# Στοχαστική Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Γ. Σιορόκος

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

στην *Αναλογιστική επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου*

2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, σύμφων α με τον εσωτερικό κανονισμό λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
-Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος
-Αναπληρωτής Καθηγητής Νεκτάριος Μιλτιάδης
-Λέκτορας Βρόντος Σπυρίδων (Επιβλέπων)

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστήμιου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

### Ευχαριστίες

Πρώτα απ όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σπύρο Βρόντο επιβλέπων καθηγητή της διπλωματικής αυτής εργασίας για την πολύτιμη βοήθεια του στην κατανόηση του αντικειμένου της Στοχαστικής θεωρίας Χαρτοφυλακίου. Η πλούσια βιβλιογραφία που μου πρότεινε, η επίλυση κάθε απορίας ή δυσκολίας που συνάντησα καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής και το πιο σημαντικό η μεταδοτικότητα της ολόπλευρης γνώσης του αντικειμένου της στοχαστικής θεωρίας του χαρτοφυλακίου, αποτέλεσαν αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε η εργασία αυτή να ειδωθεί με ένα οξυμένο ερευνητικό ενδιαφέρον από μεριάς μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ουσιαστική και καθοριστική τους στήριξη όλα αυτά τα χρόνια σπουδών, σε προπτυχιακό και σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή και Βασικές Έννοιες

## 1.1 Εισαγωγή

Η στοχαστική θεωρία χαρτοφυλακίου είναι ένα ευέλικτο μοντέλο για την ανάλυση της συμπεριφοράς του χαρτοφυλακίου και της αγοράς μετοχών. Είναι περιγραφική γιατί μελετά και επιχειρεί να εξηγήσει παρατηρήσιμα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στην αγορά μετοχών, γι αυτό και είναι συμβατή με παρατηρήσιμα χαρακτηριστικά πραγματικών χαρτοφυλακίων και των αγορών. Αυτό την καθιστά ένα θεωρητικό εργαλείο που είναι χρήσιμο για τις πρακτικές εφαρμογές.

Ως ένα θεωρητικό εργαλείο, το μοντέλο αυτό ανοίγει νέες τεκμηριωμένες γνώσεις σχετικά με ζητήματα της διάρθρωσης της αγοράς μετοχών και της κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο (*arbitrage*), και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή χαρτοφυλακίων με ελεγχόμενη συμπεριφορά. Ως ένα πρακτικό εργαλείο, η στοχαστική θεωρία χαρτοφυλακίου, έχει εφαρμοστεί για την κατασκευή χαρτοφυλακίων και έχει αποτελέσει τη βάση των επιτυχημένων στρατηγικών επενδύσεων για πάνω από μια δεκαετία.

Η θεωρία αυτή ξεκίνησε το 1995 με το χειρόγραφο *On the diversity of equity markets* του *Fernholz* στο περιοδικό *Journal of Mathematical Economics*.
Βασίζεται στην κλασική θεωρία χαρτοφυλακίου του *Markowitz* όπως και οι περισσότερες θεωρίες στα Χρηματοοικονομικά αλλα ταυτόχρονα διαφέρει από τις κανονιστικές θεωρίες που βασίζονται σε ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας και απουσίας κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο στις αγορές. Αντιθέτως η στοχαστική θεωρία χαρτοφυλακίου ειναι εφαρμόσιμη υπό ένα ευρύ φάσμα υποθέσεων και όρων που μπορούν να υπάρχουν στην πραγματική αγορά μετοχών. Έτσι είναι συνεπής και άρα εφαρμόσιμη είτε η αγορά είναι σε ισορροπια είτε όχι, είτε υπάρχει κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο είτε όχι, και δεν στηρίζεται στην ύπαρξη ισοδύναμων μέτρων *martingale*.
Η Στοχαστική Θεωρία Χαρτοφυλακίου χρησιμοποιεί το λογαριθμικό μοντέλο των τιμών των μετοχών και των χαρτοφυλακίων αντί για το αριθμητικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στα κλασικά οικονομικά μαθηματικά. Στο λογαριθμικό μοντέλο ο όρος της *απόδοσης* του αριθμητικού μοντέλου αντικαθίστανται από τον *ρυθμό ανάπτυξης*.

## 1.2 Βασικές Έννοιες

### 1.2.1 Στοχαστικές διαδικασίες

Με τον όρο στοχαστική διαδικασία εννοούμε το μαθηματικό εκείνο μοντέλο το προορισμένο να περιγράφει πιθανοθεωρητικά την εξέλιξη στο χρόνο ενός φαινομένου ή πειράματος.
Γενικά :

**Ορισμός 1.2.1** *Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών* $X_t$ *οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, F, P)$ *και παίρνουν τιμές στο* $R^d$.

Μια στοχαστική διαδικασία έχει λοιπόν δύο μεταβλητές, την $t$ και την ω. Για κάθε $t \in$T (το οποίο θεωρούμε δεδομένο και σταθερό) έχουμε μια τυχαία μεταβλητή

$$\omega \to X_t(\omega) : \omega \in \Omega$$

Θεωρώντας σταθερό $\omega$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$t \to X_t(\omega) : t \in T$$

η οποία ονομάζεται τροχιά (path ) της $X_t$.

Ένας τρόπος να κατανοήσουμε διαισθητικά την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας είναι να θεωρήσουμε μία συλλογή σωματιδίων τα οποία τα παρακολουθούμε στο χρόνο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $t$ είναι χρόνος, ο οποίος μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός, και το ω αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμμένο σωματίδιο ή πείραμα. Μια συγκεκριμμένη επιλογή του ω θα ονομάζεται μια πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας. Τότε $X_t(\omega)$ είναι η θέση του σωματιδίου ω την χρονική στιγμή $t$ ή ισοδύναμα το αποτέλεσμα του πειράματος ω την χρονική στιγμή αυτή.

### 1.2.2 Διαδικασίες *martingale*

Οι διαδικασίες martingale παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων, την στοχαστική ανάλυση και τις εφαρμογές της. Επίσης είναι πολυ σημαντικές στα μαθηματικά υποδείγματα της χρηματοοικονομικής θεωρίας. Ας ορίσουμε πρώτα την έννοια της διήθησης (filtration ).

**Ορισμός 1.2.2** *Μιά διήθηση είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες $F_t$ τέτοια ώστε για $s \leq t$*

$$F_s \subset F_t.$$

Η σ-άλγεβρα μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή $t$. Μια διήθηση μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Μια αρκετά συνηθισμένη έννοια είναι η έννοια της φυσική διήθησης. Αυτή είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία $X_t$. Όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την εν λόγω στοχαστική διαδικασία τόσο αυξάνει και η πληροφορία που έχουμε στην διάθεσή μας για την διαδικασία αυτή.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια των προσαρμοσμένων (adapted ) στοχαστικών διαδικασιών.

**Ορισμός 1.2.3** *Μία οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών $X_t$ ονομάζεται προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_i$ αν η $X_t$ είναι $F_t$- μετρήσιμη για κάθε $t$.*

Με απλά λόγια αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά την στοχαστική μεταβλητή $X_t$ μέχρι την χρονική στιγμή $t$ περιέχεται στην σ-άλγεβρα $F_t$. Από τον ίδιο τον ορισμό της φυσικής διηθήσεως μπορούμε να δούμε ότι μία στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι προσαρτημένη στην φυσική της διήθηση.
Έχοντας ορίσει τις παραπάνω έννοιες μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια ενδιαφέρουσα ειδική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών τις διαδικασίες martingale καθώς και τις διαδικασίες supermartingale και submartingale.

**Ορισμός 1.2.4** *Έστω $(\Omega, F, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων, $F_t$ μια διήθηση στην $F(F_t \subset F)$ και $X_t$ μια οικογένεια πραγματικών, ολοκληρώσιμων $(E[|X_t|] < \infty)$ τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$.*

*Τότε ισχύει ότι:*

1. *Η οικογένεια $X_t$ είναι μία martingale αν*

   $E[X_t|F_s] = X_s, \forall s \leq t$

2. *Η οικογένεια $X_t$ είναι μία supermartingale αν*

   $E[X_t|F_s] \leq X_s, \forall s \leq t$

*3. Η οικογένεια $X_t$ είναι μία submartingale αν*

$$E[X_t|F_s] \geq X_s, \forall s \leq t$$

Με απλά λόγια οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι για μια *martingale* έχοντας υπόψιν μας την πληροφορία που περιέχεται στην $F_s$ η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ είναι η τιμή $X_s$. Αν η $X_t$ είναι *supermartingale* η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ έχοντας υπόψιν την πληροφορία που περιέχεται στην $F_s$ θα είναι μικρότερη από την τιμή $X_s$. Τέλος αν η $X_t$ είναι *submartingale* η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ έχοντας υπόψιν την πληροφορία που περιέχεται στην $F_s$ θα είναι μεγαλύτερη απο την τιμή $X_s$. Η παραπάνω εικόνα γίνεται πιο καθαρή αν θεωρήσουμε την $X_t$ σαν μια στοχαστική διαδικασία με το $t$ να έχει την έννοια του χρόνου. Η $F_t$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε διήθηση αλλά μία επιλογή μπορεί να είναι η φυσική διήθηση $F_t = \sigma(X_u, u \leq t)$, δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τις τροχιές της τυχαίας διαδικασίας. Η $F_t$ στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία που αποκομίζουμε για την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ παρατηρώντας την από την αρχή των χρόνων $t = 0$ ως την χρονική στιγμή $t$. Αν η $X_t$ είναι *martingale*, έχοντας πλήρη γνώση για οτιδήποτε έχει συμβεί μέχρι την χρονική στιγμή $s$ η καλύτερη πρόβλεψη για το $X_t$, $t > s$ είναι η τιμή $X_s$ δηλαδή η τελευταία της τιμή όταν τελειώσει η περίοδος της παρατήρησης. Συνεπώς για μια *martingale* η πληροφορία που περιέχεται στην $F_s$ δεν θα μας βοηθήσει να προβλέψουμε τίποτε σχετικά με το μέλλον της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$.

Ας υποθέσουμε οτι η *martingale* $X_t$ μπορούσε να θεωρηθεί σαν το κέρδος από κάποιο τυχερό παιχνίδι, τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας την χρονική στιγμή $t$ έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παιχνιδιού μέχρι την χρονική στιγμή $s$ θα είναι το κέρδος που είχαμε την χρονική στιγμή $s$ δηλαδή το $X_s$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι μια *martingale* είναι το κέρδος απο ένα τίμιο παιγνίδι. Αντίθετα, αν η $X_t$ είναι μια *supermartingale* τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιχνίδι μέχρι την χρονική στιγμή $s$ θα είναι ότι το κέρδος μας θα μειωθεί. Συνεπώς μια *supermartingale* μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιχνίδι όταν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο που δεν ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιχνιδιού. Τέλος αν η $X_t$ είναι *submartingale* τότε η καλύτερη μας πρόβλεψη για το κέρδος έχοντας παρακολουθήσει το παιγνιδι μέχρι την χρονική στιγμή $s$ θα είναι ότι το κέρδος μας θα αυξηθεί. Συνεπώς μια *submartingale* μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιχνίδι αν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο το οποίο ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιχνιδιού. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των *martingale* είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 1.2.1** *Αν η $X_t$ είναι μια martingale τότε*

$$E[X_t] = E[X_0],$$

$$E[X_t - X_s] = 0$$

Η απόδειξη γίνεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις ακόλουθες έννοιες που γενικεύουν τις έννοιες των *martingale* και μας είναι πολύ χρήσιμες στην μελέτη μας.

**Ορισμός 1.2.5** *Η στοχαστική διαδικασία $M_t$ είναι μία τοπική martingale αν υπάρχει ακολουθία χρόνων στάσης $T_n$, $T_n \to \infty$, τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t_n}$ να είναι μια martingale για κάθε $n$. Αν η σταματημένη διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t_n}$ είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale για κάθε $n$, τότε η $X_t$ ονομάζεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τοπική martingale. Η ακολουθία $T_n$ ονομάζεται τοπική ακολουθία.*

**Ορισμός 1.2.6** *Η στοχαστική διαδικασία $A_t$ είναι μια διαδικασία τοπικά πεπερασμένης μεταβολής αν υπάρχουν χρόνοι στάσης $R_n$ τέτοιοι ώστε η στοχαστική διαδικασία $A_{R_n}$ να είναι φραγμένης μεταβολής.*

*Η στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι μια semimartingale αν μπορεί να γραφτεί σαν το άθροισμα μίας τοπικής martingale και μιας διαδικασίας τοπικά φραγμένης μεταβολής, δηλαδή αν*

$$X_t = M_t + A_t.$$

*Για μία semimartingale $X_t$ ισχύει για τη διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής ότι*

$$< X >_t = < M >_t \ .$$

**Ορισμός 1.2.8** *Έστω μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \Re$. Η τετραγωνική μεταβολή της συνάρτησης $f$ στο διάστημα $(a, b)$ ορίζεται ως*

$$\langle f \rangle_{a,b}^2 = \lim_{\delta_n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta f(t_i)|^2$$

*όπου* $\delta_n = sup|t_i + 1 - t_i|$ *και όπου* $\{t_i\}$ *είναι μια διαμέριση του* $[0, t]$.

