ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

≪ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ≫

ΛΑΖΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ – ΜΧΡΗ1307

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΒΟΛΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΜΕΛΗ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ : ΕΠΙΚ.ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δ.ΒΟΛΙΩΤΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Γ.ΔΙΑΚΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΛΕΚΤΟΡΑΣ Μ.ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015

Λέξεις κλειδιά: Αγορές χρεογράφων, Διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων, Ισορροπία, Αντιστάθμιση κινδύνου, Ασφάλιση χαρτοφυλακίου, Κόστη συναλλαγών

Η διατριβή με τίτλο « Θεωρία Διάταξης Χαρτοφυλακίων » πρωτίστως παραθέτει, μέσα από την αλγεβρική σκοπιά, την μεθοδολογία εκείνη που εδραιώνει την ύπαρξη της διάταξης κυριαρχίας σε μη μηδενικά χαρτοφυλάκια που εμπεριέχουν αριθμήσιμο αριθμό χρεογράφων, με στόχο την συμβολή στις επενδυτικές επιλογές των οικονομικά δρώντων. Στην συνέχεια επιχειρείται η εφαρμογή της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων, που παρατέθηκε, στην επίλυση του προβλήματος εύρεσης του χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου. Του χαρτοφυλακίου, δηλαδή, εκείνου του οποίου η απόδοση ‘’ κυριαρχεί ‘’ της απόδοσης που επιθυμεί να διασφαλίσει ο επενδυτής με το μικρότερο δυνατό κόστος. Η παράθεση πρακτικών εφαρμογών, τόσο σε πλήρεις όσο και σε μη-πλήρεις αγορές, συμβάλλει περαιτέρω στην κατανόηση της συνεισφοράς της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων στην επίλυση του προβλήματος αυτού. Τέλος, στοχεύοντας στην ανάλυση των συνεπειών του κόστους συναλλαγών στην λειτουργία των αγορών, παραθέτεται μια εναλλακτική προσέγγιση της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων, προσαρμοσμένη στις προσωπικές προτιμήσεις των επενδυτών και στην ενδεχόμενη αλλαγή των προτιμήσεων, αυτών, με την είσοδο του συναλλακτικού κόστους. Η ανάλυση, κι εδώ, μιας σειράς παραδειγμάτων οδηγεί σε συμπεράσματα για τον ρόλο του κόστους συναλλαγών τόσο στην επιλογή χαρτοφυλακίου από τον επενδυτή όσο και στον καθορισμό του χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Το οικονομικό μοντέλο που θα μελετήσουμε μπορεί να θεωρηθεί ως σύμπτυξη δύο ξεχωριστών εννοιών στην οικονομική θεωρία. Πρώτον, της έννοιας της γενικής ισορροπίας (general equilibrium), που χρονολογείται από το 1874 και το Walras' Eléments d'Economie Politique Pure [36] και δεύτερον της θεωρίας του κεφαλαίου και του επιτοκίου που πηγάζει από τις μελέτες του Irving Fisher (1906,1907,1930) [12, 13, 14]. Οι δύο αυτοί κλάδοι της οικονομικής θεωρίας έχουν εστιάσει σε σχετικά διαφορετικά σημεία του υποκείμενου προς μελέτη οικονομικού μοντέλου. Στην προσέγγιση της γενικής ισορροπίας το ενδιαφέρον στρέφεται στις κατανομές, δηλαδή στις συνθήκες κάτω από τις οποίες υφίσταται ισορροπία, καθώς και στις ευημερείς ιδιότητες αυτής ενώ στη θεωρία του κεφαλαίου το ενδιαφέρον στρέφεται στις τιμές των χρεογράφων της ισορροπίας καθώς και στη σχέση τους με τα χαρακτηριστικά του κινδύνου που επηρεάζουν τις ροές των πληρωμών τους. Εμείς θα επικεντρωθούμε στην ιστορική εξέλιξη του μοντέλου της γενικής ισορροπίας, αφήνοντας προσωρινά στην άκρη την συμβολή της οικονομικής θεωρίας στην τιμολόγηση του κινδύνου των χρεογράφων. Δεδομένου ότι τα μοντέλα γενικής ισορροπίας περιλαμβάνουν συνήθως περισσότερα από ένα καλώς ορισμένα μοντέλα, για να τοποθετήσουμε το μοντέλο μας στη σωστή του διάσταση θα ήταν ορθό να συμπεριλάβουμε κάποιες ιστορικές εξελίξεις του μοντέλου πολλαπλών αγαθών.

Ο Walras (1874) συνέλαβε το μοντέλο της γενικής ισορροπίας του ως ένα πραγματικό, διαχρονικό μοντέλο στο οποίο τόσο ο χρόνος όσο και το κεφάλαιο, διαδραμάτισαν έναν ουσιαστικό ρόλο. Τελικά, κάποιες δυσκολίες ως προς την αναλυτικότητα τον ανάγκασαν να εστιάσει την προσοχή του σε μια ειδική ισορροπία και συγκεκριμένα σε μια σταθερή κατάσταση, στην οποία όλες οι τιμές των χρεογράφων παραμένουν αμετάβλητες και το μόνο στοιχείο το οποίο συνδέει παρακείμενες περιόδους είναι το επιτόκιο. Από πρακτική άποψη, αυτό είναι ουσιαστικά ένα μοντέλο δύο περιόδων χωρίς αβεβαιότητα. Για μεγάλο χρονικό διάστημα δεν καταβλήθηκαν αξιόλογες προσπάθειες επέκτασης της ανάλυσης του Walras έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ρητή παρουσία της αβεβαιότητας. Ο Hicks στο βιβλίο του ''Αξία και Κεφαλαίο'' (1939) [27] επέκρινε αυστηρά την ανάλυση του Walras, καθώς και άλλοι κλασσικοί οικονομολόγοι, χαρακτηρίζοντάς την ως παραπλανητική μέθοδο ανάλυσης της διαχρονικής ισορροπίας της οικονομίας. Ενώ ο Hicks στο ''Αξία και Κεφάλαιο'' παρέχει μία διορατική εικόνα για την έννοια που σήμερα θα ονομάζαμε ισορροπία ορθολογικών προσδοκιών (rational expectation equilibrium) και για την γενικότερη ισορροπία, δεν προσέφερε καμία μαθηματική επέκταση στο μοντέλο του Walras έτσι ώστε να συμπεριληφθεί η αβεβαιότητα.

Το πρώτο και αποφασιστικό βήμα για την εισαγωγή της αβεβαιότητας στο μοντέλο της γενικής ισορροπίας έγινε από τον Arrow (1953) [5]. Η βασική ιδέα βασιζόταν στην εισαγωγή της θεωρίας πιθανοτήτων στην ανάλυση του μοντέλου, δηλαδή η αντίληψη ότι μια τυχαία μεταβλητή καθορίζεται από τις καταστάσεις του περιβάλλοντος. Ακριβώς όπως η ισορροπία μπορεί να επεκτείνεται διαχρονικά προβάλλοντας το ίδιο εμπόρευμα σε διαφορετικές ημερομηνίες ως ξεχωριστό εμπόρευμα, έτσι και η βεβαιότητα μπορεί να επεκταθεί σε αβεβαιότητα αναγνωρίζοντας το ίδιο εμπόρευμα σε διαφορετικές, όμως, καταστάσεις ως ξεχωριστό. Αυτή η απλή ιδέα επιτρέπει στο υπόδειγμα γενικής ισορροπίας να επεκταθεί, μέσω του χρόνου και της αβεβαιότητας, σε μια ενδεχόμενη ισορροπία της αγοράς που παρουσιάζεται με ένα καλώς ορισμένο μοντέλο δύο περιόδων.

Η εισαγωγή πιο ρεαλιστικών οικονομικών χρεογράφων κυρίως ομολόγων και συμβάσεων ιδιωτικών κεφαλαίων των επιχειρήσεων στην βιβλιογραφία έγινε την δεκαετία του 1950 και έγινε ο προπομπός της θεωρίας της γενικής ισορροπίας. Ο Diamond (1967) [8] ήταν ο πρώτος που μοντελοποίησε τις μη-πλήρεις αγορές σε ένα καλώς ορισμένο μοντέλο δύο περιόδων της παραγωγικής οικονομίας, στην οποία οι μετοχές των επιχειρήσεων διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο. Λόγω της αυξανόμενης ανάληψης καινούργιων τεχνολογιών από τις επιχειρήσεις (πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα) το μοντέλο του Diamond επέδειξε τόσο αποτελεσματικότητα όσο και ομοφωνία μεταξύ των μετόχων των επιχειρήσεων σχετικά με τα σχέδια παραγωγής που θα πρέπει να επιλέγονται από τις επιχειρήσεις. Αυτό οδήγησε σε έντονες συζητήσεις την δεκαετία του 1970 σχετικά με το πρόβλημα της αντικειμενικής λειτουργίας της επιχείρησης όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις.

Το άρθρο του Diamond ήταν το πρώτο από μια σειρά άρθρων στις αρχές της δεκαετίας του 1970 για την ισορροπία σε διαδοχικές οικονομίες στις οποίες οι οικονομικά δρώντες (agents) έχουν περιορισμένη δυνατότητα να μεταφέρουν εισοδήματα σε όλες τις παρακείμενες καταστάσεις. Σ’ ένα τέτοιο περιβάλλον οι οικονομικά δρώντες πρέπει να δημιουργήσουν προσδοκίες σχετικά με τις μελλοντικές τιμές και τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών τίτλων. Δύο προσεγγίσεις έχουν υιοθετηθεί για την περάτωση ενός τέτοιου μοντέλου μέσα από την έννοια της ισορροπίας. Το πρώτο υποκινείται από την αντίληψη ότι οι οικονομικά δρώντες, όντας φαινομενικά λογικοί, συναντούν δυσκολίες στην ορθή πρόβλεψη μελλοντικών μεταβλητών. Αυτό οδηγεί στην έννοια της προσωρινής ισορροπίας, στην οποία οι άνθρωποι αυτοί δέχονται εξωγενώς κανόνες με τους οποίους δημιουργούν τις προσδοκίες τους συναρτήσει παλιών και καινούργιων μεταβλητών. Οι προσδοκίες αυτές ονομάζονται προσαρμοστικές προσδοκίες, τις οποίες μόνο οι τρέχουσες αγορές δικαιούνται να απορρίψουν. Η ιδέα αυτή επισημοποιήθηκε πρωταρχικά από τον Stigum (1969) [35] και τον Grandmont (1970, 1974) [19,20]. Μια ανάλυση της προσωρινής ισορροπίας των χρηματοπιστωτικών αγορών δύο περιόδων κατά την οποία οι οικονομικά δρώντες έχουν διαφορετικές προσδοκίες για τις μελλοντικές αποδόσεις των χρεογράφων παρασχέθηκε από τον Green (1973) [21] για την περίπτωση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σε ένα μοντέλο πολλαπλών αγαθών και από τον Hart (1974) [25] για την δομή, γενικά, των χρεογράφων σε ένα καλώς ορισμένο μοντέλο. Το κύριο συμπέρασμα των άρθρων αυτών και γενικότερα της προσωρινής ισορροπίας είναι ότι ισορροπία υφίσταται δεδομένου ότι οι οικονομικά δρώντες δεν έχουν πολύ διαφοροποιημένες προσδοκίες όσον αφορά τις μελλοντικές απολαβές των χρεογράφων. Η υπόθεση για απουσία ευκαιριών για arbitrage είναι επίσης μια απαραίτητη προϋπόθεση για ισορροπία στα άρθρα αυτά παρόλο που εδώ εκφράζεται με διαφορετικό τρόπο, καθώς τα άρθρα αυτά περιγράφουν τις αποδόσεις των χρεογράφων χρησιμοποιώντας κατανομές πιθανοτήτων.

