς αξιολόγηση μονάδες και (iii) στο σύνολο των δεδομένων υπάρχουν ελλείπουσες τιμές.

4.1 Η Περιβάλλουσα Ανάλυση με δεδομένα προβλέψεων

Σε όλα τα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης η αποδοτικότητα των μονάδων εκτιμάται εκ των υστέρων από δεδομένα που αναφέρονται σε μετρήσεις οι οποίες έγιναν στο παρελθόν. Σε πολλές όμως περιπτώσεις θα ήταν χρήσιμο να αξιολογηθούν οι μονάδες ενός προβλήματος με βάση τις προβλεπόμενες μελλοντικές επιδόσεις τους. Για παράδειγμα, η διοίκηση μιας τράπεζας θα μπορούσε με βάση δεδομένα προβλέψεων για επόμενες οικονομικές περιόδους, να διαχωρίσει τα υποκαταστήματα της σε αποδοτικά και μη αποδοτικά και να καθορίσει με βάση αυτόν τον διαχωρισμό την κατανομή πόρων (λειτουργικές δαπάνες, προσωπικό, εξοπλισμός κλπ). Για τα

μη αποδοτικά υποκαταστήματα, θα μπορούσε να αναζητήσει τους παράγοντες που πιθανώς να προκαλέσουν υστέρηση της αποδοτικότητάς τους αλλά και να θέσει στόχους για επιδόσεις σε επιμέρους χαρακτηριστικά (αριθμός νέων πελατών, αριθμός κινήσεων κλπ) ώστε την επόμενη περίοδο να εμφανισθούν ως αποδοτικά. Για τα αποδοτικά υποκαταστήματα θα μπορούσε να καθορίσει τα όρια μείωσης των επιδόσεων τους (αύξηση των εκροών ή /και μείωση των εισροών) ώστε αυτά να εξακολουθήσουν να παραμείνουν αποδοτικά.

Μέχρι σήμερα το πρόβλημα αυτό της εκτίμησης της μελλοντικής αποδοτικότητας των μονάδων από προβλεπόμενες επιδόσεις δεν έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία. Μερικές όμως εργασίες (βλ. Zhu(1996), V. Boljuncic (1999), και Charnes, Neralic (1995)) οι οποίες διερευνούν την ευαισθησία (sensitivity, robustness) των τιμών αποδοτικότητας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προς την κατεύθυνση αυτή. Συγκεκριμένα, υπολογίζοντας τα θεωρητικά όρια διακύμανσης των εισροών, εκροών στα οποία διατηρείται η αποδοτικότητα μιας συγκεκριμένης μονάδας, σε συνδυασμό με τις μελλοντικές προβλεπόμενες επιδόσεις της, είναι δυνατόν να προκύψουν συμπεράσματα για την διατήρηση ή μη της αποδοτικότητάς της. Όμως στις ανωτέρω εργασίες, η ανάλυση αυτή της ευαισθησίας συνήθως αφορά μόνο μία επιλεγμένη αποδοτική μονάδα θεωρώντας τις επιδόσεις των υπολοίπων σταθερές. Επίσης σε άλλες περιπτώσεις εξετάζουν μόνο την ειδική περίπτωση της ταυτόχρονης σταθερής ποσοστιαίας μεταβολής των επιδόσεων και δεν επιλύουν το πρόβλημα στην γενική του μορφή.

Οι προβλέψεις των μελλοντικών επιδόσεων των μονάδων (υποκαταστημάτων, πωλητών, πελατών κλπ) προέρχονται συνήθως είτε από εμπειρικές εκτιμήσεις διοικητικών στελεχών είτε από την επεξεργασία αποτελεσμάτων στατιστικών μεθόδων πρόβλεψης (forecasting) εφαρμοζόμενες σε δεδομένα του παρελθόντος. Σε όλες τις περιπτώσεις είναι εφικτό να ορισθεί για κάθε μονάδα και για κάθε εισροή / εκροή ένα εύρος

τιμών εντός του οποίου θα κυμαίνονται οι μελλοντικές επιδόσεις των μονάδων. Το εύρος αυτό αντιστοιχεί σε μία απαισιόδοξη και μία αισιόδοξη εκδοχή για την εξέλιξη των τιμών των εισροών / εκροών κάθε μονάδας. Η διάταξη αυτή των δεδομένων παραπέμπει ευθέως σε δεδομένα μορφής διαστημάτων, τα όρια των οποίων αντιστοιχούν στις δύο προηγούμενες εκδοχές. Στα δεδομένα αυτά είναι δυνατόν να εφαρμοσθούν τα μοντέλα Περιβάλλουσας Ανάλυσης για μη ακριβή δεδομένα ώστε με τον τρόπο αυτό να διερευνηθεί και να προβλεφθεί η συμπεριφορά της αποδοτικότητας των μονάδων στο μέλλον.

Για την επεξήγηση των ανωτέρω παρουσιάζεται μια απλή εφαρμογή αξιολόγησης υποκαταστημάτων τραπεζής βασισμένη σε προβλέψεις επιδόσεων. Σύμφωνα με αυτή, μία κεντρική τράπεζα που δραστηριοποιείται στην Τσεχία¹ διαθέτει 81 υποκαταστήματα τα οποία επιθυμεί να αξιολογήσει ως προς αποδοτικότητά τους στην επομένη οικονομική περίοδο (έτος 2001), βασιζόμενη σε οικονομικά στοιχεία του έτους 2000. Οι εισροές και εκροές του μοντέλου οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1 έχουν προσδιορισθεί ώστε να εκφράζουν την δυνατότητα προσέλκυσης πελατών ως προς τους διατιθέμενους πόρους.

Πίνακας 4.1 - Εισροές / εκροές για την αξιολόγηση των υποκαταστημάτων τραπεζής

Εισροές		Εκροές	
I1	Αριθμός υπαλλήλων	O1	Αριθμός λογαριασμών
I2	Λειτουργικά έξοδα [σε χιλιάδες κορώνες Τσεχίας -CZK]	O2	Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων
I3	Επιφάνεια γραφείων [σε m ²]	O3	Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων [σε εκατομμύρια κορώνες Τσεχίας -CZK]

¹ Τα στοιχεία για την εφαρμογή παρέχαν οι καθηγητές J. Jablonsky και P.Fiala, Department of Econometrics University of Economics, W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague 3, Czech Republic

Με αφορμή την εργασία των Camanho, Dyson (1999) στην οποία διαπιστώνεται στατιστικά σημαντική συσχέτιση του μεγέθους και της αποδοτικότητας των υποκαταστημάτων των τραπεζών, διερευνήθηκε η περίπτωση διάκρισης των 81 υποκαταστημάτων σε ομάδες «μεγάλων» και «μικρών». Για τον διαχωρισμό αυτό, σε όλο το σύνολο των δεδομένων αποτελούμενο από όλες τις εισροές και εκροές, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συστάδων (Cluster Analysis) η οποία κατέδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ δύο ομάδων G1 και G2, που περιλαμβάνουν τα μεγάλα και μικρά υποκαταστήματα με πλήθος 12 και 69 αντιστοίχως. Το μέγεθος των υποκαταστημάτων επιβεβαιώθηκε από εμπειρικές παρατηρήσεις αφού τα περισσότερα υποκαταστήματα της ομάδας G1 λειτουργούσαν στην πρωτεύουσα και τις μεγάλες πόλεις ενώ αυτά της G2 σε μικρότερες πόλεις της επαρχίας. Στον Πίνακα 4.2 που ακολουθεί παρουσιάζεται το αρχικό σύνολο δεδομένων που περιέχει τα στοιχεία του οικονομικού έτους 2000 καθώς επίσης και ο διαχωρισμός των υποκαταστημάτων στις ομάδες G1 και G2. Στη συνέχεια στον Πίνακα 4.3 αναφέρονται τα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία για τις δύο ομάδες αυτές και ακολουθούν ενδεικτικά θηκογράμματα για τον αριθμό των υπαλλήλων (I1) και την συνολική αξία καταθέσεων (O3).

Πίνακας 4.2 - Το σύνολο των δεδομένων για το έτος 2000 των 81 υποκαταστημάτων Τραπεζής της Τσεχίας.

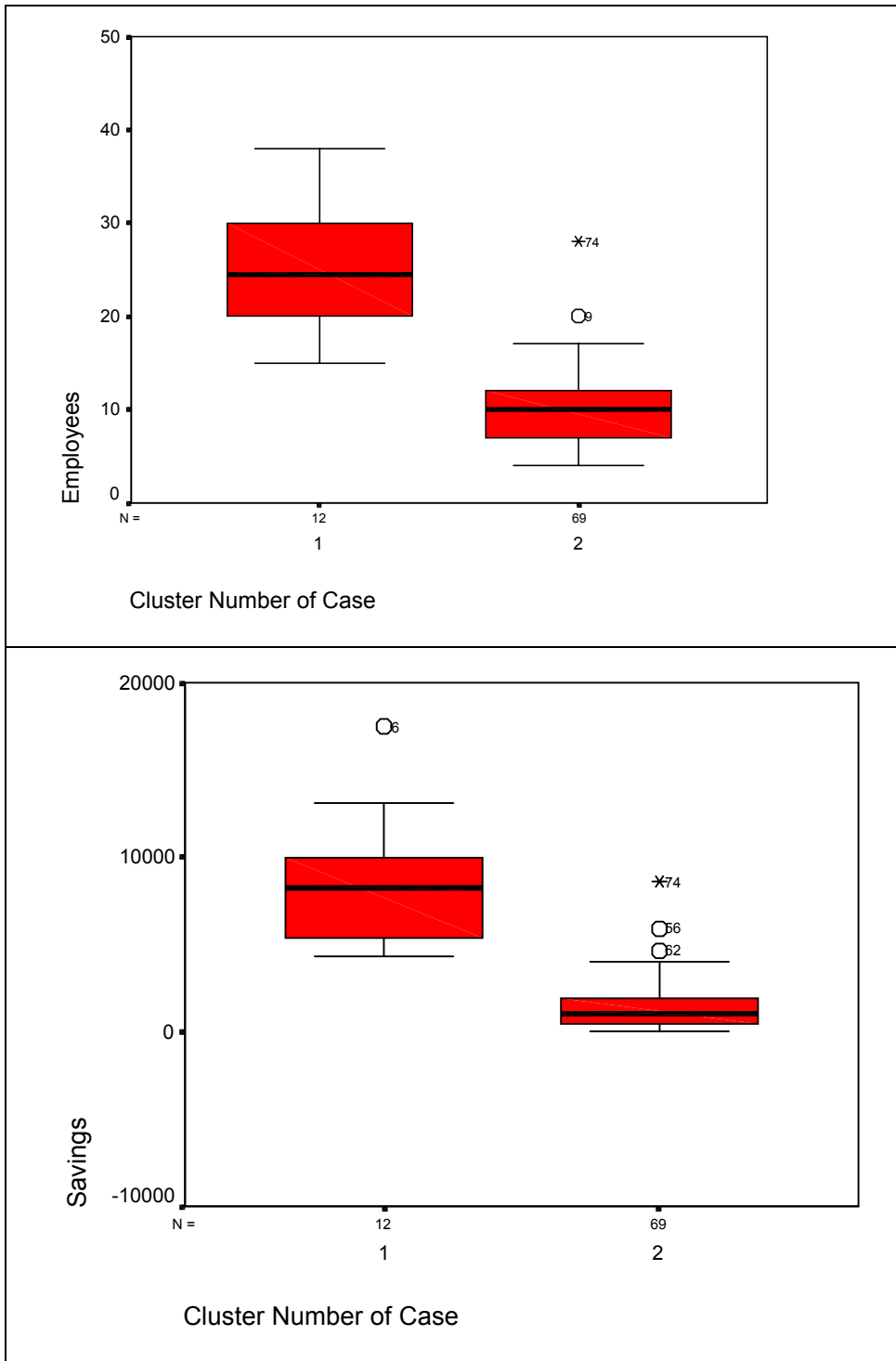
Υποκ/μα	I1	I2	I3	O1	O2	O3 Ομάδα
#6	37	56787	778	25953	1481712	17472 G1
#8	24	32940	497	13034	1161843	7930 G1
#19	26	37836	671	14868	1667100	13100 G1
#30	15	27006	269	11629	1097361	5437 G1
#37	21	30297	440	10601	1421460	5045 G1
#48	34	22046	749	14170	2200926	8232 G1
#50	25	19910	704	17824	1125534	9399 G1
#51	23	24727	682	9004	1304811	4322 G1
#53	38	24011	1053	23245	2351712	9832 G1
#55	18	25085	460	12295	1250328	5336 G1
#63	19	31770	372	15268	1049733	8315 G1
#75	25	35401	645	18004	1180524	10160 G1
#1	6	9426	115	2257	152319	1504 G2
#2	11	6979	292	899	75309	380 G2
#3	7	14905	158	3690	290607	1430 G2
#4	6	9538	57	1021	77148	731 G2
#5	11	8664	301	941	63831	806 G2
#7	7	17243	190	7060	257202	3166 G2
#9	20	30179	532	8595	723567	3734 G2
#10	13	11662	244	4702	184443	2363 G2
#11	15	12312	308	2331	287835	863 G2
#12	8	12296	174	3162	204348	1608 G2
#13	7	12680	104	1800	226755	756 G2
#14	10	11400	221	1632	238941	756 G2
#15	8	10125	137	823	107355	362 G2
#16	8	7093	112	533	97533	277 G2
#17	13	10106	241	1437	194694	667 G2
#18	5	12892	136	1719	212802	879 G2
#20	11	6488	252	2750	274923	1234 G2
#21	7	11360	138	3302	255936	1974 G2
#22	13	8436	263	1405	229368	799 G2
#23	7	9117	169	1163	89247	426 G2
#24	11	7454	251	832	72129	445 G2
#25	6	9251	102	985	75666	638 G2
#26	9	7314	166	962	72897	451 G2
#27	10	9347	212	2406	65817	1575 G2
#28	11	8713	306	616	107472	288 G2
#29	10	8762	224	461	109761	129 G2
#31	11	15440	218	4694	263286	2540 G2
#32	15	16891	348	6060	416205	3390 G2
#33	11	9414	259	2111	196068	681 G2
#34	8	9081	180	819	188160	75 G2
#35	11	9653	256	1418	108027	799 G2
#36	15	11756	308	5265	659181	1834 G2
#38	8	11745	165	3149	248034	1475 G2
#39	15	16062	410	9143	459897	3705 G2
#40	6	9916	76	3464	167190	1282 G2
#41	6	5720	70	951	61638	373 G2
#42	8	7230	164	933	63594	554 G2
#43	7	8089	178	613	53154	232 G2
#44	9	7000	229	685	67950	421 G2
#45	11	8039	250	746	47595	395 G2
#46	11	7015	227	429	42840	228 G2
#47	11	14872	245	5466	288867	4044 G2
#49	8	10503	221	5233	84525	1822 G2
#52	13	7111	280	5243	108552	3246 G2
#54	14	8795	338	5382	136107	3171 G2
#56	16	12148	453	8539	269580	5901 G2
#57	11	10514	188	3530	211701	1948 G2
#58	14	5737	334	2374	127080	1696 G2
#59	9	6637	238	1925	160158	818 G2
#60	14	14784	352	3254	202716	1288 G2
#61	14	9282	350	2959	121824	1569 G2
#62	17	18204	513	7213	698142	4639 G2
#64	11	19738	329	5150	391221	3018 G2
#65	6	13195	70	2771	149532	1473 G2
#66	12	10128	298	1952	195096	807 G2
#67	12	9610	256	2850	209868	1969 G2
#68	4	9856	54	1707	140946	578 G2
#69	11	7415	298	947	71703	394 G2
#70	9	5737	273	276	67560	66 G2
#71	4	5534	40	359	87816	77 G2
#72	7	11189	162	2699	184185	1337 G2
#73	8	11116	201	1758	102387	981 G2
#74	28	36261	649	16632	724338	8573 G2
#76	6	9544	91	3042	123555	3110 G2
#77	15	17758	304	7721	522213	3935 G2
#78	12	9225	254	2334	507378	80 G2
#79	5	10635	88	1242	144759	298 G2
#80	7	8222	157	1432	96213	1486 G2
#81	5	8257	135	1100	48309	1261 G2

Πίνακας 4.3. Βασικά περιγραφικά στοιχεία για τις ομάδες G1 και G2 των υποκαταστημάτων.

Ομάδα G1 (μεγάλα υποκαταστήματα)						
	Π1 - Αριθμός υπαλλήλων	Ι2- Λειτουργικά έξοδα	Ι3 - Επιφάνεια γραφείων	Ο1- Αριθμός λογαριασμών	Ο2- Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων	Ο3- Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων
Ελάχιστη τιμή	15	19910	269	9004	1049733	4322
Μέγιστη Τιμή	38	56787	1053	25953	2351712	17472
Μέση τιμή	25,41	30651,33	610	15491,25	1441087	8715
Διάμεσος	24,5	28651,5	658	14519	1277569,5	8273,5

Ομάδα G2 (μικρά υποκαταστήματα)						
	Π1 - Αριθμός υπαλλήλων	Ι2- Λειτουργικά έξοδα	Ι3 - Επιφάνεια γραφείων	Ο1- Αριθμός λογαριασμών	Ο2- Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων	Ο3- Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων
Ελάχιστη τιμή	4	5534	40	276	1049733	66
Μέγιστη Τιμή	28	36261	649	16632	724338	8573
Μέση τιμή	10,21	10997,1	230,63	2942,81	202421	1533,47
Διάμεσος	10	9610	227	2111	152319	981

Θηκογράμματα της εισροής I1 (αριθμός υπαλλήλων) και της εκροής O3 (Αξία καταθέσεων) για τις ομάδες G1 και G2



Με βάση τα δεδομένα του έτους 2000, η διοίκηση της τράπεζας, λαμβάνοντας υπόψη εμπειρικές εκτιμήσεις διοικητικών στελεχών και ποσοτικά δεδομένα προβλέψεων, διαμόρφωσε για κάθε εισροή και εκροή, μία απαισιόδοξη και μία αισιόδοξη εκδοχή πρόβλεψης για το έτος 2001. Οι δύο εκδοχές αυτές έλαβαν τη μορφή ποσοσטיαίων αποκλίσεων από τις αντίστοιχες τιμές του έτους 2000. Για τις δύο ομάδες G1, G2 δόθηκαν διαφορετικά ποσοστά αποκλίσεων ως εξής :

Πίνακας 4.4 - Μελλοντικές εκτιμήσεις, υπό μορφή ποσοσטיαίων αποκλίσεων, για το έτος 2001

	Ομάδα G1 (Μεγάλα υποκαταστήματα)		Ομάδα G2 (Μικρά υποκαταστήματα)	
	Κάτω όριο	Άνω όριο	Κάτω όριο	Άνω όριο
<i>Εισροές</i>				
I1 - Αριθμός υπαλλήλων	-4%	+4%	-5%	+5%
I2- Λειτουργικά έξοδα	-2%	+3.5%	-2.5%	+7.5%
I3 - Επιφάνεια γραφείων	0%	0%	0%	0%
<i>Εκροές</i>				
O1- Αριθμός λογαριασμών	-2%	+7.5%	-2.5%	+10%
O2- Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων	0%	+5.5%	0%	+15%
O3- Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων	-2.5%	+2%	-5%	+5%

Οι αποκλίσεις του Πίνακα 4.4 σε συνδυασμό με τα δεδομένα του έτους 2000, διαμορφώνουν για τις δύο ομάδες υποκαταστημάτων G1, G2, δύο σύνολα δεδομένων με μορφή διαστημάτων. Με απλή εφαρμογή των μοντέλων (2.1), (2.3) και (2.5) στα δεδομένα αυτά, υπολογίζονται το ελάχιστο όριο αποδοτικότητας h_j^L , η αποδοτικότητα h_j^* , η ταξινόμηση των μονάδων σε σύνολα E^{++} , E^+ , E^- καθώς και οι δείκτες αντοχής ρ και σ . Για τη

σύγκριση της αποδοτικότητας των μονάδων κατά τις περιόδους 2000 και 2001, εκτιμήθηκαν επίσης οι τιμές αποδοτικότητας στα αρχικά δεδομένα της περιόδου 2000 με το μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης για ακριβείς τιμές. Με βάση τα αποτελέσματα των μοντέλων, για την ομάδα G1 διαμορφώνεται ο συγκεντρωτικός Πίνακας 4.5. Σε αυτόν, τα υποκαταστήματα διατάσσονται ως προς την κλάση E^{++} , E^+ , E^- και ως προς την μέση τιμή των δεικτών αντοχής ρ και σ η οποία ελήφθη ως κριτήριο διάταξης των αποδοτικών μονάδων (σύνολο E^+).

Πίνακας 4.5 - Ανάλυση αποδοτικότητας για την ομάδα G1

	h_j^L	h_j^*	Ταξιν.	Μέση τιμή ρ και σ	Αποδοτικότητα προηγ. περιόδου
#6	1	1	E++		1
#19	1	1	E++		1
#30	1	1	E++		1
#48	1	1	E++		1
#50	1	1	E++		1
#53	1	1	E++		1
#63	1	1	E++		1
#55	0,9236	1	E+	0,99541	0,996814
#75	0,8563	1	E+	0,982754	0,948566
#37	0,8963	1	E+	0,952867	0,959554
#8	0,7868	0,8908	E-		0,835108
#51	0,7752	0,9028	E-		0,836081

Από τον ανωτέρω πίνακα (βλ. τελευταία στήλη) διαπιστώνεται ότι τα αποδοτικά υποκαταστήματα της περιόδου 2000 διατηρούν την αποδοτικότητά τους και στην νέα περίοδο με βάση τις προβλέψεις εξέλιξης των επιδόσεών τους. Όμως τα μη αποδοτικά υποκαταστήματα #55, #75, #37 είναι σε θέση να εμφανισθούν αποδοτικά (E^+) τη νέα περίοδο όταν επιτύχουν τις κατάλληλες επιδόσεις εντός των προβλεπομένων ορίων. Εάν ληφθεί ως παράδειγμα η μονάδα #55 η οποία υπερέχει των άλλων αποδοτικών του συνόλου E^+ , από την επίλυση του μοντέλου (2.1)

διαπιστώνεται ότι αυτή είναι σε θέση να προσδιορίσει τιμές εισροών / εκροών ώστε να είναι αποδοτική τη νέα περίοδο. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε μία από τις πολλές εκδοχές βελτίωσης της. Ο πίνακας 4.6 παρουσιάζει τις επιδόσεις της μονάδας αυτής για την προηγούμενη περίοδο 2000, τις νέες βελτιωμένες επιδόσεις που εκτιμήθηκαν για το 2001 ώστε η μονάδα να καταστεί αποδοτική και την διαφορά τους σε ποσοστό % (το αρνητικό πρόσημο στις εισροές δείχνει βελτίωση). Οι επιδόσεις του έτους 2001 που καθιστούν το υποκατάστημα #55 αποδοτικό μπορούν να τεθούν ως προς επίτευξη στόχος από την διοίκηση της τραπέζης.