### 1.2.3 Η κίνηση *Brown*

**Ορισμός 1.2.9** *Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία* $B_t$ *η οποία παίρνει τιμές στο* $\Re$ *και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

*(i) Αν* $t_0 < t_1 < ... < t_n$ *τότε οι τυχαίες μεταβλητές* $B_{t0}, B_{t1} - B_{t0}, \ldots, B_{tn} - B_{tn-1}$ *είναι ανεξάρτητες (δηλαδή οι μεταβολές είναι ανεξάρτητες)*

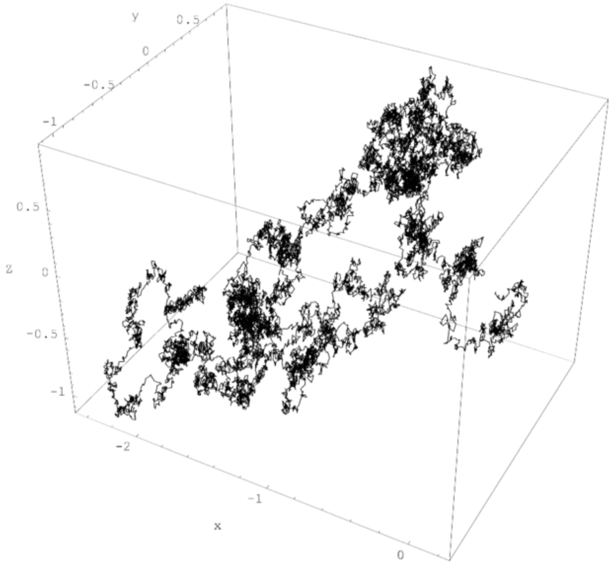
*(ii) Αν* $s, t \geq 0$, *τότε*

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{|x|^2}{2t})$$

$$B_{s+t} - B_s \ N(0, t)$$

*όπου* $A$ *κάποιο σύνολο* $Borel$, *δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες σύμφωνα με την κανονική κατανομή*

*(iii) Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η* $B_t$ *είναι συνεχής συνάρτηση.*




Κίνηση Brown

### 1.2.4 Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του *Ito*

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια τυχαία συνάρτηση $f$ η οποία εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έμβαση κάποιας κίνησης *Brown* και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της κίνησης *Brown*. Θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dB_t(\omega)$$

όπου $B_t(\omega)$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση *Brown* που ξεκινάει από το 0 ενώ $f$ είναι μια συνάρτηση

$$f : (0,\infty) \times \Omega \to \Re$$

**Ορισμός 1.2.10** *Ας θεωρήσουμε την διαμέριση* $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *του διαστήματος* $[\alpha, b]$ *και ότι προσεγγίζουμε την συνάρτηση*

$$f(t,\omega) \cong \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega) 1_{[t_i,t i+1)}(t)$$

*Το ολοκλήρωμα Ito μπορεί να οριστεί σαν όριο*

$$\int_a^b f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i,\omega) \left[B_{ti} + 1 - B_{ti}\right](\omega)$$

### 1.2.5 Διαδικασίες *Ito*

**Ορισμός 1.2.11** *Μια διαδικασία Ito είναι μια στοχαστική διαδικασία $X_t$ της μορφής*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega) ds + \int_0^t \upsilon(s,\omega) dB_s$$

*όπου οι $u$ και $\upsilon$ ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\int_0^t \upsilon^2(s,\omega) ds < \infty \ \sigma.\beta,$$
$$\int_0^t u(s,\omega) ds < \infty \ \sigma.\beta$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφτεί σε διαφορική μορφή

$$dX_t = udt + \upsilon dB_t.$$

### 1.2.6 Το Λήμμα του *Ito*

**Θεώρημα 1.2.2** *Θεωρούμε ότι η $X_t$ είναι μια διαδικασία Ito η οποία μπορεί να εκφραστεί ως*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t \upsilon(s,\omega)dB_s$$

*Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της* $X_t$ *της μορφής* $g(t,x)^{1,2}$ *μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής*

*Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη διαφορική μορφή:*

$$dg(t,X_t) = \int_0^t (\frac{\vartheta g}{\vartheta t} + u\frac{}{\vartheta x} + \frac{1}{2}\upsilon^2\frac{\vartheta^2 g}{\vartheta x^2})dt + \upsilon\frac{\vartheta g}{\vartheta x}dB_t$$

*Με* $C^{1,2}$ *συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων* $g(t,x)$ *που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την πρώτη μεταβλητή και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.*

Η ανισότητα *Schwarz* θα μας είναι αρκετα χρήσιμη στις εφαρμογές μας. Για παράδειγμα ισχύει :

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

$$\left[\int f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int [f(x)]^2\,dx \int [g(x)]^2\,dx.$$

# Κεφάλαιο 2

# Διαδικασία Τιμών Μετοχών και Αξίας Χαρτοφυλακίου

## 2.1 Διαδικασία Τιμών Μετοχών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τους βασικούς ορισμούς για τις μετοχές και τα χαρτοφυλάκια και θα αποδείξουμε κάποιες αρχικές σχέσεις που θα μας χρειαστούν στις επόμενες ενότητες. Για τη μελέτη μας θα πρέπει να υποθέσουμε ότι:

- ο αριθμός των εταιρειών στην αγορά είναι πεπερασμένος και σταθερός
- ο συνολικός αριθμός των μετοχών της κάθε εταιρείας είναι σταθερός και οι εταιρείες δεν διατρέχουν κίνδυνο συγχώνευσης ή διάλυσης
- οι συναλλαγές πραγματοποιούνται σε συνεχή χρόνο, χωρίς κόστη συναλλαγών και χωρίς φόρους
- τα μερίσματα θα πληρώνονται σε συνεχή χρόνο

- Οι τιμές των μετοχών και οι αξίες του χαρτοφυλακίου ακολουθούν στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες στο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, F, P)$
- σχεδόν βέβαια κάθε γεγονός έχει και μέτρο πιθανότητας P

Θα χρησιμοποιήσουμε το λογαριθμικό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών σε συνεχή χρόνο.

**Ορισμός 2.1.1** *Έστω $n$ θετικός ακέραιος. Η διαδικασία της τιμής της μετοχής $X$ είναι μια διαδικασία που ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$d\log X(t) = \gamma(t)\mathrm{d}t + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) dW_\nu(t), t \in [0, \infty) \tag{2.1}$$

*όπου $(W_1, \ldots, W_\nu)$ είναι μια κίνηση Brown,η συνάρτηση $\gamma$ είναι μετρήσιμη και ικανοποιεί την*

$$\int_0^T |\gamma|\, dt < \infty \ \forall T \in [0, \infty)$$

*και $\xi_\nu, \nu = 1, \ldots, n$ είναι μετρήσιμα και ικανοποιούν τις :*

$$i)\ \int_0^T (\xi_1^2(t) + \ldots + \xi_n^2(t))dt < \infty,\ T\in [0, \infty)$$

$$ii)\ \lim_{t\to\infty} t^{-1}(\xi_1^2(t) + \ldots \xi_n^2(t))loglogt = 0,\ t \in [0, \infty)$$

$$iii)\ \xi_1^2(t) + \ldots + \xi_n^2(t) > 0,\ t \in 0, \infty)$$

Ολοκληρώνοντας την (1.1) έχω:

$$logX(t) = logX_0 + \int_0^t \gamma(s)\,ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(s)\,dW\nu(s),\; t \in [0,\infty)$$

όπου $X_0$ αντιπροσωπεύει την αρχική αξία της μετοχής. Η διαδικασία της τιμής της μετοχής μπορεί να εκφραστεί ως:

$$X(t) = X_0 \exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(s)\,dW_\nu(s)\right), t \in [0,\infty) \qquad (2.2)$$

Για $i$ μετοχές η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$X_i(t) = X_0^i \exp\Bigg(\int_0^t \gamma_i(s)\,ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\nu i}(s)\,dW_\nu(s)\,), t \in [0,\infty)\; (2.3)$$

Στον ορισμό (1.1) που δώσαμε το $X(t)$ παριστάνει την τιμή της μετοχής την χρονική τιμή $t \geq 0$, και από την σχέση (1.2) έχουμε ότι το $X(t) > 0$ $\forall$τ$\in$ $[0,\infty)$, και συμβολίζει την *συνολική κεφαλαιοποίηση* της εταιρίας την χρονική στιγμή $t$. Η διαδικασία $\gamma(t)$ είναι ο *ρυθμός ανάπτυξης* του $X$ και το $\xi_\nu$ το ονομάζουμε πτητικότητα (*volatility*) του $X$ και εκφράζει την μεταβλητότητα ως προς την ν-ιοστή πηγή αβεβαιότητας. Η συνθήκη *ii*) του ορισμού 1.1.1 εγγυάται ότι η πτητικότητα της μετοχής δεν αυξάνει τόσο γρήγορα όσο ο ρυθμός ανάπτυξης της μετοχής. Ο ρυθμός ανάπτυξης αποτελεί ορολογία του λογαριθμικού μοντέλου. Στην κλασσική θεωρία χαρτοφυλακίου το μοντέλο εκεί χρησιμοποιεί τον ρυθμό απόδοσης. Στη Στοχαστική Θεωρία Χαρτοφυλακίου ο ρυθμός ανάπτυξης είναι καλύτερος δείκτης της μαρκοπρόθεσμης συμπεριφοράς της μετοχής από όσο ο ρυθμός απόδοσης. Γι αυτό και εμείς θα ασχοληθούμε παρακάτω με τον ρυθμό ανάπτυξης διεξοδικότερα.

Από τον αρχικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας της τιμής της μετοχής παίρνουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d\log X(t) = \gamma(t)\mathrm{d}t + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) dW_\nu(t), t \in [0,\infty)$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του *Ito* για $X(t){=}exp(logX(t))$,

έχουμε

$$dX(t){=}X(t)dlogx(t) + \tfrac{1}{2}X(t)d\left\langle logX\right\rangle_t,\, t\in[0,\infty)\,,$$

όπου

$$d\left\langle logX\right\rangle_t{=}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t)dt,\, t\in[0,\infty)$$

συνεπώς η X είναι ένα συνεχής *semimartingale* που ικανοποιεί την σχέση:

$$dX(t) = (\gamma(t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t))X(t)dt + X(t)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(t)dW_\nu(t),\, t\in[0,\infty)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόδοσης

$$\alpha(t){=}\gamma(t)\, +\, \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t),\, t\in[0,\infty)$$

γίνεται:

$$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + X(t)\textstyle\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(t)dW_\nu(t),\, t\in[0,\infty)$$

διαιρώντας κατα μέλη με $X(t)$ έχουμε

$$\frac{dX(t)}{X(t)}=\alpha(t)dt+\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{\nu}(t)dW_{\nu}(t),$$
$$t\in[0,\infty)$$

το

$$\frac{dX(t)}{X(t)}$$

εκφράζει την στιγμιαία απόδοση του X.

Έστω τώρα ότι έχουμε μια οικογένεια μετοχών $X_i$, $i=1,\ldots,n$ και για την οποία ισχύει

$$d\log X_i(t)=\gamma_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{\nu i}(t)dW_{\nu}(t),\ t\in[0,\infty)$$

ορίζοντας εδώ την συνδιακύμανση $\sigma$ όπου $\sigma(t)$=$\xi(t)\xi^T(t)$ για κάθε ξ $\in\Re$ και για $t\in[0,\infty)$

έχω

$$x\sigma(t)x^T=x\xi(t)\xi^T(t)x^T=x\xi(t)(x\xi(t))^T\geq 0,$$

Η διαδικασία των διακυμάνσεων, συνδιακυμάνσεων για τα $logX_i$ και $logX_j$ έτσι ώστε $\sigma(t)$ να είναι θετικά

$$\sigma_i j(t)dt=d\left\langle logX_i,logX_j\right\rangle_t=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}(t)\xi_{j\nu}(t)dt \text{ για } t\in[0,\infty)$$

εφόσον $\displaystyle\int_0^t|\sigma_{ij}(s)|\,ds<\infty.$

## 2.2 Διαδικασία Αξίας Χαρτοφυλακίου

**Ορισμός 2.2.1** *Μια αγορά είναι μια οικογένεια* $=X_1, \ldots, X_n$ *μετοχών όπως εκφράζεται στην σχέση 1.3 έτσι ώστε* $\sigma(t)$ *είναι μή ιδιάζουσα για όλα τα* $t \in [0, \infty)$.

**Ορισμός 2.2.2** *Η αγορά είναι μη εκφυλισμένη άν υπάρχει ένας αριθμός* $\epsilon > 0$ *τέτοιος ώστε*

$x\sigma(t)x^T \geq \epsilon \|x\|^2, \;\; t \in [0, \infty), \; x \in \mathbb{R}^n$

**Ορισμός 2.2.3** *Η αγορά λέμε οτι έχει φραγμένη διακύμανση αν υπάρχει ένας αριθμός* $M > 0$ *τέτοιος ώστε*

$x \; \sigma(t)x^T \leq M|x\|^2, t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^n$ *όπου* $\|x\|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

**Ορισμός 2.2.4** *Ένα χαρτοφυλάκιο στην αγορά* $M$ *είναι μια μετρήσιμη προσαρμοσμένη διαδικασία* $\pi$, $\pi(t)=(\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))$, *για* $t \in [0, \infty)$ *έτσι ώστε* $\pi$ *να είναι φραγμένο στο* $[0, \infty)$ *και*

$\pi_1(t)+\ldots+\pi_n(t)=1, \quad t \in [0, \infty)$

Τα $\pi_i$ εκφράζουν τα βάρη που αντιστοιχούν στις μετοχές του χαρτοφυλακίου. Έτσι δύο χαρτοφυλάκια είναι ίσα αν τα αντίστοιχα βάρη είναι ίσα για όλα τα $t \in [0, \infty)$.
Αν το βάρος μιας μετοχής είναι θετικό για παράδειγμα 10% αυτό σημαίνει οτι το 10% της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου έχει επενδυθεί στη συγκεκριμένη μετοχή. Αν το χαρτοφυλάκιο δεν έχει αγοράσει μετοχές απο τη συγκεκριμμένη μετοχή τότε το

βάρος της συγκεκριμένης μετοχής είναι μηδέν. Αν στο βάρος $\pi(t)$ είναι αρνητικό αυτό υποδηλώνει ότι πραγματοποιήθηκε ανοιχτή πώληση ($short\,sale$) στην $i$-στή μετοχή. Προφανώς τα βάρη του χαρτοφυλακίου χωρίς ανοιχτή πώληση ($short\,sales$) έχουν όλα μη αρνητικές τιμές. Έστω ένα χαρτοφυλάκιο $\pi$ και έστω οτι $Z_\pi(t) > 0$ είναι η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου $\pi$ την χρονική στιγμή $t$. Το ποσό επένδυσης στην $i$-στή μετοχή $X_i$ είναι

$$\pi_i(t) Z_\pi(t)$$

Αν η τιμή της $i$ μετοχής μεταβληθεί κατα $dX_i(t)$ τη χρονική στιγμή $t$ τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα μεταβληθεί κατά :

$$\pi_i(t) Z_\pi(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$$

άρα η συνολική μεταβολή στο χαρτοφυλάκιο την χρονική στιγμή $t$ είναι:

$$dZ_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) Z_\pi(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$$

όπου το

**Πρόταση 2.2.0.1** *Έστω $\pi$ ένα χαρτοφυλάκιο στην αγορά . Τότε η διαδικασία $Z_\pi$ που είναι η στοχαστική διαδικασία της αξίας του χαρτοφυλακίου $\pi$ ικανοποιεί την:*

$$dlog Z_\pi(t) = \gamma_\pi(t) dt + \textstyle\sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t) \xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t)$$

