Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

«Μελέτη μέτρων χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος με δύο χαρτοφυλάκια κινδύνων»

Λάζαρος Κ.Κανελλόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής

Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των

απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού

Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

«Μελέτη μέτρων χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος με δύο χαρτοφυλάκια κινδύνων»

Λάζαρος Κ.Κανελλόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής

Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των

απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού

Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή

Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και

Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του

Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)

- Λέκτορας Ψαρράκος Γεώργιος

- Λέκτορας Βρόντος Σπυρίδων

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και

Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAMME IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Lazaros K.Kanellopoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

Στους Γονείς μου

Μαρία και Κωνσταντίνο

Στο θείους μου

Κωνσταντίνο και Σοφία

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας αναπληρωτή καθηγητή κύριο Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο για την πολύτιμη βοήθειά του και την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη την διάρκεια της συγγραφής της. Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ψυχολογική και οικονομική υποστήριξή τους χωρίς την οποία δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση των σπουδών μου. Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω τους φίλους μου και την κοπέλα μου για την στήριξη που μου παρείχαν όλο αυτό τον καιρό, καθώς και την πίστη που δείχνουν στις δυνατότητές μου.

Περίληψη

Η θεωρία κινδύνου πραγματέυεται πλην των άλλων προβλημάτων, την μελέτη της εύρυθμης λειτουργείας ενός ασφαλιστικού οργανισμού μέσω της μελέτης διαφόρων μέτρων κινδύνου, όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην επαρκούν για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Πρόσφατα, οι Gerber-Shiu με την εργασία τους “On the time value of ruin” [(1998) North American Actuarial Journal],ενσωμάτωσαν όλα τα μέτρα χρεοκοπίας, που ενδιαφέρουν έναν ασφαλιστικό οργανισμό σε μια μόνο συνάρτηση. Σκοπός της συγκεκριμένης διατριβής είναι η μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu (ή της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτηση ποινής) σε μοντέλα κινδύνων, όπου οι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών και τα μεγέθη των αντίστοιχων ζημιών παρουσιάζουν (ανομοιογένεια) εξάρτηση μεταξύ τους. Σε αυτήν διατριβή θα θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνου με δύο πηγές κινδύνων ή δύο από κοινού χαρτοφυλάκια κινδύνων, έτσι ώστε οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών στα δύο χαρτοφυλάκια να είναι εν γένει διαφορετικοί μεταξύ τους.

Πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 1 δίνουμε αναλυτική περιγραφή του ανανεωτικού μοντέλου Erlang(2),το οποίο αποτελεί γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας και ασχολούμαστε με μέτρα κινδύνου της συνάρτησης Gerber-Shiu για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Στο κεφάλαιο 2 παραθέτουμε μια αναλυτική περιγραφή ενός μη-ανανεωτικού μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου υποθέτουμε ότι στην πρώτη και στην δεύτερη κλάση ο αριθμός των κινδύνων είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με γενικευμένους χρόνους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους αντίστοιχα. Επίσης δείχνουμε πώς η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και δίνουμε λύση αυτής.

Στο κεφάλαιο 3 τόσο ανανεωτικό μοντέλο, όσο και στο μη-ανανεωτικό μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων που δώσαμε στο κεφάλαιο 2, εισάγουμε μια στρατηγική σταθερού μερίσματος και δείχνουμε τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής.

Τέλος, στο κεφάλαιο 4 δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για το μη-ανανεωτικό μοντέλο για την θεωρία χρεοκοπίας.

Abstract

The expected discounted penalty function or the Gerber-Shiu function is one of the most powerful and commonly used tool in the mathematical risk theory. Recently, many authors have paid much attention to the study of the Gerber-Shiu function in the classical and the renewal risk model.

The main focus of this dissertation is to provide a detailed analysis of the Gerber-Shiu function in various dependent structures risk models.

In Chapter 1 we give a detailed introduction of the Sparre-Andersen risk model and we present known results for the Gerber-Shiu function in this model. Also, we consider a risk model that the number processes are generalized Erlang(2) processes. Furthermore, in the same chapter we define, and analyze the mathematical tools that we will use repeatedly in the main core of this dissertation.

In Chapter 2 we consider the expected discounted penalty (Gerber-Shiu) functions for a risk model involving two independent classes of insurance risks. We assume that the two claim number processes are independent Poisson and generalized Erlang(2) processes, respectively. We prove that the Gerber-Shiu function satisfies some defective renewal equations. Exact representations for the solutions of these equations are derived through an associated compound geometric distribution and an analytic expression for this quantity is given when the claim severities have rationally distributed Laplace transforms.

In Chapter 3 the same risk model of Chapter 1 and Chapter 2 is considered in the presence of a constant dividend barrier. A system of integro-differential equations with certain boundary conditions for the Gerber-Shiu function is derived and solved.

Finally, in Chapter 4 numerical illustrations are also given of ruin probability for this risk model.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
$\mathbb{R}$	σύνολο πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	σύνολο μιγαδικών αριθμών
$\Re(x)$	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού x
$\frac{\partial}{\partial u}$	τελεστής παραγώγισης ως προς u
$\star$	τελεστής συνέλιξης μεταξύ των συναρτήσεων
$a \wedge b$	minimum των a και b
$\mathcal{F}$	$\sigma - άλγεβρα$ πάνω στο χώρο πιθανότητας Ω
$\mathbb{P}$	μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$
$\mathbb{E}$	μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{p}$, $\mathbb{E}(\cdot) = \int_{\Omega} x d\mathbb{P}(x)$
$I_{(A)}$	δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A
$\mathcal{L}^{-1}$	ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
$A^{\top}$	ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα A
$\otimes$	γινόμενο Kronecker

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ή μοντέλο Cramer-Lundberg,το οποίο αποτελεί την αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου, εισήχθη αρχικά από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg (1903) στη διδακτορική διατριβή του (Approximerad fremstallnig au sannolikheets funktionen, Upsalla).Ο Lundberg παρατήρησε πως η διαδικασία Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μοντέλα ασφαλίσεων. Στη συνέχεια, ο Harald Cramer,κατάφερε να ενσωματώσει τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από τη διαδικασία Poisson.Η γενίκευση του μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε στο 15ο αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την Εργασία "On the collective theory of risk in case of contagion between the claims".Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία. Όπως επίσης, ακολούθησαν πολλές γενικεύσεις του κλασσικού μοντέλου, χρησιμοποιώντας διάφορες κατανομές για την περιγραφή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

1.1 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Το βασικό πρόβλημα της (κλασικής) θεωρίας κινδύνου, που είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων. Στην ασφαλιστική ορολογία, τα εν λόγω αποθεματικά (ή ακριβέστερα η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών αποζημιώσεων) χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα.

Αρχικά για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας, πρέπει να προσδιορίσουμε τον αριθμό των κινδύνων, στον οποίο εκτίθεται. Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Τότε η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1. *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν*

(i) $N(t) > 0$, $N(0)=0$,
(ii) $N(t)$ *είναι διακριτή* ,
(iii) αν $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$,

Μια χρήσιμη για την συγκεκριμένη εργασία, αλλά και ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στη θεωρία ουρών όσο και στη θεωρία κινδύνου είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Έστω $\{W_i\}_{i=0}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ. $F_w(t)$, σ.π.π. $f_w(t)$,μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_w(s)$=$\int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t) \; dt$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(W) < \infty$, όπου W_i είναι ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της i-ζημιάς (ενδεχομένου). Τότε ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.2. *Έστω μια ακολουθία* $\{W_i\}_{i=0}^{\infty}$ *μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ. .Η ακολουθία*$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\sigma_0=0$, *με* $\sigma_n= W_1+W_2+\ldots+W_n$ *ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *με N(0)=0 που δίνεται από την σχέση*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n \leq t)},$$

και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$,ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.
Από τον Ορισμό 1.2 παρατηρούμε ότι για κάθε ανανεωτική ανέλιξη ισχύει ότι

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\} . \tag{1.1}$$

Η ερμηνεία της σχέσης (1.1) είναι η εξής: Το ενδεχόμενο { $N(t)$= n } σημαίνει ότι έχουμε n γεγονότα εώς το χρόνο t.

Όμως, το ενδεχόμενο $\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα (ανανεώσεις) είναι t.
Επειδή οι παραπάνω εκφράσεις περιγράφουν το ίδιο ενδεχόμενο, έπεται ότι η (1.1) είναι αληθής.

Θεώρημα 1.1. *Έστω* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} .$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $N(t)$,οι ανισότητες $\sigma_n \le t < \sigma_{n+1}$ ισχύουν με πιθανότητα 1.Διαιρώντας τις παραπάνω ανισότητες με $N(t)$ και χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(W_1) \le \lim_{t\to\infty}\frac{\sigma_n}{n} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} \le \lim_{t\to\infty}\frac{t}{N(t)}$$
$$\le \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+1}}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \mathbb{E}(W_1)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Ένα βασικό θεώρημα στη θεωρία στοχαστικών ανελίξεων είναι το «στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα» (ή Elementary Renewal Theorem).Παραθέτουμε την απόδειξη του, αλλά πρώτα θα δώσουμε την απόδειξη ενός Λήμματος που είναι αναγκαίο για την συγκεκριμένη απόδειξη.

Λήμμα 1.1. *Ισχύει η σχέση*

$$\mathbb{E}[\sigma_{N(t)+1}] = \mathbb{E}[W_1+W_2+\ldots+W_{N(t)+1}]$$
$$= \mathbb{E}[W_1]\mathbb{E}[N(t)+1] = \mathbb{E}[W_1][\mathbb{E}[N(t)]+1]$$

$\alpha\nu\, \mathbb{E}[W_1] < \infty$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω ανανεωτικό επιχείρημα για να προσδιορίσουμε μια ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση $A(t) = E[\sigma_{N(t)+1}]$

Δεσμεύοντας ως προς το πρώτο ανανεωτικό χρόνο και εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε,

$$A(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sigma_{N(t)+1}\middle|W_1 = w\right]dF_w(w) .$$

Όμως είναι $E\left[\sigma_{N(t)+1}\middle|W_1 = w\right] = \begin{cases} w & \alpha\nu\; w > t \;, \\ w + A(t-w) & \alpha\nu\; w \le t\,. \end{cases}$

Άρα, $A(t) = \int_0^t [w + A(t-w)]dF(w) + \int_0^\infty w dF_w(w)$

$$= \int_0^\infty w dF_w(w) + \int_0^t A(t-w)dF_w(w)$$
$$= \mathbb{E}(W_1) + \int_0^t A(t-w)dF_w(w).$$

Δηλαδή, η $A(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση με $a(t) = \mathbb{E}(W_1)$.Και γνωρίζοντας ότι η $a(t)$ είναι φραγμένη, έπεται ότι

$$A(t) = \mathbb{E}(W_1) + \int_0^t \mathbb{E}(W_1)d\mathbb{E}\big(N(w)\big)$$
$$= \mathbb{E}(W_1)[1 + \mathbb{E}[N(t)].$$ ■

Θεώρημα 1.2. (Elementary Renewal Theorem). *Έστω* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη.Τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N(t))}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} \quad .$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $t < \sigma_{N(t)+1}$. Από το Λήμμα 1.1. έπεται ότι

$$t < \mathbb{E}\big[\sigma_{N(t)+1}\big] = \mathbb{E}(W_1)\big[1 + \mathbb{E}\big(N(t)\big)\big]$$

από την οποία παίρνουμε

$$\frac{1}{t}\,\mathbb{E}\big(N(t)\big) > \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} - \frac{1}{t}\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{t\to\infty} inf\, \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\big(N(t)\big) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} \tag{1.2}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\lim_{t\to\infty} sup\, \frac{1}{t}\,\mathbb{E}(N(t)) \leq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}$.

Για ευκολία θέτουμε $M(t) = \mathbb{E}\big(N(t)\big)$ και $m = \mathbb{E}(W_1)$,

για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις εξής τ.μ. :

$$W_i^c = \begin{cases} W_i & , \alpha\nu\ W_i \leq c \\ c & , \alpha\nu\ W_i > c \end{cases}$$

και θεωρούμε την ανανεωτική διαδικασία που έχει ενδιάμεσους χρόνους τις τ.μ. $\{W_i^c\}$
Έστω σ_n^c και $N^c(t)$ οι χρόνοι αναμονής και η απαριθμήτρια διαδικασία που παράγεται από τις $\{W_i^c\}$.Αφού οι τ.μ. W_i^c είναι ομοιόμορφα φραγμένες από το c,είναι φανερό ότι

$$t + c \geq \sigma^c_{N^c(t)+1} \quad ,$$

και επομένως,

$$t + c \geq \mathbb{E}\big[\sigma^c_{N^c(t)+1}\big] = \mathbb{E}(W_i^c)\big[1 + \mathbb{E}\big(N^c(t)\big)\big] \tag{1.3}$$

όπου $m^c = \mathbb{E}(W_i^c) = \int_0^c [1 - F(w)dw$ και $M^c(t) = \mathbb{E}\big(N^c(t)\big)$.
Από το ότι $W_i^c \leq W_i$ έπεται ότι $N^c(t) \geq N(t)$ και άρα $M^c(t) \geq M(t)$. Επομένως από την σχέση (1.3) παίρνουμε ότι

$$t + c \geq m^c[1 + M(t)]$$

ή

$$\frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} + \frac{1}{t}\Big(\frac{c}{m^c} - 1\Big),$$

οπότε

$$\lim_{t\to\infty} sup\, \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} \tag{1.4}$$

για οποιαδήποτε c$>$ 0.

Αλλά, $\lim\limits_{c\to\infty} m^c = \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c [1 - F(w)dw = \int_0^\infty [1 - F(w)]dw = m.$

Επομένως η (1.4) μας δίνει $\lim\limits_{t\to\infty} sup \frac{1}{t} M(t) \leq \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{m^c} = \frac{1}{m}$ ή

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t} \mathbb{E}\big(N(t)\big) \leq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}\,. \qquad (1.5)$$

Από τις σχέσεις (1.2) και (1.5) έχουμε το ζητούμενο. ■

Από τον Ορισμό 1.2. της ανανεωτικής διαδικασίας, έπεται ότι ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ενδεχομένων προκύπτει και διαφορετική στοχαστική ανέλιξη. Έτσι, μια ειδική περίπτωση είναι η διαδικασία Poisson, όπου ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Ένας ισοδύναμος ορισμός, της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, είναι ο εξής :

Ορισμός 1.3. *Μια απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$,ονομάζεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, με $\lambda > 0$ αν :*

(i) $N(0) = 0$.

(ii) Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις .

(iii) Για κάθε $t > 0$ θετικό η $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt :

$$Pr(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2 \ldots$$

1.2.Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Αφού μοντελοποιήσαμε τον αριθμό των ζημιών, έπεται η μοντελοποιήση των αποθεματικών ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Έτσι θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων, όπου το πλεόνασμα περιγράφεται από την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος,$\{U(t), t > 0\}$, ορισμός της οποίας δίνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.4.(surplus process) *Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t > 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από τη σχέση*

$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.6}$$

όπου :

$u\ (\geq 0)$*: αρχικό αποθεματικό ,*

c *: ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνο,*

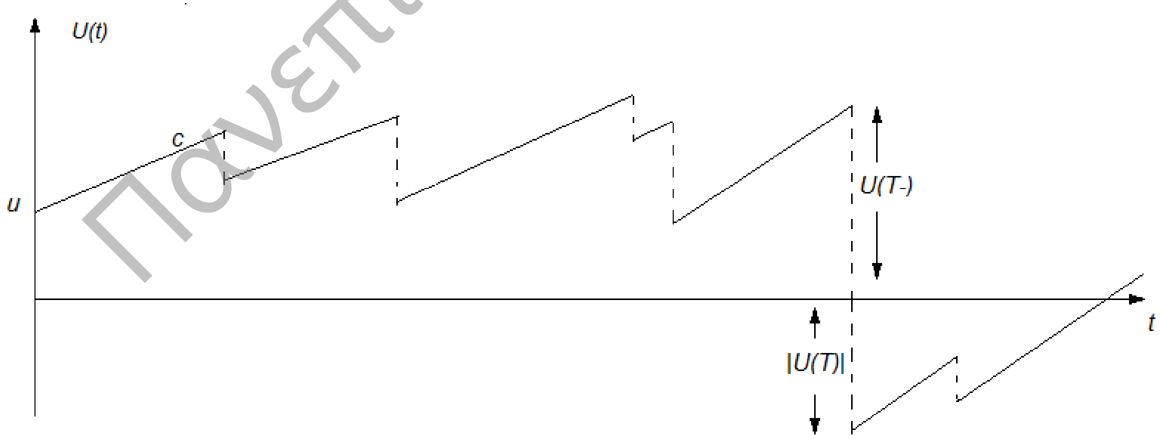
$S(t)$ *: οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0, t]$,

με

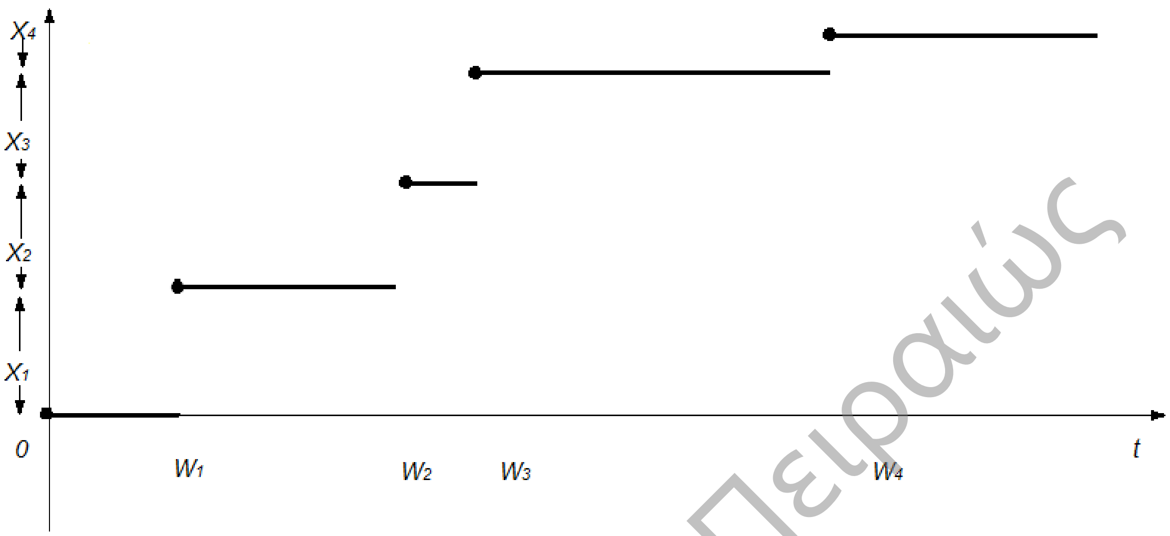
$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

όπου $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.,με X_i που περιγράφει το μέγεθος της i-οστής ζημιάς.Θεωρούμε ότι η τ.μ. X_i έχει σ.π.π. $f(x)$, σ.κ. $F(x) = \Pr(X \leq x)$ και μέση τιμή $m = \mathbb{E}(X) < \infty$. Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι διαδικασίες $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες.

Σχήμα 1.1.Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$



Σχήμα 1.2: Η διαδικασία αποζημιώσεων $S(t)$



Από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) (βλ. και σχήμα 1.1.) παρατηρούμε ότι οι δειγματοσυναρτήσεις της $U(t)$ εμφανίζουν άλματα (προς τα κάτω) κατά τις χρονικές στιγμές W_i επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων.Τα άλματα είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα (προς τα πάνω) της $S(t)$, με τη διαφορά ότι μια δειγματοσυνάρτηση της $S(t)$ είναι κλιμακωτή(η $S(t)$ έχει σταθερή τιμή μεταξύ δύο διαδοχικών W_i) ενώ η αντίστοιχη δειγματοσυνάρτηση της $U(t)$ είναι, μεταξύ διαδοχικών W_i , ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση και συγκεκριμένα με συντελεστή διέυθυνσης c. (βλ. σχήμα 1.2)

Στο μοντέλο Sparre Andersen θεωρούμε ότι η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Από τον Ορισμό 1.4**.** παρατηρείται ότι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

Ορισμός 1.5.(time to ruin) *Η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και δίνεται από την σχέση*

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) < 0\}, & \text{για όλα τα } t \\ \infty, & \text{αν } U(t) > 0\,. \end{cases}$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής :

Ορισμός 1.6.(Ruin Probability) *Για $u > 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως*

$$\psi(u) \coloneqq Pr(T < \infty | U(0) = u)$$

Αξίζει να τονισθεί ότι η «μαθηματική χρεοκοπία» που μόλις ορίσαμε, δεν ισοδυναμεί κατ' ανάγκη με πραγματική χρεοκοπία για τον ασφαλιστικό οργανισμό, αφού η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι η μοναδική «πηγή» εσόδων μια ασφαλιστικής επιχείρησης. Όμως, είναι ένα βασικό μέτρο που βοηθάει την επιχείρηση στη διαμόρφωση της οικονομικής της πολιτικής. Από μαθηματικής άποψης είναι εμφανές ότι υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό αποθεματικό u και το ασφάλιστρο c έτσι ώστε να αποφύγει (ή και σε κάθε περίπτωση να επιμηκύνει) το ενδεχόμενο, η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική. Πρέπει τέλος να επισημανθεί, ότι η κλασική θεωρία κινδύνων περιορίζεται στη μελέτη της χρεοκοπίας εξαιτίας των αποζημιώσεων, αγνοώντας άλλα δυνατά αίτια χρεοκοπίας.

Επιπλέον, από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος είναι φανερό ότι τα ασφάλιστρα c δεν μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε τιμή(δεν μπορούν να είναι οποιαδήποτε χρηματικά ποσά, για παράδειγμα δεν μπορεί να είναι μηδενικά). Άρα θεωρούμε ότι ο ρυθμός αύξησης του ασφαλίστρου c στο $[0, t]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τις μέσες ζημιές,$\mathbb{E}\big(S(t)\big)$, που εμφανίζονται στο $[0, t]$, γιατί διαφορετικά η χρεοκοπία στο $[0, t]$ είναι σχεδόν βέβαιη . Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεωρούμε ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός ρ, τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{t}S(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \to \rho, \qquad t \to \infty \tag{1.8}$$

Πρόταση 1.1. *Έστω η (1.8) είναι αληθής. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας,$\psi(u) < 1$, αν και μόνο αν*

$$c\mathbb{E}(W_1) > m \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Έστω $\eta = \frac{c}{\rho} - 1$. Τότε, από την Πρόταση 1.1 του Asmussen (2000) ισχύει ότι αν $\eta > 0$, τότε $\psi(u) < 1$, ενώ αν $\eta < 0$, τότε $\psi(u) = 1$ για κάθε $u \geq 0$. Επομένως για να αποδείξουμε ότι $\psi(u) < 1$ αν και μόνο αν $c\mathbb{E}(W_1) > m$, αρκεί να δείξουμε ότι $\rho = \frac{m}{\mathbb{E}(W_1)}$.
Πράγματι,

$$\rho = \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}(S(t))}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}\big(S(t)\big|N(t)\big)]}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\big(N(t)\big)m}{t} = \frac{m}{\mathbb{E}(W_1)},$$

Όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας το
Θεώρημα 1.2. ■

Επίσης, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισχύς της σχέσης (1.9), ορίζουμε έναν συντελεστή επιβράδυνσης του ασφαλίστρου ή περιθώριο ασφαλείας(security loading), το οποίο ορίζεται ως

$$1+\theta = \frac{c}{m\mathbb{E}(W_1)}.$$

1.3. Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Εκτός από την πιθανότητα χρεοκοπίας, υπάρχουν και άλλα δύο εξίσου σημαντικά μέτρα κινδύνου για την κατανόηση της συμπεριφοράς της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος, τα οποία σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή T. Η $|U(T)|$ που συμβολίζει το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και η $U(T-)$ που συμβολίζει το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία.
Οι Gerber και Shiu με την εργασία τους το 1998, μοντελοποίησαν τις τυχαίες μεταβλητές $T, |U(T)|, U(T-)$ σε μία μόνο συνάρτηση,την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function).

Ορισμός 1.7. *Για $u \geq 0, \delta \geq 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως:*

$$\varphi(u) \coloneqq \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty)} \middle| U(0) = u\right], \tag{1.10}$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $w : [0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I_{(.)}$ η δείκτρια συνάρτηση.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευθεί ως προεξοφλημένη ποινή όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον **Ορισμό 1.7.** της συνάρτησης Gerber-Shiu προκύπτουν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, τα οποία τα αναφέρουμε παρακάτω:

- Όταν $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας
  $$\psi(u) = \mathbb{E}\left(I_{(T<\infty)} \middle| U(0)\right) = \Pr(T < \infty | U(0) = u),$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x, y) = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\varphi_T(u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)} Z \big| U(0) = u\big).$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 \leq x)} I_{(x_2 \leq y)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$F_\delta(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big[e^{-\delta T} I_{(x_1 \leq x)} I_{(x_2 \leq y)} \big| U(0) = u\big].$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 \leq x)} I_{(x_2 \leq y)}$, παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής του διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$, την

$$F_{0(x_1, x_2}|u) = \mathbb{E}(\big[I_{(x_1 \leq y)} \big| U(0) = u\big].$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 = x)} I_{(x_2 = y)}$,προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f_\delta(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big[e^{-\delta T} I_{(x_1 = x)} I_{(x_2 = y)} \big| U(0) = u\big].$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 = x)} I_{(x_2 = y)}$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f_0(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big[I_{(x_1 = x)} I_{(x_2 = y)} \big| U(0) = u\big].$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 \leq x)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$H_\delta(x|u) = \mathbb{E}\big[e^{-\delta T} I_{(x_1 \leq x)} \big| U(0) = u\big].$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 \leq x)}$, παίρνουμε την περιθώρια συνάρτηση της κατανομής της τ.μ. $U(T-)$,

$$H_0(x|u) = \mathbb{E}\big[I_{(x_1 \leq x)} \big| U(0) = u\big].$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1 = x)}$,προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$,

$$h_\delta(x|u) = \mathbb{E}\big[e^{-\delta T} I_{(x_1 = x)} \big| U(0) = u\big].$$

- Όταν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_1=x)}$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$,

$$h_0(x|u) = \mathbb{E}\left[I_{(x_1=x)}\middle|U(0) = u\right].$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_2 \le y)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$G_\delta(y|u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} I_{(x_2 \le y)}\middle|U(0) = u\right].$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_2 \le y)}$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(T)|$

$$G_0(y|u) = \mathbb{E}\left[I_{(x_2 \le y)}\middle|U(0) = u\right].$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_2=y)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελείμματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$g_\delta(y|u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} I_{(x_2=y)}\middle|U(0) = u\right].$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I_{(x_2=y)}$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(T)|$,

$$g_0(y|u) = \mathbb{E}\left[I_{(x_2=y)}\middle|U(0) = u\right].$$

Εκτός από την θεωρία του Αναλογισμού, η συνάρτηση των Gerber-Shiu έχει σπουδαίες εφαρμογές και στον κλάδο των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών (όπως π.χ., για την τιμολόγηση ενός put option Αμερικάνικου τύπου όπου $w(x, y) = \max\{0, \mathrm{K} - \mathrm{x}\}$ με τιμή άσκησης K (βλ.Gerber-Shiu (1999) και επίσης Gerber-Landry (1998)).

