



Πανεπιστήμιο Πειραιά

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Αναλογιστικής  
Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου

Διπλωματική Εργασία

**«Από Κοινού Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και  
Υποχρεώσεων με τη Χρήση Συνεπών Μέτρων Κινδύνου».**

**«Asset and Liability Management  
Using Coherent Risk Measures».**

Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια

Παγώνη Σοφία

Ιούνιος 2013

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω για το χρόνο και το ενδιαφέρον τον καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης Σ. Βρόντο που με τη συνεργασία του, έκανε δυνατή την ολοκλήρωση της πρώτης μου εξερεύνησης στο χώρο της ποιοτικής έρευνας.

Θερμές ευχαριστίες, επίσης, απευθύνω στους συμφοιτητές του ακαδημαϊκού έτους 2011-2013 του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου» του Πανεπιστημίου Πειραιά, καθώς ο ενθουσιασμός τους τροφοδότησε μια δημιουργική και παραγωγική συνεργασία και μια αλληλεπίδραση ιδιαίτερα ζωντανή και σημαντική από την αρχή ως και το τέλος του ακαδημαϊκού αυτού έτους.

Η διπλωματική εργασία αυτή, δε θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς τη βοήθεια των γονιών μου, των οποίων η οικονομική και ηθική υποστήριξη υπήρξε ζωτικής σημασίας για το ξεκίνημα και την ολοκλήρωση των σπουδών μου.

## Περίληψη

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής είναι: «Από Κοινού Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων με τη Χρήση Συνεπών Μέτρων Κινδύνου» υπό την επίβλεψη του Σ. Βρόντου, Λέκτορα του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά.

Στην παρούσα έρευνα αναλύσαμε τα προϊόντα, στα οποία επενδύουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία και εκτιμήσαμε τις συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις από αναλογιστική και οικονομική προσέγγιση. Ιδιαίτερη αναφορά έγινε στην ανάλυση και διαχείριση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν τα ταμεία συνταξιοδότησης και στους βασικούς τρόπους μέτρησής τους, όπως είναι η διακύμανση, η αξία σε κίνδυνο και η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Κύριο ερευνητικό αντικείμενο αποτέλεσε η παρουσίαση εκείνων των αξιωμάτων που πρέπει να ικανοποιούνται, ώστε ένα μέτρο κινδύνου να θεωρείται συνεπές και η ανάλυση των χαρτοφυλακίων βελτιστοποίησης των μοντέλων *mean – Variance*, *mean – Value – at – Risk* και *mean – Conditional – Value – at – Risk*. Τέλος, τα χαρτοφυλάκια βελτιστοποίησης μοντελοποιήθηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος της *GAMS*.

# Περιεχόμενα

## 1. Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

1.1 Εισαγωγή.....	6
1.2 Προϊόντα στα οποία επενδύουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία.....	7
1.3 Εκτίμηση των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων με αναλογιστική και οικονομική προσέγγιση.....	13

## 2. Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

2.1 Εισαγωγή .....	18
2.2 Ανάλυση και διαχείριση κινδύνου .....	18
2.3 Μέτρηση κινδύνου .....	20
2.4 Συνεπή μέτρα κινδύνου .....	24

## 3. Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

3.1 Εισαγωγή .....	29
3.2 Ανάλυση των μοντέλων <i>Mean – Variance, Mean – Value – at – risk</i> .....	29
3.3 Προσέγγιση των μοντέλων <i>Mean – Variance</i> και <i>Mean – Value – at – risk</i> με δύο στόχους βελτιστοποίησης .....	36
3.4 Βελτιστοποίηση του μοντέλου <i>Conditional Value – at – risk</i> .....	39
3.5 Μια προσεγγιστική βελτιστοποίηση στα ταμεία συνταξιοδότησης.....	54
3.6 Διαχείριση Περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων στα συνταξιοδοτικά ταμεία χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο.....	57

## 4. Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

### Εφαρμογή

4.1 Εφαρμογή του μοντέλου <i>Mean – Variance</i> .....	61
4.2 Εφαρμογή του μοντέλου <i>Mean – Conditional Value – at – risk</i> .....	75
4.3 Εφαρμογή του μοντέλου <i>Mean – Regret</i> .....	86
4.4 Περιγραφικά στατιστικά μέτρα.....	97

<b>Συμπεράσματα</b> .....	105
---------------------------	-----

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1</b> .....	106
--------------------------	-----

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2</b> .....	109
--------------------------	-----

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3</b> .....	112
--------------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4 .....	115
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5 .....	118
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6 .....	121
Βιβλιογραφία.....	124

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

# Κεφάλαιο 1

## 1.1 Εισαγωγή

Οι παροχές και οι συντάξεις είναι όροι που εφευρέθηκαν στα τέλη του 19<sup>ου</sup> και στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα στις ανεπτυγμένες οικονομίες, ενώ παλαιότερα οι άνθρωποι δεν συνταξιοδοτούνταν παρά εξακολουθούσαν να εργάζονται μέχρι ακόμη και το θάνατό τους. Ο Bismarck ήταν ο πρώτος που δημιούργησε ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα στη Γερμανία κατά τον 19<sup>ο</sup> αιώνα. Παρόμοια προγράμματα λειτούργησαν σε πολλές χώρες της Ευρώπης και της Αμερικής κατά τη διάρκεια του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Έτσι, οι κοινωνίες στοχεύοντας στην οικονομική τους ανάπτυξη, έθεσαν το ελάχιστο βιοτικό επίπεδο που επιθυμούσαν για τους συνταξιούχους τους, με σκοπό την ανακούφιση της φτώχειας, αλλά και ένα αναδιανεμητικό σύστημα κατά το οποίο παραχώρησαν πρόσθετους πόρους πάνω από το επίπεδο της φτώχειας σε συγκεκριμένες ομάδες της κοινωνίας, όπως για παράδειγμα σε μητέρες που ανατρέφουν τα παιδιά τους.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1980 υπήρχαν πολλές ασάφειες σχετικά με την έννοια του κινδύνου, γι' αυτό το λόγο οι ρυθμιστικές αρχές, οι τράπεζες και γενικότερα οι διαχειριστές του κινδύνου, προχώρησαν σε τεχνικές μέτρησης με σκοπό την ποσοτικοποίηση ακόμα και την πρόβλεψή του. Η παρούσα εργασία διεξήχθη με γνώμονα την κατανόηση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν τα σύγχρονα ταμεία συνταξιοδότησης και την εύρεση εκείνων των χαρτοφυλακίων που ελαχιστοποιούν τους κινδύνους αυτούς.

Κύριο ερευνητικό αντικείμενο της εργασίας είναι η ανάλυση των πιο διαδεδομένων τρόπων μέτρησης των κινδύνων, αλλά και η ανάπτυξη των αξιωμάτων εκείνων που πρέπει να ικανοποιούν τα μέτρα αυτά ώστε να θεωρούνται συνεπή. Στο τελευταίο κεφάλαιο, αξιολογούνται και εκτιμώνται τα χαρτοφυλάκια στα οποία επενδύουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία και γίνεται η εφαρμογή τους.

Με τον όρο συνταξιοδοτικά ταμεία κατά τον *D. Blake [2006]*<sup>1</sup> εννοούμε κυρίως κρατικές ή ημικρατικές οργανώσεις, οι οποίες διαχειρίζονται τα χρήματα των συντάξεων των εργαζομένων. Περαιτέρω, αποτελούν σημαντικό παράγοντα των χρηματαγορών, καθώς επενδύονται σ' αυτά οι εισφορές των ασφαλισμένων, με την προϋπόθεση ότι θα τους παραχθεί ένα σταθερό εισόδημα κατά τη συνταξιοδότηση τους. Επιπλέον, λειτουργούν και σαν ασφάλεια, αφού η σύνταξη που ξεκινά κατά την αποχώρηση του ατόμου από την εργασία του και συνεχίζεται μέχρι και το θάνατό του, θα αποτελέσει το μοναδικό οικονομικό πόρο κατά τη συμπλήρωση των απαιτούμενων ετών εργασίας του.

Για τους περισσότερους συνταξιούχους ισχύει η τριμερής χρηματοδότηση, η οποία περιλαμβάνει είτε πληρωμή της σύνταξης από τον εργοδότη, είτε από τον ίδιο τον εργαζόμενο όταν πρόκειται για ατομικές αποταμιεύσεις, είτε από κρατικούς

---

<sup>1</sup> *Pension Economics, Wiley [2006]*

οργανισμούς. Έτσι, λοιπόν, η περιουσία των ταμείων μπορεί να είναι στην ιδιοκτησία του εργοδότη, ή να έχει τη δική της νομική υπόσταση, δηλαδή να μπορεί το συνταξιοδοτικό ταμείο να χρησιμοποιείται από πολλούς εργοδότες μαζί. Κατ' αυτόν τον τρόπο, τα ταμεία βρίσκονται σε συνεχή ανταγωνισμό μεταξύ τους, ο οποίος τα υποχρεώνει σε αναζήτηση βραχυπρόθεσμης κερδοφορίας, ενώ ταυτόχρονα όλο και περισσότερες αποταμιεύσεις των εργαζομένων οδηγούνται στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Ουσιαστικά, λοιπόν, συνιστούν τους μεγαλύτερους επενδυτές παγκοσμίως λόγω του μεγέθους τους, αλλά και της μακροπρόθεσμης συσσώρευσης κεφαλαίων εκ μέρους τους.

## 1.2 Προϊόντα στα οποία επενδύουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία

Εδώ θα μελετηθούν τα διάφορα περιουσιακά στοιχεία, όπως αυτά ορίζονται από τον *D. Blake [2006]*<sup>2</sup> στα οποία θα μπορούσαν να επενδύσουν τα συνταξιοδοτικά ταμεία. Τέτοια είναι τα χρηματοοικονομικά προϊόντα, παράγωγα, εμπράγματα περιουσιακά στοιχεία και εναλλακτικές επενδύσεις.

Τα χρηματοοικονομικά προϊόντα περιλαμβάνουν:

**Τίτλους διαχείρισης διαθεσίμων (Money market securities)** που είναι τίτλοι μικρής διάρκειας συχνά μικρότερης του ενός έτους, οι οποίοι ταξινομούνται στους τίτλους που είναι εισηγμένοι στο χρηματιστήριο με βάση την απόδοσή τους, όπως για παράδειγμα είναι οι προθεσμιακές καταθέσεις, τα διαπραγματεύσιμα πιστοποιητικά καταθέσεων (Negotiable Certificates of Deposit, CDs) και τα συμβόλαια επαναγοράς (Repurchase Agreement, Repos) και ο' αυτά που είναι εισηγμένα με βάση το δείκτη έκπτωσης, δηλαδή πωλούνται στους επενδυτές σε τιμή χαμηλότερη της ονομαστικής τους αξίας. Τέτοια είναι τα έντοκα γραμμάτια (Treasury Bills, TBs), οι επιταγές αποδοχής τράπεζας (Bankers' Acceptances), και τα εμπορικά χρεόγραφα (Commercial Paper).

Όσον αφορά τις *προθεσμιακές καταθέσεις* εκδίδονται στο άρτιο δηλαδή στην ονομαστική τους αξία και είναι καταθέσεις σταθερού επιτοκίου μικρής διάρκειας.

Τα *CDs* εκδίδονται και αυτά στο άρτιο και είναι βραχυπρόθεσμα χρεόγραφα που εκδίδονται από μια τράπεζα με σκοπό την άντληση κεφαλαίων από τη χρηματιστηριακή αγορά. Είναι τίτλοι σταθερού ή κυμαινομένου επιτοκίου που διαπραγματεύονται στη δευτερογενή αγορά και στις περισσότερες περιπτώσεις ο κάτοχος λαμβάνει στη λήξη το συνολικό κεφάλαιο συν τους τόκους.

Τα *repos* είναι συμφωνίες επαναγοράς μεταξύ ενός οφειλέτη και ενός δανειστή να πουλήσει ο πρώτος και να αγοράσει εκ νέου ο δεύτερος σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και σε συγκεκριμένη τιμή ένα χρεόγραφο που συνήθως είναι έντοκο γραμμάτιο ελληνικού δημοσίου. Στην περίπτωση που την πρωτοβουλία την αναλάβει ο δανειστής και όχι ο οφειλέτης τότε κάνουμε λόγο για *reverse repos*.

---

<sup>2</sup> *Pension Finance, Wiley [2006]*

Τα *TBs* είναι τίτλοι μικρής διάρκειας συνήθως τριών μηνών. Κατά την ημερομηνία λήξης τους εξοφλούνται στην ονομαστική τους αξία και κάθε επενδυτής σε περίπτωση ανάγκης μπορεί εύκολα να πουλήσει τους τίτλους οποιαδήποτε στιγμή.

Οι *επιταγές αποδοχής τράπεζας* είναι γραπτές εγγυήσεις ότι οι δανειστές θα καταβάλουν το αναγραφόμενο ποσό σε συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή στην τράπεζα. Επίσης, είναι διαπραγματεύσιμες στη δευτερογενή αγορά.

Τα *εμπορικά χρεόγραφα* είναι βραχυπρόθεσμα χρεόγραφα που εκδίδονται συνήθως από μεγάλους οργανισμούς με σκοπό την άντληση κεφαλαίων. Η τιμή πώλησης είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία που θα εισπράξει ο κάτοχος στην λήξη τους.

Όπως είδαμε, όλοι οι παραπάνω τίτλοι πωλούνται σε τιμή χαμηλότερη της ονομαστικής τους αξίας, παρ' όλα αυτά ενδιαφέρον παρουσιάζεται από τη διαφορά μεταξύ της τιμής έκδοσης και της ονομαστικής αξίας που λαμβάνεται κατά τη λήξη.

Τα *Αμοιβαία Κεφάλαια (Money Market Funds)* απευθύνονται σε επενδυτές που επιθυμούν να επενδύσουν σε διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια με άμεσα ρευστοποιήσιμους τίτλους μικρής διάρκειας σε συνδυασμό με αποδόσεις.

Τις *ομολογίες (Bonds)*, οι οποίες είναι τίτλοι κεφαλαιαγοράς, σαν τέτοιοι έχουν διάρκεια μεγαλύτερη του έτους και είναι διαπραγματεύσιμες στη δευτερογενή αγορά προϊόντων. Υπάρχουν ομόλογα σταθερού επιτοκίου, δηλαδή ομόλογα που πληρώνουν το ίδιο τοκομερίδιο σε όλη τη διάρκεια ζωής τους, καθώς και κυμαινόμενου επιτοκίου, δηλαδή ομόλογα των οποίων το επιτόκιο μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της ζωής τους σύμφωνα με κάποιο άλλο βασικό επιτόκιο. Η συχνότητα πληρωμής των τοκομεριδίων διαφέρει από έκδοση σε έκδοση, όπως επίσης και οι όροι πληρωμής, αφού υπάρχουν ομόλογα που δεν πληρώνουν καθόλου τοκομερίδιο (*zero coupon bonds*) τα οποία πωλούνται πολύ χαμηλότερα από την ονομαστική τους αξία. Υπάρχουν επίσης ομόλογα που εκδίδονται από συγκεκριμένες χώρες, όπως η Βρετανία και στοχεύουν στη χρηματοδότηση και διαχείριση του εθνικού χρέους, γνωστά ως *gilts*. Επίσης, κάποιες ιδιωτικές επιχειρήσεις εκδίδουν τα δικά τους ομόλογα, τα εταιρικά ομόλογα για να είναι πιο ασφαλείς τόσο στις σταθερές όσο και στις κυμαινόμενες επιβαρύνσεις των περιουσιακών τους στοιχείων.

Μία κατηγορία ομολόγων που χρησιμοποιείται κυρίως στη διεθνή αγορά, είναι τα *indexed bonds*, κατά τα οποία η πληρωμή του τοκομεριδίου και του κεφαλαίου συνδέονται με έναν συγκεκριμένο δείκτη τιμών, όπως ο δείκτης τιμών λιανικής, εμπορεύματος (πετρέλαιο) ή μια χρηματιστηριακή αγορά. Ως εκ τούτου έχει σχεδιαστεί για να εξασφαλίζει στον κάτοχό του μια σταθερή πραγματική απόδοση. Αρχικά, τα *indexed bonds* επενδύονταν μόνο από συνταξιοδοτικά ταμεία, επειδή ήταν εν μέρει τα μοναδικά που είχαν τιμαριθμοποιημένες συντάξεις να παραδώσουν στους συνταξιούχους τους, τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον κάθε επενδυτή. Τελειώνοντας, τα ομόλογα μπορούν να ταξινομηθούν και με βάση τον κίνδυνο χρεοκοπίας τους ή αλλιώς τον πιστωτικό κίνδυνο. Για παράδειγμα, τα κρατικά ομόλογα είναι μηδενικού κινδύνου, ενώ τα ομολογιακά δάνεια μειωμένης



εξασφάλισης ιδιωτικών εταιριών είναι από τα πιο επικίνδυνα. Υπεύθυνες για την αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας των επιχειρήσεων είναι οι Moody's και Standard & Poor's.

Τα **δάνεια (Loans)** είναι χρεόγραφα μη διαπραγματεύσιμα στη δευτερογενή αγορά. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία συνάπτουν δάνεια μακράς διάρκειας προς τις τοπικές αρχές, τις δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεις καθώς και άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Ένας τύπος τέτοιου δανείου είναι η υποθήκη, η οποία χρησιμοποιείται για τη χρηματοδότηση της αγοράς ακινήτων. Τα δάνεια είναι σχεδόν πάντα ασφαλή με εγγυήσεις που παρέχονται από κάποιας μορφής επίσχεση. Επίσης, είναι είτε σταθερού είτε κυμαινόμενου επιτοκίου και η διάρκειά του καθορίζεται εκτός κι αν μπορεί να προβλεφθεί η πρόωρη εξόφλησή του.

Τις **μετοχές** που αντιπροσωπεύουν μερίδιο ιδιοκτησίας σε μια επιχείρηση και χωρίζονται σε κοινές και προνομιούχες μετοχές, με τις απαιτήσεις και τα δικαιώματα των προνομιούχων μετοχών να προηγούνται απ' αυτά των κοινών. Οι κάτοχοι των κοινών μετοχών δικαιούνται να συμμετέχουν στη γενική συνέλευση και έχουν δικαίωμα ψήφου.

Μια άλλη κατηγορία χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι τα **συλλογικά επενδυτικά οχήματα (collective investment vehicles)** που αναφέρονται μεταξύ άλλων στα αμοιβαία κεφάλαια (unit trusts) και τις ανοιχτού τύπου επενδυτικές εταιρείες (Open Ended Investment Companies, OEICs), τα συγκεντρωτικά συνταξιοδοτικά ταμεία (Pension Fund Pooling Vehicles, PFPVs), τις επενδύσεις (investment trusts), τα ασφαλιστικά προϊόντα (insurance products), τα διαπραγματεύσιμα κεφάλαια (exchanged traded funds) και τα εγγυημένα κεφάλαια ανάπτυξης (guaranteed growth funds).

Πιο αναλυτικά, τα unit trusts είναι χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που επενδύουν σε τίτλους από άλλες εταιρείες. Οι δραστηριότητές τους υπόκεινται σε καθεστώς νομικού δικαίου. Οι διαχειριστές τους που συνήθως είναι μια τράπεζα ή μια ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνουν την επιμέλεια των στοιχείων και κρατούν ένα μητρώο για τους κατόχους τους. Στα unit trusts δεν επιτρέπεται να δανειστούν από τα ταμεία και να επενδύσουν σε τίτλους, γιατί δεν έχουν τη δυνατότητα να συμμετάσχουν στο μηχανισμό μετάδοσης. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία τείνουν να επενδύουν σε εξωτερικά αμοιβαία κεφάλαια (external unit trusts), τα οποία απαλλάσσονται τόσο από εταιρικό φόρο, όσο και φόρο κεφαλαιουχικών κερδών. Οι open ended investment companies είναι σαν τα unit trusts με τη διαφορά ότι αυτές υπόκεινται σε καθεστώς εταιρικού δικαίου και είναι γνώστες σε πολλές χώρες της ευρωπαϊκής ένωσης.

Τα investment trusts είναι και αυτά σαν τα unit trusts, με τη διαφορά ότι αυτά αποτελούν ένα ξεχωριστό νομικό πρόσωπο ή μια εταιρεία. Αυτό είναι σημαντικό για τα καθήκοντα που αναλαμβάνουν οι συμμετέχοντες καθώς και για τη δικαίη κυριότητα των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου. Έτσι, τα investment trusts χρησιμοποιούν το κεφάλαιό τους για επενδύσεις σε τίτλους άλλων εταιριών.

Στη συνέχεια τα **ασφαλιστικά προϊόντα** περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων:

Τα *κεφάλαια ασφαλίσεων ζωής (life funds)* είναι συλλογικά επενδυτικά σχήματα, κατά τα οποία τα επενδυτικά κεφάλαια, χρησιμοποιούνται για την επένδυση ασφαλιστρών ζωής, καθώς και τις αρχές προικοδότησης.

Τα *συμβόλαια προικοδότησης (endowment policies)* είναι ο συνδυασμός ενός ταμείου συσσώρευσης και της μακροπρόθεσμης ασφάλισης ζωής.

Μέχρι εδώ έχουμε εξετάσει τα κύρια χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία που ένα συνταξιοδοτικό ταμείο μπορεί να κρατά στο χαρτοφυλάκιό του. Μπορεί όμως επίσης να επενδύσει σε *εμπράγματα περιουσιακά στοιχεία (real assets)* όπως είναι τα ακίνητα, η γη και οι συλλογές.

Οι κύριες κατηγορίες ακινήτων που τα συνταξιοδοτικά ταμεία επενδύουν είναι βιομηχανικά και εμπορικά ακίνητα. Τα μεγάλα ταμεία προτιμούν τις άμεσες επενδύσεις σε ακίνητα, ενώ μικρότερα ταμεία προτιμούν τις έμμεσες επενδύσεις. Οι βασικοί στόχοι των άμεσων επενδύσεων σε ακίνητα είναι η επίτευξη σταθερού εισοδήματος από μισθώματα και η ανατίμηση της αξίας του κεφαλαίου. Αρχικά, τα συνταξιοδοτικά ταμεία επένδυσαν στην καθαρή θέση της εταιρικής περιουσίας, αλλά από το 1960 έχουν αρχίσει να επενδύουν απευθείας σε ακίνητα.

Η γεωργική γη τείνει να είναι μια ελκυστική επένδυση, όταν ο πληθωρισμός είναι υψηλός. Η εκτίμηση της αξίας της γης αντισταθμίζει τις χαμηλά καθαρές αποδόσεις που προκύπτουν με αυτό το είδος των επενδύσεων.

Με τον όρο συλλογές εννοούμε τα φυσικά περιουσιακά στοιχεία των οποίων η αξία αναμένεται να αυξηθεί με το χρόνο, εδώ περιλαμβάνονται συνεπώς έργα τέχνης, πολύτιμα μέταλλα, κοσμήματα, έπιπλα, σπάνια γραμματόσημα και κέρματα. Η κατηγορία αυτή αποτελεί ένα αμφιλεγόμενο μέρος του συνταξιοδοτικού ταμείου χαρτοφυλακίων.

Τέλος, πρέπει να αναφερθούν τα *παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (derivatives)*, τα οποία περιλαμβάνουν :

*Προθεσμικά συμβόλαια (forward contract)*: συμφωνία μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων που καθορίζει τους όρους ανταλλαγής που θα γίνει μεταξύ τους σε κάποια μελλοντική ημερομηνία. Τα *συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contract)* αποτελούν κι αυτά μια τέτοιου είδους συμφωνία, αλλά διαφέρουν σημαντικά από τα πρώτα καθώς δημιουργήθηκαν για να καλύψουν τα μειονεκτήματα των προθεσμιακών συμβολαίων.

Τα *δικαιώματα (options)* τα οποία αποτελούν συμφωνίες που παρέχουν στον αγοραστή τους το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει ορισμένη ποσότητα τίτλων σε προκαθορισμένη τιμή. Με βάση το είδος της συναλλαγής που δικαιούται να πραγματοποιήσει ο αγοραστής ενός δικαιώματος αυτές διακρίνονται σε δικαιώματα αγοράς (*call options*) και δικαιώματα πώλησης (*put options*). Ο αγοραστής ενός *call option* έχει την ευχέρεια και όχι την υποχρέωση να αγοράσει το συμφωνημένο αριθμό μετοχών, ενώ στο *put option* ο πωλητής-εκδότης δεσμεύεται να αγοράσει το συγκεκριμένο αριθμό μετοχών σε

συγκεκριμένη τιμή και σε συγκεκριμένη στιγμή. Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο τη στιγμή που λήγει, ενώ ένα αμερικανικό οποιαδήποτε στιγμή πριν την ημερομηνία λήξης του.

Τα *equity warrants* είναι ουσιαστικά *call options* που παρέχουν το δικαίωμα αγοράς μετοχών σε συγκεκριμένο χρόνο και με συγκεκριμένους όρους. Ο χρόνος άσκησης τους μπορεί να ξεπερνά τα πέντε έτη. Αν ασκείται το δικαίωμα αγοράς, η εταιρεία εκδίδει νέες μετοχές στην τιμή άσκησης και έτσι δημιουργείται πρόσθετη χρηματοδότηση. Τα *bonds warrants* είναι το δικαίωμα αγοράς περισσότερων ομολόγων της επιχείρησης.

Τα *μετατρέψιμα χρεόγραφα (convertibles)* που είναι αυτά που μπορούν να μετατραπούν σε άλλου είδους χρεογράφων, με πιο συχνή περίπτωση αυτή κατά την οποία τα ομόλογα ή οι προνομιούχες μετοχές μετατρέπονται σε κοινές μετοχές, κάτω από συγκεκριμένους όρους και προϋποθέσεις.

Οι *συμβάσεις ανταλλαγής (swaps)* είναι συμβάσεις που περιλαμβάνουν την ανταλλαγή των ταμειακών ροών σε δύο ή περισσότερους διαφορετικούς τίτλους. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία της Αγγλίας χρησιμοποιούν τέτοιου είδους συμφωνίες από τα τέλη της δεκαετίας του 1960, όταν έβγαλαν συναλλαγματικά δάνεια για να χρηματοδοτήσουν τις επενδύσεις τους στο εξωτερικό. Τα σημαντικότερα είναι τα *interest rate swap*, μια συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων για ανταλλαγή πληρωμών σταθερού επιτοκίου έναντι κυμαινόμενου στο ίδιο νόμισμα και υπολογίζεται με αναφορά σε ένα προσυμφωνημένο ποσό κεφαλαίου.

Οι *προθεσμιακές καταθέσεις (forward rate agreements, FRAs)* είναι ισοδύναμα με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης των βραχυπρόθεσμων *interest rate swaps* συνδυάζουν πολλά από τα χαρακτηριστικά των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, των προθεσμιακών συμβολαίων και των swaps.

Κλείνοντας κατά τον *D. Blake [2006]*, οι εναλλακτικές επενδύσεις αποτελούν μια νέα κατηγορία επένδυσης και κατηγοριοποιούνται σε:

*Στρατηγικές μιας Ανοιχτής Αγοράς (Public market strategies)*: χρησιμοποιούνται συλλογικά οχήματα υψηλού κινδύνου (hedge funds), επενδυτικά κεφάλαια που επενδύονται σε άλλα επενδυτικά κεφάλαια (funds of funds) και συλλογικά οχήματα κερδοσκοπικού χαρακτήρα (arbitrage funds).

*Στρατηγικές μιας Κλειστής Αγοράς (Private market strategies)*: χρησιμοποιούνται κεφάλαια που δεν αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε επίσημες συναλλαγές και περιλαμβάνουν κεφάλαια επιχειρηματικών συμμετοχών (venture capital), εξαγορές μόχλευσης (Leveraged Buyouts, LBOs), χρέος (distressed debt).

*Στρατηγικές φυσικών πόρων (Natural resource strategies)*: που αφορά την αγορά και την πώληση φυσικών και όχι οικονομικών μέσων.

Οι εναλλακτικές επενδύσεις αναγνωρίζονται ως μία από τις πέντε μορφές διαχείρισης κινδύνων, με τις υπόλοιπες τέσσερις να συνοψίζονται στις:

*Διαχείριση περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων (Asset Liability Management, ALM).* Υπάρχουν δύο βασικές χρήσεις του μοντέλου. Η πρώτη είναι να δείχνει τις συνέπειες της υιοθέτησης κάποια συγκεκριμένης επενδυτικής στρατηγικής. Η δεύτερη είναι να ανακαλύψει εναλλακτικές στρατηγικές που να αυξάνουν την επίτευξη των στόχων του ταμείου. Οι υποστηρικτές αυτού του μοντέλου διαχείρισης συμφωνούν ότι μ' αυτό τον τρόπο επιτρέπεται στα συνταξιοδοτικά ταμεία να δημιουργούν υψηλότερες αποδόσεις, χωρίς την επακόλουθη αύξηση του κινδύνου. Για παράδειγμα, ένα συνταξιοδοτικό ταμείο κατά τη λήξη του, θα πρέπει να στραφεί από μετοχές σε σταθερού εισοδήματος ομόλογα, τα οποία είναι πιο πιθανό να ανταποκριθούν στις συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις του εργοδότη με χαμηλότερο τον κίνδυνο ανεπαρκούς πληρωμής. Ωστόσο, πολλοί είναι αυτοί που ισχυρίζονται ότι οι παραδοχές που γίνονται σχετικά με τις μελλοντικές αποδόσεις των επενδύσεων πιθανόν να είναι τόσο αναξιόπιστες και το μοντέλο να έχει πολύ μικρή αξία. Ένα άλλο πρόβλημα που αντιμετωπίζει αυτή η τεχνική προέρχεται από τους διαχειριστές ταμείων, οι οποίοι ανησυχούν ότι δίνεται στους αναλογιστές ένας αδικαιολόγητος ρόλος στο σχεδιασμό των στρατηγικών επενδύσεων, ιδίως, στη στρατηγική της κατανομής περιουσιακών στοιχείων. Οι αναλογιστές παίζουν πάντα έναν ηγετικό ρόλο στον καθορισμό της αξίας των υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού συστήματος, αλλά με την έλευση του μοντέλου περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων, έχουν αρχίσει να παίζουν σημαντικό ρόλο στην ίδρυση μιας μακροπρόθεσμης κατανομής περιουσιακών στοιχείων πάνω από, ας πούμε, ένα 10-ετή ορίζοντα. Στόχος του ALM είναι η επιλογή εκείνου του ποσοστού εισφοράς στο ταμείο και εκείνης της κατανομής των στοιχείων του ενεργητικού με την πάροδο του χρόνου κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το σταθμισμένο άθροισμα του πλεονάζοντος κινδύνου και του κινδύνου εισφοράς, με την επιφύλαξη ότι το πλεόνασμα είναι μηδέν κατά την ημερομηνία συνταξιοδότησης του ασφαλισμένου και ποτέ δεν πέφτει έξω από ένα καθορισμένο εύρος πριν από τη συνταξιοδότηση.

*Παθητική διαχείριση (Passive Fund Management):* Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι παθητικής στρατηγικής η αγορά και διακράτηση (*buy-and-hold*) και η αντιστοίχιση του δείκτη (*Index Matching*). Η πρώτη περιλαμβάνει την αγορά των τίτλων και την κατοχή τους επί αόριστον ή, στην περίπτωση χρεογράφων και ομολόγων, την κατοχή τους μέχρι τη λήξη και στη συνέχεια, την αντικατάστασή τους με παρόμοιες αξίες. Η απόδοση από μια στρατηγική *buy-and-hold* εξαρτάται από τις ροές εισοδήματος (δηλαδή τις πληρωμές μερισμάτων και τοκομεριδίων) και στην περίπτωση των μετοχών, με τη μακροπρόθεσμη αύξηση κεφαλαίου. Οι βραχυπρόθεσμες προσδοκίες υπεραξίας ή απώλειας αγνοούνται στην περίπτωση των ομολόγων, τα κεφαλαιακά κέρδη και ζημιές αγνοούνται εντελώς, γιατί μόνο στη λήξη το ομόλογο θα λάβει την ονομαστική του αξία. Η μέθοδος *Index Matching* περιλαμβάνει την κατασκευή ενός δείκτη που έχει σχεδιαστεί για να αναπαράγει την απόδοση του δείκτη της αγοράς. Το χαρτοφυλάκιο προσδιορίζεται (ανάλογα με τον βαθμό της ανοχής κινδύνου) ως ένας συνδυασμός ενός ακίνδυνου περιουσιακού στοιχείου και του δείκτη.

*Ισορροπημένη διαχείριση (Active Fund Management):* Είναι κατάλληλη για συνταξιοδοτικά ταμεία, των οποίων οι διαχειριστές έχουν υψηλό βαθμό ανοχής του

κινδύνου και, συνεπώς, ενδιαφέρονται για τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιείται από συνταξιοδοτικά ταμεία που διαχειρίζονται ενεργά με την προσδοκία της μείωσης των εργοδοτικών εισφορών. Επίσης μέλη του συνταξιοδοτικού συστήματος καθορισμένης εισφοράς μπορεί να επιθυμούν να έχουν τα περιουσιακά στοιχεία στο ταμείο τους ενεργή διαχείριση. Υπάρχουν διαφορετικές τέτοιου είδους στρατηγικές για τις μετοχές και τα χαρτοφυλάκια ομολόγων.

### 1.3 Εκτίμηση των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων με αναλογιστική και οικονομική προσέγγιση

Όλο και πιο έντονη γίνεται η αντιπαράθεση μεταξύ οικονομολόγων και αναλογιστών σχετικά με το πώς χρηματοδοτούνται τα εταιρικά συνταξιοδοτικά σχήματα. Οι υποχρεώσεις των συνταξιοδοτικών ταμείων υπολογίζονται με βάση την παρούσα αξία των μελλοντικών πληρωμών συντάξεων. Για να γίνει αυτό εφικτό, πρέπει να επιλέξουμε ένα συντελεστή προεξόφλησης.

Σύμφωνα με τον *D. Blake [2006]*, κατά την αναλογιστική προσέγγιση, ο συντελεστής αυτός προσεγγίζει την ιστορική απόδοση ή μια προβλεπόμενη μελλοντική απόδοση των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου.

$$L_0 = \frac{L_1}{1+r}$$

Απ' την άλλη, οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν ένα μηδενικού κινδύνου επιτόκιο ( $r_f$ ).

$$L_0 = \frac{L_1}{1+r_f}$$

Ενδιαφέρουσες είναι οι απόψεις πολλών αναλογιστών καθώς και οικονομολόγων πάνω σε αυτό το ζήτημα. Συγκεκριμένα, ο *Treynor [1977]*<sup>3</sup> υποστηρίζει ότι η προεξόφληση των αναμενόμενων μελλοντικών συντάξεων χρησιμοποιώντας το ακίνδυνο επιτόκιο είναι ο στόχος για τη μέτρηση της οικονομικής επιβάρυνσης των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων της εταιρείας. Κατά τον *Peterson [1996]*<sup>4</sup> χρησιμοποιώντας ένα προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο ενσωματώνει ένα μετοχικό ασφάλιστρο κινδύνου, η αναμενόμενη αξία των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων μειώνεται, αλλά η προβλεπόμενη αξία των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων δεν μπορεί να μεταβληθεί, με την αλλαγή του συντελεστή προεξόφλησης. Άρα, η παρούσα αξία των μελλοντικών υποχρεώσεων θα πρέπει να υπολογίζεται με βάση το ακίνδυνο επιτόκιο. Επιπλέον, ο *Black [1980]*<sup>5</sup> ορίζει ότι τα συνταξιοδοτικά ταμεία μιας εταιρείας διαχωρίζονται νομικά από την ίδια την εταιρεία, επειδή

<sup>3</sup> *The principles of corporate pension policy. Journal of Finance [1977]*

<sup>4</sup> *Allocating assets and discounting cash flows, in Pensions, Savings and Capital Markets, Pension and Welfare Benefits Administration, US Department of Labor [1996]*

<sup>5</sup> *The tax consequences of long run pension policy, Financial Analysts Journal [1980]*

όμως οι συνταξιοδοτικές παροχές είναι ανεξάρτητες από την απόδοση του ταμείου, τα συνταξιοδοτικά περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας έχουν επιπτώσεις στην εταιρεία, σαν να ήταν μέρος της ίδιας της εταιρείας. Η άποψη των *Bodie, Light, Morck και Taggart [1985]*<sup>6</sup> είναι ότι οι εταιρίες διαχειρίζονται τα συνταξιοδοτικά ταμεία τους σαν να αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της συνολικής εταιρικής οικονομικής πολιτικής. Οι υποχρεώσεις του συνταξιοδοτικού συστήματος είναι ένα μέρος των οικονομικών υποχρεώσεων της επιχείρησης και τα συνταξιοδοτικά περιουσιακά στοιχεία είναι μόνο ένα μέρος των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης.

Συμπερασματικά, όπως είδαμε παραπάνω, όπως το προεξοφλητικό επιτόκιο για υποχρεώσεις δεν πρέπει να εξαρτάται από τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου συντάξεων, έτσι και η επιλογή των πόρων των συνταξιοδοτικών ταμείων δεν πρέπει να επηρεάζεται από την επιλογή του προεξοφλητικού επιτοκίου για τις συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις.

Κατανομή των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου συντάξεων

Τα περιουσιακά στοιχεία κατανέμονται ανάλογα με τον αν είναι πλήρως χρηματοδοτούμενα (fully funded) ή υποχρηματοδοτούμενα (underfunded), αν οι υποχρεώσεις συνδέονται με την αύξηση των κερδών (pension fund with liabilities linked to earnings growth) και τέλος, αν είναι πλήρως ασφαλισμένα (fully insured pension fund) ή μερικώς ασφαλισμένα (partially insured pension fund).

Όπως μελέτησαν οι *Tepper και Afleck[1974]*<sup>7</sup>, ο *Black [1980]*, και ο *Tepper [1981]*<sup>8</sup> κάτω από το μοντέλο *fully funded*, το σύστημα ΕΕΤ<sup>9</sup> φορολογικών ελαφρύνσεων δίνει στις επιχειρήσεις ένα ισχυρό κίνητρο για πλήρη χρηματοδότηση των συνταξιοδοτικών συστημάτων τους και διακράτηση των ομολόγων στα ασφαλιστικά τους ταμεία. Ενώ οι *Sharpe και Harrison [1983]*<sup>10</sup> και *Ippolito [1986]*<sup>11</sup>, κάτω από το μοντέλο *underfunded*, προέβλεψαν ότι μια εταιρεία σε οικονομική δυσπραγία έχει κίνητρα για να χρηματοδοτήσει το συνταξιοδοτικό της σύστημα και να ακολουθήσει μια επικίνδυνη επενδυτική στρατηγική αφού επενδύει σε μετοχές, περισσότερο απ' ό,τι σε ομόλογα.

Στα πλήρως ασφαλισμένα συνταξιοδοτικά ταμεία υπάρχει η άποψη ότι οποιαδήποτε αλλαγή στην εταιρική συνταξιοδοτική χρηματοδότηση δε θα αλλάξει την παρούσα

---

<sup>6</sup> *Corporate pension policy: An empirical investigation, Financial Analysts Journal [1985]*

<sup>7</sup> *Pension plan liabilities and corporate financial strategies. Journal of Finance [1974]*

<sup>8</sup> *Taxation and corporate pension policy. Journal of Finance [1981]*

<sup>9</sup> σύστημα φορολογικών ελαφρύνσεων που απαλλάσσει τις εισφορές στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα όπως και τις απόδοσης επενδύσεων για τα περιουσιακά στοιχεία του συνταξιοδοτικού συστήματος από φόρους, αλλά φορολογεί τη σύνταξη στα συστήματα πληρωμών

<sup>10</sup> *Optimal funding and asset allocation rules for defined benefit pension plans, in Bodie, Z. and Shoven J. (Eds) Financial Aspects of the United States Pension System, University of Chicago Press, Chicago [1983]*

<sup>11</sup> *Pensions, Economics and Public Policy, Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois [1986]*

αξία του κόστους, δηλαδή αν ο κίνδυνος των *underfunded* συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων μπορεί να είναι πλήρως ασφαλισμένος, τότε η πολιτική συνταξιοδοτικής χρηματοδότησης δεν είναι εφαρμόσιμη. Αντίθετα, στην μερική ασφάλιση, συνοψίζεται η άποψη του *Bagehot [1972]*<sup>12</sup> ότι οι επιχειρήσεις με αυτού του είδους την ασφάλιση έχουν περισσότερα κίνητρα να χρηματοδοτήσουν τα συνταξιοδοτικά τους συστήματα και να επενδύσουν σε πιο ριψοκίνδυνες μετοχές.

Οι μελέτες που έχουν γίνει γύρω από τα περιουσιακά στοιχεία και τις υποχρεώσεις των εταιρικών συνταξιοδοτικών ταμείων, έδειξαν την όλο και μεγαλύτερη σχέση τους με την κερδοφορία, την πιστοληπτική ικανότητα και τον αριθμό των μετοχών που έχει η εταιρεία.

### *Κερδοφορία*

Ο *Bodie, et al. [1985]* βρήκαν ότι οι περισσότεροι κερδοφόροι επιχειρήσεις τείνουν να χρησιμοποιούν χαμηλότερο επιτόκιο προεξόφλησης για την εκτίμηση των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υπερεκτίμηση των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων σε σύγκριση με άλλες λιγότερο κερδοφόρες επιχειρήσεις. Θεωρούν, επίσης, ότι οι πιο κερδοφόρες επιχειρήσεις έχουν περισσότερα περιουσιακά στοιχεία σε σχέση με τις υποχρεώσεις από ό, τι οι λιγότερο κερδοφόρες. Επίσης, αναφέρονται στο γεγονός ότι οι πιο κερδοφόρες εταιρείες έχουν περισσότερα ομόλογα στα συνταξιοδοτικά ταμεία τους που σημαίνει ότι οι εργαζόμενοι κερδοφόρων επιχειρήσεων τείνουν να έχουν πιο ασφαλείς συντάξεις. Ο *Gupta [2000]*<sup>13</sup> διαφώνησε μ' αυτή την άποψη, καθώς θεωρεί ότι τα *underfunded* προγράμματα είναι πιο συντηρητικά ως τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, ενώ αντίθετα τα *overfunded* έχουν μεταξύ τους μεγαλύτερη μεταβλητότητα κινδύνου. Ένα μέσο συνταξιοδοτικό ταμείο, κατά τον *Gupta*, το οποίο είναι *fully funded* έχει 5% πιθανότητα στο τέλος του έτους να κλείσει με ένα επίπεδο χρηματοδότησης στο ύψος του 83% ή λιγότερο. Αυτό συνεπάγεται ότι η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων στο συνταξιοδοτικό ταμείο είναι τέτοια ώστε, κατά τη διάρκεια ενός έτους, να υπάρχει πιθανότητα 5% τα στοιχεία του ενεργητικού να μειωθούν κατά 17% ή και περισσότερο. Η αξία σε κίνδυνο (*value-at-risk*) κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 9,5% και 28%, ποσοστά που αντιστοιχούν σε ταμεία που επενδύουν σε ένα παγκόσμιο χαρτοφυλάκιο ομολόγων, και σε επενδύσεις μετοχών, αντίστοιχα.

Οι *Feldstein και Morck [1983]*<sup>14</sup> βρίσκουν ότι οι αμερικανικές επιχειρήσεις με σημαντικές συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις σε σχέση με τα περιουσιακά τους στοιχεία προσπαθούν να μειώσουν τη σημερινή αξία των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων τους, χρησιμοποιώντας ένα υψηλότερο δείκτη προεξόφλησης. Αντιθέτως,

<sup>12</sup> *Risk and reward in corporate pension funds. Financial Analysts Journal*

<sup>13</sup> *US corporate pension plans: a value at risk analysis Journal of Portfolio Management [2000]*

<sup>14</sup> *Pension funding decisions, interest rate assumptions and share prices, in Bodie, Z. and Shoven, J. (Eds) Financial Aspects of the United States Pension System, University of Chicago Press, Chicago [1983]*

επιχειρήσεις με μεγάλα περιουσιακά στοιχεία σε σχέση με υποχρεώσεις έχουν την τάση να χρησιμοποιούν χαμηλότερο προεξοφλητικό επιτόκιο, προκειμένου να αυξηθούν τα φορολογικά πλεονεκτήματα της άμεσης χρηματοδότησης.