$\gamma\iota\alpha\ t \in [0,\infty)$

$\acute{o}\pi o\upsilon$

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ij}(t)\right)$$

*και εκφράζει τον ρυθμό ανάπτυξης* $(growth\, rate)$ *του χαρτοφυλακίου.*

$$Z_\pi(t) = Z_\pi(0)exp\left(\int_0^t \gamma_\pi(s)ds + \int_0^t \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)\right)$$

εφαρμόζοντας το λήμμα του $Ito$ για $Z_\pi(t) = exp(logZ_\pi(t))$ έχουμε:

$$dZ_\pi(t) = Z_\pi(t)dlogZ_\pi(t) + \tfrac{1}{2}Z_\pi(t)d\left\langle logZ_\pi\right\rangle_t, \text{ για όλα τα } t \in [0,\infty)$$

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \gamma_\pi(t)dt + \tfrac{1}{2}d\left\langle logZ_\pi\right\rangle_t + \textstyle\sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)$$

$$d\left\langle logZ_\pi\right\rangle_t = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)d\left\langle logX_i, logX_j\right\rangle_t = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_i j(t)dt$$

από τον ορισμό

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ij}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\right)$$

έχω

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t)dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_i\nu(t)dW_\nu(t)$$

αλλά

$$\sigma_{ii}(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_i\nu^2(t) \text{ άρα}$$

$$dX_i(t) = \left(\gamma_i(t) + \tfrac{1}{2}\sigma_{ii}(t)\right) X_i(t)dt + X_i(t)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_i\nu(t)dW_\nu(t) \text{ για όλα τα } t \in [0,\infty) \text{ με } i = 1,\ldots,n$$

έτσι

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$$

**Διακύμανση του χαρτοφυλακίου** $\sigma_{\pi\pi}$

Η διαδικασία $\sigma_{\pi\pi}$ ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_{\pi\pi}(t)=\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t),$$

και

$$\langle logZ_\pi\rangle_t=\int_0^t\sigma_{\pi\pi}(s)ds$$

έτσι η σχέση

$$dZ_\pi(t) = Z_\pi(t)dlogZ_pi(t) + \tfrac{1}{2}Z_\pi(t)d(logZ_\pi)_t$$

μπορεί να γραφτεί:

$$\tfrac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)}=dlogZ_\pi(t) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t)dt, \text{ για όλα τα } t \in [0,\infty)$$

Άν η αγορά έχει φραγμένη διακύμανση τότε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου $\sigma_{\pi\pi}$ είναι σχεδόν πάντα φραγμένη στο $[0,\infty)$ για κάθε χαρτοφυλάκιο $\pi$ .

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τον *υπερβάλλον ρυθμό ανάπτυξης* $\gamma_\pi^*$ ως εξής

$$\gamma_\pi^*(t){=}\tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_i i(t)-\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\right),\, t\in[0,\infty)$$

έτσι η σχέση μεταξύ του *ρυθμού ανάπτυξης* και του *υπερβάλλοντος ρυθμού ανάπτυξης* μπορεί να γραφτεί ως:

$$\gamma_\pi(t){=}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t)+\gamma_\pi^*(t),\, t\in[0,\infty)$$

ισοδύναμα

$$\gamma_\pi^*(t)=\tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t)-\sigma_{\pi\pi}(t)\right),t[0,\infty$$

Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο και $Z_\pi$ η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t$. Τότε

$$dlogZ_\pi(t)=\sum_{i=1}^{n}\pi(t)dlogX_i(t)+\gamma_\pi^*(t)dt,t\in[0,\infty)$$

Από το πόρισμα αυτό βλέπουμε ότι η στιγμιαία λογαριθμική αξία του χαρτοφυλακίου $dlogZ_\pi(t)$ είναι ο σταθμισμένος μέσος των στιγμιαίων λογαριθμικών αποδόσεων των μετοχών που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο $dlogX_i(t)$ συν τον υπερβάλλον ρυθμό ανάπτυξης. Επιπλέον από την σχέση $\gamma_\pi^*(t)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t)-\sigma_{\pi\pi}(t)\right),t[0,\infty$

προκύπτει οτι η $\gamma_\pi^*(t)$ είναι το ήμισυ της διαφοράς μεταξύ της μέσης σταθμισμένης διακύμανσης των μεμονωμένων μετοχών και της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου. Το $\gamma_\pi^*(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο της αποτελεσματικότητας της διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου στη μείωση της μεταβλητότητας σε σύγκριση με εκείνη των αποθεμάτων που το απαρτίζουν. Η διαφοροποίηση όχι μόνο μπορεί να μειώσει την μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου -πράγμα που είναι γνωστό από την κλασική θεωρία χαρτοφυλακίου-, αλλά επηρεάζει και τον ρυθμό ανάπτυξης χαρτοφυλακίου. Επιπλέον τα $\gamma_\pi^*(t)$ είναι θετικά για χαρτοφυλάκια που έχουν πάνω απο μια μετοχή και δεν πραγματοποιούν ανοιχτή πώληση. Αυτό σημαίνει πως για κάθε τέτοιο χαρτοφυλάκιο η σταθμισμένη μέση διακύμανση των μεμονωμένων μετοχών του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από την διακύμανση του χαρτοφυλακίου. Αυτό δεν θα ισχύει εάν το χαρτοφυλάκιο πραγματοποιεί ανοιχτές πωλήσεις (short sales ).

Ας ορίσουμε τώρα την απόδοση του χαρτοφυλακίου:

**Ορισμός 2.2.5** *Η απόδοση $\alpha_\pi(t)$ του χαρτοφυλακίου $\pi$ θα είναι*

$$\alpha_\pi(t)=\textstyle\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\alpha_i(t),\ t\in[0,\infty)$$

*όπου $\alpha_i$, $i=1,\ldots,n$ είναι η απόδοση του $X_i$ με*

$$\alpha(t)=\gamma_\pi(t)\ +\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t),\ t\in[0,\infty)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την απόδοση του χαρτοφυλακίου ως τον σταθμισμένο μέσο των αποδόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Η στιγμιαία απόδοση του λογαρίθμου των τιμών του χαρτοφυλακίου $dlogZ_{\pi}(t)$ είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των στιγμιαίων αποδόσεων των λογαρίθμων των τιμών των μετοχών $dlogX_i(t)$ συν τον υπερβάλλον ρυθμό μεταβολής.

Η σχέση

$$\frac{dX(t)}{X(t)}=\alpha_(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\nu}(t)dW_{\nu}(t),$$
$$t \in [0, \infty)$$

για $i$=1,...,ν γίνεται

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)}=\alpha_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(t)dW_{\nu}(t),$$
$$t \in [0, \infty)$$

οπότε η

$$\frac{dZ_{\pi}(t)}{Z_{\pi}(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \text{ γίνεται:}$$

$$\frac{dZ_{\pi}(t)}{Z_{\pi}(t)}=\alpha_{\pi}(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_{\nu}(t) \text{ για } t \in [0, \infty)$$

Από την σχέση

$$dlogZ_{\pi}(t) = \gamma_{\pi}(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_{\nu}(t)$$
$$\text{και την } \frac{dZ_{\pi}(t)}{Z_{\pi}(t)}=dlogZ_{\pi}(t) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t)dt, \text{ για όλα τα } t \in [0, \infty)$$

έχω

$$\frac{dZ_{\pi}(t)}{Z_{\pi}(t)} = \gamma_{\pi}(t)dt + \frac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_{\nu}(t),$$

συνεπώς

$$\alpha_\pi(t) = \gamma_\pi(t) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t),\ t \in [0, \infty)$$

**Παράδειγμα 2.2.1** *Στο κλασσικό μοντέλο του Markowitz η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου επιτυγχάνεται μέσω της ελαχιστοποίησης της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\alpha_i(t) \geq \alpha_0$$

*όπου* $\pi_1(t) + \ldots +_n (t) = 1$ *με* $\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t) \geq 0$

*Για να ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου κάτω από τον περιορισμό του ρυθμού ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου και όχι του ρυθμού απόδοσης του χαρτοφυλακίου έχουμε:*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_i j(t)) \geq \gamma_0$$

*Ισοδύναμα έχω*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) \geq \gamma_0 + \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_i j(t)$$

**Παράδειγμα 2.2.2** *Υποθέτουμε οτι θέλουμε να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο π που να μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή του* $logZ_\pi(t)$ *για* $t \in [0, \infty)$

*Έτσι για* $t \in [0, \infty)$

$$dlogZ_\pi(t) = \gamma_\pi(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_i\nu(t)dW_\nu(t),$$

*και επειδή η αναμενόμενη τιμή του τελευταίου όρου, του martingale συστατικού του* $dlogZ_\pi(t)$ *είναι μηδέν, η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής του λογαρίθμου* $logZ_\pi(t)$ *ανέρχεται στην μεγιστοποιήση του ρυθμού ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου* $\gamma_\pi(t)$.

*Για* $t \in [0, \infty)$

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)$$

*Η μεγιστοποίηση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται κάτω από τους περιορισμούς*

$$\pi_1(t) + \ldots +_n (t) = 1 \text{ με } \pi_1(t), \ldots, \pi_n(t) \geq 0$$

*Έχει αποδειχτεί ότι μεγιστοποιώντας την αναμενόμενη τιμή του* $logZ_\pi(t)$ *δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο με την μεγαλύτερη ασυμπτοτική τιμή, αλλα τέτοια χαρτοφυλάκια εμπεριέχουν υψηλά επίπεδα κινδύνου για τους περισσότερους επενδυτές.*

**Ορισμός 2.2.6** *Μια διαδικασία ρυθμού μερίσματος divident rate είναι μια μετρήσιμη, προσαρμοσμένη διαδικασία* $\delta$ *που ικανοποιεί την*

$$\int_0^t |\delta(s)| < \infty, \, t \in [0, \infty)$$

Συνήθως, οι ρυθμοί μερίσματος υποτίθεται ότι είναι μη αρνητικοί αλλά αυτή η υπόθεση δεν είναι απαραίτητη.

**Ορισμός 2.2.7** *Για μια μετοχή X με μερίσματα και με ρυθμό μερίσματος δ, ορίζουμε ως ολική απόδοση $\hat{X}$ ως*

$$\hat{X}(t) = X(t) exp(\int_0^t \delta(s) ds), \, t \in [0, \infty)$$

Η ολική απόδοση $\hat{X}$ παριστάνει την αξία μιας επένδυσης στη μετοχή X με όλα τα μερίσματα συνεχόμενα επαναεπενδυόμενα. Εάν $\delta = 0$ τότε

$\hat{X} = X$. Έπεται ότι $\hat{X}(0) = X(0)$

$$d log \hat{X}(t) = d log X(t) \delta(t) dt, \, t \in [0, \infty)$$

**Ορισμός 2.2.8** *Ως ρυθμό επαυξημένης ανάπτυξης καλούμε την διαδικασία:*

$$\rho(t) = \gamma(t) + \delta(t), \, t \in [0, \infty)$$

Έστω $\delta_1, \ldots, \delta_n$ είναι οι αντίστοιχοι ρυθμοί μερίσματος των μετοχών $X_1, \ldots, , X_n$ σε μια αγορά M. Για κάθε χαρτοφυλάκιο π , ορίζουμε ρυθμό μερίσματος τη διαδικασία $\delta_\pi$ για το χαρτοφυλάκιο από την σχέση

$$\delta_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\delta_i(t),\, t \in [0,\infty)$$

και την ολική απόδοση $\hat{Z}_\pi$ του π από

$$\hat{Z}_\pi(t) = Z_\pi(t) exp(\int_0^t \delta_\pi(s)ds),\, t \in [0,\infty)$$

Για μεμονωμένες μετοχές έχω:

$$\hat{Z}_\pi(t) = dlog Z_\pi(t) + \delta_p i(t)dt,\, t \in [0,\infty)$$

Η διαδικασία $\hat{Z}_\pi$ παριστάνει την αξία ενός χαρτοφυλακίου με ίδια βάρη π, αλλα όλα τα μερίσματα επαναεπενδύονται αναλογικά σε όλο το χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με το βάρος της κάθε μετοχής. Έτσι η επανεπένδυση των μερισμάτων, τροποποιεί την τιμή του $\hat{Z}_\pi$ ενώ διατηρεί τα βάρη του χαρτοφυλακίου π.

Στο σημείο αυτό ορίζουμε και τον ρυθμό επαυξυμένης ανάπτυξης για το π από τη σχέση

$$\rho_\pi(t) = \gamma_\pi(t) + \delta_\pi(t),\, t \in [0,\infty)$$

Για μια αγορά χωρίς μερίσματα ισχύει ότι $Z_\pi = \hat{Z}_\pi$ για κάθε π.

## 2.3 Σχετική Απόδοση και το Χαρτοφυλάκιο Αγοράς

Παρουσιάζεται συχνά το ενδιαφέρον στην μέτρηση της κατάστασης των μετοχών ή των χαρτοφυλακίων σε σχέση με ένα δοσμένο χαρτοφυλάκιο. Η έννοια της σχετικής απόδοσης θα μας χρησιμεύσει στο σημείο αυτό.

**Ορισμός 2.3.1** *Για μια μετοχή $X_i$, $1 \le i \le n$, και χαρτοφυλάκιο η η διαδικασία $log(\frac{X_i(t)}{Z_\eta(t)})$ , $t \in [0, \infty)$ ονομάζεται σχετική απόδοση των $X_i$ ως προς το χαρτοφυλάκιο $\eta$*

Παραδοσιακά η θεωρία χαρτοφυλακίου έχει δώσει έμφαση στον προσδοκώμενο ρυθμό απόδοσης και στη διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου μετοχών. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ότι ο ρυθμός ανάπτυξης καθορίζει την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του χαρτοφυλακίου των μετοχών και έτσι για μακροπρόθεσμες επενδύσεις είναι λογικο να χρησιμοποιήσουμε τον ρυθμό ανάπτυξης παρά τους ρυθμοί αποδόσεων.

Ο ρυθμός ανάπτυξης ενός χαρτοφυλακίου προσδιορίζει την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του με την έννοια ότι

Για κάθε χαρτοφυλάκιο π σε μια αγορά Μ

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(logZ_\pi(T) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt) = 0$$

και συνιστά μια σημαντική παράμετρο για την βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου

Έστω Χ μία μετοχή με ρυθμό ανάπτυξης $\gamma$. Τότε

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(logX(T) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt) = 0$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας την πρόταση ότι $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(logZ_\pi(T) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt) = 0$ σε ένα χαρτοφυλάκιο

στο οποίο τα αντίστοιχα βάρη του X είναι 1 και τα υπόλοιπα βάρη 0 καταλήγουμε στο πόρισμα μας.

