



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
Π.Μ.Σ. ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΖΗΜΙΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΟΥ SOLVENCY II

Διπλωματική Εργασία

Θεοδοσάκη Ε. Ιωάννα

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



UNIVERSITY OF PEIRAEUS  
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE  
M.Sc. IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

LOSS RESERVING OF AGGREGATE RISK  
MODEL WITHIN THE SOLVENCY II  
FRAMEWORK

M.Sc. THESIS  
Theodosaki E. Ioanna

Piraeus 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## **Ευχαριστίες**

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Πιτσέλη, καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την ανάθεση του θέματος της παρούσας διπλωματικής εργασίας και για την σημαντική καθοδήγησή του κατά την συγγραφή της. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την μεταδοτικότητα του καθώς και για τις κατανοητές του σημειώσεις, οι οποίες ήταν απόλυτα χρήσιμες. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω κ. Γ. Ψαρράκο ως μέλος της Επιτροπής. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την πολύτιμη στήριξή τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μοντελοποίηση της αβεβαιότητας των μελλοντικών πληρωμών ζημιών υπήρξε ένας πρωταρχικός στόχος της αναλογιστικής βιβλιογραφίας κατά την τελευταία δεκαετία. Πρόσφατα έχουν εξελιχθεί στοχαστικές μεθοδολογίες για την εκτίμηση του αποθέματος κινδύνου των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Εμείς προτείνουμε να εκτιμήσουμε το απόθεμα των ζημιών, υποθέτοντας ότι κάθε κελί του κατώτερου τμήματος του run-off τριγώνου ακολουθεί μια Σύνθετη Διαδικασία Poisson. Για την ακρίβεια θα εισάγουμε μια συσχέτιση, η οποία δρα διαφορετικά μεταξύ του πλήθους των ζημιών και του μέσου κόστους, στο κατώτερο τμήμα του τριγώνου των απωλειών. Επιπλέον, Monte Carlo μεθοδολογίες μας επιτρέπουν να προσομοιώσουμε την κατανομή των εκκρεμών ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος, και για το συνολικό απόθεμα μέχρι το πλήρες run-off, αλλά και μόνο για το επόμενο ημερολογιακό έτος. Το μοντέλο εφαρμόζεται στο πλαίσιο του Solvency II, προκειμένου να συγκρίνουμε το Εσωτερικό Μοντέλο των κεφαλαιακών απαιτήσεων με τις προσεγγίσεις της Τυποποιημένης Μεθόδου. Έχοντας αυτό ως κατευθυντήρια γραμμή, η μελέτη των περιπτώσεων αφορά διαφορετικούς ασφαλιστές και διαφορετικούς κλάδους της επιχείρησης (Lines of Business-LoBs), με στόχο να πετύχουμε μια αξιόπιστη σύγκριση. Τέλος, στο τρέχον μοντέλο οι παράμετροι έχουν βαθμονομηθεί από τα παρατηρημένα δεδομένα, και μέσω της Fisher-Lange μεθόδου, με στόχο την εκτίμηση της αβεβαιότητας που σχετίζεται επίσης με αυτή την ντετερμινιστική μέθοδο ( Savelli & Clemente, 2011).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ABSTRACT

To model uncertainty of future loss payments has been a primary goal of actuarial literature over last decade. Stochastic methodologies have indeed been recently developed with the aim to obtain the assessment of the Reserve Risk capital requirement. We propose to estimate the loss reserve assuming that each single cell of the lower part of the run-off triangle follows a Compound Poisson Process. Accurately, we introduce a correlation that acts separately between claim count and average cost in the bottom part of the loss triangle. Furthermore, Monte Carlo methods allow to simulate outstanding claims distributions for each accident year, for both the overall reserve until complete run-off and the next calendar year only. The model is applied in a Solvency II framework in order to compare the Internal Model capital requirement to the Standard Formula approaches. At this regard, the case study concerns different insurers and several lines of business with the purpose to obtain a reliable comparison. Finally in this model the parameters are calibrated by observed data and through the Fisher-Lange method, with the aim to estimate uncertainty related to this deterministic method too ( Savelli & Clemente, 2011).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>13</b>
<b>2. ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΖΗΜΙΩΝ .....</b>	<b>16</b>
2.1 Προσεγγίσεις της κατανομής των συνολικών αποθεμάτων R .....	17
2.2 Εφαρμογές του CRM σε αποθέματα ζημιών .....	21
2.3 Αποθέματα ζημιών στο πλαίσιο του Solvency II .....	33
2.3.1 Βέλτιστη Εκτίμηση και Περιθώριο Κινδύνου .....	34
2.3.2 Στοχαστικά μοντέλα για τα αποθέματα ζημιών .....	35
2.3.3 Κεφαλαιακή Επάρκεια της Φερεγγυότητας στον ορίζοντα του ενός έτους	36
<b>3.ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ.....</b>	<b>38</b>
3.1 Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου με την προσέγγιση αλγορίθμων .....	38
3.2 Αβεβαιότητα των παραμέτρων.....	42
3.3 Συνολικές ζημιές.....	46
3.4 Η κατανομή των συνολικών ζημιών.....	48
<b>4. ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (CRM) ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΖΗΜΙΩΝ .....</b>	<b>51</b>
4.1 Η Συλλογική Θεωρία Κινδύνου και οι εφαρμογές της.....	51
4.2 Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου/Collective Risk Model (CRM).....	53
4.3 Εκτίμηση των παραμέτρων με την μέθοδο Fisher Lange.....	60
4.4 Μελέτη περιπτώσεων (Case studies) .....	63
4.4.1 Βαθμονόμηση των παραμέτρων .....	65
4.4.2 CRM-FL vs Bootstrapping-CHL (Total Run-Off) .....	69
4.4.3 Προσέγγιση Ενός Έτους.....	71
4.4.4 Solvency Capital Requirement (CRM-FL vs Bootstrapping-CHL) .....	72
4.4.5 SCR (Εσωτερικό Μοντέλο vs Τυποποιημένη Μέθοδος).....	72
4.4.6 Αποθέματα ζημιών (Solvency II vs Solvency I) .....	74
4.4.7 Βαθμονόμηση και πρώτα αποτελέσματα.....	76
4.5 Σύγκριση μεταξύ των LoBs και τα αποτελέσματα μετά το άθροισμα .....	79
4.6 Συμπεράσματα.....	82
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>84</b>

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκτίμηση των μελλοντικών υποχρεώσεων των ζημιών (ή αλλιώς απαιτήσεων) έχει υπάρξει ένα θέμα αυξανόμενου ενδιαφέροντος κατά την πάροδο του χρόνου και πολλές ντετερμινιστικές μέθοδοι είχαν εξελιχθεί, κατά το παρελθόν, προκειμένου να επιτευχθεί μια εκτιμημένη τιμή για την πρόβλεψη των εκκρεμών ζημιών. Πρόσφατα, στο πλαίσιο του επικείμενου Solvency II και των νέων διεθνών λογιστικών αρχών στην ασφάλιση, αυτή η εκτίμηση καλείται σήμερα να συμπεριλάβει και ένα μέτρο της αβεβαιότητας γύρω από την κατά σημείο εκτίμηση των αποθεμάτων ζημιών. Έτσι, τα στοχαστικά μοντέλα για την εκτίμηση των εκκρεμών ζημιών έχουν πρόσφατα αξιοποιηθεί, με στόχο την αξιολόγηση τουλάχιστον ενός συντελεστή μεταβλητότητας, ο οποίος σχετίζεται με την κατά σημείο εκτίμηση του αποθέματος. Bootstrapping μεθοδολογίες και κλειστοί τύποι (βλέπε Mack, 1993), είναι δυο εναλλακτικοί τρόποι για να πετύχουμε την εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου Chain-Ladder. Επιπλέον, η πιθανοτική κατανομή του αποθέματος των ζημιών θα μπορούσε να προέλθει κατευθείαν από την δειγματοληψία και την ακολουθούμενη διαδικασία Monte Carlo, ενώ ο τύπος του Mack μας επιτρέπει να το επιτύχουμε αυτό μόνο υπό κάποιες υποθέσεις κατανομών (πχ υποθέτοντας μια Λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίσες με την βέλτιστη εκτίμηση του αποθέματος και το σφάλμα πρόβλεψης του Mack αντίστοιχα) ( Savelli & Clemente, 2011).

Η Διεθνής Ένωση Αναλογιστών (International Actuarial Association-IAA) πρότεινε έναν διαφορετικό τρόπο για την ανάλυση του αποθέματος των εκκρεμών ζημιών, με στόχο να ποσοτικοποιήσει την κεφαλαιακή απαίτηση για το απόθεμα κινδύνου (βλέπε IAA, 2004). Η μεθοδολογία αυτή (βλέπε Meyers, Klinker, Lalonde, 2003), περιγράφει το ολικό απόθεμα ενός κλάδου της ασφάλισης (LoB) ως μια σύνθετη μικτή διαδικασία Poisson, υπό τις υποθέσεις ότι ο συνολικός αριθμός των αποθεματοποιημένων ζημιών είναι κατανεμημένος σύμφωνα με την Αρνητική Διωνυμική κατανομή και η σφοδρότητα των εκκρεμών ζημιών έχει γνωστή μέση τιμή και γνωστό συντελεστή μεταβλητότητας. Η προσέγγιση αυτή, μας δίνει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε το ολικό απόθεμα των απαιτήσεων χωρίς να αναλύουμε ξεχωριστά για κάθε έτος ατυχήματος [βλέπε Hayne, 1989, Hayne, 2003, Meyers, 2008]. Εμείς επεκτείνουμε την προσέγγιση της IAA, υποθέτοντας ότι κάθε κελί του κατώτερου τμήματος του run-off τριγώνου μπορεί να περιγραφεί από μια Σύνθετη

Διαδικασία Poisson (είτε απλή είτε σύνθετη). Έχει δειχθεί πώς να προσεγγίσουμε, υπό την υπόθεση της ανεξαρτησίας, σχετικά εύκολα τις ακριβείς ροπές της κατανομής του αποθέματος, μόνο μέσω της γνώσης των χαρακτηριστικών των δύο κύριων τυχαίων μεταβλητών (του αριθμού και του μεγέθους των απαιτήσεων των μελλοντικών πληρωμών). Προσπαθούμε να ξεπεράσουμε την υπόθεση της ανεξαρτησίας, εισάγοντας μέσω δομών μεταβλητών μία συσχέτιση, η οποία δρα ξεχωριστά μεταξύ του πλήθους των απαιτήσεων και του μέσου κόστους, στο κάτω τμήμα του τριγώνου των ζημιών. Οι Monte Carlo μέθοδοι μας επιτρέπουν να προσομοιώσουμε τις κατανομές των εκκρεμών ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος, για ολόκληρο το απόθεμα και για το επόμενο ημερολογιακό έτος (στην περίπτωση του ορίζοντα το ενός έτους, όπως αυτός περιγράφεται στο Solvency II). Οι παράμετροι του μοντέλου έχουν βαθμονομηθεί από τα παρατηρημένα δεδομένα και μέσω ενός ντετερμινιστικού μοντέλου, το οποίο στηρίζεται στην ξεχωριστή εκτίμηση του αριθμού των απαιτήσεων που πρόκειται να πληρωθούν και των μελλοντικών μέσων κοστών για κάθε κελί του τριγώνου που πρόκειται να εκτιμηθεί.

Ένας από τους στόχους μας είναι να δημιουργήσουμε μια στοχαστική δομή για την μέθοδο Fisher-Lange [βλέπε Fisher-Lange, 1973, Ottaviani, 1980, Savelli & Clemente, 2010], η οποία χρησιμοποιείται ως μια ντετερμινιστική μέθοδος σε κάποιες αγορές. Επίσης αναλύουμε το ενός-έτους απόθεμα κινδύνου υπό την οπτική που υιοθετήθηκε από το Solvency II, εφαρμόζοντας την “επανα-αποθεματοποίηση” (Diers, 2009), με στόχο να εκτιμήσουμε την μεταβλητότητα του αποτελέσματος της εξέλιξης των ζημιών και τα ποσοστημόρια που συνδέονται με την προσομοιωμένη πιθανοτική κατανομή, προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε την κεφαλαιακή απαίτηση για το απόθεμα κινδύνου (Moriconi, 2006). Τα κύρια αποτελέσματα θα συγκριθούν χρησιμοποιώντας διαφορετικά στοχαστικά μοντέλα για το απόθεμα, αναλύοντας την επίδραση και για το απόθεμα κινδύνου των κεφαλαιακών απαιτήσεων, αλλά και για το περιθώριο κινδύνου. Τέλος, μοντέλα CRM και Bootstrap έχουν εφαρμοστεί σε διαφορετικούς ασφαλιστές και σε διαφορετικές LoBs, προκειμένου να αναλύσουμε την επίδραση στην εκτίμηση του αποθέματος των ζημιών (όπως με τη Βέλτιστη Εκτίμηση συν το Περιθώριο Κινδύνου σύμφωνα με το πλαίσιο του Solvency II QIS5) και στην κεφαλαιακή απαίτηση που προσδιορίζεται είτε με το Εσωτερικό

Μοντέλο, είτε με την Τυποποιημένη Μέθοδο (Standard Formula), ( και με Market-Wide & Undertaking Specific προσεγγίσεις).

Παραθέτουμε στη συνέχεια κάποιες βασικές έννοιες που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια (Πιτσέλης, 2012):

### **Βασικές έννοιες:**

**Απαίτηση (Claim):** Η απαίτηση είναι μια αξίωση για πληρωμή από ένα ασφαλιζόμενο άτομο ή από ένα τρίτο άτομο κάτω από τους όρους και τις συνθήκες ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Το άτομο που έχει την απαίτηση είναι ο ενάγων και μπορεί να υπάρχουν πολλοί ενάγοντες για μία ζημιά. Τα στατιστικά των ζημιών είναι τα στοιχεία για την διαδικασία της τιμολόγησης. Συχνά η λέξη απαίτηση χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε απώλεια(ζημιά).

**Απώλεια ή ζημιά (Loss):** Η απώλεια είναι το μέγεθος της απαίτησης. Στην ασφαλιστική ευθύνη “η απώλεια” συμπεριλαμβάνει σωματική βλάβη, ζημιά περιουσίας κ.λ.π.. Για αποζημιώσεις εργατικών ατυχημάτων η απώλεια συμπεριλαμβάνει νοσοκομειακές παροχές, αποζημιώσεις κ.λ.π.. Τα ποσά που έχουν πληρωθεί ή θα πληρωθούν με τους όρους του ασφαλιστηρίου συμβολαίου, αναφέρονται ως απώλειες ή ζημιές (losses).

**Severity:** Σφοδρότητα, μέγεθος ζημιάς. Είναι το μέσο κόστος ζημιάς ανά απαίτηση. Η σφοδρότητα μπορεί να αποτελείται είτε από καθαρές απώλειες, χωρίς δηλαδή να συμπεριλάβουμε τα λειτουργικά έξοδα, είτε από προσδιορισμένα έξοδα ρύθμισης ζημιάς, είτε από συνολικά έξοδα. Η σφοδρότητα μπορεί να μετρηθεί ως:  $S = \frac{L}{C}$

όπου:

- i. Με  $S$  συμβολίζουμε την σφοδρότητα (μέγεθος ζημιάς) (severity),
- ii. με  $L$  συμβολίζουμε τις απώλειες (loss),
- iii. με  $C$  συμβολίζουμε τον αριθμό των ζημιών (count).

## 2. ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΖΗΜΙΩΝ

Στη συνέχεια θα μελετηθεί το πλαίσιο της Συλλογική Θεωρίας Κινδύνου (Collective Risk Theory) ως μια προσέγγιση, που μπορεί να εφαρμοστεί για την εκτίμηση των στατιστικών κατανομών των αποθεμάτων.

Το βασικό Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου (Collective Risk Model-CRM) προσεγγίζει την ερώτηση σχετικά με την κατανομή των συνολικών αποθεμάτων, μοντελοποιώντας την διαδικασία των απαιτήσεων που αντιμετωπίζονται από έναν ασφαλιστή (Hayne, 1989). Θεωρεί την αλληλεπίδραση μεταξύ της κατανομής του αριθμού των απαιτήσεων και την κατανομή(ές) των ατομικών απαιτήσεων, υπολογίζοντας την απώλεια (ή το απόθεμα)  $R$  ως το άθροισμα:

$$R = X_1 + X_2 + \dots + X_N,$$

όπου ο αριθμός των απαιτήσεων  $N$  έχει επιλεγεί τυχαία και κάθε μία από τις απαιτήσεις  $X_1, X_2, \dots, X_N$  έχει επιλεγεί τυχαία από τις κατανομές του μεγέθους των απαιτήσεων.

Υπάρχουν κάποιες χρήσιμες ιδιότητες της κατανομής  $R$  κάτω από προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα, αν:

i) Ο αριθμός των απαιτήσεων  $N$  έχει ροπές:

$$\begin{aligned}v &= E(N), \\v_i &= E[(N - v)^i],\end{aligned}$$

για  $i=2, 3, 4$ .

ii) Όλες οι απαιτήσεις έχουν επιλεγεί από τον ίδιο πληθυσμό, με ροπές:

$$\begin{aligned}x &= E(X), \\x_i &= E[(X - x)^i],\end{aligned}$$

για  $i=2, 3, 4$  και

iii) Όταν όλες οι απαιτήσεις  $X$  και ο αριθμός των απαιτήσεων  $N$  είναι ανεξάρτητα, τότε οι τέσσερις πρώτες ροπές της τυχαίας μεταβλητής  $R$  υπάρχουν και δίνονται από τις σχέσεις:



$$E(R) = vx, \quad (1)$$

$$E[\{R - E(R)\}^2] = x_2v + x^2v_2, \quad (2)$$

$$E[\{R - E(R)\}^3] = x_3v + 3x_2xv_2 + x^3v_3, \quad (3)$$

$$E[\{R - E(R)\}^4] = x_4v + 3x_2^2(v_2 - v + v^2) + 4xx_3v_2 + 6x^2x_2(v_3 + v_2) + x^4v_4. \quad (4)$$

Οι αντίστοιχοι τύποι για μεγαλύτερες ροπές μπορούν να προκύψουν, αν υπάρχουν οι αντίστοιχες ροπές του αριθμού των απαιτήσεων και του μεγέθους της κατανομής.

Τα παραπάνω δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της λογικότητας κάθε προσέγγισης της κατανομής της  $R$ .

## 2.1 Προσεγγίσεις της κατανομής των συνολικών αποθεμάτων $R$

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες προσεγγίσεων της κατανομής  $R$  (Hayne, 1989):

1. Προσομοίωση Monte Carlo.
2. Προσεγγιστικές κατανομές.
3. Αναλυτικές προσεγγίσεις.

- **Προσομοίωση Monte Carlo**

Είναι πιθανόν η πιο ευέλικτη από τις παραπάνω προσεγγίσεις. Η ιδέα στην οποία στηρίζεται είναι απλή και ακολουθεί πιστά το βασικό Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου.

Ο αλγόριθμος της προσομοίωσης Monte Carlo αποτελείται από πέντε βήματα:

- 1) Τυχαία επιλογή του αριθμού των απαιτήσεων  $N$  από την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων.
- 2) Τυχαία επιλογή  $N$  απαιτήσεων,  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , από την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων.
- 3) Υπολογισμός μιας παρατήρησης από την κατανομή  $R$ , μέσω του αθροίσματος:  $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ .
- 4) Επανάληψη των βημάτων (1) έως (3) “αρκετές” φορές.
- 5) Εκτίμηση της κατανομής  $R$  χρησιμοποιώντας τα σημεία που παρήχθησαν με αυτό τον τρόπο.

Το πόσο πολλές θα είναι οι “αρκετές” φορές του βήματος 4 δεν είναι σαφές. Συχνά ένας σημαντικός αριθμός προσομοιώσεων πρέπει να “τρέξει” για να επιτύχουμε μια αρκετά καθαρή εικόνα της κατανομής  $R$ , η οποία θα είναι χρήσιμη για τις εφαρμογές μας. Μια τεχνική είναι να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα δύο συνόλων προσομοιώσεων, το καθένα αποτελούμενο από 1,000 δοκιμές. Αν οι προκύπτουσες κατανομές είναι “αρκετά” κοντά, η συνδυασμένη κατανομή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μια προσέγγιση. Αν, ωστόσο, διαφέρουν σημαντικά, ίσως να υποδείξουμε περισσότερες δοκιμές. Οι ροπές των προσομοιωμένων κατανομών θα έπρεπε να συγκριθούν με τις θεωρητικά αναμενόμενες ροπές των σχέσεων (1) έως (4), για να διαπιστώσουμε εάν είναι επαρκώς κοντά.

- **Προσεγγιστικές κατανομές**

Μια άλλη μέθοδος για την εκτίμηση της κατανομής  $R$ , προκύπτει υποθέτοντας μια στατιστική κατανομή και έπειτα χρησιμοποιώντας “γνωστές” ροπές της  $R$  για την επιλογή των παραμέτρων αυτής της κατανομής (Pentikäinen, 1984). Η μέθοδος αυτή χρειάζεται προσοχή, καθώς μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα, αν δεν εφαρμοστεί ορθά, ειδικά αν η μεταβλητή που πρόκειται να προσεγγιστεί διαφέρει σημαντικά από την κανονική κατανομή.

Η προσέγγιση αυτή θεωρεί έναν μετασχηματισμό της μεταβλητής  $R$ , που ελπίζουμε να είναι κατά προσέγγιση κανονικός. Παρόλο που ο μετασχηματισμός της  $R$  μπορεί να διαμορφωθεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει επαρκή στιγμιότυπα της κατανομής της  $R$ , η εφαρμογή σταματάει στην Τρίτη στιγμή, με τον τύπο:

$$t_0 = m_1 + m_2 z_0 + m_3 (z_0^2 - 1) / 6 + m_4 (z_0^3 - 3z_0) / 24 - m_3^2 (2z_0^3 - 5z_0) / 36,$$

όπου το  $z_0$  παριστά το 100ό ποσοστημόριο μιας τυπικής κανονικής κατανομής και το  $t_0$  παριστά την προσέγγιση του 100ού εκατοστημορίου της κατανομής της  $R$ .

Εδώ:

$$m_1 = E(R),$$

$$m_2 = E[\{R - E(R)\}^2],$$

$$m_3 = E[\{R - E(R)\}^3] / m_2^3,$$

$$m_4 = E[\{R - E(R)\}^4] / m_2^4 - 3.$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε τις ροπές πρώτης έως και τέταρτης τάξης, με την (1) να είναι η μέση τιμή, η (2) είναι η διακύμανση και οι (3), (4) είναι η λοξότητα και η κύρτωση αντίστοιχα.

Με τη χρήση των σχέσεων (1), (2), (3), (4) (που είναι αντίστοιχα οι ροπές πρώτης, έως και τέταρτης τάξης) της πρώτης παραγράφου, οι κύριες ροπές της  $R$  μπορούν να βρεθούν από τις κατανομές του αριθμού των απαιτήσεων και του μεγέθους των απαιτήσεων. Τα κύρια ποσοστημόρια των συνολικών κατανομών, μπορούν έτσι να προσεγγισθούν.

Το προτέρημα αυτής της μεθόδου είναι ότι είναι σχετικά απλή, και ότι εφόσον υπολογισθούν μια φορά τα στιγμιότυπα, είναι εύκολο να προσεγγισθούν τα ποσοστημόρια της συνολικής κατανομής (Venter, 1983). Απαιτεί ωστόσο η μορφή της κατανομής να είναι αυτή που έχει υποθεθεί και επιπλέον δεν υπάρχουν διαθέσιμοι έλεγχοι για το πόσο καλά η κατανομή αυτή προσεγγίζει την πραγματική κατανομή της  $R$ .

- **Αναλυτικές προσεγγίσεις**

Μια τρίτη κατηγορία προσεγγίσεων της κατανομής  $R$  επιδιώκει έναν αναλυτικό υπολογισμό αυτής της κατανομής (Hayne, 1989). Η προσέγγιση αυτή μελετάει την κατανομή της  $R$  ως το άθροισμα:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)F_n(t) , \quad (1)$$

όπου  $P(N = n)$  είναι η πιθανότητα των  $n$  απαιτήσεων και  $F_n(t)$  είναι η πιθανότητα το άθροισμα των  $n$  απαιτήσεων να είναι λιγότερο από  $t$ . Οι συναρτήσεις  $F_n(t)$  μπορούν να υπολογιστούν σε σχέση με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ατομικής κατανομής μεγέθους απαιτήσεων.

Στη διακριτή περίπτωση, πχ αν η  $F(X)$  δίνεται από

$$\begin{aligned} F(100) &= 0.60, \\ F(300) &= 0.40, \end{aligned}$$

τότε η  $F_2(x)$  θα δίνεται από:

$$F_2(200) = 0.36,$$

$$F_2(400) = 0.84,$$

$$F_2(600) = 1.00.$$

Εφόσον υπάρχουν μόνο δύο αποτελέσματα της πραγματικής κατανομής, μια ζημιά των 100 με πιθανότητα 0.6 και μια ζημιά των 300 με πιθανότητα 0.4, τα μόνα πιθανά αποτελέσματα του αθροίσματος είναι 200 ( δύο ζημιές των 100 η κάθε μία), 400 (μια ζημιά των 100 και μια των 300), και 600 (δυο ζημιές των 300 η κάθε μία). Η προκύπτουσα κατανομή ονομάζεται συνέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της  $F$  με τον εαυτό της.