Η δεύτερη προσέγγιση για τις διαδοχικές οικονομίες υπαγορεύεται από την ιδέα ότι οι οικονομικά δρώντες δεν κάνουν συστηματικά λάθη, εν συντομία δηλαδή ότι μπορούν να προβλέψουν σωστά μελλοντικές μεταβλητές. Αυτό οδήγησε στην έννοια της ισορροπίας η οποία ονομάστηκε ισορροπία ορθολογικών προσδοκιών στην οποία οι αναμενόμενες τιμές είναι οι τιμές ισορροπίας σε κάθε μελλοντική κατάσταση. Αυτό το μοντέλο της ισορροπίας το οποίο υπονοήθηκε από τον Arrow (1953) στο άρθρο του, εισήχθη για πρώτη φορά ρητά από τον Radner (1972) [31] για μια οικονομία Τ-περιόδων με άμεσες αγορές και ένα σύνολο από συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης εμπορευμάτων σε κάθε κατάσταση. Για να αντιπαραβάλλει την έννοια της ισορροπίας από εκείνη της προσωρινής ισορροπίας, ο Radner αναφέρεται σε αυτήν ως μια ισορροπία σχεδίων, τιμών και προσδοκιών. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι και ο Hahn (1971,1973) [22,23] χρησιμοποίησε την ίδια έννοια της ισορροπίας σε ένα μοντέλο με απουσία αβεβαιότητας. Στην περίπτωση μιας οικονομίας ισοτιμιών ο Radner έδειξε πως ισορροπία υπάρχει εάν επιβάλλονται περιορισμοί στις θέσεις πώλησης των χαρτοφυλακίων των επενδυτών. Ο Radner συνάντησε δυσκολίες στο να αποδείξει την ύπαρξη ισορροπίας σε μια οικονομία στην οποία υπάρχουν χρηματοπιστωτικές αγορές, δυσκολίες που συνδέονται με την επιλογή των συναρτήσεων για τις επιχειρήσεις όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις.

Σε ένα άρθρο του ο Hart (1975) [26] προσπαθώντας να προχωρήσει στην ανάπτυξη της θεωρίας για τις μη-πλήρεις αγορές έδειξε, μέσω παραδειγμάτων, τις δυσκολίες του μοντέλου ισορροπίας που εισήγαγε ο Radner, ακόμα και για την περίπτωση της ανταλλακτικής οικονομίας. Συγκεκριμένα, σε ότι αφορά την ύπαρξη μιας ισορροπίας, έδειξε ότι μια ισορροπία μπορεί να εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό στα αυθαίρετα όρια που επιβάλλονται στα χαρτοφυλάκια των επενδυτών καθώς η ύπαρξη ισορροπίας μπορεί να μην είναι δυνατή χωρίς την επιβολή ορίων. Σε ένα μοντέλο πολλαπλών αγαθών όπου οι αποδόσεις των χρεογράφων εξαρτώνται από τις άμεσες τιμές των εμπορευμάτων σε μεταγενέστερες καταστάσεις, διακυμάνσεις στις τιμές αυτές μπορεί να προκαλέσουν αλλαγές στον βαθμό του λεγόμενου πίνακα αποδόσεων. Αν δεν υπάρχουν όρια στα χαρτοφυλάκια των επενδυτών , οι αλλαγές αυτές μπορεί να προκαλέσουν ασυνέχειες στις συναρτήσεις τους και κατά συνέπεια να οδηγήσουν σε μη ύπαρξη ισορροπίας. Ο Hart υποστήριξε έντονα πως η επιβολή ορίων στα χαρτοφυλάκια των επενδυτών είναι μια υπόθεση που μπορεί να μην οδηγήσει απαραίτητα στην δημιουργία ενός ικανοποιητικού μοντέλου. Ως αποτέλεσμα, στην μετέπειτα έρευνα του Radner για τις μη-πλήρεις αγορές έχουν υιοθετηθεί δύο διαφορετικές στρατηγικές για την αποφυγή του προβλήματος των ασυνεχειών στις απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου των επενδυτών. Η πρώτη και η απλούστερη είναι να επικεντρωθούμε στα χρεόγραφα εκείνα τα οποία δεν επηρεάζουν τον βαθμό του πίνακα αποδόσεων. Η δεύτερη στρατηγική είναι να δουλέψουμε απευθείας πάνω σε ένα μοντέλο στο οποίο να επιτρέπονται όλα τα χρεόγραφα με σκοπό να δείξουμε ότι οι οικονομίες εκείνες, στις οποίες δεν δύναται να υπάρξει ισορροπία αποτελούν εξαιρέσεις και συνεπώς μπορούν να αγνοηθούν. Αυτή η στρατηγική βασίζεται στις συνεισφορές των Duffie-Shafer (1985) [9], Husseini-Lasry-Magill (1990) [29] Hirsch-Magill-Mas-Colell (1990) [28] και Geanakoplos-Shafer (1990) [18].

Μία σύνδεση μεταξύ των μοντέλων προσωρινής ισορροπίας και των μοντέλων ορθολογικών προσδοκιών δίνεται από άρθρο του Werner (1987) [37]. Το μοντέλο του καλύπτει τα μοντέλα προσωρινής ισορροπίας των Green (1972) [21], Hart (1974) [25] και Hammond (1983) [24] αλλά περιορίζεται στο καλώς ορισμένο μοντέλο ορθολογικών προσδοκιών δύο περιόδων. Επιγραμματικά, ο Werner παρουσιάζει τις απαραίτητες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται όταν δεν έχουμε ορθολογικές προσδοκίες για ισορροπία χωρίς ύπαρξη arbitrage. Όταν οι επενδυτές έχουν διαφορετικές προσδοκίες για τις μελλοντικές αποδόσεις των χρεογράφων, οι τιμές τους, απαλλαγμένες από ευκαιρίες για arbitrage, γίνονται συγκεκριμένες για κάθε επενδυτή ξεχωριστά. Ο Werner μας δείχνει ότι ισορροπία υφίσταται εάν η τομή των συνόλων που περιέχουν τις τιμές αυτές των χρεογράφων όλων των οικονομικά δρώντων είναι ένα μη κενό σύνολο. Για τους περισσότερους που υποστηρίζουν το μοντέλο αυτό η παραπάνω συνθήκη θεωρείται, επιπλέον, αναγκαία.

Η αντίληψη περί της απουσίας του arbitrage εμφανίζεται ακριβώς από την στιγμή που εισάγονται τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια. Αποτελεί, χωρίς υπερβολή, μια από τις παλαιότερες και πιο βασικές αρχές της οικονομικής θεωρίας. Η αντίληψη αυτή έχει, από καιρό, χρησιμοποιηθεί ως μία μέθοδος δημιουργίας σχέσεων μεταξύ των τιμών διάφορων εμπορευμάτων ή συμβολαίων. Πρόωρες, επίσημες συζητήσεις έγιναν για πρώτη φορά από τους Cournot (1838) [7] και Irving Fisher (1896) [11]. Όπως ο Samuelson (1957) [34] υποστήριξε σε ένα άρθρο του πάνω αντίληψη της χωροταξίας των τιμών, οι διαφορές των τιμών του ίδιου εμπορεύματος σε διαφορετικές καταστάσεις πρέπει να σχετίζονται με τα κόστη μεταφοράς του εμπορεύματος μεταξύ των καταστάσεων. Εφαρμόζοντας ένα μοντέλο με διαχρονικές σχέσεις μεταξύ των τιμών, βλέπουμε ότι οι διαφορές στις τιμές σχετίζονται με τα έξοδα μεταφοράς και έτσι οδηγούμαστε στην απαρχή της θεωρίας των κερδοσκοπικών τιμών. Αν εξαιρέσουμε κάποιες απλές εφαρμογές των θεωριών αυτών, για παράδειγμα το ότι η αναλογία της προθεσμιακής συναλλαγματικής ισοτιμίας μεταξύ των δύο νομισμάτων θα πρέπει να ισούται με την αναλογία των επιτοκίων τους, η μελέτη πάνω στις σχέσεις μεταξύ των τιμών αγνοήθηκε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα από τους οικονομολόγους. Οι συνεισφορές των Modigliani-Miller (1958) [30] και του Black-Scholes (1973) [6] το άλλαξαν όλο αυτό. Η αντίληψη περί της απουσίας του arbitrage χρησιμοποιήθηκε πάλι από τον Ross (1976, 1978) [32,33]. Ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε τη γενική αρχή που διέπει τα επιχειρήματα περί της απουσίας του arbitrage.

Οι πρώτες τεχνικές για την μελέτη των ποιοτικών ιδιοτήτων του μοντέλου της γενικής ισορροπίας έγιναν την δεκαετία του 1970 και αποδείχθηκαν να είναι ζωτικής σημασίας για τη μελέτη του μοντέλου για μη πλήρεις αγορές, δεδομένου ότι πολλές από τις ιδιότητές του μοντέλου (συμπεριλαμβανομένης της ύπαρξης ισορροπίας στο γενικό μοντέλο) είναι καθαρά γενικές. Τρεις αποδείξεις της γενικής ανεπάρκειας των κατανομών στην ισορροπία (equilibrium allocations) μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία, που σχετίζεται με τρεις διαφορετικές παραμέτρους των υποκείμενων οικονομιών. Πρώτον στο άρθρο των Geanakoplos-Polemarchakis (1986) [17], δεύτερον στων Duffie-Shafer [9] και στων Geanakoplos-Magill-Quinzii-Dreze (1990) [16].

Η ιδιότητα της περιορισμένης βελτιστοποίησης των κατανομών στην ισορροπία ικανοποιείται για όλα τα χαρακτηριστικά της οικονομίας μόνο στην ειδική περίπτωση του καλώς ορισμένου μοντέλου οικονομίας δύο περιόδων. Όταν υπάρχουν δύο ή περισσότερες περίοδοι ή / και δύο ή περισσότερα αγαθά τότε οι κατανομές στην ισορροπία γίνονται σχετικά αναποτελεσματικές.

1.2 Το χρηματοοικονομικό υπόδειγμα διάταξης χαρτοφυλακίων

Σκοπός της εργασίας είναι να περιγραφεί η μαθηματική θεωρία της διάταξης των χαρτοφυλακίων και να διατυπωθούν οι συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο υπάρχει.

Η αφετηρία της εργασίας έχει ως πυλώνα τα άρθρα του C.D.Aliprantis "Portfolio dominance and optimality in infinite security markets " [2] και " The cheapest hedge " [4] καθώς και αναφορές από το άρθρο " Minimum-cost portfolio insurance" [3].

Το πρώτο άρθρο εστιάζει στο πως εξασφαλίζεται η διάταξη της κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων. Ένα χαρτοφυλάκιο «κυριαρχεί» ενός άλλου αν έχει μεγαλύτερη απόδοση σε κάθε κατάσταση του κόσμου. Οι κατανομές των βέλτιστων χαρτοφυλακίων και η ύπαρξη ισορροπίας στις χρηματοοικονομικές αγορές διασφαλίζονται αν η διάταξη κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων πληρεί τις ιδιότητες ενός δικτυωτού (lattice) και έχει βάση Yudin. Μια βάση Yudin αποτελεί, στην ουσία, ένα σύνολο θετικών αποδόσεων, έτσι ώστε κάθε απόδοση του παραγόμενου χώρου αξιών των χρεογράφων να αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των αποδόσεων της βάσης και μία απόδοση θεωρείται θετική αν και μόνο αν θεωρείται γραμμικός συνδυασμός των αποδόσεων της βάσης. Το εργαλείο που αντιστοιχίζει την εκάστοτε απόδοση με το ανάλογο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται τελεστής απόδοσης. Η διάταξη στον χώρο των αποδόσεων επάγει την διάταξη στον χώρο των χαρτοφυλακίων μέσω του τελεστή απόδοσης. Το άρθρο στηρίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις : α) Υπάρχει άπειρος αριθμός χρεογράφων διαθέσιμων στην αγορά (αν δεν ίσχυε κάτι τέτοιο δεν θα εξασφαλιζόταν η ύπαρξη των βέλτιστων χαρτοφυλακίων), β) ένας επενδυτής μπορεί να έχει στην κατοχή του ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ένα αυθαίρετο αλλά πεπερασμένο αριθμό χρεογράφων, γ) αφού υπάρχει πεπερασμένος αριθμών επενδυτών, υπάρχει και πεπερασμένος αριθμός χρεογράφων που πραγματικά διαπραγματεύονται σε κατάσταση ισορροπίας, δ) όλα τα χρεόγραφα τιμολογούνται σε συνθήκες ισορροπίας, ε) ο παραγόμενος χώρος αξιών που αποτελείται από αυτά τα χαρτοφυλάκια είναι στην ουσία ένας γραμμικός χώρος των αποδόσεων των χρεογράφων στον χώρο των αποδόσεων, στ) οι αγορές είναι μη-πλήρεις.