Ο ρυθμός ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου όπως είπαμε καθορίζει την επίδοση του χαρτοφυλακίου ιδιαίτερα μαρκοπρόθεσμα. Όπως γνωρίζουμε από την πρόταση (1.3.1) ο ρυθμός ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου είναι ο σταθμικός μέσος των ρυθμών ανάπτυξης των μετοχών που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο συν τον υπερβάλλον ρυθμό ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου. Εφόσον ο υπερβάλλον ρυθμός ανάπτυξης αποτελεί ενα σημαντικό κομμάτι του ρυθμού ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου χρειαζόμαστε να αναπτύξουμε κάποια εργαλεία που να βοηθούν στον υπολογισμό του. Το ακόλουθο λήμμα μπορεί να ερμηνευτεί για να αποδώσει ότι ο υπερβάλλον ρυθμός ανάπτυξης $\gamma_\pi^*$ είναι αμετάβλητο *numeraire* και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν το *numeraire* είναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

**Λήμμα 2.3.1** *Έστω π και η χαρτοφυλάκια. Τότε για* $t \in [0, \infty)$,

$$\gamma_\pi^*(t) = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_i^\eta{}_i(t) - \sum_{i,j=1} \pi(t)\pi_j\tau_i^\eta{}_j(t)\right)$$

# Κεφάλαιο 3

# Στοχαστική Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Ποικιλομορφία

Η ποικιλομορφία ή διαφοροποίηση της αγοράς (*diversity*) ορίσθηκε για πρώτη φορά από τον *Fernholz* το 1990 και θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνέπεια της αντιμονοπωλιακής νομοθεσίας. Η αντιμονοπωλιακή νομοθεσία είναι καθολική στις σύγχρονες οικονομίες, διότι και από τον *A.Smith*, ήταν γενικά αποδεκτό ότι η υπερβολική συγκέντρωση της παραγωγής ή του κεφαλαίου είναι επηρεάζει τον ανταγωνισμό, και να είναι επιζήμια για την εθνική οικονομία.

Η διαφοροποιήση της αγοράς μετοχών, είναι ένα μέτρο της κατανομής των κεφαλαίων σε μια αγορά μετοχών. Η διαφοροποιήση/ ποικιλομορφία είναι υψηλότερη όταν το κεφάλαιο είναι πιο ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταξύ των μετοχών της αγοράς, και είναι μικρότερη όταν το η συνολική κεφαλαιοποίηση είναι περισσότερο συγκεντρωμένη σε μερικές από τις μεγαλύτερες εταιρείες. Εκεί υπάρχουν πολλά μέτρα της διαφορετικότητας,εκ των οποίων η εντροπία είναι ίσως το πιο γνωστό, αλλά δεν είναι απαραίτητα το πιο χρήσιμο για τους σκοπούς μας.

Ορισμένα μέτρα της διαφοροποιήσης δημιουργούν χαρτοφυλάκια, που γενικά ονομάζονται ποικιλόμορφα-σταθμισμένα χαρτοφυλάκια, και αυτά τα χαρτοφυλάκια έχουν μια πιο ομαλή κατανομή των κεφαλαίων από την αγορά. Η σχετική απόδοση του ποικιλόμορφα σταθμισμένου χαρτοφυλάκιου είναι απόλυτα συσχετίσμένη με την αλλαγή μέσα από την ποικιλομορφία της αγοράς, όπως καθορίζεται από το μέτρο που δημιουργεί. Κάποια ποικιλόμορφα σταθμισμένα χαρτοφυλάκια μπορεί να αποδειχθεί ότι έχουν υψηλότερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, με περίπου το ίδιο επίπεδο κινδύνου, τουλάχιστον μακροπρόθεσμα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για τη μέτρηση της επίδρασης των μεταβολών στην ποικιλομορφία της αγοράς στην απόδοση του χαρτοφυλακίου, αλλά φαίνεται ότι ο πιο συνηθισμένος είναι αυτός των ελαχίστων τετραγώνων της παλινδρόμησης.

Γενικά μια αγορά λέμε ότι είναι ποικιλόμορφη -διαφοροποιημένη εάν η κεφαλαιοποίηση διαχέεται σε έναν μεγάλο αριθμό μετοχών. Η ποικιλομορφία της αγοράς είναι το αντίθετο της συγκέντρωσης της συνολικής κεφαλαιοποίησης σε μια χούφτα επιχειρήσεων. Με άλλα λόγια, μια αγορά λέμε οτι παρουσιάζει ποικιλομορφία αν η συνολική κεφαλαιοποίηση της αγοράς μετοχών δεν συγκεντρώνεται σε ένα μικρό αριθμό μετοχών. έτσι λοιπόν μια ποικιλόμορφη, διαφοροποιημένη αγορά αποτρέπει ακραίες συγκεντρώσεις του κεφαλαίου σε μια μετοχή.

Θα αποδείξουμε ότι ο υπερβάλλων ρυθμός ανάπτυξης (excess growth rate ) σχετίζεται με την ποικιλομορφία της κεφαλαιοποίησης και με αυτόν τον τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε την μεταξύ τους σχέση για να μελετήσουμε την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της αγοράς κάτω απο την υποθεση όμως οτι όλες οι μετοχές έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης. Μπορεί να φαίνεται ότι με αυτά τα δεδομένα η αγορά θα παρουσιάζει διερσιτψ όμως αυτό δεν ισχύει, για τί τέτοιες αγορές παρουσιάζουν την τάση η συνολική κεφαλαιοποίηση να συγκεντρώνεται σε λίγες μετοχές. Σαν μέτρο της ποικιλομορφίας της αγοράς θα θεωρήσουμε την εντροπία της αγοράς και θα μελετήσουμε το παράγωγο χαρτοφυλάκιο που το ονομάζουμε σταθμισμένο με βάση την εντροπία χαρτοφυλάκιο.

Για να αναλύσουμε την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά των μετοχών, των χαρτοφυλακίων ή ακόμα και της ίδιας της αγοράς είναι καταλληλότερο να θεωρήσουμε τις χρονικά μέσες τιμές από τις χρονικά προσδοκώμενες τιμές των στοχαστικών διαδικασιών που θα χρησιμοποιήσουμε.

Έτσι για τον ρυθμό ανάπτυξης $\gamma_i$ της μετοχής $X_i$ θεωρούμε το όριο :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_i(t)dt \text{ αντί του } E\gamma_i(t)$$

Όμοια για μια αγορά με βάρη $\mu_i$ :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T log\mu_i(t)dt \text{ αντί του } Elog\mu_i(t)$$

**Ορισμός 3.0.2** *Μια αγορά $M$ είναι συνεπής αν για $i = 1, \ldots, n$*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} log\mu_i(t) = 0,$$

όπου $\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}$

έτσι ο παραπάνω ορισμός γίνεται

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}(logX_i(t) - logZ_\mu(t)) = 0$$

**Πρόταση 3.0.0.2** *Έστω M μια αγορά μετοχών* $X_1,\ldots,X_\nu$
*Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η M είναι συνεπής*
2. *για* $i = 1,\ldots,n$, $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t))dt = 0$
3. *για* $i,j = 1,\ldots,n$, $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_j(t))dt = 0$

Η πρόταση αυτή μας δείχνει ότι σε μια συνεπή αγορά, η χρονική μέση διαφορά μεταξύ των ρυθμών ανάπτυξης είναι μηδέν. Αυτό αφορά μόνο την διαφορά των ρυθμών ανάπτυξης, ο χρονικός μέσος του ρυθμού ανάπτυξης μιας μεμονωμένης μετοχής μπορεί να μην υπάρχει. Ένα παράδειγμα συνεπούς αγοράς είναι μια αγορά στην οποία όλες οι μετοχές έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης.

Υποθέτουμε ότι όλες οι μετοχές στην αγορά M έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης. Τότε η M είναι συνεπής.

Απόδειξη:

Εάν όλες οι μετοχές έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης τότε η (3) απο την παραπάνω πρόταση ισχύει για

$$i,j = 1,\ldots,n, \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_j(t))dt = 0.$$

Έτσι η M είναι συνεπής.

Στην περίπτωση που οι ρυθμοί ανάπτυξης είναι σταθεροί τότε ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.

Υποθέτουμε ότι όλες οι μετοχές της αγοράς M έχουν σταθερούς ρυθμούς ανάπτυξης. Τότε η M είναι συνεπής αν και μόνο αν οι ρυθμοί ανάπτυξης είναι όλοι ίσοι.

Απόδειξη

Εάν οι ρυθμοί ανάπτυξης είναι όλοι ίσοι, η M είναι συνεπής βάση του πορίσματος (1.3.1). Αν $X_i$ και $X_j$ έχουν διαφορετικούς σταθερούς ρυθμούς ανάπτυξης τότε το (3) απο την πρόταση (1.3.1) είναι λάθος, πράγμα άτοπο.

**Λήμμα 3.0.2** *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο σε μια μη εκφυλισμένη αγορά. Τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ έτσι ώστε για $i = 1, \ldots, n$*

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) \geq \epsilon(1 - \pi_i(t))^2,\ t \in [0, \infty)$$

Απόδειξη:

Έστω ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$x\sigma(t)x^T \geq \epsilon \|x\|^2,\ x \in \Re^n,\ t \in [0,\infty)$$

για 1 και $t \in [0,\infty)$ , έστω $x(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_i(t) - 1, \ldots, \pi_n(t)$

Τότε για $t \in [0,\infty)$

$$\tau_i^\pi{}_i(t) = \sigma_{ii}(t) - 2\sigma_{i\pi}(t) + \sigma_{pp}(t) = x(t)\sigma(t)x^T(t) \geq \epsilon \|x\|^2$$

Εφόσον

$$\|x\|^2 \geq (1 - \pi_{ii}(t)^2,\ t \in [0,\infty) \text{ τότε το λήμμα ισχύει}$$

Για ένα χαρτοφυλάκιο π, είναι βολικό να εισάγουμε την ισότητα

$$\pi_{max}(t) = max_{1\leq}\pi_i(t),\ t \in [0,\infty)$$

Με την παραπάνω ισότητα μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το παραπάνω λήμμα σε πιο χρήσιμη μορφή.

**Λήμμα 3.0.3** *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο σε μια μη εκφυλισμένη αγορά.*
*Τότε υπάρχει ένα* $\epsilon > 0$ *τέτοιο ώστε για* $i = 1, \ldots, n$

$$\tau_i^\pi{}_i(t) \geq \epsilon(1 - \pi_{max}(t))^2,\ t \in [0,\infty)$$

**Λήμμα 3.0.4** *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο με μη αρνητικά βάρη σε μια μια εκφυλισμένη αγορά.*

*Τότε υπάρχει ένα* $\epsilon > 0$ *τέτοιο ώστε για* $t \in [, \infty)$

$$\gamma^*_\pi(t) \geq \epsilon(1 - \pi_{max}(t))^2$$

*Απόδειξη*

$$\gamma^*_\pi(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau^\pi_{ii}(t) \geq \frac{\epsilon}{2}(1 - \pi_{max}(t))^2$$

*όπου το* $\epsilon$ *είναι επιλεγμένο όπως στο Λήμμα 1.4.2 , αφού το* $\pi_i(t)$ *είναι μη αρνητικό*

Υποθέτουμε οτι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και συνεπής και οτι το $\pi$ είναι ενα σταθερά σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο με τουλάχιστον δύο θετικά βάρη και δεν έχει καθόλου αρνητικά βάρη.

Τότε

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) > 0$$

## 3.1 Η ποικιλομορφία της αγοράς μετοχών

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε έναν ορισμό για την ποικιλομορφία της αγοράς μετοχών ( *stock market diversity*) και θα δείξουμε ότι η ποικιλομορφία μπορεί να εκφραστεί σε όρους υπερβάλλοντος ρυθμού ανάπτυξης της αγοράς. Χρησιμοποιούμε αυτήν την σχέση για να καθορίσουμε τις καταστάσεις της αγοράς που έιναι συμβατές με την ποικιλομορφία της αγοράς. Όλα τα οικονομικά αναπτυγμένα κράτη έχουν κάποια μορφή αντιμονοπωλιακής νομοθεσίας για να αποφευχθεί η υπερβολική συγκέντρωση των κεφαλαίων και την οικονομική ισχύ να την έχουν έτσι λίγες εταιρίες γίγαντες.

Εδώ δεν ασχολούμαστε με την οικονομική λογική για την αντιμονοπωλιακή νομοθεσία, αλλά μάλλον με το αποτέλεσμα αυτής της νομοθεσίας που μπορεί να έχει για την κατανομή των κεφαλαίων στην αγορά μετοχών. Οποιαδήποτε αξιόπιστη αντιμονοπωλιακή νομοθεσία θα πρέπει να προβλέπει να αποφευχθεί η παρατεταμένη συγκέντρωση του συνόλου των κεφαλαίων της αγοράς σε μία εταιρεία, και από μια ρεαλιστική άποψη, σε μια οικονομία όπως αυτή των ΗΠΑ, είναι μάλλον απίθανο ότι μια μοναδική εταιρεία θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει ακόμα και το ήμισυ της συνολικής κεφαλαιοποίησης της αγοράς.

