

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΧΗΣ
ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ**

Χαράλαμπος Α. Πανακάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΧΗΣ
ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ**

Χαράλαμπος Α. Πανακάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κούτρας Μάρκος (Επιβλέπων)
- Αντζουλάκος Δημήτριος
- Μπερσίμης Σωτήριος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**STATISTICAL METHODS FOR UNITS
TESTING THROUGH COMPOSITE
START-UP DEMONSTRATION TESTS**

By

Charalambos A. Panakakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
June 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

*Στους γονείς μου
Αντώνη και Ελένη*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κούτρα Μάρκο για τις πολύτιμες οδηγίες και τα χρήσιμα σχόλια του κατά τη διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Αντζουλάκο Δημήτριο και τον κ. Μπερσίμη Σωτήριο για την συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Ακόμη, ευχαριστώ θερμά την κ. Αλυράντη Μαρία, η οποία με την διπλωματική της εργασία με τίτλο «Μελέτη αποδοχής εξαρτημάτων μέσω τεστ εκκίνησης» με βοήθησε αρκετά στη συγγραφή του δεύτερου κεφαλαίου της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου και τους φίλους μου για τη συμπαράσταση τους και την ενθάρρυνση τους στην ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη

Σε ένα τεστ εκκίνησης (Start-up Demonstration Test), προκειμένου να αποφασίσουμε αν ένα εξάρτημα/προϊόν είναι ποιοτικά αποδεκτό, ελέγχουμε ένα τυχαία επιλεγμένο δείγμα όμοιων εξαρτημάτων, τα οποία υποβάλλονται σε διαδοχικές εκκινήσεις και με βάση ένα προκαθορισμένο κριτήριο αποφασίζεται εάν το δείγμα αυτό γίνεται αποδεκτό ή απορρίπτεται. Οι εκκινήσεις αυτές μπορεί να αντιστοιχούν είτε σε ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli είτε σε δοκιμές συσχετισμένες μεταξύ τους (για παράδειγμα να υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών).

Το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά για την απόφαση αποδοχής ή απόρριψης του εξοπλισμού είναι αυτό που διαφοροποιεί το τεστ εκκίνησης και στηρίζεται στον αριθμό των επιτυχημένων ή/και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας των εξαρτημάτων. Στόχος του κάθε τεστ είναι η ορθή λήψη απόφασης αποδοχής ή απόρριψης του εξοπλισμού χρησιμοποιώντας όσο το δυνατό λιγότερες δοκιμές, έτσι ώστε να εξοικονομείται χρόνος και κόστος.

Παραδείγματα εξαρτημάτων για τα οποία εφαρμόζονται συνήθως τέτοιες διαδικασίες είναι: ηλεκτρογεννήτριες, μηχανήματα χορτοκοπτικής, μπαταρίες αυτοκινήτων, αντλίες, ηλεκτρονικοί υπολογιστές, ηλεκτρικές μικροσυσκευές (π.χ. τηλεοράσεις, βίντεο, σκούπες) κ.ά.

Σκοπός της διπλωματικής είναι η παρουσίαση και η μελέτη των κυριότερων διαδικασιών που έχουν προταθεί για τη λήψη απόφασης μέσω τεστ εκκίνησης, καθώς και των μεθόδων εκτίμησης παραμέτρων στην περίπτωση που διαθέτουμε δεδομένα που έχουν προκύψει από τεστ εκκίνησης. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παρουσίαση σύνθετων τεστ εκκίνησης δηλαδή τεστ στα οποία για την αποδοχή ή απόρριψη χρησιμοποιούνται πολλαπλοί κανόνες που βασίζονται στον αριθμό ή σε συνεχόμενες επιτυχημένες ή/και αποτυχημένες δοκιμές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Abstract

In a start-up demonstration test we wish to decide if an equipment is qualitatively acceptable; we test a randomly selected sample of similar components, which are subjected to continuous start-ups and based on a specified criterion we determine whether the sample is acceptable or not. The start-ups can be modeled either by independent and identically distributed Bernoulli trials or by dependent trials (for example, assuming Markovian dependence between trials).

The criterion for the decision of the acceptance or rejection of the sample of equipment which is used each time is the feature that differentiates the start-up demonstration test. The aim of each test is to arrive at the correct decision (acceptance or rejection) of the equipment by carrying out as few tests as possible, so as to save time and cost.

Applications of start-up demonstration tests include the testing of electric generators, lawn mowers, car batteries, pumps, outboard motors, chain saws, snow blowers and other power operation equipment, computers, electrical appliances (eg TV, VCR) etc.

The aim of the present dissertation is the presentation and study of the basic processes that have been proposed in the literature for the acceptance or rejection of an equipment through start-up demonstration tests. The methods of inference of the parameters in case that we have statistical data from a start-up procedure will also be reviewed in some detail. Special attention will be drawn to the presentation of complicate start-up demonstration tests in which the acceptance or rejection are used to multiple rules based on the number or on consecutive successful or/and failed tests.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xvii
Κατάλογος Σχημάτων.....	xix
Κατάλογος Συντομογραφιών	xxiii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και τεστ εκκίνησης	1
1.2 Κριτήρια λήψης απόφασης που σχετίζονται με τεστ εκκίνησης	2
2 Κλασικά Τεστ Εκκίνησης	7
2.1 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης	8
2.2 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης	10
2.3 Μέσο μήκος του τεστ CS.....	13
2.4 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ CS	19
2.5 Τεστ εκκίνησης που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων	24
2.6 Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες	24
2.7 Μέσο μήκος του τεστ CSTF	27
2.8 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ CSTF	29
2.9 Τεστ εκκίνησης CS και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων.....	33
2.10 Μέσο μήκος του τεστ CS όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση	

	μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων	36
2.11	Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης του τεστ CS όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων	38
2.12	Τεστ εκκίνησης CSTF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων.....	40
2.13	Συνάρτηση κατανομής και μέσο μήκος του τεστ CSTF όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων.....	43
2.14	Εναλλακτικά τεστ εκκίνησης	46
3	Τεστ Εκκίνησης TSCSTF και TSCSTFCF	49
3.1	Τεστ εκκίνησης TSCSTF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του.....	51
3.2	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ TSCSTF	57
3.3	Τεστ εκκίνησης TSCSTFCF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του.....	58
3.4	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ TSCSTFCF	64
3.5	Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης του τεστ TSCSTFCF	68
3.6	Σύγκριση των τεστ CSTF, TSCSTF και TSCSTFCF ως προς το μέσο μήκος τους	72
4	Τεστ Εκκίνησης CSDF	75
4.1	Χρόνοι αναμονής του τεστ CSDF	76
4.2	Πιθανογεννήτρια συνάρτηση και μέσο μήκος του τεστ CSDF	80
4.3	Πιθανότητα αποδοχής και απόρριψης του τεστ CSDF	84
4.4	Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ CSDF	87

5	Τεστ Εκκίνησης υπό τη συνθήκη της Ανταλλαξιμότητας	91
5.1	Τεστ εκκίνησης CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας	91
5.2	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας.....	93
5.3	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας	95
5.4	Σύγκριση του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας με το τεστ CSTF με ανεξάρτητες εκκινήσεις.....	99
	Παραρτήματα	105
	Π1. Προγράμματα για την κατασκευή των πινάκων σε Mathematica.....	107
	Π2. Προγράμματα για την κατασκευή των σχημάτων σε Mathematica.....	111
	Βιβλιογραφία	125

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κατάλογος Πινάκων

2.3.1	Μέσο μήκος και διακύμανση του μήκους ενός τεστ εκκίνησης CS με $c = 20$ για διάφορες τιμές του p	18
2.4.1	Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης CS από $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός μηχανήματος, με $c = 15$ και $p = 0.9$	22
2.8.1	Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης CS από $n = 10$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c = 12$, $d = 5$ και $p = 0.9$	32
3.5.1	Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης $TSCSTFCF$ από $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c_s = 14$, $c_{cs} = 10$, $c_f = 8$, $c_{cf} = 5$ και $p = 0.9$	71
3.6.1	Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης $CSTF$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων p , c_{cs} , c_f	72
3.6.2	Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης $TSCSTF$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων p , c_s , c_{cs} , c_f	73
3.6.3	Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης $TSCSTFCF$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων p , c_s , c_{cs} , c_f , c_{cf}	73
5.4.1	Πιθανότητα αποδοχής ενός συγκεκριμένου εξοπλισμού για $c = 10$ και $d = 7$	100
5.4.2	Μέσο μήκος ενός τεστ $CSTF$ για $c = 10$ και $d = 7$	102

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κατάλογος Σχημάτων

2.1.1	Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c = 16$ επιτυχημένες εκκινήσεις για $p = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99$ και 0.999	9
2.1.2	Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c = 5, 10, 30$ επιτυχημένες εκκινήσεις, για $p = 0.9$	10
2.3.1	Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 17$	15
2.3.2	Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 25$	16
2.3.3	Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 10, 20$ και 30	16
2.3.4	Διακύμανση του μήκους ενός τεστ CS για $c = 8$	17
2.3.5	Διακύμανση του μήκους ενός τεστ CS για $c = 5, 6, 10$ και 15	18
2.7.1	Μέσο μήκος του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του d με $p = 0.95$ και $c = 50$	28
2.7.2	Μέσο μήκος του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του c με $p = 0.95$ και $d = 10$	29
2.10.1	Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_1 , για $c = 15, p_2 = 0.8$ και $p_0 = 0.95$	36
2.10.2	Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_2 , για $c = 15, p_1 = 0.9$ και $p_0 = 0.95$	37
2.10.3	Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_0 , για $c = 15, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.99$	38
2.12.1	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του c , για $d = 10, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$	42
2.12.2	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του d , για $c = 20, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$	42
2.13.1	Μέσο μήκος του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του d για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $c = 20, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$	45
2.13.2	Μέσο μήκος του τεστ $CSTF$ συναρτήσει του c για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $d = 5, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$	45
3.1.1	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ $TSCSTF$ (χρόνος αναμονής) για $p = 0.95, c_s = 14, c_{cs} = 11$ και $c_f = 2$	54
3.1.2	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ $TSCSTF$ (χρόνος αναμονής)	

	συναρτήσει του p για $x = 5, 11, 15, c_s = 14, c_{cs} = 11$ και $c_f = 2$	55
3.1.3	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTF</i> (χρόνος αναμονής) για $p = 0.9, c_s = 20, c_{cs} = 12$ και $c_f = 5$	55
3.1.4	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTF</i> (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 5, 12, 22, c_s = 20, c_{cs} = 12$ και $c_f = 5$	56
3.3.1	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTFCF</i> (χρόνος αναμονής) για $p = 0.95, c_s = 9, c_{cs} = 6, c_f = 4$ και $c_{cf} = 3$	62
3.3.2	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTFCF</i> (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 6, 9, c_s = 9, c_{cs} = 6, c_f = 4$ και $c_{cf} = 3$	63
3.3.3	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTFCF</i> (χρόνος αναμονής) για $p = 0.85, c_s = 11, c_{cs} = 8, c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$	63
3.3.4	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>TSCSTFCF</i> (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 8, 11, c_s = 11, c_{cs} = 8, c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$	64
4.2.1	Μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του c , για $p = 0.9$ και $r = 2, 4, 6, 8$	82
4.2.2	Μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του r , για $p = 0.9$ και $c = 15, 25, 35, 45$	82
4.3.1	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του c , για $p = 0.9$ και $r = 3$	85
4.3.2	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του r , για $p = 0.9$ και $c = 15$	85
4.3.3	Πιθανότητα απόρριψης του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του c , για $p = 0.95$ και $r = 4$	86
4.3.4	Πιθανότητα απόρριψης του τεστ <i>CSDF</i> συναρτήσει του r , για $p = 0.95$ και $c = 15$	87
5.2.1	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ <i>CSTF</i> υπό την συνθήκη της ανταλλαξιμότητας για $c = 9, d = 3, a = 2$ και $b = 1$	95
5.3.1	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ <i>CSTF</i> υπό την συνθήκη της ανταλλαξιμότητας συναρτήσει του c , για $d = 8, a = 1$ και $b = 0.8$	97
5.3.2	Πιθανότητα αποδοχής του τεστ <i>CSTF</i> υπό την συνθήκη της ανταλλαξιμότητας συναρτήσει του d , για $c = 8, a = 1$ και $b = 0.8$	98

5.4.1	Συγκριτικό διάγραμμα πιθανότητας αποδοχής $P_{c,d}$ και $P_{c,d}^*$ συναρτήσει του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$	101
5.4.2	Συγκριτικό διάγραμμα μέσων μηκών $E(Z_{c,d})$ και $E(Z_{c,d}^*)$ συναρτήσει του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$	103

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.π.	συνάρτηση πιθανότητας
α.σ.κ.	αθροιστική συνάρτηση κατανομής
δ.ε.	διάστημα εμπιστοσύνης
ε.μ.π.	εκτιμητήρια μέγιστης πιθανοφάνειας
CS	Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες
CSTF	Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνολικά αποτυχίες
TSTF	Τεστ εκκίνησης για c συνολικά επιτυχίες και d συνολικά αποτυχίες
CSCF	Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες
TSCF	Τεστ εκκίνησης για c συνολικά επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες
TSCSTF	Τεστ εκκίνησης για c_s συνολικά επιτυχίες, c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες και c_f συνολικά αποτυχίες
TSCSTFCF	Τεστ εκκίνησης για c_s συνολικά επιτυχίες, c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες, c_f συνολικά αποτυχίες και c_{cf} συνεχόμενες αποτυχίες
CSDF	Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και αποτυχίες που χωρίζονται από $r - 2$ επιτυχίες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και τεστ εκκίνησης

Η σημερινή αγορά αποτελείται από αμέτρητα προϊόντα και υπηρεσίες. Γι' αυτό το λόγο, οι καταναλωτές αντιμετωπίζουν καθημερινά το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ ομοειδών προϊόντων που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Συνεπώς η επιλογή του κατάλληλου προϊόντος καθορίζεται από δυο παράγοντες: την ποιότητα και την τιμή του προϊόντος. Οι επιχειρήσεις αναγνωρίζοντας τους παράγοντες αυτούς που καθορίζουν τις αγοραστικές συνήθειες των καταναλωτών, στράφηκαν στην αναζήτηση επιχειρηματικών τακτικών που θα τους οδηγούσαν στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες αυτές κατέχει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, ο οποίος αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Ένας από τους βασικούς στόχους του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

Το τεστ εκκίνησης αποτελεί μια διαδικασία στατιστικού ελέγχου, η οποία απορρίπτει ή βελτιώνει ελαττωματικά προϊόντα-εξαρτήματα πριν αυτά προωθηθούν στον καταναλωτή. Η διαδικασία αυτή βασίζεται στην επιτυχημένη εκκίνηση λειτουργίας του εξαρτήματος αποδεικνύοντας έτσι την αξιοπιστία του. Παραδείγματα εξαρτημάτων για τα οποία

εφαρμόζονται συνήθως τέτοιες διαδικασίες είναι οι ηλεκτρογεννήτριες, οι μπαταρίες αυτοκινήτων, οι αντλίες, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, οι ηλεκτρικές μικροσυσκευές (π.χ. τηλεοράσεις, βίντεο, σκούπες) κ.ά. Ο όρος τεστ εκκίνησης περιλαμβάνει τη διαδικασία ελέγχου ενός τυχαία επιλεγμένου δείγματος όμοιων εξαρτημάτων, τα οποία υποβάλλονται σε διαδοχικές εκκινήσεις και με βάση ένα καθορισμένο κριτήριο αποφασίζεται εάν το δείγμα αυτό γίνεται αποδεκτό ή απορρίπτεται. Οι εκκινήσεις αυτές μπορεί να μοντελοποιηθούν είτε ως ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli είτε ως συσχετισμένες μεταξύ τους δοκιμές (για παράδειγμα να υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών). Το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά για την απόφαση αποδοχής ή απόρριψης του εξοπλισμού είναι αυτό που διαφοροποιεί το τεστ εκκίνησης και στηρίζεται συνήθως στον αριθμό των επιτυχημένων ή μη εκκινήσεων των εξαρτημάτων ή στην εμφάνιση συγκεκριμένων διαδοχών (patterns) από επιτυχημένες ή μη επιτυχημένες εκκινήσεις. Για κάθε τεστ εκκίνησης υπάρχουν ποσότητες όπως το μήκος του, η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του, η πιθανότητα αποδοχής και απόρριψής του και η άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησής του, οι οποίες πρέπει να υπολογίζονται. Στόχος κάθε τεστ είναι η λήψη ορθής απόφασης αποδοχής ή απόρριψης του εξοπλισμού χρησιμοποιώντας όσο το δυνατό λιγότερες δοκιμές, έτσι ώστε να εξοικονομείται χρόνος και κόστος.

Λόγω της πρακτικής αξίας που παρουσιάζει η δημιουργία αξιόπιστων διαδικασιών ελέγχου της καταλληλότητας εξαρτημάτων μέσω τεστ εκκίνησης, την τελευταία εικοσαετία υπάρχει αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή αυτή. Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας θα παρουσιαστούν διάφορες τεχνικές που έχουν προταθεί μέχρι σήμερα για τη λήψη απόφασης μέσω τεστ εκκίνησης, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε σύνθετους κανόνες απόφασης από την πιο πρόσφατη βιβλιογραφία.

1.2 Κριτήρια λήψης απόφασης που σχετίζονται με τεστ εκκίνησης

Η μελέτη των τεστ εκκίνησης, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, φαίνεται να ξεκίνησε τη δεκαετία του 60 από τους Hahn και Shapiro (1967), οι οποίοι παρουσίασαν ένα απλό τεστ όπου η απόφαση αποδοχής του εξαρτήματος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τον αριθμό των επιτυχημένων προσπαθειών εκκίνησης. Αυτό σημαίνει ότι το εξάρτημα

γίνεται αποδεκτό εάν πραγματοποιηθούν c επιτυχίες, οι οποίες δεν πρέπει απαραίτητα να είναι συνεχόμενες.

Αργότερα, οι Hahn και Gage (1983) παρουσίασαν τα συνεχόμενα τεστ εκκίνησης σύμφωνα με τα οποία ένα εξάρτημα γίνεται αποδεκτό εάν πραγματοποιηθούν c συνεχόμενες επιτυχημένες προσπάθειες εκκίνησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι γι' αυτά τα τεστ εκκίνησης, ο αριθμός των συνεχόμενων επιτυχημένων προσπαθειών εκκίνησης είναι προκαθορισμένος, οι δοκιμές εκκίνησης θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli και η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης p είναι γνωστή και σταθερή. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *CS* (Consecutive Successes) και αποτέλεσε αργότερα αντικείμενο έρευνας και για τους Viveros και Balakrishnan (1993), οι οποίοι γενίκευσαν τα αποτελέσματα των Hahn και Gage θεωρώντας ότι οι δοκιμές εκκίνησης είναι συσχετισμένες μεταξύ τους, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα κάθε δοκιμής εξαρτάται από την προηγούμενη.

Στη συνέχεια, οι Balakrishnan και Chan (2000) παρουσίασαν ένα βελτιωμένο τεστ εκκίνησης, το οποίο αποτελεί τροποποίηση του τεστ *CS*. Σύμφωνα με αυτό, το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό εάν πραγματοποιηθεί ένας καθορισμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων πριν από την πραγματοποίηση ενός καθορισμένου αριθμού συνολικών αποτυχημένων εκκινήσεων. Δηλαδή, σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, αν συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες πριν από d συνολικές αποτυχίες τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό, ενώ αντίθετα, αν συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από c συνεχόμενες επιτυχίες τότε το εξάρτημα απορρίπτεται. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *CSTF* (Consecutive Successes Total Failures) και οι δοκιμές εκκίνησης είναι πάλι ανεξάρτητες και ισόνομες με σταθερή και γνωστή πιθανότητα επιτυχημένης εκκίνησης p .

Ο Martin (2004) συνέχισε την μελέτη των Balakrishnan και Chan (2000) πάνω στο τεστ *CSTF* θεωρώντας ότι οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους και υπολόγισε τις ποσότητες που σχετίζονται με το τεστ αυτό θεωρώντας ως δεδομένο το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη αποτυχία.

Στη συνέχεια, οι Smith και Griffith (2008) παρουσίασαν τρία εναλλακτικά τεστ εκκίνησης, τα οποία βασίζονται στον τρόπο δημιουργίας του τεστ *CSTF* και η απόφαση αποδοχής ή απόρριψης ενός εξαρτήματος εξαρτάται από τον αριθμό των συνεχόμενων (ή συνολικών) επιτυχημένων εκκινήσεων και τον αριθμό των συνεχόμενων (ή συνολικών) αποτυχημένων εκκινήσεων. Τα τεστ αυτά είναι τα εξής:

1. Τεστ εκκίνησης για c συνολικές επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες ($TSTF$). Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνολικές επιτυχίες πριν από d συνολικές αποτυχίες ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από c συνολικές επιτυχίες.
2. Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες ($CSCF$). Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες πριν από d συνεχόμενες αποτυχίες ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνεχόμενες αποτυχίες πριν από c συνεχόμενες επιτυχίες.
3. Τεστ εκκίνησης για c συνολικές επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες ($TSCF$). Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνολικές επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από d συνεχόμενες αποτυχημένες εκκινήσεις ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνεχόμενες αποτυχημένες εκκινήσεις πριν από c συνολικές επιτυχημένες εκκινήσεις.

Οι Eryilmaz και Chakraborti (2008) συνεχίζοντας την προσπάθεια εύρεσης τεστ εκκίνησης που να οδηγούν σε γρηγορότερη και πιο αξιόπιστη λήψη απόφασης, μελέτησαν το τεστ εκκίνησης $CSTF$ υποθέτοντας ότι η πιθανότητα p μιας επιτυχημένης εκκίνησης είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία καθιστά τις ατομικές εκκινήσεις εξαρτημένες, υπό τη συνθήκη ενός ανταλλάξιμου μοντέλου. Ακόμη, Οι ίδιοι σύγκριναν το μοντέλο αυτό με το αρχικό μοντέλο για ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli.

Στη συνέχεια, οι Αντζουλάκος, Κούτρας και Ρακιτζής (2009) πρότειναν μια τροποποίηση των τεστ εκκίνησης CS όπου ο υπό δοκιμή εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός αν πραγματοποιηθούν c συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση δύο ανεπιτυχών εκκινήσεων που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχημένες εκκινήσεις. Διαφορετικά, αν πραγματοποιηθούν δύο ανεπιτυχείς εκκινήσεις που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση των c συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων, τότε ο υπό δοκιμή εξοπλισμός απορρίπτεται. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία τεστ $CSDF$ (Consecutive Successes Distance Failures) και οι Αντζουλάκος, Κούτρας και Ρακιτζής παρουσίασαν τρεις μεθόδους εκτίμησης της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας μέσω του τεστ αυτού.

Αργότερα, παρουσιάστηκε από τον Gera (2010) μια γενίκευση του τεστ εκκίνησης $CSTF$, σύμφωνα με την οποία ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν υπάρχει, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών επιτυχιών, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών. Σε

αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχιών, είτε των συνεχόμενων επιτυχιών τότε ο εξοπλισμός απορρίπτεται. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *TSCSTF* (Total Successes Consecutive Successes Total Failures).

Μετά από ένα χρόνο, παρουσιάστηκε πάλι από τον Gera (2011) μια ακόμα γενίκευση του τεστ *CSTF*, σύμφωνα με την οποία ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν υπάρχει είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών επιτυχιών, είτε μια ροή συνεχόμενων επιτυχιών πριν από έναν καθορισμένο αριθμό συνολικών αποτυχιών, και πριν από κάθε ροή συνεχόμενων αποτυχιών. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχει είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών, είτε μια ροή συνεχόμενων αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχιών, είτε των συνεχόμενων επιτυχιών τότε ο εξοπλισμός απορρίπτεται. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *TSCSTFCF* (Total Successes Consecutive Successes Total Failures Consecutive Failures). Ο Gera (2011) σύγκρινε τα αποτελέσματα του τεστ *TSCSTFCF* σε σχέση με τα τεστ *TSCSTF* και *CSTF* αποδεικνύοντας ότι γενικά το τεστ *TSCSTFCF* οδηγεί σε γρηγορότερη λήψη απόφασης, δηλαδή ότι το μήκος του τεστ *TSCSTFCF* είναι γενικά μικρότερο από τα μήκη των άλλων δυο τεστ εκκίνησης.

Όλα τα παραπάνω τεστ εκκίνησης αποτελούν σημαντικό εργαλείο για τον έλεγχο της αξιοπιστίας ενός προϊόντος-εξαρτήματος με γρήγορο και ασφαλές τρόπο και με το μικρότερο δυνατό κόστος. Στα ακόλουθα κεφάλαια θα γίνει λεπτομερής ανάλυση όλων των τεστ εκκίνησης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κλασικά Τεστ Εκκίνησης

Η διαδικασία ελέγχου ενός εξαρτήματος μέσω τεστ εκκίνησης βασίζεται κυρίως στον αριθμό των επιτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας του.

Ο στόχος των τεστ εκκίνησης είναι να αποδειχθεί η αξιοπιστία του εξοπλισμού (εξαρτημάτων) διάφορων τύπων όπως οι αντλίες νερού, οι μπαταρίες αυτοκινήτων, οι γεννήτριες κτλ. Σε ένα τεστ εκκίνησης, συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα αρκετών προσπαθειών εκκίνησης μιας μονάδας και με βάση αυτά αποφασίζεται κατά πόσο το μηχάνημα θα γίνει αποδεκτό, θα απορριφθεί εντελώς ή θα συνεχιστεί η διαδικασία ελέγχου.

Υπάρχουν μια σειρά από διαδικασίες για να αποφασιστεί εάν το σύνολο των δοκιμών θεωρείται επιτυχές ή όχι και επομένως, αν η μονάδα (εξοπλισμός) γίνεται αποδεκτή ή απορρίπτεται.

Γι' αυτό το λόγο, τα τεστ εκκίνησης χωρίζονται σε τρία είδη ως προς τον κανόνα απόφασης: τα τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των επιτυχημένων δοκιμών, εκείνα που έχουν ως κριτήριο τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών και τέλος εκείνα που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων.

Τέλος, η μελέτη των διαφόρων τεστ εκκίνησης γίνεται τόσο για ανεξάρτητες διαδοχικές εκκινήσεις, όσο και για Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων. Στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα της κάθε δοκιμής-εκκίνησης εξαρτάται από το αποτέλεσμα της προηγούμενης (ιδιότητα Μαρκοβιανής αλυσίδας 1^{ης} τάξης), ή πιο γενικά, το αποτέλεσμα της κάθε δοκιμής-εκκίνησης εξαρτάται από το αποτέλεσμα των n προηγούμενων (ιδιότητα Μαρκοβιανής αλυσίδας n τάξης).

2.1 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης

Στο συγκεκριμένο τεστ εκκίνησης η αποδοχή ενός εξαρτήματος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τον αριθμό των επιτυχημένων προσπαθειών εκκίνησης.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι κάποιο εξάρτημα υποβάλλεται σε ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης (πειράματα). Σε αυτή την περίπτωση για κάθε δοκιμή μπορούν να συμβούν δυο ενδεχόμενα: επιτυχία (συμβολισμός S) ή αποτυχία (F). Η πιθανότητα επιτυχίας συμβολίζεται με p , ενώ η πιθανότητα αποτυχίας με $1 - p$, όπου p σταθερό και ίδιο για κάθε δοκιμή. Έχουμε δηλαδή επαναλήψεις του ίδιου πειράματος κάτω από τις ίδιες συνθήκες (ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli).

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ) X , η οποία παριστάνει το πλήθος των επαναλήψεων (δοκιμών εκκίνησης) του πειράματος μέχρι να συμβούν c επιτυχίες, με τον περιορισμό η τελευταία δοκιμή να δίνει επιτυχία, δηλαδή οι δοκιμές να τερματίζονται όταν εμφανισθεί η c επιτυχία. Όπως είναι φανερό η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Η πιθανότητα $P(x)$ να απαιτούνται ακριβώς x δοκιμές εκκίνησης, όχι αναγκαστικά συνεχόμενες, μέχρι να παρατηρηθούν οι c επιτυχημένες εκκινήσεις δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P(x) &= P(X = x) = \binom{x-1}{c-1} p^c (1-p)^{x-c} = \\ &= \frac{(x-1)!}{(x-c)!(c-1)!} p^c (1-p)^{x-c}, \quad x = c, c+1, \dots \end{aligned}$$

και εξαρτάται από τις παραμέτρους c και p .

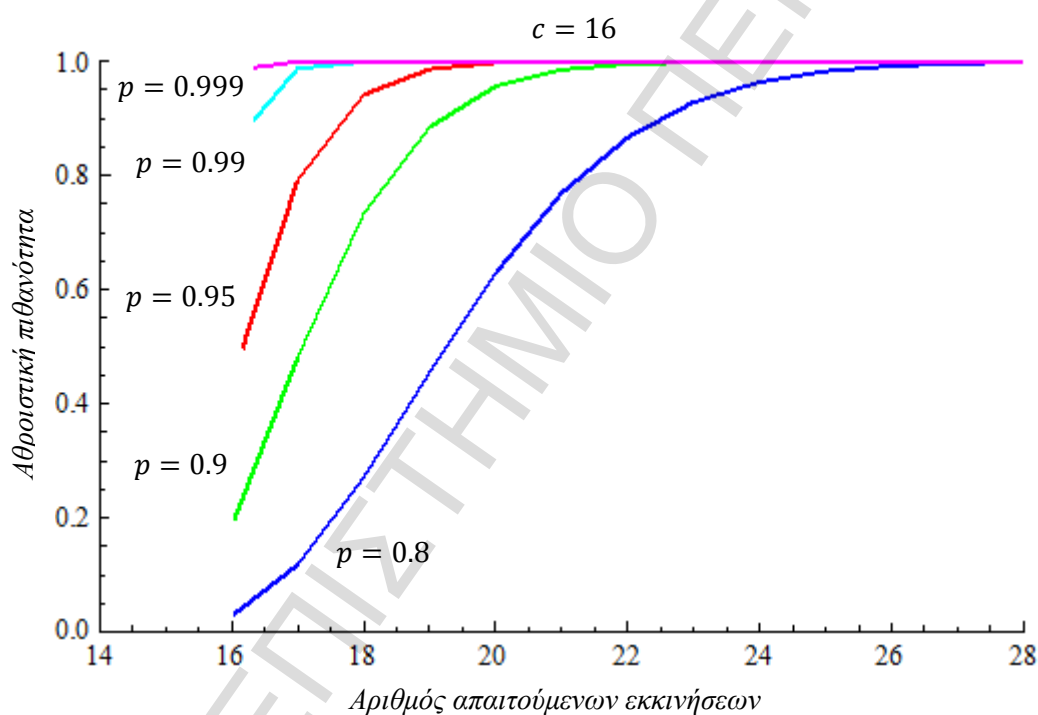
Η πιθανότητα αποδοχής ενός εξαρτήματος σε y ή λιγότερες δοκιμές δίνεται από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) της τ.μ. X και είναι ίση με

$$R(y) = P(X \leq y) = \sum_{x=1}^y P(x) = \sum_{x=c}^y \binom{x-1}{c-1} p^c (1-p)^{x-c}, \quad y = c, c+1, c+2, \dots$$

Στα διαγράμματα που θα δοθούν στη συνέχεια παρουσιάζεται η επιρροή που έχει η μεταβολή των παραμέτρων c , p στην τιμή της συγκεκριμένης πιθανότητας.

Στο Σχήμα 2.1.1 φαίνεται ότι η πιθανότητα να συμβούν $c = 16$ επιτυχημένες εκκινήσεις ενός εξαρτήματος μέσα στις πρώτες 16 δοκιμές για $p = 0.8$ είναι ίση με 0.04. Επίσης, η

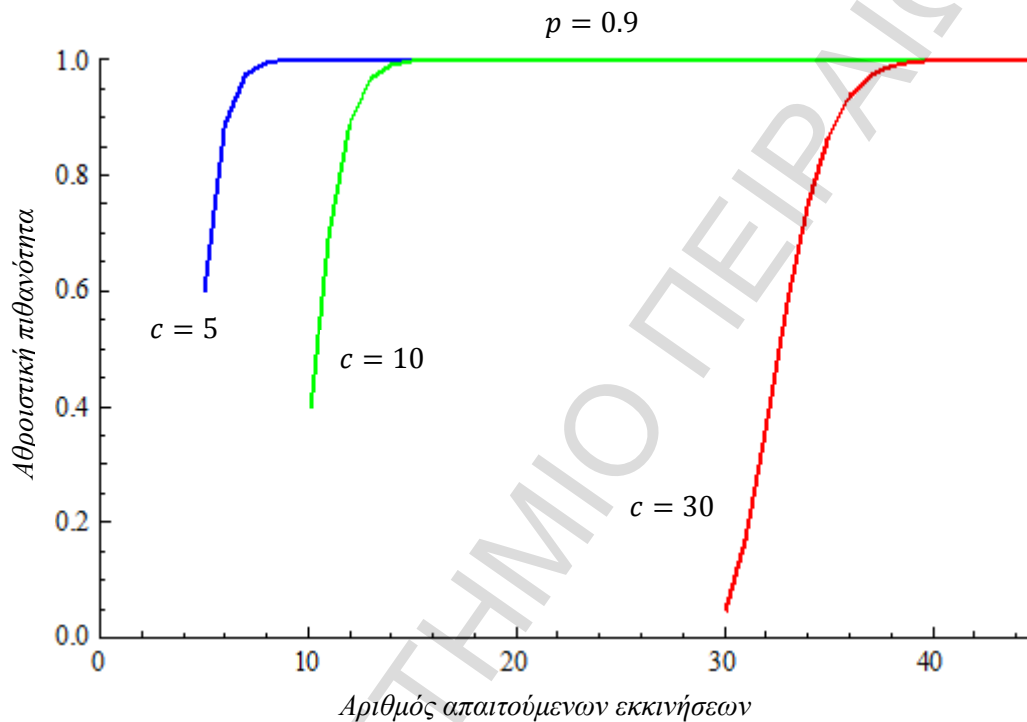
πιθανότητα να συμβούν $c = 16$ επιτυχημένες εκκινήσεις ενός εξαρτήματος μέσα στις πρώτες 16 δοκιμές για $p = 0.9$ είναι ίση με 0.2, για $p = 0.95$ είναι ίση με 0.5, για $p = 0.99$ είναι ίση με 0.9 ενώ αντίστοιχα για $p = 0.999$ είναι ίση με 0.99. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα νωρίτερα. Στην ουσία, όσο μεγαλύτερο είναι το p , τόσο λιγότερες δοκιμές απαιτούνται μέχρι την αποδοχή του εξαρτήματος, κάτι που είναι διαισθητικά προφανές. Από την άλλη πλευρά, στο Σχήμα 2.1.2 φαίνεται ότι η πιθανότητα να συμβούν $c = 5, 10, 30$ επιτυχημένες εκκινήσεις ενός εξαρτήματος μέσα στις πρώτες 5, 10, 30 δοκιμές για $p = 0.9$ είναι ίση με 0.6, 0.4, 0.05, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1.1: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c = 16$ επιτυχημένες εκκινήσεις για $p = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99$ και 0.999

Τέλος, στα Σχήματα 2.1.1 και 2.1.2 φαίνεται ότι η αθροιστική πιθανότητα των δοκιμών φτάνει πολύ γρήγορα στην τιμή 1, γεγονός που οφείλεται στο ότι οι c επιτυχημένες εκκινήσεις δεν είναι συνεχόμενες. Επομένως, αυτό καθιστά το συγκεκριμένο μοντέλο αρκετά ελαστικό καθώς η αποδοχή μιας μονάδας του εξοπλισμού είναι πολύ πιθανό να συμβεί αρκετά γρήγορα. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.1.1 φαίνεται ότι για όλες τις τιμές των

παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι βέβαιο ότι εντός των 27 πρώτων δοκιμών θα έχουμε οδηγηθεί σε αποδοχή της μονάδας. Ως εκ τούτου, επειδή η απόφαση σχετικά με την αξιοπιστία του εξοπλισμού μπορεί να οδηγήσει σε αποδοχή ελαττωματικών προϊόντων, είναι επιτακτική η εύρεση κάποιου πιο αυστηρού κριτηρίου που να εξασφαλίζει μόνο την αποδοχή των πιο αξιόπιστων εξαρτημάτων.



Σχήμα 2.1.2: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c = 5, 10, 30$ επιτυχημένες εκκινήσεις, για $p = 0.9$

2.2 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης

Σε αυτό το τεστ εκκίνησης η αποδοχή ενός εξαρτήματος δεν εξαρτάται από τον αριθμό των επιτυχημένων προσπαθειών εκκίνησης, όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.1, αλλά από τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων. Το συγκεκριμένο τεστ θα συμβολίζεται στη συνέχεια με τον όρο τεστ CS (Consecutive Successful start-ups demonstration test).

Έστω λοιπόν ότι n ίδια εξαρτήματα υποβάλλονται σε τεστ CS θεωρώντας τις δοκιμές εκκίνησης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης.

Ας συμβολίσουμε με X την τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των απαιτούμενων εκκινήσεων ώστε να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα, δηλαδή το χρόνο αναμονής μέχρι να τελειώσει το τεστ. Η μεταβλητή X ονομάζεται γενικά μήκος του τεστ εκκίνησης (βλ. Balakrishnan και Viveros (1993)) και στο συγκεκριμένο τεστ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή τάξης c .