Το δεύτερο, τώρα, παρέχει μία εναλλακτική προσέγγιση της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων με σκοπό να παρέχει λύση στο λεγόμενο «πρόβλημα εύρεσης του χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου». Σκοπός του χαρτοφυλακίου ασφάλισης (portfolio insurance) είναι να διασφαλίσει μια ελάχιστη θετική απόδοση για τον επενδυτή. Όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις η ελάχιστη αυτή θετική απόδοση ενδέχεται να μην μπορεί να αναπαραχθεί από την αγορά και ως εκ τούτου να μην υπάρχει διαθέσιμο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης. Υπάρχουν πάντα, όμως, διαπραγματεύσιμα χαρτοφυλάκια στην αγορά που αποδίδουν το ίδιο αν όχι και παραπάνω από την ελάχιστη αυτή απόδοση σε κάθε κατάσταση του κόσμου. Τα χαρτοφυλάκια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ασφάλιση και η τιμή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου αποτελεί την πριμοδότηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου αυτού (insurance-premium). Ο εκάστοτε επενδυτής θέλει να αποκτήσει ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο επιτυγχάνοντας παράλληλα την φθηνότερη τιμή (cheapest hedge). Το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελεί το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου (minimum-premium portfolio insurance). Η κεντρική παραδοχή του άρθρου είναι ότι μπορούμε να βρούμε το χαρτοφυλάκιο αυτό μέσα από την διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων.

Ως μαθηματικό εργαλείο χρησιμοποιούνται οι χώροι Riesz (Riesz spaces), οι ιδιότητές των οποίων παρέχονται από το άρθρο "Infinite Dimensional Analysis, Chapter 8: Riesz Spaces " [1], και παρέχονται οι δυνητικές εφαρμογές τους πάνω στην Τάξη Κυριαρχίας των Χαρτοφυλακίων.

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

2.1 Ορισμοί Βασικών Εννοιών – Μαθηματικό Υπόβαθρο

Αρχικά παρατίθενται οι ορισμοί, εκείνοι, και οι έννοιες, των οποίων η κατανόηση κρίνεται απαραίτητη κατά την διάρκεια επεξήγησης του βασικού μας μοντέλου.

Ορισμός 2.1 Μερικώς διατεταγμένο σύνολο ($X, \geq$)

Μερικώς διατεταγμένο σύνολο ($X, \geq$) καλείται ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια μερική διάταξη ≥. Η διάταξη ≥ είναι μια μεταβατική, αυτοπαθής, αντισυμμετρική σχέση. Η έκφραση ‘’ το x κυριαρχεί έναντι του y ‘’ συμβολίζεται $x \geq y$ και η έκφραση ‘’ το x κυριαρχεί απόλυτα έναντι του y ‘’ με $x > y$.

Ορισμός 2.2 Μερικώς διατεταγμένος διανυσματικός χώρος E

Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος E , εφοδιασμένος με μια διάταξη ≥, καλείται μερικώς διατεταγμένος και αντίστοιχα η διάταξη ≥ καλείται μερική διάταξη, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις για κάθε $x,y \in E$:

1. $x \geq y$ συνεπάγεται $x + z \geq y + z$ για κάθε $z \in E$ και
2. $x \geq y$ συνεπάγεται $\alpha x \geq \alpha y$ για κάθε $\alpha \geq 0$

Ορισμός 2.3 Supremum (ελάχιστο άνω φράγμα)

Ένα στοιχείο z ονομάζεται supremum ενός ζεύγους στοιχείων $x, y \in X$ αν :

1. το z αποτελεί άνω φράγμα του ζεύγους $\{ x, y \}$, δηλαδή $x \leq z$ και $y \leq z$
2. το z αποτελεί το ελάχιστο τέτοιο φράγμα, δηλαδή αν $x \leq u$ και $y \leq u$ τότε $z \leq u$.

Ορισμός 2.4 Infimum (μέγιστο κάτω φράγμα)

Ένα στοιχείο z ονομάζεται infimum ενός ζεύγους στοιχείων $x, y \in X$ αν :

1. το z αποτελεί κάτω φράγμα του ζεύγους $\{ x, y \}$, δηλαδή $x \geq z$ και $y \geq z$
2. το z αποτελεί το μέγιστο τέτοιο φράγμα, δηλαδή αν $x \geq u$ και $y \geq u$ τότε $z \geq u$.

Ορισμός 2.5 Χώρος Riesz L

Ένας διατεταγμένος (γραμμικός) διανυσματικός χώρος L καλείται χώρος Riesz εάν κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του L έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) και μέγιστο κάτω φράγμα (infimum).

Εναλλακτικά : Χώρος Riesz ονομάζεται κάθε μερικώς διατεταγμένος διανυσματικός χώρος όπου, εφοδιασμένος με μια μερική διάταξη, αποτελεί ένα δικτυωτό.

Ορισμός 2.6 Θετικός τελεστής T

Θετικός τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ δύο διατεταγμένων διανυσματικών χώρων E, F ονομάζεται κάθε γραμμικός τελεστής που αντιστοιχίζει θετικά διανύσματα του ενός χώρου με θετικά διανύσματα του άλλου. Ήτοι, αν $x \geq 0$ στον E τότε $T(x) \geq 0$ στον F, όπου $x \in E$ και $T(x) \in F$.

Ορισμός 2.7 Θετικός κώνος E^+

Θετικός κώνος E^+ ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου E ονομάζεται το σύνολο εκείνο στο οποίο εμπεριέχονται τα στοιχεία του χώρου E για τα οποία ισχύει :

$$\{ x \in E : x \geq 0 \}.$$

Ορισμός 2.8 Δικτυωτό (lattice)

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ($X, \geq$) αποτελεί ένα δικτυωτό αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x, y \in X$ υπάρχει ένα supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) και ένα infimum (μέγιστο κάτω φράγμα).

Ορισμός 2.9 Υποχώρος Riesz

Υποχώρος Riesz ή υποχώρος- δικτυωτό (lattice subspace) ονομάζεται κάθε υποχώρος F ενός χώρου Riesz E ο οποίος αποτελεί ένα δικτυωτό, υιοθετώντας τις ιδιότητες του χώρου Riesz E.

Ορισμός 2.10 Ιδανικός Υποχώρος Riesz

Ένας υποχώρος Riesz F καλείται ιδανικός αν και μόνο αν $0 \leq x \leq y$ και $y \in F$ συνεπάγονται $x \in F$.

Ορισμός 2.11 Δυικός Χώρος $E^{\sim}$

Δυικός χώρος $E^{\sim}$ ενός χώρου Riesz E καλείται ο διανυσματικός χώρος, εκείνος, που αποτελείται από όλες τις φραγμένες, ως προς την διάταξη, θετικές γραμμικές συναρτήσεις f(x) του χώρου E, για κάθε $x \in E$ (κάτω από αλγεβρικές διαδικασίες).

Ορισμός 2.12 Ζεύγος δυικών χώρων Riesz

Δύο χώροι Riesz E, E’ αποτελούν ένα ζεύγος δυικών χώρων Riesz < E, E’> αν ο E’ αποτελεί ιδανικό υποχώρο του δυικού χώρου $E^{\sim}$.

Ορισμός 2.13 Συμμετρικό ζεύγος δυικών χώρων Riesz

Το ζεύγος δυικών χώρων Riesz < E, E'> καλείται συμμετρικό αν και μόνο αν το ζεύγος < E' , E > αποτελεί ζεύγος χώρων Riesz.

Ορισμός 2.14 Κλειστό Υποσύνολο

Ένα υποσύνολο K του R^d ονομάζεται κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in N} \subseteq A$ που συγκλίνει στο $x \in R^d$, ισχύει $x \in A$.

Ορισμός 2.15 Φραγμένο Υποσύνολο

Ένα υποσύνολο $B \subseteq R^d$ ονομάζεται φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, 2, ..., d$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m_i , M_i τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in B$ να ισχύει $m_i \leq x_i \leq M_i$, όπου x_i είναι η i - συντεταγμένη του διανύσματος x.

Ορισμός 2.16 Κυρτό Υποσύνολο

Ένα υποσύνολο C του R^d ονομάζεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Ορισμός 2.17 Συμπαγές Υποσύνολο

Ένα υποσύνολο D του R^d ονομάζεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

2.2 Βασικό Υπόδειγμα του Μοντέλου

Θεωρούμε ένα μοντέλο δύο περιόδων στις αγορές χρεογράφων. Υπάρχει αριθμήσιμος αριθμός χρεογράφων, τα οποία υποθέτουμε ότι διαπραγματεύονται την χρονική στιγμή 0 και συμβολίζονται με την χρήση των φυσικών αριθμών (έστω n : όπου n = 1, 2, 3, ….). Το εκάστοτε χρεόγραφο προσδιορίζεται από την απόδοσή του την χρονική στιγμή 1. Η απόδοση του αντίστοιχου χρεογράφου n συμβολίζεται x_n και αποτελεί στοιχείο του μερικώς διατεταγμένου χώρου των αποδόσεων X.

Τα χρεόγραφα μπορούν να συνδυαστούν σε χαρτοφυλάκια. Το κάθε χαρτοφυλάκιο αποτελεί μια ακολουθία θ = $(\theta_1,\theta_2,\ldots)$, όπου το εκάστοτε θ_n αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μετοχών του χρεογράφου n που έχουν συμπεριληφθεί στο χαρτοφυλάκιο θ. Σε περίπτωση λήψης θέσης πώλησης για ένα χρεόγραφο n, τότε η αντίστοιχη τιμή του θ_n θα είναι αρνητική. Εμείς θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μη μηδενικά χαρτοφυλάκια που εμπεριέχουν αριθμήσιμο αριθμό χρεογράφων.

Ορισμός 2.18 : *Χώρος των χαρτοφυλακίων φ* ονομάζεται ο διανυσματικός, εκείνος, χώρος που αποτελείται από όλες εκείνες τις ακολουθίες θ, οι οποίες με την σειρά τους αποτελούν τα χαρτοφυλάκια. Ο χώρος των χαρτοφυλακίων φ είναι πραγματικός χώρος, αφού αποτελεί υποσύνολο πραγματικών αριθμών.

Η απόδοση R(θ) ενός χαρτοφυλακίου θ ∈ φ δίνεται από τον τύπο :

$$R(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n, \quad \text{όπου } R(\theta) \in X$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει, στην ουσία, έναν θετικό γραμμικό τελεστή R : φ → X τον οποίο ονομάζουμε *τελεστή απόδοσης.* Τα διανύσματα x_1, x_2, … , τα οποία αντιστοιχούν στις αποδόσεις θεωρούνται γραμμικώς ανεξάρτητα (*άρτιος αριθμός χρεογράφων), έτσι ώστε ο τελεστής απόδοσης R να είναι 1-1.

Η μερική διάταξη του χώρου των αποδόσεων X επάγει μια μερική διάταξη $\geq_R$ στον χώρο των χαρτοφυλακίων φ μέσω του τελεστή απόδοσης R ως εξής :

$$\text{Όταν } R(\theta) \geq R(\theta') \text{ τότε ισχύει } \theta \geq_R \theta'$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση ένα χαρτοφυλάκιο είναι υπέρτερο ενός άλλου χαρτοφυλακίου αν η απόδοση του πρώτου είναι μεγαλύτερη από την απόδοση του δεύτερου σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου. Η διάταξη $\geq_R$ θα ονομάζεται *διάταξη κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων.*

Ο θετικός κώνος κάτω από την διάταξη κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων αποτελεί το σύνολο όλων των χαρτοφυλακίων με θετικές αποδόσεις και τον ονομάζουμε *κώνο των χαρτοφυλακίων θετικών αποδόσεων*. Συμβολίζεται φ_R^+ και ορίζεται ως εξής :

$$\varphi_R^+ = \{\theta \in \varphi : \theta \geq_R 0\} = \{\theta \in \varphi : R(\theta) \geq 0\} = R^{-1}(X^+)$$

Με την ίδια λογική, θ $\geq_R$ θ’ αν και μόνο αν θ-θ’ ∈ φ_R^+ το οποίο αποτελεί μια διαφορετική έκφραση της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων.

Θα υποθέσουμε ότι ο χώρος φ, εφοδιασμένος με τη διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\geq_R$, αποτελεί ένα δικτυωτό. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος χαρτοφυλακίων θ, θ’ ∈ φ υπάρχει ένα καλώς ορισμένο supremum χαρτοφυλάκιο που συμβολίζεται θ $\vee_R$ θ’, και ένα infimum χαρτοφυλάκιο θ $\wedge_R$ θ’. Το supremum θ $\vee_R$ θ’ αποτελεί το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη, εκείνη, απόδοση μεγαλύτερη από εκείνες των χαρτοφυλακίων θ και θ’. Αντίστοιχα, το infimum θ $\wedge_R$ θ’ αποτελεί το χαρτοφυλάκιο με την μέγιστη, εκείνη, απόδοση μικρότερη από εκείνες των χαρτοφυλακίων θ και θ’.