Οι Gerber και Shiu μελέτησαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου στην εργασία τους το 1998 “On the time value of ruin”. Στο ίδιο άρθρο αποδεικνύεται ότι η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με την βοήθεια μετασχηματισμών Laplace, δείχνοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε από τους Lin και Wilmott (1999) μέσω της ουράς μια κατάλληλης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη μελέτη συνάρτησης $\varphi(u)$ των Gerber-Shiu και στο ανανεωτικό μοντέλο όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν μια γενικευμένη Erlang κατανομή (βλ. Gerber and Shiu (2005)).

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε την παραπάνω μεθοδολογία για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιών που κατανέμονται σύμφωνα με μια γενικευμένη $Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, αφού το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου.

1.4. Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για τη διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνου $U(t)$ όπως ορίσθηκε στις σχέσεις (1.6)-(1.7), θεωρώντας ότι χρόνοι άφιξης ζημιών είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.$\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ που ακολουθούν την γενικευμένη $Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, ο ορισμός της οποίας δίνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.8. *Έστω $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. με παραμέτρους $\lambda_i, i = 1,2, \ldots, n$.Τότε, η τ.μ. $\sigma_n = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i$, ονομάζεται γενικευμένη Erlang κατανομή και συμβολίζεται με $Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, σε αυτήν την περίπτωση η σ.π.π. της τ.μ. σ_n δίνεται από την σχέση*

$$f_{\sigma_n}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i t}, t \geq 0, \lambda_i > 0 \ .$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. σ_n , δίνεται από τη σχέση

$$\hat{f}_{\sigma_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t) dt = \mathbb{E}(e^{-sW}) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + s)}, s > 0. \qquad (1.11)$$

Είναι φανερό ότι η γενικευμένη Erlang,αποτελεί γενίκευση της κατανομής Erlang. Πράγματι, θέτοντας $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ παίρνουμε την κατανομή $Erlang(n, \lambda)$, ενώ θέτοντας $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

1.4.1. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για το γενικευμένο μοντέλο $\boldsymbol{Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$

Για την συγκεκριμένη διαδιακασία κινδύνου, οι Gerber and Shiu (2005) έδειξαν (βλ. σελ. 49-68 The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*) ότι η προεξοφλημένη αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο επόμενο θεώρημα. Εδώ θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος από αυτήν που έδωσαν οι Gerber and Shiu (2005).

Θεώρημα 1.3. *Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi(u)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi(u) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u) = 0, \tag{1.12}$$

όπου

$$w(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)f(x)dx = \int_0^u w(u,x)f(x+u)dx. \tag{1.13}$$

Απόδειξη. Εδώ θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη από αυτή των Gerber και Shiu. Από τον Ορισμού 1.7. της γενικευμένης $Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ κατανομής, χωρίζουμε κάθε ενδιάμεσο χρόνο άφιξης των ζημιών σε άθροισμα n ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ.,όπου κάθε μία έχει παράμετρο $\lambda_j, (j = 1,2,\ldots,n)$,όπου η «πραγματοποιήση» κάθε μια από αυτές να προκαλεί μία «υπο-ζημιά» μεγέθους 0 για $j = 1,2,\ldots,n-1$ και η πραγματοποιήση της $n-οστής$ τ.μ. να προκαλεί μια «πραγματική» ζημιά με σ.κ. $F(x)$. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να θεωρηθεί η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ σαν μια αλυσίδα Markov $\{X(t), t \in T\}$, με σύνολο-δείκτη το $T = \{0,1,2,\ldots\}$ και γράφουμε X_ν αντί για $X(\nu), \nu = 0,1,2,\ldots$. Με $X_\nu = \kappa$ δηλώνουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη βρίσκεται στην κατάσταση κ τη χρονική στιγμή ν. Η πιθανότητα

$$p_{ij}(\nu-1,\nu) = \Pr(X_\nu = j | X_{\nu-1} = i),$$

καλείται πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης.

Η μετάβαση από την κατάσταση j στην κατάσταση $j+1$ γίνεται με την εμφάνιση μιας εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ_j, για $j = 1,2,\ldots,n-1$, και η μετάβαση από την κατάσταση n στην κατάσταση 1 γίνεται με την εμφάνιση μια εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ_n . Έστω

$$\varphi_j(u) \coloneqq \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty)} \middle| X_0 = i, U(0) = u\right], u \geq 0,$$

μια «βοηθητική» Gerber-Shiu συνάρτηση, όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται στην κατάσταση $j \in \{1,2,\dots,n\}$ για την ανανέωση του μοντέλου. Εμάς μας ενδιαφέρει η $\varphi_1(u) = \varphi(u)$.

Επίσης, θεωρώντας ένα απειροστό διάστημα $[0, dt]$ έχουμε τα εξής τέσσερα ενδεχόμενα, όσον αφορά τη μετάβαση της αλυσίδας $\{X_\nu, t \in T\}$ και την εμφάνιση ζημιάς,

- Δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Συμβαίνουν δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Τότε για $j = 1,2,\dots,n-1$ έχουμε

$$\varphi_j(u) = \left(1 - \lambda_j dt\right) e^{-\delta dt} \varphi_{j+1}(u + cdt) + \lambda_j e^{-\delta dt} \varphi_{j+1}(u + cdt) + o(dt) \tag{1.14}$$

Με τη βοήθεια του Αναπτύγματος Taylor προκύπτει ότι $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$ και $\varphi_j(u + cdt) = \varphi_j(u) + c\varphi'_j(u)dt + o(dt)$. Για $dt \to 0$ από την (1.11) έχουμε,

$$\left(c\frac{\partial}{\partial u} - \left(\lambda_j + \delta\right)\right)\varphi_j(u) + \lambda_j \varphi_{j+1}(u) = 0, \quad j = 1,\dots,n-1. \tag{1.15}$$

Ομοίως για $j = n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\varphi_n(u) = {} & (1 - \lambda_n dt) e^{-\delta dt} \varphi_n(u + cdt) \\ & + \lambda_n dt e^{-\delta dt} \left(\int_0^{u+cdt} \varphi(u + cdt - x) f(x) dx \right. \\ & \left. + \int_{u+ct}^{\infty} w(u + cdt, x - u - cdt) f(x) dx\right) + o(dt),\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά το ανάπτυγμα Taylor , και μαζεύοντας τους όρους τάξης dt, για $dt \to 0$ παίρνουμε ότι

$$\left(c\frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_n + \delta)\right)\varphi_n(u) + \lambda_n\left(\int_0^u \varphi(u - x) f(x) dx + w(u)\right) = 0\,. \tag{1.16}$$

Έτσι από την (1.15) παίρνουμε ότι

$$\varphi_{j+1}(u) = \frac{\lambda_j + \delta - \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \varphi_j(u), \qquad j = 1,2,\dots,n-1,$$

από την οποία με διαδοχικές αντικαταστάσεις για $j = 1,2, \ldots$ έχουμε ότι

$$\varphi_n(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j + \delta - \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \varphi(u).$$

Τέλος, λύνοντας την (1.16) ως προς $\varphi_n(u)$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 1.1. *Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, η εξίσωση (1.12) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^n \varphi(u) - \lambda^n \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \lambda w(u) = 0, \tag{1.17}$$

η οποία είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με $Erlang(n, \lambda)$ ενδιάμεσους χρόνους άφιξης ζημιών.

Πόρισμα 1.2. *Για $n = 2$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ η εξίσωση (1.12) γίνεται*

$$c^2 \frac{\partial}{\partial^2 u} \varphi(u) - 2c(\lambda + \delta) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u) + (\lambda + \delta)\varphi(u) - \lambda^2 \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx - \lambda^2 w(u) = 0 \tag{1.18}$$

Πόρισμα 1.3. *Για $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ η εξίσωση (1.12) γίνεται*

$$c\varphi'(u) - (\delta + \lambda)\varphi(u) + \lambda \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \lambda w(u) = 0 \,, \tag{1.19}$$

η οποία είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Οι λύσεις της παραπάνω ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.12) βασίζονται στις ρίζες της *γενικευμένης εξίσωσης Lundberg*,την οποία θα ορίσουμε παρακάτω.

Θεώρημα 1.4.(Lundberg's generalized fundamental equation). *Για $s \in \mathbb{C}$ και $\delta \geq 0$, η θεμελειώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg δίνεται από την σχέση*

$$\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}(s) = 0 \,, \tag{1.20}$$

όπου $\tilde{\gamma}(s) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j + \delta - cs)$

Πριν δώσουμε την απόδειξη θα δώσουμε τον ορισμό των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων $f(x), w(u), \varphi(u)$ και των martingales σε διακριτό χρόνο.
Για $\Re(s) \geq 0,\ s \in \mathbb{C}$, ορίζουμε $\hat{f}(s), \widehat{w}(s), \hat{\varphi}(s)$ να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $f(x), w(x), \varphi(u)$ αντίστοιχα , δηλαδή

- $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx,$
- $\widehat{w}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} w(x)dx,$
- $\hat{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \varphi(u)du.$

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$. Τότε η ακολουθία $\{\mathrm{F_i}\}_{\mathrm{i=0}}^{\infty}$ ονομάζεται διύληση της διαδικασίας $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ και ορίζεται ως μια αύξουσα ακολουθία $\sigma-$ αλγεβρών της $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$,

$$\mathrm{F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n : F_n = \sigma\{Y_s : s \geq n\}},$$

Το σύνολο $\mathrm{F_n}$ περιέχει όλη την πληροφορία για τη στοχαστική διαδικασία $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ μέχρι τον χρόνο n.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ ονομάζεται *προσαρμοσμένη* αν και μόνο για κάθε $n \geq 0$, η $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ είναι μετρήσιμη.
Τέλος, μια στοχαστική διαδικασία $\{\mathrm{Y(n)}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty}$ ονομάζεται *martingale* αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mathbb{E}(|Y(n)|) < \infty, \forall n \geq 0,$
- Η $Y(n)$ είναι F_s *προσαρμοσμένη*, $\forall n \geq 0,$
- $\mathbb{E}[Y(n+1)|Y(0), Y(1), \ldots, Y(n)] = Y(n), \forall n \geq 0,$

όπου $\mathbb{E}\big(Y(1)\big) = Y(0)$.

Απόδειξη Θεωρήματος 1.4. Έστω τώρα, $\tau_k = \sum_{i=1}^{k} W_i$ ο χρόνος άφιξης της $k-$*ζημιάς*, με $\tau_0 = 0$. Επίσης, ορίζουμε $U_0 = u$ και για $k = 1,2, \ldots$,

$$U_k = U(\tau_k) = u + c\tau_k - \sum_{j=1}^{N(\tau_k)} X_j = u + \sum_{i=1}^{k}\left(cW_i - \sum_{i=1}^{N(W_i)} X_j\right), \qquad (1.21)$$

Είναι το πλεόνασμα τη στιγμή ακριβώς μετά την εμφάνιση της $k-$*ζημιάς*. Έστω, ένας αριθμός s τέτοιος ώστε η ακολουθία των τ.μ. $\left\{e^{-\delta\tau_k + sU_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ να είναι *maringale* ως προς μια διύληση $\mathcal{F}_k = \sigma(W_i, X_i, 1 \le i \le k)$, με $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε, από τον ορισμό του martingale έπεται ότι

$$e^{-\delta\tau_k + sU_k} = \mathbb{E}\left(e^{-\delta\tau_{k+1} + sU_{k+1}}\middle|U_k\right). \tag{1.22}$$

Από τη σχέση (1.21), έχουμε ότι

$$e^{-\delta\tau_{k+1} + sU_{k+1}} = e^{-\delta\tau_k + sU_k - \delta W_{k+1} + s(cW_k - X_1)},$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ισόνομες, η (1.22) γίνεται

$$1 = \mathbb{E}\left(e^{-\delta W_1 + s(cW_1 - X_1)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-(\delta - cs)W_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{-sX_1}\right),$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την (1.11) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 1.4.(Lundberg's fundemanteal equation). *Για $n = 2$,και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ η εξίσωση (1.20) γίνεται*

$$(cs - (\lambda + \delta))^2 = \lambda^2 \hat{f}(s), \tag{1.23}$$

που είναι η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση Lundberg για το μοντέλο $Erlang(2, \lambda)$.

Πόρισμα 1.5. *Για $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ η εξίσωση (1.20) γίνεται*

$$\delta + \lambda - cs = \hat{f}(s), \tag{1.24}$$

που είναι η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση Lundberg για το κλασσικό μοντέλο.

Για να βρούμε τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής (1.12) με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, θα χρειαστεί πρώτα να παραθέσουμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 1.1.
(i) *Για $\Re(s) \ge 0, \delta > 0$ η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (1.20) έχει ακριβώς n ρίζες,στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*
(ii) *Για $\Re(s) \ge 0$ και $\delta \to 0^+$, τότε η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς μία ρίζα,το 0,και $n - 1$ ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*
Απόδειξη.(Βλ.Gerber και Shiu (2005), Albrececher και Boxma (2005). ■

Από εδώ και στο εξής, τις θετικές ρίζες της (1.20) θα τις συμβολίζουμε, με $r_i(\delta) \equiv r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1,2, \dots, n$, για τις οποίες θετικές ρίζες r_i υποθέτουμε ότι είναι διακεκριμένες μεταξύ τους.
Έτσι ακολουθώντας την μεθοδολογία που προαναφέραμε, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.12),και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.1. , ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνεται παρακάτω:

Θεώρημα 1.5. *Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνεται από την σχέση*

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{w}(s) - q(s)}{\hat{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}(s)}, \tag{1.25}$$

όπου $q(s) = \sum_{j=1}^{n} \hat{w}(r_j) \prod_{k=1}^{n} \frac{s-r_k}{r_j-r_k}$ και r_i, με $\Re(r_i) > 0, i = 1,2, \dots, n$ οι ρίζες της εξίσωσης (1.20).
Απόδειξη. Βλ. Gerber και Shiu (2005). ■

Ορισμός 1.9.(T_r operator) *Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ και για $\Re(r) \geq 0$ και $x \geq 0$ ορίζουμε τον τελεστή $T_r f(x)$ που δίνεται από τη σχέση*

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x) du \ . \tag{1.26}$$

Λήμμα 1.2.(Ιδιότητες τελεστών T_r) *Έστω $T_r f(x)$ ο τελεστής μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$.Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:*
(i) $T_r f(0) = \hat{f}(r)$, (1.27)
(ii) *Αν $\widehat{T_r f(s)}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(s)$,τότε έχουμε*

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}, \qquad \forall\, r \neq s, \tag{1.28}$$

(iii)

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \qquad \forall\, r_1 = r_2, \tag{1.29}$$

(iv)

$$\frac{d}{dx} T_r f(x) = r T_r f(x) - f(x),$$

$$\frac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^{2} \frac{r_k T_{r_k} f(x)}{\tau'_2(r_k)},\ \tau_2(s) = (s - r_1)(s - r_2),$$

(v)

$$T_r \hat{f}(s) = \widehat{(T_r f)}(s) = T_s T_r f(0),$$

(vi)

$$s\hat{f}(s) - r\hat{f}(r) = (s-r)\left[-sT_r\hat{f}(s) - \hat{f}(r)\right],$$

(vii)

$$\widehat{f_1}(s)\widehat{f_2}(s) - \widehat{f_1}(r)\widehat{f_2}(r) = -(s-r)\left[\widehat{f_1}(s)T_{r_2}\widehat{f_2}(s) + T_{r_1}\widehat{f_1}(r)\widehat{f_2}(s)\right],$$

για κάθε $s \neq r$, και για f_1, f_2 δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,

(viii)

Αν $r_1, r_2, \dots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί,τότε $T_{r_1}T_{r_2} \dots T_{r_k} = (-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{r_j}f(x)}{\tau_k(r_j)}, \tau(s) = \prod_{j=1}^{k}(s-r_j)$,

και

$$T_sT_{r_1}T_{r_2}\dots T_{r_k}f(0) = (-1)^k\left(\frac{\hat{f}(s)}{\tau_k(s)} - \sum_{j=1}^{k}\frac{\hat{f}(r_j)}{(s-r_j)\tau'_k(r_j)}\right),$$

επίσης αν η $f(x)$ είναι σ.π.π. της τ.μ. X με σ.κ. $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$, τότε ισχύουν τα παρακάτω

(ix)

$$T_0T_rf(x) = \int_x^\infty T_rf(u)du = \frac{\bar{F}(x) - T_rf(x)}{r} = T_r\bar{F}(x),$$

(x)

$$\int_0^u T_rf(x+y)dx = T_r\bar{F}(y) - T_r\bar{F}(y+u),$$

(xi)

$$\int_0^\infty T_{r_1}T_{r_2}f(x)dx = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(\frac{1-\hat{f}(r_1)}{r_1} - \frac{1-\hat{f}(r_2)}{r_2}\right),$$

(xii)

$$\int_0^\infty \left(T_{r_1}f \star T_{r_2}f\right)(x)dx = \frac{\left(1-\hat{f}(r_1)\right)\left(1-\hat{f}(r_2)\right)}{r_1r_2}.$$

Απόδειξη.

(i) Για $x = 0$, η (1.26) γίνεται

$$T_rf(0) = \int_0^\infty e^{-ru}f(u)du = \hat{f}(r), \qquad r \in \mathbb{C}.$$

(ii) Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_rf(x)$ είναι

$$T_r\widehat{f(s)} = \int_0^\infty e^{-sx}T_rf(x)dx = \int_0^\infty\left(\int_0^y e^{-sx}e^{-r(y-x)}f(y)dx\right)dy$$
$$= \int_0^\infty e^{-ry}f(y)\left(\int_0^y e^{-x(r-s)}dx\right)dy,$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Έστω $h(x) = T_{r_2} f(x)$.Τότε,

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_1} h(x) = \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} h\,(u) du$$
$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} T_{r_2} f(u) du = \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} \int_u^\infty e^{-r_2(s-u)} f(s) ds\, du,$$

δηλαδή

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty \int_u^\infty e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s) ds\, du. \tag{1.30}$$

Με αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης και μετά από πράξεις, παίρνουμε

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty \int_x^s e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s)\, du\, ds$$
$$= \int_x^\infty f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^s e^{-r_1 u} e^{r_2 u} du \right) ds$$
$$= \int_x^\infty f(s) e^{-r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^s e^{(r_2 - r_1) u}\, du \right) ds$$
$$= \int_x^\infty f(s) e^{-r_1 x} e^{-r_2 s} \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \left(e^{(r_2 - r_1) s} - e^{(r_2 - r_1) x} \right) \right] ds$$
$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \{ \int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left[e^{(r_2 - r_1) s} - e^{(r_2 - r_1) x} \right] f(s) ds \}$$
$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left\{ \int_x^\infty e^{-r_1(s-x)} f(s) ds - \int_x^\infty e^{-r_2(s-x)} ds \right\}.$$

Που είναι η ζητούμενη σχέση.

Για την απόδειξη των σχέσεων (iv)-(xii) παραπέμπουμε στους Dickson και Hipp (2001),Li Garrido (2004a). ∎

Οι Cheng and Tang στην εργασία τους «Moments of the surplus before ruin and the deficit at Ruin in the Erlang(2) risk process» το (2003) απέδειξαν ότι η $\hat{\varphi}(s)$ της εξίσωσης (1.25) μπορεί να γραφεί σε μια ισοδύναμη μορφή, από την οποία έπεται η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, με τη βοήθεια των τελεστών T_r .

Θεώρημα 1.6. *Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu,$\hat{\varphi}(s)$, γράφεται ως*

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 - \hat{n}(s)}, \tag{1.31}$$

όπου

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} w \right)(0),$$

$$\hat{n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} n(x)dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} f\right)(0),$$

και $r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1,2, \dots, n$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.20).*

Απόδειξη. Βλέπε Cheng and Tang «Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process» το (2003) . ■

Αν αντιστρέψουμε την σχέση (1.31) ως προς s παίρνουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.7. *Για* $u \geq 0$, *η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,* $\varphi(u)$, *ικανοποιεί την εξής ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(u) \\ &= \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(u), \end{aligned} \tag{1.32}$$

όπου $n(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} f\right)(x)$,

$G(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} w\right)(x)$,

με ξ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^n(\lambda_j+\delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n \prod_{j=1}^n r_j} < 1$,

με $r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1,2, \dots, n$, *να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.16),*

$H(x) = (1+\xi)G(x)$,

$z(x) = (1+\xi)n(x)$,

όπου η $z(x)$ *είναι σ.π.π. της κατανομής*

$Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)dy}{\int_0^\infty n(y)dy}$.

Όταν $\delta \to 0^+$, *τότε* $\xi \to \xi_0$, *όπου* ξ_0 *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\theta \prod_{j=1}^n \lambda_j m}{c^n \prod_{j=1}^{n-1} r_j(0)} < 1$, *με* ϑ *το περιθώριο ασφαλείας.*

Απόδειξη. Βλέπε Cheng and Tang «Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process» το (2003). ■

Πόρισμα 1.6. *Για* $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *η ελαττωματική εξίσωση (1.32) γίνεται*

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(x)$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)\,z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(u),$$

η οποία είναι η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για το μοντέλο $Erlang(2,\lambda)$

όπου $n(x) = \frac{\lambda^2}{c^2}T_{r_2}T_{r_1}f(x)$,

$G(x) = \frac{\lambda^2}{c^2}T_{r_2}T_{r_1}w(x)$,

ξ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{2\lambda\delta+\lambda^2}{c^2 r_1 r_2}$,

με $r_i, \Re(r_i) > 0$, *να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.23),*

$H(x) = (1+\xi)G(x)$, *και*

$z(x) = (1+\xi)n(x)$,

όπου η $z(x)$ *είναι η σ.π.π. της κατανομής*

$Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)dy}{\int_0^\infty n(y)dy}$,

όταν $\delta \to 0^+$, *τότε* $\xi \to \xi_0$ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\lambda(2c-\lambda m)}{c^2 r_1(0)} < 1$.

Πόρισμα 1.7. *Για* $n = 1$ *και* $\lambda_1 = \lambda$, *η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (1.32) γίνεται*

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(x)$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(x), \qquad (1.33)$$

η οποία είναι η ελαττωματική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με

$n(x) = \frac{\lambda}{c}T_r f(x)$,

$G(x) = \frac{\lambda}{c}T_r w(x)$,

ξ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{\delta}{cr} < 1$,

με $r, \Re(r) > 0$, *να είναι η ρίζα της εξίσωσης (1.5.1)*

$H(x) = (1+\xi)G(x)$

$z(x) = (1+\xi)n(x)$,

όπου η $z(x)$ *είναι η σ.π.π. της κατανομής*

$Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)dy}{\int_0^\infty n(y)dy}$.

Όταν $\delta \to 0^+$, *τότε* $\xi \to \xi_0$, *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{1}{cr'(0)} < 1$.

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε τη λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.32) μέσω της δεξιάς ουράς μιας κατάλληλα ορισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Οπότε, για $u \geq 0$, ορίζουμε την σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$, όπου η δεξιά ουρά $\bar{K}(u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{N}^{\star n}(u), u \geq 0,$$

όπου $\bar{N}^{\star n}(u)$ είναι η $n - οστή$ συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{N}(u) = 1 - N(u) = \int_u^\infty n(y)dy$.

Θεώρημα 1.8. *Για $u \geq 0$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.32) δίνεται από τη σχέση*

$$\varphi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi}H(u), \tag{1.34}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\xi}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi}H(u), \tag{1.35}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u \big(1 - \bar{K}(u-x)\big)dH(x) + \frac{H(0)}{\xi}\big(1 - \bar{K}(u)\big). \tag{1.36}$$

Απόδειξη. Βλέπε Lin και Willmot (1999). ■

Εκτός των σχέσεων (1.34)-(1.36) οι Lin και Willmot στην εργασία τους «Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory» (1999), απέδειξαν, ότι η ουρά της σύνθετης κατανομής $\bar{K}(u)$ (από την οποία εξαρτάται άμεσα η $\varphi(u)$, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (1.34)-(1.36)), ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.37)$$

όπου $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u) = \int_u^\infty z(x)dx$.