Πίνακας 4.6 - Ενδεικτικά όρια βελτίωσης του υποκαταστήματος #55 ώστε να καταστεί αποδοτικό την επόμενη περίοδο

Εισροές / Εκροές	Επιδόσεις 2000	Επιδόσεις 2001	Διαφορά (%)
Αριθμός υπαλλήλων (I1)	18	17	-6%
Λειτουργικά έξοδα (I2)	25085	24457	-3%
Επιφάνεια γραφείων (I3)	460	460	
Αριθμός λογαριασμών (O1)	12295	13524	9%
Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων (O2)	1250328	1437877	13%
Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων (O3)	5336	5602	5%

Οι βελτιωμένες επιδόσεις του ανωτέρω πίνακα αφορούν όλες τις εισροές /εκροές. Εάν εστιαστεί το ενδιαφέρον σε μία συγκεκριμένη εισροή /εκροή, το μοντέλο (2.6) εφαρμοζόμενο για μία μη αποδοτική μονάδα του συνόλου E , ορίζει ως κατώφλιο αποδοτικότητας, την μέγιστη επίδοση που πρέπει να επιτύχει η μονάδα προκειμένου να εμφανισθεί αποδοτική. Για παράδειγμα τα λειτουργικά έξοδα (I2) του υποκαταστήματος #51 το οποίο είναι μη αποδοτικό κατά την οικονομική περίοδο 2000 είναι 24727 CZK. Προκειμένου αυτό να γίνει αποδοτικό πρέπει να τα μειώσει δραστικά στο επίπεδο των 14000 CZK (μείωση κατά 43%). Με λειτουργικά έξοδα 14500 CZK παραμένει μη

αποδοτικό. Η μείωση αυτή πραγματοποιείται χωρίς να μεταβληθούν τα όρια που έχουν τεθεί στις υπόλοιπες εισροές / εκροές.

Ομοίως, για την ομάδα G1 των μικρών υποκαταστημάτων, η ανάλυση της αποδοτικότητας για την επόμενη οικονομική περίοδο απέδωσε τα αποτελέσματα του κατωτέρω πίνακα 4.7.

Πίνακας 4.7 - Τιμές αποδοτικότητας με μη ακριβή δεδομένα για την ομάδα G2

	h_j^L	h_j^*	Ταξιν.	Μέση τιμή ρ και σ	Αποδοτ. προηγ. περιόδου		h_j^L	h_j^*	Ταξιν.	Μέση τιμή ρ και σ	Αποδοτ. προηγ. περιόδου
#07	1	1	E++		1	#15	0,3009	0,4337	E-		0,35
#36	1	1	E++		1	#16	0,3375	0,4546	E-		0,39
#40	1	1	E++		1	#17	0,3314	0,4615	E-		0,38
#56	1	1	E++		1	#22	0,4081	0,6424	E-		0,51
#68	1	1	E++		1	#23	0,2440	0,4439	E-		0,30
#76	1	1	E++		1	#24	0,1755	0,2738	E-		0,22
#01	0,6120	1	E+	0,6235	0,76	#25	0,3217	0,5072	E-		0,38
#03	0,7311	1	E+	0,8189	0,99	#26	0,2288	0,3255	E-		0,27
#09	0,6263	1	E+	0,7901	0,86	#27	0,4154	0,5725	E-		0,49
#13	0,7727	1	E+	0,7878	0,90	#28	0,1734	0,2999	E-		0,22
#18	0,6491	1	E+	0,8189	0,99	#29	0,1975	0,3404	E-		0,25
#20	0,6858	1	E+	0,6414	0,86	#31	0,6245	0,9243	E-		0,74
#21	0,8012	1	E+	0,8092	1	#33	0,3713	0,5898	E-		0,45
#32	0,6562	1	E+	0,7506	0,81	#34	0,4137	0,7503	E-		0,54
#38	0,6286	1	E+	0,7823	0,79	#35	0,2468	0,3743	E-		0,30
#39	0,8795	1	E+	0,8172	1	#41	0,3634	0,5234	E-		0,44
#47	0,7471	1	E+	0,7907	0,93	#42	0,2290	0,3371	E-		0,27
#49	0,7967	1	E+	0,8038	0,96	#43	0,1381	0,2591	E-		0,18
#52	0,8648	1	E+	0,6528	1	#44	0,1779	0,2839	E-		0,22
#54	0,7198	1	E+	0,6426	0,85	#45	0,1348	0,1980	E-		0,16
#62	0,8521	1	E+	0,7936	1	#46	0,1049	0,1637	E-		0,13
#64	0,6500	1	E+	0,8128	0,89	#57	0,6306	0,8906	E-		0,75
#65	0,9136	1	E+	0,6446	1	#58	0,5878	0,9029	E-		0,73
#71	0,7597	1	E+	0,6314	0,89	#59	0,4325	0,6870	E-		0,54
#74	0,8096	1	E+	0,7955	0,96	#60	0,3543	0,5401	E-		0,42
#77	0,8643	1	E+	0,8054	1	#61	0,3908	0,5998	E-		0,48
#78	0,8092	1	E+	0,6375	0,98	#66	0,3184	0,5232	E-		0,40
#79	0,5839	1	E+	0,6264	0,72	#67	0,5407	0,7785	E-		0,65
#02	0,1925	0,3024	E-		0,24	#69	0,1839	0,2886	E-		0,23
#04	0,5524	0,7279	E-		0,63	#70	0,1656	0,2663	E-		0,21
#05	0,1970	0,3004	E-		0,24	#72	0,5166	0,9455	E-		0,66
#10	0,6526	0,9221	E-		0,78	#73	0,2946	0,4848	E-		0,37
#11	0,3792	0,5748	E-		0,44	#80	0,4442	0,7266	E-		0,54
#12	0,5446	0,9108	E-		0,68	#81	0,3515	0,7846	E-		0,49
#14	0,4308	0,7441	E-		0,55						

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4.7 προκύπτει ότι τα αποδοτικά υποκαταστήματα κατά την περίοδο 2000 διατηρούν την αποδοτικότητά τους ενώ η πλειονότητα των μη αποδοτικών, με τα δεδομένα των προβλέψεων παραμένει μη αποδοτική. Όμως, σε μερικά υποκαταστήματα π.χ. #1, #3, #9, #13 τα διαστήματα διακύμανσης των μελλοντικών επιδόσεων τους είναι τέτοια ώστε αυτά να εμφανίζονται αποδοτικά. Επιλεκτικά, για μερικές περιπτώσεις εξ' αυτών, είναι δυνατή η περαιτέρω ανάλυση των επιδόσεών τους, όπως πραγματοποιήθηκε για το υποκατάστημα #55 της ομάδας G1.

4.2 Τοποθέτηση νέων μονάδων

Σε πολλές εφαρμογές, νέες υπό σχεδιασμό μονάδες, είναι χρήσιμο να ελέγχονται ως προς την μελλοντική τους αποδοτικότητα και να συγκρίνονται με υπάρχουσες που ήδη βρίσκονται σε λειτουργία. Για παράδειγμα, οι διοικήσεις τραπεζών ή εταιρειών λιανικής πώλησης προϊόντων θα ήταν χρήσιμο να ελέγξουν την αποδοτικότητα νέων υποκαταστημάτων, βασιζόμενες σε εκτιμήσεις πωλήσεων, λειτουργικών εξόδων κλπ. Ομοίως, νέοι πελάτες συχνά ζητείται να αξιολογηθούν με βάση τις δεσμεύσεις τους για παραγγελίες και τις προβλέψεις πραγματοποίηση τζίρου, κερδών κλπ. Στον χώρο των Πανεπιστημίων, νέα υπό ίδρυση τμήματα ζητείται να εξετασθούν ως προς την αποδοτικότητά τους με βάση τις προβλεπόμενες θέσεις των μελών ΔΕΠ, του αριθμού των φοιτητών, την αναμενόμενη απόδοση του ερευνητικού έργου κλπ. Τέλος, νέα προϊόντα, πριν την είσοδό τους στην αγορά, θα πρέπει να αντιπαραβάλλονται με τα ανταγωνιστικά τους και να ελέγχεται η πιθανή υπεροχή ή η υστέρηση τους.

Σε αντίθεση με την μέχρι σήμερα πρακτική στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης η οποία αποτιμά την αποδοτικότητα υπαρκτών λειτουργικών μονάδων, στην ενότητα αυτή, ως απλή εφαρμογή της μεθόδου για μη ακριβή δεδομένα, πραγματοποιείται μελέτη της αποδοτικότητας νέων υποθετικών μονάδων που βρίσκονται στο στάδιο του σχεδιασμού. Για τις μονάδες αυτές, διάφορες μελέτες σκοπιμότητας αλλά και εμπειρικές εκτιμήσεις των διοικητικών στελεχών είναι δυνατόν να εκτιμήσουν, υπό μορφή αισιόδοξης και απαισιόδοξης έκβασης, τα όρια των μελλοντικών τους επιδόσεων. Εάν από τα αποτελέσματα της αξιολόγησης προκύψει ότι οι νέες μονάδες είναι αποδοτικές, τούτο θα αποτελέσει ισχυρή ένδειξη για να προχωρήσει η υλοποίησή τους. Διαφορετικά θα πρέπει να επανεξετασθεί η σχεδιαζόμενη λειτουργία τους και να βελτιωθούν τα χαρακτηριστικά τους ώστε να εμφανισθούν αποδοτικές συγκριτικά με τις ανταγωνιστικές.

Για την επεξήγηση των ανωτέρω, δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα : στην εφαρμογή της αξιολόγησης των υποκαταστημάτων των τραπεζών της προηγούμενης ενότητας υποθέτουμε ότι η διοίκηση της τραπεζής σχεδιάζει να εισάγει στο δίκτυο της τέσσερα νέα υποκαταστήματα X1,X2,X3,X4 τα οποία θα λειτουργήσουν για πρώτη φορά την περίοδο 2001 και τα οποία ανήκουν στην ομάδα G1 των 12 μεγάλων υποκαταστημάτων. Οι προβλέψεις των επιδόσεων τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.8.

Πίνακας 4.8 - Προβλεπόμενες επιδόσεις για τέσσερα νέα υπό ένταξη υποκαταστήματα της ομάδας G1

Νέο Υποκ/μα	Αριθμός υπαλλήλων		Λειτουργικά έξοδα		Επιφάνεια γραφείων	Αριθμός λογαριασμών		Αριθμός μέσων μηνιαίων κινήσεων		Συνολική ετήσια αξία καταθέσεων	
X1	30	32	40000	41500	650	12500	13500	1521000	1850000	4500	4650
X2	22	24	20000	21500	410	13200	15500	1750000	1970000	7500	9500
X3	29	31	28300	29000	320	17500	18500	1320000	1410000	8250	9750
X4	31	35	38500	41000	760	19500	21000	1955000	2100000	5500	7500

Τα ανωτέρω δεδομένα προστιθέμενα στα παλαιά, διαμορφώνουν ένα νέο σύνολο δεδομένων διαστημάτων στο οποίο εφαρμοζόμενα τα αντίστοιχα μοντέλα (2.1), (2.3) και (2.5), δίνουν τα αποτελέσματα αποδοτικότητας και κατάταξης του Πίνακα 4.9. Στην τελευταία στήλη του πίνακα αυτού εμφανίζεται η ταξινόμηση των μονάδων πριν την ένταξη των νέων μονάδων.

Πίνακας 4.9 – Ανάλυση της αποδοτικότητας των παλαιών και νέων υποκαταστημάτων

	h_j^L	h_j^*	Ταξίν.	Προηγ. Ταξίν.
#6	0,996	1	E+	E++
#8	0,710486	0,848123	E-	E-
#19	1	1	E++	E++
#30	1	1	E++	E++
#37	0,755913	0,977629	E-	E+
#48	0,945439	1	E+	E++
#50	0,979096	1	E+	E++
#51	0,633543	0,820464	E-	E-
#53	1	1	E++	E++
#55	0,852042	1	E+	E+
#63	1	1	E++	E++
#75	0,853685	1	E+	E+
X1	0,540971	0,844454	E-	
X2	1	1	E++	
X3	1	1	E++	
X4	0,726246	1	E+	

Από τον ανωτέρω Πίνακα 4.9 προκύπτει ότι τα υπό ένταξη υποκαταστήματα X2 και X3 είναι ισχυρώς αποδοτικά, το δε X4 είναι απλώς αποδοτικό και το X1 μη αποδοτικό. Για τα X2 και X3 υπάρχει ισχυρή ένδειξη να προχωρήσει η λειτουργία τους. Αντιθέτως για την μη αποδοτική μονάδα X1 προκύπτει ότι πρέπει να επανεξετασθεί η σκοπιμότητα λειτουργίας της και να αναθεωρηθούν οι εκτιμώμενες επιδόσεις της προκειμένου να καταστεί ανταγωνιστική με τα υπόλοιπα υποκαταστήματα.

Η είσοδος των νέων υποκαταστημάτων, λόγω της συγκριτικής αξιολόγησης, επηρέασε την αποδοτικότητα μερικών εκ των παλαιότερων. Το υποκατάστημα #37, συγκρινόμενο με τα νέα, από αποδοτικό έγινε μη αποδοτικό ενώ τα #6, #48, και #50 μετατράπηκαν σε απλώς αποδοτικά.

4.3 Χειρισμός δεδομένων με ελλείπουσες τιμές

Η απουσία τιμών είναι σύνηθες φαινόμενο σε προβλήματα ανάλυσης δεδομένων. Ειδικότερα, σε εφαρμογές μέτρησης της αποδοτικότητας μονάδων, διαπιστώνεται ότι συχνά οι οργανισμοί και οι επιχειρήσεις δεν επιθυμούν ή δεν είναι σε θέση να παρέχουν οικονομικά ή άλλα στοιχεία για τις επιχειρησιακές τους μονάδες, τα διοικητικά στελέχη ερωτώμενα δηλώνουν «δεν γνωρίζω / δεν απαντώ», ενώ τα δημοσιευμένα στοιχεία συχνά δεν είναι επαρκή και αξιόπιστα. Στις ανωτέρω περιπτώσεις όπου εμφανίζονται ελλείπουσες τιμές σε δεδομένα, η Περιβάλλουσα Ανάλυση στην εκδοχή της για ακριβείς τιμές, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Μία πρόσφατη εργασία [Kao, Liu (2000)] χειρίζεται το πρόβλημα των ελλειπουσών τιμών με τη βοήθεια της ασαφούς λογικής. Σε άλλες περιπτώσεις [βλ. Schefczyk (1993)], οι εισροές / εκροές που εμφανίζουν ελλείπουσες τιμές, αντικαθίστανται από άλλες με μεγαλύτερη πληρότητα τιμών και παρόμοια σημασία.

Συνήθης πρακτική από τη Στατιστική υπαγορεύει την εξαίρεση των περιπτώσεων εκείνων που έχουν ελλείπουσες τιμές με την υπόθεση ότι δεν επηρεάζεται η συμπεριφορά του μέσου όρου από την απουσία μερικών παρατηρήσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις όπου των πλήθος αυτών είναι μεγάλο. Όμως στα προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης το πλήθος των προς αξιολόγηση μονάδων αναμένεται να είναι μικρό και δεδομένου ότι ο υπολογισμός της αποδοτικότητας είναι συγκριτικός, η εξαίρεση των μονάδων που εμφανίζουν ελλιπή δεδομένα, θα είχε σαν αποτέλεσμα την εκτίμηση εσφαλμένων τιμών αποδοτικότητας.

Σε άλλες περιπτώσεις, οι τιμές που δεν μπορούν να ορισθούν λόγω αντικειμενικής δυσκολίας ή ύπαρξης σφαλμάτων, αντικαθίστανται με άλλες που προκύπτουν ως προσεγγίσεις αυτών, εκτιμώμενες είτε εμπειρικά είτε ως αποτέλεσμα εφαρμογής στατιστικών μεθόδων. Η εκτίμηση μιας μοναδικής προσεγγιστικής τιμής εμπεριέχει σφάλμα το οποίο επηρεάζει την ακρίβεια

των αποτελεσμάτων. Το πρόβλημα αυτό της αντικατάστασης (imputation) των ελλειπουσών τιμών, έχει αντιμετωπισθεί και η σχετική βιβλιογραφία είναι αρκετά μεγάλη. Ενδεικτικά αναφέρονται ως πιο πρόσφατες και αντιπροσωπευτικές οι εργασίες Holm (1999), Laaksonen (2000), Liu, White, Thompson, Bramer (1998) και Noack, Schlittgen (2000). Ιδιαίτερα για την περίπτωση που τα δεδομένα των παρατηρήσεων είναι συναφή ή αποτελούν στοιχεία χρονολογικών σειρών, στη θέση των ελλειπουσών τιμών είναι δυνατόν να ορισθεί :

- 1) η μέση τιμή όλων των δεδομένων της χρονολογικής σειράς
- 2) η μέση τιμή ή η διάμεσος των γειτονικών σε αυτή σημείων (Mean, median of nearby points) (ως γειτονικά θεωρούνται τα σημεία, πριν και μετά από τις κενές θέσεις, σε αριθμό που καθορίζεται παραμετρικά) και
- 3) η τιμή που προκύπτει από παρεμβολή (linear interpolation) ή γραμμική παλινδρόμηση (linear trend) επί των γειτονικών σημείων.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος ελλειπουσών τιμών σε σύνολα δεδομένων Περιβάλλουσας Ανάλυσης, αντί της αντικατάστασης με προσεγγιστικές τιμές, στην ενότητα αυτή προτείνεται μία διαφορετική προσέγγιση η οποία αποτελεί απλή εφαρμογή των μοντέλων Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή δεδομένα. Η νέα προσέγγιση αυτή αφορά στην αντικατάσταση των ελλειπουσών τιμών με διαστήματα τα οποία αυτά θα ορίζουν το εύρος στο οποίο αναμένεται, με αυξημένη πιθανότητα, να βρίσκεται η πραγματική τιμή που απουσιάζει από το αρχικό σύνολο. Με τον τρόπο αυτό, το αρχικό πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα εκτίμησης άνω και κάτω ορίων για κάθε ελλείπουσα τιμή και το στατιστικό σφάλμα της

αντικατάστασης των τιμών μεταφέρεται στο γραμμικό μοντέλο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης ως ασάφεια, εκφρασμένη με διαστήματα.

Ο υπολογισμός των ορίων για τα ελλείποντα δεδομένα σε ένα πρόβλημα μπορεί να βασισθεί σε διαθέσιμα συναφή δεδομένα (π.χ. αριθμός τιμολογίων-τζιρος, αριθμός υπαλλήλων-σύνολο εργατοωρών), σε στατιστικά στοιχεία για την κατηγορία της μονάδας (μέσος δείκτης παραγωγής ενός βιομηχανικού κλάδου, μέσος αριθμός απασχολούμενων σε μικρομεσαίες επιχειρήσεις του ίδιου κλάδου κλπ) αλλά και σε δεδομένα παλαιότερων χρονικών περιόδων για τις ίδιες μονάδες.

Στην περίπτωση αδυναμίας υπολογισμού των ορίων από άλλα διαθέσιμα συναφή δεδομένα, προτείνεται η εμπειρική εκτίμησή τους από το ίδιο το σύνολο των δεδομένων. Αναλυτικότερα, η υπόθεση ότι μονάδες με μικρές διαφορές στις επιδόσεις τους (γειτονικές μονάδες) αναμένεται να μην διαφέρουν και στις ελλείπουσες τιμές, είναι δυνατόν να οδηγήσει σε εκτίμηση των ορίων αυτών. Η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή των γειτονικών μονάδων στην αντίστοιχη εισροή / εκροή, ορίζει διάστημα τιμών στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η ελλείπουσα τιμή. Για τον προσδιορισμό των γειτονικών μονάδων μπορεί να χρησιμοποιηθούν γνωστές τυπικές μετρικές αποστάσεων, π.χ. Ευκλείδεια απόσταση, ορισμένες επί των διανυσμάτων των μονάδων στα οποία έχουν εξαιρεθεί οι εισροές / εκροές με τις ελλείπουσες τιμές. Το πλήθος των μονάδων των θεωρούμενων ως γειτονικών είναι δυνατόν να καθορισθεί ως ποσοστό επί του συνόλου των μονάδων (το 25% , για παράδειγμα, ορίζει ως γειτονικές το $\frac{1}{4}$ του συνόλου των μονάδων του προβλήματος) και εκτιμάται κατά περίπτωση από το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων.

Το αριθμητικό παράδειγμα του Πίνακα 4.10 που ακολουθεί επεξηγεί τα ανωτέρω. Σε αυτό, για τις μονάδες A2 και A8, εμφανίζονται ελλείπουσες τιμές στη εκροή O4. Στις δύο τελευταίες στήλες έχουν υπολογισθεί οι Ευκλείδειες αποστάσεις των μονάδων A2 και A8 από τις υπόλοιπες μονάδες,

θεωρούμενες ως διανύσματα που περιέχουν όλες τις εισροές και εκροές I1, O1, O2, O3 εκτός της O4.