Το εύρος M = R(φ) ⊆ X του τελεστή απόδοσης R αποτελεί υποχώρο των αποδόσεων του συνόλου των χαρτοφυλακίων. Θα αναφερόμαστε στο χώρο M ως *παραγόμενο χώρο αξιών των χρεογράφων* — είναι επίσης γνωστός ως ο χώρος των εμπορεύσιμων χρεογράφων.

Θεώρημα 2.1 (Vulikh, 1994) : *Ο χώρος φ, εφοδιασμένος με τη διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\geq_R$, αποτελεί ένα δικτυωτό αν ο παραγόμενος χώρος αξιών των χρεογράφων M αποτελεί ένα χώρο Riesz κάτω από την διάταξη που παράγεται από τον χώρο X.*

Λήμμα 2.1 (Aliprantis, Brown, Polyrakis, Werner, 1998) *: Ο χώρος φ, εφοδιασμένος με τη διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\geq_R$, αποτελεί δικτυωτό (ή ισοδύναμα ο φ_R^+ αποτελεί κώνο του δικτυωτού στον φ) αν και μόνο αν ο παραγόμενος χώρος αξιών των χρεογράφων M αποτελεί έναν υποχώρο - δικτυωτό του χώρου των αποδόσεων X.*

Η τιμή ενός χρεογράφου n συμβολίζεται q_n. Κάθε διάνυσμα της μορφής $q = (q_1, q_2, ...)$ ∈ $\mathbb{R}^\infty$ θα καλείται *σύστημα τιμών χρεογράφων* ή απλά διάνυσμα τιμών του χρεογράφου. Συνεπώς, η αγοραία αξία ενός χαρτοφυλακίου θ ∈ φ λαμβάνοντας υπ’ όψιν τις τιμές των χρεογράφων q είναι ο πραγματικός αριθμός :

$$q \cdot \theta = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \theta_n \, .$$

Ο χώρος των χαρτοφυλακίων φ και ο χώρος των τιμών των χρεογράφων $\mathbb{R}^\infty$ σχηματίζουν ένα δυικό σύστημα < φ, $\mathbb{R}^\infty$ >, τη διττότητα χαρτοφυλακίου-τιμής. Γνωρίζουμε ότι το σύστημα < φ, $\mathbb{R}^\infty$ > αποτελεί ένα συμμετρικό δυικό σύστημα Riesz. Ο δυικός κώνος (φ_R^+)’ του (φ_R^+) ορίζεται ως εξής :

$$(\varphi_R^+)' = \left\{ q = (q_1, q_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : q \cdot \theta = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \theta_n \geq 0, \forall \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \varphi_R^+ \right\}$$

Οι έννοιες των arbitrage και ισχυρής μορφής arbitrage χαρτοφυλακίων, μπορούν εύκολα να εκφραστούν μέσω της διάταξης κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων. Με γνώμονα τις τιμές q των χρεογράφων, χαρτοφυλάκιο ισχυρής μορφής arbitrage θεωρείται το χαρτοφυλάκιο $\theta \in \varphi$ που κυριαρχεί του μηδενικού χαρτοφυλακίου ($\theta \geq_R 0$) και έχει αρνητική αγοραία αξία ($q \cdot \theta < 0$), πχ. ένα χαρτοφυλάκιο αρνητικής αξίας και θετικής απόδοσης. Αντίστοιχα, ένα arbitrage χαρτοφυλάκιο $\theta \in \varphi$ είναι εκείνο το χαρτοφυλάκιο για το οποίο ισχύει ότι $\theta >_R 0$ και $q \cdot \theta \leq 0$, πχ. ένα χαρτοφυλάκιο μηδενικής ή αρνητικής αξίας και θετικής, μη μηδενικής απόδοσης.

Ένα σύστημα τιμών χρεογράφων που αποκλείει οποιαδήποτε πιθανότητα ισχυρού arbitrage (αντίστοιχα arbitrage) αποτελεί ένα σύστημα *ασθενώς* απαλλαγμένο από ευκαιρίες για arbitrage (αντίστοιχα *πλήρως* απαλλαγμένο από ευκαιρίες για arbitrage). Προφανώς, κάθε ισχυρό arbitrage αποτελεί arbitrage, άρα και κάθε τιμή πλήρως απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage είναι και ασθενώς απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage. Το σύνολο των ασθενώς απαλλαγμένων από ευκαιρίες για arbitrage τιμών αποτελεί τον δυικό κώνο (φ_R^+).

Από την στιγμή που το σύστημα < (φ, φ_R^+), $(\mathbb{R}^\infty, (\varphi_R^+)')$ > αποτελεί ένα συμμετρικό δυικό σύστημα Riesz, συνεπάγεται ότι :

$$\theta \geq_R \theta' \Leftrightarrow q \cdot \theta \geq q \cdot \theta',$$

για κάθε διάνυσμα τιμών q ασθενώς απαλλαγμένο από ευκαιρίες για arbitrage.

Συνεπώς, ένα χαρτοφυλάκιο θ κυριαρχεί ενός άλλου χαρτοφυλακίου θ' ***αν και μόνο αν*** το θ είναι πιο ακριβό από το θ' στα πλαίσια οποιασδήποτε τιμής ασθενώς απαλλαγμένης από ευκαιρίες για arbitrage.

2.3 Χαρτοφυλάκια Ασφάλισης

2.3.1 Η Κεντρική Ιδέα

Οι επενδυτές συχνά επιθυμούν να διασφαλιστούν ενάντια στην μείωση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τους κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή. Ένας τρόπος επίτευξης του στόχου αυτού είναι μέσω απόκτησης ενός κατάλληλου συνδυασμού διαπραγματεύσιμων χρεογράφων. Ωστόσο, όταν οι αγορές παραγώγων δεν είναι πλήρεις, ένας επενδυτής που αναζητεί ασφάλεια για το χαρτοφυλάκιό του θα στραφεί προς την φθηνότερη αντιστάθμιση του κινδύνου αυτού που μπορεί να διατεθεί στις αγορές. Σαφώς και η υιοθέτηση μιας τέτοιας στρατηγικής δεν θα αποδώσει την επιθυμητή απόδοση, αλλά αποτελεί την φθηνότερη λύση που μπορεί να επιτευχθεί μέσω των αγορών.

Αναλυτικότερα, *η ασφάλιση του χαρτοφυλακίου* εγγυάται μια ελάχιστη απόδοση ή, εναλλακτικά, θέτει ένα κατώτατο όριο για την απόδοση του χαρτοφυλακίου προσπαθώντας παράλληλα να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή. Η επιθυμητή, αυτή, απόδοση μπορεί να επιτευχθεί με διάφορες στρατηγικές, όπως για παράδειγμα αποκτώντας ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών και ‘’προστατευτικά’’ δικαιώματα (προαίρεσης) πώλησης (δηλ. δικαιώματα (προαίρεσης) πώλησης με υποκείμενους τίτλους μετοχές συμπεριλαμβανόμενες στο χαρτοφυλάκιο) ή αποκτώντας δικαιώματα (προαίρεσης) αγοράς με υποκείμενους τίτλους μετοχές συμπεριλαμβανόμενες στο χαρτοφυλάκιο, επενδύοντας την παρούσα αξία της τιμής άσκησης του δικαιώματος σε ακίνδυνες επενδυτικές επιλογές. Έτσι στην λικτότητα η επένδυση θα αντισταθμίζει το κόστος εξάσκησης του δικαιώματος.

Ωστόσο, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, όταν οι αγορές παραγώγων δεν είναι πλήρεις το χαρτοφυλάκιο που επιτυγχάνει την βέλτιστη διασφάλιση του επενδυτή ίσως να μην είναι εφικτό να δημιουργηθεί. Παρ’ όλα αυτά, υπάρχουν πάντα διαπραγματεύσιμα χαρτοφυλάκια στις αγορές που αποδίδουν το ίδιο, αν όχι και περισσότερο, με την επιθυμητή απόδοση ασφάλισης του επενδυτή, σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου. Όλα αυτά τα χαρτοφυλάκια είναι υποψήφια για να επιλεγούν ως ασφάλιση του χαρτοφυλακίου όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις. Η τιμή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου ασφάλισης αποτελεί *την πριμοδότηση του κινδύνου* του χαρτοφυλακίου αυτού. Ήτοι, ένας επενδυτής προσπαθεί να αποκτήσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η απόδοση ‘’ κυριαρχεί ‘’ της απόδοσης που επιθυμεί να διασφαλίσει αλλά και με το μικρότερο δυνατό κόστος, δηλαδή με την μικρότερη δυνατή πριμοδότηση του κινδύνου. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται *χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου.*

2.3.2 Σκοπός του Εναλλακτικού Μοντέλου

Στην συνέχεια παραθέτουμε ένα μοντέλο εναλλακτικής προσέγγισης της Διάταξης Κυριαρχίας των Χαρτοφυλακίων για να λύσουμε το πρόβλημα εύρεσης του χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου. Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στο επιχείρημα ότι, όταν οι αγορές είναι πλήρεις, είναι εύκολο να προσδιορίσουμε το χαρτοφυλάκιο που προσφέρει την επιθυμητή απόδοση που θέλουμε να διασφαλίσουμε καθώς στις αγορές αυτές υπάρχουν τόσες καταστάσεις στον κόσμο όσα και τα διαθέσιμα χρεόγραφα. Σε όρους κυριαρχίας χαρτοφυλακίων, το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το κατώτερο άνω φράγμα του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.

Αντιθέτως, όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις υπάρχουν περισσότερες καταστάσεις στον κόσμο σε σχέση με τα διαθέσιμα χρεόγραφα και έτσι καθ' αυτόν τον τρόπο ενδέχεται να μην είναι διαθέσιμη η απόδοση που θέλουμε να εξασφαλίσουμε. Σε αυτήν την περίπτωση, κατασκευάζουμε διάφορες εννοιολογικές παραλλαγές της κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων, απορρίπτοντας ορισμένες καταστάσεις του κόσμου. Για παράδειγμα, αν υπάρχει J αριθμός χρεογράφων τότε μπορούμε να ορίσουμε ότι ένα χαρτοφυλάκιο κυριαρχεί ενός άλλου αν αποδίδει τουλάχιστον στον ίδιο βαθμό στις πρώτες J καταστάσεις του κόσμου. Αντίστοιχα, ότι ένα χαρτοφυλάκιο κυριαρχεί ενός άλλου αν αποδίδει τουλάχιστον στον ίδιο βαθμό στις τελευταίες J καταστάσεις του κόσμου. Για κάθε τέτοια παραλλαγή της κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων μπορούμε να υπολογίσουμε το κατώτερο άνω φράγμα του υποκείμενου χαρτοφυλακίου σε συνδυασμό με το κατώτατο όριο που έχουμε θέσει για την απόδοση του χαρτοφυλακίου, καταλήγοντας, έτσι, σε έναν πεπερασμένο αριθμό υποψήφιων χαρτοφυλακίων. *Ένα εξ' αυτών των υποψήφιων χαρτοφυλακίων θα πρέπει να είναι χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου.*

2.3.3 Ανάλυση του Εναλλακτικού Μοντέλου

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση του υποδείγματος με μία συνοπτική έκθεση της ασφάλισης του χαρτοφυλακίου στο πρότυπο χωρο-χρονικό μοντέλο των αγορών χρεογράφων. Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε την αντιστάθμιση κινδύνου σε πλήρεις αγορές και θα επεκτείνουμε την ανάλυση σε μη πλήρεις αγορές.

Θεωρούμε ένα μοντέλο δύο περιόδων στις αγορές χρεογράφων. Υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός S καταστάσεων στον κόσμο. Οι επενδυτές διαπραγματεύονται σε J αριθμό χρεογράφων $r_1, r_2, \ldots, r_J$ την χρονική περίοδο T_0, ανεξάρτητων μεταξύ τους, όπου $J \leq S$, των οποίων οι αποδόσεις την χρονική περίοδο T_1 εξαρτώνται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου. Ως εκ τούτου, από την στιγμή που $J \leq S$ οι αγορές χαρακτηρίζονται ως μη πλήρεις. *Ο πίνακας των αποδόσεων* R είναι ένας πίνακας διαστάσεων $S \times J$ οι στήλες του οποίου παριστάνουν τα (γραμμικώς ανεξάρτητα) διαθέσιμα χρεόγραφα, σε διανυσματική μορφή :

$$R = \begin{bmatrix} r_1(1) & r_2(1) & \cdots & r_J(1) \\ r_1(2) & r_2(2) & \cdots & r_J(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(S) & r_2(S) & \cdots & r_J(S) \end{bmatrix}.$$

Τα χαρτοφυλάκια είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διαθέσιμων χρεογράφων. Ένα χαρτοφυλάκιο αναπαρίσταται, επομένως, από ένα διάνυσμα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^J$ και αποτελούν διανύσματα των στηλών του πίνακα αποδόσεων R. Η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου θ ισούται με $R\theta$.