#### *Πιστοληπτική ικανότητα*

Σε μια από τις πρώτες μελέτες που έκανε ο *Bodie [1985]* διαπίστωσε ότι για overfunded συστήματα, μια περαιτέρω αύξηση στο επίπεδο χρηματοδότησης βελτιώνει την πιστοληπτική ικανότητα, ενώ για underfunded συστήματα η περαιτέρω μείωση του επιπέδου χρηματοδότησης μειώνει την πιστοληπτική ικανότητα του προγράμματος.

#### *Τιμή της μετοχής*

Οι *Feldstein και Seligman [1981]<sup>15</sup>*, απέδειξαν ότι υπάρχει επίδραση του συνταξιοδοτικού ελλείμματος μιας επιχείρησης στην τιμή της μετοχής. Επίσης, χρησιμοποιώντας ένα δείγμα των αμερικανικών εταιρειών παραγωγής, βρήκαν ότι η εμφάνιση του ελλείμματος ενσωματώθηκε εγκαίρως στην τιμή της μετοχής, σε σημείο που η τιμή της μετοχής μειώθηκε (σε σχέση με τα ενσώματα πάγια στοιχεία) από το μέγεθος της κάθε μετοχή ξεχωριστά των unfunded συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων.

Οι *Chen και D'Arcy [1986]<sup>16</sup>* υποστηρίζουν ότι οι αξίες των αμερικανικών επιχειρήσεων που χρησιμοποιούν ένα χαμηλό επιτόκιο για την προεξόφληση των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων ξεπερνούν τις κινητές αξίες των επιχειρήσεων, οι οποίες χρησιμοποιούν υψηλότερο επιτόκιο.

Οι *Alderson και Chen [1987]<sup>17</sup>* δείχνουν ότι οι εταιρείες που ανακοινώνουν σχέδια ανάκτησης των συνταξιοδοτικών πλεονασμάτων βιώνουν γενικά μια ανώμαλη αύξηση στην τιμή της μετοχής, δηλαδή τα συνταξιοδοτικά στοιχεία ενεργητικού και υποχρεώσεων είναι ξεχωριστά από εκείνα της εταιρείας.

#### *Τύποι Συνταξιοδοτικών Σχημάτων*

Τα συνταξιοδοτικά ταμεία που θα μελετήσουμε λειτουργούν με το σύστημα των τριών πυλώνων. Σύμφωνα με αυτό ο πρώτος πυλώνας αποτελεί την κοινωνική ασφάλιση απ' την οποία καλύπτονται όλοι. Στην Ελλάδα θεωρείται κύρια ασφάλιση και περιλαμβάνει τα ταμεία του Ι.Κ.Α. καθώς και του Δημοσίου. Εδώ, ισχύει η τριμερής χρηματοδότηση που αναφέρθηκε κατά την εισαγωγή, εργοδότης-εργαζόμενος-κρατικός οργανισμός. Επιπλέον, στον πυλώνα αυτό ανήκει και το

---

<sup>15</sup> *Pension funding, share prices and national savings. Journal of Finance Journal of Finance [1981]*

<sup>16</sup> *Market sensitivity to interest rate assumptions in corporate pension plans Journal of Risk and Insurance [1986]*

<sup>17</sup> *The stockholder consequences of terminating the pension plan. Midland Corporate Finance Journal [1987]*



σύστημα *pay-as-you-go* ή αλλιώς αναδιανεμητικό σύστημα, κατά το οποίο οι εργαζόμενοι πληρώναν για τους συνταξιούχους, καθώς τα λεφτά των ταμείων δεν επαρκούσαν. Στον δεύτερο πυλώνα ανήκουν οι επικουρικές συντάξεις οι οποίες παρέχονται από επαγγελματικά ταμεία. Εδώ, ισχύει η διμερής χρηματοδότηση, καθώς παύει να πληρώνει το κράτος. Ενώ, στον πρώτο πυλώνα ο ασφαλισμένος δεν είχε δικαίωμα επιλογής των παροχών του, εδώ μπορεί να επιλέξει να του κρατείται ένα ποσοστό, για παράδειγμα το 10%. Στον τρίτο πυλώνα έχουμε την ιδιωτική ασφάλιση όπου ισχύει η μονομερής χρηματοδότηση και ο ασφαλισμένος επιλέγει το ασφαλιστικό πρόγραμμα που του ταιριάζει. Εδώ, ισχύει το κεφαλαιοποιητικό σύστημα το οποίο βρίσκεται στον αντίποδα του αναδιανεμητικού προγράμματος, δηλαδή οι ασφαλισμένοι πληρώνονται από τις κρατήσεις που τους έχουν γίνει κατά τη διάρκεια της εργασίας τους.

Τα ασφαλιστικά προϊόντα μπορούν να διαχωριστούν σε προϊόντα καθορισμένης εισφοράς, σε προϊόντα καθορισμένης παροχής και σε υβριδικά προϊόντα. Στα προϊόντα *καθορισμένης εισφοράς (Defined Contribution, DC)* το ποσό της παροχής άρα και η υποχρέωση της εταιρείας, προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την συσσώρευση των αντίστοιχων ασφαλιστρών και την ικανότητα της εταιρείας στην διαχείριση αυτών των ασφαλιστρών και του συσσωρευμένου αποθεματικού. Τα προϊόντα αυτά θεωρούνται η απλούστερη μορφή των συνταξιοδοτικών ταμείων, καθιστώντας τα εύκολα μεταβιβάσιμα μεταξύ των θέσεων εργασίας. Στα προϊόντα *καθορισμένης παροχής (Defined Benefit, DB)*, τα οποία είναι και τα πιο συνηθισμένα, καθορίζεται εξ αρχής η εγγυημένη παροχή, είτε με τη μορφή ετήσιας απόδοσης είτε με τη μορφή ενός ετήσιου ποσού κατά τη λήξη. Το απλούστερο σύστημα καθορισμένης παροχής προσφέρει μια σταθερή σύνταξη κατά τη συνταξιοδότηση, ανεξάρτητα από τα κέρδη ή τις μεταγενέστερες μεταβολές του πληθωρισμού. Τέτοια συστήματα είναι κοινά στη Γερμανία και στις ΗΠΑ. Τα υβριδικά προϊόντα χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη καθορισμένης ελάχιστης παροχής. Επιπλέον, όσο πιο αποδοτική είναι η διαχείριση, τόσο πιο μεγάλη θα είναι η παροχή. Αν η διαχείριση δεν αποβεί ιδιαίτερα αποτελεσματική, η παροχή του ασφαλισμένου θα είναι ίση με την εγγυημένη ελάχιστη απόδοση.

Επίσης, υπάρχουν τα προγράμματα *Beveridgean* που είναι γνωστά στην Αμερική, τα οποία παρέχουν μια επαρκή υποστήριξη για να κρατήσει τους ανθρώπους πάνω από το όριο της φτώχειας, ενώ όσοι επιθυμούν ένα υψηλότερο βιοτικό επίπεδο φροντίζουν να έχουν δικές τους εναλλακτικές λύσεις. Η Γερμανία από την άλλη χρησιμοποιεί τα λεγόμενα *Bismarckian* προγράμματα, τα οποία παρέχουν πολύ πιο γενναϊόδωρη υποστήριξη, συχνά σε επίπεδο που δεν χρειάζεται τα άτομα να προβούν σε πρόσθετες ρυθμίσεις. Μ' αυτό το σύστημα ο πρώτος πυλώνας χρηματοδοτείται από την εισπραξη του φόρου, ένα μέρος του οποίου είναι φόρος κοινωνικής ασφάλισης, από τους εργαζομένους.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η περιγραφή και ανάλυση της έννοιας του κινδύνου σε ένα συνταξιοδοτικό χαρτοφυλάκιο. Ακόμα, παρουσιάζονται κάποιες τεχνικές διαχείρισης και μέθοδοι μέτρησης του. Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα κινδύνου, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι η Διακύμανση (Variance), η Αξία σε Κίνδυνο (Value-at-risk) η Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Value-at-risk) και εν γένει τα Συνεπή Μέτρα Κινδύνου.

### 2.2 Ανάλυση και διαχείριση κινδύνου

Με τον όρο του κινδύνου επιχειρείται να περιγραφεί η κατάσταση κατά την οποία όσοι δραστηριοποιούνται στα πλαίσιά της δεν είναι σε θέση να γνωρίζουν τα ακριβή αποτελέσματα μιας απόφασης. Η έννοια του κινδύνου ενέχει στο εσωτερικό της την πιθανότητα κάποιο από τα αποτελέσματα μιας απόφασης να μην είναι ευνοϊκά και να προκύψουν ζημιές. Μέσω του κινδύνου ίσως εμφανίζεται η μεταβλητότητα κάποιας αναμενόμενης αξίας. Άλλες έννοιες του κινδύνου χρησιμοποιούν τη λέξη αυτή για να υπονοήσουν ενδεχόμενες αρνητικές αποκλίσεις γύρω από κάποια αναμενόμενη τιμή, πολλές φορές χρησιμοποιείται για να περιγραφεί κάποιο μη ευνοϊκό αποτέλεσμα.

Παρά το γεγονός ότι σε διάφορες περιπτώσεις ο κίνδυνος χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται σε όρους μεταβολής των τιμών σε δύο διαφορετικά επίπεδα μελέτης, υποστηρίζεται από πολλούς ότι επειδή ο κίνδυνος σχετίζεται με τη μεταβολή της μελλοντικής αξίας μιας θέσης, λόγω αλλαγής των τιμών της αγοράς ή γενικότερα σε κάποιο αβέβαιο γεγονός, είναι καλύτερο να εξετασθεί ως μελλοντική αξία. Ως εκ τούτου οι τυχαιές μεταβλητές στο σύνολό τους ερμηνεύονται ως πιθανές μελλοντικές τιμές των θέσεων ή των χαρτοφυλακίων που κατέχουν σήμερα.

Γενικότερα, υπάρχουν διάφορες τεχνικές οι οποίες έχουν ως αντικείμενο τη διαχείριση κινδύνου. Ένας οργανισμός πιθανόν να αποφύγει να αναλάβει μια δραστηριότητα που θεωρεί ότι φέρει τον κίνδυνο. Έτσι στρέφεται προς τη μείωση της ενδεχόμενης απώλειας. Όταν δεν αναλαμβάνεται κάποια κίνηση, ώστε ο κίνδυνος είτε να μειωθεί είτε να αποφευχθεί τότε η ενδεχόμενη απώλεια, συνήθως κάποιου μικρού κινδύνου, μπορεί να διατηρηθεί. Απ' την άλλη η αντιστάθμιση του κινδύνου μέσω της ασφάλισής του θεωρείται η καλύτερη τεχνική.

Οι βασικότερες κατηγορίες κινδύνου που αντιμετωπίζουν τα σύγχρονα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι ο κίνδυνος αγοράς και ο πιστωτικός κίνδυνος. Με τον κίνδυνο ρευστότητας, το νομικό κίνδυνο και το λειτουργικό να έπονται αυτών.

Ο **Κίνδυνος αγοράς (market risk)** είναι ο κίνδυνος μείωσης της αξίας των περιουσιακών στοιχείων εξαιτίας αλλαγών στους παράγοντες που διαμορφώνουν την αγοραία αξία. Οι δύο βασικότερες κατηγορίες είναι ο συναλλαγματικός κίνδυνος και ο κίνδυνος επιτοκίων.

Ο **συναλλαγματικός κίνδυνος** συνδέεται με απώλειες οικονομικής φύσεως που δύναται να προκληθούν από μεταβολές στη συναλλαγματική ισοτιμία. Σε αυτήν την περίπτωση εκτίθενται όλες οι επιχειρήσεις που επιδεικνύουν οποιοδήποτε βαθμό εισαγωγικής/εξαγωγικής δραστηριότητας ή ακόμα και εκείνες που διαθέτουν κάποιο από τα στοιχεία του ισολογισμού τους σε ξένο νόμισμα και πρέπει να διενεργούν αποτίμηση στο εκάστοτε νόμισμα κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Η σημαντικότητα αυτού του κινδύνου έγκειται στο ότι απρόβλεπτες μεταβολές μιας συναλλαγματικής ισοτιμίας μπορούν να απειλήσουν την κερδοφορία της επιχείρησης ή ακόμα και την οικονομική της βιωσιμότητα.

Ο **επιτοκιακός κίνδυνος** αναφέρεται στις απώλειες που προκαλούνται από ενδεχόμενες μεταβολές στις τιμές των επιτοκίων. Πρόκειται για διαφορά μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού, όσον αφορά το χρόνο επανατιμολόγησης των τοκοφόρων στοιχείων του ισολογισμού.

Ο **Πιστωτικός κίνδυνος (credit risk)** είναι ο κίνδυνος απώλειας μιας χρηματικής αμοιβής ενός επενδυτή, που οφείλεται στην αδυναμία ενός δανειστή να αποπληρώσει ένα δάνειο ή να εκπληρώσει μία συμβατική του υποχρέωση. Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι στενά συνδεδεμένος με την αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης, με τα ομόλογα να αποτελούν το πιο αξιοσημείωτο παράδειγμα. Όσο υψηλότερος είναι ο αντιληπτός πιστωτικός κίνδυνος, τόσο υψηλότερα θα είναι τα απαιτούμενα επιτόκια. Οι επενδυτές αντισταθμίζουν τον πιστωτικό κίνδυνο μέσω της απαίτησης καταβολής τόκων από τη μεριά του οφειλέτη.

Οι απώλειες των επενδυτών περιλαμβάνουν:

- χαμένα κεφάλαια
- μη εισπραχθέντες τόκους
- μειωμένες ταμειακές ροές και
- αυξημένα εισπρακτικά κόστη.

Ο **Κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk)** είναι η αβεβαιότητα έγκαιρης ρευστοποίησης μίας επένδυσης, όταν δεν μπορεί να πωληθεί αρκετά γρήγορα για να αποτρέψει ή να μετριάσει μία απώλεια κεφαλαίου. Ενώ, δηλαδή μία επένδυση μπορεί να είναι αναγκαίο να πωληθεί άμεσα, μία αναποτελεσματική δευτερογενής αγορά μπορεί να αποτρέψει την ρευστοποίηση ή να περιορίσει τα κεφάλαια που παράγονται από αυτή. Μερικά περιουσιακά στοιχεία είναι πολύ εύκολο να ρευστοποιηθούν με μικρό κίνδυνο όπως για παράδειγμα οι μετοχές ανώνυμων εταιριών, ενώ άλλα εμπεριέχουν μεγάλο κίνδυνο, όπως είναι τα ακίνητα.

Ο **νομικός κίνδυνος** πηγάζει από την έλλειψη συμμόρφωσης των διαδικασιών μιας εταιρείας με τις νόμιμες ή κανονιστικές υποχρεώσεις. Ο νομικός κίνδυνος, επίσης,

μπορεί να προκύψει όταν τα δικαιώματα δύο πλευρών σε μία συναλλαγή υπόκεινται σε αμφισβήτηση.

Τέλος, ο *Λειτουργικός κίνδυνος (operational risk)* προκύπτει από κάποια ανεπαρκή ή αποτυχημένη εσωτερική διαδικασία, από ανθρώπινο λάθος ή δόλο, από δυσλειτουργία του συστήματος ή από άλλους λειτουργικούς εξωγενείς παράγοντες. Το πρωταρχικό μέλημα για τον εντοπισμό του λειτουργικού κινδύνου είναι ο εντοπισμός των ατελών διαδικασιών εξαιτίας των οποίων έχουν επέλθει ή δύναται να επέλθουν απώλειες σε κάποιο ασφαλιστικό οργανισμό, κάτι που τον κάνει δύσκολο να μετρηθεί.

### 2.3 Μέτρηση Κινδύνου

Μέχρι και τις αρχές της δεκαετίας που διανύουμε, υπήρχαν πολλές παρεξηγήσεις σχετικά με τη φύση των κινδύνων που σχετιζόνταν με το κάθε χαρτοφυλάκιο, αφού οι διαχειριστές του είχαν μεν την ευθύνη να αναφέρουν τους κινδύνους επακριβώς, αλλά μόνο απέναντι στους πελάτες τους. Οι αναλογιστές προκειμένου να μετρήσουν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου που διαχειρίζονταν, λάμβαναν υπόψη ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα καθώς επίσης και ένα συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας. Έτσι, λοιπόν, σ' ένα χαρτοφυλάκιο απαιτείται η λεπτομερής μοντελοποίηση των βραχυπρόθεσμων κινδύνων με ένα υψηλό επίπεδο ακρίβειας. Προκειμένου να αναλυθεί εκτενέστερα ο τρόπος αλληλεπίδρασης των παραπάνω μεμονωμένων κινδύνων σε επίπεδο επιχείρησης και πόσο επηρεάζουν τις επιδόσεις της επιχείρησης, γίνεται χρήση των μέτρων κινδύνου. Το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή καθαρών ροών (Profit and losses, P&L) και γι' αυτό το λόγο αγνοείται η διαφορά χρηματικών ποσών μεταξύ διαφορετικών χρονικών περιόδων, παρ' όλο που για μικρά διαστήματα και ενιαίο συνάλλαγμα μπορεί να είναι αποδεκτές. Λόγω της χρησιμοποίησης ποσοστημορίων απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή σε ασυνέχειες που πιθανόν να έχει το δείγμα. Από αυτήν την κατανομή μπορούν να προκύψουν διάφορες μορφές μέτρησης του κινδύνου. Μια πρώτη, αλλά ζωτικής σημασίας, μέτρηση του κινδύνου κατά την *C. Alexander [2008]*<sup>18</sup> είναι κατά πόσο η μελλοντική αξία του ανήκει ή δεν ανήκει σε ένα υποσύνολο αποδεκτών κινδύνων, δηλαδή η εύρεση της *τυπικής απόκλισης* του ποσοστού απόδοσης μιας επένδυσης. Εξαιτίας των παραπλανητικών αποτελεσμάτων που παρουσίαζε οδηγηθήκαμε στον πλέον πιο διαδεδομένο τρόπο μέτρησης του κινδύνου που είναι η *Αξία σε Κίνδυνο (Value-At-Risk, VaR)*, η οποία χρησιμοποιείται για την ποσοτική μέτρηση του κινδύνου, η *Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Value-At-Risk, CVar)* που χτίζεται πάνω στην αξία σε κίνδυνο, αλλά επικεντρώνεται περισσότερο στις δυνητικές απώλειες μιας επένδυσης και τέλος, τα *Συνεπή Μέτρα Κινδύνου (Coherent Risk Measures)*.

---

<sup>18</sup> *Market Risk Analysis, Wiley [2008]*

Σύμφωνα με τους *Acerbi, Nordio, Sirtori [2008]*<sup>19</sup> για να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο (Value-At-Risk, *VaR*) πρέπει να επιλέξουμε τις χειρότερες περιπτώσεις ενός συγκεκριμένου επιπέδου εμπιστοσύνης και μια περίοδο διακράτησης κατά την οποία έχουν γίνει οι κατάλληλοι υπολογισμοί των κερδών και ζημιών (Profit & Losses). Χρησιμοποιείται πολύ συχνά τόσο στη μέτρηση του κινδύνου των τραπεζών όσο και στη διαχείριση των περιουσιακών στοιχείων.

Δεδομένου ενός διαστήματος εμπιστοσύνης  $\alpha \in [0,1]$ , η αξία σε κίνδυνο  $VAR_\alpha$  στο επίπεδο  $\alpha$  είναι η μέγιστη απώλεια κατά τη διάρκεια ενός προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος με πιθανότητα  $\alpha$ . Η  $VAR_\alpha$ , δηλαδή, αντιστοιχεί στην χαμηλότερη τιμή του συνόλου  $F_X^{-1}$ :

$$VAR_\alpha(X) = \inf\{-F_X^{-1}(\alpha)\},$$

όπου  $F_X^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $F_X$  που αντιστοιχεί στο  $\alpha$ -ποσοστημόριο της δεξιάς ουράς της κατανομής.

Συχνά, η αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται για χρονική περίοδο μιας ημέρας που ονομάζεται περίοδος διακράτησης (holding period) και είναι πολύ σημαντική διότι όσο αυξάνεται, μεγαλώνει και η αξία σε κίνδυνο. Συνήθως, εκτιμάται με 95% ή 99% διάστημα εμπιστοσύνης. Από μαθηματικής απόψεως σύμφωνα με την *C. Alexander [2008]* το 99% (αντίστοιχα και το 95%) διάστημα εμπιστοσύνης σημαίνει ότι το 1% της αξίας σε κίνδυνο μιας ημέρας που αντιστοιχεί σε 99% διάστημα εμπιστοσύνης είναι η μέγιστη απώλεια που αναμένεται να έχει ένα χαρτοφυλάκιο με συχνότητα 1% των χειρότερων γεγονότων κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Το άθροισμα των value-at-risk παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη συνολική έκθεση σε κίνδυνο που αντιμετωπίζει ένα συνταξιοδοτικό ταμείο καθώς και την επάρκεια των κεφαλαίων του.

Οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο είναι οι παραμετρικές μέθοδοι, οι μη παραμετρικές (Ιστορικής προσομοίωσης και Monte Carlo) και οι ημιπαραμετρικές (Extreme Value Theory). Στις παραμετρικές γίνεται η υπόθεση ότι οι αποδόσεις κατανέμονται κανονικά, εκτιμάται η διακύμανση και επιλέγεται ένα επίπεδο εμπιστοσύνης και μια περίοδος διακράτησης. Στις ημιπαραμετρικές επιλέγεται η περίοδος διακράτησης, χωρίς να γίνει κάποια υπόθεση κανονικότητας για τις αποδόσεις και η αξία σε κίνδυνο αποτελεί την τιμή, από τις ταξινομημένες, που αντιστοιχεί στο επιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Εδώ, ο έλεγχος καταλληλότητας του υποδείγματος μπορεί να γίνει με βάση το μοντέλο *backtesting* (μετράται ο ρυθμός αποτυχιών και ελέγχεται αν ο αριθμός των παραβιάσεων είναι αρκετά μικρός με την προσομοίωση Monte Carlo) και το *stresstesting* (γίνεται έλεγχος των εκτιμήσεων μέτρων κινδύνου βάσει ακραίων σεναρίων των παραγόντων κινδύνου των αποδόσεων, αφού πραγματοποιηθεί η έκθεση του μοντέλου σε δεδομένα διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν). Σε μεγάλες επιχειρήσεις

---

<sup>19</sup> *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management [2008]*

απαιτείται η μέτρηση της αξίας σε κίνδυνο και της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο με τη χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo.

Παρόλο που η αξία σε κίνδυνο μετράται με τη χρήση απλών μοντέλων, όπως είναι το κανονικό γραμμικό, το άθροισμα των παραγόντων της δεν είναι μεγαλύτερο από τη συνολική αξία σε κίνδυνο (υποπροσθετικότητα). Γι' αυτό τα μεγαλύτερα συνταξιοδοτικά ταμεία χρησιμοποιούν μια άλλη μέτρηση για τον κίνδυνο που σχετίζεται με την Value-at-risk, με τη διαφορά ότι καλύπτει τον παραπάνω ισχυρισμό περί υποπροσθετικότητας. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η *Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Value-At-Risk, CVAR)* είναι η αναμενόμενη απόδοση πέρα από την αξία σε κίνδυνο, δεδομένου ενός επιπέδου εμπιστοσύνης. Υπάρχουν δύο μετρήσεις για την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο (*CVAR*) που εξαρτώνται από το αν η αξία σε κίνδυνο μετράται σύμφωνα με ένα σημείο αναφοράς ή όχι. Η *100<sub>α</sub>% κ-ημέρας Αναμενόμενη Ουρά της Ζημιάς* είναι (*Expected Tail Loss, ETL*) η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο που ορίζεται ως:

$$ETL_{\kappa,a}(X) = -E\{X_{\kappa} | X_{\kappa} < -VAR_{\kappa,a}\} * P,$$

όπου,  $X_{\kappa}$  είναι η προεξοφλημένη απόδοση χαρτοφυλακίου της κ-ημέρας,  $VAR_{\kappa,a}$  είναι η  $100_{\alpha}\%$  κ-ημέρας αξία σε κίνδυνο εκφρασμένο ως ποσοστό της αξίας χαρτοφυλακίου και  $P$  είναι η τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου.

Το *100<sub>α</sub>% κ-ημέρας Αναμενόμενο Έλλειμμα (Expected Shortfall, ES)* είναι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο αναφοράς που ορίζεται ως:

$$ES_{\kappa,a}(X) = -E(\tilde{X}_{\kappa} | \tilde{X}_{\kappa} < -BVAR_{\kappa,a}) * P,$$

όπου,  $X_{\kappa}$  είναι η προεξοφλημένη εν ενεργεία απόδοση χαρτοφυλακίου,  $BVAR_{\kappa,a}$  είναι η  $100_{\alpha}\%$  κ-ημέρας αξία σε κίνδυνο με ένα σημείο αναφοράς εκφρασμένο ως ποσοστό της αξίας χαρτοφυλακίου.

Η διαφορά μεταξύ Αξίας σε Κίνδυνο, Αναμενόμενη Ουρά της Ζημιάς, και Αναμενόμενου Ελλείμματος έγκειται στη διαφορά μεταξύ της ακριβούς ζημιάς του χαρτοφυλακίου και της σχετικής ζημιάς του, εκφρασμένες σε παρούσες αξίες. Έτσι έχουμε:

- 1% VaR στο χαρτοφυλάκιο αντιστοιχεί στη 10<sup>η</sup> μεγαλύτερη ζημιά
- 1% ETL είναι ο μέσος όρος των 10 μεγαλύτερων ζημιών
- 1% ES είναι ο μέσος όρος των 10 μεγαλύτερων σχετικών ζημιών.

Έχουν καθοριστεί διάφορα βήματα για την οικοδόμηση της αξίας σε κίνδυνο, τα οποία συνοψίζονται στα παρακάτω:

- Ερμηνεία του χαρτοφυλακίου και προσδιορισμός των παραγόντων κινδύνου. Κάποια χαρτοφυλάκια χαρακτηρίζονται ότι κρατούν περιουσιακά στοιχεία και τα μακροπρόθεσμα χαρτοφυλάκια χαρακτηρίζονται για τα βάρη που έχουν.
- Τοποθέτηση των βασικών παραμέτρων του μοντέλου, όπου για τη αξία σε κίνδυνο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης και η περίοδος διακράτησης.

- Καθορισμός του εκάστοτε παράγοντα κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή τη δημιουργία ενός μοντέλου κέρδους-ζημίας (P&L) ως μια συνάρτηση των απόλυτων ή ποσοστιαίων αποδόσεων στους παράγοντες κινδύνου.
- Μοντελοποίηση κίνδυνος αξιολόγηση των παραγόντων κινδύνου. Η αξία σε κίνδυνο χρησιμοποιεί τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις την ιστορική, τη γραμμική και τη Monte Carlo προσέγγιση. Η ιστορική προσέγγιση χρησιμοποιεί έναν εμπειρικό παράγοντα κινδύνου χωρίς να αναλαμβάνει κάποια ειδική παραμετρική μορφή, η γραμμική προσέγγιση είναι πολύ αναλυτική και η Monte Carlo είναι πολύ ευέλικτη και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο χαρτοφυλακίου. Απ' την άλλη το γραμμικό μοντέλο εφαρμόζεται αυστηρώς μόνο στα γραμμικά χαρτοφυλάκια και μπορεί να γενικευτεί σε παραμετρικές κατανομές όπως είναι η Student ή μίξη κανονικών κατανομών, η ιστορική στηρίζεται στην παραδοχή ότι το μέλλον θα εξελιχθεί σύμφωνα με το παρελθόν, και η Monte Carlo είναι ανεπαρκής χωρίς εξελιγμένες μεθόδους δειγματοληψίας και πολλές φορές εμφανίζει λάθη προσομοίωσης. Από κοινού η κανονική προσέγγιση και η Monte Carlo υποθέτουν μια συναρτησιακή μορφή για την πολυμεταβλητή στοχαστική διαδικασία, κατά την οποία οι παράγοντες κινδύνου δε συσχετίζονται μεταξύ τους ούτε μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό, αλλά θεωρούν ότι οι αποδόσεις τους συνδέονται μεταξύ τους σε συγκεκριμένα διαστήματα στο χρόνο. Αντίθετα, η ιστορική προσέγγιση χρησιμοποιεί τις αποδόσεις κινδύνου μιας εμπειρικής κατανομής, χωρίς να κάνει χρήση κάποιας παραμετρικής μορφής. Λαμβάνει υπόψη μόνο τις μεταβολές και εξαρτήσεις του κινδύνου από τα ιστορικά στοιχεία του δείγματος.
- Επανεκτίμηση του χαρτοφυλακίου για κάθε πραγματοποίηση του κινδύνου, λόγω της παραδοχής περί εξισορρόπησης του χαρτοφυλακίου ώστε να διατηρηθούν σταθερές οι ευαισθησίες του κινδύνου.
- Δημιουργία μιας συνάρτησης για την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα σε μερικές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η κατανομή κέρδους-ζημίας (όπως στα επιτόκια) και σε άλλες η κατανομή των αποδόσεων.
- Καταλήγουμε στον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο και της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο. Η 100α% κ-ημέρας αξία σε κίνδυνο είναι το  $a$  ποσοστημόριο της προεξοφλημένης κατανομής της κ-ημέρας. Αν φτιάξουμε μια κατανομή καθαρών ροών τότε μετράμε την αξία σε κίνδυνο, αλλιώς αν φτιάξουμε μία κατανομή αποδόσεων η αξία σε κίνδυνο εκφράζεται ως ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Συμπερασματικά, η αξία σε κίνδυνο και η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο παρουσιάζουν σαφήνεια και απλότητα στην εφαρμογή τους, έχουν εφαρμογή σε ετερογενή προϊόντα, χρειάζονται ελάχιστα προαπαιτούμενα για τις ρυθμιστικές αρχές των αναπτυγμένων χωρών, αλλά παρουσιάζουν ασάφεια σε υψηλή μεταβλητότητα και είναι ανεπαρκή για τα σύγχρονα ευμετάβλητα χαρτοφυλάκια. Η αξία σε κίνδυνο χρησιμοποιείται σε κάθε χρηματοπιστωτικό μέσο και εκφράζεται στην ίδια μονάδα μέτρησης. Ο μόνος λόγος απόρριψης της αξίας σε κίνδυνο είναι ότι δε συμπεριφέρεται σωστά όταν έχουμε πολλαπλούς κινδύνους ακόμα κι όταν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και δεν ενθαρρύνει μεθόδους διαφοροποίησης καθώς δε λαμβάνει υπόψη τις οικονομικές συνέπειες των γεγονότων τις πιθανότητες των

οποίων ελέγχει. Επίσης δεν έχει εφαρμογή όταν η απώλεια έχει ήδη συμβεί. Η Expected Shortfall λαμβάνει υπόψη της την υπό συνθήκη κατανομή των 5% χειρότερων γεγονότων, ενώ η Value-at-risk όχι. Η αξία σε κίνδυνο είναι πιο γνωστό χρησιμοποιούμενο μέτρο από την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο, αλλά δεν είναι *Συνεπές Μέτρο Κινδύνου*. Η Expected Shortfall είναι το μοναδικό συνεπές μέτρο κινδύνου, το οποίο χρησιμοποιείται για τη λεπτομερή ανάλυση της διαχείρισης κινδύνου.

## 2.4 Συνεπή μέτρα κινδύνου

Μέτρο κινδύνου είναι ένας αριθμός που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την αβεβαιότητα σε μια κατανομή, όπως είναι για παράδειγμα, η μεταβλητότητα η οποία συνοψίζει τη διασπορά σε όλο το φάσμα της κατανομής.

Στη διαχείριση χαρτοφυλακίου χρησιμοποιείται το μέτρο κινδύνου που έχει σχετικό κίνδυνο προσαρμοσμένο στο μέτρο απόδοσης και κατατάσσει τις επενδύσεις σύμφωνα με μια συνάρτηση χρησιμότητας. Υποθέτουμε μια επένδυση  $X_1$  που είναι μεγαλύτερη από μια  $X_2$  στο βαθμό που η πιθανότητα απόδοσης της επένδυσης  $X_1$  να ξεπεράσει κάποια σταθερή αξία της επένδυσης  $X_1$  δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη της  $X_2$ . Κάθε ορθολογικός επενδυτής θα προτιμούσε την επένδυση  $X_1$  από τη  $X_2$ . Παρ' όλα αυτά έχουν προστεθεί κάποιες βασικές μετρήσεις κινδύνου που δε διατηρούν αυτή την άποψη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο επενδύσεις  $X_1$  και  $X_2$  όπου ο δείκτης του  $X_1$  θα είναι μικρότερος του  $X_2$  ακόμα κι αν ο  $X_1$  κυριαρχεί ασθενώς στοχαστικά του  $X_2$ . Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω ιδιότητα ως μία από τα πολλά αξιώματα που θα πρέπει να ικανοποιούνται από ένα "καλό" μέτρο κινδύνου. Ακολουθώντας χρησιμοποιούμε ένα μέτρο  $\rho$  για να υποδηλώσουμε ένα αυθαίρετο μέτρο κινδύνου.

*Ένα Συνεπές Μέτρο Κινδύνου  $\rho$  είναι μια συνάρτηση που αναθέτει αριθμούς  $\rho(X_1), \rho(X_2)$ , σε δύο τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2$  τέτοιες ώστε για κάθε ζεύγος  $X_1, X_2$ , ανεξάρτητο ή μη και για κάθε  $a$  και  $\lambda > 0$  να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- *Translation Invariance:*

$$\rho(X_1 + a \cdot r) = \rho(X_1) - a,$$

όπου,  $X_1$  το αποτέλεσμα που προκύπτει από ένα περιουσιακό στοιχείο,  $r$  ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο σταθερού ποσού με  $r > 1$  και  $a$  το ποσό που επενδύουμε στο ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο  $r$ . Υποθέτοντας ότι χωρίζουμε το κεφάλαιο που διαθέτουμε σε μια επένδυση  $X_1$  και σε ένα ποσό  $a$ , τότε η παραπάνω σχέση είναι το καθαρό κεφάλαιο κινδύνου. Το αξίωμα αυτό σημαίνει ότι οι ζημιές μειώνονται κατ' αναλογία του ποσού που επενδύεται στο χωρίς κίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Επίσης, υπάρχει ο ισχυρισμός ότι ο κίνδυνος μιας θέσης



μειώνεται κατά οποιοδήποτε ποσό επενδύόμενο σε ακίνδυνο επιτόκιο, δηλαδή θέτοντας  $\rho(X_1) = \alpha$ , έχουμε  $\rho(X_1 + \rho(X_1) \cdot r) = 0$ , το οποίο δικαιολογεί την απαίτηση του κεφαλαίου  $\rho(X_1)$  να καλύψει τους κινδύνους μιας απαίτησης.

Όπως είδαμε παραπάνω, η διαφοροποίηση μειώνει τον κίνδυνο, αφού συνδυάζοντας δύο κινδύνους δε δημιουργείται επιπρόσθετη απώλεια. Έτσι, ο κίνδυνος ενός διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου δεν πρέπει να υπερβαίνει τον κίνδυνο των συνιστωσών του:

- *Υποπροσθετικότητας (Subadditivity):*

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Η υποπροσθετικότητα, στην πραγματικότητα ενσαρκώνει με μαθηματικούς όρους, σύμφωνα με τους Acerbi, Nardio, Sirtori [2008], τη μείωση των κινδύνων που σχετίζονται με την έννοια της διαφοροποίησης. Το αξίωμα αυτό δηλώνει ότι η συγχώνευση δύο θέσεων δε δημιουργεί επιπλέον κινδύνους και εξασφαλίζει ότι η μέτρηση κινδύνου έχει λογική όταν προσθέσουμε δύο θέσεις. Διαβεβαιώνεται έτσι ότι ο κίνδυνος ενός διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου δεν ξεπερνά τον αντιστοιχο σταθμισμένο μέσο όρο του εκάστοτε κινδύνου. Χωρίς το αξίωμα της υποπροσθετικότητας δε θα υπήρχαν κίνητρα να κρατηθεί ένα χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος της διακράτησης δύο κεφαλαίων με παράγοντα 1, οι οποίες μπορούν να συμπεριληφθούν στον κίνδυνο, λαμβάνοντας υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των κεφαλαίων, είναι μεγαλύτερος από το να κρατηθεί ο κίνδυνος δύο κεφαλαίων  $X_1, X_2$  με παράγοντα 1, 2 αντίστοιχα χωρίς να συμψηφιστούν οι θέσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, αν το μέτρο αυτό δεν ικανοποιούνταν τότε ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο που επιθυμεί να αναλάβει τους κινδύνους  $X_1$  και  $X_2$ , ανοίγει δύο λογαριασμούς έναν για τον  $X_1$  και έναν για τον  $X_2$  έχει ως αποτέλεσμα την επιβάρυνση της μικρότερης απαίτησης του περιθωρίου των  $\rho(X_1) + \rho(X_2)$  κάτι το οποίο πλήττει τη συναλλαγή. Επίσης, εάν μια εταιρεία αναγκαστεί να καλύψει την απαίτηση των επιπλέον κεφαλαίων που δεν ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα, τότε θα μπορούσε να έχει κίνητρο για να τα σπάσει σε δύο χωριστά και να τα ενσωματώσει σε θυγατρικές. Επιπλέον, ο κίνδυνος πτώχευσης προδιαθέτει μια κοινωνία να απαιτεί λιγότερα κεφάλαια από μια ομάδα που δεν προστατεύεται μεταξύ των διαφόρων επιχειρήσεων, απ' ότι χρειάζεται όταν μία μονάδα προστατεύεται από την ευθύνη που επισυνάπτεται στην αποτυχία της άλλης.

Μια ειδική περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία δεν υπάρχουν επιδράσεις διαφοροποίησης και ο κίνδυνος αυξάνεται με την ίδια κλίμακα αύξησης της επένδυσης

- *Θετικής Ομοιογένειας (Positive homogeneity):*

$$\rho(\lambda \cdot X_1) = \lambda \rho(X_1)$$

Υπάρχουν πολλοί αναλυτές που θεωρούν ότι διπλασιάζοντας το στοιχείο, διπλασιάζεται και ο κίνδυνος. Το αξίωμα αυτό θεωρεί ότι ο κίνδυνος της κάθε

θέσης θα πρέπει να είναι ανάλογος αυτής. Αν το μέγεθος της θέσης επηρεάζει άμεσα τον κίνδυνο τότε θα πρέπει να εξεταστούν οι συνέπειες της έλλειψης ρευστότητας κατά τον υπολογισμό της καθαρής παρούσας αξίας της θέσης. Λαμβάνοντας αυτό κατά νου, τα αξιώματα της υποπροσθετικότητας και της θετικής ομοιογένειας οι αντιστοιχίες των τυχαίων μεταβλητών σε πραγματικές, παραμένουν λογικές. Δηλώνεται, λοιπόν, ότι οι προτιμήσεις κινδύνου δεν έχουν να κάνουν με τα μέτρα κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι κινδυνόφοβες ή κινδυνόφιλες συμπεριφορές παρουσιάζουν ανομοιογένεια κάτι που στηρίζεται στο ότι η οριακή χρησιμότητα του πλούτου τυπικά εξαρτάται από το επίπεδο του πλούτου. Είναι το μόνο από τα τέσσερα συνεπή μέτρα που θεωρούν τον κίνδυνο ως μέτρο αβεβαιότητας απ' ότι αντιλαμβάνεται ένας διαχειριστής κινδύνου. Το αξίωμα της υποπροσθετικότητας υπονοεί ότι  $\rho(nX) \leq n\rho(X)$  για  $n = 1, 2, \dots$ . Στο αξίωμα της ομοιογένειας έχει επιβληθεί η αντίστροφη ανισότητα και απαιτείται ισότητα για όλα τα θετικά, ώστε να μοντελοποιηθεί αυτό που μια κυβέρνηση ή ένα χρηματιστήριο μπορεί να επιβάλουν σε μια κατάσταση όπου δεν μπορεί να συμβεί συμψηφισμός ή διαφοροποίηση, ιδίως επειδή η κυβέρνηση δεν εμποδίζει τις επιχειρήσεις να λαμβάνουν όλες την ίδια θέση. Το αξίωμα της translation invariance καθώς και της θετικής ομοιογένειας εξασφαλίζουν ότι η συνάρτηση κινδύνου είναι κυρτή κάτι που είναι συνεπές με την αποστροφή στον κίνδυνο αυτών που κάνουν χρήση τέτοιων μέτρων. Το αξίωμα της ομοιογένειας καθώς και της ακίνδυνης μεταφοράς ορίζουν ότι για κάθε  $a$ , ισχύει  $\rho(a \cdot (-r)) = a$ .

Συγκρίνοντας δύο περιουσιακά στοιχεία με το πρώτο να έχει μεγαλύτερο ορίζοντα εξόφλησης απ' ότι το δεύτερο, γίνεται φανερό ότι οι επακόλουθες ζημιές άρα και ο κίνδυνος θα είναι μικρότερες.

- *Μονοτονικότητας (Monotonicity):* Για όλα τα  $X_1, X_2$ , αν  $X_1 \geq X_2$  ισχύει :

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2).$$

Η μονοτονικότητα ορίζει ότι αν οι ζημιές  $X_1$  είναι πάντα μεγαλύτερες των  $X_2$ , τότε οι  $X_2$  πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο επικίνδυνες όσο οι  $X_1$ . Οι τυχαίες μεταβλητές υποτίθεται ότι οριοθετούνται και η σχέση  $X_1 \geq X_2$  σημαίνει ότι  $X_1^l \leq X_2^l$  για σχεδόν όλα τα  $l \in \Omega$ . Οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται ως ζημιές, γι' αυτό μια θετική τιμή συνεπάγεται ζημιά, ενώ μια αρνητική τιμή συνεπάγεται καθαρό κέρδος. Με την υπόθεση αυτή το πρώτο αξίωμα  $X_1 + a \cdot r$  υποδηλώνει ότι οι ζημιές μειώνονται επενδύοντας μια θετική ποσότητα  $\lambda$  σ' ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο, ή αυξάνονται αν το  $\lambda$  είναι ένας αρνητικός δανεισμός σε επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το αξίωμα αυτό αποκλείει τη μέτρηση κινδύνου που ορίζεται από  $\rho(X) = -E_p[X] + a\sigma_p[X]$ , όπου  $a > 0$  και  $\sigma_p$  υποδηλώνει την τυπική απόκλιση υπολογισμένη με την πιθανότητα  $P$ . Το αξίωμα της υποπροσθετικότητας υποδηλώνει, εδώ, την ημιδιακύμανση του κινδύνου που ορίζεται από  $\rho(X) = -E_p[X] + \sigma_p((X - E_p[X])^-)$ .

Σύμφωνα, με τα παραπάνω ένα μέτρο για να θεωρείται συνεπές πρέπει να ικανοποιεί τα αξιώματα της translation invariance, της υποπροσθετικότητας, της θετικής ομοιογένειας και της μονοτονικότητας. Τέλος, υπάρχει ακόμη ένα αξίωμα

της *συνάφειας (relevance)* κατά το οποίο όλα τα  $X$  με  $X \leq 0$  και  $X \neq 0$ , τότε  $\rho(X) > 0$ . Αυτό το αξίωμα είναι αναγκαίο αλλά όχι επαρκές για να παραμείνουν οι κίνδυνοι συγκέντρωσης απαρατήρητοι. Επίσης, είναι προφανές ότι για  $\lambda > 0$  τα αξιώματα της υποπροσθετικότητας, ομοιογένειας, μονοτονικότητας και συνάφειας παραμένουν ικανοποιητικά από το μέτρο  $\lambda \rho$ , κάτι που δεν ισχύει για το αξίωμα της translation invariance. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η αξία σε κίνδυνο δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου αφού δεν προσαρμόζεται στο αξίωμα της υποπροσθετικότητας, παρ' όλα αυτά όταν οι αποδόσεις της είναι κανονικά κατανομημένες αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου γιατί συμπεριφέρεται σύμφωνα με τη μεταβλητότητα των αποδόσεων.