Πίνακας 4.10 - Επιδόσεις των μονάδων και αποστάσεις των μονάδων με ελλείποντα δεδομένα από τις υπόλοιπες

	I1	O1	O2	O3	O4	Αποστάσεις	
						A2	A8
A1	9,13	7,525	34,114	21,958	3,84	18,28659	16,60397
A2	13,6	8,301	23,27	35,966			33,95029
A3	5,76	10,909	13,392	11,527	4,931	27,62439	35,62189
A4	11,24	16,621	36,817	27,552	9,522	18,14135	20,16345
A5	15,57	22,809	95,776	23,611	12,266	74,99419	50,79123
A6	5,65	1,777	0,156	1,314	39,011	42,90435	50,62957
A7	21,6	15,107	70,958	54,216	10,809	52,12993	48,29239
A8	8,57	7,919	48,688	14,032		33,95029	
A9	6,01	7,066	36,304	5,445	2,936	34,06684	15,30951
A10	8,02	8,858	43,61	13,774	4,274	30,62102	5,199699
A11	9,93	8,999	36,852	20,661	8,151	20,80072	13,67664
A12	7,9	8,278	45,222	6,191	5,327	37,42902	8,606522
A13	5,15	6,763	18,704	10,62	3,54	27,14841	30,39268
A14	6,42	8,984	13,6	12,319	3,752	26,54634	35,21163
A15	5,94	7,686	25,906	8,242	2,483	28,88983	23,65407

Εάν ορισθούν ως γειτονικές μονάδες των A2 και A8 τρεις (ποσοστό 25% επί του συνόλου) από τις λοιπές μονάδες του προβλήματος, σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 4.10, αυτές θα είναι οι A1, A4, A11 και οι A10, A11, A12 αντιστοίχως επειδή έχουν τις μικρότερες αποστάσεις προς τις A2 και A8, αντιστοίχως. Ως προς την εκροή O4, οι ελάχιστες και μέγιστες επιδόσεις των γειτονικών μονάδων ορίζουν τα διαστήματα [3,84 8,151], [4,274 8,151] στα οποία πιθανολογείται ότι θα βρίσκονται οι πραγματικές, άγνωστες τιμές των μονάδων A2 και A8 αντιστοίχως. Εάν στη θέση των ελλειπόντων τιμών των στοιχείων του Πίνακα 4.10 τεθούν τα ανωτέρω διαστήματα, τα δεδομένα για τις μονάδες A2 και A8 διαμορφώνονται ως εξής :

	Π	O1	O2	O3	O4
A2	13,6	8,301	23,27	35,966	[3,84 8,151]
A8	8,57	7,919	48,688	14,032	[4,274 8,151]

Το σχετικό πρόβλημα Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή δεδομένα, επιλυόμενο, παρέχει τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.11.

Πίνακας 4.11 - Τιμές αποδοτικότητας των μονάδων στο σύνολο των δεδομένων με τις ελλείπουσες τιμές για τις μονάδες A2, A8

Μονάδα	Αποδοτικότητα με ακριβείς προσεγγιστικές τιμές			h_j^*	
		h_j^L			
A1	1	1	1	E++	
A2	1	1	1	E++	
A3	1	1	1	E++	
A4	1	1	1	E++	
A5	1	1	1	E++	
A6	1	1	1	E++	
A7	1	1	1	E++	
A8	1	0,98622	1	E+	
A9	0,982001	0,982001	1	E+	
A10	0,986107	0,983705	1	E+	
A11	0,949695	0,914855	0,972524	E-	
A12	0,955644	0,93466	0,97812	E-	
A13	0,920256	0,920256	0,925257	E-	
A14	0,847458	0,847458	0,847458	E-	
A15	0,833919	0,833919	0,844652	E-	

Στην πρώτη στήλη του Πίνακα 4.11 παρουσιάζεται προς σύγκριση, η αποδοτικότητα όπως έχει εκτιμηθεί από μοντέλο με ακριβή δεδομένα στο οποίο οι ελλείπουσες τιμές έχουν αντικατασταθεί με τον μέσο όρο 8,3747 όλων των υπολοίπων μονάδων, προσέγγιση συνήθης στη ανάλυση δεδομένων. Στις υπόλοιπες στήλες εμφανίζονται τα αποτελέσματα των μοντέλων Περιβάλλουσας Ανάλυσης για μη ακριβή δεδομένα. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τον πίνακα αποτελεσμάτων 4.11 είναι ότι οι μονάδες A2 και A8 παραμένουν αποδοτικές και στις δύο περιπτώσεις αντικατάστασης των ελλειπόν τιμών. Όμως η μονάδα A2 είναι σε όλες τις

περιπτώσεις αποδοτική (ανήκει στο σύνολο E^{++}) ενώ η μονάδα A8 παραμένει αποδοτικές για μερικές τιμές του διαστήματος $[4,274 \quad 8,151]$ οι οποίες την ευνοούν.

Τονίζεται ότι η χρήση του μοντέλου με δεδομένα διαστήματος έχει πρακτική αξία όταν το πλήθος των ελλειπουσών τιμών στον πίνακα επιδόσεων δεν είναι οριακά μικρό. Στην περίπτωση που απουσιάζει μία μόνο τιμή σε όλο τον πίνακα, το εύρος της αποδοτικότητας της αντίστοιχης σε αυτή μονάδας είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από το μοντέλο με ακριβή δεδομένα σε δύο επιλύσεις : μία για την δυσμενή περίπτωση (άνω όριο για τις εισροές, κάτω όριο για τις εκροές) και μία για την ευνοϊκή περίπτωση (κάτω όριο για τις εισροές, άνω όριο για τις εκροές).

Βιβλιογραφία

- Boljuncic V. (1999), "A Note on Robustness of the Efficient DMUs in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, vol. 112, no. 1, pp. 240-244
- Camanho, A.S., Dyson, R.G. (1999), "Efficiency, size, benchmarks and targets for bank es: an application of data envelopment analysis", *Journal of the Operational Research Society* 50, pp.903-915.
- Charnes A. and L. Neralic(1995), "Sensitivity Analysis in Data Envelopment Analysis for the Case of Non-discretionary Inputs and Outputs", *Glasnik Matemativ cki. Serija III*, vol. 30 (50), no. 2, pp. 359-371
- Holm Sture (1999), "Estimation and Multiple Comparisons when there are missing values with an application in Immunology", *Biometrical Journal* Vol. 40, 3 269-279
- Kao C, Liu S-Tai (2000), "Data Envelopment Analysis with missing data : an application to University libraries in Taiwan", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 51, 897-905
- Laaksonen Seppo (2000), "Regression-based nearest neighbour hot decking", *Computational Statistics* Vol.15 1 pp.65-71
- Liu W.Z., A.P.White, S.G.Thompson, M.A.Bramer (1998), "Techniques for Dealing with missing values in classification", *Lecture Notes in Computer Science* (Springer) 1385
- Noack Thomas, Rainer Schlittgen (2000) "Nonparametric estimation of missing values in time series", *Allgemeines Statistishes Archiv*, Vol. 84 1 pp.23-32
- Schefczyk M. (1993), "Operational Performance of Airlines - An Extension of Traditional Measurement Paradigms", *Strategic Management Journal*, vol. 14, no. 4, pp. 301-317
- Zhu J., (1996) "Robustness of the Efficient DMUs in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, vol. 90, no. 3, pp. 451-460.

Κεφάλαιο 5

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση για την κατάταξη προϊόντων ως προς ποιοτικούς δείκτες

Στο κεφάλαιο αυτό αξιοποιούνται οι δυνατότητες που παρέχει η Περιβάλλουσα Ανάλυση με ασαφή δεδομένα προκειμένου να εκτιμηθούν δείκτες ποιοτικής αξιολόγησης προϊόντων. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται μία εφαρμογή σύγκρισης και της κατάταξης των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας στην Ελληνική αγορά ως προς το κριτήριο της «συμφέρουσας αγοράς». Στη συνέχεια, η ιδέα αυτή της ποιοτικής κατάταξης προϊόντων επεκτείνεται και παρουσιάζεται ένα πλαίσιο συστήματος υποστήριξης αποφάσεων με την ονομασία «*εικονικός σύμβουλος επιλογής*» για την υποβοήθηση των καταναλωτών στην επιλογή προϊόντων στο διαδίκτυο.

5.1 Κατάταξη προϊόντων με βάση το κριτήριο της συμφερότερης αγοράς

Ήδη από τις πρώτες θεωρίες που διατυπώθηκαν από το χώρο της ψυχολογίας [Fishbein (1967)] και της οικονομίας [Lancaster (1966)] σχετικά με τη συμπεριφορά του καταναλωτή, γίνεται αντιληπτό ότι η αξιολόγηση και επιλογή των προϊόντων, είναι ενέργεια σύνθετη και πραγματοποιείται σε διαδοχικές φάσεις. Σε ένα πρώτο στάδιο, οι καταναλωτές παρατηρούν τα χαρακτηριστικά των ανταγωνιστικών προϊόντων και διαμορφώνουν την αντίληψη τους (perception) σχηματίζοντας την συνολική “εικόνα του προϊόντος” (brand image). Η εικόνα αυτή αναπαριστάται τεχνικά ως ένα σημείο ενός πολυδιάστατου χώρου με διαστάσεις τα κυριότερα ποιοτικά ή φυσικά χαρακτηριστικά του, αναλόγως της κατηγορίας του προϊόντος. Η

σχετική θέση του σημείου αυτού στο χώρο προσδιορίζει και την σχέση του προϊόντος με τα ανταγωνιστικότητά του. Στη συνέχεια, σε ένα επόμενο στάδιο, με βάση την σχηματισμένη αντίληψη, οι καταναλωτές καθορίζουν την διάθεσή τους (attitude) απέναντι στα προϊόντα και μετατρέπουν την διάθεση αυτή σε προτίμηση. Καθοριστικός παράγοντας για τη διαμόρφωση των προτιμήσεων αποτελεί η προσωπικότητα, το σύστημα αξιών και ο τρόπος ζωής του καταναλωτή (VALS, values and life style).

Οι καταναλωτές βασιζόμενοι στις προσωπικές τους προτιμήσεις αξιολογούν συνήθως με διαφορετικό τρόπο τα προϊόντα και ομαδοποιούνται σε ομοιογενή τμήματα της αγοράς (market segments), σύμφωνα με τις προτιμήσεις αυτές. Σε αντίθεση με αυτή την προσωπική υποκειμενική αξιολόγηση των προϊόντων, θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί μία άλλη περισσότερο αντικειμενική, βασιζόμενη σε ποσοτικές μετρήσεις των πλέον σημαντικών τεχνικών και άλλων χαρακτηριστικών του. Μία τέτοια τεχνική αξιολόγηση θα ήταν χρήσιμη τόσο στους ειδικούς του μάρκετινγκ όσο και στους καταναλωτές. Για το λόγο αυτό, διάφοροι διεθνείς οργανισμοί ελέγχου και πιστοποίησης, ενώσεις καταναλωτών αλλά κυρίως τα ειδικά για κάθε κατηγορία προϊόντων (αυτοκίνητα, φωτογραφικές μηχανές, υπολογιστές, συσκευές Hi-Fi κλπ) έντυπα και περιοδικά, επιχειρούν να θέσουν το γενικό πλαίσιο αξιολόγησης (benchmarks) και στη συνέχεια να βαθμολογήσουν τα προϊόντα ως προς τα επιμέρους κριτήρια που έχουν τεθεί. Τούτο είναι περισσότερο εφικτό στα βιομηχανικά προϊόντα στα οποία τα τεχνικά και φυσικά χαρακτηριστικά (διαστάσεις, ταχύτητα, βάρος, κλπ) μετρώνται απ' ευθείας σε κλίμακες πραγματικών αριθμών.

Στις συγκριτικές δοκιμές των προϊόντων, μεταξύ των δεικτών που ορίζονται για να μετρήσουν την γενική τους επίδοση, ο δείκτης «απόδοση προς τιμή» (value for money) ή αλλιώς ο δείκτης «συμπερότερης αγοράς» αποτελεί το πιο συνηθισμένο ποιοτικό κριτήριο κατάταξης των προϊόντων. Με δεδομένο ότι η τιμή αγοράς ενός προϊόντος είναι κατά προσέγγιση γνωστή, για την ποσοτική εκτίμηση του δείκτη αυτού απαιτείται να

εκφρασθεί ποσοτικά η «αξία» που αντιπροσωπεύει ένα προϊόν και που εκφράζει τη συνολική ωφέλεια που έχουν οι καταναλωτές από τη χρήση του. Η χρησιμότητα ενός προϊόντος αναλύεται στη αξία που έχουν τα επιμέρους διάφορα χαρακτηριστικά του προϊόντος. Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορεί να είναι φυσικά (διαστάσεις, βάρος κλπ), τεχνικά (διάφορες επιδόσεις, κατανάλωση πόρων κλπ) αλλά και ποιοτικά (σχεδίαση, εμφάνιση, αξιοπιστία και αντοχή στη χρήση, οικονομία κλπ.).

Η βαθμολογία των προϊόντων στα επιμέρους χαρακτηριστικά για την ποσοτική εκτίμηση της «αξίας» που αυτά αντιπροσωπεύουν, συνήθως τίθεται από ειδικούς εμπειρογνώμονες και τεχνικούς που υποβάλλουν τα προϊόντα σε συγκριτικές δοκιμές. Πρόσφατα όμως, με την ραγδαία ανάπτυξη του Internet, οι καταναλωτές μέσω του μηχανισμού διαρκούς καταγραφής απόψεων των καταναλωτών (online reviews) έχουν τη δυνατότητα σε ειδικές ηλεκτρονικές σελίδες¹ να εκφράζουν ελεύθερα τις προτιμήσεις τους αλλά και τον βαθμό ικανοποίησης από τη χρήση των προϊόντων.

Όμως οι κρίσεις αυτές δεν είναι άμεσα αξιοποιήσιμες, επειδή συνήθως δεν εκφράζονται σε τυποποιημένη κλίμακα μέτρησης και δεν θεωρούνται ως απολύτως αντικειμενικές και συνεπώς αξιόπιστες. Η χρήση στατιστικών ή άλλων ποσοτικών μεθόδων επί των δεδομένων των επιδόσεων και των τεχνικών χαρακτηριστικών των προϊόντων, εναλλακτικά, θα μπορούσε να προσφέρει την απαραίτητη ποσοτική έκφραση της συνολικής αξίας των προϊόντων.

Στη ενότητα αυτή προτείνεται η εφαρμογή της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων για τον υπολογισμό του δείκτη συμφερότερης αγοράς των προϊόντων.

¹ Οι σπουδαιότερες ηλεκτρονικές σελίδες αξιολόγησης προϊόντων είναι οι www.CNET.com, www.Epinions.com, www.ConsumerReview.com, www.Deja.com, www.Productopia.com ενώ μία συγκριτική τους παρουσίαση γίνεται στο www.usnews.com (περιοδικό *US News issue 207*).

Η ιδέα της αποδοτικότητας ως του μέτρου της εκμετάλλευσης εισροών για την παραγωγή εκροών επεκτείνεται στην περίπτωση των προϊόντων για να ορίσει την ανταπόδοση και την ωφέλεια που εισπράττει ο καταναλωτής από το προϊόν έναντι των χρημάτων που δίνει για την αγορά του.

Υπό αυτή την οπτική γωνία και με όρους Περιβάλλουσας Ανάλυσης, η τιμή του προϊόντος ορίζεται ως η μοναδική εισροή (προς ελαχιστοποίηση) και η αξία του, εκφρασμένη ως συνολικό σταθμισμένο άθροισμα των ποσοτικών εκφράσεων των επικρατέστερων χαρακτηριστικών των προϊόντων, αποτελεί τις εκροές. Με τη διαμόρφωση αυτή επιδιώκεται να εντοπισθούν τα προϊόντα εκείνα, χαρακτηριζόμενα ως αποδοτικά, τα οποία προσφέρουν υψηλή αξία σε σύγκριση με την τιμή που διατίθενται. Η ιδέα αυτή της εφαρμογής της Περιβάλλουσας Ανάλυσης για την σύγκριση των προϊόντων αναφέρεται μόνο σε μία ερευνητική εργασία [Doyle, Green (1991)] η οποία αξιολογεί σύνολο εκτυπωτών της αγοράς.

Εμβαθύνοντας περισσότερο στο πρόβλημα της ποσοτικής έκφρασης της συνολικής αξίας ενός προϊόντος, εύκολα διαπιστώνεται ότι τα περισσότερα προς βαθμολόγηση χαρακτηριστικά επιμέρους κριτήρια αξιολόγησης των προϊόντων είναι ποιοτικά και ως τέτοια εκφράζονται μόνο σε κλίμακα διάταξης. Επίσης σε πολλές περιπτώσεις τα τεχνικά χαρακτηριστικά αποδίδονται καλύτερα με δεδομένα διαστημάτων εκφράζοντας μια αισιόδοξη και μια απαισιόδοξη εκδοχή της επίδοσης του προϊόντος (πχ. ελάχιστη και μέγιστη σύνθεση χαρακτηριστικών ενός προϊόντος, κατανάλωση καυσίμου ενός αυτοκινήτου στην πόλη και σε αυτοκινητόδρομο κλπ). Επιπλέον η τιμή πώλησης, ακόμα και για τυποποιημένα προϊόντα δεν μπορεί να θεωρηθεί σταθερή δεδομένου ότι λόγω τιμολογιακής πολιτικής, εκπτώσεων κλπ., κυμαίνεται μεταξύ μίας ελάχιστης και μέγιστης τιμής που καταγράφεται στην αγορά. Για τους λόγους αυτούς, η χρήση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης στην εκδοχή της για ασαφή

δεδομένα προσεγγίζει πιο ρεαλιστικά το πρόβλημα της σύγκρισης και αξιολόγησης προϊόντων με βάση το κριτήριο της συμφέρουσας αγοράς.

Στην ενότητα που ακολουθεί, η ανωτέρω ιδέα εφαρμογής της Περιβάλλουσας Ανάλυσης υλοποιείται για την κατάταξη των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας στην Ελλάδα.

5.2 Αξιολόγηση των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας της Ελληνικής αγοράς

Σε εφαρμογή της ανωτέρω προσέγγισης για την αξιολόγηση προϊόντων μέσω της Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ασαφή δεδομένα, στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η ειδική περίπτωση αξιολόγησης και κατάταξης πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας της Ελληνικής αγοράς.

Ένας σημαντικός σταθμός στην πορεία εξέλιξης και διάδοσης της κινητής τηλεφωνίας ήταν η εισαγωγή της καρτοκινητής τηλεφωνίας. Ο τρόπος αυτός της κινητής τηλεφωνίας βασίζεται στην ιδέα της απουσίας συμβολαίων και μηνιαίας χρέωσης (πάγιο, αξία τηλεφωνημάτων). Ο συνδρομητής όταν αγοράζει ένα πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας πληρώνει εφάπαξ τη χρηματική αξία που αντιστοιχεί σε τρία διαφορετικά μέρη του προϊόντος : στη συσκευή του κινητού τηλεφώνου, στην κάρτα σύνδεσης (SIM) με την εταιρεία παροχής υπηρεσιών κινητής τηλεφωνίας και στον αρχικό χρόνο ομιλίας ο οποίος εκφράζεται με χρηματική αξία. Με την ανάλωση του ποσού του αρχικού χρόνου ομιλίας, ο συνδρομητής καλείται να ανανεώσει τον χρόνο χρήσης, προκαταβάλλοντας την αξία για νέο χρόνο ομιλίας.

Η εξάπλωση της καρτοκινητής τηλεφωνίας ήταν ραγδαία τα τελευταία χρόνια, όχι μόνο στην Ελλάδα αλλά και σε ολόκληρο τον κόσμο. Πριν από δέκα χρόνια οι κάτοχοι κινητών τηλεφώνων σε όλο τον κόσμο έφθαναν μόλις

τα 11 εκατομμύρια. Το 1999 ο αριθμός αυτός ανέρχεται σε 400 περίπου εκατομμύρια τη στιγμή που οι χρήστες υπολογιστών παγκοσμίως φθάνουν μόλις τα 180 εκατομμύρια. Κατά το έτος 2004² ο αριθμός των χρηστών κινητής τηλεφωνίας αναμένεται να φθάσει το 1 δισεκατομμύριο και να ξεπεράσει ακόμα και τον αριθμό των χρηστών σταθερών τηλεφώνων.

Με παλαιότερα στοιχεία³, ο συνολικός ρυθμός ανάπτυξης της κινητής τηλεφωνίας έφθανε παγκοσμίως στο 67% ενώ το μισό του ποσοστού αυτού αναφέρεται στη καρτοκινητή τηλεφωνία. Στην Ελλάδα, διάφορες πηγές⁴ αναφέρουν ότι οι κάτοχοι κινητών τηλεφώνων από το 1999 ως σήμερα έχουν διπλασιασθεί φθάνοντας τα 5,7 εκατομμύρια περίπου. Κατά το έτος 2001 έχουν πραγματοποιηθεί άνω των 2 εκατ. νέες συνδέσεις, ενώ οι διακοπές συμβολαίων φθάνουν τις 800.000 περίπου. Οι εταιρείες παροχής υπηρεσιών κινητής τηλεφωνίας που δραστηριοποιούνται στην Ελλάδα είναι η Panafon, η Telestet και η Cosmote. Τα μερίδια αγοράς τους για το έτος 2000, ανά είδος υπηρεσιών καθώς και ο αριθμός συνδρομητών, παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1 και στα διαγράμματα που ακολουθούν.