Σε αυτό το σημείο, για την παρουσίαση της συνάρτησης πιθανότητας του μήκους του τεστ, θα χρησιμοποιήσουμε και τους παρακάτω συμβολισμούς:

- p : η (σταθερή) πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή,
- c : ο απαιτούμενος αριθμός των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων ώστε να γίνει δεκτό το εξάρτημα,
- $P(x)$: η πιθανότητα να απαιτούνται ακριβώς x δοκιμές για να έχουμε αποδοχή, δηλαδή $P(x) = P(X = x)$ και
- $R(y)$: η πιθανότητα να απαιτούνται συνολικές το πολύ y δοκιμές για να έχουμε αποδοχή (αθροιστική συνάρτηση κατανομής των απαιτούμενων δοκιμών), η οποία δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$R(y) = \sum_{x=1}^y P(X = x).$$

Οι Hahn και Gage (1983) πρότειναν τη χρήση του επόμενου αναδρομικού τύπου για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας $P(x)$ της τ.μ X

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ p^c, & x = c \\ (1-p)p^c, & x = c+1, c+2, \dots, 2c \\ (1-p)p^c \left[1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c+t-1) \right], & x = 2c+1, 2c+2, \dots \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Η απόδειξη του παραπάνω αναδρομικού τύπου (2.2.1) προκύπτει για κάθε κλάδο ξεχωριστά κάνοντας χρήση απλών αρχών της θεωρίας των πιθανοτήτων. Πράγματι, για $x < c$

είναι φανερό ότι η πιθανότητα να συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες σε λιγότερες από c δοκιμές είναι μηδενική, επομένως

$$P(x) = 0, \quad x < c.$$

Για $x = c$ είναι εύκολα κατανοητό ότι η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς c συνεχόμενες επιτυχίες σε c ανεξάρτητες δοκιμές όπου η πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής είναι p , θα δίνεται από τον τύπο

$$P(x) = p^c, \quad x = c.$$

Για $c + 1 \leq x \leq 2c$ είναι φανερό ότι για να συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες στις $c + 1$ πρώτες δοκιμές επιβάλλεται η πρώτη δοκιμή να είναι αποτυχία (με πιθανότητα $(q = 1 - p)$), και οι επόμενες c να είναι επιτυχίες (με πιθανότητα p^c). Γενικά λοιπόν, η πιθανότητα να συμβεί μια αποτυχία που να ακολουθείται από c συνεχόμενες επιτυχίες είναι το γινόμενο των δυο προαναφερθέντων πιθανοτήτων, δηλαδή $(1 - p)p^c$. Όσο λοιπόν το πλήθος των δοκιμών δεν ξεπερνά τις $2c$, ισχύει ότι αν απαιτούνται $c + r$ δοκιμές μέχρι την αποδοχή, θα πρέπει οι τελευταίες c προσπάθειες εκκίνησης να είναι επιτυχημένες (με πιθανότητα p^c), ενώ η αμέσως προηγούμενη (π.χ. η r προσπάθεια) να είναι αποτυχημένη (με πιθανότητα $(1 - p)$). Τα αποτελέσματα των υπόλοιπων $r - 1$ δοκιμών δεν επηρεάζουν το πείραμα αφού $r - 1 < c$, δηλαδή η πιθανότητα να συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες στις $r - 1$ δοκιμές είναι μηδενική. Τελικά στην συγκεκριμένη περίπτωση για κάθε τιμή του x η πιθανότητα ισούται με το γινόμενο των δυο προαναφερθέντων πιθανοτήτων, δηλαδή

$$P(x) = (1 - p)p^c, \quad x = c + 1, c + 2, \dots, 2c.$$

Τέλος, για $x \geq 2c + 1$ η απόδειξη βασίζεται στο ίδιο σκεπτικό με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης, με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει και ο επιπρόσθετος περιορισμός ότι οι c συνεχόμενες επιτυχίες πρέπει να συμβούν στο τέλος των x δοκιμών και όχι κάπου ενδιάμεσα. Για παράδειγμα αν $c = 4$ και $x = 2c + 1 = 9$ τότε οι 4 συνεχόμενες επιτυχίες είναι πολύ πιθανό να μην συμβούν στις τέσσερις τελευταίες δοκιμές αλλά νωρίτερα, ακόμα και στις τέσσερις πρώτες όπου εκεί θα τελειώσει το πείραμα. Για να συμβούν λοιπόν c συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά μετά από x ακριβώς δοκιμές θα πρέπει να συμβούν ταυτόχρονα τα τρία ακόλουθα ενδεχόμενα: οι τελευταίες c δοκιμές να είναι επιτυχημένες (με πιθανότητα p^c), η αμέσως προηγούμενη από αυτές δοκιμή (π.χ. η $x - c$ δοκιμή) να είναι

αποτυχία (με πιθανότητα $1 - p$), και στις προηγούμενες $x - c - 1$ δοκιμές να μην έχουν συμβεί c συνεχόμενες επιτυχίες. Η πιθανότητα να συμβεί το τελευταίο είναι ίση με

$$1 - [P(c) + P(c + 1) + \dots + P(x - c - 1)] = 1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c + t - 1).$$

Εξαιτίας της ανεξαρτησίας των δοκιμών, προκύπτει ότι η πιθανότητα να συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά στην x δοκιμή είναι ίση με το γινόμενο των τριών προαναφερθέντων πιθανοτήτων, επομένως

$$P(x) = (1 - p)p^c \left[1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c + t - 1) \right], \quad x = 2c + 1, 2c + 2, \dots$$

2.3 Μέσο μήκος του τεστ CS

Το μέσο μήκος ενός τεστ εκκίνησης εκφράζει πόσες κατά μέσο όρο προσπάθειες απαιτούνται ώστε να τελειώσει το τεστ (με αποδοχή ή όχι ανάλογα με το κριτήριο που χρησιμοποιείται). Ας θεωρήσουμε λοιπόν, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ως X την τ.μ. που εκφράζει το μήκος ενός τεστ εκκίνησης, ως p την πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή και c τον προκαθορισμένο αριθμό των συνεχόμενων επιτυχιών που απαιτούνται για να έχουμε αποδοχή του εξαρτήματος. Τότε η μέση τιμή του μήκους του τεστ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(x) = \frac{1 - p^c}{(1 - p)p^c}. \quad (2.3.1)$$

Ένας τρόπος απόδειξης του τύπου (2.3.1) είναι να υπολογιστεί αρχικά η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(t) = E(t^X)$ του μήκους X του τεστ και στη συνέχεια να γίνει χρήση του γνωστού τύπου των πιθανοτήτων $E(X) = G'_X(1)$.

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\left\{ \sum_{j=0}^{c-1} (pt)^j qt \right\}^i (pt)^c = \left(\frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt \right)^i (pt)^c,$$

η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του X θα είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 G_X(t) = E(t^X) &= \sum_{x=0}^{\infty} P(x)t^x = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{c-1} (pt)^j qt \right\}^i (pt)^c = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt \right\}^i (pt)^c = \frac{1}{1 - \frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt} (pt)^c = \\
 &= \frac{(pt)^c (1 - pt)}{1 - t + qp^c t^{c+1}}. \tag{2.3.2}
 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τον τελευταία τύπο ως προς z (στη θέση $z = 1$) βρίσκουμε ότι

$$E(X) = \mu'_1 = G'_X(1) = \frac{1 - p^c}{(1 - p)p^c}. \tag{2.3.3}$$

Σε αυτό το σημείο, μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί η πιθανογεννήτρια $G_X(z)$ έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένας νέος αναδρομικός τύπος για τις παραγοντικές ροπές r τάξης. Πράγματι είναι εύκολο να διατυπωθεί ότι

$$\begin{aligned}
 \mu'_r = E(X^r) &= \left[\frac{d^r}{dt^r} G_X(t) \right]_{t=1} = \\
 &= \frac{c^r - p(c+1)^r}{q} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \left\{ \frac{1}{qp^c} - (c+1)^{r-i} \right\} \mu'_i, \quad r \geq 1. \tag{2.3.4}
 \end{aligned}$$

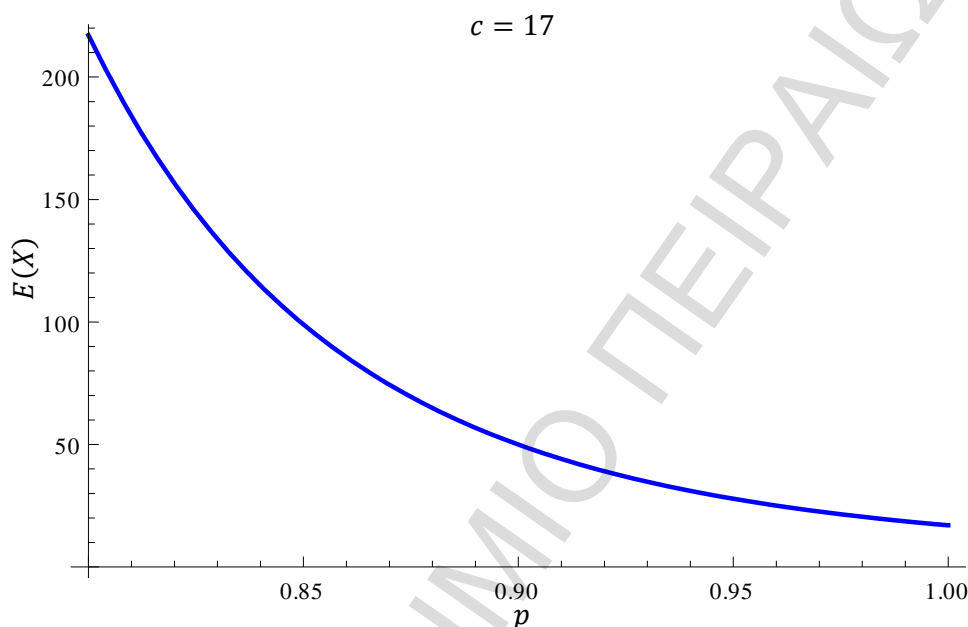
Για $r = 2$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα η ροπή δεύτερης τάξης $\mu'_2 = E(X^2)$ μέσω της $\mu'_1 = E(X)$. Χρησιμοποιώντας και τον τύπο (2.3.4) προκύπτει ο επόμενος τύπος

$$\mu'_2 = -(1+c)^2 + \frac{c^2 - (1+c)^2 p}{1-p} + \frac{3 + 2(1-p^c)}{p^c(1-p)}. \tag{2.3.5}$$

Για να υπολογιστεί η διακύμανση αρκεί να συνδυαστούν τα μ'_1, μ'_2 . Πράγματι είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

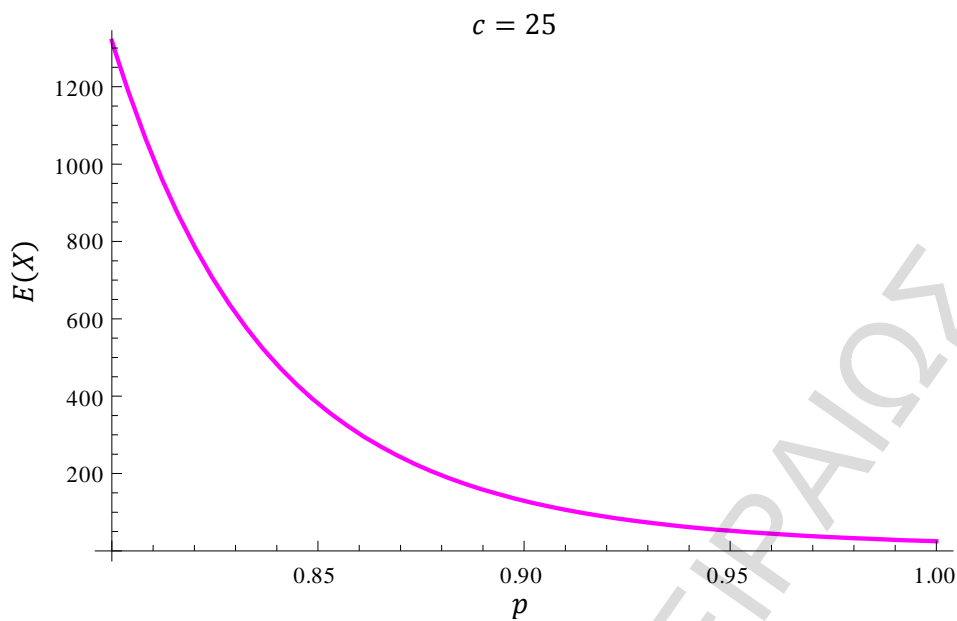
$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \\
 &= \frac{1}{(1-p)^2 p^{2c}} - \frac{2c+1}{(1-p)p^c} - \frac{p}{(1-p)^2}. \tag{2.3.6}
 \end{aligned}$$

Από τον τύπο (2.3.1) είναι φανερό ότι η μέση τιμή είναι φθίνουσα συνάρτηση του p , η οποία παίρνει πολύ μεγάλες τιμές καθώς το p τείνει στο μηδέν, ενώ καθώς το p τείνει στο 1 η μέση τιμή τείνει να γίνει ίση με c . Αυτό είναι εμφανές και γραφικά από τα Σχήματα 2.3.1, 2.3.2 και 2.3.3 όπου απεικονίζεται σε κάθε περίπτωση το μέσο μήκος ενός τεστ CS συναρτήσει των παραμέτρων p , c .

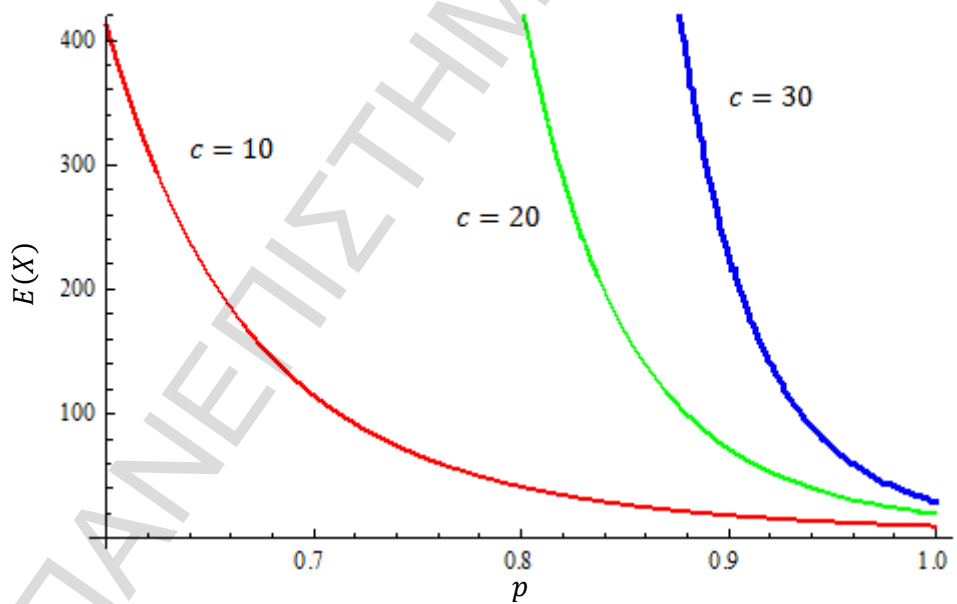


Σχήμα 2.3.1: Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 17$

Στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι $c = 17$ και $p = 0.95$, χρησιμοποιώντας το Σχήμα 2.3.1, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ότι απαιτούνται περίπου 30 δοκιμές. Ακόμη, στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι $c = 25$ και $p = 0.95$, χρησιμοποιώντας το Σχήμα 2.3.2, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ότι απαιτούνται περίπου 53 δοκιμές.



Σχήμα 2.3.2: Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 25$



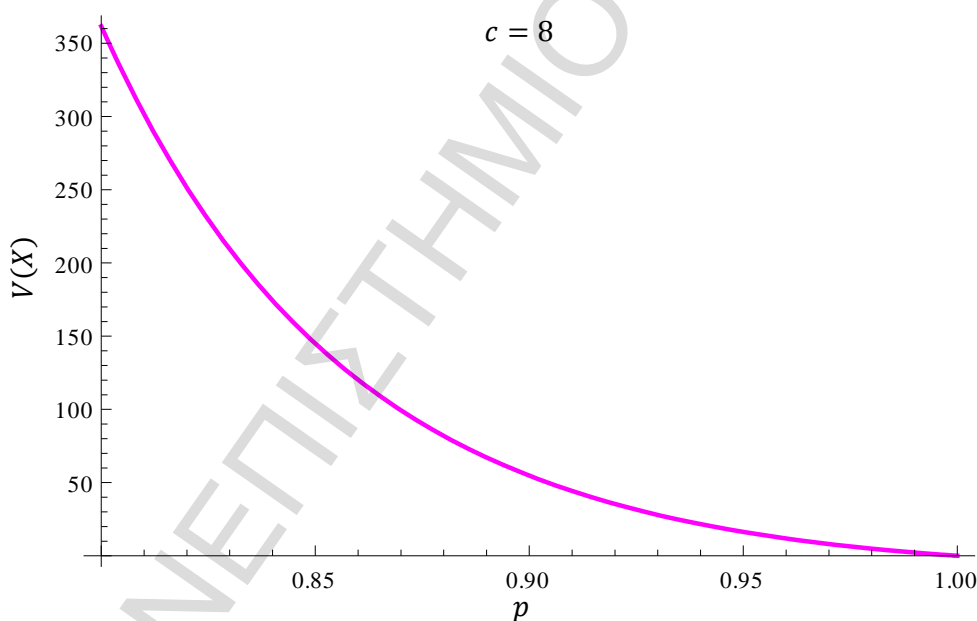
Σχήμα 2.3.3: Μέσο μήκος ενός τεστ CS για $c = 10, 20$ και 30

Στο Σχήμα 2.3.3 γίνεται συγκριτική παρουσίαση του μέσου μήκους ενός τεστ CS για διάφορες τιμές της παραμέτρου c . Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το σχήμα αυτό

είναι ότι, όσο αυξάνεται ο απαιτούμενος αριθμός επιτυχημένων εκκινήσεων, τόσο αυξάνεται και το μέσο μήκος ενός τεστ CS , ενώ αντίθετα όσο αυξάνεται η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης τόσο μειώνεται το μέσο μήκος ενός τεστ CS . Επομένως, για μεγάλες τιμές του c η διαδικασία ελέγχου ενός τεστ CS είναι πολύ χρονοβόρα καθώς ακόμα και για πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα απαιτείται ο δεκαπλάσιος κατά μέσο όρο αριθμός δοκιμών μέχρι να πάρουμε κάποια απόφαση και συνεπώς είναι οικονομικά ασύμφορη.

Από τον τύπο (2.3.6) είναι φανερό ότι η διακύμανση του μήκους ενός τεστ CS είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς p . Αυτό σημαίνει ότι όσο πιο αξιόπιστη είναι μια μονάδα τόσο πιο μικρή θα είναι η απόκλιση του μήκους του τεστ από τη μέση τιμή, δηλαδή για όλες τις μονάδες που υποβάλλονται σε τεστ θα απαιτείται ο ίδιος περίπου αριθμός δοκιμών μέχρι την αποδοχή τους.

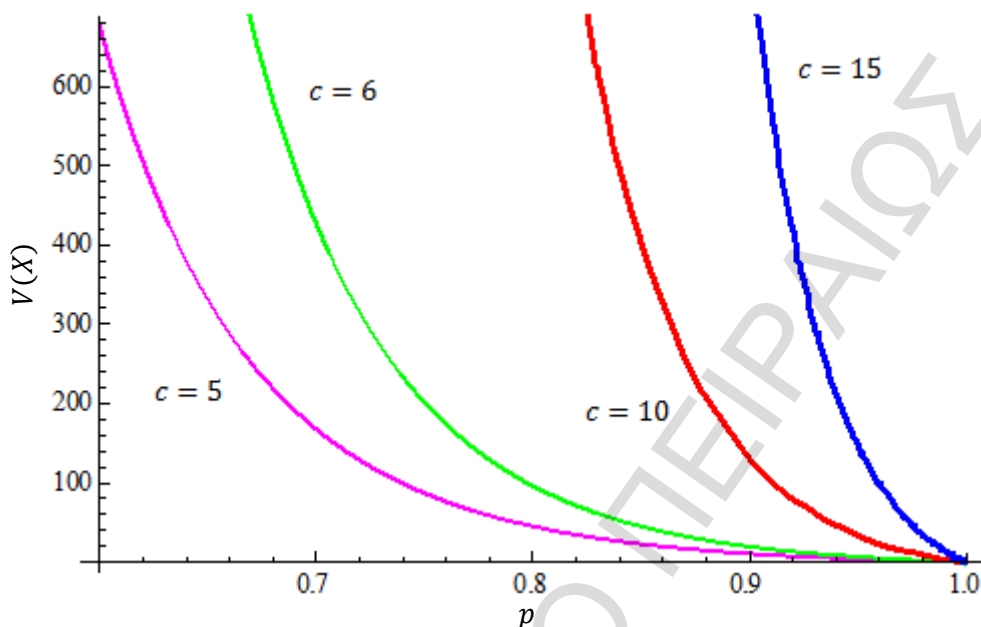
Στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι $c = 8$ και $p = 0.95$ από το Σχήμα 2.3.4, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ότι η διακύμανση του τεστ CS είναι περίπου 16.3 ($V(X) = 16.3$).



Σχήμα 2.3.4: Διακύμανση του μήκους ενός τεστ CS για $c = 8$

Στο Σχήμα 2.3.5 δίνεται η γραφική παράσταση της διακύμανσης του τεστ CS για $c = 5, 6, 10$ και 15 . Είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται το c τόσο αυξάνεται και η διακύμανση του μήκους του τεστ CS , γεγονός που όπως αναφέρθηκε πριν δεν είναι θετικό. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να προτιμάμε εξαρτήματα με μεγάλο p (από 0.8 και

πάνω) και μικρό c έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατό μικρότερη διακύμανση του μήκους του τεστ CS .



Σχήμα 2.3.5: Διακύμανση του μήκους ενός τεστ CS για $c = 5, 6, 10$ και 15

Πίνακας 2.3.1 Μέσο μήκος και διακύμανση του μήκους ενός τεστ εκκίνησης CS με $c = 20$ για διάφορες τιμές του p		
p	$E(X)$	$V(X)$
0.6	68375.30	4672720000
0.8	214.34	170278
0.9	36.13	3303.14
0.95	17.90	445.15
0.99	4.45	35.52

Στον παραπάνω Πίνακα 2.3.1 φαίνεται συνοπτικά το μέσο μήκος και η διακύμανση του μήκους ενός τεστ εκκίνησης CS με $c = 20$ για διάφορες τιμές του p . Είναι φανερό, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ότι όσο το p τείνει στο 1 τόσο το μέσο μήκος και η

διακύμανση του μήκους του τεστ CS μειώνονται ενώ για πολύ μικρές τιμές του p , τόσο το μέσο μήκος όσο και η διακύμανση του μήκους του τεστ CS παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές.

2.4 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ CS

Η εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας p σε ένα τεστ εκκίνησης γίνεται με χρήση κλασικών στατιστικών τεχνικών και είναι εξίσου σημαντική με την εύρεση του μήκους του τεστ μέσω της θεωρίας των πιθανοτήτων. Δυο κλασικές μέθοδοι για την εύρεση των εκτιμητριών του p είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος των ροπών (Viveros and Balakrishnan (1993)). Επειδή η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας βρίσκει εφαρμογή σε όλα σχεδόν τα τεστ εκκίνησης για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων και γνωρίζοντας ότι τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων δεν έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, θα παρουσιαστεί αναλυτικά μόνο η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας την πιθανότητα p βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των δοκιμών ενός τεστ εκκίνησης CS . Αυτό σημαίνει ότι κάνουμε n τεστ CS , τα οποία γίνονται είτε στην ίδια μονάδα, είτε σε πανομοιότυπες μονάδες έτσι ώστε η αξιοπιστία του τεστ να παραμείνει η ίδια. Για το i -οστό τεστ, θεωρούμε ως X_i την μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό αριθμό των δοκιμών εκκίνησης μέχρι την αποδοχή της μονάδας. Το επόμενο βήμα είναι να καταγράψουμε τα ζευγάρια $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$ όπου S_i είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων επιτυχιών και F_i είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων αποτυχιών μέχρι την αποδοχή της i μονάδας (προφανώς ισχύει $X_i = S_i + F_i$).

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της μεταβλητής X θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p) = L(p|x) = \prod_{i=1}^n p^{S_i} (1-p)^{F_i} = p^S (1-p)^F = p^S (1-p)^{X-S} \quad (2.4.1)$$

όπου

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, F = \sum_{i=1}^n F_i, X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (S_i + F_i) = S + F.$$

Έστω \hat{p} η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.) του p , η οποία θα έχει την ιδιότητα $L(\hat{p}(x)) = \max L(p|x)$. Για τον υπολογισμό του μέγιστου της συνάρτησης πιθανοφάνειας αρκεί να εργαστούμε με τον λογάριθμό της. Γνωρίζοντας ότι ο λογάριθμος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, είναι προφανές ότι η τιμή του p που μεγιστοποιεί το $\ln L(p)$ είναι η ε.μ.π. \hat{p} . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(S \ln p)}{\partial p} + \frac{\partial(F \ln(1-p))}{\partial p} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow S \frac{1}{p} - F \frac{1}{1-p} = 0 &\Rightarrow S(1-p) = Fp \Rightarrow S = (S+F)p \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{S}{X}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Η πληροφορία του Fisher (δηλαδή η «ποσότητα» της πληροφορίας που περιέχεται στα δεδομένα X για την άγνωστη παράμετρο p) στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με

$$I(p) = - \left[\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} \right]_{p=\hat{p}} = \frac{X}{p(1-p)} \quad (2.4.3)$$

και μπορεί να εκτιμηθεί από την ποσότητα

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{X^3}{S(X-S)} \quad (2.4.4)$$

όπου X είναι ο συνολικός αριθμός των προσπαθειών όλων των τεστ εκκίνησης.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε) για το p χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.4.4) αφού γνωρίζουμε ότι η πληροφορία του Fisher εκφράζει το αντίστροφο της διασποράς που υπάρχει στο δείγμα.

Αρχικά είναι γνωστό ότι, αν το p είναι μια πραγματική παράμετρος και το δείγμα $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n = 1, 2, \dots$ είναι τυχαίο δείγμα, τότε η ε.μ.π. $\hat{p}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $n \rightarrow \infty$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή

$$N\left(p, \frac{1}{nI_1(p)}\right) = N\left(p, \frac{1}{I(p)}\right),$$

όπου $I_1(p) = I(p)/n$ είναι η πληροφορία του Fisher που περιέχεται σε μια παρατήρηση.

Επομένως η μεταβλητή

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{I(\hat{p})}}$$

θα ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, και το αντίστοιχο $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το p θα είναι το

$$\left(\hat{p} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}}, \hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}} \right) \quad (2.4.5)$$

όπου $z_{\alpha/2}$ είναι το άνω $\alpha/2$ ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Αξίζει να αναφερθεί ότι το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να περιλαμβάνει και τιμές μεγαλύτερες από τη μονάδα ή μικρότερες από το μηδέν. Η πρώτη περίπτωση εμφανίζεται όταν υποβάλλονται σε τεστ πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα (δηλαδή με πιθανότητα επιτυχημένης εκκίνησης πάνω από 0.95) λίγες μόνο φορές, που σημαίνει ότι το πλήθος των n μονάδων είναι μικρό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι λογικό να συμβούν πολύ περισσότερες επιτυχίες από ότι αποτυχίες με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται μεγάλη διασπορά στο δείγμα (δηλαδή το $I(\hat{p})$ έχει μικρή τιμή) και η εκτίμηση του p να τείνει στη μονάδα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης για το p να υπερβαίνουν τα συνηθισμένα όρια. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με τη χρήση του λογαριθμικού μετασχηματισμού

$$\varphi = g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \Rightarrow p = \frac{e^\varphi}{1+e^\varphi}$$

(που μελέτησε ο Sprott (1973)), ο οποίος κάνει πιο συμμετρικό το δείγμα και κατά συνέπεια και τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Η αντίστοιχη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του φ δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\varphi} = \ln\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right),$$

η πληροφορία του Fisher είναι ίση με

$$I(\hat{\varphi}) = X\hat{p}(1-\hat{p})$$

και το αντίστοιχο προσεγγιστικό $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το φ θα είναι το

$$\left(\hat{\varphi} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{\varphi})}}, \hat{\varphi} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{\varphi})}} \right).$$

Τέλος, ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το p μπορεί να βρεθεί με μετατροπή του διαστήματος εμπιστοσύνης για το φ . Μετά από μερικές απλοποιήσεις, το $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το p θα είναι το

$$\left(\frac{\hat{p}}{\hat{p} + (1 - \hat{p}) \exp\{z_{\alpha/2}/\sqrt{X\hat{p}(1 - \hat{p})}\}} , \frac{\hat{p}}{\hat{p} + (1 - \hat{p}) \exp\{-z_{\alpha/2}/\sqrt{X\hat{p}(1 - \hat{p})}\}} \right). \quad (2.4.6)$$

Παράδειγμα 2.4.1: Έστω τα ακόλουθα δεδομένα που έχουν παραχθεί μέσω προσομοίωσης και αφορούν μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli για ένα τεστ εκκίνησης CS που γίνεται σε $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός μηχανήματος, με $c = 15$ και $p = 0.9$.

Πίνακας 2.4.1	<i>Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης CS από $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός μηχανήματος, με $c = 15$ και $p = 0.9$</i>			
i	Ακολουθία αποτελεσμάτων που εμφανίστηκαν	S_i	F_i	X_i
1	1111111110111111101101111111111111 1111110111111111110110110111111110101110	34	3	37
2	11111011111111111111	56	8	64
3	11011100111111101101100011111111111111 11111111101111111111111001111001001111111	31	8	39
4	0011111111111111	50	9	59
5	1111111111101111111111111111	27	1	28
6	111111110110010111111111111111	27	4	31
7	1111011111011111100111111111111111	31	4	35
8	11111111111111 1110111011111111111011111111010110	15	0	15
9	11111111111111	46	6	52
10	1011111111111111 11101111011110101110111111111110111111	16	1	17
11	11111101111110111101110111111111111111	73	10	83
12	0111111111111111	15	1	16
13	111001111111111110101101111111111111 0011011111111111111011111101111110111110	33	5	38
14	11111111110111111111111111	62	8	70

15	111101111011111111111111	23	2	25
Σύνολο		539	70	609

Για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4.1 υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = 539, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i = 70, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i = 609.$$

Η αντίστοιχη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του p είναι ίση με

$$\hat{p} = \frac{S}{X} = 0.8851$$

και η πληροφορία του Fisher είναι ίση με

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1 - \hat{p})} = 5988.$$

Στη συνέχεια, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι το

$$\left(0.8851 - \frac{1.96}{\sqrt{5988}}, 0.8851 + \frac{1.96}{\sqrt{5988}} \right) = (0.8598, 0.9104).$$

Τέλος, το αντίστοιχο προσεγγιστικό $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης που υπολογίζεται μέσω του τύπου (2.4.6) είναι το

$$\left(\frac{0.8851}{0.8851 + 0.1149 \exp\{1.96/7.8699\}}, \frac{0.8851}{0.8851 + 0.1149 \exp\{-1.96/7.8699\}} \right) = (0.8572, 0.9081).$$

Από το παραπάνω 95% διάστημα εμπιστοσύνης παρατηρούμε ότι, παρότι το δείγμα είναι μικρό, η εκτίμηση της πιθανότητας εκκίνησης είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή $p = 0.9$. Τέλος, το προσεγγιστικό $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης είναι μέσα στα επιτρεπτά όρια γεγονός που δικαιολογείται από το ότι η πιθανότητα εκκίνησης έχει σχετικά υψηλή τιμή.

2.5 Τεστ εκκίνησης που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων

Ένα τεστ εκκίνησης απαιτεί ένα προκαθορισμένο αριθμό συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων για την αποδοχή ενός εξοπλισμού. Για παράδειγμα, ένας αγοραστής αντλιών νερού μπορεί να απαιτεί την επιτυχία 15 συνεχόμενων εκκινήσεων του συγκεκριμένου εξοπλισμού για να το αποδεχτεί. Από την ανάλυση που έχει παρουσιαστεί μέχρι τώρα είναι φανερό ότι, οι περισσότεροι συγγραφείς (Hahn και Gage (1983), Viveros και Balakrishnan (1993)) μελέτησαν τα τεστ εκκίνησης θεωρώντας ως βασικό κριτήριο αποδοχής ενός εξαρτήματος τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας του. Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο αυτό, το πείραμα θα συνεχίζεται μέχρι να παρατηρηθεί ο προκαθορισμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών ανεξάρτητα από τον αριθμό των αποτυχημένων προσπαθειών. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολικά μεγάλο αριθμό δοκιμών ιδιαίτερα όταν η πιθανότητα p έχει μικρές τιμές (για παράδειγμα από τον Πίνακα 2.3.1, προκύπτει ότι για $p = 0.6$ ο μέσος αριθμός δοκιμών είναι 68375). Επειδή αυτή η διαδικασία, όπως είναι φανερό, θεωρήθηκε ως μη πρακτική και δεν διευκολύνει στη γρήγορη απόρριψη ενός μη ποιοτικά καλού σωρού εξαρτημάτων, προτάθηκαν διάφορα τεστ εκκίνησης στα οποία ο αριθμός των αποτυχιών θεωρείται ως βασικό κριτήριο λήψης απόφασης. Το πιο σημαντικό από αυτά τα τεστ είναι το τεστ για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες.

2.6 Τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, αν συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες πριν από d συνολικές αποτυχίες τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό, ενώ αντίθετα, αν συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από c συνεχόμενες επιτυχίες τότε το εξάρτημα απορρίπτεται. Το τεστ που βασίζεται σε αυτό το κριτήριο αποτελεί τροποποίηση του τεστ CS και ονομάζεται εν συντομία τεστ εκκίνησης $CSTF$ (Consecutive Successes Total Failures). Στο τεστ αυτό, η τυχαία μεταβλητή X θα παριστάνει το χρόνο αναμονής μέχρι να τελειώσει το πείραμα, ο οποίος ακολουθεί μια μορφή της γεωμετρικής κατανομής τάξης (c, d) με τη διαφορά όμως ότι στο τεστ $CSTF$ οι d αποτυχίες δεν είναι συνεχόμενες.

Σε αυτό το σημείο, για την παρουσίαση της συνάρτησης πιθανότητας του μήκους του τεστ, θεωρούμε n ίδιες μονάδες εξοπλισμού που υποβάλλονται σε ανεξάρτητες εκκινήσεις και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- X : ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ (αποδοχή ή απόρριψη του εξαρτήματος)
- p : η πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης σε κάθε δοκιμή,
- q : η πιθανότητα αποτυχίας εκκίνησης σε κάθε δοκιμή ($q = 1 - p$),
- c : ο απαιτούμενος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών για να έχουμε αποδοχή του εξοπλισμού,
- d : ο απαιτούμενος αριθμός συνολικών αποτυχιών για να έχουμε απόρριψη του εξοπλισμού.

Για την εύρεση της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της τ.μ X παρατηρούμε αρχικά ότι, υπάρχουν δυο περιπτώσεις που οδηγούν στον τερματισμό του τεστ:

- α. Μια διαδοχή δοκιμών που οδηγεί σε αποδοχή μιας μονάδας στην r -οστή (όπου r τυχαία μεταβλητή) εκκίνηση με d αποτυχίες,
- β. Μια διαδοχή δοκιμών που οδηγεί στην απόρριψη μιας μονάδας κατά την r -οστή εκκίνηση (όπου r τυχαία μεταβλητή).

Στην περίπτωση (α) θα πρέπει να εμφανιστεί μια ροή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{S \dots S}_{r_1} \underbrace{F S \dots S}_{r_2} \dots \underbrace{F S \dots S}_{r_k} \underbrace{S \dots S}_c$$

με $0 \leq r_i \leq c - 1, i = 1, 2, \dots, k, \sum_{i=1}^k r_i + k + c = r$ και $0 \leq k \leq d - 1$.

Η αντίστοιχη πιθανότητα της διαδοχής αυτής είναι ίση με $p^{r_1} q p^{r_2} q \dots q p^{r_k} q p^c$. Επομένως η πιθανογεννήτρια του αριθμού των δοκιμών X μέχρι να έχουμε αποδοχή της μονάδας, στη συγκεκριμένη περίπτωση (A : acceptance) είναι ίση με

$$G_A^{(k)}(t) = (1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt(1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt \dots$$

$$\dots qt(1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt p^c t^c =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})^k (qt)^k p^c t^c = \\
 &= p^c t^c q^k t^k \left(\sum_{j=0}^{c-1} pt \right)^k = p^c q^k t^{k+c} \left(\frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^k. \quad (2.6.1)
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (β) θα πρέπει να εμφανιστεί μια ροή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{S \dots S}_{r_1} \underbrace{F}_{1\eta} \underbrace{S \dots S}_{r_2} \underbrace{F}_{2\eta} \dots \underbrace{F}_{r_d} \underbrace{S \dots S}_{r_d} \underbrace{F}_{d\text{-οστή}}$$

με $0 \leq r_i \leq c - 1, i = 1, 2, \dots, d, \sum_{i=1}^d r_i + d = r$. Η αντίστοιχη πιθανότητα της διαδοχής αυτής είναι ίση με $p^{r_1} q p^{r_2} q \dots q p^{r_d} q$. Επομένως η πιθανογεννήτρια του αριθμού των δοκιμών μέχρι να έχουμε απόρριψη της μονάδας, στη συγκεκριμένη περίπτωση (R : rejection) είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 G_R(t) &= (1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})^d (qt)^d = \\
 &= q^d t^d \left(\sum_{j=0}^{c-1} pt \right)^d = q^d t^d \left(\frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^d. \quad (2.6.2)
 \end{aligned}$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής X προκύπτει προσθέτοντας τους όρους (2.6.1) και (2.6.2) και είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 G_X(t) &= \sum_{k=0}^{d-1} G_A^{(k)}(t) + G_R(t) = \\
 &= p^c q^c \sum_{k=0}^{d-1} \left\{ qt \left(\frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right) \right\}^k + q^d t^d \left(\frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^d. \quad (2.6.3)
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας την $G_X(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής X παρατηρώντας ότι

$$\left(\frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^k = \sum_{r=0}^{k(c-1)} t^r p^r B_k(r),$$

όπου

$$B_k(r) = \sum_{i=0}^{\min(k, [r/c])} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+r-ic-1}{r-ic}.$$

Τελικά ο τύπος (2.6.3) γράφεται

$$G_X(t) = \sum_r p^r t^r \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k B_k(r - k - c) + \left(\frac{q}{p}\right)^d B_d(r - d) \right]$$

και συγκρίνοντας τον τελευταίο τύπο με τον τύπο

$$G_X(t) = \sum_{x=1}^y P(X = x) t^x$$

μπορούμε εύκολα να εξάγουμε ένα τύπο για τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , που θα έχει τη μορφή

$$P(x) = P(X = x) = p^x \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k B_k(x - k - c) + \left(\frac{q}{p}\right)^d B_d(x - d) \right] \quad (2.6.4)$$

όπου $x = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$ ενώ για $0 \leq x \leq \min(c, d)$ θα έχουμε $P(x) = 0$.