Δημιουργήθηκε, έτσι, μια συνάρτηση “αλλοίωσης” (distortion function) με σκοπό τη μετατροπή αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής, ώστε μεγαλύτεροι συντελεστές βαρύτητας να αντιστοιχούν σε υψηλότερες ζημιές. Η συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\rho(X_1) = \int_{-\infty}^0 g(1 - F_{X_1}(t)) dt,$$

με  $g$  αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε:  $g: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , με  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ .

Οι *Wirch* και *Hardi* [2001]<sup>20</sup> απέδειξαν ότι μόνο και μόνο όταν η συνάρτηση αλλοίωσης είναι κοίλη, η μέτρηση κινδύνου είναι συνεπής. Συμφώνησαν, επίσης ότι οι κοίλες συναρτήσεις αλλοίωσης είναι ασθενώς συνεπείς, ως αποτέλεσμα της ασθενέστερης διατήρησης των προτιμήσεων ενός ατόμου απρόθυμου να αναλάβει τον κίνδυνο. Το αναμενόμενο έλλειμμα δεν έχει αυστηρώς κοίλη καμπύλη αλλοίωσης, ενώ η κατανομή της value-at-risk δεν είναι κοίλη. Όπως είδαμε παραπάνω, τα μη συνεπή μέτρα κινδύνου όπως είναι η αξία σε κίνδυνο και η τυπική απόκλιση, διατηρούν σπάνια τις προτιμήσεις αυτών που συμμετέχουν στο πρόγραμμα. Ο *Wang* [1996]<sup>21</sup> πρότεινε μια επισκόπηση για τη μέτρηση τέτοιων κινδύνων, η οποία έχει μεγάλη εφαρμογή στον υπολογισμό ασφαλιστρών ενώ δεν είναι ιδιαίτερα γνωστή στην ευρύτερη διαχείριση κινδύνου.

---

<sup>20</sup> *Distortion Risk Measure: Coherence and Stochastic Dominance, working paper, University of Waterloo [2001]*

<sup>21</sup> *“Premium Calculation by Transforming the layer Premium density”, ASTIN Bulletin [1996]*

## Συνεπή Μέτρα Κινδύνου Χρησιμοποιώντας Συναρτήσεις Αλλοίωσης

Μέτρηση Κινδύνου	Συνάρτηση Αλλοίωσης	Περιορισμοί
Beta distortion	$g(X_1) = \int_0^{X_1} \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$	$a \leq 1, b \leq 1$
Proportion Hazard Transform	$g(X_1) = X_1^a$	$a \leq 1$
Dual Power Function	$g(X_1) = 1 - (1 - X_1)^a$	$a \geq 1$
Gini Principle	$g(X_1) = (1 + a)X_1 - aX_1^2$	$0 \leq a \leq 1$
Wang Transform	$g(X_1) = \Phi(\Phi^{-1}(X_1) - \Phi^{-1}(c))$	
Expected Shortfall	$g(X_1) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 1 - c < X_1 \leq 1 \\ \frac{X_1}{1 - c}, & \text{αν } 0 \leq X_1 \leq 1 - c \end{cases}$	
Value-at-risk	$g(X_1) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 1 - c < X_1 \leq 1 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq X_1 < 1 - c \end{cases}$	

με την Value-at-risk να μην αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου, τις συναρτήσεις Proportion Hazard Transform και Dual Power Function να είναι ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης Βήτα. Επίσης,  $c$  δηλώνει το  $c$  ποσοστημόριο της κατανομής  $F_{X_1}$ ,  $\Phi(\cdot)$  την αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής,  $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ . Ο πίνακας δείχνει ότι με  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^0 (X_1 - E(X_1))^2 dF(X_1)$  να δηλώνει τη χαμηλότερη τιμή της ημιδιακύμανσης, η μέτρηση κινδύνου  $\rho(X_1) = -E[X_1] + \alpha \sigma$  με  $0 \leq \alpha \leq 1$  είναι συνεπής.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει η μελέτη ενός μοντέλου βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου, στο οποίο συγκρίνονται οι κατανομές με βάση την αναμενόμενη απόδοση, τη διακύμανση την αξία σε κίνδυνο και την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο για ένα καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

### 3.2 Ανάλυση των μοντέλων *Mean – Variance*, *Mean – Value – at – Risk*

Τα μοντέλα *mean – variance* είναι η παλαιότερη μέθοδος προσέγγισης και χρησιμοποιήθηκε από τον *Markowitz [1952,1959]* για να λύσει το πρόβλημα επιλογής ενός χαρτοφυλακίου. Με τα μοντέλα αυτά οι αποδόσεις των κατανομών συγκρίνονται, λαμβάνοντας υπόψη τη μέση τιμή αλλά και τη διακύμανσή του χαρτοφυλακίου κινδύνων. Η διακύμανση (*variance*) ήταν η πρώτη μέτρηση που χρησιμοποιήθηκε για μοντέλα *mean – variance* και είναι ακόμα και σήμερα η πιο διαδεδομένη μέθοδος μέτρησης κινδύνου, με την Αξία σε Κίνδυνο (*VaR*) και την Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (*CVar*) να ακολουθούν. Η αρχή της διαφοροποίησης είναι το θεμέλιο αυτής της μεθόδου και εξακολουθεί να έχει μεγάλη εφαρμογή στη διαχείριση κινδύνου. Η *mean – variance* ανάλυση θεωρείται από πολλούς η κινητήριος δύναμη της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου και χρησιμοποιείται ευρέως σε σχέδια χρηματοδότησης. Η αξία σε κίνδυνο χρησιμοποιείται περισσότερο για κινδύνους που σχετίζονται με τη δεξιά ουρά της κατανομής, δηλαδή για κινδύνους που παρουσιάζουν εξαιρετικά δυσμενή αποτελέσματα σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Είναι γνωστή για την αποτυχία εφαρμογής της σε μεθόδους διαφοροποίησης και ελέγχει τις αποδόσεις του κινδύνου από την πλευρά της μέγιστης πιθανής απώλειας. Επιπρόσθετα, η βελτιστοποίηση της αξίας σε κίνδυνο οδηγεί, πολλές φορές, σε δυσεπίλυτα προβλήματα, γι' αυτό η προσοχή των αναλυτών στράφηκε προς την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο κινδύνου που κατά κάποιο τρόπο συμπληρώνει την αξία σε κίνδυνο καθώς χρησιμοποιείται για τις ακραίες ζημιές του χαρτοφυλακίου στο βαθμό που το μέγεθος των ζημιών αυτών, ξεπερνούν την αξία σε κίνδυνο. Βελτιστοποιώντας την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο όταν η υπό μελέτη τυχαίες μεταβλητές είναι διακριτές με πεπερασμένο αριθμό αποτελεσμάτων οδηγούμαστε σε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πεπερασμένων διαστάσεων, όπως δηλώνουν οι *Rockafellar και Uryasev [2000,2002]*<sup>22</sup>. Η διακύμανση και η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο αντιπροσωπεύουν δύο τελείως διαφορετικές προοπτικές, καθώς η πρώτη μετρά τις διαφορές μεταξύ των αναμενόμενων τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής και η δεύτερη μετρά τις αναμενόμενες απώλειες που αντιστοιχούν στη δεξιά ουρά της κατανομής κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Έτσι,

---

<sup>22</sup> *Optimization of conditional Value-at-risk*, *J. Risk*, 2000, “*Conditional value-at-risk for general loss distributions*”, *J. Bank Finance*, 2002.

ένα χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από το μοντέλο της *mean-variance* μπορεί να είναι μη-αποδεκτό από κάποιον αναλυτή λόγω της εξαιρετικά μεγάλης υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο, η οποία οδηγεί σε υψηλές απώλειες. Ο δείκτης *Sharpe* χρησιμοποιείται προκειμένου να καθορίσει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο με την υψηλότερη αναλογία απόδοσης προς κίνδυνο και ισούται με το πηλίκο της αναμενόμενης απόδοσης προς τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου [R. Parrák, J. Seidler, 2010]<sup>23</sup>.

Προκειμένου, λοιπόν, να ξεπεραστούν οι παραπάνω ελλείψεις, οι D. Roman, K. Darby-Dowman και G. Mitra [2007]<sup>24</sup> προτείνουν μια προσέγγιση με δύο στάδια βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου και αναλύουν τα χαρτοφυλάκια της διακύμανσης, της αξίας σε κίνδυνο και της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο έχοντας, αρχικά ως στόχο τη βελτιστοποίηση της μέσης απόδοσης, της διακύμανσης, της αξίας σε κίνδυνο και της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο και στη συνέχεια το συνδυασμό τους. Σε πρώτο στάδιο, σκοπός του μοντέλου είναι να χρησιμοποιηθεί ένα μέτρο κινδύνου προκειμένου να γίνει η συλλογή όλων των *αποτελεσματικών* χαρτοφυλακίων (*efficient portfolio*) και στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ο συνδυασμός των μέτρων κινδύνου για να αξιολογηθούν εκ νέου τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Ως *αποτελεσματικά*, κατά τον Zenio [2005]<sup>25</sup>, είναι εκείνα τα χαρτοφυλάκια, τα οποία παρουσιάζουν τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση για ένα δεδομένο ποσό κινδύνου (τυπική απόκλιση) ή ισοδύναμα αυτά που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο για μια δεδομένη αναμενόμενη απόδοση. Ο ίδιος λαμβάνει υπόψη τη διακύμανση για τη μέτρηση των κινδύνων και διατυπώνει ένα μοντέλο βελτιστοποίησης κάνοντας χρήση μητρών για την κατασκευή τέτοιων χαρτοφυλακίων.

Ο D. Roman et al. [2007] στην προσέγγισή τους θεωρούν ότι υπάρχουν  $n$  περιουσιακά στοιχεία με δείκτες απόδοσης  $X_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Οι μέσες τιμές και οι συνδιακυμάνσεις αυτών των τιμών είναι,

$$\mu_i = E(X_i) \quad \text{και} \quad \sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j), \quad \text{για} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Το ποσοστό του επενδυμένου κεφαλαίου είναι:

$$\omega_i = \frac{x_i}{x},$$

όπου  $x_i$  είναι το επενδυμένο κεφάλαιο στα  $i$  περιουσιακά στοιχεία και  $x$  είναι το συνολικό επενδυμένο κεφάλαιο. Θεωρώντας, ότι το χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι:

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),$$

<sup>23</sup> A Simulation Based Comparison in the Czech Crisis Environment [2010]

<sup>24</sup> "Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach", The centre of the Analysis of Risk and Optimization Modeling [2007]

<sup>25</sup> "Practical financial Optimization" [2005]

τότε η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου  $\omega$  είναι:

$$R_\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i,$$

όπου  $R_\omega$  τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής  $F$ , τέτοια ώστε  $F(u) = P(R_\omega \leq u)$  και:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Θεωρούν, επίσης, ότι το σύνολο  $W$  είναι ο συνδυασμός όλων των δυνατών χαρτοφυλακίων:

$$W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \right. \right\}.$$

Η αναμενόμενη απόδοση και η διασπορά του χαρτοφυλακίου αντίστοιχα είναι:

$$\mu_\omega = E(R_\omega) = E\left(\sum_{i=1}^n \omega_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i$$

και

$$\sigma_\omega^2 = \text{Var}(R_\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij},$$

όπου  $\sigma_{ij}$  είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων  $R_i, R_j$ .

Στην προσέγγιση *mean-risk* με μέτρο κινδύνου ίσο με την παράμετρο  $\rho$ , η τυχαία μεταβλητή  $R_\omega$  υπερέχει της τυχαίας μεταβλητής  $R_\gamma$  μόνο όταν  $E(R_\omega) \geq E(R_\gamma)$  και  $\rho(R_\omega) \leq \rho(R_\gamma)$ . Αυτό σημαίνει ότι για ένα συγκεκριμένο επίπεδο της ελάχιστης αναμενόμενης απόδοσης, η τυχαία μεταβλητή  $R_\omega$  παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της, ενώ για ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου παίρνει τη μέγιστη δυνατή αναμενόμενη απόδοση. Διαγραμματικά, το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μας δίνει το αποτελεσματικό σημείο για την προσέγγιση *mean-variance*. Οι αποτελεσματικές λύσεις, του μοντέλου θεωρούνται και κατά Pareto αποτελεσματικές για προβλήματα όπου η αναμενόμενη αποδόσεις παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους και οι κίνδυνοι ελαχιστοποιούνται:

$$\text{Max}\{(E(R_\omega) - \rho(R_\omega)): \omega \in W\}.$$

Εναλλακτικά, αποτελεσματική λύση, κατά *Pareto*, είναι μια εφικτή λύση τέτοια ώστε όταν μια συνάρτηση παίρνει τη βέλτιστη τιμή της, μια άλλη συνάρτηση να λαμβάνει τη χειρότερη. Προκειμένου να βρεθεί ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο, λύνουμε προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής:

Minimize  $\rho(R_\omega)$

τότε  $E(R_\omega) \geq \delta$  και  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in W$

όπου  $\delta$  αναπαριστά το επιθυμητό επίπεδο της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου, ή αλλιώς:

Maximize  $E(R_\omega) - \tau\rho(R_\omega)$ ,  $\tau \geq 0$

τότε  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in W$

όπου  $\tau$  είναι μια παράμετρος αποστροφής κινδύνου, την οποία όταν τη μεταβάλλουμε, επιλύουμε διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης και οδηγούμαστε στην πιο αποτελεσματική.

Στο πρώτο στάδιο, γίνεται η προσπάθεια διατύπωσης των μοντέλων *mean – variance* και *mean – Value – at – risk* με διαφορετικούς κάθε φορά στόχους βελτιστοποίησης. Αρχικά, θεωρούμε ένα συγκεκριμένο ανώτατο όριο,  $\sigma_0^2$ , για τη διακύμανση της απόδοσης ενός επιλεγμένου χαρτοφυλακίου  $\omega$ , τέτοιο ώστε η  $E(R_\omega)$  να παίρνει τη μέγιστη τιμή της για  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2$ :

---

***Optimal Mean-variance Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου.***

---

Maximize  $E(R_\omega)$

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \right. \right\},$$

$$\text{s.t. } \sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2.$$

---

όπου *s.t.* εννοούμε *such that*, δηλαδή τέτοιο ώστε.

Επιπλέον, το μοντέλο *mean – variance* για την επιλογή εκείνου του χαρτοφυλακίου που για ένα δεδομένο επιθυμητό κατώτατο όριο,  $\mu_0$  της μέσης αξίας του χαρτοφυλακίου, η διακύμανση  $\sigma_\omega^2$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$  γίνεται:



---

*Optimal Mean-variance Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της Διακύμανσης του Χαρτοφυλακίου.*

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sigma_{\omega}^2 \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_{\omega}) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

Τέλος, για δεδομένο κατώτατο όριο,  $\mu_0$  της μέσης τιμής ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , ο συνδυασμός της διακύμανσης και της μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι  $\beta\sigma_{\omega}^2 - (1 - \beta)E(R_{\omega})$  και παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν  $E(R_{\omega}) \geq \mu_0$  :

---

*Optimal Mean-variance Model με Στόχο την Από Κοινού Ελαχιστοποίηση της Διακύμανσης και της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου*

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \beta\sigma_{\omega}^2 - (1 - \beta)E(R_{\omega}) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_{\omega}) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

όπου  $\beta$  είναι μια σταθερά που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$ . Για τις δύο ακραίες τιμές του  $\beta$  έχουμε:

- Όταν  $\beta = 1$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο ελαχιστοποίησης της διασποράς.
- Όταν  $\beta = 0$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο μεγιστοποίησης της μέσης απόδοσης.

Στη *mean-VaR* προσέγγιση, χρησιμοποιούμε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , για να προσδιορίσουμε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Όπως και στη *mean-variance* προσέγγιση, έτσι και εδώ, ορίζονται δύο μέθοδοι. Η πρώτη είναι αυτή για την οποία το ανώτατο φράγμα της αξίας σε κίνδυνο,  $q_0$ , ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , με μέση απόδοση  $E(R_\omega)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν  $VaR(\omega) \leq q_0$ :

---

***Optimal Mean-VaR Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου***

---

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } VaR(\omega) \leq q_0. \end{aligned}$$

---

Κατά τον ίδιο τρόπο το δεύτερο μοντέλο ορίζει ότι για δεδομένο κατώτατο όριο της μέσης τιμής  $\mu_0$  ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , η  $VaR(\omega)$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$ :

---

***Optimal Mean-VaR Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της Value-at-risk***

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } VaR(\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_\omega) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

Αντίστοιχα, για δεδομένο κατώτατο όριο,  $\mu_0$  της μέσης τιμής ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , ο συνδυασμός της αξίας σε κίνδυνο και της μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι  $\beta VaR(\omega) - (1 - \beta)E(R_\omega)$  και παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$ :

---

**Optimal Mean-VaR Model με Στόχο την Από Κοινού Ελαχιστοποίηση της VaR και της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου**

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \beta \text{VaR}(\omega) - (1 - \beta)E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_\omega) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

όπου  $\beta$  είναι μια σταθερά που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$ . Για τις δύο ακραίες τιμές του  $\beta$  έχουμε:

- Όταν  $\beta = 1$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο ελαχιστοποίησης της *value - at - risk*.
- Όταν  $\beta = 0$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο μεγιστοποίησης της μέσης απόδοσης.

Μέχρι εδώ έχουμε ασχοληθεί με τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου περιλαμβάνοντας τις μεταβλητές του μοντέλου που καθορίζουν την κατανομή του  $n$ -ιστού περιουσιακού στοιχείου. Ο Zenios [2005] προκειμένου να επεκτείνει το μοντέλο, συμπεριέλαβε και τις υποχρεώσεις του χαρτοφυλακίου έτσι ώστε να αναπτύξει ένα *mean-variance* αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο του πλεονάσματος που δημιουργείται όταν οι υποχρεώσεις αφαιρεθούν από τα περιουσιακά στοιχεία. Θεώρηση, λοιπόν, μία υποχρέωση με απόδοση που δίνεται από μια τυχαία μεταβλητή  $\tilde{\rho}$ . Η απόδοση εξαρτάται από τη μεταβολή της παρούσας αξίας της υποχρέωσης κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα του κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι αν η παρούσα αξία της υποχρέωσης σήμερα είναι  $P_{L_0}$  και η παρούσα αξία στο τέλος του χρονικού ορίζοντα  $T$  δίνεται από την τυχαία μεταβλητή  $\tilde{P}_{L_T}$ , τότε ισχύει:

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{P}_{L_T} - P_{L_0}}{P_{L_0}}$$

Η απόδοση των περιουσιακών στοιχείων μείον τις υποχρεώσεις δίνονται από τη σχέση:

$$R(\omega; \tilde{r}, \tilde{\rho}) = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \omega_i - \tilde{\rho},$$

η αναμενόμενη απόδοση του πλεονάσματος γίνεται:

$$R(\omega; \bar{r}, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \omega_i - \bar{\rho}$$

και η διακύμανση εκφράζεται από τη σχέση:

$$\sigma^2(x) = E \left[ (R(\omega; \tilde{r}, \tilde{\rho}) - R(\omega; \bar{r}, \bar{\rho}))^2 \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^m \sigma_{ii'} \omega_i \omega_{i'} - \sum_{i=1}^n \sigma_{iL} \omega_i + \sigma_L^2$$

Εδώ, η  $\sigma_{iL}$  υποδηλώνει τη συνδιακύμανση της απόδοσης του  $i$ -οστού περιουσιακού στοιχείου με την απόδοση της υποχρέωσης και η  $\sigma_L^2$  τη διακύμανση της υποχρέωσης. Σημειώνεται, σ' αυτό το σημείο, ότι περιουσιακά στοιχεία που έχουν υψηλό βαθμό συσχέτισης με τις υποχρεώσεις μειώνουν τον υπερβάλλον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, ενώ περιουσιακά στοιχεία που συσχετίζονται μεταξύ τους συμβάλλουν στο συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της *mean-variance* ανάλυσης συμπεριλαμβανομένων των υποχρεώσεων είναι σε δείκτες παρακολούθησης (tracking market indices) της αγοράς. Ειδικότερα, ο *Zenios [2005]* θεωρεί την απόδοση των υποχρεώσεων ίση με την απόδοση του δείκτη της αγοράς  $\tilde{I}$ . Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσει χαρτοφυλάκια περιουσιακών στοιχείων που σχετίζονται με δείκτες. Οι δείκτες αυτοί αποτελούν πολύτιμα εργαλεία στη λήψη χρηματοοικονομικών αποφάσεων καθώς παρακολουθούν τις επιδόσεις μιας ευρύτερης αγοράς, όπως για παράδειγμα ο δείκτης S&P500.

### 3.3 Προσέγγιση των μοντέλων *Mean – variance, Mean – Value – at – risk* με Δύο Στόχους Βελτιστοποίησης.

Στο σημείο αυτό, οι *D. Roman et al. [2007]* προτείνουν τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις των παραπάνω μοντέλων. Εδώ, θα γίνει η μελέτη της διακύμανσης και της αξίας σε κίνδυνο χρησιμοποιώντας διαφορετικές εκδοχές βελτιστοποίησης τους.

Στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιήθηκε η διακύμανση ως αρχική μέτρηση κινδύνου για ένα *mean – variance* αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο, εδώ θα γίνει εκ νέου αξιολόγηση χρησιμοποιώντας και την αξία σε κίνδυνο για τη μέτρηση κινδύνου του χαρτοφυλακίου αποδόσεων. Έτσι, θεωρούμε ένα συγκεκριμένο ανώτατο όριο,  $\sigma_0^2$ , για τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου  $\omega$ , τέτοιο ώστε η  $E(R_\omega)$  να παίρνει τη μέγιστη τιμή της για  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2$ , ενώ ταυτόχρονα η  $VaR(\omega)$  γίνεται η ελάχιστη δυνατή:

---

**Optimal Mean-variance Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου και την Ελαχιστοποίηση της VaR.**

---

Minimize  $VaR(\omega)$

&

Maximize  $E(R_\omega)$

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right. \right\},$$

s.t.  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2.$

---

Αντίστοιχα, ορίζεται ότι για δεδομένο κατώτατο όριο της μέσης τιμής  $\mu_0$  ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , η  $VaR(\omega)$  και η διακύμανση  $\sigma_\omega^2$  παίρνουν την ελάχιστη τιμή τους όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$  :

---

**Optimal Mean-variance Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της VaR και της Διακύμανσης του Χαρτοφυλακίου.**

---

Minimize  $VaR(\omega)$

&

Minimize  $\sigma_\omega^2$

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right. \right\},$$

s.t.  $E(R_\omega) \geq \mu_0.$

---

Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, δύο αποδοτικά *mean – variance* χαρτοφυλάκια, θα έχουν τις ίδιες μέσες τιμές, διακυμάνσεις και αξίες σε κίνδυνο, στην περίπτωση αυτή, τα παραπάνω στάδια βελτιστοποίησης δεν είναι αναγκαία.

Θεωρώντας, τώρα, την αξία σε κίνδυνο ως πρώτη στη μέτρηση κινδύνου για το χαρτοφυλάκιο, το ανώτατο φράγμα της αξίας σε κίνδυνο,  $q_0$ , ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ ,

με μέση απόδοση  $E(R_\omega)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν  $VaR(\omega) \leq q_0$ , ενώ κάτω από αυτόν τον περιορισμό η διακύμανση  $\sigma_\omega^2$ , παίρνει την ελάχιστη τιμή της :

---

***Optimal Mean-VaR Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης και την Ελαχιστοποίηση της Διακύμανσης του Χαρτοφυλακίου***

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sigma_\omega^2 \\ & \quad \& \\ & \text{Maximize } E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } VaR(\omega) \leq q_0 \end{aligned}$$

---

Αντίστοιχα, ορίζεται ότι για δεδομένο κατώτατο όριο της μέσης τιμής  $\mu_0$  ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , η  $VaR(\omega)$  και η διακύμανση  $\sigma_\omega^2$ , παίρνουν την ελάχιστη τιμή τους όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$  :

---

***Optimal Mean-VaR Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της Αξίας σε Κίνδυνο και της Διακύμανσης του Χαρτοφυλακίου.***

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } VaR(\omega) \\ & \quad \& \\ & \text{Minimize } \sigma_\omega^2 \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_\omega) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

Και σ' αυτή την περίπτωση, τα μοντέλα είναι ίσα κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας και γι' αυτό δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιηθεί το στάδιο αυτό της βελτιστοποίησης.

Επιπλέον, μια άλλη γενική μορφή των δύο μοντέλων βελτιστοποίησης είναι ότι για ένα δεδομένο ανώτατο όριο των  $\sigma_0^2$  και  $q_0$  για τη διακύμανση και τη  $VaR$  του χαρτοφυλακίου αντίστοιχα, επιλέγουμε το χαρτοφυλάκιο  $\omega$ , για το οποίο μεγιστοποιείται η  $E(R_\omega)$  με  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2$  και  $VaR(\omega) \leq q_0$ :

---

**Optimal Mean-variance-VaR Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου.**

---

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } E(R_\omega) \\ & \omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } \sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2, \quad VaR(\omega) \leq q_0. \end{aligned}$$

---

Το *mean – variance – VaR* αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μπορεί να μην είναι αποτελεσματικό ως προς τη μέθοδο *mean – variance* ή την *mean – VaR*, η καθεμία από αυτές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου *mean – variance – VaR*.

- Όταν  $q_0 = \infty$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο *Mean- variance*.
- Όταν  $\sigma_0^2 = \infty$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο *Mean-VaR*.

### 3.4 Βελτιστοποίηση του Μοντέλου *Mean – Conditional Value – at – Risk*

Στην παράγραφο αυτή, χρησιμοποιείται ένα άλλο μέτρο κινδύνου, το οποίο λειτουργεί πολλές φορές ως συμπληρωματικό της αξίας σε κίνδυνο και ονομάζεται *υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο (Conditional Value-at-Risk, CVaR)*. Το μέτρο υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο είναι στενά συνδεδεμένο με την αξία σε κίνδυνο (*Value-at-Risk, Var*) και για συνεχείς κατανομές, η *CVaR* ορίζεται ως η υπό συνθήκη αναμενόμενη απώλεια, με την προϋπόθεση ότι υπερβαίνει την αξία σε κίνδυνο, όπως αναφέρουν οι *Rockafellar* και *Uryasev [2000]*<sup>26</sup>. Για συνεχείς κατανομές, το μέτρο αυτό, είναι επίσης γνωστό, ως *Mean Excess Loss*, *Mean Shortfall*, ή *Tail Value-at-Risk*. Ωστόσο, γενικά για τις κατανομές, συμπεριλαμβανομένων των διακριτών, η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των απωλειών που αυστηρά, υπερβαίνουν την αξία σε κίνδυνο. Πιο τυπικά,

$$CVaR_a(R_\omega) = E(R_\omega | R_\omega \geq Var_a(R_\omega))$$

όπου  $R_\omega$  μια τυχαία μεταβλητή και  $a \in (0,1)$ .

Για την ανάλυση της *mean – CVaR*, χρησιμοποιείται το βασικό πλαίσιο της *mean – VaR*. Όπως αναφέρουν οι *Rockafellar, Uryasev [2000]* και αργότερα οι

---

<sup>26</sup> *Optimization of Conditional Value-at-Risk [2000]*

*Palmquist, Uryasev [2002]*<sup>27</sup>, το μοντέλο της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, επομένως έχει όλα τα επιθυμητά χαρακτηριστικά που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, οι ίδιοι αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι η ελαχιστοποίηση της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο οδηγεί σε σχεδόν βέλτιστες λύσεις της αξίας σε κίνδυνο και έτσι προχώρησαν στη βελτιστοποίηση του μοντέλου. Πρώτα απ' όλα, πρότειναν μια συνάρτηση, η οποία να ελαχιστοποιεί την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο και αργότερα, εφάρμοσαν τη λειτουργία αυτή σε μεθόδους μεγιστοποίησης της απόδοσης, παρόμοια με τον δείκτη *Sharpe*, η μέθοδος αυτή θα αποτελέσει μια *mean - CVar* προσέγγιση.

Σύμφωνα με την *Darby-Dowman K. [2007]* η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί την *CVar* είναι:

$$\tilde{F}_a(x, v) = \frac{1}{a} E\{[-R_\omega + v]^+\} - v$$

όπου  $R_\omega$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από το  $\omega$ , το οποίο ανήκει στο σύνολο  $W$  και  $a \in (0,1)$ . Στα πλαίσια εισαγωγής μιας βοηθητικής πραγματικής μεταβλητής  $u = -R_\omega + v$ , τότε ισχύει:

$$[u]^+ = u \text{ για } u \geq 0$$

$$[u]^+ = 0 \text{ για } u < 0$$

Έτσι, ως συνάρτηση των  $v$ , η  $\tilde{F}_a$  είναι συνεχής και πεπερασμένη συνάρτηση και ισχύει:

$$CVaR_a(R_\omega) = \min_{v \in R} \tilde{F}_a(x, v)$$

Ελαχιστοποιώντας τη  $CVaR_a$  για  $\omega \in W$  είναι ισοδύναμο με το να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση  $\tilde{F}_a$  για  $x, v \in W \times R$ .

Όπως και στις προσεγγίσεις της *mean-variance* και *mean-VaR* ορίζονται δύο μέθοδοι. Η πρώτη είναι αυτή για την οποία, το ανώτατο φράγμα της *CVar*,  $\varphi_0$ , ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , με μέση απόδοση  $E(R_\omega)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν  $CVar(\omega) \leq \varphi_0$ :

<sup>27</sup> *Portfolio optimization with conditional Value-At-Risk objective constraints, The Journal of Risk [2002]*



---

**Optimal Mean-CVar Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου**

---

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } CVar(\omega) \leq \varphi_0 \end{aligned}$$

---

Κατά τον ίδιο τρόπο το δεύτερο μοντέλο ορίζει ότι για δεδομένο κατώτατο όριο της μέσης τιμής  $\mu_0$ , ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , η  $CVar(\omega)$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$  :

---

**Optimal Mean-CVar Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο**

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } CVar(\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_\omega) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

Αντιστοίχα, για δεδομένο κατώτατο όριο  $\mu_0$ , της μέσης τιμής ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , ο συνδυασμός της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο και της μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι  $\beta CVar(\omega) - (1 - \beta)E(R_\omega)$  και παίρνει την ελάχιστη τιμή όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$ :

---

**Optimal Mean-CVar Model με Στόχο την Από Κοινού Ελαχιστοποίηση της CVar και της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου**

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \beta CVar(\omega) - (1 - \beta)E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}, \\ & \text{s.t. } E(R_\omega) \geq \mu_0. \end{aligned}$$

---

όπου  $\beta$  είναι μια σταθερά που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$ . Για τις δύο ακραίες τιμές του  $\beta$  έχουμε:

- Όταν  $\beta = 1$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο.
- Όταν  $\beta = 0$ , τότε το μοντέλο αντιστοιχεί στο μοντέλο μεγιστοποίησης της μέσης απόδοσης.

Τέλος, χρησιμοποιώντας την ελαχιστοποίηση της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο ως αρχική μέτρηση για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου, έχουμε ότι το ανώτατο φράγμα της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο,  $\varphi_0$ , ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , με μέση απόδοση  $E(R_\omega)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν  $CVar(\omega) \leq \varphi_0$ , ενώ κάτω από αυτόν τον περιορισμό η  $CVar(\omega)$ , παίρνει την ελάχιστη τιμή της :

---

***Optimal Mean-CVar Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης και την Ελαχιστοποίηση της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου***

---

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } CVar(\omega) \\ & \quad \& \\ & \text{Maximize } E(R_\omega) \\ \omega \in W, \quad & W = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right\}, \\ & \text{s.t. } CVar(\omega) \leq \varphi_0 \end{aligned}$$

---

Αντίστοιχα, ορίζεται ότι για δεδομένο κατώτατο όριο της μέσης τιμής  $\mu_0$  ενός χαρτοφυλακίου  $\omega$ , η  $VaR(\omega)$  και η  $CVar(\omega)$ , παίρνουν την ελάχιστη τιμή τους όταν  $E(R_\omega) \geq \mu_0$  :

---

**Optimal Mean-CVar Model με Στόχο την Ελαχιστοποίηση της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο και της Αξίας σε Κίνδυνο του Χαρτοφυλακίου.**

---

Minimize  $CVar(\omega)$

&

Minimize  $VaR(\omega)$

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right\},$$

s.t.  $E(R_\omega) \geq \mu_0$ .

---

Τελικά, οι *D. Roman et al. [2007]*, έπεντα από τη διαχείριση διαφόρων κριτηρίων επιλογής του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατέληξαν στο μοντέλο *mean – variance – CVar*, χρησιμοποιώντας τη διακύμανση μαζί με την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Θεώρησαν ότι για ένα δεδομένο ανώτατο όριο των  $\sigma_0^2$  και  $\varphi_0$  για τη διακύμανση και τη *CVar* του χαρτοφυλακίου αντίστοιχα, επιλέγουμε το χαρτοφυλάκιο  $\omega$ , για το οποίο μεγιστοποιείται η  $E(R_\omega)$  με  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2$  και  $CVar(\omega) \leq \varphi_0$ :

---

**Optimal Mean-variance-CVar Model με Στόχο τη Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου.**

---

Maximize  $E(R_\omega)$

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \right\},$$

s.t.  $\sigma_\omega^2 \leq \sigma_0^2, \quad CVar(\omega) \leq \varphi_0$ .

---

Για την ανάλυση του *mean – CVaR*, χρησιμοποιείται το βασικό πλαίσιο της *mean – VaR*. Όπως αναφέρουν οι *Rockafellar, Uryasev [2000]* και αργότερα οι *Palmquist, Uryasev [2002]*, το μοντέλο της υπό συνθήκης αξίας σε κίνδυνο είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, επομένως έχει όλα τα επιθυμητά χαρακτηριστικά που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, οι ίδιοι αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι η ελαχιστοποίηση της υπό συνθήκης αξίας σε κίνδυνο οδηγεί σε σχεδόν βέλτιστες λύσεις της αξίας σε κίνδυνο και έτσι προχώρησαν στη βελτιστοποίηση του μοντέλου.

Πρώτα απ' όλα, πρότειναν μια συνάρτηση, η οποία να ελαχιστοποιεί την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο και αργότερα, εφαρμόζουν τη λειτουργία αυτή σε μεθόδους μεγιστοποίησης της απόδοσης, παρόμοια με τον δείκτη *Sharpe*, η μέθοδος αυτή θα αποτελέσει μια *mean - CVaR* προσέγγιση. Οι *R. Parrák, J. Seidler [2010]*<sup>28</sup>, βασιζόμενοι στη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, θεώρησαν ότι κάποιος επενδυτής μπορεί να προτιμά να επενδύει σε χαρτοφυλάκια με σκοπό τη μεγιστοποίηση του δείκτη *Sharpe*  $= \frac{E(R_\omega)}{\sigma_\omega}$ , δηλαδή να αποσκοπεί σε όσο το δυνατό υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις ανά μονάδα κινδύνου και ως εκ τούτου σε ένα *αποτελεσματικό* χαρτοφυλάκιο.

Σύμφωνα με τους *Rockafellar, Uryasev [2000]* η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί την Conditional Value-at-risk είναι:

$$\tilde{F}_\alpha(w, \delta) = \delta + \frac{1}{K(1-\alpha)} \sum_{j=1}^K [-w^T r_j - \delta]^+$$

όπου  $w$  είναι ένα διάνυσμα βαρών,  $\delta$  είναι μια παράμετρος,  $K$  είναι ο αριθμός των σεναρίων και  $r_j$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα των μελλοντικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Στα πλαίσια εισαγωγής μιας βοηθητικής πραγματικής μεταβλητής  $u_j$  για  $j = 1, \dots, K$  η ελαχιστοποίηση της γραμμικής συνάρτησης εκφράζεται ως:

$$\tilde{F}_\alpha(w, \delta) = \delta + \frac{1}{K(1-\alpha)} \sum_{j=1}^K u_j,$$

με  $u_j \geq 0$  και  $w^T r_j + \delta + u_j \geq 0$  για  $j = 1, \dots, K$ .

Έτσι, σύμφωνα με τους *Palmquist και Uryasev [2002]*, το συνολικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \min_{w, \delta} \sum_{i=1}^n -E[r_i]w_i \\ & \text{s.t. } \delta + \frac{1}{K(1-\alpha)} \sum_{j=1}^K u_j \leq \omega \cdot W^0 \\ & w^T r_j + \delta + u_j \geq 0 \text{ για } j = 1, \dots, K \\ & w_i \geq 0 \\ & w^T e = 1 \end{aligned}$$

όπου  $\omega$  είναι ένα ποσοστό πλούτου για την επιτρεπτή έκθεση σε κίνδυνο και  $W^0$  είναι η αξία του παράγοντα του πλούτου στην τρέχουσα περίοδο. Με την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης για διάφορα επίπεδα της έκθεσης σε κίνδυνο μπορεί κανείς να φτάσει στο *mean - VaR* αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο.

<sup>28</sup> *A Simulation Based Comparison in the Czech Crisis Environment [2010]*

Ο Zenios [2005] θεώρησε ότι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο δεν είναι μόνο η αναμενόμενη αξία των ζημιών, στην περίπτωση που αυτές ξεπερνούν την αξία σε κίνδυνο, αλλά οι ζημιές του χαρτοφυλακίου δίνονται, επίσης, από τη συνάρτηση:

$$L(x; \tilde{P}) = V_0 - V(x; \tilde{P}) \quad (1)$$

όπου  $V_0$  είναι η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου, το οποίο αποτελείται από  $x_i$  στοιχεία, τρέχουσας αξίας  $P_{0i}$  με:

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i.$$

Η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί τον *περιορισμό του προϋπολογισμού (budget constraint)*, ότι ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει μόνο το ποσό που διαθέτει. Η αξία του χαρτοφυλακίου, εδώ, ορίζεται από τη σχέση:

$$V(x; \tilde{P}) = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i x_i$$

αντί της  $E(R_\omega)$  και η μέση αξία από:

$$V(x; \bar{P}) = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i x_i.$$

Στο εξής δε θα προσδιορίζεται με ακρίβεια η χρονική στιγμή πραγματοποίησης μιας μελλοντικής επένδυσης, αλλά θα θεωρούμε ως επενδυτικό ορίζοντα κάποια μελλοντική στιγμή και θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$V(x; P^l) = \sum_{i=1}^n P^l x_i$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι θετικές τιμές στη συνάρτηση ζημίας  $L(x; \tilde{P})$  μπορεί να προκαλέσουν επιδείνωση του κινδύνου, ενώ οι αρνητικές ανταποκρίνονται σε κέρδη. Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό αν σκεφτεί κανείς ότι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο προέρχεται από τον υπολογισμό των αναμενόμενων ελλειμμάτων στον τομέα της ασφάλισης, όπου οι ζημιές είναι το επίκεντρο μελέτης των ασφαλιστικών κινδύνων και είναι συνήθως θετικές. Εναλλακτικά, λοιπόν, ορίζεται ένα χαρτοφυλάκιο με βάση την παράμετρο αποστροφής στον κίνδυνο μεταξύ της μέσης τυπικής απόκλισης και της αναμενόμενης αξίας. Απαιτείται, εδώ, η αναμενόμενη αξία του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνει την ποσότητα  $\mu V_0$ , με  $\mu$  να είναι η παράμετρος της απόδοσης που θέτεται ως στόχος βελτιστοποίησης:

$$\text{Minimize } E[|V(x; \tilde{P}) - V(x; \bar{P})|],$$

$$\text{με } V(x; \tilde{P}) \geq \mu V_0,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n p_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Σε ένα διακριτό μοντέλο η συνάρτηση παίρνει τη μορφή  $\sum_{l \in \Omega} p^l |V(x; P^l) - V(x; \bar{P})|$  και είναι γραμμική σε κάποια τμήματα με κλίση ίση με 1 όταν  $V(x; P^l) > V(x; \bar{P})$  και -1 όταν  $V(x; P^l) < V(x; \bar{P})$ , το παραπάνω μοντέλο γράφεται:

$$\text{Minimize } \sum_{l \in \Omega} p^l |V(x; P^l) - V(x; \bar{P})|,$$

$$\text{με } V(x; \bar{P}) \geq \mu V_0,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n p_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές  $\tilde{y}_+$  και  $\tilde{y}_-$  προκειμένου να γίνει η μέτρηση των θετικών και αρνητικών αποκλίσεων της αξίας του χαρτοφυλακίου από την μέση τιμή. Η συνάρτηση απόκλισης γράφεται:

$$V(x; \tilde{P}) - V(x; \bar{P}) = \tilde{y}_+ - \tilde{y}_-,$$

όπου  $\tilde{y}_+ = \max [0, V(x; \tilde{P}) - V(x; \bar{P})]$  και  $\tilde{y}_- = \max [0, V(x; \bar{P}) - V(x; \tilde{P})]$ .

Επισημαίνεται, ότι η  $\tilde{y}_+$  δεν παίρνει αρνητικές τιμές για τα σενάρια εκείνα κατά τα οποία η αξία του χαρτοφυλακίου υπερβαίνει τη μέση αξία και αντίστοιχα η  $\tilde{y}_-$  δεν είναι αρνητική όταν η αξία του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη της μέσης. Σε ένα διακριτό μοντέλο η  $y^l_+$  έχει την ίδια προεξόφληση (payoff) με ένα ευρωπαϊκού τύπου call option με τιμή εξάσκησης ίση με τη μέση αξία του χαρτοφυλακίου. Η λήξη του δικαιώματος είναι η περίοδος διακράτησης του μοντέλου. Αντίστοιχα, η  $y^l_-$  είναι ισοδύναμη με ένα ευρωπαϊκού τύπου put option. Έχουμε, αντίστοιχα:

$$y^l_+ \geq V(x; P^l) - V(x; \bar{P}), y^l_+ \geq 0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l_- \geq V(x; \bar{P}) - V(x; P^l), y^l_- \geq 0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega.$$

Προκειμένου να θέσουμε μια βοηθητική μεταβλητή  $y^l$  θεωρούμε ότι η απόλυτη τιμή  $|a|$  ενός πραγματικού αριθμού  $a$  είναι η ελάχιστη τιμή  $b$ , τέτοια ώστε  $b \geq a$  και  $b \leq -a$  και έχουμε:

$$y^l \geq y^l_+ \text{ και } y^l \geq y^l_-, \text{ για όλα τα } l \in \Omega.$$

Οδηγούμαστε σε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης της μέσης απόκλισης του χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιώντας την παράμετρο  $y^l$ :

---

*Ελαχιστοποίηση της Μέσης Απόκλισης του Χαρτοφυλακίου.*

---

$$\text{Minimize } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l$$

$$\text{με } V(x; \bar{P}) \geq \mu V_0,$$

$$y^l \geq V(x; P^l) - V(x; \bar{P}), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l \geq V(x; \bar{P}) - V(x; P^l), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

---

---

*Μεγιστοποίηση της Μέσης Απόδοσης του Χαρτοφυλακίου με ένα Όριο Κινδύνου.*

---

$$\text{Maximize } V(x; \bar{P})$$

$$\text{με } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l \geq \omega,$$

$$y^l \geq V(x; P^l) - V(x; \bar{P}), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l \geq V(x; \bar{P}) - V(x; P^l), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

---

Θέτοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο  $\omega$  πλησιάζουμε το μοντέλο της μέσης τυπικής απόκλισης έναντι της αναμενόμενης τιμής, κάτι που συμβαίνει και στο μοντέλο ελαχιστοποίησης της τυπικής απόκλισης εναλλάσσοντας την παράμετρο  $\mu$ .