Γενικότερα, στη συνεχή περίπτωση, αν  $f(x)$  και  $g(y)$  είναι οι σ.π.π. των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , τότε το άθροισμα  $Z = X + Y$  έχει σ.π.π. που δίνεται από τον τύπο:

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx, \quad (2)$$

που καλείται συνέλιξη των  $f$  και  $g$ . Όμοια με τον πολλαπλασιασμό ορίζεται η  $f^{*n}$  επαναληπτικά από τους τύπους:

$$f^{*0} = 1,$$

$$f^{*n} = f * f^{*(n-1)},$$

για  $n=1, 2, \dots$

Τότε η  $F_n(x)$  μπορεί να γραφτεί σε σχέση με την  $f^{*n}$  ως:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f^{*n}(z)dz. \quad (3)$$

Αν τώρα η σ.π.π. της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων είναι  $f(x)$ , τότε συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (3), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που διέπει την κατανομή της  $R$ , μπορεί να γραφτεί ως:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)f^{*n}(t).$$

Αυτοί οι τύποι ισχύουν κάτω από ένα μεγάλο εύρος συνθηκών, οι οποίες εγγυώνται ότι το άθροισμα συγκλίνει και ότι τα διάφορα  $f^{*n}(x)$  υπάρχουν.

## 2.2 Εφαρμογές του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου (CRM) σε αποθέματα ζημιών

Το μοντέλο της ασφαλιστικής διαδικασίας (Hayne, 1989) που παρέχεται από την Συλλογική Θεωρία Κινδύνου, μοιάζει με ένα φυσικό εργαλείο που μπορεί να εφαρμοστεί στην εξέλιξη του βαθμού αβεβαιότητας στις εκτιμήσεις αποθεμάτων κατά ζημιών. Αν για παράδειγμα υποτεθεί ανεξαρτησία, η κατανομή των ανοικτών και IBNR (Incurred But Not Reported:ζημιές που έχουν γίνει αλλά δεν έχουν αναγγελθεί τα πρώτα έτη και σταδιακά αναγγέλλονται τα επόμενα έτη) απαιτήσεων ( $N$ ) είναι γνωστή, και η κατανομή του μεγέθους αυτών των απαιτήσεων ( $X$ ) είναι επίσης γνωστή, όλες οι μέθοδοι που περιγράφηκαν παραπάνω, παρέχουν τρόπους εκτίμησης της κατανομής των συνολικών αποθεμάτων ( $R$ ).

Για την μοντελοποίηση της κατανομής των αποθεμάτων για έναν ασφαλιστή ή για έναν αυτασφαλιζόμενο, τα έτη ατυχήματος (η αναφορά ή πολιτική) συνήθως θεωρούνται ξεχωριστά, με ξεχωριστές κατανομές για τον υπολογισμό των απαιτήσεων και για το μέγεθος των απαιτήσεων, για κάθε έτος. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε να διατηρηθούν οι διαφορές στην σχετική λήξη καθώς και τη διατήρηση μεγαλύτερης ομοιογένειας απαιτήσεων για κάθε έτος. Η κατανομή των συνολικών αποθεμάτων μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας συνελίξεις των κατανομών για τα μεμονωμένα έτη, αν τα διάφορα έτη έχουν υποτεθεί στοχαστικά ανεξάρτητα. Μια μικρή εφαρμογή είναι για παράδειγμα να προσεγγίσουμε το 95<sup>ο</sup> τεταρτημόριο της κατανομής με το 95<sup>ο</sup> τεταρτημόριο των κατανομών των αποθεμάτων, για διάφορα έτη ατυχήματος. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι διάφορες κατανομές είναι άριστα συσχετισμένες μεταξύ τους.

Υπάρχουν πολλές πιθανές προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των κατανομών και να αποδώσουν εκτιμήσεις της μεταβλητότητας του αποθέματος.

Αυτός ο καθορισμός θεωρεί την κατανομή των ατυχημάτων για ένα έτος ατυχήματος, ως τον συνδυασμό των κατανομών των αποθεμάτων που προέρχονται από τρεις κατηγορίες: αποθέματα κατά περίπτωση, αποθέματα εξέλιξης και IBNR αποθέματα. Εμείς θεωρούμε αποθέματα για ζημιές που έχουν ανοιχθεί εκ νέου στην κατηγορία

των IBNR αποθεμάτων. Αυτές οι τρεις συνιστώσες έχουν αυξανόμενη αβεβαιότητα αντίστοιχα, η οποία συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

	Πλήθη	Ποσά
Αποθέματα κατά περίπτωση	Συγκεκριμένα	Συγκεκριμένα
Αποθέματα εξέλιξης	Συγκεκριμένα	Μη συγκεκριμένα
IBNR αποθέματα	Μη συγκεκριμένα	Μη συγκεκριμένα

- Κατανομές για μεγέθη ζημιών που έχουν αναγγελθεί

Αν ομαδοποιήσουμε τις δύο πρώτες κατηγορίες, τα αποθέματα κατά περίπτωση και τα αποθέματα εξέλιξης, τότε η στατιστική αβεβαιότητα υπεισέρχεται μόνο στην απόκλιση του μεγέθους των απαιτήσεων, αφού ο αριθμός των ζημιών είναι γνωστός. Δεδομένης μιας εκτίμησης της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων, οι μέθοδοι που θα ακολουθήσουν μπορούν να εφαρμοστούν για την εκτίμηση των κατανομών αυτών των αποθεμάτων.

Η τρέχουσα κατανομή για ζημιές που είναι ανοιχτές και έχουν αναγγελθεί, μπορεί να μας παρέχει μια γνώση της κατανομής αυτής. Για προηγούμενα έτη, κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει την σχέση μεταξύ της κατανομής των απαιτήσεων σε αυτό το επίπεδο εξέλιξης, με την τελική κατανομή αυτών των ίδιων απαιτήσεων και να την ενσωματώσει με την τρέχουσα κατανομή, για να εκτιμήσει την τελική κατανομή των απαιτήσεων.

Ως ένα παράδειγμα μιας τέτοιας πιθανής προσέγγισης, θεωρούμε ότι το λογαριθμοκανονικό μοντέλο είναι το κατάλληλο για την κατανομή  $X$ , με το μέγεθος των απαιτήσεων να είναι μια τυχαία μεταβλητή. Τότε η  $Z = \ln(X)$  έχει μια κανονική κατανομή, και η λογαριθμοκανονική μπορεί να παραμετροποιηθεί με τον μέσο  $m$  και την διακύμανση  $s^2$  της  $Z$ . Επιλέγουμε αυτή την παραμετροποίηση για την κατανομή της  $X$ .

Έπεται επομένως ότι οι εκτιμητές της μέγιστης πιθανοφάνειας για το  $m$  και το  $s^2$  προσδιορίζονται από τον μέσο και την διακύμανση του δείγματος, από τις τιμές

$\ln(X_i)$ , όπου  $X_i$  είναι οι παρατηρημένες απαιτήσεις (Aitchison & Brown, 1969). Όπως στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, η διακύμανση του δείγματος, χρησιμοποιώντας τον αριθμό των διακριτών σημείων ως τον παρονομαστή, είναι μια εκτίμηση για το  $s^2$ . Έτσι, χρησιμοποιείται ένας παρονομαστής  $n-1$  για την εκτίμηση του  $s^2$ .

Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων για ζημιές που είναι ανοιχτές και έχουν αναγγελθεί για το έτος ατυχήματος 1981, ως την 31 Δεκέμβρη του 1988. Το έτος ατυχήματος είναι αυτή τη στιγμή 84 μήνες από την αρχή του 1981.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους εκτιμητές  $m_{84}$  και  $s_{84}^2$  των παραμέτρων  $m$  και  $s^2$ , για ζημιές που έχουν αναγγελθεί σε προηγούμενα έτη, σε 84 μήνες εξέλιξης. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τους εκτιμητές  $m_{ult}$  και  $s_{ult}^2$  για την κατανομή των τελικών τιμών αυτών των ίδιων ζημιών. Χρησιμοποιώντας παλινδρόμηση μπορούμε να βρούμε σταθερές που να ταιριάζουν καλύτερα στα προηγούμενα έτη:

$$m_{ult} = a + bm_{84}, \quad (1)$$

και

$$s_{ult}^2 = c + ds_{84}^2. \quad (2)$$

Αυτές οι παράμετροι, μαζί με τους εκτιμητές  $m_{84}^*$  και  $s_{84}^{*2}$  για τις τρέχουσες κατανομές των απαιτήσεων για το έτος ατυχήματος 1981, ως την 31 Δεκέμβρη 1988, δίνουν τις ακόλουθες εκτιμήσεις των παραμέτρων για την τελική κατανομή των ζημιών που έχουν πρόσφατα αναγγελθεί και ανοιχθεί για το έτος ατυχήματος 1981:

$$m_{ult}^* = a + bm_{84}^*, \quad (3)$$

και

$$s_{ult}^{*2} = c + ds_{84}^{*2}. \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα χρησιμοποιώντας καθαρά υποθετικά δεδομένα. Θα θεωρήσουμε ότι οι απώλειες για τα επτά πρώτα έτη ατυχήματος έχουν επαρκώς αναπτυχθεί, ώστε να ξέρουμε την τελική κατανομή τους και ελπίζοντας να εκτιμήσουμε την κατανομή για το έτος ατυχήματος 1981.

Θα παραθέσουμε τις κατανομές των ζημιών που έχουν αναγγελθεί κατά τους 84 μήνες, καθώς και τις τελικές κατανομές για τις ζημιές που αναγγέλθηκαν μέσα στους 84 μήνες, για τα επτά πρώτα έτη ατυχήματος, καθώς και τις αντίστοιχες παραμέτρους για τις προσαρμοσμένες λογαριθμοκανονικές κατανομές:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**Κατανομές των απωλειών για τις ζημιές που αναγγέλθηκαν κατά τους 84 μήνες  
εξέλιξης**

Έτος ατυχήματος 1				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	199	\$450	170	\$479
1,001-5,000	163	2,73	150	2,738
5,001-10,000	55	7,366	65	6,866
10,001-25,000	48	17,074	63	16,606
25,001-50,000	19	36,052	25	37,506
50,001-100,000	10	71,898	15	74,917
100,001-250,000	5	158,696	9	162,01
250,001-500,000	1	369,018	2	341,595
500,001-1,000,000	0		1	711,158
1,000,000-	0		0	
Συνολικό	500		500	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	7.396	7.740
$s^2$	1.848	1.937

Έτος ατυχήματος 2				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	168	\$443	150	\$442
1,001-5,000	168	2,477	172	2,585
5,001-10,000	65	7,327	62	7,252
10,001-25,000	59	15,551	64	17,055
25,001-50,000	25	37,613	29	35,638
50,001-100,000	14	72,826	18	71,916
100,001-250,000	8	170,667	11	160,023
250,001-500,000	2	351,781	3	356,221
500,001-1,000,000	1	699,609	1	702,665
1,000,000-	0		0	
Συνολικό	510		510	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	7.736	7.918
$s^2$	1.862	1.880

**Κατανομές των απωλειών για τις ζημιές που αναγγέλθηκαν κατά τους 84 μήνες  
εξέλιξης**

Έτος ατυχήματος 3				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	172	\$415	166	\$445
1,001-5,000	167	2,502	173	2,622
5,001-10,000	62	7,172	61	7,522
10,001-25,000	65	15,775	61	15,177
25,001-50,000	27	38,563	31	37,408
50,001-100,000	15	74,796	15	65,545
100,001-250,000	9	167,488	9	160,523
250,001-500,000	2	363,088	3	365,688
500,001-1,000,000	1	663,006	1	705,967
1,000,000-	0		0	
<b>Συνολικό</b>	<b>520</b>		<b>520</b>	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	7.754	7.797
$s^2$	1.899	1.896

Έτος ατυχήματος 4				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	160	\$480	161	\$441
1,001-5,000	170	2,558	170	2,837
5,001-10,000	74	6,886	70	7,456
10,001-25,000	65	15,519	67	15,832
25,001-50,000	32	36,991	30	35,14
50,001-100,000	17	74,283	17	73,015
100,001-250,000	9	163,701	11	158,295
250,001-500,000	3	370,993	3	345,297
500,001-1,000,000	1	720,316	1	702,86
1,000,000-	0		1	2,117,652
<b>Συνολικό</b>	<b>531</b>		<b>531</b>	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	7.896	7.897
$s^2$	1.862	1.917

**Κατανομές των απωλειών για τις ζημιές που αναγγέλθηκαν κατά τους 84 μήνες  
εξέλιξης**

Έτος ατυχήματος 5				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	151	\$443	140	\$478
1,001-5,000	177	2,647	172	2,531
5,001-10,000	73	7,809	74	7,858
10,001-25,000	71	16,229	73	16,888
25,001-50,000	34	35,331	39	32,982
50,001-100,000	20	72,039	21	72,711
100,001-250,000	11	153,797	15	154,762
250,001-500,000	3	363,043	4	335,047
500,001-1,000,000	1	703,801	2	679,978
1,000,000-	0		1	1,924,372
<b>Συνολικό</b>	<b>541</b>		<b>541</b>	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	8.003	8.145
$s^2$	1.849	1.919

Έτος ατυχήματος 6				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	153	\$436	151	\$450
1,001-5,000	181	2,508	170	2,695
5,001-10,000	71	7,373	70	7,27
10,001-25,000	78	16,035	78	16,929
25,001-50,000	35	37,119	37	36,601
50,001-100,000	19	77,169	23	68,545
100,001-250,000	11	157,721	15	164,521
250,001-500,000	3	366,86	5	337,331
500,001-1,000,000	1	716,312	2	694,022
1,000,000-	0		1	2,312,174
<b>Συνολικό</b>	<b>552</b>		<b>552</b>	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	8.012	8.103
$s^2$	1.839	1.975

**Κατανομές των απωλειών για τις ζημιές που αναγγέλθηκαν κατά τους 84 μήνες  
εξέλιξης**

Έτος ατυχήματος 7				
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Στους 84 μήνες		Τελικό	
	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	140	\$466	149	\$468
1,001-5,000	187	2,697	183	2,587
5,001-10,000	72	7,144	72	8,01
10,001-25,000	74	15,859	77	16,43
25,001-50,000	42	38,555	37	34,613
50,001-100,000	26	73,586	23	72,933
100,001-250,000	14	158,619	15	156,53
250,001-500,000	5	364,353	4	343,411
500,001-1,000,000	2	721,218	2	736,468
1,000,000-	1	2,128,700	1	2,045,068
<b>Συνολικό</b>	<b>563</b>		<b>563</b>	

Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$	8.180	8.105
$s^2$	1.909	1.923

Το έτος ατυχήματος 1981		
Διαστήματα ορίων του μεγέθους των απαιτήσεων	Αριθμός των ζημιών	Μέσο Κόστος
\$0-\$1,000	118	\$459
1,001-5,000	183	2,707
5,001-10,000	84	7,949
10,001-25,000	86	17,114
25,001-50,000	51	35,679
50,001-100,000	26	72,272
100,001-250,000	17	151,062
250,001-500,000	6	366,299
500,001-1,000,000	2	685,736
1,000,000-	1	2,126,918
<b>Συνολικό</b>	<b>456</b>	
Παράμετροι προσαρμοσμένων λογαριθμοκανονικών κατανομών		
$m$		8.411
$s^2$		1.835

Στη συνέχεια θα δείξουμε τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης, με τις αντίστοιχες σταθερές ( $a$  και  $c$ ) και τους αντίστοιχους συντελεστές ( $b$  και  $d$ ). Λόγω της μειωμένης σημασίας του συντελεστή για την  $s^2$ , υποθέτουμε ότι οι  $s_{84}^{*2}$  και  $s_{ult}^{*2}$  δεν συνδέονται με κάποια σχέση. Έτσι χρησιμοποιούμε τον μέσο και την διακύμανση του δείγματος, για τις τελικές κατανομές των πρώτων επτά ετών, όπως στις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Το κατώτερο τμήμα του ακόλουθου πίνακα μας δείχνει τα εκτιμώμενα αποτελέσματα για τις παραμέτρους της τελικής κατανομής για το έτος ατυχήματος 1981:

#### Εκτιμήσεις με παλινδρόμηση των παραμέτρων για επόμενα έτη ατυχήματος

m παράμετροι			$s^2$ παράμετροι		
Έτη ατυχήματος	Στους 84 μήνες	Τελικό	Στους 84 μήνες	Τελικό	
1	7.396	7.740	1.848	1.937	
2	7.736	7.918	1.862	1.880	
3	7.754	7.797	1.899	1.896	
4	7.896	7.897	1.862	1.917	
5	8.003	8.145	1.849	1.919	
6	8.012	8.103	1.839	1.975	
7	8.180	8.105	1.909	1.923	

Αποτελέσματα παλινδρόμησης		
Σταθερές ( $a$ )	3.580	2.905
Συντελεστές ( $b$ )	0.557	-527,00
Τυπικό σφάλμα του συντελεστή	0.135	0.447
$R^2$	0.773	0.218
Τυπικό σφάλμα της $Y$ εκτίμησης	0.084	0.029

Έτος ατυχήματος	Προσαρμοσμένο m στους 84 μήνες	Πρόβλεψη m	Τυπική απόκλιση της πρόβλεψης m	Προσαρμοσμένο $s^2$ στους 84 μήνες	Πρόβλεψη του $s^2$	Αβεβαιότητα του προσαρμοσμένου $s^2$
1981	8.411	8.265	0.136	1.835	1.921	1.939

- **Παράδειγμα εκτίμησης της κατανομής των συνολικών αποθεμάτων, για ένα έτος ατυχήματος**

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τις κατανομές αποθεμάτων για ζημιές που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν καταγραφεί (IBNR). Στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των ζημιών και η σφοδρότητα είναι αβέβαια (Hayne, 1989). Οι παράμετροι για την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων, μπορούν να θεωρηθούν ως η τελική τιμή των απαιτήσεων προηγούμενων (mature) ετών, τα οποία αναφέρθηκαν μετά από 84 μήνες.

Μια προσέγγιση για την εκτίμηση της κατανομής του πλήθους των απαιτήσεων είναι να υποθεθεί ότι αυτή είναι μια Poisson κατανομή και έπειτα να εκτιμηθεί ο αναμενόμενος αριθμός των IBNR αποθεμάτων χρησιμοποιώντας τις συνήθεις προβαλλόμενες αναλογιστικές μεθόδους. Μια άλλη προσέγγιση, θεωρεί την εμφάνιση που παρουσιάζεται στην αρχή, ως την στατιστική κατανομή, με γνωστά δεδομένα, τα οποία δίνονται. Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται οι εκτιμητές Μεγίστης Πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των παραμέτρων αυτής της κατανομής. Ένα πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι με αυτό μπορούν να εκτιμηθούν η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής του πλήθους των απαιτήσεων.

Αυτή η προσέγγιση θεωρεί αρχικά ως δεδομένη μια καμπύλη εξέλιξης, με τη μορφή μιας πιθανοτικής κατανομής, και έπειτα χρησιμοποιεί τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας σε συνδυασμό με γνωστές απαιτήσεις που έχουν αναφερθεί, για την εκτίμηση τόσο του τελικού αριθμού των απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί, όσο και για την προσέγγιση της τελικής κατανομής. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για εκτίμηση της κατανομής των τελικών ζημιών (βλέπε Hayne, 1989).

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο αριθμός των απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου  $t$ , μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$UF(t; \vec{\theta}).$$

Το  $U$  είναι ο (άγνωστος) αριθμός των απαιτήσεων, και  $F(t; \vec{\theta})$  είναι μια συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής, με την παράμετρο  $\vec{\theta}$  να αντιπροσωπεύει το

ποσοστό των τελικών απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου  $t$ .

Σε αυτό το παράδειγμα, θεωρούμε ότι ο αριθμός των απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί κατά την χρονική περίοδο  $i$ , είναι ένα ομαδοποιημένο δείγμα που περιλαμβάνει  $f_i$  σημεία στο διάστημα  $(c_{i-1}, c_i)$  της κατανομής. Μπορούμε με επαναληπτικό τρόπο να προσεγγίσουμε τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $\vec{\theta}$ , δοσμένων  $k$  παρατηρήσεων.

Ορίζουμε έτσι:

$$P_r(\vec{\theta}) = [F(c_r; \vec{\theta}) - F(c_{r-1}; \vec{\theta})] / F(c_k; \vec{\theta}).$$

Εδώ  $c_{r-1}$  και  $c_r$  είναι τα τελικά σημεία του διαστήματος που περιέχει τις  $f_r$  παρατηρήσεις. Έστω  $f^*$  ο συνολικός αριθμός των απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί κατά τη διάρκεια  $k$  χρονικών περιόδων, δηλαδή:

$$f^* = \sum_{r=1}^k f_r.$$

Ορίζουμε  $A(\vec{\theta})$  ως τον πίνακα που αποτελείται από τα στοιχεία:

$$a_{ij}(\vec{\theta}) = f^* \sum_{r=1}^k \frac{1}{P_r(\vec{\theta})} \frac{\partial P_r}{\partial \theta_i}(\vec{\theta}) \frac{\partial P_r}{\partial \theta_j}(\vec{\theta}),$$

και έστω ότι το διάνυσμα  $S(\vec{\theta})$  έχει στοιχεία:

$$S_j(\vec{\theta}) = \sum_{r=1}^k f_r \frac{\partial P_r}{\partial \theta_j}(\vec{\theta}).$$

Με αυτές τις συναρτήσεις, που περιέχουν μόνο πρώτες παραγώγους της συσσωρευτικής συνάρτησης πιθανότητας ως προς τις παραμέτρους της, επαναληπτικά υπολογίζουμε (με βάση τη μέθοδο Newton-Raphson):

$$\vec{\theta}_m = \vec{\theta}_{m-1} + [A(\vec{\theta}_{m-1})]^{-1} S(\vec{\theta}_{m-1}).$$

Έστω τώρα  $h = F(c_k; \vec{\theta}_0)$  το εκτιμώμενο ποσοστό απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί την χρονική στιγμή  $c_k$ . Ο πραγματικός αριθμός των απαιτήσεων που έχουν αναφερθεί την χρονική στιγμή  $c_k$ , μπορεί τότε να θεωρηθεί ότι ακολουθεί διωνυμική κατανομή με (άγνωστη) μέση τιμή  $Uh$  και διακύμανση  $Uh(1-h)$ . Σε αυτό το σημείο

θεωρούμε ότι η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική κατανομή.

Έτσι προσεγγιστικά,

$$R \sim N(Uh, Uh(1-h)).$$

Έτσι, η  $U=R/h$  είναι κατά προσέγγιση κανονική:

$$U \sim N(f^*/h, f^*(1-h)/h^2).$$

Οδηγούμεστε έτσι σε μια προσεγγιστική κατανομή των IBNR απαιτήσεων, την  $I$ , όπου:

$$I = U - f^* \sim N(f^*/h - f^*, f^*(1-h)/h^2).$$

Δεδομένων αυτών των εκτιμήσεων των κατανομών μπορούμε να βρούμε μια εκτίμηση για την κατανομή των IBNR αποθεμάτων, για παράδειγμα για το έτος ατυχήματος 1981, όσο και για τις 31 Δεκέμβρη του 1988.

Αν έχει υποθεθεί ότι αυτή η κατανομή και η κατανομή των αποθεμάτων για τις απαιτήσεις που έχουν αναφερθεί είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, τότε μπορεί να γίνει μια εκτίμηση για την κατανομή των συνολικών αποθεμάτων, μέσω της συνέλιξης των δύο αυτών κατανομών.

- **Συνδυασμός ετών**

Οι παραπάνω υπολογισμοί οδηγούν σε μια εκτίμηση για την κατανομή των συνολικών αποθεμάτων για ένα έτος ατυχήματος, στην περίπτωση μας για το 1981. Στην πραγματικότητα, θα υπολογίζονταν για μία κάλυψη ή για μία LoB. Για μια εταιρεία με περισσότερες LoBs όμως, η κατανομή των συνολικών αποθεμάτων για όλους τους κλάδους (Lines of Business-LoBs) και για όλα τα έτη, προκαλεί ανησυχία.

Αν κάποιος υποθέσει ότι οι κατανομές για τις διάφορες LoBs και για τα έτη ατυχήματος ότι είναι όλες στοχαστικά ανεξάρτητες, τότε η κατανομή των συνολικών αποθεμάτων θα μπορούσε να εκτιμηθεί μέσω της συνέλιξης των κατανομών για ατομικές γραμμές και έτη ατυχήματος.



Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις όμως, μπορεί οι κατανομές των αποθεμάτων να μην είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των σωματικών βλαβών όπως και των μερικών υλικών ζημιών της κάλυψης αστικής ευθύνης αυτοκινήτου, μπορεί να αναμένονται μερικές φορές συσχετίσεις, ειδικά στις κατανομές του αριθμού των απαιτήσεων (Cummins & Wiltbank, 1983).