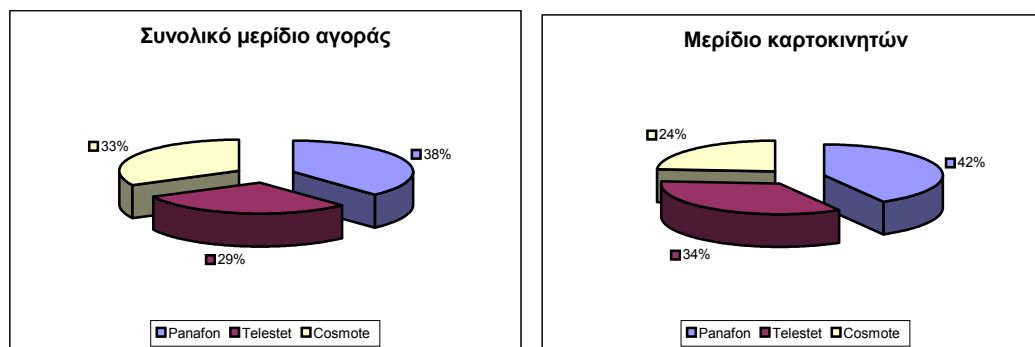
Πίνακας 5.1 - Στοιχεία για την αγορά της κινητής τηλεφωνίας στη Ελλάδα

Εταιρεία	Αριθμός Συνδρομητών	Αριθμός χρηστών καρτοκινητής τηλεφωνίας	Σύνολο
Panafon	783123 (33,31%)	1273822 (41,79%)	2056945 (38,10%)
Telestet	1031759 (22,81%)	1043845 (34,25%)	1580107 (29,27%)
Cosmote	536262(43,88%)	730317 (23,96%)	1762076 (32,64%)
Σύνολο	2,846,641	3,047,984	5,399,128

² Περιοδικό *ECONOMIST (US)* 9 Οκτ. 1999 σ353 ι8140 p3

³ Στοιχεία της εταιρείας Dataquest Inc για το 1998, Εφημερίδα *Ισοτιμία*, 17-18 Ιουλίου 1999

⁴ Επίσημες ιστοσελίδες των εταιρειών www.panafon.gr, www.cosmote.gr, www.telestet.gr, περιοδικά «Connecting», «Κινητή τηλεφωνία και τηλεπικοινωνίες», άλλες πηγές στο διαδίκτυο www.mobile.gr



Η επιτυχία της καρτοκινητής τηλεφωνίας και η ραγδαία ανάπτυξή της οφείλεται σε πολλούς παράγοντες. Η αποδέσμευση του καταναλωτή από τα συμβόλαια και τη μηνιαία χρέωση και το σχετικά χαμηλό κόστος, διέδωσε την κινητή τηλεφωνία σε κοινωνικά στρώματα και ομάδες πέραν των επαγγελματιών οι οποίοι αποτελούν παραδοσιακά την βασική κατηγορία συνδρομητών της κινητής τηλεφωνίας. Έτσι, νέα τμήματα της αγοράς (νέοι, νοικοκυρές, συνταξιούχοι, μαθητές κλπ) χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις και για περιορισμένη χρήση του κινητού, υιοθέτησαν τον νέο αυτό τρόπο κινητής τηλεφωνίας. Ένας σημαντικός παράγοντας που ερμηνεύει τη ραγδαία διάδοση της καρτοκινητής τηλεφωνίας, είναι η τυποποίηση της προσφοράς σε ενιαίο πακέτο το οποίο επιτρέπει στον καταναλωτή, χωρίς επιπρόσθετη τεχνική βοήθεια, να εγκαταστήσει την κάρτα σύνδεσης στο κινητό τηλέφωνο και να ενεργοποιήσει μόνος του τη σύνδεση. Με την τυποποίηση αυτή η καρτοκινητή τηλεφωνία διατίθενται πλέον από πολύ περισσότερα σημεία πώλησης (καταστήματα ηλεκτρικών-ηλεκτρονικών συσκευών, supermarket, περίπτερα κλπ.) και όχι πλέον μόνο από τα εξειδικευμένα καταστήματα πώλησης ηλεκτρονικών ειδών.

Στην παρούσα εφαρμογή, μέσω της Περιβάλλουσας Ανάλυσης με ασαφή δεδομένα επιχειρείται να αξιολογηθούν τα πακέτα καρτοκινητής τηλεφωνίας ως προς το κριτήριο της «συμφέρουσας αγοράς» και να εντοπισθούν εκείνα τα οποία αποτελούν τις συμφέρουσες επιλογές (best buys).

- *Το πρόβλημα της αξιολόγησης των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας.*

Τα πακέτα καρτοκινητής τηλεφωνίας συνδυάζουν σε μία συσκευασία τρία συμπληρωματικά προϊόντα : τη συσκευή του κινητού τηλεφώνου, τη κάρτα σύνδεσης στο δίκτυο της εταιρείας παροχής υπηρεσιών κινητής τηλεφωνίας καθώς και τον αρχικό χρόνο χρήσης. Τα μέρη αυτά αποτελούν και το αντικείμενο της αξίας των χρημάτων που πληρώνει ο καταναλωτής όταν αγοράζει πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας. Η αξιολόγηση τους, συνδυαζόμενη με την τιμή πώλησης του πακέτου, καταδεικνύει την συνολική αξία της προσφοράς. Υπό την προϋπόθεση απουσίας προσωπικών προτιμήσεων, η αξία τους αποδίδεται μόνο με ασαφή δεδομένα. Συγκεκριμένα,

- η τιμή πώλησής τους δεν είναι σταθερή σε όλα τα σημεία πώλησης αλλά μεταβάλλεται, από μία ελάχιστη σε μία μέγιστη τιμή. Η διαφορά μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης τιμές σε μερικές περιπτώσεις είναι σημαντική για τον καταναλωτή,
- η αξία του κινητού τηλεφώνου που περιλαμβάνεται στη συσκευασία, ως ποιοτική έννοια, αποδίδεται με κλίμακα διάταξης (άριστο, πολύ καλό, καλό, μέτριο κλπ) η οποία είναι πλησιέστερη στον τρόπο με τον οποίο οι καταναλωτές αξιολογούν τα προϊόντα,
- η αποτίμηση του αρχικού χρόνου ομιλίας δεν εξαρτάται μόνον από την ονομαστική αξία των χρημάτων που αντιπροσωπεύει αλλά και από το πόσο χρεώνει η εταιρεία κινητής τηλεφωνίας την μονάδα συνομιλίας (π.χ. το ένα δευτερόλεπτο). Δεδομένου ότι οι εταιρείες παροχής υπηρεσιών κινητής παρέχουν στους καταναλωτές δυνατότητα επιλογής προγραμμάτων χρέωσης κυρίως αναλόγως της χρονικής ζώνης εντός της οποίας

πραγματοποιούν τις τηλεφωνικές κλήσεις, η διάρκεια του αρχικού χρόνου ομιλίας μεταβάλλεται μεταξύ μιας ελάχιστης και μέγιστης τιμής αναλόγως του τιμολογίου χρέωσης του προγράμματος το οποίο έχει επιλεγεί,

- η έκταση, η πληρότητα και η ποιότητα των παρεχομένων υπηρεσιών μέσω της εταιρείας κινητής τηλεφωνίας η οποία εμμέσως επιλέγεται με την αγορά του πακέτου, προφανώς μπορεί να εκφρασθεί μόνο σε ποιοτική κλίμακα.

Για την εκτίμηση του δείκτη συμφερότερης αγοράς, εκφράζοντας τα ανωτέρω με όρους Περιβάλλουσας Ανάλυσης, θεωρούμε ότι κάθε πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας αποτελεί μονάδα προς αξιολόγηση σε ένα πρόβλημα στο οποίο ως μοναδική εισροή ορίζεται η τιμή πώλησης και ως εκροές η ανάλωση του χρόνου ομιλίας, οι υπηρεσίες της εταιρείας κινητής τηλεφωνίας και η αξιολόγηση της συσκευής του κινητού τηλεφώνου. Το μοντέλο ασαφών δεδομένων που αντιστοιχεί την ανωτέρω σύνθεση εισροών / εκροών έχει ως εξής :

Πίνακας 5.2 - Οι εισροές / εκροές του μοντέλου Περιβάλλουσας Ανάλυσης για την αξιολόγηση της συμφερότερης αγοράς πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας

Εισροή		Εκροές		
	Τιμή Πώλησης (I)	Αρχικός χρόνος ομιλίας (O1)	Προσφερόμενες Υπηρεσίες Κινητής Τηλεφωνίας (O2)	Συσκευή Κινητού τηλεφώνου (O3)
Τύπος δεδομένων	Διάστημα τιμών	Διάστημα τιμών	Δεδομένα Διάταξης	Δεδομένα Διάταξης

Από τις εισροές / εκροές του Πίνακα 5.2 η τιμή πώλησης (I) και ο αρχικός χρόνος ομιλίας (O1) προκύπτουν από άμεση παρατήρηση ενώ οι

προσφερόμενες υπηρεσίες (O2) και η συσκευή κινητού τηλεφώνου (O3) μπορούν είτε να ληφθούν απ' ευθείας από δημοσιευμένα στοιχεία (έρευνες καταγραφής των απόψεων των καταναλωτών, συγκριτικές δοκιμές κινητών τηλεφώνων κλπ) είτε να εκτιμηθούν με άλλες διαδικασίες ανάλυσης δεδομένων.

Για την πραγματοποίηση της παρούσας μελέτης και τη συλλογή των δεδομένων, διενεργήθηκε έρευνα στην Ελληνική αγορά κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ Σεπτεμβρίου και Οκτωβρίου 2000. Σε αυτήν εντοπίστηκαν σε διάφορα σημεία πώλησης 42 πακέτα καρτοκινητών που ακολουθούν τα προγράμματα καρτοκινητής τηλεφωνίας Panafon 'ala Carte, Telestet B-Free και COSMOKAPTA των αντιστοιχών εταιρειών. Ως διαφορετικές περιπτώσεις προσμετρήθηκαν εκείνες που είχαν την ίδια συσκευή, την ίδια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας αλλά διαφορετικό αρχικό χρόνο. Τα πακέτα αυτά αφορούν 29 συσκευές τηλεφώνων διαφορετικών διαστάσεων, βάρους τεχνολογίας και δυνατοτήτων.

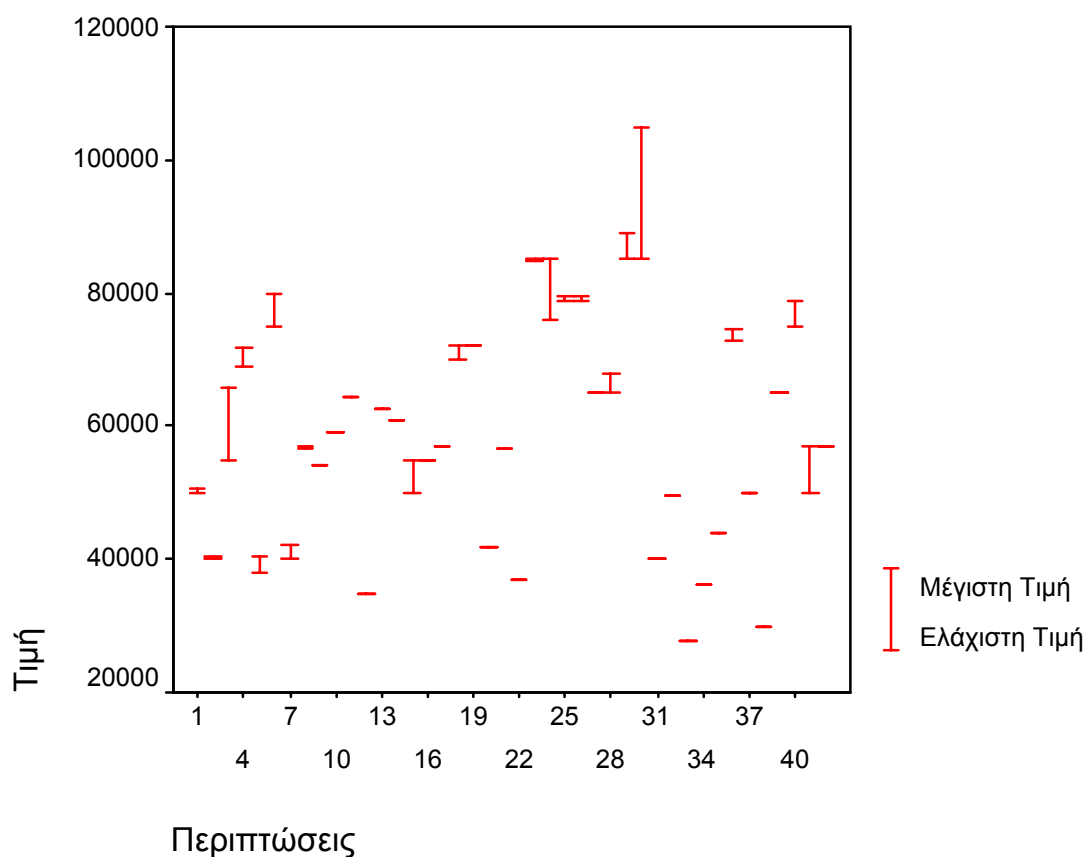
□ *Διαμόρφωση του πίνακα επιδόσεων*

Για το ανωτέρω σύνολο πακέτων της Ελληνικής αγοράς διαμορφώθηκε ο αντίστοιχος πίνακας επιδόσεων με ασαφή δεδομένα επί του οποίου τελικώς εφαρμόσθηκε το μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης. Ειδικά για τις εκροές οι οποίες εκφράζονται σε ποιοτική κλίμακα (υπηρεσίες, κινητό τηλέφωνο) πραγματοποιήθηκε ανάλυση σε επιμέρους χαρακτηριστικά τα οποία αποτιμήθηκαν και στη συνέχεια συνετέθησαν με στατιστική ανάλυση και εμπειρικό τρόπο ώστε να προκύπτει η τελική βαθμολογία της επίδοσής τους. Αναλυτικά, για την εισροή και τις εκροές του πίνακα 5.2 η διαμόρφωση των τιμών τους έχει ως εξής :

* Τιμή πώλησης (I)

Η τιμή πώλησης των πακέτων κυμαίνεται από τις 27900 έως τις 105000 δρχ. Σε πολλές περιπτώσεις, για το ίδιο πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας παρατηρήθηκαν αποκλίσεις μεταξύ των διαφορετικών σημείων πώλησης της αγοράς οι οποίες βρέθηκαν να είναι μέχρι και της τάξεως των 20000 δρχ. Το διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζει το εύρος των τιμών πώλησης για τα υπό αξιολόγηση πακέτα.

Διάγραμμα εύρους τιμών των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας.



** Αρχικός χρόνος ομιλίας (Ο1)*

Η τιμολογιακή πολιτική των εταιρειών κινητής τηλεφωνίας λόγω ανταγωνισμού μεταβάλλεται συχνά και εκφράζεται μέσω τυποποιημένων προγραμμάτων χρήσης. Σε αυτά, η χρέωση περιλαμβάνει τις τηλεφωνικές κλήσεις, την αποστολή γραπτών μηνυμάτων, την μεταφορά δεδομένων, τις υπηρεσίες προσωπικού τηλεφωνητή κλπ. και διαφοροποιείται αναλόγως της χρονικής περιόδου (ώρες αιχμής) που πραγματοποιείται η κλήση, αναλόγως της διάρκειας κλήσης κ.λ.π.

Ειδικά κατά την περίοδο διενέργειας της μελέτης αυτής, τα τυποποιημένα προγράμματα καρτοκινητής τηλεφωνίας παρουσίαζαν σημαντικές διαφορές μόνο ως προς την χρέωση των κλήσεων ενώ μόνο μια εταιρεία προσέφερε στους καταναλωτές δυνατότητα επιλογής μεταξύ περισσότερων του ενός τυποποιημένων προγραμμάτων συνδρομής. Ο αρχικός χρόνος ομιλίας που συνόδευε κάθε πακέτο αντιστοιχούσε σε αξία 1000, 6000, 10000 ή 12000 δρχ. Ο χρόνος διάρκειας της αξίας αυτής για έναν τυπικό μέσο καταναλωτή, εξαρτάται από το πρόγραμμα χρέωσης και μεταβάλλεται μεταξύ μιας περιορισμένης διάρκειας που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη δυνατή χρέωση και μιας αυξημένης διάρκειας όταν η χρέωση γίνεται με το πλέον ευνοϊκό για τον καταναλωτή τιμολόγιο. Από την διαίρεση του αρχικού χρόνου ομιλίας με το ελάχιστο και μέγιστο κόστος κλήσης ανά δευτερόλεπτο που προβλέπουν τα τυποποιημένα προγράμματα χρήσης, προέκυψαν για κάθε περίπτωση πακέτου διαστήματα τα οποία εκφράζουν τον χρόνο σε δευτερόλεπτα που αναμένεται να διαρκέσει ο προσφερόμενος αρχικός χρόνος στην καλύτερη και χειρότερη περίπτωση χρέωσης του καταναλωτή. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η ελάχιστη και μέγιστη διάρκεια που εκτιμήθηκε ήταν 434,78 και 5217,39 δευτερόλεπτα αντιστοίχως.

** Προσφερόμενες υπηρεσίες (O2)*

Η αξιοπιστία, η ποιότητα και η ποικιλία των παρεχομένων υπηρεσιών από την εταιρεία κινητής τηλεφωνίας καθώς επίσης και η επάρκεια κάλυψης του δικτύου της (ένταση σήματος, καθαρότητα ήχου κλπ) αποτελούν τα επιμέρους στοιχεία τα οποία ο καταναλωτής αξιολογεί όταν επιλέγει πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας. Από αυτά, η κάλυψη του δικτύου θεωρείται ότι αποτελεί το πιο σημαντικό κριτήριο για τους καταναλωτές ⁵.

Για την αξιολόγηση των εταιρειών κινητής τηλεφωνίας της Ελληνικής αγοράς σύμφωνα με τα ανωτέρω κριτήρια, διαμορφώθηκε ο Πίνακας 5.3 ο οποίος αναφέρει τα ποσοστά κάλυψης του αστικού πληθυσμού, του χερσαίου και θαλάσσιου χώρου καθώς επίσης και το ποσοστό των παρεχομένων από αυτές υπηρεσιών φωνής και δεδομένων, συγκριτικά με τυποποιημένους διεθνείς καταλόγους υπηρεσιών (βλ. Παράρτημα). Τα κριτήρια αυτά επιτυγχάνουν αντικειμενική και περισσότερο τεχνική σύγκριση των εταιρειών.

Πίνακας 5.3 - Επιδόσεις των εταιρειών κινητής τηλεφωνίας ⁶.

	E1	E2	E3
1. Ποσοστό κάλυψης αστικών περιοχών (%)	98	95	95
2. Ποσοστό κάλυψης επί του χερσαίου χώρου (%)	75	72	73
3. Ποσοστό κάλυψης επί του θαλάσσιου χώρου (%)	88	85	85
4. Υπηρεσίες επικοινωνιών (%)	77	74	70
5. Υπηρεσίες δεδομένων (%)	88	55	66
Κατάταξη	1	2	2

⁵ περιοδικό PC World, Αύγουστος 2000, www.pcworld.com

⁶ Οι τρεις εταιρείες κωδικοποιήθηκαν και παρουσιάζονται με τυχαία σειρά.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 5.3 προκύπτει ότι η εταιρεία E1 υπερέχει έναντι των άλλων δύο οι οποίες δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφοροποίηση στις επιδόσεις τους, θεωρούμενες ως ισοδύναμες. Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή ορίζεται η ποιοτική κατάταξη των εταιρειών, όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή του ανωτέρω πίνακα. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από την επίλυση απλού γραμμικού μοντέλου στο οποίο η συνολική επίδοση της εταιρείας προκύπτει ως σταθμισμένο άθροισμα των επιμέρους χαρακτηριστικών της με περιορισμό τέτοιο ώστε να αποδίδεται μεγαλύτερη σημασία στην κάλυψη του δικτύου της.

** Οι συσκευές κινητών τηλεφώνων (O3).*

Η τεχνολογία των κινητών τηλεφώνων αναπτύσσεται ραγδαία. Σήμερα, εμφανίζεται στο προσκήνιο η «τρίτη γενεά» κινητών τηλεφώνων η οποία χαρακτηρίζεται από τις περιορισμένες διαστάσεις και το βάρος των συσκευών, τις δυνατότητες διαφοροποίησης της εμφάνισης σύμφωνα με το προσωπικό στυλ του χρήστη αλλά κυρίως από τις δυνατότητες πρόσβασης στο Internet (πρωτόκολλο WAP) καθώς και την οργάνωση των προσωπικών πληροφοριών του καταναλωτή. Κατά την εμφάνιση των κινητών τηλεφώνων της «πρώτης γενεάς» (περίπου στο 1990) η τεχνολογία ήταν αναλογική, ενώ ακολούθησε η ψηφιακή τεχνολογία ως «δεύτερη γενεά».

Η αξιολόγηση των συσκευών κινητών τηλεφώνων είναι εξαιρετικά δύσκολη δεδομένου ότι τα κινητά τηλέφωνα σχεδιάζονται, όπως άλλωστε όλα τα προϊόντα, ώστε να ικανοποιούν εντελώς διαφορετικές κατηγορίες καταναλωτών (επαγγελματίες, νέοι, χρήστες που απαιτούν αντοχή της συσκευής σε δύσκολες συνθήκες, οι χρήστες που επιζητούν ταυτόχρονα την οργάνωση των προσωπικών τους πληροφοριών κλπ.) οι οποίοι με τις προσωπικές τους εκτιμήσεις αξιολογούν με εντελώς διαφορετικό τρόπο τα τεχνικά ή άλλα χαρακτηριστικά. Οι συσκευές καρτοκινητής τηλεφωνίας παρουσιάζουν όμως σχετική ομοιογένεια στα χαρακτηριστικά τους, είναι

χαμηλού σχετικά κόστους και απευθύνονται σε μη απαιτητικό, συνήθως νεανικό κοινό. Είναι είτε παλαιότερα σε τεχνολογία, δημοφιλή μοντέλα είτε νεώτερα, αλλά με την ελάχιστη σύνθεση τεχνικών χαρακτηριστικών. Οι 29 συσκευές της καρτοκινητής τηλεφωνίας που προσφέρονται στα προς αξιολόγηση πακέτα έχουν παρόμοια ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά. Τα διαφορετικά αυτά μοντέλα κινητών εμφανίζονται στον Πίνακα 5.4 που ακολουθεί.

Πίνακας 5.4 - Τα μοντέλα κινητών τηλεφώνων που προσφέρονται στα προς αξιολόγηση πακέτα

Alcatel Club Plus	Maxon MX-3204	Nokia 6110
Alcatel One Touch Club	Mitsubishi MT-30	Panasonic GD30
Alcatel One Touch Easy HF	Motorola M3180	Panasonic GD30
Alcatel One Touch ClubEasyDB	Motorola M3588	Philips Genie DB
Bosh 509	Motorola M3888	Philips Savvy
Bosh 607	Motorola StartTac70	Sagem RC712
Ericsson GA-628	Motorola T2288	Siemens C10
Ericsson GF768	Motorola v2288	Siemens C25
Ericsson GH-688	Nokia 3110	Siemens C35i
Ericsson T10s	Nokia 3210	
	Nokia 5110	

Σχετικές έρευνες που καταγράφουν τις προτιμήσεις καταναλωτών⁷ βοηθούν προς την κατεύθυνση της κατά το δυνατόν αντικειμενικότερης, τεχνικής αποτίμησης της αξίας των κινητών τηλεφώνων. Σε ότι αφορά τα κριτήρια επιλογής των συσκευών κινητής τηλεφωνίας, διαπιστώνουν ότι μεγάλη σημασία αποδίδεται από τους καταναλωτές στην διάρκεια της μπαταρίας όπως εκφράζεται από τις τιμές του μέγιστου χρόνου ομιλίας και αναμονής, στο βάρος και το μέγεθος και στην σχεδίαση / εμφάνιση, ενώ σημαντικός παράγοντας αποτελεί και το κόστος. Μεγάλο ποσοστό χρηστών κινητών τηλεφώνων δηλώνουν επιθυμία σύνδεσης στο Internet και αρκετοί από αυτούς ότι θα επιδιώξουν σύντομα να αποκτήσουν κινητό με τέτοια

⁷ Περιοδικό Marketing 21 Sept. 2000, p12-Έρευνα NOP Research Group

δυνατότητα. Τα ανωτέρω ορίζουν ως ικανοποιητικό πλαίσιο αξιολόγησης τους ακόλουθους δείκτες :

- 1) Διαστάσεις, βάρος (δηλώνει πόσο φορητό μπορεί να θεωρηθεί το κινητό)
- 2) Αυτονομία (χρονική διάρκεια αναμονής και ομιλίας, εξαρτώμενη από την τεχνολογία του κινητού και από την ισχύ και τον τύπο της μπαταρίας)
- 3) Τεχνολογία σε λειτουργίες φωνής και δεδομένων
- 4) Χαρακτηριστικά, δυνατότητες και ευκολίες.