Στο σημείο, αυτό, προτείνεται ένα μοντέλο τροποποίησης της μέσης απόκλισης διαχωρίζοντας τις θέσεις των  $y^l_+$  και  $y^l_-$ . Θέτεται, λοιπόν, η παράμετρος  $y^l$  ίση με

την  $y^l_+$  και την  $y^l_-$  ίση με το μηδέν και κατά τον ίδιο τρόπο την  $y^l_-$  ίση με  $y^l$  και την  $y^l_+$  ίση με το μηδέν. Εισάγουμε δύο νέες θετικές παραμέτρους  $\lambda_u$  και  $\lambda_d$ , τέτοιες ώστε  $\lambda_u + \lambda_d = 1$ . Παρακάτω απεικονίζεται το μοντέλο της συνάρτησης μέσης απόλυτης απόκλισης:

---

*Upside Potential and downside risk in mean absolute deviation*

---

$$\text{Minimize } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l$$

$$\text{με } V(x; \bar{P}) \geq \mu V_0,$$

$$y^l \geq \lambda_u (V(x; P^l) - V(x; \bar{P})), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l \geq \lambda_d (V(x; \bar{P}) - V(x; P^l)), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Θέτοντας την  $\lambda_u = 0$  και την  $\lambda_d = 1$  έχουμε το μοντέλο ελαχιστοποίησης της μέσης τυπικής απόκλισης. Επιπλέον, θέτοντας  $\lambda_u = 0$  και  $\lambda_d = 0$  βλέπουμε ότι το μοντέλο της μέσης απόκλισης και της μέσης απόλυτης απόκλισης είναι ισοδύναμα. Εκτός, όμως, από αυτή τη μέτρηση του κινδύνου παρουσιάζεται ένα νέο μοντέλο για κάθε απόκλιση που είναι μεγαλύτερη μιας παραμέτρου  $\epsilon V_0$  που βρίσκεται κάτω από τη μέση τιμή. Το μοντέλο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση, ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει αυστηρώς  $-\epsilon V_0$  από την μέση αξία.

---

*Βελτιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου με Όρια στη Μεγιστοποίηση του Κινδύνου*

---

$$\text{Maximize } V(x; \bar{P})$$

$$\text{με } V(x; P^l) \geq V(x; \bar{P}) - \epsilon V_0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$



Το μοντέλο αυτό μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας και μια άλλη παράμετρο  $\tilde{g}$ , ίση με την αξία μιας επένδυσης  $V_0$  σε μια ευρέως ορισμένη αγορά δεικτών με δείκτη αύξησης  $\tilde{I}$ . Η τυχαία μεταβλητή  $\tilde{g}$  παίρνει την τιμή  $g^l$  στο σύνολο τιμών  $l \in \Omega$  και έχουμε το παρακάτω μοντέλο παρακολούθησης (tracking model).

---

*Tracking Model*

---

Maximize  $V(x; \tilde{P})$

με  $V(x; P^l) \geq g^l - \epsilon V_0$ , για όλα τα  $l \in \Omega$ ,

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$x \in X$ .

---

Ο όρος παρακολούθησης σημαίνει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου παραμένει με περιθώριο  $-\epsilon V_0$ . Η παράμετρος  $\epsilon$  χρησιμοποιείται ειδικότερα με μικρότερες τιμές του  $\epsilon$  οδηγώντας σε καλύτερο μοντέλο αλλά θυσιάζοντας την υπερβάλλουσα απόδοση.

Έστω, τώρα ότι έχουμε ένα μοντέλο απώλειας (regret model) που δείχνει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής πληρωμής και της πληρωμής που θα είχε προκύψει αν είχε επιλεγεί μια διαφορετική πορεία, τότε έχουμε:

$$G(x; \tilde{P}, \tilde{g}) = V(x; \tilde{P}) - \tilde{g}.$$

Η παραπάνω συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές όταν η αξία του χαρτοφυλακίου υπερτερεί του  $\tilde{g}$ , δημιουργώντας κέρδη και αρνητικές όταν υστερεί του  $\tilde{g}$ , προκαλώντας ζημιές. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές,  $\tilde{y}_+$ ,  $\tilde{y}_-$  για τις θετικές και αρνητικές αποκλίσεις του χαρτοφυλακίου έχουμε:

$$\tilde{y}_+ = \max [0, V(x; \tilde{P}) - \tilde{g}] \text{ και } \tilde{y}_- = \max [0, \tilde{g} - V(x; \tilde{P})].$$

Η  $\tilde{y}_+$  δεν παίρνει μηδενικές τιμές όταν η αξία του χαρτοφυλακίου ξεπερνά το  $\tilde{g}$ , αντίστοιχα η  $\tilde{y}_-$  δεν είναι μηδέν όταν η αξία του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη της  $\tilde{g}$ . Για ένα διακριτό μοντέλο έχουμε:

$$y^l_+ \geq V(x; P^l) - g^l, y^l_+ \geq 0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l_- \geq V(x; g^l) - V(x; P^l), y^l_- \geq 0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega.$$

Η πιθανότητα η απώλεια (regret) να μην ξεπερνά την κατώτατη τιμή (threshold)  $\zeta$  είναι:

$$\psi(x; \zeta) = \sum_{\{l \in \Omega \mid G(x; P^l, g^l) \leq \zeta\}} p^l.$$

Η τέλεια συνάρτηση κόστους δίνεται από τη συνάρτηση πιθανότητας :

$$\psi(x^*; \zeta) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \zeta < 0 \\ 1, & \text{αν } \zeta \geq 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω πιθανότητα μαζί με την ανισότητα  $\psi(x; \zeta) \leq \psi(x^*; \zeta)$  αποτελούν ένα χρήσιμο κριτήριο για τη σύγκριση χαρτοφυλακίων. Το παρακάτω μοντέλο δείχνει την αποστροφή στον κίνδυνο, ο οποίος μετράται με το αναμενόμενο κόστος  $\tilde{y}_-$  έναντι της αναμενόμενης αξίας:

$$\text{Minimize } E[\tilde{y}_-]$$

$$\text{με } E[V(x; \bar{P})] \geq \mu V_0,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Σε ένα διακριτό μοντέλο έχουμε:

---

**Ελαχιστοποίηση της Αναμενόμενης Κατώτερης Απώλειας**

---

$$\text{Minimize } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l_-$$

$$\text{με } V(x; \bar{P}) \geq \mu V_0,$$

$$y^l_- \geq g^l - V(x; P^l), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l_- \geq 0 \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Θέτοντας στο μοντέλο της μέσης τυπικής απόκλισης  $\lambda_u = 0$ ,  $\lambda_d = 1$  και  $g^l = V(x; \bar{P})$  έχουμε το παραπάνω μοντέλο ελαχιστοποίησης. Το πρώτο μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας μια ενδογενή παράμετρο ( $V(x; \bar{P})$ ) που εξαρτάται από το χαρτοφυλάκιο, ενώ το δεύτερο με μια εξωγενή παράμετρο ( $g^l$ ). Έπειτα, ακολουθούμε τον *Zenio [2005]* προκειμένου να μετρήσουμε μόνο εκείνες τις ζημιές

που ξεπερνούν το κατώτατο όριο  $\epsilon V_0$ , δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο  $\epsilon$  – απώλειας, το οποίο συμπεριφέρεται όπως και το μοντέλο της απώλειας, αξίας:

$$G(x; \bar{P}, \bar{g}) = V(x; \bar{P}) - (\bar{g} - \epsilon V_0)$$

και για το διακριτό μοντέλο

$$G(x; P^l, g^l) = V(x; P^l) - (g^l - \epsilon V_0)$$

με πιθανότητα  $\epsilon$  – απώλειας

$$\psi_\epsilon(x^*; \zeta) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \zeta < -\epsilon V_0, \\ 1, & \text{αν } \zeta \geq -\epsilon V_0. \end{cases}$$

---

**Ελαχιστοποίηση της Αναμενόμενης κατώτερης  $\epsilon$  – Απώλειας**

---

$$\text{Minimize } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l_-$$

$$\text{με } V(x; \bar{P}) \geq \mu V_0,$$

$$y^l_- \geq (g^l - \epsilon V_0) - V(x; P^l), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l_- \geq 0 \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί και με μια ισοδύναμη συνάρτηση μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας με περιορισμούς στην κατώτατη απώλεια (downside regret).

---

**Μεγιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου με Περιορισμούς  $\epsilon$  – Απώλειας**

---

$$\text{Maximize } V(x; \bar{P}),$$

$$\text{με } \sum_{l \in \Omega} p^l y^l_- \leq \omega,$$

$$y^l_- \geq (g^l - \epsilon V_0) - V(x; P^l), \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$

$$y^l_- \geq 0 \text{ για όλα τα } l \in \Omega,$$


---

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$

Αν θέσουμε  $\omega = 0$ , τότε και  $y^l_- = 0$  καταλήγουμε στο μοντέλο παρακολούθησης (tracking model).

Ο Zenios [2005], από την υπόθεση που έχει γίνει για τη  $CVar$ , θεώρησε ότι αν  $\zeta$  είναι η  $VaR$  στο 100α% επίπεδο, τότε η  $CVar$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$CVar(x; a) = E\{L(x; P^l) | L(x; P^l) > \zeta\}, \quad (\text{για συνεχείς κατανομές})$$

$$CVar(x; a) = \frac{\sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) > \zeta\}} p^l L(x; P^l)}{\sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) > \zeta\}} p^l}, \quad (\text{για διακριτές κατανομές})$$

όπου το  $\zeta$  αντιστοιχεί στην  $\alpha$ - $VaR$  και εξαρτάται από το  $\alpha$ . Αντίθετα, στην περίπτωση που οι ζημιές που είναι αυστηρά μεγαλύτερες από  $\zeta$ , ισούνται με  $(1 - \alpha)$ , τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$CVar(x; a) = \frac{\sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l L(x; P^l)}{1 - \alpha}$$

Στη συνέχεια, θα γίνει μια προσπάθεια βελτιστοποίησης αυτής της συνάρτησης χρησιμοποιώντας μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$\tilde{y}_+ = \max[0, L(x; \bar{P}) - \zeta]$$

όπου η συνάρτηση  $\tilde{y}_+$  γίνεται μηδέν όταν οι ζημιές δεν ξεπερνούν την αξία σε κίνδυνο,  $\zeta$ , και ίσες με την υπερβάλλον απώλεια όταν οι ζημιές ξεπερνούν τη  $\zeta$ . Σε διακριτό μοντέλο παίρνουμε τη σχέση:

$$y^l_+ = \max[0, L(x; P^l) - \zeta], \text{ για όλα τα } l \in \Omega.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό για την  $\tilde{y}_+$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Omega} p^l y^l_+ &= \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) < \zeta\}} p^l y^l_+ + \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l y^l_+ = 0 + \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l (L(x; P^l) - \zeta) \\ &= \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l L(x; P^l) - \zeta \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l \\ &= \sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l L(x; P^l) - \zeta(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με  $(1 - \alpha)$  και κάνοντας τις απαραίτητες αναδιατάξεις, παίρνουμε:

$$\zeta + \frac{\sum_{l \in \Omega} p^l y^l_+}{1 - \alpha} = \frac{\sum_{\{l \in \Omega | L(x; P^l) \geq \zeta\}} p^l L(x; P^l)}{1 - \alpha} \quad (1)$$

Η ποσότητα στο δεξιό μέλος είναι η  $CVar(x; a)$  και για τη βελτιστοποίησή της γίνεται η ελαχιστοποίηση της γραμμικής συνάρτησης στο αριστερό μέλος. Η ελαχιστοποίηση της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο γίνεται θεωρώντας την αναμενόμενη αξία του χαρτοφυλακίου μεγαλύτερη της ποσότητας  $\mu V_0$ .

---

***Ελαχιστοποίηση της Conditional Value-at-risk με Περιορισμό για την Αναμενόμενη Αξία του Χαρτοφυλακίου***

---

Minimize  $CVar(x; a)$

τότε  $E[V(x; \bar{P})] \geq \mu V_0$ ,

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i$$

$x \in X$

---

όπου  $X$  είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1), το μοντέλο της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο γίνεται:

---

***Το μοντέλο της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο Κάνοντας Χρήση του Μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού***

---

$$\text{Minimize} \quad \zeta + \frac{\sum_{l \in \Omega} p^l y^l_+}{1 - \alpha}$$

$$\text{τότε} \quad \sum_{i=1}^n \bar{P}_i x_i \geq \mu V_0$$

$$y^l_+ \geq L(x; P^l) - \zeta, \text{ για όλα τα } l \in \Omega$$

$$y^l_+ \geq 0, \quad \text{για όλα τα } l \in \Omega$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i$$

$x \in X$ .

---

Όταν η συνάρτηση ζημίας  $L(x; P^l)$  είναι γραμμική τότε και το μοντέλο είναι γραμμικού προγραμματισμού. Τέτοια είναι η περίπτωση της σχέσης (1) που γίνεται:

$$L(x; P^l) = V_0 - V(x; P^l) = \sum_{i=1}^n (P_{0i} - P_i^l) x_i.$$

Η λύση αυτού του μοντέλου δίνει την ελάχιστη υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο, και την αξία σε κίνδυνο να παίρνει την τιμή  $\zeta^*$  που αντιστοιχεί στην ελάχιστη υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Μια ισοδύναμη μέθοδος που επισημαίνεται κατά το Zenio, είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης αξίας του χαρτοφυλακίου με τους περιορισμούς της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο. Έτσι, έχουμε:

---

**Μεγιστοποίηση της Αναμενόμενης Αξίας του Χαρτοφυλακίου Χρησιμοποιώντας τους Περιορισμούς της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο**

---

Maximize

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i x_i \leq \mu V_0,$$

$$y^l_+ \geq L(x; P^l) - \zeta, \text{ για όλα τα } l \in \Omega$$

$$y^l_+ \geq 0, \text{ για όλα τα } l \in \Omega$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i} x_i,$$

$$x \in X.$$


---

### 3.5 Μια προσεγγιστική βελτιστοποίηση στα ταμεία συνταξιοδότησης

Το αρχικό επιχείρημα για τα μη χρηματοδοτούμενα συνταξιοδοτικά συστήματα βασίζεται στη δυνατότητα υπερουσσώρευσης κεφαλαίων. Όπως υποστηρίζουν οι *Diamond [1965]*<sup>29</sup>, *Samuelson [1975]*<sup>30</sup>: τα άτομα μπορούν να αποταμιεύσουν μεγάλα ποσά και το ποσοστό απόδοσης του κεφαλαίου μπορεί είναι πάρα πολύ χαμηλό σε σχέση με το ρυθμό ανάπτυξης της οικονομίας. Οι μη χρηματοδοτούμενες συντάξεις είναι άμεσο αποτέλεσμα της ανακατανομής της κατανάλωσης από γενιά σε γενιά και της αποκατάστασης της αποδοτικότητας. Υπερβολική εξοικονόμηση μπορεί να είναι ένα ιδιαίτερο πρόβλημα σε καταστάσεις όπου νεότερης γενιάς εργαζόμενοι δεν

<sup>29</sup> *National Debt in a Neoclassical Growth Model*

<sup>30</sup> *Optimum Social Security in a Life-Cycle Growth Model*

μπορούν να ασφαλισουν πλήρως μελλοντικούς κινδύνους του εισοδήματος ή θνησιμότητας.

Οι *Aaron H.J [1966]*<sup>31</sup> και *Feldstein [1974, 1996]*<sup>32</sup> συμφωνούν ότι η τρέχουσα υπόθεση για τις συντάξεις που χρηματοδοτούνται γίνεται, μεταξύ άλλων, για το λόγο του ότι το ποσοστό απόδοσης της επένδυσης υπερβαίνει την αύξηση του εισοδήματος. Συνεπώς, σε περιπτώσεις ανεργίας, οι επιδράσεις της προσφοράς και οι αλλαγές στο φορολογικό καθεστώς, οι επενδύσεις σε χρηματοδοτούμενα συστήματα αποδίδουν υψηλότερες αποδόσεις από ότι ένα σύστημα χωρίς χρηματοδότηση. Οι έννοιες «ποσοστού-απόδοσης» είναι ιδιαίτερα έντονες σε χώρες με αρνητική αύξηση του πληθυσμού ή και της γήρανσης του πληθυσμού και το κόστος των μη χρηματοδοτούμενων συντάξεων πέφτει ασύμμετρα σε εργαζόμενους με λιγότερα έτη εργασίας. Ο *Miles [1997]*<sup>33</sup> αξιολογεί την πρακτική σημασία αυτών των επιχειρημάτων, καθώς και των πιθανών επιπτώσεων της μετάβασης σε ένα κεφαλαιοποιητικό σύστημα στο Ηνωμένο Βασίλειο καθώς και σε άλλες, με παρόμοια χαρακτηριστικά, χώρες.

Ωστόσο, η ανάλυση που ακολουθεί επικεντρώνεται στο μέσο επίπεδο των αποδόσεων και αγνοείται η διακύμανση του χαρτοφυλακίου και οι επιδράσεις του. Τέτοιες επιδράσεις μελετήθηκαν εκτενέστερα από τους *Merton [1983]*<sup>34</sup>, και *Merton Bodie και Marcus [1987]*<sup>35</sup> καθώς και από τους *Dutta, Kapur και Orszag [1999]*<sup>36</sup>.

Εδώ, λοιπόν, παρέχεται μια απλοποιημένη μέθοδος επιλογής της βέλτιστης λύσης για το πλαίσιο του μοντέλου *mean-variance*. Η βέλτιστη λύση είναι η χρηματοδότηση, η οποία στη συνέχεια αντισταθμίζεται κρατώντας ένα διαφοροποιημένο σύνολο των υποχρεώσεων, τόσο σε χρηματοδοτούμενα όσο και σε μη χρηματοδοτούμενα προγράμματα.

Η θεωρία του Markowitz, ωστόσο, εισάγει ένα διαφορετικό είδος προτίμησης για τον επενδυτή, στηριζόμενος στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας του, όπως δίνεται από τον τύπο:

$$u = E(R_\omega) - \frac{1}{2}\gamma var(R_\omega),$$

Έτσι η χρησιμότητα είναι συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης και διακύμανσης με  $R_\omega$  τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου  $\omega$ , με:

$$R_\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i$$

και

$$\omega \in W, \quad W = \left\{ \omega \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \geq 0, \forall i \in \{0,1, \dots, n\} \right. \right\}$$

<sup>31</sup> *The Social Insurance Paradox*

<sup>32</sup> *Social Security, Induced Retirement, and Aggregate Capital Accumulation, 1974, The Missing Piece in Policy Analysis: Social Security Reform, 1996*

<sup>33</sup> *Financial markets, Ageing and Social Welfare, inaugural lecture [1997]*

<sup>34</sup> *On the role of social security as a means for efficient risk sharing in an economy where human capital is not tradeable, in: Zvi Bodie and John Shoven [1983]*

<sup>35</sup> *Pension Plan Integration as Insurance Against Social Security Risk in: Zvi Bodie, J. Shoven and D. Wise, eds. [1987]*

<sup>36</sup> *How to fund pensions: income uncertainty and risk-aversion [1999]*

και μια νέας παραμέτρου  $\gamma$ , την οποία ονομάζει παράμετρο της *απόλυτης αποστροφής κινδύνου*. Όπως αναφέρει και το όνομά της, είναι ένα μέτρο που δείχνει την αποστροφή των επενδυτών στον κίνδυνο. Μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε επενδυτή, ακόμη μπορεί για κάποιον επενδυτή να αλλάξει στο πέρασμα του χρόνου. Όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος  $\gamma$ , τόσο πιο απρόθυμοι να αναλάβουν τον κίνδυνο εμφανίζονται οι επενδυτές.

Στηριζόμενοι στη θεωρία αυτή, οι *Dutta, et al. [1999]* εισάγουν ένα νέο μοντέλο για τη *mean-variance* ανάλυση. Θεωρούν ότι ο δείκτης απόδοσης σε ένα χρηματοδοτούμενο ταμείο είναι ίσος με  $r$  και ένα μη χρηματοδοτούμενο ταμείο έχει απόδοση ίση με  $g$ , όπου  $g$  είναι ο δείκτης αύξησης του εισοδήματος σε διεθνές επίπεδο. Επίσης, υποθέτουν ένα κλάσμα  $\omega$  των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων που καλύπτονται από χρηματοδοτικές παροχές και το υπόλοιπο από μη χρηματοδοτικές, τότε η συνολική σύνταξη που κάποιος εργαζόμενος θα εισπράξει είναι:

$$EU(1 + \omega r + (1 - \omega)g).$$

Ας υποθέσουμε ότι  $P = 1 + \omega r + (1 - \omega)g$  δηλώνει το ποσό της σύνταξης. Προκειμένου να επιτύχουμε ένα από κοινού, χρηματοδοτούμενο και μη, βέλτιστο χαρτοφυλάκιο πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τον παράγοντα  $\omega$ , δηλαδή:

$$E(U'(P)(r - g)) = 0, \quad \text{αν } 0 < \omega < 1$$

Χωρίς να ληφθεί υπόψη η συνθήκη αποστροφής στον κίνδυνο, η  $U'$  παραμένει σταθερή και καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση επένδυσης σε ένα χρηματοδοτικό σύστημα για οποιοδήποτε  $E_r > E_g$ . Με τη συνθήκη αποστροφής, είναι ίσως χρησιμοποιότερο να γίνει αντιστάθμιση, απ' ό,τι να χρησιμοποιηθεί ο παραπάνω συνδυασμός (funded-unfunded). Έτσι, επικεντρωνόμαστε περισσότερο στην συνάρτηση χρησιμότητας της *Mean-Variance* και έχουμε :

$$EU(P) = E(P) - \frac{\gamma}{2} var(P).$$

Επισημαίνεται ότι,

$$E(P) = 1 + \omega \mu_r + (1 - \omega) \mu_g$$

$$var(P) = \omega^2 \sigma_r^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_g^2 + 2\omega(1 - \omega) \sigma_{rg}$$

όπου  $\mu_i, \sigma_i^2$  είναι η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση κάθε μεταβλητής  $i$  και  $\sigma_{rg}$  είναι η συνδιακύμανση κάθε μεταβλητής  $r, g$ . Το βέλτιστο χρηματοδοτικό μερίδιο δίνεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{\mu_r - \mu_g + \gamma(\sigma_g^2 - \sigma_{rg})}{\gamma\sigma_{r-g}^2}.$$



### 3.6 Διαχείριση περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων στα συνταξιοδοτικά ταμεία χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο

Οι *Rockafellar* και *Uryasev* [200, 2001] θεώρησαν ότι οι περιορισμοί της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο δεν καταστρέφουν τη γραμμικότητα του μοντέλου, κάτι που είναι πολύ σημαντικό στις μεθόδους βελτιστοποίησης. Η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο είναι μια υποπροσθετική μέτρηση του κινδύνου που σημαίνει ότι μειώνεται διαφοροποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο. Οι *Bogentoft, Edwin Romeijn, Uryasev* [2001]<sup>37</sup> έλαβαν υπόψη ένα συνταξιοδοτικό ταμείο, το οποίο περιλαμβάνει τη συλλογή εισφορών από τον εγγυητή στον εργαζόμενο, τις επενδύσεις των διαθέσιμων ταμείων και την πληρωμή των συντάξεων. Τα ταμεία χρησιμοποιούν μια στρατηγική διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων, τέτοια ώστε όποια απόφαση κι αν ληφθεί η συνολική αξία όλων των περιουσιακών στοιχείων να ξεπερνούν τις υποχρεώσεις του ταμείου με τη μέγιστη πιθανότητα και την ίδια στιγμή να ελαχιστοποιείται το ποσοστό εισφοράς από τον εγγυητή και τον υπάλληλο του ταμείου. Το πρόβλημα έγκειται στην επιλογή του κατάλληλου ποσοστού εισφοράς και στην κατάλληλη στρατηγική επένδυσης για τη χρηματοδότηση των συνταξιοδοτικών ταμείων.

Ορίστηκαν, λοιπόν, ο χρονικός ορίζοντας  $T$ , και το σύνολο των χρονικών αποφάσεων από  $t = 0, \dots, T$  έτσι ώστε για κάθε στιγμή  $t$  μια απόφαση να αντιστοιχεί στην εισφορά του ταμείου και στην κατανομή του χαρτοφυλακίου και τα δύο βασισμένα στα συνταξιοδοτικά ταμεία μια συγκεκριμένης περιόδου. Η απλούστευση του μοντέλου εκφράζεται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω μεταβλητές:

$A_t$ = η αξία όλων των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$W_t$ = οι μισθοί των εργαζομένων τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$y_t$ =ποσοστό εισφοράς και είναι μεταβλητή απόφασης (decision variable),

$l_t$ =οι πληρωμές που έγιναν από τα ταμεία στους απολυμένους τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$x_{n,t}$ =τα επενδυμένα σε  $n$  περιουσιακά στοιχεία χρήματα τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$r_{n,t}$ =οι αποδόσεις των επενδυμένων  $n$  περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$L_t$ =οι υποχρεώσεις των ταμείων τη χρονική στιγμή  $t$ .

Επιπλέον, ορίζεται μια μέτρηση του κόστους των ταμείων συνταξιοδότησης  $h(y_1, \dots, y_T)$ , η οποία θα μπορούσε να είναι ο μέσος όρος του ποσοστού εισφοράς ή η παρούσα αξία όλων των εισφορών  $W_t y_t$ . Βεβαιώνεται, ότι η  $h(y_1, \dots, y_T)$  είναι γραμμική ως προς την  $y_t$  και για κάθε χρονική απόφαση η συνάρτηση ισορροπίας είναι:

<sup>37</sup> *Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVar Constraints, The Journal Of Risk Finance* [2001]

$$\sum_{n=0}^N x_{n,t} = A_t + W_t y_t - l_t, \quad t = 0, \dots, T-1$$

η οποία εξισώνει το άθροισμα όλων των επενδύσεων  $\sum_{n=0}^N x_{n,t}$ , σε περιουσιακά στοιχεία  $A_t$  συν τις εισφορές  $W_t y_t$ , μείον τις υποχρεώσεις  $l_t$ . Το άθροισμα  $\sum_{n=0}^N x_{n,t-1}$  που επενδύεται τη χρονική στιγμή  $t-1$  έχει ως αποτέλεσμα την αξία όλων των περιουσιακών στοιχείων τη στιγμή  $t$ :

$$A_t = \sum_{n=0}^N x_{n,t-1} (1 - r_{n,t}).$$

Σε κάθε χρονική περίοδο  $t = 0, \dots, T$  χρειαζόμαστε μεγάλη βεβαιότητα για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί των υποχρεώσεων:

$$A_t = \sum_{n=0}^N x_{n,t-1} (1 - r_{n,t}) \geq L_t \quad (2)$$

Έτσι, ο *Bogentoft et al. [2001]* θεώρησαν το μοντέλο ελαχιστοποίησης του κόστους των ταμείων

$$\text{minimize } h(y_1, \dots, y_T)$$

βασισμένοι στην *ισορροπία* και στους περιορισμούς των *υποχρεώσεων*.

Ο δείκτης των περιουσιακών στοιχείων προς τις υποχρεώσεις  $A_t/L_t$  αναφέρεται συνήθως ως ποσοστό χρηματοδότησης των συνταξιοδοτικών ταμείων. Το ποσοστό χρηματοδότησης των  $\psi$  μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί αντικαθιστώντας τον περιορισμό της συνάρτησης (2) από:

$$A_t = \sum_{n=0}^N x_{n,t-1} (1 - r_{n,t}) \geq \psi L_t$$

Τιμές του  $\psi > 1$  χρησιμοποιούνται συχνά για να προσθέσουν επιπλέον περιθώριο ασφαλείας στους περιορισμούς. Για παράδειγμα, όταν η αξία του  $\psi = 1.2$ , τότε παίρνουμε επιπλέον περιθώριο ίσο με 20% της αξίας των υποχρεώσεων. Όταν η τελευταία συνάρτηση δεν ικανοποιείται τότε τα ταμεία έχουν απώλειες, δηλαδή υποχρηματοδοτούνται. Χρησιμοποιείται, λοιπόν η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο προκειμένου να γίνει η μέτρηση της ζημιάς και χρησιμοποιείται η διαφορά μεταξύ του δεξιού μέλους και του αριστερού της συνάρτησης  $A_t$ .

$$f_\psi(x, r, L) = \psi L - \sum_{n=0}^N (1 + r_n) x_n$$

Έτσι, η συνάρτηση της  $A_t$  μπορεί να αντικατασταθεί από την  $f_\psi(x, r, L) \leq 0$  με μεγάλη βεβαιότητα.

Ας θέσουμε την πιθανότητα  $P$  για τη μέτρηση του διανύσματος  $(r, L)$  και να ορίσουμε τη συνάρτηση  $\Phi_\psi(x, \zeta)$  ως την αθροιστική πιθανότητα κατανομής της ζημιάς,  $x$  :

$$\Phi_\psi(x, \zeta) = \Pr(f_\psi(x, r, L) \leq \zeta) = \int_{f_\psi(x, r, L) \leq \zeta} P(dr, dL)$$

η οποία, εκφράζει την πιθανότητα η ζημιά  $f_\psi(x, r, L) \leq \zeta$  να μην ξεπερνά την κατώτατη αξία της  $\zeta$ . Τώρα, αν ορίσουμε  $\alpha$  ένα επίπεδο εμπιστοσύνης που δεν παραβιάζει την ανισότητα  $f_\psi(x, r, L) \leq 0$ , τότε αυτή μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\zeta_{\alpha, \psi}(x) \leq 0$$

όπου,

$$\zeta_{\alpha, \psi}(x) = \min\{\zeta \in R: \Phi_\psi(x, \zeta) \geq \alpha\}.$$

Η τιμή του  $\zeta_{\alpha, \psi}(x)$  καλείται η  $\alpha$ -αξία σε κίνδυνο ( $\alpha$ -VaR) και η ανισότητα  $\zeta_{\alpha, \psi}(x) \leq 0$  σημαίνει ότι η απώλεια είναι το λιγότερο 100<sup>α</sup>% αποτέλεσμα και πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση του 0.

Όπως είδαμε παραπάνω, η αξία σε κίνδυνο έχει κάποια μειονεκτήματα, τα οποία δε σχετίζονται με την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Έτσι, λοιπόν, ορίστηκε ένα εναλλακτικό μοντέλο κατά το οποίο η  $\varphi_{\alpha, \psi}(x)^+$  είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη απώλεια που ξεπερνά την αξία σε κίνδυνο και έτσι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο γράφεται:

$$\varphi_{\alpha, \psi}(x) = \lambda \zeta_{\alpha, \psi}(x) + (1 - \lambda) \varphi_{\alpha, \psi}(x)^+$$

Αυτό σημαίνει ότι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο είναι ο σταθμικός μέσος όρος της αξίας σε κίνδυνο και τα βάρη ισούνται:

$$\lambda = (1 - \alpha)^{-1} (\Phi_\psi(x, \zeta_{\alpha, \psi}(x)) - \alpha) \in [0, 1]$$

Όταν η κατανομή των απωλειών είναι συνεχής,  $\lambda = 0$ , τότε έχουμε  $\varphi_{\alpha, \psi}(x)^+ = \varphi_{\alpha, \psi}(x)$ . Η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο μπορεί πολλές φορές να είναι μεγαλύτερη ή ίση της αξίας σε κίνδυνο, τότε ο περιορισμός της  $\zeta_{\alpha, \psi}(x) \leq 0$  μπορεί να αντικατασταθεί από την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο:

$$\varphi_{\alpha, \psi}(x) \leq \omega$$

για κάποιο  $\omega$  με  $\omega = 0$  να δίνει την  $\alpha$ -value-at-risk. Χρησιμοποιώντας αρνητικές τιμές του  $\omega$  μικραίνουν οι περιορισμοί. Για  $i = 1, \dots, I$  ας ορίσουμε τις  $r^i, L^i$  για το δείγμα  $(r, L)$  από την πιθανοτική συνάρτηση κατανομής της  $P$ . Σύμφωνα με τους Rockafellar και Uryasev [2000, 2001] ο περιορισμός  $\varphi_{\alpha, \psi}(x) \leq \omega$  μπορεί να αντικατασταθεί από το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\zeta + \frac{1}{I(1 - \alpha)} \sum_{i=1}^I z^i \leq \omega$$

$$\sum_{n=0}^N (1 + r_n^i) x_n - \zeta \leq z^i$$

$$z^i \geq 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, I$$

όπου,  $z^i$ ,  $i = 1, \dots, I$  είναι ψευτομεταβλητές. Αν ο περιορισμός  $\zeta + \frac{1}{I(1-a)} \sum_{i=1}^I z^i \leq \omega$  εφαρμόζεται σε μια βέλτιστη λύση η αντίστοιχη βέλτιστη αξία του  $\zeta$  θα είναι ίση με την αξία σε κίνδυνο. Αν υπάρχουν πολλές βέλτιστες λύσεις της  $\zeta$  τότε η αξία σε κίνδυνο θα ισούται με το δεξι μέλος της βέλτιστης συνάρτησης και η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο θα ισούται με  $\omega$ .

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## Κεφάλαιο 4

### 4.1 Εφαρμογή σε μοντέλα *Mean – variance*

Η *GAMS* είναι ένα γενικό αλγεβρικό σύστημα που χρησιμοποιείται για την μαθηματική βελτιστοποίηση μαθηματικών και στατιστικών στοιχείων λογισμικού. Τα παραδείγματα που αναλύονται παρακάτω αποτελούν επίλυση γενικών προβλημάτων βελτιστοποίησης που μπορεί να υπόκειται σε ορισμένα είδη περιορισμών. Σε αυτό το σημείο δείχνουμε πώς μπορεί να γίνει η χρήση του για να βρεθούν χαρτοφυλάκια που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο ή μεγιστοποιούν την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Έτσι, λοιπόν, δουλέψαμε παίρνοντας ως δεδομένα τις μηνιαίες τιμές επτά δεικτών, *Dow Jones (DOW)*, *FTSE100*, *CAC40*, *DAX*, *Treasury Yield 30 Years (TYX)*, *Interest Rate 10 Years (TNX)*, *Treasury Yield 5 Years (FVX)*, εκ των οποίων τα τέσσερα αποτελούν χρηματιστηριακούς δείκτες και τα τρία ομολογιακούς δείκτες.

Κάνοντας χρήση της *GAMS* το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται ευκολότερο. Αρχικά, υπολογίσαμε για το mean-variance μοντέλο τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων με *expanding* παράθυρο για τα έτη 1992-2011 χρησιμοποιώντας, δηλαδή τα βάρη του 1992-2002 για να βρούμε τις αποδόσεις του 1992-2003 και φτάνοντας ως το 1992-2011, έχοντας πάντα ως αρχή το έτος 1992 και θεωρώντας το ακίνδυνο επιτόκιο ίσο με 3,5%. Στους παρακάτω πίνακες, παρουσιάζονται τα βάρη των περιουσιακών στοιχείων ( $w_i$ ) για τα χαρτοφυλάκια της *Variance* καθώς και η διακύμανση και απόδοση του χαρτοφυλακίου υπολογισμένες σε μηνιαία βάση.

Το χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διασποράς υπολογίστηκε θεωρώντας την παράμετρο  $\beta = 1$ .

#### *Minimum Variance*

<i>DATE</i>	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
<b>1992-2002</b>	0,17	0,25	0,00	0,00	0,58	0,00	0,00	0,378	-0,001
<b>1992-2003</b>	0,01	0,39	0,10	0,00	0,50	0,00	0,00	0,314	0,006
<b>1992-2004</b>	0,01	0,40	0,11	0,00	0,48	0,00	0,00	0,302	0,008
<b>1992-2005</b>	0,01	0,42	0,11	0,00	0,46	0,00	0,00	0,293	0,013
<b>1992-2006</b>	0,01	0,42	0,12	0,00	0,45	0,00	0,00	0,280	0,02
<b>1992-2007</b>	0,01	0,43	0,12	0,00	0,44	0,00	0,00	0,283	0,019
<b>1992-2008</b>	0,01	0,47	0,11	0,00	0,41	0,00	0,00	0,370	-0,006
<b>1992-2009</b>	0,01	0,50	0,11	0,00	0,38	0,00	0,00	0,398	0,015
<b>1992-2010</b>	0,01	0,50	0,11	0,00	0,37	0,00	0,00	0,431	0,016
<b>1992-2011</b>	0,02	0,54	0,10	0,00	0,35	0,00	0,00	0,478	0,007

Το χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης υπολογίστηκε θεωρώντας την παράμετρο  $\beta = 0$ . Οι τιμές των δεικτών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

#### Maximum Return

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,286	0,086
1992-2003	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	10,176	0,097
1992-2004	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	9,398	0,092
1992-2005	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,733	0,085
1992-2006	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,582	0,09
1992-2007	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,556	0,097
1992-2008	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,585	0,061
1992-2009	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,601	0,069
1992-2010	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,583	0,074
1992-2011	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6,182	0,066

Το χαρτοφυλάκιο της *mean - variance* υπολογίστηκε θεωρώντας την παράμετρο  $\beta = 0,5$ . Έτσι, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις τιμές των δεικτών. Οι τελικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου κυμαίνονται από 0,4% έως 3,4%.

#### Mean Variance

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,40	0,16	0,00	0,00	0,44	0,00	0,00	0,387	0,022
1992-2003	0,01	0,42	0,15	0,03	0,39	0,00	0,00	0,273	0,015
1992-2004	0,01	0,43	0,16	0,03	0,37	0,00	0,00	0,259	0,018
1992-2005	0,01	0,44	0,17	0,04	0,33	0,00	0,00	0,245	0,026
1992-2006	0,01	0,44	0,18	0,05	0,32	0,00	0,00	0,233	0,034
1992-2007	0,01	0,44	0,19	0,06	0,30	0,00	0,00	0,231	0,034
1992-2008	0,01	0,51	0,15	0,02	0,30	0,00	0,00	0,331	0,004
1992-2009	0,02	0,53	0,13	0,01	0,31	0,00	0,00	0,378	0,02
1992-2010	0,02	0,53	0,13	0,02	0,30	0,00	0,00	0,398	0,021
1992-2011	0,02	0,60	0,11	0,00	0,27	0,00	0,00	0,475	0,014

Στη συνέχεια αναλύσαμε τα παραπάνω χαρτοφυλάκια, θέτοντας ως ανώτερο όριο για τους δείκτες την τιμή 0,3.

**Minimum Variance with Diversification Constraints**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,25	0,30	0,00	0,00	0,30	0,15	0,00	0,293	0,012
1992-2003	0,00	0,30	0,20	0,09	0,30	0,10	0,00	0,216	0,015
1992-2004	0,00	0,30	0,22	0,10	0,30	0,09	0,00	0,212	0,018
1992-2005	0,00	0,30	0,24	0,10	0,30	0,07	0,00	0,211	0,025
1992-2006	0,00	0,30	0,23	0,11	0,30	0,07	0,00	0,205	0,032
1992-2007	0,00	0,30	0,23	0,11	0,30	0,06	0,00	0,209	0,031
1992-2008	0,00	0,30	0,24	0,11	0,30	0,04	0,00	0,274	0,003
1992-2009	0,00	0,30	0,25	0,12	0,30	0,03	0,00	0,302	0,021
1992-2010	0,01	0,30	0,26	0,13	0,00	0,00	0,00	0,331	0,024
1992-2011	0,01	0,30	0,26	0,12	0,30	0,00	0,00	0,367	0,012

Θεωρήσαμε τους ίδιους περιορισμούς για τα βάρη των δεικτών του μοντέλου μεγιστοποίησης της απόδοσης και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

**Maximum Return with Diversification Constraints**

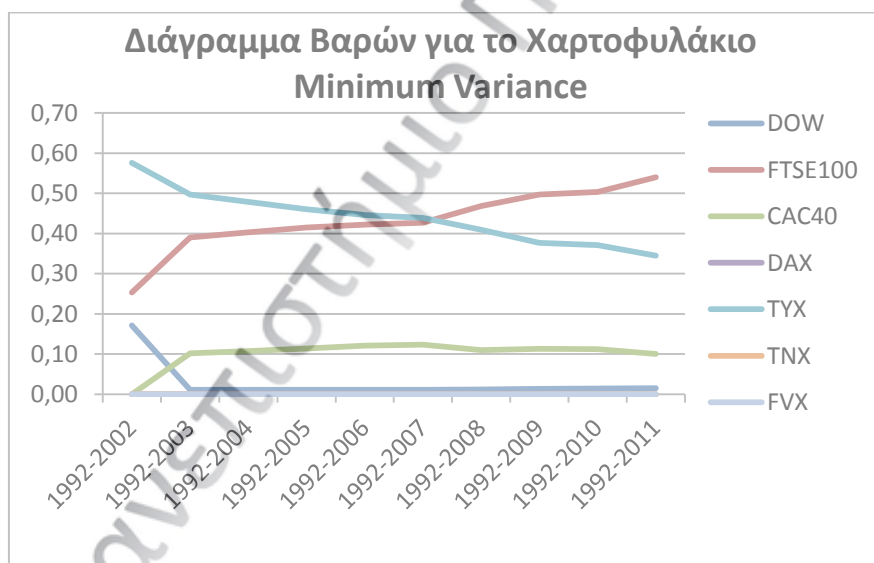
DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,498	0,058
1992-2003	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,202	0,069
1992-2004	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,113	0,070
1992-2005	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,044	0,075
1992-2006	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,975	0,081
1992-2007	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,928	0,081
1992-2008	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,895	0,048
1992-2009	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,872	0,057
1992-2010	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,859	0,059
1992-2011	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,861	0,053

Με τον ίδιο τρόπο εργαστήκαμε για το χαρτοφυλάκιο της *mean – variance*. Τα βάρη των δεικτών παρουσιάζονται παρακάτω. Παρατηρούμε ότι κατά τα έτη 1992-2007, η απόδοση του χαρτοφυλακίου απέχει 0,1% από τη μέγιστη τιμή της.

### Mean Variance with Diversification Constraints

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,30	0,30	0,01	0,00	0,30	0,09	0,00	0,307	0,019
1992-2003	0,01	0,30	0,26	0,14	0,30	0,00	0,00	0,249	0,026
1992-2004	0,01	0,30	0,26	0,14	0,30	0,00	0,00	0,238	0,027
1992-2005	0,01	0,30	0,26	0,14	0,30	0,00	0,00	0,233	0,033
1992-2006	0,01	0,30	0,25	0,14	0,30	0,00	0,00	0,224	0,039
1992-2007	0,01	0,30	0,25	0,14	0,30	0,00	0,00	0,222	0,038
1992-2008	0,01	0,30	0,24	0,15	0,30	0,00	0,00	0,283	0,008
1992-2009	0,01	0,30	0,25	0,14	0,30	0,00	0,00	0,306	0,024
1992-2010	0,01	0,30	0,23	0,16	0,30	0,00	0,00	0,322	0,025
1992-2011	0,02	0,30	0,24	0,15	0,30	0,00	0,00	0,356	0,013

Τα βάρη των χαρτοφυλακίων παρουσιάζονται διαγραμματικά. Όπως βλέπουμε από το χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης ο δείκτης Dow παραμένει σταθερός από τη δεκαετία 1992-2003 έως και την 1992-2010 ενώ στο τέλος παρατηρείται μια μικρή αύξηση της τάξης του 1%. Οι υπόλοιποι δείκτες παρουσιάζουν μικρές αλλαγές στις τιμές τους, ενώ το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν επενδύει καθόλου στους δείκτες Dax, TNX και FVX.