Για τον λόγο αυτό, δηλαδή για να περιλαμβάνονται και τέτοια αλληλένδετα γεγονότα, γίνονται προσπάθειες επέκτασης του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου.

### **2.3 Αποθέματα ζημιών στο πλαίσιο του Solvency II**

Στα πλαίσια του Solvency II (Savelli & Clemente, 2011) έχει εισηχθεί ένας νέος τρόπος εκτίμησης του αποθέματος των ζημιών. Οι ασφαλιστές Γενικών Ασφαλίσεων (Non-Life) πρέπει να ποσοτικοποιήσουν το απόθεμα των ζημιών ως την ποσότητα για την οποία θα μπορούσαν να μεταφερθούν ή να εγκατασταθούν μεταξύ συναινούντων μερών σε μια συναλλαγή σε καθαρά εμπορική βάση. Η ποσότητα αυτή θα πρέπει να αποτιμάται, για μη-αντισταθμιζόμενους κινδύνους (όπως το απόθεμα των ζημιών), ξεχωριστά μεταξύ της βέλτιστης εκτίμησης και του περιθωρίου κινδύνου.

Η βέλτιστη εκτίμηση πρέπει να αντιστοιχεί στην πιθανότητα του σταθμισμένου μέσου όρου των μελλοντικών ταμειακών ροών, λαμβάνοντας υπόψη την χρονική αξία του χρήματος (αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών), χρησιμοποιώντας την σχετική μηδενικού κινδύνου καμπύλη των επιτοκίων.

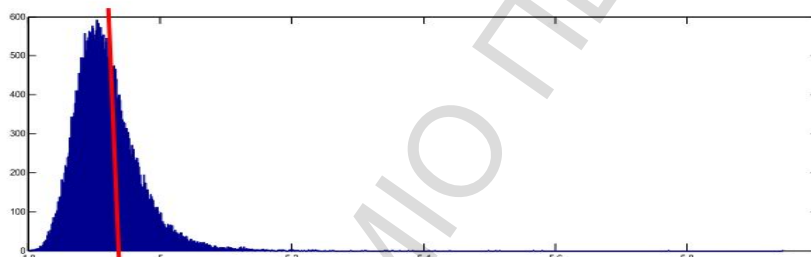
Το περιθώριο κινδύνου πρέπει να υπολογιστεί προσδιορίζοντας το κόστος της διάθεσης μιας ποσότητας επιλέξιμων ιδίων κεφαλαίων, ίσων με το SCR (Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας II) που απαιτείται για την ενίσχυση των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών υποχρεώσεων κατά την πάροδο του χρόνου αυτού.

### 2.3.1 Βέλτιστη Εκτίμηση και Περιθώριο Κινδύνου

Η Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate-BE) αντιστοιχεί στην αναμενόμενη μέση τιμή της πιθανοθεωρητικής κατανομής των μελλοντικών χρηματικών ροών, λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος (βλέπε Χατζηβασιλόγλου, 2012).

Χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε ότι η BE πρέπει να λαμβάνεται σε προεξοφλημένη βάση και ότι οι παράγοντες προεξόφλησης ορίζονται στα πλαίσια της δομής των ασφαλιστρών μειωμένης ρευστότητας την 31/12/2009, περιλαμβάνοντας ένα 50% του ασφαλιστρου ρευστότητας. Η οδηγία QIS5 των τεχνικών προβλέψεων παρέχει μια δομή χρήσιμη για την εκτίμηση της BE.

#### Διάγραμμα 1. Το SCR.



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirements - SCR) είναι το Value at Risk (VaR) των βασικών ιδίων κεφαλαίων με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, για περίοδο ενός έτους, υπό την παραδοχή της συνεχιζόμενης λειτουργίας και συνδέονται άμεσα με το Περιθώριο Κινδύνου που ορίζουμε στη συνέχεια.

Το Περιθώριο Κινδύνου (Risk Margin-RM) είναι τέτοιο που να εξασφαλίζει ότι η αξία των τεχνικών προβλέψεων ισοδυναμεί με το επιπρόσθετο ποσό το οποίο οι ασφαλιστικές και ανασφαλιστικές επιχειρήσεις αναμένεται να απαιτήσουν προκειμένου να αναλάβουν και να ικανοποιήσουν τις ασφαλιστικές υποχρεώσεις.

Το RM προσδιορίζεται ως εξής:

- με την προβολή του SCR έως το πλήρες run-off όλων των υποχρεώσεων. Το SCR αφορά μόνο σε ορισμένους κινδύνους: underwriting risk (μόνο για τις υπάρχουσες επιχειρήσεις), κίνδυνο αθέτησης σε σχέση με τα

αντασφαλιστήρια συμβόλαια, επιχειρησιακό κίνδυνο, αναπόφευκτο κίνδυνο αγοράς

- ποσοτικοποιώντας το κόστος του κεφαλαίου για κάθε έτος ( $6\% * SCR_t$ )
- προεξοφλώντας χρησιμοποιώντας επιτόκια μηδενικού κινδύνου, χωρίς ασφάλιστρο μειωμένης ρευστότητας

**Διάγραμμα 2.** Το SCR και το κόστος της μελλοντικής παρακράτησής του.



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

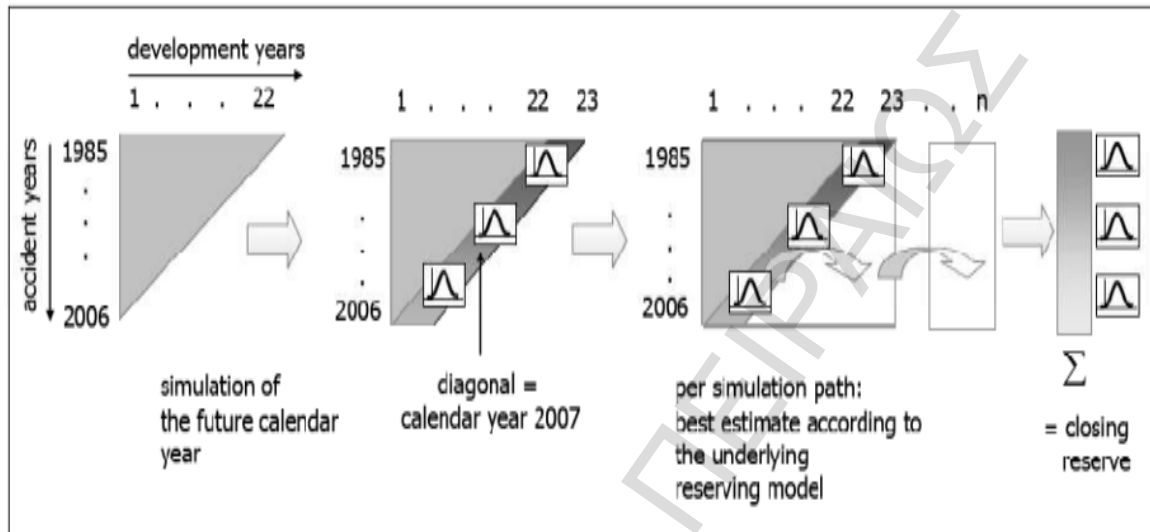
### 2.3.2 Στοχαστικά μοντέλα για τα αποθέματα ζημιών

Πολλά στοχαστικά μοντέλα (βλέπε Savelli & Clemente, 2010) έχουν αναπτυχθεί πρόσφατα για την εκτίμηση των εκκρεμών ζημιών, με στόχο την επίτευξη είτε ενός συντελεστή μεταβλητότητας, είτε της πιθανοτικής κατανομής του αποθέματος των ζημιών. Κάποια από αυτά αναφέρονται σε:

- Κλειστούς τύπους για τον προσδιορισμό του λάθους πρόβλεψης της μεθόδου Chain-Ladder.
- Κλειστούς τύπους για τον προσδιορισμό του λάθους πρόβλεψης της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson.
- Μεθόδους bootstrapping.
- Bayesian μεθόδους.
- Το συλλογικό μοντέλο κινδύνου.

- Μια ανάλυση της ιταλικής αγοράς MTPL και MOD.

**Διάγραμμα 3.** Στοχαστική μέθοδος επανα-αποθεματοποίησης (re-reserving) σε μοντέλα με διαστήματα πολλών ετών.



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

### 2.3.3 Κεφαλαιακή Επάρκεια της Φερεγγυότητας στον ορίζοντα του ενός έτους

Η Κεφαλαιακή Επάρκεια της Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement-SCR) (Savelli & Clemente, 2010) θα πρέπει να οριστεί ως το οικονομικό κεφάλαιο που παραμένει στις ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές επιχειρήσεις, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η καταστροφή που αναμένεται να επέλθει εμφανίζεται όχι συχνότερα από μία φορά στις 200 περιπτώσεις, ή εναλλακτικά, ότι αυτές οι επιχειρήσεις θα είναι σε θέση να ανταπεξέλθουν στις υποχρεώσεις τους απέναντι στους ασφαλισμένους και τους δικαιούχους για τους επόμενους 12 μήνες, με μια πιθανότητα της τάξης τουλάχιστον του 99,5%.

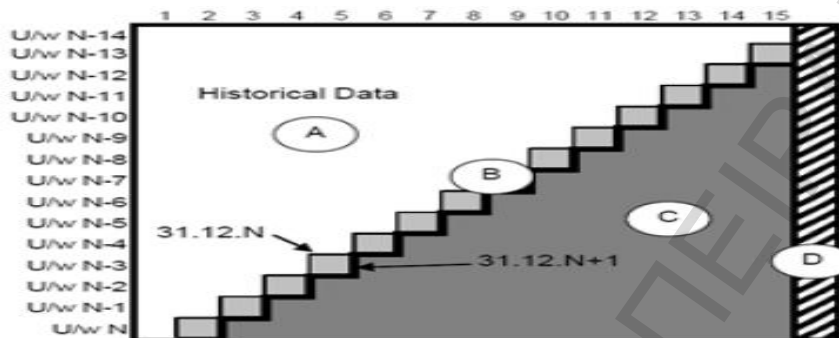
Η υπόθεση του Ενός-Έτους βασίζεται στην υπόθεση ότι, εφόσον το αρχικό απόθεμα των ζημιών υπολογιστεί κατά την χρονική στιγμή  $T=0$  ( $R_{T=0}$ ), δύο πηγές μεταβλητότητας θα είναι σε ισχύ κατά το επόμενο έτος, οι οποίες περιγράφονται από τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

- οι πληρωμές που εμφανίστηκαν το έτος 1, δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται στην επόμενη διαγώνιο του τριγώνου ( $X_{T=1}$ ).

- το νέο απόθεμα των ζημιών που εκτιμάται την στιγμή  $T=1$ , με πρόσθετες πληροφορίες που είναι διαθέσιμες κατά τη διάρκεια του έτους ( $R_{T=1}$ ).

Με αυτό τον τρόπο μπορεί να υπολογιστεί μια κεφαλαιακή απαίτηση, όπως και την μεταβλητότητα (CV) της τυχαίας μεταβλητής  $X_{T=1} + R_{T=1}$ .

**Διάγραμμα 4.** Μελέτη non-life υποχρεώσεων με μεγάλες ουρές.



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

Τα τελευταία χρόνια η αναλογιστική βιβλιογραφία άρχισε να επικεντρώνεται σ' αυτήν την προσέγγιση του ενός-έτους, προκειμένου να μπορέσει να υπολογίζει τις κεφαλαιακές υποθέσεις υπό το Solvency II.

### 3. ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ

#### 3.1 Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου με την προσέγγιση αλγορίθμων

Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου περιγράφει όπως είδαμε την συνολική απώλεια των ασφαλισμένων σε σχέση με τις κατανομές του πλήθους των απαιτήσεων και της σφοδρότητας των απαιτήσεων που διέπουν τον κάθε κλάδο της ασφάλισης. Θα περιγράψουμε στη συνέχεια το μοντέλο αυτό, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο αλγόριθμο προσομοίωσης (Meyers, Klinker, Lalonde, 2003):

#### Αλγόριθμος Προσομοίωσης 1:

Βήμα

1. Για κάθε κλάδο της ασφάλισης,  $h$ , με αβέβαιες απαιτήσεις πληρωμών, κάνουμε τα ακόλουθα:
  - Επιλέγουμε τυχαίο αριθμό απαιτήσεων  $K_h$  από μια κατανομή με μέσο  $\lambda_h$ , όπου  $\lambda_h$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός απαιτήσεων για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ .
  - Για κάθε  $h$ , επιλέγουμε τυχαία μεγέθη απαιτήσεων,  $Z_{hk}$ , για  $k = 1, \dots, K_h$ .
2. Θέτουμε  $X_h = \sum_{k=1}^{K_h} Z_{hk}$  την απώλεια για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ .
3. Θέτουμε  $X = \sum_h X_h$  την απώλεια για τον ασφαλιστή.

Αυτή η προσέγγιση του CRM υποθέτει ότι οι απώλειες για κάθε κλάση είναι ανεξάρτητες. Στη συνέχεια θα εισάγουμε μια εξαρτημένη δομή στο CRM, μέσω του παρακάτω αλγορίθμου:

## Αλγόριθμος Προσομοίωσης 2:

Βήμα

1. Για κάθε κλάδο της ασφάλισης,  $h$ , με αβέβαιες απαιτήσεις πληρωμών, κάνουμε τα ακόλουθα:
  - Επιλέγουμε τυχαίο αριθμό απαιτήσεων  $K_h$  από μια κατανομή με μέσο  $\lambda_h$ , όπου  $\lambda_h$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός απαιτήσεων για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ .
  - Για κάθε  $h$ , επιλέγουμε τυχαία μεγέθη απαιτήσεων,  $Z_{hk}$ , για  $k = 1, \dots, K_h$ .
2. Θέτουμε  $X_h = \sum_{k=1}^{K_h} Z_{hk}$  την απώλεια για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ .
3. Επιλέγουμε ένα τυχαίο  $\beta$  από την κατανομή με  $E[\beta]=1$  και  $Var[\beta]=b$ .
4. Θέτουμε  $X = \beta \cdot \sum_h X_h$  την απώλεια για τον ασφαλιστή.

Το επιπλέον βήμα του πολλαπλασιασμού όλων των ζημιών με ένα τυχαίο  $\beta$ , προσθέτει μεταβλητότητα, έτσι ώστε οι γραμμές της ασφάλισης να κινηθούν ανοδικά, καθοδικά, ταυτόχρονα την ίδια στιγμή. Αυτό συνεπάγεται μια μορφή εξάρτησης ή συσχέτισης μεταξύ των απωλειών των διαφόρων γραμμών της ασφάλισης. Μπορεί κανείς να σκεφτεί το  $b$  ως μια παράμετρο που ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα στο οικονομικό περιβάλλον, επηρεάζοντας πολλαπλούς κλάδους της ασφάλισης.

Έχοντας περιγράψει μια μέθοδο που εισάγει εξάρτηση στο CRM, εφαρμόζουμε στη συνέχεια τη μέθοδο αυτή σε ένα μοντέλο των ασφαλιστικών ζημιών (underwriting losses) για έναν ασφαλιστή.

Τα βασικά χαρακτηριστικά αυτού του μοντέλου είναι τα εξής:

- Είναι χρήσιμο να συνεχίσουμε να κρατάμε το κεφάλαιο για αβέβαιες απώλειες, σε ασφαλιστήρια συμβόλαια που έχουν λήξει. Για τον λόγο αυτό, το μοντέλο μεταχειρίζεται της απλήρωτες απώλειες και από τα καινούρια αλλά και από τα ασφαλιστήρια συμβόλαια που έχουν λήξει από τα προηγούμενα έτη ατυχήματος.

- Χρησιμοποιούμε ξεχωριστούς πολλαπλασιαστές της αβεβαιότητας και για την συχνότητα των απαιτήσεων και για την σφοδρότητα των απαιτήσεων. Για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ , ένας τυχαίος πολλαπλασιαστής της συχνότητας των απαιτήσεων,  $a_h$ , εφαρμόζεται στην αναμενόμενη παράμετρο του αριθμού των απαιτήσεων,  $\lambda_h$ . Κάθε  $a_h$  έχει μέσο 1 και διακύμανση  $g_h$ .

$$E(a_h) = 1, \quad Var(a_h) = g_h.$$

Καλούμε το  $g_h$  γεννήτρια συνδιακύμανση για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$ .

- Κάθε κλάδος της ασφάλισης είναι συνδεδεμένη με μια διακριτή “ομάδα συνδιακύμανσης”, σύμφωνα με τον κλάδο της ασφάλισης που καλύπτει. Μέσα σε μια δεδομένη ομάδα συνδιακύμανσης, οι τυχαίοι πολλαπλασιαστές της συχνότητας των απαιτήσεων,  $a_h$ , είναι πανομοιότυποι μέσα στους κλάδους της ασφάλισης, όχι όμως αναγκαστικά πανομοιότυποι με άλλους κλάδους της ασφάλισης στην ίδια ομάδα συνδιακύμανσης, αλλά αυξάνονται και μειώνονται ταυτόχρονα μαζί.
- Ο τυχαίος πολλαπλασιαστής της σφοδρότητας των απαιτήσεων,  $\beta$ , εφαρμόζεται ομοιόμορφα κατά μήκος των κλάδων της ασφάλισης.
- Κάποιος μπορεί ανεπίσημα να ταξινομήσει τις πηγές του ρίσκου σ’ αυτό το μοντέλο σε ρίσκο διαδικασίας και ρίσκο παραμέτρων. Το ρίσκο διαδικασίας είναι το ρίσκο που αναλογεί σε τυχαίο πλήθος απαιτήσεων και μέγεθος απαιτήσεων, και το ρίσκο παραμέτρων είναι το ρίσκο που αναλογεί στην τυχειότητα των πολλαπλασιαστών της συχνότητας των απαιτήσεων και των πολλαπλασιαστών της σφοδρότητας των απαιτήσεων.
- Όταν το ρίσκο παραμέτρων ενεργεί σε διάφορους κλάδους της ασφάλισης ταυτόχρονα, τότε λέμε ότι έχουμε συσχέτιση που παράγεται από το ρίσκο παραμέτρων.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά περιγράφονται στον ακόλουθο αλγόριθμο:



### Αλγόριθμος Προσομοίωσης 3:

1. Επιλέγουμε ένα τυχαίο  $\beta$  από μια κατανομή με  $E[\beta]=1$  και  $Var[\beta]=b$ .
2. Για κάθε ομάδα συνδιακύμανσης  $i$ , επιλέγουμε τυχαίο ποσοστημόριο  $p_i$ .
3. Για κάθε ομάδα συνδιακύμανσης  $i$ , κλάδο ασφάλισης  $h$  στην ομάδα συνδιακύμανσης (που συμβολίζεται με  $G_i$ ), και έτος ατυχήματος  $y$  με αβέβαιες πληρωμές απαιτήσεων, κάνουμε τα ακόλουθα:
  - Επιλέγουμε  $a_{hy} = p_i^{th}$  ποσοστημόριο της κατανομής με  $E(a_{hy})=1$  και  $Var(a_{hy}) = g_{hy}$ .
  - Επιλέγουμε τυχαίο πλήθος απαιτήσεων  $K_{hy}$  από την κατανομή με μέσο  $a_{hy} \cdot \lambda_{hy}$ , όπου  $\lambda_{hy}$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός απαιτήσεων για τον κλάδο της ασφάλισης  $h$  και έτος ατυχήματος  $y$ , στην ομάδα συνδιακύμανσης  $i$ .
  - Για κάθε  $h$  και  $y$ , επιλέγουμε ένα τυχαίο μέγεθος απαιτήσεων  $Z_{hyk}$ , για  $k=1, \dots, K_{hy}$ .
4. Θέτουμε  $X_i = \sum_{h \in G_i} \sum_y \sum_{k=1}^{K_{hy}} Z_{hyk}$  την απώλεια για την ομάδα συνδιακύμανσης  $i$ .
5. Θέτουμε  $X = \beta \cdot \sum_i X_i$  την συνολική απώλεια για τον ασφαλιστή.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια την παραμετροποίηση αυτού του μοντέλου:

- Για μη καταστροφικούς κλάδους της ασφάλισης, χρησιμοποιούμε τις κατανομές της σφοδρότητας των απαιτήσεων, που προέρχονται από το ISO (Insurance Services Office - Γραφείο Ασφαλιστικών Υπηρεσιών, από την ανάλυση του οποίου προκύπτουν οι παράμετροι του μοντέλου ζημιών, στην περίπτωση μας). Χρησιμοποιούμε μια τυπική γραμμική προσέγγιση στα μοντέλα ISO.
- Οι μικρότερες απαιτήσεις τείνουν να εξοφληθούν γρήγορα. Για την προσαρμογή των μοντέλων στην κατανομή των μελλοντικών πληρωμών, για ασφαλιστήρια συμβόλαια που έχουν λήξει, αφαιρέσαμε αυτές τις απαιτήσεις επειδή υπήρχαν ήδη από πριν.

- Χρησιμοποιούμε την αρνητική διωνυμική κατανομή για να μοντελοποιήσουμε τα πλήθη των απαιτήσεων. Τα αναμενόμενα πλήθη των απαιτήσεων θα εξαρτώνται από τα όρια και την έκθεση του ασφαλιστή. Μια δεύτερη παράμετρος της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, ο λεγόμενος συντελεστής μετάδοσης, πρέπει να οριστεί.
- Οι γεννήτορες συνδιακύμανσης  $g_h$ , είναι οι ίδιοι για όλους τους ασφαλιστές που συνεισφέρουν στον συγκεκριμένο κλάδο της ασφάλισης.
- Για να πετύχουμε αξιόπιστες εκτιμήσεις των παραμέτρων, απαιτείται ένας συνδυασμός δεδομένων από διαφορετικούς ασφαλιστές και όχι μόνο ένας ασφαλιστής.

Ο υπολογισμός της κατανομής των ασφαλισμένων ζημιών (underwriting claims), γίνεται με τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier. Και η μέθοδος της προσομοίωσης αλλά και οι μετασχηματισμοί Fourier είναι έγκυροι τρόποι υπολογισμού των ασφαλισμένων ζημιών. Το πλεονέκτημα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι κάποιος μπορεί να υπολογίσει την κατανομή των ασφαλισμένων ζημιών μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα, σε αντίθεση με την προσομοίωση όπου απαιτούνται για τον ίδιο λόγο κάποια λεπτά ή ώρες. Ένα μειονέκτημα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι απαιτείται πολύς χρόνος για να γίνει ο αρχικός ορισμός, σε αντίθεση με την μέθοδο της προσομοίωσης.

### 3.2 Αβεβαιότητα των παραμέτρων

Στο σημείο αυτό, θα αναφερθούμε στο ρόλο της Συλλογικής Θεωρίας Κινδύνου (βλέπε Kahn, 1962) στην λήψη ασφαλιστικών αποφάσεων τιμολόγησης. Η Συλλογική Θεωρία Κινδύνου παρέχει έναν τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας, όπου η απώλεια που προκύπτει από ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο, θα ξεπεράσει μια δεδομένη ποσότητα. Ο υπολογισμός γίνεται στα πλαίσια της υποκείμενης σφοδρότητας των απαιτήσεων και των κατανομών του αριθμού των απαιτήσεων. Σχετικό με αυτό είναι το υπερβάλλον καθαρό ασφάλιστρο, που είναι το κόστος της ασφάλισης όλων των απωλειών, πάνω από ένα δεδομένο ποσό.

Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας του δείκτη ζημιών (Loss Ratio) και του μεγέθους του ασφαλισμένου κεφαλαίου. Συχνά υποθέτουμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος του ρίσκου, περιμένουμε η μεταβλητότητα(του δείκτη ζημιών) να προσεγγίσει το μηδέν.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες η κατανομή Poisson φαίνεται ότι μπορεί να εφαρμοστεί, όμως δεν είναι γνωστός ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων.

Δύο επιλογές είναι δυνατές κάτω από αυτές τις συνθήκες:

- 1) Η πρώτη επιλογή είναι να εκτιμήσουμε τον αναμενόμενο αριθμό των απαιτήσεων χρησιμοποιώντας στοιχεία από την ιστορική αναδρομή.
- 2) Μια δεύτερη επιλογή είναι να χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο του αριθμού των απαιτήσεων για μια ομάδα ασφαλισμένων που έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με τον ασφαλισμένο που εξετάζουμε.

Η αβεβαιότητα των παραμέτρων (Meyers & Heckman, 1983) προκύπτει εάν κάθε μέλος της ομάδας αναμένεται να έχει έναν διαφορετικό αριθμό απαιτήσεων.

Έστω ότι:

- i.  $n$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που δείχνει τον αριθμό των απαιτήσεων,
- ii.  $\lambda$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων ( $\lambda = E(n)$ ),
- iii.  $\chi$  είναι μια τυχαία μεταβλητή με  $E(\chi) = 1$  και  $Var(\chi) = c$ .

Η αβεβαιότητα των παραμέτρων μπορεί τότε να μοντελοποιηθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο:

#### **Αλγόριθμος 1**

1. Επιλέγουμε  $\chi$  τυχαία από την κατανομή που έχει υποθεθεί.
2. Επιλέγουμε τον αριθμό των απαιτήσεων,  $n$ , τυχαία από την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\chi\lambda$ .

Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$E(n) = E(n / \chi) \cdot E(\chi) = \lambda \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(n) &= E_x(\text{Var}(n / \chi)) + \text{Var}_x(E(n / \chi)) \\ &= E_x(\chi\lambda) + \text{Var}_x(\chi\lambda) \\ &= \lambda + c\lambda^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Αν το  $\chi$  ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, τότε η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφεται στον παραπάνω αλγόριθμο, είναι η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή. Η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή χρησιμοποιείται στην μοντελοποίηση της περίπτωσης της αβεβαιότητας των παραμέτρων.

Η αβεβαιότητα των παραμέτρων στην κατανομή της σφοδρότητας των απαιτήσεων, επηρεάζει τις προβλέψεις του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου και γι' αυτό δεν πρέπει να αγνοηθεί. Εμείς για την απλούστευση του προβλήματος αυτού, θα υποθέσουμε ότι το σχήμα της κατανομής είναι γνωστό, όμως υπάρχει αβεβαιότητα στην κλίμακα της κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, προσδιορίζουμε την αβεβαιότητα των παραμέτρων της κατανομής της σφοδρότητας των απαιτήσεων με τον παρακάτω τρόπο:

Έστω  $\beta$  μια τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τις συνθήκες:  $E(1/\beta)=1$  και  $\text{Var}(1/\beta)=b$ .

## Αλγόριθμος 2

1. Επιλέγουμε τον αριθμό των απαιτήσεων,  $n$ , τυχαία από την κατανομή του αριθμού των ζημιών που έχουμε υποθέσει.
2. Επιλέγουμε την παράμετρο κλιμάκωσης,  $\beta$ , τυχαία από την κατανομή που έχουμε υποθέσει.
3. Κάνουμε το ακόλουθο  $n$  φορές:
  - 3.1 Επιλέγουμε την ποσότητα των απαιτήσεων,  $z$ , τυχαία από την κατανομή της σφοδρότητας των απαιτήσεων που έχουμε υποθέσει.
4. Η συνολική ποσότητα της απώλειας,  $x$ , είναι το άθροισμα όλων των ποσοτήτων των ζημιών,  $z$ , διαιρεμένο με την παράμετρο κλιμάκωσης,  $\beta$ .

Έστω ότι με  $\mathcal{F}(x)$  συμβολίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για τις συνολικές ζημιές που παράγεται από τον παραπάνω Αλγόριθμο 2. Έστω  $U(\beta)$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για την παράμετρο κλιμάκωσης,  $\beta$ . Η σχέση μεταξύ της  $\mathcal{F}(x)$  και της  $F(x)$  δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{\infty} F(\beta x) dU(\beta).$$

Δίνουμε τώρα τους τύπους για την μέση τιμή και την διακύμανση για τις συνολικές ζημιές, όπως προκύπτει από τον Αλγόριθμο 2:

$$\begin{aligned} E(x) &= E_{\beta}(E(x/\beta)) \\ &= E_{\beta}(\lambda \cdot E(z)/\beta) \\ &= \lambda \cdot E(z) \cdot E(1/\beta) \\ &= \lambda \cdot E(z), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E_{\beta}(Var(x/\beta)) + Var_{\beta}(E(x/\beta)) \\ &= E_{\beta}[(\lambda \cdot E(z^2) + c\lambda^2 \cdot E^2(z))/\beta^2] + Var_{\beta}(\lambda \cdot E(z)/\beta) \\ &= (\lambda \cdot E(z^2) + c\lambda^2 \cdot E^2(z)) \cdot E(1/\beta^2) + \lambda^2 \cdot E^2(z) \cdot Var(1/\beta) \\ &= (\lambda \cdot E(z^2) + c\lambda^2 \cdot E^2(z)) \cdot (1+b) + \lambda^2 \cdot E^2(z) \cdot b \\ &= \lambda \cdot E(z^2) \cdot (1+b) + \lambda^2 \cdot E^2(z) \cdot (b+c+bc), \end{aligned} \tag{4}$$

όπου θεωρούμε ότι το  $\beta$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα. Θα ονομάσουμε το  $b$  παράμετρο μίξης. Η παράμετρος μίξης είναι ένα μέτρο για την παράμετρο αβεβαιότητας, στην κατανομή της σφοδρότητας των απαιτήσεων.

Ο παραπάνω Αλγόριθμος 2, ουσιαστικά επιτρέπει τον συνδυασμό κατανομών συνολικών ζημιών για διαφορετικούς κλάδους της ασφάλισης, κάθε μία από τις οποίες διατηρεί την δική της παράμετρο μετάδοσης (contagion parameter)  $c$ , αλλά με καθολική παράμετρο μίξης  $b$ . Στην προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε θα επωφεληθούμε από αυτή την ιδιότητα και θα έχουμε διαφορετικές παραμέτρους μετάδοσης για κάθε έτος ατυχήματος, καθώς και μια μοναδική καθολική παράμετρο μίξης που θα αντανακλά την αβεβαιότητα η οποία επηρεάζει τα αποθέματα για όλα τα έτη ατυχήματος μονομιάς.

### 3.3 Συνολικές ζημιές

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις κατανομές των συνολικών ζημιών από την οπτική της Συλλογικής Θεωρίας Κινδύνου, με βάση τις κατανομές της σφοδρότητας των απαιτήσεων και τις κατανομές του αριθμού των ζημιών. Οι κατανομές των συνολικών ζημιών παίζουν όλο και σημαντικότερο ρόλο στην τιμολόγηση των ασφαλιστικών καλύψεων (βλέπε Kahn, 1962).

Η ασφαλιστική που προσελκύει περισσότερους ασφαλισμένους εξελίσσεται περισσότερο και αναγνωρίζει ότι είναι προς όφελός της να απορροφά όσες περισσότερες από τις ζημιές τους μπορεί, καθώς και να αγοράζει επιπλέον ασφάλιση για την κάλυψη των ασφαλιστικών ζημιών. Λαμβάνοντας υπόψη τον ανταγωνισμό που υπάρχει στην ασφαλιστική αγορά, είναι αρκετά χρήσιμο να πετύχουμε ακριβείς εκτιμήσεις των ζημιών που θα μπορούσαν να προκύψουν από μια ασφαλιστική κάλυψη.

Η χρήση του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου προσφέρει μια εναλλακτική προσέγγιση των συνολικών ζημιών. Οι κατανομές των συνολικών ζημιών υπολογίζονται στα πλαίσια των κατανομών της σφοδρότητας των απαιτήσεων και του πλήθους των απαιτήσεων. Εμπειρικά δεδομένα από τις κατανομές της σφοδρότητας των απαιτήσεων και του πλήθους των απαιτήσεων είναι, σε πολλές περιπτώσεις, άμεσα διαθέσιμα. Πολλοί πιστεύουν ότι η προσέγγιση αυτή είναι προτιμότερη από την παρατήρηση πραγματικών συνολικών ζημιών, επειδή παρέχεται πιο αποτελεσματική αξιοποίηση των διαθέσιμων δεδομένων. Πολλές φορές οι σημαντικές πληροφορίες κατά την απλή παρατήρηση των συνολικών ζημιών παραλείπονται.

Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου, όπως είδαμε, στηρίζεται στην Συλλογική Θεωρία Κινδύνου και έχει κατά συνέπεια πολλά χαρακτηριστικά που απορρέουν από αυτή. Έστω  $X_i$  η πληρωμή της απαίτησης του  $i$  ασφαλιζόμενου και  $N$  ο τυχαίος αριθμός των απαιτήσεων. Η συνολική απώλεια του ασφαλιστή είναι:

$$R = X_1 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Αυτή η σχέση αποτελεί τον ορισμό του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου.

Αν τα  $N, X_1, X_2, \dots$  είναι ανεξάρτητα και οι ατομικές απαιτήσεις  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ιδανικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, τότε η  $R$  έχει μια σύνθετη κατανομή.

Ορίζουμε:

- i.  $N$  την συχνότητα των απαιτήσεων,
- ii.  $X$  την σφοδρότητα των απαιτήσεων.

Ιδιότητες του συλλογικού μοντέλου κινδύνου:

- 1) Το  $X$  ονομάζεται ατομική απαίτηση και υποθέτουμε ότι έχει ροπές που συμβολίζονται με  $\mu_k = E(x^k)$ .
- 2) Μέση τιμή της  $R$ :  $E(R) = E(X)E(N) = \mu_1 E(N)$ .
- 3) Διακύμανση της  $R$ :  $Var(R) = E(N)Var(X) + Var(N)\mu_1^2$ .
- 4) Ροπογεννήτρια συνάρτηση της  $R$ :  $M_R(t) = M_N[\ln M_X(t)]$ .
- 5) Πιθανογεννήτρια συνάρτηση της  $R$ :  $P_R(t) = P_N[P_X(t)]$ .
- 6) Συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής της  $R$ :

$$\Pr(R \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(R \leq s / N = n) \Pr(N = n).$$

Οι συνολικές ζημιές (Meyers & Heckman, 1983) μπορούν να παραχθούν από τον ακόλουθο αλγόριθμο:

### Αλγόριθμος

1. Επιλέγουμε τον αριθμό των απαιτήσεων,  $n$ , τυχαία από την κατανομή του πλήθους των ζημιών που έχει υποτεθεί.
2. Κάνουμε τα ακόλουθα  $n$  φορές:
  - 2.1. Επιλέγουμε την ποσότητα των ζημιών,  $z$ , τυχαία από την κατανομή της σφοδρότητας των απαιτήσεων που έχει υποτεθεί.
3. Η συνολική ποσότητα της απώλειας,  $x$ , είναι το άθροισμα όλων των ποσοτήτων των απαιτήσεων,  $z$ , που έχουν επιλεγεί στο βήμα 2.1.

Έστω ότι με  $F(x)$  συμβολίζουμε την συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής για τις συνολικές απώλειες που παρήχθησαν στον παραπάνω Αλγόριθμο. Στη συνέχεια δίνουμε τις εκφράσεις για την μέση τιμή και τη διακύμανση της κατανομής αυτής:

$$E(x) = E(n)E(z) = \lambda \cdot E(z), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E_n(Var(x/n)) + Var_n(E(x/n)) \\ &= E_n(n \cdot Var(z)) + Var_n(n \cdot E(z)) \\ &= \lambda \cdot Var(z) + (\lambda + c\lambda^2) \cdot E^2(z) \\ &= \lambda \cdot E(z^2) + c\lambda^2 \cdot E^2(z). \end{aligned} \quad (2)$$

Στον Αλγόριθμο υποθέτουμε ότι η κατανομή της σφοδρότητας των απαιτήσεων,  $S(z)$ , είναι γνωστή. Στην πράξη, η κατανομή αυτή πρέπει να εκτιμάται από τις ιστορικές παρατηρήσεις, ή απλά να την υποθέτουμε. Η αβεβαιότητα των παραμέτρων της κατανομής της σφοδρότητας των απαιτήσεων μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τις προβλέψεις του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου και δεν θα έπρεπε να παραληφθεί.

### 3.4 Η κατανομή των συνολικών ζημιών

Στη συνέχεια θα εξάγουμε τύπους (Meyers & Heckman, 1983) για τις συσσωρευτικές πιθανότητες και τα υπερβάλλοντα καθαρά ασφάλιστρα για πολλαπλές καλύψεις ή επιπέδων έκθεσης.

Για λόγους ευκολίας, θα δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Με  $F(x)$  συμβολίζουμε την συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής για τις συνολικές ζημιές για όλους τους συνδυασμούς των καλύψεων.

Με  $\mu$  συμβολίζουμε την μέση τιμή της κατανομής των συνολικών ζημιών.

Με  $\sigma$  συμβολίζουμε την τυπική απόκλιση της κατανομής των συνολικών ζημιών.

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{mod}(\phi_F(t/\sigma)), \\ g(t) &= \text{arg}(\phi_F(t/\sigma)). \end{aligned}$$

Για κάθε κάλυψη  $j$ , ορίζουμε τα ακόλουθα:



$$h_j(t) = \tilde{h}_j(t/\sigma) - 1,$$

$$k_j(t) = \tilde{k}_j(t/\sigma),$$

όπου  $\tilde{h}_j, \tilde{k}_j$  δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n d_k (\sin(ta_{k+1}) - \sin(ta_k)) + (1 - \sum_{k=1}^n p_k) \cos(ta_{n+1}),$$

$$\tilde{k}(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n d_k (\cos(ta_k) - \cos(ta_{k+1})) + (1 - \sum_{k=1}^n p_k) \sin(ta_{n+1}),$$

οι οποίες αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της συνάρτησης  $\phi_S(t)$ , που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της  $S(z)$ .

Σημειώνουμε ότι η  $F(x)$  είναι η συνέλιξη των κατανομών των συνολικών ζημιών για κάθε ατομική κάλυψη. Έχουμε επίσης τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} f(t) &= \prod_j \text{mod}(1 - c_j \lambda_j (\phi_{S_j}(t/\sigma) - 1))^{-1/c_j} \\ &= \prod_j \text{mod}(1 - c_j \lambda_j (h_j(t) + ik_j(t)))^{-1/c_j} \\ &= \prod_j ((1 - c_j \lambda_j h_j(t))^2 + c_j \lambda_j k_j(t))^2)^{-1/2c_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_j \arg(1 - c_j \lambda_j (\phi_{S_j}(t/\sigma) - 1))^{-1/c_j} \\ &= \sum_j \arg(1 - c_j \lambda_j (h_j(t) + ik_j(t)))^{-1/c_j}. \end{aligned}$$

Εφόσον έχουν οριστεί τα mod (modulus) και arg (argument) των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συνολικών ζημιών, μπορούμε να υπολογίσουμε τα συσσωρευτικές πιθανότητες, με τη χρήση της ακόλουθης σχέσης:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \sin(tx/\sigma - g(t)) dt \quad (1)$$

Το υπερβάλλον καθαρό ασφάλιστρο μπορεί να βρεθεί από την συνάρτηση της συσσωρευτικής κατανομής, με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$EP(x) = \int_x^{\infty} (u - x) dF(u).$$

Με εφαρμογή της σχέσης αυτής στην (1), έχουμε:

$$EP(x) = \mu - \frac{x}{2} + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^2} (\cos(g(t)) - \cos(tx/\sigma - g(t))) dt. \quad (2)$$

Το υπερβάλλον καθαρό ασφάλιστρο δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$ER(x) = EP(x) / \mu.$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την αβεβαιότητα των παραμέτρων στις κατανομές της σφοδρότητας:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \left( 1 + \left( \frac{xt}{r\sigma} \right)^2 \right)^{-(1+r)/2} \sin \left( (1+r) \arctan \left( \frac{xt}{r\sigma} \right) - g(t) \right) dt, \quad (3)$$

$$\mathcal{EP}(x) = \mu - \frac{x}{2} + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^2} \left[ \cos(g(t)) - \left( 1 + \left( \frac{xt}{r\sigma} \right)^2 \right)^{-r/2} \cos \left( r \cdot \arctan \left( \frac{xt}{r\sigma} \right) - g(t) \right) \right] dt. \quad (4)$$

Στους παραπάνω δύο τύπους,  $r = 1 + \frac{1}{b}$ .

Επίσης να παρατηρήσουμε ότι η (1) είναι το όριο της (3), καθώς το  $b \rightarrow 0$ . Όμοια, η (2) είναι το όριο της (4), καθώς  $b \rightarrow 0$ . Εμείς στο πρόγραμμά μας έχουμε θέσει  $b = 10^{-7}$  όποτε  $b < 10^{-7}$  και έτσι το πρόγραμμα χειρίζεται και τις δύο περιπτώσεις.

Οι εξισώσεις (3), (4) έχουν συσταθεί έτσι ώστε η αβεβαιότητα των παραμέτρων της σφοδρότητας των απαιτήσεων να επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο όλες τις καλύψεις.

## 4. ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (CRM) ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΖΗΜΙΩΝ

### 4.1 Η Συλλογική Θεωρία Κινδύνου και οι εφαρμογές της

Η ασφαλιστική δραστηριότητα υπόκειται σε δύο ουσιαστικά διαφορετικούς τύπους κινδύνων, τους εμπορικούς κινδύνους και τους ασφαλιστικούς κινδύνους (Kahn, 1962). Πιο συχνοί στις περισσότερες επιχειρήσεις είναι οι εμπορικοί κίνδυνοι, οι οποίοι περιλαμβάνουν κινδύνους όπως αυτούς που συνδέονται με τις γενικότερες οικονομικές διακυμάνσεις και τις κακές επενδύσεις. Από την άλλη μεριά όμως, οι ασφαλιστικοί κίνδυνοι σχετίζονται με τις διακυμάνσεις των κινδύνων, οι οποίες προκύπτουν από τη διαφορά μεταξύ του πλήθους των απαιτήσεων και του αναμενόμενου πλήθους των απαιτήσεων. Ο καθηγητής Cramer έχει ταξινομήσει αυτούς τους ασφαλιστικούς κινδύνους σε δύο κατηγορίες: τους εξωτερικούς κινδύνους, όπως η αυξημένη θνησιμότητα, που προκύπτει από πολέμους και επιδημίες, και τον κίνδυνο των τυχαίων διακυμάνσεων, που δεν μπορεί να αποδοθεί σε καμία σαφή αιτία, αλλά προέρχεται είτε από έναν μεγάλο αριθμό απαιτήσεων ή από ιδιαίτερα υψηλό μέγεθος απαιτήσεων ή και από τα δύο.

Για την ανάλυση των τυχαίων διακυμάνσεων και για να διερευνήσουν το σχετικό μαθηματικό κίνδυνο, οι Ευρωπαίοι αναλογιστές ανέπτυξαν ένα σημαντικό μαθηματικό πλαίσιο, γνωστό ως Θεωρία Κινδύνου, που επιδιώκει να προδιαγράψει πώς μια ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να προφυλαχθεί από τις δυσμενείς επιπτώσεις αυτών των διακυμάνσεων.

Υπάρχουν δύο οπτικές απ' τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί η Θεωρία Κινδύνου: η Συλλογική και η Ατομική ή αλλιώς Κλασική. Η Ατομική Θεωρία Κινδύνου, για να διερευνήσει το κέρδος ή τη ζημία για το σύνολο του χαρτοφυλακίου, πρώτα θεωρεί κέρδος ή ζημία σε κάθε ατομικό ασφαλιστήριο συμβόλαιο και μετά προσθέτοντας τα ατομικά κέρδη/ζημίες αντλεί πληροφορίες για το συνολικό κέρδος/ζημία σε όλα τα ασφαλιστήρια συμβόλαια του χαρτοφυλακίου. Στη Συλλογική Θεωρία Κινδύνου, απ' την άλλη μεριά, γίνεται προσπάθεια να διερευνηθεί ο κίνδυνος μιας επιχείρησης ως ένα σύνολο. Το κύριο ενδιαφέρον εστιάζεται όχι στα κέρδη, τις ζημίες, ή τις απαιτήσεις από ατομικά ασφαλιστήρια συμβόλαια, αλλά στο ποσό των συνολικών

απαιτήσεων ή στο συνολικό κέρδος που προκύπτει από όλα τα ασφαλιστήρια συμβόλαια, στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο που έχουμε θεωρήσει. Η Συλλογική Θεωρία Κινδύνου είναι ένας κλάδος της μοντέρνας θεωρίας των τυχαίων, ή στοχαστικών, διαδικασιών.

Η Συλλογική Θεωρία Κινδύνου θεωρεί δύο αρχικά προβλήματα: την εύρεση των συναρτήσεων κατανομής του συνολικού κέρδους ή του συνολικού ποσού των απαιτήσεων σε ένα χαρτοφυλάκιο ή σε μια επιχείρηση με κίνδυνο, και την εύρεση της πιθανότητας το απόθεμα κινδύνου μιας επιχείρησης με κίνδυνο να εξαντληθεί, που είναι το λεγόμενο πρόβλημα της χρεοκοπίας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα εφαρμόσουμε την Συλλογική Θεωρία Κινδύνου, για να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα στα αποθέματα ζημιών. Επίσης θα εκτιμήσουμε την συνολική κατανομή των ζημιών και την παράμετρο αβεβαιότητας.

Η γνώση της στατιστικής κατανομής των αποθεμάτων, είναι χρήσιμη για την μελέτη της επίδρασης της προεξόφλησης των αποθεμάτων, στην απόδοση και στην σταθερότητα του ασφαλιστή. Η προεξόφληση των αποθεμάτων, όπως έχει παρατηρηθεί, αυξάνει την απόδοση του ασφαλιστικού κλάδου. Σύμφωνα με τον νόμο, το πλεόνασμα αυξάνεται όταν μειώνεται η υποχρέωση του αποθέματος των ζημιών. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται ότι η προεξόφληση των αποθεμάτων θα αυξήσει και την οικονομική ευρωστία ή απόδοση. Ένα καλύτερο μέτρο αυτής της απόδοσης είναι πιθανόν η ικανότητα του πλεονάσματος να προστατεύει το Solvency. Χωρίς την γνώση της μεταβλητότητας στις εκτιμήσεις των αποθεμάτων, ο υπολογισμός της δύναμης μιας επιχείρησης σε ένα δεδομένο επίπεδο πλεονάσματος, και κατά συνέπεια και η απόδοση, πιθανώς να μην μπορεί να γίνει με ακρίβεια. Υπάρχουν πολλές τεχνικές με τις οποίες μπορεί να αξιολογηθεί η οικονομική σταθερότητα ενός δεδομένου ποσού πλεονάσματος, όμως σε κάθε περίπτωση η εφαρμογή τους απαιτεί την εκτίμηση των στατιστικών κατανομών των αποθεμάτων.

## 4.2 Το Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου/Collective Risk Model (CRM)

Ο στόχος του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου, είναι να επιτύχει μια κατανομή από μελλοντικές απαιτήσεις, πληρωμένες σε κάθε έτος εξέλιξης και έτος ατυχήματος, δηλ. σε κάθε κελί του τριγώνου, που στηρίζεται στα θεμέλια της Συλλογικής Θεωρίας Κινδύνου (Savelli & Clemente, 2010).

Τα CRM, που χρησιμοποιούνται συνήθως για την εκτίμηση του ασφαλιστρου κινδύνου, περιγράφουν τα συνολικά ποσά ζημιών ως το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού ζημιών, κάθε μία από τις οποίες έχει επιλεγεί τυχαία από μια κατανομή μεγέθους ζημιών.

Εφαρμόζοντας αυτό το γενικό πλαίσιο προκειμένου να πετύχουμε την εκτίμηση της κατανομής του αποθέματος των απαιτήσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γενικό τρίγωνο για μία μόνο LoB, με διαστάσεις  $(N, N^+)$ , όπου οι γραμμές ( $i=1, \dots, N$ ) παριστάνουν τις απαιτήσεις των ετών ατυχήματος/Accident Years (AY) και οι στήλες (με  $j=1, \dots, N^+$ ) είναι τα έτη εξέλιξης/Development Years (DY) των πληρωμών. Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι συχνά οι στήλες δεν είναι ίσες με τις γραμμές, εξαιτίας μιας ουράς πληρωμών στο τρίγωνο (στην περίπτωση που  $N^+ = N + 1$ ).

Οι παρατηρήσεις είναι γνωστές στο άνω τμήμα :

$\{X_{i,j}; i + j \leq N + 1 \text{ και } 1 \leq j \leq N + 1 \text{ αν } N = N^+\}$  (βλέπε τα άσπρα κελιά στο σήμα 1)

με το κελί  $(1, N^+)$  να είναι γνωστό, αν το τρίγωνο έχει ουρά.

**Σχήμα 1.** Τρίγωνο εξέλιξης της αποπληρωμής των ζημιών.

		Development Year(DY)							
		1	2	3				N	$N^+$
Accident Year(AY)	$i/j$								
	1								
	2								
	3		$X_{i,j}$						
							$\hat{X}_{i,j}$		
	N								

Το  $X_{i,j}$  παριστάνει τις πληρωμές που σχετίζονται με τις απαιτήσεις που πραγματοποιήθηκαν το γενικό έτος ατυχήματος  $i$  και πληρώθηκαν το έτος εξέλιξης  $j$ , (δηλαδή το ημερολογιακό έτος  $i+j+1$ ), ενώ οι συσσωρευμένες πληρωμές  $C_{i,j}$  για το έτος ατυχήματος  $i$  μετά από  $j$  έτη εξέλιξης δίνονται από τον τύπο:

$$C_{i,j} = \sum_{h=1}^j X_{i,h}. \quad (1)$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι  $n_{i,j}$  είναι ο παρατηρημένος αριθμός των πληρωμένων απαιτήσεων κατά την περίοδο εξέλιξης  $j$  και για το έτος ατυχήματος  $i$ , και  $m_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{n_{i,j}}$  είναι το μέσο κόστος των απαιτήσεων που παρήχθησαν το έτος ατυχήματος  $i$  και πληρώθηκαν μετά από  $j$  έτη. Διαφορετικές ντετερμινιστικές μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Fisher-Lange, επιτρέπουν την εκτίμηση των  $n_{i,j}$  και  $m_{i,j}$  για το χαμηλότερο τμήμα του τριγώνου, οδηγώντας σε μια κατά σημείο εκτίμηση του αποθέματος. Θα μπορούσαμε μάλιστα να προσδιορίσουμε μέσω των παρατηρημένων δεδομένων μας, τον συντελεστή μεταβλητότητας  $c_{z_j}$  του μεγέθους των απαιτήσεων που πληρώνονται για κάθε έτος εξέλιξης  $j$ .

Προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα στοχαστικό μοντέλο, στηριζόμενο σε μια Σύνθετη Διαδικασία Poisson, υποθέτουμε ότι σε κάθε κελί του κατώτερου τμήματος, το οριακό πληρωμένο κόστος ζημιάς θα είναι ίσο με το συνολικό ποσό της ζημιάς (Savelli & Clemente, 2011):

$$\tilde{X}_{i,j} = \sum_{h=1}^{\tilde{K}_{i,j}} \tilde{Z}_{i,j,h}, \quad (2)$$

όπου:

-  $\tilde{K}_{i,j}$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των απαιτήσεων κατά το έτος ατυχήματος  $i$  και οι οποίες θα πληρωθούν αποτελεσματικά το έτος εξέλιξης  $j$ .

Η μεταβλητή αυτή υποθέτουμε αρχικά ότι ακολουθεί κατανομή Poisson, με την μοναδική της παράμετρο ίση με τον αναμενόμενο αριθμό των απαιτήσεων ( $Np$ ), εκτιμημένων με την ντετερμινιστική μέθοδο Fisher-Lange για το κελί  $(i, j)$ :

$$\tilde{K}_{i,j} \sim \text{Poiss}(\hat{N}p_{i,j}).$$

Αυτή η μεταβλητή θα μπορούσε να περιγραφεί μέσω μιας μικτής Διαδικασίας Poisson, προκειμένου να εξετάσουμε την αβεβαιότητα που συνδέεται με την παράμετρο εκτίμησης, μέσω μιας μεταβλητής με πολλαπλασιαστική δομή, την  $\tilde{q}_{i,j}$ . Υποθέτουμε ότι αυτή η δομή μεταβλητής ακολουθεί μια Γάμμα κατανομή με ίσες παραμέτρους, με μέση τιμή 1 και τυπική απόκλιση  $\sigma_{q_{i,j}}$ . Έχουμε δηλαδή ότι:

$$\tilde{K}_{i,j} \sim \text{Poiss}(\hat{N}p_{i,j} \cdot q_{i,j}).$$

Έχοντας ως στόχο να θεωρήσουμε τις συσχετίσεις μεταξύ των πληθών των απαιτήσεων στο τρίγωνο, υποθέτουμε δηλαδή μόνο μία τυχαία μεταβλητή  $\tilde{q}$ , η οποία επηρεάζει ολόκληρο το κατώτερο τμήμα του τριγώνου.

-  $\tilde{Z}_{i,j,h}$  είναι το τυχαίο ποσό της  $h$ -απαίτησης εξοφλημένο μετά από  $j$  έτη, το οποίο είχε προκύψει το έτος ατυχήματος  $i$ . Παρά το ότι η κατανομή της σφοδρότητας θα μπορούσε να προσαρμοστεί στα παρατηρημένα δεδομένα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ακριβείς ροπές του συνολικού ποσού των απαιτήσεων, χωρίς να υποθέσουμε την πιθανοτική κατανομή της σφοδρότητας. Η μεταβλητή αυτή υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή Γάμμα με παραμέτρους που προκύπτουν έμμεσα από την μέθοδο των στιγμιοτύπων, υποθέτοντας ότι:

$$E(\tilde{Z}_{i,j,h}) = m_{i,j,h} \quad \text{και} \quad \frac{\sigma(\tilde{Z}_{i,j,h})}{E(\tilde{Z}_{i,j,h})} = c_{Z_j},$$

όπου  $c_{Z_j}$  είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας.

Όπως κάναμε και με το πλήθος των απαιτήσεων, εισάγουμε για κάθε κόστος ζημιάς μια παράμετρο αβεβαιότητας, μέσω μιας μεταβλητής με πολλαπλασιαστική δομή, η οποία έχει επίδραση στον συντελεστή μεταβλητότητας  $c_{Z_j}$ . Ειδικότερα, η αβεβαιότητα αυτή περιγράφεται μέσω πολλαπλασιαστικών τυχαίων μεταβλητών  $r_j$  (στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι αυτές είναι Γάμμα-κατανομημένες με τις ίδιες παραμέτρους), με μέση τιμή 1 και τυπική απόκλιση  $\sigma_{r_j}$  (που στη συνέχεια θα θεωρηθεί ότι είναι η ίδια για κάθε έτος εξέλιξης) και συνεισφέρει κατά ένα περιορισμένο τρόπο στην ολική μεταβλητότητα:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{Z}_{i,j,h}} = \sigma_{\tilde{Z}_{i,j,h}} \cdot r_j.$$

Έχοντας ως στόχο να θεωρήσουμε τις συσχετίσεις μεταξύ των κοστών των ζημιών μέσα στο ίδιο έτος εξέλιξης, υποθέτουμε μια τυχαία μεταβλητή  $r_j$  για κάθε έτος εξέλιξης (δηλ. κάθε τυχαία τιμή που εμφανίζεται, επηρεάζει μόνο τα κελιά της ίδιας στήλης). Όπως αναφέρθηκε και στην περίπτωση της  $q$ , έχουμε εξάρτηση μεταξύ των κελιών του run-off τριγώνου, που πρόκειται να εκτιμηθούν.

Επειδή πληρείται και η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ του πλήθους των απαιτήσεων και του κόστους των απαιτήσεων, αλλά και η υπόθεση ανεξάρτητων και πανομοιότυπων τυχαίων μεταβλητών (i.i.d=independent and identically distributed random variables) για το κάθε κόστος απαίτησης (σε κάθε κελί του κατώτερου τμήματος του τρέχοντος τριγώνου που πρόκειται να εκτιμηθεί), μπορούμε να βρούμε τις ακριβείς ροπές και τα σημεία συσσώρευσης σε κάθε κελί του τριγώνου.

Ειδικότερα, αγνοώντας τις παραμέτρους αβεβαιότητας, τα κύρια χαρακτηριστικά των πληρωμένων οριακών απαιτήσεων θα μπορούσαν να προσδιοριστούν από τις ακόλουθες σχέσεις (Badolatti, 2009) :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot m_{i,j}, \\ \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}}, \\ \gamma(\tilde{X}_{i,j}) &= \frac{1}{\sqrt{n_{i,j}}} \cdot \frac{\alpha_{3,Z_{i,j}}}{(\alpha_{2,Z_{i,j}})^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3)$$



όπου  $a_{h,\tilde{Z}_{i,j}} = E(\tilde{Z}_{i,j}^h)$  είναι η h-οστή στιγμή γύρω απ'το μηδέν της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων,  $m_{i,j}$  είναι το μέσο κόστος ( $m_{i,j} = a_{1,Z_{i,j}}$ ) και  $\gamma(\tilde{X}_{i,j})$  είναι η ασυμμετρία.

Όπως γνωρίζουμε, η τυπική απόκλιση του ποσού της απαίτησης  $\tilde{X}_{i,j}$  σε κάθε κελί αυξάνεται αναλογικά με την τετραγωνική ρίζα του αναμενόμενου αριθμού των απαιτήσεων του έτους. Η ασυμμετρία ( $\gamma(\tilde{X}_{i,j})$ ) είναι και θετική και επηρεασμένη από μία αναλογία που διαμορφώνεται από τις δεύτερες και τρίτες ροπές-κατά σειρά της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων  $\tilde{Z}_{i,j}$ . Επιπλέον το μέγεθος μειώνεται μόνο ανάλογα με τον αριθμό των απαιτήσεων. Στην ειδική περίπτωση που μια διμεταβλητή λογαριθμοκανονική κατανομή έχει υποτεθεί για το μέγεθος των απαιτήσεων, αυτή η αναλογία εξαρτάται μόνο από τον συντελεστή μεταβλητότητας

$$c_{Z_j} \text{ (με } c_{Z_j} = \frac{\sigma_{Z_{i,j}}}{m_{i,j}}), \text{ πάντα ίση με } (1 + c_{Z_j}^2)^{3/2}.$$

Υποθέτοντας ότι η ντετερμινιστική παράμετρος της κατανομής Poisson για τον αριθμό των απαιτήσεων θα μετατραπεί σε μια στοχαστική παράμετρο  $n_{i,j} \cdot \tilde{q}$  (όπου σε κάθε κελί  $\tilde{q}$  είναι μια τυχαία δομή μεταβλητής που έχει την δική της πιθανοτική κατανομή με μια αναμενόμενη τιμή ίση με 1), τα ίδια χαρακτηριστικά μπορούν να προσδιοριστούν όταν οι δομές μεταβλητών υποτεθούν i.i.d. σε κάθε κελί του κατώτερου τμήματος του τριγώνου. Η δομή μεταβλητής προφανώς επηρεάζει την τυπική απόκλιση των πληρωμένων απαιτήσεων. Όπως είναι γνωστό, η αβεβαιότητα των παραμέτρων εμφανίζεται ως ένας μη-συγκεντρωμένος κίνδυνος, ο οποίος δεν θα μπορούσε να ελαττωθεί από έναν μεγαλύτερο αριθμό απαιτήσεων. Μια κατανομή με θετική συμμετρία για την δομή μεταβλητής, οδηγεί και σε μια αύξηση της ασυμμετρίας του  $X$ .

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot m_{i,j}, \\ \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 \cdot m_{i,j} \cdot \sigma_q^2, \\ \gamma(\tilde{X}_{i,j}) &= \frac{n_{i,j} \cdot \alpha_{3,Z_{i,j}} + 3 \cdot n_{i,j}^2 \cdot m_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} \cdot \sigma_q^2 + n_{i,j}^3 \cdot \alpha_{1,Z_{i,j}}^3 \cdot \sigma_q^3 \cdot \gamma_q}{(n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 \cdot m_{i,j}^2 \cdot \sigma_q^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

Επιπλέον, κάτω από την υπόθεση μιας πολλαπλασιαστικής δομής μεταβλητής  $\tilde{r}$ , η οποία έχει επίσης υποθεθεί ότι ακολουθεί κατανομή Γάμμα με τις ίδιες παραμέτρους (προκειμένου να πάρουμε μέση τιμή ίση με 1), και η οποία εφαρμόζεται στον συντελεστή μεταβλητότητας  $c_{Z_j}$ , οι ακόλουθες σχέσεις περιγράφουν τα δύο πρώτα σημεία συσσώρευσης (cumulants) της κατανομής των μελλοντικών πληρωμών απαιτήσεων το έτος ατυχήματος  $i$  και το έτος εξέλιξης  $j$ :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot m_{i,j}, \\ \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}) &= n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j} \cdot \sigma_{Z_{i,j}}^2 \cdot \sigma_r^2 + n_{i,j}^2 \cdot m_{i,j}^2 \cdot \sigma_q^2, \end{aligned} \quad (5)$$

Η τυπική απόκλιση επηρεάζεται τώρα από τρεις συνιστώσες: η πρώτη προκύπτει από την διαδικασία των σφαλμάτων που σχετίζονται με το πλήθος των απαιτήσεων και με το μέγεθος των απαιτήσεων, οι υπόλοιπες περιγράφουν την αβεβαιότητα των παραμέτρων που συνδέονται με την εκτίμηση των μεταβλητών είτε του μεγέθους των απαιτήσεων είτε του αναμενόμενου πλήθους των απαιτήσεων.

Όπως αναμενόταν, ο συντελεστής μεταβλητότητας των οριακών πληρωμών  $\tilde{X}_{i,j}$  για κάθε κελί, μειώνεται όταν πρόκειται για έναν μεγαλύτερο αριθμό απαιτήσεων. Θα μπορούσε να παρατηρηθεί επίσης, πώς προσδιορίζεται ένα πεπερασμένο επίπεδο σύγκλισης ίσο μόνο με την τυπική απόκλιση της δομής μεταβλητής  $q$ , ενώ η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής  $r$  μειώνεται για έναν μεγαλύτερο αριθμό απαιτήσεων (βλ. σχέση (7)):

$$CV(\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\sigma(\tilde{X}_{i,j})}{E(\tilde{X}_{i,j})} = \sqrt{\frac{1 + c_{Z_j}^2}{n_{i,j}} + \frac{c_{Z_j}^2 \cdot \sigma_r^2}{n_{i,j}} + \sigma_q^2}, \quad (6)$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV(\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_q. \quad (7)$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ανεξαρτησία μεταξύ των συνολικών οριακών ποσών πληρωμών, διαφορετικών κελιών, είναι πιθανό να ορίσουμε τα ακριβή σημεία συσσώρευσης (cumulants) για το απόθεμα των συνολικών απαιτήσεων (προπαντός μέση τιμή, διακύμανση και ασυμμετρία). Για την υπόθεση ανεξαρτησίας μεταξύ όλων των οριακών πληρωμών σε κάθε κελί του ίδιου έτους ατυχήματος, απορρέουν κατά συνέπεια οι ροπές για το απόθεμα  $R_i$  για κάθε έτος ατυχήματος:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{R}_i) &= \sum_{h=N-i+2}^{N^+} E(\tilde{X}_{i,h}), \\
\sigma^2(\tilde{R}_i) &= \sum_{h=N-i+2}^{N^+} \sigma^2(\tilde{X}_{i,h}), \\
\gamma(\tilde{R}_i) &= \frac{\sum_{h=N-i+2}^{N^+} \sigma^3(\tilde{X}_{i,h}) \cdot \gamma(\tilde{X}_{i,h})}{\sigma^3(\tilde{R}_i)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Επεκτείνοντας την ανεξαρτησία που έχει υποθεθεί πιο πάνω σε όλα τα κελιά του τριγώνου, μπορούμε να έχουμε τις ροπές της κατανομής του ολικού αποθέματος για το μέσο όρο των απαιτήσεων του αποθέματος,  $R$ :

$$E(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^N E(\tilde{R}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} E(\tilde{X}_{i,j}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} m_{i,j} \cdot n_{i,j}. \tag{9.1}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι ο μέσος όρος του CRM μοντέλου συμπίπτει ακριβώς με την Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate) της μεθόδου Fisher-Lange, αν οι παράμετροι ( $m_{i,j}$  και  $n_{i,j}$ ) του στοχαστικού μοντέλου έχουν βαθμονομηθεί χρησιμοποιώντας αυτή την ντετερμινιστική προσέγγιση.

Η ακριβής τυπική απόκλιση (αγνοώντας τις μεταβλητές  $r_j$ , οι οποίες έχουν μια αμελητέα επίδραση στην μεταβλητότητα), δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tilde{R}) &= \sum_{i=1}^N \sigma^2(\tilde{R}_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} + \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} n_{i,j} \cdot a_{1,Z_{i,j}} \right) \cdot \sigma^2_q,
\end{aligned} \tag{9.2}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι το άθροισμα για κάθε Έτος Εξέλιξης (DY=Development Year) και Έτος Ατυχήματος (AY=Accident Year) της μεταβλητότητας του κάθε κελιού του κατώτερου τμήματος του τριγώνου, θεωρώντας μόνο την Διαδικασία Poisson (δηλ. χωρίς την επίδραση των μεταβλητών δομών). Το δεύτερο μέρος θεωρεί την επίδραση των τυχαίων μεταβλητών  $q$ , εισάγοντας μια σιωπηρή συσχέτιση, που σχετίζεται με την παρουσία μιας μοναδικής δομής μεταβλητής, η οποία επηρεάζει ολόκληρο το τρίγωνο.

Είναι πράγματι εύκολο να δείξουμε ότι η διακύμανση δεν είναι μικρότερη από το άθροισμα των διακυμάνσεων των πληρωμών των απαιτήσεων σε κάθε κελί:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tilde{R}) &\geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} n_{i,j} \cdot \alpha_{2,Z_{i,j}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} n_{i,j}^2 \cdot \alpha_{1,Z_{i,j}}^2 \cdot \sigma_q^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}),\end{aligned}\quad (9.3)$$

Η σιωπηρή συσχέτιση (που έχει υποτεθεί ίση σε κάθε κελί) θα μπορούσε να υπολογιστεί κατά την επίλυση των παραπάνω σχέσεων. Επίσης η ασυμμετρία δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}\gamma(\tilde{R}_i) &= \frac{\sum_{i=1}^N \sigma^3(\tilde{R}_i) \cdot \gamma(\tilde{R}_i)}{\sigma^3(\tilde{R})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} \sigma^3(\tilde{X}_{i,j}) \cdot \gamma(\tilde{X}_{i,j})}{\left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+2}^{N^+} \sigma^2(\tilde{X}_{i,j}) \right]^{3/2}},\end{aligned}\quad (9.4)$$

Τελικά η κατανομή του συνολικού αποθέματος των απαιτήσεων θα μπορούσε να προσδιοριστεί είτε ακολουθώντας κάποιες μεθοδολογίες που βασίζονται σε προσεγγίσεις, είτε χρησιμοποιώντας μεθόδους προσομοίωσης. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε έναν από τους δύο τρόπους, προκειμένου να εκτιμήσουμε την κατανομή (Savelli & Clemente(2010), Badolatti, 2009).

### 4.3 Εκτίμηση των παραμέτρων με την μέθοδο Fisher Lange

Όπως αναφέραμε και παραπάνω (Badolatti, 2009), για την εφαρμογή του προτεινόμενου CRM, χρειαζόμαστε πρώτα τον αναμενόμενο αριθμό των ζημιών που πρόκειται να πληρωθούν, για κάθε κελί του μελλοντικού τριγώνου, όπως επίσης και το αναμενόμενο μέσο κόστος των απαιτήσεων. Υπό αυτή την οπτική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από τις πολυάριθμες μεθόδους μέσου κόστους, μια απ' τις οποίες είναι και η μέθοδος Fisher-Lange, η οποία είναι πολύ δημοφιλής στις πρακτικές αποτιμήσεις στην ιταλική αγορά. Τα οριακά ποσά των πληρωμών που θα εκτιμηθούν στο κατώτερο τμήμα του τριγώνου, μπορούν να εξαχθούν μέσω της ακόλουθης σχέσης:

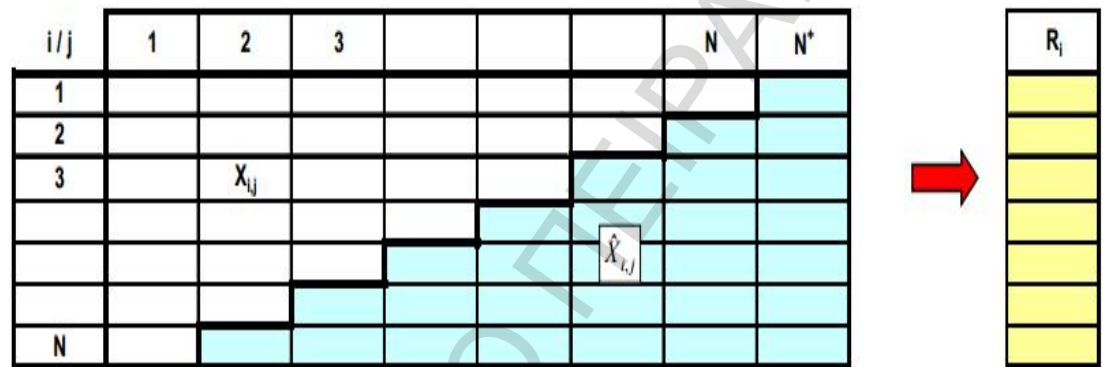
$$\hat{X}_{i,j} = nr_{i,N-i+1} \cdot m_{i,j}, \quad (N+1 < i+j < N+N^+) \Rightarrow \hat{R} = \sum_{i=1}^N \sum_{h=N-i+2}^{N^+} \hat{X}_{i,h}$$

όπου:

$$N^+ = N+1 \quad \text{όταν} \quad X_{1,N^+} > 0,$$

$$N^+ = N \quad \text{όταν} \quad X_{1,N^+} = 0,$$

**Σχήμα 2.** Αναπαράσταση εξαγωγής των οριακών ποσών πληρωμών.



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

Για την εκτίμηση του αναμενόμενου οριακού αριθμού των απαιτήσεων που πρόκειται να πληρωθούν ( $n_{i,j}$ ), η μέθοδος Fisher-Lange εφαρμόζει στον αριθμό των απαιτήσεων που έχουν αποθεματοποιηθεί κατά την ημερομηνία αποτίμησης ( $nr$ ), δύο συντελεστές ( $alij$  και  $v$ ):

$$n_{i,j} = nr_{i,N-i+1} \cdot alij_j \cdot v_{i,j}. \quad (10)$$

- Το ποσοστό των απαιτήσεων στο απόθεμα, που έχουν μια οποιαδήποτε πληρωμή μέσα στα επόμενα έτη ( $alij_j$ ): με άλλα λόγια, αυτή είναι η εκτίμηση του μέρους των απαιτήσεων στο απόθεμα, κατά την ημερομηνία αποτίμησης, οι οποίες έχουν μια αποτελεσματική πληρωμή στο μέλλον, η οποία σχετίζεται έμμεσα είτε με μηδενικές απαιτήσεις, είτε με απαιτήσεις που έχουν ανοιχτεί εκ νέου. Μέσω αυτών των ποσοστών (ένα για κάθε διάρκεια), τα οποία έχουν εκτιμηθεί με βάση παλαιότερα δεδομένα και έχουν εφαρμοστεί στον αριθμό των αποθεματοποιημένων ζημιών, ( $nr_{i,N-i+1}$ ), πετυχαίνουμε την εκτίμηση του

αριθμού των απαιτήσεων που θα πληρωθούν στο μέλλον, για κάθε έτος ατυχήματος  $i$ .

- Ταχύτητα διακανονισμού ( $v_{i,j}$ ): αναπαριστά το χρονοδιάγραμμα, μέσα στο οποίο το πλήθος των πληρωμών των απαιτήσεων, έχει εκτιμηθεί να έχει μια αποτελεσματική πληρωμή στο μέλλον. Στην πράξη χρειαζόμαστε μια εκτίμηση που να αφορά το χρονοδιάγραμμα του πλήθους των πληρωμένων ζημιών στο μέλλον, για κάθε διακριτό έτος ατυχήματος. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε μέσω του αριθμού των απαιτήσεων που έχουν πληρωθεί αποτελεσματικά κατά το τελευταίο ημερολογιακό έτος, για διαφορετικά έτη εξέλιξης ( $j = 2, 3, \dots, N, N^+$ ), αλλά στα οποία η αρχή των διαφορετικών ετών ατυχήματος πρέπει να κατασταθεί ομογενής (μέσω ενός κανόνα αναλογικότητας, βασισμένο στον αριθμό των απαιτήσεων που έχουν αναγγελθεί). Επιπλέον, ο μέσος όρος των τριών τελευταίων ημερολογιακών ετών, μπορεί να ληφθεί υπόψη με στόχο να διασφαλιστεί μια μεγαλύτερη σταθερότητα στην εκτίμηση (στη συνέχεια η τελευταία αυτή επιλογή θα υιοθετηθεί στα αριθμητικά μας παραδείγματα).

Τέλος, έχουμε να εκτιμήσουμε τον αναμενόμενο μέσο όρο των πληρωμένων εξόδων ( $m_{i,j}$ ), για κάθε κελί του μελλοντικού τριγώνου, περιλαμβάνοντας τον μελλοντικό πληθωρισμό. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε ακολουθώντας τα ακόλουθα τέσσερα προοδευτικά βήματα:

- 1) να προσαρμόσουμε τις ιστορικές πληρωμές ( οι οποίες ορίζονται στο ανώτερο τμήμα του run-off τριγώνου) στην τρέχουσα τιμή των τελευταίων διαθέσιμων ημερολογιακών ετών, μέσω αποτελεσματικών ετήσιων οικονομικών ποσοστών πληθωρισμού (δηλ. ο ενδογενής πληθωρισμός δεν λαμβάνεται υπόψη).
- 2) να υπολογίσουμε το μέσο κόστος των πληρωμένων απαιτήσεων για κάθε κελί του “προσαρμοσμένου” ιστορικού τριγώνου.
- 3) να επιλέξουμε για κάθε έτος εξέλιξης το μέσο κόστος ( $\overline{m}_j$ ) ως έναν απλό μέσο όρο (ή εναλλακτικά ως έναν σταθμισμένο μέσο όρο, ο οποίος θα έχει τον αριθμό των αποτελεσματικών πληρωμών ως βάρη) όλων ή μέρους των διαθέσιμων μέσων κοστών για την ίδια διάρκεια (μέσος κατά στήλη),

θεωρώντας ότι ο διακανονισμός των τμηματικών πληρωμών των απαιτήσεων είναι σταθερός κατά την πάροδο του χρόνου. Ο απλός μέσος θα υιοθετηθεί στα αριθμητικά μας παραδείγματα.