Οι δείκτες αυτοί εκφράζουν ποιοτικά χαρακτηριστικά και θα πρέπει να εκτιμηθούν σε κλίμακα διάταξης (ordinal scale). Αυτό ενισχύεται και από την απλή διαπίστωση ότι συνήθως οι καταναλωτές αντιλαμβάνονται και συγκρίνουν την τάξη μεγέθους των χαρακτηριστικών των προϊόντων ενώ αγνοούν μικροδιαφορές (π.χ. διαφορά μερικών γραμμαρίων στο βάρος ή μερικών χιλιοστών στις διαστάσεις των κινητών τηλεφώνων πρακτικά δεν γίνεται αντιληπτή και δεν αναμένεται να επηρεάζει ουσιαστικά τη αντίληψη των καταναλωτών για τη συσκευή).

Στο σύνολο των δεδομένων του προβλήματος, για την εκτίμηση των δύο πρώτων δεικτών (διαστάσεις-βάρος, αυτονομία) εφαρμόστηκε ανάλυση συστάδων (cluster analysis) στα επιμέρους ποσοτικά τους χαρακτηριστικά. Για τον δείκτη Διαστάσεων-Βάρους τα χαρακτηριστικά που τον συνθέτουν είναι οι διαστάσεις (μήκος, πλάτος, πάχος) και το βάρος ενώ για τον δείκτη της Αυτονομίας ο μέγιστος χρόνος ομιλίας και ο χρόνος αναμονής. Η Ανάλυση Συστάδων ξεχωριστά για κάθε δείκτη είχε ως αποτέλεσμα την κατάταξη των κινητών τηλεφώνων σε τρεις ομάδες. Αναλόγως της ομάδας στην οποία ανήκουν, στα κινητά αποδόθηκε διάταξη 1, 2 και 3, με το 1 να δηλώνει την καλύτερη επίδοση και το 3 την χειρότερη. Η ταξινόμηση των κινητών παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.5 που ακολουθεί (σε παρένθεση αναφέρεται το πλήθος των κινητών κάθε ομάδας).

Για τον υπολογισμό των δεικτών Τεχνολογίας και Χαρακτηριστικών, πραγματοποιήθηκε εμπειρική ταξινόμηση των κινητών σε κατηγορίες αναλόγως του επιπέδου των διαφορών που αυτά παρουσιάζουν. Συγκεκριμένα για τον δείκτη Τεχνολογίας ελήφθησαν υπόψη οι δυνατότητες του κινητού για υποστήριξη πρωτοκόλλου σύνδεσης στο Internet (Wap 1.1), για λειτουργία σε δύο συχνότητες GSM 900 και GSM 1800 (dual band), για την ύπαρξη modem/fax και για ποιοτική λήψη σήματος (EFR). Με βάση τις τεχνολογικές αυτές δυνατότητες, τα κινητά διαχωρίστηκαν στις τέσσερις κατηγορίες που εμφανίζονται στην τρίτη στήλη του Πίνακα 5.5. Για τον δείκτη Χαρακτηριστικών ο οποίος αποδίδει την ποικιλία και την πληρότητα του κινητού σε λοιπές δυνατότητες και ευκολίες, καταρτίστηκε αρχικά ένας κατάλογος με τα πλέον συνήθη χαρακτηριστικά των κινητών (βασικά χαρακτηριστικά) και ένας κατάλογος με τα σπανιότερα και πιο εξειδικευμένα τα οποία εμφανίζονται στα μοντέλα με υψηλές τιμές πώλησης (εξαιρετικά χαρακτηριστικά). Στην κατηγορία των βασικών χαρακτηριστικών εντάχθηκαν χαρακτηριστικά όπως η μικρή σε μέγεθος οθόνη, οι χρωματιστές προσόψεις, το ρολόι, το ξυπνητήρι, ο κατάλογος τηλεφώνων, ο υπολογιστής, τα παιχνίδια κλπ ενώ στη κατηγορία των εξαιρετικών χαρακτηριστικών η μεγάλη οθόνη με δυνατότητες απεικόνισης γραφικών, η χρήση αλκαλικών μπαταριών, η ένδειξη κλήσεων με δόνηση, η φωνητική πληκτρολόγηση, η ανοικτή ακρόαση, η προνοητική εισαγωγή κειμένου, το ραδιόφωνο κλπ. Στη συνέχεια τα κινητά ομαδοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες (τελευταία στήλη του Πίνακα 5.5) αναλόγως του βαθμού στον οποίον τα χαρακτηριστικά τους ανήκουν στην ομάδα των βασικών ή στην ομάδα των εξαιρετικών δυνατοτήτων.

Πίνακας 5.5 - Ταξινόμηση των κινητών τηλεφώνων

Διαστάσεις-Βάρος	Αυτονομία	Τεχνολογία	Χαρακτηριστικά (*)
1=Μικρό και Ελαφρύ (4)	1=Υψηλή (5)	1=Υψηλή (3) Υποστήριξη Wap, Dual Band και δυνατότητες EFR, Modem/fax	1=Εξαιρετικά χαρακτηριστικά (4)
2=Μεσαίου μεγέθους και βάρους (15)	2=Μέτρια (16)	2=Καλή (4) Dual Band και μία εκ των EFR, Modem/fax	2= Βασικά χαρακτηριστικά και μερικά από τα εξαιρετικά (13)
3=Μάλλον βαρύ και μεγάλο (10)	3=Μικρή (8)	3=Μέτρια (16) Μόνο Modem/fax	3=Μόνο τα βασικά χαρακτηριστικά (12)
		4=Χαμηλή (6) Καμία από τις ανωτέρω δυνατότητες	

(*) Βασικά χαρακτηριστικά : Μικρή οθόνη, χρωματιστές προσόψεις, ρολόι, ξυπητήρι, κατάλογος τηλεφώνων, υπολογιστής, παιχνίδια
 Εξαιρετικά χαρακτηριστικά : Μεγάλη οθόνη με δυνατότητες γραφικών, χρήση αλκαλικών μπαταριών, ένδειξη κλήσεων με δόνηση, φωνητική πληκτρολόγηση, ανοικτή ακρόαση, προνοητική εισαγωγή κειμένου, ραδιόφωνο

Από την ανωτέρω διαδικασία προέκυψε κατάταξη των κινητών τηλεφώνων στα τέσσερα επιμέρους ποιοτικά χαρακτηριστικά. Για την σύνθεση αυτών σε μία τιμή (aggregation) που να εκφράζει την συνολική επίδοση, χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία των Cook, Kress (1991) για δεδομένα διάταξης που ακολουθεί τη φιλοσοφία της Περιβάλλουσας Ανάλυσης και που περιγράφεται αναλυτικά στις ενότητες 3.1 και 3.3 του κεφαλαίου 3. Από το χώρο της στατιστικής, για το πρόβλημα αυτό της σύνθεσης κριτηρίων διάταξης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η πολλαπλή ανάλυση αντιστοιχιών (multiple correspondence analysis, HOMALS) η οποία βασιζόμενη σε ισχυρή γραμμική συσχέτιση, περιορίζει το πλήθος των αρχικών μεταβλητών. Στα δεδομένα όμως της συγκεκριμένης εφαρμογής διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών ώστε να επιτευχθεί η σύνθεσή τους σε μία. Η μεγαλύτερη τιμή γραμμικής συσχέτισης, δείκτης Kendall's $T = 0.455$, διαπιστώθηκε μεταξύ των μεταβλητών Τεχνολογίας και Χαρακτηριστικών.

Ο πίνακας 5.6 που ακολουθεί παρουσιάζει την κατάταξη των κινητών στα επιμέρους ποιοτικά χαρακτηριστικά τους καθώς επίσης και την τελική κατάταξη που προέκυψε από την σύνθεση αυτών. Την πρώτη θέση καταλαμβάνει ένα μόνο κινητό (KT26) το οποίο συνδυάζει μικρές διαστάσεις, χαμηλό βάρος, τεχνολογική υπεροχή και εξαιρετικά άλλα χαρακτηριστικά. Αντιθέτως στην έβδομη τελευταία θέση κατατάσσονται τέσσερα μοντέλα κινητών παλαιότερης τεχνολογίας.

Πίνακας 5.6 - Κατάταξη κινητών τηλεφώνων ⁸

Κωδικός	Γενική κατάταξη	Διαστάσεις- Βάρος	Αυτονομία	Τεχνολογία	Χαρακτηριστικά
KT1	5	3	2	4	3
KT2	3	2	2	2	2
KT3	2	2	2	2	1
KT4	2	2	2	1	2
KT5	2	2	2	1	2
KT6	2	2	1	3	2
KT7	2	2	1	3	2
KT8	5	2	2	3	3
KT9	7	3	2	3	2
KT10	6	3	2	4	2
KT11	4	3	2	2	2
KT12	5	2	2	5	2
KT13	6	3	2	3	3
KT14	6	2	3	3	3
KT15	4	2	2	3	2
KT16	6	2	3	3	3
KT17	7	3	3	3	3
KT18	4	2	2	3	2
KT19	6	3	2	3	3
KT20	7	2	3	4	3
KT21	3	3	1	3	2
KT22	2	2	1	3	2
KT23	2	1	3	2	1
KT24	7	3	3	3	3
KT25	6	2	2	4	3
KT26	1	1	1	1	1
KT27	6	3	2	3	3
KT28	4	1	3	4	3
KT29	3	1	3	3	1

⁸ Τα κινητά τηλέφωνα κωδικοποιήθηκαν και παρουσιάζονται με τυχαία σειρά

□ *Παρουσίαση των αποτελεσμάτων αξιολόγησης*

Από την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει ο τελικός πίνακας επίδοσης των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας επί του οποίου εφαρμόζεται το γενικευμένο μοντέλο (3.4) για ασαφή δεδομένα. Τα αποτελέσματα (όρια αποδοτικότητας, ταξινόμηση) και οι επιμέρους επιδόσεις των μερών που συνθέτουν το πακέτο καρτοκινητής τηλεφωνίας παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.7.

Πίνακας 5.7 - Επιδόσεις και τελική κατάταξη των πακέτων
καρτοκινητής τηλεφωνίας

Εταιρεία	Κινητό Τηλέφωνο	Τιμή (I)	Αρχικός Χρόνος Ομιλίας (O1)	Αξιολ. Υπηρεσ. (O2)	Αξιολ. Κινητού (O3)	h ^L	h [*]	Ταξιν.		
Π01	E1	KT1	49900	50763	4347,83	1	5	0,747	0,813	E-
Π02	E1	KT2	39900	40594	4347,83	1	3	0,934	1,000	E+
Π03	E1	KT3	54727	65900	4347,83	1	2	0,575	0,742	E-
Π04	E1	KT4	68900	71900	4347,83	1	2	0,527	0,589	E-
Π05	E1	KT5	37900	40594	5217,39	1	2	1,000	1,000	E++
Π06	E1	KT6	74900	79900	4347,83	1	2	0,474	0,542	E-
Π07	E1	KT7	39900	42289	4347,83	1	2	0,896	1,000	E+
Π08	E1	KT8	56695	56900	4347,83	1	5	0,666	0,716	E-
Π09	E2	KT9		54237	5217,39	2	7	0,542	0,670	E-
Π10	E2	KT10		59000	5217,39	2	6	0,507	0,625	E-
Π11	E2	KT1		64407	5217,39	2	5	0,573	0,573	E-
Π12	E2	KT11		34900	869,57	2	4	1,000	1,000	E++
Π13	E2	KT12		62712	5217,39	2	5	0,588	0,588	E-
Π14	E2	KT13		61017	5217,39	2	6	0,490	0,605	E-
Π15	E2	KT14	49900	55000	2608,70	2	6	0,544	0,623	E-
Π16	E2	KT14		55000	5217,39	2	6	0,544	0,671	E-
Π17	E2	KT15		57000	5217,39	2	4	0,647	0,647	E-
Π18	E2	KT3	69900	71949	2608,70	2	2	0,527	0,581	E-
Π19	E2	KT3		71949	5217,39	2	2	0,527	0,564	E-
Π20	E2	KT16		42000	5217,39	2	6	0,712	0,879	E-
Π21	E2	KT17		56780	5217,39	2	7	0,518	0,640	E-
Π22	E2	KT18		36900	5217,39	2	4	1,000	1,000	E++
Π23	E2	KT19	84746	85000	5217,39	2	6	0,352	0,435	E-
Π24	E2	KT20	75848	85000	5217,39	2	7	0,346	0,479	E-
Π25	E2	KT6	78900	79576	2608,70	2	2	0,476	0,514	E-
Π26	E2	KT6	78900	79576	5217,39	2	2	0,476	0,514	E-
Π27	E2	KT21		65000	2608,70	2	3	0,583	0,625	E-
Π28	E2	KT21	64999	67797	5217,39	2	3	0,559	0,625	E-
Π29	E2	KT22	85000	88898	5217,39	2	2	0,426	0,478	E-
Π30	E2	KT23	85000	105000	5217,39	2	2	0,361	0,478	E-
Π31	E2	KT7		43500	2608,70	2	2	0,871	0,933	E-
Π32	E2	KT7		49500	5217,39	2	2	0,766	0,820	E-

Π33	E2	KT24	27900		869,57	2	7	1,000	1,000	E++	
Π34	E2	KT24	36356		5217,39	2	7	0,809	1,000	E+	
Π35	E2	KT25	43983		5217,39	2	6	0,680	0,839	E-	
Π36	E2	KT26	72900	74492	434,78	2	1	1,000	1,000	E++	
Π37	E3	KT3	49900		2068,97	6666,67	2	2	0,760	1,000	E+
Π38	E3	KT27	29900		2068,97	6666,67	2	6	1,000	1,000	E++
Π39	E3	KT28	64900		2068,97	6666,67	2	4	0,546	0,724	E-
Π40	E3	KT6	74900	78900	2068,97	6666,67	2	2	0,480	0,677	E-
Π41	E3	KT29	49900	56900	2068,97	6666,67	2	3	0,666	1,000	E+
Π42	E3	KT8	56900		2068,97	6666,67	2	5	0,623	0,826	E-

Από τα αποτελέσματα της Περιβάλλουσας Ανάλυσης στα ασαφή δεδομένα των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα :

1. Τα πακέτα Π05, Π12, Π22, Π33, Π36 και Π38 ταξινομούνται ως ισχυρώς αποδοτικά (E⁺⁺). Τα πακέτα αυτά αποτελούν τις συμφέρουσες αγορές (best buys) γιατί συνδυάζουν εξαιρετική αξία σε συγκριτικά χαμηλή τιμή. Τονίζεται ότι η αποδοτικότητα δεν προϋποθέτει χαμηλή τιμή πώλησης. Το πακέτο Π36 αν και έχει υψηλή τιμή αγοράς (72900-74492 δρχ) παραμένει αποδοτικό κυρίως λόγω της συσκευής τηλεφώνου που προσφέρει η οποία είναι η καλύτερη της κατηγορίας (πρώτη θέση στη κατάταξη). Αντιθέτως τα Π33, Π38 επιτυγχάνουν να εμφανισθούν ισχυρώς αποδοτικά λόγω της πολύ χαμηλής τιμής πώλησης η οποία υπερκαλύπτει την περιορισμένη επίδοση της συσκευής που προσφέρουν. Η παρατήρηση ότι τα ανωτέρω πακέτα της κατηγορίας E⁺⁺ παραμένουν αποδοτικά για οποιοδήποτε τιμή πώλησης ορισθεί εντός της μέγιστης και ελάχιστης καταγεγραμμένης τιμής της αγοράς, οδηγεί στο συμπέρασμα δεν ωφελεί να πωλούνται αυτά σε χαμηλότερες τιμές από την υψηλότερη της αγοράς. Έτσι το πακέτο Π05 με τιμή πώλησης που κυμαίνεται μεταξύ 37900 και 40594 δρχ παραμένει αποδοτικό για οποιαδήποτε ενδιάμεση τιμή και προφανώς δεν συμφέρει να πωλείται λιγότερο από 40594 δρχ. Το ίδιο ισχύει και για το Π36.
2. Αποδοτικά μόνο στην ευνοϊκότερη γι' αυτά περίπτωση (σύνολο E⁺) αποδεικνύονται τέσσερα πακέτα τα οποία διατάσσονται ως προς την τιμή

ελάχιστης αποδοτικότητας h^L ως εξής : Π02, Π07, Π34, και Π41. Ειδικά για το Π34 συγκρινόμενο με το Π33 επισημαίνεται ότι αυτό περιέχει την ίδια συσκευή κινητού, προέρχεται από την ίδια εταιρεία και διαφέρει μόνο ως προς την τιμή και τον αρχικό χρόνο ομιλίας. Το Π33 είναι ισχυρώς αποδοτικό επειδή προσφέρει χαμηλότερη τιμή πώλησης η οποία κατά την αξιολόγηση υπερκαλύπτει τον μεγαλύτερο αρχικό χρόνο ομιλίας που περιέχει το Π34. Η σύγκριση αυτή είναι χρήσιμη για το μάρκετινγκ δεδομένου ότι ο συνδυασμός τιμής και αρχικού χρόνου ομιλίας για ένα πακέτο πρέπει να πλεονεκτεί συγκρινόμενος με τον ανταγωνισμό.

3. Ένα μεγάλο ποσοστό πακέτων (30 από 42) είναι μη αποδοτικά (σύνολο E-). Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν σε πακέτα τα οποία σε καμία περίπτωση, ακόμα και κάτω από τις πλέον ευνοϊκές συνθήκες αξιολόγησης, δεν αποτελούν συμφέρουσα αγορά για τους καταναλωτές. Από αυτά το Π23, Π29 και Π30 έχουν τις μικρότερες τιμές αποδοτικότητας και θεωρούνται ως οι πλέον ασύμφορες αγορές.

Πέραν των αποτελεσμάτων του βασικού μοντέλου Περιβάλλουσας Ανάλυσης για ασαφή δεδομένα, για την περίπτωση των μη αποδοτικών πακέτων, το μοντέλο (2.6) είναι σε θέση να προσδιορίσει για την τιμή πώλησης και τον αρχικό χρόνο νέα επίπεδα τιμών ώστε τα πακέτα να γίνουν αποδοτικά. Οι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν την αποδοτικότητα (υπηρεσίες, κινητό τηλέφωνο) θεωρούνται ως εξωτερικά οριζόμενοι, μη αποδεχόμενοι περαιτέρω βελτίωση. Εάν εστιαστεί η προσοχή στην μονάδα Π31 η οποία από τις μη αποδοτικές μονάδες έχει την μεγαλύτερη τιμή αποδοτικότητας (ίση με 0.933), για την μονάδα αυτή το μοντέλο (2.6) με τη διαδικασία των διαδοχικών διχοτομήσεων τελικώς εκτιμά τιμή πώλησης ίση με 40125 δρχ (έναντι της αρχικής των 43500 δρχ) η οποία την καθιστά αποδοτική. Αντιθέτως εάν αντί του αρχικού χρόνου 2608,7 τεθεί η μέγιστη

τιμή στο σύνολο δεδομένων 5217,39 λεπτά, διαπιστώνεται ότι η βελτίωση αυτή δεν επιφέρει αλλαγή στην ταξινόμηση της μονάδας.

Η διαδικασία του ελέγχου της βελτίωσης των επιδόσεων των μονάδων προκειμένου να αλλάξουν επίπεδο ταξινόμησης, είναι σε θέση να παρέχει στο μάρκετινγκ πρόσθετη χρήσιμη πληροφορία για την απόδοση των μονάδων σε σχέση με τον ανταγωνισμό. Στην περίπτωση των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας, απλές μεταβολές, υπό τύπον δοκιμής στα δεδομένα των τιμών πώλησης και αρχικού χρόνου, παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες. Για το πακέτο Πο2 διαπιστώνεται ότι εάν βελτιώσει την τιμή πώλησής της από το διάστημα [39900, 40594] στην τιμή των 37750 από απλώς αποδοτικό καθίσταται ισχυρώς αποδοτικό. Ομοίως, το ισχυρώς αποδοτικό Π22 το οποίο πωλείται με τον μέγιστο αρχικό χρόνο ομιλίας που αντιστοιχεί σε 12000 δρχ, καθίσταται μη αποδοτικό εάν τεθεί γι' αυτήν τιμή αρχικού χρόνου ίση με 869,57 λεπτά (αξία 2000 δρχ).

Η πληροφορία που παρέχεται μέσω των αποτελεσμάτων της Περιβάλλουσας Ανάλυσης δεν αξιολογείται ως άμεση πρόταση αγοράς προς τους καταναλωτές. Αποτελεί μία αρχική βοήθεια προς αυτούς ώστε να εστιάσουν την προσοχή τους στην ομάδα των προϊόντων που αποτελούν συμφερότερη αγορά. Η τελική απόφαση διαμορφώνεται αναλόγως των προσωπικών προτιμήσεων των καταναλωτών οι οποίοι σταθμίζουν με διαφορετικό τρόπο τα επιμέρους χαρακτηριστικά των πακέτων (ένταση σήματος του δικτύου της κινητής τηλεφωνίας στη γεωγραφική περιοχή που ενδιαφέρει τον καταναλωτή, σχεδίαση και εμφάνιση της συσκευής του κινητού τηλεφώνου κλπ) και αντιλαμβάνονται ως ελκυστικές, εντελώς διαφορετικές προσφορές. Η ανωτέρω ανάλυση είναι σε θέση να εντοπίσει ως συμφέρουσες αγορές προϊόντα με όχι επαρκή διαφημιστική προβολή τα οποία όμως έχουν εξαιρετικές επιδόσεις και χαμηλή τιμή πώλησης. Αντιθέτως, προϊόντα γνωστών και προβεβλημένων εταιρειών, μέσω της τεχνικής αξιολόγησης, μπορεί να αποδειχθούν υποδεέστερα των ανταγωνιστικών τους.