Παρατήρηση 1.1. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για $w(x,y) = 1$, γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\mathbb{E}(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)} | U(0) = u = \varphi_T(u)$$

Επίσης για $w(x,y) = 1$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των τελεστών T_r, παίρνουμε ότι

$$H(u) = \frac{1}{(1+\xi)}\int_0^u \varphi_T(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} + \bar{Z}(u), \qquad u \geq 0\,, \tag{1.38}$$

απ’όπου συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.37) και (1.38), είναι εμφανές ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T, δηλαδή

$$\bar{K}(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)}|U(0) = u = \varphi_T(u)$$

Με βάση το Θεώρημα 1.8. και την Παρατήρηση 1.1. παρατηρούμε ότι ο αρχικός μας στόχος, ο οποίος ήταν να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του $U(T-)$ (πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία), η κατανομή του $|U(T)|$ (έλλειμα κατά την χρεοκοπία), η από κοινού κατανομή των δύο παραπάνω τυχαίων μεταβλητών, και άλλα μέτρα χρεοκοπίας, συναρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της $\varphi_T(u)$, η οποία μπορεί να υπολογισθεί μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι από τη σχέση (1.31), για $w(x,y) = 1$ και με τη βοήθεια της σχέσης

$$1 - \hat{n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)}, s \neq r_j, j = 1,2,\dots,n. \tag{1.39}$$

έχουμε ότι

$$\hat{\varphi}_T(u) = \frac{\hat{G}(s)\prod_{j=1}^n (r_j - s)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}. \tag{1.40}$$

Η σχέση (1.40) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1. (Βλ. Lin (2003) Θεώρημα 2). Επιπλέον, επιλέγοντας $w(x,y) = 1$, και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των τελεστών T_r, η συνάρτηση $\hat{G}(s)$ γίνεται

$$\hat{G}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{T_0 T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) - T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0)}{s}$$

$$= \frac{\hat{n}(0) - \hat{n}(s)}{s} = \frac{1}{s}\left(\frac{\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)} - \frac{\xi}{1+\xi}\right). \tag{1.41}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.41) στην (1.40) προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi}_T(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s) - \frac{1}{1+\xi}\prod_{j=1}^{n}(r_j - s)}{s\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)\right]}. \tag{1.42}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός Laplace της σχέσης (1.42),αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις, όπου μία από αυτές είναι όταν η $\hat{\varphi}_T(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Έτσι η $\hat{\varphi}_T(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, αν και μόνο αν η $\hat{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Για το λόγο αυτόν, επιλέγουμε την κατανομή των ζημιών $f(x)$ να ανήκει στη κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.10. (rational distribution family) *Η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)$, ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών $\mathcal{R}_f$, αν ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, γράφεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων,*

$$\hat{f}(s) = \frac{\mathbb{Q}_{m-1}(s)}{\mathbb{Q}_m(s)}\ , \mu\varepsilon\ \mathbb{Q}_m(0) = \mathbb{Q}_{m-1}(0), \Re(s) \in (h_X, \infty), \tag{1.43}$$

όπου $m \in \mathbb{N}^+, h_X = inf\{s \in \mathbb{R}:\ \mathbb{E}(e^{-sX}) < \infty\}$, και $\mathbb{Q}_m(s), \mathbb{Q}_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα με $deg\big(\mathbb{Q}_m(s)\big) \leq m$ και $deg\big(\mathbb{Q}_{m-1}(s)\big) \leq m-1$.

Η κλασματική οικογένεια κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών που περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) την εκθετική, την Erlang, την Coxian, την phase-type καθώς και τις μίξεις τους.

Έστω τώρα, ότι η $f(x)$ ανήκει στην παραπάνω κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, δίνεται από την εξίσωση (1.43), και επιπλέον ορίζοντας ένα πολυώνυμο $m+n$ βαθμού,

$$\mathcal{B}_{m,n}(s) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)\mathbb{Q}_m(s) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c}\mathbb{Q}_{m-1}(s), \tag{1.44}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\varphi_T(u) = \overline{K}(u)$ δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.9. *Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών $\hat{f}(s)$ είναι της μορφής (1.43). Τότε*

$$\hat{\varphi}_T(u) = \frac{\mathcal{B}_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)},$$

όπου $\mathcal{B}_{m-1}(s) = \frac{1}{s}\left(\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - \frac{1}{1+\xi}\,\mathbb{Q}_m(s)\right)$, ξ *δίνεται από το Θεώρημα 1.7. και* $-R_i$ *είναι όλες οι ρίζες της εξίσωσης* $\mathcal{B}_{m,n}(s) = 0$ *με* $\Re(R_i) > 0, i = 1,2,\dots,m.$ *Επίσης ,αν* $-R_i, i = 1,2,\dots,m$ *είναι και διακεκριμένες, τότε*

$$\hat{\varphi}_T(s) = \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{s+R_i}\ ,$$

και

$$\varphi_T(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u}\ , u \geq 0,$$

με

$$a_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} R_i}{R_i \prod_{j=1, j\neq i}^{m}(R_j - R_i)} \cdot \frac{\mathbb{Q}_m(-R_i)}{\mathbb{Q}_m(0)}\ , i = 1,2,\dots,m.$$

Παρατήρηση 1.2. Από το Θεώρημα 1.9. είναι εμφανές ότι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι άμεσος, επειδή $\psi(u) = \lim_{\delta\to 0}\varphi_T(u)$.

Κεφάλαιο 2

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σ’ αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε ένα μοντέλο κινδύνου, όπου η στοχαστική διαδικασία των συσωρευτικών αποζημιώσεων παράγεται από δύο κλάσεις κινδύνων. Πιο αναλυτικά, υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$, η οποία παριστά τις συνολικές αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου, αποτελείται από δύο επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες: μία σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process) και μια ανανεωτική σύνθετη διαδικασία (compound renewal process), η οποία θα είναι η $\textit{γενικευμένη}\ Erlang(2, \lambda_1, \lambda_2)$ ή *και η γενικευμένη* $Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Αρχικά, το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων εισήχθη από τους Yuen, Guo και Wu με την εργασία τους «On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk process» (2003), υποθέτοντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ζημιών από τη δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την $Erlang(2, \lambda_1, \lambda_2)$ κατανομή. Οι Li and Gariddo στο άρθρο τους «Ruin probability for two classes of risk process» το 2004 θεωρώντας ότι στο μοντέλο των Yuen, Guo και Wu οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών από την δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την $\textit{γενικευμένη}\ Erlang(2, \lambda_1, \lambda_2)$, δίνουν αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επίβιωσης (μέσω μετασχηματισμών Laplace) στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Επιπροσθέτως, γενικεύοντας περαιτέρω το προαναφερόμενο μοντέλο κινδύνων οι Li and Lu με την εργασία τους «On the expected discounted penalty functions for two classes of risk process» το 2005, μελέτησαν την συνάρτηση των Gerber-Shiu, μέσω μετασχηματισμών Laplace. Επιπλέον, παρουσιάζουν αναλυτικά αποτελέσματα για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ζημιών και για τις δύο κλάσεις κινδύνων κατανέμονται εκθετικά. Τέλος, οι Zhang και Yang το 2009 με την εργασία τους «The Gerber-Shiu discounted penalty function for a risk model with two classes of claims» επέκτειναν το συγκεκριμένο μοντέλο κινδύνων, θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών από την δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την $\textit{γενικευμένη}\ Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Η δομή του συγκεκριμένοι κεφαλαίου θα ξεκινήσει με την εισαγωγή της λεπτομερούς περιγραφής του παραπάνω μοντέλου, των υποθέσεων και το συμβολισμό όλων των παραμέτρων αλλά και των νέων εννοιών. Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε κάποιες ανανεωτικές ελλαττωματικές εξισώσεις, για την συνάρτηση των Gerber-Shiu, μαζί με τις αποδείξεις τους και θα εισάγουμε έναν αναλυτικό τρόπο υπολογισμού αυτών. Επιπλέον θα παραθέσουμε κάποια σπουδαία μέτρα κινδύνου για το μοντέλο αυτό, όπως την συνάρτηση χρεοκοπίας ή την κατανομή του ελλείματος ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$, αλλά και την κατανομή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την στιγμή της χρεοκοπίας $U(T)$. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό, με τη γενίκευση του συγκεκριμένου μοντέλου κινδύνων όπου υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών από την δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την $\text{γενικευμένη } Erlang(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Τέλος, αυτό το μοντέλο που μόλις τώρα περιγράψαμε ανήκει στην κατηγορία των μη ανανεωτικών μοντέλων. Αποτελεί, όπως είναι εμφανές, γενίκευση τόσο του κλασσικού όσο και του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας.

2.1. Περιγραφή του μοντέλου

Έστω $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία διαδικασία πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου που δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.1}$$

όπου $u = U(0)$ το αρχικό κεφάλαιο, $c > 0$ το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου και $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων. Η διαφορά με το προηγούμενο κεφάλαιο είναι ότι εδώ, υποθέτουμε ότι η $S(t)$ είναι άθροισμα δύο επιμέρους στοχαστικών διαδικασιών, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i\,, \qquad t \geq 0, \tag{2.2}$$

όπου $S_i(t), i = 1,2$ παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις προερχόμενες από την i-κλάση, που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t. Στη συγκεκριμένη εργασία, υποθέτουμε ότι οι $S_1(t)$ και $S_2(t)$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Επίσης, υποθέτουμε ότι οι $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών και ανεξάρτητων τ.μ. με σ.κ. $P(x) = \Pr(X \leq x)$, σ.π.π. $p(x)$, μέση τιμή μ_X και μετασχηματισμό Laplace $\hat{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x)dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση.

Αντίστοιχα οι $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών και ανεξάρτητων τ.μ. με σ.κ $Q(x) = \Pr(Y \le x)$, σ.π.π. $q(x)$, μέση τιμή μ_Y και μετασχηματισμό Laplace $\hat{q}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} q(x)dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την δεύτερη κλάση.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\{N_1(t); t \ge 0\}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και ενδοιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, που είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παράμετρο λ . Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_2(t); t \ge 0\}$ υποθέτουμε ότι είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ οι οποίοι αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη $\textit{γενικευμένη}\ Erlang(2, \lambda_1, \lambda_2)$ και επομένως η τ.μ. V_i μπορεί να παρασταθεί και ως $V_i = L_{i1} + L_{i2}$, όπου $\{L_{ik}\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παράμετρο $\lambda_k, k = 1{,}2$ (συνήθως $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, αλλά και ανεξάρτητες με τις απαριθμήτριες διαδικασίες $\{N_1(t); t \ge 0\}$, $\{N_2(t); t \ge 0\}$, καθώς και ότι τα ασφάλιστρα που εισπράτονται στη μονάδα του χρόνου είναι τέτοια ώστε $c > \lambda\mu_X + [\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)]\mu_Y$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι περιθώριο ασφαλείας θ, είναι τέτοιο ώστε

$$c = (1 + \theta)\left[\lambda\mu_X + \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_Y}{\lambda_1 + \lambda_2}\right].$$

Τώρα ορίζουμε $T = inf\{t \ge 0 : U(T) < 0\}$ $(inf\emptyset = \infty)$ να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, και $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u)$, $u \ge 0$, να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο (2.1)-(2.2).

2.2. Μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Έστω $\delta \ge 0$, και ορίζουμε

$$\Phi(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(-T), |U(T)|) I_{(T<\infty)} | U(0) = u\right], u \ge 0, \quad (2.3)$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu, για το μοντέλο που περιγράψαμε στη παράγραφο 2.1. με $\delta, U(-T), |U(T)|, T-, w(x, y)$ και $I_{(T<\infty)}$ όπως ορίστηκαν στον Ορισμό 1.7. .

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, λόγω της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης που παρουσιάζουν οι εκθετικά κατανεμημένοι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων, η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι χρονικά ομογενής. Στο συγκεκριμένο μοντέλο όμως, λόγο της υπόθεσης ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων της δεύτερης κλάσης ακολουθούν την Erlang κατανομή, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι πλέον χρονικά ομογενής. Έτσι, για την συνάρτηση των Gerber-Shiu που ορίσθηκε στην εξίσωση (2.3), υποθέτουμε ότι μια αποζημίωση εμφανίζεται σε χρόνο 0.

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε για το μοντέλο της παραγράφου 2.1. την συνάρτηση των Gerber-Shiu σαν μια δισδιάστατη συνάρτηση, $\Phi(u,\tau)$, του αρχικού αποθεματικού u και του χρόνου τ, όπου τ είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της τελευταίας αποζημίωσης από την δεύτερη κλάση (σε αυτό το σημείο η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται). Έτσι, ενδιαφερόμαστε για την μελέτης της συνάρτησης των Gerber-Shiu στο χρόνο 0, που είναι $\Phi(u,0)=\Phi(u)$, και για τη συνάρτηση

$$\Phi_1(u)=\mathbb{E}\left[e^{-\delta(T-t)}w(U(T-),|U(T)|)I_{(T<\infty)}|U(t)=u,L_{11}=t\right], \tag{2.4}$$

η οποία είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος, $\{L_{i1}\}_{i=1}^{\infty}$, από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί. Είναι μία «βοηθητική» συνάρτηση των Gerber-Shiu, που βοηθάει να ανανεωθεί το μοντέλο λόγω της μη χρονικά ομοιογένειας.

Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi(u,\tau)&=\Phi(u)\Pr(L_{11}>\tau)+\Phi_1(u)\Pr(L_{11}<\tau)\\ &=e^{-\lambda_1\tau}\Phi(u)+\left(1-e^{-\lambda_1\tau}\right)\Phi_1(u).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Επιπροσθέτως εισάγουμε μια ακόμα τ.μ. J, όπως οι Li και Lu (2005). Η τ.μ. J $(cause-of-ruin\ random\ variable)$ ορίζεται να είναι μία δίτιμη τ.μ. που παριστάνει την κλάση από την οποία προκαλείται η χρεοκοπία, δηλαδή $J=i$, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $i, i=1,2$. Έτσι, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο των σχέσεων (2.1)-(2.2) μπορεί να γραφεί αναλυτικά σαν

$$\Psi(u)=\Psi_1(u)+\Psi_2(u),$$

όπου

$$\Psi_j(u)=\Pr(T<\infty,J=j|U(0)=u), \qquad u\geq 0, j=1,2, \tag{2.6}$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν αυτή προκαλείται από την j κλάση.

Επιπλέον, στο ίδιο άρθρο των Li και Lu το (2005) εισάγονται δύο ακόμα συναρτήσεις των Gerber-Shiu για το μοντέλο (2.1)-(2.2), τις οποίας τις παραθέτουμε ακριβώς παρακάτω.

Για $\delta\geq 0$, ορίζουμε

$$\varphi_j(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty, J=j)} | U(0) = u), \right] \quad u \geq 0, j = 1,2 \tag{2.7}$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι το μέγεθος της ζημιάς που προκαλεί την χρεοκοπία προέρχεται από την κλάση $i = 1,2$.
Αντίστοιχα με την σχέση (2.4) και για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν πιο πάνω, ορίζουμε μια «βοηθητική» συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ο εκθετικός χρόνος από την δεύτερη κλάση, $\{L_{i1}\}_{i=1}^{\infty}$, έχει ήδη εμφανισθεί, που δίνεται από την σχέση

$$\xi_j(u) = \mathbb{E}\left[e^{-(T-t)} w(U(T-), |U(T)|), I_{(T<\infty, J=j)} | L_{11} = t, U(0) = u\right], u \geq 0, j = 1,2. \tag{2.8}$$

Τότε, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, όπως ορίσθηκαν στις σχέσεις (2.3)-(2.4) μπορούν να γραφούν και ως

$\Phi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$ και $\Phi_1(u) = \xi_1(u) + \xi_2(u)$, για $u \geq 0$.

Τέλος, θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αντίστοιχα με τη σχέση (2.5), και με την εφαρμογή του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας, τη συνάρτηση $\Phi(u, \tau)$, όπου

$$\Phi_j(u, \tau) = \varphi_j(u) \Pr(L_{11} > \tau) + \xi_j(u) \Pr(L_{11} < \tau) = e^{-\lambda_1 \tau} \varphi_j(u) + \left(1 - e^{-\lambda_2 \tau}\right) \xi_j(u),$$
$$u \geq 0, j = 1,2.$$

Σ’αυτήν την ενότητα εστιάζουμε στον προσδιορισμό των αναλυτικών τύπων για τον προσδιορισμό για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$.
Το παράδοξο σε αυτό το μοντέλο είναι ότι, παρόλο που η διαδικασία $S(t)$ δεν είναι μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία, εμείς δίνουμε αναλυτικές αποδείξεις ότι οι συναρτήσεις $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$, που ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις, οι οποίες λύνονται με βάση το Θεώρημα 1.8. .

Για να γίνει αυτό, δίνουμε στην αρχή κάποιες συνθήκες για τις οποίες οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu είναι πεπερασμένες.

Λήμμα 2.1. *Έστω ότι*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) p(x + y) dx dy < \infty ,$$

και αντίστοιχα *(2.9)*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) q(x + y) dx dy < \infty ,$$

τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\Phi(u) < \infty \ \text{και}\ \Phi_1(u) < \infty.$$

Απόδειξη. Γίνεται ακολουθώντας τα ίδια βήματα με της μεθοδολογίας των Cheng και Tang στην εργασία τους «Moments of surplus before ruin and deficit at ruin Erlang(2) risk process» το 2003, και για το λόγο αυτό η απόδειξη παραλείπεται. ■

Τώρα, θα δείξουμε ότι οι $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 2.1. *Έστω ότι η σχέση (2.9) ισχύει. Τότε για $u \geq 0$, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων*

$$c\Phi'(u) = (\lambda + \lambda_1 + \delta)\Phi(u) - \lambda \int_0^u \Phi(u-x)p(x)dx - \lambda_1 \Phi_1(u) - \lambda w_1(u)$$

$$\begin{aligned} c\Phi'_1(u) = (\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_1(u) - \lambda \int_0^u \Phi_1(u-x)p(x)dx - \lambda w_1(u) \\ - \lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx - \lambda_2 w_2(u), \end{aligned}$$

(2.10)

όπου

$$w_1(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)p(y)dy = \int_0^\infty w(x,y)p(x+y)dy,$$

$$w_2(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)q(y)dy = \int_0^\infty w(x,y)q(x+y)dy, \qquad (2.11)$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις.
Η πρώτη είναι η ακόλουθη :
Έστω $M = W_1 \wedge L_{11}$. Τότε δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα $\{M = t, M = W_1\}$ και $\{M = t, M = L_{11}\}$ και το αντίστοιχο μέγεθος της αποζημίωσης, για $u \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \Pr(M = t, M = L_{11})\, \Phi_1(u + ct)dt \\ + \int_0^\infty e^{-\delta t} \Pr(M = t, M = W_1) \\ \times \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - x)p(x)dxdt + w_1(u + ct)dx \right\} dt. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \Pr(M = W_1) &= \Pr(W_1 < L_{11}) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_{L_{11}}(x) f_{W_1}(x)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x} \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}, \end{aligned}$$

και παρόμοια βρίσκουμε ότι

$$\Pr(M = L_{11}) = \Pr(W_1 > L_{11}) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1},$$

και

$$\Pr(M > t | M = W_1) = \Pr(M > t | M = L_{11}) = e^{-(\lambda+\lambda_1)t},$$

Έτσι η $\Phi(u)$ γίνεται

$$\Phi(u) = \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t}\, \Phi_1(u+ct)dt$$
$$+ \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x)p(x)dx + w_1(u+ct) \right\} dt. \quad (2.12)$$

Επίσης, έστω $Z = W_1 \wedge L_{12}$. Παρόμοια με παραπάνω, έχουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \Pr(Z = t, Z = L_{12}) \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x)q(x)dx + w_2(u+ct) \right\} dt$$
$$+ \int_0^\infty e^{-\delta t} \Pr(Z = t, Z = W_1) \left\{ \int_0^{ct+u} \Phi_1(u+ct-x)p(x)dx \right.$$
$$\left. + w_1(u+ct) \right\} dt$$

$$= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x)q(x)dx + w_2(u+ct) \right\} dt$$

$$+\lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi_1(u+ct-x)p(x)dx + w_1(u+ct) \right\} dt \qquad (2.13)$$

Θέτοντας $s = u + ct$, οι εξισώσεις (2.12)-(2.13) γίνονται

$$\Phi(u) = \frac{\lambda_1}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \Phi_1(s)ds$$
$$+ \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \left\{ \int_0^s \Phi(s-x)p(x)dx + w_1(s) \right\} ds,$$
$$\Phi_1(u) = \frac{\lambda_2}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)(s-u)/c} \left\{ \int_0^s \Phi(s-x)q(x)dx + w_2(s) \right\} ds,$$

Τώρα, παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει το ζητούμενο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. ■

Μια δεύτερη απόδειξη είναι η εξής

Έστω $M = W_1 \wedge L_{11}$. Θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα μήκους dt . Τότε, ισχύει

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) = {} & (1-\lambda dt)(1-\lambda_1 dt)e^{-\delta dt}\Phi(u+cdt) \\
& +(1-\lambda dt)\lambda_1 dt e^{-\delta dt}\Phi_1(u+cdt) \\
& +\lambda dt(1-\lambda_1 dt)e^{-\delta dt}\{\ \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-x)p(x)dx) \\
& +\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx \\
& +o(dt) \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Έστω τώρα ότι $M = W_1 \wedge L_{12}$. Με παρόμοια μεθοδολογία, όπως παραπάνω έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(u) = {} & (1-\lambda dt)(1-\lambda_2 dt)e^{-\delta dt}\Phi_1(u+cdt) \\
& +(1-\lambda dt)\lambda_2 dt e^{-\delta dt}\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)\,q(x)dx \\
& +\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)q(x)dx\} \\
& +\lambda dt(1-\lambda_2 dt)e^{-\delta dt}\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)\,p(x)dx \\
& +\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\}.
\end{aligned}
$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε,

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) = {} & [1-(\lambda+\lambda_1+\delta)dt]\Phi(u+cdt) + \lambda_1 dt\Phi_1(u+cdt) \\
& + \lambda dt\left\{\int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-x)p(x)dx \right. \\
& \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} + o(dt), \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(u) = {} & [1-(\lambda+\lambda_2+\delta)dt]\Phi_1(u+cdt) \\
& + \lambda_2 dt\left\{\int_0^{u+cdt}\Phi_1(u+cdt-x)q(x)dx\right. \\
& \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)q(x)dx\right\} \\
& + \lambda dt\left\{\int_0^{u+cdt}\Phi_1(u+cdt-x)p(x)dx\right. \\
& \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} \\
& + o(dt)\,. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Τότε από τη σχέση (2.15), προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
& \Phi(u+cdt)-\Phi(u) \\
& \quad = (\lambda+\lambda_1+\delta)dt\Phi(u+cdt) - \lambda_1 dt\Phi_1(u+cdt) \\
& \quad - \lambda dt\left\{\int_0^{u+cdt}\Phi(u+cdt-x)p(x)dx\right. \\
& \quad \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} + o(dt).
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με dt και πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το πρώτο μέλος με c, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
& c\frac{\Phi(u+cdt)-\Phi(u)}{cdt} \\
& \quad = (\lambda+\lambda_1+\delta)\Phi(u+cdt) - \lambda_1\Phi_1(u+cdt) \\
& \quad - \lambda\left\{\int_0^{u+cdt}\Phi(u+cdt-x)p(x)dx\right. \\
& \quad \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} + \frac{o(dt)}{dt}
\end{aligned}
$$

από την οποία, για $dt \to 0$, βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
c\Phi'^{(u)} = {} & (\lambda+\lambda_1+\delta)\Phi(u) - \lambda_1\Phi_1(u) \\
& - \lambda\left\{\int_0^{u}\Phi(u-x)p(x)dx + \int_{u}^{\infty} w(u, x-u)p(x)dx\right\}. \quad (2.17)
\end{aligned}
$$

Όμοια για την Φ_1 από τη σχέση (2.17) έχουμε,

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(u+cdt) - \Phi_1(u) \\
&= (\lambda+\lambda_2+\delta)dt\Phi_1(u+cdt) \\
&- \lambda_2 dt\left\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)q(x)dx \right. \\
&\left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)q(x)dx\right\} \\
&- \lambda dt\left\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)p(x)dx \right. \\
&\left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} + o(dt).
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας πάλι και τα δύο μέλη με dt και πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το πρώτο με c, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
c\frac{\Phi_1(u+cdt) - \Phi_1(u)}{cdt} \\
&= (\lambda+\lambda_2+\delta)\Phi_1(u+cdt) \\
&- \lambda_2\left\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)q(x)dx \right. \\
&\left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)q(x)dx\right\} \\
&- \lambda\left\{\int_0^{u+cdt} \Phi_1(u+cdt-x)p(x)dx \right. \\
&\left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx\right\} + \frac{o(dt)}{dt}.
\end{aligned}
$$

Τέλος, για $dt \to 0$ καταλήγουμε στην

$$
\begin{aligned}
c\Phi'_1(u) = (\lambda+\lambda_2+\delta)\Phi_1(u) - \lambda_2\left\{\int_0^u \Phi_1(u-x)q(x)dx + \int_u^{\infty} w(u,x-u)q(x)dx\right\} \\
- \lambda\left\{\int_0^u \Phi_1(u-x)p(x)dx + \int_u^{\infty} w(u,x-u)p(x)dx\right\}. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Έτσι, από τις σχέσεις (2.18) και (2.16) προκύπτει το σύστημα εξισώσεων (2.10) ■

Πόρισμα 2.1.

1. *Για* $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$, *τότε* $\Phi = \Phi_1$ *και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.10) ανάγεται στην εξίσωση (1.19) του Πορίσματος 1.3. , που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.*
2. *Για* $\lambda \to 0$, *το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.10) παίρνει την απλούστερη μορφή*

$$c\Phi'(u) = -\lambda_1 \Phi_1(u) + (\lambda_1 + \delta)\Phi(u),$$
$$c\Phi'_1(u) = -\lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda_2 + \delta)\Phi_1(u),$$

απ'όπου παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση ως προς u *και κάνοντας χρήση της δεύτερης εξίσωσης, παίρνουμε ότι*

$$\prod_{j=1}^{2}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi(u) = \lambda_1\lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx + \lambda_1\lambda_2 w_2(u),$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.12) του Θεωρήματος 1.3. για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με το μοντέλο της γενικευμένης $Erlang(2, \lambda_1, \lambda_2)$, *για τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων.*

Τέλος, για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, καταλήγουμε στην σχέση (1.18) του Πορίσματος 1.2. .

Με παρόμοια μεθοδολογία όπως αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1., μπορούμε να βρούμε το σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu $\varphi_j(u), \xi_j(u)$.