- 4) να διογκώσουμε τα επιλεγμένα μέσα κόστη για κάθε στήλη, σύμφωνα με τον μελλοντικό συνολικό πληθωρισμό των απαιτήσεων, που έχει υποτεθεί (είτε ενδογενώς είτε εξωγενώς):

$$m_{i,j} = \overline{m}_j \cdot \prod_{h=1}^{i+j-(N+1)} (1+i_h) \quad (11)$$

Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε για κάθε κελί του μελλοντικού τριγώνου δύο αριθμούς: τον αναμενόμενο αριθμό των πληρωμένων ζημιών ( $n_{i,j}$ ) και το μέσο κόστος ( $m_{i,j}$ ) (βλέπε Badolatti, 2009 )

#### 4.4 Μελέτη περιπτώσεων (Case studies)

Το στοχαστικό μοντέλο (Savelli & Clemente, 2011) λαμβάνει υπόψη εμπειρικά δεδομένα απαιτήσεων απ' το Motor Third Party Liability (MTPL), από δύο ιταλικές ασφαλιστικές εταιρείες, με διαφορετικές διαστάσεις, σύμφωνα με τα λογιστικά έτη από το 1993 έως το 2004 και εφαρμόζεται μέσω προσεγγίσεων Monte Carlo (50.000 προσεγγίσεις) στα MTPL τρίγωνα (12x12+ουρά). Σαφώς τα ποσοστά των πραγματικών δεδομένων έχουν τροποποιηθεί για να διατηρήσουμε την εμπιστευτικότητα του συνόλου των δεδομένων. Η κυρίως πληροφόρηση που χρησιμοποιήθηκε σχετίζεται με τον αριθμό των πληρωμένων και αποθεματοποιημένων ζημιών, τον αριθμό των ζημιών που έχουν κλείσει και έχουν ανοιχθεί εκ νέου, τον αριθμό των ζημιών που έχουν αναγγελθεί και τέλος οριακές πληρωμές και αποθεματοποιημένα ποσά. Η εικόνα που ακολουθεί δείχνει τα ιστορικά κόστη των συσσωρευμένων πληρωμένων ποσών, για τις δύο εταιρείες που αναλύθηκαν. Τα δεδομένα αθροίζονται σε ένα τρίγωνο 12x12 με ουρά. Συγκεκριμένα το τρίγωνο SIFA αναφέρεται σε μια μικρή-μέτρια εταιρεία, ενώ το τρίγωνο AMASES έχει ως αναφορά μια εταιρεία 10 φορές μεγαλύτερη.

Πίνακας 1. Οριακά πληρωμένα ποσά  $X_{i,j}$  για τις εταιρείες SIFA και AMASES.

Triangle SIFA (Incremental Paid Amounts $X_{i,j}$ – thousands of Euro)												
DY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AY 1	28.446	29.251	12.464	5.144	2.727	2.359	1.334	1.238	941	800	282	727
2	31.963	36.106	13.441	5.868	2.882	2.422	918	1.076	734	458	456	1.068
3	37.775	40.125	12.951	6.034	3.010	1.264	1.250	1.135	904	559		
4	40.418	44.499	15.370	5.594	2.616	1.984	2.137	1.184	873			
5	44.116	45.490	15.339	5.478	2.541	2.906	1.294	1.124				
6	50.294	48.040	17.843	7.035	3.934	2.726	2.267					
7	49.620	49.991	19.570	10.047	5.750	3.313						
8	46.410	49.694	20.881	8.202	4.714							
9	48.295	49.354	18.304	8.833								
10	52.590	50.606	18.604									
11	58.599	53.743										
12	60.361											

**BE<sub>CHL</sub> = 230 mill**

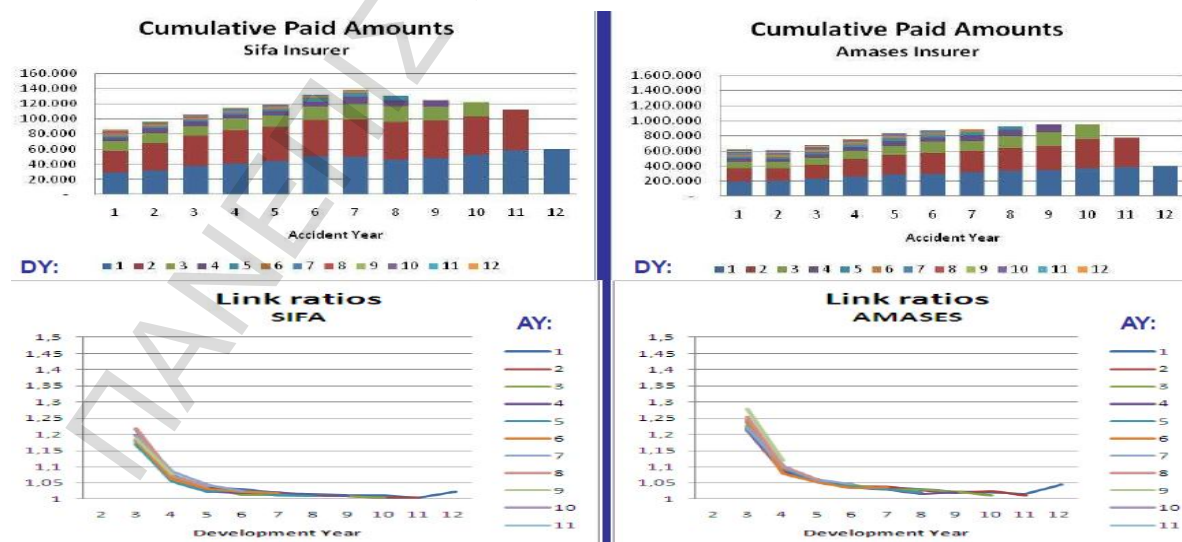
  

Triangle AMASES (Incremental Paid Amounts $X_{i,j}$ – thousands of Euro)												
DY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AY 1	193.474	172.618	87.200	45.798	29.768	19.795	19.782	17.315	13.372	12.552	8.831	8.053
2	199.854	168.966	80.543	40.656	29.053	21.121	19.964	14.249	10.720	13.684	6.008	19.889
3	225.578	186.764	93.349	47.609	30.971	26.291	17.621	18.410	14.662	7.591		
4	256.398	236.678	105.616	51.172	37.338	24.085	20.754	12.082	14.137			
5	282.956	263.196	120.383	63.689	37.220	29.239	23.120	15.509				
6	292.428	284.401	141.400	56.390	40.195	27.955	29.987					
7	312.350	285.506	131.687	75.252	46.549	38.731						
8	327.673	307.992	161.516	77.965	52.696							
9	339.899	326.280	185.911	101.273								
10	371.275	385.847	193.006									
11	388.025	390.737										
12	398.686											

**BE<sub>CHL</sub> = 2.566 mill**

Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

Σχήμα 3. Διαγράμματα συσσωρευμένων ποσών πληρωμών και αναλογικών δεικτών για τις εταιρείες SIFA και AMASES.



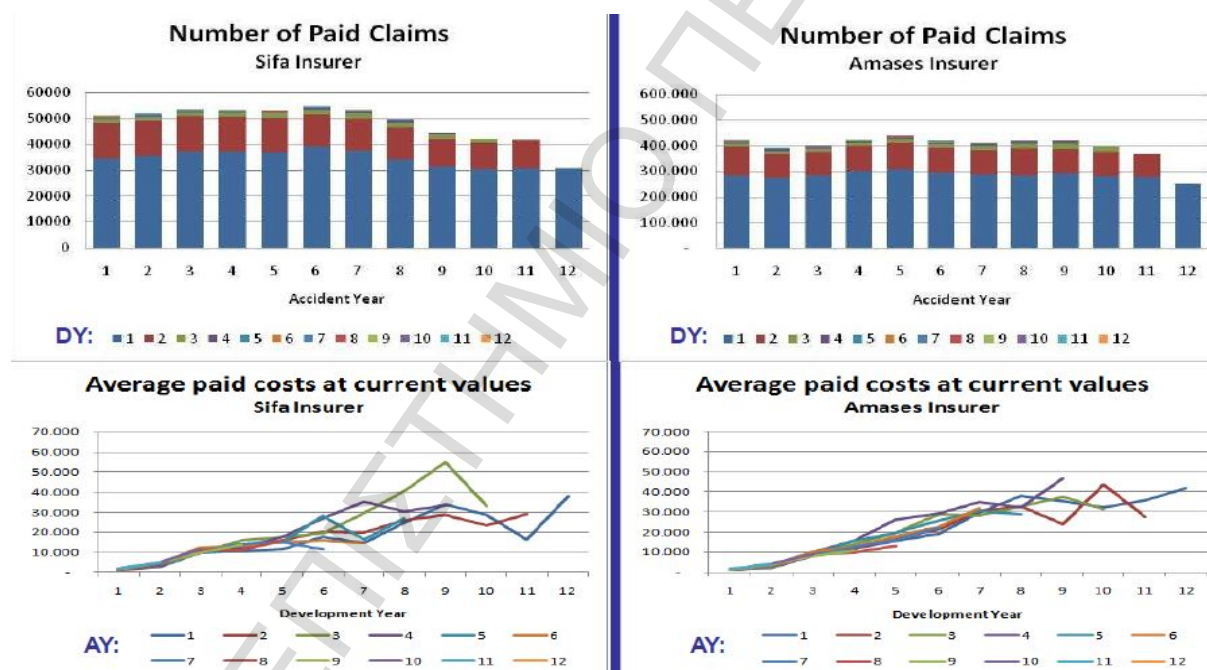
Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.



Η προεξοφλημένη Βέλτιστη Εκτίμηση που έχει επιτευχθεί με την Chain-Ladder είναι πράγματι ίση με €230 εκατομμύρια για την SIFA και €2,566 για την AMASES. Τα δεδομένα δείχνουν ότι η συνολική run-off περίοδος είναι μεγαλύτερη από το DY(έτος εξέλιξης)12 και γι' αυτό πρέπει να προστεθεί μια ουρά. Σ' αυτά τα τρίγωνα οι ουρές είναι το επίπεδο του εκ του νόμου αποθέματος που έχει καθοριστεί από τις εταιρείες. Όπως είναι σύνηθες στην αναλογιστική βιβλιογραφία, στην ακόλουθη ανάλυση μια ουρά (12<sup>+</sup>) θα προστεθεί στις πληρωμές του τελευταίου έτους εξέλιξης (12).

#### 4.4.1 Βαθμονόμηση των παραμέτρων

**Σχήμα 4.** Διαγράμματα του αριθμού των πληρωμένων ζημιών και διαγράμματα μέσου πληρωμένου κόστους σε τρέχουσες τιμές για τις εταιρείες SIFA και AMASES.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2011.

Το Σχήμα 4 συνοψίζει τα κύρια δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την βαθμονόμηση των παραμέτρων, μέσω της μεθόδου Fisher-Lange (Savelli & Clemente, 2011). Πρέπει να δοθεί έμφαση στη διαδικασία διευθέτησης των απαιτήσεων, όπου συνήθως οι μικρότερες απαιτήσεις πληρώνονται πρώτες. Και οι δύο εταιρείες έχουν εξοφλήσει πράγματι πάνω από το 90% των απαιτήσεων (ως αριθμοί) μέσα σε δύο χρόνια από την ημερομηνία εμφάνισης, ενώ τα συσσωρευμένα ποσά των πληρωμών κατά το Έτος Εξέλιξης (E.E.) 2 είναι σχεδόν ίσα με το 60-70%

της τελικής εκτίμησης του κόστους. Επιπροσθέτως, το ποσοστό των πληρωμένων απαιτήσεων εμφανίζεται πιο μεταβλητό για τον μικρό ασφαλιστή.

Τα κατώτερα σχήματα (στο Σχήμα 4), αντιπροσωπεύουν το υπόδειγμα του μέσου πληρωμένου κόστους (σε τρέχουσες τιμές) για διαφορετικά έτη εξέλιξης. Παρατηρείται ένα αυξανόμενο μέσο κόστος κινούμενο προς το δεξί τμήμα του τριγώνου, εξαιτίας ενός μεγαλύτερου ποσοστού απαιτήσεων σε απαιτήσεις για σωματικές βλάβες. Επιπλέον, όπως παρατηρείται και στα δεδομένα της αγοράς, η μεταβλητότητα αυξάνεται για μεγαλύτερες διάρκειες. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο μικρότερος ασφαλιστής έχει να αντιμετωπίσει μεγαλύτερη μεταβλητότητα πληρωμένων ζημιών και μέσου κόστους.

Το CRM μοντέλο έχει εφαρμοστεί με προσομοιώσεις Monte Carlo (50,000 προσομοιώσεις) και στις δύο εταιρείες. Ειδικότερα υποθέτουμε ότι ο αριθμός των απαιτήσεων (σε κάθε κελί του κάτω τμήματος του τριγώνου) είναι κατανομημένος σύμφωνα με Αρνητική Διωνυμική κατανομή, η οποία διαμορφώνεται από την μίξη μιας Poisson με μέσο  $n_{i,j}$  (εκτιμημένο με την Fisher-Lange, υποθέτοντας ως ταχύτητα διακανονισμού τον μέσο, υπολογισμένο με βάση τις τρεις τελευταίες διαγωνίους) πολλαπλασιασμένη με μια δομή μεταβλητής  $\tilde{q}$ , η οποία περιγράφεται μέσω μιας Γάμμα κατανομής με μέσο 1 και τυπική απόκλιση ίση με 8% για την SIFA και 3% για την AMASES. Οι τυπικές αποκλίσεις έχουν εκτιμηθεί από τις ακριβείς ροπές, υποθέτοντας τις ίδιες συσχετίσεις (περίπου 0.1, ίσες με αυτή που προέρχεται εμμέσως από τον τύπο του Mack για την πρόβλεψη των σφαλμάτων) ανάμεσα στα πλήθη των απαιτήσεων, για τους δύο ασφαλιστές. Επίσης, τα κόστη για την κάθε ζημιά είναι Γάμμα-κατανομημένα, με μέση τιμή ίση με το μέσο κόστος του κελιού  $m_{i,j}$  (εκτιμημένου με την Fisher-Lange ως μέση τιμή όλων των μέσων κοστών που είναι διαθέσιμα στο ανώτερο τμήμα του τριγώνου, εκφρασμένα σε τρέχουσες τιμές και προβλεβημένα από την δομή για τον πληθωρισμό των μελλοντικών απαιτήσεων, που εδώ χρησιμοποιείται ως ντετερμινιστική).

Η τυπική απόκλιση βασίζεται στους ακόλουθους συντελεστές μεταβλητότητας  $c_{z_j}$ , οι οποίοι είναι διαφορετικοί για κάθε έτος εξέλιξης και εξαρτώνται και από την αναλύσιμη LoB αλλά και από τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου της εταιρείας:

**Πίνακας 1.** Συντελεστές μεταβλητότητας των μέσων πληρωμένων κοστών σύμφωνα με τους δύο ασφαλιστές.

<b>Έτη</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>Εξέλιξης</b>											
$c_{z_j}$	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00	5.00	7.00

Θεωρούμε την εκτίμηση των συντελεστών μεταβλητότητας  $c_{z_j}$  (διαθέσιμη από την Βάση Δεδομένων των απαιτήσεων της εταιρείας και διαφορετική για κάθε έτος εξέλιξης), ως βασικό δεδομένο. Ως γνωστόν, τα δεδομένα αυτά είναι διαθέσιμα κυρίως σε έναν εσωτερικό αναλογιστή, ενώ είναι δύσκολο να τα εκμαιεύσουμε από έναν εξωτερικό αναλογιστή (π.χ. διαθέσιμα σε μια εκτίμηση που έχουμε αναλάβει). Αυτό θα μπορούσε να προκαλέσει μικρή διάχυση της προσέγγισης, συγκρινόμενη με άλλες μεθόδους στηριγμένες κυρίως σε run-off τρίγωνα. Επιπλέον, προκειμένου να θεωρήσουμε την αβεβαιότητα των παραμέτρων, υποθέτουμε ότι τα  $c_{z_j}$  επηρεάζονται από την δομή μεταβλητής  $r_j$  (μία για κάθε έτος εξέλιξης) κατανομημένης σύμφωνα με μια Γάμμα κατανομή, με μέση τιμή 1 και τυπική απόκλιση ίση με 3% και για τις δύο εταιρείες.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα με 100.000 προσομοιώσεις, οι οποίες δίνουν αποτελέσματα τα οποία είναι πιο συνεπή με την ακριβή τιμή της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, για τα οποία έχουμε μια απόκλιση της τάξης του 0,001% από τις ακριβείς τιμές της μέσης τιμής και μια απόκλιση 0,12% για την τυπική απόκλιση. Όμως, όπως αναμενόταν, παρά τον σχετικό αριθμό των προσομοιώσεων, η προσομοιωμένη ασυμμετρία εξακολουθεί να έχει μια απόκλιση από την πραγματική τιμή, της τάξης του 3.9%.

<b>Έτη</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>Εξέλιξης</b>											
$c_{z_j}$	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00

### Προσομοιωμένα χαρακτηριστικά

<b>Simulated characteristics</b>				
Year	Mean (Thousands €)	St. Dev. (Thousands €)	CV	Skewness
1	1,406	2,354	167.46%	3.33
2	1,767	2,516	142.41%	2.96
3	1,942	2,516	129.55%	2.84
4	2,375	2,646	111.41%	2.66
5	4,082	3,269	80.07%	2.07
6	5,664	3,594	63.45%	1.93
7	11,002	4,421	40.18%	1.53
8	19,880	5,107	25.69%	1.30
9	24,880	4,926	19.80%	1.33
10	34,884	4,965	14.23%	1.31
11	49,557	4,949	9.99%	1.04
Previous	157,440	12,947	8.22%	0.51
Current	91,881	6,653	7.24%	0.51
<b>Total</b>	<b>249,320</b>	<b>14,549</b>	<b>5.84%</b>	<b>0.39</b>

### Ακριβή χαρακτηριστικά

<b>Exact characteristics</b>				
Year	Mean (Thousands €)	St. Dev. (Thousands €)	CV	Skewness
1	1,406	2,354	167.48%	3.33
2	1,765	2,499	141.61%	2.93
3	1,930	2,519	130.54%	2.89
4	2,376	2,641	111.18%	2.69
5	4,078	3,269	80.16%	2.11
6	5,664	3,587	63.33%	1.90
7	11,010	4,425	40.19%	1.53
8	19,879	5,100	25.65%	1.32
9	24,900	4,962	19.93%	1.35
10	34,882	4,945	14.18%	1.29
11	49,566	4,968	10.02%	1.09
Previous	157,455	12,962	8.23%	0.51
Current	91,869	6,646	7.23%	0.51
<b>Total</b>	<b>249,324</b>	<b>14,567</b>	<b>5.84%</b>	<b>0.41</b>

Το μοντέλο CRM οδηγεί τον ασφαλιστή SIFA σε μια βέλτιστη εκτίμηση των περίπου 250 εκατομμυρίων ευρώ, ίσα, όπως αναμενόταν από τις υποθέσεις, με την εκτίμηση των απαιτήσεων του αποθέματος σύμφωνα με την μέθοδο Fisher-Lange. Επιπλέον παρατηρείται ένας συντελεστής μεταβλητότητας ίσος με 5.84% και μια μη αμελητέα

ασυμμετρία (+0.4), Τέλος, θα μπορούσε να παρατηρηθεί πώς τα αποθέματα των ζημιών για τα αρχικά έτη ατυχήματος εμφανίζουν υψηλό συντελεστή μεταβλητότητας και υψηλή ασυμμετρία, εξαιτίας της υψηλής επίδρασης της εκτίμησης στα τελευταία έτη ατυχήματος. Προφανώς το άθροισμα υπό την υπόθεση της ανεξαρτησίας οδηγεί σε μια χαμηλότερη ασυμμετρία για το ολικό απόθεμα των απαιτήσεων.

#### 4.4.2 CRM- Fisher-Lange (FL) vs Bootstrapping-CHL (Total Run-Off)

Ο Πίνακας 2 απεικονίζει μια σύγκριση μεταξύ των δύο εταιρειών (SIFA και AMASES) όσων αφορά στον συντελεστή μεταβλητότητας και την ασυμμετρία, χρησιμοποιώντας όχι μόνο το CRM, με παραμέτρους στηριγμένες στην υπόθεση Fisher-Lange, αλλά και στο γνωστό μοντέλο Bootstrap, στηριγμένο στην μέθοδο Chain-Ladder και εξελισσόμενο χρησιμοποιώντας τα προσαρμοσμένα υπόλοιπα Pearson, με μια σταθερή παράμετρο κλίμακας  $\phi$  για διαφορετικά έτη εξέλιξης και μέσω Λογαριθμοκανονικών προσομοιώσεων (England & Verall (1999), England (2002)). Όπως ήταν αναμενόμενο, το CRM μοντέλο οδηγεί και για τους δύο ασφαλιστές σε μια βέλτιστη εκτίμηση, ίση με την εκτίμηση της ντετερμινιστικής μεθόδου Fisher-Lange για τα αποθέματα των απαιτήσεων. Για την SIFA παρατηρείται ένας συντελεστής μεταβλητότητας ίσος με 8.69% και μια μη-αμελητέα ασυμμετρία (+0.15). Θα μπορούσαμε να επισημάνουμε μια χαμηλότερη μεταβλητότητα και ασυμμετρία, όταν θεωρούμε τον μεγαλύτερο ασφαλιστή. Υπενθυμίζουμε ότι και οι δύο συσσωρευτές οριακών πληρωμών μειώνονται σύμφωνα με έναν μεγαλύτερο αριθμό απαιτήσεων.

Επιπλέον, αρχικά θα δειχθεί στη συνέχεια ότι τα στοχαστικά μοντέλα οδηγούν σε διαφορετικούς μέσους όρους (σε προεξοφλημένες αλλά και σε μη προεξοφλημένες βάσεις), σαφώς λόγω των διαφορετικών υποθέσεων που περιέχονται εμμέσως στις δύο υποκείμενες ντετερμινιστικές μεθόδους (την Fisher-Lange και την Chain-Ladder), οι οποίες εφαρμόζονται εδώ χωρίς “επαγγελματική κρίση” (όπως παρουσιάζονται αντιθέτως στους πραγματικούς υπολογισμούς).

Δεύτερον, πρέπει να δοθεί έμφαση στο πώς επηρεάζουν οι διαφορετικές διαστάσεις και τα πρότυπα ανάπτυξης των δύο τριγώνων, την διαφορετική μεταβλητότητα που

παρέχεται από τα στοχαστικά μοντέλα και οδηγεί σε χαμηλότερη μεταβλητότητα για τον μεγαλύτερο ασφαλιστή. Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι δεν υπάρχει κάποιο επικρατέστερο μοντέλο. Η AMASES έχει μεταβλητότητα ίση με 3.3% σύμφωνα με το CRM (χαμηλότερη από το 3.7% που βρήκαμε με την Bootstrap), ενώ με την μέθοδο της δειγματοληψίας με αντικατάσταση παίρνουμε μια χαμηλότερη μεταβλητότητα (4.6%) απ’ ότι με το CRM (8.7%) για την εταιρεία SIFA.

Τέλος, η ασυμμετρία δεν επηρεάζεται τόσο πολύ όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος Bootstrap, είτε πρόκειται για διαφορετικές διαστάσεις των τριγώνων είτε για διαφορετικές πιθανοτικές υποθέσεις (Λογαριθμοκανονική, ODP, Κανονική, Αρνητική Διωνυμική κ.λ.π.). Τα αποτελέσματα 50,000 προσομοιώσεων (δεν αναφέρονται εδώ), τα οποία βασίστηκαν σε διαφορετικές πιθανοτικές υποθέσεις (Λογαριθμοκανονική, ODP, Κανονική και Αρνητική Διωνυμική) και εφαρμόστηκαν σε δείγματα Bootstrap, δίνουν μια ασυμμετρία από 0.05 έως 0.08 για τον SIFA ασφαλιστή και από 0.078 έως 0.085 για τον AMASES. Αντίθετα, το CRM επιστρέφει μια διαφορετική ασυμμετρία μεταξύ των ασφαλιστών, με χαμηλότερη τιμή για την μεγαλύτερη εταιρεία, λόγω του μεγαλύτερου αριθμού των πληρωμένων απαιτήσεων.

**Πίνακας 2.** Σύγκριση μεταξύ CRM και Bootstrap Λογαριθμικής και για τους δύο ασφαλιστές (50,000 προσομοιώσεις-προεξοφλημένες τιμές).

	<b>Μεταβλητότητα(CV)</b>		<b>Ασυμμετρία (Skewness)</b>	
	CRM(FL)	Bootstrap (CHL)	CRM(FL)	Bootstrap (CHL)
<b>SIFA</b>	8.7%	4.6%	0.15	0.08
<b>AMASES</b>	3.3%	3.7%	0.06	0.08

Και τα δύο στοχαστικά μοντέλα (CRM και Bootstrap) υλοποιούνται προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε την ποσότητα των τεχνικών αποθεμάτων και την κεφαλαιακή απαίτηση για το απόθεμα κινδύνου. Η κεφαλαιακή απαίτηση έχει προσεγγιστεί μέσω της προσέγγισης του Ενός Έτους, που παρέχεται στο πλαίσιο του Solvency II. Η μέθοδος της “επανα-αποθεματοποίησης” (re-reserving) έχει εφαρμοστεί προκειμένου να εξάγουμε την κατανομή των υποχρεώσεων του ασφαλιστή, στο τέλος του έτους, του επόμενου οικονομικού έτους. Επιπλέον τα επιτόκια προεξόφλησης, που

χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την μελέτη περίπτωσης, έχουν καθοριστεί μέσω της δομής των επιτοκίων μηδενικού κινδύνου, που δίνεται στην QIS5 των Τεχνικών Προδιαγραφών και είναι ίσα για non-life υποχρεώσεις, με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου της 31<sup>ης</sup> Δεκεμβρίου 2009 που αποκτήθηκε μέσω επιτοκίων swap και εμπεριέχει ένα 50% ασφάλιστρο μειωμένης ρευστότητας (illiquidity premium).