Με $\mu_{max}$ συμβολίζουμε την αξία του μεγαλύτερου από τα βάρη της αγοράς σε μια δεδομένη χρονική στιγμή

**Ορισμός 3.1.1** *Μια αγορά $M$ είναι ποικιλόμορφη (diverse) αν υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\mu_{max}(t) \leq 1 - \delta,\ t \in [0, \infty)$$

*Η $M$ είναι αδύναμα ποικιλόμορφη στο $[0, T]$, αν υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\tfrac{1}{T} \int_0^T \mu_{max}(t) dt \leq 1 - \delta,$$

**Πρόταση 3.1.0.3** *Εάν η αγορά $M$ είναι μη εκφυλισμένη και ποικιλόμορφη, τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\gamma^*_\mu(t) \geq \delta,\ t \in [0, \infty)$$

*Αντίστροφα εάν η M έχει φραγμένη διακύμανση και υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\gamma_\mu^*(t) \geq \delta$, $t \in [0, \infty)$ να ισχύει, τότε η M είναι ποικιλόμορφη*

**Πρόταση 3.1.0.4** *Υποθέτουμε ότι όλες οι μετοχές στην αγορά M έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης. Τότε*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_\mu^*(t) dt = 0$$

Απόδειξη

Εφόσον όλοι οι ρυθμοί ανάπτυξης των μετοχών είναι ίσοι από το πόρισμα (1.1.3) έχω ότι η M είναι συνεκτική. Επιπλέον ο ρυθμός ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι

$$\gamma_\mu(t) = \gamma(t) + \gamma_\mu^*(t),\ t \in eft[0, \infty$$

Από την πρόταση (1.1.2)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)) dt = 0$$

οπότε από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_\mu^*(t) dt = 0$

**Πρόταση 3.1.0.5** *Υποθέτουμε ότι η αγορά M δεν είναι εκφυλισμένη. Αν όλες η μετοχές της αγοράς M έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης, τότε η M δεν είναι ποικιλόμορφη.*

Απόδειξη

Αν Μ είναι ποικιλόμορφη τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\gamma_{\mu}^{*}(t) \geq \delta$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_{\mu}^{*}(t)dt \leq \delta, \mathrm{T} \in [0, \infty)$$

**Πρόταση 3.1.0.6** *Υποθέτουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη. Αν όλες οι μετοχές της M έχουν σταθερούς ρυθμούς ανάπτυξης, τότε η M δεν είναι ποικιλόμορφη.*

Απόδειξη

Από το πόρισμα ότι $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(logX(T) - \int_0^T \gamma_{\pi}(t)dt) = 0$ συνεπάγεται ότι όλες οι μετοχές εκτός αυτών με τον υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης θα αντιστοιχούν σε ελάχιστο τμήμα της αξίας της αγοράς σε μακροπρόθεσμη βάση. Όσο αφορά το τμήμα της αγοράς που αποτελείται απο μετοχές που μοιραζονται το υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης αυτό ικανοποιεί το προηγούμενο πόρισμα καί έτσι η αγορά δεν είναι ποικιλόμορφη (*diverse*)

## 3.2 Μέτρα Ποικιλομορφίας

Η Ποικιλομορφία ή Διαφοροποίηση είναι ένα μέτρο κατανομής του κεφαλαίου σε μιας αγορά μετοχών. Η ποικιλομορφία είναι χαμηλή όταν το κεφάλαιο είναι συγκεντρωμένο περισσότερο σε λίγες μεγάλες μετοχές, και είναι υψηλό όταν το κεφάλαιο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Οι αλλαγές στην ποικιλομορφία προξενούνται από την μετακίνηση του κεφαλαίου από τις μεγάλύτερες μετοχές στις μικρότερες.

Η ποικιλομορφία μετριέται από μια συνάρτηση $D_p$ των βαρών της αγοράς μετοχών. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια αγορά απο $n$ μετοχές με βάρη $w_1, \ldots, w_n$, έτσι ώστε

$w_1 + \ldots, +w_n = 1$ τότε η ποικιλομορφία της αγοράς μετοχών θα είναι

$$D_p(w_1, \ldots, w_n) = (n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} w_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

όπου $p$ είναι μία σταθερά $0 < p < 1$. Το $D_p$ φτάνει την μέγιστη τιμή 1 εάν όλα τα βάρη είναι ίσα, και φτάνει την μικρότερη τιμή όταν όλα τα κεφάλαια είναι συγκεντρωμένα σε μία μόνο μετοχή.

## 3.3 Η Εντροπία ως μέτρο της Ποικιλομορφίας της Αγοράς

Η εντροπία είναι εκτατική μεταβλητή ενός θερμοδυναμικού συστήματος. Η έννοια της εντροπίας είναι μία από τις σημαντικότερες έννοιες στις φυσικές επιστήμες, λόγω της διατύπωσης του Δεύτερου Θερμοδυναμικού Αξιώματος, σύμφωνα με το οποίο σε μία μεταβολή ενός απομονωμένου συστήματος η εντροπία αυξάνεται πάντοτε.
Πιο απλά η εντροπία θεωρείται ότι εκφράζει μέτρο της αταξίας ενός συστήματος. Για παράδειγμα τα σωματίδια που συγκροτούν ένα μήλο ή ένα σιδερένιο κρίκο βρίσκονται σε μια διάταξη στο χώρο λίγο πολύ κανονική. Όταν όμως αρχίζει να σαπίζει το μήλο ή να σκουριάζει ο κρίκος η διάταξη αυτή των σωματιδίων βαθμιαία αρχίζει να αποδιοργανώνεται και έτσι η εντροπία του συστήματος έκαστου των αντικειμένων να αυξάνει.

Γράψαμε ότι η εντροπία είναι εκτακτική μεταβλητη δηλαδή είναι ποσότητα εξαρτώμενη ή ανάλογη προς το μέγεθος του συστήματος. Αν δηλαδή διπλασιάσουμε το μέγεθος (θεωρήσουμε 200γρ σιδήρου αντί για 100γρ), τότε όλες οι εκτατικές ποσότητες διπλασιάζονται.

Μία εκτατική μεταβλητή αποτελεί το άθροισμα ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν τις επιμέρους αντίστοιχες μεταβλητές του συστήματος των τμημάτων που το απαρτίζουν. Η εντροπία για παράδειγμα που είναι μια εκτατική μεταβλητή, μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά, αθροίζοντας τα επιμέρους μεγέθη της εντροπίας από τα τμήματα (υποσυστήματα) που απαρτίζουν το υπό μελέτη σύστημα.

Θα χρησιμοποιήσουμε την εντροπία σαν μέτρο της ποικιλομορφίας της αγοράς.

Η συνάρτηση εντροπίας $S$ είναι ορισμένη ως:

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$$

για όλα τα ξ στο σύνολο $\Delta^n$=ξ$\in \Re^n : x_1 + \ldots + x_n = 1; 0 < x_i < 1, i = 1, ..., n$

**Ορισμός 3.3.1** *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Τότε ορίζουμε την εντροπία της αγοράς $S(\mu)$ :*

$$S(\mu(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) log \mu_i(t)\ ,\ t \in [0, T)$$

*όπου συναπάγεται ότι η $S(\mu)$ είναι συνεχής semimartingale και ότι*

$$0 < S(\mu(t)) \leq log n$$

*, για όλα τα $t \in [0, T)$*

**Πρόταση 3.3.0.7** *Η αγορά είναι ποικιλόμορφη αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε*

$S(\mu(t)) \geq \epsilon$, $t \in [0, T)$

**Ορισμός 3.3.2** *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Το χαρτοφυλάκιο π με βάρη ορισμένα από*

$$\pi_i(t) = \frac{-\mu_i(t) log \mu_i(t)}{S(\mu(t))}, \ t \in [0, T)$$

*ονομάζεται σταθμισμένο με βάση την εντροπία χαρτοφυλάκιο (entropy-weighted portofolio)*

*ο λόγος* $\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}$=-$\frac{log \mu_i(t)}{S(\mu(t))}$ *μειώνεται με την αύξηση του* $\mu_i(t)$*. Έτσι το π έχει λιγότερη συγκέντρωση από το μ σε αυτές τις μετοχές με τα υψηλότερα βάρη.*

**Θεώρημα 3.3.1** *Έστω μ ενα χαρτοφυλάκιο αγοράς και π είναι το σταθμισμένο με βάση την εντροπία χαρτοφυλάκιο, και έστω* $Z_\mu$ *και* $Z_\pi$ *οι αντίστοιχες αξίες των χαρτοφυλακίων. Τότε για* $t \in [0, T)$

$$dlog S(\mu(t)) = dlog\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t))} - \frac{\gamma^*_\mu(t)}{S(\mu(t)}\right) dt$$

Έστω μ το χαρτοφυλάκιο της αγοράς και π το σταθμισμένο με βάση την εντροπία χαρτοφυλάκιο. Υποθέτουμε ότι η αγορα Μ είναι μη εκφυλισμένη και ποικιλόμορφη. Τότε για ένα αρκετά μεγάλο αριθμό Τ,

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)} > \frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}$$

## 3.4 Συναρτησιακά Παραγόμενα Χαρτοφυλάκια

Τα συναρτησιακά παραγόμενα χαρτοφυλάκια (*Functionally Generated Portofolios*), είναι γενίκευση των σταθμισμένων με βάση την εντροπία (*entropy-weighted*) χαρτοφυλάκια που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι ένα ευρύ φάσμα συναρτήσεων θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή χαρτοφυλακίων. Τα συναρτησιακά παραγόμενα χαρτοφυλάκια αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για την κατασκευή χαρτοφυλακίων με καλώς ορισμένα χαρακτηριστικά και αποτελούν βασικό στοιχείο στη θεωρία στοχαστικών χαρτοφυλακίων.

Η ποικιλομορφία της αγοράς φαίνεται να αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα στην απόδοση του χαρτοφυλακίου μετοχών. Έχοντας ένα χαρτοφυλάκιο που είναι πιο κοντά στα διαφοροποιημένα βάρη (*diversity weights*) σε σχέση με τα βάρη της κεφαλαιοποίησης θα έχει βελτιωμένες τις σχετικές επιδόσεις μακροπρόθεσμα.

## 3.5 Γεννήτριες Συναρτήσεις Χαρτοφυλακίων

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία των Γεννήτριων Συναρτήσεων Χαρτοφυλακίων (*Functionally generated portofolios*). Η βασική ιδέα είναι οτι ορισμένες συναρτήσεις με πραγματικές τιμές που ορίζονται στο $\Delta^n$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν γεννήτριες χαρτοφυλακίων και η συμπεριφορά αυτών των χαρτοφυλακίων μπορεί να δώσει μια ένδειξη της συμπεριφοράς των χαρτοφυλακίων που κατασκευάστηκαν.

**Ορισμός 3.5.1** *Έστω $S$ μια συναρτηση θετική και συνεχής ορισμένη στο $\Delta^n$ και* *έστω π ένα χαρτοφυλάκιο. Τότε η $S$ είναι γεννήτρια του π έαν υπάρχει μία μετρίσιμη στοχαστική διαδικασία Θ με φραγμένη διακύμανση τέτοια ώστε*

$$log(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}) = logS(\mu(t)) + \Theta(t),\ t \in (0, T]$$

*Η διαδικασία Θ ονομάζεται και ταχύτητα $(drift)$ της $S$*

Εαν η $S$ είναι γεννήτρια της π τότε η $S$ ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση της π . Εφόσον ο λογάριθμος $log(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)})$ και $logS(\mu(t))$ είναι και οι συνεχής τότε συνεπάγεται ότι και η Θ είναι συνεχής. Επιπλέον επειδή η Θ έχει φραγμένη διακύμανση, η $logS(\mu)$ είναι ένα συνεχές *semimartingale* και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω ισότητα σε διαφορική μορφή:

$$dlog(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}) = dlogS(\mu(t)) + d\Theta(t),\ t \in (0, T]$$

Η συνάρτηση εντροπίας

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$$

θεωρείται μια απο τις σημαντικότερες γεννήτριες συναρτήσεις χαρτοφυλακίων. Τα βάρη του χαρτοφυλακίου θα είναι $\pi_i(t) = -\frac{\mu_i(t) log \mu_i(t)}{S(\mu(t))}$

και η ταχύτητα $(drift)$ θα ικανοποιεί την

$$d\Theta(t) = \frac{\gamma_{\mu}^{*}(t)}{S(\mu(t))}dt$$

**Πρόταση 3.5.0.1** *Έστω να παράγει το χαρτοφυλάκιο π με ταχύτητα (drift) το Θ και υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}logS(\mu(t)) = 0$$

*Τότε*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_0^T \gamma_{\pi}(t)dt - \int_0^T \gamma_{\mu}(t)dt - \Theta(T)\right) = 0$$

Απόδειξη:

Από την

$$log(\frac{Z_{\pi}(t)}{Z_{\mu}(t)}) = logS(\mu(t)) + \Theta(t) \text{ για } t \in (0,T]$$

έχω

$$dlogS(\mu(t)) + d\Theta(t) = logZ_{\pi}(T) -$$
$$logZ_{\mu}(T) = \int_0^T (\gamma_{\pi}(t) - \gamma_{\mu}(t))dt + \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} (\pi(t) - \mu_i(t))\xi_{i\nu}(t)dW\nu(t)$$

Εφαρμόζοντας το όριο $\lim_{T\to\infty} T^{-1}$ και στα δύο μέρη της παραπάνω ισότητας προκύπτει το $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_0^T \gamma_{\pi}(t)dt - \int_0^T \gamma_{\mu}(t)dt - \Theta(T)\right) = 0$

Ο **Σταθμικός Μέσος της κεφαλαιοποίησης** χρησιμοποιείται μερικές φορές σαν μέτρο της συγκέντρωσης του κεφαλάιου στην αγορά. Η τιμή του σταθμικού αυτού μέσου θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) X_i(t), \ t \in (0,T]$$

Ο Σταθμικός μέσος των βαρών κεφαλαιοποίησης :
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t), \quad t \in (0,T]$$

η τετραγωνική ρίζα αυτού του σταθμισμένου μέσου
$S(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
είναι γεννήτρια του χαρτοφυλακίου π με βάρη

$$\pi_i(t) = \frac{\mu_i^2(t)}{\mu_1^2(t)+\ldots+m_n^2(t)}, \quad t \in (0,T]$$

για $i = 1, \ldots, n$ Αυτό σημαίνει ότι το π είναι μεγάλο σε μεγάλο αριθμό μετοχών και μικρότερο σε μικρό αριθμό μετοχών.