Αθροίζοντας τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X προκύπτει η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) του μήκους, η οποία θα δίνεται από τον τύπο

$$R(y) = \sum_{x=1}^y P(X = x) = \sum_{x=1}^y \left[p^x \left[\sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k B_k(x - k - c) + \left(\frac{q}{p}\right)^d B_d(x - d) \right] \right].$$

2.7 Μέσο μήκος του τεστ CSTF

Για να προσδιορίσουμε το μέσο μήκος, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $G_X(t)$ (βλέπε σχέση (2.6.3)) ως προς t και βρίσκουμε ότι

$$E(X) = \frac{1 - p^c}{qp^c} \{1 - (1 - p^c)^d\}.$$

Μελετώντας τον παραπάνω τύπο, αξίζει να αναφερθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση που ο απαιτούμενος αριθμός συνολικών αποτυχιών για να έχουμε απόρριψη του εξοπλισμού είναι ίσος με ένα ($d = 1$), η $E(X)$ δίνεται από την έκφραση

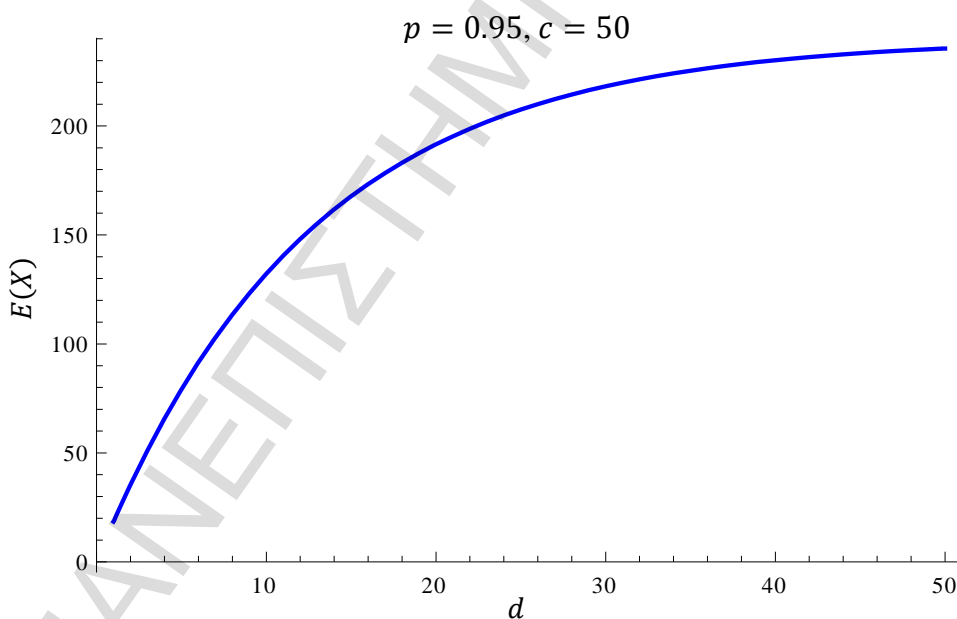
$$E(X) = \frac{1 - p^c}{q}$$

2. Όταν $d \rightarrow \infty$ είναι φανερό ότι η μεταβλητή X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή τάξεως c , για την οποία είναι γνωστό ότι

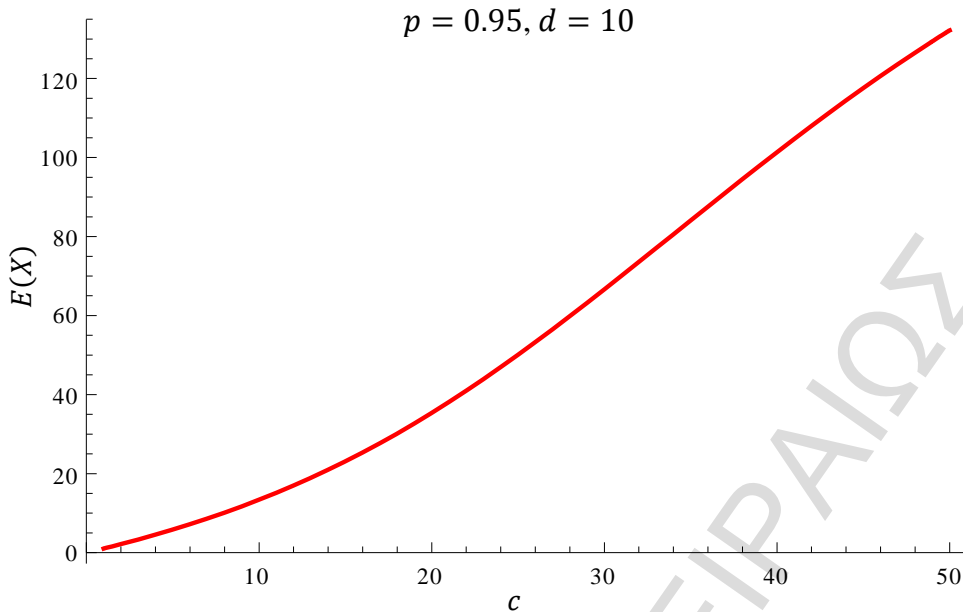
$$E(X) = \frac{1 - p^c}{qp^c}$$

3. Συγκρίνοντας την παραπάνω μέση τιμή με τον γενικό τύπο του μέσου μήκους, είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι, κατά μέσο όρο, ο χρόνος αναμονής μειώνεται κατά $(1 - p)^{d+1}/qp^c$ εξαιτίας της απόρριψης των μονάδων όταν παρατηρούνται πάνω από d αποτυχίες.
4. Η μέση τιμή $E(X)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς d και έχει μέγιστη τιμή ίση με $(1 - p^c)/qp^c$.

Στα Σχήματα 2.7.1 και 2.7.2 που ακολουθούν, δίνεται γραφικά η μορφή του μέσου μήκους του τεστ.



Σχήμα 2.7.1: Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* συναρτήσει του d με $p = 0.95$ και $c = 50$



Σχήμα 2.7.2: Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* συναρτήσει του c με $p = 0.95$ και $d = 10$

Από τα Σχήματα 2.7.1 και 2.7.2 παρατηρούμε ότι το μέσο μήκος για τα τεστ που σχεδιάστηκαν είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς c και d αντίστοιχα. Ακόμη, στο Σχήμα 2.1.7 παρατηρούμε ότι για c σταθερό και $d \rightarrow \infty$ έχουμε στην ουσία ένα τεστ *CS*, όπου οι αποτυχίες δεν επηρεάζουν τη λήψη απόφασης και το τεστ αργεί να τελειώσει. Αντίθετα, στο Σχήμα 2.1.8 εύκολα διακρίνουμε ότι για d σταθερό και $c \rightarrow \infty$ είναι σίγουρο ότι οι d αποτυχίες θα συμβούν πριν από τις c επιτυχίες οπότε θα έχουμε απόρριψη ενός ελαττωματικού εξαρτήματος.

2.8 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ *CSTF*

Όπως στην Ενότητα 2.4 υπολογίστηκαν οι εκτιμήτριες της άγνωστης πιθανότητας εκκίνησης του τεστ *CS*, έτσι και σε αυτό το σημείο είναι ωφέλιμο να υπολογιστούν οι εκτιμήτριες της άγνωστης πιθανότητας εκκίνησης για το τεστ *CSTF*. Υπάρχουν δυο μέθοδοι υπολογισμού των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας. Η πρώτη είναι η κλασική μέθοδος των Viveros και Balakrishnan (1993), η οποία βρίσκει εφαρμογή σε κάθε είδους τεστ αν είναι γνωστός ο συνολικός αριθμός επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας και η δεύτερη είναι η μέθοδος της Μαρκοβιανής προσέγγισης (Smith και Griffith (2005)). Επειδή η

μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας βρίσκει εφαρμογή σε όλα σχεδόν τα τεστ εκκίνησης για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων και γνωρίζοντας ότι τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων δεν έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, θα παρουσιαστεί αναλυτικά μόνο η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να ελέγξουμε με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας αν ένα εξάρτημα είναι ποιοτικά αποδεκτό. Αυτό σημαίνει ότι διεξάγουμε n τεστ με c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες, τα οποία γίνονται είτε στην ίδια μονάδα, είτε σε πανομοιότυπες μονάδες έτσι ώστε η αξιοπιστία του τεστ να παραμείνει η ίδια. Για το i -στο τεστ, όπου $1 \leq i \leq n$, συμβολίζουμε με S_i, F_i το συνολικό αριθμό επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας αντίστοιχα, μέχρι να τελειώσει το τεστ. Επισημαίνεται ότι η ε.μ.π. αυτής της μεθόδου θα συμβολίζεται με \hat{p}_{SF} . Για το τυχαίο δείγμα των n μονάδων που υποβάλλονται σε τεστ παράγονται n ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα της μορφής $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$ με αντίστοιχες παρατηρούμενες τιμές $(s_1, f_1), (s_2, f_2), \dots, (s_n, f_n)$. Σε αυτό το σημείο θα διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(p)$ είναι ανάλογη με την πιθανότητα των συνολικών επιτυχιών S_i και των συνολικών αποτυχιών F_i , δηλαδή με την τιμή $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$. Αυτό αποδεικνύεται διακρίνοντας δυο πιθανές περιπτώσεις που οδηγούν στο τερματισμό του τεστ: $F_i = d$ ή $F_i < d$.

Στην πρώτη περίπτωση ($F_i = d$) είναι φανερό ότι, το i -στο τεστ τελειώνει όταν συμβούν d συνολικές αποτυχίες. Αυτό σημαίνει ότι η τελευταία δοκιμή (για παράδειγμα, η $S_i + F_i$ δοκιμή) ήταν αποτυχία, η οποία συνέβη με πιθανότητα $1-p$. Όμως, για να τελειώσει το τεστ με αυτό τον τρόπο θα πρέπει στην προηγούμενη δοκιμή $S_i + F_i - 1$ να είχαν συμβεί S_i επιτυχίες με πιθανότητα p και $F_i - 1$ αποτυχίες με πιθανότητα $1-p$, κατανεμημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c συνεχόμενες επιτυχίες. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των συνολικών επιτυχιών S_i και των συνολικών αποτυχιών F_i είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$.

Στην περίπτωση που ισχύει $F_i < d$ είναι φανερό ότι για να τελειώσει το i -στο τεστ με αποδοχή θα πρέπει οι c τελευταίες εκκινήσεις λειτουργίας να είναι επιτυχημένες με πιθανότητα p^c . Όμως, για να συμβεί αυτό, θα πρέπει στις προηγούμενες $S_i + F_i - c$ δοκιμές να έχουν συμβεί $S_i - c$ επιτυχίες με πιθανότητα $p^{S_i - c}$ και F_i αποτυχίες με πιθανότητα $(1-p)^{F_i}$, κατανεμημένες με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c συνεχόμενες

επιτυχίες. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των συνολικών επιτυχιών S_i και των συνολικών αποτυχιών F_i είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$.

Συμπερασματικά προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(p)$ για τα στοιχεία $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$ είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$ και τελικά παρατηρείται ότι

$$L(p) \propto \prod_{i=1}^n p^{S_i}(1-p)^{F_i} = p^{\sum S_i}(1-p)^{\sum F_i},$$

όπου $F_i \leq d$, $i = 1, 2, \dots, n$ και η παραπάνω εκτιμήτρια είναι ισοδύναμη με αυτή που υπολόγισαν οι Viveros και Balakrishnan (1993) για τα απλά τεστ εκκίνησης CS.

Στη συνέχεια γράφοντας

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (S_i + F_i) = S + F,$$

προκύπτει ότι

$$L(p) \propto p^S(1-p)^F = p^S(1-p)^{X-S},$$

όπου το σύμβολο \propto σημαίνει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι αναλογη της ποσότητας $p^S(1-p)^F$. Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας που θα προκύψει σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία δίνεται από τον τύπο

$$\hat{p}_{SF} = \frac{S}{S+F} = \frac{S}{X}.$$

Η πληροφορία του Fisher στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με

$$I(\hat{p}_{SF}) = - \left[\frac{\partial^2 \ln(L(p))}{\partial p^2} \right]_{p=\hat{p}_{SF}}$$

και εκτιμάται από την ποσότητα

$$\begin{aligned} I(\hat{p}_{SF}) &= \frac{S \left(\frac{S}{S+F} \right)^2 + F \left(\frac{S}{S+F} \right)^2}{\left(\frac{S}{S+F} \right)^2 \left(\frac{F}{S+F} \right)^2} = \frac{S \cdot F (F+S)}{(S+F)^2} = \\ &= \frac{(S+F)^3}{S \cdot F} = \frac{(S+F)}{\hat{p}_{SF}(1-\hat{p}_{SF})}. \end{aligned}$$

Τέλος, το αντίστοιχο $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης θα είναι το

$$\left(\hat{p}_{SF} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_{SF})}}, \hat{p}_{SF} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_{SF})}} \right).$$

Παράδειγμα 2.8.1: Έστω τα ακόλουθα δεδομένα που έχουν παραχθεί μέσω προσομοίωσης και αφορούν μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli για ένα τεστ εκκίνησης *CSTF* που γίνεται σε $n = 10$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c = 12, d = 5$ και $p = 0.9$.

Πίνακας 2.8.1		<i>Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης CS από $n = 10$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c = 12, d = 5$ και $p = 0.9$</i>		
i	Ακολουθία αποτελεσμάτων που εμφανίστηκαν	S_i	F_i	X_i
1	1010111111111111	14	2	16
2	111111111111	12	0	12
3	10111111011111111111	20	2	2
4	011101111111111100111111111111	26	4	30
5	1110111111111111	15	1	16
6	1111110011111011111111111111	24	3	27
7	11111011111111111111	17	1	18
8	11110111100111111111111111	20	3	23
9	110111101111111111111111	18	2	20
10	1111111011101111111111111111	22	2	24
Σύνολο		188	20	208

Για τα δεδομένα του Πίνακα 2.8.1 υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = 188, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i = 20, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i = 208.$$

Η αντίστοιχη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του p είναι ίση με

$$\hat{p}_{SF} = \frac{S}{X} = 0.9038$$

και η πληροφορία του Fisher είναι ίση με

$$I(\hat{p}_{SF}) = \frac{X}{\hat{p}_{SF}(1 - \hat{p}_{SF})} = 2393.6.$$

Τέλος, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει από τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι το

$$\left(0.9038 - \frac{1.96}{\sqrt{2393.6}}, 0.9038 + \frac{1.96}{\sqrt{2393.6}}\right) = (0.8638, 0.9438).$$

Από το παραπάνω 95% διάστημα εμπιστοσύνης παρατηρούμε ότι, παρότι το δείγμα είναι πολύ μικρό, η εκτίμηση της πιθανότητας εκκίνησης είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή του $p = 0.9$.

2.9 Τεστ εκκίνησης CS και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων

Είναι γνωστό ότι κατά τη διάρκεια ενός τεστ εκκίνησης, παρατηρείται συνήθως κάποιου είδους εξάρτηση μεταξύ των μονάδων. Γι' αυτό το λόγο, οι Balakrishnan, Balasubramanian και Viveros (1995) πρότειναν μια γενίκευση του τεστ εκκίνησης CS για ανεξάρτητες δοκιμές. Στο τεστ αυτό υποθέτουμε ότι οι δοκιμές έχουν μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους.

Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο δυο καταστάσεων με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{matrix} E & A \\ p_1 & q_1 \\ A & p_2 & q_2 \end{matrix}$$

όπου

p_1 : η πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι επιτυχία,

p_2 : η πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι αποτυχία

και

q_1 : η πιθανότητα να έχουμε μια αποτυχημένη εκκίνηση μετά από μια επιτυχημένη,

q_2 : η πιθανότητα να έχουμε μια αποτυχημένη εκκίνηση μετά από μια αποτυχημένη.

Τέλος, θα έχουμε

p_0 : η πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη δοκιμή εκκίνησης και

q_0 : η πιθανότητα αποτυχίας στην πρώτη δοκιμή εκκίνησης.

Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, η κατανομή της τ.μ. X , που εκφράζει το μήκος του τεστ μέχρι να συμβούν για πρώτη φορά c συνεχόμενες επιτυχίες, ονομάζεται Μαρκοβιανή-γεωμετρική κατανομή τάξης c . Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του παρακάτω αναδρομικού τύπου

$$f(x) = q_2 f(x-1) + \sum_{i=1}^c q_1 p_2 p_1^{i-2} f(x-i), \quad x > c+2 \quad (2.9.1)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$P_X(x) = 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots, c-1$$

$$P_X(c) = p_0 p_1^{c-1}$$

$$P_X(c+1) = q_0 p_2 p_1^{c-1}$$

$$P_X(c+2) = (q_0 q_2 + p_0 q_1) p_2 p_1^{c-1}.$$

Για να αποδείξουμε τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε αρχικά ότι για να τελειώσει το πείραμα σε $c+2$ ακριβώς δοκιμές εκκίνησης υπάρχουν δυο ενδεχόμενα.

Έστω το ενδεχόμενο η πρώτη δοκιμή να είναι επιτυχημένη. Σε αυτή την περίπτωση για να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα στην $c+2$ δοκιμή, θα πρέπει η δεύτερη να οδηγήσει σε αποτυχία και οι τελευταίες c συνεχόμενες εκκινήσεις να είναι επιτυχημένες. Έτσι παίρνουμε μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{S \ F \ SSS \ \dots \ S}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα $p_0 q_1 p_2 p_1^{c-1}$.

Διαφορετικά έστω ότι η πρώτη δοκιμή είναι αποτυχία. Σε αυτή την περίπτωση για να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα στην $c+2$ δοκιμή, θα πρέπει να έχουμε μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{F \ F \ SSS \ \dots \ S}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα $q_0q_2p_2p_1^{c-1}$.

Είναι φανερό ότι αν προσθέσουμε τις πιθανότητες που προκύπτουν από τα δυο παραπάνω ενδεχόμενα, προκύπτει η πιθανότητα

$$P_X(c+2) = (q_0q_2 + p_0q_1)p_2p_1^{c-1} = q_2f(c+1) + q_1p_2f(c).$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ σε $c+3$ δοκιμές αναλύεται ως εξής

$$P_X(c+3) = q_2f(c+2) + q_1p_2f(c+1) + q_1p_2p_1f(c).$$

Ανάλογα, για $x = c+r$ προκύπτει επαγωγικά ότι η πιθανότητα αποδοχής είναι ίση με

$$P_X(c+r) = q_2f(c+r-1) + q_1p_2f(c+r-2) + \dots + q_1p_2p_1^{r-1}f(c)$$

και θέτοντας $x = c+r$, $r = 1, 2, \dots, c$ καταλήγουμε στον τύπο (2.9.1)

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια της παραπάνω αναδρομικής σχέσης και βρίσκεται ίση με

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{p_1^{c-1}t^c[p_0 + (p_2 - p_0 - p_0p_1)t + p_1(p_0 - p_2)t^2]}{1 - (p_1 + q_2)t + (p_1 - p_2)t^2 + q_1p_2p_1^{c-1}t^{c+1}}. \quad (2.9.2)$$

Είναι φανερό ότι, στην περίπτωση που οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει ότι $p_0 = p_1 = p_2 = p$ τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X παίρνει τη μορφή

$$G_X(t) = \frac{p^c t^c (1 - pt)}{1 - t + qp^c t^{c+1}}$$

όπου $q = 1 - p$. Έτσι, με αυτό τον τρόπο ξανααφтанουμε στην έκφραση (2.3.2), η οποία αποτελεί μια ειδική περίπτωση της σχέσης (2.9.2).

Τέλος, η συνάρτηση κατανομής του μήκους του τεστ, δηλαδή η πιθανότητα να απαιτούνται y ή λιγότερες δοκιμές ώστε να είναι αποδεκτή η κάθε μονάδα, θα έχει τη μορφή

$$R(y) = \sum_{x=1}^y P(x) = \sum_{x=1}^y \left[q_2f(x-1) + \sum_{i=1}^c q_1p_2p_1^{i-2}f(x-i) \right], \quad x > c+1.$$

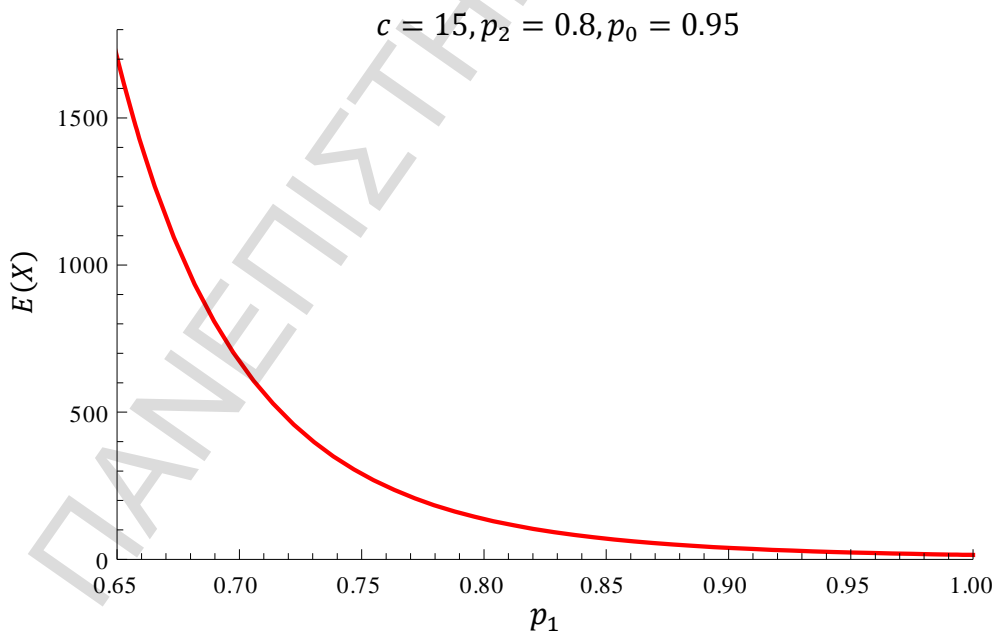
2.10 Μέσο μήκος του τεστ CS όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων

Το μέσο μήκος του τεστ CS μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X (βλέπε σχέση 2.9.2) ως προς t . Έτσι, προκύπτει ότι

$$E(X) = G'_X(1) = 1 - \frac{p_0}{p_2} + \frac{1}{p_2(1-p_1)p_1^{c-1}} \{1 - p_1 + p_2 - p_2 p_1^{c-1}\}. \quad (2.10.1)$$

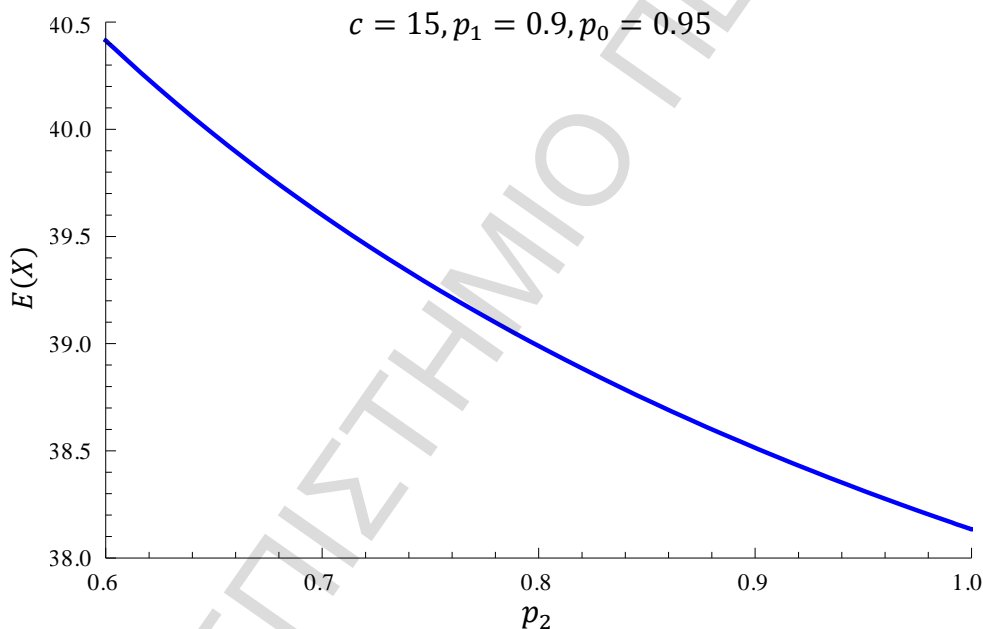
Η παραπάνω σχέση (2.10.1) μπορεί για συγκεκριμένες τιμές των c, p_0, p_1 και p_2 , να εκτιμήσει τον μέσο αριθμό δοκιμών που θα χρειαστεί να γίνουν μέχρι την αποδοχή μιας μονάδας.

Σε όλα τα παρακάτω διαγράμματα είναι φανερή η Μαρκοβιανή συσχέτιση μεταξύ των δοκιμών εκκίνησης. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 2.10.1 παρατηρούμε ότι το p_1 επηρεάζει σημαντικά τον αριθμό των δοκιμών εκκίνησης που απαιτούνται για να τελειώσει το τεστ. Μάλιστα, φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερο είναι το p_1 , τόσο λιγότερες δοκιμές εκκίνησης χρειάζονται έτσι ώστε να τελειώσει το τεστ.

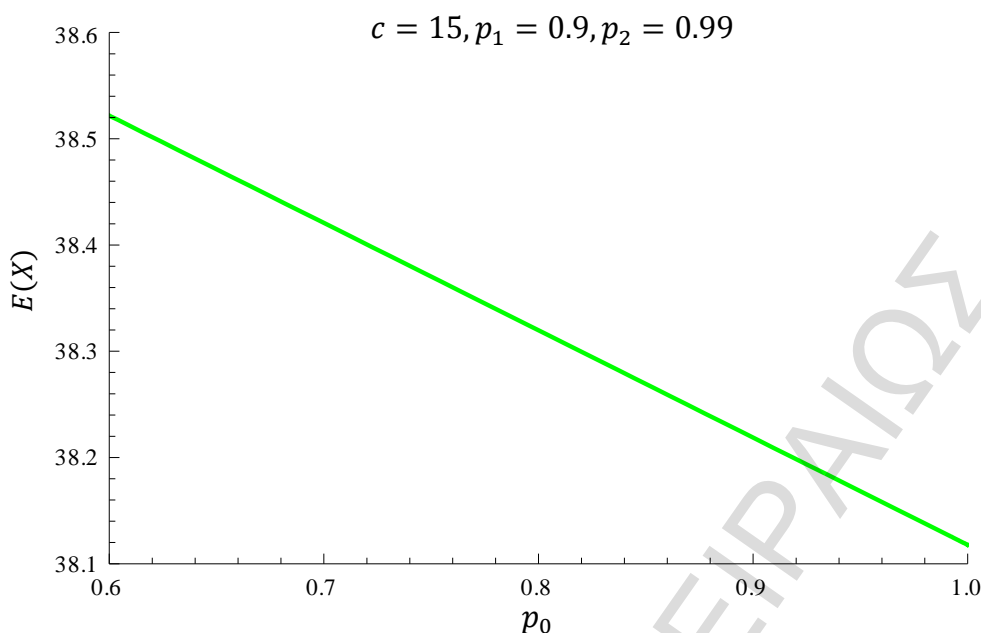


Σχήμα 2.10.1: Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_1 , για $c = 15, p_2 = 0.8$ και $p_0 = 0.95$

Από την άλλη πλευρά, στο Σχήμα 2.10.2 παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από την τιμή που θα πάρει το p_2 , δεν φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά ο αριθμός των δοκιμών εκκίνησης που απαιτούνται για να τελειώσει το τεστ. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση της p_2 είναι αμελητέα. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και στο Σχήμα 2.10.3. Εδώ παρατηρούμε ότι ο μέσος αριθμός δοκιμών εκκίνησης για να τελειώσει το τεστ είναι περίπου 38 όσο και αν μεταβληθεί το p_0 . Συμπερασματικά, από τις παραπάνω παρατηρήσεις καταλήγουμε στο γεγονός ότι η p_1 είναι η μόνη παράμετρος που επηρεάζει σημαντικά το μέσο μήκος του τεστ CS, με Μαρκοβιανή συσχέτιση μεταξύ των δοκιμών εκκίνησης.



Σχήμα 2.10.2: Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_2 , για $c = 15, p_1 = 0.9$ και $p_0 = 0.95$



Σχήμα 2.10.3: Μέσο μήκος του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του p_0 , για $c = 15, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.99$

2.11 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης του τεστ CS όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων

Όπως στην περίπτωση του τεστ CS για ανεξάρτητες δοκιμές υπολογίστηκαν οι εκτιμήτριες των άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, το ίδιο θα κάνουμε στη συνέχεια για την περίπτωση του τεστ CS για συσχετισμένες δοκιμές. Εδώ οι εκτιμήτριες των άγνωστων παραμέτρων θα συμβολίζονται με $\hat{p}_j, j = 0,1,2$.

Θεωρούμε πάλι το τεστ εκκίνησης που γίνεται σε n μονάδες ενός εξαρτήματος. Στη συνέχεια, θεωρούμε $(S_{0i}, S_{1i}, F_{1i}, S_{2i}, F_{2i})$ την πληροφορία που αναφέρεται στο τεστ που γίνεται στην i -οστή μονάδα, όπου i παίρνει την τιμή 1 αν η i -οστή δοκιμή είναι επιτυχία ή την τιμή μηδέν αν είναι αποτυχία. Επιπλέον, S_{0i} είναι ο αριθμός των επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης όταν η πρώτη δοκιμή είναι επιτυχημένη, $S_{1i} (F_{1i})$ είναι ο αριθμός των επιτυχημένων (αποτυχημένων) δοκιμών εκκίνησης όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι επιτυχημένη, και $S_{2i} (F_{2i})$ είναι ο αριθμός των επιτυχημένων (αποτυχημένων) δοκιμών εκκίνησης όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι αποτυχημένη.

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p_0, p_1, p_2) = p_0^{S_0} (1 - p_0)^{F_0} p_1^{S_1} (1 - p_1)^{F_1} p_2^{S_2} (1 - p_2)^{F_2},$$

όπου

$$S_0 = \sum_{i=1}^n S_{0i}, \quad F_0 = n - S_0, \quad S_j = \sum_{i=1}^n S_{ji},$$

$$F_j = \sum_{i=1}^n F_{ji}, \quad \text{για } j = 1, 2.$$

Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας αποτελεί τη λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$\frac{\partial \ln L(p_0, p_1, p_2)}{\partial p_j} = 0, \quad j = 0, 1, 2$$

και καταλήγουμε ότι δίνεται από τον τύπο

$$\hat{p}_j = \frac{S_j}{S_j + F_j}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Ακόμη, η πληροφορία του Fisher είναι ένας διαγώνιος πίνακας 3×3 με στοιχεία της κυριας διαγωνίου ίσα με

$$I(\hat{p}_j) = - \left[\frac{\partial^2 \ln L(p_0, p_1, p_2)}{\partial p_j^2} \right]_{p_j = \hat{p}_j}, \quad j = 0, 1, 2$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$I(\hat{p}_j) = \frac{S_j + F_j}{\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Επομένως, το $100(1 - \alpha)\%$ διαστημα εμπιστοσύνης για την παραμετρο p_j , στο οποίο καταλήγουμε με ανάλογο τρόπο όπως και στην περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες δοκιμές, θα έχει τη μορφή

$$\left(\hat{p}_j - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}}, \hat{p}_j + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}} \right), \quad j = 0, 1, 2.$$

2.12 Τεστ εκκίνησης CSTF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων

Το τεστ εκκίνησης *CSTF* ανήκει στην κατηγορία των τεστ εκκίνησης που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων.

Έστω λοιπόν ένα τεστ εκκίνησης *CSTF* όπου η κατάσταση του εξαρτήματος κάθε χρονική στιγμή παριστάνεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_1, X_2, \dots με διακριτό χώρο καταστάσεων $\{0,1\}$, όπου με την τιμή 1 συμβολίζεται η επιτυχία και με την τιμή 0 η αποτυχία.

Στη συνέχεια, ας συμβολίσουμε με c τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών που απαιτούνται για την αποδοχή της μονάδας, με d των αριθμό των αποτυχιών που οδηγούν σε απόρριψη και με $Z_{c,d}$ την τ.μ. που παριστάνει τις συνολικές δοκιμές μέχρι τον τερματισμό του πειράματος. Ακόμη ας συμβολίσουμε με p_0 την πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη δοκιμή, με p_1 την πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή ήταν επιτυχία και με p_2 την πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή ήταν αποτυχία. Τέλος, ας συμβολίσουμε με T τον χρόνο μέχρι την πρώτη αποτυχία, και

$$S_{c,d} = \begin{cases} 1 & \text{αν η μοναδα γίνει αποδεκτη,} \\ 0 & \text{αν η μοναδα απορριφθει.} \end{cases}$$

Ο Martin (2004), για να υπολογίσει τις ποσότητες που σχετίζονται με το μήκος του τεστ, θεώρησε ότι $p_0 = p_2$. Γενικά ισχύει ότι, η πιθανότητα επιτυχίας p_2 είναι διαφορετική από την p_0 , όμως ο Martin με σκοπό να απλοποιηθούν οι πράξεις, αποφάσισε να χρησιμοποιήσει τις βοηθητικές μεταβλητές X_1^*, X_2^*, \dots , με αρχική πιθανότητα επιτυχίας $P(X_1^* = 1) = p_2$ και ίδιες πιθανότητες μετάβασης με τα αρχικά δεδομένα. Τέλος, σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή ορίζονται ακόμη οι ποσότητες $Z_{c,d}^*$ και $S_{c,d}^*$ που είναι αναλογες των $Z_{c,d}, S_{c,d}$, αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $S_{c,d}^*$ θα γίνει σύμφωνα με τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Με ανάλογο τρόπο θα προκύψουν τα αποτελέσματα και για την $S_{c,d}$.

Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε ότι για $d = 1$, η πιθανότητα του ενδεχόμενου αυτού θα είναι ίση με

$$P[S_{c,1}^* = 1] = p_2 p_1^{c-1}.$$

Διαφορετικά θα θεωρήσουμε ότι για $d = 2, 3, \dots$, ηπιθανότητα του ενδεχόμενου αυτού να είναι ίση με

$$\begin{aligned} P[S_{c,d}^* = 1] &= (1 - p_2)P[S_{c,d-1}^* = 1] + \sum_{t=2}^c \{P[S_{c,d-1}^* = 1]p_2p_1^{t-2}(1 - p_1)\} + p_2p_1^{c-1} = \\ &= (1 - p_2p_1^{c-1})P[S_{c,d-1}^* = 1] + P[S_{c,1}^* = 1]. \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

Επαναλαμβάνοντας τον τύπο (2.12.1) για $d = 2, 3, \dots$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P[S_{c,d}^* = 1] &= P[S_{c,1}^* = 1] \sum_{r=0}^{d-1} (1 - p_2p_1^{c-1})^r = p_2p_1^{c-1} \frac{1 - (1 - p_2p_1^{c-1})^d}{1 - (1 - p_2p_1^{c-1})} = \\ &= 1 - (1 - p_2p_1^{c-1})^d. \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

Τώρα, αν θέσουμε $p_2 = p_0$, τότε από τους τύπους (2.12.1) και (2.12.2) θα προκύψουν οι παρακάτω αντίστοιχες πιθανότητες αποδοχής

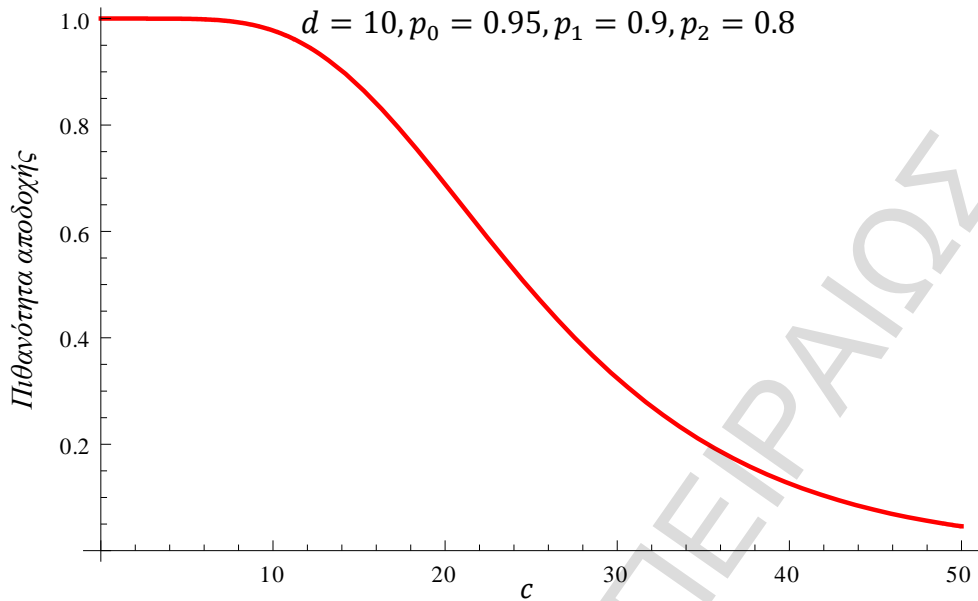
$$P[S_{c,1} = 1] = p_2p_1^{c-1}, \text{ για } d = 1$$

και

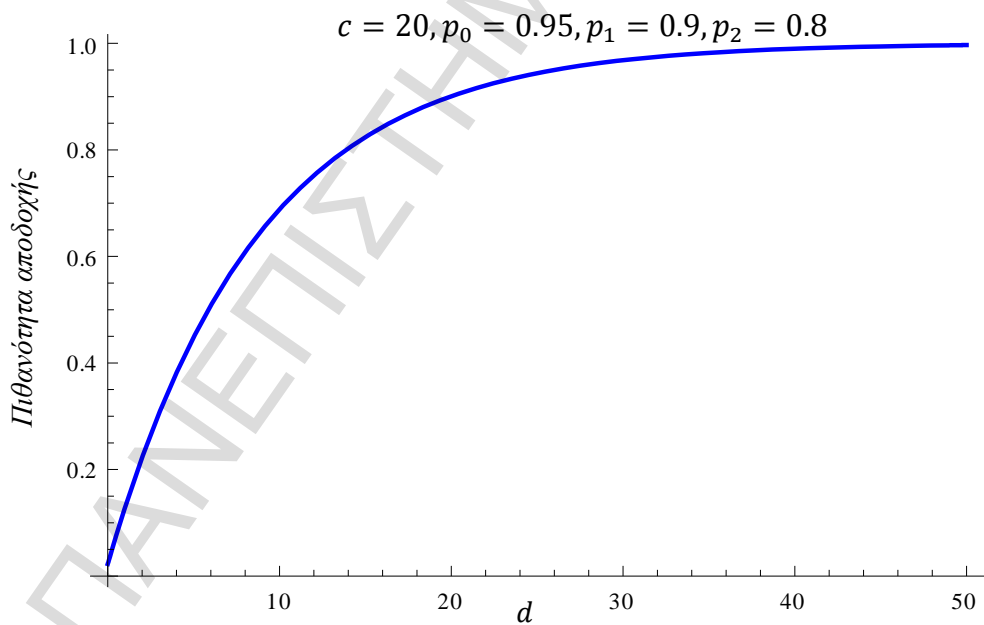
$$P[S_{c,d} = 1] = (1 - p_2p_1^{c-1})P[S_{c,d-1}^* = 1] + p_0p_1^{c-1}, \text{ για } d = 2, 3, \dots$$

Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε τον τύπο (2.12.2), προκύπτει τελικά η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας

$$P[S_{c,d} = 1] = 1 - (1 - p_0p_1^{c-1})(1 - p_2p_1^{c-1})^{d-1}, \text{ για } d = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12.3)$$



Σχήμα 2.12.1: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* συναρτήσει του c , για $d = 10$, $p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$



Σχήμα 2.12.2: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* συναρτήσει του d , για $c = 20, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$

Στο Σχήμα 2.12.1 φαίνεται γραφικά ότι η πιθανότητα αποδοχής είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς c και καθώς το $c \rightarrow \infty$, η πιθανότητα αποδοχής τείνει στο μηδέν. Από την άλλη πλευρά στο Σχήμα 2.12.2 φαίνεται γραφικά ότι η πιθανότητα αποδοχής είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς d και καθώς το $d \rightarrow \infty$, η πιθανότητα αποδοχής τείνει στο 1. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο καθώς όσο περισσότερες αποτυχίες απαιτούνται για να απορριφθεί ένα εξάρτημα, τόσο πιο πιθανό είναι οι απαιτούμενες συνεχόμενες επιτυχίες να συμβούν πριν από αυτές. Επίσης, αν ο αριθμός των απαιτούμενων συνεχόμενων επιτυχιών είναι σταθερός (όπως για παράδειγμα στο Σχήμα 2.12.2 όπου έχουμε $c = 20$), τότε η πιθανότητα αποδοχής αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των απαιτούμενων αποτυχιών. Τέλος, από την παρατήρηση αυτή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όσο το d αυξάνεται, το τεστ εκκίνησης $CSTF$ για (c, d) γίνεται ισοδύναμο με το απλό τεστ εκκίνησης CS με το ίδιο c .