Πράγματι :

Έστω $M = W_1 \wedge L_{11}$. Τότε, δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα $\{M = t, M = W_1\}$ και $\{M = t, M = L_{11}\}$ και το αντίστοιχο μέγεθος της αποζημίωσης, για $u \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) = &\int_0^\infty e^{-\delta t}\Pr(M = t, M = L_{11})\, \xi_1(u+ct)dt \\ &+ \int_0^\infty e^{-\delta t}\Pr(M = t, M = W_1) \\ &\times \left\{\int_0^{u+ct} \varphi_1(u+ct-x)p(x)dx \right. \\ &+ \left. \int_{u+ct}^\infty w_1(u+ct, x-u-ct)p(x)dx\right\}dt. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\Pr(M = W_1) &= \Pr(W_1 < L_{11}) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_{L_{11}}(x) f_{W_1}(x)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1},\end{aligned}$$

$$\Pr(M = L_{11}) = \Pr(W_1 > L_{11}) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1},$$

και

$$\Pr(M > t | M = W_1) = \Pr(M > t | M = L_{11}) = e^{-(\lambda+\lambda_1)t}.$$

Έτσι, η $\varphi_1(u)$ γίνεται

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) = \lambda_1 \int_0^\infty & e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t}\, \xi_1(u + ct)dt \\ &+ \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \varphi_1(u + ct - x)p(x)dx \right. \\ &\left. + \int_{u+ct}^\infty w_1(u + ct, x - u - ct)p(x)dx \right\} dt. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Επίσης, έστω $Z = W_1 \wedge L_{12}$. Παρόμοια με παραπάνω, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\xi_1(u) &= \int_0^\infty \Pr(Z = t, Z = L_{12}) \int_0^{u+ct} \varphi_1(u + ct - x)q(x)dx\, dt \\ &\quad + \int_0^\infty \Pr(Z = t, M = W_1) \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{u+ct} \xi_1(u + ct - x)p(x)dx + \int_{u+ct}^\infty w_1(u + ct, x - u - ct)p(x)dx \right\} dt \\ &= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \varphi_1(u + ct - x)q(x)dx \right\} dt \\ &+\lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{u+ct} \xi_1(u + ct - x)p(x)dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty w_1(u + ct, x - u - ct)p(x)dx \right\} dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Θέτοντας $s = u + ct$, οι εξισώσεις (2.20)-(2.21) γίνονται

$$\varphi_1(u) = \frac{\lambda_1}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \xi_1(s)ds$$
$$+ \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \left\{ \int_0^s \varphi_1(s - x)p(x)dx + w_1(s) \right\} ds,$$

$$\xi_1(u) = \frac{\lambda_2}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)(s-u)/c}\int_0^s \varphi_1(s-x)q(x)dxds + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)(s-u)/c}$$
$$\times\left\{\int_0^s \xi_1(s-x)p(x)dx + w_1(s)\right\}ds,$$

απ'όπου παραγωγίζοντας ως προς u , προκύπτει ότι

$$c\varphi_1'(u) = (\lambda+\lambda_1+\delta)\varphi_1(u) - \lambda\int_0^u \varphi_1(u-x)p(x)dx - \lambda_1\xi_1(u) - \lambda w_1(u), \tag{2.22}$$

$$c\xi_1'(u) = (\lambda+\lambda_1+\delta)\xi_1(u) - \lambda\int_0^u \xi_1(u-x)p(x)dx - \lambda_2\int_0^u \varphi_1(u-x)q(x)dx$$
$$- \lambda w_1(u). \tag{2.23}$$

Παρόμοια, βρίσκουμε ότι

$$\varphi_2(u) = \lambda_1\int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t}\xi_2(u+ct)dt$$
$$+ \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t}\int_0^{u+ct}\varphi_2(u+ct-x)p(x)dxdt, \qquad u \geq 0,$$
$$\xi_2(u) = \lambda_2\int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t}\left\{\int_0^{u+ct}\varphi_2(u+ct-x)q(x)dx\right.$$
$$\left.+ \int_{u+ct}^\infty w_2(u+ct, x-u-ct)q(x)dx\right\}dt$$
$$+ \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t}\left\{\int_0^{u+ct}\xi_2(u+ct-x)p(x)dx\right\}dt. \qquad u \geq 0.$$

Θέτοντας $s = u + ct$, και παραγωγίζοντας ως προς u έχουμε

$$c\varphi_2'(u) = (\lambda+\lambda_2+\delta)\varphi_2(u) - \lambda\int_0^u \varphi_2(u-x)p(x)dx - \lambda_1\xi_2(u) - \lambda w_1(u), \tag{2.24}$$

$$c\xi_2'(u) = (\lambda+\lambda_2+\delta)\xi_2(u) - \lambda\int_0^u \xi_2(u-x)p(x)dx - \lambda_2\int_0^u \varphi_2(u-x)q(x)dx$$
$$- \lambda_2 w_2(u). \tag{2.25}$$

Έτσι προέκυψαν άλλα δύο συστήματα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.22)-(2.23) και (2.24)-(2.25) για τις φ_j, ξ_j για $j = 1,2$. ■

Οπότε τώρα, είμαι έτοιμοι να δείξουμε, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, Φ και Φ_1 , ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις.Αρχικά όμως, πρέπει να βρούμε τη λύση της $\textit{εξίσωσης lundberg}$ για το μοντέλο με τις δύο κλάσεις κινδύνων.

Θεώρημα 2.2. *Για δ γνήσια θετικό, η εξίσωση $lundberg$ για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων δίνεται από την παρακάτω σχέση*

$$\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) = 0, \tag{2.26}$$

όπου $\gamma(s) = \prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)]$. Η εξίσωση (2.26) έχει ακριβώς δύο ρίζες, $r_1(\delta)$ και $r_2(\delta)$, με $r_1(\delta) \neq r_2(\delta)$. Έστω ότι $r_1(\delta) < r_2(\delta)$, τότε $r_1(\delta) \to 0$ όταν $\delta \to 0^+$.

Απόδειξη.
Έστω $\gamma_\delta(s) := \frac{\{cs+\lambda[\hat{p}(s)-1]-(\lambda_1+\delta)\}\{cs+\lambda[\hat{p}(s)-1]-(\lambda_2+\delta)\}}{\lambda_1\lambda_2}$.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η εξίσωση $\gamma_\delta(s) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, έστω s_1, s_2. Γνωρίζοντας ότι ισχύει $c + \lambda\hat{p}'(s) \geq c - \lambda\mu_X > 0$ για $s \geq 0$. Τότε, η εξίσωση

$$\gamma_\delta'(s) = \frac{2[c + \lambda\hat{p}'(s)]\left[cs + \lambda[1 - \hat{p}(s)] - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta}{2}\right]}{\lambda_1\lambda_2} = 0,$$

έχει μία θετική ρίζα, έστω s_0 . Έτσι, $\gamma_\delta'(s) < 0$ για $s \in [0, s_0)$, και $\gamma_\delta'(s) > 0$ για $s \in (s_0, \infty)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\gamma_\delta(s)$ είναι φθίνουσα για $s \in [0, s_0)$ και $\gamma_\delta(s)$ είναι αύξουσα για $s \in [s_0, \infty)$. Ακόμη, ισχύει ότι $\gamma_\delta(0) = \frac{(1+\delta)}{\lambda_1}\frac{(1+\delta)}{\lambda_2} > \hat{q}(0) = 1$. Το γεγονός αυτό απορρέει από το ότι η $\gamma_\delta(s) = \hat{q}(s)$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες, έστω $r_1(\delta), r_2(\delta)$. Όταν το s βρίσκεται στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο και $\Re(s) \geq 0$ τότε $|\gamma_\delta(s)| > 1$ για r αρκούντως μεγάλο, ενώ όταν το s βρίσκεται στον άξονα των φανταστικών, ισχύει ότι $\Re(s) = 0,\ |\gamma_\delta(s)| \geq \prod_{j=1}^{2}\left(\frac{(1+\delta)}{\lambda_j}\right) > 1 = \hat{q}(0) \geq \hat{q}(s)$.

Επειδή οι συναρτήσεις $\gamma_\delta(s)$ και $\hat{q}'(s)$ είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της (μεταξύ ημικυκλίου και τον άξονα των φανταστικών), τότε, από το θεώρημα του Rouche, στο θετικό μιγαδικό επίπεδο, ο αριθμός των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg είναι ο ίδιος με τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης $\gamma_\delta(s) = 0$. Επιπλέον, με βάση το θεώρημα του Rouche, η τελευταία εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο θετικό μιγαδικό επίπεδο. Τέλος, συνεπάγεται ότι και η εξίσωση (2.26) έχει ακριβώς δύο ρίζες στο θετικό μιγαδικό επίπεδο. ∎

Στη συνέχεια της εργασίας, θα συμβολίζουμε τις ρίζες της $\textit{εξίσωσης Lundberg}$ με r_i $i = 1{,}2$.

Έστω οι μετασχηματισμοί Laplace, αντίστοιχα, των $\Phi(u)$, $\Phi_1(u)$ και $w_j(u)$, $j = 1{,}2$ και στις δύο εξισώσεις στην (2.10), που είναι οι $\widehat{\Phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Phi(x)dx$, $\widehat{\Phi_1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Phi_1(x)dx$, $\widehat{w}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx}w_j(x)dx$, αντίστοιχα.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στο σύστημα των δύο εξισώσεων στην (2.10) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς $\widehat{\Phi}(s)$ και $\widehat{\Phi}_1(s)$ καταλήγουμε στο εξής σύστημα εξισώσεων

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\lambda_1[\lambda\widehat{w}_1(s) + \lambda_2\widehat{w}_2(s) - c\Phi_1(0)] + [c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(s)][cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)]}{\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)} \tag{2.27}$$

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\lambda_2\hat{q}(s)[\lambda\widehat{w}_1(s) - c\Phi(0)] + [c\Phi_1(0) - \lambda\widehat{w}_1(s) - \lambda_2\widehat{w}_2(s)][cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)]}{\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}, \tag{2.28}$$

όπου οι αρχικές τιμές των Φ, Φ_1 στο σημείο $u = 0$, δίνονται από την παρακάτω πρόταση,

Πρόταση 2.1. *Με βάση το Λήμμα 2.1. , οι αρχικές τιμές των Φ, Φ_1 στο σημείο $u = 0$ δίνονται από τις δύο ακόλουθες σχέσεις*

$$\Phi(0) = \frac{\lambda}{c}\left((\widehat{w}_1(r_2) - \frac{cr_1 + \lambda\hat{p}(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)}{c - \lambda T_{r_1}T_{r_2}p(0)}T_{r_1}T_{r_2}w_1(0)\right) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{c}\frac{T_{r_1}T_{r_2}w_2(0)}{c - \lambda T_{r_1}T_{r_2}p(0)},$$

$$\Phi_1(0) = \Phi(0) + \frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(r_2) + \frac{c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)}{c\lambda_1}[cr_2 + \lambda\hat{p}(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)].$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.1. ισχύει ότι $\widehat{\Phi}(s) < \infty$, για κάθε $s > 0$, οπότε ο αριθμητής της εξίσωσης (2.27) είναι 0 όταν $s = r_1$ και r_2, δηλαδή

$$[c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_i)][cr_i + \lambda\hat{p}(r_i) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)] = -\lambda_1[\lambda\widehat{w}_1(r_i) + \lambda_2\widehat{w}_2(r_i) - c\Phi_1(0)], \quad i = 1{,}2.$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς $\Phi(0)$ και $\Phi_1(0)$ καταλήγουμε άμεσα στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Πρόταση 2.2. *Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 2.1. οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων των Gerber-Shiu $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\hat{\Lambda}(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}, \quad \widehat{\Phi}_1(s) = \widehat{\Phi}(s) + \frac{\hat{\Lambda}_1(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}, \tag{2.29}$$

όπου

$$\begin{aligned}\hat{n}(s) = {} & 2\lambda c T_{r_1}\hat{p}(s) + \lambda[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) - 2\lambda c r_2 - \lambda\hat{p}(r_1) - \lambda\hat{p}(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) \\ & - \lambda^2 T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\hat{p}(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{q}(s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(s) = {} & \lambda[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + \delta) - c r_2 - \lambda\hat{p}(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) \\ & + \lambda[c\Phi_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) + \lambda c T_{r_1}\widehat{w}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s),\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_1(s) = {} & \lambda_2 c T_{r_1}\widehat{w}_2(s) - \lambda_2\lambda\big(1 - \hat{q}(r_1)\big)T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) - \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\widehat{w}_2(s) \\ & + \lambda_2[\lambda + \delta - c r_2 - \lambda\hat{p}(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{q}(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s) \\ & + [c\Phi_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)] \\ & \times\left(\lambda\frac{c r_2 + \lambda\hat{p}(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)}{\lambda_1}T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) - \lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{q}(s)\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Με βάση την συνθήκη (2.9) του Λήμματος 2.1. έχουμε ότι $\widehat{\Phi}(s) < \infty$ και $\widehat{\Phi}_1(s) < \infty$ για κάθε $s > 0$. Δεδομένου ότι η τιμή $r_1 > 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης (2.26), δίνεται η παρακάτω απόδειξη όπως αυτή δόθηκε από τους S.Chadjiconstantinidis and A.Papaioannou το 2009 με την εργασία τους «Analysis of the Gerber-Shiu function barrier problems for a risk process with two claims» χρησιμοποιώντας παρόμοια μεθοδολογία με αυτήν της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1. των Dickson and Hipp στην εργασία τους «On the time to ruin for Erlang(2) risk process» το 2001, αλλά και βάσει της απόδειξης του θεωρήματος 2.2 των Cheng and Tang στο άρθρο τους «Moments of surplus before ruin and deficit at ruin in the Erlang(2) risk process» το 2003, από τον ορισμό της συνάρτησης $\gamma(s)$ έχουμε ότι

$$\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) = \gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) - \gamma(r_1) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(r_1) = (s - r_1)P(s),$$

όπου

$$P(s) = c^2(s + r_1) - 2\lambda c s T_{r_1}\hat{p}(s) + 2\lambda c\hat{p}(r_1) - \lambda^2\big(\hat{p}(s) + \hat{p}(r_1)\big)T_{r_1}\hat{p}(s)$$
$$+ \lambda(2\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)T_{r_1}\hat{p}(s) - c(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}\hat{q}(s).$$

Επιπλέον, επειδή r_2 $(r_2 \neq r_1)$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης (2.26) έχουμε ότι $P(r_2) = 0$, και συνεπώς

$$P(s) = P(s) - P(r_2) = (s - r_2)[c^2 - \hat{n}(s)],$$

Ακόμη, ο κοινός παρονομαστής των μετασχηματισμών Laplace $\widehat{\Phi}(s)$ και $\widehat{\Phi}_1(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) = (s - r_1)(s - r_2)[c^2 - \hat{n}(s)]. \tag{2.30}$$

Στην εργασία τους «On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes» οι Li και Lu το 2005 δίνουν τις εξισώσεις

$$m_1(s) = \lambda\left(c - \lambda T_{r_1}\hat{p}(s)\right)T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + \lambda(c\varphi_1(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)$$
$$- \lambda[cr_1 + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s),$$
$$m_2(s) = c\lambda\varphi_2(0)T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) = T_sT_{r_1}T_{r_2}w_1(0), T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) = T_sT_{r_1}T_{r_2}p(0)$ και $T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) = T_sT_{r_1}T_{r_2}w_2(0)$, αλλά και το γεγονός ότι $\Phi(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)$ τότε είναι εμφανές ότι $\hat{P}(s) = m_1(s) + m_2(s)$. Ακόμη, ορίζουμε $\Theta(s)$ να είναι αριθμητής της εξίσωσης (2.19). Εφόσον ισχυεί ότι

$$\hat{\varphi}_j(s) = \frac{(s - r_1)(s - r_2)m_j(s)}{\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}, \qquad j = 1,2$$

και $\widehat{\Phi}(s) = \hat{\varphi}_1(s) + \hat{\varphi}_2(s)$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Theta(s) = (s - r_1)(s - r_2)\hat{P}(s). \tag{2.31}$$

Τότε, από τις εξισώσεις (2.30) και (2.31) αποδεικνύεται το πρώτο μέρος της εξίσωσης (2.29).

Επίσης, συμβολίζοντας με $\Theta_1(s)$ τον αριθμητή της εξίσωσης (2.28), και με βάση το Λήμμα 2.1., και χρησιμοποιώντας το ότι $\widehat{\Phi}_1(s) < \infty$, τότε ισχύει $\Theta_1(r_i) = 0$, για $i = 1,2$. Όμοια με την μεθοδολογία της απόδειξης της (2.30), η συνάρτηση $\Theta_1(s)$ γράφεται ως

$$\Theta_1(s) = \Theta_1(s) - \Theta_1(r_1) = (s - r_1)\mathrm{O}_1(s),$$

όπου

$O_1(s) = c^2\Phi_1(0) + \lambda[cs + \lambda\hat{p}(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \delta) - \lambda_2\hat{q}(r_1)]T_{r_1}\widehat{w}_1(s) + \lambda_2[cs + \lambda\hat{p}(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)]T_{r_1}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2[c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(s)]T_{r_1}\hat{q}(s) - \lambda[c\Phi_1(0) - \lambda_2\widehat{w}_2(s) - \lambda\widehat{w}_1(s)]T_{r_1}\hat{p}(s) - \lambda c\widehat{w}_1(r_1) - \lambda_2 c\widehat{w}_2(r_1).$

Επίσης, από το γεγονός ότι $O_1(r_2) = 0$, τότε είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι

$$O_1(s) = O_1(s) - O_1(r_2) = (s - r_2)\widehat{\mathrm{M}}(s),$$

με

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{M}}(s) = {} & \lambda[c\Phi_1(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2) - \lambda_2\widehat{w}_2(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) + \lambda cT_{r_1}\widehat{w}_1(s) + \lambda_2 cT_{r_1}\widehat{w}_2(s) \\ & + \lambda[\lambda + \lambda_1 + \delta - cr_2 - \lambda\hat{p}(r_1) + \lambda_2\hat{q}(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\widehat{w}_2(s) \\ & - \lambda_2[c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{q}(s) + \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{q}(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s),\end{aligned}$$

οπότε ο αριθμητής γράφεται

$$\Theta_1(s) = (s - r_1)(s - r_2)\widehat{M}(s). \tag{2.32}$$

Άρα, από τις εξισώσεις (2.22) και (2.24) παίρνουμε ότι

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\widehat{M}(s)}{c^2 - \hat{n}(s)} \ . \tag{2.33}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την τιμή της $\Phi_1(0)$ από την Πρόταση 2.1. στην συνάρτηση $\widehat{M}(s)$ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $\widehat{M}(s) = \hat{\Lambda}(s) + \hat{\Lambda}_1(s)$. Έτσι από την παραπάνω εξίσωση μαζί με τις εξισώσεις (2.29) και (2.33), παίρνουμε το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (2.29). ■

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο, θα βρούμε ένα ακόμα σύστημα εξισώσεων με τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu φ_j, ξ_j $για$ $j = 1,2$.

Έστω, οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu $\varphi_j(u)$ και $\xi_j\ (u)$ αντίστοιχα όπως ορίσθηκαν στις σχέσεις (2.7) και (2.8), $\hat{\varphi}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi_j(x)dx$ και $\hat{\xi}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\xi_j(x)dx$ για $j = 1,2$, αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace στο σύστημα εξισώσεων (2.22)-(2.23), έχουμε

$$[cs - (\lambda + \lambda_1 + \delta) + \lambda\hat{p}(s)]\hat{\varphi}_1(s) = c\varphi_1(0) - \lambda_1\hat{\xi}_1(s) - \lambda\widehat{w}_1(s), \tag{2.34}$$

$$[cs-(\lambda+\lambda_2+\delta)+\lambda\hat{p}(s)]\hat{\xi}_1(s)=c\xi_1(0)-\lambda_2\hat{q}(s)\hat{\varphi}_1(s)-\lambda\widehat{w}_1(s).$$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων (2.34) ως προς $\hat{\varphi}_1(s), \hat{\xi}_1(s)$ παίρνουμε

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{[c\varphi_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(s)][cs-(\lambda+\lambda_1+\delta)+\lambda\hat{p}(s)]-\lambda_1[c\xi_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(s)]}{\lambda_1\lambda_2[\gamma_\delta(s)-\hat{q}(s)]}, \qquad (2.35)$$

όπου ο αριθμητής είναι 0 αν $s=\rho_1$ και ρ_2, δηλαδή

$$\left[c\varphi_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(\rho_j)\right]\left[c\rho_j-(\lambda+\lambda_1+\delta)+\lambda\hat{p}(\rho_j)\right]=\lambda_1\left[c\xi_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(\rho_j)\right]. \qquad j=1,2.$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς $\varphi_1(0)$ και $\xi_1(0)$, παίρνουμε

$$\varphi_1(0)=\frac{\lambda}{c}\left[\widehat{w}_1(\rho_2)-\frac{c\rho_1+\lambda\hat{p}(\rho_1)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)}{c-\lambda T_{\rho_2}T_{\rho_1}p(0)}T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0)\right], \qquad (2.36)$$

$$\xi_1(0)=\varphi_1(0)+\frac{c\varphi_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(\rho_2)}{c\lambda_1}[c\rho_2+\lambda\hat{p}(\rho_2)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)]. \qquad (2.37)$$

Μετά από κάποιες πράξεις η (2.35) μπορεί να γραφτεί

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)m_1(s)}{\lambda_1\lambda_2[\gamma_\delta(s)-\hat{q}(s)]}, \quad s\in\mathbb{C}, \qquad (2.38)$$

όπου

$$\begin{aligned}m_1(s)=\lambda\left[c-T_sT_{\rho_1}p(0)\right]T_sT_{\rho_2}w_1(0)+\lambda[c\varphi_1(0)-\lambda\widehat{w}_2(\rho_2)]T_sT_{\rho_2}p(0)\\ -\lambda[c\rho_1+\lambda\hat{p}(\rho_1)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)]T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0).\end{aligned} \qquad (2.39)$$

Παρόμοια, εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace στις σχέσεις (2.24)-(2.25), έχουμε

$$[cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_1+\delta)]\hat{\varphi}_2(s)=c\varphi_2(0)-\lambda_1\hat{\xi}_2(s),$$
$$\hat{\xi}_2(s)[cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_2+\delta)]=c\xi_2(0)-\lambda_2\hat{q}(s)\hat{\varphi}_2(s)-\lambda_2\widehat{w}_2(s),$$

οπότε λύνοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων ως προς $\hat{\varphi}_2(s)$, παίρνουμε ότι

$$\hat{\varphi}_2(s)=\frac{c\varphi_2(0)[cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_2+\delta)]-c\lambda_1\xi_2(0)+\lambda_1\lambda_2\widehat{w}_2(s)}{\lambda_1\lambda_2[\gamma_\delta(s)-\hat{q}(s)]}, \qquad (2.40)$$

η $\hat{\varphi}_2(s)$ είναι πεπερασμένη επίσης, για s τέτοιο ώστε $\Re(s)>0$,

$$c\varphi_2(0)\left[c\rho_j + \lambda\hat{p}(\rho_j) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)\right] = \lambda_1\left[c\xi_2(0) - \lambda_2\widehat{w}_2(\rho_j)\right]. \qquad j = 1,2$$

Η λύση αυτού του συστήματος μας οδηγεί στις

$$\varphi_2(0) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{c}\left[\frac{T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)}{c - \lambda T_{\rho_2}T_{\rho_1}p(0)}\right]. \tag{2.41}$$

και

$$\xi_2(0) = \frac{\lambda_2}{c}\left[\widehat{w}_2(\rho_1) + \frac{c\rho_1 + \lambda\hat{p}(\rho_1) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)}{c - \lambda T_{\rho_2}T_{\rho_1}p(0)}T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)\right]. \tag{2.42}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.41) και (2.42) στην (2.40), μετά από κάποιες πράξεις, όπως παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\hat{\varphi}_2(s) = \frac{(s - \rho_1)(s - \rho_2)m_2(s)}{\lambda_1\lambda_2[\gamma_\delta(s) - \hat{q}(s)]}, \qquad s \in \mathbb{C}, \tag{2.43}$$

όπου

$$m_2(s) = c\lambda\varphi_2(0)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}p(0) + \lambda_1\lambda_2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0). \qquad \blacksquare$$

Λήμμα 2.2. *Έστω $\delta > 0$, τότε ισχύει*

$$\begin{aligned} 2\lambda c\hat{\hat{P}}(r_1) + \lambda[\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta - 2cr_2 - \lambda\hat{p}(r_2)]\frac{\hat{\hat{P}}(r_1) - \hat{\hat{P}}(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2\hat{\hat{P}}(r_1)\hat{\hat{P}}(r_2) \\ + \lambda_1\lambda_2\frac{\hat{\hat{Q}}(r_1) - \hat{\hat{Q}}(r_2)}{r_2 - r_1} = c^2 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{r_1r_2}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι οι ρίζες $r_1, r_2 > 0$ ικανοποιούν την $\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ Lundberg$ του Θεωρήματος 2.2. , ισχύει ότι

$$\frac{1}{r_j}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(cr_j + \lambda\hat{p}(r_j) - (\lambda + \lambda_i + \delta)\right) + \lambda_1\lambda_2(1 - \hat{q}(r_j))\right] = \frac{\lambda_1\lambda_2}{r_j}, \qquad j = 1,2.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη για $j = 1{,}2$ τις δύο παραπάνω εξισώσεις και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις προκύπτει η εξίσωση (2.41). ■

Πρόταση 2.3. *Για $u \geq 0$, και κάτω από την ισχύ της υπόθεσης (2.9), οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\Phi(u), \Phi_1(u)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις*

$$\Phi(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \Phi(u-x)\zeta(x)dx + \frac{E(u)}{1+\xi}, \tag{2.45}$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \Phi_1(u-x)\zeta(x)dx + \frac{E(u)+E_1(u)}{1+\xi}, \tag{2.46}$$

όπου $\zeta(x) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}n(x)$ είναι σ.π.π.,

$$E(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\Lambda(x),$$

$$E(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\Lambda_1(x),$$

και ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy = 1 - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2} < 1$. Επίσης, για $\delta \to 0^+$ τότε $\xi \to \xi_0$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\theta[\lambda(\lambda_1+\lambda_2)\mu_X+\lambda_1\lambda_2\mu_Y]}{c^2 r_2(0)} < 1$, δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό.