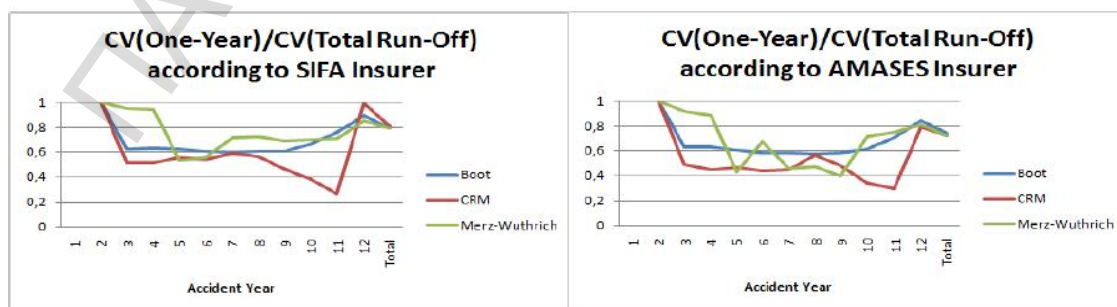
#### 4.4.3 Προσέγγιση Ενός Έτους

Η εφαρμογή της προσέγγισης του Ενός Έτους δείχνει (Πίνακας 3) πώς ο συντελεστής που αφορά την μεταβλητότητα του έτους 1 ( $CV_{OY}$  = Coefficient Variability, One-Year Approach) τοποθετείται μεταξύ το 70% και 80% του  $CV_{Tot}$  ( $CV_{Tot}$  = Coefficient Variability, Total Run-Off variability) που σχετίζεται με την συνολική run-off μεταβλητότητα (περίπου 79-80% για την SIFA και 72-74% για την AMASES) (βλέπε Wüthrich & Merz, 2008). Επιπλέον το CRM παρέχει μια μεγάλη αύξηση στην ασυμμετρία της “Ενός Έτους” κατανομής του αποθέματος.

**Πίνακας 3.** Μεταβλητότητα και Ασυμμετρία (προσέγγιση Ενός Έτους) που προσεγγίστηκαν μέσω CRM και Bootstrap Λογαριθμικής και για τους δύο ασφαλιστές.

<b>Ένα-Έτος</b>	<b>Μεταβλητότητα(CV)</b>		<b>Ασυμμετρία (Skewness)</b>	
	CRM(FL)	Bootstrap (CHL)	CRM(FL)	Bootstrap (CHL)
<b>SIFA</b>	7.0%	3.7%	1.27	0.18
<b>AMASES</b>	2.4%	2.7%	0.46	0.16

**Σχήμα 5.** Διαγράμματα μεταβλητότητας για τις εταιρείες SIFA και AMASES.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

#### 4.4.4 Solvency Capital Requirement (CRM-FL vs Bootstrapping-CHL)

Ο Πίνακας 4 δείχνει τις αναλογίες μεταξύ του SCR για τον κίνδυνο του αποθέματος και της Βέλτιστης Εκτίμησης του Αποθέματος Απωλειών, που παρατηρήθηκαν μέσω της Bootstrap και του CRM και για τους δύο ασφαλιστές, σύμφωνα με τρία διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και ακολουθώντας το 99.5%, που υιοθετήθηκε από την οδηγία Solvency II, την οποία χρησιμοποιούμε ως αναφορά (Savelli & Clemente, 2011).

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο μικρότερος ασφαλιστής έχει υψηλότερο δείκτη SCR, εξαιτίας της μεγαλύτερης μεταβλητής και της ασύμμετρης κατανομής των απαιτήσεων του αποθέματος. Επιπλέον, οι διαφορές μεταξύ των μοντέλων είναι πιο σημαντικές για τον ασφαλιστή SIFA και για υψηλότερα επίπεδα εμπιστοσύνης, εξαιτίας της επίδρασης της ασυμμετρίας.

**Πίνακας 4.** Δείκτης SCR (ίσος με την κεφαλαιακή απαίτηση για το απόθεμα κινδύνου, διαιρεμένο με την Βέλτιστη Εκτίμηση), που προσεγγίστηκε από το CRM και τα την Λογαριθμική Bootstrap και για τους δύο ασφαλιστές (50,000 προσομοιώσεις-προεξοφλημένες τιμές).

	$SCR_0 / BE_0$					
	CRM(FL)			Bootstrap(CHL)		
	99.00%	99.50%	99.97%	99.0%	99.5%	99.97%
<b>SIFA</b>	22.4%	26.4%	44.4%	9.1%	10.1%	13.6%
<b>AMASES</b>	25.8%	6.6%	10.0%	6.7%	7.5%	10.3%

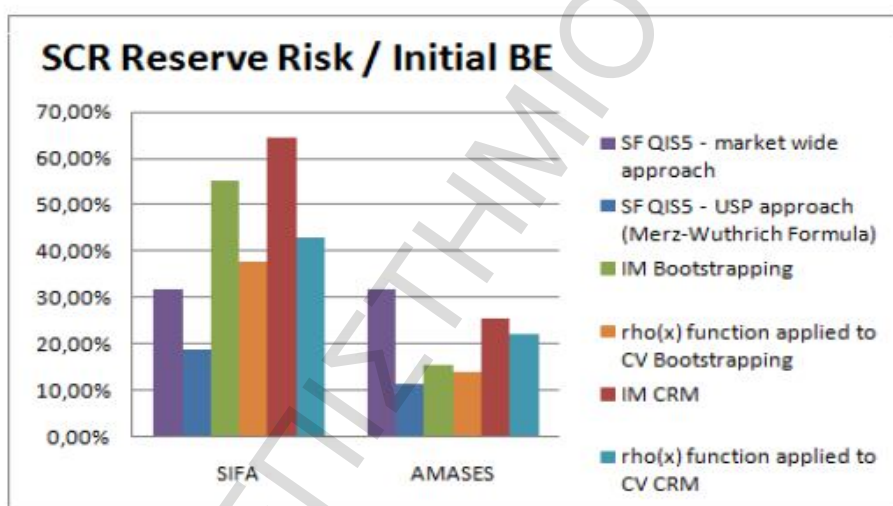
#### 4.4.5 SCR (Εσωτερικό Μοντέλο vs Τυποποιημένη Μέθοδος)

Εστιάζοντας στο επίπεδο αναφοράς 99.5%, είναι ενδιαφέρον να επαληθεύσουμε αν ένα Εσωτερικό Μοντέλο μας επιτρέπει να εξοικονομήσουμε κάποιο κεφάλαιο, συγκρινόμενο με την τυποποιημένη μέθοδο (Savelli & Clemente, 2011). Το Σχήμα 6 δείχνει τον δείκτη SCR (που προκύπτει από την κεφαλαιακή απαίτηση στο 99.5% για τον κίνδυνο του αποθέματος, διαιρεμένο με την αρχική Βέλτιστη Εκτίμηση), που βρέθηκε μέσω διάφορων προσεγγίσεων. Συγκεκριμένα, εκτός από τα εσωτερικά



μοντέλα (Bootstrapping και CRM), το κεφάλαιο ποσοτικοποιείται από την τυποποιημένη μέθοδο QIS5, μέσω είτε ολόκληρης της αγοράς (market-wide) ή μιας από τις πολλές επιχειρήσεις που υπόκεινται σε συγκεκριμένη προσέγγιση. Η κεφαλαιακή απαίτηση θα μπορούσε πράγματι να εκτιμηθεί ως μια συνάρτηση ενός σταθερού συντελεστή μεταβλητότητας (ορισμένου μέσω της market-wide προσέγγισης (MW)) ή μιας δομής αξιοπιστίας (ορισμένης μέσω προσέγγισης συγκεκριμένης επιχείρησης-undertaking-specific approach (USP)) ίσης με έναν σταθμισμένο μέσο του market-wide παράγοντα της μεταβλητότητας και μιας συγκεκριμένης εκτίμησης του  $\sigma$ . Εδώ θεωρούμε το  $\sigma$  ως τον δείκτη μεταξύ της πρόβλεψης της τετραγωνική ρίζας του τετραγώνου του μέσου σφάλματος (MSEP) και της πρόβλεψης της βέλτιστης εκτίμησης για εκκρεμείς απαιτήσεις που εξάχθηκαν από την Chain-Ladder (CLPCO).

**Σχήμα 6.** Δείκτης SCR για τις εταιρείες SIFA και AMASES.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2011.

Όπως ήταν αναμενόμενο, και οι δύο ασφαλιστές έχουν τους ίδιους δείκτες κεφαλαίου, όπως προέκυψε από τον τύπο της πλήρους αγοράς (market-wide formula), ενώ είναι αξιοσημείωτο ότι η USP-προσέγγιση δίνει μια σημαντική εξοικονόμηση κεφαλαίου και για τους δύο ασφαλιστές, σε σχέση με τον τύπο της πλήρους αγοράς. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι αυτή η προσέγγιση δεν απέχει πολύ από τα αποτελέσματα που πήραμε από την μέθοδο Bootstrap. Το μοντέλο CRM οδηγεί αντίθετα σε έναν δείκτη SCR παρόμοιο με την τυποποιημένη μέθοδο της πλήρους

αγοράς για την SIFA και σε ένα κεφάλαιο χαμηλότερο από την USP και την Bootstrapping για την AMASES.

Τέλος, πάντα αναφερόμενοι στο Σχήμα 6, έχουμε σαν στόχο να ελέγξουμε την υπόθεση της Λογαριθμοκανονικής κατανομής του αποθέματος των απαιτήσεων, την οποία θεωρήσαμε στην τυποποιημένη μέθοδο. Από αυτή την άποψη, ποσοτικοποιούμε την κεφαλαιακή απαίτηση, εφαρμόζοντας την συνάρτηση  $\rho(x)$  στον συντελεστή μεταβλητότητας που βρήκαμε αντίστοιχα από την Bootstrap και το μοντέλο CRM (Wüthrich, 2010). Όπως και στην εκτίμηση του ασφαλίστρου κινδύνου, επιβεβαιώνεται ότι η Λογαριθμοκανονική (με δύο μόνο παραμέτρους, για την κατανομή της οποίας θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση  $\gamma(X) = CV(X) \cdot (3 + CV(X)^2)$  μεταξύ του συντελεστή μεταβλητότητας και της ασυμμετρίας) μπορεί να υποτιμήσει την κεφαλαιακή απαίτηση, όταν η υποκείμενη τυχαία μεταβλητή έχει σημαντική θετική ασυμμετρία. Έχει δειχθεί ότι η υψηλή θετική ασυμμετρία που εξάγεται από το CRM (1.27 για την SIFA και 0.46 για την AMASES, βλέπε Πίνακα 3), οδηγεί σε δείκτες χαμηλότερους απ' ότι έχουμε στα αποτελέσματα του Εσωτερικού Μοντέλου. Σε αντίθεση, η Λογαριθμοκανονική υπόθεση εμφανίζεται αξιόπιστη στα μοντέλα Bootstrap, επειδή συνήθως η ασυμμετρία δεν επηρεάζεται τόσο πολύ όταν χρησιμοποιείται αυτή η μέθοδος.

#### 4.4.6 Αποθέματα ζημιών (Solvency II vs Solvency I)

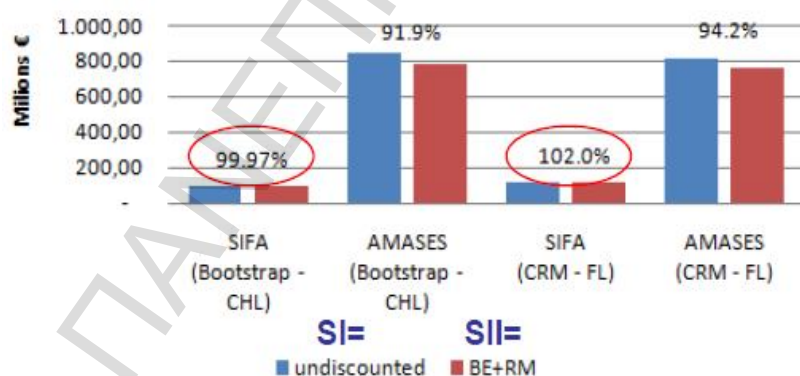
Το Σχήμα 7 συγκρίνει τις τεχνικές προβλέψεις των δύο εταιρειών που εκτιμήθηκαν με το τρέχον ρυθμιστικό περιβάλλον (Solvency I) με το ίδιο απόθεμα που εκτιμήθηκε στο Solvency II-στο πλαίσιο της QIS5 (Badolatti, 2009). Το πρώτο, θεωρεί το απόθεμα των απαιτήσεων ίσο με το τελικό κόστος που έχει εκτιμηθεί ότι πρέπει να πληρωθεί (όχι προεξοφλημένο), ενώ το Solvency II προσδιορίζει την τρέχουσα αξία της αξίας εξόδου για την αποτίμηση. Οι μη-αντισταθμιζόμενες υποχρεώσεις, όπως η πρόβλεψη για τις εκκρεμείς ζημιές, υπολογίζονται ως το άθροισμα μιας βέλτιστης εκτίμησης σε προεξοφλημένη βάση και του περιθωρίου κινδύνου. Οι συντελεστές προεξόφλησης (που είναι χρήσιμοι για την BE εκτίμηση, ορίζονται μέσω της δομής των όρων των χωρίς ρίσκο επιτοκίων, τα οποία δίνονται στις QIS5 Τεχνικές Προδιαγραφές (ίσες για τις non-life υποχρεώσεις με τα χωρίς κίνδυνο επιτόκια της

31/12/2009 που αποκτήθηκαν μέσω επιτοκίων swap και περιλαμβάνουν ένα 50% ασφάλιστρο μειωμένης ρευστότητας).

Το Περιθώριο Κινδύνου (Risk Margin) εδώ ορίζεται μέσω του κόστους της προσέγγισης του κεφαλαίου, σύμφωνα με τις μεθοδολογίες της QIS5, περιλαμβάνοντας το SCR για τον κίνδυνο του αποθέματος (με το Εσωτερικό Μοντέλο), αλλά και για τον λειτουργικό κίνδυνο (μέσω της τυποποιημένης μεθόδου, ως ποσοστό των τεχνικών προβλέψεων). Εδώ δεν θεωρούμε κίνδυνο αθέτησης (πράγματι δεν υποθέτουμε ανασφάλιση), και ούτε αναπόφευκτο κίνδυνο αγοράς (ο οποίος συνήθως υποτίθεται ίσος με μηδέν για τις Non-Life επιχειρήσεις). Τέλος, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν αποτελέσματα διαφοροποίησης με άλλες LoBs, και χρησιμοποιούμε την αναλογική μέθοδο για την BE, η οποία προτείνεται ως μια απλοποίηση από την QIS5, για να βρούμε τα μελλοντικά SCRs και τα χωρίς κίνδυνο επιτόκια, χωρίς ασφάλιστρο μειωμένης ρευστότητας για την προεξόφληση (όπως επίσης παρέχεται και από την CEIOPS). Από αυτή την άποψη, είναι αξιοσημείωτο ότι η αναλογική προσέγγιση δεν είναι πάντα ένας καλός τρόπος για την εκτίμηση του κινδύνου των λογιστικών ετών που ακολουθούν.

**Σχήμα 7.** Σύγκριση των τεχνικών προβλέψεων των δύο εταιρειών που εκτιμήθηκαν με το τρέχον ρυθμιστικό περιβάλλον (Solvency I) με το ίδιο απόθεμα που εκτιμήθηκε στο Solvency II-στο πλαίσιο της QIS5.

#### Technical Provision (Solvency I/Solvency II)



Πηγή: Savelli & Clemente, 2010.

Θα μπορούσε να παρατηρηθεί πώς ο δείκτης μεταξύ του Solvency I και του Solvency II για το απόθεμα ζημιών (Loss Reserve) είναι πάντα χαμηλότερος από 100%. Η

μείωση οφείλεται στην επίδραση της προεξόφλησης (περισσότερο για την AMASES εξαιτίας της χαμηλότερης ταχύτητας διακανονισμού), η οποία δεν λαμβάνεται υπόψη στην τρέχουσα νομοθεσία. Οι διαφορές ανάμεσα στους ασφαλιστές και τα μοντέλα εξάγονται κυρίως από την επίδραση του περιθωρίου κινδύνου (Risk Margin). Το περιθώριο κινδύνου εμφανίζεται πολύ χαμηλό (περίπου 2%), εξαιτίας του χαμηλότερου SCR. Μόνο η υψηλότερη Κεφαλαιακή Απαίτηση, που εξάγεται από το CRM, οδηγεί σε ένα ικανοποιητικό Περιθώριο Κινδύνου (μόνο για την SIFA).

#### 4.4.7 Βαθμονόμηση και πρώτα αποτελέσματα

Οι ίδιες μεθοδολογίες έχουν εφαρμοστεί επίσης στις LoBs General Third-Party Liabilities (GTPL) και Motor Damages (MOD), προκειμένου να εξετάσουμε την επίδραση σε διαφορετικά τρίγωνα. Οι επόμενες εικόνες συνοψίζουν τα κύρια χαρακτηριστικά των πληρωμένων ζημιών και των κοστών, σύμφωνα με τους δύο ασφαλιστές (Savelli & Clemente, 2011).

Όμοια με την MTPL, οι παράμετροι έχουν βαθμονομηθεί και γι' αυτές τις LoBs, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fisher-Lange. Επιπλέον υποθέτουμε έναν μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας για το μέγεθος των απαιτήσεων της GTPL και έναν χαμηλότερο για την MOD (βλέπε Πίνακα 5). Ο αριθμός των πληρωμένων απαιτήσεων της GTPL επηρεάζεται μόνο από μία τυχαία μεταβλητή  $q$  με  $\sigma_q$  ίσο με 19% και 8.5% για τις SIFA και AMASES αντίστοιχα. Αυτές οι τιμές έχουν βαθμονομηθεί υποθέτοντας μια συσχέτιση περίπου ίση με 0.08, η οποία προέρχεται εμμέσως από τον τύπο πρόβλεψης σφαλμάτων του Mack.

Συγχρόνως η MOD παρέχει μια μοναδική τυχαία μεταβλητή  $q$  με  $\sigma_q$  ίσο με 7.5% και 1.5% για τις SIFA και AMASES αντίστοιχα (βαθμονομημένο όπως οι προηγούμενες LoBs, με την εννοούμενη συσχέτιση από τον τύπο του Mack ίση με 0.04 περίπου).

Τέλος και οι δύο γραμμές, όπως και στην MTPL, υποθέτουν την παρουσία της τυχαίας μεταβλητής  $r_j$  για κάθε έτος εξέλιξης, με  $\sigma_r$  ίση με 3% και για τους δύο ασφαλιστές.

**Πίνακας 5.** Συντελεστές μεταβλητότητας για το μέγεθος των απαιτήσεων σύμφωνα με τις γραμμές των GTPL και MOD.

<b>Έτη</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>Εξέλιξης</b>											
$c_{z_j}$ (GTPL)	0.50	1.13	1.50	1.88	2.25	3.00	3.75	4.50	6.00	7.50	10.50
$c_{z_j}$ (MOD)	0.25	0.38	0.50	0.63	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	2.50	3.50

Για χάρη απλότητας, συνοψίζουμε εδώ τα κύρια χαρακτηριστικά που προέκυψαν από την επισκόπηση του Ενός-Έτους. Όπως ήταν αναμενόμενο, όλες οι προσεγγίσεις (οι προσομοιώσεις αλλά και οι κλειστοί τύποι), δίνουν μια μεγαλύτερη μεταβλητότητα για την γραμμή GTPL. Πρέπει να δοθεί έμφαση στο ότι οι μεταβλητότητες (CV) που προκύπτουν από την Bootstrap διαφέρουν σημαντικά από αυτές που προκύπτουν από τον τύπο των Wüthrich και Merz, παρόλο που και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στις υποθέσεις της Chain-Ladder. Πράγματι φαίνεται ότι οι διαφορές στις μεταβλητότητες (CV) μεταξύ των μεθόδων αυξάνονται, αναλογικά με το τρίγωνο που έχει την υψηλότερη μεταβλητότητα.

Θεωρώντας την MOD παίρνουμε για την AMASES μια CV μεγαλύτερη απ' ότι στην SIFA, υπό την τεχνική της Chain-Ladder (επίσης και λόγω της σύνδεσης των δεικτών μεταβλητότητας για το DY4), ενώ το CRM παρέχει μια πολύ χαμηλή CV (1%), η οποία δεν δικαιολογείται εξολοκλήρου από το διαφορετικό μέγεθος (στην MOD ο παράγοντας του μεγέθους είναι περίπου μόνο 2 προς 1). Το μοντέλο CRM επιβεβαιώνει μια πιο λοξή (skewed) κατανομή και ένα μεγαλύτερο διαστατικό αποτέλεσμα σε σχέση με την Bootstrap. Εστιάζοντας στους δείκτες κεφαλαίων που βρήκαμε με το Εσωτερικό Μοντέλο, και την Τυποποιημένη Μέθοδο για όλες τις γραμμές που αναλύθηκαν, θα μπορούσε να παρατηρηθεί ότι η GTPL παρέχει έναν υψηλότερο δείκτη SCR απ' ότι η MTPL, εξαιτίας μιας πιο σημαντικής CV. Επιπλέον είναι αξιοσημείωτο ότι η τυποποιημένη μέθοδος (ο συντελεστής μεταβλητότητας της market-wide GTPL είναι ίσως με 11%) οδηγεί σε χαμηλότερη κεφαλαιακή απαίτηση απ' ότι το Εσωτερικό Μοντέλο (είτε με την Bootstrap είτε το CRM) για την SIFA. Μόνο η προσέγγιση USP εγγυάται μια εξοικονόμηση κεφαλαίου, εξαιτίας της πολύ χαμηλής CV. Η μεγαλύτερη εταιρεία αντίθετα έχει χαμηλότερες απαιτήσεις και με

την IM και την USP και μια μεγαλύτερη μείωση, κάνοντας χρήση μεθοδολογιών που στηρίζονται στις υποθέσεις της Chain-Ladder. Τέλος, μέσω του μετασχηματισμού  $\rho(x)$  που βασίζεται στην Λογαριθμοκανονική, επιβεβαιώνεται ότι υπάρχει ένα υποτιμημένο κεφάλαιο για τον μικρότερο ασφαλιστή.

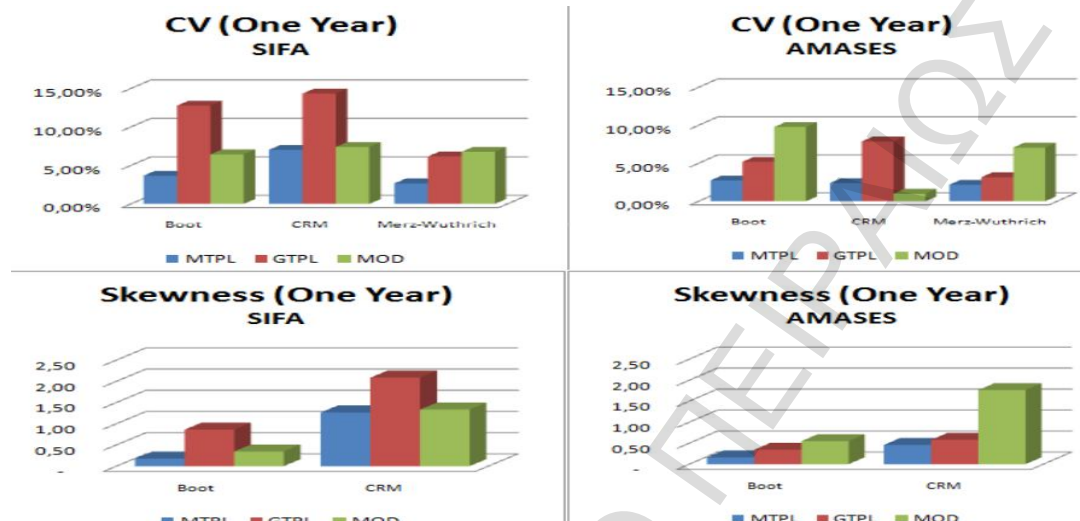
Όσον αφορά στην MOD, τα μοντέλα που βασίζονται στις υποθέσεις της Chain-Ladder (όπως η Bootstrap και ο τύπος των Wüthrich-Merz), παρέχουν υψηλότερους δείκτες SCR για την AMASES. Αντίθετα, το CRM αντανακλά το διαστατικό αποτέλεσμα, που επιστρέφει ένα αμελητέο κεφάλαιο για την AMASES και έναν δείκτη υψηλότερο απ' ότι η προσέγγιση MW για την SIFA. Η τυποποιημένη μέθοδος, που βασίζεται σε έναν συντελεστή μεταβλητότητας 10%, έχει λιγότερες απαιτήσεις (βλέπε CRM για την SIFA και Bootstrap για την AMASES).