2.13 Συνάρτηση κατανομής και μέσο μήκος του τεστ $CSTF$ όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων

Για να υπολογιστεί η κατανομή του μήκους του τεστ, δηλαδή της μεταβλητής $Z_{c,d}$, θα πρέπει πρώτα να βρεθεί η κατανομή της $Z_{c,d}^*$. Αρχικά ας θεωρήσουμε ότι $P[Z_{1,1}^* = 1] = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, για $c > 1$ προκύπτει ότι (βλ. Martin (2003))

$$P[Z_{c,1}^* = z] = \begin{cases} 1 - p_2 & \text{αν } z = 1 \\ p_2 p_1^{z-2} (1 - p_1) & \text{αν } z = 2, 3, \dots, c - 1. \\ p_2 p_1^{c-2} & \text{αν } z = c \end{cases}$$

Στη συνέχεια, για την περίπτωση $d = 2, 3, \dots$, με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος μέχρι την πρώτη αποτυχία είναι T , είναι φανερό ότι ο αριθμός των δοκιμών μέχρι να τελειώσει το τεστ θα είναι $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$. Η αντίστοιχη πιθανότητα αποδοχής θα ικανοποιεί τους αναδρομικούς τύπους

$$P[Z_{c,d}^* = z] = (1 - p_2)P[Z_{c,d-1}^* = z - 1] + \sum_{t=2}^{\min(c, z-1)} \{p_2 p_1^{t-2} (1 - p_1) P[Z_{c,d-1}^* = z - t]\} + I_z(c) p_2 p_1^{c-1}, \quad (2.13.1)$$

όπου $I_z(c)$ είναι μια δείκτρια συνάρτηση με

$$I_z(c) = \begin{cases} 1 & \text{αν } z = c, \\ 0 & \text{αν } z \neq c. \end{cases}$$

Τώρα, για τις αρχικές μεταβλητές $Z_{c,d}$ θα έχουμε αντίστοιχα ότι $P[Z_{1,1} = 1] = 1$, ενώ για την περίπτωση όπου $c > 1$ καταλήγουμε στη συνάρτηση

$$P[Z_{c,1} = z] = \begin{cases} 1 - p_0, & \text{αν } z = 1 \\ p_0 p_1^{z-2} (1 - p_1), & \text{αν } z = 2, 3, \dots, c-1 \\ p_0 p_1^{c-2}, & \text{αν } z = c. \end{cases} \quad (2.13.2)$$

Ακόμη, για την περίπτωση $d = 2, 3, \dots$ και $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$ η αντίστοιχη πιθανότητα αποδοχής θα ικανοποιεί τους αναδρομικούς τύπους

$$\begin{aligned} P[Z_{c,d} = z] &= (1 - p_0)P[Z_{c,d-1}^* = z - 1] + \\ &+ \sum_{t=2}^{\min(c,z-1)} \{p_0 p_1^{t-2} (1 - p_1) P[Z_{c,d-1}^* = z - t]\} + I_z(c) p_0 p_1^{c-1}. \end{aligned} \quad (2.13.3)$$

Στη συνέχεια, αν αντικαταστήσουμε τους τύπους (2.13.1) και (2.13.2) στον τύπο (2.13.3) θα προκύψει η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *CSTF*.

Ωστόσο, αν αθροίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η επιθυμητή κατανομή του μήκους του τεστ *CSTF*, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$R(y) = \sum_{z=1}^y P[Z_{c,d} = z].$$

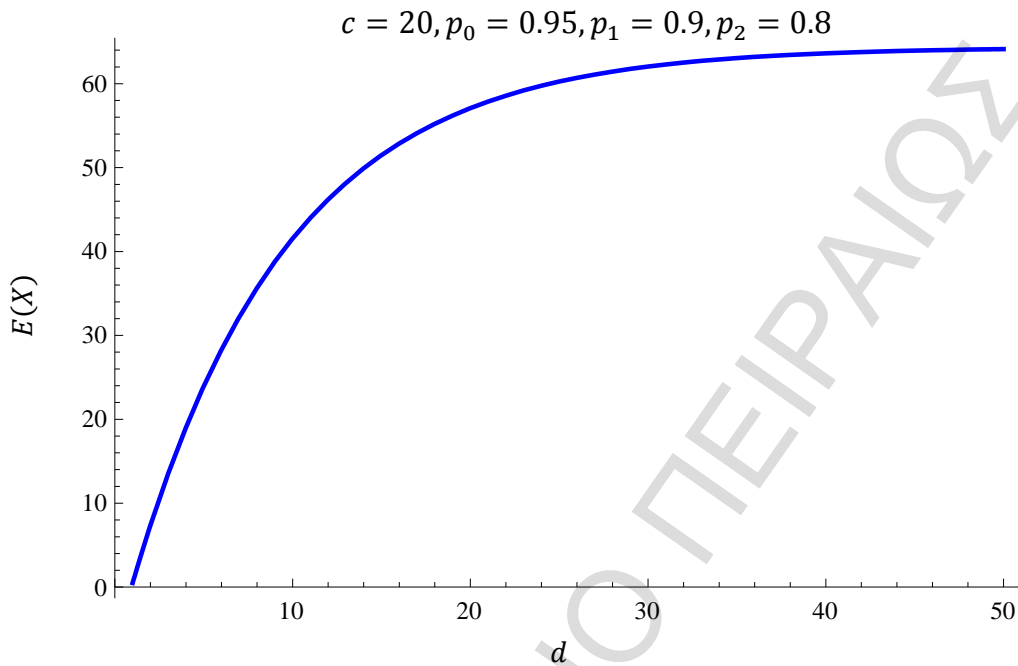
Ακόμη, το μέσο μήκος που απαιτείται για τον τερματισμό του τεστ *CSTF* δίνεται από τον τύπο (βλ. Martin (2003))

$$\begin{aligned} E(Z_{c,d}) &= \frac{1 - p_1 + p_0(1 - p_1^{c-1})}{1 + p_1} + \\ &+ \frac{(1 - p_0 p_1^{c-1})[1 - p_1 + p_2(1 - p_1^{c-1})][1 - (1 - p_2 p_1^{c-1})^{d-1}]}{p_2(1 - p_1)p_1^{c-1}}. \end{aligned} \quad (2.13.4)$$

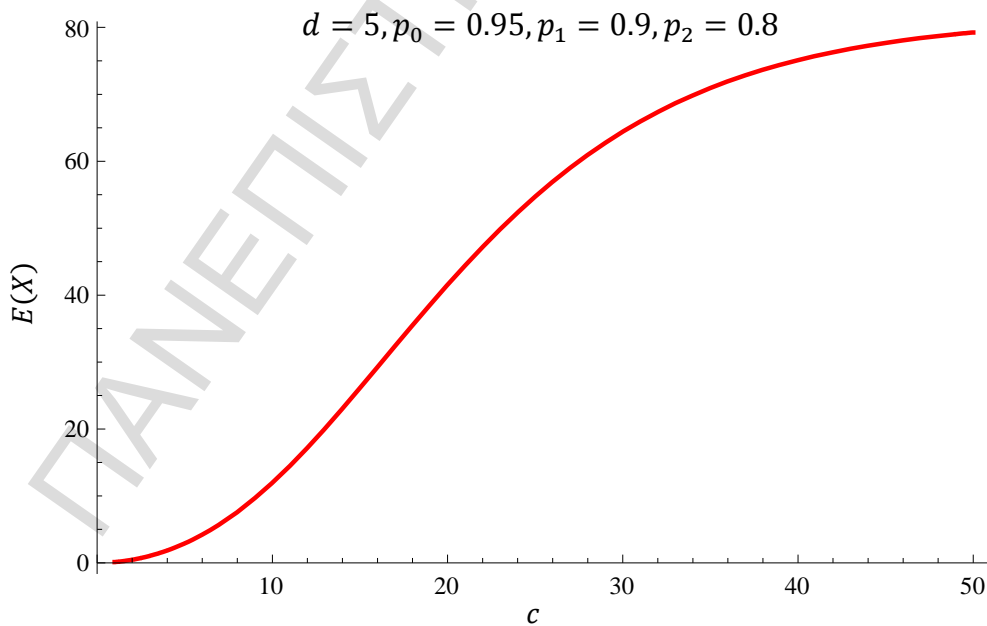
Όταν $d \rightarrow \infty$ η σχέση (2.13.4) παίρνει τη μορφή

$$1 - \frac{p_0}{p_2} + \frac{1}{p_2(1 - p_1)p_1^{c-1}} \{1 - p_1 + p_2 - p_2 p_1^{c-1}\},$$

η οποία αντιστοιχεί στο μέσο μήκος ενός απλού Μαρκοβιανού τεστ εκκίνησης CS (Viveros και Balakrishnan (1993)).



Σχήμα 2.13.1: Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* συναρτήσει του d για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $c = 20, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$



Σχήμα 2.13.2: Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* συναρτήσει του c για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $d = 5, p_0 = 0.95, p_1 = 0.9$ και $p_2 = 0.8$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα Σχήματα 2.13.1 και 2.13.2 για το μέσο μήκος του τεστ *CSTF* με Μαρκοβιανή εξάρτηση, είναι φανερό ότι είναι τα ίδια με εκείνα που προκύπτουν για το μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης *CSTF* με ανεξάρτητες δοκιμές. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι το μοντέλο με τις ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές αποτελεί μια ειδική περίπτωση του Μαρκοβιανού για $p = p_0 = p_1 = p_2$.

2.14 Εναλλακτικά τεστ εκκίνησης

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν συνοπτικά τρία εναλλακτικά τεστ εκκίνησης που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι και στα τρία τεστ εκκίνησης που ακολουθούν οι δοκιμές εκκίνησης μεταξύ των μονάδων θεωρούνται ανεξάρτητες με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p .

Το πρώτο είναι το τεστ εκκίνησης για c συνολικές επιτυχίες και d συνολικές αποτυχίες. Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνολικές επιτυχίες πριν από d συνολικές αποτυχίες ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από c συνολικές επιτυχίες. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *TSTF* (Total Successes Total Failures). Επίσης, σε αυτό το τεστ Οι πιθανότητες αποδοχής και απόρριψης μιας μονάδας, αντίστοιχα, θα έχουν τη μορφή

$$P(\text{αποδοχή}) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{c+i-1}{c-1} p^c (1-p)^i,$$

$$P(\text{απόρριψη}) = \sum_{j=0}^{c-1} \binom{d+j-1}{d-1} p^j (1-p)^d.$$

Το επόμενο είναι το τεστ εκκίνησης για c συνεχόμενες επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες. Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες πριν από d συνεχόμενες αποτυχίες ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνεχόμενες αποτυχίες πριν από c συνεχόμενες επιτυχίες. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *CSCF* (Consecutive Successes Consecutive Failures). Είναι φανερό ότι το συγκεκριμένο τεστ είναι πιο αυστηρό από το *CSTF* τεστ εκκίνησης καθώς απαιτεί εκτός από τις επιτυχημένες

εκκινήσεις, να είναι συνεχόμενες και οι αποτυχημένες εκκινήσεις. Οι πιθανότητες αποδοχής και απόρριψης, αντίστοιχα, θα έχουν τη μορφή

$$P(\text{αποδοχή}) = \frac{p^{c-1}(1 - (1 - p)^d)}{1 - (1 - p^{c-1})(1 - (1 - p)^{d-1})}$$

$$P(\text{απόρριψη}) = \frac{(1 - p)^{d-1}(1 - p^c)}{1 - (1 - p^{c-1})(1 - (1 - p)^{d-1})}$$

Το τελευταίο είναι το τεστ εκκίνησης για c συνολικές επιτυχίες και d συνεχόμενες αποτυχίες. Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν c συνολικές επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από d συνεχόμενες αποτυχημένες εκκινήσεις ενώ απορρίπτεται αν συμβούν d συνεχόμενες αποτυχημένες εκκινήσεις πριν από c συνολικές επιτυχημένες εκκινήσεις. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία *TSCF* (Total Successes Consecutive Failures). Οι πιθανότητες αποδοχής και απόρριψης, αντίστοιχα, θα έχουν τη μορφή

$$P(\text{αποδοχή}) = (1 - (1 - p)^d)^c,$$

$$P(\text{απόρριψη}) = 1 - (1 - (1 - p)^d)^c.$$

Οι αποδείξεις των πιθανοτήτων (αποδοχής και απόρριψης) των παραπάνω τριών τεστ εκκίνησης παρουσιάζονται αναλυτικά στην εργασία των Smith και Griffith (2005).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τεστ Εκκίνησης TSCSTF και TSCSTFCF

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν διάφορες κλασικές τεχνικές των τεστ εκκίνησης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν δυο νέες τεχνικές, οι οποίες βασίζονται στη διαδικασία του τεστ εκκίνησης *CSTF* (Consecutive Successes Total Failures). Η πρώτη τεχνική ονομάζεται *TSCSTF* (Total Successes Consecutive Successes Total Failures), ενώ η δεύτερη ονομάζεται *TSCSTFCF* (Total Successes Consecutive Successes Total Failures Consecutive Failures). Οι δυο νέες αυτές τεχνικές, αποτελούν βελτιώσεις της διαδικασίας του τεστ εκκίνησης *CSTF*.

Σημαντικό πλεονέκτημα για τα τεστ *TSCSTF* και *TSCSTFCF* αποτελεί το γεγονός ότι, σύμφωνα με αυτά που θα παρουσιαστούν σε αυτό το κεφάλαιο, μια σωστή επιλογή παραμέτρων (π.χ. ο αριθμός των επιτυχιών που απαιτούνται για την αποδοχή ενός εξαρτήματος, ο συνολικός αριθμός των αποτυχιών που προκαλεί την απόρριψη ενός εξαρτήματος) μπορεί να δώσει έναν μικρότερο χρόνο αναμονής από εκείνον της σχετικής διαδικασίας του τεστ *CSTF*.

Υπάρχουν μια σειρά από διαδικασίες για να αποφασιστεί εάν το σύνολο των δοκιμών είναι επιτυχές ή όχι, και επομένως, αν η μονάδα (εξοπλισμός) έγινε αποδεκτή ή απορρίφθηκε. Οι διαδικασίες αυτές συνδέονται στενά με τη θεωρία των ροών, και με την μοντελοποίηση των διαδοχικών *k-από-τα-n* συστημάτων (Kuo και Zuo (2003), και Chao, Fu και Koutras (1995)). Μια ροή είναι ένα σύνολο είτε συνεχόμενων επιτυχιών, είτε συνεχόμενων αποτυχιών. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορα κριτήρια λήψης απόφασης για την επιτυχία ή την αποτυχία ενός συνόλου από τεστ εκκίνησης που βασίζονται σε ροές. Τα κριτήρια αυτά συνεπάγονται την αποδοχή ή την απόρριψη της εν λόγω μονάδας.

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορα τεστ εκκίνησης που σχετίζονται με τις ροές. Η απλούστερη και παλαιότερη διαδικασία απόφασης αποδοχής ενός εξοπλισμού είναι η τεχνική του τεστ *CS* για συνεχόμενες επιτυχίες, η οποία παρουσιάστηκε αρχικά από τους Hahn και Gage (1983), και αργότερα από τους Viveros και Balakrishnan (1993). Στη συνέχεια, μια πιο βελτιωμένη διαδικασία προϋποθέτει ότι η αποδοχή του εξοπλισμού γίνεται όταν υπάρχει μια ροή από συνεχόμενες επιτυχίες πριν από την πραγματοποίηση ενός συγκεκριμένου αριθμού συνολικών αποτυχιών, διαφορετικά ο εξοπλισμός απορρίπτεται. Αυτό είναι το λεγόμενο τεστ εκκίνησης *CSTF*, το οποίο έχει προταθεί από τους Balakrishnan και Chan (2000), Smith και Griffith (2005), Martin (2004 και 2008), Eryilmaz και Chakraborti (2008), και άλλους.

Στη συνέχεια εξετάστηκαν οι στατιστικές ιδιότητες των διάφορων τεστ εκκίνησης. Στην αρχή θεωρήθηκε ότι υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των τεστ εκκίνησης. Αργότερα έγινε η επέκτασή τους σε Μαρκοβιανή εξάρτηση πρώτης (και γενικότερης) τάξης από τον Marvin (2004) και τους Smith και Griffith (2005).

Αργότερα, παρουσιάστηκε μια περαιτέρω γενίκευση των προηγούμενων τεχνικών από τον Gera (2010), η οποία είναι η τεχνική του τεστ εκκίνησης *TSCSTF*. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική ο εξοπλισμός γίνεται δεκτός εάν υπάρχει, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών επιτυχιών, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών. Σε αντίθετη περίπτωση, ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχιών, είτε των συνεχόμενων επιτυχιών. Το κίνητρο για την εισαγωγή της νέας διαδικασίας έγκειται στη δυνατότητα της μείωσης του αριθμού των δοκιμών που απαιτούνται για τη λήψη απόφασης, το οποίο είναι επωφελές τόσο πρακτικά όσο και οικονομικά.

Με τον όρο πρόβλημα βελτιστοποίησης στη θεωρία των τεστ εκκίνησης εννοούμε την εξέταση του μήκους του τεστ (αντικειμενική συνάρτηση) την οποία ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε υπό τους περιορισμούς καθορισμένων παραμέτρων για το επίπεδο εμπιστοσύνης. Το μοντέλο αυτό φαίνεται ότι οδηγεί σε μια σημαντική μείωση του αναμενόμενου αριθμού των απαιτούμενων δοκιμών, καθώς επίσης και σε χαμηλότερες τιμές της διακύμανσης του αναμενόμενου αριθμού των απαιτούμενων δοκιμών σε σχέση με εκείνες του τεστ εκκίνησης *CSTF*, υποθέτοντας ότι υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των δοκιμών και ότι οι πιθανότητες επιτυχίας για κάθε δοκιμή είναι όλες ίσες.

Μετά από ένα χρόνο, παρουσιάστηκε πάλι από τον Gera (2011) μια γενίκευση των προηγούμενων τεχνικών, η τεχνική του τεστ εκκίνησης *TSCSTFCF*. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν υπάρχει είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών επιτυχιών, είτε μια ροή συνεχόμενων επιτυχιών πριν από έναν καθορισμένο αριθμό συνολικών αποτυχιών, και πριν από κάθε ροή συνεχόμενων αποτυχιών. Σε αντίθετη περίπτωση, ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν υπάρχει είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών, είτε μια ροή συνεχόμενων αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχιών, είτε των συνεχόμενων επιτυχιών. Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι και σε αυτή την τεχνική υπάρχει η υπόθεση ανεξαρτησίας μεταξύ των δοκιμών, και οι πιθανότητες επιτυχίας για κάθε δοκιμή είναι όλες ίσες.

3.1 Τεστ εκκίνησης TSCSTF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του

Η παρουσίαση αυτής της διαδικασίας είναι παρόμοια με εκείνη της τεχνικής του τεστ εκκίνησης *CSTF*, όπως παρουσιάστηκε από τους Eryilmaz και Chakraborti (2008). Έτσι, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η υπό δοκιμή μονάδα γίνεται δεκτή εάν υπάρχει, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων, είτε ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών επιτυχημένων εκκινήσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, η μονάδα υπό δοκιμή απορρίπτεται εάν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχημένων εκκινήσεων, είτε των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων.

Για την παρουσίαση της συνάρτησης πιθανότητας του μήκους του τεστ, όπως δόθηκε από τον Gera (2010), θεωρούμε n ίδιες μονάδες εξοπλισμού που υποβάλλονται σε ανεξάρτητες εκκινήσεις και χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- X : ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ (αποδοχή ή απόρριψη του εξαρτήματος)
- p : η πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης σε κάθε δοκιμή,
- c_s : ο απαιτούμενος αριθμός συνολικών επιτυχιών για να έχουμε αποδοχή του εξοπλισμού,
- c_{cs} : ο απαιτούμενος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών για να έχουμε αποδοχή του εξοπλισμού,

- c_f : ο απαιτούμενος αριθμός συνολικών αποτυχιών για να έχουμε απόρριψη του εξοπλισμού,
 W_{c_s} : ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι την πραγματοποίηση c_s επιτυχιών,
 $W_{c_{cs}}$: ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι την πραγματοποίηση c_{cs} επιτυχιών,
 W_{c_f} : ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι την πραγματοποίηση c_f αποτυχιών,
 L_{xs} : το μήκος της μεγαλύτερης ροής από επιτυχίες σε x τεστ εκκίνησης,
 T_{xs} : ο αριθμός των επιτυχημένων εκκινήσεων σε x τεστ εκκίνησης και
 T_{xf} : ο αριθμός των αποτυχημένων εκκινήσεων σε x τεστ εκκίνησης.

Ο συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ δίνεται από την τ.μ. X που ορίζεται ως εξής

$$X = \min(W_{c_s}, W_{c_{cs}}, W_{c_f}).$$

Οι χρόνοι αναμονής για τις τυχαίες μεταβλητές $W_{c_s}, W_{c_{cs}}, W_{c_f}$ είναι μεγαλύτεροι από ένα συγκεκριμένο αριθμό x της τυχαίας μεταβλητής X αν το μήκος της μεγαλύτερης ροής από επιτυχίες σε x τεστ εκκίνησης είναι μικρότερο από την προκαθορισμένη τιμή c_{cs} , αν ο συνολικός αριθμός επιτυχιών σε x τεστ εκκίνησης είναι μικρότερος από την προκαθορισμένη τιμή c_s , και αν ο συνολικός αριθμός αποτυχιών σε x τεστ εκκίνησης είναι μικρότερος από την προκαθορισμένη τιμή c_f . Έτσι, η συνάρτηση επιβίωσης για την τ.μ. X θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} P\{X > x\} &= P\{W_{c_s} > x, W_{c_{cs}} > x, W_{c_f} > x\} = \\ &= P\{L_{xs} < c_{cs}, T_{xs} < c_s, T_{xf} < c_f\}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Επειδή $T_{xs} + T_{xf} = x$, η σχέση (3.1.1) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$P\{X > x\} = P\{L_{xs} < c_{cs}, x - c_f < T_{xs} < c_s\}.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας μπορούμε να γράψουμε

$$P\{X > x\} = \sum_{i=x-c_f+1}^{\min(c_s-1, x)} P\{L_{xs} < c_{cs}, T_{xs} = i\} =$$

$$= \sum_{i=x-c_f+1}^{\min(c_s-1, x)} P\{L_{xs} < c_{cs} | T_{xs} = i\} P\{T_{xs} = i\}. \quad (3.1.2)$$

Για τον υπολογισμό των επιμέρους όρων του αθροίσματος, θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος

$$P\{L_x < c_{cs} | T_{xs} = i\} = \binom{x}{i}^{-1} N(i, c_{cs}, x), \quad (3.1.3)$$

όπου η συνάρτηση $N(i, c_{cs}, x)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τρόπων για να γίνουν δεκτές i επιτυχημένες δοκιμές μέσα σε ένα σύνολο x δοκιμών ώστε ο αριθμός c_{cs} ή περισσότερες επιτυχημένες δοκιμές να μην είναι συνεχόμενες. Η συνάρτηση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$N(i, c_{cs}, x) = \sum_{j=0}^{\min(\lceil i/c_{cs} \rceil, x-i+1)} (-1)^j \binom{x-i+1}{j} \binom{x-j \cdot c_{cs}}{x-i}. \quad (3.1.4)$$

Η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς i επιτυχίες ανάμεσα στα x τεστ δίνεται από τον τύπο

$$P\{T_{xs} = i\} = \binom{x}{i} p^i (1-p)^{x-i}. \quad (3.1.5)$$

Σε αυτό το σημείο, αν αντικαταστήσουμε τους τύπους (3.1.3) και (3.1.5) στον τύπο (3.1.2), η τελική έκφραση για τη συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X θα έχει τη μορφή

$$P\{X > x\} = \sum_{i=x-c_f+1}^{\min(c_s-1, x)} N(i, c_{cs}, x) p^i (1-p)^{x-i}. \quad (3.1.6)$$

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X θα έχει τη μορφή

$$P\{X \leq x\} = 1 - \sum_{i=x-c_f+1}^{\min(c_s-1, x)} N(i, c_{cs}, x) p^i (1-p)^{x-i}.$$

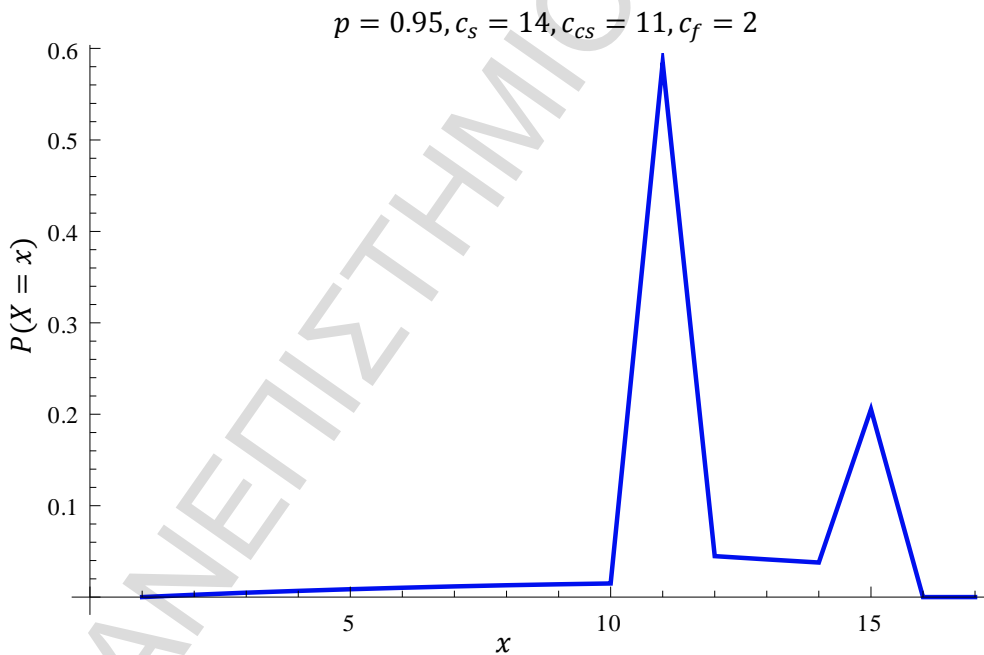
Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X \leq x-1\}$$

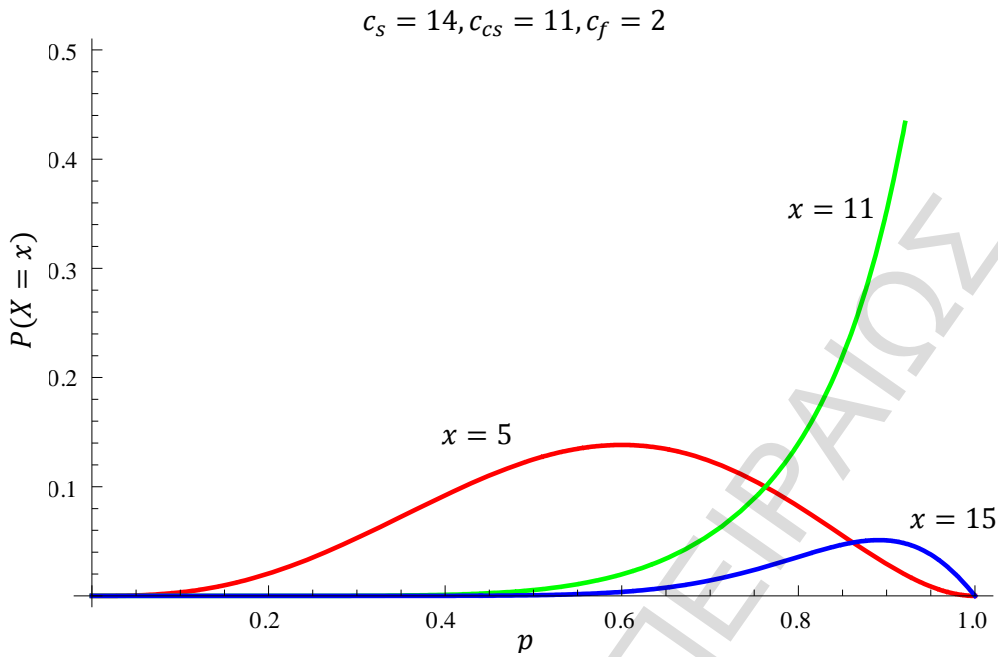
με τον περιορισμό ότι πρέπει $c_s > c_{cs}$. Σε αντίθετη περίπτωση, η τεχνική αυτή μετασχηματίζεται στην απλούστερη τεχνική του τεστ εκκίνησης $TSTF$ όπου οι c_s επιτυχίες πρέπει να εμφανιστούν πριν την πραγματοποίηση των c_f αποτυχιών.

Παρακάτω δίνεται στο Σχήμα 3.1.1 γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης *TSCSTF* για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Παρατηρούμε ότι η κύρια κορυφή εμφανίζεται όταν $x = 11$ λόγω του ότι $c_{cs} = 11$. Επίσης, η δεύτερη μεγαλύτερη κορυφή παρατηρείται όταν $x = 14$ επειδή $c_s = 14$. Ακόμη, είναι φανερό ότι, $P(X > 16) = 0$ λόγω των τιμών των c_s και c_f .

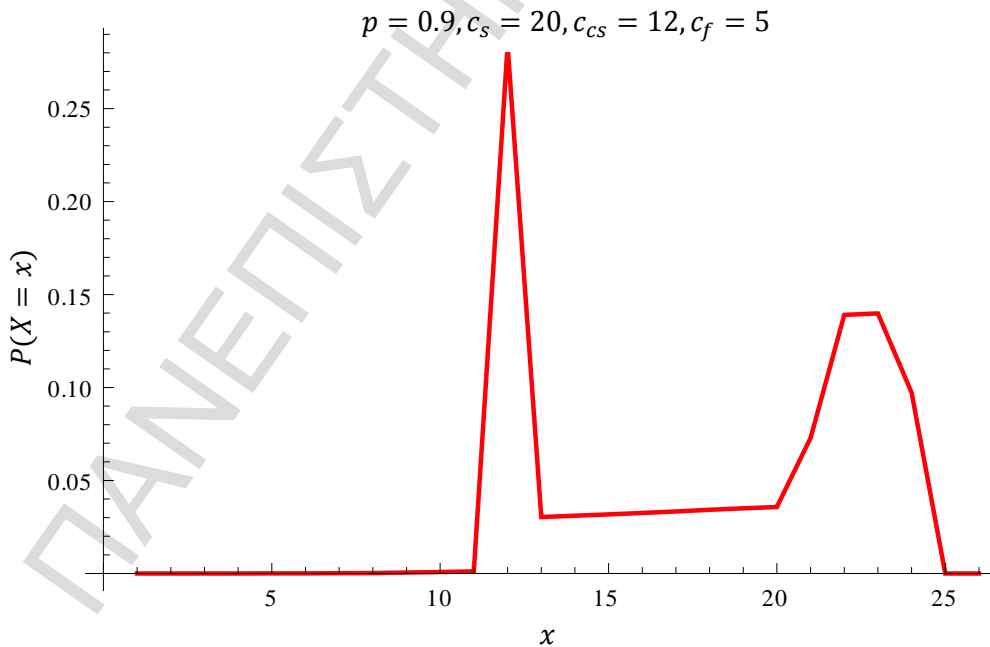
Στη συνέχεια, στο Σχήμα 3.1.2 φαίνεται γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης *TSCSTF* συναρτήσει του p για $x = 5, 11$ και 15 , $c_s = 14$, $c_{cs} = 11$ και $c_f = 2$. Για $x = 5$ παρατηρούμε ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ παίρνει την μεγαλύτερη τιμή του για $p = 0.6$. Ακόμη, για $x = 11$ φαίνεται ότι όσο αυξάνεται η τιμή του p (για $p > 0.5$), αυξάνεται και ο χρόνος αναμονής του τεστ. Τέλος, για $x = 15$ παρατηρούμε ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές του για πολύ μεγάλες τιμές του p , όπου και εκεί ο χρόνος αναμονής είναι πολύ μικρός.



Σχήμα 3.1.1: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTF* (χρόνος αναμονής) για $p = 0.95, c_s = 14, c_{cs} = 11$ και $c_f = 2$



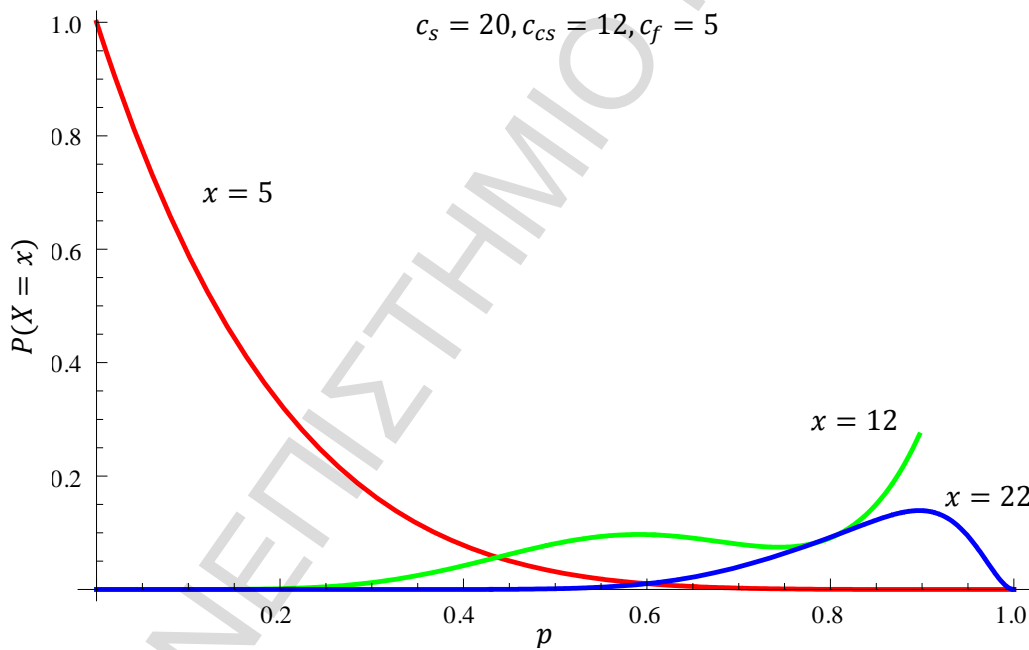
Σχήμα 3.1.2: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTF* (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 5, 11, 15, c_s = 14, c_{cs} = 11$ και $c_f = 2$



Σχήμα 3.1.3: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTF* (χρόνος αναμονής) για $p = 0.9, c_s = 20, c_{cs} = 12$ και $c_f = 5$

Με τον ίδιο τρόπο παρατηρούμε ότι στο Σχήμα 3.1.3 η κύρια κορυφή εμφανίζεται όταν $x = 12$ λόγω του ότι το $c_{cs} = 12$. Επίσης, η δεύτερη μεγαλύτερη κορυφή παρατηρείται όταν $x \sim 22$ επειδή $c_s = 20$. Ακόμη, είναι φανερό ότι, $P(X > 25) = 0$ λόγω των τιμών των c_s και c_f .