Το $drift$ του χαρτοφυλακίου ικανοποιεί

$$d\Theta(t) = -\gamma_\pi^*(t)dt \quad t \in (0,T]$$

Αφού

$$logS(\mu(t)) = \frac{1}{2}\log(\sum_{i+1}^{n} \mu_i^2(t)), \quad t \in (0,T]$$

Μερικά παραδείγματα γεννήτριων συναρτήσεων και των χαρτοφυλακίων που παράγουν:

1. $S(x) = 1$ δημιουργεί χαρτοφυλάκιο της αγοράς μ με $\Theta(t) = 0$

2. $S(x) = c_1x_1 + \ldots, +c_nx_n$, όπου $c_1 \ldots, c_n$ είναι σταθερά και δημιουργεί χαρτοφυλάκιο που κρατά $c_i$ από την κεφαλαιοποίησητης $i$στης μετοχής. Εδώ το $\Theta(t) = 0$

3. $S(x) = (x_1 \ldots, x_n)^{\frac{1}{n}}$ δημιουργεί ένα ισοσταθμισμένο χαρτοφυλάκιο με $\Theta(t) = \gamma^*_\pi(t)$

4. $S(x) = x^p_{11} \ldots, x^p_{nn}$ όπου $p_1, \ldots, p_n$ είναι σταθερά και $p_1 + \ldots, +p_n = 1$ δημιουργούν ένα σταθερά σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο με βάρη
$\pi_i(t) = p_i$ και $\Theta(t) = \gamma^*_\pi(t)$

Απο τα παραπάνω προκύπτει και το ακόλουθο πόρισμα

Έστω $S_1$ και $S_2$ να δημιουργούν τα χαρτοφυλάκια $\pi_1$ και $\pi_2$ αντίστοιχα. Τότε για σταθερά $p_1$ και $p_2$ έτσι ώστε $p_1 + p_2 = 1$, η συνάρτηση

$S = S_1^{p_1} S_2^{p_2}$

δημιουργεί χαρτοφυλάκιο $\Upsilon$ με βάρη

$$\pi_i = p_1\pi_{1i} + p_2\pi_{2i}$$

όπου τα $\pi_{1i}$ και $\pi_{2i}$ είναι τα βάρη των $\pi_1$ και $\pi_2$ αντίστοιχα.

## 3.6 Η υπόθεση για κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο

Μια ευκαιρία για κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο (*arbitrage*) είναι ένας συνδυασμός επενδύσεων σε χαρτοφυλάκια έτσι ώστε το άθροισμα των αρχικών τιμών των επενδύσεων να είναι μηδέν και έτσι σε κάποιο μή τυχαίο μελλοντικό χρόνο T, το άθροισμα των τιμών να είναι μή αρνητικό με πιθανότητα 1 και θετικό με θετική πιθανότητα. Κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο παρουσιάζεται όταν συναντάμε μια απο τις τρεις παρακάτω συνθήκες:

1. Το ίδιο περιουσιακό στοιχείο δεν έχει την ίδια τιμή σε όλες τις αγορές. (Παραβίαση του νόμου της μιας τιμής) ( *the law of one price*)
   Δύο περουσιακά στοιχεία με ταυτόσημες ταμειακές ροές δεν έχουν την ίδια τιμή στις αγορές
   Ένα περουσιακό στοιχείο με γνωστή μελλοντική τιμή δεν ανταλλάσεται σημέρα στην μελλοντική της τιμή προεξοφλημένο με επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Η κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο δεν είναι απλώς η πράξη της αγοράς ενός προϊόντος σε μια αγορά και την πώληση του προϊόντος σε μια άλλη για την υψηλότερη τιμή σε κάποια στιγμή αργότερα. Οι συναλλαγές πρέπει να συμβούν ταυτόχρονα, να αποφεύγεται η έκθεση σε κίνδυνο αγοράς, ή ο κίνδυνος ότι οι τιμές μπορεί να αλλάξουν σε μια αγορά πριν ολοκληρωθεί η συναλλαγή μεταξύ δύο πράξεων αγοράς και πώλησης. Από πρακτική άποψη, αυτό είναι κατά κανόνα δυνατή μόνο με τίτλους και χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο συναλλαγής με ηλεκτρονικά μέσα.

Στο πιο απλό παράδειγμα, κάθε αγαθό που πωλείται σε μια αγορά θα πρέπει να πωλείται στην ίδια τιμή και σε μια άλλη. Οι χρηματιστές μπορούν, για παράδειγμα, αν διαπιστώσουν ότι η τιμή του σιταριού είναι χαμηλότερη σε αγροτικές περιοχές από ότι στις πόλεις, να αγοράσουν το αγαθό, και να το μεταφέρουν σε άλλη περιοχή για να πουλήσουν σε υψηλότερη τιμή. Αυτό το είδος της κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο τιμών, είναι η πιο συχνή, αλλά αυτό το απλό παράδειγμα αγνοεί το κόστος της μεταφοράς, αποθήκευσης, του κινδύνου, και άλλους παράγοντες.

Μαθηματικά η κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο ορίζεται ως εξής:

$P(V_T \geq 0) = 1$ και $P(V_T \neq 0) > 0$

όπου $V_t$ ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή τ.

Η υπόθεση απουσίας κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο (*no-arbitrage*) βασίζεται στην ύπαρξη ευκαιρίας μη κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο τουλάχιστον εφόσον τα χαρτοφυλάκια περιλαμβάνουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο που να ικανοποιούν κανονικές συνθήκες.

**Ορισμός 3.6.1** *Ένα χαρτοφυλάκιο π λέμε ότι είναι αποδεκτό αν:*

1. *για* $i = 1, \ldots, n,\ \pi_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]$

2. *υπάρχει ένα σταθερό* $c > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$\frac{\hat{Z}_\pi(t)}{\hat{Z}_\pi(0)} \geq \frac{c\hat{Z}_\mu(t)}{\hat{Z}_\mu(0)}\ , \quad t \in [0, T]$$

3. *υπάρχει ένα σταθερό* $M$ *τέτοιο ώστε για* $i = 1, \ldots, n$ *να έχω:*

$$\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} \leq M,\ t \in [0, T]$$

Η συνθήκη ($i$) επιβάλλεται εδώ γιατί μας ενδιαφέρουν χαρτοφυλάκια στα οποία να μην επιτρέπεται η ανοιχτή πώληση *short sale*

## 3.7 Άλλα Μέτρα Ποικιλομορφίας

**Ορισμός 3.7.1** *Μια θετική* $C^2$ *συνάρτηση ορισμένη σε μια ανοιχτή οικογένεια του* $\Delta^n$ *είναι μέτρο ποικιλομορφίασαν είναι συμμετρική και κοίλη. Ένα παραγόμενο χαρτοφυλάκιο από ένα μέτρο ποικιλομορφίας καλείται σταθμισμένο με βάση την ποικιλομορφία χαρτοφυλάκιο, και οι αναλογίες του ονομάζονται βάρη της ποικιλομορφίας.*

**Πρόταση 3.7.0.2** *Υποθέτουμε ότι* $S$ *είναι ένα μέτρο ποικιλομορφίας που γεννά ένα χαρτοφυλάκιο* $\pi$ *με* $drift$ $\Theta$. *Τότε το* $\Theta$ *είναι σχεδόν βέβαια αυξανόμενο και* $\mu_i(t) \geq \mu_j(t)$ *που συναπάγεται ότι* $\frac{\pi_j(t)}{\mu_j(t)} \geq \frac{\pi_(t)}{\mu_i(t)}$ *για όλα τα* $t \in [0, T]$

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγμα μέτρων ποικιλομορφίας.

**Παράδειγμα 3.7.1** *Η συνάρτηση εντροπίας*
$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$
*είναι ένα μέτρο ποικιλομορφίας με τις ιδιότητες που αναφέραμε σε προυγούμενη παράγραφο.*

**Παράδειγμα 3.7.2** *Για* $0 < p < 1$ *έστω*
$D_p(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$
*απότελει μέτρο ποικιλομορφίας*

Το χαρτοφυλάκιο που είναι παραγόμενο από το $D_p$ έχει βάρη

$$\pi_i(t) = \frac{\mu_i^p(t)}{(D_p(\mu(t)))^p}, \quad t \in [0, T]$$

για $i = 1, \ldots, n$. Όσο το $p \to 1$, το π προσεγγίζει το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Η διαδικασία $drift$ που είναι αυξανόμενη ικανοποιεί την

$$d\Theta(t) = (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt, \quad t \in [0, T]$$

**Παράδειγμα 3.7.3** *Η γεννήτρια συνάρτηση*

$$S(x) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

*αποτελεί ένα μέτρο ποικιλομορφίας*

**Παράδειγμα 3.7.4** *Ο συντελεστής Gini χρησιμοποιείται συχνά απο τους οικονομολόγους ως μετρο ποικιλομορφίας της κατανομής του πλούτου. Συχνά ορίζεται ως*

$$G(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - n^{-1}\right|$$

**Παράδειγμα 3.7.5** *Η εντροπία Renyi αποτελεί μια γενίκευση της συνάρτησης εντροπίας και ορίζεται ως*

$$S_p(x) = \frac{1}{1-p} log \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

*για $p \neq 1$. Καθώς το $p \to 1$,το $S_p$ τείνει στην γνωστή συνάρτηση εντροπίας. Μπορεί να αποδειχτεί ότι για $p < 1$, το $S_p$ είναι μέτρο ποικιλομορφίας, αλλά για $p > 1$, το $S_p$ δεν είναι κοίλο. Επιπλέον για $p > 1$ τα βάρη που παράγονται από το χαρτοφυλάκιο $S_p$ μπορεί να είναι αρνητικά και αντίστοιχα η ταχύτητα μπορεί τοπικά να μειώνεται.*

**Παράδειγμα 3.7.6** *Έστω M μια αγορά χωρίς μερίσματα, και υποθέτουμε οτι η M είναι μη εκφυλισμένη και αδύναμα ποικιλόμορφη στο $[0, T]$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση S ορίζεται από*

$$S(x) = 1 - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

*Τότε η S γεννά ένα χαρτοφυλάκιο π με βάρη*

$$\pi_i(t) = (\frac{2 - m_i(t)}{S(m(t))} - 1)\mu_i(t)$$

*για* $i = 1 \ldots, n$, *και μια διαδικασία της ταχύτητας που ικανοποιεί*

$$d\Theta(t) = \frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t) \tau_i i(t) dt$$

*Θα αποδείξουμε ότι το* $\pi$ *είναι αποδεκτό και οτι αυστηρά κυριαρχεί στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς εαν το* $T$ *είναι επαρκώς μεγάλο. Ας υποθέσουμε για τώρα ότι το* $T$*'0 και θα ορίσουμε αργότερα το πόσο μεγάλο θα πρέπει να είναι. Πρώτα θα δείξουμε ότι το* $\pi$ *είναι αποδεκτό.*

*Από την σχέση*

$$S(x) = 1 - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

*είναι φανερό ότι*

$$\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1,\ t \in [0, T]$$

*Απο αυτήν την σχέση και την* $\pi_i(t) = (\dfrac{2 - m_i(t)}{S(m(t))} - 1)\mu_i(t)$ *συνεπάγεται ότι για* $i = 1, , n$,

$$0 < \pi_i(t) < 3\mu_i(t),\ t \in [0, T]$$

*έτσι οι συνθήκες* $(i)$ *και* $(iii)$ *του ορισμού 1.5.2 ικανοποιούνται. Αφού για όλα τα* $i$ $\tau_{ii}(t) \geq 0$ *η ταχύτητα* $(drift)$ *το* $\Theta$ *είναι μη μειωμένη, οπότε*

$$log(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)}) - log(\frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)})(\frac{(\mu(t))}{(\mu(0))})$$

*Από την* $\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1$, $t \in [0,T]$ *έχουμε ότι* $\frac{S(\mu(t))}{S(\mu(0))} \geq \frac{1}{2}$, *έτσι*

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)} \geq \frac{1}{2}\frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}$$

*και έτσι η συνθήκη* $(ii)$ *του ορισμού 1.5.2 ικανοποιείται, οπότε το* $\pi$ *είναι εφικτό.*

*Τώρα θα αποδείξουμε ότι το χαρτοφυλάκιο* $\pi$ *κυριαρχεί αυστηρά πάνω στην αγορά* $\mu$*. Εφόσον η* $M$ *είναι μη εκφυλισμένη από το Λήμμα 1.4.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα* $\epsilon > 0$ *τέτοιο ώστε για* $i = 1, \ldots, n$

$$\tau_{ii}(t) \geq \epsilon(1 - \mu_m ax(t))^2,\ t \in [0.T]$$

*Από αυτήν την ανισότητα και από την* $\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1$, $t \in [0,T]$ *συνεπάγεται ότι*

$$\Theta(T) = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{S(\mu(t))}\sum_{i=1}^n \mu_i^2(t)\tau_{ii}(t)dt$$

$$\geq \frac{\epsilon}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n \mu_i^2(t)(1 - \mu_{max}(t))^2 dt$$

$$\geq \frac{\epsilon}{2n}\int_0^T (1 - \mu_{max}(t))^2 dt$$

*αφού* $\sum_{i=1}^n \mu_i^2(t) \geq \frac{1}{n}$. *Εφόσον η* $M$ *είναι αδύναμα ποικιλόμορφη στο* $[0,T]$ *υπάρχει ένα* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T (1 - \mu_{max}(t))dt > \delta$$

Από την ανισότητα του Schwarz έχω

$$\frac{1}{T}\int_0^T (1-\mu_{max}(t))^2 dt > \delta^2$$

Επομένως

$$\Theta(T) \geq \frac{\epsilon\delta^2 T}{2n}$$

η οποία σχέση συνδυασμένη με την

$$\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1,\, t \in [0,T]$$

μας οδηγεί στην

$$log(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)}) - log(\frac{Z_\mu(T)}{Z_m u(0)}) \geq \frac{\epsilon\delta^2 T}{2n} - log2$$

Ως εκ τούτου, εάν

$$T > \frac{2nlog2}{\epsilon\delta^2}$$

Τότε το χαρτοφυλάκιο π κυριαρχεί αυστηρά του χαρτοφυλακίου της αγοράς στο $[0,T]$

# Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε την συμπεριφορά δύο συναρτησιακά παραγώμενων χαρτοφυλακίων χρησιμοποιώντας δεδομένα από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών.

Θεωρούμε τις μετοχές του FTSE 20 (χρηματιστηριακός δείκτης των 20 μεγαλύτερων εταιριών στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών) για την περίοδο από 11/6/2004 μέχρι 29/5/2009. Χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μετοχές που υπήρχαν στο δείκτη αυτό το διάστημα, δηλαδή τις Alpha Bank , Coca - Cola Τρία Έψιλον , Eurobank Εργασίας ΕΦΓ , Intralot , Marfin Investment Group , Αγροτική Τράπεζα , Βιοχάλκο, ΔΕΗ, Εθνική Τράπεζα, Ελλάκτωρ , Ελληνικά Πετρέλαια , Κύπρου Τράπεζα , Μότορ Οϊλ , Μυτιλιναίος , ΟΠΑΠ , ΟΤΕ , Πειραιώς Τράπεζα, ΤΙΤΑΝ λαμβάνοντας υπόψη τις εβδομαδιαίες τιμές για κάθε μετοχή. Θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις της εντροπίας.