Η κάθε απόδοση που εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου, αποτελεί διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^s$ και ονομάζεται *εμπορεύσιμη απόδοση* αν βρίσκεται πάνω στον παραγόμενο χώρο αξιών $M = \langle R \rangle$ του πίνακα αποδόσεων R στον $\mathbb{R}^s$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα μοναδικό χαρτοφυλάκιο (το οποίο ονομάζεται *αναπαραχθέν χαρτοφυλάκιο*) για τα διαθέσιμα χαρτοφυλάκια του οποίου η απόδοση εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου. Υποθέτουμε ότι το ακίνδυνο ομόλογο 1 = (1,1,1,…,1) είναι διαπραγματεύσιμο.

Θα λέμε ότι ένα χαρτοφυλάκιο θ *αναπαράγει υπέρ του δέοντος* την απόδοση $x \in \mathbb{R}^s$ που εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου αν $R\theta \geq x$, που σημαίνει ότι το θ αποδίδει το ίδιο, αν όχι και περισσότερο, με την απόδοση x σε κάθε κατάσταση του κόσμου. Ένα χαρτοφυλάκιο *θ αναπαράγει (τέλεια)* την απόδοση που εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου $x \in \mathbb{R}^s$ μέσα από ένα σύνολο καταστάσεων I αν $R\theta(s) = x(s)$ για κάθε $s \in I$.

Αν ο αριθμός των διαθέσιμων χρεογράφων είναι ίσος με τον αριθμό των καταστάσεων του κόσμου (δηλαδή αν $J = S$) τότε οι αγορές είναι *πλήρεις*. Αν $J < S$ τότε οι αγορές είναι *μη πλήρεις* και ορισμένες αποδόσεις που μεταβάλλονται ανάλογα με τις καταστάσεις στον κόσμο δεν μπορούν να αναπαραχθούν από κάποιο χαρτοφυλάκιο.

Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε χρεόγραφα των οποίων οι τιμές δεν αφήνουν ενδεχόμενα για arbitrage. Συνεπώς, εστιάζουμε σε διανύσματα τιμών χρεογράφων $q \in \mathbb{R}^J$, τα οποία αναπαριστούν τιμές χρεογράφων που παρέχουν καθαρά θετική αξία $q \cdot \theta \geq 0$ σε κάθε χαρτοφυλάκιο θ με θετική απόδοση $R\theta > 0$.

Η *απόδοση ασφάλισης* ενός χαρτοφυλακίου $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_J)$ που θέλουμε να εξασφαλίσουμε, σύμφωνα πάντα με ένα κατώτερο όριο $k \in \mathbb{R}$, μεταβάλλεται ανάλογα με τις καταστάσεις του κόσμου, αποτυπώνει την ανοδική τάση ενός χαρτοφυλακίου και παράλληλα παρέχει εξασφάλιση ενάντια σε κάθε καθοδική τάση του κάτω από το όριο k. Με άλλα λόγια, η απόδοση ασφάλισης ορίζεται ως :

$$\max\{R\theta, \mathbf{k}\} = \begin{bmatrix} max\{\sum_{j=1}^{J} r_j(1)\theta_{j,}\boldsymbol{k}\} \\ max\{\sum_{j=1}^{J} r_j(2)\theta_{j,}\boldsymbol{k}\} \\ \vdots \\ max\{\sum_{j=1}^{J} r_j(S)\theta_{j,}\ \boldsymbol{k}\} \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{k} = \mathrm{k} \times \mathbf{1}$ είναι το ομόλογο μηδενικού κινδύνου με απόδοση k σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου. Σε μία μη πλήρης αγορά η απόδοση ασφάλισης ενός χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου και μπορεί να αναπαραχθεί κατέχοντας το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο με την απόδοση που εξασφαλίζει σε συνδυασμό με ένα δικαίωμα (προαίρεσης) πώλησης με τιμή άσκησης k, ή εναλλακτικά με ένα ομόλογο μηδενικού κινδύνου απόδοσης $\mathbf{k}$ σε συνδυασμό με ένα δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς πάνω στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο με τιμή άσκησης k. Το κύριο πρόβλημα των αγορών που δεν είναι πλήρεις πηγάζει από την πιθανότητα η απόδοση ασφάλισης να μην είναι διαπραγματεύσιμη.

Εισάγοντας την έννοια των χαρτοφυλακίων ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου στο μοντέλο μας, θεωρούμε πάλι ένα χαρτοφυλάκιο θ και το κατώτατο όριο απόδοσης k. *Κάθε χαρτοφυλάκιο θ' του οποίου η απόδοση Rθ' κυριαρχεί της απόδοσης ασφάλισης max {Rθ,* $\boldsymbol{k}$*} σε κάθε κατάσταση του κόσμου θεωρείται χαρτοφυλάκιο ασφάλισης*. Υπάρχουν αρκετά τέτοια χαρτοφυλάκια. *Το κόστος ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου αποτελεί την πριμοδότηση του κινδύνου*. Έτσι, αν συμβολίσουμε με q την τιμή ενός χρεογράφου, τότε η πριμοδότηση του κινδύνου που σχετίζεται με το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης θ' ισούται με q · θ'. Το ενδιαφέρον μας, λοιπόν, στρέφεται σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου θ (ή εναλλακτικά σε ένα χαρτοφυλάκιο που επιτυγχάνει την φθηνότερη αντιστάθμιση κινδύνου), το οποίο αποτελεί την λιγότερο δαπανηρή επιλογή, με απόδοση που κυριαρχεί της ασφάλισης απόδοσης του θ και του κατώτερου ορίου k. Συνοπτικά, το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου αποτελεί την λύση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης :

(Π.Ε) : min q · θ' έτσι ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις :

1) $\theta' \in \mathbb{R}^J$
2) $R\theta' \geq R\theta$
3) $R\theta' \geq \mathbf{k}$

Το παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει πάντοτε λύση και συγκεκριμένα *: Το σύνολο των λύσεων το προβλήματος ελαχιστοποίησης (Π.Ε) είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του χώρου* $\mathbb{R}^J$ (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002).

2.3.4 Μεθοδολογία Προβλήματος Ελαχιστοποίησης

Η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στην μελέτη της κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων σε συνδυασμό με τις δομές των δικτυωτών που συναντώνται στους διανυσματικούς χώρους.

Ορίζουμε πως ένα χαρτοφυλάκιο θ *κυριαρχεί* ενός χαρτοφυλακίου θ' αν $R\theta \geq R\theta'$, την οποία σχέση θα συμβολίζουμε $\theta \gtrsim \theta'$. Η διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\gtrsim$ καταστά τον χώρο $\mathbb{R}^J$ μερικώς διατεταγμένο διανυσματικό χώρο. Συμβολίζουμε, επίσης, με C τον θετικό κώνο που παράγεται από την διάταξη $\gtrsim$ και ορίζεται ως εξής:

$$C = \{\theta \in \mathbb{R}^J : \theta \gtrsim 0\}.$$

Για κάθε ζεύγος χαρτοφυλακίων θ και θ', ο συμβολισμός $\theta \vee_C \theta'$ θα αναπαριστά το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του ζεύγους {θ, θ'} σε σχέση με την διάταξη $\gtrsim$. Έτσι το χαρτοφυλάκιο $\theta \vee_C \theta'$, αν υπάρχει, έχει τις εξής ιδιότητες :

1) $\theta \vee_C \theta' \gtrsim \theta$
2) $\theta \vee_C \theta' \gtrsim \theta'$
3) Αν $\mu \gtrsim \theta$ και $\mu \gtrsim \theta'$, τότε $\mu \gtrsim \theta \vee_C \theta'$

Όταν οι αγορές είναι πλήρεις μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μοναδικό χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελεί χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage. Ωστόσο, όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου εξαρτάται από την επικρατούσα τιμή. Στην συνέχεια, ωστόσο, θα δούμε πως υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ των δύο περιπτώσεων· όταν οι αγορές είναι πλήρεις, δηλαδή, και όταν δεν είναι.

2.3.5 Εφαρμογή σε Πλήρεις Αγορές

Υποθέτοντας ότι οι αγορές είναι πλήρεις, δηλαδή $S = J$, συνεπάγεται ότι ο πίνακας αποδόσεων R είναι ένας πίνακας $J \times J$. Επιπλέον, στις πλήρεις αγορές είναι εύκολο να υπολογίσουμε την τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου ή το χαρτοφυλάκιο, εκείνο, που αναπαράγει την απόδοση ασφάλισης θ με ορισμένο ένα κατώτατο όριο k. Για του λόγου το αληθές, αν ένα χαρτοφυλάκιο κ αναπαράγει την απόδοση $\mathbf{k}$ ($R\kappa = \mathbf{k}$) και ο πίνακας αποδόσεων R είναι αντιστρέψιμος η απόδοση ασφάλισης αναπαράγεται από το χαρτοφυλάκιο θ' (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) :

$$\theta' = \theta \vee_C \kappa = R^{-1} \max \{R\theta, \mathbf{k}\}.$$

Το χαρτοφυλάκιο θ' αποτελεί ένα αποτελεί χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage. Συγκεκριμένα, είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε, τέτοια, τιμή. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 2.2 (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) : *Όταν οι αγορές είναι πλήρεις, υπάρχει μοναδικό χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου, για οποιαδήποτε τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage, το οποίο αναπαράγεται από το χαρτοφυλάκιο* $\theta \vee_C \kappa$*, το οποίο υπάρχει και περιέχει πάντα το δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς επάνω στο χαρτοφυλάκιο θ και το ομόλογο μηδενικού κινδύνου με απόδοση k σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου σε αριθμό* ***k****.*

Παράδειγμα 2.1 (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) : Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα :

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (0, 1, 1, 1).
3. Μια μετοχή με απόδοση (0, 1, 2, 4).
4. Ένα δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς πάνω στην μετοχή με τιμή άσκησης 3, όπου max { (0, 1, 2, 4) – 3, 0} = (0, 0, 0, 1).

Άρα, ο πίνακας αποδόσεων R των χρεογράφων είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου η απόδοση κάθε χαρτοφυλακίου θ είναι Rθ.

Τώρα θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο θ = (1, 2, 3, 0). Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θ, Rθ, ισούται με

$$R\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3 + 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Η απόδοση ασφάλισης ενός χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο $k = 10$ ισούται με :

$$\max \{R\theta, \mathbf{10}\} = \max \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, η απόδοση αυτή είναι εμπορεύσιμη (ίδιος αριθμός διαθέσιμων χρεογράφων και καταστάσεων) και αποτελεί την απόδοση του παρακάτω χαρτοφυλακίου :

$$\theta' = R^{-1} \max \{R\theta, \mathbf{10}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},$$

όπου, $$R\theta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Άρα, το χαρτοφυλάκιο θ' αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage.

2.3.6 Εφαρμογή σε Μη-Πλήρεις Αγορές

Υποθέτοντας ότι οι αγορές είναι μη πλήρεις, θα δούμε πως η απόρριψη ενός $S - J$ αριθμού καταστάσεων στον κόσμο μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο υπολογισμού ενός χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου σε τέτοιες αγορές, την οποία και θα αναλύσουμε.