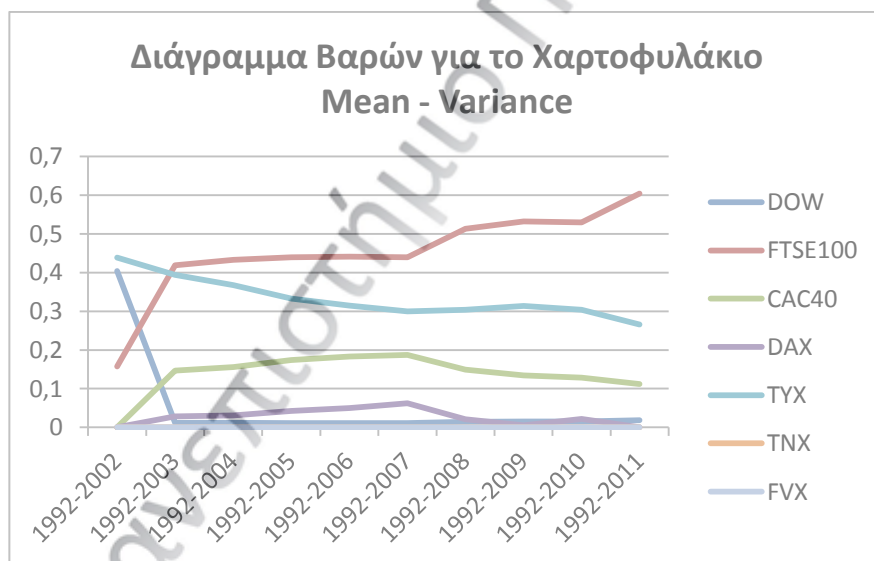


Το χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης επενδύει μόνο στον δείκτη Dow και οι διακυμάνσεις του είναι πολύ υψηλότερες από αυτές του χαρτοφυλακίου ελαχιστοποίησης της διακύμανσης.

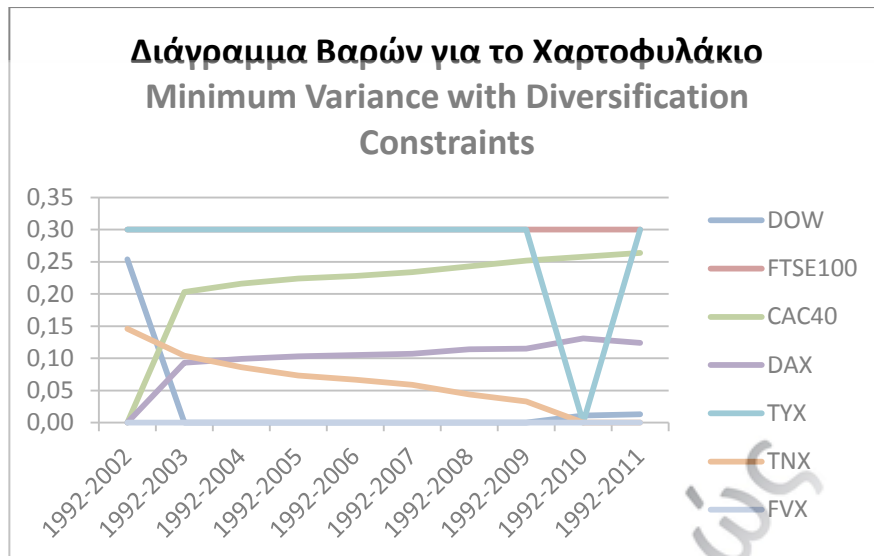




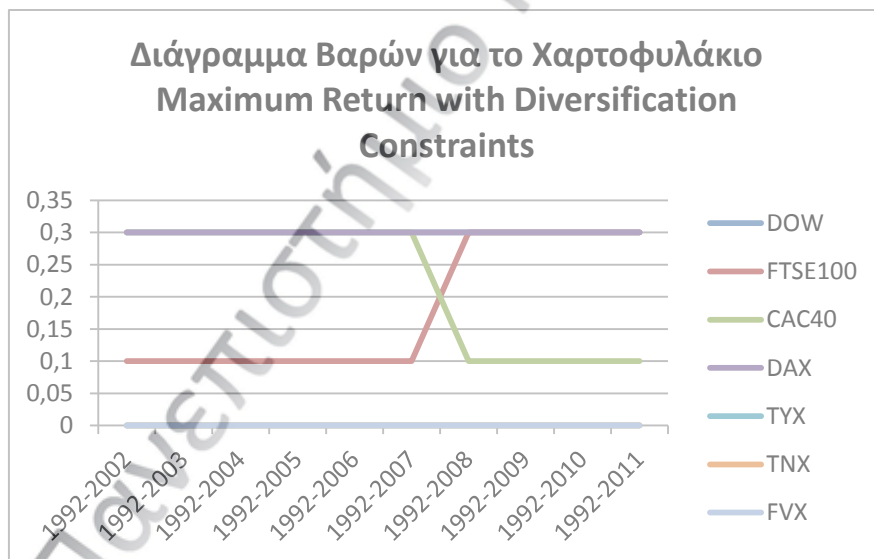
Το χαρτοφυλάκιο της mean-variance παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις και τα βάρη των δεικτών είναι πολύ υψηλότερα από τα υπόλοιπα χαρτοφυλάκια με τον FTSE1000 να παρουσιάζει τις μεγαλύτερες τιμές για το δείγμα αγγίζοντας το 60%.



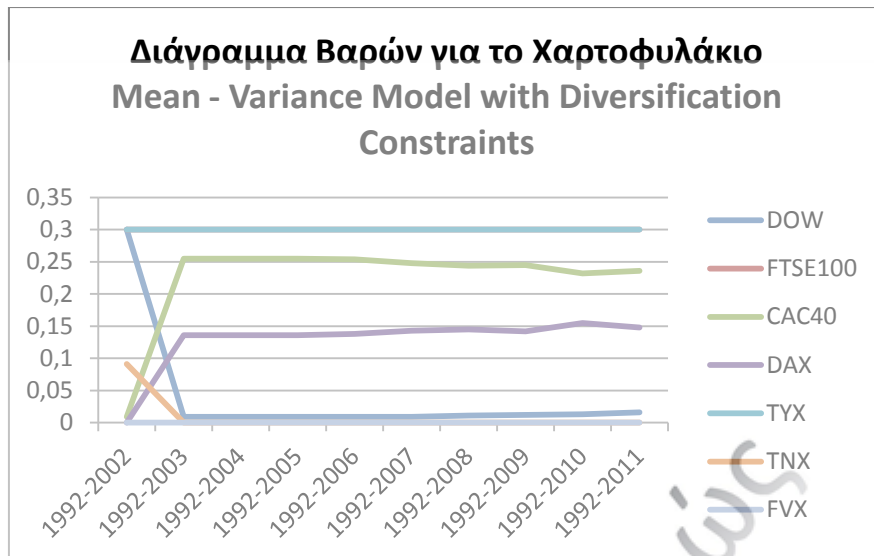
Με τις επιδράσεις των περιορισμών διαφοροποίησης τα χαρτοφυλάκια επενδύουν σε περισσότερα περιουσιακά στοιχεία. Συγκεκριμένα, ο Dax αυξήθηκε φτάνοντας το 13%, ενώ στο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διασποράς παρέμεινε σε μηδενικά επίπεδα μέχρι το τέλος. Ο FTSE100 και ο TYX, αντίθετα, έφτασαν στο όριο των περιορισμών παραμένοντας σταθεροί.



Στο χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης με περιορισμούς υπάρχουν ακόμα περισσότεροι δείκτες που φτάνουν το 30%, όπως είναι ο CAC40 και ο Dow, με τον Dax να παραμένει στα ίδια επίπεδα, ενώ ο FTSE100 κινείται σε χαμηλότερα επίπεδα και φτάνει την τιμή 0,3 από το 1992-2008 ως το τέλος.



Στο μοντέλο της *mean – variance* με περιορισμούς οι δείκτες κινούνται στο σύνολό τους στα ίδια περίπου επίπεδα με εκείνο της ελαχιστοποίησης της διακύμανσης με περιορισμούς. Αναλυτικότερα, ο δείκτης TNX παρουσιάζει μια μικρή αύξηση κατά τα πρώτα έτη, ενώ στη συνέχεια παραμένει μηδενικός. Ο Dow μειώνεται απότομα από το 30% στο 1% και τα υψηλότερα επίπεδα κατέχουν ο FTSE100 και ο TYX, οι οποίοι παραμένουν στο 30%.



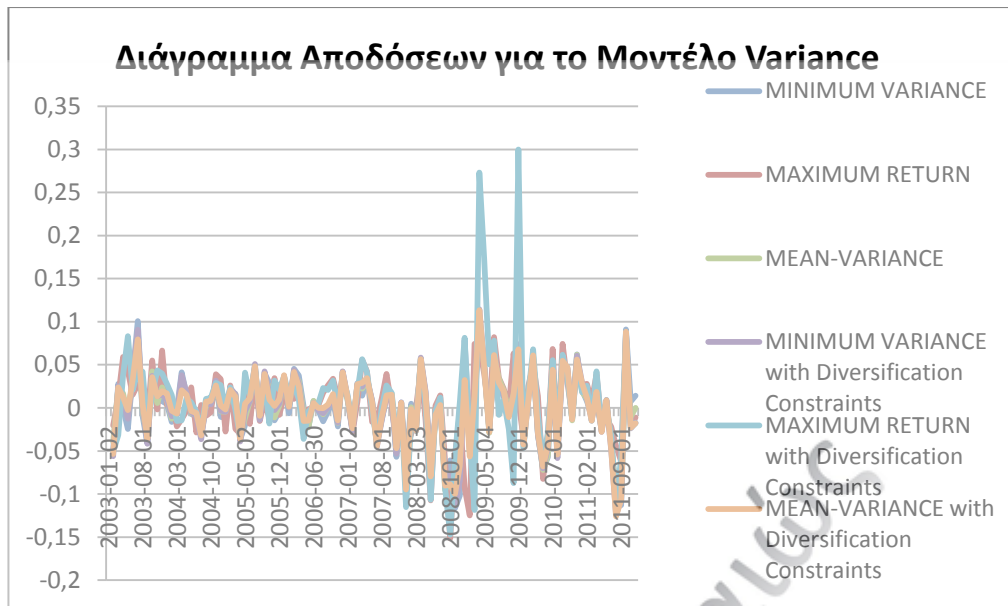
Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι συνολικές αποδόσεις ( $R_\omega$ ) των χαρτοφυλακίων. Με βάση τον τύπο που είδαμε στην παράγραφο 3.2:

$$R_\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i,$$

$$\text{με} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Οι αποδόσεις που απεικονίζονται στο Παράρτημα 1, υπολογίστηκαν λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά τα βάρη και τις τιμές των δεικτών του προηγούμενου έτους. Οι ημερομηνίες αφορούν τα τελικά έτη και όλες ξεκινούν από το έτος 1992.

Παρατηρώντας το παρακάτω διάγραμμα, μπορούμε να αντιληφθούμε καλύτερα την πορεία των αποδόσεων. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το μοντέλο αυτό ξεκινάει με αρνητικές τιμές σε όλα τα χαρτοφυλάκια με τα τρία πρώτα στο σύνολό τους να κινούνται σε σχετικά ίδια επίπεδα. Στη συνέχεια, εισάγαμε στο μοντέλο κάποιους περιορισμούς διαφοροποίησης, θέτοντας όρια στην κατώτατη και ανώτατη τιμή που επιθυμούμε να πάρουν τα βάρη με χαμηλότερη τιμή τη μηδενική και υψηλότερη την 0,3. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει σημαντική διαφορά στις τιμές των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, με την επίδραση των περιορισμών διαφοροποίησης στο μοντέλο, σημειώθηκε μεγάλη βελτίωση στις αρνητικές τιμές, βλέπουμε ότι μειώνονται οι απώλειες και στο χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς διαφοροποίησης, η απόδοση παίρνει τη μέγιστη τιμή της φτάνοντας το 30% στα τέλη του 2009, με την αμέσως προηγούμενη τιμή να κυμαίνεται στο 27,32% τον Απρίλιο του ίδιου έτους.



Επίσης, υπολογίστηκαν κάποια περιγραφικά στατιστικά μέτρα προκειμένου να γίνει πιο κατανοητή η συμπεριφορά των χαρτοφυλακίων. Από τις μέσες τιμές των χαρτοφυλακίων επιβεβαιώνεται η αποτελεσματικότητα της διαφοροποίησης με αυτά που υπόκεινται σε περιορισμούς να υπερέχουν από τα άλλα. Εξίσου σημαντικό είναι να δούμε ότι η αξία σε κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς είναι αρκετά μειωμένη σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης και κοντά στο 3%. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο δείκτης Sharpe δείχνει ότι το καλύτερο χαρτοφυλάκιο είναι αυτό της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς διαφοροποίησης με τιμή 13,8%.

	MINIMUM VARIANCE	MAXIMUM RETURN	MEAN-VARIANCE	MINIMUM VARIANCE with Diversification Constraints	MAXIMUM RETURN with Diversification Constraints	MEAN-VARIANCE with Diversification Constraints
<b>Mean</b>	0,00014	0,00329	0,00055	0,00010	0,00833	0,00066
<b>Median</b>	0,00294	0,00517	0,00526	0,00491	0,00953	0,00622
<b>Standard Deviation</b>	0,04179	0,04114	0,03941	0,04270	0,06038	0,04161
<b>Value-at-Risk</b>	-0,07095	-0,06210	-0,08029	-0,08196	-0,09124	-0,08557
<b>Conditional Value-at-Risk</b>	-0,09852	-0,10349	-0,09410	-0,10097	-0,11544	-0,10098
<b>Sharpe Ratio</b>	0,00332	0,07997	0,01403	0,00236	0,13802	0,01594

Στη συνέχεια, ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία για το μοντέλο της *Variance* δουλεύοντας, τώρα, με *rolling* παράθυρο στα έτη χρησιμοποιώντας, τα έτη 1992-2002, 1993-2003, 1994-2004 κ. ο. κ. παίρνοντας, δηλαδή, κάθε φορά την τελευταία δεκαετία.

**Minimum Variance**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,17	0,25	0,00	0,00	0,58	0,00	0,00	0,378	-0,001
1993-2003	0,01	0,42	0,11	0,00	0,47	0,00	0,00	0,309	0,009
1994-2004	0,01	0,43	0,12	0,00	0,44	0,00	0,00	0,313	0,007
1995-2005	0,01	0,46	0,14	0,00	0,39	0,00	0,00	0,309	0,020
1996-2006	0,01	0,46	0,16	0,00	0,38	0,00	0,00	0,312	0,028
1997-2007	0,30	0,41	0,00	0,00	0,29	0,00	0,00	0,298	0,022
1998-2008	0,29	0,44	0,00	0,00	0,27	0,00	0,00	0,419	-0,022
1999-2009	0,32	0,43	0,00	0,00	0,26	0,00	0,00	0,429	-0,002
2000-2010	0,32	0,43	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,485	-0,014
2001-2011	0,33	0,46	0,00	0,00	0,21	0,00	0,00	0,559	-0,013

**Maximum Return**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,286	0,086
1993-2003	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	11,094	0,104
1994-2004	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	11,093	0,090
1995-2005	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	11,087	0,093
1996-2006	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,694	0,097
1997-2007	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,693	0,093
1998-2008	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,710	0,012
1999-2009	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,711	0,016
2000-2010	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,300	0,005
2001-2011	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,296	0,010

**Mean Variance**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,404	0,157	0,00	0,00	0,439	0,00	0,00	0,387	0,022
1993-2003	0,01	0,44	0,16	0,02	0,37	0,00	0,00	0,277	0,018
1994-2004	0,01	0,47	0,15	0,00	0,37	0,00	0,00	0,292	0,012
1995-2005	0,01	0,54	0,24	0,00	0,21	0,00	0,00	0,308	0,040
1996-2006	0,01	0,51	0,24	0,00	0,25	0,00	0,00	0,310	0,041
1997-2007	0,38	0,46	0,02	0,00	0,13	0,00	0,00	0,303	0,037
1998-2008	0,37	0,44	0,00	0,00	0,19	0,00	0,00	0,424	-0,015
1999-2009	0,35	0,40	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,426	-0,002
2000-2010	0,37	0,41	0,00	0,00	0,22	0,00	0,00	0,483	0,012
2001-2011	0,40	0,44	0,00	0,00	0,16	0,00	0,00	0,565	-0,010

**Minimum Variance with Diversification Constraints**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
1992-2002	0,25	0,30	0,00	0,00	0,30	0,15	0,00	0,293	0,012
1993-2003	0,00	0,30	0,21	0,09	0,30	0,10	0,00	0,223	0,019
1994-2004	0,00	0,30	0,24	0,10	0,30	0,06	0,00	0,240	0,016
1995-2005	0,01	0,30	0,29	0,10	0,30	0,00	0,00	0,287	0,037
1996-2006	0,01	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,295	0,045
1997-2007	0,30	0,30	0,05	0,05	0,30	0,00	0,00	0,255	0,026

<b>1998-2008</b>	0,30	0,30	0,04	0,06	0,30	0,00	0,00	0,360	0,021
<b>1999-2009</b>	0,30	0,30	0,07	0,03	0,30	0,00	0,00	0,380	-0,002
<b>2000-2010</b>	0,30	0,30	0,07	0,04	0,30	0,00	0,00	0,429	-0,016
<b>2001-2011</b>	0,30	0,30	0,06	0,04	0,30	0,00	0,00	0,497	-0,021

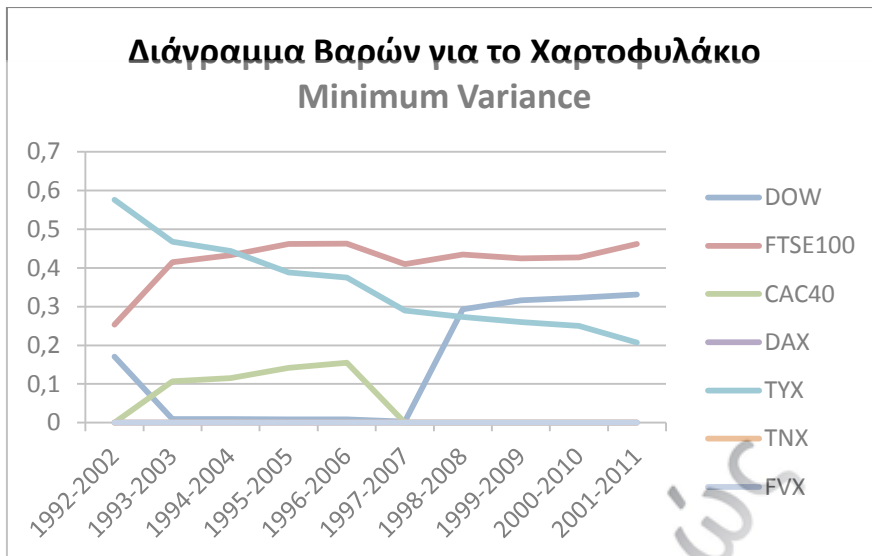
**Maximum Return with Diversification Constraints**

<b>DATE</b>	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
<b>1992-2002</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,498	0,058
<b>1993-2003</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,293	0,077
<b>1994-2004</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,292	0,060
<b>1995-2005</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,302	0,085
<b>1996-2006</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	1,307	0,084
<b>1997-2007</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,322	0,071
<b>1998-2008</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,432	0,005
<b>1999-2009</b>	0,30	0,10	0,30	0,30	0,00	0,00	0,00	0,418	0,005
<b>2000-2010</b>	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,398	-0,007
<b>2001-2011</b>	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,00	0,468	-0,008

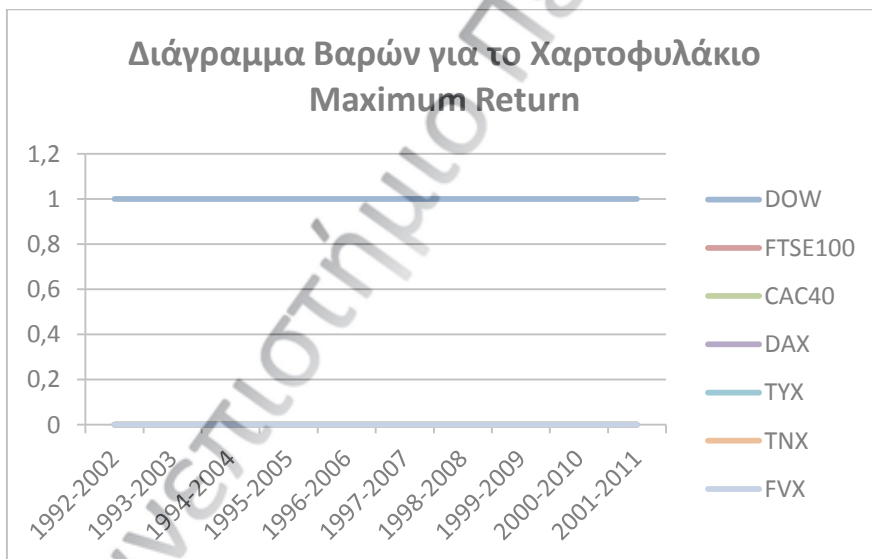
**Mean Variance with Diversification Constraints**

<b>DATE</b>	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	PORTVARIANCE FINAL	PORTRETURN FINAL
<b>1992-2002</b>	0,30	0,30	0,01	0,00	0,30	0,09	0,00	0,307	0,019
<b>1993-2003</b>	0,01	0,30	0,26	0,13	0,30	0,00	0,00	0,256	0,030
<b>1994-2004</b>	0,01	0,30	0,27	0,12	0,30	0,00	0,00	0,265	0,021
<b>1995-2005</b>	0,01	0,30	0,29	0,10	0,30	0,00	0,00	0,287	0,037
<b>1996-2006</b>	0,00	0,30	0,30	0,10	0,30	0,00	0,00	0,294	0,045
<b>1997-2007</b>	0,30	0,30	0,10	0,09	0,22	0,00	0,00	0,221	0,036
<b>1998-2008</b>	0,30	0,30	0,05	0,07	0,29	0,00	0,00	0,349	-0,020
<b>1999-2009</b>	0,30	0,30	0,05	0,05	0,30	0,00	0,00	0,379	-0,001
<b>2000-2010</b>	0,30	0,30	0,04	0,06	0,30	0,00	0,00	0,428	-0,015
<b>2001-2011</b>	0,30	0,30	0,03	0,08	0,29	0,00	0,00	0,490	-0,019

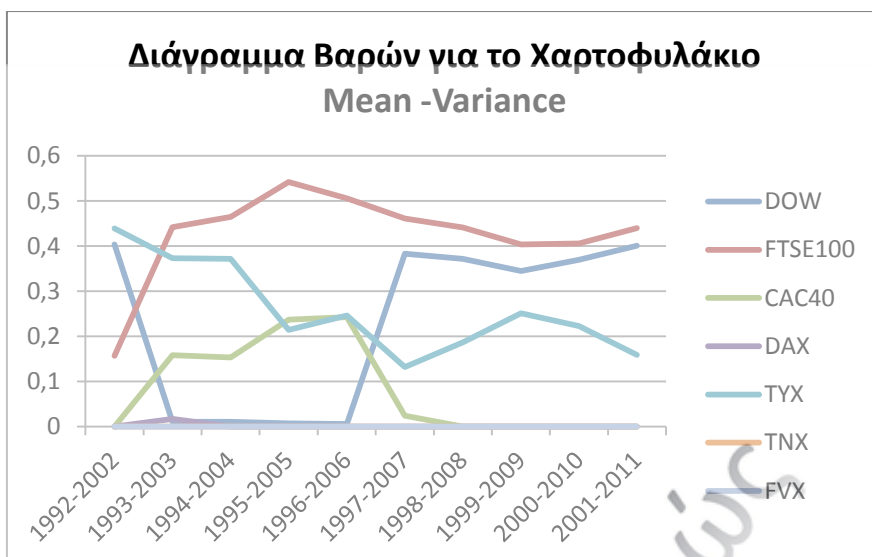
Τα αντίστοιχα διαγράμματα των βαρών παρουσιάζουν αρκετές διαφορές απ' τα προηγούμενα. Ειδικότερα, ο δείκτης Cac40 στο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της απόδοσης (*expanding*) παρέμενε σταθερός για αρκετά χρόνια, ενώ εδώ, μέχρι τη δεκαετία του 1996-2006 οι τιμές του κυμαίνονται από 11% έως 16% και στη συνέχεια πέφτουν στο μηδέν, όπου και παραμένουν μέχρι το τέλος.



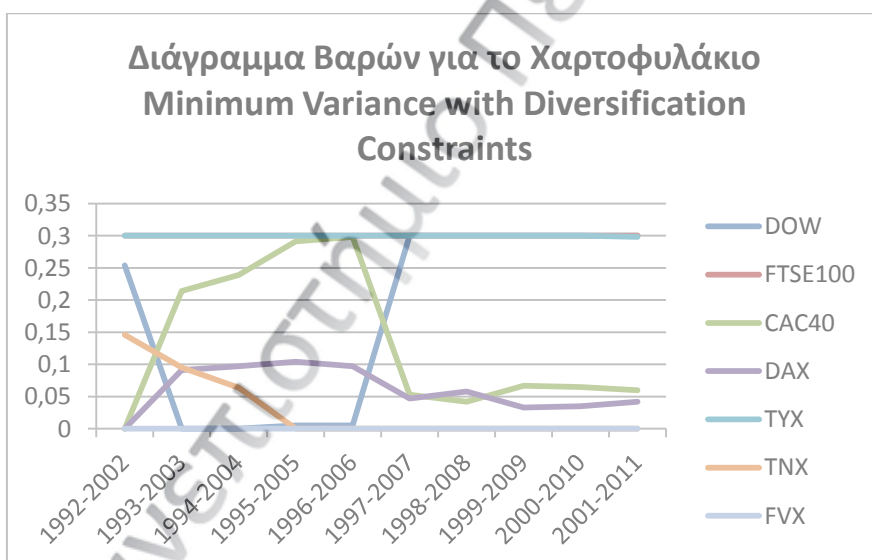
Το χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης κινείται στα ίδια επίπεδα με το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης με παράθυρο *expanding* για τα έτη, καθώς επενδύονται και πάλι στο δείκτη Dow.



Επίσης, το χαρτοφυλάκιο της *mean - variance* παρουσιάζει μεγάλες διαφορές στις τιμές απ' αυτό με *expanding*. Οι δείκτες Dow, FTSE100, TYX παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις και παραμένουν σταθερές για μικρότερα διαστήματα.

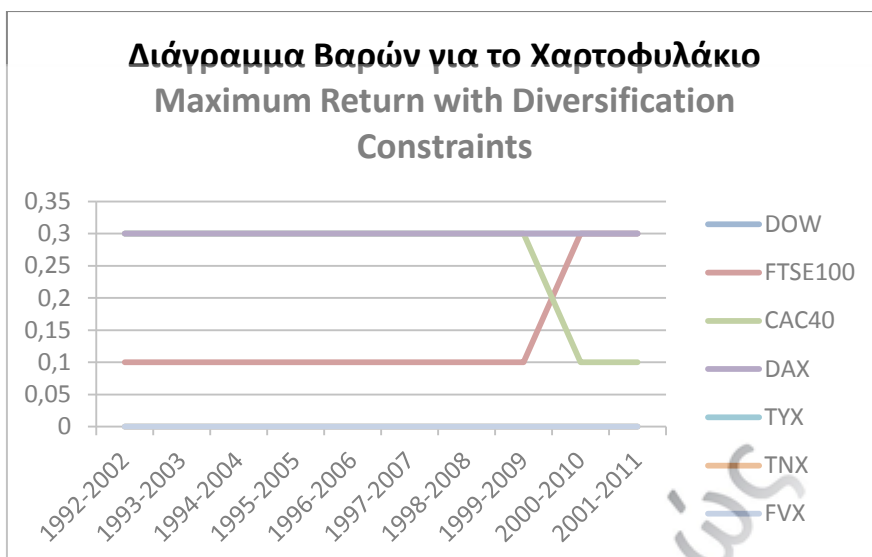


Για το χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διασποράς με περιορισμούς ο δείκτης Cac40 παίρνει τιμές από 5% έως και 30%, ενώ οι δείκτες FTSE100 και TYX παραμένουν στα υψηλότερα επίπεδα του χαρτοφυλακίου με τιμή 0,3.

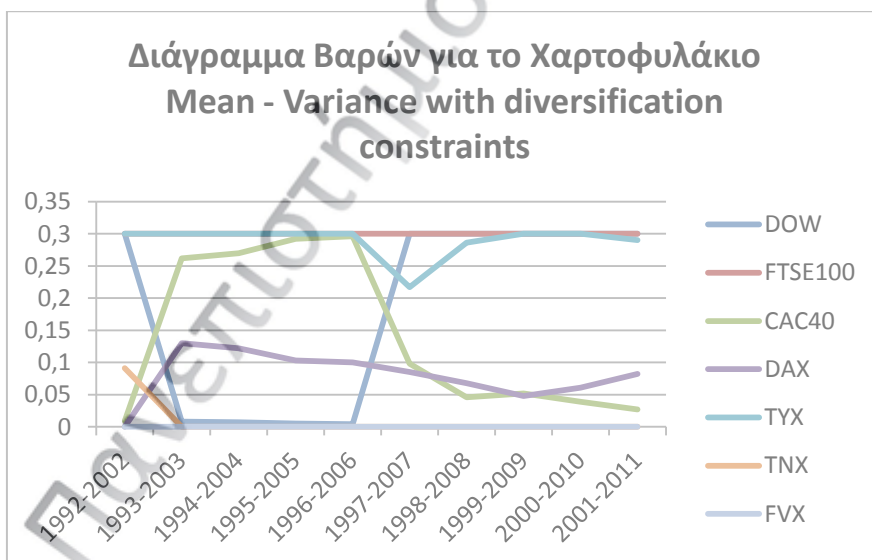


Το διάγραμμα μεγιστοποίησης της απόδοσης με περιορισμούς (*rolling*) δε διαφέρει από το αντίστοιχο με παράθυρο *expanding* στα έτη με τη διαφορά ότι ο δείκτης FTSE100 παραμένει στο 10% μέχρι τα τέλη της δεκαετίας 1999-2009, όχι μέχρι το 1992-2007 και μετά αυξάνεται κατά 20 ποσοστιαίες μονάδες, φτάνοντας το όριο των περιορισμών.



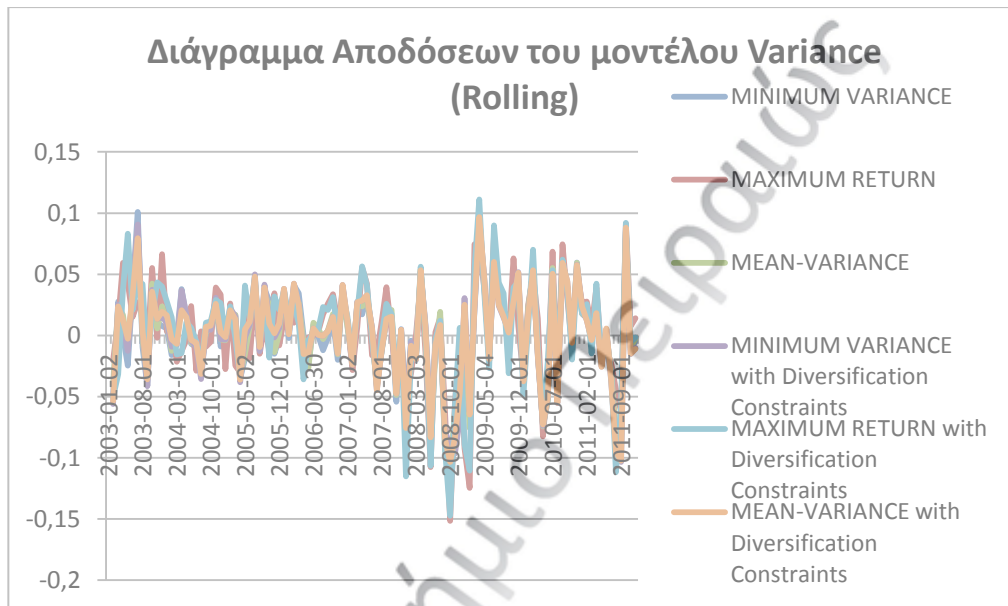


Οι τιμές των δεικτών για το χαρτοφυλάκιο της *mean – variance* με περιορισμούς ακολουθούν την ίδια πορεία από το αντίστοιχο με παράθυρο *expanding* στα έτη, με τη διαφορά ότι ο δείκτης CAC40 παίρνει μικρότερες τιμές, οι οποίες κυμαίνονται από 1% έως 30%. Ο Dow από το 1% παίρνει κατευθείαν την τιμή 0,3 παραμένοντας μηδενικός τη δεκαετία 1996-2006.



Στο παράρτημα 2, παρουσιάζονται οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του μοντέλου υπολογισμένες κατά τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τη δεκαετία του 1992-2002 για την εκτίμηση των αποδόσεων 1993-2003, τη δεκαετία 1993-2003 για τις αποδόσεις των ετών 1994-2004 κ. ο. κ. Με τον τρόπο αυτό οι αποδόσεις της δεκαετίας 1993-2003 υπολογίζονται θεωρώντας τα έτη 1992-2002 εκτός δείγματος (*out-of-sample*), ενώ τη δεκαετία 1993-2003 εντός δείγματος (*in-sample*) και συνεχίζοντας έτσι μέχρι τα έτη 2001-2011.

Παράλληλα, εμφανίζονται οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου διαγραμματικά. Οι τιμές κινούνται γύρω από τα ίδια επίπεδα με το μοντέλο της Variance με *expanding*. Ωστόσο, τον Απρίλιο της δεκαετίας 1999-2009 το χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς διαφοροποίησης παίρνει τη μέγιστη τιμή για το δείγμα, λίγους μήνες νωρίτερα, δηλαδή, απ' το μοντέλο της Variance με *expanding* και κατά δύο μονάδες περίπου λιγότερες. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι με το πέρασμα των ετών οι διαφορές στις τιμές είναι μεγαλύτερες και οφείλονται στη μη επίδραση των προηγούμενων κάθε φορά δεκαετιών.



Τα περιγραφικά στατιστικά μέτρα για το μοντέλο Variance με *rolling* στα έτη διαφέρουν κατά πολύ από το προηγούμενο μοντέλο. Τα χαρτοφυλάκια της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς και χωρίς περιορισμούς κινούνται γύρω από τα ίδια επίπεδα μέσης τιμής. Επίσης, ο δείκτης Sharpe δείχνει ότι καλύτερο χαρτοφυλάκιο από τα δύο παραπάνω είναι αυτό της μέγιστης απόδοσης, καθώς το ίδιο χαρτοφυλάκιο με περιορισμούς έχει μεγαλύτερη τυπική απόκλιση, γι' αυτό ο δείκτης κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα.

	MINIMUM VARIANCE ROLLING	MAXIMUM RETURN ROLLING	MEAN-VARIANCE ROLLING	MINIMUM VARIANCE with Diversification Constraints ROLLING	MAXIMUM RETURN with Diversification Constraints ROLLING	MEAN-VARIANCE with Diversification Constraints ROLLING
<b>Mean</b>	0,00072	0,00386	0,00166	0,00136	0,0039	0,0016
<b>Median</b>	0,00229	0,00758	0,00299	0,00485	0,0102	0,0057
<b>Standard Deviation</b>	0,03858	0,04121	0,03790	0,03953	0,0449	0,0391
<b>Value-at-Risk</b>	-0,07386	-0,06210	-0,07514	-0,07595	-0,0918	-0,0806
<b>Conditional Value-at-Risk</b>	-0,08487	-0,10349	-0,08867	-0,08969	-0,1141	-0,0921
<b>Sharpe Ratio</b>	0,01872	0,09364	0,04380	0,03436	0,0868	0,0408

## 4.2 Εφαρμογή σε μοντέλο *Mean – Conditional Value – at – risk*

Για το μοντέλο της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο εξετάσαμε τα βάρη των περιουσιακών στοιχείων για τα μοντέλα ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο και μεγιστοποίησης της απόδοσης επενδύοντας 100 νομισματικές μονάδες σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα μοντέλα της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο με περιορισμούς διαφοροποίησης δεν ανταποκρίθηκαν στους στόχους που βάλαμε στο πρόγραμμα της GAMS γι' αυτό το λόγο δεν έχουν μοντελοποιηθεί. Για τα ακόλουθα μοντέλα της *CVar* δουλέψαμε μόνο με *rolling* στα έτη.

*Minimum CVar Χαρτοφυλάκιο 1*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,355
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,588
1994-2004	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,754
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,588
1996-2006	0,00	0,00	0,16	0,03	0,81	0,00	0,00	1	9,037	9,037	99,843
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,563
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,028
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,613
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,146
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	98,653

Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο εμφανίζει κέρδη τη δεκαετία 1996-2006, αφού από τις 100 ν. μ. που αρχικά επενδύθηκαν, υπάρχει μια αύξηση της τάξης των 0,036 ποσοστιαίων μονάδων.

*Minimum CVar Χαρτοφυλάκιο 2*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,627
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,843
1994-2004	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,953
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,825
1996-2006	0,00	0,01	0,16	0,03	0,80	0,00	0,00	1	9,039	9,039	100,036
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,806
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,251
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,716
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,341
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	98,941

Σ' αυτό το χαρτοφυλάκιο εμφανίζονται συχνότερα κέρδη, με τα υψηλότερα να αντιστοιχούν στις δεκαετίες 1994-2004, 1996-2006.

*Minimum CVar Χαρτοφυλάκιο 3*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	99,899
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,099
1994-2004	0,17	0,36	0,06	0,00	0,41	0,00	0,00	1	7,635	7,635	100,152
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,061
1996-2006	0,00	0,14	0,12	0,17	0,58	0,00	0,00	1	9,081	9,081	100,230
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,049
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,474
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,819
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,535
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,229

Εδώ, το χαρτοφυλάκιο εμφανίζει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα. Τις έξι πρώτες δεκαετίες εμφανίζει κέρδη, ενώ στη συνέχεια μειώνεται απότομα παίρνοντας τη χαμηλότερη τιμή κατά την τελευταία δεκαετία.

*Minimum CVar Χαρτοφυλάκιο 4*

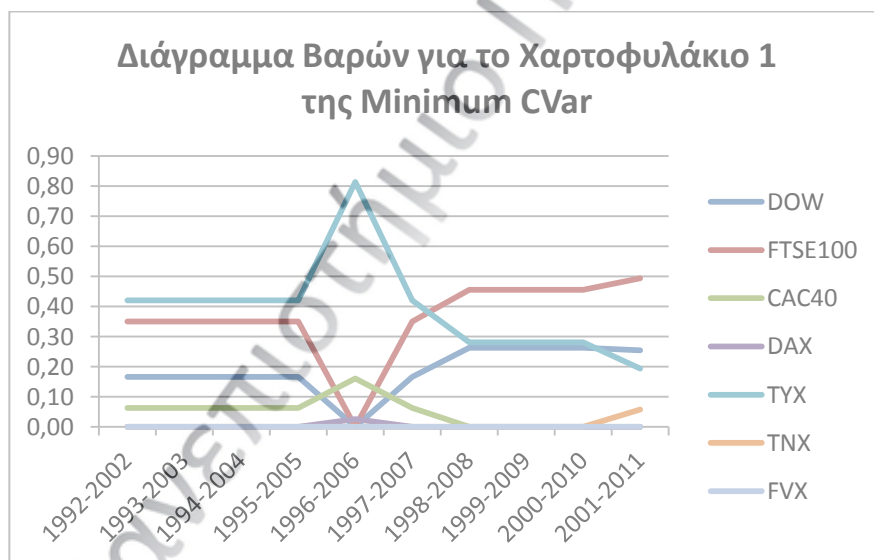
DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,20	0,34	0,05	0,04	0,37	0,00	0,00	1	7,683	7,683	100,171
1993-2003	0,27	0,33	0,03	0,10	0,27	0,00	0,00	1	7,877	7,877	100,354
1994-2004	0,32	0,33	0,02	0,14	0,19	0,00	0,00	1	7,635	7,635	100,152
1995-2005	0,24	0,34	0,04	0,08	0,31	0,00	0,00	1	7,796	7,796	100,298
1996-2006	0,00	0,27	0,08	0,30	0,36	0,00	0,00	1	9,123	9,123	100,423
1997-2007	0,28	0,33	0,03	0,11	0,25	0,00	0,00	1	7,911	7,911	100,292
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,697
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,922
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,730
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,517

Στον επόμενο πίνακα του τελευταίου χαρτοφυλακίου ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο, βλέπουμε ότι κατά τη δεκαετία 1998-2008, εμφανίζεται η μικρότερη μέση τιμή του χαρτοφυλακίου.

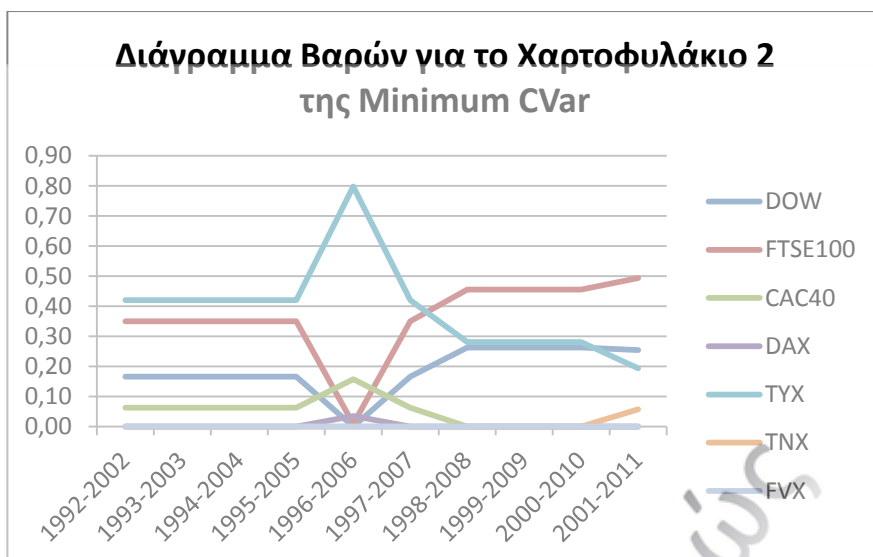
**Minimum CVar Χαρτοφυλάκιο 5**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,38	0,40	0,03	0,09	0,09	0,00	0,00	1	8,354	8,354	100,443
1993-2003	0,48	0,44	0,02	0,06	0,00	0,00	0,00	1	9,110	9,110	100,609
1994-2004	0,56	0,31	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	1	10,000	10,000	100,550
1995-2005	0,39	0,41	0,04	0,08	0,08	0,00	0,00	1	8,398	8,398	100,534
1996-2006	0,00	0,39	0,06	0,41	0,14	0,00	0,00	1	9,299	11,000	100,617
1997-2007	0,37	0,34	0,02	0,26	0,00	0,00	0,00	1	8,902	9,773	100,535
1998-2008	0,29	0,26	0,00	0,24	0,20	0,00	0,00	1	9,328	11,000	99,920
1999-2009	0,20	0,25	0,00	0,00	0,28	0,28	0,00	1	11,000	11,000	100,024
2000-2010	0,19	0,29	0,00	0,25	0,28	0,00	0,00	1	11,000	11,000	99,924
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,805

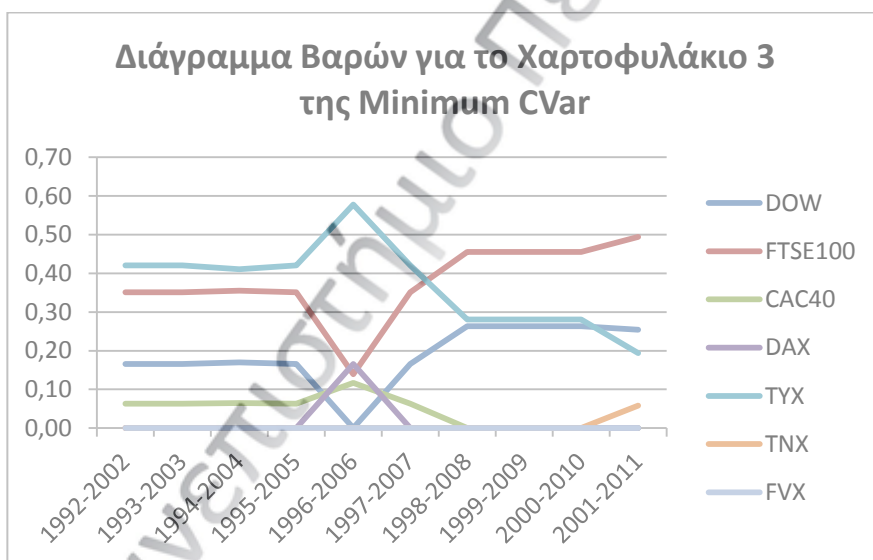
Αντίστοιχα, παρουσιάζονται διαγραμματικά τα βάρη των περιουσιακών στοιχείων. Για το πρώτο χαρτοφυλάκιο ο δείκτης TYX παρουσιάζει τη μεγαλύτερη τιμή, αλλά από τη δεκαετία 1997-2007 μέχρι και το τέλος, πέφτει κατακόρυφα. Παρ' όλα αυτά από τη μέση τιμή φαίνεται ότι το χαρτοφυλάκιο στο σύνολο έχει απώλειες από 0,16% μέχρι και 1,35%.



Στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διασποράς οι τιμές των βαρών κινούνται στα ίδια ακριβώς επίπεδα με το προηγούμενο χαρτοφυλάκιο. Εδώ, για τη δεκαετία 1996-2006 οι τιμές των βαρών παρουσιάζουν κέρδη της τάξης του 0,036%.



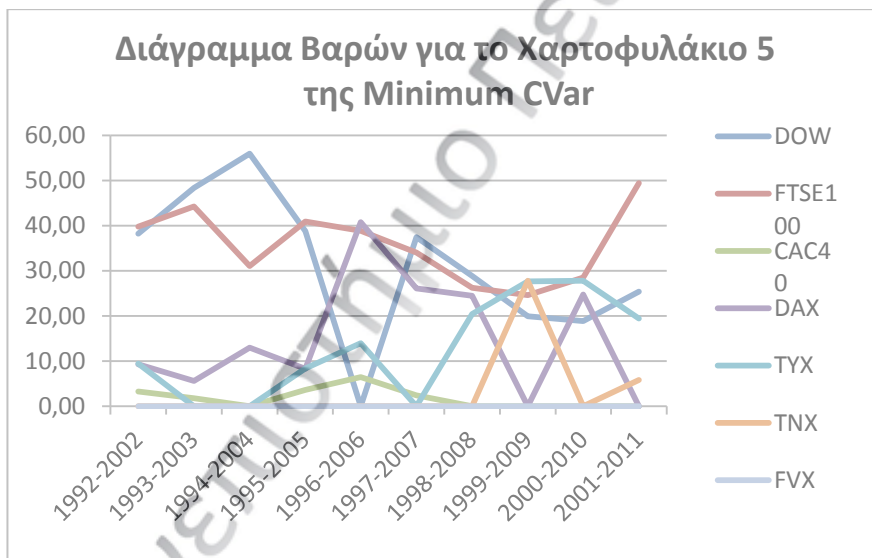
Για το τρίτο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της διασποράς οι τιμές των δεικτών παραμένουν σταθερές. Τα κέρδη του χαρτοφυλακίου, όμως αυξάνονται φτάνοντας ως και το 0,23% κατά τη διάρκεια της ίδιας δεκαετίας.



Στο τέταρτο χαρτοφυλάκιο, ο δείκτης Dow παίρνει μεγαλύτερες τιμές φτάνοντας το 32%, ενώ ο TYX εμφανίζει μεγάλες μειώσεις σε σχέση με το προηγούμενο χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη να αγγίζει το 19%. Εδώ, τα κέρδη μόλις που ξεπερνούν τις 0,42 ποσοστιαίες μονάδες.



Τέλος, στο πέμπτο χαρτοφυλάκιο, οι τιμές των βαρών μεγιστοποιούνται φτάνοντας κέρδη ίσα με 0,6% που είναι και τα μεγαλύτερα του μοντέλου.



Οι αποδόσεις των χαρτοφυλακίων απεικονίζονται στο παράρτημα 3 και υπολογίστηκαν σύμφωνα με τον τύπο:

$$R_{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i,$$

$$\mu\epsilon \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την πορεία των αποδόσεων για το μοντέλο ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο. Αρχικά, όλα τα χαρτοφυλάκια ξεκινούν με ζημιές, αλλά πολύ γρήγορα οι τιμές αυξάνονται και παραμένουν για μεγάλα διαστήματα θετικές. Εδώ, το πέμπτο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει τις μεγαλύτερες ακραίες τιμές τόσο θετικές όσο και αρνητικές, με τη μεγαλύτερη αρνητική τιμή του να φτάνει κοντά στο -14% τον Οκτώβριο του 2008, ενώ τον Απρίλιο του 2009 οι αποδόσεις του ίδιου χαρτοφυλακίου συνεχίζουν να παίρνουν τη μέγιστη τιμή στο σύνολο του μοντέλου.



Τα περιγραφικά στατιστικά μέτρα για το μοντέλο ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο δείχνουν ότι τα δύο πρώτα χαρτοφυλάκια παρουσιάζουν στο σύνολό τους αρνητικές αποδόσεις και έτσι δείκτης Sharpe αντίστοιχα λαμβάνει αρνητικές τιμές, ενώ για το πέμπτο χαρτοφυλάκιο ο δείκτης παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του μοντέλου με ποσοστό 4,18%.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>Mean</b>	-0,00021	-0,00018	0,00028	0,00153	0,00176
<b>Median</b>	0,00068	0,00068	0,00088	0,00609	0,00936
<b>Standard Deviation</b>	0,03920	0,03918	0,03891	0,03766	0,04219
<b>Value-at-Risk</b>	-0,07134	-0,07131	-0,07131	-0,07680	-0,09214
<b>Conditional Value-at-Risk</b>	-0,09121	-0,09121	-0,09121	-0,08827	-0,10763
<b>Sharpe Ratio</b>	-0,00535	-0,00457	0,00714	0,04050	0,04179

Έπειτα, ακολουθούν τα βάρη για τα χαρτοφυλάκια μεγιστοποίησης της απόδοσης για το μοντέλο της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο. Το πρώτο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει κέρδη για τις πρώτες έξι δεκαετίες, αλλά τη δεκαετία 1996-2006 τα κέρδη μειώνονται σε σχέση με τις αυξήσεις των προηγούμενων ετών.



**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 1**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,116
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,180
1994-2004	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,145
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,164
1996-2006	0,00	0,00	0,16	0,03	0,81	0,00	0,00	1	9,037	9,037	100,023
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,124
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,825
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,986
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,880
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,851

Οι τιμές του πίνακα δεν παρουσιάζουν αποκλίσεις από αυτές του πρώτου χαρτοφυλακίου.

**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 2**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,116
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,180
1994-2004	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,145
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,164
1996-2006	0,00	0,01	0,16	0,03	0,80	0,00	0,00	1	9,039	9,039	100,036
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,124
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,825
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,986
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,880
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,851

Στο σύνολό του, το τρίτο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει τα ίδια αποτελέσματα.

**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 3**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,116
1993-2003	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,180
1994-2004	0,17	0,36	0,06	0,00	0,41	0,00	0,00	1	7,635	7,635	100,152
1995-2005	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,164
1996-2006	0,00	0,14	0,12	0,17	0,58	0,00	0,00	1	9,081	9,081	100,023
1997-2007	0,17	0,35	0,06	0,00	0,42	0,00	0,00	1	7,634	7,634	100,124
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,825
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,986
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,880
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,851

Εδώ, η μέση τιμή που παρατηρείται τη δεκαετία 1996-2006 αυξάνεται κατά 0,13% από την προηγούμενη δεκαετία, ενώ στα επόμενα έτη πέφτει στα ίδια επίπεδα κερδών. Κατά τη διάρκεια των τεσσάρων τελευταίων δεκαετιών, εμφανίζονται οι πρώτες απώλειες.

#### Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 4

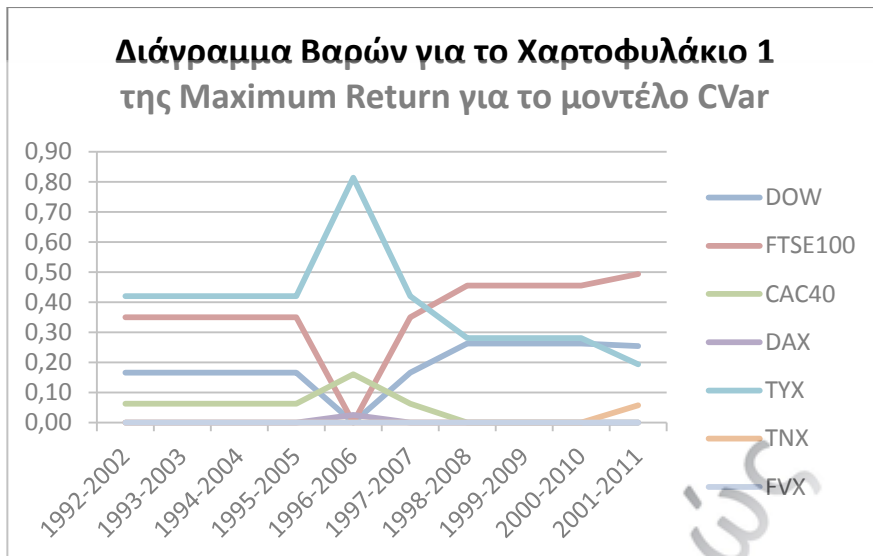
DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,20	0,34	0,05	0,04	0,37	0,00	0,00	1	7,683	7,683	100,171
1993-2003	0,27	0,33	0,03	0,10	0,27	0,00	0,00	1	7,877	7,877	100,354
1994-2004	0,32	0,33	0,02	0,14	0,19	0,00	0,00	1	7,635	7,635	100,152
1995-2005	0,24	0,34	0,04	0,08	0,31	0,00	0,00	1	7,796	7,796	100,298
1996-2006	0,00	0,27	0,08	0,30	0,36	0,00	0,00	1	9,123	9,123	100,423
1997-2007	0,28	0,33	0,03	0,11	0,25	0,00	0,00	1	7,911	7,911	100,292
1998-2008	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,825
1999-2009	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,986
2000-2010	0,26	0,46	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	1	9,699	9,699	99,880
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,851

Για το τελευταίο χαρτοφυλάκιο η απόδοση μεγιστοποιείται τη δεκαετία 1996-2006.

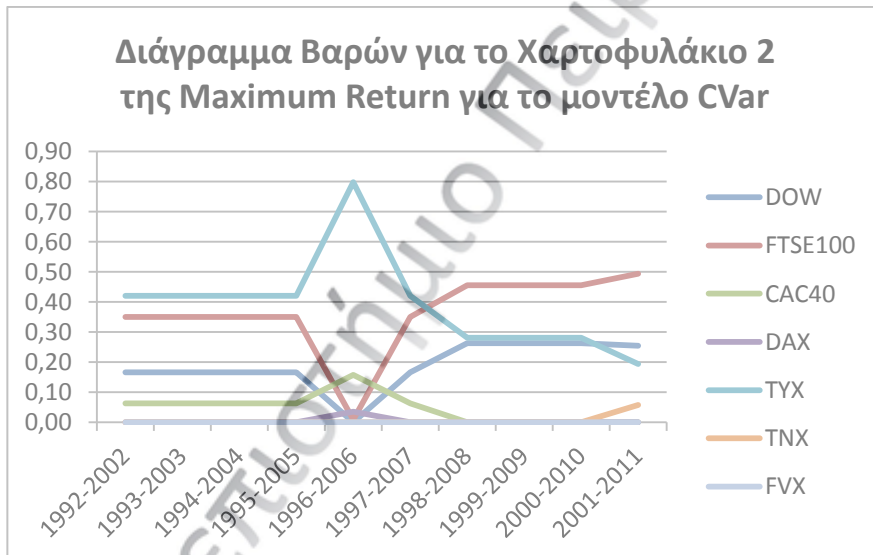
#### Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 5

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	VAR	CVAR	MEAN
1992-2002	0,38	0,40	0,03	0,09	0,09	0,00	0,00	1	8,354	8,354	100,443
1993-2003	0,48	0,44	0,02	0,06	0,00	0,00	0,00	1	9,110	9,110	100,609
1994-2004	0,56	0,31	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	1	10,000	10,000	100,550
1995-2005	0,39	0,41	0,04	0,08	0,08	0,00	0,00	1	8,398	8,398	100,534
1996-2006	0,00	0,39	0,06	0,41	0,14	0,00	0,00	1	9,299	11,000	100,617
1997-2007	0,37	0,34	0,02	0,26	0,00	0,00	0,00	1	8,902	9,773	100,535
1998-2008	0,29	0,26	0,00	0,24	0,20	0,00	0,00	1	9,328	11,000	99,920
1999-2009	0,20	0,25	0,00	0,00	0,28	0,28	0,00	1	11,000	11,000	100,024
2000-2010	0,19	0,29	0,00	0,25	0,28	0,00	0,00	1	11,000	11,000	99,924
2001-2011	0,25	0,49	0,00	0,00	0,19	0,06	0,00	1	9,926	9,926	99,851

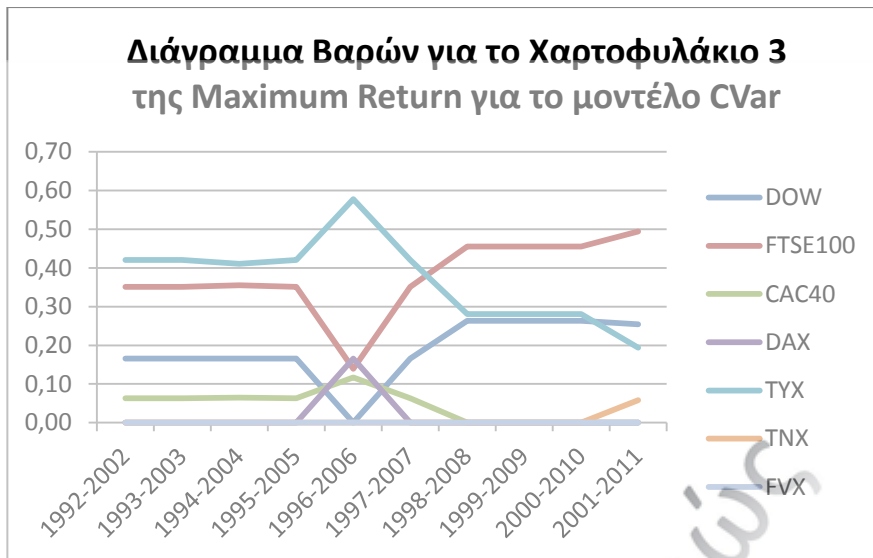
Οι τιμές των βαρών του πρώτου χαρτοφυλακίου για το μοντέλο μεγιστοποίησης της απόδοσης δε διαφέρουν από το μοντέλο ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο. Παρ' όλα αυτά το χαρτοφυλάκιο ξεκινά με κέρδη που φτάνουν ποσοστό ίσο με 0,18%, ενώ απώλειες εμφανίζονται σπανιότερα.



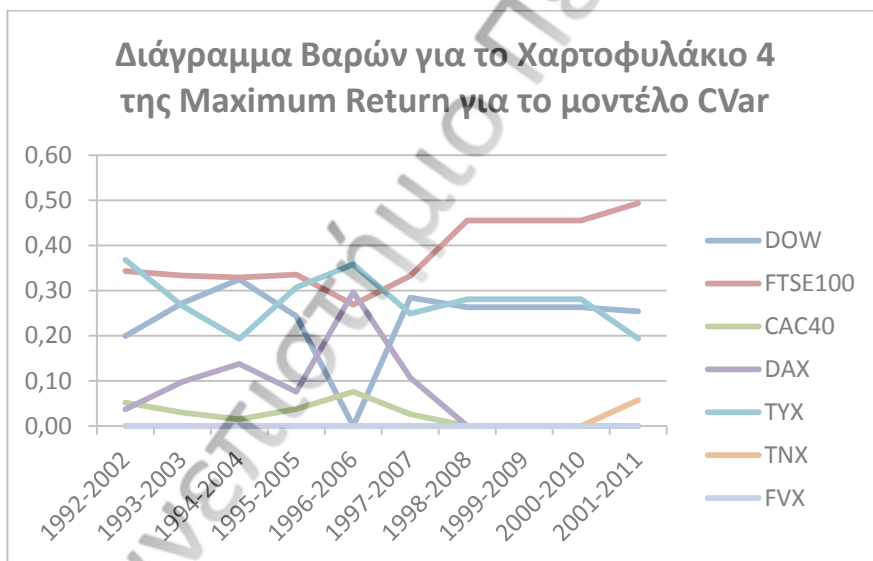
Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινείται στα ίδια επίπεδα με το προηγούμενο.



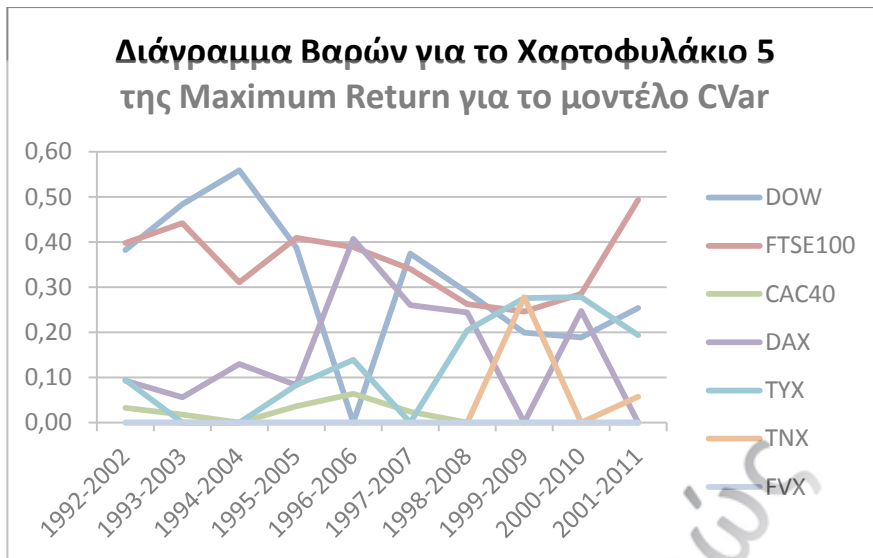
Το τρίτο χαρτοφυλάκιο δεν παρουσιάζει διαφορές από τα προηγούμενα δύο.



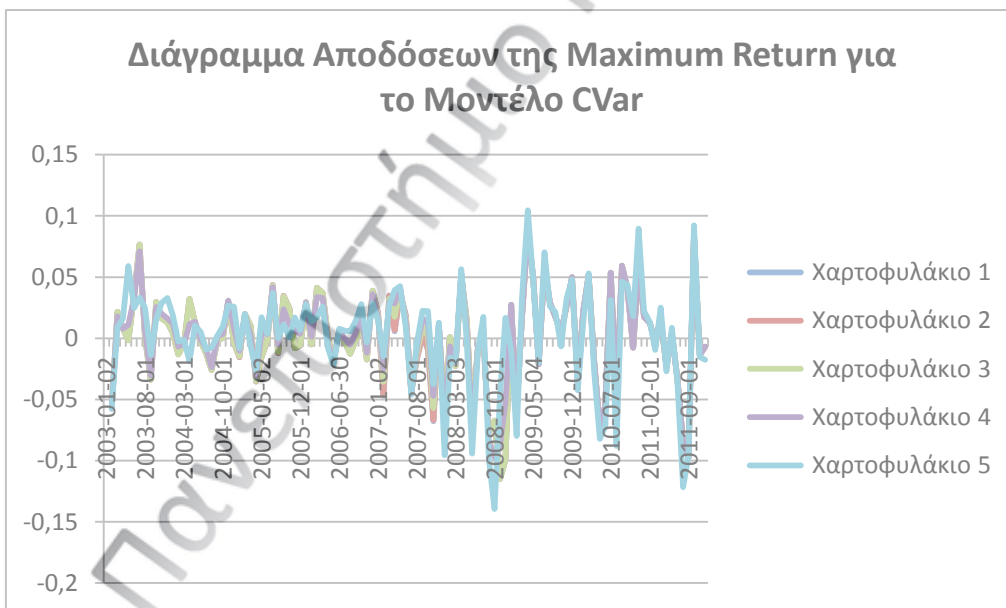
Στο τέταρτο χαρτοφυλάκιο οι τιμές των δεικτών κινούνται στο σύνολό τους σε μικρότερα επίπεδα. Ο FTSE100 παρουσιάζει τη μεγαλύτερη τιμή με ποσοστό 49%, ενώ ο Cac40 ελαχιστοποιείται με ποσοστό 2%.



Στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο, ο δείκτης Dow παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή με ποσοστό 56%, ενώ ο δείκτης Cac40 συνεχίζει να κινείται σε χαμηλά επίπεδα της τάξης του 2%.



Οι αποδόσεις του μοντέλου που παρουσιάζονται στο παράρτημα 4, υπολογίζονται όπως και στα προηγούμενα μοντέλα για τα πέντε χαρτοφυλάκια. Το διάγραμμα αποδόσεων είναι παρόμοιο με αυτό της ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο, καθώς οι τιμές δεν εμφανίζουν μεγάλες αποκλίσεις.



Από τα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία είναι προφανές γιατί τα διαγράμματα των δύο μοντέλων μοιάζουν τόσο, αφού όλα τα χαρτοφυλάκια παρουσιάζουν τις ίδιες μέσες τιμές, όπως και ίδιους δείκτες Sharpe.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>Mean</b>	-0,00021	-0,00018	0,00028	0,00153	0,00176
<b>Median</b>	0,00068	0,00068	0,00088	0,00609	0,00936
<b>Standard Deviation</b>	0,03920	0,03918	0,03891	0,03766	0,04219
<b>Value-at-Risk</b>	-0,07134	-0,07131	-0,07131	-0,07680	-0,09214
<b>Conditional Value-at-Risk</b>	-0,09121	-0,09121	-0,09121	-0,08827	-0,10763
<b>Sharpe Ratio</b>	-0,00535	-0,00457	0,00715	0,04050	0,04179

### 4.3 Εφαρμογή στο μοντέλο Απωλειών

Τέλος, έγινε η εφαρμογή των δεικτών στο μοντέλο απωλειών. Για την ελαχιστοποίηση της απώλειας και τη μεγιστοποίηση της απόδοσης του μοντέλου, θεωρήσαμε την πλήρη αποστροφή στον κίνδυνο, επενδύοντας το ποσό των 100 ν. μ.

Τα βάρη που προέκυψαν για το πρώτο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της απώλειας απεικονίζονται στον ακόλουθο πίνακα. Η μέση τιμή του χαρτοφυλακίου ελαχιστοποιείται κατά την τελευταία δεκαετία, όπου οι απώλειες ξεπερνούν το 1,3%.

<i>Minimum Regret Χαρτοφυλάκιο 1</i>										
<b>DATE</b>	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
<b>1992-2002</b>	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	99,355
<b>1993-2003</b>	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	99,588
<b>1994-2004</b>	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	99,754
<b>1995-2005</b>	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	99,588
<b>1996-2006</b>	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	99,843
<b>1997-2007</b>	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	99,563
<b>1998-2008</b>	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,028
<b>1999-2009</b>	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,613
<b>2000-2010</b>	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,146
<b>2001-2011</b>	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	98,653

Στον παρακάτω πίνακα οι διαφορές των αποδόσεων σε σχέση με το προηγούμενο χαρτοφυλάκιο είναι ότι τη δεκαετία 1996-2006 παρουσιάζεται αύξηση της τάξης του 0,036%.

*Minimum Regret Χαρτοφυλάκιο 2*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	99,627
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	99,843
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	99,953
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	99,825
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,036
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	99,806
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,251
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,716
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,341
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	98,941

Το τρίτο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει τη μικρότερη μέση τιμή κατά την τελευταία δεκαετία σε ποσοστό 99,2%, απώλεια δηλαδή, της τάξης του 0,8%. Το χαρτοφυλάκιο από τη δεκαετία του 2003 έως και τη δεκαετία του 2007 εμφανίζει κέρδη, ενώ στη συνέχεια μειώνεται απότομα.

*Minimum Regret Χαρτοφυλάκιο 3*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	99,899
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,099
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	100,152
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,061
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,230
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,049
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,474
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,819
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,535
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,229

Το τέταρτο χαρτοφυλάκιο ξεκινά με κέρδη, αλλά από τη δεκαετία του 1998-2008 μέχρι την τελευταία εμφανίζει απώλειες.

*Minimum Regret Χαρτοφυλάκιο 4*

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	100,171
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,354
1994-2004	0,42	0,22	0,00	0,09	0,28	0,00	0,00	1	1,355	100,351
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,298
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,423
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,292
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,697
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,922
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,730
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,517

Εδώ, οι απώλειες που έχει το μοντέλο από την αρχική επένδυση των 100 ν. μ. παρατηρούνται τις τελευταίες δεκαετίες, ενώ τη δεκαετία 2009 υπάρχει μια μικρή αύξηση.

*Minimum Regret Χαρτοφυλάκιο 5*

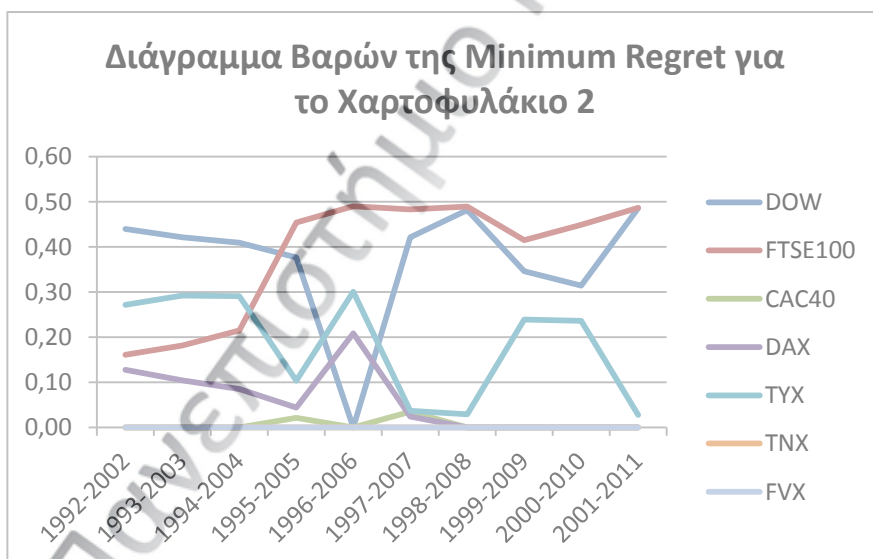
DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,53	0,16	0,00	0,14	0,18	0,00	0,00	1	1,357	100,443
1993-2003	0,59	0,14	0,00	0,14	0,13	0,00	0,00	1	1,365	100,609
1994-2004	0,63	0,11	0,00	0,16	0,10	0,00	0,00	1	1,440	100,550
1995-2005	0,42	0,44	0,00	0,06	0,08	0,00	0,00	1	1,304	100,534
1996-2006	0,00	0,67	0,00	0,23	0,10	0,00	0,00	1	1,476	100,617
1997-2007	0,42	0,29	0,13	0,16	0,00	0,00	0,00	1	1,473	100,535
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,920
1999-2009	0,47	0,29	0,00	0,05	0,19	0,00	0,00	1	1,774	100,024
2000-2010	0,36	0,52	0,00	0,00	0,11	0,00	0,00	1	1,925	99,924
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,805

Στο πρώτο χαρτοφυλάκιο ελαχιστοποίησης της απώλειας, οι τιμές των δεικτών κινούνται σε υψηλότερα επίπεδα απ' ό,τι στα προηγούμενα μοντέλα. Αναλυτικότερα, ο δείκτης Dow την τελευταία δεκαετία παίρνει την τιμή 0,49, ενώ τη δεκαετία 1996-2006 συνεχίζει να κινείται σε μηδενικά επίπεδα. Οι απώλειες του χαρτοφυλακίου κυμαίνονται από 0,16% και φτάνουν ως το 1,3% περίπου, ενώ συνολικά το χαρτοφυλάκιο δεν παρουσιάζει κέρδη.





Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινείται στις ίδιες τιμές, με τις απώλειες να φτάνουν και πάλι το 1,1%. Τη δεκαετία 1996-2006, παρουσιάζονται τα πρώτα κέρδη του χαρτοφυλακίου, καθώς από τις 100 ν. μ. που αρχικά επενδύθηκαν υπάρχει αύξηση της τάξης του 0,036%. Κατά την ίδια ημερομηνία, ο δείκτης FTSE100 παίρνει τη μέγιστη τιμή του χαρτοφυλακίου.



Στο τρίτο χαρτοφυλάκιο οι τιμές των βαρών παραμένουν σταθερές, με τις απώλειες να κινούνται στα ίδια επίπεδα. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας 1996-2006 παρατηρείται μεγαλύτερη αύξηση στα κέρδη του χαρτοφυλακίου της τάξης του 0,23%.



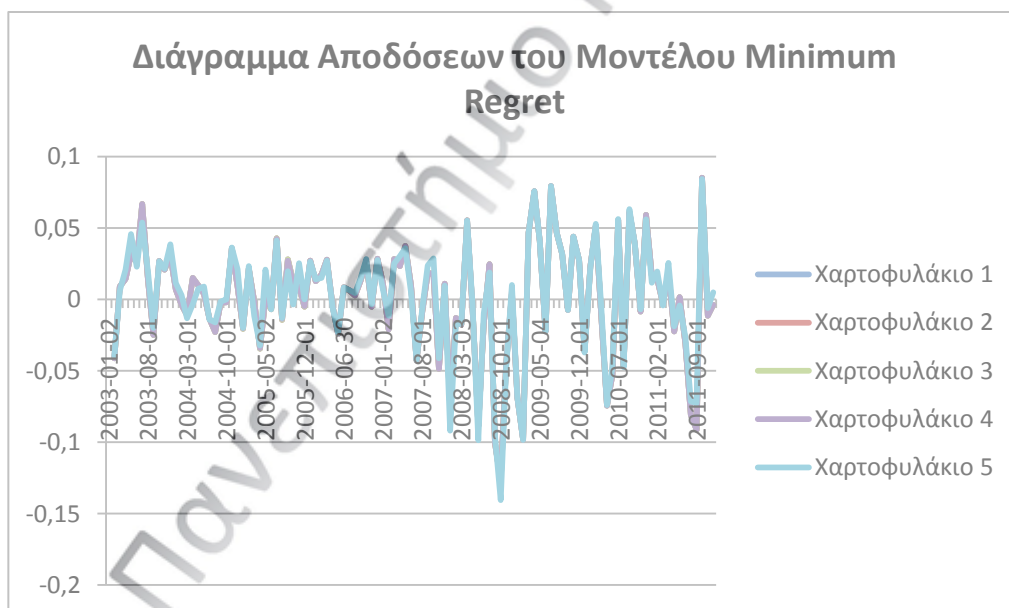
Το τέταρτο χαρτοφυλάκιο δεν παρουσιάζει αλλαγές. Οι τιμές των βαρών κινούνται προς τις ίδιες κατευθύνσεις με τα προηγούμενα. Εδώ, το χαρτοφυλάκιο, εμφανίζει στην πλειονότητά του κέρδη με το μεγαλύτερο ποσοστό να αγγίζει το 0,4% στη διάρκεια της ίδιας δεκαετίας.



Το πέμπτο χαρτοφυλάκιο κινείται σε υψηλότερες τιμές από τα προηγούμενα. Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης Dow παίρνει τη μέγιστή τιμή του, 0,63, τη δεκαετία 1994-2004, ενώ ο Cac40 παίρνει την τιμή 0,13 τη δεκαετία 1997-2007 που είναι και η υψηλότερη για το δείκτη στο μοντέλο.



Στο παράρτημα 6, εμφανίζονται οι αποδόσεις του μοντέλου για τα πέντε χαρτοφυλάκια. Στο διάγραμμα βλέπουμε ότι οι αποδόσεις των τεσσάρων πρώτων χαρτοφυλακίων συμπίπτουν, ενώ το πέμπτο κινείται και αυτό γύρω από τα ίδια επίπεδα, χωρίς μεγάλες αποκλίσεις από τα προηγούμενα.



Οι μέσες τιμές των χαρτοφυλακίων που εμφανίζονται παρακάτω, αποδίδουν με σαφήνεια την πορεία των αποδόσεων στο παραπάνω διάγραμμα. Το πέμπτο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει το μεγαλύτερο δείκτη Sharpe με ποσοστό 6%.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
Mean	0,00138	0,00139	0,00138	0,00139	0,00238
Median	0,00773	0,00773	0,00773	0,00781	0,00679
Standard Deviation	0,03942	0,03943	0,03942	0,03941	0,03959
Value-at-Risk	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07344
Conditional Value at-Risk	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09975
Sharpe Ratio	0,03497	0,03537	0,03497	0,03539	0,06000

Το μοντέλο απώλειας γράφεται και με μια συνάρτηση μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας. Το πρώτο χαρτοφυλάκιο ξεκινά με κέρδη, ενώ στα τελευταία τέσσερα χαρτοφυλάκια παρατηρούνται απώλειες που ανέρχονται στο 0,1%.

#### Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 1

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	100,338
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,415
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	100,339
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,499
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,446
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,419
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,989
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,998
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,894
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,997

Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο κινείται παρόμοια με το πρώτο. Οι αποδόσεις δεν εμφανίζουν διαφορές από αυτές του προηγούμενου χαρτοφυλακίου.

#### Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 2

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	100,338
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,415
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	100,339
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,499
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,446
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,419
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,989
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,998
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,894
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,997

Στα ίδια επίπεδα κινείται και το τρίτο χαρτοφυλάκιο. Ο παρακάτω πίνακας δεν εμφανίζει στο σύνολό του μεγάλες διαφορές από αυτόν του πρώτου και δεύτερου χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, την πρώτη δεκαετία υπάρχουν απώλειες σε ποσοστό 0,1%, έναντι των κερδών του προηγούμενου χαρτοφυλακίου.

**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 3**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	99,899
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,099
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,354	100,152
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,061
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,230
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,049
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,474
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,819
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,535
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,229

Επίσης, στους ίδιους ρυθμούς κινείται και το τέταρτο χαρτοφυλάκιο.

**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 4**

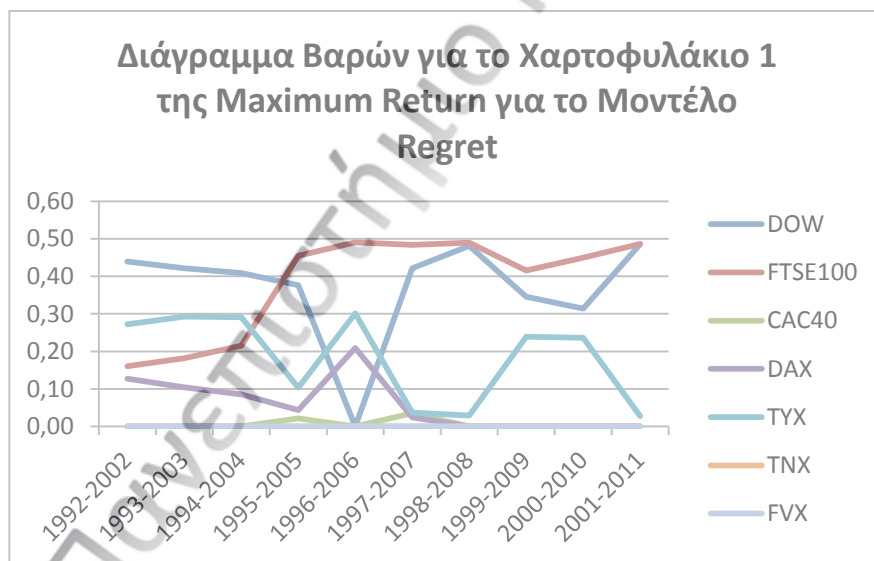
DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,44	0,16	0,00	0,13	0,27	0,00	0,00	1	1,336	100,338
1993-2003	0,42	0,18	0,00	0,10	0,29	0,00	0,00	1	1,314	100,415
1994-2004	0,41	0,21	0,00	0,09	0,29	0,00	0,00	1	1,355	100,351
1995-2005	0,38	0,45	0,02	0,04	0,10	0,00	0,00	1	1,302	100,499
1996-2006	0,00	0,49	0,00	0,21	0,30	0,00	0,00	1	1,438	100,446
1997-2007	0,42	0,48	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	1	1,397	100,419
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,989
1999-2009	0,35	0,42	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,745	99,998
2000-2010	0,31	0,45	0,00	0,00	0,24	0,00	0,00	1	1,914	99,894
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,997

Στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο, κατά τη δεκαετία 1996-2006 παρατηρούνται τα μεγαλύτερα κέρδη του χαρτοφυλακίου σε ποσοστό 0,62%.

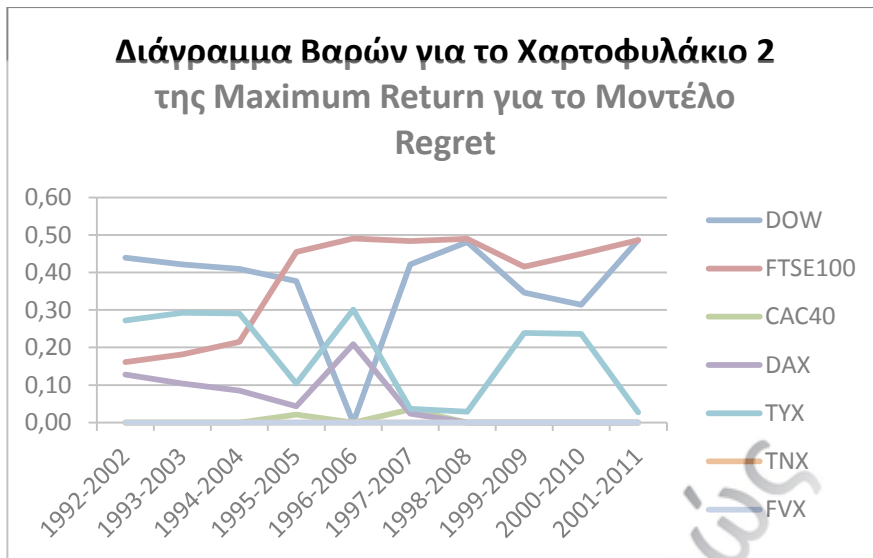
**Maximum Return Χαρτοφυλάκιο 5**

DATE	DOW	FTSE100	CAC40	DAX	TYX	TNX	FVX	STATUS	REGRET	MEAN
1992-2002	0,53	0,16	0,00	0,14	0,18	0,00	0,00	1	1,357	100,443
1993-2003	0,59	0,14	0,00	0,14	0,13	0,00	0,00	1	1,365	100,609
1994-2004	0,63	0,11	0,00	0,16	0,10	0,00	0,00	1	1,440	100,550
1995-2005	0,42	0,44	0,00	0,06	0,08	0,00	0,00	1	1,304	100,534
1996-2006	0,00	0,67	0,00	0,23	0,10	0,00	0,00	1	1,476	100,617
1997-2007	0,42	0,29	0,13	0,16	0,00	0,00	0,00	1	1,473	100,535
1998-2008	0,48	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,775	99,920
1999-2009	0,47	0,29	0,00	0,05	0,19	0,00	0,00	1	1,774	100,024
2000-2010	0,36	0,52	0,00	0,00	0,11	0,00	0,00	1	1,925	99,924
2001-2011	0,49	0,49	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	1	1,957	99,805

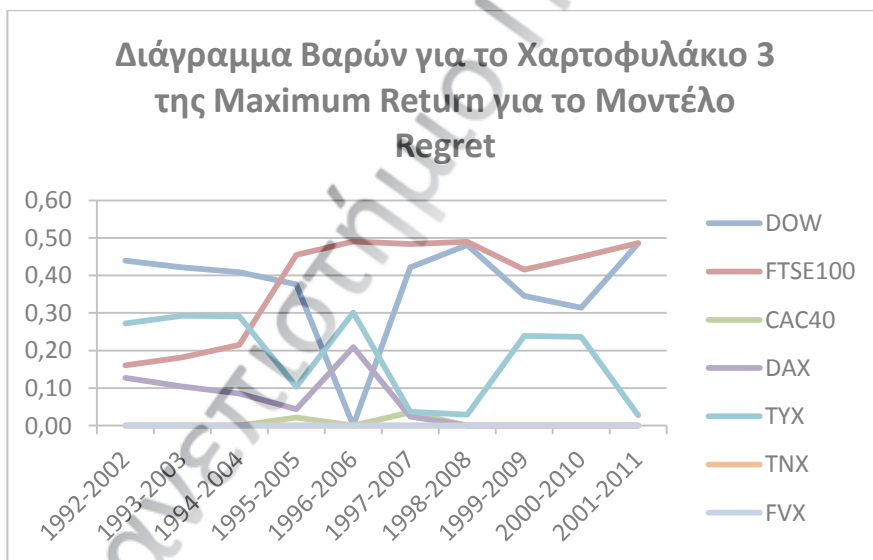
Στο πρώτο χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης, οι τιμές του Cac40 κινούνται στα χαμηλότερα επίπεδα, παίρνοντας μηδενικές τιμές και φτάνοντας ως το 3%, ενώ ο Dow παίρνει μεγαλύτερες τιμές φτάνοντας το 49%. Το χαρτοφυλάκιο ξεκινάει με κέρδη που φτάνουν το 0,5% περίπου, ενώ οι απώλειές του μόλις που ξεπερνούν το 0,1%.



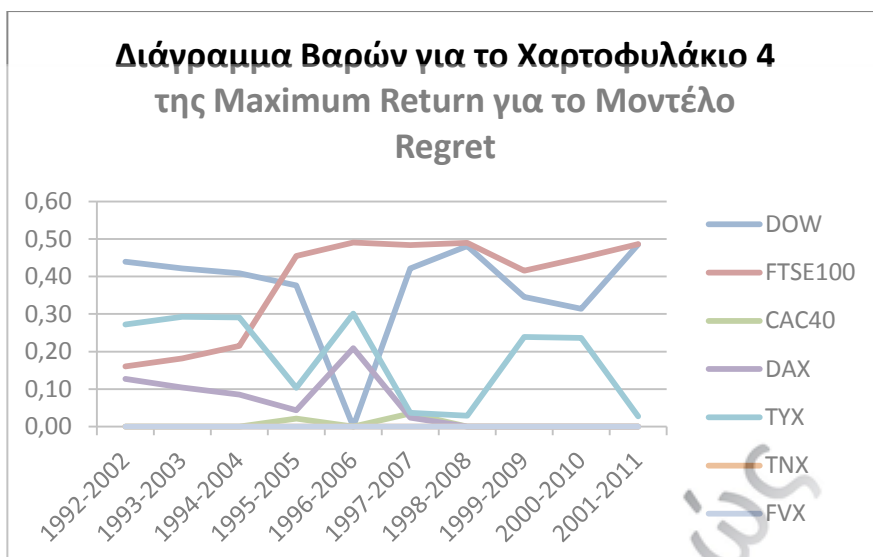
Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης κινείται στα ίδια επίπεδα με το πρώτο.