Απόδειξη. Βάσει της εργασίας των S.Chadjiconstantinidis and A.Papaioannou το 2009 «Analysis of the Gerber-Shiu function barrier problems for a risk process with two claims», στην εξίσωση (2.29) αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\widehat{\Phi}(s)$, ως προς s, έχουμε ότι

$$\Phi(u) = \frac{1}{c^2}\int_0^u \Phi(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2}\Lambda(u), \ \ u \geq 0. \tag{2.47}$$

Αρχικά, ορίζουμε την σ.κ. $Z(u)$ με δεξιά ουρά $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u)$, όπου $\bar{Z}(u) = \frac{\int_u^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy}{\int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy}$.
Αντιστρέφοντας ως προς s το μετασχηματισμό Laplace, $\hat{n}(s)$ της Πρότασης 2.2. και βάσει των σχέσεων $\int_0^\infty T_r p(s)ds = \frac{1-\hat{p}(r)}{r}$, $\int_0^\infty T_r q(s)ds = \frac{1-\hat{q}(r)}{r}$ και $\int_0^\infty \left(T_{r_1}p \star T_{r_2}q\right)(x)dx = \frac{1-\hat{p}(r_1)}{r_1}\frac{1-\hat{q}(r_2)}{r_2}$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{c^2} n(x)dx = \frac{1}{c^2}\Bigg[& 2\lambda c\hat{\hat{P}}(r_1) + \lambda(\lambda_2 + \lambda_1 + 2\lambda + 2\delta - 2cr_2 - \lambda\hat{p}(r_1) - \lambda\hat{p}(r_2)) \\
& \times \frac{\hat{\hat{P}}(r_1) - \hat{\hat{P}}(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2 \hat{\hat{P}}(r_1)\hat{\hat{P}}(r_2) + \lambda_1\lambda_2 \frac{\hat{\hat{Q}}(r_1) - \hat{\hat{Q}}(r_2)}{r_2 - r_1}\Bigg] \\
= {}& 1 - \delta \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) + \delta}{c^2 r_1 r_2} < 1,
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία εξίσωση προκύπτει από την εξίσωση (2.33) του Λήμματος 2.3. . Επιπλέον, ορίζουμε $\xi = [(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2]/[c^2 r_1 r_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2]$ τέτοιο ώστε $1/(1+\xi) = \frac{1}{c^2}\int_0^\infty n(y)dy$ και $\bar{Z}(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\int_u^\infty n(y)dy$. Τότε, η συνάρτηση $\zeta(u) = \frac{d}{du}Z(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}n(u)$ είναι μία σ.π.π. και από τον ορισμό της συνάρτησης $E(u)$, η ανανεωτική εξίσωση (2.47) μπορεί να εκφρασθεί σε όρους των $\zeta(u), E(u)$ και ξ όπως δίνεται στην εξίσωση (2.45), η οποία είναι ελαττωματική.

Επιπλέον, από την (2.33) και από την $\widehat{M}(s) = \hat{\Lambda}(s) + \hat{\Lambda}_1(s)$, έχουμε

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\hat{\Lambda}(s) + \hat{\Lambda}_1(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}.$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς s, παίρνουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{c^2}\int_0^u \Phi_1(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2}[\Lambda(u) + \Lambda(u)], \qquad u \geq 0.$$

Παρόμοια με την μεθοδολογία που ακολουθήσαμε παραπάνω, προκύπτει εύκολα η σχέση (2.46). Τέλος, για $\delta \to 0^+$, δοθέντος ότι $r_1(\delta) < r_2(\delta)$, έχουμε ότι $r_1(\delta) \to r_1(0) = 0, r_2(0) > 0$, και συνεπώς

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{1+\xi} = 1 - \lim_{\delta\to 0^+}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta + \delta^2}{c^2 r_1(\delta) r_2(\delta)} = 1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c^2 r'_1(0) r_2(0)}. \tag{2.48}$$

Τέλος, θέτοντας $s = r_1(\delta)$ στην εξίσωση (2.18) παραγωγίζοντας ως προς δ και παίρνοντας $\delta \to 0^+$, έχουμε ότι $r'_1(0) = 1/\left(c - \lambda\mu_X - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mu_Y\right)$ και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το $r'_1(0)$ σε όρους του περιθωρίου ασφαλείας , δηλαδή $r'_1(0) = 1/\left(\theta\left(\lambda\mu_X + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mu_Y\right)\right)$. Αντικαθιστώντας το $r'_1(0)$ στην εξίσωση (2.48) , το αποτέλεσμα για την ποσότητα $1/(1+\xi_0)$ είναι προφανές. ■

Οι ανανεωτικές εξισώσεις (2.45) και (2.46) έχουν λύσεις, οι οποίες μπορούν να παρασταθούν με όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι ορίζουμε $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$ να είναι η σ.κ. της ακόλουθης σύνθετης γεωμετρικής κατονομής

$$\bar{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{Z}^{\star n}(u), \qquad u \geq 0,$$

όπου $\bar{Z}^{\star n}(u)$ είναι η $n - o\sigma\tau$ή συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{Z}(u) = \int_u^{\infty} \zeta(x)dx$. Οπότε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 1.8. μπορούμε να πάρουμε αναλυτικές λύσεις για τις ελαττωματικές εξισώσεις που δίνονται από τις (2.45) και τις (2.46) .

Πρόταση 2.4. *Αν ισχύει το Λήμμα 2.1. , τότε για $u \geq 0$, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ που ικανοποιούν τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις (2.45) και (2.46) αντίστοιχα, δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις*

$$\Phi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)]\, dE(x) + \frac{E(0)}{\xi}[1 - \bar{K}(u)], \tag{2.49}$$

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) + \frac{1}{\xi}\int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)] dE_1(x) + \frac{E_1(u)}{\xi}[1 - \bar{K}(u)] \,. \tag{2.50}$$

Απόδειξη. Η σχέση (2.49) για την $\Phi(u)$ αποδεικνύεται άμεσα, αφού είναι συνέπεια της εφαρμογής του Θεωρήματος 1.8. .Παρόμοια, για την σχέση (2.50) και την $\Phi_1(u)$, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 1.8. έχουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)] d[E(x) + E_1(x)] + \frac{E(0) + E_1(0)}{\xi}[1 - \bar{K}(u)],$$

Από την παραπάνω χρησιμοποιώντας την (2.48) παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.50). ■

Βάσει της Πρότασης 2.4. , ο υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu μπορεί να γίνει όταν η δεξιά ουρά της $K(u)$ είναι γνωστή. Αυτό συμβαίνει σε κάποιες περιπτώσεις, όπως όταν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\bar{K}}(s)$ έχει την μορφή πηλίκου πολυωνύμων. Η $\hat{\bar{K}}(s)$ έχει μορφή πηλίκου πολυωνύμων αν και μόνο αν οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων $p(x)$ και $q(x)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων. Σ'αυτή τη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων μπορούμε να δώσουμε αναλυτικά αποτελέσματα της $\bar{K}(u)$.

Στην εργασία τους, «Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory», οι Lin and Wilmot το 1999 έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $\bar{K}(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)\zeta(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u), \qquad u \geq 0.$$

Έτσι, παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\hat{\bar{K}}(s) = \frac{\hat{\bar{n}}(s)}{[c^2 - \hat{n}(s)]}\,, \tag{2.51}$$

όπου $\hat{n}(s)$ δίνεται από την Πρόταση 2.2. και $\hat{\bar{n}}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\bar{n}(x) = \int_0^\infty n(y)dy$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.29) στην εξίσωση (2.50) και κάνοντας χρήση του ορισμού της συνάρτησης $\gamma(s)$, έπεται ότι

$$\hat{\bar{K}}(s) = \frac{\hat{\bar{n}}(s)(s-r_1)(s-r_2)}{\prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}\,. \tag{2.52}$$

Τώρα εφόσον, $\hat{\bar{n}}(s) = T_s\bar{n}(0) = T_sT_0n(0) = \frac{T_0n(0) - T_sn(0)}{s} = \frac{\hat{n}(0) - \hat{n}(s)}{s}$,
και χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση (2.30), και από τον ορισμό της $\gamma(s)$, έχουμε

$$\hat{\bar{n}}(s) = \frac{1}{s}\left[\frac{\prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} - c^2\frac{\xi}{1+\xi}\right].$$

Έτσι η εξίσωση (2.52) γράφεται ως

$$\hat{\bar{K}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) - \frac{c^2\xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2)}{s\{\prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)\}}. \tag{2.53}$$

Είναι εμφανές από την παραπάνω σχέση ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\bar{K}}(s)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων, όταν οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{p}(s)$ και $\hat{q}(s)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων. Οπότε, θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και των δύο κλάσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Έτσι, θεωρούμε ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. των αποζημιώσεων έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\hat{p}(s) = \frac{l_{n-1}(s)}{l_n(s)}, \text{με } l_{n-1}(0) = l_n(0) \text{ και } \hat{q}(s) = \frac{h_{m-1}(s)}{h_m(s)}, \text{με } h_{m-1}(0) = h_m(0), \tag{2.54}$$

όπου $l_{n-1}(s), h_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού $n-1, m-1$ $(\deg(l_n) = n - 1, \deg(h_m) = m-1)$ ή μικρότερου αντίστοιχα και $l_n(s), h_m(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n, m αντίστοιχα $(\deg(l_n) = n, \deg(h_m) = m)$.

Έστω $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s}\left[\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} l_n^2(s) h_m(s)\right]$ ένα πολυώνυμο με $\deg(Q_{2n+m-1}) = 2n+m-1$. Έστω

$$a_i = \frac{R_1 R_2 \dots R_{2n+m}}{R_i \prod_{j=1, j\neq i}^{2}(R_j - R_i)} \cdot \frac{l_n^2(-R_i) h_m(-R_i)}{l_n^2(0) h_m(0)}, \qquad i = 1,2,\dots,2n+m,$$

όπου τα $-R_i$, με $\Re(R_i) > 0, i = 1,2,\dots,2n+m$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $D_{2n+m+2}(s) = 0$, με

$$D_{2n+m+2}(s) = h_m(s) \prod_{i=1}^{2}[cs - \lambda - \lambda_i - \delta) l_n(s) + \lambda l_{n-1}(s)] - \lambda_1 \lambda_2 h_{m-1}(s) l_n^2(s). \quad (2.55)$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών η εξίσωση (2.52) γράφεται ως

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{D_{2n+m+2}(s) - \frac{c^2 \xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2) l_n^2(s) h_m(s)}{s D_{2n+m+2}(s)}. \quad (2.56)$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. $\hat{p}(s)$ και $\hat{q}(s)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (2.54). Τότε*

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}.$$

Επιπλέον, αν $-R_i, i = 1,2,\dots,2n+m$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε

$$\hat{\hat{K}}(s) = \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{a_i}{s+R_i}, \qquad s \geq 0, \qquad \text{και} \qquad \bar{K}(u) = \sum_{i=1}^{2n+m} a_i e^{-R_i u}, \ u \geq 0. \quad (2.57)$$

Απόδειξη. Έστω $\hat{p}(s) = l_{n-1}(s)/l_n(s)$ και $\hat{q}(s) = h_{m-1}(s)/h_m(s)$.Τότε από το Θεώρημα 2.2. έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 = \gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) &= \prod_{i=1}^{2}\left[cs + \lambda\frac{l_{n-1}(s)}{l_n(s)} - (\lambda + \lambda_i + \delta)\right] - \frac{\lambda_1\lambda_2 h_{m-1}(s)}{h_m(s)} \\ &= \frac{D_{2n+m+2}(s)}{l_n^2(s) h_m(s)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Όπως έχουμε αναφέρει η συνάρτηση $D_{2n+m+2}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m+2$ και συνεπώς η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)=0$ έχει $2n+m+2$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Από το γεγονός ότι $\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)=0$ είναι η εξίσωση του Lundberg έπεται από την σχέση (2.58), ότι η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες r_1, r_2 με θετικά πραγματικά μέρη και $2n+m$ ρίζες, R_i, με αρνητικά πραγματικά μέρη. Επομένως η $D_{2n+m+2}(s)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$D_{2n+m+2}(s)=c^2(s-r_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)\,. \tag{2.59}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)$ στην εξίσωση (2.55), έπεται ότι

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)-\frac{\xi}{1+\xi}l_n^2(s)h_m(s)}{s\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}=\frac{Q_{2n+m}(s)}{s\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)},$$

όπου $Q_{2n+m}(s)=\prod_{i=1}^{2}(s+R_i)-\frac{1}{1+\xi}l_n^2(s)h_m(s)$. Από το γεγονός ότι $\hat{\hat{K}}(s)<\infty$, για $s\geq 0$, καθώς επίσης και από το γεγονός ότι το $s=0$ είναι ρίζα του παρονομαστή της συνάρτησης $\hat{\hat{K}}(s)$, είναι φανερό ότι πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $Q_{2n+m}(0)=0$, απ'όπου παίρνουμε ότι $\frac{\xi}{1+\xi}=\frac{R_1R_2\ldots R_{2n+m}}{l_n^2(0)h_m(0)}$. Επιπλέον, η συνάρτηση $Q_{2n+m-1}(s)=\frac{1}{s}Q_{2n+m}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m-1$, και επομένως χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων έχουμε ότι

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}=\sum_{i=1}^{2n+m}\frac{a_i}{s+R_i}\,,\ a_i=\frac{Q_{2n+m-1}(-R_i)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{2n+m}(R_j-R_i)}\,,\ \ i=1,2,\ldots,2n+m,$$

απ'όπου αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς s παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.57). ■

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη στρατηγικών μερισμάτων

Μία πιο ρεαλιστική επέκταση τόσο του ανανεωτικού μοντέλου (1.6)-(1.7), όσο και του μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2, είναι η υπόθεση της ύπαρξης στρατηγικών μερίσματος (dividend barrier strategies).
Σ'αυτό το κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν μια γενικευμένη Erlang κατανομή.

3.1. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος για το ανανεωτικό μοντέλο

Αρχικά θα περιγράψουμε τη συγκεκριμένη στρατηγική μερίσματος για το ανανεωτικό μοντέλο (1.6)-(1.7) και θα δώσουμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων.

Κάτω από την υπόθεση αυτή, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο $b(> u)$ τέτοιο ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο κατώφλι b τα ασφάλιστρα c επιστρέφονται στους δικαιούχους με τη μορφή μερισμάτος μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς. Έστω $U_b(t)$ με $U_b(0) = u$, η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική (βλ. Σχήμα 1.3), η οποία ορίζεται ως

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

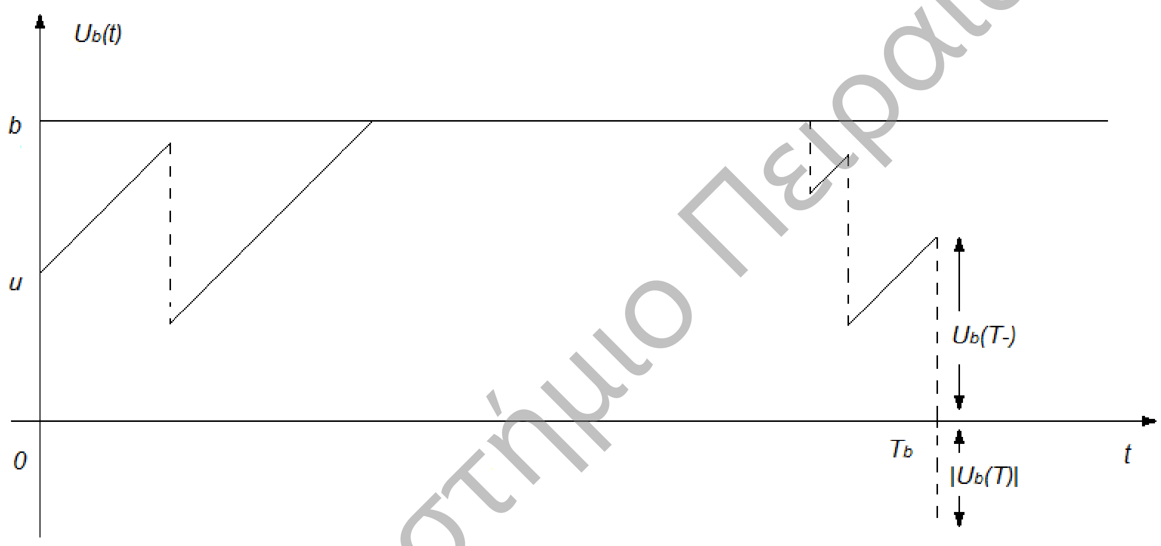
Επιπλέον (σε αντιστοιχία με τη διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη μερίσματος) ορίζουμε

$$T_b = inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\} \;\; \mu\varepsilon \;\; inf\emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος και $U_b(T_b -)$ και $|U_b(T_b)|$ να είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, αντίστοιχα. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi_b(u) := \Pr(T_b < \infty), \qquad u \leq b.$$

Σχήμα 3.1: Η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ με στρατηγική σταθερού μερίσματος



Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για αυτή την τροποποιημένη διαδικασία ορίζεται ακολούθως:

Ορισμός 3.1. *Για $u \leq b$ και $\delta \geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως*

$$\varphi_b(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T_b} w\big(U(T_b -), |U(T_b)| I_{T_b<\infty} \big| U_b(0) = u\big)\right], \qquad u \leq b,$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού και $w : [0,\infty) \times (0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ μια δισδιάστατη συνάρτηση $\mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 3.1. Από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$, είναι φανερό ότι πρόκειται για μια ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς μερίσματα, $U(t)$. Έτσι για $b \to \infty$ έχουμε ότι $\lim_{b\to\infty} U_b(t) = U(t)$ και συνεπώς $\lim_{b\to\infty} \varphi_b(u) = \varphi(u)$.

Η στρατηγική σταθερού μερίσματος εισήχθη από τον De Finetti (1957) για το διωνυμικό μοντέλο κινδύνου. Από τότε, τόσο η συνάρτηση των Gerber-Shiu, όσο και οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης τόσο στο κλασσικό όσο και στο ανανεωτικό $μοντέλο\ με\ Erlang$ ή $γενικευμένους\ Erlang$ ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιών. Βλέπε τις σχετικές εργασίες των Buhlmann (1970), Gerber (1973), (1979), (1981), Paulsen και Giessing (1997), Albrecher και Kainhofer (2002), Claramunt, Marmol και Alegre (2003), Albrecher, Kainhofer και Tichy (2003), Lin,Willmot και Drekic (2003), Albrecher (2004), Dickson και Waters (2004), Li και Garrido (2004b), Albrecher,Merce και Marmol (2005), Albrecher και Hartinger (2006), Li και Dickson (2006), Gerber, Lin και Hialiang (2006), Li (2006).

Παρατήρηση 3.2. Μια άλλη στρατηγική μερίσματος, η οποία έχει μελετηθεί σε εκτενή βαθμό, είναι η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, σύμφωνα με την οποία δεν δίνεται μέρισμα όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, αλλά στην περίπτωση όμως του πλεόνασμα ξεπεράσει αυτό το κατώφλι, τα μερίσματα που δίνονται είναι λιγότερα από τα ασφάλιστρα που εισπράττει η ασφαλιστική επιχείρηση. Είναι προφανές ότι η τελευταία στρατηγική αποτελεί γενίκευση της στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Οι Gerber και Shiu (2005a) έδειξαν ότι η συγκεκριμένη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου είναι βέλτιστη όταν ο ρυθμός μερίσματος οριοθετείται εκ των άνω και οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή. Στη παράγραφο 3.3. θα μελετήσουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για μια πολύ γενική στρατηγική μερισμάτων (τη στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων) η οποία αποτελεί γενίκευση τόσο της στρατηγικής σταθερού μερίσματος όσο και της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου.

Υποθέτοντας τώρα, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ των κινδύνων ακολουθούν την $γενικευμένη\ Erlang(n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ κατανομή, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα :

Θεώρημα 3.1. *Για $u \le b$ και $\delta \ge 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\varphi_b(u)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi_b(u) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u) = 0, \qquad (3.1)$$

με οριακές συνθήκες

$$\varphi_b^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 1,2,\dots,n, \qquad (3.2)$$

και $w(u)$ δίνεται από την σχέση (1.13).

Απόδειξη. Βλέπε Li και Garrido (2004b) στην εργασία τους «On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier». ■

Πόρισμα 3.1. *Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, εξίσωση (3.1) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^n \varphi_b(u) - \lambda^n \int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \lambda^n w(u) = 0, \qquad (3.3)$$

με οριακές συνθήκες

$$\varphi_b^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 1,2,\dots,n, \qquad (3.4)$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με $Erlang(n)$ ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης ζημιών.

Πόρισμα 3.2. *Για $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, η εξίσωση (3.1) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 \varphi_b(u) - \lambda^2 \int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \lambda^2 w(u) = 0, \qquad (3.5)$$

με οριακές συνθήκες

$$\varphi_b^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 1,2,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το μοντέλο με $Erlang(2;\lambda)$.

Πόρισμα 3.3. *Για $n = 1, \lambda_1 = \lambda$, η εξίσωση (3.1) παίρνει την μορφή*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right) \varphi_b(u) - \lambda \int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \lambda w(u) = 0, \qquad (3.6)$$

με οριακές συνθήκες

$$\varphi_b'(0) = 0,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Η λύση της μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.1) με οριακές συνθήκες που δίνονται από την (3.2) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της παρακάτω αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (ως προς $v_\delta(u)$)

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j+\delta-c\frac{\partial}{\partial u}\right)v_\delta(u)-\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\int_0^u v_\delta(u-x)f(x)dx=0\,,\qquad u\geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$A_\delta(D)v_\delta(u)-\int_0^u v_\delta(u-x)f(x)dx=0,\qquad u\geq 0,\tag{3.7}$$

όπου $D=\frac{\partial}{\partial u}$ είναι ο τελεστής παραγώγισης και $A_\delta(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}-\frac{c}{\lambda_j}s\right)=\sum_{k=0}^{n}A_{\delta,k}s^k$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, με $A_{\delta,k}$ σταθερούς όρους που δίνονται σε όρους των $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,c$ και δ.

Τότε, από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. Κεφ.7 των Boyce και Di Prima(2000)] έπεται ότι η λύση της $n-\tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma$ μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.1) εκφράζεται ως άθροισμα μερικής λύσης συν ένα γραμμικό συνδυασμό από n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.7). Εφόσον από το Θεώρημα 1.3. η συνάρτηση Gerber-Shiu χωρίς μερίσματα, $\varphi(u)$, είναι μερική λύση της (3.1), τότε η γενική λύση της $\varphi_b(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_b(u)=\varphi(u)+\sum_{i=1}^{n}n_i(b)v_{\delta,i}(u),\qquad 0\leq u\leq b,\tag{3.8}$$

όπου $v_{\delta,i}(u)$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.7) και n_i , $i=1,2,\dots,n$ είναι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (3.2), δηλαδή λύνοντας ως προς $n_i(b)$ το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\varphi^{(k)}(b)+\sum_{i=1}^{n}n_i(b)v_{\delta,i}^{(k)}(b)=0,\qquad k=1,2,\dots,n.$$

Η λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.7), εξαρτάται από τις αρχικές τιμές $v_\delta^{(k)}(0),k=0,1,\dots,n-1$ και υπολογίζεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε

$$v_{\delta,i}^{(k)}(0)=I_{(k=i-1)}\;\; k=0,1,\dots,n-1.\tag{3.9}$$

Κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες οι λύσεις $v_{\delta,i}(u)$, $i=0,1,\dots,n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για να δείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία, θεωρούμε ότι υπάρχουν σταθεροί αριθμοί $c_i,i=1,2,\dots,n$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{n}c_iv_{\delta,i}(u)\equiv 0$. Τότε $\sum_{i=1}^{n}c_iv_{\delta,i}^{(k)}(u)\equiv 0,k=0,1,\dots,n-1,\forall\, u\geq 0$. Θέτοντας $u=0$ και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (3.9), έχουμε ότι $c_i=0\;\forall\, i=1,2,\dots,n$, και έτσι αποδεικνύεται ότι οι λύσεις $v_{\delta,i}(u),i=0,1,\dots,n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εφόσον οι $v_{\delta,i}(u)$, $i = 0,1,\dots,n$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης (3.7), τότε επαληθεύουν την εξίσωση (3.7), δηλαδή

$$A_\delta(D)v_{\delta,i}(u) - \int_0^u v_{\delta,i}(u-x)f(x)dx = 0\,, \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad u \geq 0\,. \tag{3.10}$$

Έτσι, από την εξίσωση (3.10), με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace και των οριακών συνθηκών (3.9), μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις $v_{\delta,i}(u)$, $i = 0,1,\dots,n$.

Έστω $\hat{v}_{\delta,i}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $v_{\delta,i}(u)$ ως προς s,

$$\hat{v}_{\delta,i}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{\delta,i}(x)dx, \;\; \Re(s) \geq 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (3.10), η $\hat{v}_{\delta,i}(s)$ δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2. *Για $\Re(s) \geq 0$ και $\delta \geq 0$, οι μετασχηματισμοί Laplace των λύσεων $v_{\delta,i}(s)$, δίνεται από τις σχέσεις*

$$\hat{v}_{\delta,i}(s) = \frac{d_{\delta,i}(s)}{A_\delta(s) - \hat{f}(s)}, \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{3.11}$$

όπου

$$d_{\delta,i}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{n} A_{\delta,k} v_{\delta,i}^{(k-j-1)}(0),$$

$$A_\delta(s) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} - \frac{c}{\lambda_j}s\right) = \sum_{k=0}^{n} A_{\delta,k}s^k,$$

με A_k σταθερούς αριθμούς, που δίνονται σε όρους των λ_j , $j = 1,2,\dots,n, c$ και δ.