Για κάθε επιλογή I καταστάσεων του κόσμου από ένα σύνολο στοιχειωδών καταστάσεων J, έστω $\mathrm{R_I}$ ο πίνακας $\mathrm{J} \times \mathrm{J}$ οι γραμμές του οποίου είναι οι γραμμές του πίνακα αποδόσεων R που αντιστοιχούν στις καταστάσεις I του κόσμου. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν 3 χρεόγραφα και 4 καταστάσεις τότε :

$$R_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} \mathrm{r}_1(1) & \mathrm{r}_2(1) & \mathrm{r}_3(1) \\ \mathrm{r}_1(3) & \mathrm{r}_2(3) & \mathrm{r}_3(3) \\ \mathrm{r}_1(4) & \mathrm{r}_2(4) & \mathrm{r}_3(4) \end{bmatrix}$$

Αν ο πίνακας $\mathrm{R_I}$ είναι αντιστρέψιμος τότε λέμε ότι ο πίνακας $\mathrm{R_I}$ (ή απλούστερα οι καταστάσεις I) ορίζει μία *ψευδο-πλήρης αγορά.* Αφού ο βαθμός του πίνακα R ισούται με J υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία ψευδο-πλήρης αγορά.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφέρουμε πως αν ένα σύνολο καταστάσεων του κόσμου $\mathrm{I} = \{ s_1 < s_2 < \cdots < s_J \}$ ορίζει μια ψευδο-πλήρης αγορά και υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο θ τότε ορίζουμε $\theta_I = (\theta_{s1}, \theta_{s2}, \ \ldots \ , \theta_{sJ})$. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα θ_I ως ένα διάνυσμα στήλης, τότε μπορούμε να συμβολίσουμε την τιμή $\mathrm{R_I}\theta_I$ με $\mathrm{R_I}\theta$, δηλαδή $\mathrm{R_I}\theta = \mathrm{R_I}\theta_I$.

Κάθε ψευδο-πλήρης αγορά $\mathrm{R_I}$ παράγει μια εναλλακτική μορφή της κυριαρχίας των χαρτοφυλακίων $\gtrsim_I$, ορίζοντας $\theta \gtrsim_I \theta'$ αν $\mathrm{R_I}\,\theta \geq \mathrm{R_I}\,\theta'$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα, πως αυτή η διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\gtrsim_I$ όχι μόνο διατάσσει μερικώς τον χώρο των χαρτοφυλακίων $\mathbb{R}^J$ αλλά εισάγει και μια ταξινόμηση δικτυωτών. Καταλήγουμε πως για κάθε ψευδο-πλήρης αγορά $\mathrm{R_I}$ ο κώνος κυριαρχίας χαρτοφυλακίων $\mathrm{C_I}$ όπου :

$$\mathrm{C_I} = \{\theta \in \mathbb{R}^J : \theta \gtrsim_I 0\} ,$$

αποτελεί κώνο δικτυωτού και παράλληλα υπερ-κώνο του C ($\mathrm{C} \subseteq \mathrm{C_I}$).

Αυτό σημαίνει πως αν θ και θ’ είναι δύο χαρτοφυλάκια, τότε το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum), $\theta \vee_I \theta'$, των χαρτοφυλακίων ως προς την διάταξη $\gtrsim_I$ υπάρχει και ορίζεται $\theta \vee_I \theta' = \mathrm{R_I}^{-1} \max\{ \mathrm{R_I}\,\theta, \mathrm{R_I}\,\theta' \}$. Υποθέτοντας πως $\mathrm{R}\kappa = \mathbf{k}$, τότε για κάθε ψευδο-πλήρης αγορά $\mathrm{R_I}$ ορίζουμε :

$$\theta'_I = \theta \vee_I \kappa = \mathrm{R_I}^{-1} \max\{ \mathrm{R_I}\,\theta, \mathbf{k} \}.$$

Αν θ ένα οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο και k ένα κατώτατο όριο τιμής, τότε ένα *δυνητικά χαρτοφυλάκιο ασφάλισης* είναι κάθε χαρτοφυλάκιο της μορφής θ'_I που ικανοποιεί την σχέση $\mathrm{R}\theta'_I \geq \max\{\mathrm{R_I}\theta, \mathbf{k}\}$. Θα συμβολίζουμε το πεπερασμένο σύνολο όλων των δυνητικά χαρτοφυλακίων ασφάλισης του θ με το κατώτατο όριο τιμής k ως $\mathcal{P}_{\theta,k}$ όπου :

$$\mathcal{P}_{\theta,k} = \{ \theta' \in \mathbb{R}^J : \theta' = \theta'_I \text{ για μια ψευδο-πλήρης αγορά } \mathrm{R_I} \text{ και } \mathrm{R}\theta' \geq \mathrm{R}\,\theta \vee_I \mathbf{k} \}.$$

Προφανώς, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός δυνητικά χαρτοφυλακίων ασφάλισης που υπολογίζονται ανεξαρτήτως της τιμής του χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage.

Το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα είναι ότι ένα εξ' αυτών των δυνητικά χαρτοφυλακίων ασφάλισης είναι χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο Θεώρημα της Φθηνότερης Αντιστάθμισης Κινδύνου :

Θεώρημα 2.3 (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) (Θεώρημα της Φθηνότερης Αντιστάθμισης Κινδύνου) : *Για κάθε χαρτοφυλάκιο θ, για κάθε τιμή q απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage και για κάθε ορισμένο κατώτατο όριο τιμής k με* ένα χαρτοφυλάκιο κ να αναπαράγει την απόδοση $\mathbf{k}$ ($R\kappa = \mathbf{k}$) *ισχύουν τα παρακάτω :*

1) *Υπάρχει τουλάχιστον ένα δυνητικά χαρτοφυλάκιο ασφάλισης $\theta \vee_I \kappa$ το οποίο είναι χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για το θ στο κατώτατο όριο k.*
2) *Ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου $\theta \vee_I \kappa$ αποτελεί δυνητικά χαρτοφυλάκιο ασφάλισης. Δηλαδή,*

$$q \cdot (\theta \vee_I \kappa) \leq q \cdot \theta' \text{ για κάθε } \theta' \in \mathcal{P}_{\theta,k} \ .$$

3) *Το χαρτοφυλάκιο $\theta'^* = \theta \vee_C \kappa$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\mathcal{P}_{\theta,k}$ αποτελείται από ένα χαρτοφυλάκιο θ'^*, το οποίο είναι αυτοδικαίως ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για κάθε τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage.*

Παράδειγμα 2.2 (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) (Μη-πλήρεις αγορές με ένα μόνο δυνητικά χαρτοφυλάκιο ασφάλισης). Έστω τα δεδομένα της αγοράς του Παραδείγματος 2.1. Τώρα, όμως, υποθέτουμε ότι το δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς δεν είναι διαθέσιμο. Έτσι ο πίνακας αποδόσεων είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο θ = (1, 2, 3). Η απόδοση ασφάλισης του χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο $k = 10$ ισούται με :

$$\max\{R\theta, \mathbf{10}\} = \max\left\{\begin{bmatrix}1\\6\\9\\15\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}10\\10\\10\\15\end{bmatrix}.$$

.

Η απόδοση αυτή, όμως, στην περίπτωση αυτή δεν είναι εμπορεύσιμη αφού, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αποτελεί την απόδοση του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας το μη διαθέσιμο δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς.

Ωστόσο, μπορούμε να υπολογίσουμε, το πολύ, τέσσερα σημαντικά χαρτοφυλάκια μέσα από τέσσερις 3 x 3 πίνακες των οποίων οι γραμμές εκπορεύονται από τον πίνακα αποδόσεων R. Οι πίνακες αυτοί είναι :

$$R_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}, \qquad R_{(1,2,4)} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&4\end{bmatrix},$$

$$R_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&1&4\end{bmatrix}, \qquad R_{(2,3,4)} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&4\end{bmatrix}.$$

Σημειωτέον, ο πίνακας $R_{(2,3,4)}$ είναι μοναδιαίος πίνακας. Έτσι, επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις υπόλοιπες ψευδο-πλήρεις αγορές και αποκτούμε τα παρακάτω χαρτοφυλάκια :

$$\theta'_{(1,2,3)} = R^{-1}_{(1,2,3)} \max\{ R_{(1,2,3)}\theta, \mathbf{10} \} = \begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\theta'_{(1,2,4)} = R^{-1}_{(1,2,4)} \max\{ R_{(1,2,4)}\theta, \mathbf{10} \} = \begin{bmatrix}10\\-5/3\\5/3\end{bmatrix}.$$

$$\theta'_{(1,3,4)} = R^{-1}_{(1,3,4)} \max\{ R_{(1,3,4)}\theta, \mathbf{10} \} = \begin{bmatrix}10\\-5\\5/2\end{bmatrix}.$$

Από τα χαρτοφυλάκια αυτά, μόνο το $\theta'_{(1,2,4)}$ έχει απόδοση μεγαλύτερη από την απόδοση ασφάλισης του θ με κατώτατο όριο k. Για του λόγου το αληθές:

$$R\ \theta'_{(1,2,4)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 35/3 \\ 15 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Άρα, το χαρτοφυλάκιο $\theta'_{(1,2,4)}$ αποτελεί το μοναδικό χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage. Βρήκαμε, δηλαδή, μια λύση ανεξάρτητη των τιμών των χρεογράφων απαλλαγμένες από ευκαιρίες για arbitrage.

Παράδειγμα 2.3 (Aliprantis, Polyrakis, Tourky, 2002) (Μη-πλήρεις αγορές με περισσότερα από ένα μόνο δυνητικά χαρτοφυλάκια ασφάλισης). Θεωρούμε μία αγορά με πίνακα αποδόσεων :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και θεωρούμε, πάλι, το χαρτοφυλάκιο θ = (1, 2, 3). Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θ, Rθ, ισούται με :

$$R\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2+1\times3+0\times0 \\ 1\times1+1\times2+5\times3+0\times0 \\ 1\times1+0\times2+3\times3+0\times0 \\ 1\times1+0\times2+0\times3+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η απόδοση ασφάλισης του χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο k = 10 είναι :

$$\max\{R\theta, \mathbf{10}\} = \max\left\{\begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Η απόδοση αυτή δεν είναι εμπορεύσιμη (διαφορετικός αριθμός διαθέσιμων χρεογράφων και καταστάσεων του κόσμου).

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τέσσερα χαρτοφυλάκια (το πολύ) μέσα από τους τέσσερις 3x3 πίνακες, των οποίων οι γραμμές εκπορεύονται από τον πίνακα αποδόσεων R. Αυτοί οι πίνακες είναι :

$$\mathrm{R}_{(1,\,2,\,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{R}_{(1,\,2,\,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{R}_{(1,\,3,\,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{R}_{(2,\,3,\,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και οι τέσσερις αυτοί πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι θεωρούμε τα παρακάτω χαρτοφυλάκια :

$$\theta'_{(1,\,2,\,3)} = \mathrm{R}^{-1}_{(1,2,3)} \max \{\, \mathrm{R}_{(1,2,3)}\theta,\ \mathbf{10} \,\} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}.$$

$$\theta'_{(1,\,2,\,4)} = \mathrm{R}^{-1}_{(1,2,4)} \max \{\, \mathrm{R}_{(1,2,4)}\theta,\ \mathbf{10} \,\} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8/9 \\ 16/9 \end{bmatrix}.$$

$$\theta'_{(1,\,3,\,4)} = \mathrm{R}^{-1}_{(1,3,4)} \max \{\, \mathrm{R}_{(1,3,4)}\theta,\ \mathbf{10} \,\} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\theta'_{(2,\,3,\,4)} = \mathrm{R}^{-1}_{(2,3,4)} \max \{\, \mathrm{R}_{(2,3,4)}\theta,\ \mathbf{10} \,\} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι τα χαρτοφυλάκια $\theta'_{(1,\,2,\,4)}$ και $\theta'_{(2,\,3,\,4)}$ έχουν απόδοση μεγαλύτερη από την απόδοση ασφάλισης του θ με κατώτατο όριο k. Έτσι :

$$\mathrm{R}\,\theta'_{(1,\,2,\,4)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 15/3 \\ 10 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{R}\,\theta'_{(2,\,3,\,4)} = \begin{bmatrix} 26 \\ 18 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ας πάρουμε τώρα τρεις τιμές απαλλαγμένες από ευκαιρίες για arbitrage :

1. Έστω q = (1, 1, 1).

Από την εξίσωση $q \cdot \theta'_{(1,\ 2,\ 4)} = 10\ \frac{8}{9} < q \cdot \theta'_{(2,\ 3,\ 4)} = 18$, βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για την τιμή q είναι το $\theta'_{(1,\ 2,4)}$.

2. Έστω q = (4, 1, 12).

Έχουμε : $q \cdot \theta'_{(1,\ 2,\ 4)} = 60 + \frac{4}{9}$ και $q \cdot \theta'_{(2,\ 3,\ 4)} = 48$.

Άρα, $q \cdot \theta'_{(1,\ 2,\ 4)} > q \cdot \theta'_{(2,\ 3,\ 4)}$ και έτσι το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για την τιμή q είναι το $\theta'_{(2,\ 3,\ 4)}$.

3. Έστω q = (11, 5, 25).

Έχουμε : $q \cdot \theta'_{(1,\ 2,\ 4)} = q \cdot \theta'_{(2,\ 3,\ 4)} = 150$.