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων, στα πλαίσια ενός συστήματος υποστήριξης αποφάσεων επιλογής προϊόντων, θα μπορούσε να αποτελέσει ένα από τα μοντέλα αξιολόγησης των προϊόντων λαμβάνοντας υπόψη και τις επιδόσεις τους αλλά και τις προτιμήσεις των καταναλωτών. Η αξιοποίηση του Internet για την προβολή και πώληση προϊόντων παρέχει το απαραίτητο υπόβαθρο για την ανάπτυξη ενός τέτοιου συστήματος.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 3.7 του Κεφαλαίου 3, η σφαιρική αποδοτικότητα των μονάδων είναι σε θέση να διακρίνει περαιτέρω τις αποδοτικές μονάδες. Στην παρούσα εφαρμογή αξιολόγησης των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας, η σφαιρική αποδοτικότητα των αποδοτικών μονάδων (σύνολα E^{++} , E^+) εκτιμάται μέσω της επίλυσης του μοντέλου (3.6). Οι τιμές αποδοτικότητας των μονάδων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου t και ο μέσος όρος τους ο οποίος ορίζεται ως σφαιρική τιμή αποδοτικότητας, παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.8. Οι μονάδες είναι διατεταγμένες ως προς την σφαιρική τιμή αποδοτικότητας.

Πίνακας 5.8 - Τιμές σφαιρικής αποδοτικότητας για διάφορες τιμές της παραμέτρου t

Αποδοτική Μονάδα	$t=0$	$t=0,000001$	$t=0,1$	$t=0,9$	$t=1$	Σφαιρική τιμή αποδοτικότητας
P38	1,000	1,00	1,00	1,00	1,00	1,0000
P05	1,000	1,00	1,00	1,00	1,00	1,0000
P22	0,999	1,00	1,00	1,00	1,00	0,9993
P33	1,000	0,98	0,98	0,98	0,98	0,9872
P02	0,977	0,9680	0,9680	0,9680	0,9680	0,9710
P07	0,938	0,9801	0,9801	0,9801	0,9801	0,9661
P34	0,893	0,9571	0,9571	0,9571	0,9571	0,9358
P36	0,844	0,89	1,00	1,00	1,00	0,9108
P12	0,926	0,84	0,84	0,84	0,84	0,8712
P37	0,844	0,8535	0,8535	0,8535	0,8535	0,8503
P41	0,844	0,8438	0,8438	0,8438	0,8438	0,8438

Από τον ανωτέρω Πίνακα 5.8 προκύπτει ότι οι περισσότερες αποδοτικές μονάδες χάνουν την αποδοτικότητά τους τουλάχιστον για μερικές τιμές του t . Τελικώς από το σύνολο των 11 αποδοτικών μονάδων, ως σφαιρικά

αποδοτικές χαρακτηρίζονται μόνο οι μονάδες P38 και P05 οι οποίες ανήκουν στο σύνολο E⁺⁺ των ισχυρώς αποδοτικών μονάδων.

Στην ενότητα που ακολουθεί αναπτύσσεται το πλαίσιο και οι γενικές κατευθύνσεις ενός συστήματος υποστήριξης επιλογής προϊόντων μέσω των ιστοσελίδων του διαδικτύου.

5.3 Ο «εικονικός σύμβουλος επιλογής» : ένα πλαίσιο αξιολόγησης και επιλογής προϊόντων στο διαδίκτυο

Τα τελευταία χρόνια τα διεθνή δίκτυα υπολογιστών υποστηριζόμενα από τεχνολογίες πολυμέσων ήταν η βάση για τη ραγδαία ανάπτυξη εφαρμογών ηλεκτρονικού εμπορίου. Σχετικές έρευνες για την χρήση του Internet δείχνουν ότι η προβολή και η αγορά προϊόντων είναι η πιο διαδεδομένη και δημοφιλής δραστηριότητα [Gupta, Sunil (1995)]. Μία ειδική κατηγορία των εφαρμογών αυτών βασισμένη σε τεχνολογία ιστοσελίδων (World Wide Web-WWW) συμπεριφέρεται ως «ηλεκτρονικό κατάστημα» το οποίο υποστηρίζει λειτουργίες προβολής, επιλογής και αγοράς προϊόντων. Πολλές εφαρμογές αυτού του είδους διαθέτουν στους καταναλωτές πολλές διαφορετικές κατηγορίες προϊόντων και προσφέρουν ποικίλες υπηρεσίες, συνθέτοντας με τον τρόπο αυτό τα “εμπορικά κέντρα” (mall sites). Η νέα αυτή πραγματικότητα που αξιοποιεί το διαδίκτυο για την προώθηση προϊόντων και υπηρεσιών θεμελιώνεται από πολλές ερευνητικές εργασίες και έρευνες πεδίου προερχόμενες κυρίως από το χώρο του Μάρκετινγκ. Ενδεικτικά αναφέρονται των Gaffin, A. (1994), Hoffman L. et. al (1995) , Wallace (1995).

Τα «ηλεκτρονικά καταστήματα» προβάλλουν όλα τα προϊόντα μιας συγκεκριμένης κατηγορίας, παρουσιάζουν αναλυτικά όλες τις δυνατότητες τους (επιδόσεις, φυσικά χαρακτηριστικά, τεχνικές προδιαγραφές κλπ.), αντιπαραβάλλουν τα κύρια χαρακτηριστικά των ανταγωνιστικών προϊόντων της κατηγορίας (comparison shopping), παρέχουν μηχανισμούς αναζήτησης με βάση απλά ή σύνθετα κριτήρια, αναφέρουν πίνακες τεχνικής αξιολόγησης και δημοσιεύματα συγκριτικών δοκιμών, δίνουν πληροφορίες τιμοκαταλόγου, προσφορών κλπ, παραπέμπουν στα σημεία πώλησης και τέλος υποστηρίζουν ηλεκτρονική πληρωμή των προϊόντων που αγοράζονται. Μορφές πολυμέσων (π.χ. φωτογραφίες, βίντεο, τρισδιάστατο βίντεο) συχνά χρησιμοποιούνται για να πληροφορήσουν και να προσελκύσουν τους καταναλωτές αλλά και να εμφανίσουν τη μορφή και μερικά χαρακτηριστικά

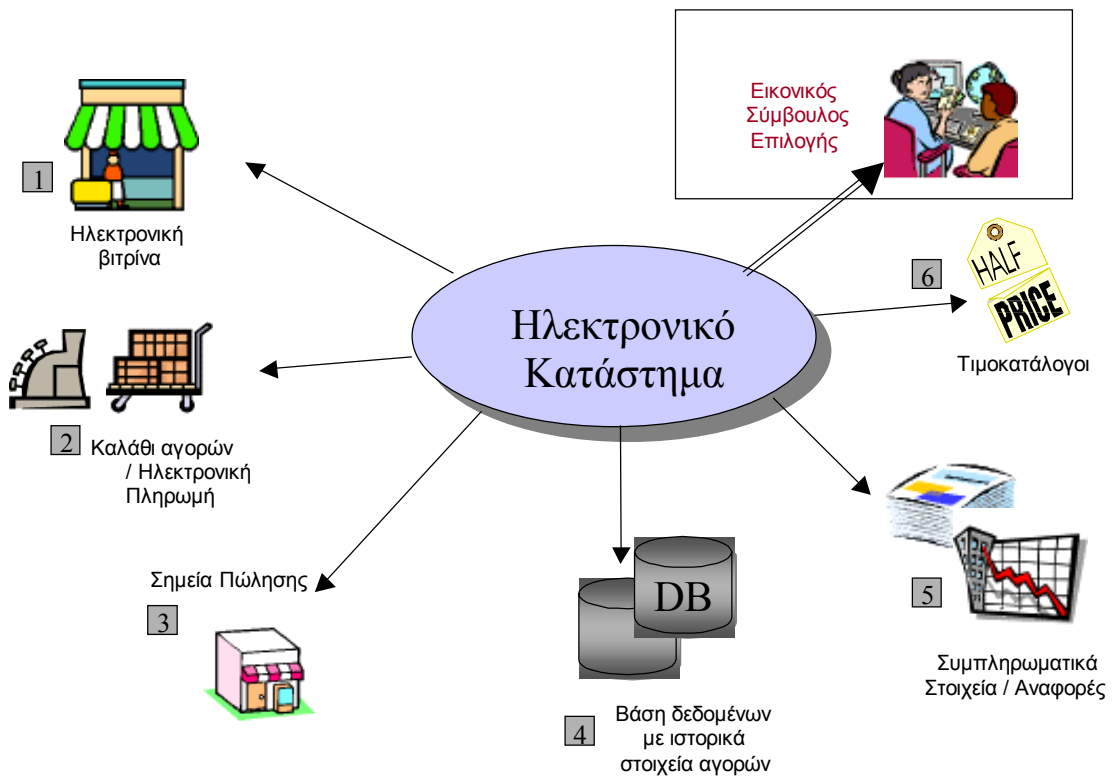
των προϊόντων όπως χρώμα, διαστάσεις, επιπλέον εξοπλισμός κ.λ.π. σύμφωνα με τις ιδιαίτερες προτιμήσεις.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των εφαρμογών αυτού του είδους είναι ότι για τη αναζήτηση των προϊόντων εκείνων που ανταποκρίνονται στις προσωπικές προτιμήσεις καταναλωτών, προσφέρουν περιορισμένες δυνατότητες διατύπωσης των προτιμήσεων περιορίζοντας τα κριτήρια αναζήτησης στην τιμή πώλησης, τα απλά φυσικά (μέγεθος, χρώμα, διαστάσεις κλπ), τεχνικά (επιδόσεις, ασφάλεια, κλπ.) ή άλλα χαρακτηριστικά των προϊόντων (ειδικός εξοπλισμός κλπ). Η αναζήτηση την οποία προτείνουν δεν αναφέρεται συνήθως σε ποιοτικά χαρακτηριστικά και σύνθετα κριτήρια όπως «αξιοπιστία», «οικονομία», «ευκολία χρήσης» κλπ, τα οποία σχετίζονται με τη διαμορφωμένη αντίληψη (perception) των καταναλωτών.

Η δομή και η λειτουργικότητα των εφαρμογών αυτών εξαρτάται σημαντικά από το πόσο ο καταναλωτής είναι ενημερωμένος για την τεχνολογική εξέλιξη των προϊόντων που αναζητά, για τις συνθήκες της αγοράς και για τις διαφορές και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ανταγωνιστικών προϊόντων. Επιπλέον προϋποθέτει ότι ο καταναλωτής έχει ήδη διαμορφώσει την τελική του άποψη για το είδος του προϊόντος που επιθυμεί, για τα χρήματα που θα δαπανήσει κλπ. Από τα ανωτέρω συνάγεται ότι οι υπάρχουσες εφαρμογές αναζήτησης και επιλογής προϊόντων συμπεριφέρονται ως διαδικασίες αναζήτησης σε βάσεις δεδομένων και όχι τόσο ως εργαλεία υποστήριξης αποφάσεων. Την προσέγγιση της διατύπωσης σύνθετων ερωτημάτων σε διαμορφωμένες βάσεις δεδομένων με στοιχεία των προϊόντων, υποστηρίζουν θεωρητικά διάφορες εργασίες [πχ. Steiger, Stolze (1997)].

Οι λειτουργίες που συνθέτουν ένα «ηλεκτρονικό κατάστημα» αποδίδονται γραφικά και επεξηγούνται στο Σχήμα 5.1. Ακολουθούν αναφορές σε χαρακτηριστικές εφαρμογές αυτού του είδους. Στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται και ο «εικονικός σύμβουλος επιλογής» του οποίου η περιγραφή επιχειρείται στην παρούσα ενότητα.

Σχήμα 5.1 : Λειτουργίες ενός τυπικού συστήματος προώθησης προϊόντων



- | | | |
|----------|---------------------------------------|---|
| 1 | Ηλεκτρονική Βιτρίνα | Επίδειξη προϊόντων με παρουσίαση της μορφής και εμφάνισή τους, πλήρη αναφορά των μεγεθών των φυσικών και τεχνικών χαρακτηριστικών, παροχή οδηγιών χρήσης και συναρμολόγησης
προβολή video με διαφημιστικά μηνύματα, παρουσίαση βελτιώσεων και επεκτάσεων |
| 2 | Καλάθι Αγορών-
Ηλεκτρονική πληρωμή | Διαμόρφωση καταλόγου αγορών, εμφάνιση προοδευτικής αξίας αγορών, πραγματοποίηση πώλησης και ηλεκτρονικής πληρωμής |
| 3 | Σημεία Πώλησης | Παρουσίαση των σημείων πώλησης ανά γεωγραφική περιοχή με στοιχεία διευθύνσεων, τηλεφώνων κλπ, των αντιπροσώπων και των εξουσιοδοτημένων καταστημάτων |
| 4 | Ιστορικά στοιχεία αγορών | Τήρηση αρχείου πελατών, τήρηση αρχείου πωλήσεων |
| 5 | Συμπληρωματικά στοιχεία, αναφορές | Στοιχεία κατασκευαστών / εταιρειών διάθεσης, συγκριτικές δοκιμές αξιολόγησης, τεχνικές αναφορές, μετρήσεις, ειδικές αναφορές για επιπτώσεις στην υγεία, στο τρόπο χρήσης κλπ , νέες ανακοινώσεις προϊόντων (what's new) |
| 6 | Τιμοκατάλογοι | Κατάλογοι τιμών των προϊόντων , εκπτώσεις, προσφορές, δόσεις, υπολογισμός τόκων, παραπομπές σε πιστωτικά ιδρύματα για καταναλωτικά δάνεια |

Χαρακτηριστικά παραδείγματα «ηλεκτρονικών καταστημάτων» :

Autoconnect-www2.customsearch.autoconnect.com, CarPoint, Microsoft-carpoint.msn.com, Βιβλιοπωλείο Amazon -www.amazon.com, Ηλεκτρονικά πολυκαταστήματα-www.shop.net/mall/sites, shop.lycos.com, www.internetmall.com, Ταξιδιωτικές υπηρεσίες www.travelshop.de, Επιλογή μουσικής www.themusicboxshop.com

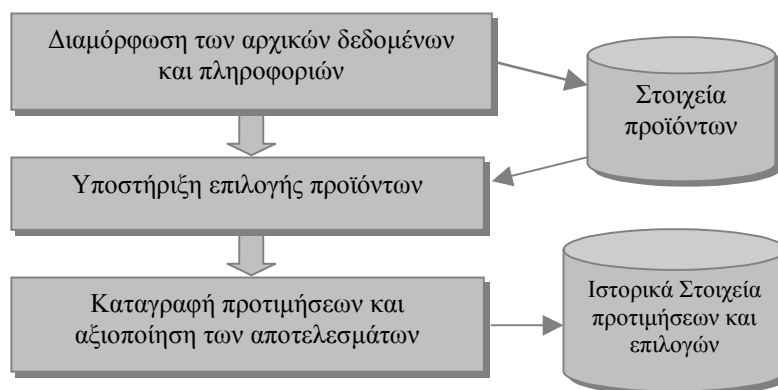
□ *Ο “εικονικός σύμβουλος επιλογής - virtual opinion leader”*

Τα συστήματα υποστήριξης αποφάσεων είναι μία σύζευξη Ανθρώπου-Υπολογιστή στα πλαίσια της οποίας ο αποφασίζων χρησιμοποιεί ένα σύνολο μεθόδων, περισσότερο ή λιγότερο μορφοποιημένων, για να διερευνήσει το περιβάλλον ενός προβλήματος χαμηλού βαθμού δόμησης και να καταλήξει στη λήψη μιας απόφασης, μέσα από μια διαδικασία ενίσχυσης της συλλογιστικής του (βλ. Keen, Scott-Morton (1978), Keen (1980)). Η επιλογή των προϊόντων από τους καταναλωτές αποτελεί παράδειγμα αδόμητης απόφασης στην οποία πρωτεύοντα ρόλο κατέχει η ανθρώπινη διαίσθηση. Ένα σύστημα υποστήριξης αποφάσεων αγοράς προϊόντων στοχεύει να μετατρέψει, όσο το δυνατόν περισσότερο, την αδόμητη απόφαση σε ημιδομημένη, όπου ο υπολογιστής θα παρέχει στοιχεία που θα διευρύνουν το γνωστικό πεδίο του καταναλωτή και θα αξιολογεί τα προϊόντα σύμφωνα με τα κριτήρια που θα επιλέγονται. Η λειτουργία αυτή της αξιολόγησης υποστηρίζεται από σύνολο μοντέλων τα οποία εφαρμόζονται κατά περίπτωση σε δεδομένα που σχετίζονται με τις επιδόσεις των προϊόντων. Σκοπός ενός τέτοιου συστήματος είναι να καταστήσει την διαδικασία επιλογής προϊόντων αποτελεσματική, προς όφελος του καταναλωτή.

Στην ενότητα αυτή προτείνεται το πλαίσιο ενός συστήματος υποστήριξης αποφάσεων (Decision Support System-DSS) σε περιβάλλον Web - Internet το οποίο συμπεριφέρεται ως «εικονικός διαμορφωτής γνώμης» (virtual opinion leader). Οι «διαμορφωτές γνώμης» (opinion leaders) είναι φυσικά πρόσωπα, ενθουσιώδεις για μερικές κατηγορίες προϊόντων (πχ. αυτοκίνητα, φωτογραφικές μηχανές, κλπ) οι οποίοι συμβουλεύουν και επηρεάζουν τις καταναλωτικές αποφάσεις άλλων, παρέχοντας πληροφορίες για τα τεχνικά χαρακτηριστικά, τα στοιχεία αξιολόγησης, τις πληροφορίες για τα σημεία πώλησης που προσφέρουν ποιότητα σε χαμηλές τιμές και τη γνώμη τους για το ποιος τύπος προϊόντων είναι κατάλληλος στην ειδική περίπτωση του κάθε καταναλωτή. Η τελευταία

αυτή πληροφορία είναι εξαιρετικά χρήσιμη αλλά πολυσύνθετη και προϋποθέτει εκτίμηση για τη προσωπική θεώρηση των αξιών και του τρόπου ζωής του καταναλωτή. Ο «εικονικός σύμβουλος επιλογής» είναι η ηλεκτρονική εκδοχή ενός διαμορφωτή γνώμης με σχετικό ρόλο και ανάλογη λειτουργικότητα. Καλύπτει όλες τις μέχρι σήμερα λειτουργίες των σύγχρονων ηλεκτρονικών καταστημάτων του διαδικτύου αλλά και συμπληρώνει το κενό που παρατηρείται σε αυτές σε ότι αφορά την αξιολόγηση και ποιοτική κατάταξη των προϊόντων, λαμβάνοντας υπόψη τις προτιμήσεις των καταναλωτών. Ακολουθεί το πλέον αποδεκτό θεωρητικό πλαίσιο συμπεριφοράς καταναλωτή [Lilien, Kotler, Moorthy (1992)] σύμφωνα με το οποίο η διαδικασία επιλογής προϊόντων διακρίνεται σε πέντε στάδια : στη διαπίστωση της καταναλωτικής ανάγκης, στην αναζήτηση και συλλογή πληροφοριών για τα προϊόντα, τη αξιολόγηση, την αγορά και τέλος την ικανοποίηση μετά την αγορά. Για την ποιοτική κατάταξη των προϊόντων προβλέπει τη χρήση συλλογής μοντέλων και κατάλληλα διαμορφωμένων δεδομένων για τις επιδόσεις των προϊόντων. Σε μία διαδικασία διάλογου με το σύστημα οι καταναλωτές διευρύνουν τις γνώσεις τους για τα προϊόντα και την αγορά, διαμορφώνουν τις προτιμήσεις τους, κατατάσσουν τα προϊόντα ως προς τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που κρίνουν ως πλέον σημαντικά και τελικώς επιλέγουν το προϊόν πραγματοποιώντας ηλεκτρονική συναλλαγή. Η σύνθετη αυτή διαδικασία προϋποθέτει την ενεργό συμμετοχή των καταναλωτών οι οποίοι καθορίζουν πλήρως την πορεία της αξιολόγησης.

Τα λειτουργικά μέρη που απαρτίζουν τον «εικονικό σύμβουλο επιλογής» απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα και σχολιάζονται στη συνέχεια.



Σχήμα 5.2 : Δομή του «εικονικού συμβούλου επιλογής»

- *Διαμόρφωση των αρχικών δεδομένων και πληροφοριών*

Στην φάση της διαμόρφωσης της αρχικής γνώσης του συστήματος συλλέγονται, ταξινομούνται και επεξεργάζονται όλα εκείνα τα στοιχεία που αφορούν τόσο τα προϊόντα όσο και τις συνθήκες της αγοράς. Τα στοιχεία αυτά είναι είτε επεξεργασμένες πληροφορίες κάθε μορφής είτε αρχικά δεδομένα τα οποία αξιοποιούνται από τα διαθέσιμα μοντέλα για την ποιοτική κατάταξη των προϊόντων.

Οι αρχικές πληροφορίες περιλαμβάνουν πλήρη φυσική και τεχνική περιγραφή των προϊόντων, τιμές, συνθήκες και σημεία διάθεσης καθώς επίσης και βοηθητικά στοιχεία (πίνακες αξιολόγησης, σχετικά άρθρα εμπειρογνομώνων, οδηγίες χρήσης / λειτουργίας, αναφορές σε άλλες βάσεις δεδομένων και διάφορες πηγές κυρίως στο Internet κλπ). Τα ανωτέρω συλλέγονται από τις εταιρείες παραγωγής και διάθεσης των προϊόντων, από δημοσιεύματα στον ειδικό για κάθε κατηγορία προϊόντων τύπο, από μελέτες και έρευνες συνδέσμων καταναλωτών κλπ. Ο τρόπος παρουσίασης πρέπει να είναι φιλικός και να αξιοποιεί πλήρως τις τεχνικές δυνατότητες που παρέχονται στις σύγχρονες εφαρμογές Internet (π.χ. multimedia, surround video).