Απόδειξη. Βλέπε Li and Garrido (2004b) στην εργασία τους «On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier». ■

Ο μετασχηματισμός Laplace (3.11) μπορεί να αντιστραφεί σε κάποιες μόνο περιπτώσεις. Έτσι υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.9. , οι λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.10), δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών $\hat{f}(s)$ δίνεται από την (1.43). Τότε για $\Re(s) \geq 0$, είναι*

$$\hat{v}_{\delta,i}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{i,k}}{s - r_k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{g_{i,l}}{s + R_l},\ i = 1,2,\dots,n,$$

όπου

$$h_{i,k} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{-d_{\delta,i}(r_k)\mathbb{Q}_m(r_k)}{\prod_{j=1}^{m}\left(R_j + r_k\right)\prod_{l=1,l\neq k}^{n}(r_l - r_k)}, k = 1,2,\dots,n,$$

$$g_{i,l} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{d_{\delta,i}(-R_l)\mathbb{Q}_m(-R_l)}{\prod_{j=1}^{n}\left(R_l + r_j\right)\prod_{l=1,l\neq k}^{m}(R_i - R_l)}, l = 1,2,\dots,m\,,$$

με r_k και $-R_l, k = 1,2,\dots,n, l = 1,2,\dots,m$ να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\mathcal{B}_{m,n}(s) = 0$, όπου $\mathcal{B}_{m,n}(s)$ δίνεται από τη σχέση (1.43). Επιπλέον, αν r_k και $-R_l$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$v_{\delta,i}(u) = \sum_{k=1}^{n} h_{i,k} e^{r_k u} + \sum_{l=1}^{m} g_{i,l} e^{-R_l u}, \quad u \geq 0.$$

Παρατήρηση 3.3. Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $v_{\delta,i}(u), i = 1,2,\dots,n,$ του Θεωρήματος 3.3. δεν είναι μοναδικές, αφού η επιλογή των αρχικών συνθηκών των $v_{\delta,i}(u), i = 1,2,\dots,n$ (3.9) γίνεται αυθαίρετα χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Παρατήρηση 3.4. Σημειώνουμε ότι παρόλο που οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg μπορεί να είναι μιγαδικές, οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $v_{\delta,i}(u), i = 1,2,\dots,n$ του Θεωρήματος 3.3. είναι πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών περιέχουν κάποιες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

3.2 Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος για το ανανεωτικό μοντέλο

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που μόλις παρουσιάσαμε, είναι ένα σημαντικό μέτρο κινδύνου όσον αφορά στη διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος. Ένα άλλο όμως πολύ σημαντικό εργαλείο, το οποίο συνδέεται με την «ποιότητα» της στρατηγικής μερίσματος, είναι οι ροπές ή ακόμη και η κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Έτσι ενώ η συνάρτηση των Gerber-Shiu σχετίζεται με την μέτρηση του κινδύνου, οι ροπές των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας σχετίζονται με το ύψος του ποσού των μερισμάτων που διανέμεται πίσω στους δικαιούχους της ασφάλισης. Στην παρούσα παράγραφο γίνεται η μελέτη των ροπών της παρούσας αξίας των μερισμάτων της διαδικασίας $U_b(t)$, θεωρώντας πάλι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν μια γενικευμένη Erlang κατανομή.

Ορισμός 3.2. *Για $0 \leq u \leq b$ και $\delta \geq 0$, ορίζουμε*

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t),$$

να είναι η παρούσα αξία του συνόλου των καταβληθέντων μερισμάτων πρίν τη στιγμή της χρεοκοπίας, όπου $D(t)$ τα σωρευτικά μερίσματα που πληρώνονται μέχρι τον χρόνο t, και δ συμβολίζει την ένταση ανατοκισμού.

Ορισμός 3.3. *Για $0 \leq u \leq b$ και $m \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε*

$$W_m(u,b) = \mathbb{E}\left(D_{u,b}^m \middle| U_b(0) = u\right), \qquad 0 \leq u \leq b\,, m \in \mathbb{N},$$

να είναι η $m -$ τάξης ροπή της τ.μ. $D_{u,b}$ με $W_0(u,b) = 1$.

Η $m - τάξης$ ροπή $W_m(u,b)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4. *Για $0 \leq u \leq b, m \in \mathbb{N}^+$,*
η $m -$ τάξης ροπή της τ.μ. $D_{u,b}$, $W_m(u,b)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_j\right) W_m(u,b) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \int_0^u W_m(u-x,b) f(x) dx = 0, \tag{3.12}$$

με οριακές συνθήκες

$$\prod_{j=2}^{k}\left(\delta m - \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b}$$
$$= m\prod_{j=2}^{k}\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right) W_{m-1}(u,b)|_{u=b}\,,$$

για $k = 1,2,\dots,n$ *και* $\prod_{j=2}^{1}\cdot = 1$. *Επιπλέον*

$$\lim_{b\to\infty} W_m(u,b) = 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε Albrecher,Claramunt και Marmol (2005) στην εργασία τους με τίτλο «On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang(n) interclaim times» σελ. 6-7. ■

Πόρισμα 3.4. *Για* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, *η εξίσωση (3.11) γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\right)^n W_m(u,b) - \lambda^n \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0, \qquad (3.13)$$

με οριακές συνθήκες

$$\left(\delta m + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b} = m\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} W_m(u,b)|_{u=b}\,,$$

για $k = 1,2,\dots,n$ *που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με* $Erlang(n)$ *ενδιάμεσους χρόνους άφιξης ζημιών.*

Πόρισμα 3.5. *Για* $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *η εξίσωση (3.12) γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\right)^2 W_m(u,b) - \lambda^2 \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0, \qquad (3.14)$$

με οριακές συνθήκες

$$\left(\delta m + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b} = m\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} W_m(u,b)|_{u=b}\,,$$

για $k = 1,2$ *που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο* $Erlang(2,\lambda)$.

Πόρισμα 3.6. *Για* $n = 1, \lambda_1 = \lambda$, *η εξίσωση (3.12) γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\right) W_m(u,b) - \lambda \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0, \qquad (3.15)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b} = mW_m(u,b)|_{u=b} \ ,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.12) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \tilde{\delta} - c\frac{\partial}{\partial u}\right) v_{\tilde{\delta}}(u) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \int_0^u v_{\tilde{\delta}}(u-x) f(x) dx = 0, \qquad u \geq 0, \tag{3.16}$$

όπου $\tilde{\delta} = \delta m$. Τότε από τη θεωρία διαφορικών εξισώσεων [βλ. Κεφ.7 των Boyce και DiPrima (2000)] η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.12) εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός από n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.16).
Έτσι, η γενική λύση της $W_m(u,b)$ δίνεται από τη σχέση

$$W_m(u,b) = \sum_{i=1}^{n} n_{i,m} v_{\tilde{\delta},i}(u), \qquad 0 \leq u \leq b,$$

όπου $v_{\tilde{\delta},i}(u)$ είναι οι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (3.16) και $n_{i,m}, i = 1,2,\dots,n$ είναι σταθεροί αριθμοί οι οποιοί υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 3.4. . Αναλυτικότερα, οι σταθερές $n_{i,m}, i = 1,2,\dots,n$ υπολογίζονται αναδρομικά από τη σχέση

$$\prod_{j=2}^{k}\left(\delta m + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right) \sum_{i=1}^{n} n_{i,m}\, v'_{\tilde{\delta},i}(b)$$
$$= m \prod_{j=2}^{k}\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right) \sum_{i=1}^{n} n_{i,m} v_{\tilde{\delta},i}(b),$$

για $k = 1,2,\dots,n, \prod_{j=2}^{1} \cdot = 1$ και $m \in \mathbb{N}$.

Εφόσον, η εξίσωση (3.16) είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (3.7), με $\tilde{\delta} = \delta m$ στη θέση του δ, για τον υπολογισμό των $v_{\tilde{\delta},i}(u), i = 1,2,\dots,n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία της ενότητας 3.1. . Έτσι, υποθέτοντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, έχει την ίδια μορφή όπως στην εξίσωση (1.43), τότε οι $v_{\tilde{\delta},i}(b), i = 1,2,\dots,n$, δίνονται από το Θεώρημα 3.3. με $\tilde{\delta} = \delta m$ στη θέση του δ.

3.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων για το ανανεωτικό μοντέλο

Άμεση συνέπεια της παραγράφου 3.2. είναι η επέκταση της υπόθεσης ύπαρξης σταθερού μερίσματος σε ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Έτσι θεωρούμε ότι υπάρχουν N διαφορετικά μεταξύ τους επίπεδα, $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_N = \infty$, τέτοια ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος είναι μεταξύ του b_{i-1} και b_i κατωφλίου το ασφάλιστρο που εισπράττεται είναι c_i , $i = 1,2, \dots , N$. Διαισθητικά η παραπάνω στρατηγική ερμηνεύεται ακολούθως. Μόλις η διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει το επίπεδο b_{i-1}, τότε μέρος του ασφαλίστρου c_{i-1} επιστρέφεται ως μέρισμα στους δικαιούχους της ασφάλισης και συνεπώς το ασφάλιστρο μειώνεται σε c_i. Κατά συνέπεια $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$. Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό με την παραγράφου 3.2., η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, $U_b(t)$, ορίζεται ως

$$dU_b(t) = c_i dt - dS(t), \qquad b_{i-1} \le U_b(t) \le b_i, \tag{3.17}$$

με $U_b(0) = u$, και $b = (b_1, b_2, \dots , b_{N-1})$.

Ορισμός 3.4. *Για $b_{i-1} < u < b_i, i = 1,2, \dots , N$ και $\delta \ge 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi_b(u)$, ορίζεται ως*

$$\varphi_b(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T_b} w(U(T_b -), |U(T_b)|) I_{(T_b<\infty)} | U_b(0) = u\right] = \begin{cases} \varphi_{b,1}(u), & 0 \le u < b_1 \\ \varphi_{b,2}(u), & 0 \le u < b_2 \\ \vdots & \\ \varphi_{b,N}(u), & u \ge b_{N-1} \end{cases}$$

όπου $\varphi_{b,i}(u)$ είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu μεταξύ των κατωφλίων b_{i-1} και $b_i, i = 1,2, \dots , n$.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη πολλαπλών μερισμάτων εισήχθη από τους Lin και Pavlova (2006), οι οποιοί μελέτησαν τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας στην περίπτωση ύπαρξης δύο επιπέδων $(N = 2)$, ενώ οι Alberecher και Hartinger (2007) μελέτησαν το ίδιο μέτρο κινδύνου για εκθετικά μεγέθη ζημιών κάτω από την ύπαρξη $N - \textit{επιπέδων}$. Επιπλέον, οι Lin και Sendova

(2007), μελέτησαν την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής με την ύπαρξη $N-επιπέδων$ χωρίς την υπόθεση συγκεκριμένων κατανομών για τα μεγέθη ζημιών. Τέλος, χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, οι Zhang και Yang (2008), γενίκευσαν την εργασία των Lin και Sendova (2007) για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Τα κυριότερα αποτελέσματα δίνονται στη συνέχεια.

Θεωρώντας πάλι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής αποτελεί λύση μιας ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.5. *Για* $b_{i-1} < u < b_i, i = 1,2,\dots,N$ *και* $\delta \geq 0$, *η* $\varphi_b(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c_i\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi_b(u) = \prod_{j=1}^{n}\lambda_j\int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u), \tag{3.18}$$

με οριακές συνθήκες

$$c_i^k\left(\frac{\partial^-}{\partial u}\right)^k \varphi_b(u) = c_{i-1}^k\left(\frac{\partial^+}{\partial u}\right)^k \varphi_b(b), \qquad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{3.19}$$

όπου $\frac{\partial^-}{\partial u}$ *και* $\frac{\partial^+}{\partial u}$ *να είναι ένας τελεστής παραγώγισης από δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα.*

Παρατήρηση 3.5. Από τη σχέση (3.19) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι συνεχής για κάθε b_i, $i = 1,2,\dots,N$, αλλά όχι παραγωγίσιμη. Έτσι, στην (3.18) οι παράγωγοι της $\varphi_b(u)$, στο σημείο $u = b$ θεωρούνται ότι είναι παράγωγοι από τα δεξιά.

Πόρισμα 3.7. *Για* $n = 1, \lambda_1 = \lambda$, *η εξίσωση (3.18) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi_b(u) = \lambda\int_0^u \varphi_b(u-x)f(x)dx - \lambda w(u), \qquad b_{i-1} \leq u < b_i \tag{3.20}$$

με οριακές συνθήκες

$$c_i\left(\frac{\partial^-}{\partial u}\right)\varphi_b(b) = c_{i+1}\left(\frac{\partial^+}{\partial u}\right)\varphi_b(b), \tag{3.21}$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Για τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.18), «χαλαρώνουμε» τον περιορισμό $b_{i-1} \leq u < b_i$ σε $b_{i-1} \leq u$ και θεωρούμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\Phi_i(u)$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c_i \frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi_b(u)$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x)f(x)dx + \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_{u-b_{i-1}}^{u} \varphi_i(u-x)f(x)dx$$
$$+ \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u), \qquad u \geq b_{i-1} \tag{3.22}$$

Παρατήρηση 3.6. Από τη σχέση (3.22) παρατηρούμε ότι για $i = 1$, η $\Phi_1(u), u \geq 0$, είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη κάποιας στρατηγικής μερίσματος, δηλαδή $\Phi_1(u) = \varphi(u)$.

Τότε, (κατ'επέκταση της τεχνικής που χρησιμοποιήθηκε στην παραγράφου 3.2. η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (3.18) δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_b(u) = \Phi_i(u) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} k_{ij} v_{i,j}(u), \qquad b_{i-1} \leq u < b_i \tag{3.23}$$

όπου k_{ij} είναι σταθεροί αριθμοί που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες (3.21) και $v_{i,j}(u)$, $i = 1,2,\ldots,N, j = 1,2,\ldots,n,$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c_i \frac{\partial}{\partial u}\right) v_{i,j}(u) = \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^{u-b_{i-1}} v_{i,j}(u-x)f(x)dx, \qquad u \geq b_{i-1},$$

με αρχικές συνθήκες $v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = I_{(k=j-1)},\ k = 0,1,\ldots,n-1.$

Επομένως, από τη σχέση (3.23) είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό της $\varphi_b(u)$, πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες $\Phi_b(u)$ και $v_{i,j}(u)$. Επιπλέον, ορίζουμε τον τελεστή

$$\mathcal{S}_i = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c_i^n}\prod_{k=1}^{n} T_{r_{ik}},$$

όπου r_{ik}, $k = 1,2,\dots,n$, με $\Re(r_{ik}) > 0$, είναι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, που δίνεται από τη σχέση (1.20) με c_i στη θέση του c, (Βλέπε επίσης Λήμμα 1.1.). Τότε, ορίζουμε τη μεταβλητή $y = u - b_{i-1}$, και τη συνάρτηση $V_i(y)$ να ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$V_i(y) = \int_0^y V_i(y-x) n_i(x) dx + J_i(y), \qquad y \geq 0, \tag{3.24}$$

όπου $n_i(u) = \mathcal{S}_i f(u) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \left(\prod_{k=1}^n T_{r_{ik}} f\right)(u)$, και

$$J_i(y) = \int_0^{b_{i-1}} \varphi_b(x) \mathcal{S}_i f(y + b_{i-1} - x) dx + \mathcal{S}_i w(y + b_{i-1}) = \int_0^{b_{i-1}} \varphi_b(x) n_i(x) dx + H_i(u),$$

με $H_i(u) = \mathcal{S}_i w(u) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \left(\prod_{k=1}^n T_{r_{ik}} w\right)(u)$.

Παρατηρώντας ότι η (3.24) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (1.27), εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.7. και κάνοντας ξανά αλλαγή μεταβλητής $y = u - b_{i-1}$, έπεται ότι η $\Phi_i(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.6. *Για $u \geq b_{i-1}$ και $\delta \geq 0$, η $\Phi_i(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{1+\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) z_i(x) dx + \frac{1}{1+\xi_i} P_i(u), \tag{3.25}$$

όπου ξ_i τέτοιο ώστε $1/(1+\xi_i) = \int_0^\infty n_i(x) dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c_i^n \prod_{k=1}^n r_{ik}} < 1$, $z_i(u) = (1+\xi_i) n_i(x)$ και $P_i(u) = (1+\xi_i) J_i(u - b_{i-1}) = \int_{u-b_{i-1}}^{b_i} \varphi_b(u-x) z_i(x) dx + (1+\xi_i) H_i(u)$.

Απόδειξη. Βλέπε Zhang και Yang (2008), σελ. 9-10. ■

Η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (3.25) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι για $u \geq 0$, ορίζουμε τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή με σ.κ.

$$K_i(u) = 1 - \overline{K}_i(u) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{1+\xi_i} \left(\frac{1}{1+\xi_i}\right) \overline{N}_i^{\star n}(u), \;\; u \geq 0, i = 1,\dots,N,$$

όπου $\bar{N}_i^{\star n}(u)$ είναι η $n-οστή$ συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{N}_i(u) = 1 - N_i(u) = \int_u^\infty n_i(y)dy$ για $i = 1, \dots, N$.

Αλλάζοντας μεταβλητή, $y = u - b_{i-1}$, $V_i(y) = V_i(y - b_{i-1}) = \Phi_i(u)$, η εξίσωση (3.25) γίνεται

$$V_i(y) = \frac{1}{1+\xi_i}\int_0^y V_i(y-x)z_i(x)dx + \frac{1}{1+\xi_i}P_i(y+b_{i-1}), \qquad y \geq 0.$$

Τότε από το Θεώρημα 1.8. μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τη λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης.

Θεώρημα 3.7. *Για $u \geq b_{i-1}$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (3.25), δίνεται από τη σχέση*

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{\xi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} P_i(u-x)dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i}P_i(u), \;\; u \geq b_{i-1}.$$

Επιπλέον, εφόσον $P_i(u) = \int_{u-b_{i-1}}^{b_{i-1}} \varphi_b(u-x)z_i(x)dx + (1+\xi_i)H_i(u)$, ισοδύναμα η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\Phi_i(u) = \int_0^{b_{i-1}} \varphi_b(y)\bar{\varphi}_i(u,y) + \zeta_i(u), \qquad u \geq b_{i-1}, \tag{3.26}$$

όπου

$$\bar{\varphi}_i(u,y) = \frac{1}{\xi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} z_i(u-x-y)dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} + z_i(u-y),$$

$$\zeta_i(u) = \frac{1+\xi_i}{\xi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} H_i(u-x)dK_i(x) + H_i(u).$$

Απόδειξη. Βλέπε Zhang και Yang (2008), σελ. 11. ■

Σημειώνουμε ότι, με βάση το Θεώρημα 1.9. και το Θεώρημα 1.10., η σύνθετη γεωμετρική κατανομή $K_i(u)$, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, όπως στη σχέση (1.43), δίνεται από τη σχέση

$$K_i(u) = 1 - \bar{K}_i(u) = 1 - \sum_{j=1}^m a_{ij}e^{-R_{ij}u}, \qquad u \geq 0,$$

όπου τώρα,

$$a_{ij} = \frac{\prod_{i=1}^{m} R_{ij}}{R_{ij}\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\left(R_{ik}-R_{ij}\right)} \cdot \frac{Q_m\left(-R_{ij}\right)}{Q_m(0)}, \qquad j = 1,2, \ldots m, i = 1,2, \ldots, N.$$

Επομένως υπολογίζοντας από το θεώρημα 3.7. την $\Phi_i(u)$, από την (3.23), έπεται ότι για να βρούμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu με την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, $\varphi_b(u)$, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τις λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής που ικανοποιούν οι $v_{i,j}(u), i = 1,2, \ldots, N, j = 1,2, \ldots, n$.

Η λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται άμεσα από τις αρχικές συνθήκες των $v_{i,j}(u)$. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε

$$v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = I_{(k=j-1)}, \qquad k = 0,1, \ldots, n-1.$$

Επιπλέον κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y = u - b_{i-1}, \vartheta_{ij}(y) = v_{i,j}(y + b_{i-1}) = v_{i,j}(u)$, παίρνουμε

$$A_{\delta,i}(D)\vartheta_{i,j}(y) - \int_0^y \vartheta_{i,j}(y-x)f(x)dx = 0 \tag{3.27}$$

όπου $A_{\delta,i}(s) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} - \frac{c_i}{\lambda_j}s\right) = \sum_{k=0}^{n} A_{\delta,k,i}s^k$ είναι ένα πολυώνυμο τάξης n με $A_{\delta,k,i}$ σταθερούς που δίνονται σε όρους των $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, c_i$ και δ.

Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία όπως προηγούμενα, και επιλέγοντας η κατανομή των αποζημιώσεων να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, όπως στη σχέση (1.43), μπορούμε να βρούμε τις λύσεις $\vartheta_{i,j}(y)$. Έτσι, έπεται ότι

$$\vartheta_{i,j}(y) = \sum_{k=1}^{n} h_{ij,k}e^{r_{ik}y} + \sum_{l=1}^{m} g_{ij,l}e^{-R_{il}y}, \;\; y \geq 0, \tag{3.28}$$

όπου

$$h_{i,j,k} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c_i^n} \cdot \frac{-d_{\delta,ij}(r_{ik})Q_m(r_{ik})}{\prod_{j=1}^{m}\left(R_{ij}+r_{ik}\right)\prod_{l=1,l\neq k}^{m}(r_{il}-r_{ik})}, \qquad k = 1,2, \ldots, n,$$

$$g_{i,j,l} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c_i^n} \cdot \frac{d_{\delta,ij}(-R_{i\ell})Q_m(-R_{i\ell})}{\prod_{j=1}^{n}\left(R_{i\ell}+r_{ij}\right)\prod_{l=1,l\neq k}^{m}(R_{il}-R_{i\ell})}, \qquad \ell = 1,2, \ldots, m$$

και

$$d_{\delta,ij}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{n} A_{\delta,k,i}\vartheta_{i,j}^{(k-j-1)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{n} A_{\delta,k,i}v_{i,j}^{(k-j-1)}(b_{i-1}).$$

Επομένως, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y = u - b_{i-1}, \vartheta_{i,j}(y) = v_{i,j}(y + b_{i-1}) = v_{i,j}(u)$ στην εξίσωση (3.28), παίρνουμε τις λύσεις $v_{i,j}(u)$, όπως δίνονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.8. *Αν ο μετασχηματισμός Laplace των αποζημιώσεων, $\hat{f}(s)$, δίνεται όπως στην (1.32), τότε οι λύσεις του ομογενούς συστήματος (3.27) δίνονται από τη σχέση*

$$v_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^{n} h_{ij,k} e^{r_{ik}(u-b_{i-1})} + \sum_{\ell=1}^{m} g_{ij,\ell} e^{-R_{i\ell}(u-b_{i-1})}, \ u \geq b_{i-1}. \tag{3.29}$$

Απόδειξη. Βλέπε Zhang και Yang (2008) σελ.10. ■

Τώρα, από την εξίσωση (3.26) του θεωρήματος 3.7. , είναι φανερό ότι ο υπολογισμός της $\Phi_i(u)$ βασίζεται στην γνώση των $\varphi_b(u)$ μέχρι το επίπεδο $b_{i-1}, i = 1,2, \dots, N$. Έτσι από τις σχέσεις (3.26) και (3.23) μπορούμε να οδηγηθούμε σε έναν αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό της $\Phi_i(u)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.9. *Για $u \geq b_{i-1}, \delta \geq 0$ και για κάθε $i = 1,2, \dots, N$, η λύση της εξίσωσης (3.22) βρίσκεται αναδρομικά από τη σχέση*

$$\Phi_m(u) = \bar{L}_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \bar{L}_{m,i,j}(u),$$

όπου

$$\bar{L}_m(u) = \zeta_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \bar{L}_i(y) \bar{\varphi}_m(u,y) dy,$$

και οι $\zeta_m(u)$ και $\bar{\varphi}_m(u,y)$ δίνονται από Θεώρημα 3.7. και $v_{i,j}(y)$ είναι οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (3.27) που δίνονται από το Θεώρημα 3.8. .

Απόδειξη. Βλέπε Zhang και Yang (2008), σελ. 12-13. ■

Παρόμοια, από το Θεώρημα 3.9., είναι φανερό ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές k_{ij} . Έτσι, παρατηρώντας ότι $k_{Nj} = 0$ για κάθε $j = 1,2, \dots, n$ και ανακαλώντας τις οριακές συνθήκες (3.18) και τις αρχικές συνθήκες $v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = I_{(k=j-1)}, k = 0,1, \dots, n-1$, τότε έχουμε ότι

$$k_{m+1,\kappa+1} = \frac{c_m^\kappa}{c_{m+1}^\kappa}\left(\bar{L}_m^{(\kappa)}(b_m) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\bar{L}_{m,i,j}^{(k)}(b_m) + \sum_{j=1}^{n} k_{mj}v_{m,j}^{(k)}(b_m)\right) - \bar{L}_{m+1}^{(k)}(b_m) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\bar{L}_{m+1,i,j}^{(k)}(b_m), \qquad k = 0,1,\dots,n-1\,. \tag{3.30}$$

Τέλος, συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.9. και τη σχέση (3.23), η συνάρτηση των Gerber-Shiu με την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.10. *Για $b_{i-1} \le u \le b_i$ και $\delta \ge 0$ η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi_b(u)$ δίνεται από τη σχέση*

$$\varphi_b(u) = \bar{L}_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\bar{L}_{m,i,j}(u) + \sum_{j=1}^{n} k_{mjv_{m,j}}(u), \tag{3.31}$$

όπου $\bar{L}_m(u)$ και $\bar{L}_{m,i,j}(u)$ δινόνται από Θεώρημα 3.9. .

Απόδειξη. Βλέπε Zhang και Yang (2008), σελ. 13. ■

3.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Όμοια με τη στρατηγική σταθερού μερίσματος που περιγράφηκε παραπάνω, σ'αυτή την ενότητα μελετάμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων όταν υιοθετείται μια στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Έτσι η διαδικασία πλεονάσματος (2.1) τώρα τροποποιείται εισάγοντας την ύπαρξη ενός σταθερού μερίσματος επιπέδου $b \ge u$. Κάτω από αυτή την τροποποίηση έχουμε ότι όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει σε επίπεδο b, τα ασφάλιστρα c επιστρέφονται πίσω στους ασφαλισμένους υπό την μορφή μερίσματος και η διαδικασία πλεονάσματος παραμένει στο επίπεδο b μέχρι την εμφάνιση της επόμενης αποζημίωσης.