Άρα, και τα δύο χαρτοφυλάκια αποτελούν χαρτοφυλάκια ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για την τιμή q.

2.3.7 Συμπέρασμα

Ολοκληρώνουμε με μια τελική παρατήρηση. Ένα χαρτοφυλάκιο είναι δυνητικά χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αν και μόνο αν αναπαράγει πλήρως την απόδοση ασφάλισης και αναπαράγει τέλεια την απόδοση ασφάλισης μέσω ενός συνόλου I από J καταστάσεις του κόσμου για τις οποίες η R_I αποτελεί μια ψευδο-πλήρη αγορά.

3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

3.1 Εισαγωγή

Στις χρηματοοικονομικές αγορές υπάρχει συνήθως μια διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής αγοράς και της ελάχιστης τιμής πώλησης για ένα συγκεκριμένο χρεόγραφο. Η διαφορά αυτή υπάρχει εξαιτίας κάποιων παροδικών αναντιστοιχιών και εξαιτίας του κινήτρου για κέρδος εκείνων που κινούν τα νήματα των αγορών. Επιπλέον, οι επενδυτές εκείνοι που δεν είναι μέλη του χρηματιστηρίου θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την βοήθεια κάποιων μεσολαβητών (brokers), οι οποίοι αμείβονται για τις υπηρεσίες τους καθώς και για τα κόστη συναλλαγών. Το αποτέλεσμα, είναι κάποιος κοινός επενδυτής να μην μπορεί να πουλήσει κάποιο χρεόγραφο στην ίδια τιμή που το αγόρασε.

Πολύ συχνά, παρατηρείται και το γεγονός, το ίδιο χρεόγραφο, το οποίο μπορεί να διαπραγματεύεται σε πολλές αγορές, να διαπραγματεύεται σε διαφορετική τιμή στην εκάστοτε αγορά. Κάτι τέτοιο, όμως, επιτρέπει στους επενδυτές που κυνηγούν το arbitrage να πετύχουν επιπλέον κέρδος αγοράζοντας το χρεόγραφο στην αγορά εκείνη που πωλείται φθηνότερα και αυτομάτως πουλώντας το στην αγορά που πωλείται ακριβότερα. Η δραστηριότητα των επενδυτών αυτών είναι που διατηρεί τις αναντιστοιχίες σε μικρή κλίμακα.

3.2 Σκοπός

Σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι δημιουργήσουμε μια παραλλαγή του παραδοσιακού μοντέλου της ισορροπίας στην διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων, κατά την οποία θα ήταν πιθανό να αναλύσουμε τις συνέπειες του κόστους συναλλαγών στην λειτουργία των αγορών.

Στην προσπάθειά μας αυτή, θα βασιστούμε εν μέρει στην προσέγγιση του Duncan K. Foley και στο άρθρο του με τίτλο ‘’Economic Equilibrium with Costly Marketing‘’ [15]. Παρ’ όλο που η μεθοδολογία του Foley αφορά, κυρίως, εμπορεύματα, θεωρούμε πως η αναπροσαρμογή του μοντέλου και στην κατηγορία των χρεογράφων θα ήταν κατατοπιστική ως προς τις συνέπειες που επιφέρουν τα κόστη συναλλαγών στην κυριαρχία των χαρτοφυλακίων και επιπλέον στον καθορισμό του χαρτοφυλακίου της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου.

3.3 Η Ανάλυση της Μεθόδου

Αρχικά παρατίθενται τα κύρια στοιχεία και η μεθοδολογία της προαναφερθείσας παραλλαγής του παραδοσιακού μοντέλου, σύμφωνα με την αναγωγή από εμπορεύματα σε χρεόγραφα :

Η βασική πτυχή της τροποποίησης αυτής, είναι η εναλλακτική προσέγγιση της έννοιας της ‘’ τιμής ‘’. Εισάγουμε δύο τιμές στην εκάστοτε αγορά : μια τιμή αγοράς (q^B) και μια τιμή, μικρότερη, πώλησης του χρεογράφου (q^S). Η διαφορά αυτή μεταξύ των τιμών, οδηγεί σε ένα εισόδημα το οποίο αντισταθμίζει τα έξοδα εκείνα που χρησιμοποιούνται στην λειτουργία των αγορών.

Για καθένα εκ των i επενδυτών υπάρχει ένα σύνολο $\Theta^i \subset \varphi^m$ (από την στιγμή που υπάρχει m αριθμός χρεογράφων στον κόσμο) που ορίζει τον αριθμό των εφικτών, με την έννοια των βιολογικά και τεχνικά εφαρμόσιμων, επενδυτικών χαρτοφυλακίων. Στο σύνολο Θ^i υπάρχει μια σχέση διάταξης όσον αφορά την προτίμηση του επενδυτή που συμβολίζεται με $\succcurlyeq_i$.

Το σύνολο $\Theta = \sum_i \Theta^i$ αποτελεί το σύνολο όλων των χαρτοφυλακίων των επενδυτών. Το σύνολο $\widehat{\Theta}^i$ αποτελεί το ‘’ εφικτό ‘’ σύνολο χαρτοφυλακίων του κάθε επενδυτή, δηλαδή το σύνολο των χαρτοφυλακίων του κάθε επενδυτή τα οποία οι αγορές μπορούν να διαθέσουν σε αυτόν.

Θα κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις για το σύνολο Θ^i και την σχέση διάταξης $\succcurlyeq_i$.

1. Κάθε σύνολο Θ^i έχει ένα κάτω φράγμα. (Δηλαδή, το σύνολο Θ έχει και αυτό κάτω φράγμα).
2. Για κάθε i, το σύνολο Θ^i είναι κλειστό και κυρτό.
3. Για κάθε χαρτοφυλάκιο $\hat{\theta}^i \in \widehat{\Theta}^i$, υπάρχει $\theta^i \in \Theta^i$ για το οποίο ισχύει $\theta^i \succ \hat{\theta}^i$. (Η υπόθεση αυτή υποδηλώνει πως η συνολική παραγωγική δυνατότητα της οικονομίας δεν αρκεί για να ικανοποιήσει όλους τους επενδυτές.)
4. Για κάθε $\theta^i \in \Theta^i$ τα σύνολα :

$$\{ \hat{\theta}^i \in \Theta^i \,/\, \hat{\theta}^i \succcurlyeq_i \theta^i \} \quad \text{και} \quad \{ \hat{\theta}^i \in \Theta^i \,/\, \hat{\theta}^i \preccurlyeq_i \theta^i \}$$

   είναι κλειστά.
5. Για κάθε $\theta^i \in \Theta^i$ το σύνολο :

$$\{ \hat{\theta}^i \in \Theta^i \,/\, \hat{\theta}^i \succcurlyeq_i \theta^i \}$$

   είναι κυρτό.

6. $0 \in \Theta^i$ για κάθε i.

Όπως προείπαμε, ο κάθε επενδυτής έχει να αντιμετωπίσει δύο τιμές, την q^B και την q^S. Το κόστος κάθε χαρτοφυλακίου $θ^i$ εξαρτάται από δύο διανύσματα $θ^{iB}$ και $θ^{iS}$ τα οποία ορίζονται ως εξής :

$$θ_j^{iB} = θ^+ = \max[θ_j^i, 0] \quad \text{και} \quad θ_j^{iS} = θ^- = \min[θ_j^i, 0] ,$$

όπου το $θ^{iB}$ αποτελεί το διάνυσμα των θέσεων αγοράς και, αντίστοιχα, το $θ^{iS}$ το διάνυσμα των θέσεων πώλησης. Το κόστος κάθε χαρτοφυλακίου $θ^i$, λοιπόν, ισούται με $q^B θ^{iB} + q^S θ^{iS}$.

Για το εκάστοτε προς επένδυση ποσό w^i, ο επενδυτής i περιορίζεται από το σύνολο $B^i(q^S, q^B, w^i) = \{ θ^i \in Θ^i / θ^i = θ^{iB} + θ^{iS}$, όπου $q^B θ^{iB} + q^S θ^{iS} \leq w^i \}$. Μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε πως αν ίσχυε $q_J^B < q_j^S$ τότε κάθε επενδυτής θα μπορούσε να αγοράσει και να πουλήσει κάθε χρεόγραφο j και να επωφεληθεί του κέρδους. Έτσι, υποθέτουμε πάντα πως $q^B \geq q^S$ με $q^S \geq 0$, όπου $π = q^B - q^S$.

Αν για κάθε επενδυτή ισχύει $w^i = 0$ και επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο $θ^i$ το κόστος του οποίου είναι $q^B θ^{iB} + q^S θ^{iS} = 0$, τότε στο σύνολο Θ θα ισχύει $q^B θ^B + q^S θ^S = 0$, όπου $θ^B = \sum_i θ^{iB}$ και $θ^S = \sum_i θ^{iS}$ ή ισοδύναμα αν $z = θ^B + θ^S$, $(q^B - q^S) θ^B = - q^S z$.

Το διάνυσμα z αποτελεί ένα διάνυσμα προσφοράς και ζήτησης των επενδυτών. Για κάθε ζεύγος τιμών (q^B, q^S) οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να καταναλώσουν πόρους τόσους όση και η αξία του επιπλέον ποσού που πρέπει να δώσουν λόγω των υψηλότερων τιμών αγοράς. Σε μια καθαρά χρηματιστηριακή αγορά, το διάνυσμα z αναπαριστά τα κόστη, εκείνα, που επιβαρύνουν τους επενδυτές για τα κόστη συναλλαγών.

Οι απαιτήσεις των επενδυτών σε περιβάλλον δύο τιμών (q^B, q^S) έχουν, όπως αποδεικνύεται, την ίδια συνοχή και ιδιότητες κύρτωσης που ισχύουν στο περιβάλλον της μίας τιμής (q). Ο κάθε επενδυτής της οικονομίας προσαρμοσμένης στις δύο τιμές είναι μαθηματικά ισότιμος του επενδυτή της οικονομίας προσαρμοσμένης στην ενιαία τιμή των χρεογράφων.

Ένας ενδιαφέρον τρόπος για να περιγράψουμε τις προτιμήσεις των επενδυτών στο περιβάλλον δύο τιμών (q^B, q^S) υποδεικνύεται μέσα από τον περιορισμό του προϋπολογισμού :

$$q^S θ + (q^B - q^S) θ^B = q^S θ + π \cdot θ^B \leq w.$$

Οι τιμές πώλησης εφαρμόζονται στο σύνολο της οικονομίας, με ένα επιπλέον κόστος να προστίθεται στις τιμές αγοράς ως κόστος συναλλαγών. Στην πραγματικότητα, είναι πιθανό να μπορούμε να ορίσουμε ένα καινούργιο σύνολο χαρτοφυλακίων $\bar{Θ}^i \subset φ^{2m}$, με καινούργιες προτιμήσεις επενδυτών και σχέση διάταξης όσον αφορά τις προτιμήσεις των επενδυτών $\succcurlyeq_i$’, μέσα από τις σχέσεις :

a. $\bar{Θ}^i = \{ (θ, z) / θ \in θ^i , z_j \geq \max [θ_j , 0]$ για $j = 1,..., m \}$

b. αν $(θ, z)$ και $(\bar{θ}, \bar{z}) \in \bar{Θ}^i$ τότε $(θ, z) \succcurlyeq_i' (\bar{θ}, \bar{z})$ αν $θ \succcurlyeq_i' \bar{θ}$ στο $Θ^i$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως αν το σύνολο $Θ^i$ και η σχέση διάταξης $\succcurlyeq_i$ ικανοποιούν τις υποθέσεις (1-5) που παραθέσαμε παραπάνω, τότε οι υποθέσεις αυτές θα ικανοποιούνται και από το σύνολο $\overline{Θ}^i$ και τη σχέση διάταξης $\succcurlyeq_i$'.

Το στοιχείο στο οποίο πρέπει να βασιστούμε για να δείξουμε πως το σύνολο $\overline{Θ}^i$ και η σχέση διάταξης $\succcurlyeq_i$' ικανοποιούν και τις σχέσεις (a,b) είναι η απόδειξη πως το σύνολο $\overline{Θ}^i$ είναι κυρτό και κλειστό αν το $Θ^i$ είναι, αντίστοιχα, κυρτό και κλειστό, κάτι το οποίο αποδεικνύει ο Duncan K. Foley.

Συνεπώς, όλα τα αποτελέσματα της θεωρίας που βασίζεται στις υποθέσεις (1-6) μπορούν να εφαρμοστούν στους επενδυτές με σύνολο χαρτοφυλακίων $\overline{Θ}^i$ και προτιμήσεις που εκφράζονται μέσα από την σχέση διάταξης $\succcurlyeq_i$' και μέσο αυτού, σε οποιονδήποτε επενδυτή μέσα σε ένα περιβάλλον δύο τιμών (q^B, q^S).