Η συνάρτηση εντροπίας $S$ όπως είδαμε είναι ορισμένη ως:

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$$

για όλα τα $\xi$ στο σύνολο $\Delta^n$=ξ∈ $\Re^n : x_1 + \ldots + x_n = 1; 0 < x_i < 1, i = 1, ..., n$

Η εντροπία της αγοράς$S(\mu)$ :

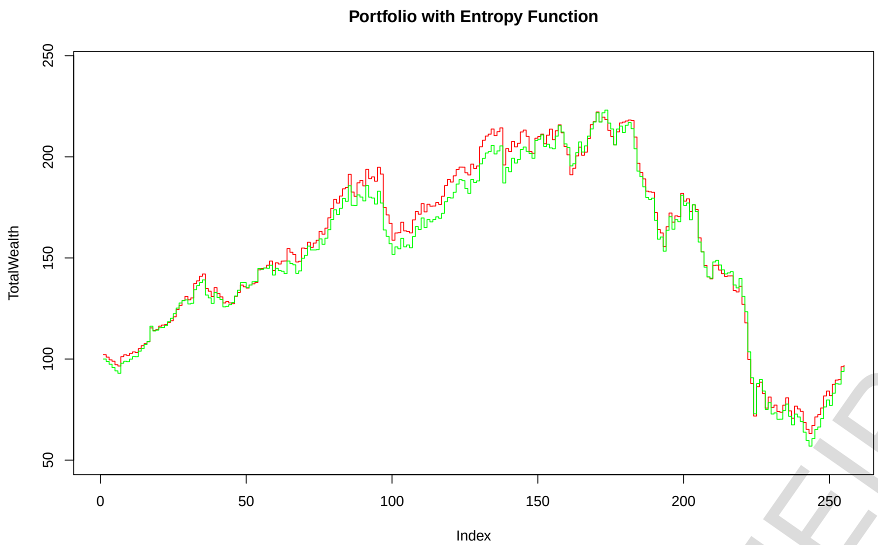
$$S(\mu(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) log \mu_i(t) \ , \ t \in [0, T)$$

Η Ποικιλομορφία όπως είδαμε είναι ένα μέτρο κατανομής του κεφαλαίου σε μιας αγορά μετοχών. Η ποικιλομορφία είναι χαμηλή όταν το κεφάλαιο είναι συγκεντρωμένο περισσότερο σε λίγες μεγάλες μετοχές, και είναι υψηλή όταν το κεφάλαιο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Οι αλλαγές στην ποικιλομορφία προξενούνται από την μετακίνηση του κεφαλαίου από τις μεγάλύτερες μετοχές στις μικρότερες.

Η ποικιλομορφία μετριέται από μια συνάρτηση $D_p$ των βαρών της αγοράς μετοχών. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια αγορά απο $n$ μετοχές με βάρη $w_1, \ldots, w_n$, έτσι ώστε $w_1 + \ldots, +w_n = 1$ τότε η ποικιλομορφία της αγοράς μετοχών θα είναι

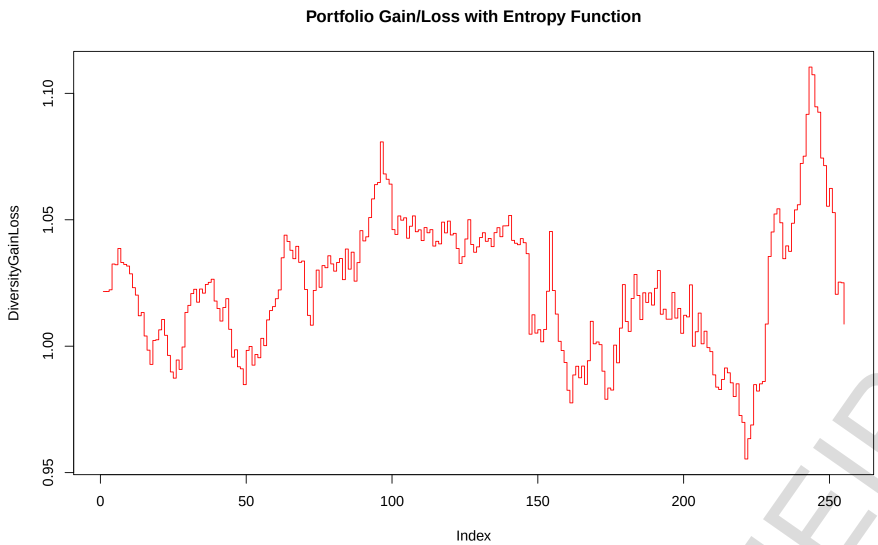
$$D_p(w_1, \ldots, w_n) = (n^{p-1} \sum i = 1^n w_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

όπου $p$ είναι μία σταθερά $0 < p < 1$. Το $D_p$ φτάνει την μέγιστη τιμή 1 εάν όλα τα βάρη είναι ίσα, και φτάνει την μικρότερη τιμή όταν όλα τα κεφάλαια είναι συγκεντρωμένα σε μία μόνο μετοχή. Στα γραφήματα που ακολουθούν για την χρονική περίοδο από 11/6/2004 μέχρι 29/5/2009, συγκρίνουμε τα χαρτοφυλάκια της εντροπίας και της ποικιλομορφίας με τον FTSE-20

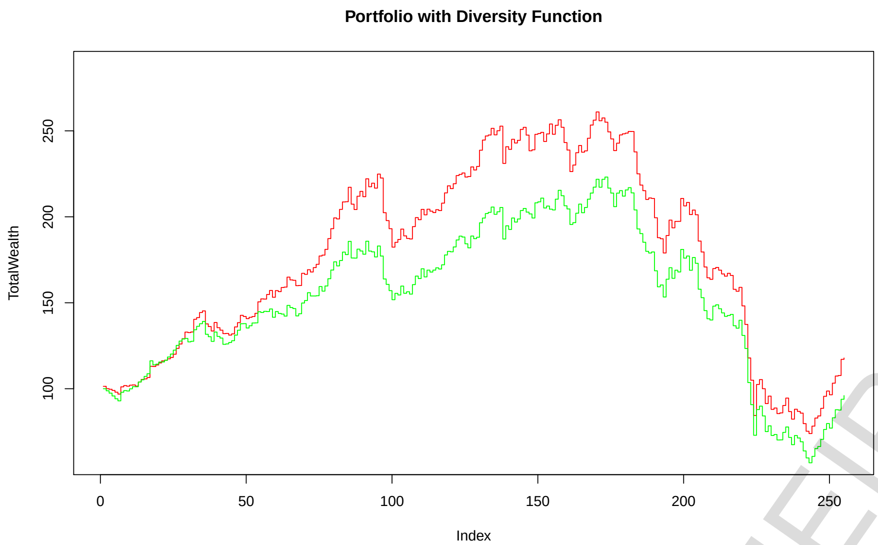



Σχήμα 4.1: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Εντροπίας (κόκκινη γραμμή) με FTSE-20 (πράσινη γραμμή)

Παρατηρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο εντροπίας κινείται σε πολύ καλα επίπεδα και ιδιαίτερα την περίοδο τιμών 55 με 150 παρουσιάζει σημαντικά κέρδη. Την χρονική περίοδο 230 και μετά, τα πρώτα σημάδια της οικονομικής κρίσης είναι εμφανή.

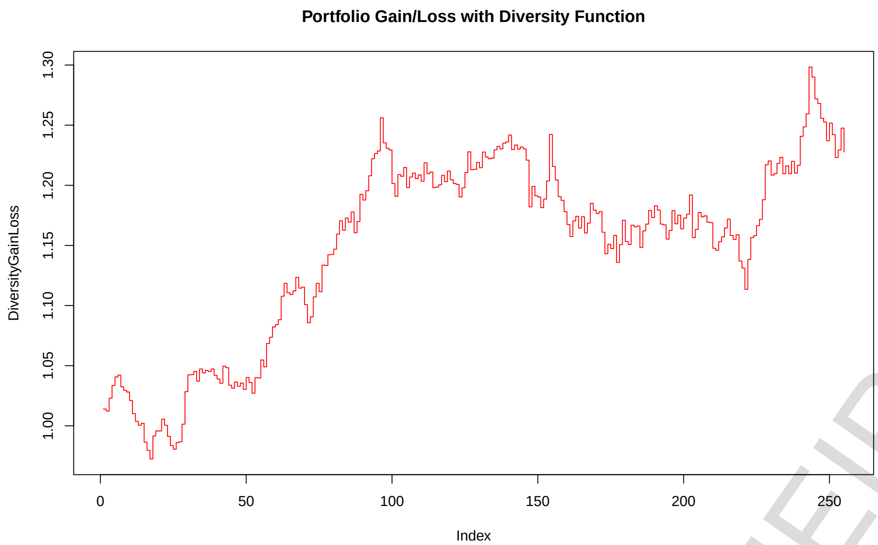



Σχήμα 4.2: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Εντροπίας με FTSE-20

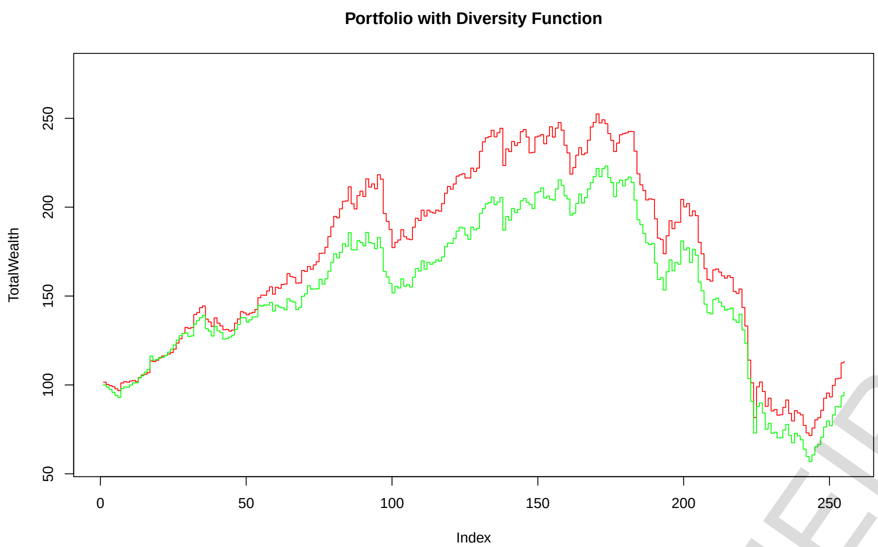



Σχήμα 4.3: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.10 (κόκκινη γραμμή) με FTSE-20 (πράσινη γραμμή)

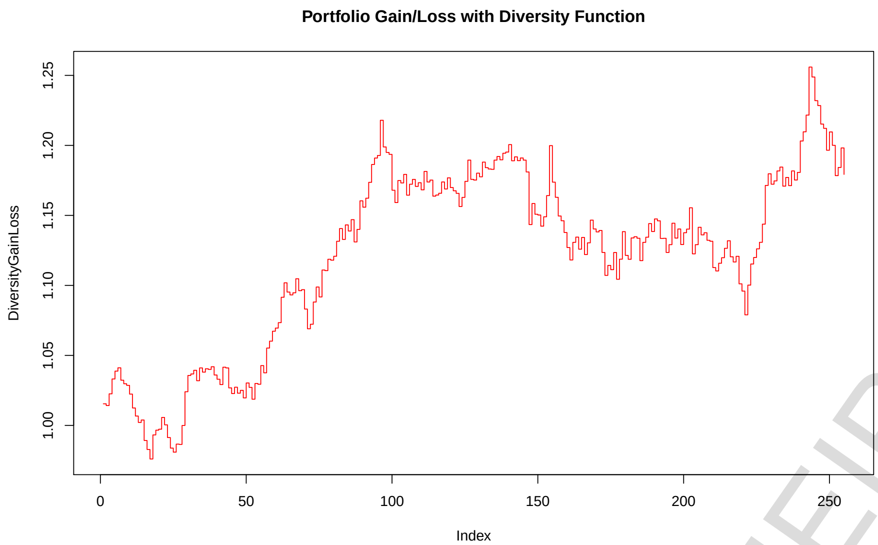
Το χαρτοφυλάκιο ποικιλομορφίας για $p = 0.1$ σημειώνει σημαντικά κέρδη κατα την διάρκεια όλης της χρονικής περιόδου που μελετάμε. Όσο μικρότερη τιμή παίρνει το p τόσο μεγαλύτερα κέρδη έχουμε.



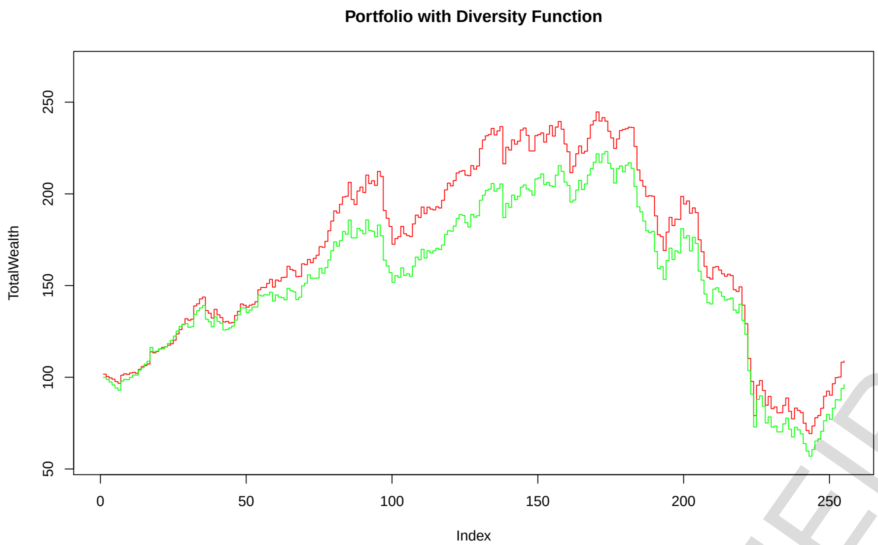

Σχήμα 4.4: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.10 με FTSE-20



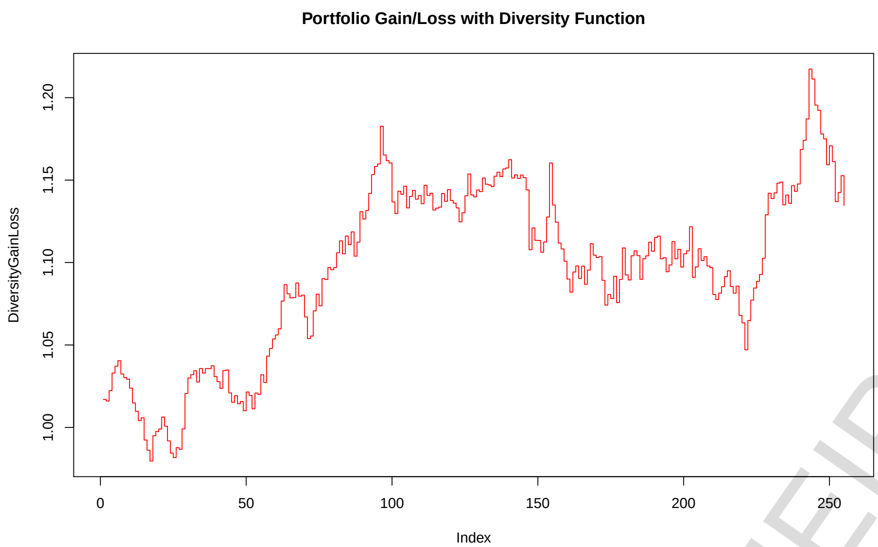

Σχήμα 4.5: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.20 (κόκκινη γραμμή) με FTSE-20 (πράσινη γραμμή)