Σε ότι αφορά τα δεδομένα των προϊόντων, προκειμένου αυτά να αξιολογηθούν από τα διαθέσιμα μοντέλα, σε ένα αρχικό στάδιο επεξεργασίας, πραγματοποιείται ανάλυση, συλλογή, έλεγχος και διαμόρφωση της κατάλληλης μορφής τους. Διάφορες μέθοδοι της πολυμεταβλητής στατιστικής ανάλυσης (cluster, multi-dimensional scaling, factor analysis κλπ), μπορούν υπό προϋποθέσεις να εφαρμοσθούν προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι μεταβλητές που εκφράζουν την ίδια περίπου πληροφορία, να συμπληρωθούν ελλειπείς τιμές και να πραγματοποιηθεί σύνθεση σε ποιοτικές μεταβλητές. Παράδειγμα τέτοιας αρχικής επεξεργασίας αποτελεί η διαμόρφωση των αρχικών δεδομένων στην εφαρμογή της αξιολόγησης των πακέτων καρτοκινητής τηλεφωνίας της προηγούμενης ενότητας 5.2.

Τόσο οι πληροφορίες όσο και τα δεδομένα τους συστήματος, λόγω της ταχύτατης μεταβολής των συνθηκών αγοράς και της τεχνολογικής εξέλιξης των προϊόντων πρέπει διαρκώς να ανανεώνονται με αποτελεσματικό μηχανισμό ώστε να το καθιστούν αξιόπιστο.

- *Υποστήριξη επιλογής προϊόντων*

Τα διαμορφωμένα σύνολα αρχικών πληροφοριών και δεδομένων αξιοποιούνται στη συνέχεια για να υποστηρίξουν την επιλογή των προϊόντων. Αρχικά ο καταναλωτής κάνοντας χρήση των βοηθημάτων που του παρέχονται, ενημερώνεται για την ποικιλία των προϊόντων, συλλέγει πληροφορίες, διακρίνει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους και τελικώς διαμορφώνει από όλη την ποικιλία των προσφερόμενων προϊόντων ένα υποσύνολο αναφοράς (consideration set) με τα προϊόντα που διαβλέπει ότι πιθανώς θα ικανοποιήσουν την ανάγκη του και το οποίο στη συνέχεια θα αξιολογηθεί συγκριτικά. Το σύνολο αυτό των προϊόντων διαμορφώνεται δυναμικά και αναθεωρείται με την εξέλιξη της διαδικασίας.

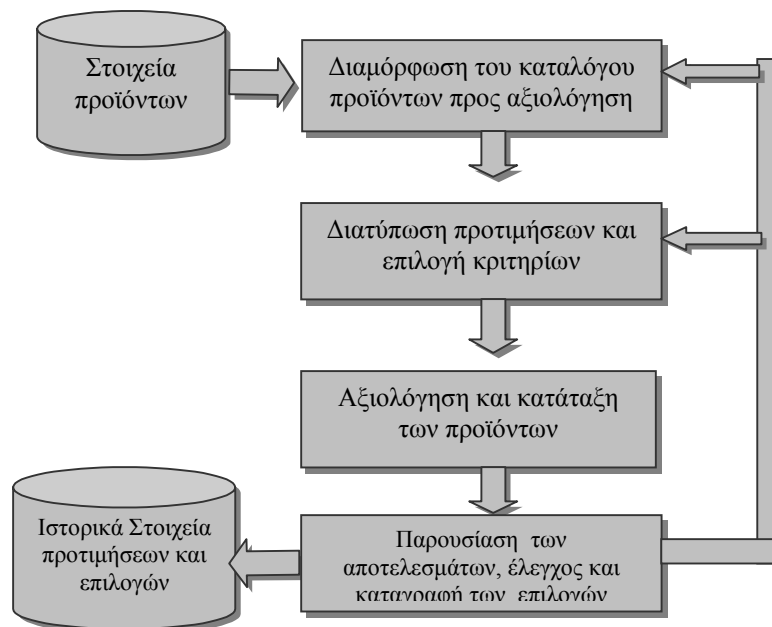
Μετά τη διαμόρφωση του αρχικού συνόλου αναφοράς, σε ένα επόμενο στάδιο, ακολουθεί η επιλογή των μοντέλων αξιολόγησης των προϊόντων τα οποία και καθορίζουν τη μορφή των προτιμήσεων και των κριτηρίων που θα χρησιμοποιηθούν. Ένα από τα πολλά διαθέσιμα μοντέλα για την ποιοτική κατάταξη των προϊόντων είναι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, και η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων η οποία, στην εκδοχή της για ασαφή δεδομένα, είναι σε θέση να κατατάξει ποιοτικά τα προϊόντα. Στην περίπτωση αυτή, ο καταναλωτής καλείται να ορίσει τα κριτήρια εκείνα που παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της άποψής του για τα προϊόντα και να διαμορφώσει το κατάλληλο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης, ορίζοντας τις εισροές και εκροές, σύμφωνα με την επιθυμία του. Για την διευκόλυνσή του παρέχεται από το σύστημα κατάλογος με όλα τα πιθανά κριτήρια στα οποία ένας τυπικός καταναλωτής βασίζει την επιλογή των προϊόντων. Τα κριτήρια με φθίνουσα χρησιμότητα για τον καταναλωτή (π.χ. τιμή αγοράς, κόστος χρήσης κλπ) ορίζονται ως εισροές και τα κριτήρια με αύξουσα χρησιμότητα (πχ. αξιοπιστία, ασφάλεια, επιδόσεις κλπ) ως εκροές. Στις περιπτώσεις όπου ο διαχωρισμός αυτός δεν είναι αυτονόητος (π.χ. διαστάσεις, μέγεθος αυτοκινήτου) και εξαρτάται από τις ιδιαίτερες προτιμήσεις, το σύστημα αφήνει την επιλογή στον καταναλωτή. Την διαμόρφωση του μοντέλου συμπληρώνουν επίσης επιλογές για τον βαθμό σπουδαιότητας των κριτηρίων οι οποίες μεταφράζονται σε αντίστοιχους περιορισμούς των εισροών / εκροών.

Το διαμορφωμένο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης θεωρεί τα προϊόντα του συνόλου αναφοράς ως μονάδες προς αξιολόγηση και εφαρμοζόμενο επί των εισροών / εκροών που έχουν ορισθεί σύμφωνα με τις προτιμήσεις του καταναλωτή, εκτιμά την αποδοτικότητα τους και τα ταξινομεί σε ομάδες αποδοτικών και μη αποδοτικών. Αποδοτικά προϊόντα είναι εκείνα τα οποία κατά τη συγκριτική αξιολόγηση κατάφεραν να ελαχιστοποιήσουν τα κριτήρια με φθίνουσα χρησιμότητα και να μεγιστοποιήσουν τα κριτήρια με αύξουσα χρησιμότητα. Τα προϊόντα αυτά

υπερτερούν των υπολοίπων σύμφωνα με το πλαίσιο αξιολόγησης που έθεσε ο καταναλωτής και αντιστοιχούν σε εκείνα τα οποία ικανοποιούν περισσότερο τις προτιμήσεις του. Τα αποδοτικά προϊόντα αποτελούν το σύνολο επιλογής (choice set), δηλαδή την ομάδα των προϊόντων (υποσύνολο του συνόλου αναφοράς) εκείνων από τα οποία τελικώς ο καταναλωτής πιθανότατα θα επιλέξει το ένα και μοναδικό που θα αγοράσει. Οι διάφορες τεχνικές που ήδη έχουν αναφερθεί διατάσσουν περαιτέρω τα αποδοτικά προϊόντα, διευκολύνοντας ακόμη περισσότερο τον καταναλωτή στην απόφασή του.

Εάν η πρόταση του συστήματος δεν κριθεί ικανοποιητική από τον καταναλωτή όταν δηλαδή έχουν εξαιρεθεί προϊόντα τα οποία θα έπρεπε κατά τη γνώμη του να υπάρχουν στα προτεινόμενα είτε όταν έχουν προταθεί άλλα τα οποία δεν θεωρεί αποδοτικά, στα πλαίσια μίας διαδικασίας ανάδρασης, παρέχεται η δυνατότητα τροποποίησης τόσο του αρχικού συνόλου των προϊόντων όσο και των κριτηρίων αξιολόγησης.

Τα βήματα της ανωτέρω διαδικασίας αναπαριστώνται στο Σχήμα 5.3 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.3 : Διαδικασία αξιολόγησης και επιλογής προϊόντων

- *Καταγραφή των προτιμήσεων και αξιοποίηση των αποτελεσμάτων*

Όταν η διαδικασία αξιολόγησης των προϊόντων ολοκληρωθεί, το σύστημα του «εικονικού συμβούλου» καταχωρεί για περαιτέρω επεξεργασία τόσο τις αρχικές επιλογές προϊόντων και κριτηρίων επιλογής όσο και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Τα στοιχεία αυτά συνδυαζόμενα με προσωπικά, δημογραφικά ή άλλα δεδομένα που αφορούν τον καταναλωτή, διαμορφώνουν μια βάση δεδομένων με ιστορικά στοιχεία. Στα πλαίσια των συστημάτων εξόρυξης δεδομένων (data mining), τα ανωτέρω στοιχεία είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν και να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τη θέση των ανταγωνιστικών προϊόντων, για τις προτιμήσεις των καταναλωτών και για τα κριτήρια επιλογής προϊόντων αλλά για την συμβολή κάθε κριτηρίου στη διαμόρφωση της τελικής κατάταξης των προϊόντων.

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω, σημειώνεται ότι ο «εικονικός σύμβουλος επιλογής» θεωρώντας βασικό μοντέλο ποιοτικής κατάταξης των προϊόντων την Περιβάλλουσα Ανάλυση, αποτελεί μια φιλική στη χρήση και χωρίς μεγάλο κόστος ανάπτυξης μέθοδο η οποία παρέχει στους καταναλωτές τη δυνατότητα να διατάξουν ανταγωνιστικά προϊόντα σύμφωνα με την οπτική γωνία που υπαγορεύουν οι προτιμήσεις τους. Μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ένα εργαλείο συλλογής δεδομένων προτίμησης και περαιτέρω ανάλυσης προς όφελος του Μάρκετινγκ.

Η επιλογή των προϊόντων μέσω των ιστοσελίδων του Internet σε ότι αφορά την Ελληνική αγορά, κατά την παρούσα τουλάχιστον χρονική στιγμή, εκτιμάται ότι δεν θα είχε μεγάλη διάδοση. Τούτο διότι απαιτεί από τον καταναλωτή γνώση του χειρισμού των υπολογιστών και απευθύνεται περισσότερο σε φανατικούς χρήστες της τεχνολογίας της πληροφορικής οι οποίοι, προς το παρόν, δεν αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα των καταναλωτών. Η διαδικασία επιλογής προϊόντων μέσω υπολογιστή θεωρείται βαρετή και πολύ «τεχνητή», συγκρινόμενη με την πραγματική

εμπειρία αγοράς προϊόντων στα καταστήματα. Η υλοποίηση του «εικονικού συμβούλου επιλογής» θα πρέπει ακόμη να λάβει υπόψη της την απαραίτητη συγκατάθεση των προμηθευτών και κατασκευαστών για την συμμετοχή των προϊόντων τους στο σύστημα αξιολόγησης που επιχειρείται.

Παράρτημα

Πίνακας παρεχομένων υπηρεσιών επικοινωνίας και δεδομένων.
(Πηγή : www.gsmworld.com/gsminfo/ser_grpa.htm)

	E1	E2	E3
Υπηρεσίες φωνής			
Barring All Calls	X	X	
Barring Incoming Calls	X	X	X
Barring Incoming Calls When Abroad	X	X	X
Barring International Calls	X	X	X
Barring International Calls Except to HNC	X	X	X
Barring Outgoing Calls			X
Call Forward - Forbidden	X		X
Call Forward - On Busy	X	X	X
Call Forward - On No Reply	X	X	X
Call Forward - On Not Reachable	X	X	X
Call Forward - Restricted	X		X
Call Forward - Unconditional	X	X	X
Call Forward - Unrestricted	X	X	X
Call Hold	X	X	X
Call Waiting	X	X	X
CLIP	X	X	X
CLIR	X	X	X
COLP		X	
COLR		X	
Completion of Calls to Busy Subscribers		X	
DTMF Signalling	X	X	X
Immediate Call Itemisation			X
Equipment Identity Register	X		
IMEI Handling in MSCs	X		
Implicit Deregistration	X		X
IMSI Attach/Detach	X		X
Multi Party Calling	X	X	X
Operator Determined Barring	X	X	
Operator Determined Barring		X	X
Voice Mail with SMS Notification	X	X	
Voice Mail with SMS Notification		X	
Ποσοστό επί του συνόλου (%)	0.774194	0.741944	0.709678

	E1	E2	E3
Υπηρεσίες δεδομένων			
Automatic Facsimile Grp 3 - MT	X		X
Data Asynch. 9600bps - MO	X		X
Data Asynch. 9600bps - MT	X	X	X
Data Synch. 9600bps - MO	X	X	
Data Synch. 9600bps - MT	X		
SMS – MO	X		
SMS – MT	X	X	X
SMS Cell Broadcast	X	X	X
SMS Cell Broadcast		X	X
Ποσοστό επί του συνόλου (%)	0.88888889	0.555556	0.666667

Βιβλιογραφία

- Doyle JR, Green RH (1991), “Comparing Products Using Data Envelopment Analysis”, *Omega*, Vol.19, No.6 pp.631-638
- Fishbein M (1967), “Attitude and Prediction of Behaviour” In M. Fishbein, ed. *Readings in Attribute Theory and Measurement*, John Wiley, New York pp.477-492
- Gaffin, A. (1994). “Mall – shopping on the Internet”, *Network World*, Oct 10, 11-41, 4
- Gary L.Lilien, Philip Kotler, K.Sridhar Moorthy (1992), “Marketing Models”, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, ISBN 0-13-545641-X, pp 24-31
- Gupta, Sunil (1995), "HERMES : A research project on the Commercial Uses of the World Wide Web" [url : <http://www.umich.edu/~sgupta/hermes/>]
- Hoffman L. Donna , Thomas P.Novak, Patralli Chatterjee (1995), “Commercial Scenarios for the Web : Opportunities and Challenges”, *Journal of Computer Mediated Communications*, Vol. 1, Special Issue on Electronic Commerce
- Keen WP, Scott-Morton MS(1978), “Decision Support Systems:An organizational perspective”, Reading MA:Addison-Wesley Inc, ISBN 0-201-03667-3
- Lancaster K.(1966), “A New Approach to Consumer Theory”, *Journal of Political Economy*, pp.132-157
- Steiger Patric, Stolze Markus (1997), “Effective Product Selection in Electronic Catalogs”, *Proceedings of CHI'97*, ACM Press
- Wallace, David J.(1995), “Shopping Online : A Sticky Business", *Advertising Age*, April 10,20

Κεφάλαιο 6

Λογισμικό για την επίλυση προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης

Για την επίλυση των προβλημάτων των προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης έχουν αναπτυχθεί διάφορες εφαρμογές λογισμικού. Οι εφαρμογές αυτές προέρχονται είτε από ακαδημαϊκά ιδρύματα και ανεξάρτητους ερευνητές είτε από εταιρείες που εξειδικεύονται στο λογισμικό εφαρμογών επιχειρησιακής έρευνας. Ως προς τα χαρακτηριστικά τους, οι εφαρμογές αυτές επιλύουν όλα σχεδόν τα μοντέλα περιβάλλουσας ανάλυσης σταθερών - μεταβλητών αποδόσεων, προσανατολισμού εισροών και εκροών, περιορισμών των πολλαπλασιαστών κλπ., με ταυτόχρονη παρουσίαση βοηθητικών συμπληρωματικών δεδομένων όπως τα σύνολα των μονάδων αναφοράς, ο διασταυρούμενος πίνακας αποδοτικότητας κλπ. Επιπλέον παρέχουν συμπληρωματικές δυνατότητες όπως η ανταλλαγή δεδομένων από και προς άλλες τυποποιημένες εφαρμογές, η δημιουργία γραφικών παραστάσεων, η εκτύπωση βοηθητικών αναφορών κλπ. Λειτουργούν κυρίως ως αυτόνομες εφαρμογές σε περιβάλλον Windows, ενώ μία μόνο έχει αναπτυχθεί στο περιβάλλον του προγράμματος Microsoft Excel.

Από σχετική έρευνα κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της μελέτης αυτής, πρόκυψε ο πίνακας 6 που ακολουθεί ο οποίος καταγράφει και αποδίδει τα κυριότερα χαρακτηριστικά του διατιθέμενου λογισμικού για προβλήματα Περιβάλλουσας Ανάλυσης.

Πίνακας 6 -Χαρακτηριστικά και δυνατότητες του διατιθέμενου λογισμικού επίλυσης προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης

<i>Ονομασία εφαρμογής</i>	<i>Κατασκευαστής</i>	<i>Ηλεκτρονική Διεύθυνση Αναφοράς</i>	<i>Μοντέλα και δυνατότητες</i>	<i>Περιβάλλον λειτουργίας, τεχνικά στοιχεία</i>	<i>Δυνατότητες ανταλλαγής δεδομένων, υποστήριξη τύπων αρχείων</i>	<i>Όροι διάθεσης</i>
Frontier Analyst	BANXIA SOFTWARE LTD	http://www.scotnet.co.uk/banxia/famain.html , info@banxia.com	Μοντέλα CCR, BCC, περιορισμοί πολλαπλασιαστών, γραφήματα ορίου αποδοτικότητας, υπολογισμός διασταυρούμενου πίνακα αποδόσεων	Windows 95/98/NT, λογισμικό σχεδίασης αναφορών, περιορισμός σε 32 εισροές/εκροές, εμφάνιση λογιστικού φύλλου	Αρχεία κειμένου και MS-EXCEL	Περιορισμός στον αριθμό των μονάδων
EMS	Holger Scheel	http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems	Μοντέλα CCR, BCC, περιορισμοί πολλαπλασιαστών, προσανατολισμός εισροών /εκροών, δείκτης Malmquist, υπερ-αποδοτικότητα	Windows 95/98/NT, εμφάνιση λογιστικού φύλλου, διάθεση ειδικού βοηθητικού προγράμματος για επίλυση γραμμικών προβλημάτων	Αρχεία κειμένου και MS-EXCEL	Ελεύθερο
OnFront	Economic Management and Quality	http://www.emq.se/onfront1.htm , emq@emq.com	Μοντέλα CCR, BCC, δείκτης Malmquist, προσομοίωση για το έλεγχο ευαισθησίας	Windows 95/98/NT, εμφάνιση λογιστικού φύλλου	Αρχεία κειμένου και MS-EXCEL	Περιορισμοί αδειών χρήσης
IDEAS	I Consulting	www.ideas2000.com	Μοντέλα CCR, BCC, περιορισμοί πολλαπλασιαστών, προσανατολισμός εισροών /εκροών, υποστήριξη κατηγορικών μεταβλητών	Windows 95/98/NT, εμφάνιση λογιστικού φύλλου	Αρχεία κειμένου και MS-EXCEL	Περιορισμοί αδειών χρήσης
Warwick-DEA	Warwick Business School, Warwick University	http://www.warwick.ac.uk/~bsrlu/dea/deas/deas1.htm , orset@wbs.warwick.ac.uk	Μοντέλα CCR, BCC, περιορισμοί πολλαπλασιαστών, προσανατολισμός εισροών /εκροών, υπολογισμός διασταυρούμενου πίνακα αποδόσεων, υπερ-αποδοτικότητα	Windows 95/98/NT, περιορισμός σε 32 εισροές/ εκροές, εμφάνιση λογιστικού φύλλου	Αρχεία κειμένου και MS-EXCEL	Περιορισμοί αδειών χρήσης
DEAP	Tim Coelli, University of New England, Australia	http://www.une.edu.au/econometrics/deap.htm , tcoelli@metz.une.edu.au	Μοντέλα CCR, BCC, προσανατολισμός εισροών /εκροών, δείκτης Malmquist, ειδικές επεκτάσεις για οικονομικές εφαρμογές	MS-DOS, σε γλώσσα Fortran, χωρίς περιορισμούς μεταβλητών και μονάδων	Αρχεία κειμένου	Ελεύθερο
DEA-Solver	W.Cooper, L.M. Seiford, K. Tone	http://www.saitech-inc.com	Μοντέλα CCR, BCC, προσανατολισμός εισροών /εκροών, περιορισμοί πολλαπλασιαστών, δείκτης Malmquist, πολλές επεκτάσεις και μοντέλα για ειδικές περιπτώσεις	Windows 95/98/NT, ενσωματωμένη εφαρμογή στο MS-Excel	Δυνατότητες χειρισμού αρχείων που διαθέτει το πρόγραμμα Excel	Διατίθεται σε δύο εκδόσεις, την εκπαιδευτική και την επαγγελματική

Στα πλαίσια της διατριβής αυτής, πέραν της βασικής έρευνας, αναπτύχθηκε ειδικό λογισμικό επίλυσης προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης το οποίο λειτουργεί ως πρόσθετο βοηθητικό εργαλείο (add-in) στο πρόγραμμα Microsoft Excel. Το λογισμικό αυτό επιλύει τα βασικά μοντέλα CCR, BCC με προσανατολισμό εισροών / εκροών και υποστηρίζει την ύπαρξη περιορισμών (weight restrictions) στους πολλαπλασιαστές. Η βασική διαφορά από το λογισμικό του Πίνακα 6 είναι ότι επιπλέον επιλύει προβλήματα με μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα, εφαρμόζοντας τα μοντέλα που ήδη έχουν περιγραφεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

Η επιλογή για την ανάπτυξη του ως πρόσθετου βοηθητικού εργαλείου ενσωματωμένου (add-in) στο περιβάλλον του προγράμματος Microsoft Excel έχει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των περιπτώσεων αυτόνομων εφαρμογών. Το λογισμικό διαχείρισης λογιστικών φύλων (spreadsheets) και ιδιαιτέρως το πρόγραμμα Excel, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στο πλαίσιο των πληροφοριακών συστημάτων επιχειρήσεων και οργανισμών. Προσφέρει ένα φιλικό και τυποποιημένο στη χρήση περιβάλλον λειτουργίας με δυνατότητες εφαρμογής ενσωματωμένων πολλών ειδών συναρτήσεων (μαθηματικών, στατιστικών, οικονομικών κλπ), εμφάνισης παραμετρικής δημιουργίας γραφημάτων και αναφορών, εισαγωγής δεδομένων από αυτόνομα αρχεία ή βάσεις δεδομένων κλπ. Το περιβάλλον των λογιστικών φύλων αποτελεί επίσης ικανοποιητικό από τεχνικής άποψης υπόβαθρο για την ανάπτυξη και λειτουργία συστημάτων υποστήριξης αποφάσεων, αφού παρέχει δυνατότητες ενσωμάτωσης μοντέλων ανάλυσης δεδομένων για την επίλυση εξειδικευμένων προβλημάτων. Σε περιπτώσεις όπως αυτή της Περιβάλλουσας Ανάλυσης παρέχει σημαντικές ευκολίες για τη διαμόρφωση του αρχικού συνόλου των δεδομένων τα οποία πιθανώς προέρχονται από διαφορετικές πηγές (βάσεις δεδομένων, αρχεία διαχειριστικών εφαρμογών κλπ), επιτρέπει την δημιουργία βοηθητικών συγκεντρωτικών αναφορών και νέων συνόλων δεδομένων για περαιτέρω ειδική επεξεργασία (post-DEA analysis), επεξήγηση και ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Στο λογισμικό που έχει αναπτυχθεί, το μέρος της διεπαφής (interface) με τον χρήστη, έχει αναπτυχθεί στην ενσωματωμένη στο Excel γλώσσα Visual Basic. Για την επίλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού καλείται εξωτερικό ειδικό υποπρόγραμμα (LP solver) το οποίο έχει αναπτυχθεί από το Τμήμα Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς σε γλώσσα C++.