Έστω $U_b(t)$ να είναι η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος για αυτή την στατηγική σταθερού μερίσματος με αρχικό απόθεμα $U_b(0) = u$. Τότε έχουμε ότι

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b, \\ -dS(t), & U_b(t) = b, \end{cases} \tag{3.32}$$

όπου η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$, δίνεται από την σχέση (2.2). Επιπλέον ορίζουμε $T_b = inf\{t \geq 0: U_b(t) < 0\}$ να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, και για κάποια συνάρτηση ποινής $w: [0, \infty) \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ και $\delta \geq 0$ ορίζουμε

$$\Phi_b(u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T_b} w(U(T_b -), |U(T_b)|) I_{(T_b<\infty)} | U_b(0) = u\big), \qquad 0 \leq u \leq b, \tag{3.33}$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο κινδύνου όπως ορίσθηκε στην (3.32), όπου $U(T_b -)$ είναι το πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία και $|U(T_b)|$ το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Επίσης, για τους ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν στην παράγραφο 2.2. για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ορίζουμε την «βοηθητική» αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος, $\{L_{i1}\}_{i\geq 1}$, από την δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί (σε αυτά τα σημεία η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται), που δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{b,1}(u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta(T_b - t)} w(U(T_b -), |U(T_b)|) I_{(T_b<\infty)} | L_{11} = t, U_b(t) = u\big), 0 \leq u \leq b, \tag{3.34}$$

Σημειώνουμε ότι για $b \to \infty$, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος ανάγονται στις αντίστοιχες συναρτήσεις των Gerber-Shiu της παραγράφου 2.2. όπου η διαδικασία πλεονάσματος δεν επηρεάζεται από κάποια στρατηγική μερισμάτων, δηλαδή $\lim_{b\to\infty} \Phi_b(u) = \Phi(u)$ και $\lim_{b\to\infty} \Phi_{b,1}(u) = \Phi_1(u)$.

Στο επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu $\Phi_b(u)$ και $\Phi_{b,1}(u)$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 3.11. *Για $0 \leq u \leq b$, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $\Phi_b(u)$ και $\Phi_{b,1}(u)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων*

$$c\Phi_b'(u) = (\lambda + \lambda_1 + \delta)\Phi_b(u) - \lambda \int_0^u \Phi_b(u - x) p(x) dx - \lambda_1 \Phi_{b,1}(u) - \lambda w_1(u),$$

$$\begin{aligned} c\Phi_{b,1}'(u) = (\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_{b,1}(u) &- \lambda \int_0^u \Phi_{b,1}(u - x) p(x) dx - \lambda w_1(u) \\ &- \lambda_2 \int_0^u \Phi_b(u - x)\, q(x) dx - \lambda_2 w_2(u), \end{aligned} \tag{3.35}$$

με οριακές συνθήκες

$$\Phi_b'(b) = 0, \Phi_{b,1}'(b) = 0 \,, \qquad (3.36)$$

όπου $w_j(u)$, για $j = 1,2$, δίνονται από τις σχέσεις (2.11).

Απόδειξη. Για $0 \le u \le b$, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\gamma_j(u) = \int_0^u \Phi_b(u-x)p(x)dx + w_j(u), \qquad j = 1,2,$$
$$\partial(u) = \int_0^u \Phi_{b,1}(u-x)p(x)dx + w_1(u).$$

Θεωρώντας ένα απειροστό χρονικό διάστημα $[0, dt]$ και χρησιμοποιώντας μία μεθοδολογία παρόμοια με αυτή των Zhang, Li και Yang (2009), για $0 \le u \le b$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_b(u) = {} & (1-\lambda dt)(1-\lambda_1 dt)e^{-\delta dt}\Phi_b(u+cdt) + \lambda_1 dt(1-\lambda dt)e^{-\delta dt}\Phi_{b,1}(u+cdt) \\ & + \lambda dt(1-\lambda_1 dt)e^{-\delta dt}\gamma_1(u+cdt) + o(dt).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας από το ανάπτυγμα του Taylor το γεγονός ότι $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης dt, παίρνοντας $dt \to 0$, καθώς επίσης και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $w_1(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς u (και $\gamma_1(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση του u, απ' όπου έπεται ότι $\lim_{dt\to 0}\gamma_1(u+cdt) = \gamma_1(\lim_{dt\to 0}(u+cdt))$), βρίσκουμε την πρώτη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του συστήματος (3.35).

Κατά τον ίδιο τρόπο, για $0 \le u \le b$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_{b,1}(u) = {} & (1-\lambda dt)(1-\lambda_2 dt)e^{-\delta dt}\Phi_{b,1}(u+cdt) + \lambda dt(1-\lambda_2 dt)e^{-\delta dt}\partial(u+cdt) \\ & + \lambda_2 dt(1-\lambda dt)e^{-\delta dt}\gamma_2(u+cdt) + o(dt).\end{aligned} \qquad (3.37)$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, παίρνοντας $dt \to 0$ και παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $w_k(u)$ για $k = 1,2$ είναι συνεχής ως προς u (και συνεπώς όμοια με την απόδειξη της πρώτης εξίσωσης (2.44) έχουμε ότι $\gamma_2(u)$ και $\partial(u)$ είναι συνεχής συναρτήσεις ως προς u), παίρνουμε τη δεύτερη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του συστήματος (3.35).

Για $u = b$, όμοια με την παραπάνω μεθοδολογία, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_b(u) &= (1-(\lambda-\lambda_1)dt)e^{-\delta dt}\Phi_b(b) + \lambda_1 dte^{-\delta dt}\Phi_{b,1}(b) + \lambda dte^{-\delta dt}\gamma_1(b) + o(dt) \\ &= \Phi_b(b) - (\lambda+\lambda_1+\delta)dt\Phi_b(b) + \lambda_1 dt\Phi_{b,1}(b) + \lambda dt\gamma_1(b) + o(dt).\end{aligned}$$

Διαιρώντας με dt και παίρνοντας $dt \to 0$ έχουμε ότι

$$-(\lambda+\lambda_1+\delta)\Phi_b(b) + \lambda_1\Phi_{b,1}(b) + \lambda\gamma_1(b) = 0.$$

Τώρα, αφού $\Phi_b(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο σημείο $u = b$, θέτοντας $u = b$ στην εξίσωση (3.35) και συγκρίνοντας την με την παραπάνω εξίσωση έπεται άμεσα η οριακή συνθήκη $\Phi'_b(b) = 0$.

Όμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_{b,1}(b) &= (1-(\lambda+\lambda_2)dt)e^{-\delta dt}\Phi_{b,1}(b) + \lambda dt e^{-\delta dt}\partial(b) + \lambda_2 dt e^{-\delta dt}\gamma_2(b) + o(dt) \\ &= \Phi_{b,1}(b) - (\lambda+\lambda_2+\delta)dt\Phi_{b,1}(b) + \lambda dt\partial(b) + \lambda_2 dt\gamma_2(b) + o(dt),\end{aligned}$$

απ’όπου έπεται ότι

$$-(\lambda+\lambda_2+\delta)\Phi_{b,1}(b) + \lambda\partial(b) + \lambda_2\gamma_2(b) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης $\Phi_{b,1}(u)$ στο σημείο $u = b$, θέτοντας $u = b$ στην εξίσωση (3.35) και συγκρίνοντας την προκύπτουσα εξίσωση με την τελευταία εξίσωση καταλήγουμε στη δεύτερη οριακή συνθήκη, $\Phi'_{b,1}(b) = 0$. ■

Παρατήρηση 3.7. **(i)** Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της συνέχειας των συναρτήσεων $w_j(u)$ για $j = 1,2$, θεώρημα 3.11. είναι απαραίτητη και εξασφαλίζει ότι οι οριακές συνθήκες $\Phi'_b(b) = 0, \Phi'_{b,1}(b) = 0$ είναι αληθείς. Σε διαφορετική περίπτωση, οι οριακές συνθήκες (3.36) όσο και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.35) δεν ισχύουν.

(ii) Για $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$, τότε $\Phi_b = \Phi_{b,1}$, και συνεπώς το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.35) ανάγεται στην εξίσωση (3.6) του πορίσματος 3.3., που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

(iii) Παίρνοντας $\lambda_1 \to 0$ και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στο (ii) της παρατήρησης 2.2., τότε το σύστημα (3.35) ανάγεται στην εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{2}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi_b(u) = \lambda_1\lambda_2\int_0^u \Phi_b(u-x)q(x)dx + \lambda_1\lambda_2 w_2(u),$$

Για $0 \le u \le b$, που είναι η ολοκληρο-διαφορική (3.1) του θεωρήματος 3.1. για $n = 2$.

Η λύση του μη-ομογενούς συστήματος ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.35) με οριακές συνθήκες (3.36), εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος εξισώσεων, ως προς v_δ και $v_{\delta,1}$ για $u \ge 0$,

$$
\begin{aligned}
&cv'_{\delta,1}(u) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)v_\delta(u) + \lambda \int_0^u v_\delta(u-x)p(x)dx + \lambda_1 v_{\delta,1}(u) = 0,\\
&cv'_{\delta,1}(u) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)v_{\delta,1}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta,1}(u-x)p(x)dx\\
&\qquad\qquad + \lambda_2 \int_0^u v_\delta(u-x)q(x)dx = 0. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [Βλέπε Κεφ.7 των Boyce και DiPrima (2000)] έπεται ότι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος (3.36) είναι της μορφής

$$
\begin{pmatrix} v_\delta(u) \\ v_{\delta,1}(u) \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} v_{\delta,11}(u) \\ v_{\delta,21}(u) \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} v_{\delta,12}(u) \\ v_{\delta,22}(u) \end{pmatrix}, \qquad u \geq 0, \qquad (3.39)
$$

όπου $\left(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u)\right)^\top$ και $\left(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u)\right)^\top$, (με $\top$ να συμβολίζει τον ανάστροφο διάνυσμα), είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις και η_1, η_2 είναι σταθεροί αριθμοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες $v_{\delta,kl}(0) = I_{(k=l)}$, για $k, l \in \{1,2\}$. Τότε, κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες τα διανύσματα $\left(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u)\right)^\top$ και $\left(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u)\right)^\top$, είναι δύο ανεξάρτητα διανύσματα των λύσεων της ομογενούς συστήματος (3.37). Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία όπως οι Lu και Li (2009) η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος (3.35) δίνεται σε όρους μιας μερικής λύσης του συστήματος (3.35) (αυτή είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων) και ενός γραμμικού συνδυασμού των λύσεων του ομογενούς συστήματος (3.38), δηλαδή

$$
\begin{aligned}
\Phi_b(u) &= \Phi(u) + \eta_1(b)v_{\delta,11}(u) + \eta_2(b)v_{\delta,12}(u),\\
\Phi_{b,1}(u) &= \Phi_1(u) + \eta_1(b)v_{\delta,21}(u) + \eta_2(b)v_{\delta,22}(u),
\end{aligned} \qquad (3.40)
$$

όπου $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ είναι συναρτήσεις των Gerber-Shiu της παραγράφου 2.2., ενώ οι ποσότητες $\eta_1(b) = \Phi_b(0) - \Phi(0), \eta_2(b) = \Phi_{b,1}(0) - \Phi_1(0)$ μπορούν να υπολογίσθουν από τις οριακές συνθήκες του θεωρήματος 3.11. . Αναλυτικότερα οι $\eta_1(b) = \Phi_b(0) - \Phi(0)$, $\eta_2(b) = \Phi_{b,1}(0) - \Phi_1(0)$ αποτελούν λύσεις του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$
\begin{aligned}
\Phi'(b) + \eta_1(b)v'_{\delta,11}(b) + \eta_2(b)v'_{\delta,12}(b) &= 0\\
\Phi'_1(b) + \eta_1(b)v'_{\delta,21}(b) + \eta_2(b)v'_{\delta,22}(b) &= 0.
\end{aligned} \qquad (3.41)
$$

Εφόσον οι Φ και Φ_1 είναι γνωστές από την παραγράφου 2.2., από την εξίσωση (3.40) έπεται ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu Φ_b και $\Phi_{b,1}$ μπορούν να υπολογισθούν όταν τα διανύσματα $\left(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u)\right)^{\top}$ και $\left(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u)\right)^{\top}$ είναι γνωστές. Οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.38), βρίσκονται μέσω των μετασχηματισμών Laplace και των αρχικών συνθηκών $v_{\delta,kl}(0)$, για $k, l \in \{1,2\}$.

Έστω $\hat{v}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_\delta(x)dx$ και $\hat{v}_{\delta,1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{\delta,1}(x)dx$ οι μετασχηματισμοί Laplace του συστήματος (3.38). Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς $\hat{v}_\delta(s)$ και $\hat{v}_{\delta,1}(s)$ έχουμε ότι

$$\hat{v}_\delta(s) = \frac{cv_\delta(0)[cs - (\lambda_2 + \lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(s)] - c\lambda_1 v_{\delta,1}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)},$$

και

$$\hat{v}_{\delta,1}(s) = \frac{cv_{\delta,1}(0)[cs - (\lambda_1 + \lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(s)] - c\lambda_2\hat{p}(s)v_\delta(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}.$$

Από τις παραπάνω δύο εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις των $\hat{v}_{\delta,kl}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{\delta,kl}(x)dx, k, l \in \{1,2\}$, αφού από την εξίσωση (3.39) δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι με βάση τις αρχικές συνθήκες $v_{\delta,kl}(0) = I_{(k=l)}$ ισχύει ότι $v_\delta(0) = \eta_1, v_{\delta,1}(0) = \eta_2, \hat{v}_\delta(s) = v_\delta(0)\hat{v}_{\delta,11}(s) + v_{\delta,1}(0)\hat{v}_{\delta,12}(s), \hat{v}_{\delta,1}(s) = v_\delta(0)\hat{v}_{\delta,21}(s) + v_{\delta,1}(0)\hat{v}_{\delta,22}(s)$, και έτσι έπεται ότι

$$\hat{v}_{\delta,1l}(s) = \frac{cv_{\delta,1l}(0)[cs - (\lambda_2 + \lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(s)] - c\lambda_1 v_{\delta,2l}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{p}(s)}, \qquad l = 1,2, \qquad (3.42)$$

και

$$\hat{v}_{\delta,2l}(s) = \frac{cv_{\delta,2l}(0)[cs - (\lambda_1 + \lambda + \delta) + \lambda\hat{p}(s)] - c\lambda_2\hat{q}(s)v_{\delta,1l}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}, \qquad l = 1,2, \qquad (3.43)$$

Στην παρακάτω πρόταση δίνουμε ακριβείς μορφές για τις λύσεις $v_{\delta,kl}(u)$, $k, l \in \{1,2\}$, στην περίπτωση που τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Πρόταση 3.1. *Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των $\hat{p}(s)$ και $\hat{q}(s)$ είναι της μορφής της εξίσωσης (2.54). Τότε οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\left(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u)\right)^{\top}$ και $\left(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u)\right)^{\top}$, δίνονται από τη σχέση*

$$v_{\delta,kl}(u) = \sum_{j=1}^{2} a_{kl}(j) e^{r_j u} + \sum_{i=1}^{2n+m} b_{kl}(i) e^{-R_i u}, \qquad u \geq 0, \qquad k,l \in \{1,2\}, \tag{3.44}$$

με

$$a_{kl}(j) = p_n^2(r_j) \frac{I_{(k=l)}\left[\left(cr_j - \lambda_{kl}^* - \lambda - \delta\right) + \lambda \dfrac{p_{n-1}(r_j)}{p_n(r_j)}\right] - v_{kl}^*(0; r_j)}{c\tau_2'(r_j) \prod_{i=1}^{2n+m}(r_j + R_i)},$$

$$b_{kl}(i) = p_n^2(-R_i) q_m(-R_i) \frac{I_{(k=l)}\left[\lambda \dfrac{p_{n-1}(-R_i)}{p_n(-R_i)} - (cR_i + \lambda_{kl}^* + \lambda + \delta)\right]}{c\tau_2(-R_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{2n+m}(R_j + R_i)},$$

για $j = 1,2, i = 1,2, \ldots, 2n + m$, και

$$\lambda_{kl}^* = \begin{cases} \lambda_2, & k = 1 \\ \lambda_1, & k = 2 \end{cases}, \qquad v_{kl}^*(0; t) = \begin{cases} \lambda_1, & k = 1, l = 2 \\ \lambda_2 \dfrac{q_{m-1}(t)}{q_m(t)}, & k = 2, l = 1 \end{cases},$$

όπου r_1, r_2 και $-R_i$, με $\Re(R_i) > 0, i = 1,2, \ldots, 2n + m$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $D_{2n+m+2}(s) = 0$ και $\tau_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$.

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (2.58) και (2.59), έπεται ότι η εξίσωση (3.42) δίνεται ισοδύναμα

$$\hat{v}_{\delta,1l}(s) = \frac{A_{1l}(s)/c^2}{\tau_2(s) \prod_{i=1}^{2n+m}(s + R_i)},$$

όπου

$$A_{1l}(s) = p_n^2(s) q_m(s) \left\{ c v_{\delta,1l}(0) \left[cs - (\lambda + \lambda_2 + \delta) + \lambda \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} \right] - c\lambda_1 v_{\delta,2l}(0) \right\},$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n + m + 1$. Αν οι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (2.54) είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων η $\hat{v}_{\delta,1l}(s)$ γράφεται ως

$$\hat{v}_{\delta,1l}(s)=\sum_{j=1}^{2}\frac{a_{1l}}{s-r_j}+\sum_{i=1}^{2n+m}\frac{b_{1l}(i)}{s+R_i}, \tag{3.45}$$

όπου

$$a_{1l}(j)=\frac{A_{1l}(r_j)/\,c^2}{c^2\tau_2'\prod_{i=1}^{2n+m}(r_j+R_i)}, \qquad j=1,2, \tag{3.46}$$

$$b_{1l}(i)=\frac{A_{1l}(-R_i)/c^2}{c^2\tau_2(-R_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{2n+m}(R_j-R_i)}, \qquad i=1,2,\dots,2n+m\,, \tag{3.47}$$

αντιστρέφοντας την εξίσωση (2.55) ως προς s παίρνουμε άμεσα ότι

$$v_{1l}(u)=\sum_{j=1}^{2}a_{1l}(j)e^{r_j u}+\sum_{i=1}^{2n+m}b_{1l}(i)e^{-R_i u}\,, \qquad u\geq 0,\quad l=1,2. \tag{3.48}$$

Με ανάλογο τρόπο, η εξίσωση (2.52) γράφεται ως

$$\hat{v}_{\delta,2l}(s)=\frac{A_{2l}(s)/c^2}{\tau_2(s)\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}, \tag{3.49}$$

όπου

$$A_{2l}(s)=p_n(s)q_m(s)\left\{cv_{\delta,2l}(0)\left[(cs-\lambda-\lambda_1-\delta)+\lambda\frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)}\right]-c\lambda_2\frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)}v_{\delta,1l}(0)\right\},$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m+1$. Αν οι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (2.59) είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η $\hat{v}_{\delta,2l}(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{v}_{\delta,2l}(s)=\sum_{j=1}^{2}\frac{a_{2l}(j)}{s-r_j}+\sum_{i=1}^{2n+m}\frac{b_{2l}(i)}{s+R_i},$$

όπου

$$a_{2l}(j)=\frac{A_{2l}(r_j)/\,c^2}{c^2\tau_2'\prod_{i=1}^{2n+m}(r_j+R_i)}, \qquad j=1,2, \tag{3.50}$$

$$b_{1l}(i)=\frac{A_{2l}(-R_i)/c^2}{c^2\tau_2(-R_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{2n+m}(R_j-R_i)}, \qquad i=1,2,\dots,2n+m \tag{3.51}$$

αντιστρέφοντας ως προς s παίρνουμε άμεσα ότι

$$v_{2l}(u) = \sum_{j=1}^{2} a_{2l}(j) e^{r_j u} + \sum_{i=1}^{2n+m} b_{2l}(i) e^{-R_i u}, \qquad u \geq 0, \qquad l = 1,2. \tag{3.52}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (3.46), (3.47), (3.50), (3.51) τις αρχικές συνθήκες $v_{\delta,kl}(0) = I_{(k=l)}$, για $k, l \in \{1,2\}$, από τις εξισώσεις (3.48) και (3.52) παίρνουμε άμεσα τη ζητούμενη σχέση (3.44). Η παραπάνω απόδειξη είναι η ίδια, όπως την έδωσαν οι S.Chadjiconstantinidis and A.Papaioannou το 2009 με την εργασία τους «Analysis of the Gerber-Shiu function barrier problems for a risk process with two claims». ■

3.5. Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σ'αυτή την ενότητα μελετούμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων της παραγράφου 3.4. .Αρχικά ορίζουμε τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο (3.32) και δείχνουμε ότι ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας το προαναφερόμενο σύστημα και το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε στη συνέχεια ένα ομογενές σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για τη διαδικασία πλεονάσματος (3.32). Τέλος, η λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.3.

Για $0 \leq u \leq b$ και $\delta \geq 0$, ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t), \qquad 0 \leq u \leq b,$$

να ναι η παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T_b, όπου $D(t)$ είναι τα σωρευτικά μερίσματα που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t. Ακόμη, ορίζουμε $M(u,y,b)$ να είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $D_{u,b}$ που δίνεται από τη σχέση

$$M(u,y,b) = \mathbb{E}[e^{yD_{u,b}} | U_b(0) = u],$$

με y τέτοιο ώστε η $M(u,y,b)$ να συγκλίνει. Επιπλέον, θεωρούμε τη ροπή $m-τάξης, m \in \mathbb{N}$, της τ.μ. $D_{u,b}$

$$W_m(u,b) = \mathbb{E}\left[D_{u,b}^m | U_b(0) = u\right],$$

όπου $W_0(u,b) = 1$.

Για τους ίδιους λόγους όπως και στην παραγράφου 2.2., ορίζουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση και τη ροπή $m-τάξης, m \in \mathbb{N}$, της τ.μ. $D_{u,b}$ δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος, $\{L_{i1}\}_{i\geq 1}$, από τη δευτέρη κλάση κινδύνων έχει ήδη εμφανισθεί. Έτσι, για $m \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την

$$M_1(u,y,b) = \mathbb{E}[e^{yD_{u,b}} | L_{11} = t, U_b(t) = u], \qquad W_{m,1}(u,b) = \mathbb{E}\left[D_{u,b}^m | L_{11} = t, U_b(t) = u\right],$$

με $W_{0,1}(u,b) = 1$. Σημείωνουμε ότι για το αρχικό απόθεμα u ισχύει πάντα ο περιορισμός $0 \leq u \leq b$ (διαφορετικά η διαφορά $u-b$ καταβάλλεται ως μέρισμα).

Τέλος, συμβολίζουμε με $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial y}$ να είναι οι τελεστές των μερικών παραγώγων ως προς u και y αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.12. *Για $0 \leq u \leq b$, οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M(u,y,b)$ και $M_1(u,y,b)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων*

$$\begin{aligned}
&\left(c\frac{\partial}{\partial u} - \delta y \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_1)\right) M(u,y,b) + \lambda \int_0^u M(u-x,y,b)p(x)dx + \lambda_1 M_1(u,y,b) \\
&\qquad + \lambda[1 - P(u)] = 0, \\
&\left(c\frac{\partial}{\partial u} - \delta y \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_2)\right) M_1(u,y,b) + \lambda \int_0^u M_1(u-x,y,b)p(x)dx \\
&\qquad + \lambda_2 \int_0^u M(u-x,y,b)q(x)dx + \lambda[1 - P(u)] + \lambda_2[1 - Q(x)] = 0,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} M(u,y,b)|_{u=b} = yM(b,y,b), \qquad \frac{\partial}{\partial u} M_1(b,y,b)|_{u=b} = yM_1(b,y,b). \tag{3.54}$$

Επίσης

$$\lim_{b\to\infty} M(u,y,b) = \lim_{b\to\infty} M_1(u,y,b) = 1. \tag{3.55}$$

Απόδειξη. Για $0 \leq u < b$, θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα $[0, dt]$, επαρκώς μικρό έτσι ώστε το πλεόνασμα να μην φτάνει το σημείο b. Όμοια με τους Albercher, Merce και

Marmol (2005) στην εργασία τους «On the distribution of the dividends payments in Sparre Andersen model with Generalized Erlang (n) inter-claim times.», και χρησιμοποιώντας όμοια διαδικασία όπως και στην απόδιεξη του Θεωρήματος 3.11. , οι S.Chadjiconstantinidis and A.Papaioannou το 2009 με την εργασία τους «Analysis of the Gerber-Shiu function barrier problems for a risk process with two claims» απέδειξαν ότι

$$
\begin{aligned}
M(u,y,b) &= (1-\lambda dt)(1-\lambda_1 dt)\mathbb{E}\left[e^{ye^{-\delta dt}D_{u+cdt,b}} | U_b(0)=u\right] \\
&\quad + \lambda_1 dt(1-\lambda dt)\mathbb{E}\left[e^{ye^{-\delta dt}D_{u+cdt,b}} | L_{11}=t, U_b(dt)=u\right] \\
&\quad + \lambda dt(1-\lambda_1 dt)\left\{\int_0^{u+cdt} \mathbb{E}\left[e^{ye^{-\delta dt}D_{u+cdt-x,b}} | U_b(0)=u\right] p(x)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} p(x)dx\right\} + o(dt) \\
&= (1-(\lambda_1+\lambda)dt)M\left(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b\right) + \lambda_1 dt M_1\left(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b\right) \\
&\quad + \lambda dt\left\{\int_0^{u+cdt} M(u+cdt-x, ye^{-\delta dt}, b)p(x)dx + \int_{u+cdt}^{\infty} p(x)dx\right\} + o(dt).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης dt διαιρώντας με dt και παίρνοντας $dt \to 0$, προκύπτει άμεσα το πρώτο μέρος του μη ομογενούς συστήματος (3.53).

Με τον ίδιο τρόπο, όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
M_1(u,y,b) &= (1-\lambda dt)(1-\lambda_2 dt)M_1\left(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b\right) \\
&\quad + \lambda dt(1-\lambda_2 dt)\left\{\int_0^{u+cdt} M_1\left(u+cdt-x, ye^{-\delta dt}, b\right)p(x) + \int_{u+cdt}^{\infty} p(x)dx\right\} \\
&\quad + \lambda_2 dt(1 \\
&\quad - \lambda dt)\left\{\int_0^{u+cdt} M\left(u+cdt-x, ye^{-\delta dt}, b\right)q(x)dx + \int_{u+cdt}^{\infty} q(x)dx\right\} \\
&\quad + o(dt).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης dt και παίρνοντας $dt \to 0$, βρίκσουμε άμεσα τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (3.53).