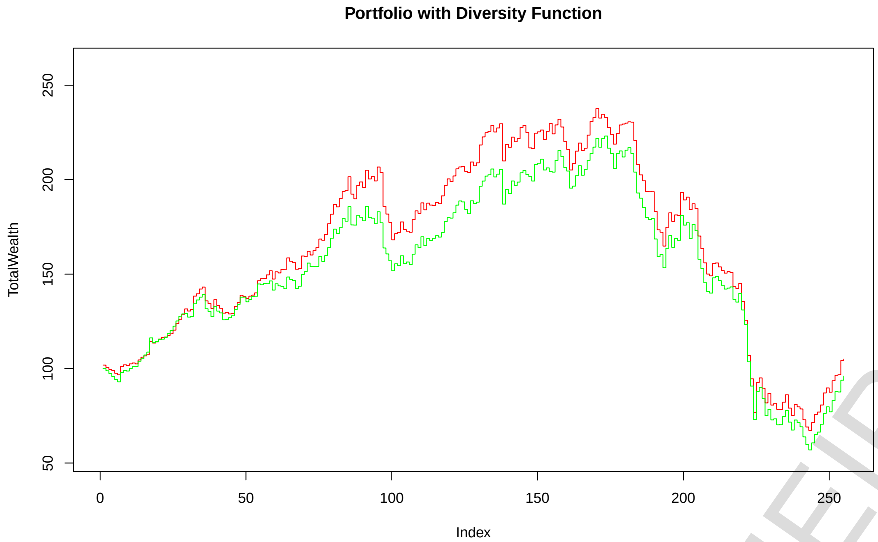

Σχήμα 4.6: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.20 με FTSE-20




Σχήμα 4.7: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.30 (κόκκινη γραμμή) με FTSE-20 (πράσινη γραμμή)

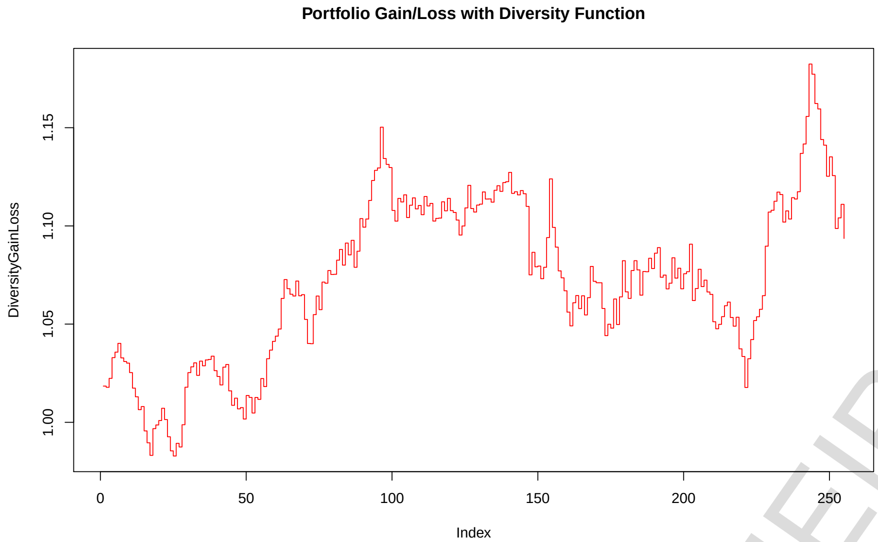



Σχήμα 4.8: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.30 με FTSE-20

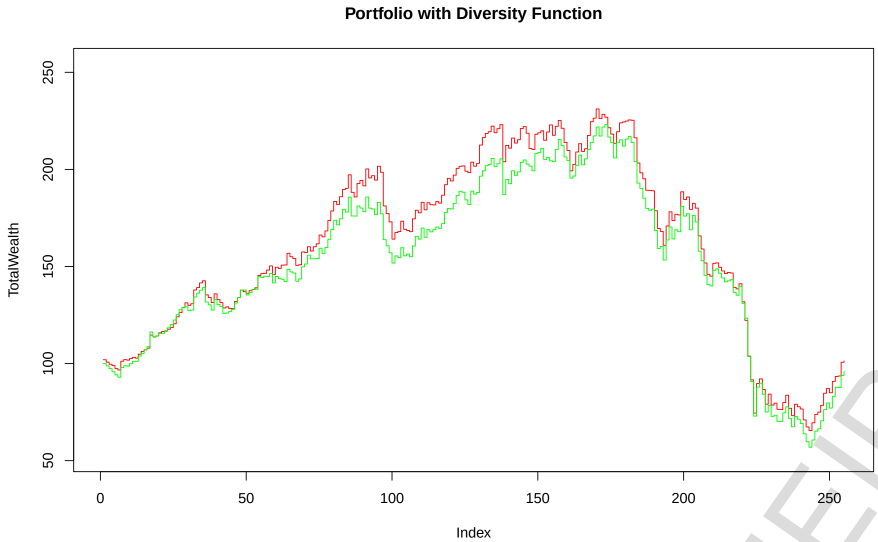



Σχήμα 4.9: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.40 με FTSE-20

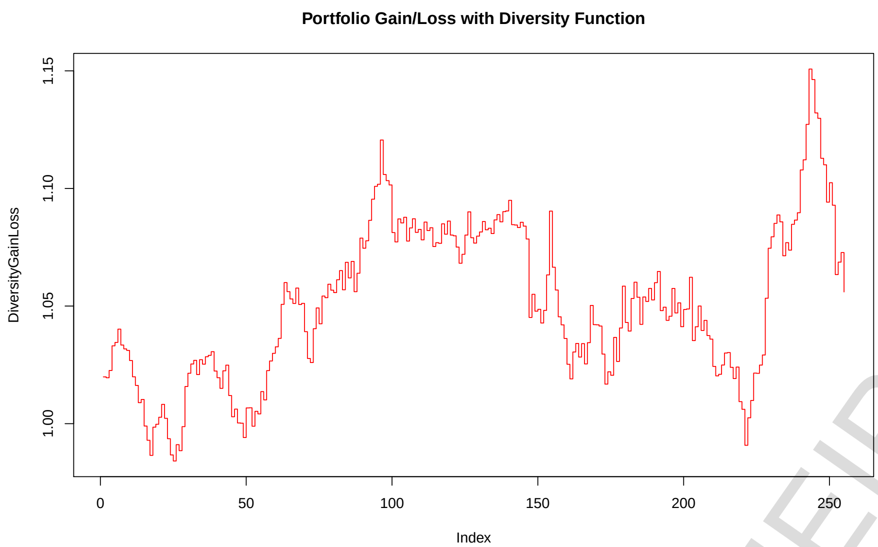
Όσο αυξάνεται το $p$ τόσο το γράφημα του χαρτοφυλακίου ποικιλομορφίας προσεγγίζει στα ίδια επίπεδα το γράφημα του δείκτη FTSE-20



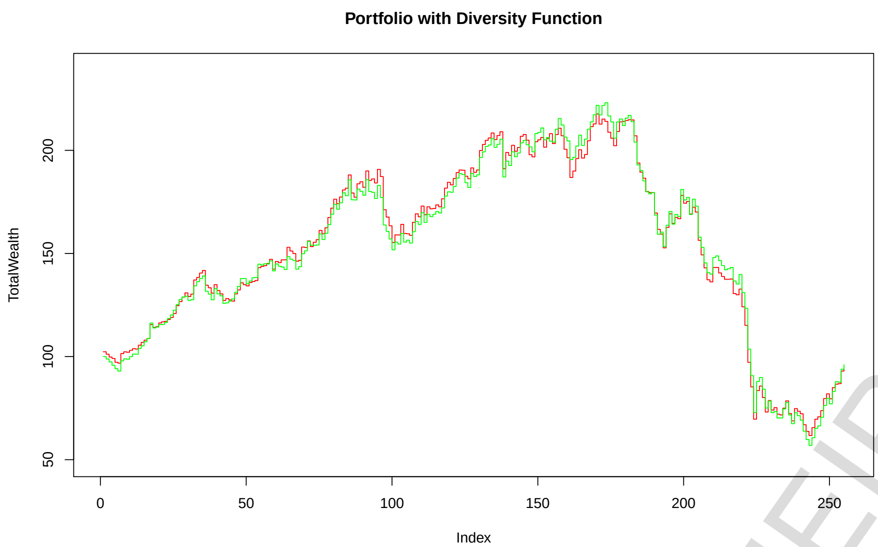

Σχήμα 4.10: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.40 με FTSE-20




Σχήμα 4.11: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.50 με FTSE-20

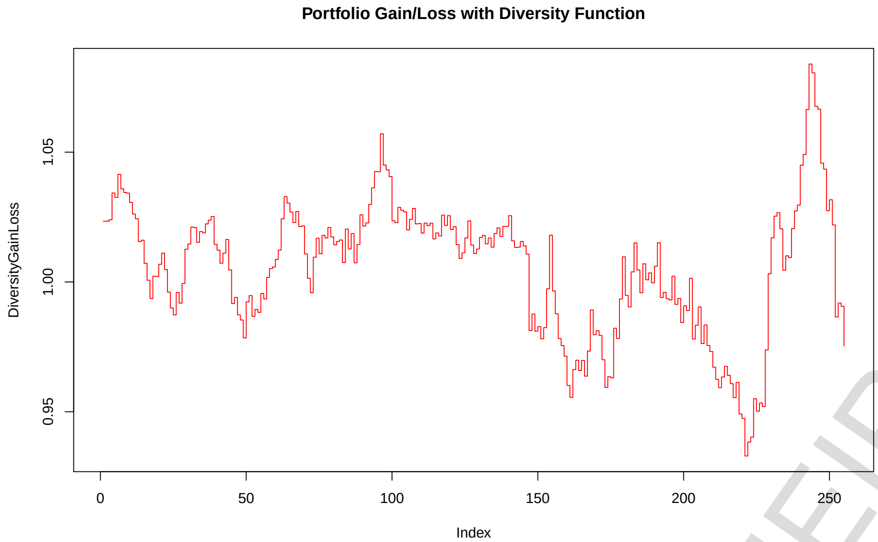



Σχήμα 4.12: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.50 με FTSE-20




Σχήμα 4.13: Σύγκριση Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.75 με FTSE-20

Εδώ με ένα αρκετά μεγάλο $p$ το γράφημα του χαρτοφυλακίου ποικιλομορφίας κινείται στα ίδια επίπεδα με αυτά του δείκτη FTSE-20 και μάλιστα σε ορισμένα χρονικά διαστήματα παρουσιάζει χαμηλότερα κέρδη απο αυτα του $FTSE - 20$




Σχήμα 4.14: Σύγκριση Κερδών - Ζημιών Χαρτοφυλακίου Ποικιλομορφίας p=0.75 με FTSE-20

Εδώ παραθέτουμε μερικούς υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν στο πρόγραμμα $R$ και απ΄ όπου προέκυψαν και τα παραπάνω γραφήματα

Read the Data

Data = read.the.data(”C:.xls” )

Calculate the Returns

for i=1:N

for j=1:M

Returns(i,j) = log(Data(i+1,j)) - log(Data(i,j))

end

end

Calculate the Capitalization for each Stock

for j=1:M

Cap(,j) = Data(,j) * NumOfShares(j)

end

Calculate the Market Capitalization

for i=1:N

MarketCap(i) = sum(Cap(i,))

end

Calculate m

for j=1:M

m(,j) ¡- Cap(,j) / MarketCap

end

Market Entropy

for i=1:N

MarketEntropy(i) ¡- (sum(m(i,)$^p$))$^($1/$p$)

end

Portfolio

for j=1:M

Port1(,j) ¡- m(,j)$^p/MarketEntropy^p$

end

# Βιβλιογραφία


Α.Γιαννακόπουλος. Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, 2003.

Θ. Κάκουλλος. Στοχαστικές Ανελίξεις, 1995.

D. Duffie, Dynamic Asset Pricing Theory, 1992

D. Fernholz and I. Karatzas, Probabilistic Aspects of Arbitrage, 2009.

D. Fernholz and I. Karatzas, On Optimal Arbitrage, 2008.

R. Fernholz and I. Karatzas, Stochastic Portfolio Theory: An Overview, 2006.

R. Fernholz Stock Market Diversity, 2005.

R. Fernholz, Stochastic Portfolio Theory. 2002. New York, NY: Springer-Verlag.

R. Fernholz, Portofolio generating functions, 1999.

R. Fernholz, On the diversity of equity markets, 1999.

R. Fernholz, Crossovers, dividents, and the size effect, 1998.

R. Fernholz, Equity portofolios generated by functions of ranked market weights, 2001.

R. Fernholz, R.Garvy and J. Hannon, Diversity-weighted indexing, 1998.

R. Fernholz and B. Shay. Stochastic Portfolio Theory and Stock Market Equilibrium. 1982. Journal of Finance, Vol. 37, No. 2 (May): 615-624.

I. Karatzas, Lectures on the Mathematics of Finance, 1997.

I. Karatzas, Private Communication, 2001.

I. Karatazas and S.Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 1991.

I. Karatazas and S.Shreve, Methods of Mathematical Finance, 1998.

I. Karatazas, Private Communication, 2001.

I. Karatazas and S.G.Kou, On the pricing of contigent claims under constraints, 1996.

H. Markowitz, Portofolio Selection, 1952.

R. Merton, Continuous Time Finance. 1990. Blackwell Publishers.

A. Renyi, On measures of entropy and information, 1960.

E. Simpson, Measurement of diversity, 1949.