Η επιλογή του λογισμικού ως πρόσθετου βοηθητικού εργαλείου Excel καθώς και η επιλογή της γλώσσας προγραμματισμού, καθιστά το πρόγραμμα ανοικτό σε κάθε νέα μελλοντική προσθήκη άλλων σχετικών μοντέλων και μεθόδων. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται η δυνατότητα για σταδιακή ανάπτυξη συλλογής των μοντέλων που είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την αποτελεσματική λειτουργία των συστημάτων υποστήριξης αποφάσεων.

Σε ότι αφορά τα μοντέλα Περιβάλλουσας Ανάλυσης, το λογισμικό αυτό ενσωματώνει τις τυπικές εκφράσεις των μοντέλων CCR, BCC για δεδομένα με ακριβείς τιμές, με προσανατολισμό εισροών / εκροών, με περιορισμούς των πολλαπλασιαστών και εκτίμηση της υπερ-αποδοτικότητας (Modified DEA- MDEA). Για την περίπτωση των ασαφών δεδομένων χρησιμοποιεί το γενικευμένο μοντέλο. Σε αυτό οι τιμές των παραμέτρων ε και δ ορίζονται από τον χρήστη. Σε όλες τις περιπτώσεις προβλέπεται επιλογή για τυποποίηση της κλίμακας μέτρησης των δεδομένων των εισροών / εκροών (rescale).

Ο τρόπος λειτουργίας του λογισμικού είναι κατά βήματα ο εξής :

1. Σε ένα φύλλο εργασίας διαμορφώνονται οι τιμές των εισροών και εκροών των μονάδων του προβλήματος. Σε κάθε εισροή και εκροή απαιτείται να υπάρχει επικεφαλίδα με την ονομασία της ακολουθούμενη από συμβολική ένδειξη του τύπου των δεδομένων ως εξής :

- {I} Εισροή με ακριβής τιμές
- {I-O} Εισροή με τιμές διάταξης
- {I-I} Εισροή με τιμές μορφής διαστημάτων
- {O} Εκροή με ακριβής τιμές
- {O-I} Εκροή με τιμές μορφής διαστημάτων
- {O-O} Εκροή με τιμές διάταξης

Η διάταξη των δεδομένων για όλα τα μοντέλα παρουσιάζεται στις εικόνες που ακολουθούν.

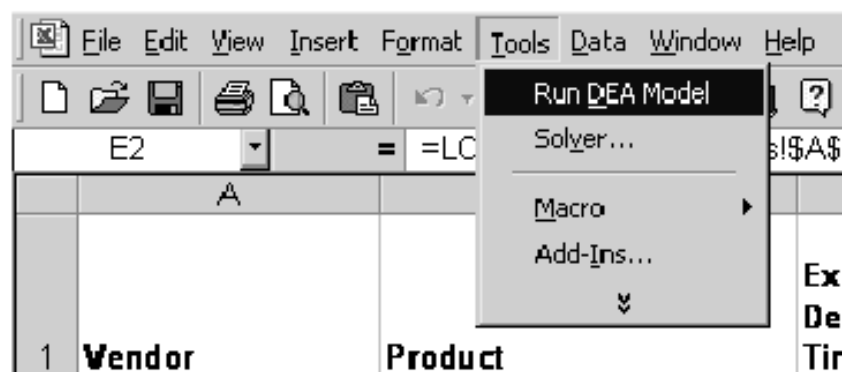
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		X1{I}	X2{I}	X3{I}	Y1{O}	Y2{O}						
2	DMU1	1	44	45	46	5						
3	DMU2	32	54	3	47	48						
4	DMU3	33	34	47	48	4						
5	DMU4	4	35	6	84	5						
6	DMU5	1	36	5	6	5						
7	DMU6	42	43	3	86	87						
8												
9	weights											
10		X1	X2	X3	Y1	Y2	OP					
11	W1	1	2	3	5	2	GE	3				
12	W2	2	3	4	6	3	LE	4				
13	W3	3	4	5	7	4	EQ	5				
14	W4	4	5	6	8	5	EQ	6				
15	W5	5	2	7	9	6	GE	7				

Η διάταξη των δεδομένων για τα μοντέλα CCR, BCC με περιορισμούς πολλαπλασιαστών

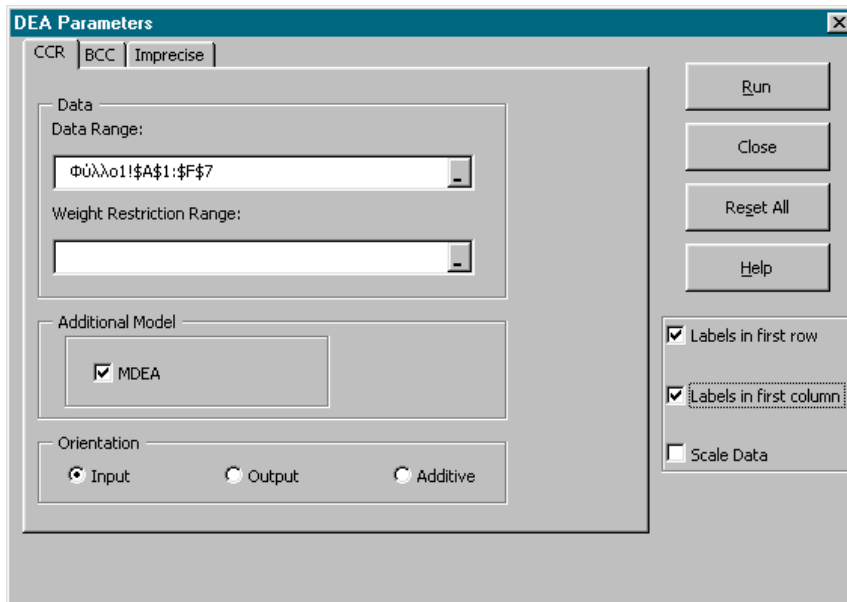
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		X1{I}	X2{H}	X2{H}	Y1{O}	Y2{O-O}						
2	DMU1	100	0.6	0.7	2000	4						
3	DMU2	150	0.8	0.9	1000	2						
4	DMU3	150	1	1	1200	5						
5	DMU4	200	0.7	0.8	900	1						
6	DMU5	200	1	1	600	3						

Η διάταξη των δεδομένων για το μοντέλο ασαφών δεδομένων
(Imprecise DEA)

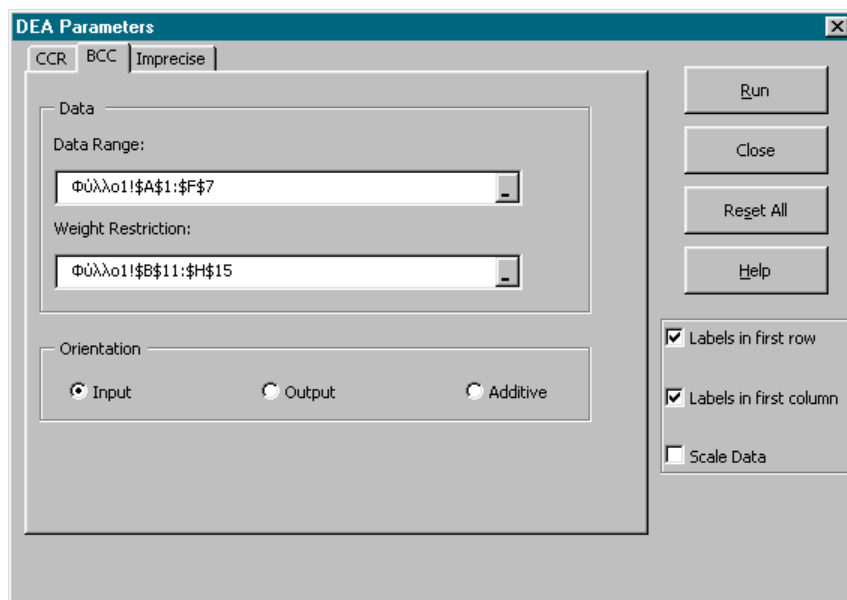
2. Ενεργοποιείται το λογισμικό το οποίο έχει προηγουμένως εγκατασταθεί ως πρόσθετο εργαλείο (add-in) στο Excel από την ομάδα εντολών Tools, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα.



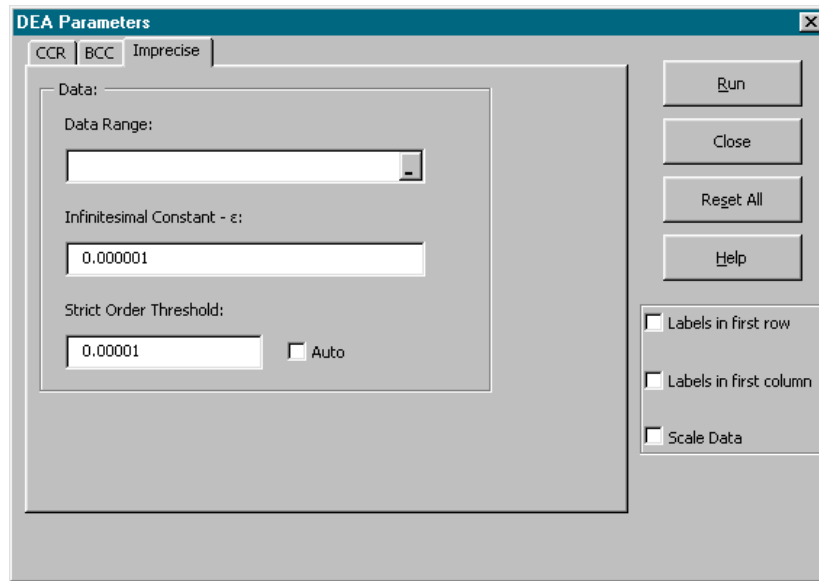
3. Επιλέγεται το μοντέλο και ορίζονται τα δεδομένα και οι παράμετροι. Για κάθε μοντέλο υπάρχει ειδικά προσαρμοσμένη οθόνη επιλογής ως εξής :



Η οθόνη ορισμού δεδομένων και επιλογής παραμέτρων για το μοντέλο CCR



Η οθόνη ορισμού δεδομένων και επιλογής παραμέτρων για το μοντέλο BCC



Η οθόνη ορισμού δεδομένων και επιλογής παραμέτρων για το μοντέλο ασαφών δεδομένων (Imprecise DEA)

4. Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας παρουσιάζονται σε ξεχωριστό νέο λογιστικό φύλλο που δημιουργεί το πρόγραμμα. Αναλόγως του μοντέλου που επιλέχθηκε, σε αυτό παρουσιάζονται οι τιμές αποδοτικότητας, οι τιμές των πολλαπλασιαστών, το σύνολο αναφοράς για κάθε μη αποδοτική μονάδα, οι δείκτες αντοχής κλπ.

Αναλυτικά, η μορφή των αποτελεσμάτων έχει ως εξής:

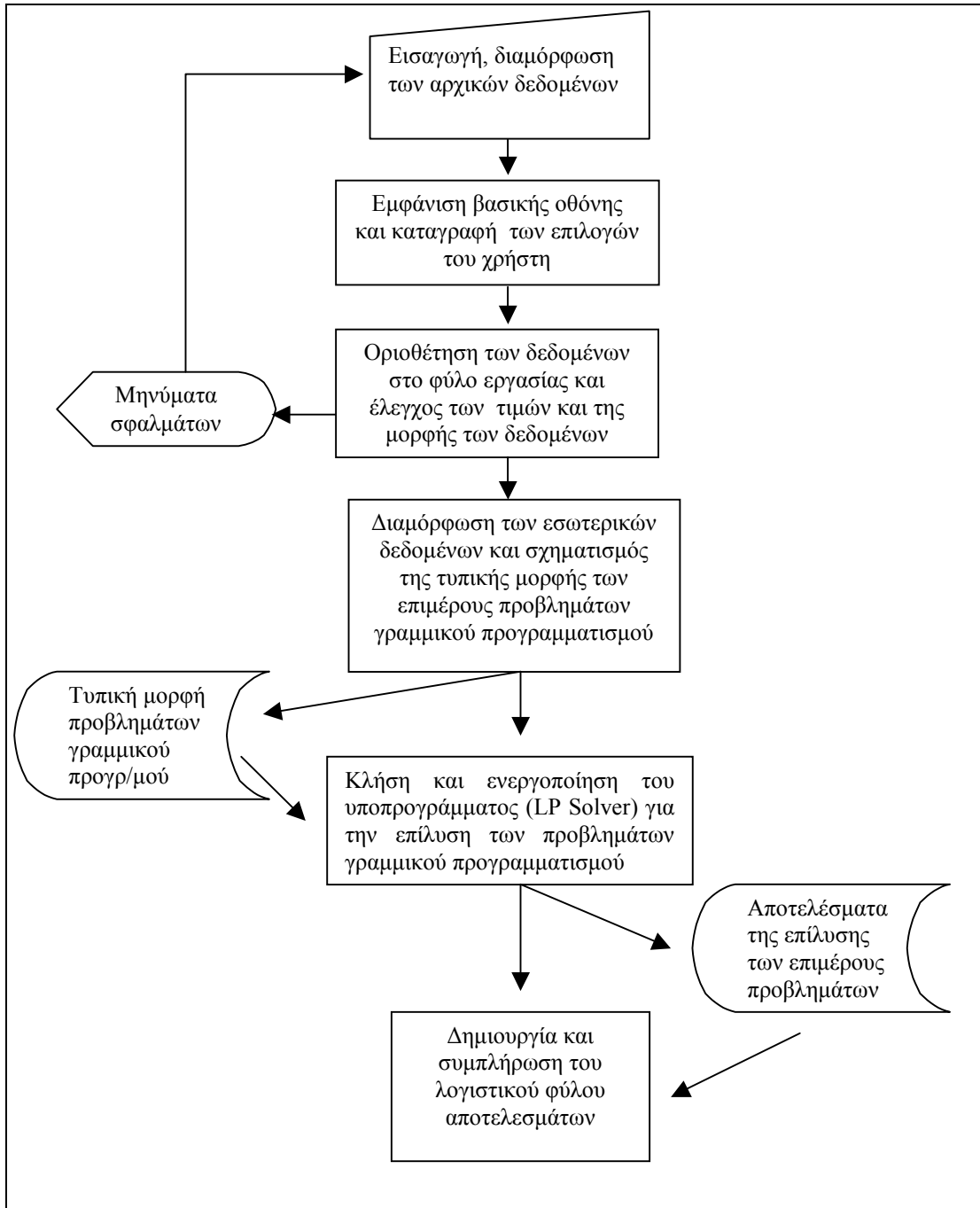
DMU	Efficiency	Reference Benchmarks	Virtual DMUs	Weights
			X1{I} X2{I} X3{I}	Y1{O} Y2{O}
1 DMU1	1			
2 DMU2	0.719519 (5,6)	5(0.104),6(23.02498 27.22051	2.158592 47.55855
3 DMU3	0.591136 (4,6)	4(0.557),6(2.814772 20.10003	3.384705 48
4 DMU4	1			
5 DMU5	1			
6 DMU6	1			

Η μορφή του λογιστικού φύλλου των αποτελεσμάτων στις περιπτώσεις των μοντέλων CCR και BCC

DMU	L - Efficient Efficiency	ρ	σ	Variable Levels
				X1{I-I} X2{I-I} Y1{O-I}
1 DMU1	0.224456	1 E+	0.733471	0.25 12 0.21
2 DMU2	0.227132	1 E+	0.864583	10 0.1
3 DMU3	0.822837	1 E+	1	4 0.16
4 DMU4	0.445259 0.907059	E-	0.438313	0.191396 19 0.12
5 DMU5	1	1 E++	1	1 14 0.06

Η μορφή του λογιστικού φύλλου των αποτελεσμάτων του μοντέλου για μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα.

Ακολουθεί ένα συνοπτικό λογικό διάγραμμα του προγράμματος.



Λογικό διάγραμμα του προγράμματος επίλυσης προβλημάτων Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα

Συμπεράσματα, ερευνητικές κατευθύνσεις

Στην παρούσα διατριβή επιχειρήθηκε επέκταση της κλασσικής Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί προβλήματα στα οποία συνυπάρχουν δεδομένα με ακριβείς τιμές και μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς διατυπώθηκε γραμμικό μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης για δεδομένα μορφής διαστημάτων, εκτιμήθηκαν τα όρια των τιμών αποδοτικότητας, μέσω των δεικτών αντοχής διερευνήθηκε η ικανότητα των μονάδων να διατηρούν την αποδοτικότητά τους σε ανταγωνιστικές συνθήκες και ορίσθηκαν όρια βελτίωσης για τις μη αποδοτικές μονάδες ώστε να καταστούν αποδοτικές. Το μοντέλο για δεδομένα διαστημάτων στη συνέχεια επεκτάθηκε ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί και δεδομένα διάταξης. Η επέκταση αυτή της Περιβάλλουσας Ανάλυσης σε μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα είχε ως άμεσο αποτέλεσμα την δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου σε νέα πεδία όπως αυτό της εκτίμησης της μελλοντικής αποδοτικότητας των μονάδων και της κατάταξης των προϊόντων ως προς ποιοτικούς δείκτες.

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για το χειρισμό των ασαφών δεδομένων, συγκρινόμενη με την προηγούμενη περιορισμένη ερευνητική δραστηριότητα σε αυτό το γνωστικό πεδίο, πλεονεκτεί στο γεγονός ότι επιτρέπει τη διατύπωση πολλών συμπληρωματικών μοντέλων ώστε να μελετηθεί διεξοδικά η συμπεριφορά της αποδοτικότητας των μονάδων υπό καθεστώς ασάφειας των δεδομένων. Τα μοντέλα που διατυπώνονται δεν απαιτούν αλλαγή της κλίμακας και μετασχηματισμούς των δεδομένων και υλοποιούνται εύκολα με λογισμικό ακόμα και σε περιβάλλον λογιστικών φύλλων. Η τεχνική του χειρισμού των ασαφών δεδομένων και της διατύπωσης των προγραμμάτων γραμμικού προγραμματισμού μπορεί εύκολα να μεταφερθεί και σε άλλες μεθόδους πολυκριτήριας ανάλυσης και πολυμεταβλητής στατιστικής ανάλυσης δεδομένων.

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω, η παρούσα διατριβή, στα πλαίσια της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, συνεισφέρει τα ακόλουθα :

1. Αναπτύσσει την απαραίτητη μεθοδολογική υποδομή για τον χειρισμό ασαφών δεδομένων διατυπώνοντας τα σχετικά μοντέλα για την εκτίμηση και τον έλεγχο της ευαισθησίας της αποδοτικότητας των μονάδων, την ταξινόμηση και την κατάταξη αυτών
2. Προτείνει την Περιβάλλουσα Ανάλυση σε νέα πεδία εφαρμογών στα οποία μέχρι σήμερα η ερευνητική δραστηριότητα ήταν περιορισμένη
3. Εντάσσει τη μέθοδο σε πλαίσιο συστήματος υποστήριξης επιλογής προϊόντων μέσω του διαδικτύου.

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση για μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα μπορεί να επεκταθεί σε νέα ερευνητικά πεδία. Στη συνέχεια αναφέρονται ενδεικτικά μερικές κατευθύνσεις για περαιτέρω διερεύνηση.

Βασική υπόθεση για την ανάπτυξη της παρούσας εργασίας ήταν η απουσία αρχικών πληροφοριών για την κατανομή των τιμών των μονάδων εντός των διαστημάτων. Όμως, εκτιμάται ότι σε ειδικές περιπτώσεις εφαρμογών υπάρχει διαθέσιμη αρχική συμπληρωματική πληροφορία σχετικά με τη πιθανότητα της θέσης των τιμών δεδομένων εντός των διαστημάτων. Το πρόβλημα της ενσωμάτωσης τέτοιων πληροφοριών στο μοντέλο Περιβάλλουσας Ανάλυσης με μη ακριβή (ασαφή) δεδομένα αποτελεί μια πρώτη, ανοικτή προς περαιτέρω διερεύνηση ερευνητική κατεύθυνση. Η πραγματοποίηση εκτεταμένων προσομοιώσεων και επίλυση των αντιστοίχων προβλημάτων που θα προέκυπταν, η απ' ευθείας χρήση πιθανοθεωρητικών

περιορισμών στα γραμμικά μοντέλα και η επέκταση στο χώρο της ασαφούς λογικής είναι μερικές ενδεικτικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό.

Στα μοντέλα που διατυπώθηκαν για τον χειρισμό των ασαφών δεδομένων, δεν ορίστηκαν κανενός είδους περιορισμοί στους πολλαπλασιαστές για τη στάθμιση και τη διαφοροποίηση της σημασίας των εισροών / εκροών. Όπως ήδη έχει αναφερθεί στο πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο, οι περιορισμοί επί των πολλαπλασιαστών αλλάζουν τη συμπεριφορά της αποδοτικότητας των μονάδων, περιορίζουν το όριο αποδοτικότητας και μερικές φορές οδηγούν σε μη εφικτά προβλήματα. Η περαιτέρω διερεύνηση διαφόρων τύπων περιορισμών οι οποίοι μάλιστα να αναφέρονται ταυτοχρόνως σε εισροές / εκροές όλων των τύπων των δεδομένων, θα αποτελούσε ακόμη μια ερευνητική κατεύθυνση για την επέκταση της μεθόδου.