Για $u = b$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
M(b,y,b) &= (1-(\lambda+\lambda_1)dt)\mathbb{E}\left[e^{y(cdt+e^{-\delta dt}D_{b,b}} | U_b(0)=u\right] \\
&\quad + \lambda_1 dt \mathbb{E}\left[e^{y(cdt+e^{-\delta dt}D_{b,b}} | L_{11}=t, U_b(dt)=b\right] \\
&\quad + \lambda dt \left\{\int_0^b \mathbb{E}\left[e^{ye^{-\delta dt}D_{b-x,b}} | U_b(0)=u\right] p(x)dx + \int_b^\infty p(x)dx\right\} + o(dt) \\
&= (1-(\lambda+\lambda_1)dt)e^{ycdt}M\big(b, ye^{-\delta dt}, b\big) + \lambda_1 dt e^{ycdt} M_1\big(b, ye^{-\delta dt}, b\big) \\
&\quad + \lambda dt \left\{\int_0^b M\big(b-x, ye^{-\delta dt}, b\big)p(x)dx + \int_0^\infty p(x)dx\right\} + o(dt),
\end{aligned}
$$

απ’όπου χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
0 = -\delta y \frac{\partial}{\partial y} M(b,y,b) &+ [yc-(\lambda+\lambda_1)]M(b,y,b) + \lambda_1 M_1(b,y,b) \\
&+ \lambda \int_0^b M(b-x,y,b)p(x)dx + \lambda[1-P(b)].
\end{aligned}
$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση (3.53) για $u=b$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ροπογεννήτρια $M(u,y,b)$ είναι συνεχής στο σημείο $u=b$ παίρνουμε άμεσα την οριακή συνθήκη (3.54) για την $M(u,y,b)$.

Κατά όμοιο τρόπο, για την οριακή συνθήκη της ροπογεννήτριας $M_1(u,y,b)$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
M_1(u,y,b) &= (1-(\lambda+\lambda_2)dt)e^{ycdt}M_1\big(b, ye^{-\delta dt}, b\big) \\
&\quad + \lambda dt \left\{\int_0^b M_1\big(b-x, ye^{-\delta dt}, b\big)p(x)dx + [1-P(b)]\right\} \\
&\quad + \lambda_2 dt \left\{\int_0^b M(b-x, y\, e^{-\delta dt}, b)q(x)dx + [1-Q(b)]\right\} + o(dt),
\end{aligned}
$$

απ’όπου συνεπάγεται ότι

$$
\begin{aligned}
0 = -\delta y \frac{\partial}{\partial y} M_1(b,y,b) &+ [yc-(\lambda+\lambda_2)]M_2(b,y,b) + \lambda \int_0^b M_1(b-x,y,b)\, p(x)dx \\
&+ \lambda[1-P(b)] + \lambda_2 \int_0^b M(b-x,y,b)q(x)dx + \lambda_2\, [1-Q(b)].
\end{aligned}
$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση (3.53) για $u=b$ και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $M_1(u,y,b)$ στο σημείο $u=b$ παίρνουμε άμεσα την οριακή συνθήκη (3.54) για την $M_1(u,y,b)$. Τέλος, οι οριακές συνθήκες (3.55) είναι αληθείς από τον ορισμό των $M(u,y,b)$ *και* $M_1(u,y,b)$. ■

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.12. μπορούμε να βρούμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι $m-τάξης$ ροπές $W_m(u,b)$ και $W_{m,1}(u,b)$.

Πρόταση 3.2. *Για $0 \leq u \leq b$, και $m \geq 1$, οι $m-τάξης$ ροπές των σωρευτικών μερισμάτων $W_m(u,b)$ και $W_{m,1}(u,b)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων*

$$\left(c\frac{\partial}{\partial u}-(\delta m+\lambda+\lambda_1)\right)W_m(u,b)+\lambda\int_0^u W_m(u-x,b)p(x)dx+\lambda_1 W_{m,1}(u,b)=0,$$
$$\left(c\frac{\partial}{\partial u}-(\delta m+\lambda_2+\lambda)\right)W_{m,1}(u,b)+\lambda\int_0^u W_{m,1}(u-x,b)p(x)dx$$
$$+\lambda_2\int_0^u W_m(u-x,b)q(x)dx=0, \qquad (3.56)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b)|_{u=b}=mW_{m-1}(b,b),\frac{\partial}{\partial u}W_{m,1}(u,b)|_{u=b}=mW_{m-1,1}(b,b)\,, \qquad (3.57)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{b\to\infty}W_m(u,b)=\lim_{b\to\infty}W_{m,1}(u,b)=0. \qquad (3.58)$$

Απόδειξη. Οι S.Chadjiconstantinidis and A.Papaioannou το 2009 με την εργασία τους «Analysis of the Gerber-Shiu function barrier problems for a risk process with two claims» ακολούθησαν την παρακάτω μεθοδολογία. Από το ανάπτυγμα Taylor για εκθετικές συναρτήσεις έχουμε ότι

$$M(u,y,b)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}W_m(u,b),$$
$$M_1(u,y,b)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}W_{m,1}(u,b). \qquad (3.59)$$

Έτσι, η εξίσωση (3.53) με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.59) γίνεται

$$0 = \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\left[c\frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_1)\right] W_m(u,b)$$
$$+ \lambda_1 \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_{m,1}(u,b) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\int_0^u W_m(u-x,b)p(x)dx,$$

απ’όπου εξισώνοντας του συντελεστές του y^m παίρνουμε άμεσα την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.56).

Επίσης, από τις εξισώσεις (3.59) και (3.54), βρίσκουμε ότι

$$\sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b} = \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} m\frac{y^m}{m!} W_{m-1}(u,b)|_{u=b},$$

απ’όπου εξισώνοντας τους συντελεστές του y^m παίρνουμε την πρώτη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (3.57).

Κατά όμοιο τρόπο, από τις εξισώσεις (3.59) και (3.53) παίρνουμε ότι

$$\sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\left[c\frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_2)\right] W_{m,1}(u,b)$$
$$+ \lambda \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\int_0^u W_{m,1}(u-x,b)p(x)dx$$
$$= -\lambda_2 \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\int_0^u W_m(u-x,b)q(x)dx,$$

απ’όπου εξισώνοντας τους συντελεστές της y^m βρίσκουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (3.56). Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η δεύτερη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (3.57) για την $m-\tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma$ ροπή $W_{m,1}(u,b)$ είναι αληθής. Τέλος, η επαλήθευση των οριακών συνθηκών (3.58) είναι εύκολο να γίνει χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.55) και (3.59). ■

Παρατήρηση 3.8. **(i)** Παίρνοντας $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$, τότε $W_m(u,b) = W_{m,1}(u,b)$ και το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.56) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.15) του πορίσματος 3.6. που είναι η ολοκλρο-διαφορική εξίσωση της $m-\tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma$ ροπής της τ.μ. $D_{u,b}$ για το κλασσικό μοντέλο.

(ii) Παίρνοντας $\lambda \to 0$ και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στο (ii) της πορίσματος 2.1. , τότε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.56) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.12) του θεωρήματος 3.4. για $n=2$, που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της $m - τάξης$ ροπής της τ.μ. $D_{u,b}$ για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

Για τη λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.56), θεωρούμε το ακόλουθο αντίστοιχα ομογενές σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων ως προς $v_{\tilde{\delta}}$ και $v_{\tilde{\delta},1}$ για $u \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
cv'_{\tilde{\delta}}(u) - (\lambda + \lambda_1 + \tilde{\delta})v_{\tilde{\delta}}(u) + \lambda \int_0^u v_{\tilde{\delta}}(u-x)p(x)dx + \lambda_1 v_{\tilde{\delta},1}(u) = 0, \\
cv'_{\widetilde{\delta,1}}(u) - (\lambda + \lambda_2 + \tilde{\delta})v_{\tilde{\delta},1}(u) + \lambda \int_0^u v_{\tilde{\delta},1}(u-x)p(x)dx \\
+ \lambda_2 \int_0^u v_{\tilde{\delta}}(u-x)q(x)dx = 0, \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

με $\tilde{\delta} = \delta m.$ Από τη μορφή του παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος παρατηρούμε ότι είναι όμοιας μορφής με το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.56) και έτσι από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, έπεται ότι η γενική λύση των $W_m(u,b)$ και $W_{m,1}(u,b)$ δίνεται από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
W_m(u,b) = \eta_{1,m}(b)v_{\tilde{\delta},11}(u) + \eta_{2,m}(b)v_{\tilde{\delta},12}(u), \;\; 0 \leq u \leq b, \\
W_{m,1}(u,b) = \eta_{1,m}(b)v_{\tilde{\delta},21}(u) + \eta_{2,m}(b)v_{\tilde{\delta},22}(u), \;\; 0 \leq u \leq b,
\end{aligned} \qquad (3.61)
$$

όπου $[v_{\tilde{\delta},11}(u), v_{\tilde{\delta},21}(u)]^\top, [v_{\tilde{\delta},12}(u), v_{\tilde{\delta},22}(u)]^\top$ με $v_{\tilde{\delta},kl}(0) = I_{(k=l)}$ για $k,l \in \{1,2\}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.60) και $\eta_{1,m}(b)$, $\eta_{2,m}(b)$ σταθεροί όροι οι οποίοι υπολογίζονται μέσω των οριακών συνθηκών (3.57), δηλαδή λύση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$
\begin{aligned}
\eta_{1,m}(b)v'_{\tilde{\delta},11}(b) + \eta_{2,m}(b)v'_{\tilde{\delta},12}(b) = mW_{m-1}(b,b), \\
\eta_{1,m}(b)v'_{\tilde{\delta},21}(b) + \eta_{2,m}(b)v'_{\tilde{\delta},22}(b) = mW_{m-1,1}(b,b).
\end{aligned} \qquad (3.62)
$$

Εφόσον το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.60) έχει ακριβώς την ίδια μορφή με **το** ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.38) (με $\tilde{\delta} = m\delta$ αντί του δ), έπεται ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $[v_{\tilde{\delta},11}(u), v_{\tilde{\delta},21}(u)]^\top$, $[v_{\tilde{\delta},12}(u), v_{\tilde{\delta},22}(u)]^\top$ βρίσκονται με βάση την πρότασης 3.1. , θέτοντας $\tilde{\delta} = m\delta$ αντί του δ .

Κεφάλαιο 4
Αριθμητικές Εφαρμογές

Σ'αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με δύο κλάσεις κινδύνων, θεωρώντας ότι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης κινδύνων για την πρώτη κλάση ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και για τη δεύτερη κλάση ακολουθούν την $\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\epsilon\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\ Erlang\ (2;\ \lambda_1, \lambda_2)$. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι τα αντίστοιχα ύψη ζημιών είναι εκθετικά κατανεμημένα, με $X \sim Exp(a), Y \sim Exp(b), a, b > 0$ και αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace των σ.π.π. p, q, που δίνονται από τις σχέσεις $\hat{p}(s) = \frac{a}{s+a}$ και $\hat{q}(s) = \frac{b}{s+b}$.

Στο Κεφάλαιο 2 είχαμε ορίσει τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu $\varphi_1(u)$και $\varphi_2(u)$. Όπου ισχύει η σχέση $\Phi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$. Για $\delta = 0$ η προηγούμενη σχέση γίνεται $\Psi(u) = \Psi_1(u) + \Psi_2(u)$, όπου Ψ_j ορίσθηκε στην σχέση (2.6).

Επιπλέον, τώρα οι σχέσεις (2.38) και (2.42) γίνονται

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)(s+a)^2(s+b)m_1(s)}{\lambda_1\lambda_2(s+a)^2(s+b)[\gamma_\delta(s) - \hat{q}(s)]}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{3.63}$$

$$\hat{\varphi}_2(s) = \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)(s+a)^2(s+b)m_2(s)}{\lambda_1\lambda_2(s+a)^2(s+b)[\gamma_\delta(s) - \hat{q}(s)]}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{3.64}$$

με παρόμοια μεθοδολογία με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3., για τους αριθμητές των (3.63) και (3.64) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(s+a)^2(s+b)m_1(s) \\
&\qquad = \lambda(s+a)(s+b)\frac{a[c\varphi_1(0) - \lambda\hat{w}_1(\rho_2)]}{(a+\rho_1)(a+\rho_2)} \\
&\qquad + \lambda(s+a)(s+b)\left[c(s+a) - \frac{\lambda a}{a+\rho_1}\right] \times T_s T_{\rho_2} w_1(0) \\
&\qquad - \lambda(s+a)^2(s+b)\left[c\rho_1 + \frac{\lambda a}{a+\rho_1} - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\right] T_s T_{\rho_2} T_{\rho_2} w_2(0),
\end{aligned}$$

και

$$(s+a)^2(s+b)m_2(s) = (s+a)(s+b)\frac{c\lambda a\varphi_2(0)}{(a+\rho_1)(a+\rho_2)} + (s+a)^2(s+b)\lambda_1\lambda_2 T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} w_2(0).$$

Επίσης οι κοινός παρονομαστής των (3.63) και (3.64) είναι ένα πολυώνυμο 5ου βαθμού $D_5(s)$, το οποίο έχει 5 ρίζες με μεγιστοβάθμιο όρο το c^2 και επομένως η $D_5(s) = 0$ έχει 5 ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο, εκ των οποίων δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 έχουν θετικά πραγματικά μέρη και 3 ρίζες, R_i, έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Επομένως η $D_5(s)$ γράφεται

$$D_5(s) = c^2(s-\rho_1)(s-\rho_2)\prod_{i=1}^{3}(s+R_i). \qquad s \in \mathbb{C}$$

Με τη βοήθεια της τεχνικής των μερικών κλασμάτων, βρίσκουμε ότι

$$\frac{(s+a)(s+b)}{\prod_{i=1}^{3}(s+R_i)} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{s+R_i}.$$

$$\frac{(s+a)^2(s+b)}{\prod_{i=1}^{3}(s+R_i)} = 1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{b_i}{s+R_i},$$

όπου $a_i = (a-R_i)(b-R_i)/\left[\prod_{j=1,j\neq i}^{3}(R_j - R_i)\right]$ και $b_i = (a-R_i)a_i$, για $i = 1,2,3$. Έτσι οι σχέσεις (3.63) και (3.64), γίνονται

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1(s) = {} & \frac{\lambda a[c\varphi_1(0) - \lambda\hat{w}_1(\rho_2)]}{c^2(a+\rho_1)(a+\rho_2)}\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{s+R_i} \\ & + \frac{\lambda}{c}\left\{1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{\left[(a-R_i) - \left(\frac{\lambda a}{c(a+\rho_1)}\right)\right]a_i}{s+R_i}\right\} T_s T_{\rho_2} w_1(0) \\ & - \frac{\lambda}{c^2}\left[c\rho_1 + \frac{\lambda a}{a+\rho_1} - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\right]\left[1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{b_i}{s+R_i}\right] T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} w_1(0),\end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}_2(s) = \frac{\lambda a\varphi_2(0)}{c(a+\rho_1)(a+\rho_2)}\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{s+R_i} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{c^2}\left[1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{b_i}{s+R_i}\right] T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} w_2(0),$$

όπου $\varphi_1(0)$ και $\varphi_2(0)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.41) και (2.36), δηλαδή

$$\varphi_1(0) = \frac{\lambda}{c}\left[\hat{w}_1(\rho_2) - (a+\rho_2)\frac{[c\rho_1 - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)](a+\rho_1) + \lambda a}{c(a+\rho_1)(a+\rho_2) - \lambda a} T_{\rho_2} T_{\rho_1} w_1(0)\right],$$

$$\varphi_2(0) = \frac{\lambda_1\lambda_2(a+\rho_1)(a+\rho_2)}{c[(a+\rho_1)(a+\rho_2)-\lambda a]} T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0). \tag{3.65}$$

Επομένως, με τη βοήθεια της (3.65) και αντιστρέφοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις για τις $\varphi_1(u), \varphi_2(u)$

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) = {} & \frac{\lambda a[c\varphi_1(0) - \lambda\widehat{w}_1(\rho_2)]}{c^2(a+\rho_1)(a+\rho_2)} \sum_{i=1}^{3} a_i e^{-R_i u} + \frac{\lambda}{c} T_{\rho_2} w_1(u) \\ & + \frac{\lambda}{c} \sum_{i=1}^{3} a_i \left[(a - R_i) - \frac{\lambda a}{c(a+\rho_1)}\right] e^{-R_i u} \star T_{\rho_2} w_1(u) \\ & - \frac{\lambda}{c^2}\left[c\rho_1 + \frac{\lambda a}{a+\rho_1} - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\right] T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u), \quad u \geq 0, \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(u) = {} & \frac{\lambda a\varphi_2(0)}{c(a+\rho_1)(a+\rho_2)} \sum_{i=1}^{3} a_i e^{-R_i u} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{c^2} T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{c^2} \sum_{i=1}^{3} b_i e^{-R_i u} \\ & * T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u). \qquad u \geq 0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Θέτοντας $\delta = 0, w_1(x,y) = w_2(x,y) = 1$, οι σχέσεις (3.66) και (3.67) δίνουν τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\Psi_1(u)$ και $\Psi_2(u)$ δεδομένου ότι συμβαίνει χρεοκοπία από την 1η κλάση ή την 2η κλάση, αντίστοιχα. Επίσης, έχουμε $w_1(x) = e^{-ax}, w_2(x) = e^{-bx}, \rho_1 = 0$ και ρ_2 είναι η μόνη θετική ρίζα της παρακάτω εξίσωσης

$$\left(cs - \frac{\lambda s}{s+a} - \lambda_1\right)\left(cs - \frac{\lambda s}{s+a} - \lambda_2\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2 b}{s+b}. \tag{3.68}$$

Τότε, οι (3.66) και (3.67), γίνονται

$$\Psi_1(u) = \frac{\lambda}{c^2(a+\rho_2)} \sum_{i=1}^{3} \left\{\left[c(\Psi_1(0)+1) - \frac{\lambda}{a+\rho_2} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{a}\right](a - R_i) - \lambda\right\} \frac{a_i}{a - R_i} e^{-R_i u},$$

$$\Psi_2(u) = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} \left\{\frac{\lambda c\Psi_2(0)}{a+\rho_2} + \frac{\lambda_1\lambda_2(a-R_i)}{b(b+\rho_2)(b-R_i)}\right\} a_i e^{-R_i u}. \qquad u \geq 0$$

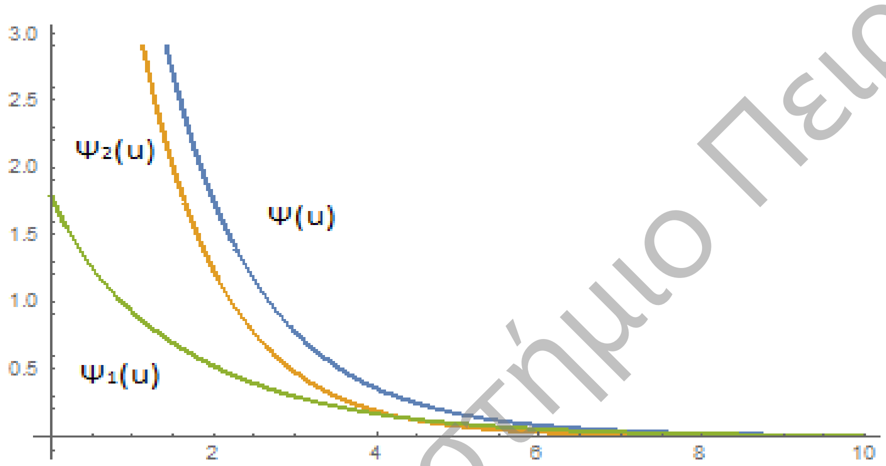
Αν θέσουμε $c = 1{,}5,\ a = 1{,}5,\ b = 2,\ \lambda = 1,\ \lambda_1 = 0{,}9,\ \lambda_2 = 2$, τότε βρίσκουμε τις ρίζες $\rho_2 = 2{,}07967, R_1 = 1{,}9522, R_2 = 1{,}27466, R_3 = 0{,}586146,\quad \Psi_1(0) = 0{,}108737, \Psi_2(0) = 2{,}00534$. Τότε, για τις $\Psi_1(u)$ και $\Psi_2(u)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{cases} \Psi_1(u) = 0{,}968857e^{-1.9522u} - 2{,}1703e^{-1{,}27466u} + 2{,}84491e^{-0{,}586146u} \\ \Psi_2(u) = 0{,}44444(1{,}11282e^{-1{,}9522u} - 1{,}06172e^{-1{,}27466} + 3{,}97944e^{-0{,}586146u}, \end{cases} \quad u \geq 0,$$

οπότε, τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\Psi(u) = 0{,}968857e^{-1.9522u} - 2{,}1703e^{-1{,}27466u} + 2{,}84491e^{-0{,}586146u} + 0{,}44444(1{,}11282e^{-1{,}9522u} - 1{,}06172e^{-1{,}27466} + 3{,}97944e^{-0{,}586146u}.$$

Παρακάτω δίνεται ένα διάγραμμα για την $\Psi_1(u)$, $\Psi_2(u)$ και $\Psi(u)$,



Παρατήρηση 4.1. Ένας άλλος τρόπος εύρεσης της $\Psi(u)$ είναι να βρούμε πρώτα τη πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u) = 1 - \Psi(u)$. Αυτό επιτυγχάνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \delta(0)[c_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{2n+m} c_i e^{-R_i u}], \\ &= 1 + \delta(0)[c_i e^{-R_1 u} + c_2 e^{-R_2 u} + c_3 e^{-R_3 u}] \end{aligned} \qquad u \geq 0$$

όπου

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\rho + \alpha)}{c\rho^2 + (ca - \lambda)\rho}\right],$$

$$c_0 = \frac{a^2 b(ca + c\rho - \lambda)}{c(\rho + \alpha)R_1 R_2 R_3},$$

$$c_1 = -\frac{(a - R_1)(b - R_1)[c(\rho + \alpha)(\alpha - R_1) - \lambda\alpha]}{c(\rho + \alpha)R_1(R_2 - R_1)(R_3 - R_1)},$$

$$c_2 = -\frac{(a - R_2)(b - R_2)[c(\rho + \alpha)(\alpha - R_2) - \lambda\alpha]}{c(\rho + \alpha)R_2(R_1 - R_2)(R_3 - R_2)},$$

$$c_3 = -\frac{(a - R_3)(b - R_3)[c(\rho + \alpha)(\alpha - R_3) - \lambda\alpha]}{c(\rho + \alpha)R_3(R_1 - R_3)(R_2 - R_3)},$$

$$\frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{\lambda\mu_\chi + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\mu_Y}{c}$$

Τα R_1, R_2, R_3 τα βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο από την εξίσωση του Lundberg και την σχέση (3.68).

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας δοθέντος ότι έχει συμβεί ζημιά από την δεύτερη κλάση $L_{i1}, i = 1{,}2$. Συγκεκριμένα $\delta_1(u) = 1 - \Psi_1(u)$ όπου $\Psi_1(u) = \mathbb{P}[T < \infty | L_{11} = t, U(t) = u]$.

Τότε, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\delta(0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\delta_1(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_X + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\mu_Y}{c} = \frac{\theta}{1+\theta},$$

και

$$\delta_1(0) = \frac{\theta(\lambda_1 + \lambda_2)}{(1+\theta)\lambda}\left[\frac{c\rho^2 + \rho(ca - \lambda - \lambda_2) - \lambda\alpha}{c\rho^2 + (ca - \lambda)\rho}\right].$$

όπου ισχύει $\delta(u) > \delta_1(u)$ για κάθε $u \geq 0$. Δηλαδή, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητας μη χρεοκοπίας δοθέντος ότι έχει συμβεί ζημιά στη δεύτερη κλάση, για κάθε $u \geq 0$, όπως θα ήταν και αναμενόμενο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Stathis Chadjiconstantinidis, Papaioannou, A.D., (2009). Analysis of the Gerber-Shiu function and dividend barrier problems for a risk process with two classes of claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 45:470-484.

[2] Stathis Chadjiconstantinidis, Papaioannou, A.D., (2010). The Gerber-Shiu penalnty function for a risk process with two classes of claims under a multi-layer dividend strategy. Proceedings of the VIth International in Actuarial Science & Finance on Samos *http:/www.actuar.aegean.gr/samos2010/files/proceedings/Papaioannou-paper.pdf.*

[3] Shuanming Li, Jose Garrido, (2005). Ruin probabilities for two classes of risk processes.*Astin Bulletin* vol.35 61-77.

[4] Zhimin Zhang, Shuanming Li, Hu Yang, (2009). The Gerber-Shiu discounted penalty functions for a risk model with two classes of claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230 643-655.

[5] Shuanming Li, Yi Lu (2005). On the expected discounted penalnty functions for two classes of risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 36 179-193.

[6] Gerber, H., Shiu, E., (2005). The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (2), 49-68.

[7] Li,S.,(2003) . Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. *North American Actuarial Journal*, 7 (3), 119-122.

[8] Li, S., Lu, Y.,(2005) On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 36, 179-193.

[9] Li, S., Garrido, J., (2004a). On the ruin for the Erlang(n) risk process. *Insurance Mathematics and Economics*, 34, 193-225.

[10] Cheng, Y., Tang, Q., (2003). Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process. *North American Actuarial Journal*, 7 (1), 1-12.

[11] Albercher, Merce και Marmol (2005).On the distribution of the dividends payments in Sparre Andersen model with Generalized Erlang (n) inter-claim times. *Insurance: Mathematics and Economics* 37(2):324-334

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[12] Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, μάθημα Θεωρία Κινδύνου Ι, μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[13] Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, μάθημα Θεωρία Κινδύνου ΙΙ, μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[14] Κ.Ι. Κουτσόπουλου, Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των κινδύνων, Αθήνα 2009, Εκδόσεις Συμμετρία.

[15] Ο. Χρυσαφίνου, Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις, Αθήνα 2008, Εκδόσεις Σοφία.

[16] Απόστολος Δ. Παπαΐωαννου, Μελέτη μη ανανεωτικών στοχαστικών μοντέλων στη θεωρία κινδύνου, Πειραιάς 2011, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[17] Boyce-Di Prima, Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Αθήνα 1999, Εκδόσεις Ε.Μ.Π.