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 3.1.4 φαίνεται γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης *TSCSTF* συναρτήσει του p για $x = 5, 12$ και 22 , $c_s = 20$, $c_{cs} = 12$ και $c_f = 5$. Για $x = 5$ παρατηρούμε ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς p . Ακόμη, για $x = 12$ φαίνεται ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ αυξάνεται αρκετά για πολύ μεγάλες τιμές του p . Τέλος, για $x = 22$ παρατηρούμε ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές του για πολύ μεγάλες τιμές του p , όπου και εκεί ο χρόνος αναμονής είναι πολύ μικρός.



Σχήμα 3.1.4: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTF* (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 5, 12, 22$, $c_s = 20$, $c_{cs} = 12$ και $c_f = 5$

3.2 Πιθανότητα αποδοχής του τεστ TSCSTF

Εκτός από τη συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ $TSCSTF$, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η πιθανότητα αποδοχής της υπό δοκιμή μονάδας. Εδώ, η πιθανότητα αποδοχής είναι η πιθανότητα οι χρόνοι αναμονής για τις πρώτες c_s επιτυχίες ή για την ροή των c_{cs} συνεχόμενων επιτυχιών, να είναι μικρότεροι από τον χρόνο αναμονής για την εμφάνιση c_f αποτυχιών. Δηλαδή,

$$P_a = P \left\{ \min(W_{c_{cs}}, W_{c_s}) < W_{c_f} \right\}$$

Υπάρχουν πολλά πιθανά μήκη ενός τεστ για την πραγματοποίηση τουλάχιστον c_f αποτυχιών. Σε κάθε περίπτωση, η τελευταία δοκιμή είναι αποτυχημένη, έτσι ώστε να εμφανίζονται για πρώτη φορά τουλάχιστον r αποτυχίες ($r \geq c_f$). Σε κάθε περίπτωση, είτε το μέγιστο μήκος ενός συνόλου από συνεχόμενες επιτυχίες (L_x) είναι μεγαλύτερο από την καθορισμένη c_{cs} τιμή, είτε ο συνολικός αριθμός επιτυχιών (T_s) πρέπει να είναι μεγαλύτερος από την καθορισμένη c_s τιμή, έτσι ώστε η μονάδα να γίνει αποδεκτή. Έτσι, για την πιθανότητα αποδοχής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_a &= \sum_{r=c_f}^{\infty} P \left\{ \min(W_{c_{cs}}, W_{c_s}) < r \mid W_{c_f} = r \right\} \cdot P \left\{ W_{c_f} = r \right\} = \\ &= \sum_{r=c_f}^{\infty} P \left\{ L_{r-1} \geq c_{cs} \text{ ή } T_{r-1_s} \geq c_{cs} \mid Z_r = 0, T_{r-1_f} = c_f - 1 \right\} \cdot P \left\{ W_{c_f} = r \right\} \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

όπου Z_r είναι το αποτέλεσμα του r -οστού τεστ εκκίνησης (το αποτέλεσμα συμβολίζεται με 1 για την αποτυχία και με μηδέν για την αποτυχία). Ακόμη, η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας υπό τη συνθήκη $T_{r-1_s} = r - c_f$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} P \left\{ L_{r-1} \geq c_{cs} \text{ ή } T_{r-1_s} \geq c_{cs} \mid T_{r-1_s} = r - c_f \right\} &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq r - c_f < c_{cs} < c_s \\ P \left\{ L_{r-1} \geq c_{cs} \mid T_{r-1_s} = r - c_f \right\} & \text{αν } c_{cs} \leq r - c_f < c_s \\ 1 & \text{αν } c_s \leq r - c_f \end{cases} \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα θα βοηθήσει στον υπολογισμό των όρων στο άθροισμα (3.1.6). Όπως και στην Ενότητα 3.1, έτσι και εδώ, με χρήση της σχέσης (3.1.3) για τον όρο της

δεσμευμένης πιθανότητας που δίνεται στη δεξιά πλευρά της σχέσης (3.2.1), και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.1.5), έχουμε ότι

$$P_a = \sum_{r=c_f+c_{cs}}^{\infty} \left\{ \left[\binom{r-1}{r-c_f}^{-1} \cdot N(r-c_f, c_{cs}, r-1) \right] \cdot (1-u[r-(c_f+c_s)]) + u[r-(c_f+c_s)] \right\} \cdot P\{W_{c_f} = r\}.$$

Τελικά, μετά από υπολογισμούς, καταλήγουμε ότι η πιθανότητα αποδοχής της υπό δοκιμή μονάδας θα έχει τη μορφή

$$P_a = \sum_{i=c_{cs}+c_f}^{c_s+c_f-1} \left[\binom{i-1}{i-c_f}^{-1} \cdot N(i-c_f, c_{cs}, i-1) \right] \cdot \binom{i-1}{c_f-1} p^{i-c_f} (1-p)^{c_f} + \sum_{i=c_f+c_{cs}}^{\infty} \binom{i-1}{c_f-1} p^{i-c_f} (1-p)^{c_f}.$$

3.3 Τεστ εκκίνησης TSCSTFCF και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του

Η παρουσίαση αυτής της διαδικασίας είναι παρόμοια με εκείνη της τεχνικής του τεστ εκκίνησης *CSTF*, όπως παρουσιάστηκε από τους Eryilmaz και Chakraborti (2008) και της τεχνικής του τεστ εκκίνησης *TSCSTF*, όπως παρουσιάστηκε από τον Gera (2010). Ως εκ τούτου, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, σύμφωνα με την τεχνική που παρουσίασε ο Gera (2011), η υπό δοκιμή μονάδα γίνεται αποδεκτή εάν υπάρχει είτε μια ροή συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων, είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών επιτυχημένων εκκινήσεων, πριν από έναν καθορισμένο αριθμό συνολικών αποτυχημένων εκκινήσεων, και πριν από κάθε ροή συνεχόμενων αποτυχημένων εκκινήσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν υπάρχει είτε ένας καθορισμένος αριθμός συνολικών αποτυχιών, είτε μια ροή συνεχόμενων αποτυχιών πριν από την πραγματοποίηση είτε των συνολικών επιτυχημένων εκκινήσεων, είτε των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων. Η

διαδικασία τερματίζεται μετά την ικανοποίηση του παραπάνω κριτηρίου είτε υπάρξει αποδοχή της υπό δοκιμή μονάδας, είτε απόρριψη.

Για την παρουσίαση της συνάρτησης πιθανότητας του μήκους του τεστ, όπως δόθηκε από τον Gera (2011), θεωρούμε n ίδιες μονάδες εξοπλισμού που υποβάλλονται σε ανεξάρτητες εκκινήσεις. Θέτουμε με X την τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον συνολικό αριθμό δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ (αποδοχή ή απόρριψη του εξαρτήματος), L_{xs} το μήκος της μεγαλύτερης ροής από επιτυχίες μέσα από x τεστ εκκίνησης, L_{xf} το μήκος της μεγαλύτερης ροής από αποτυχίες μέσα από x τεστ εκκίνησης και c_{cf} τον απαιτούμενο αριθμό συνεχόμενων αποτυχιών για να έχουμε απόρριψη του εξοπλισμού. Ακόμη υποθέτουμε ότι οι ερμηνείες των υπόλοιπων συμβολισμών είναι οι ίδιες με εκείνες της Ενότητας 3.1.

Αρχικά, η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$P\{X > x\} = P\{T_{xs} < c_s, L_{xs} < c_{cs}, T_{xf} < c_f, L_{xf} < c_{cf}\}. \quad (3.3.1)$$

Για τη συνέχεια, απαιτούνται οι παρακάτω βοηθητικές συναρτήσεις

$$f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = P\{T_{xs} = i, L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_{cf}, Z_x = 0\}, \quad (3.3.2)$$

$$f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = P\{T_{xs} = i, L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_{cf}, Z_x = 1\}. \quad (3.3.3)$$

Μετά από υπολογισμούς καταλήγουμε ότι η βοηθητική συνάρτηση $f_0(\cdot)$, για $x > i \geq 1$, γράφεται στη μορφή

$$f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = \sum_{a=1}^{\min(c_{cf}-1, x-1)} q^a \cdot f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x-a) \quad (3.3.4)$$

και ότι η βοηθητική συνάρτηση $f_1(\cdot)$, για $x \geq c_{cs}$, γράφεται στη μορφή

$$f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = \sum_{b=1}^{\min(c_{cs}-1, i-1)} p^b \cdot f_0(i-b, c_{cs}, c_{cf}, x-b). \quad (3.3.5)$$

Οι αρχικές συνθήκες για τις εξισώσεις αυτές είναι

- $f_0(0, c_{cs}, c_{cf}, x) = q^x \cdot u[c_{cf} - 1 - x]$ και $f_1(0, c_{cs}, c_{cf}, x) = 0$.
- για $i > x$,

$$f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = 0.$$

- για $c_{cs} > x \geq i \geq 1$,

$$f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = \binom{x}{i-1} p^i q^{x-i} \cdot u[(c_{cf} - 1) - (x - i)].$$

- για $x = i \geq c_{cs}$,

$$f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = 0.$$

Παράδειγμα 3.3.1: Για να δούμε στην πράξη τις παραπάνω περιπτώσεις, αν υποθέσουμε ότι $c_s = c_f = 4, c_{cs} = c_{cf} = 3$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f_0(3,3,3,6) &= (pq)^3 && \text{(περίπτωση "101010")} \\ f_1(3,3,3,5) &= p^3 q^2 && \text{(περίπτωση "10101")} \\ f_0(1,3,3,3) &= q^2 p && \text{(περίπτωση "010")} \\ f_1(3,3,3,6) &= (qp)^3 && \text{(περίπτωση "010101")} \\ f_0(2,3,3,4) &= (qp)^2 && \text{(περίπτωση "1010")} \\ f_1(2,3,3,3) &= qp^2 && \text{(περίπτωση "101")} \end{aligned}$$

και οι σχέσεις (3.3.4) και (3.3.5) ικανοποιούνται για $a = b = 1$.

Η συνάρτηση $N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x)$ είναι μια πιο γενική εκδοχή της συνάρτησης $N(i, c_{cs}, x)$ και αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τρόπων για να γίνουν δεκτές i επιτυχημένες δοκιμές μέσα σε ένα σύνολο $X = x$ δοκιμών ο αριθμός c_{cs} ή περισσότερες επιτυχημένες δοκιμές να μην είναι συνεχόμενες και ο αριθμός c_{cf} ή περισσότερες αποτυχημένες δοκιμές να μην είναι συνεχόμενες. Έτσι, από τον παραπάνω ορισμό της συνάρτησης $N^{(2)}$ είναι φανερό ότι

$$N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x) = \frac{f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x) + f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x)}{p^i q^{x-i}}. \quad (3.3.6)$$

Ακόμη, για $c_{cs} > x$, η συνάρτηση $N^{(2)}$ συμπίπτει με την απλούστερη συνάρτηση N .

Τώρα, επειδή πρέπει $T_{xf} < c_f$, ο συνολικός αριθμός επιτυχιών θα πρέπει να ικανοποιεί την ανίσωση $x - c_f < T_{xf} < c_s$ (για $x < c_s + c_f$). Έτσι, για $x < c_s + c_f$, η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X θα έχει τη μορφή

$$P\{X > x\} = P\{x - c_f < T_{xs} < c_s, L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_{cf}\} \quad (3.3.7)$$

και εκφράζοντας τον τύπο (3.3.7) ως άθροισμα έχουμε ότι

$$P\{X > x\} = \sum_{i=\max(x-c_f+1,0)}^{\min(c_s-1, x)} P\{T_{xs} = i, L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_f\}. \quad (3.3.8)$$

Όσο αναφορά τον ορισμό της συνάρτησης $f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x)$ και της συνάρτησης $f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x)$ μέσω των σχέσεων (3.3.2) και (3.3.3), αντίστοιχα, βλέπουμε ότι

$$P\{T_{xs} = i, L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_f\} = f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x) + f_1(i, c_{cs}, c_{cf}, x). \quad (3.5.9)$$

Μετά από υπολογισμούς και με τη βοήθεια των τύπων (3.3.6), (3.3.8) και (3.3.9) καταλήγουμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X θα έχει τη μορφή

$$P\{X > x\} = \sum_{i=\max(x-c_f+1,0)}^{\min(c_s-1, x)} N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x) \cdot p^i q^{x-i},$$

όπου προφανώς ισχύει $\binom{x}{i} \geq N(i, c_{cs}, x) \geq N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x)$.

Τελικά, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται από τον τύπο

$$P\{X = x\} = P\{X > x - 1\} - P\{X > x\},$$

όπου $P\{X = x\} = 0$ για $\min(c_s, c_{cs}, c_f, c_{cf}) > x$.

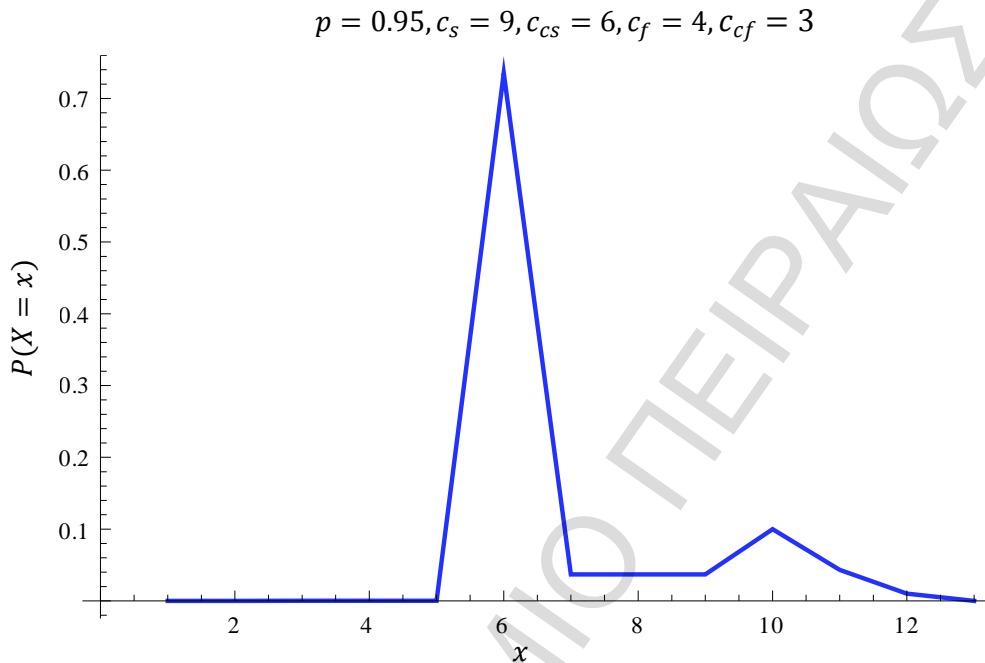
Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούν έμμεσα να δημιουργηθούν ενδιαφέρουσες σχέσεις για τις παραπάνω πιθανότητες. Για παράδειγμα, αναφερόμενοι στους τύπους (3.1.4), (3.3.2), και (3.3.3) προκύπτουν οι ακόλουθες δεσμευμένες πιθανότητες

$$P\{L_{xf} < c_{cf} | T_{xs} = i, L_{xs} < c_{cs}\} = \frac{N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x)}{N(i, c_{cs}, x)},$$

και

$$P\{L_{xs} < c_{cs}, L_{xf} < c_{cf} | T_{xs} = i\} = \binom{x}{i}^{-1} \cdot N^{(2)}(i, c_{cs}, c_{cf}, x).$$

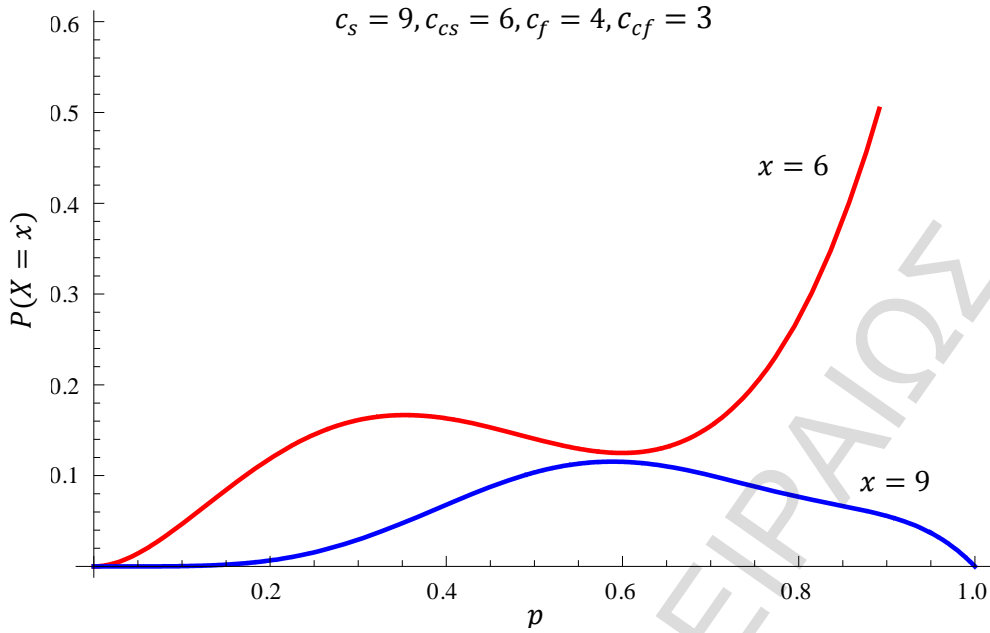
Στο Σχήμα 3.3.1 παρατηρούμε ότι η κύρια κορυφή εμφανίζεται όταν $x = 6$ λόγω του ότι $c_{cs} = 6$. Ακόμη, η δεύτερη μεγαλύτερη κορυφή παρατηρείται όταν $x \sim 10$ επειδή $c_s = 9$. Επίσης, είναι φανερό ότι, $P(X > 13) = 0$ λόγω των τιμών των παραμέτρων c_s και c_f .



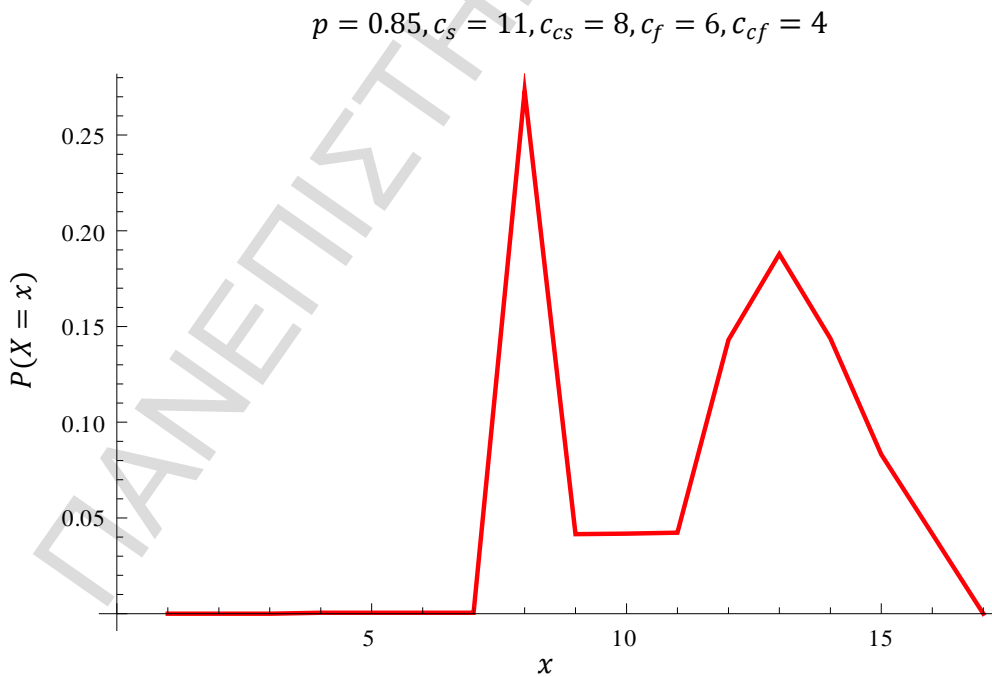
Σχήμα 3.3.1: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTFCF* (χρόνος αναμονής) για $p = 0.95, c_s = 9, c_{cs} = 6, c_f = 4$ και $c_{cf} = 3$

Στο Σχήμα 3.3.2 φαίνεται γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης *TSCSTFCF* συναρτήσει του p για $x = 6$ και $9, c_s = 9, c_{cs} = 6, c_f = 4$ και $c_{cf} = 3$. Για $x = 6$ παρατηρούμε ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ αυξάνεται πολύ κυρίως για πολύ μεγάλες τιμές του p ($p > 0.7$). Τέλος, για $x = 9$ φαίνεται ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές του για μεσαίες τιμές του p , όπου και εκεί ο χρόνος αναμονής είναι πολύ μικρός.

Από την άλλη πλευρά, στο Σχήμα 3.3.3 παρατηρούμε ότι η κύρια κορυφή εμφανίζεται όταν $x = 8$ λόγω του ότι $c_{cs} = 8$. Ακόμη, η δεύτερη μεγαλύτερη κορυφή παρατηρείται όταν $x \sim 13$ επειδή $c_s = 11$. Επίσης, είναι φανερό ότι, $P(X > 17) = 0$ λόγω των τιμών των παραμέτρων c_s και c_f .

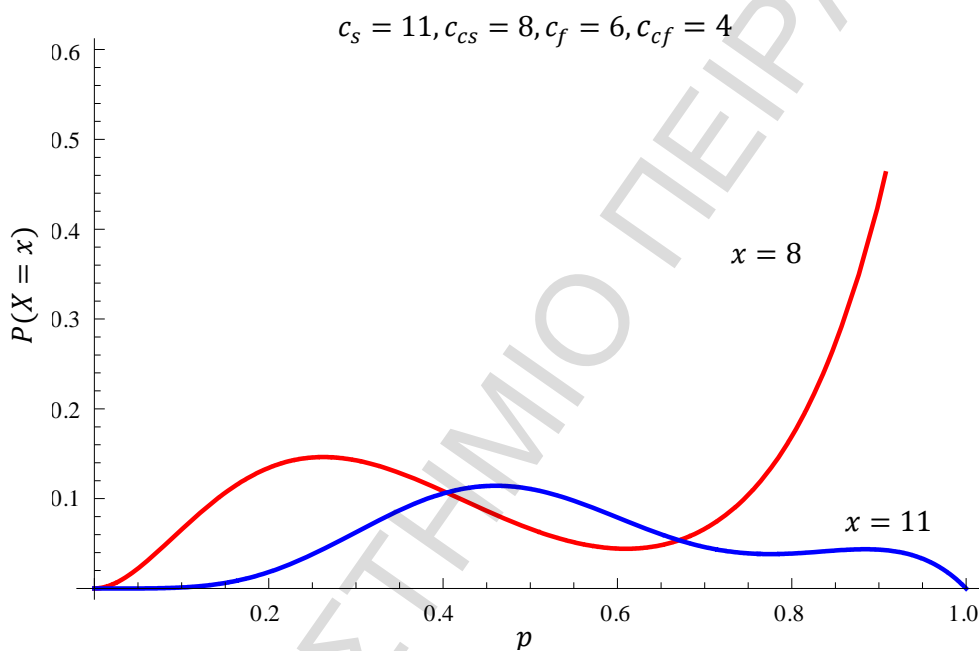


Σχήμα 3.3.2: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTFCF* (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 6, 9$, $c_s = 9$, $c_{cs} = 6$, $c_f = 4$ και $c_{cf} = 3$



Σχήμα 3.3.3: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *TSCSTFCF* (χρόνος αναμονής) για $p = 0.85$, $c_s = 11$, $c_{cs} = 8$, $c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$

Ακόμη, στο Σχήμα 3.3.4 φαίνεται γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης $TSCSTFCF$ συναρτήσει του p για $x = 8$ και 11 , $c_s = 11$, $c_{cs} = 8$, $c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$. Για $x = 8$ παρατηρούμε πάλι ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ αυξάνεται πολύ κυρίως για πολύ μεγάλες τιμές του p ($p > 0.7$). Τέλος, για $x = 11$ φαίνεται ότι ο χρόνος αναμονής του τεστ παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές του για μεσαίες τιμές του p , όπου και εκεί ο χρόνος αναμονής είναι πολύ μικρός.



Σχήμα 3.3.4: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ $TSCSTFCF$ (χρόνος αναμονής) συναρτήσει του p για $x = 8, 11$, $c_s = 11$, $c_{cs} = 8$, $c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$

3.4 Πιθανότητα αποδοχής του τεστ TSCSTFCF

Εκτός από τη συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ εκκίνησης $TSCSTFCF$, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η πιθανότητα αποδοχής της υπό δοκιμή μονάδας. Εδώ, για καθορισμένες τιμές των παραμέτρων c_s, c_{cs}, c_f, c_{cf} , η πιθανότητα αποδοχής (P_a) της υπό δοκιμή μονάδας δίνεται από τον τύπο

$$P_a = P \left\{ \min(W_{c_{cs}}, W_{c_s}) < \min(W_{c_{cf}}, W_{c_f}) \right\},$$

όπου W_{c_s}, W_{c_f} είναι ο συνολικός αριθμός εκκινήσεων (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστούν c_s επιτυχίες (c_f αποτυχίες), και $W_{c_{cs}}, W_{c_{cf}}$ είναι ο συνολικός αριθμός εκκινήσεων (δοκιμών) μέχρι την εμφάνιση της πρώτης ροής από συνεχόμενες επιτυχίες (αποτυχίες).

Θέτοντας

$$g(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = P\{T_{xs} = c_s, L_{xs} < c_{cs}, T_{xf} < c_f, L_{xf} < c_{cf}, Z_x = 1\},$$

$$h(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = P\{T_{xs} < c_s, L_{xs} = c_{cs}, L_{x-1,s} < c_{cs}, T_{xf} < c_f, L_{xf} < c_{cf}, Z_x = 1\}$$

και

$$r(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = P\{T_{xs} = c_s, L_{xs} = c_{cs}, L_{x-1,s} < c_{cs}, T_{xf} < c_f, L_{xf} < c_{cf}, Z_x = 1\},$$

η πιθανότητα αποδοχής θα δίνεται από τον τύπο

$$P_a = \sum_{x=1}^{\infty} [g(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) + h(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) + r(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x)].$$

Όσο αναφορά τον ορισμό της συνάρτησης $f_1(\cdot)$ που δίνεται μέσω του τύπου (3.3.3), η $g(\cdot)$ είναι ίδια με την $f_1(i = c_s, \dots)$ αν $c_s + c_f > x$, διαφορετικά είναι ίση με μηδέν.

Για να οριστεί η συνάρτηση $h(\cdot)$, λαμβάνεται υπόψη η ιδιότητα της ανεξαρτησίας μεταξύ των μονάδων, οπότε παίρνουμε τον παρακάτω τύπο

$$h(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = p^{c_{cs}} \cdot u(c_s - c_{cs} - 1) \cdot u(x - c_{cs} - 1) \cdot \\ \cdot P\{T_{x-c_{cs},s} < c_s - c_{cs}, L_{x-c_{cs},s} < c_{cs}, T_{x-c_{cs},f} < c_f, L_{x-c_{cs},f} < c_{cf}, Z_{x-c_{cs}} = 0\},$$

όπου η συνάρτηση $u(\cdot)$ είναι μια συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Ο συνολικός αριθμός επιτυχιών ανάμεσα στις πρώτες $x - c_{cs}$ δοκιμές θα πρέπει να περιορίζεται από την ανίσωση $x - c_{cs} - c_f < T_{x-c_{cs},s} < c_s - c_{cs}$, έτσι ώστε να ισχύει $c_s + c_f > x$.

Για $x > c_{cs}$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.3.2), η συνάρτηση $h(\cdot)$ ορίζεται ως

$$h(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = p^{c_{cs}} \cdot u(c_s - c_{cs} - 1) \cdot u(x - c_{cs} - 1) \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=\max(0, x-c_{cs}-c_f+1)}^{c_s-c_{cs}-1} f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x-c_{cs})$$

και για $x = c_{cs}$,

$$h(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) = p^{c_{cs}} \cdot u(c_s - c_{cs} - 1) \cdot \delta(x - c_{cs}).$$

Ακόμη, αναφορικά με την συνάρτηση $r(\cdot)$, για $x \geq c_s > c_{cs}$, ισχύει

$$\begin{aligned} r(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) &= p^{c_{cs}} \cdot u(x - c_{cs}) \cdot u(c_s - 1 - c_{cs}) \cdot \\ &\cdot P\{T_{x-c_{cs},s} = c_s - c_{cs}, L_{x-c_{cs},s} < c_{cs}, T_{x-c_{cs},f} < c_f, L_{x-c_{cs},f} < c_{cf}, Z_{x-c_{cs}} = 0\}. \end{aligned}$$

Για $x \geq c_{cs} = c_s$,

$$\begin{aligned} r(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) &= p^{c_{cs}} \cdot q^{x-c_{cs}} \cdot u(x - c_{cs}) \cdot \delta(c_s - c_{cs}) \cdot \\ &\cdot u((c_f - 1) - (x - c_{cs})) \cdot u((c_{cf} - 1) - (x - c_{cs})). \end{aligned}$$

Επομένως, μετά από υπολογισμούς, καταλήγουμε ότι η πιθανότητα αποδοχής της υπό δοκιμή μονάδας δίνεται από τον τύπο

$$P_a = \sum_{x=1}^{\infty} R(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) \quad (3.4.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} R(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x) &= f_1(c_s, c_{cs}, c_{cf}, x) \cdot u(c_s + c_f - 1 - x) + p^{c_{cs}} \cdot u(c_s - 1 - c_{cs}) \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{i=\max(0, x-c_{cs}-c_f+1)}^{c_s-c_{cs}-1} f_0(i, c_{cs}, c_{cf}, x-c_{cs}) \cdot u(x-1-c_{cs}) \cdot \right. \\ &\cdot u(c_s + c_f - 1 - x) + \delta(x - c_s) \} + p^{c_{cs}} \cdot \{f_0(c_s - c_{cs}, c_{cs}, c_{cf}, x - c_{cs}) \cdot \\ &\cdot u(c_s + c_f - x - 1) \cdot u(x - c_s) \cdot u(c_s - 1 - c_{cs}) + q^{x-c_{cs}} \cdot \\ &\cdot u(c_s + c_f - x - 1) \cdot u(c_{cs} + c_{cf} - x - 1) \cdot \delta(c_{cs} - c_s) \cdot u(x - c_{cs})\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4.1: Για να δούμε στην πράξη την παραπάνω περίπτωση, χρησιμοποιώντας τις τιμές $c_s = c_f = 4, c_{c_s} = c_{c_f} = 2$, οι ακολουθίες των γεγονότων που οδηγούν στην αποδοχή του εξοπλισμού είναι οι εξής: '11', '011', '1011', '01011', '101011', '0101011', '1010101'. Σε αυτή την περίπτωση,

$$\begin{aligned}
 R(4,4,2,2,2) &= p^2 && \text{(περίπτωση "11")} \\
 R(4,4,2,2,3) &= qp^2 && \text{(περίπτωση "011")} \\
 R(4,4,2,2,4) &= p^2 \cdot f_0(1,2,2,2) = qp^3 && \text{(περίπτωση "1011")} \\
 R(4,4,2,2,5) &= p^2 \cdot f_0(1,2,2,3) = q^2p^3 && \text{(περίπτωση "01011")} \\
 R(4,4,2,2,6) &= p^2 \cdot f_0(2,2,2,4) = q^2p^4 && \text{(περίπτωση "101011")} \\
 R(4,4,2,2,7) &= f_1(4,2,2,7) + p^2 \cdot \\
 &\quad \cdot f_0(2,2,2,5) = q^2p^4 && \text{(περίπτωση "0101011", "1010101")}
 \end{aligned}$$

και διαφορετικά $R(4,4,2,2, x) = 0$ για $x > 7$.

Οι τιμές των $f_0(\cdot)$ και $f_1(\cdot)$ που χρησιμοποιήθηκαν στο παράδειγμα είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 f_1(4,2,2,7) &= q^3p^4, \quad f_0(1,2,2,2) = qp, \quad f_0(1,2,2,3) = pq^2, \quad f_0(2,2,2,4) = (qp)^2, \\
 f_0(2,2,2,5) &= q^3p^2.
 \end{aligned}$$

Τέλος, μπορεί να δοθεί ένας παρόμοιος τύπος για την πιθανότητα απόρριψης (P_r) της υπό δοκιμή μονάδας, ο οποίος είναι ίσος με

$$P_r = \sum_{x=1}^{\infty} Q(c_s, c_f, c_{c_s}, c_{c_f}, x)$$

όπου $Q(\cdot)$ είναι η αντίστοιχη έκφραση για την αποτυχία όπως η $R(\cdot)$ του τύπου (3.4.1). Επομένως,

$$P_r = 1 - P_a = 1 - \sum_{x=1}^{\infty} R(c_s, c_f, c_{cs}, c_{cf}, x).$$

3.5 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης του τεστ TSCSTFCF

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι η πιθανότητα επιτυχίας της κάθε δοκιμής (p) είναι γνωστή για το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Τα κριτήρια αποδοχής/απόρριψης χρησιμοποιήθηκαν ως μέσο για την αποδοχή ή την απόρριψη του εξοπλισμού. Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε τα κριτήρια αυτά μόνο ως κανόνα διακοπής που θα τερματίσει την διαδικασία εκκίνησης. Σε αυτή την περίπτωση, τα δεδομένα που συλλέγονται από τις δοκιμές χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του p , και η αποδοχή / απόρριψη του εξοπλισμού θα πρέπει να βασίζεται στην εκτίμηση της αξίας του p . Η ανάλυση που θα παρουσιαστεί για την εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης του τεστ εκκίνησης TSCSTFCF βασίζεται στην ανάλυση των Viveros και Balakrishnan (1993) για την τεχνική του τεστ εκκίνησης CS, και των Smith και Griffith (2005) για την τεχνική του τεστ εκκίνησης CSTF. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης είναι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι διεξάγουμε n τεστ χρησιμοποιώντας προκαθορισμένες τιμές των παραμέτρων c_s, c_{cs}, c_f και c_{cf} . Οι δοκιμές εκτελούνται στην ίδια μονάδα ή σε αρκετές μονάδες, έτσι ώστε η πιθανότητα επιτυχίας p να είναι ίδια για κάθε δοκιμή. Για την i μονάδα (ή τεστ), έστω S_i ο αριθμός των παρατηρούμενων επιτυχιών και F_i ο αριθμός των παρατηρούμενων αποτυχιών. Ακόμη, έστω $X_i = S_i + F_i$ ο συνολικός αριθμός προσπαθειών εκκίνησης μέχρι να σταματήσει η διαδικασία για την i μονάδα (ή τεστ). Ακολουθώντας την ίδια επιχειρηματολογία με εκείνη που παρουσιάστηκε από τους Smith και Griffith (2005), διεξάγονται n τεστ, και για κάθε ένα από αυτά καταγράφεται ο αριθμός των επιτυχιών και των αποτυχιών. Έτσι, δημιουργείται ένα διάνυσμα της μορφής $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$ για κάθε τεστ (ή μονάδα). Σε αυτό το σημείο θα αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε S_i επιτυχίες και F_i αποτυχίες είναι ανάλογη της τιμής $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$, η οποία ισχύει και για την γενική περίπτωση της διαδικασίας του τεστ εκκίνησης TSCSTFCF. Για το σκοπό αυτό, παρακάτω θα εξεταστούν τέσσερις περιπτώσεις. Πράγματι, για $F_i = c_f$ είναι φανερό ότι, το τεστ τερματίζεται λόγω της κατάστασης όπου η τελευταία δοκιμή απέτυχε, και αυτό λόγω της

c_f αποτυχίας. Στις προηγούμενες $S_i + F_i - 1$ δοκιμές, πρέπει να είχαν συμβεί S_i επιτυχίες με πιθανότητα p και $F_i - 1$ αποτυχίες με πιθανότητα $1 - p$, κατανομημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες και c_{cf} συνεχόμενες αποτυχίες.

Το σημαντικό είναι ότι ο αριθμός των εν λόγω ρυθμίσεων είναι μία σταθερά, η οποία δεν εξαρτάται από το p . Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των S_i επιτυχιών και F_i αποτυχιών είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1 - p)^{F_i}$.

Για $F_i = c_s$, ακλουθώντας την ίδια συλλογιστική με την προηγούμενη περίπτωση, είναι φανερό ότι το τεστ τερματίζεται λόγω της κατάστασης όπου η τελευταία δοκιμή ήταν επιτυχημένη, και αυτό λόγω της c_s επιτυχίας. Στις προηγούμενες $S_i + F_i - 1$ δοκιμές, πρέπει να είχαν συμβεί $S_i - 1$ επιτυχίες με πιθανότητα p και F_i αποτυχίες με πιθανότητα $1 - p$, κατανομημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες και c_{cf} συνεχόμενες αποτυχίες. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των S_i επιτυχιών και F_i αποτυχιών είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1 - p)^{F_i}$.

Ακόμη, έχουμε την περίπτωση το i -στό τεστ εκκίνησης να τερματίζεται από μια ροή c_{cs} συνεχόμενων επιτυχιών. Προφανώς το $S_i + F_i - c_{cs}$ τεστ πρέπει να ήταν αποτυχημένο, διαφορετικά θα είχε δημιουργηθεί μια ροή c_{cs} συνεχόμενων επιτυχιών πριν τον τερματισμό. Στις προηγούμενες $S_i + F_i - c_{cs} - 1$ δοκιμές, πρέπει να είχαν συμβεί $S_i - c_{cs}$ επιτυχίες με πιθανότητα p και $F_i - 1$ αποτυχίες με πιθανότητα $1 - p$, κατανομημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες και c_{cf} συνεχόμενες αποτυχίες. Και πάλι, ο αριθμός των εν λόγω ρυθμίσεων είναι μία σταθερά, η οποία δεν εξαρτάται από το p . Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των S_i επιτυχιών και F_i αποτυχιών είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1 - p)^{F_i}$.