Τέλος, παρά την υψηλότερη προεξόφληση σε σχέση με την MTPL, τα αποθέματα ζημιών των SIFA, GTPL είναι κοντά στην τιμή που παρατηρήθηκε κάτω από την τρέχουσα νομοθεσία, εξαιτίας ενός σημαντικού περιθωρίου κινδύνου (περίπου το 15% της Βέλτιστης Εκτίμησης). Η χαμηλότερη κεφαλαιακή απαίτηση οδηγεί σε ένα μειωμένο περιθώριο κινδύνου, το οποίο παρέχει μια εξοικονόμηση υποχρεώσεων για τον μεγαλύτερο ασφαλιστή (ο δείκτης του Solvency II διαιρεμένος με το Solvency I πράγματι κινείται από το 52% με την Bootstrap στο 94% με το CRM). Αναλύοντας την MOD, μπορούμε να παρατηρήσουμε και μια χαμηλότερη επίδραση της προεξόφλησης, η οποία οφείλεται στις επιχειρήσεις με μικρή ουρά (short tail business) καθώς και ένα μη αμελητέο περιθώριο κινδύνου (2-3% για την SIFA και 1-3% για την AMASES). Είναι αξιοσημείωτο ότι υπάρχει ένας δείκτης μεταξύ των υποχρεώσεων, πάντα κοντά στο 1, με χαμηλότερες τιμές μόνο για την SIFA (με το μοντέλο Bootstrap) και για την AMASES (με το CRM).

#### 4.5 Σύγκριση μεταξύ των LoBs και τα αποτελέσματα μετά το άθροισμα

##### ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΝΟΣ ΕΤΟΥΣ:

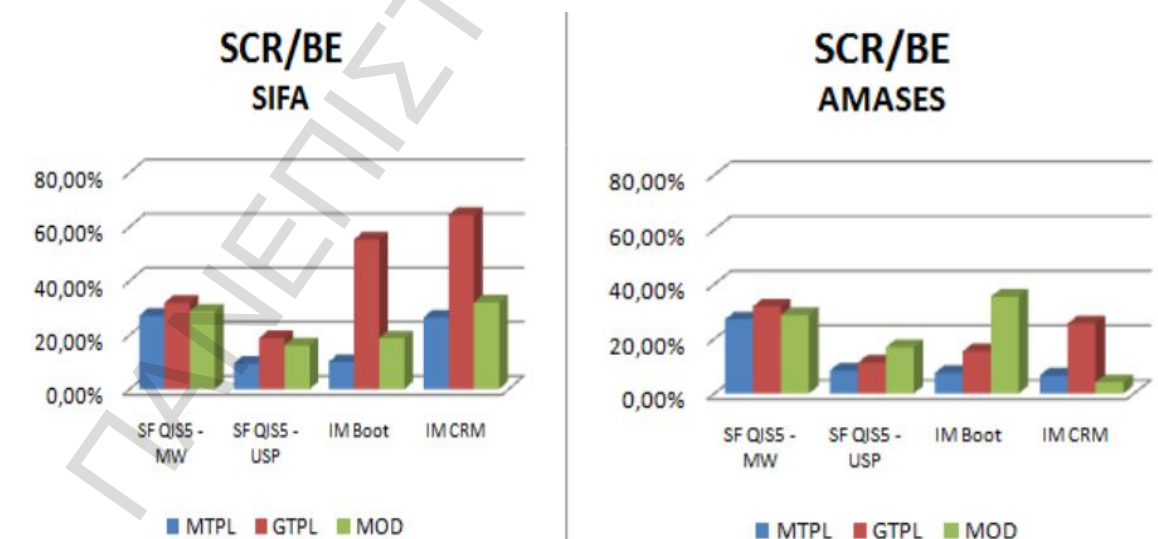
**Σχήμα 8.** Μεταβλητότητα και ασυμμετρία για τις δύο εταιρείες στον ορίζοντα του ενός έτους.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

##### SCR ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ:

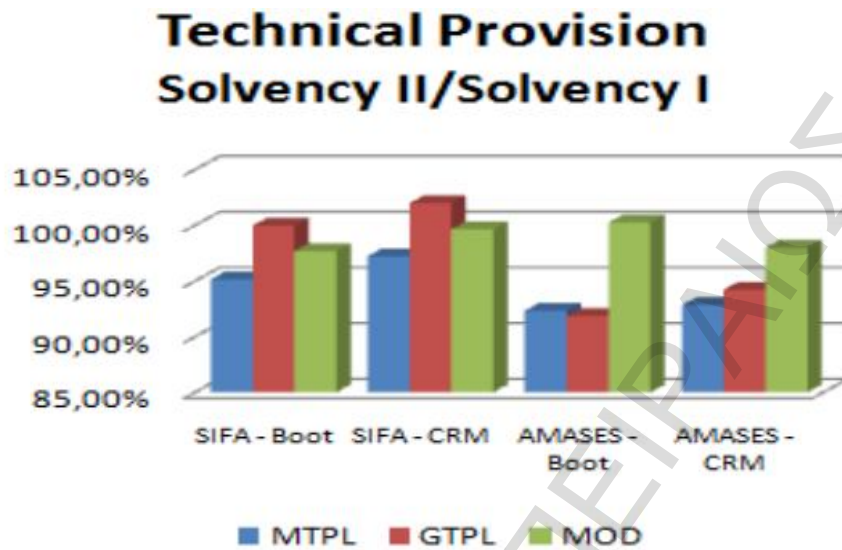
**Σχήμα 9.** Δείκτες SCR προς Βέλτιστη Εκτίμηση για τις δύο εταιρείες.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

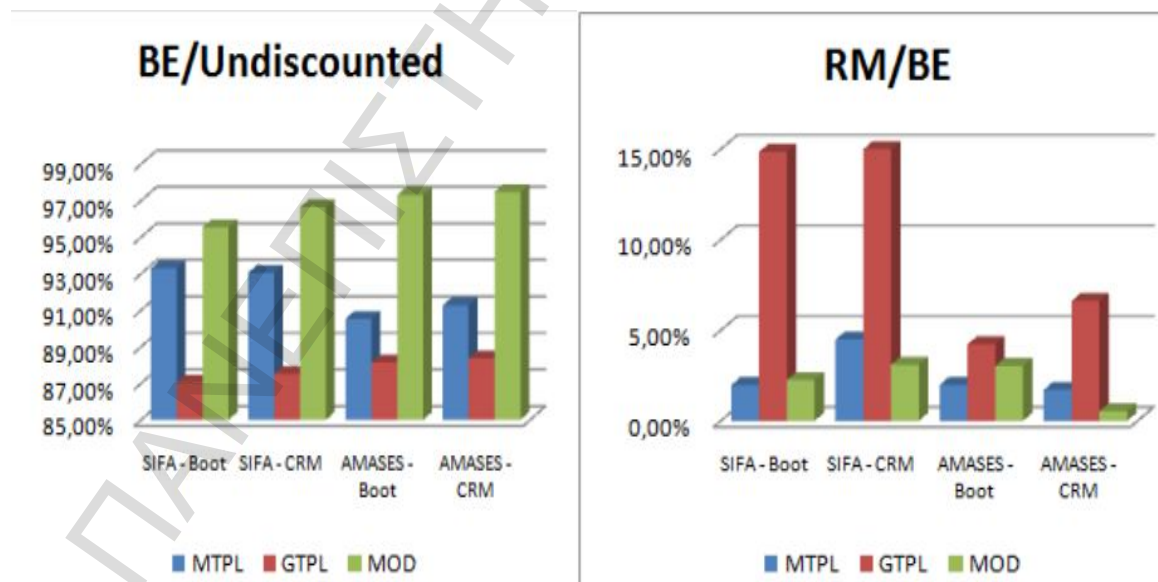
### ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ:

**Σχήμα 10.** Διαγράμματα που αφορούν στις Τεχνικές Προβλέψεις των δύο εταιρειών και συγκρίνουν το Solvency II με το Solvency I.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

**Σχήμα 11.** Μη προεξοφλημένη BE και δείκτης RM προς BE, με τις μεθόδους Bootstrap και CRM για τις δύο εταιρείες.



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.



## ΣΥΝΟΛΙΚΟ SCR:

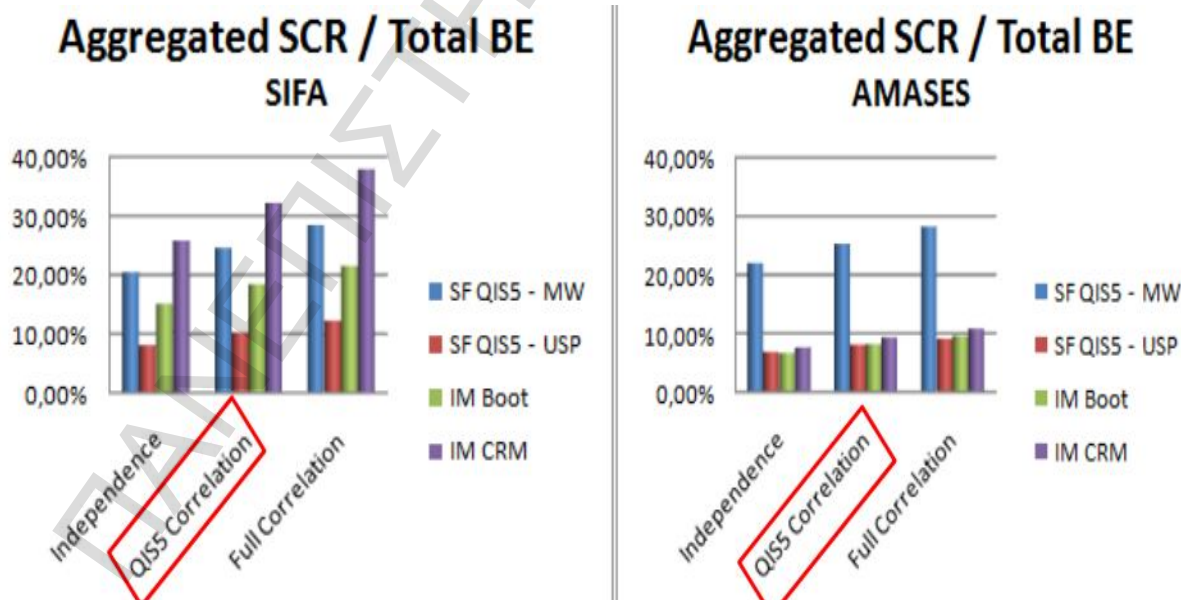
Το συνολικό SCR έχει προσδιοριστεί για κάθε επιχείρηση χρησιμοποιώντας έναν γραμμικό αθροιστικό τύπο, ο οποίος παρέχεται από το QIS 5 (Savelli & Clemente, 2010).

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο πώς ο μεγάλος ασφαλιστής έχει μια σημαντική μείωση της κεφαλαιακής απαίτησης, σύμφωνα με την προσέγγιση MW της τυποποιημένης μεθόδου, ενώ ο SIFA ασφαλιστής έχει μια συγκρίσιμη μείωση μόνο για την SF-USP προσέγγιση.

**Σχήμα 12.** Η κατανομή του αποθέματος των ζημιών για τα ποσά των LoBs, για τις δύο εταιρείες.

Loss reserve distribution for amount of the LoBs				
	MTPL	GTPL	MOD	Total
SIFA	69,7%	24,1%	6,2%	100,0%
AMASES	76,6%	22,3%	1,1%	100,0%

	MTPL	GTPL	MOD
MTPL	1	0.5	0.5
GTPL	0.5	1	0.25
MOD	0.5	0.25	1



Πηγή: Savelli & Clemente , 2010.

#### 4.6 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με όλα όσα προηγήθηκαν, το μοντέλο CRM φαίνεται να αντιπροσωπεύει ένα έγκυρο στοχαστικό μοντέλο, το οποίο πρέπει συγκαταλεχθεί στα μοντέλα που προτείνονται αυτή τη στιγμή από την αναλογιστική βιβλιογραφία. Οι παράμετροι του μοντέλου μπορούν να εκτιμηθούν εύκολα χρησιμοποιώντας απαιτήσεις από την βάση δεδομένων (DataBase) των απαιτήσεων καθώς και από το ντετερμινιστικό μοντέλο “Fisher Lange”, το οποίο βασίζεται στην εκτίμηση διακριτού αριθμού απαιτήσεων που πρόκειται να πληρωθούν αλλά και στα μελλοντικά μέσα κόστη. Επιπλέον, το ίδιο μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και με διαφορετικές μεθόδους, πέραν της Fisher Lange, παρέχοντας διακριτές εκτιμήσεις είτε για τον αριθμό των μελλοντικών πληρωμών είτε για το μέσο κόστος των απαιτήσεων (δηλ. χρησιμοποιώντας άλλες οριακές μεθόδους μέσου κόστους) (Savelli & Clemente, 2011).

Μερικές μελέτες περιπτώσεων δείχνουν ότι το CRM έχει μια διαφορετική συμπεριφορά όσον αφορά στην Bootstrapping, σύμφωνα με την γραμμή της επιχείρησης που αναλύεται. Γενικά, οι συντελεστές μεταβλητότητας και η ασυμμετρία της κατανομής του αποθέματος των απαιτήσεων είναι πιο ευαίσθητες στο μέγεθος του ασφαλιστή όταν εφαρμόζεται το CRM. Όσον αφορά στην εκτίμηση του κεφαλαίου, η market-wide σχέση είναι συνήθως υψηλότερη από τα IM αποτελέσματα. Μόνο η GTPL παρέχει υψηλότερο δείκτη κεφαλαίου από αυτόν που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τους παράγοντες μεταβλητότητας της CEIOPS. Η USP προσέγγιση εγγυάται μια εξοικονόμηση κεφαλαίου και το χαμηλότερο συσσωρευμένο δείκτη. Επίσης το φαινόμενο της προεξόφλησης οδηγεί σε τεχνικές προβλέψεις, οι οποίες έχουν εκτιμηθεί στα πλαίσια του Solvency II, χαμηλότερες απ’ ότι το μη-προεξοφλημένο απόθεμα, ενώ το πολύ υψηλό περιθώριο κινδύνου αντιστρέφει το αποτέλεσμα σε ορισμένες περιπτώσεις (πχ στην γραμμή GTPL).

Παρ’ όλα αυτά κάποια ανάλυση ευαισθησίας αποδεικνύει την συνάφεια μιας αξιόπιστης βαθμονόμησης παραμέτρων και της αυστηρής σχέσης μεταξύ της αβεβαιότητας των παραμέτρων και της μεταβλητότητας ολόκληρου του αποθέματος των απαιτήσεων. Συγκεκριμένα, πρέπει να δοθεί έμφαση στην εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της δομής μεταβλητής  $q$ , προκειμένου να ληφθεί ορθά η συσχέτιση μέσα στο τρίγωνο. Ο συντελεστής μεταβλητότητας της συνολικής run-off κατανομής του

αποθέματος των απαιτήσεων επηρεάζεται σημαντικά από αυτή την τιμή. Θεωρούμε την εκτίμηση των συντελεστών μεταβλητότητας  $c_{z_j}$  (που αποκτήθηκαν από την DataBase των απαιτήσεων της εταιρείας και διαφέρουν για κάθε έτος εξέλιξης) ως βασικό ζήτημα. Όπως γνωρίζουμε τα δεδομένα αυτά είναι διαθέσιμα κυρίως σε έναν εσωτερικό αναλογιστή, ενώ είναι μάλλον δύσκολο να τα συλλέξουμε από έναν εξωτερικό αναλογιστή (πχ που συμμετέχει σε μια ανάλυση αξιολόγησης). Αυτή η προοπτική ίσως προκαλέσει μια μικρή διάδοση της προσέγγισης, συγκρινόμενη με άλλες μεθόδους που βασίζονται κυρίως σε αθροιστικά run-off τρίγωνα.

Η προσέγγιση του ενός έτους αντιπροσωπεύει μια προσέγγιση-κλειδί που πρέπει να μελετηθεί καθολικά, προκειμένου να κάνουμε εκτιμήσεις συνεπείς με το Solvency II. Όμως, σύμφωνα πάντα με τα λεγόμενά μας, η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιούμενη για το απόθεμα κινδύνου, ενδεχομένως να εγγυάται μια μεγάλη συνοχή με το μοντέλο του ασφαλιστρού κινδύνου, όταν εφαρμόζεται. Επιπροσθέτως, πρέπει να σημειωθεί και η ανάγκη μιας διεθνούς βάσης δεδομένων στα run-off τρίγωνα και στο ότι τα αποτελέσματα που δίνονται για τις 3 LoBs πρέπει να λαμβάνονται με μεγάλη προσοχή και πολυάριθμες αναλύσεις πρέπει να μεταφέρονται στην πράξη για μια συνεπή εκτίμηση των κύριων παραμέτρων. Περαιτέρω βελτιώσεις της έρευνας θα θεωρήσουν μεθόδους για να εισάγουν τον στοχαστικό πληθωρισμό. Κατά δεύτερον εμφανίζεται ένα βασικό ζήτημα για την συλλογή της μεταβλητότητας μέσα στο τρίγωνο, το οποίο παρέχεται από το καινούριο Απευθείας Σύστημα Αποζημίωσης το οποίο είναι σε ισχύ από το 2007 για την MTPL, όπως προβλέπεται από την ιταλική νομοθεσία. Τέλος η ανάλυση πρέπει να συνεχιστεί προκειμένου να αξιολογήσουμε την επίδραση του παράγοντα της ουράς και στην προσέγγιση του ενός έτους και στο συνολικό run-off.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική

- [1] Πιτσέλης Γ. (2012), *Θεωρία Τιμολόγησης, Σημειώσεις*(Πανεπιστήμιο Πειραιώς).
- [2] Χατζηβασίλογλου Ι. (2012), *Διοικητική Επιχειρησιακού Κινδύνου και Αναλογισμός, Σημειώσεις* (Πανεπιστήμιο Πειραιώς).

### Ξένα

- [1] Aitchison J. & Brown J.A.C. (1969), *The Lognormal Distribution With Special Reference to its uses in Economics*, Cambridge University Press.
- [2] Alai D. H., Merz M., Wüthrich M.V. (2010), *Mean square error of prediction in the Bornhuetter-Ferguson claims reserving method :Revisited*, *Annals of Actuarial Science*,**4**, pp. 7-17.
- [3] Badolatti E. (2009), *XVI Convegno Di Teoria Del Rischio*, pp. 60-87.
- [4] Barnett G. & Zenwirth B. (2000), *Best Estimates for Reserve*, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, **87**, pp. 245-321.
- [5] Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. (1984), *Risk Theory, The Stochastic Basis of Insurance*, Third Edition.
- [6] Bühlmann H., De Felice M., Gisler A., Moriconi F., Wüthrich M.V. (2009), *Recursive Credibility Formula for Chain Ladder Factors and The Claims Development Results*, *Astin Bulletin*, **39**, pp. 275-304.
- [7] Bühlmann H. (1970), *Mathematical Methods of Risk Theory*, Springer-Verlag.
- [8] CEIOPS (2009), *Consultation Paper no.42: "Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing measures for Solvency II. Article 85(d)-Calculation of Risk Margin"*, CEIOPS-CP, 42/09.

- [9] Cummins J.D. & Wiltbank L.J. (1983), “*Estimating the Total Claims Distribution Using Multivariate Frequency and Severity Distributions*”, Journal of Risk and Insurance, **50**, pp. 377.
- [10] D’Arcy S.P. (1988), “*Revisions in Loss Reserving Techniques Necessary To Discount Property Liability Loss Reserves*”, pp. 75-97.
- [11] Daykin C., Pentikäinen T., Pesonen M. (1994), *Practical Risk Theory for actuaries*, Monographs on Statistics and Applied Probability, **53**, Chapman & Hall, London.
- [12] Diers D. (2009), *Stochastic Re-Reserving in multi-year internal models*, Astin Colloquium.
- [13] England P. & Verall R. (1999), *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, Insurance Mathematics and Economics, pp. 281-293.
- [14] England P. & Verall R. (2006), *Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance*, Annals of Actuarial Science, **1**, pp. 221-270.
- [15] England P. & Verall R. (2000), *Comments on: “A comparison of stochastic models that reproduce chain ladder reserve estimates”*, by Mack and Venter, Insurance Mathematics and Economics, **26**, pp. 109-111.
- [16] Fisher W.H. & Lange J.T. (1973), *Loss Reserve Testing: a report year approach*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, **60**, pp. 189-207.
- [17] Havning M. & Savelli N. (2005), *Risk-based capital requirements for property and liability insurers according to different reinsurance strategies and the effect of profitability*, ICFAI Journal of Risk & Insurance, **2**, Andhra Pradesh (India).

- [18] Hayne R.M. (1989), *Application of Collective Risk Theory to Estimate Variability in Loss Reserves*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, **76**, pp. 77-110.
- [19] Hayne R.M. (2003), *Measurement of Reserve Variability*, Casualty Actuarial Society Forum, pp. 141-172.
- [20] IAA (2004), *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, Research Report of The Insurer Solvency Assessment Working Part.
- [21] Kahn P.M (1962), *An introduction to Collective Risk Theory and its application to Stop-Loss Reinsurance*, Transactions of Society Of Actuaries, **14**, pp. 400-401.
- [22] Mack T. (2008), *The Prediction Error of Bornhuetter-Ferguson*, Astin Bulletin, **38**, pp.87-103.
- [23] Mack T. (1993), *Distribution-free calculation of the standard error of the chain-ladder reserve estimates*, Astin Bulletin, **23**, pp. 213-225.
- [24] Meyers G. (2007), *Estimating Predictive Distributions for Loss Reserve Models*, Variance, **1**, pp. 40-52.
- [25] Meyers G. (2008), *Stochastic Loss Reserving with the Collective Risk Model*, Casualty Actuarial Society Forum, pp. 240-271.
- [26] Meyers G., Klinker F., Lalonde D. (2003), *The Aggregation and Correlation of Insurance Exposure*, Casualty Actuarial Society, pp. 69-151.
- [27] Meyers G. & Heckman P. (1983), *The Calculation of Aggregate Loss Distributions from Claim Severity and Claim Count Distributions*, pp. 22-127.
- [28] Meyers G. & Schenker N. (1983), "Parameter Uncertainty in The Collective Risk Model", **70**, pp. 11.

- [29] Moriconi Franco & Massimo De Felice (2006), *Assessing Risk Margins in P&C Loss Reserving*, DGVFM Scientific Insurance Day.
- [30] Ohlsson E. & Lauzenings (2008), *The One-Year Non-Life Insurance Risk*, Astin Colloquium, Manchester.
- [31] Pinheiro P.J.R., Andrade e Silva J.M., Centeno M.L.C. (2003), *Bootstrap methodology in claim reserving*. *Journal of Risk and Insurance*, **70**, pp. 701-714.
- [32] Renshaw A.E. & Verall P. (1998), *A stochastic model underlying the Chain-Ladder technique*, *British Actuarial Journal* 4, pp. 903-923.
- [33] Saluz A. Gisler A., Wüthrich M.V. (2010), *Development Pattern and Prediction Error for the Stochastic Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method*, preprint.
- [34] Salzmann R. & Wüthrich M.V (2010), *Cost-of-Capital Margin for a general insurance liabilities run-off*, *Astin Bulletin*.
- [35] Savelli N. & Clemente G.P. (2010), *A Collective Risk Model for Claims Reserve Distribution*, Istituto Italiano Degli Attuari.
- [36] Savelli N. & Clemente G.P. (2011), *Stochastic Claim Reserving based on CRM for Solvency II purposes*.
- [37] Seal H.L. (1969), *Stochastic Theory of a Risk Business* , Wiley.
- [38] Taylor G. (2009), *Chain-Ladder forecast efficiency*, Research Paper n.183, University of Melbourne.

- [39] Verall R. (2004), *A Bayesian generalized linear model for the Bornhuetter-Ferguson method of claims reserving*, North America Actuarial Journal, **8**, pp. 67-89.
- [40] Verall R. (2007), *Bootstrap Estimation of the Predictive Distributions of Reserves using Paid and Incurred Claims*, Casualty Actuarial Society, pp 121-135.
- [41] Wüthrich M.V. (2010), *RunOff of the Claims Reserve Uncertainty in Non-Life Liabilities: a Case Study*, Preprint.
- [42] Wüthrich M. & Zurich ETH (2008), *Modelling the Claims Development Results for Solvency Purposes*, Chain Ladder Model, Cass E-Forum Fall, pp. 542-658.
- [43] Wüthrich M.V. & Bühlmann H. (2009), *The One-Year Run-Off Uncertainty for Discounted Claims Reserves*, preprint.
- [44] Wüthrich M.V. & Merz M. (2008), *Modelling the in the Claims Development Result for the Solvency Purposes*, Cass E-Forum, pp. 542-658.
- [45] Wüthrich M.V., Merz M., Lysenko N. (2009), *Uncertainty in the claims development result in the chain-ladder method*, Scandinavian Actuarial Journal, **1**, pp. 63-84.