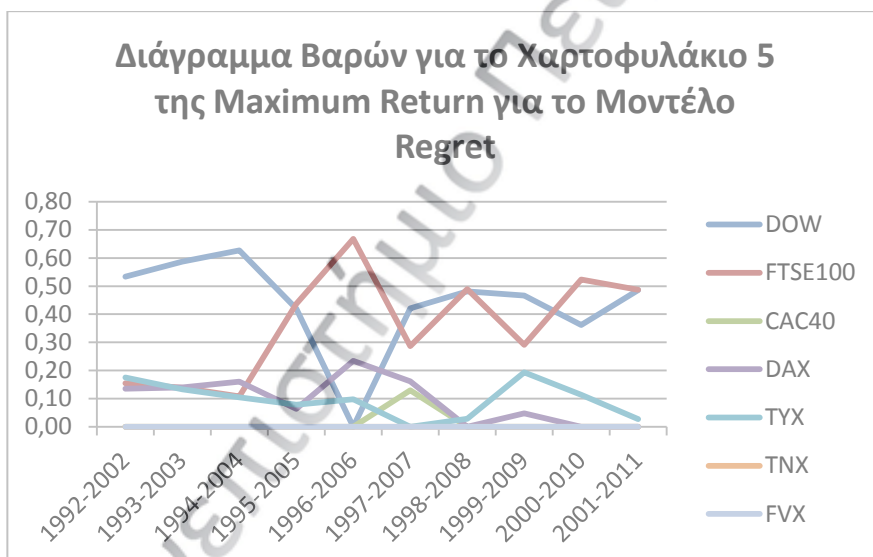
Στο τρίτο χαρτοφυλάκιο, οι τιμές των βαρών παραμένουν σταθερές. Το χαρτοφυλάκιο κατά την πρώτη δεκαετία παρουσιάζει, απώλειες ίσες με 0,1%, ενώ στα προηγούμενα χαρτοφυλάκια είχε κέρδη που ξεπερνούσαν το 0,3% κατά την ίδια περίοδο.



Στο τέταρτο χαρτοφυλάκιο, οι τιμές των δεικτών δεν παρουσιάζουν εξαιρετικές διαφορές. Παρ' όλα αυτά τα κέρδη αγγίζουν το 0,5%.

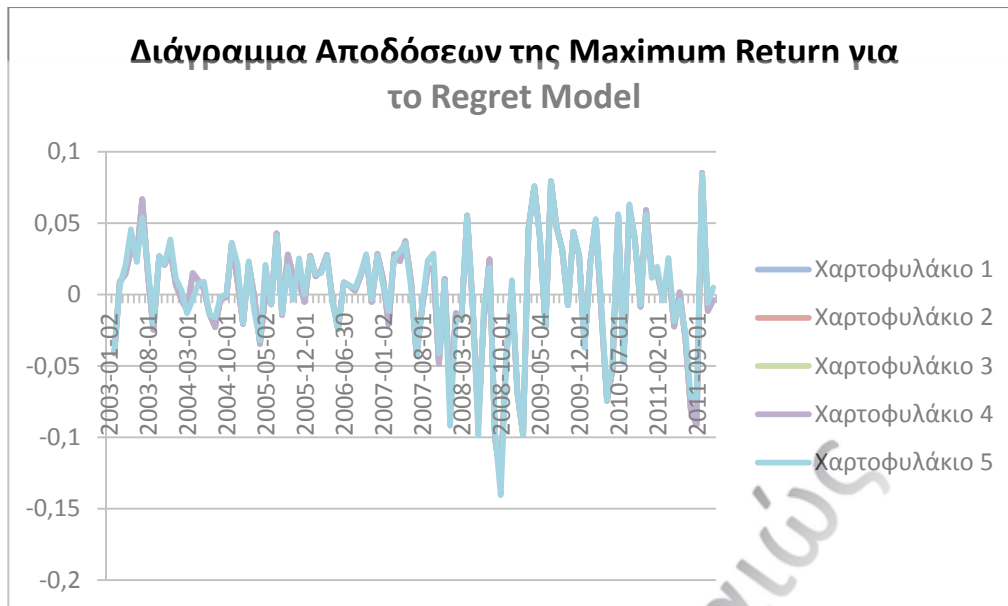


Στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο, τα βάρη παίρνουν τις μεγαλύτερες τιμές. Ο Dow κινείται στα υψηλότερα επίπεδα του μοντέλου, ενώ ο TYX δεν ξεπερνά το 3%.



Οι αποδόσεις υπολογίστηκαν, κατά τον ίδιο τρόπο με αυτόν της ελαχιστοποίησης της απώλειας. Από το παρακάτω διάγραμμα γίνεται εμφανές ότι οι αποδόσεις των χαρτοφυλακίων είναι ίδιες και επίσης, οι τιμές τους δεν αλλάζουν από αυτές του προηγούμενου μοντέλου.





Τα παραπάνω φαίνονται από τον πίνακα των στατιστικών περιγραφικών μέτρων που ακολουθεί.

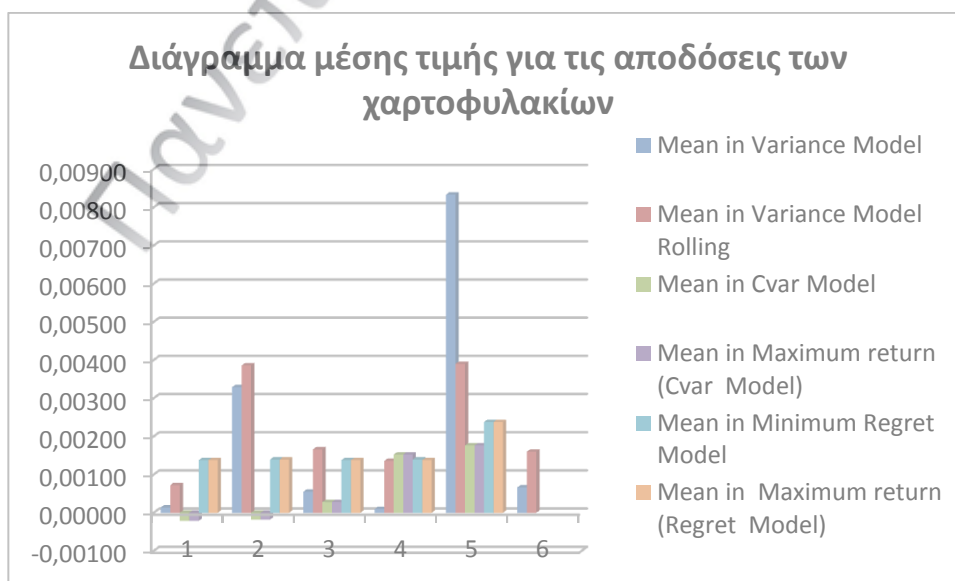
	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>Mean</b>	0,00138	0,00139	0,00138	0,00138	0,00238
<b>Median</b>	0,00773	0,00773	0,00773	0,00773	0,00679
<b>Standard Deviation</b>	0,03942	0,03943	0,03942	0,03942	0,03959
<b>Value-at-Risk</b>	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07344
<b>Conditional Value-at-Risk</b>	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09975
<b>Sharpe Ratio</b>	0,03497	0,03537	0,03497	0,03497	0,06000

#### 4.4 Περιγραφικά Στατιστικά Μέτρα

Κλείνοντας, συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των υπό μελέτη χαρτοφυλακίων στηριζόμενοι στα περιγραφικά στατιστικά μέτρα που υπολογίσαμε. Αρχικά, συγκρίναμε τις μέσες τιμές των μοντέλων που εμφανίζονται στον πίνακα.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
Mean in Variance Model	0,00014	0,00329	0,00055	0,00010	0,00833	0,00066
Mean in Variance Model Rolling	0,00072	0,00386	0,00166	0,00136	0,0039	0,0016
Mean in Cvar Model	-0,00021	-0,00018	0,00028	0,00153	0,00176	
Mean in Maximum return (Cvar Model)	-0,00021	-0,00018	0,00028	0,00153	0,00176	
Mean in Minimum Regret Model	0,00138	0,00139	0,00138	0,00139	0,00238	
Mean in Maximum return (Regret Model)	0,00138	0,00139	0,00138	0,00138	0,00238	

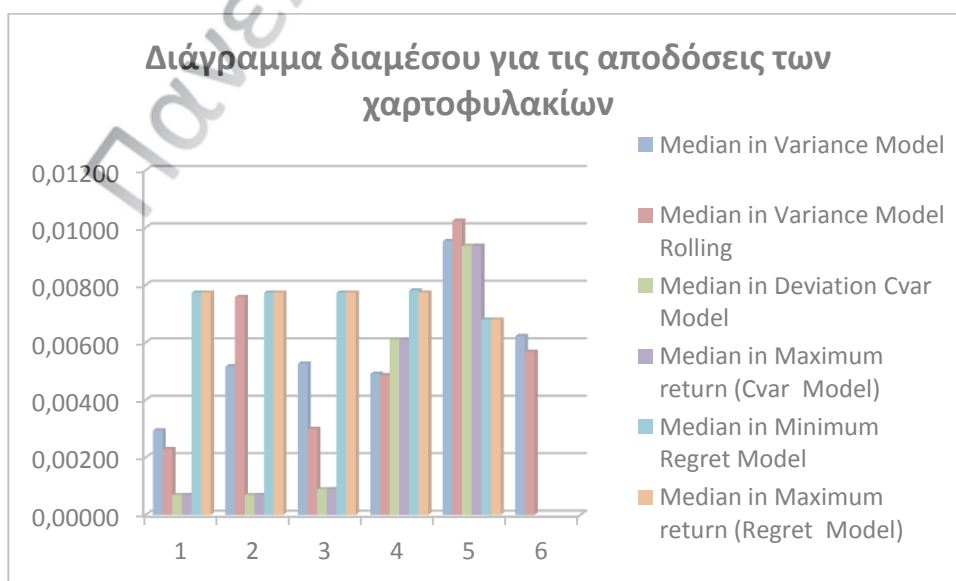
Από το πρώτο διάγραμμα βλέπουμε ότι μοντέλο της *Variance* είναι το καλύτερο, αφού οι αποδόσεις είναι μεγαλύτερες των υπόλοιπων χαρτοφυλακίων. Για το λόγο αυτό, η μέση τιμή κινείται σε υψηλά επίπεδα με το χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης να φτάνει ποσοστιαία το 0,8%, που είναι και η υψηλότερη τιμή στο δείγμα. Απ' την άλλη, το μοντέλο της μέγιστης απόδοσης για τη *CVar*, κινείται σε πολύ χαμηλές τιμές, με το πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο να κινούνται στον αρνητικό άξονα.



Παρακάτω, εμφανίζονται οι διάμεσοι για τα χαρτοφυλάκια των έξι μοντέλων.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
<b>Median in Variance Model</b>	0,00294	0,00517	0,00526	0,00491	0,00953	0,00622
<b>Median in Variance Model Rolling</b>	0,00229	0,00758	0,00299	0,00485	0,0102	0,0057
<b>Median in Deviation Cvar Model</b>	0,00068	0,00068	0,00088	0,00609	0,0094	
<b>Median in Maximum return (Cvar Model)</b>	0,00068	0,00068	0,00088	0,00609	0,00936	
<b>Median in Minimum Regret Model</b>	0,00773	0,00773	0,00773	0,00781	0,00679	
<b>Median in Maximum return (Regret Model)</b>	0,00773	0,00773	0,00773	0,00773	0,00679	

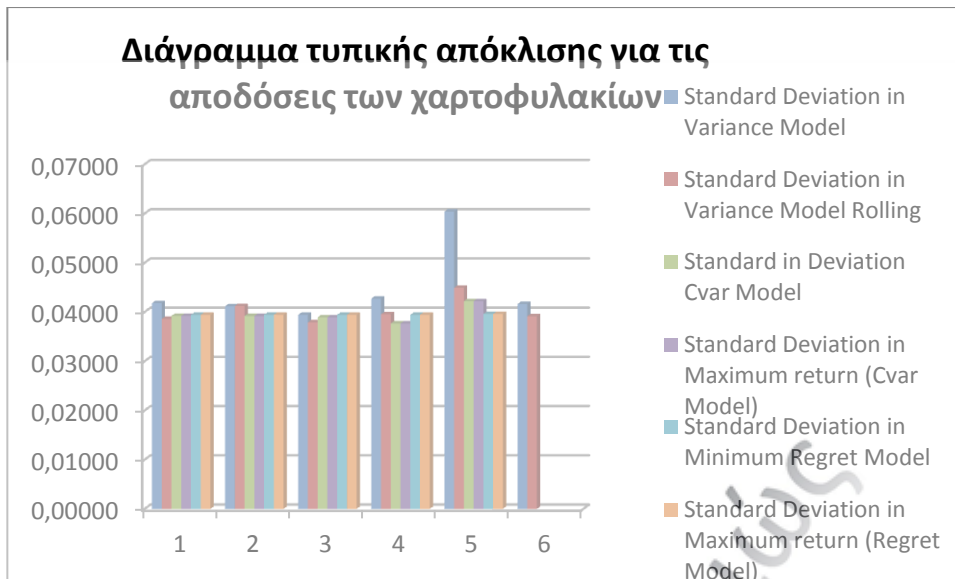
Ακολουθεί το διάγραμμα της διαμέσου, σύμφωνα με το οποίο το μοντέλο της *Variance (rolling)* εμφανίζεται να παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή για το δείγμα στο χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς. Το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης του μοντέλου απωλειών εμφανίζει σταθερότητα με μια πτώση των τιμών στο τέταρτο και πέμπτο χαρτοφυλάκιο, ενώ αυτό της μέγιστης απόδοσης για τη *CVar* κινείται στα χαμηλότερα επίπεδα και αυξάνεται ραγδαία από το τρίτο χαρτοφυλάκιο και μετά.



Η τυπική απόκλιση των χαρτοφυλακίων υπολογίστηκε λαμβάνοντας υπόψη τις διακυμάνσεις τους.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
<b>Standard Deviation in Variance Model</b>	0,04179	0,04114	0,03941	0,04270	0,06038	0,04161
<b>Standard Deviation in Variance Model Rolling</b>	0,03858	0,04121	0,03790	0,03953	0,0449	0,0391
<b>Standard Deviation in Cvar Model</b>	0,03920	0,03918	0,03891	0,03766	0,0422	
<b>Standard Deviation in Maximum return (Cvar Model)</b>	0,03920	0,03918	0,03891	0,03766	0,04219	
<b>Standard Deviation in Minimum Regret Model</b>	0,03942	0,03943	0,03942	0,03941	0,03959	
<b>Standard Deviation in Maximum return (Regret Model)</b>	0,03942	0,03943	0,03942	0,03942	0,03959	

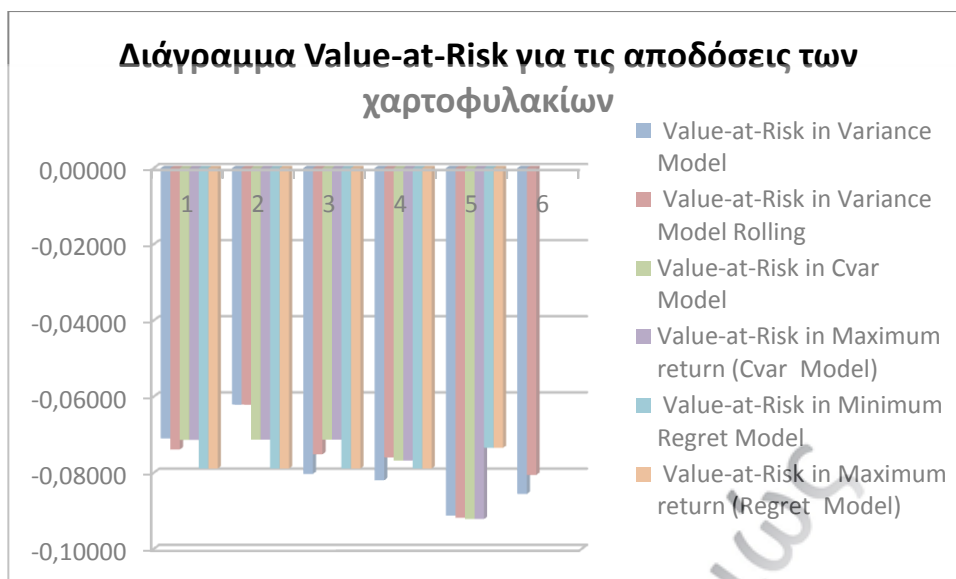
Στο διάγραμμα της τυπικής απόκλισης βλέπουμε ότι το μοντέλο της *Variance* παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή για το δείγμα στο χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης με περιορισμούς, ενώ στη συνέχεια μειώνεται απότομα πλησιάζοντας την ελάχιστη τιμή. Το χαρτοφυλάκιο της μέγιστης απόδοσης του μοντέλου απωλειών παραμένει σε σταθερά χαμηλές τιμές, ενώ το ίδιο μοντέλο της *CVar* εμφανίζει τη μικρότερη τιμή για το δείγμα.



Ακολουθεί ο πίνακας για την αξία σε κίνδυνο

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
<b>Value-at-Risk in Variance Model</b>	-0,07095	-0,06210	-0,08029	-0,08196	-0,09124	-0,08557
<b>Value-at-Risk in Variance Model Rolling</b>	-0,07386	-0,06210	-0,07514	-0,07595	-0,0918	-0,0806
<b>Value-at-Risk in Cvar Model</b>	-0,07134	-0,07131	-0,07131	-0,07680	-0,0921	
<b>Value-at-Risk in Maximum return (Cvar Model)</b>	-0,07134	-0,07131	-0,07131	-0,07680	-0,09214	
<b>Value-at-Risk in Minimum Regret Model</b>	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07344	
<b>Value-at-Risk in Maximum return (Regret Model)</b>	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07883	-0,07344	

Το επόμενο διάγραμμα της αξίας σε κίνδυνο είναι υπολογισμένο σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Οι τιμές κινούνται στον αρνητικό άξονα με το μοντέλο της διακύμανσης (rolling) να εμφανίζει τη μεγαλύτερη απώλεια.

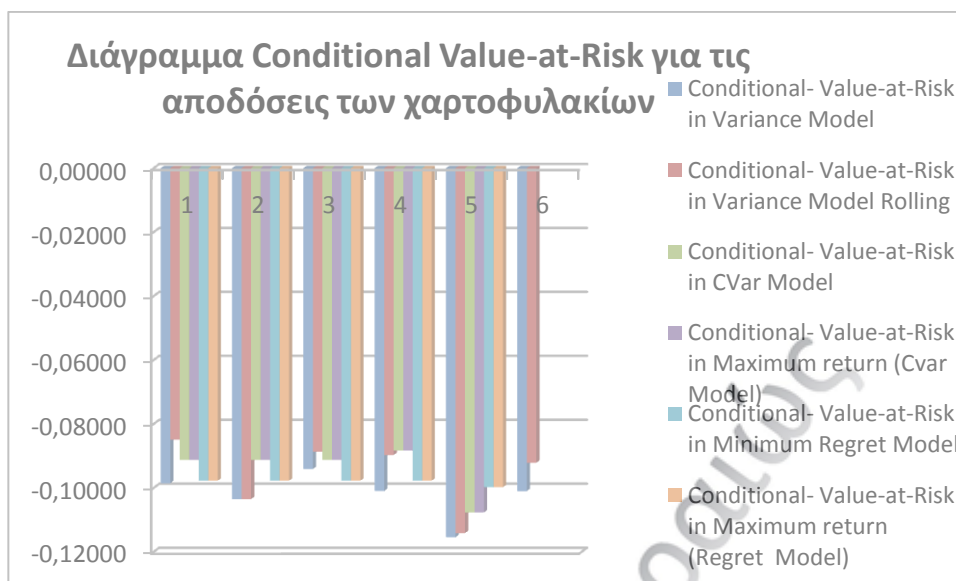


Ο πίνακας που ακολουθεί αφορά την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
<b>Conditional-Value-at-Risk in Variance Model</b>	-0,09852	-0,10349	-0,09410	-0,10097	-0,11544	-0,10098
<b>Conditional-Value-at-Risk in Variance Model Rolling</b>	-0,08487	-0,10349	-0,08867	-0,08969	-0,1141	-0,0921
<b>Conditional-Value-at-Risk in CVar Model</b>	-0,09121	-0,09121	-0,09121	-0,08827	-0,1076	
<b>Conditional-Value-at-Risk in Maximum return (Cvar Model)</b>	-0,09121	-0,09121	-0,09121	-0,08827	-0,10763	
<b>Conditional-Value-at-Risk in Minimum Regret Model</b>	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09975	
<b>Conditional-Value-at-Risk in Maximum return (Regret Model)</b>	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09772	-0,09975	

Το διάγραμμα της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο δε διαφέρει κατά πολύ από αυτό της αξίας σε κίνδυνο, καθώς όλα τα χαρτοφυλάκια κινούνται σε παρόμοια επίπεδα.

Συγκεκριμένα, τα πέμπτα χαρτοφυλάκια όλων των μοντέλων παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες απώλειες

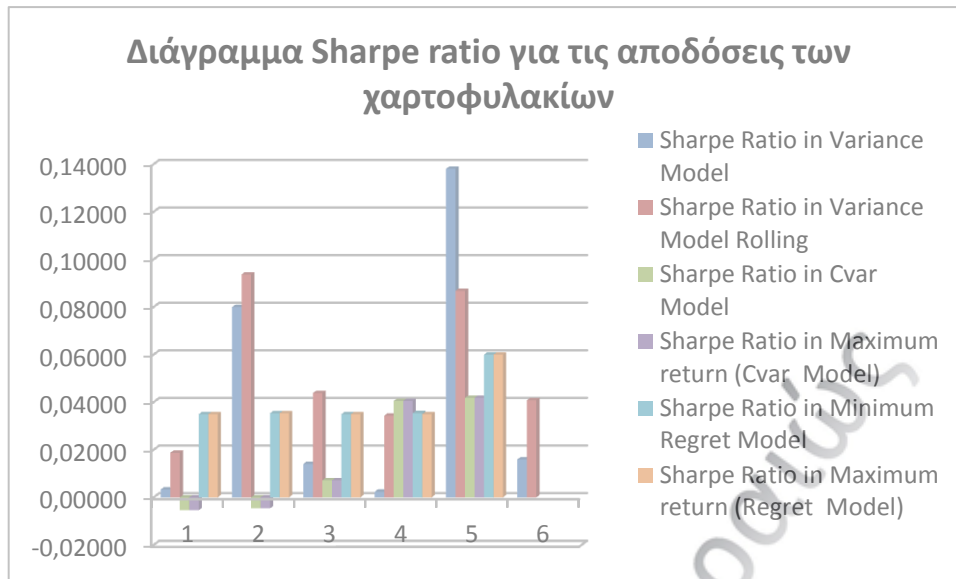


Τα αποτελέσματα για τον δείκτη Sharpe παρουσιάζονται παρακάτω.

	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5	Χαρτοφυλάκιο 6
<b>Sharpe Ratio in Variance Model</b>	0,00332	0,07997	0,01403	0,00236	0,13802	0,01594
<b>Sharpe Ratio in Variance Model Rolling</b>	0,01872	0,09364	0,04380	0,03436	0,0868	0,0408
<b>Sharpe Ratio in Cvar Model</b>	-0,00535	-0,00457	0,00714	0,04050	0,0418	
<b>Sharpe Ratio in Maximum return (Cvar Model)</b>	-0,00535	-0,00457	0,00715	0,04050	0,04179	
<b>Sharpe Ratio in Minimum Regret Model</b>	0,03497	0,03537	0,03497	0,03539	0,06000	
<b>Sharpe Ratio in Maximum return (Regret Model)</b>	0,03497	0,03537	0,03497	0,03497	0,06000	

Κλείνοντας, το επόμενο διάγραμμα αφορά το δείκτη Sharpe, ο οποίος είναι ανάλογος της μέσης τιμής και έχει παρόμοια συμπεριφορά με αυτή. Έτσι, σύμφωνα

με το δείκτη το μοντέλο της *Variance* είναι το πιο κερδοφόρο με ποσοστό που ξεπερνά το 13%.



Πανεπιστήμιο Πειραιώς



## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τα συνταξιοδοτικά ταμεία ως προς τα προϊόντα, στα οποία επιλέγουν να επενδύσουν. Αναλύσαμε τους κινδύνους που πιθανόν εκτίθεται ένα χαρτοφυλάκιο και είδαμε κάποιες τεχνικές μέτρησής του. Στη συνέχεια, μελετήσαμε τα μοντέλα της *mean – variance*, *mean – Value – at – risk*, *mean – CVar*. Τέλος, με τη βοήθεια της *Gams* εφαρμόσαμε τέτοια προβλήματα βελτιστοποίησης σε μηνιαίες τιμές επτά δεικτών.

Κατά την εφαρμογή είδαμε ότι στο μοντέλο της *mean-Variance* είδαμε ότι τα χαρτοφυλάκια βελτίωναν τις τιμές των αποδόσεών τους με τις τεχνικές διαφοροποίησης. Στα μοντέλα απώλειας και υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο τα τελευταία χαρτοφυλάκια τόσο ελαχιστοποίησης τους, όσο και μεγιστοποίησης της απόδοσής τους παρουσίαζαν τα μεγαλύτερα επίπεδα κερδών.

Τέλος, από τα διαγράμματα των περιγραφικών στατιστικών μέτρων μελετήσαμε την κίνηση των χαρτοφυλακίων ως προς τη μέση τιμή τους, τη διάμεσό τους, την τυπική τους απόκλιση, την αξία σε κίνδυνο, την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο και το δείκτη Sharpe. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον τελευταίο δείκτη, το μοντέλο που βελτιστοποιεί καλύτερα τα δεδομένα είναι αυτό της *mean – variance* και ειδικότερα το χαρτοφυλάκιο μεγιστοποίησης της απόδοσης με περιορισμούς που φτάνει το 13,8%. Ακολουθεί το μοντέλο *mean – variance* με *rolling* παράθυρο στα έτη με ποσοστό που ξεπερνά το 9%. Για το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο, το μοντέλο απώλειας συμπεριφέρθηκε καλύτερα, ενώ το μοντέλο *mean – CVar* παρουσίασε μεγαλύτερες απώλειες ως προς την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μοντέλο της διακύμανσης παρουσίασε καλύτερα αποτελέσματα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Οι αποδόσεις των δεικτών για το μοντέλο *Variance*.

VARIANCE MODEL						
DATE	MINIMUM VARIANCE	MAXIMUM RETURN	MEAN-VARIANCE	MINIMUM VARIANCE with Diversification Constraints	MAXIMUM RETURN with Diversification Constraints	MEAN-VARIANCE with Diversification Constraints
<b>2003-01-02</b>						
2003-02-03	-0,0492	-0,0204	-0,0395	-0,0560	-0,0509	-0,0537
2003-03-03	0,0277	0,0127	0,0237	0,0253	-0,0317	0,0237
2003-04-01	0,0000	0,0593	0,0166	0,0093	0,0379	0,0126
2003-05-02	-0,0247	0,0427	-0,0101	-0,0125	0,0831	-0,0027
2003-06-02	0,0374	0,0152	0,0316	0,0348	0,0208	0,0329
2003-07-01	0,1008	0,0273	0,0844	0,0908	0,0428	0,0794
2003-08-01	-0,0095	0,0195	-0,0030	0,0028	0,0422	0,0042
2003-09-01	-0,0411	-0,0151	-0,0355	-0,0415	-0,0211	-0,0360
2003-10-01	0,0351	0,0552	0,0424	0,0373	0,0165	0,0357
2003-11-03	0,0104	-0,0019	0,0057	0,0137	0,0434	0,0135
2003-12-01	0,0078	0,0664	0,0237	0,0151	0,0399	0,0193
2004-01-02	0,0043	0,0033	0,0098	0,0100	0,0278	0,0166
2004-02-02	-0,0162	0,0091	-0,0127	-0,0097	0,0149	-0,0033
2004-03-01	-0,0024	-0,0216	-0,0015	-0,0083	-0,0154	-0,0066
2004-04-01	0,0413	-0,0128	0,0298	0,0381	-0,0145	0,0204
2004-05-03	0,0155	-0,0036	0,0157	0,0174	0,0107	0,0151
2004-06-01	-0,0069	0,0240	-0,0061	-0,0051	0,0062	-0,0038
2004-07-01	-0,0102	-0,0288	-0,0079	-0,0091	-0,0050	-0,0057
2004-08-02	-0,0314	0,0034	-0,0290	-0,0364	-0,0250	-0,0318
2004-09-01	0,0002	-0,0092	0,0029	0,0050	0,0105	0,0071
2004-10-01	0,0011	-0,0053	0,0053	0,0042	0,0114	0,0081
2004-11-01	0,0286	0,0392	0,0260	0,0315	0,0290	0,0261
2004-12-01	-0,0104	0,0335	-0,0042	-0,0034	0,0264	0,0025
2005-01-03	-0,0118	-0,0276	-0,0045	-0,0044	0,0012	-0,0018
2005-02-01	0,0189	0,0260	0,0184	0,0231	0,0238	0,0206
2005-03-01	0,0164	-0,0247	0,0162	0,0157	-0,0021	0,0132
2005-04-01	-0,0364	-0,0301	-0,0340	-0,0388	-0,0338	-0,0361
2005-05-02	-0,0202	0,0266	-0,0120	-0,0037	0,0408	0,0050
2005-06-01	0,0014	-0,0186	0,0079	0,0077	0,0139	0,0111
2005-07-01	0,0454	0,0350	0,0444	0,0508	0,0479	0,0482
2005-08-01	-0,0114	-0,0151	-0,0060	-0,0140	-0,0083	-0,0094
2005-09-01	0,0396	0,0083	0,0354	0,0422	0,0292	0,0393
2005-10-03	0,0290	-0,0122	0,0230	0,0166	-0,0181	0,0098
2005-11-01	-0,0146	0,0344	-0,0110	-0,0024	0,0318	0,0021
2005-12-01	-0,0043	-0,0082	0,0027	0,0050	0,0212	0,0097

2006-01-02	0,0333	0,0137	0,0355	0,0371	0,0365	0,0380
2006-02-01	-0,0064	0,0118	0,0007	0,0006	0,0156	0,0014
2006-03-01	0,0455	0,0105	0,0389	0,0439	0,0255	0,0417
2006-04-03	0,0374	0,0229	0,0309	0,0281	0,0100	0,0251
2006-05-02	0,0016	-0,0176	-0,0045	-0,0112	-0,0359	-0,0153
2006-06-01	-0,0221	-0,0016	-0,0225	-0,0146	-0,0039	-0,0148
2006-06-30	0,0079	0,0000	0,0083	0,0057	0,0019	0,0057
2006-07-03	-0,0030	0,0032	0,0009	-0,0024	0,0051	0,0000
2006-08-01	-0,0154	0,0173	-0,0076	-0,0065	0,0232	-0,0004
2006-09-01	-0,0045	0,0258	0,0006	0,0005	0,0209	0,0036
2006-10-02	0,0092	0,0338	0,0142	0,0135	0,0315	0,0161
2006-11-01	-0,0217	0,0116	-0,0176	-0,0169	0,0029	-0,0143
2006-12-01	0,0419	0,0195	0,0397	0,0424	0,0339	0,0413
2007-01-02	0,0104	0,0126	0,0096	0,0133	0,0157	0,0130
2007-02-01	-0,0286	-0,0284	-0,0232	-0,0267	-0,0173	-0,0237
2007-03-01	0,0287	0,0070	0,0270	0,0273	0,0195	0,0274
2007-04-02	0,0140	0,0558	0,0221	0,0245	0,0564	0,0290
2007-05-02	0,0317	0,0423	0,0317	0,0351	0,0411	0,0345
2007-06-01	0,0085	-0,0162	0,0057	0,0082	-0,0028	0,0065
2007-07-02	-0,0412	-0,0148	-0,0423	-0,0450	-0,0400	-0,0447
2007-08-01	-0,0138	0,0110	-0,0121	-0,0143	-0,0001	-0,0111
2007-09-03	0,0124	0,0395	0,0149	0,0134	0,0258	0,0144
2007-10-01	0,0117	0,0025	0,0170	0,0123	0,0174	0,0152
2007-11-01	-0,0569	-0,0409	-0,0505	-0,0531	-0,0315	-0,0469
2007-12-03	0,0063	-0,0080	0,0053	0,0065	0,0024	0,0060
2008-01-02	-0,0690	-0,0474	-0,0859	-0,0923	-0,1153	-0,0946
2008-02-01	0,0050	-0,0308	0,0008	-0,0023	-0,0187	-0,0015
2008-03-03	-0,0267	-0,0003	-0,0267	-0,0262	-0,0181	-0,0260
2008-04-01	0,0547	0,0444	0,0572	0,0585	0,0562	0,0565
2008-05-02	0,0179	-0,0143	0,0130	0,0195	0,0025	0,0158
2008-06-02	-0,0647	-0,1075	-0,0743	-0,0742	-0,1066	-0,0795
2008-07-01	-0,0110	0,0025	-0,0136	-0,0083	-0,0032	-0,0080
2008-08-01	0,0015	0,0145	0,0087	0,0008	0,0118	0,0035
2008-09-01	-0,0844	-0,0619	-0,0954	-0,0842	-0,0933	-0,0901
2008-10-01	-0,0608	-0,1515	-0,0835	-0,0777	-0,1472	-0,0889
2008-11-03	-0,1163	-0,0547	-0,0937	-0,1136	-0,0582	-0,1001
2008-12-01	-0,1017	-0,0060	-0,0642	-0,0845	0,0063	-0,0673
2009-01-02	0,0783	-0,0925	0,0393	0,0470	0,0815	0,0323
2009-02-02	-0,0361	-0,1247	-0,0497	-0,0483	-0,0383	-0,0565
2009-03-02	-0,0013	0,0745	0,0073	0,0049	-0,1185	0,0132
2009-04-01	0,1020	0,0709	0,1002	0,1144	0,2732	0,1134
2009-05-04	0,0526	0,0399	0,0492	0,0510	0,1737	0,0480
2009-06-01	-0,0258	-0,0063	-0,0291	-0,0265	0,0506	-0,0282
2009-07-01	0,0485	0,0823	0,0579	0,0570	0,0782	0,0615
2009-08-03	0,0245	0,0348	0,0336	0,0268	-0,0081	0,0292
2009-09-01	0,0125	0,0225	0,0202	0,0165	0,0091	0,0192

2009-10-01	0,0050	0,0000	-0,0036	-0,0081	-0,0244	-0,0107
2009-11-02	0,0115	0,0631	0,0157	0,0117	-0,0874	0,0161
2009-12-01	0,0688	0,0080	0,0639	0,0741	0,2997	0,0680
2010-01-04	-0,0380	-0,0352	-0,0392	-0,0431	-0,0465	-0,0428
2010-02-01	0,0167	0,0253	0,0174	0,0084	0,0157	0,0088
2010-03-01	0,0532	0,0502	0,0547	0,0603	0,0680	0,0610
2010-04-01	-0,0310	0,0139	-0,0301	-0,0311	-0,0075	-0,0292
2010-05-03	-0,0720	-0,0825	-0,0719	-0,0703	-0,0621	-0,0681
2010-06-01	-0,0572	-0,0364	-0,0548	-0,0467	-0,0289	-0,0433
2010-07-01	0,0473	0,0684	0,0500	0,0427	0,0553	0,0444
2010-08-02	-0,0537	-0,0441	-0,0476	-0,0582	-0,0304	-0,0541
2010-09-01	0,0546	0,0744	0,0556	0,0533	0,0616	0,0546
2010-10-01	0,0456	0,0302	0,0423	0,0467	0,0364	0,0473
2010-11-01	-0,0106	-0,0102	-0,0143	-0,0117	-0,0130	-0,0134
2010-12-01	0,0621	0,0506	0,0619	0,0605	0,0499	0,0561
2011-01-03	0,0204	0,0268	0,0185	0,0288	0,0183	0,0281
2011-02-01	0,0079	0,0277	0,0107	0,0119	0,0257	0,0119
2011-03-01	-0,0088	0,0076	-0,0107	-0,0148	-0,0147	-0,0148
2011-04-01	0,0090	0,0391	0,0132	0,0178	0,0422	0,0187
2011-05-02	-0,0260	-0,0190	-0,0245	-0,0277	-0,0211	-0,0278
2011-06-01	0,0092	-0,0124	0,0066	0,0087	-0,0032	0,0091
2011-07-01	-0,0423	-0,0221	-0,0410	-0,0493	-0,0303	-0,0480
2011-08-01	-0,1038	-0,0446	-0,1031	-0,1240	-0,1119	-0,1261
2011-09-01	-0,1128	-0,0622	-0,1029	-0,1071	-0,0577	-0,1062
2011-10-03	0,0912	0,0837	0,0604	0,0879	0,0885	0,0885
2011-11-01	0,0076	-0,0209	-0,0103	-0,0237	-0,0232	-0,0232
2011-12-01	0,0142	-0,0113	0,0000	-0,0171	-0,0179	-0,0179

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Οι αποδόσεις των δεικτών για το μοντέλο της *Variance* με rolling παράθυρο στα έτη.

### VARIANCE (ROLLING)

DATE	MINIMUM VARIANCE	MAXIMUM RETURN	MEAN-VARIANCE	MINIMUM VARIANCE with Diversification Constraints	MAXIMUM RETURN with Diversification Constraints	MEAN-VARIANCE with Diversification Constraints
<b>2003-01-02</b>						
2003-02-03	-0,0492	-0,0204	-0,0395	-0,0560	-0,0509	-0,0537
2003-03-03	0,0277	0,0127	0,0237	0,0253	-0,0317	0,0237
2003-04-01	0,0000	0,0593	0,0166	0,0093	0,0379	0,0126
2003-05-02	-0,0247	0,0427	-0,0101	-0,0125	0,0831	-0,0027
2003-06-02	0,0374	0,0152	0,0316	0,0348	0,0208	0,0329
2003-07-01	0,1008	0,0273	0,0844	0,0908	0,0428	0,0794
2003-08-01	-0,0095	0,0195	-0,0030	0,0028	0,0422	0,0042
2003-09-01	-0,0411	-0,0151	-0,0355	-0,0415	-0,0211	-0,0360
2003-10-01	0,0351	0,0552	0,0424	0,0373	0,0165	0,0357
2003-11-03	0,0104	-0,0019	0,0057	0,0137	0,0434	0,0135
2003-12-01	0,0078	0,0664	0,0237	0,0151	0,0399	0,0193
2004-01-02	0,0057	0,0033	0,0106	0,0104	0,0278	0,0164
2004-02-02	-0,0159	0,0091	-0,0127	-0,0091	0,0149	-0,0033
2004-03-01	-0,0014	-0,0216	-0,0008	-0,0083	-0,0154	-0,0067
2004-04-01	0,0379	-0,0128	0,0278	0,0369	-0,0145	0,0207
2004-05-03	0,0157	-0,0036	0,0156	0,0170	0,0107	0,0149
2004-06-01	-0,0070	0,0240	-0,0060	-0,0048	0,0062	-0,0036
2004-07-01	-0,0094	-0,0288	-0,0079	-0,0091	-0,0050	-0,0061
2004-08-02	-0,0303	0,0034	-0,0276	-0,0357	-0,0250	-0,0315
2004-09-01	0,0008	-0,0092	0,0032	0,0051	0,0105	0,0070
2004-10-01	0,0025	-0,0053	0,0063	0,0045	0,0114	0,0081
2004-11-01	0,0275	0,0392	0,0250	0,0309	0,0290	0,0259
2004-12-01	-0,0089	0,0335	-0,0032	-0,0030	0,0264	0,0024
2005-01-03	-0,0091	-0,0276	-0,0040	-0,0034	0,0012	-0,0014
2005-02-01	0,0184	0,0260	0,0179	0,0226	0,0238	0,0207
2005-03-01	0,0168	-0,0247	0,0170	0,0153	-0,0021	0,0134
2005-04-01	-0,0352	-0,0301	-0,0333	-0,0382	-0,0338	-0,0361
2005-05-02	-0,0191	0,0266	-0,0149	-0,0016	0,0408	0,0048
2005-06-01	0,0037	-0,0186	0,0079	0,0087	0,0139	0,0112
2005-07-01	0,0446	0,0350	0,0434	0,0500	0,0479	0,0480
2005-08-01	-0,0088	-0,0151	-0,0047	-0,0128	-0,0083	-0,0094
2005-09-01	0,0376	0,0083	0,0343	0,0415	0,0292	0,0393
2005-10-03	0,0283	-0,0122	0,0251	0,0147	-0,0181	0,0096
2005-11-01	-0,0148	0,0344	-0,0137	-0,0015	0,0318	0,0017
2005-12-01	-0,0023	-0,0082	0,0019	0,0061	0,0212	0,0097

2006-01-02	0,0343	0,0137	0,0367	0,0382	0,0365	0,0382
2006-02-01	-0,0021	0,0118	0,0077	0,0010	0,0156	0,0010
2006-03-01	0,0410	0,0105	0,0310	0,0422	0,0255	0,0422
2006-04-03	0,0345	0,0229	0,0266	0,0245	0,0100	0,0245
2006-05-02	0,0001	-0,0176	-0,0053	-0,0153	-0,0359	-0,0153
2006-06-01	-0,0240	-0,0016	-0,0267	-0,0145	-0,0039	-0,0145
2006-06-30	0,0088	0,0000	0,0103	0,0057	0,0019	0,0057
2006-07-03	-0,0004	0,0032	0,0058	0,0004	0,0051	0,0004
2006-08-01	-0,0121	0,0173	-0,0028	-0,0004	0,0232	-0,0004
2006-09-01	-0,0021	0,0258	0,0042	0,0033	0,0209	0,0033
2006-10-02	0,0117	0,0338	0,0175	0,0153	0,0315	0,0152
2006-11-01	-0,0199	0,0116	-0,0154	-0,0147	0,0029	-0,0147
2006-12-01	0,0402	0,0195	0,0365	0,0412	0,0339	0,0412
2007-01-02	0,0091	0,0126	0,0071	0,0123	0,0157	0,0124
2007-02-01	-0,0255	-0,0284	-0,0201	-0,0239	-0,0173	-0,0239
2007-03-01	0,0276	0,0070	0,0256	0,0271	0,0195	0,0272
2007-04-02	0,0171	0,0558	0,0237	0,0285	0,0564	0,0285
2007-05-02	0,0307	0,0423	0,0289	0,0328	0,0411	0,0329
2007-06-01	0,0066	-0,0162	0,0027	0,0055	-0,0028	0,0056
2007-07-02	-0,0415	-0,0148	-0,0422	-0,0447	-0,0400	-0,0447
2007-08-01	-0,0134	0,0110	-0,0128	-0,0121	-0,0001	-0,0121
2007-09-03	0,0136	0,0395	0,0155	0,0135	0,0258	0,0135
2007-10-01	0,0152	0,0025	0,0210	0,0153	0,0174	0,0154
2007-11-01	-0,0542	-0,0409	-0,0488	-0,0473	-0,0315	-0,0473
2007-12-03	0,0052	-0,0080	0,0028	0,0046	0,0024	0,0047
2008-01-02	-0,0599	-0,0474	-0,0680	-0,0650	-0,1153	-0,0756
2008-02-01	-0,0043	-0,0308	-0,0097	-0,0058	-0,0187	-0,0085
2008-03-03	-0,0203	-0,0003	-0,0184	-0,0195	-0,0181	-0,0194
2008-04-01	0,0526	0,0444	0,0543	0,0519	0,0562	0,0534
2008-05-02	0,0067	-0,0143	-0,0019	0,0089	0,0025	0,0061
2008-06-02	-0,0736	-0,1075	-0,0830	-0,0772	-0,1066	-0,0833
2008-07-01	-0,0107	0,0025	-0,0151	-0,0064	-0,0032	-0,0077
2008-08-01	0,0088	0,0145	0,0192	0,0046	0,0118	0,0086
2008-09-01	-0,0831	-0,0619	-0,0939	-0,0782	-0,0933	-0,0845
2008-10-01	-0,0872	-0,1515	-0,1116	-0,0896	-0,1472	-0,1035
2008-11-03	-0,0901	-0,0547	-0,0617	-0,0967	-0,0582	-0,0835
2008-12-01	-0,0636	-0,0060	-0,0215	-0,0692	0,0063	-0,0471
2009-01-02	0,0236	-0,0925	-0,0092	0,0305	-0,0890	0,0250
2009-02-02	-0,0624	-0,1247	-0,0756	-0,0626	-0,1104	-0,0647
2009-03-02	0,0206	0,0745	0,0304	0,0217	0,0545	0,0231
2009-04-01	0,0891	0,0709	0,0843	0,0965	0,1110	0,0968
2009-05-04	0,0487	0,0399	0,0460	0,0491	0,0376	0,0486
2009-06-01	-0,0207	-0,0063	-0,0208	-0,0190	-0,0267	-0,0194
2009-07-01	0,0594	0,0823	0,0664	0,0587	0,0899	0,0601
2009-08-03	0,0293	0,0348	0,0351	0,0242	0,0430	0,0252
2009-09-01	0,0175	0,0225	0,0222	0,0146	0,0344	0,0156

<b>2009-10-01</b>	0,0049	0,0000	0,0008	0,0036	-0,0310	0,0023
<b>2009-11-02</b>	0,0277	0,0631	0,0338	0,0270	0,0392	0,0276
<b>2009-12-01</b>	0,0484	0,0080	0,0405	0,0517	0,0440	0,0511
<b>2010-01-04</b>	-0,0365	-0,0352	-0,0364	-0,0372	-0,0483	-0,0374
<b>2010-02-01</b>	0,0225	0,0253	0,0226	0,0178	0,0077	0,0178
<b>2010-03-01</b>	0,0516	0,0502	0,0514	0,0528	0,0700	0,0532
<b>2010-04-01</b>	-0,0158	0,0139	-0,0146	-0,0177	-0,0110	-0,0171
<b>2010-05-03</b>	-0,0740	-0,0825	-0,0743	-0,0737	-0,0654	-0,0729
<b>2010-06-01</b>	-0,0536	-0,0364	-0,0528	-0,0505	-0,0218	-0,0502
<b>2010-07-01</b>	0,0547	0,0684	0,0551	0,0507	0,0532	0,0504
<b>2010-08-02</b>	-0,0478	-0,0441	-0,0478	-0,0552	-0,0377	-0,0551
<b>2010-09-01</b>	0,0606	0,0744	0,0610	0,0595	0,0620	0,0593
<b>2010-10-01</b>	0,0401	0,0302	0,0398	0,0440	0,0381	0,0444
<b>2010-11-01</b>	-0,0079	-0,0102	-0,0079	-0,0071	-0,0197	-0,0060
<b>2010-12-01</b>	0,0596	0,0506	0,0592	0,0578	0,0474	0,0575
<b>2011-01-03</b>	0,0177	0,0268	0,0179	0,0244	0,0183	0,0237
<b>2011-02-01</b>	0,0140	0,0277	0,0153	0,0123	0,0257	0,0123
<b>2011-03-01</b>	-0,0025	0,0076	-0,0020	-0,0038	-0,0147	-0,0038
<b>2011-04-01</b>	0,0185	0,0391	0,0204	0,0172	0,0422	0,0182
<b>2011-05-02</b>	-0,0228	-0,0190	-0,0222	-0,0255	-0,0211	-0,0257
<b>2011-06-01</b>	0,0021	-0,0124	0,0007	0,0052	-0,0032	0,0056
<b>2011-07-01</b>	-0,0313	-0,0221	-0,0303	-0,0372	-0,0303	-0,0359
<b>2011-08-01</b>	-0,0815	-0,0446	-0,0782	-0,0932	-0,1119	-0,0956
<b>2011-09-01</b>	-0,0933	-0,0622	-0,0896	-0,1033	-0,0577	-0,1023
<b>2011-10-03</b>	0,0856	0,0912	0,0858	0,0875	0,0921	0,0882
<b>2011-11-01</b>	-0,0117	0,0076	-0,0100	-0,0154	-0,0052	-0,0149
<b>2011-12-01</b>	-0,0046	0,0142	-0,0026	-0,0103	-0,0015	-0,0111

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Οι αποδόσεις των δεικτών για το μοντέλο ελαχιστοποίησης της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο.