Τέλος, έχουμε την περίπτωση το i -στό τεστ εκκίνησης να τερματίζεται από μια ροή c_{cf} συνεχόμενων αποτυχιών. Εδώ, ακολουθώντας την ίδια επιχειρηματολογία με την προηγούμενη περίπτωση, είναι φανερό ότι το $S_i + F_i - c_{cf}$ τεστ πρέπει να ήταν επιτυχημένο, διαφορετικά θα είχε δημιουργηθεί μια ροή c_{cf} συνεχόμενων αποτυχιών πριν τον τερματισμό. Στις προηγούμενες $S_i + F_i - c_{cf} - 1$ δοκιμές, πρέπει να είχαν συμβεί $S_i - 1$ επιτυχίες με πιθανότητα p και $F_i - c_{cs}$ αποτυχίες με πιθανότητα $1 - p$, κατανομημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν c_{cs} συνεχόμενες επιτυχίες και c_{cf} συνεχόμενες αποτυχίες. Και πάλι, ο αριθμός των εν λόγω ρυθμίσεων είναι μία σταθερά, η οποία δεν εξαρτάται από το

p . Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η πιθανότητα των S_i επιτυχιών και F_i αποτυχιών είναι ανάλογη της ποσότητας $p^{S_i}(1-p)^{F_i}$.

Συμπερασματικά προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(p)$ για τα στοιχεία $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$ είναι ανάλογη της ποσότητας $\prod_{i=1}^n p^{S_i}(1-p)^{F_i}$ οπότε

$$L(p) \propto \prod_{i=1}^n p^{S_i}(1-p)^{F_i} = p^{\sum_{i=1}^n S_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^n F_i} = p^S(1-p)^F = p^S(1-p)^{X-S}.$$

όπου

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, F = \sum_{i=1}^n F_i, X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (S_i + F_i) = S + F.$$

Θέτοντας την παράγωγο του λογάριθμου του $L(p)$ ίση με μηδέν προκύπτει ότι η εκτίμηση για το p θα δίνεται από τον τύπο

$$\hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{S}{X}$$

και η πληροφορία του Fisher θα δίνεται από τον τύπο

$$I(\hat{p}) = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i + F_i)}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

Τέλος, το αντίστοιχο προσεγγιστικό $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το p , το οποίο προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή, είναι το

$$\left(\hat{p} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}}, \hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}} \right).$$

Παράδειγμα 3.5.1: Έστω τα παρακάτω δεδομένα που έχουν παραχθεί μέσω προσομοίωσης και αφορούν μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli για ένα τεστ εκκίνησης TSCSTFCF που γίνεται σε $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c_s = 14, c_{cs} = 10, c_f = 8, c_{cf} = 5$ και $p = 0.9$.

Πίνακας 3.5.1	<i>Δεδομένα ενός τεστ εκκίνησης TSCSTFCF από $n = 15$ πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με $c_s = 14, c_{cs} = 10, c_f = 8, c_{cf} = 5$ και $p = 0.9$</i>			
i	Ακολουθία αποτελεσμάτων που εμφανίστηκαν	S_i	F_i	X_i
1	11101111111111	13	1	14
2	11011111111111	12	1	13
3	1111111110111101	14	2	16
4	1111111111	10	0	0
5	11111011101101111	14	3	17
6	110101111111111	13	2	15
7	011111111011101011	14	4	18
8	1111101111111101	14	2	16
9	1111111111	10	0	10
10	111111011111111	14	1	15
11	0111111111	10	1	11
12	11100111101111111	14	3	17
13	111110111110111001	14	4	18
14	101101111111111	13	2	15
15	11001011111111111	13	3	16
Σύνολο		192	29	221

Για τα δεδομένα του Πίνακα 3.5.1 υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = 192, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i = 29, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i = 221.$$

Η αντίστοιχη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του p είναι ίση με

$$\hat{p} = \frac{S}{X} = 0.8688$$

και η πληροφορία του Fisher είναι ίση με

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1 - \hat{p})} = 1850.9.$$

Στη συνέχεια, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει από τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι το

$$\left(0.8688 - \frac{1.96}{\sqrt{1850.9}}, 0.8688 + \frac{1.96}{\sqrt{1850.9}}\right) = (0.8233, 0.9143).$$

Από το παραπάνω 95% διάστημα εμπιστοσύνης παρατηρούμε ότι, παρότι το δείγμα είναι μικρό, η εκτίμηση της πιθανότητας εκκίνησης είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή του $p = 0.9$.

3.6 Σύγκριση των τεστ CSTF, TSCSTF και TSCSTFCF ως προς το μέσο μήκος τους

Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε το μέσο μήκος των τεστ *TSCSTF* και *TSCSTFCF* με το μέσο μήκος του κλασικού τεστ εκκίνησης *CSTF*.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα μέσα μήκη των τεστ *TSCSTF*, *TSCSTFCF* και *CSTF* για διάφορες τιμές των απαραίτητων για κάθε τεστ παραμέτρων. Σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι το τεστ *TSCSTFCF* είναι το καλύτερο, αφού έχει το μικρότερο μέσο μήκος σε κάθε περίπτωση, και το τεστ *CSTF* φαίνεται να είναι το λιγότερα καλό τεστ, αφού σε κάθε περίπτωση έχει το μεγαλύτερο μέσο μήκος. Το τεστ εκκίνησης *TSCSTF* έχει σε κάθε περίπτωση μια ενδιάμεση τιμή σε σχέση με τα άλλα δυο τεστ εκκίνησης.

Πίνακας 3.6.1		<i>Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης CSTF για διάφορες τιμές των παραμέτρων p, c_{cs}, c_f</i>		
<i>p</i>	<i>c_{cs}</i>	<i>c_f</i>	<i>E(X)</i>	
0.80	4	4	6.3314	
0.90	8	6	12.7790	
0.95	6	4	7.1720	
0.99	10	3	10.5635	

Ακόμη, παρατηρούμε ότι στην δεύτερη περίπτωση, για τις τιμές των παραμέτρων $p = 0.9, c_s = 11, c_{cs} = 8, c_f = 6$ και $c_{cf} = 4$, το μέσο μήκος του τεστ *CSTF* έχει τη μεγαλύτερη διαφορά σε σχέση με τα άλλα δυο τεστ και σε σχέση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Η διαφορά αυτή σε σχέση με τα άλλα δυο τεστ εκκίνησης είναι της τάξεως των 2.3 μονάδων περίπου, με τα τεστ *TSCSTF* και *TSCSTFCF* να έχουν σχεδόν ίσο μέσο μήκος. Από την άλλη πλευρά, παρατηρούμε ότι στην τελευταία περίπτωση, για τις τιμές των παραμέτρων $p = 0.99, c_s = 15, c_{cs} = 10, c_f = 3$ και $c_{cf} = 2$, το μέσο μήκος του τεστ *CSTF* δεν έχει σημαντική διαφορά σε σχέση με τα άλλα δυο τεστ εκκίνησης. Προφανώς, για πολύ μεγάλες τιμές στην πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης p , όπως για παράδειγμα στην τελευταία περίπτωση που έχουμε $p = 0.99$, δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στο μέσο μήκος των τεστ *TSCSTF*, *TSCSTFCF* και *CSTF*. Γενικά, τα τεστ *TSCSTF* και *TSCSTFCF* δεν έχουν ουσιαστική διαφορά στο μέσο μήκος τους, με μοναδική εξαίρεση την πρώτη περίπτωση ($p = 0.8, c_s = 8, c_{cs} = 4, c_f = 4$ και $c_{cf} = 2$).

Πίνακας 3.6.2		<i>Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης TSCSTF για διάφορες τιμές των παραμέτρων p, c_s, c_{cs}, c_f</i>			
p	c_s	c_{cs}	c_f	$E(X)$	
0.80	8	4	4	6.2309	
0.90	11	8	6	10.4586	
0.95	9	6	4	6.9020	
0.99	15	10	3	10.4429	

Πίνακας 3.6.3		<i>Μέσο μήκος του τεστ εκκίνησης TSCSTFCF για διάφορες τιμές των παραμέτρων $p, c_s, c_{cs}, c_f, c_{cf}$</i>			
p	c_s	c_{cs}	c_f	c_{cf}	$E(X)$
0.80	8	4	4	2	5.5506
0.90	11	8	6	4	10.4534
0.95	9	6	4	3	6.8987
0.99	15	10	3	2	10.4346

Συμπερασματικά, το τεστ *TSCSTFCF* φαίνεται να είναι καλύτερο από τα υπόλοιπα δυο τεστ εκκίνησης ως προς το μέσο μήκος τους, το τεστ *TSCSTF* ακολουθεί με μικρή διαφορά και τέλος το τεστ *CSTF*. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η ιεράρχηση δεν ισχύει πάντα, καθώς η διαδικασία απόφασης του καλύτερου τεστ εκκίνησης για μια συγκεκριμένη εργασία εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και από τις απαιτήσεις του κάθε επαγγελματία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τεστ Εκκίνησης CSDF

Οι Αντζουλάκος, Κούτρας και Ρακιτζής (2009) πρότειναν μια τροποποίηση των τεστ εκκίνησης CS ως εξής: αν παρατηρηθούν c συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση δύο ανεπιτυχών εκκινήσεων που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχημένες εκκινήσεις, τότε ο υπό δοκιμή εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός. Διαφορετικά, αν εμφανιστούν δύο ανεπιτυχείς εκκινήσεις που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση των c συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων, τότε ο υπό δοκιμή εξοπλισμός απορρίπτεται (τεχνική Consecutive Successes Distance Failures, ή εν συντομία τεχνική $CSDF$).

Η κύρια διαφορά μεταξύ των τεστ $CSTF$ και $CSDF$ είναι ότι, στην τεχνική $CSDF$ θεωρούμε πολύ σημαντικό για την αποδοχή του εξοπλισμού οι ανεπιτυχείς εκκινήσεις να λαμβάνουν χώρα σε μεγάλη απόσταση που ελέγχεται από την παράμετρο r (σημειώνουμε εδώ ότι αυτό το κριτήριο είναι αντίστοιχο με τον κανόνα που παρέχεται από τους Κούτρας και Balakrishnan (1999) για την απόρριψη του εξοπλισμού).

Στην περίπτωση $c \geq r$, το στήριγμα της τυχαίας μεταβλητής που μετρά τον συνολικό αριθμό εκκινήσεων για τον τερματισμό του τεστ εκκίνησης $CSDF$ δεν είναι πεπερασμένο, σε αντίθεση με το μήκος του τεστ $CSTF$, που είναι πάντα πεπερασμένο.

4.1 Χρόνοι αναμονής του τεστ CSDF

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιάσουμε διάφορους υπολογισμούς που σχετίζονται με τις ακόλουθες τρεις τυχαίες μεταβλητές του χρόνου αναμονής του τεστ, δηλαδή του μήκους του τεστ CSDF:

- τον συνολικό αριθμό των δοκιμών (T) μέχρι τον τερματισμό του τεστ,
- τον αριθμό των δοκιμών (T_1) μέχρι τον τερματισμό του τεστ επειδή παρατηρήθηκαν k συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις και
- τον αριθμό των δοκιμών (T_0) μέχρι τον τερματισμό του τεστ λόγω της εμφάνισης δύο ανεπιτυχών εκκινήσεων που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχημένες εκκινήσεις.

Ας υποθέσουμε ότι $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή Bernoulli, οι οποίες παίρνουν τις τιμή 1 αν συμβεί επιτυχία και την τιμή 0 αν συμβεί αποτυχία, με αντίστοιχες πιθανότητες $p = P(X_i = 1)$ και $q = P(X_i = 0) = 1 - p$. Συμβολίζουμε με E_1 την περίπτωση που αντιστοιχεί στην εμφάνιση μιας επιτυχημένης ροής μήκους c και με E_0 την περίπτωση που αντιστοιχεί στην εμφάνιση δύο αποτυχιών που χωρίζονται από το πολύ $r - 2$ επιτυχίες ($r \geq 2, c \geq r$). Τέλος, έστω T ο χρόνος αναμονής μέχρι να παρατηρηθεί το ενδεχόμενο E_1 ή E_0 , όποιο από τα δύο και αν συμβεί νωρίτερα. Έτσι, T είναι ο χρόνος αναμονής για την εμφάνιση της παρακάτω ένωσης

$$E = E_1 \cup E_0 = \{\underbrace{11 \dots 1}_{c \text{ φορές}}\} \cup \{00, 010, 0110, \dots, 0 \underbrace{11 \dots 1}_{r-2} 0\}.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας, οι πιθανότητες ουράς και η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής θα δίνονται από τους τύπους

$$f_T(n) = Pr(T = n), \quad \bar{F}_T(n) = Pr(T > n), \quad F_T(n) = Pr(T \leq n),$$

αντιστοίχως.

Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με T_1 (αντίστοιχα, T_0) τον χρόνο αναμονής για το ενδεχόμενο E λόγω της εμφάνισης του ενδεχομένου E_1 (αντίστοιχα, E_0). Για τον χρόνο αναμονής T_i , με $i = 0, 1$, θα χρησιμοποιήσουμε παρόμοιους τύπους με εκείνους για τον χρόνο αναμονής T . Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας, οι πιθανότητες ουράς και η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής θα δίνονται από τους τύπους

$$f_{T_i}(n) = Pr(T_i = n), \quad \bar{F}_{T_i}(n) = Pr(T_i > n), \quad F_{T_i}(n) = Pr(T_i \leq n),$$

αντιστοίχως.

Μια διαφορετική προσέγγιση για τον χρόνο αναμονής της τυχαίας μεταβλητής T παρουσιάστηκε από τους Αντζουλάκο, Κούτρα και Ρακιτζή (2009), χρησιμοποιώντας μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η τεχνική αυτή βασίζεται στην μέθοδο που εισήγαγαν οι Κούτρας και Αλεξάνδρου (1997) (βλ. επίσης Fu (1996), Αντζουλάκος (2001), Κούτρας (2003), Fu και Lou (2003), και Smith και Griffith (2004)).

Αρχικά, ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t \geq 1\}$ με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, c + r - 1\}$, η οποία δημιουργείται από μια ροή ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών X_1, X_2, \dots, X_t ως εξής:

1. Αν $X_1 = X_2 = \dots = X_t = 1$ για $1 \leq t \leq c - 1$, αναθέτουμε την τιμή t στο Y_t .
2. Αν $X_t = 0$ και $X_{t-1} = X_{t-2} = \dots = X_1 = 1$ για $1 \leq t \leq c$, αναθέτουμε την τιμή c στο Y_t .
3. Αν $X_t = 0$ και $X_{t-1} = X_{t-2} = \dots = X_1 = X_{t-i} = 1$ για $r - 1 \leq i \leq c - 1$, αναθέτουμε την τιμή c στο Y_t .
4. Αν $X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \dots = X_{t-i+1} = 1$ και $X_{t-i} = 0$ για $1 \leq i \leq r - 2$, αναθέτουμε την τιμή $c+i$ στο Y_t .
5. Αν $X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \dots = X_{t-i+1} = 1$ και $X_{t-i} = 0$ για $r - 1 \leq i \leq c - 1$, αναθέτουμε την τιμή i στο Y_t .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, για τους παραπάνω ορισμούς υποθέτουμε ότι δεν έχει συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα E_0, E_1 πριν τον τερματισμό της σειράς των δοκιμών με την οποία εργαζόμαστε. Ακόμη, έχουμε ολοκληρώσει τον χώρο καταστάσεων με την παράθεση της κατάστασης $c + r - 1$, η οποία χρησιμεύει ως κατάσταση απορρόφησης και υπολογίζεται για όλους τους συνδυασμούς που έχει παρατηρηθεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα E_0, E_1 .

Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι οι παραπάνω ορισμοί (1 έως 5) δημιουργούν μια ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t \geq 1\}$ στο χώρο καταστάσεων Ω , με αρχικό διάνυσμα πιθανότητας

$$\pi = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = c + r - 1)] = pe_1 + pe_c$$

όπου e_i για $i = 1, 2, \dots, c + r - 1$ συμβολίζει το μοναδιαίο (γραμμή) διάνυσμα του R^{c+1} , το οποίο παίρνει την τιμή 1 στην i -οστή συντεταγμένη και την τιμή μηδέν οπουδήποτε αλλού. Επιπλέον, ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης P είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} Q & (I - Q)1' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(c+r-1) \times (c+r-1)},$$

όπου

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}_{(c+r-2) \times (c+r-2)},$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(c-1) \times (c-1)},$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} q & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(c-1) \times (r-1)},$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(r-1) \times (r-1)}.$$

Ο Q_{21} είναι ένας $(r-1) \times (c-1)$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του να λείπουν εκτός από το στοιχείο $(r-1, r-1)$, το οποίο είναι ίσο με p . Ακόμη, στον πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης P , τα διανύσματα 0 και 1 είναι διανύσματα (γραμμή) $1 \times (c+r-1)$, με όλες τις εγγραφές τους 0 και 1, αντίστοιχα. Τέλος, ο I είναι ο μοναδιαίος πίνακας $(c+r-2) \times (c+r-2)$.

Έτσι, μέσω του πίνακα Q , η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$F_T(n) = \alpha(I - Q^{n-1})1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.1)$$

οι πιθανότητες ουράς μπορούν να δοθούν από τον τύπο

$$\bar{F}_T(n) = \alpha Q^{n-1}1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.2)$$

η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$f_T(n) = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 1 \\ \alpha Q^{n-2}(I - Q)1' & \text{για } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.1.3)$$

όπου

$$a = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = c + r - 2)]. \quad (4.1.4)$$

Η μελέτη του χρόνου αναμονής της τ.μ. T_1 μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης P του χρόνου αναμονής της τ.μ. T που παρουσιάστηκε παραπάνω, κάνοντας κάποιες τροποποιήσεις. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει να τροποποιηθεί η Μαρκοβιανή αλυσίδα που χρησιμοποιείται για τη μελέτη της T , ακυρώνοντας τις μεταβάσεις προς την απορροφητική κατάσταση $k + r - 1$ για όλες τις διαμορφώσεις που οδηγούν στην πραγματοποίηση του ενδεχόμενου E_0 . Ακόμη, θα πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα και οι αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης. Έτσι, ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης ορίζεται τώρα ως

$$P_1 = \begin{bmatrix} Q & (I - Q - M_1)1' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(c+r-1) \times (c+r-1)},$$

όπου M_1 είναι ένας $(c + r - 2) \times (c + r - 2)$ πίνακας, ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν εκτός από τα τελευταία $r - 1$ στοιχεία της διαγωνίου του, που είναι ίσα με την πιθανότητα $q = 1 - p$.

Έτσι, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T_1 μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$F_{T_1}(n) = \alpha(I - Q^{n-1})(I - Q)^{-1}(I - Q - M_1)1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.5)$$

οι πιθανότητες ουράς μπορούν να δοθούν από τον τύπο

$$\bar{F}_{T_1}(n) = \alpha Q^{n-1}(I - Q)^{-1}(I - Q - M_1)1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.6)$$

η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$f_{T_1}(n) = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 1 \\ \alpha Q^{n-2}(I - Q - M_1)1' & \text{για } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

όπου a δίνεται από τον τύπο (4.1.4).

Τέλος, η μελέτη του χρόνου αναμονής της τ.μ. T_0 μπορεί να επιτευχθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που πραγματοποιήθηκε για τον χρόνο αναμονής της τ.μ. T_1 . Έτσι, ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης της τ.μ. T_0 ορίζεται ως

$$P_0 = \begin{bmatrix} Q & (I - Q - M_0)1' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(c+r-1) \times (c+r-1)},$$

όπου M_0 είναι ένας $(c + r - 2) \times (c + r - 2)$ πίνακας, ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν εκτός από το $(k - 1, k - 1)$ στοιχείο, το οποίο είναι ίσο με την πιθανότητα p .

Έτσι, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T_0 μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$F_{T_0}(n) = \alpha(I - Q^{n-1})(I - Q)^{-1}(I - Q - M_0)1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.8)$$

οι πιθανότητες ουράς μπορούν να δοθούν από τον τύπο

$$\bar{F}_{T_0}(n) = \alpha Q^{n-1}(I - Q)^{-1}(I - Q - M_0)1', \quad \text{για } n \geq 1, \quad (4.1.9)$$

η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$f_{T_0}(n) = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 1 \\ \alpha Q^{n-2}(I - Q - M_0)1' & \text{για } n \geq 2' \end{cases} \quad (4.1.10)$$

η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της T_0 μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$H_{T_0}(s) = a(I + s(I - s \cdot Q)^{-1})(I - Q)^{-1}(I - Q - M_0)1', \quad (4.1.10)$$

όπου a δίνεται από τον τύπο (4.1.4).

Οι αποδείξεις όλων των παραπάνω σχέσεων (4.1.1 έως 4.1.10) παρουσιάζονται αναλυτικά στην εργασία των κυρίων Αντζουλάκου, Κούτρα και Ρακιτζή (2009).

4.2 Πιθανογεννήτρια συνάρτηση και μέσο μήκος του τεστ CSDF

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς, καθώς και η μέση τιμή των τ.μ. T , T_1 και T_0 για ένα τεστ εκκίνησης CSDF.

Αρχικά, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της T , θα δίνονται από τους τύπους

$$G_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(n)s^n, \quad H_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_T(n)s^n,$$

αντιστοίχως.

Με τη βοήθεια του τύπου (4.1.3) η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T εκφράζεται μέσω του πίνακα Q από τον τύπο

$$\begin{aligned} G_T(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \alpha Q^{n-2}(I - Q)1' \cdot s^n = s^2 \cdot a \left(\sum_{n=0}^{\infty} (s \cdot Q)^n \right) (I - Q)1' = \\ &= s^2 \cdot a(I - s \cdot Q)^{-1}(I - Q)1'. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Ακόμη, μέσω του πίνακα Q , η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της T θα δίνεται από

$$H_T(s) = 1 + s \cdot a(I - s \cdot Q)^{-1} \mathbf{1}' \quad (4.2.2)$$

και οι παραγοντικές ροπές $\mu'_{[m]} = E[T(T-1) \cdots (T-m+1)]$, για $m \geq 1$ της τ.μ. T μπορούν να δοθούν από τον τύπο

$$\mu'_{[m]} = \begin{cases} 1 + a(I - Q)^{-1} \mathbf{1}' & , \quad \text{για } m = 1 \\ m! a(I - Q)^{-m} Q^{m-2} \mathbf{1}' & , \quad \text{για } m \geq 2 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

όπου a δίνεται από τον τύπο (4.1.4).

Εναλλακτικά, μια διαφορετική σχέση για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T μπορεί να δοθεί με την βοήθεια της σχέσης (4.2.2) και θα έχει τη μορφή

$$G_T(s) = 1 - (1-s)H_T(s) = s(1 - (1-s)a(I - s \cdot Q)^{-1} \mathbf{1}'). \quad (4.2.4)$$

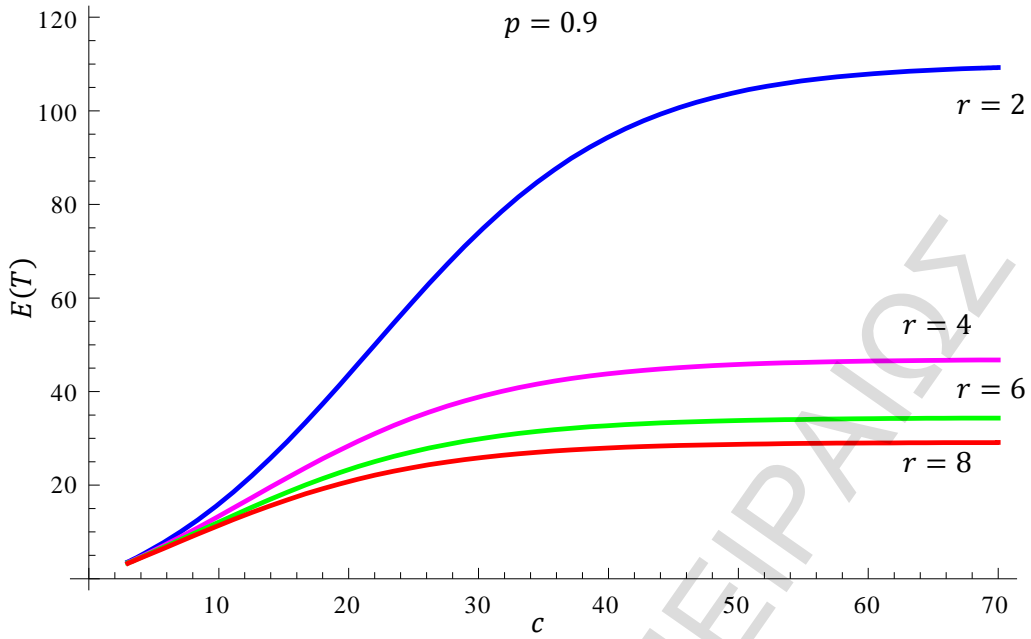
Έτσι, διεξάγοντας μερικούς απλούς αλλά χρονοβόρους υπολογισμούς για οποιαδήποτε από τις δυο παραπάνω εκφράσεις (4.2.1 και 4.2.4) της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της τ.μ. T , θα δοθεί ο ακόλουθος τύπος

$$G_T(s) = \frac{(1 - (ps))(ps)^c (1 - ps + qs - (qs)(ps)^{r-1} + (qs)^2 (1 - (ps)^c)) (1 - (ps)^{r-1})}{(1 - ps)(1 - ps - (qs)(ps)^{r-1} + (qs)(ps)^c)} \quad (4.2.5)$$

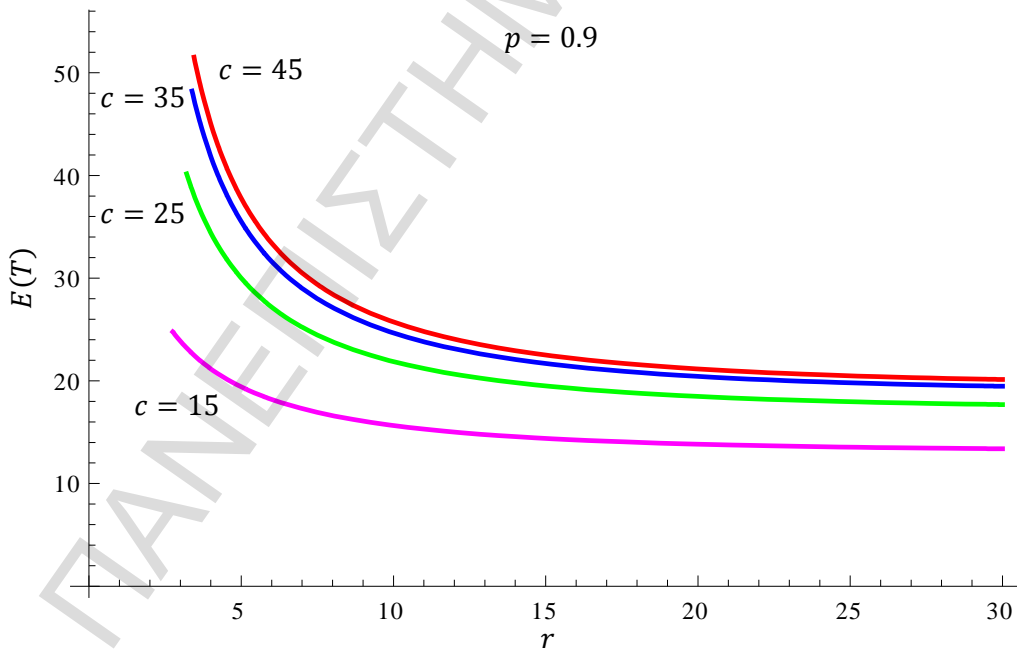
Επίσης, χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.2.3) μπορούμε να καθορίσουμε τον τύπο για τον μέσο χρόνο αναμονής $E(T) = \mu'_{[1]}$ των εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ *CSDF*, ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$E(T) = \frac{(1 - p^c)(2 - p^{r-1})}{(1 - p)(1 + p^c - p^{r-1})}$$

Στο Σχήμα 4.2.1 παρατηρούμε ότι ο μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ της τ.μ. T μέχρι τον τερματισμό του τεστ *CSDF* είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς c . Ακόμη, παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου r , ο μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ μειώνεται.



Σχήμα 4.2.1: Μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ του τεστ CSDF συναρτήσει του c , για $p = 0.9$ και $r = 2, 4, 6, 8$



Σχήμα 4.2.2: Μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ του τεστ CSDF συναρτήσει του r , για $p = 0.9$ και $c = 15, 25, 35, 45$

Από την άλλη πλευρά, στο Σχήμα 4.2.2 παρατηρούμε ότι ο μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ της τ.μ. T μέχρι τον τερματισμό του τεστ *CSDF* είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς r . Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου c , ο μέσος χρόνος αναμονής $E(T)$ αυξάνεται.

Η πιθανογεννήτρια της κατανομής και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της τ.μ. T_i δίνονται γενικά από τους τύπους

$$G_{T_i}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_i}(n)s^n, \quad H_{T_i}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{T_i}(n)s^n,$$

αντιστοίχως.

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T_1 θα δίνεται μέσω του πίνακα Q από τον τύπο

$$G_{T_1}(s) = s^2 a(I - s \cdot Q)^{-1}(I - Q - M_1)1', \quad (4.2.6)$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της T_1 μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$H_{T_1}(s) = a(I + s(I - s \cdot Q)^{-1})(I - Q)^{-1}(I - Q - M_1)1', \quad (4.2.7)$$

όπου a δίνεται από τον τύπο (4.1.4).

Εκτελώντας μερικούς αλγεβρικούς υπολογισμούς στον τύπο (4.2.6) καταλήγουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T_1 μπορεί να δοθεί από τη ρητή έκφραση

$$G_{T_1}(s) = \frac{(ps)^c(1 - ps + qs(1 - (ps)^{r-1}))}{1 - ps - qs((ps)^{r-1} - (ps)^c)}. \quad (4.2.8)$$

Εκτός όμως από τα παραπάνω, αξίζει να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος αναμονής της τ.μ. T_1 μέχρι τον τερματισμό του τεστ *CSDF*. Παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_{T_1}(s)$ ως προς s και θέτοντας $s = 1$ προκύπτει ο χρόνος αναμονής της T_1 ως

$$\begin{aligned} E(T_1) &= G'_{T_1}(1) = \\ &= \frac{(1 - p^c + 2cq - qp^{r-1}(3c - r + 1 - p^c(1 - r) - cp^{r-1}))qp^c}{q^2(1 - p^{r-1} + p^c)^2}. \end{aligned}$$

Όμοια, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T_0 θα δίνεται με όρους του πίνακα Q , από τον τύπο

$$G_{T_0}(s) = s^2 a(I - s \cdot Q)^{-1}(I - Q - M_0)1', \quad (4.2.9)$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς της T_0 μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$H_{T_0}(s) = a(I + s(I - s \cdot Q)^{-1})(I - Q)^{-1}(I - Q - M_0)1', \quad (4.2.10)$$

όπου a δίνεται από τον τύπο (4.1.4).

Τέλος, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της T_0 , μέσω των τύπων (4.2.5) και (4.2.8), δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} G_{T_0}(s) &= G_T(s) - G_{T_1}(s) = \\ &= \frac{(qs)^2(1 - (ps)^c)(1 - (ps)^{r-1})}{(1 - ps)(1 - ps - qs((ps)^{r-1} - (ps)^c))}. \end{aligned}$$

4.3 Πιθανότητα αποδοχής και απόρριψης του τεστ CSDF

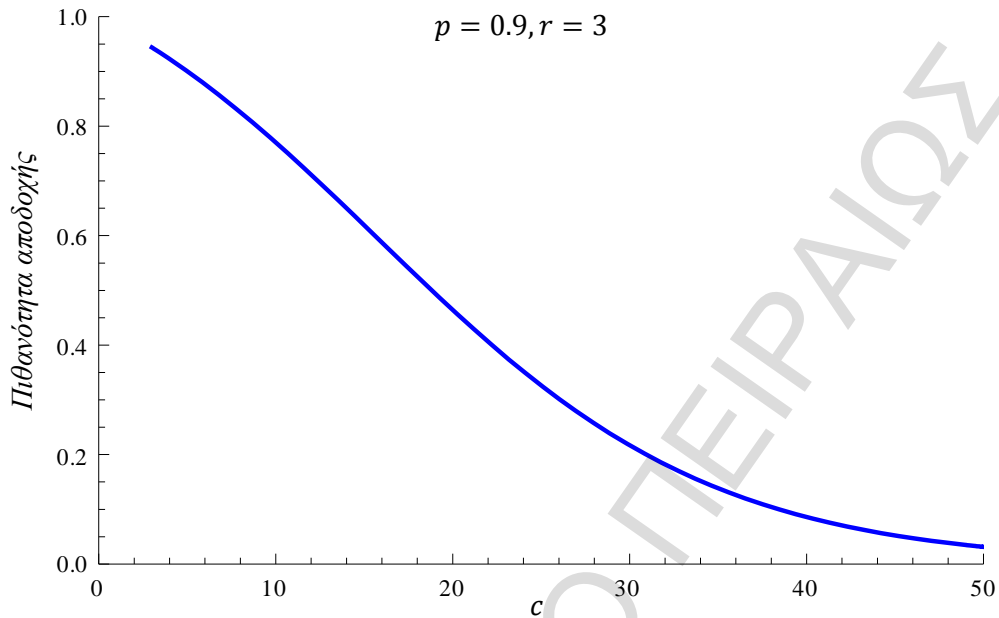
Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν η πιθανότητα αποδοχής και απόρριψης του τεστ εκκίνησης *CSDF*.

Ας εξετάσουμε τώρα έναν εξοπλισμό που υπόκειται στην τεχνική των τεστ εκκίνησης *CSDF* και ας συμβολίζουμε με p την πιθανότητα μιας επιτυχημένης εκκίνησης σε μια απόπειρα δοκιμής. Στη συνέχεια, η πιθανότητα να καταλήξουμε σε μια απόφαση (αποδοχή ή απόρριψη του εξοπλισμού) ακριβώς στη n -οστή δοκιμή ισούται με $f_T(n)$. Ο πρώτος όρος της δεξιάς πλευράς της έκφρασης $f_T(n) = f_{T_0}(n) + f_{T_1}(n)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα αποδοχής του εξοπλισμού στη n -οστή δοκιμή, ενώ ο δεύτερος την πιθανότητα απόρριψής του. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι οι συνολικές πιθανότητες αποδοχής και απόρριψης της συνιστώσας, δηλαδή

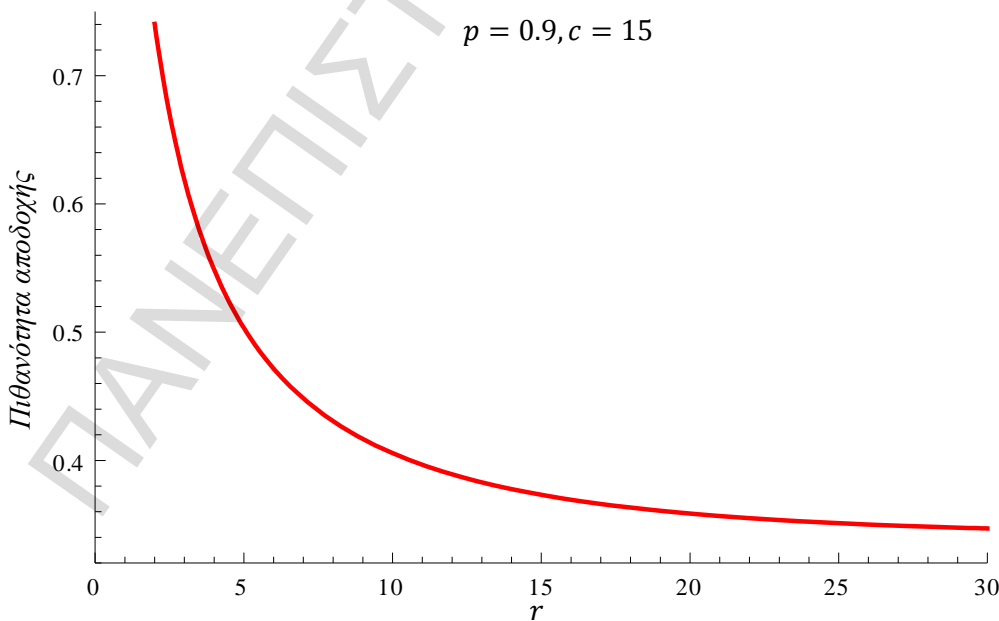
$$P_A = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_1}(n), \quad P_R = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_0}(n),$$

μπορούν να αξιολογηθούν μέσω των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων από τις προφανείς ταυτότητες $P_A = G_{T_1}(1)$, $P_R = G_{T_0}(1)$. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού από τη χρήση του τεστ *CSDF* μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$P_A = G_{T_1}(1) = \frac{p^c(2 - p^{r-1})}{1 - p^{r-1} + p^c}$$



Σχήμα 4.3.1: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ CSDF συναρτήσει του c , για $p = 0.9$ και $r = 3$

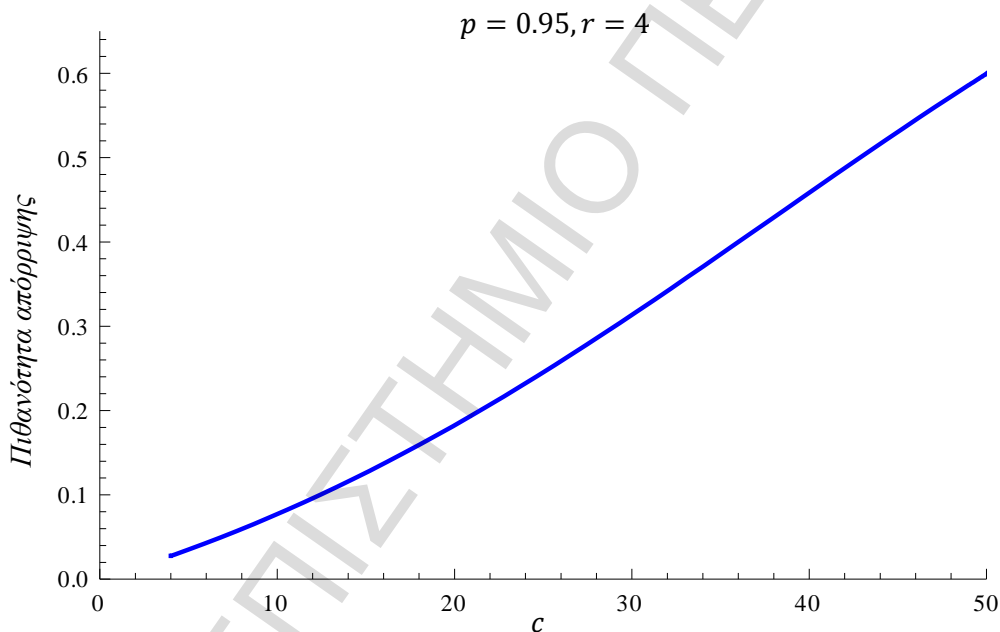


Σχήμα 4.3.2: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ CSDF συναρτήσει του r , για $p = 0.9$ και $c = 15$

Στα Σχήματα 4.3.1 και 4.3.2 παρατηρούμε ότι η πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSDF* είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς c και r , αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου c ή r , η πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSDF* μειώνεται.

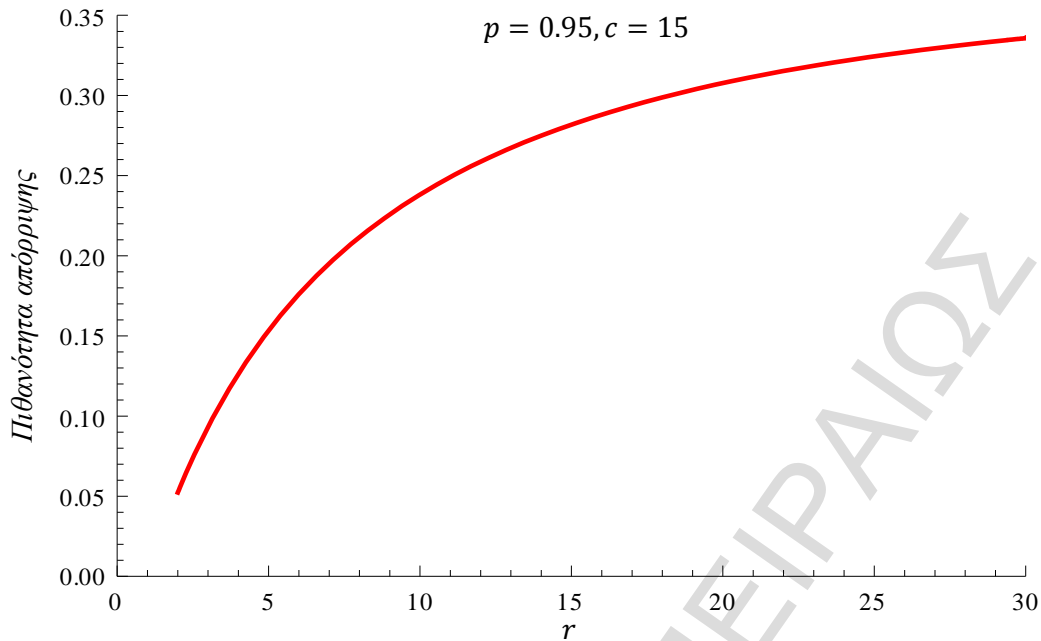
Από την άλλη πλευρά, η πιθανότητα απόρριψης ενός εξοπλισμού από τη χρήση του τεστ *CSDF* μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$P_R = G_{T_0}(1) = 1 - P_A = \frac{(1 - p^c)(1 - p^{r-1})}{1 - p^{r-1} + p^c}.$$



Σχήμα 4.3.3: Πιθανότητα απόρριψης του τεστ *CSDF* συναρτήσει του c , για $p = 0.95$ και $r = 4$

Στα Σχήματα 4.3.3 και 4.3.4 παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης του τεστ *CSDF* είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς c και r , αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου c ή r , η πιθανότητα απόρριψης του τεστ *CSDF* αυξάνεται.



Σχήμα 4.3.4: Πιθανότητα απόρριψης του τεστ CSDF συναρτήσεως του r , για $p = 0.95$ και $c = 15$

4.4 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης με χρήση των δεδομένων ενός τεστ CSDF

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν τρεις τρόποι υπολογισμού της εκτίμησης της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης, χρησιμοποιώντας δεδομένα ενός τεστ CSDF.

Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας μελετήθηκε από τους Viveros και Balakrishnan (1993) και παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 2.4 (Μέθοδος VB).

Ο επόμενος τρόπος υπολογισμού της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας μελετήθηκε από τους Smith και Griffith (2005) και εν συντομία αναφέρεται ως μέθοδος SG. Αυτή η μέθοδος εκτιμά την πιθανότητα p μόνο στην περίπτωση που έχει καταγραφεί ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων στις οποίες τα n τεστ εκκίνησης έχουν τερματιστεί. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε r διαφορετικές διατάξεις για τον τερματισμό του τεστ CSDF, δηλαδή

$$C_1 = \{\underbrace{11 \dots 1}_c\}, C_{0,1} = \{00\}, C_{0,2} = \{010\}, \dots, C_{0,r-1} = \{0 \underbrace{11 \dots 1}_{r-2} 0\}.$$

Οι πιθανότητες $p_{C_1}, p_{C_{0,1}}, p_{C_{0,2}}, \dots, p_{C_{0,r-1}}$ οτι το τεστ τερματίζεται στην εμφάνιση της διάταξης $C_1, C_{0,1}, C_{0,2}, \dots, C_{0,r-1}$, αντιστοίχα, δίνονται από τις σχέσεις

$$p_{C_1} = \frac{p^c(2 - p^{r-1})}{1 - p^{r-1} + p^c},$$

$$p_{C_{0,i}} = \frac{p^{i-2}(1-p)(1-p^c)}{1 - p^{r-1} + p^c}, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Προφανώς, αν οι διάταξεις $C_1, C_{0,1}, C_{0,2}, \dots, C_{0,r-1}$ έχουν παρατηρηθεί $n_1, n_{0,1}, n_{0,2}, \dots, n_{0,r-1}$ φορές, αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p) \propto p_{C_1}^{n_1} \prod_{i=1}^{r-1} p_{C_{0,i}}^{n_{0,i}},$$

και η ε.μ.π. της πιθανότητας p θα υπολογίζεται από την λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = 0,$$

το οποίο μπορεί να επιτευχθεί μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Τέλος, το $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το p θα είναι το

$$\left(\hat{p} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}}, \hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}} \right),$$

όπου $z_{\alpha/2}$ είναι το άνω $\alpha/2$ ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Ο τελευταίος και πιο ρεαλιστικός τρόπος υπολογισμού της εκτίμησης της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας προκύπτει όταν είναι διαθέσιμοι μόνο οι αριθμοί των δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του καθενός από τα n τεστ. Στην περίπτωση αυτή, οι Viveros και Balakrishnan (1993) πρότειναν τη χρήση της μεθόδου των ροπών για την εκτίμηση του p . Ωστόσο, αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ επειδή η μέση τιμή του συνολικού αριθμού των προσπαθειών μέχρι τη λήξη του τεστ δεν είναι μια μονότονη συνάρτηση του p . Σε τέτοιες περιπτώσεις θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος *EM* (βλ. Robert και Casella (2005)), για την εκτίμηση της πιθανότητας μιας επιτυχούς εκκίνησης (βλ Chan et al. (2007)).

Ας υποθέσουμε ότι γίνονται n τεστ εκκίνησης. Συμβολίζουμε με X_i, S_i και F_i τον αριθμό των προσπαθειών, επιτυχιών και αποτυχιών, αντίστοιχα, μέχρι τη λήξη του i -οστού τεστ ($1 \leq i \leq n$) και συνολικά

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, F = \sum_{i=1}^n F_i, X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (S_i + F_i) = S + F.$$

Επειδή λοιπόν ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι της μορφής

$$l(p; F, X) = X \log p + F \log \left(\frac{1-p}{p} \right),$$

ο αναμενόμενος λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας των πλήρων στοιχείων θα ορίζεται ως

$$X \log p + \left(\sum_{i=1}^n E(F|X = X_i) \right) \log \left(\frac{1-p}{p} \right),$$

και (διαφοροποιώντας το σε σχέση με το p και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με μηδέν) προκύπτει το παρακάτω επαναληπτικό σύστημα *EM*

$$p^{(j+1)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n E(F|X = X_i, p^{(j)})}{X},$$

όπου $p^{(j)}$ συμβολίζει την τρέχουσα εκτίμηση της πιθανότητας p . Τέλος, η παρατηρούμενη πληροφορία του Fisher, η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία του προσεγγιστικού διαστήματος εμπιστοσύνης για το p , παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} I(\hat{p}) &= \left. \frac{\partial^2 l(p; F, X)}{\partial p^2} \right|_{p=\hat{p}} = \\ &= E \left(\left. \frac{\partial^2 l(p; F, X)}{\partial p^2} \right| X \right)_{p=\hat{p}} + Var \left(\left. \frac{\partial l(p; F, X)}{\partial p} \right| X \right)_{p=\hat{p}}. \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με την εργασία των Αντζουλάκο, Κούτρα και Ρακιτζή (2009) και με χρήση αριθμητικών αποτελεσμάτων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος *VB* εκτιμά καλύτερα την άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας p σε σχέση με τις άλλες δυο μεθόδους. Το συμπέρασμα αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς η μέθοδος *VB* απαιτεί τη γνώση περισσότερων δεδομένων σε σχέση με τις άλλες δυο μεθόδους για την εκτίμηση την άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τεστ Εκκίνησης υπό τη συνθήκη της Ανταλλαξιμότητας

Ένα τεστ εκκίνησης χρησιμοποιείται συνήθως στην πράξη για να συγκεντρωθούν πληροφορίες σχετικά με την αξιοπιστία του εξοπλισμού.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μελέτη των Eryilmaz και Chakraborti (2008), οι οποίοι υπέθεσαν ότι η πιθανότητα μιας επιτυχημένης εκκίνησης είναι μια τυχαία μεταβλητή. Σύμφωνα λοιπόν με την υπόθεση αυτή, τα αποτελέσματα των προσπαθειών εκκίνησης είναι εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ένα ανταλλάξιμο μοντέλο.

5.1 Τεστ εκκίνησης CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας

Οι Balakrishnan και Chan (2000) μελέτησαν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του τεστ εκκίνησης *CSTF* υποθέτοντας ότι υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των δοκιμών. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, αν συμβούν c συνεχόμενες επιτυχίες πριν από d συνολικές αποτυχίες τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό, ενώ αντίθετα, αν συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από c συνεχόμενες επιτυχίες τότε το εξάρτημα απορρίπτεται. Έτσι, συμβολίζοντας με p την πιθανότητα μιας επιτυχημένης εκκίνησης, η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας $P_{c,d}$ και το μέσο μήκος του τεστ *CSTF* $E(Z_{c,d})$ για ανεξάρτητες εκκινήσεις (βλ. Balakrishnan και Chan (2000), και Smith και Griffith (2005)), θα δίνεται αντίστοιχα από τους τύπους

$$P_{c,d} = 1 - (1 - p^c)^d, \quad (5.1.1)$$

$$E(Z_{c,d}) = \frac{1 - p^c}{(1 - p)p^c} (1 - (1 - p^c)^d). \quad (5.1.2)$$

Παρά το γεγονός ότι η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι συνήθως το πρώτο βήμα στην ανάλυση, είναι σαφές ότι η εξάρτηση μεταξύ των τεστ εκκίνησης είναι σχεδόν αναπόφευκτη. Ένας λόγος για αυτό είναι ότι για κάθε προσπάθεια εκκίνησης χρησιμοποιείται ο ίδιος εξοπλισμός. Ο Martin (2004), και οι Smith και Griffith (2005) επέκτειναν τα αποτελέσματα των Balakrishnan και Chan (2000) μελετώντας την περίπτωση κατά την οποία οι ατομικές εκκινήσεις έχουν μια πρώτης τάξης Μαρκοβιανή εξάρτηση. Αργότερα, ο Martin (2008) θεώρησε ότι τα τεστ εκκίνησης ακολουθούν μια γενικότερης τάξης Μαρκοβιανή εξάρτηση. Οι Eryilmaz και Chakraborti (2008) μελέτησαν τα τεστ εκκίνησης CSTF υποθέτοντας ότι η πιθανότητα p μιας επιτυχημένης εκκίνησης είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αυτή η υπόθεση ουσιαστικά καθιστά τις ατομικές εκκινήσεις εξαρτημένες υπό τη συνθήκη ενός ανταλλάξιμου μοντέλου.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι X_1, X_2, \dots αποτελούν τα αποτελέσματα των επιτυχημένων τεστ εκκίνησης που εφαρμόζονται σε μία συσκευή. Η δίτιμη τυχαία μεταβλητή X_i συμβολίζει το αποτέλεσμα της i εκκίνησης, η οποία παίρνει την τιμή μηδέν για την αποτυχία και την τιμή 1 για την επιτυχία. Ακόμη, έστω ότι p υποδηλώνει την πιθανότητα της περίπτωσης όπου $X_i = 1$ ($p = P(X_i = 1)$), δηλαδή ότι το i -οστό τεστ εκκίνησης είναι επιτυχημένο. Γενικά, στην βιβλιογραφία έχει θεωρηθεί ότι όταν εφαρμόζονται τα τεστ, η πιθανότητα p είναι μια σταθερά, η οποία παραμένει ίδια για κάθε δεδομένη συσκευή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Η υπόθεση αυτή φαίνεται λογική, αν οι δοκιμές εκτελούνται κατά τη διάρκεια μιας σύντομης χρονικής περιόδου στην ίδια συσκευή. Εντούτοις, μέσα σε ορισμένους πληθυσμούς, η πιθανότητα p μπορεί να ποικίλει από συσκευή σε συσκευή. Για παράδειγμα, μια τέτοια κατάσταση μπορεί να προκύψει επειδή πολλές μονάδες παράγονται από την ίδια γραμμή παραγωγής, και χρησιμοποιούμε με τυχαία επιλογή μόνο μία μονάδα για έλεγχο.

Ένα πεπερασμένο σύνολο τυχαίων μεταβλητών λέγεται ότι είναι ανταλλάξιμο, αν για κάθε μετάθεση $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ των $i = 1, 2, \dots, n$,

$$P\{X_{\pi(1)} \leq x_1, X_{\pi(2)} \leq x_2, \dots, X_{\pi(n)} \leq x_n\} = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}.$$

Μια άπειρη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών λέγεται ότι είναι ανταλλάξιμη αν κάθε πεπερασμένη ακολουθία είναι ανταλλάξιμη.

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του de Finetti (1972), αν X_1, X_2, \dots είναι μια άπειρη ακολουθία από ανταλλάξιμες δίτιμες τυχαίες μεταβλητές, τότε υπάρχει μια κατανομή μίξης στο διάστημα $[0,1]$ τέτοια ώστε για κάθε n , και l ,

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = l\right\} = \binom{n}{l} \int_0^1 p^l (1-p)^{n-l} f(p) dp, \quad 0 < p < 1 \quad (5.1.3)$$

όπου

$$f(p) = \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}$$

και η συνάρτηση $B(a,b)$ συμβολίζει τη συνάρτηση Βήτα η οποία υπολογίζεται από τον τύπο

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Έτσι, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα p είναι μια τυχαία μεταβλητή και ο τύπος (5.1.3) δίνει την συνάρτηση πιθανότητας του συνολικού αριθμού των επιτυχημένων εκκινήσεων μέχρι την χρονική στιγμή n . Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, τα τεστ εκκίνησης μπορούν να θεωρηθούν ως μια μίξη από δοκιμές Bernoulli, και τα αποτελέσματά τους ως τυχαίες μεταβλητές που είναι θετικά εξαρτημένες από τη μίξη, ή είναι ανταλλάξιμες (βλ. Shaked (1977)).

5.2 Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας

Σε αυτή την Ενότητα θα παρουσιαστεί η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ CSTF υπό ανταλλαξιμότητα, σύμφωνα με την μελέτη των Eryilmaz και Chakraborti (2008). Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, ο συνολικός αριθμός προσπαθειών ή εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του πειράματος (ο χρόνος αναμονής ή το μήκος του τεστ) ορίζεται από τον τύπο

$$Z_{c,d} = \min(T_c, W_d), \quad (5.2.1)$$

όπου T_c είναι ο συνολικός αριθμός εκκινήσεων (δοκιμών) μέχρι την πραγματοποίηση των c συνεχόμενων επιτυχιών, και W_d είναι ο συνολικός αριθμός εκκινήσεων (δοκιμών) μέχρι την πραγματοποίηση των d συνολικών αποτυχιών.

Από τον τύπο (5.2.1) έχουμε ότι

$$P\{Z_{c,d} > z\} = P\{T_c > z, W_d > z\} = P\{L_z < c, S_z^{(0)} < d\},$$

όπου L_z είναι η μεγαλύτερη ροή επιτυχιών και $S_z^{(0)}$ είναι ο συνολικός αριθμός αποτυχιών στα X_1, X_2, \dots, X_z . Ακόμη, επειδή ο συνολικός αριθμός επιτυχιών είναι $S_z^{(1)} = z - S_z^{(0)}$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P\{Z_{c,d} > z\} &= \sum_{i=z-d+1}^z P\{L_z < c, S_z^{(1)} = i\} = \\ &= \sum_{i=z-d+1}^z P\{L_z < c | S_z^{(1)} = i\} P\{S_z^{(1)} = i\}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Η δεσμευμένη κατανομή του L_z δοθέντος του $S_z^{(1)}$ για τις ανταλλάξιμες δίτιμες τυχαίες μεταβλητές είναι η ίδια με τις δίτιμες μεταβλητές για την περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων (βλ. Eryilmaz και Demir (2007)). Επομένως, η συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τον τύπο

$$P\{L_z < c | S_z^{(1)} = i\} = \binom{z}{i}^{-1} N(i, c, z), \quad (5.2.3)$$

όπου

$$N(i, c, z) = \sum_{j=0}^{\min(\lfloor i/c \rfloor, z-i+1)} (-1)^j \binom{z-i+1}{j} \binom{z-j \cdot c}{z-i}. \quad (5.2.4)$$

Μετά από υπολογισμούς και αντικαθιστώντας τους τύπους (5.2.3) και (5.1.3) στον τύπο (5.2.2), η συνάρτηση κατανομής της $Z_{c,d}$ δίνεται από τον τύπο

$$P\{Z_{c,d} \leq z\} = 1 - \sum_{i=z-d+1}^z N(i, c, z) \int_0^1 p^i (1-p)^{z-i} f(p) dp \quad (5.2.5)$$

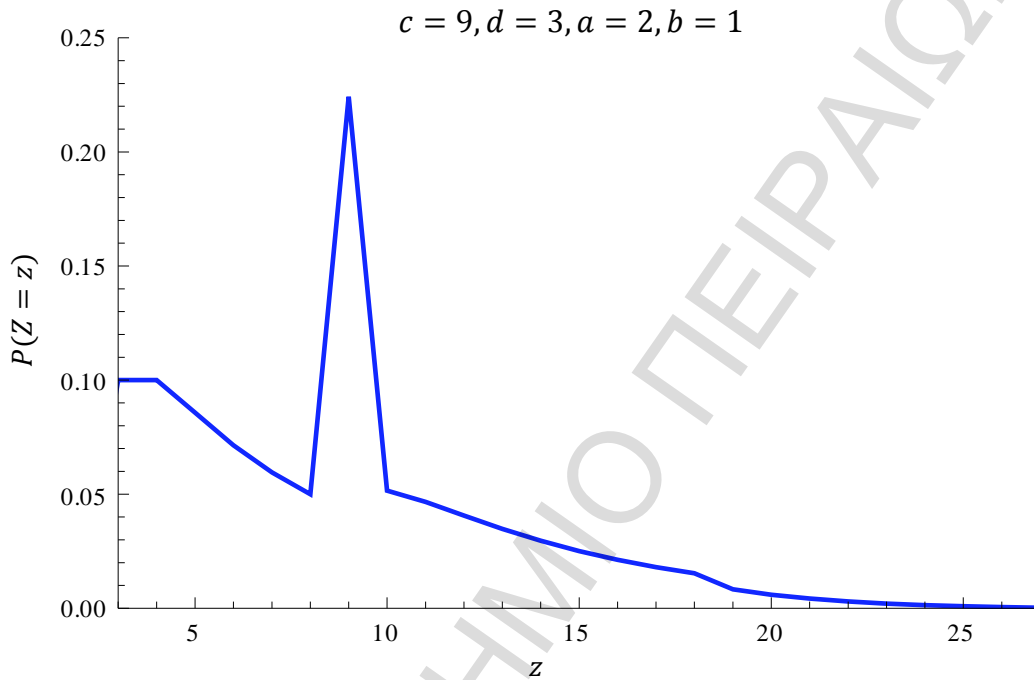
και τελικά η συνάρτηση πιθανότητας της $Z_{c,d}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$P\{Z_{c,d} = z\} = P\{Z_{c,d} \leq z\} - P\{Z_{c,d} \leq z-1\},$$

για $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, c \cdot d$.

Στο Σχήμα 5.2.1 φαίνεται η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας για $c = 9, d = 3, a = 2$ και $b = 1$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

η κύρια κορυφή εμφανίζεται όταν $n = 9$ λόγω του ότι $c = 9$. Από το 10° τεστ και μετά η συνάρτηση πιθανότητας μειώνεται συνεχώς μέχρι το 27° τεστ εκκίνησης. Τέλος, είναι φανερό ότι οι πιθανότητες $P(X < 3)$ και $P(X > 27)$ είναι ίσες με το μηδέν επειδή γνωρίζουμε ότι $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, c \cdot d$.



Σχήμα 5.2.1: Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας για $c = 9, d = 3, a = 2$ και $b = 1$

5.3 Πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας

Εκτός από τη συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ *CSTF*, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας. Γενικά, για την πιθανότητα αποδοχής της μονάδας υπό δοκιμή $P_{c,d}$ του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας έχουμε ότι

$$P_{c,d} = P\{\text{αποδοχής}\} = P\{T_c < W_d\}.$$

Δεσμεύοντας ως προς W_d θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 P_{c,d} &= \sum_{m=d}^{\infty} P\{T_c < m | W_d = m\} \cdot P\{W_d = m\} = \\
 &= \sum_{m=d}^{\infty} P\{L_{m-1} \geq c | X_m = 0, S_{m-1}^{(0)} = d - 1\} \cdot P\{W_d = m\} = \\
 &= \sum_{m=d}^{\infty} P\{L_{m-1} \geq c | X_m = 0, S_{m-1}^{(1)} = m - d\} \cdot P\{W_d = m\} = \\
 &= \sum_{m=d}^{\infty} \left(1 - \binom{m-1}{m-d}^{-1} N(m-d, c, m-1)\right) \cdot P\{W_d = m\}, \quad (5.3.1)
 \end{aligned}$$

όπου είναι φανερό ότι

$$P\{W_d = m\} = \binom{m-1}{d-1} \int_0^1 p^{m-d} (1-p)^d f(p) dp. \quad (5.3.2)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τους τύπους (5.3.1) και (5.3.2), καταλήγουμε ότι η πιθανότητα αποδοχής της μονάδας υπό δοκιμή του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας, θα δίνεται από τον τύπο

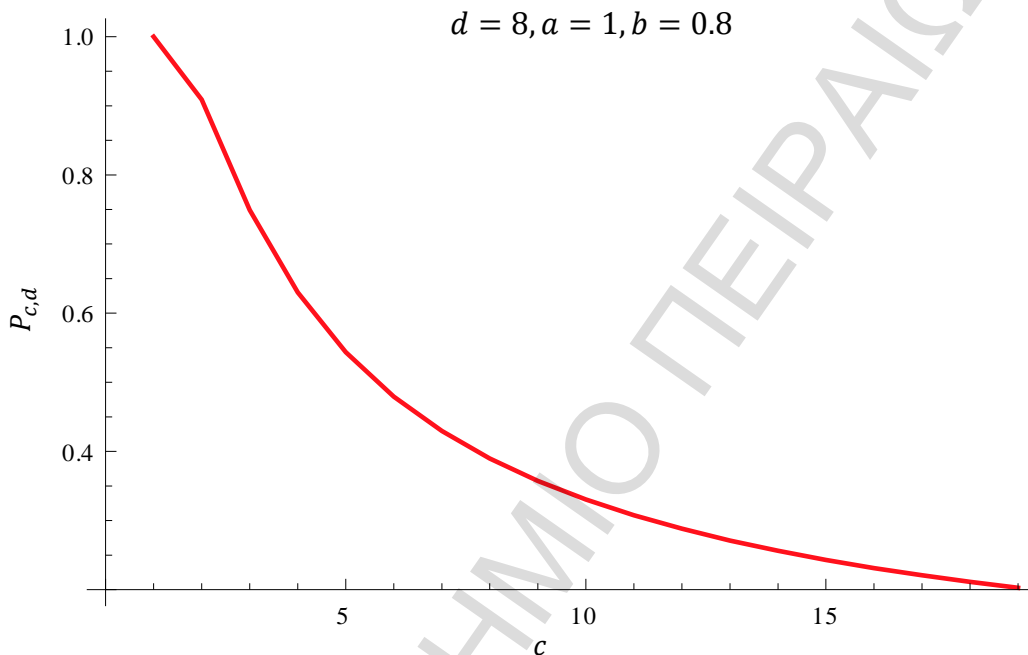
$$P\{\text{αποδοχής}\} = P_{c,d} = 1 - \sum_{m=d}^{\infty} N(m-d, c, m-1) \cdot \int_0^1 p^{m-d} (1-p)^d f(p) dp, \quad (5.3.3)$$

όπου $d = 1, 2, 3, \dots$

Διαφορετικά, η πιθανότητα αποδοχής μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο της πιθανότητας αποδοχής για την περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων, $1 - (1 - p^c)^d$, και θεωρώντας ότι η πιθανότητα p είναι μια τυχαία μεταβλητή με δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής f . Έτσι, η πιθανότητα αποδοχής της μονάδας υπό δοκιμή του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας, μπορεί να υπολογιστεί και από τον τύπο

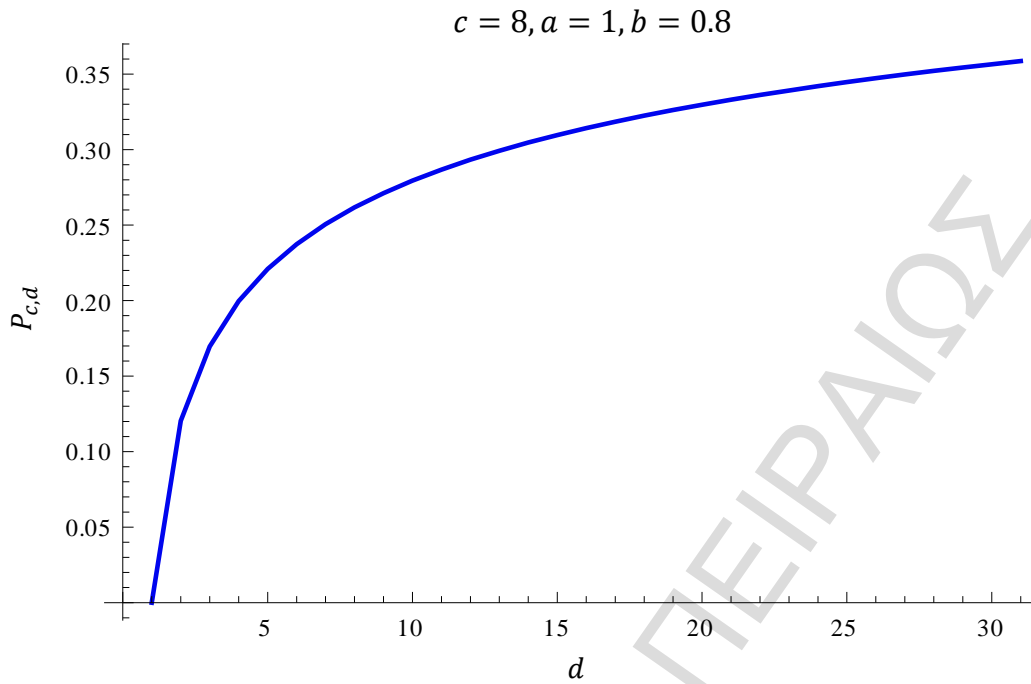
$$P\{\text{αποδοχής}\} = P_{c,d} = 1 - \int_0^1 (1 - p^c)^d f(p) dp. \quad (5.3.4)$$

Στα Σχήματα 5.3.1 και 5.3.2 δίνεται γραφικά η μορφή της πιθανότητας αποδοχής του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας συναρτήσει των παραμέτρων c, d . Σημειώνεται ότι και στα δυο σχήματα η πιθανότητα αποδοχής έχει υπολογιστεί μέσω του τυπου (5.3.4) για $a = 1$ και $b = 0.8$.



Σχήμα 5.3.1: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας συναρτήσει του c , για $d = 8, a = 1$ και $b = 0.8$

Από το Σχήμα 5.3.1 μπορεί κανείς να διακρίνει ότι, όπως στην περίπτωση του απλού τεστ *CSTF*, έτσι και στην περίπτωση του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας, η πιθανότητα αποδοχής μειώνεται όταν το d είναι σταθερό ($d = 8$) και το c αυξάνεται. Αυτό είναι λογικό, αφού όσο μεγαλύτερο είναι το c , τόσο πιο πιθανό είναι να συμβούν d συνολικές αποτυχίες πριν από τις c συνεχόμενες επιτυχίες, οπότε είναι και μικρότερη η πιθανότητα αποδοχής της μονάδας υπό δοκιμή. Ακόμη, στο Σχήμα 5.3.2 είναι εμφανές ότι για την περίπτωση που το c είναι σταθερό και το d αυξάνεται, συμβαίνει το αντίθετο και η πιθανότητα αποδοχής είναι αύξουσα.



Σχήμα 5.3.2: Πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας συναρτήσει του d , για $c = 8, a = 1$ και $b = 0.8$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του μήκους του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας δεδομένου ότι ο εξοπλισμός έγινε τελικά αποδεκτός, δίνεται από τον τύπο

$$P\{Z_{c,d} = z | \text{αποδοχή}\} = \frac{P\{Z_{c,d} = z, T_c < W_d\}}{P_{c,d}},$$

όπου

$$P\{Z_{c,d} = z, T_c < W_d\} = P\{T_c = z, W_d > z\} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 p^c df(p) dp, & \text{αν } z = c \\ \sum_{i=z-d+1}^{z-1} N(i-c, c, z-c-1) \cdot \int_0^1 p^i (1-p)^{z-i} f(p) dp, & \text{αν } z = c+1, \dots, c \cdot d. \end{cases}$$

Τέλος, η δεσμευμένη πιθανότητα του μήκους του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας δεδομένης της απόρριψης του εξοπλισμού, δίνεται από τον τύπο

$$P\{Z_{c,d} = z | \text{απόρριψη}\} = \frac{P\{Z_{c,d} = z\} - P\{Z_{c,d} = z, T_c < W_d\}}{1 - P_{c,d}}.$$

5.4 Σύγκριση του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας με το τεστ CSTF με ανεξάρτητες εκκινήσεις

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα των προηγούμενων ενοτήτων για το μέσο μήκος και την πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας, σε σύγκριση με το απλό τεστ *CSTF*. Η παρουσίαση των συμπερασμάτων αυτών θα γίνει χρησιμοποιώντας ως κατανομή μίξης για την πιθανότητα p την κατανομή Βήτα με συνάρτηση πυκνότητας $f(p) = \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}$ για $0 < p < 1$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^l (1-p)^{n-l} f(p) dp &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 p^l (1-p)^{n-l} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \\ &= \frac{B(a+l, n+b-l)}{B(a,b)}, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

και

$$p^* = P\{X_i = 1\} = \frac{a}{a+b}. \quad (5.4.2)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.4.1) στον τύπο (5.2.5), η κατανομή του μήκους του τεστ θα έχει τη μορφή

$$P\{Z_{c,d} \leq z\} = 1 - \sum_{i=z-d+1}^z N(i, c, z) \frac{B(a+i, z+b-l)}{B(a,b)}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.4.1) στον τύπο (5.3.3), η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας παίρνει τη μορφή

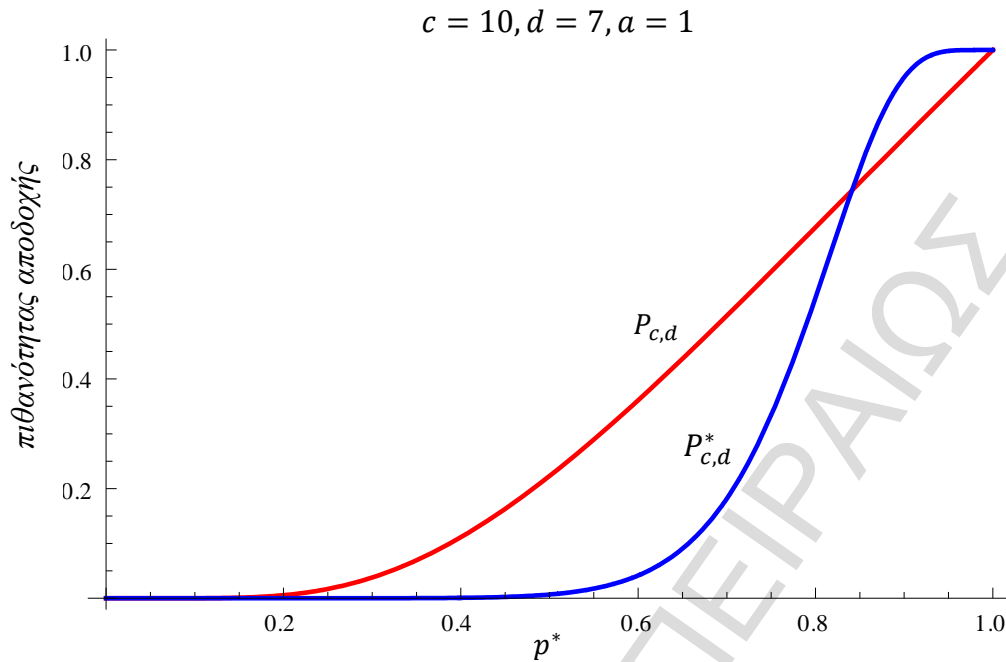
$$P_{c,d} = 1 - \sum_{m=d}^{\infty} N(m-d, c, m-1) \frac{B(a+m-d, d+b)}{B(a,b)},$$

ενώ μια ευκολότερη έκφραση για την πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας $P_{c,d}$, χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.3.4), θα δίνεται από τον τύπο

$$P_{c,d} = 1 - \sum_{m=0}^d (-1)^m \binom{d}{m} \frac{B(a + c \cdot m, b)}{B(a, b)}.$$

Σε αυτό το σημείο, με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, θα παρουσιαστούν κάποια διαγράμματα και κάποια αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με τα χαρακτηριστικά των τεστ εκκίνησης. Στον Πίνακα 5.4.1 έχουν υπολογιστεί οι τιμές της πιθανότητας αποδοχής του εξοπλισμού $P_{c,d}$ και $P_{c,d}^*$ για το τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας και για το τεστ *CSTF* για ανεξάρτητες εκκινήσεις, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές του εξοπλισμού υπολογίστηκαν για $c = 10$, $d = 7$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων a, b . Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα αποδοχής του τεστ *CSTF* για ανεξάρτητες εκκινήσεις υπολογίστηκε από τον τύπο $P_{c,d}^* = 1 - (1 - (p^*)^c)^d$, όπου p^* συμβολίζει την πιθανότητα μιας επιτυχημένης εκκίνησης και δίνεται από τον τύπο (5.4.2). Τέλος να σημειωθεί ότι στον παραπάνω τύπο ($P_{c,d}^*$) η πιθανότητα p^* είναι η αναμενόμενη τιμή της Βήτα κατανομής μίξης και αντικαθιστά την πιθανότητα p .

Πίνακας 5.4.1		<i>Πιθανότητα αποδοχής ενός συγκεκριμένου εξοπλισμού για $c = 10$ και $d = 7$</i>		
a	b	p^*	$P_{c,d}$	$P_{c,d}^*$
1	1	0.5000	0.2228	0.0068
	0.8	0.5556	0.2971	0.0194
	0.6	0.6250	0.3986	0.0619
	0.4	0.7143	0.5381	0.2183
	0.2	0.8333	0.7311	0.7086
2	2	0.5000	0.1389	0.0068
	1.75	0.5333	0.1795	0.0130
	1.25	0.6154	0.3004	0.0533
	0.5	0.8000	0.6385	0.5485
	0.2	0.9091	0.8437	0.9669



Σχήμα 5.4.1: Συγκριτικό διάγραμμα πιθανότητας αποδοχής $P_{c,d}$ και $P_{c,d}^*$ συναρτήσεως του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$

Στον Πίνακα 5.4.1 φαίνεται ότι για τις ίδιες πιθανότητες επιτυχίας εκκίνησης, η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας υπό το ανταλλάξιμο μοντέλο μπορεί να είναι ουσιαστικά διαφορετική από εκείνη κάτω από το μοντέλο των ανεξάρτητων και ισόνομων εκκινήσεων. Στην πραγματικότητα, σε όλες τις περιπτώσεις εκτός την τελευταία, η πιθανότητα αποδοχής είναι υψηλότερη υπό το ανταλλάξιμο μοντέλο. Ακόμη, στον Πίνακα 5.4.1 φαίνεται ότι όταν αυξάνεται η πιθανότητα μιας επιτυχημένης εκκίνησης ($a/a + b$), όπως ήταν αναμενόμενο, αυξάνεται η πιθανότητα αποδοχής και στα δυο μοντέλα. Όταν η πιθανότητα μιας επιτυχούς εκκίνησης είναι αρκετά υψηλό, για παράδειγμα περίπου στο 90%, η πιθανότητα αποδοχής υπό το ανταλλάξιμο μοντέλο είναι χαμηλότερη απ' ό,τι στο πλαίσιο του μοντέλου για ανεξάρτητες εκκινήσεις.