Minimum- CVar					
DATE	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>2003-01-02</b>					
2003-02-03	-0,0573	-0,0573	-0,0573	-0,0566	-0,0576
2003-03-03	0,0216	0,0216	0,0216	0,0179	0,0091
2003-04-01	0,0081	0,0081	0,0081	0,0077	0,0162
2003-05-02	-0,0017	-0,0017	-0,0017	0,0109	0,0591
2003-06-02	0,0350	0,0350	0,0350	0,0329	0,0247
2003-07-01	0,0765	0,0765	0,0765	0,0711	0,0331
2003-08-01	0,0009	0,0009	0,0009	0,0058	0,0247
2003-09-01	-0,0339	-0,0339	-0,0339	-0,0304	-0,0136
2003-10-01	0,0297	0,0297	0,0297	0,0257	0,0154
2003-11-03	0,0163	0,0163	0,0163	0,0200	0,0290
2003-12-01	0,0129	0,0129	0,0129	0,0162	0,0328
2004-01-02	0,0043	0,0043	0,0043	0,0120	0,0186
2004-02-02	-0,0132	-0,0132	-0,0132	-0,0070	-0,0025
2004-03-01	-0,0043	-0,0043	-0,0043	-0,0045	-0,0014
2004-04-01	0,0321	0,0321	0,0321	0,0114	-0,0189
2004-05-03	0,0131	0,0131	0,0131	0,0135	0,0104
2004-06-01	-0,0027	-0,0027	-0,0027	-0,0009	0,0051
2004-07-01	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0084	-0,0092
2004-08-02	-0,0260	-0,0260	-0,0260	-0,0237	-0,0075
2004-09-01	-0,0014	-0,0014	-0,0014	0,0014	0,0019
2004-10-01	0,0002	0,0002	0,0002	0,0035	0,0097
2004-11-01	0,0302	0,0302	0,0302	0,0309	0,0266
2004-12-01	-0,0037	-0,0037	-0,0037	0,0080	0,0257
2005-01-03	-0,0154	-0,0154	-0,0149	-0,0104	-0,0082
2005-02-01	0,0197	0,0197	0,0196	0,0195	0,0199
2005-03-01	0,0102	0,0102	0,0101	0,0023	-0,0065
2005-04-01	-0,0354	-0,0354	-0,0351	-0,0310	-0,0265
2005-05-02	-0,0151	-0,0151	-0,0146	0,0045	0,0172
2005-06-01	-0,0025	-0,0025	-0,0021	0,0033	0,0036
2005-07-01	0,0436	0,0436	0,0434	0,0417	0,0370
2005-08-01	-0,0121	-0,0121	-0,0115	-0,0052	0,0001
2005-09-01	0,0347	0,0347	0,0341	0,0238	0,0111
2005-10-03	0,0246	0,0246	0,0242	0,0112	0,0006
2005-11-01	-0,0082	-0,0082	-0,0080	0,0066	0,0168
2005-12-01	-0,0061	-0,0061	-0,0056	0,0036	0,0068
2006-01-02	0,0296	0,0296	0,0296	0,0293	0,0279



2006-02-01	-0,0052	-0,0052	-0,0052	0,0012	0,0136
2006-03-01	0,0413	0,0413	0,0413	0,0338	0,0172
2006-04-03	0,0372	0,0372	0,0372	0,0328	0,0259
2006-05-02	0,0005	0,0005	0,0005	-0,0047	-0,0086
2006-06-01	-0,0193	-0,0193	-0,0193	-0,0185	-0,0217
2006-06-30	0,0067	0,0067	0,0067	0,0064	0,0078
2006-07-03	-0,0031	-0,0031	-0,0031	-0,0007	0,0062
2006-08-01	-0,0126	-0,0126	-0,0126	-0,0053	0,0057
2006-09-01	-0,0010	-0,0010	-0,0010	0,0049	0,0145
2006-10-02	0,0121	0,0121	0,0121	0,0183	0,0279
2006-11-01	-0,0175	-0,0175	-0,0175	-0,0119	-0,0034
2006-12-01	0,0389	0,0389	0,0389	0,0361	0,0288
2007-01-02	0,0210	0,0209	0,0188	0,0167	0,0145
2007-02-01	-0,0470	-0,0463	-0,0358	-0,0253	-0,0150
2007-03-01	0,0349	0,0348	0,0323	0,0298	0,0272
2007-04-02	0,0057	0,0065	0,0174	0,0284	0,0393
2007-05-02	0,0369	0,0370	0,0391	0,0412	0,0424
2007-06-01	0,0184	0,0182	0,0151	0,0120	0,0084
2007-07-02	-0,0437	-0,0437	-0,0445	-0,0453	-0,0461
2007-08-01	-0,0173	-0,0170	-0,0126	-0,0081	-0,0042
2007-09-03	0,0022	0,0027	0,0094	0,0162	0,0223
2007-10-01	-0,0094	-0,0087	0,0017	0,0121	0,0223
2007-11-01	-0,0677	-0,0670	-0,0571	-0,0471	-0,0374
2007-12-03	0,0101	0,0101	0,0113	0,0124	0,0128
2008-01-02	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0721	-0,0957
2008-02-01	0,0008	0,0008	0,0008	-0,0066	-0,0157
2008-03-03	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0207	-0,0196
2008-04-01	0,0522	0,0522	0,0522	0,0533	0,0564
2008-05-02	0,0151	0,0151	0,0151	0,0078	-0,0017
2008-06-02	-0,0676	-0,0676	-0,0676	-0,0787	-0,0944
2008-07-01	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0076	-0,0100
2008-08-01	0,0002	0,0002	0,0002	0,0067	0,0175
2008-09-01	-0,0765	-0,0765	-0,0765	-0,0835	-0,0985
2008-10-01	-0,0672	-0,0672	-0,0672	-0,0974	-0,1396
2008-11-03	-0,1151	-0,1151	-0,1151	-0,0873	-0,0463
2008-12-01	-0,0996	-0,0996	-0,0996	-0,0526	0,0166
2009-01-02	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	-0,0098
2009-02-02	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0799
2009-03-02	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0339
2009-04-01	0,0897	0,0897	0,0897	0,0897	0,1046
2009-05-04	0,0490	0,0490	0,0490	0,0490	0,0453
2009-06-01	-0,0213	-0,0213	-0,0213	-0,0213	-0,0201
2009-07-01	0,0586	0,0586	0,0586	0,0586	0,0703
2009-08-03	0,0293	0,0293	0,0293	0,0293	0,0261
2009-09-01	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0213
2009-10-01	0,0049	0,0049	0,0049	0,0049	-0,0067

<b>2009-11-02</b>	0,0263	0,0263	0,0263	0,0263	0,0326
<b>2009-12-01</b>	0,0499	0,0499	0,0499	0,0499	0,0482
<b>2010-01-04</b>	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0425
<b>2010-02-01</b>	0,0223	0,0223	0,0223	0,0223	0,0132
<b>2010-03-01</b>	0,0516	0,0516	0,0516	0,0516	0,0531
<b>2010-04-01</b>	-0,0181	-0,0181	-0,0181	-0,0181	-0,0267
<b>2010-05-03</b>	-0,0733	-0,0733	-0,0733	-0,0733	-0,0822
<b>2010-06-01</b>	-0,0549	-0,0549	-0,0549	-0,0549	-0,0721
<b>2010-07-01</b>	0,0536	0,0536	0,0536	0,0536	0,0313
<b>2010-08-02</b>	-0,0482	-0,0482	-0,0482	-0,0482	-0,0880
<b>2010-09-01</b>	0,0594	0,0594	0,0594	0,0594	0,0463
<b>2010-10-01</b>	0,0409	0,0409	0,0409	0,0409	0,0436
<b>2010-11-01</b>	-0,0077	-0,0077	-0,0077	-0,0077	0,0179
<b>2010-12-01</b>	0,0603	0,0603	0,0603	0,0603	0,0896
<b>2011-01-03</b>	0,0174	0,0174	0,0174	0,0174	0,0221
<b>2011-02-01</b>	0,0124	0,0124	0,0124	0,0124	0,0134
<b>2011-03-01</b>	-0,0033	-0,0033	-0,0033	-0,0033	-0,0094
<b>2011-04-01</b>	0,0162	0,0162	0,0162	0,0162	0,0249
<b>2011-05-02</b>	-0,0234	-0,0234	-0,0234	-0,0234	-0,0270
<b>2011-06-01</b>	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0087
<b>2011-07-01</b>	-0,0324	-0,0324	-0,0324	-0,0324	-0,0343
<b>2011-08-01</b>	-0,0853	-0,0853	-0,0853	-0,0853	-0,1216
<b>2011-09-01</b>	-0,0975	-0,0975	-0,0975	-0,0975	-0,0961
<b>2011-10-03</b>	0,0853	0,0853	0,0853	0,0853	0,0922
<b>2011-11-01</b>	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0152
<b>2011-12-01</b>	-0,0068	-0,0068	-0,0068	-0,0068	-0,0177

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Οι αποδόσεις των δεικτών για τα χαρτοφυλάκια μεγιστοποίησης της απόδοσης του μοντέλου της υπό συνθήκη αξίας σε κίνδυνο.

Maximum Return in CVar Model					
DATE	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>2003-01-02</b>					
2003-02-03	-0,0573	-0,0573	-0,0573	-0,0566	-0,0576
2003-03-03	0,0216	0,0216	0,0216	0,0179	0,0091
2003-04-01	0,0081	0,0081	0,0081	0,0077	0,0162
2003-05-02	-0,0017	-0,0017	-0,0017	0,0109	0,0591
2003-06-02	0,0350	0,0350	0,0350	0,0329	0,0247
2003-07-01	0,0765	0,0765	0,0765	0,0711	0,0331
2003-08-01	0,0009	0,0009	0,0009	0,0058	0,0247
2003-09-01	-0,0339	-0,0339	-0,0339	-0,0304	-0,0136
2003-10-01	0,0297	0,0297	0,0297	0,0257	0,0154
2003-11-03	0,0163	0,0163	0,0163	0,0200	0,0290
2003-12-01	0,0129	0,0129	0,0129	0,0162	0,0328
2004-01-02	0,0043	0,0043	0,0043	0,0120	0,0186
2004-02-02	-0,0132	-0,0132	-0,0132	-0,0070	-0,0025
2004-03-01	-0,0043	-0,0043	-0,0043	-0,0045	-0,0014
2004-04-01	0,0321	0,0321	0,0321	0,0114	-0,0189
2004-05-03	0,0131	0,0131	0,0131	0,0135	0,0104
2004-06-01	-0,0027	-0,0027	-0,0027	-0,0009	0,0051
2004-07-01	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0084	-0,0092
2004-08-02	-0,0260	-0,0260	-0,0260	-0,0237	-0,0075
2004-09-01	-0,0014	-0,0014	-0,0014	0,0014	0,0019
2004-10-01	0,0002	0,0002	0,0002	0,0035	0,0097
2004-11-01	0,0302	0,0302	0,0302	0,0309	0,0266
2004-12-01	-0,0037	-0,0037	-0,0037	0,0080	0,0257
2005-01-03	-0,0154	-0,0154	-0,0148	-0,0104	-0,0082
2005-02-01	0,0197	0,0197	0,0195	0,0195	0,0199
2005-03-01	0,0102	0,0102	0,0102	0,0023	-0,0065
2005-04-01	-0,0354	-0,0354	-0,0350	-0,0310	-0,0265
2005-05-02	-0,0151	-0,0151	-0,0147	0,0045	0,0172
2005-06-01	-0,0025	-0,0025	-0,0020	0,0033	0,0036
2005-07-01	0,0436	0,0436	0,0433	0,0417	0,0370
2005-08-01	-0,0121	-0,0121	-0,0115	-0,0052	0,0001
2005-09-01	0,0347	0,0347	0,0341	0,0238	0,0111
2005-10-03	0,0246	0,0246	0,0243	0,0112	0,0006
2005-11-01	-0,0082	-0,0082	-0,0082	0,0066	0,0168
2005-12-01	-0,0061	-0,0061	-0,0056	0,0036	0,0068
2006-01-02	0,0296	0,0296	0,0296	0,0293	0,0279

2006-02-01	-0,0052	-0,0052	-0,0052	0,0012	0,0136
2006-03-01	0,0413	0,0413	0,0413	0,0338	0,0172
2006-04-03	0,0372	0,0372	0,0372	0,0328	0,0259
2006-05-02	0,0005	0,0005	0,0005	-0,0047	-0,0086
2006-06-01	-0,0193	-0,0193	-0,0193	-0,0185	-0,0217
2006-06-30	0,0067	0,0067	0,0067	0,0064	0,0078
2006-07-03	-0,0031	-0,0031	-0,0031	-0,0007	0,0062
2006-08-01	-0,0126	-0,0126	-0,0126	-0,0053	0,0057
2006-09-01	-0,0010	-0,0010	-0,0010	0,0049	0,0145
2006-10-02	0,0121	0,0121	0,0121	0,0183	0,0279
2006-11-01	-0,0175	-0,0175	-0,0175	-0,0119	-0,0034
2006-12-01	0,0389	0,0389	0,0389	0,0361	0,0288
2007-01-02	0,0210	0,0209	0,0188	0,0167	0,0145
2007-02-01	-0,0470	-0,0463	-0,0358	-0,0253	-0,0150
2007-03-01	0,0349	0,0348	0,0323	0,0298	0,0272
2007-04-02	0,0057	0,0065	0,0174	0,0284	0,0393
2007-05-02	0,0369	0,0370	0,0391	0,0412	0,0424
2007-06-01	0,0184	0,0182	0,0151	0,0120	0,0084
2007-07-02	-0,0437	-0,0437	-0,0445	-0,0453	-0,0461
2007-08-01	-0,0173	-0,0170	-0,0126	-0,0081	-0,0042
2007-09-03	0,0022	0,0027	0,0094	0,0162	0,0223
2007-10-01	-0,0094	-0,0087	0,0017	0,0121	0,0223
2007-11-01	-0,0677	-0,0670	-0,0571	-0,0471	-0,0374
2007-12-03	0,0101	0,0101	0,0113	0,0124	0,0128
2008-01-02	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0721	-0,0957
2008-02-01	0,0008	0,0008	0,0008	-0,0066	-0,0157
2008-03-03	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0207	-0,0196
2008-04-01	0,0522	0,0522	0,0522	0,0533	0,0564
2008-05-02	0,0151	0,0151	0,0151	0,0078	-0,0017
2008-06-02	-0,0676	-0,0676	-0,0676	-0,0787	-0,0944
2008-07-01	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0076	-0,0100
2008-08-01	0,0002	0,0002	0,0002	0,0067	0,0175
2008-09-01	-0,0765	-0,0765	-0,0765	-0,0835	-0,0985
2008-10-01	-0,0672	-0,0672	-0,0672	-0,0974	-0,1396
2008-11-03	-0,1151	-0,1151	-0,1151	-0,0873	-0,0463
2008-12-01	-0,0996	-0,0996	-0,0996	-0,0526	0,0166
2009-01-02	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	-0,0098
2009-02-02	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0601	-0,0799
2009-03-02	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0339
2009-04-01	0,0897	0,0897	0,0897	0,0897	0,1046
2009-05-04	0,0490	0,0490	0,0490	0,0490	0,0453
2009-06-01	-0,0213	-0,0213	-0,0213	-0,0213	-0,0201
2009-07-01	0,0586	0,0586	0,0586	0,0586	0,0703
2009-08-03	0,0293	0,0293	0,0293	0,0293	0,0261
2009-09-01	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0213
2009-10-01	0,0049	0,0049	0,0049	0,0049	-0,0067

<b>2009-11-02</b>	0,0263	0,0263	0,0263	0,0263	0,0326
<b>2009-12-01</b>	0,0499	0,0499	0,0499	0,0499	0,0482
<b>2010-01-04</b>	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0425
<b>2010-02-01</b>	0,0223	0,0223	0,0223	0,0223	0,0132
<b>2010-03-01</b>	0,0516	0,0516	0,0516	0,0516	0,0531
<b>2010-04-01</b>	-0,0181	-0,0181	-0,0181	-0,0181	-0,0267
<b>2010-05-03</b>	-0,0733	-0,0733	-0,0733	-0,0733	-0,0822
<b>2010-06-01</b>	-0,0549	-0,0549	-0,0549	-0,0549	-0,0721
<b>2010-07-01</b>	0,0536	0,0536	0,0536	0,0536	0,0313
<b>2010-08-02</b>	-0,0482	-0,0482	-0,0482	-0,0482	-0,0880
<b>2010-09-01</b>	0,0594	0,0594	0,0594	0,0594	0,0463
<b>2010-10-01</b>	0,0409	0,0409	0,0409	0,0409	0,0436
<b>2010-11-01</b>	-0,0077	-0,0077	-0,0077	-0,0077	0,0179
<b>2010-12-01</b>	0,0603	0,0603	0,0603	0,0603	0,0896
<b>2011-01-03</b>	0,0174	0,0174	0,0174	0,0174	0,0221
<b>2011-02-01</b>	0,0124	0,0124	0,0124	0,0124	0,0134
<b>2011-03-01</b>	-0,0033	-0,0033	-0,0033	-0,0033	-0,0094
<b>2011-04-01</b>	0,0162	0,0162	0,0162	0,0162	0,0249
<b>2011-05-02</b>	-0,0234	-0,0234	-0,0234	-0,0234	-0,0270
<b>2011-06-01</b>	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0087
<b>2011-07-01</b>	-0,0324	-0,0324	-0,0324	-0,0324	-0,0343
<b>2011-08-01</b>	-0,0853	-0,0853	-0,0853	-0,0853	-0,1216
<b>2011-09-01</b>	-0,0975	-0,0975	-0,0975	-0,0975	-0,0961
<b>2011-10-03</b>	0,0853	0,0853	0,0853	0,0853	0,0922
<b>2011-11-01</b>	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0152
<b>2011-12-01</b>	-0,0068	-0,0068	-0,0068	-0,0068	-0,0177

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

Οι αποδόσεις του μοντέλου ελαχιστοποίησης της απώλειας.

Minimum Regret					
DATE	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
<b>2003-01-02</b>					
2003-02-03	-0,0412	-0,0412	-0,0412	-0,0412	-0,0395
2003-03-03	0,0090	0,0090	0,0090	0,0090	0,0062
2003-04-01	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145	0,0209
2003-05-02	0,0318	0,0318	0,0318	0,0318	0,0457
2003-06-02	0,0261	0,0261	0,0261	0,0261	0,0230
2003-07-01	0,0670	0,0670	0,0670	0,0670	0,0539
2003-08-01	0,0140	0,0140	0,0140	0,0140	0,0197
2003-09-01	-0,0249	-0,0249	-0,0249	-0,0249	-0,0198
2003-10-01	0,0270	0,0270	0,0270	0,0270	0,0268
2003-11-03	0,0209	0,0209	0,0209	0,0209	0,0215
2003-12-01	0,0311	0,0311	0,0311	0,0311	0,0386
2004-01-02	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0115
2004-02-02	-0,0038	-0,0038	-0,0038	-0,0038	0,0029
2004-03-01	-0,0109	-0,0109	-0,0109	-0,0109	-0,0131
2004-04-01	0,0151	0,0151	0,0151	0,0151	-0,0033
2004-05-03	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0075
2004-06-01	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0090
2004-07-01	-0,0135	-0,0135	-0,0135	-0,0135	-0,0140
2004-08-02	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0161
2004-09-01	-0,0021	-0,0021	-0,0021	-0,0021	-0,0014
2004-10-01	-0,0020	-0,0020	-0,0020	-0,0020	0,0000
2004-11-01	0,0360	0,0360	0,0360	0,0360	0,0364
2004-12-01	0,0091	0,0091	0,0091	0,0091	0,0212
2005-01-03	-0,0205	-0,0205	-0,0205	-0,0200	-0,0199
2005-02-01	0,0217	0,0217	0,0217	0,0217	0,0234
2005-03-01	-0,0014	-0,0014	-0,0014	-0,0017	-0,0117
2005-04-01	-0,0345	-0,0345	-0,0345	-0,0341	-0,0323
2005-05-02	0,0011	0,0011	0,0011	0,0020	0,0209
2005-06-01	-0,0069	-0,0069	-0,0069	-0,0065	-0,0068
2005-07-01	0,0428	0,0428	0,0428	0,0425	0,0413
2005-08-01	-0,0142	-0,0142	-0,0142	-0,0136	-0,0128
2005-09-01	0,0281	0,0281	0,0281	0,0273	0,0198
2005-10-03	0,0121	0,0121	0,0121	0,0114	-0,0035
2005-11-01	0,0085	0,0085	0,0085	0,0090	0,0254
2005-12-01	-0,0051	-0,0051	-0,0051	-0,0046	0,0001
2006-01-02	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0265

<b>2006-02-01</b>	0,0128	0,0128	0,0128	0,0128	0,0141
<b>2006-03-01</b>	0,0172	0,0172	0,0172	0,0172	0,0152
<b>2006-04-03</b>	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0273
<b>2006-05-02</b>	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0060
<b>2006-06-01</b>	-0,0241	-0,0241	-0,0241	-0,0241	-0,0234
<b>2006-06-30</b>	0,0086	0,0086	0,0086	0,0086	0,0083
<b>2006-07-03</b>	0,0063	0,0063	0,0063	0,0063	0,0065
<b>2006-08-01</b>	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0046
<b>2006-09-01</b>	0,0130	0,0130	0,0130	0,0130	0,0147
<b>2006-10-02</b>	0,0266	0,0266	0,0266	0,0266	0,0283
<b>2006-11-01</b>	-0,0050	-0,0050	-0,0050	-0,0050	-0,0032
<b>2006-12-01</b>	0,0286	0,0286	0,0286	0,0286	0,0277
<b>2007-01-02</b>	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0070
<b>2007-02-01</b>	-0,0211	-0,0211	-0,0211	-0,0211	-0,0113
<b>2007-03-01</b>	0,0283	0,0283	0,0283	0,0283	0,0252
<b>2007-04-02</b>	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0302
<b>2007-05-02</b>	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0359
<b>2007-06-01</b>	0,0094	0,0094	0,0094	0,0094	0,0046
<b>2007-07-02</b>	-0,0427	-0,0427	-0,0427	-0,0427	-0,0423
<b>2007-08-01</b>	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0061
<b>2007-09-03</b>	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0238
<b>2007-10-01</b>	0,0181	0,0181	0,0181	0,0181	0,0288
<b>2007-11-01</b>	-0,0485	-0,0485	-0,0485	-0,0485	-0,0413
<b>2007-12-03</b>	0,0111	0,0111	0,0111	0,0111	0,0096
<b>2008-01-02</b>	-0,0750	-0,0750	-0,0750	-0,0750	-0,0918
<b>2008-02-01</b>	-0,0130	-0,0130	-0,0130	-0,0130	-0,0174
<b>2008-03-03</b>	-0,0176	-0,0176	-0,0176	-0,0176	-0,0166
<b>2008-04-01</b>	0,0554	0,0554	0,0554	0,0554	0,0552
<b>2008-05-02</b>	-0,0064	-0,0064	-0,0064	-0,0064	-0,0038
<b>2008-06-02</b>	-0,0888	-0,0888	-0,0888	-0,0888	-0,0985
<b>2008-07-01</b>	-0,0173	-0,0173	-0,0173	-0,0173	-0,0098
<b>2008-08-01</b>	0,0247	0,0247	0,0247	0,0247	0,0190
<b>2008-09-01</b>	-0,1005	-0,1005	-0,1005	-0,1005	-0,0956
<b>2008-10-01</b>	-0,1268	-0,1268	-0,1268	-0,1268	-0,1405
<b>2008-11-03</b>	-0,0452	-0,0452	-0,0452	-0,0452	-0,0482
<b>2008-12-01</b>	0,0043	0,0060	0,0043	0,0043	0,0101
<b>2009-01-02</b>	-0,0686	-0,0686	-0,0686	-0,0686	-0,0686
<b>2009-02-02</b>	-0,0983	-0,0983	-0,0983	-0,0983	-0,0983
<b>2009-03-02</b>	0,0467	0,0467	0,0467	0,0467	0,0467
<b>2009-04-01</b>	0,0759	0,0759	0,0759	0,0759	0,0759
<b>2009-05-04</b>	0,0410	0,0410	0,0410	0,0410	0,0410
<b>2009-06-01</b>	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223
<b>2009-07-01</b>	0,0794	0,0794	0,0794	0,0794	0,0794
<b>2009-08-03</b>	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468
<b>2009-09-01</b>	0,0319	0,0319	0,0319	0,0319	0,0319
<b>2009-10-01</b>	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073

<b>2009-11-02</b>	0,0440	0,0440	0,0440	0,0440	0,0440
<b>2009-12-01</b>	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273
<b>2010-01-04</b>	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0372
<b>2010-02-01</b>	0,0229	0,0229	0,0229	0,0229	0,0218
<b>2010-03-01</b>	0,0516	0,0516	0,0516	0,0516	0,0531
<b>2010-04-01</b>	-0,0143	-0,0143	-0,0143	-0,0143	-0,0082
<b>2010-05-03</b>	-0,0743	-0,0743	-0,0743	-0,0743	-0,0739
<b>2010-06-01</b>	-0,0526	-0,0526	-0,0526	-0,0526	-0,0470
<b>2010-07-01</b>	0,0558	0,0558	0,0558	0,0558	0,0563
<b>2010-08-02</b>	-0,0465	-0,0465	-0,0465	-0,0465	-0,0474
<b>2010-09-01</b>	0,0613	0,0613	0,0613	0,0613	0,0632
<b>2010-10-01</b>	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391
<b>2010-11-01</b>	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0070
<b>2010-12-01</b>	0,0592	0,0592	0,0592	0,0592	0,0561
<b>2011-01-03</b>	0,0167	0,0167	0,0167	0,0167	0,0118
<b>2011-02-01</b>	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145	0,0196
<b>2011-03-01</b>	-0,0030	-0,0030	-0,0030	-0,0030	-0,0042
<b>2011-04-01</b>	0,0191	0,0191	0,0191	0,0191	0,0257
<b>2011-05-02</b>	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0188
<b>2011-06-01</b>	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	-0,0041
<b>2011-07-01</b>	-0,0308	-0,0308	-0,0308	-0,0308	-0,0263
<b>2011-08-01</b>	-0,0809	-0,0809	-0,0809	-0,0809	-0,0715
<b>2011-09-01</b>	-0,0911	-0,0911	-0,0911	-0,0911	-0,0726
<b>2011-10-03</b>	0,0853	0,0853	0,0853	0,0853	0,0843
<b>2011-11-01</b>	-0,0114	-0,0114	-0,0114	-0,0114	-0,0061
<b>2011-12-01</b>	-0,0036	-0,0036	-0,0036	-0,0036	0,0049



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

Οι αποδόσεις του μοντέλου απώλειας για τα χαρτοφυλάκια μεγιστοποίησης της απόδοσης.

### Maximum Return in Regret Model

DATE	Χαρτοφυλάκιο 1	Χαρτοφυλάκιο 2	Χαρτοφυλάκιο 3	Χαρτοφυλάκιο 4	Χαρτοφυλάκιο 5
2003-01-02					
2003-02-03	-0,0412	-0,0412	-0,0412	-0,0412	-0,0395
2003-03-03	0,0090	0,0090	0,0090	0,0090	0,0062
2003-04-01	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145	0,0209
2003-05-02	0,0318	0,0318	0,0318	0,0318	0,0457
2003-06-02	0,0261	0,0261	0,0261	0,0261	0,0230
2003-07-01	0,0670	0,0670	0,0670	0,0670	0,0539
2003-08-01	0,0140	0,0140	0,0140	0,0140	0,0197
2003-09-01	-0,0249	-0,0249	-0,0249	-0,0249	-0,0198
2003-10-01	0,0270	0,0270	0,0270	0,0270	0,0268
2003-11-03	0,0209	0,0209	0,0209	0,0209	0,0215
2003-12-01	0,0311	0,0311	0,0311	0,0311	0,0386
2004-01-02	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0115
2004-02-02	-0,0038	-0,0038	-0,0038	-0,0038	0,0029
2004-03-01	-0,0109	-0,0109	-0,0109	-0,0109	-0,0131
2004-04-01	0,0151	0,0151	0,0151	0,0151	-0,0033
2004-05-03	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0075
2004-06-01	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0090
2004-07-01	-0,0135	-0,0135	-0,0135	-0,0135	-0,0140
2004-08-02	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0228	-0,0161
2004-09-01	-0,0021	-0,0021	-0,0021	-0,0021	-0,0014
2004-10-01	-0,0020	-0,0020	-0,0020	-0,0020	0,0000
2004-11-01	0,0360	0,0360	0,0360	0,0360	0,0364
2004-12-01	0,0091	0,0091	0,0091	0,0091	0,0212
2005-01-03	-0,0205	-0,0205	-0,0205	-0,0205	-0,0199
2005-02-01	0,0217	0,0217	0,0217	0,0217	0,0234
2005-03-01	-0,0014	-0,0014	-0,0014	-0,0014	-0,0117
2005-04-01	-0,0345	-0,0345	-0,0345	-0,0345	-0,0323
2005-05-02	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0209
2005-06-01	-0,0069	-0,0069	-0,0069	-0,0069	-0,0068
2005-07-01	0,0428	0,0428	0,0428	0,0428	0,0413
2005-08-01	-0,0142	-0,0142	-0,0142	-0,0142	-0,0128
2005-09-01	0,0281	0,0281	0,0281	0,0281	0,0198
2005-10-03	0,0121	0,0121	0,0121	0,0121	-0,0035
2005-11-01	0,0085	0,0085	0,0085	0,0085	0,0254
2005-12-01	-0,0051	-0,0051	-0,0051	-0,0051	0,0001
2006-01-02	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0265

2006-02-01	0,0128	0,0128	0,0128	0,0128	0,0141
2006-03-01	0,0172	0,0172	0,0172	0,0172	0,0152
2006-04-03	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0273
2006-05-02	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0060
2006-06-01	-0,0241	-0,0241	-0,0241	-0,0241	-0,0234
2006-06-30	0,0086	0,0086	0,0086	0,0086	0,0083
2006-07-03	0,0063	0,0063	0,0063	0,0063	0,0065
2006-08-01	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0046
2006-09-01	0,0130	0,0130	0,0130	0,0130	0,0147
2006-10-02	0,0266	0,0266	0,0266	0,0266	0,0283
2006-11-01	-0,0050	-0,0050	-0,0050	-0,0050	-0,0032
2006-12-01	0,0286	0,0286	0,0286	0,0286	0,0277
2007-01-02	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0070
2007-02-01	-0,0211	-0,0211	-0,0211	-0,0211	-0,0113
2007-03-01	0,0283	0,0283	0,0283	0,0283	0,0252
2007-04-02	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0302
2007-05-02	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0359
2007-06-01	0,0094	0,0094	0,0094	0,0094	0,0046
2007-07-02	-0,0427	-0,0427	-0,0427	-0,0427	-0,0423
2007-08-01	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0061
2007-09-03	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0238
2007-10-01	0,0181	0,0181	0,0181	0,0181	0,0288
2007-11-01	-0,0485	-0,0485	-0,0485	-0,0485	-0,0413
2007-12-03	0,0111	0,0111	0,0111	0,0111	0,0096
2008-01-02	-0,0750	-0,0750	-0,0750	-0,0750	-0,0918
2008-02-01	-0,0130	-0,0130	-0,0130	-0,0130	-0,0174
2008-03-03	-0,0176	-0,0176	-0,0176	-0,0176	-0,0166
2008-04-01	0,0554	0,0554	0,0554	0,0554	0,0552
2008-05-02	-0,0064	-0,0064	-0,0064	-0,0064	-0,0038
2008-06-02	-0,0888	-0,0888	-0,0888	-0,0888	-0,0985
2008-07-01	-0,0173	-0,0173	-0,0173	-0,0173	-0,0098
2008-08-01	0,0247	0,0247	0,0247	0,0247	0,0190
2008-09-01	-0,1005	-0,1005	-0,1005	-0,1005	-0,0956
2008-10-01	-0,1268	-0,1268	-0,1268	-0,1268	-0,1405
2008-11-03	-0,0452	-0,0452	-0,0452	-0,0452	-0,0482
2008-12-01	0,0043	0,0060	0,0043	0,0043	0,0101
2009-01-02	-0,0686	-0,0686	-0,0686	-0,0686	-0,0686
2009-02-02	-0,0983	-0,0983	-0,0983	-0,0983	-0,0983
2009-03-02	0,0467	0,0467	0,0467	0,0467	0,0467
2009-04-01	0,0759	0,0759	0,0759	0,0759	0,0759
2009-05-04	0,0410	0,0410	0,0410	0,0410	0,0410
2009-06-01	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223
2009-07-01	0,0794	0,0794	0,0794	0,0794	0,0794
2009-08-03	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468
2009-09-01	0,0319	0,0319	0,0319	0,0319	0,0319
2009-10-01	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073	-0,0073

2009-11-02	0,0440	0,0440	0,0440	0,0440	0,0440
2009-12-01	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273
2010-01-04	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0365	-0,0372
2010-02-01	0,0229	0,0229	0,0229	0,0229	0,0218
2010-03-01	0,0516	0,0516	0,0516	0,0516	0,0531
2010-04-01	-0,0143	-0,0143	-0,0143	-0,0143	-0,0082
2010-05-03	-0,0743	-0,0743	-0,0743	-0,0743	-0,0739
2010-06-01	-0,0526	-0,0526	-0,0526	-0,0526	-0,0470
2010-07-01	0,0558	0,0558	0,0558	0,0558	0,0563
2010-08-02	-0,0465	-0,0465	-0,0465	-0,0465	-0,0474
2010-09-01	0,0613	0,0613	0,0613	0,0613	0,0632
2010-10-01	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391
2010-11-01	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0085	-0,0070
2010-12-01	0,0592	0,0592	0,0592	0,0592	0,0561
2011-01-03	0,0167	0,0167	0,0167	0,0167	0,0118
2011-02-01	0,0145	0,0145	0,0145	0,0145	0,0196
2011-03-01	-0,0030	-0,0030	-0,0030	-0,0030	-0,0042
2011-04-01	0,0191	0,0191	0,0191	0,0191	0,0257
2011-05-02	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0223	-0,0188
2011-06-01	0,0016	0,0016	0,0016	0,0016	-0,0041
2011-07-01	-0,0308	-0,0308	-0,0308	-0,0308	-0,0263
2011-08-01	-0,0809	-0,0809	-0,0809	-0,0809	-0,0715
2011-09-01	-0,0911	-0,0911	-0,0911	-0,0911	-0,0726
2011-10-03	0,0853	0,0853	0,0853	0,0853	0,0843
2011-11-01	-0,0114	-0,0114	-0,0114	-0,0114	-0,0061
2011-12-01	-0,0036	-0,0036	-0,0036	-0,0036	0,0049

## Βιβλιογραφία

*Aaron H. J., (1996), The Social Insurance Paradox, Canadian Journal of Economics, 32, 371-74.*

*Acerbi C., Nordio C., Sirtori C., (2008), "Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.*

*Alderson M. and Chen K., (1987), The stockholder consequences of terminating the pension plan, Midland Corporate Finance Journal, 4 (Winter), 55-61.*

*Alexander C, (2008), Market Risk Analysis, Wiley.*

*Bagehot W, (1972), Risk and reward in corporate pension funds. Financial Analysts Journal, 28, 80-84.*

*Black F., (1989), Should you use stocks to hedge your pension liabilities? Financial Analysts Journal, 45, 10-12.*

*Black F., (1980), The tax consequences of long run pension policy. Financial Analysts Journal, 36, 1-28.*

*Blake D., (2006), Pension Economics, Wiley.*

*Blake D., (2006), Pension Finance, Wiley.*

*Bodie Z., Light J., Morck R, Taggart R, (1985), Corporate pension policy: An empirical investigation, Financial Analysts Journal, 41, 10-16.*

*Bogentoft, Edwin Romeijn, Uryasev, (2001), Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVar Constraints, The Journal Of Risk Finance.*

*Chen K. and D'Arcy S., (1986), Market sensitivity to interest rate assumptions in corporate pension plans. Journal of Risk and Insurance, 53, 209-225.*

*Diamond P.A., (1965), National Debt in a Neoclassical Growth Model, American Economic Review, 55, 1026-50.*

*Dutta J., S. Kapur and J. Michael Orszag, (1999), How to fund pensions: income uncertainty and risk-aversion, Birkbeck Economics Working Paper 99-03.*

*Feldstein M. and Morck R., (1983) Pension funding decisions, interest rate assumptions and share prices, in Bodie, Z. and Shoven, J. (Eds) Financial Aspects of the United States Pension System, University of Chicago Press, Chicago.*

*Feldstein M. and Seligman S., (1981), Pension funding, share prices and national savings. Journal of Finance, 36, 801-824.*

*Feldstein M.S., (1974), Social Security, Induced Retirement, and Aggregate Capital Accumulation, Journal of Political Economy, 82, 905-26*

**Gaiivoronski A., Pflug G.,** *Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*, *Journal of Risk*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-31, Winter 2004-2005.

**Gupta F., Stubbs E., and Thambiah Y., (2000),** *US corporate pension plans: a value at risk analysis*. *Journal of Portfolio Management*, Summer, 65–72

**Ippolito R., (1986),** *Pensions, Economics and Public Policy*, Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois.

**Merton R.C., Z. Bodie and A. Marcus, (1987),** *Pension Plan Integration as Insurance Against Social Security Risk in: Zvi Bodie, J. Shoven and D. Wise, eds., Issues in Pension Economics (Chicago University Press).*

**Merton R.C., (1983),** *On the role of social security as a means for efficient risk sharing in an economy where human capital is not tradeable, in: Zvi Bodie and John Shoven, eds., Financial aspects of the United States Pension system (University of Chicago Press).*

**Miles D., (1997),** *Financial markets, Ageing, and Social Welfare, inaugural lecture, Imperial College, University of London.*

**Parrák R., Seidler J., (2010),** “Mean-Variance & Mean-VaR Portfolio Selection: A Simulation Based Comparison in the Czech Crisis Environment” IES Working Paper 27/2010. IES FSV. Charles University.

**Palmquist J., Uryasev S., (2002),** *Portfolio optimization with conditional Value At-Risk objective constraints, The Journal of Risk*, Vol. 4, No. 2. *Portfolio optimization with conditional Value-At-Risk objective constraints, The Journal of Risk*, Vol. 4, No. 2.

**Petersen M., (1996),** *Allocating assets and discounting cash flows, in Pensions, Savings and Capital Markets, Pension and Welfare Benefits Administration, US Department of Labor*, 1–26.

**Rockafellar R.T. and S. Uryasev, (2001):** *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Research Report 2001-5. ISE Dept., University of Florida.*

**Rockafellar R.T. and S. Uryasev, (2000):** *Optimization of Conditional Value-At-Risk. The Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, 2000, 21-41.

**Roman D., Darby–Dowman, K., Mitra G., (2007),** “Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach”, *Quantitative Finance*, 7:4, 443-458, *The centre of the Analysis of Risk and Optimization Modeling, Brunel University, West London, UK.*

**Samuelson P.A., (1975),** *Optimum Social Security in a Life-Cycle Growth Model, International Economic Review*, 16, 538-44.

**Sharpe W.F., (1994):** *The Sharpe Ratio, Journal of Portfolio Management.*

**Sharpe W., Harrison J., (1983),** *Optimal funding and asset allocation rules for defined benefit pension plans, in Bodie, Z. and Shoven J. (Eds) Financial Aspects of the United States Pension System, University of Chicago Press, Chicago.*

**Tepper I., (1981),** *Taxation and corporate pension policy. Journal of Finance, 36, 1–13.*

**Tepper I. and Affleck A., (1974),** *Pension plan liabilities and corporate financial strategies. Journal of Finance, 29, 1549–1564.*

**Treynor J., (1977),** *The principles of corporate pension policy. Journal of Finance, 32, 627–638.*

**Wang S.S., (1996),** “Premium calculation by transforming the layer premium density”, *ASTIN Bulletin, Vol. 26, pp. 71-92.*

**Wirch J.L., Hardy M.R., (2001),** *Distortion Risk Measure: Coherence and Stochastic Dominance, working paper, University of Waterloo.*

**Zenios S., (2005),** *Practical financial optimization, Decision making for financial engineers, The Wharton Financial Institutions Center, University of Pennsylvania.*

Πανεπιστήμιο Πειραιώς