Στο Σχήμα 5.4.1 παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα των πιθανοτήτων αποδοχής $P_{c,d}$ και $P_{c,d}^*$ συναρτήσεως του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$. Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται να ισχύουν όλα όσα αναφέρθηκαν στον Πίνακα 5.4.1 καθώς παρατηρούμε ότι η πιθανότητα αποδοχής του ανταλλάξιμου μοντέλου $P_{c,d}$, είναι μεγαλύτερη σε σχέση με το μοντέλο για ανεξάρτητες εκκινήσεις $P_{c,d}^*$ για $p^* < 0.8$, ενώ για $p^* > 0.8$ ισχύει το αντίθετο.

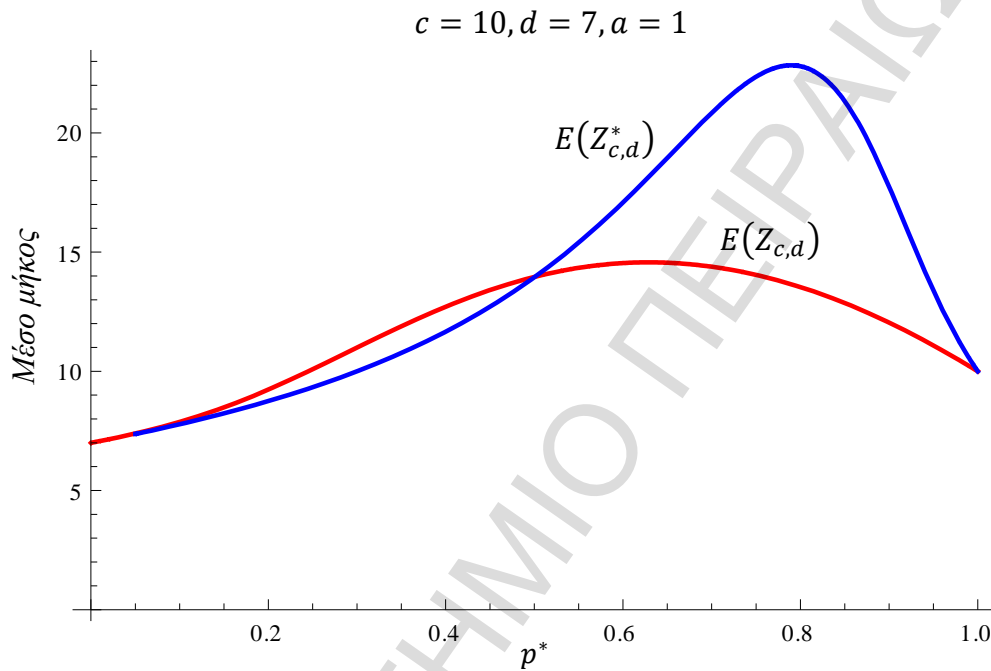
Στη συνέχεια, στον Πίνακα 5.4.2 έχουν υπολογιστεί οι τιμές του μέσου μήκους του τεστ $E(Z_{c,d})$ και $E(Z_{c,d}^*)$ για το τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας και για το τεστ CSTF για ανεξάρτητες εκκινήσεις, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές υπολογίστηκαν για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 5.4.1. Το μέσο μήκος του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας $E(Z_{c,d})$ υπολογίστηκε με τη βοήθεια της σχέσης (5.2.5). Τέλος, το μέσο μήκος του τεστ CSTF για ανεξάρτητες εκκινήσεις $E(Z_{c,d}^*)$ υπολογίστηκε από τον παρακάτω τύπο με πιθανότητα επιτυχημένης εκκίνησης p^* , χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.1.2)

$$E(Z_{c,d}^*) = \frac{1 - (p^*)^c}{(1 - p^*)(p^*)^c} (1 - (1 - (p^*)^c)^d).$$

Πίνακας 5.4.2	<i>Μέσο μήκος ενός τεστ CSTF για $c = 10$ και $d = 7$</i>			
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>p*</i>	$E(Z_{c,d})$	$E(Z_{c,d}^*)$
1	1	0.5000	13.9600	13.9454
	0.8	0.5556	14.3713	15.5745
	0.6	0.6250	14.5696	17.9998
	0.4	0.7143	14.3070	21.3364
	0.2	0.8333	13.1042	22.0729
2	2	0.5000	14.6078	13.9454
	1.75	0.5333	15.1518	14.8887
	1.25	0.6154	16.0936	17.6417
	0.5	0.8000	15.4243	22.7978
	0.2	0.9091	13.0319	16.9514

Ακόμη, στον Πίνακα 5.4.2 φαίνεται ότι για όλες σχεδόν τις περιπτώσεις (με εξαίρεση την 1^η, 6^η και 7^η περίπτωση), το μέσο μήκος του τεστ CSTF υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας $E(Z_{c,d})$ είναι αισθητά μικρότερο από το μέσο μήκος του τεστ CSTF για ανεξάρτητες εκκινήσεις $E(Z_{c,d}^*)$. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι για μικρές τιμές της

παραμέτρου b , και παράλληλα για υψηλές τιμές της πιθανότητας p^* , το μέσο μήκος του ανταλλάξιμου μοντέλου είναι πολύ μικρότερο από το μέσο μήκος του μοντέλου των ανεξάρτητων και ισόνομων εκκινήσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η 5^η περίπτωση του Πίνακα 5.4.2 όπου για $a = 1$ και $b = 0.2$, δηλαδή για υψηλή πιθανότητα $p^* = 0.8333$, έχουμε διαφορά περίπου 9 μονάδων.



Σχήμα 5.4.2: Συγκριτικό διάγραμμα μέσων μηκών $E(Z_{c,d})$ και $E(Z_{c,d}^*)$ συναρτήσεων του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$

Στο Σχήμα 5.4.2 παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα των μέσων μηκών $E(Z_{c,d})$ και $E(Z_{c,d}^*)$ συναρτήσεων του p^* , για $c = 10, d = 7$ και $a = 1$. Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται να ισχύουν όλα όσα αναφέρθηκαν στον Πίνακα 5.4.2 καθώς παρατηρούμε ότι το μέσο μήκος του ανταλλάξιμου μοντέλου $E(Z_{c,d})$, είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το μοντέλο για ανεξάρτητες εκκινήσεις $E(Z_{c,d}^*)$ για $p^* > 0.5$, ενώ για $p^* < 0.5$ ισχύει το αντίθετο.

Συμπερασματικά, με βάση τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα και διαγράμματα παρατηρούμε ότι σε γενικές γραμμές το ανταλλάξιμο μοντέλο δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το μοντέλο για ανεξάρτητες εκκινήσεις. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας, η πιθανότητα πρόωρου τερματισμού του τεστ μπορεί να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από το μοντέλο των ανεξάρτητων και ισόνομων εκκινήσεων.

Από την άλλη πλευρά η πιθανότητα μεταγενέστερου τερματισμού του τεστ μπορεί να είναι μικρότερη στο ανταλλάξιμο μοντέλο σε σχέση με το ανεξάρτητο μοντέλο. Τέλος, φαίνεται λογικό να συμπεράνουμε ότι κατά μέσο όρο, οι δοκιμές θα τερματίσουν στην πράξη πιο γρήγορα υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας σε σχέση με τις ανεξάρτητες εκκινήσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1. Προγράμματα για την κατασκευή των πινάκων σε Mathematica

Π2. Προγράμματα για την κατασκευή των σχημάτων σε Mathematica

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Π1. Προγράμματα για την κατασκευή των πινάκων σε Mathematica

Πίνακας 2.3.1

- Μέσο μήκος

```
c=20;q=1-p;p=0.6;
e=(1-p^c)/(q*(p^c));
Print[e]
```

- Διακύμανση

```
c=20;p=0.6;
v1=1/(((1-p)^2)*(p^(2*c)));
v2=(2*c+1)/((1-p)*(p^c));
v3=p/((1-p)^2);
v=v1-v2-v3;
Print[v]
```

Πίνακας 2.4.1

```
Clear[rs];
rs[a_,b_]:=Module[{k,p},k=a;
  p=b;
  i=0;l={};
  While[i<k,x=Random[BernoulliDistribution[p]];
    If[x==1,i=i+x,i=0];l=AppendTo[l,x]];
  y=Length[l];
  t=Total[l];
  f=y-t;
  Print["Sequence:"];Print[l];
  Print["Length of sequence = ",y];Print["Total successes = ",t];
  Print["Total failures = ",f]]
rs[15,0.9]
```

Πίνακας 2.8.1

```

Clear[rs];
rs[a_,b_,c_]:=Module[{k,p},p=a;
  k=b;
  d=c;
  i=0;l={};f=0;
  While[i≠k&&f≠d,x=Random[BernoulliDistribution[p]];
    If[x==1,i=i+x,i=0;f=f+1];
    l=AppendTo[l,x]];
  y=Length[l];
  t=Total[l];
  Print["Sequence:"];Print[l];
  Print["Length of sequence = ",y];Print["Consecutive successes = ",t];
  Print["Total failures = ",f]]
rs[0.9,12,5]

```

Πίνακας 3.5.1

```

Clear[rs];
rs[a_,b_,c_,d_,e_]:=Module[{p,k1,k2,k3,k4},p=a;
  k1=b;
  k2=c;
  k3=d;
  k4=e;
  l={};s1=0;s2=0;f1=0;f2=0;
  While[s1≠k1&&s2≠k2&&f1≠k3&&f2≠k4,x=Random[BernoulliDistribution[p]];
    If[x==1,s1=s1+1;f1=0;f1=f1+1;s1=0];
    l=AppendTo[l,x];
  y=Length[l];
  s2=Total[l];
  f2=y-s2];
  Print["Sequence:"];Print[l];
  Which[s1==k1,Print[s1," consecutive successes found"],s2==k2,
  Print[s2," total successes found"],f1==k3,
  Print[f1," consecutive failures found"],
  f2==k4,Print[f2," total failures found"]];
  Print["Length of sequence = ",y];Print["Total successes = ",s2];
  Print["Total failures = ",f2]]
rs[0.9,8,15,8,15]

```

Πίνακας 3.6.1

```
c=4;d=4;p=0.8;
ExpVal=((1-(p^c))*(1-((1-(p^c))^d)))/((1-p)*(p^c))
```

Πίνακας 3.6.2

```
ks=8;
kcs=4;
kf=4;
p=0.8;
N1[x1_,x2_,x3_]:=Sum[((-1)^j)*Binomial[x3-x1+1,j]*Binomial[x3-
j*x2,x3-x1],{j,0,Min[IntegerPart[x1/x2],x3-x1+1]};
P1[z_]:=1-Sum[N1[i,kcs,z]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,z-kf+1,Min[ks-1,z]};
P[z_]:=P1[z]-P1[z-1];
ExpVal=Sum[P[t]*t,{t,0,ks+kf}]/N
```

Πίνακας 3.6.3

```
p=0.8;
k1=8>(*total ones*)
k2=4>(*consecutive ones*)
f1=4>(*total zeros*)
f2=2>(*consecutive zeros*)

c1[n2_,k3_]:= (n1=n2;
c2=0;
l=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{k1}];
l2=Tuples[{0,1},n1];
l0=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{f1}];
Do[
If[Sum[l2[[t,i]],{i,1,n1}] < k3,
t1=Product[1-Product[l2[[t,i]],{i,j,j+k2-1}],{j,1,n1-k2+1}];
t12=Product[1-Product[l2[[t,l[[j,i]]]],{i,1,k1}],{j,1,Binomial[n1,k1]};
t2=Product[1-Product[1-
l2[[t,l0[[j,i]]]],{i,1,f1}],{j,1,Binomial[n1,f1]};
t21=Product[1-Product[1-l2[[t,i]],{i,j,j+f2-1}],{j,1,n1-f2+1}];
c2=c2+t1*t2*t12*t21];
,{t,1,Length[l2]};
```

```

Return[{c2});
G2[z_]:=Sum[c1[z,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,0,z}];
P[z_]:=G2[z-1]-G2[z];
exv=Sum[P[U]*U,{U,0,k1+f1}]/N

```

Πίνακας 5.4.1

```

k=10;d=7;a=1;b=01;p=a/(a+b);
P=N[1-Sum[((-1)^m)*Binomial[d,m]*(Beta[a+k*m,b]/Beta[a,b]),
  {m,0,d}];Print["P= ",P]
P1=N[1-(1-(p^k))^d];Print["P*= ",P1]

```

Πίνακας 5.4.2

- Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* για ανεξάρτητες εκκινήσεις

```

c=10;d=7;
a=1;b=1;
p=a/(a+b)//N;
Ex=((1-(p^c))*(1-(1-(p^c))^d))/((1-p)*(p^c))/N

```

- Μέσο μήκος του τεστ *CSTF* υπό τη συνθήκη της ανταλλαξιμότητας

```

k=10;
d=7;
a=1;
b=1;
N1[x1_,x2_,x3_]:=Sum[((-1)^j)*Binomial[x3-x1+1,j]*Binomial[x3-
j*x2,x3-x1],
  {j,0,Min[IntegerPart[x1/x2],x3-x1+1]}]
G[z_]:=Sum[N1[i,k,z]*Integrate[(p^(i+a-1))*((1-p)^(b-1+z-i)),
  {p,0,1}]*(1/Beta[a,b]),{i,z-d+1,z}]
P[z_]:=G[z-1]-G[z];
ExpectValue=Sum[P[t]*t,{t,Min[k,d],d*k}]/N

```


Π2. Προγράμματα για την κατασκευή των σχημάτων σε Mathematica

Σχήμα 2.1.1

```

c=16;d=c+12;
ap[x_,p_]=((x-1)!*(p^c)*(1-p)^(x-c))/((x-c)!*(c-1)!);
lprob1=Table[ap[x,0.8],{x,1,d}];
cprob1=Table[Sum[lprob1[[j]],{j,1,i}],{i,1,d}];
lprob2=Table[ap[x,0.9],{x,1,d}];
cprob2=Table[Sum[lprob2[[k]],{k,1,i}],{i,1,d}];
lprob3=Table[ap[x,0.95],{x,1,d}];
cprob3=Table[Sum[lprob3[[k]],{k,1,i}],{i,1,d}];
lprob4=Table[ap[x,0.99],{x,1,d}];
cprob4=Table[Sum[lprob4[[k]],{k,1,i}],{i,1,d}];
lprob5=Table[ap[x,0.999],{x,1,d}];
cprob5=Table[Sum[lprob5[[k]],{k,1,i}],{i,1,d}];
plot1=ListPlot[cprob1,PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  PointSize[0.01],Thickness[0.005]},
  PlotJoined->True,AxesOrigin->{14,0},PlotRange->{{14,28},{0,1}}];
plot2=ListPlot[cprob2,PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  PointSize[0.013],Thickness[0.005]},
  PlotJoined->True,AxesOrigin->{14,0},PlotRange->{{14,28},{0.2,1}}];
plot3=ListPlot[cprob3,PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  PointSize[0.01],Thickness[0.005]},
  PlotJoined->True,AxesOrigin->{14,0},PlotRange->{{14,28},{0.5,1}}];
plot4=ListPlot[cprob4,PlotStyle->{RGBColor[0,1,1],
  PointSize[0.01],Thickness[0.005]},
  PlotJoined->True,AxesOrigin->{14,0},PlotRange->{{14,28},{0.9,1}}];
plot5=ListPlot[cprob5,PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
  PointSize[0.01],Thickness[0.005]},
  PlotJoined->True,AxesOrigin->{14,0},PlotRange->{{14,28},{0.99,1}}];
Show[plot1,plot2,plot3,plot4,plot5]

```

Σχήμα 2.1.2

```

p=0.9;d=45;
ap[x_,c_]=((x-1)!*(p^c)*(1-p)^(x-c))/((x-c)!*(c-1)!);

```

```

lprob1=Table[ap[x,5],{x,1,d}];
cprob1=Table[Sum[lprob1[[j]],{j,1,i}],{i,1,d}];
lprob2=Table[ap[x,10],{x,1,d}];
cprob2=Table[Sum[lprob2[[k]],{k,1,i}],{i,1,d}];
lprob3=Table[ap[x,30],{x,1,d}];
cprob3=Table[Sum[lprob3[[l]],{l,1,i}],{i,1,d}];
plot1=ListPlot[cprob1,PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],PointSize[0.01],
  Thickness[0.005}},PlotJoined->True,PlotRange->{{0,45},{0,1}}];
plot2=ListPlot[cprob2,PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],PointSize[0.01],
  Thickness[0.005}},PlotJoined->True,PlotRange->{{0,45},{0.4,1}}];
plot3=ListPlot[cprob3,PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],PointSize[0.01],
  Thickness[0.005}},PlotJoined->True,PlotRange->{{0,45},{0.05,1}}];
Show[plot1,plot2,plot3]

```

Σχήμα 2.3.1

```

c=17;
e[p_]=(1-p^c)/((1-p)*(p^c));
Plot[e[p],{p,0.8,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.005}}]

```

Σχήμα 2.3.2

```

c=25;
e[p_]=(1-p^c)/((1-p)*(p^c));
Plot[e[p],{p,0.8,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],Thickness[0.005}}]

```

Σχήμα 2.3.3

```

e1[p_,c_]=(1-p^c)/((1-p)*(p^c));
p1=Plot[e1[p,10],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005}}];
p2=Plot[e1[p,20],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  Thickness[0.005}}];
p3=Plot[e1[p,30],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005}}];
Show[p1,p2,p3]

```

Σχήμα 2.3.4

```

c=8;
v1[p_]=1/(((1-p)^2)*(p^(2*c)));
v2[p_]=(2*c+1)/((1-p)(p^c));
v3[p_]=p/((1-p)^2);
v[p_]=v1[p]-v2[p]-v3[p];
Plot[v[p],{p,0.8,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
  Thickness[0.005]]}

```

Σχήμα 2.3.5

```

v1[p_,c_]=1/(((1-p)^2)*(p^(2*c)));
v2[p_,c_]=(2*c+1)/((1-p)(p^c));
v3[p_]=p/((1-p)^2);
va[p_]=v1[p,5]-v2[p,5]-v3[p];
vb[p_]=v1[p,6]-v2[p,6]-v3[p];
vc[p_]=v1[p,10]-v2[p,10]-v3[p];
vd[p_]=v1[p,15]-v2[p,15]-v3[p];
p1=Plot[va[p],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
  Thickness[0.005]]};
p2=Plot[vb[p],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  Thickness[0.005]]};
p3=Plot[vc[p],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]]};
p4=Plot[vd[p],{p,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]]};
Show[p1,p2,p3,p4]

```

Σχήμα 2.7.1

```

p=0.95;c=50;q=1-p;
e[d_]:=((1-p^c)*(1-(1-p^c)^d))/(q*(p^c));
Plot[e[d],{d,1,50},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]]}

```

Σχήμα 2.7.2

```
p=0.95;d=10;q=1-p;
e[c_] := ((1-p^c)*(1-(1-p^c)^d))/(q*(p^c));
Plot[e[c],{c,1,50},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]]]
```

Σχήμα 2.10.1

```
c=15;p2=0.8;p0=0.95;
e[p1_] := 1-(p0/p2)+(1-p1+p2-p2*(p1^(c-1)))/(p2*(1-p1)*(p1^(c-1)));
Plot[e[p1],{p1,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]},PlotRange->{{0.65,1},{0,1800}}]
```

Σχήμα 2.10.2

```
c=15;p1=0.9;p0=0.95;
e[p2_] := 1-(p0/p2)+(1-p1+p2-p2*(p1^(c-1)))/(p2*(1-p1)*(p1^(c-1)));
Plot[e[p2],{p2,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]},PlotRange->{{0.6,1},{38,40.5}}]
```

Σχήμα 2.10.3

```
p1=0.9;p2=0.99;c=15;
e[p0_] := 1-(p0/p2)+(1-p1+p2-p2*(p1^(c-1)))/(p2*(1-p1)*(p1^(c-1)));
Plot[e[p0],{p0,0.6,1},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  Thickness[0.005]},PlotRange->{{0.6,1},{38.1,38.6}}]
```

Σχήμα 2.12.1

```
d=10;p0=0.95;p1=0.9;p2=0.8;
P[c_] := 1-(1-p0*(p1^(c-1)))*(1-p2*(p1^(c-1)))^(d-1);
Plot[P[c],{c,0,50},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]]]
```

Σχήμα 2.12.2

```
c=20;p0=0.95;p1=0.9;p2=0.8;
P[d_]:=1-(1-p0*(p1^(c-1)))*(1-p2*(p1^(c-1)))^(d-1);
Plot[P[d],{d,0,50},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]]]
```

Σχήμα 2.13.1

```
d=10;p0=0.95;p1=0.9;p2=0.8;
e1[c_]:= (1-p1+p0*(1-p1^(c-1)))/(1+p1);
e2[c_]:= (1-p0*(p1^(c-1)))*(1-p1+p2*(1-p1^(c-1))) *
  (1-(1-p2*(p1^(c-1)))^(d-1));
e3[c_]:= p2*(1-p1)*(p1^(c-1));
e[c_]:= e1[c]+e2[c]/e3[c];
Plot[e[c],{c,1,50},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]]]
```

Σχήμα 2.13.2

```
c=20;p0=0.95;p1=0.9;p2=0.8;
e1:= (1-p1+p0*(1-p1^(c-1)))/(1+p1);
e2[d_]:= (1-p0*(p1^(c-1)))*(1-p1+p2*(1-p1^(c-1))) *
  (1-(1-p2*(p1^(c-1)))^(d-1));
e3:= p2*(1-p1)*(p1^(c-1));
e[d_]:= e1+e2[d]/e3;
Plot[e[d],{d,1,50},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]]]
```

Σχήμα 3.1.1

```
ks=14;kcs=11;kf=2;p=0.95;l={};
P1[z_]:=1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i+1,j]*Binomial[z-j*kcs,z-i],
  {j,0,Min[(i/kcs),z-i+1]}]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),
  {i,z-kf+1,Min[ks-1,z]}];
Do[l=AppendTo[l,P1[z]-P1[z-1]];,{z,1,17,1}]
ListPlot[l,Joined True,PlotRange->All]
```

Σχήμα 3.1.2

```

ks=14;kcs=11;kf=2;
P1[z_,p_]:=1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i+1,j]*Binomial[z-j*kcs,z-i],
  {j,0,Min[(i/kcs),z-i+1]}]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),
  {i,z-kf+1,Min[ks-1,z]}]-
(1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i,j]*
  Binomial[z-1-j*kcs,z-i-1],
  {j,0,Min[(i/kcs),z-i]}]*(p^i)*((1-p)^(z-1-i)),
  {i,z-kf,Min[ks-1,z-1]}]);
plot1=Plot[P1[5,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]};
plot2=Plot[P1[11,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  Thickness[0.005]};
plot3=Plot[P1[14,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]};
Show[plot1,plot2,plot3,PlotRange->{{0,1},{0,0.5}}]

```

Σχήμα 3.1.3

```

ks=20;kcs=12;kf=5;p=0.9;l={};
P1[z_]:=1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i+1,j]*Binomial[z-j*kcs,z-i],
  {j,0,Min[(i/kcs),z-i+1]}]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),
  {i,z-kf+1,Min[ks-1,z]}];
Do[l=AppendTo[l,P1[z]-P1[z-1]];{z,1,26,1}]
ListPlot[l,Joined True,PlotRange->All]

```

Σχήμα 3.1.4

```

ks=20;kcs=12;kf=5;
P1[z_,p_]:=1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i+1,j]*
  Binomial[z-j*kcs,z-i],{j,0,Min[(i/kcs),z-i+1]}]*
  (p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,z-kf+1,Min[ks-1,z]}]-
(1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i,j]*Binomial[z-1-j*kcs,z-i-1],
  {j,0,Min[(i/kcs),z-i]}]*(p^i)*((1-p)^(z-1-i)),
  {i,z-kf,Min[ks-1,z-1]}]);
plot1=Plot[P1[5,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]};
plot2=Plot[P1[12,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
  Thickness[0.005]};

```

```

plot3=Plot[P1[22,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]};
Show[plot1,plot2,plot3,PlotRange->{{0,1},{0,1}}]

```

Σχήμα 3.3.1

```

p=0.95;
k1=9>(*total ones*)
k2=6>(*consecutive ones*)
f1=4>(*total zeros*)
f2=3>(*consecutive zeros*)

c1[n2_,k3_]:= (n1=n2;
  c2=0;
  l=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{k1}];
  l2=Tuples[{0,1},n1];
  l0=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{f1}];
  Do[
    If[Sum[l2[[t,i]],[i,1,n1]]==k3,
      t1=Product[1-Product[l2[[t,i]],[i,j,j+k2-1]],
        {j,1,n1-k2+1}];
      t12=Product[1-Product[l2[[t,1[[j,i]]]],[i,1,k1]],
        {j,1,Binomial[n1,k1]};
      t2=Product[1-Product[1-l2[[t,l0[[j,i]]]],[i,1,f1]],
        {j,1,Binomial[n1,f1]};
      t21=Product[1-Product[1-l2[[t,i]],[i,j,j+f2-1]],
        {j,1,n1-f2+1}];
      c2=c2+t1*t2*t12*t21];
    ,{t,1,Length[l2]}];
  Return[{c2}];)
G2[z_]:= Sum[c1[z,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,0,z}];
l222={};
Do[l222=AppendTo[l222,G2[z-1]-G2[z]];Print[z],{z,1,13,1}]
ListPlot[l222,Joined->True,PlotRange->All]

```

Σχήμα 3.3.2

```

k1=9>(*total ones*)
k2=6>(*consecutive ones*)

```

```

f1=4>(*total zeros*)
f2=3>(*consecutive zeros*)

c1[n2_,k3_]:= (n1=n2;
  c2=0;
  l=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{k1}];
  l2=Tuples[{0,1},n1];
  l0=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{f1}];
  Do[
    If[Sum[l2[[t,i]],{i,1,n1}]==k3,
      t1=Product[1-Product[l2[[t,i]],{j,j+k2-1}],
        {j,1,n1-k2+1}];
      t12=Product[1-Product[l2[[t,l[[j,i]]]],{i,1,k1}],
        {j,1,Binomial[n1,k1]}];
      t2=Product[1-Product[1-l2[[t,l0[[j,i]]]],{i,1,f1}],
        {j,1,Binomial[n1,f1]}];
      t21=Product[1-Product[1-l2[[t,i]],{i,j,j+f2-1}],
        {j,1,n1-f2+1}];
      c2=c2+t1*t2*t12*t21];
  ,{t,1,Length[l2]}];
  Return[{c2}];)
G2[z_,p_]:= (Sum[c1[z-1,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-1-i)),
  {i,0,z-1}]- Sum[c1[z,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,0,z}];
plot1=Plot[G2[6,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]}];
plot2=Plot[G2[9,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]}];
Show[plot1,plot2,PlotRange->{{0,1},{0,0.6}}]

```

Σχήμα 3.3.3

```

p=0.85;
k1=11>(*total ones*)
k2=8>(*consecutive ones*)
f1=6>(*total zeros*)
f2=4>(*consecutive zeros*)

c1[n2_,k3_]:= (n1=n2;
  c2=0;
  l=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{k1}];

```



```

l2=Tuples[{0,1},n1];
l0=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{f1}];
Do[
  If[Sum[l2[[t,i]],{i,1,n1}]==k3,
    t1=Product[1-Product[l2[[t,i]],{i,j,j+k2-1}],{j,1,n1-k2+1}];
    t12=Product[1-Product[l2[[t,l[[j,i]]]],{i,1,k1}],{j,1,Binomial[n1,k1]}];
    t2=Product[1-Product[1-l2[[t,l0[[j,i]]]],{i,1,f1}],{j,1,Binomial[n1,f1]}];
    t21=Product[1-Product[1-l2[[t,i]],{i,j,j+f2-1}],{j,1,n1-f2+1}];
    c2=c2+t1*t2*t12*t21;
  ,{t,1,Length[l2]}];
Return[{c2}];)
G2[z_]:=Sum[c1[z,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,0,z}];
l222={};
Do[l222=AppendTo[l222,G2[z-1]-G2[z]];Print[z],{z,1,17,1}]
ListPlot[l222,Joined->True,PlotRange->All]

```

Σχήμα 3.3.4

```

k1=11>(*total ones*)
k2=8>(*consecutive ones*)
f1=6>(*total zeros*)
f2=4>(*consecutive zeros*)

c1[n2_,k3_]:= (n1=n2;
  c2=0;
  l=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{k1}];
  l2=Tuples[{0,1},n1];
  l0=Subsets[Table[i,{i,1,n1}],{f1}];
  Do[
    If[Sum[l2[[t,i]],{i,1,n1}]==k3,
      t1=Product[1-Product[l2[[t,i]],{i,j,j+k2-1}],{j,1,n1-k2+1}];
      t12=Product[1-Product[l2[[t,l[[j,i]]]],{i,1,k1}],{j,1,Binomial[n1,k1]}];
      t2=Product[1-Product[1-
l2[[t,l0[[j,i]]]],{i,1,f1}],{j,1,Binomial[n1,f1]}];
      t21=Product[1-Product[1-l2[[t,i]],{i,j,j+f2-1}],{j,1,n1-f2+1}];
      c2=c2+t1*t2*t12*t21;
    ,{t,1,Length[l2]}];
  Return[{c2}];)
G2[z_,p_]:= (Sum[c1[z-1,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-1-i)),
  {i,0,z-1}]) - Sum[c1[z,i][[1]]*(p^i)*((1-p)^(z-i)),{i,0,z}];

```

```
plot1=Plot[G2[8,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
Thickness[0.005]};
plot2=Plot[G2[11,p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
Thickness[0.005]};
Show[plot1,plot2,PlotRange->{{0,1},{0,0.6}}
```

Σχήμα 4.2.1

```
p=0.9;l=70;
e1[k_,r_]=(1-p^k)(2-(p^(r-1)))/((1-p)*(1+(p^k)-p^(r-1)));
p1=Plot[e1[k,2],{k,3,l},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
Thickness[0.005]};
p2=Plot[e1[k,4],{k,3,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
Thickness[0.005]};
p3=Plot[e1[k,6],{k,3,l},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
Thickness[0.005]};
p4=Plot[e1[k,8],{k,3,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
Thickness[0.005]};
Show[p1,p2,p3,p4,PlotRange->{{0,l},{0,120}},AxesOrigin->{0,0}]
```

Σχήμα 4.2.2

```
p=0.9;l=30;
e1[k_,r_]=(1-p^k)(2-(p^(r-1)))/((1-p)*(1+(p^k)-p^(r-1)));
p1=Plot[e1[15,r],{r,1,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
Thickness[0.005]};
p2=Plot[e1[25,r],{r,1,l},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0],
Thickness[0.005]};
p3=Plot[e1[35,r],{r,1,l},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
Thickness[0.005]};
p4=Plot[e1[45,r],{r,1,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
Thickness[0.005]};
Show[p1,p2,p3,p4,PlotRange->{{0,l},{0,55}},AxesOrigin->{0,0}]
```

Σχήμα 4.3.1

```
p=0.9;l=50;
pa[k_,r_]=((p^k)*(2-(p^(r-1))))/((1+(p^k)-(p^(r-1))));
Plot[pa[k,3],{k,3,l},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
```

```
Thickness[0.005]],PlotRange->{{0,1},{0,1}},
AxesOrigin->{0,0}]
```

Σχήμα 4.3.2

```
p=0.9;l=30;
pa[k_,r_]=((p^k)*(2-(p^(r-1))))/((1+(p^k)-(p^(r-1))));
Plot[pa[15,r],{r,2,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
Thickness[0.005]],PlotRange->{{0,1},{0.32,0.75}},
AxesOrigin->{0,0.32}]
```

Σχήμα 4.3.3

```
p=0.95;l=50;
pa[k_,r_]=((p^k)*(2-(p^(r-1))))/((1+(p^k)-(p^(r-1))));
pr[k_,r_]=1-pa[k,r];
Plot[pr[k,4],{k,4,l},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
Thickness[0.005]],PlotRange->{{0,1},{0,0.65}},
AxesOrigin->{0,0}]
```

Σχήμα 4.3.4

```
p=0.95;l=30;
pa[k_,r_]=((p^k)*(2-(p^(r-1))))/((1+(p^k)-(p^(r-1))));
pr[k_,r_]=1-pa[k,r];
Plot[pr[15,r],{r,2,l},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
Thickness[0.005]],PlotRange->{{0,1},{0,0.35}},
AxesOrigin->{0,0}]
```

Σχήμα 5.2.1

```
k=9;d=3;l=Table[0,{27}];a=2;b=1;
P1[z_]:=1-Sum[Sum[(-1)^j*Binomial[z-i+1,j]*Binomial[z-j*k,z-i],
{j,0,Min[(i/k),z-i+1]}]*Integrate[(p^i)*((1-p)^(z-i))*
(1/Beta[a,b])*(p^(a-1))*((1-p)^(b-1)),{p,0,1}],
{i,z-d+1,z}];
Do[l[[z]]=(P1[z]-P1[z-1]);Print[z],{z,3,27,1}]
ListPlot[l,Joined->True,PlotRange->{{3,27},{0,0.25}},
```

```
AxesOrigin->{3,0}
```

Σχήμα 5.3.1

```
d=8;a=1;b=0.8;l={};
Pa[k_]:=1-Integrate[(((1-(p^k))^d)*
  (1/Beta[a,b])*(p^(a-1))*((1-p)^(b-1))),{p,0,1}];
Do[l=Append[l,Pa[k]];Print[k],{k,0,18,1}]
ListPlot[l,Joined->True,PlotRange->All]
```

Σχήμα 5.3.2

```
k=12;a=1;b=0.8;l={};
Pa[d_]:=1-Integrate[(((1-(p^k))^d)*(1/Beta[a,b])*(
  p^(a-1))*((1-p)^(b-1))),{p,0,1}];
Do[l=Append[l,Pa[d]];Print[d],{d,0,30,1}]
ListPlot[l,Joined->True,PlotRange->All]
```

Σχήμα 5.4.1

```
k=10;d=7;a=1;
P[p_]:=1-Sum[((-1)^m)*Binomial[d,m]*(Beta[a+k*m,
  ((1-p)*a/p])/Beta[a,((1-p)*a/p)]),{m,0,d}];
P1[p_]:=1-(1-(p^k))^d;
pl1=Plot[P[p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005}}];
pl2=Plot[P1[p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005}}];
Show[pl1,pl2]
```

Σχήμα 5.4.2

```
k=10;
d=7;
a=1;
N1[x1_,x2_,x3_]:=Sum[((-1)^j)*Binomial[x3-x1+1,j]*
  Binomial[x3-j*x2,x3-x1],{j,0,Min[IntegerPart[x1/x2],x3-x1+1}}]
```

```

G[z_,p_]:= Sum[N1[i,k,z]*Integrate[(p1^(i+a-1))
  *((1-p1)^(((1-p)*a/p)-1+z-i)),{p1,0,1}]*
  (1/Beta[a,((1-p)*a/p)]),{i,z-d+1,z}];
Ex[p_]=Sum[(G[z-1,p]-G[z,p])*z,{z,Min[k,d],d*k}];
ExpVal[p_]:=(((1-(p^k))*(1-((1-(p^k))^d)))/((1-p)*(p^k)));
pl1=Plot[Ex[p],{p,0,1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
  Thickness[0.005]}];
pl2=Plot[ExpVal[p],{p,0.05,1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
  Thickness[0.005]}];
Show[pl1,pl2,PlotRange->{{0,1},{0,23}},AxesOrigin->{0,0}]

```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ. (2007). Στατιστικός έλεγχος ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων, 1.

Ξένη

Antzoulakos, D. L., Koutras, M. V. and Rakitzis A. C. (2009). Start-up demonstration tests based on run and scan statistics, *Journal of Quality Technology*, **41**, 48-59.

Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (2000). Start-up demonstration tests with rejection of units upon observing d failures, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **52**, 184-196.

Balakrishnan, N. and Koutras, M. V. (2002). Runs and scans with applications, *John Willey and Sons, New York*.

Chao, M. T., Fu, J. C. and Koutras, M. V. (1995). Survey of reliability studies of consecutive $-k-$ out $-of-$ n : F and related systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 120-127.

Eryilmaz, S. and Chakraborti, S. (2008). On start-up demonstration tests under exchangeability, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 627-632.

Eryilmaz, S. and Demir, S. (2007). Success runs in a sequence of exchangeable binary trials, *J. Statist. Plann. Inference*, **137**, 2954-2963.

De Finetti, B. (1972). Probability, Induction and Statistics, *John Willey and Sons, New York*.

Gera, A. E. (2010). A new start-up demonstration test, *IEEE Transactions on Reliability*, **59**, 128-131.

Gera, A. E. (2011). A general model for start-up demonstration tests, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 295-304.

Hahn, G. J. and Gage, J. B. (1983). Evaluation of a start-up demonstration test, *Journal of Quality Technology*, **15**, 103-106.

Hahn, G. J. and Shapiro, S. S. (1967). Statistical models in engineering, *John Willey and Sons, New York*.

- Kuo, W. and Zuo, M. J.(2003). *Optimal Reliability Modeling, Principles and applications*, John Willey and Sons, New York.
- Martin, D. E. K. (2004). Markovian start-up demonstration tests with rejection of units upon observing d failures, *European Journal of Operational Research*, **155**, 474-486.
- Robert, P. C. and Casella, G. (2005). *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd edition. New York, Springer.
- Shaked, M. (1977). A concept of positive dependence for exchangeable random variables, *The Annals of Statistics*, **5**, 505-515.
- Smith, M. L. and Griffith, W. S. (2005). Start-up demonstration tests based on consecutive successes and total failures, *Journal of Quality Technology*, **37**, 186-198.
- Smith, M. L. and Griffith, W. S. (2008). The analysis and comparison of start-up demonstration tests, *European Journal of Operational Research*, **186**, 1029-1045.
- Spott, D. A. (1973). Normal likelihoods and their relation to large sample theory of estimation, *Biometrika*, **60**, 457-465.
- Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1993). Statistical inference from a start-up demonstration test data, *Journal of Quality Technology*, **25**, 119-130.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