Τα κόστη συναλλαγών είναι κόστη στα οποία υποβάλλονται τα μέρη στη διαδικασία εφαρμογής μιας συμφωνίας. Κάποια από τα κόστη συναλλαγών είναι ευρέως γνωστά στους επενδυτές, όπως για παράδειγμα η προμήθεια που πληρώνουν στο χρηματιστή τους για την αγορά ή την πώληση μετοχών στο χρηματιστήριο. Ακόμη, πολλοί επενδυτές είναι πιθανό να γνωρίζουν ότι τα χρηματιστήρια εφαρμόζουν χρεώσεις για τις συναλλαγές. Υπάρχουν, επίσης, έξοδα χρηματοδότησης για λειτουργίες που σχετίζονται με την δημιουργία θέσεων ανοιχτής πώλησης (short selling) ή για τη χρήση μόχλευσης και μάλιστα η διαφορά μεταξύ της τιμής αγοράς και της τιμής πώλησης (spread) μπορεί επίσης να διαμορφώσει μεγάλο μέρος του συνολικού κόστους της συναλλαγής. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, ένας επενδυτής ο οποίος καλείται να πληρώσει 1% σε έξοδα συναλλαγών χρειάζεται, προκειμένου να το ισοσκελίσει, μία απόδοση της τάξεως του 2%, σε κάθε συναλλαγή. Επομένως, το αντίκτυπο που δημιουργούν τα έξοδα των συναλλαγών στη κερδοφορία είναι τεράστιο.

Όσον αφορά κυρίως τα εμπορεύματα εκεί μπορεί να υπάρξουν και κάποια άλλα κόστη συναλλαγών, όπως της διαφήμισης, του κόστους κράτησης μετοχών ευρείας διανομής, της φθοράς κ.ά.

Η σημαντική ιδιότητα που έχουν τα κόστη συναλλαγών είναι το γεγονός πως αυξάνουν το κόστος του επενδυτή χωρίς, στην ουσία, να αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του χρηματοοικονομικού μέσου που διαπραγματεύονται.

3.3.1 Παραδείγματα

Μετά, λοιπόν, από την ανάλυση της μεθοδολογίας, προχωράμε στις πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα για να διαπιστώσουμε την επίδραση των συναλλακτικών κοστών στις προτιμήσεις των επενδυτών όσον αφορά την επιλογή χαρτοφυλακίων καθώς και την επίδρασή τους στον καθορισμό των χαρτοφυλακίων ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου.

3.3.1.1 Παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων

Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα :

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (2, 6, 0, 1).
3. Μια μετοχή με απόδοση (1, 0, 3, 3).
4. Μια δεύτερη μετοχή με απόδοση (2, 3, 1, 0)
5. Ένα δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς πάνω στη δεύτερη μετοχή με τιμή άσκησης 2, όπου $\max$ { (2, 3, 1, 0) – 2, 0} = (0, 1, 0, 0).

Έστω 2 χαρτοφυλάκια θ_1 και θ_2 επάνω στα παραπάνω χρεόγραφα όπου :

$$\theta_1 = (3, 4, - 3, -2.5, 0.5) \quad \text{και} \quad \theta_2 = (2, - 2, 2, 3, -1) ,$$

με $R\theta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ -8.5 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $R\theta_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Δηλαδή, κανένα εκ των δύο χαρτοφυλακίων δεν έχει απόδοση μεγαλύτερη από το άλλο σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου, άρα κανένα δεν ‘’ κυριαρχεί ‘’ του άλλου σύμφωνα με την διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων.

Έστω μία απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage τιμή $q = (1, 4, 3.1, 2.5, 0.6)$. Το κόστος του κάθε χαρτοφυλακίου είναι :

$$q \cdot \theta_1 = 3.75 \quad \text{και} \quad q \cdot \theta_2 = 7.1.$$

Το χαρτοφυλάκιο θ_1 επιβαρύνει με λιγότερο κόστος τον επενδυτή, δηλαδή το θ_1 είναι προτιμότερο για τον επενδυτή σε θέμα κόστους ($\theta_1 \succcurlyeq_i \theta_2$).

Αναπτύσσουμε την μεθοδολογία για την είσοδο του κόστους συναλλαγών, όπως παραθέσαμε προηγουμένως :

Διαχωρίζουμε το χαρτοφυλάκιο θ_1 σε $\theta_1^+ = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ και $\theta_1^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$,

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3, 2, 1.5, 0.5)$, $q^S = (1/3, 1, 1.1, 1, 0.1)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta_1^+ + q^S\ \theta_1^- = 8.45$

Αντίστοιχα, διαχωρίζουμε το χαρτοφυλάκιο θ_2 σε $\theta_2^+ = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\theta_2^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3, 2, 1.5, 0.5)$, $q^S = (1/3, 1, 1.1, 1, 0.1)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta_2^+ + q^S\ \theta_2^- = 7.73$

Δηλαδή, $q^B\ \theta_2^+ + q^S\ \theta_2^- < q^B\,\theta_1^+ + q^S\ \theta_1^-$.

Άρα βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι προτιμότερο, στον τομέα του κόστους, για τον επενδυτή αλλάζει με την εισαγωγή του κόστους συναλλαγών και είναι το θ_2. Δηλαδή, $\theta_2 \succcurlyeq_i{}' \ \theta_1$.

3.3.1.2 Παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων μηδενικού κόστους

Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα :

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (2, 6, 0, 1).
3. Μια μετοχή με απόδοση (1, 0, 3, 3).
4. Μια δεύτερη μετοχή με απόδοση (2, 3, 1, 0)
5. Ένα δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς πάνω στη δεύτερη μετοχή με τιμή άσκησης 2, όπου max { (2, 3, 1, 0) – 2, 0} = (0, 1, 0, 0).

Έστω 2 χαρτοφυλάκια θ_1 και θ_2 πάνω στα παραπάνω χρεόγραφα όπου :

$$\theta_1 = (3, 2, -2, -3, 2) \quad \text{και} \quad \theta_2 = (8, -4, 2, 4, -12) ,$$

με $R\theta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $R\theta_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Δηλαδή, κανένα εκ των δύο χαρτοφυλακίων δεν έχει απόδοση μεγαλύτερη από το άλλο σε όλες τις καταστάσεις του κόσμου, άρα κανένα δεν ‘’ κυριαρχεί ‘’ του άλλου σύμφωνα με την διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων.

Έστω μία τιμή, απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage, $q = (1, 4, 3, 2, 1/2)$. Το κόστος του κάθε χαρτοφυλακίου είναι :

$$q \cdot \theta_1 = 0 \quad \text{και} \quad q \cdot \theta_2 = 0.$$

Σύμφωνα με την διάταξη κυριαρχίας χαρτοφυλακίων, κανένα εκ των δύο χαρτοφυλακίων δεν κυριαρχεί του άλλου αφού, $q \cdot \theta_2 = q \cdot \theta_1$. Παράλληλα τα δύο χαρτοφυλάκια φαίνεται να είναι μηδενικού κόστους, δηλαδή ίδιας προτίμησης για τον επενδυτή όσον αφορά το κόστος.

Αναπτύσσουμε την μεθοδολογία για την είσοδο του κόστους συναλλαγών όπως παραθέσαμε προηγουμένως, για να δούμε πως διαφοροποιείται το παραπάνω αποτέλεσμα :

Διαχωρίζουμε το χαρτοφυλάκιο θ_1 σε $\theta_1^+ = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\theta_1^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$,

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3, 2, 1.5, 0.25)$, $q^S = (1/3, 1, 1, 0.5, 0.25)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta_1^+ + q^S\ \theta_1^- = 5$

Αντίστοιχα, διαχωρίζουμε το χαρτοφυλάκιο θ_2 σε $\theta_2^+ = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\theta_2^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}$,

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3, 2, 1.5, 0.25)$, $q^S = (1/3, 1, 1, 0.5, 0.25)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta_2^+ + q^S\ \theta_2^- = 8.33$

Δηλαδή, $q^B \theta_1^+ + q^S \theta_1^- < q^B \theta_2^+ + q^S \theta_2^-$.

Παρατηρούμε, λοιπόν με την είσοδο του κόστους συναλλαγών, πως το χαρτοφυλάκιο θ_1 παρουσιάζεται ως προτιμότερο για τον επενδυτή ως προς το κόστος που τον επιβαρύνει σε σύγκριση με το θ_2. Δηλαδή, $\theta_1 \succcurlyeq_i' \theta_2$.

Τα κόστη συναλλαγών, δηλαδή, μπορούν να φέρουν στο φως κρυμμένα κόστη για τον επενδυτή, που μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνονται μηδενικά αλλά στην ουσία υπάρχουν και μπορούν να επηρεάσουν σε μεγάλο βαθμό τις αποφάσεις των επενδυτών.

3.3.1.3 Παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια ασφάλισης με πλήρεις αγορές

Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα :

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Μια μετοχή με απόδοση (1, 5, 3, 5).
3. Ένα δικαίωμα (προαίρεσης) αγοράς πάνω στη μετοχή με τιμή άσκησης 3, όπου max { (1, 5, 3, 5) – 3, 0} = (0, 2, 0, 2).
4. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (1, 0, 3, 1).

Άρα, ο πίνακας αποδόσεων R των χρεογράφων είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο θ = (2, 1, 2, 1). Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θ, Rθ, ισούται με :

$$R\theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 + 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 1 \\ 1\times 2 + 5\times 1 + 2\times 2 + 0\times 1 \\ 1\times 2 + 3\times 1 + 0\times 2 + 3\times 1 \\ 1\times 2 + 5\times 1 + 2\times 2 + 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Η απόδοση ασφάλισης ενός χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο k = 9 ισούται με:

$$\max\{R\theta, \mathbf{9}\} = \max\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, η απόδοση αυτή είναι εμπορεύσιμη (ίδιος αριθμός χρεογράφων και καταστάσεων του κόσμου) και αποτελεί την απόδοση του παρακάτω χαρτοφυλακίου:

$$\theta' = R^{-1}\max\{R\theta, \mathbf{9}\} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -2 & -1 & 2.5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 3.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπου, $R\theta' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 3.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}.$

Άρα, το χαρτοφυλάκιο θ' αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή χρεογράφου απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage.

Αν, λοιπόν εναλλακτικά χρησιμοποιούσαμε ένα χαρτοφυλάκιο θ'', η απόδοση του οποίου θα ήταν μια εμπορεύσιμη απόδοση ασφάλισης μεγαλύτερη της max {Rθ, **9**}, τότε το χαρτοφυλάκιο θ'' θα αναπαράγει υπέρ του δέοντος την απόδοση που εξαρτάται από τις μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου και επειδή η απόδοση Rθ'' θα κυριαρχεί της απόδοσης ασφάλισης max {Rθ, **k**}, το θ'' θεωρείται χαρτοφυλάκιο ασφάλισης.

Έστω, λοιπόν το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης θ'' = $\begin{bmatrix} 8.5 \\ -0.5 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ για το οποίο ισχύει :

$$R\theta'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.5 \\ -0.5 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

όπου $\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} \geq \max \{R\theta, \mathbf{9}\} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

Ας πάρουμε τώρα μια τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage :

Έστω q = (2, 7, 1, 3) Από την εξίσωση q · θ' = 17.5 και q · θ'' = 19, βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο θ' , το οποίο είναι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου, είναι φθηνότερο για τον επενδυτή. Τι γίνεται όμως αν εισάγουμε την έννοια του κόστους συναλλαγών :

Διαχωρίζουμε το θ' σε $\theta'^{+} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 3.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\theta'^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε q^B = (1.5, 5, 0.75, 2) , q^S = (0.5, 2, 0.25, 1) με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta'^{+} + q^S\ \theta'^{-} =$ 16.125

Αντίστοιχα, διαχωρίζουμε το θ'' σε $\theta''^{+} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\theta''^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε q^B = (1.5, 5, 0.75, 2) , q^S = (0.5, 2, 0.25, 1) με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta''^{+} + q^S\ \theta''^{-}$ = 15.625

Δηλαδή, $q^B\ \theta''^{+} + q^S\ \theta''^{-} < q^B\ \theta'^{+} + q^S\ \theta'^{-}$.

Άρα βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι προτιμότερο για τον επενδυτή με την εισαγωγή του κόστους συναλλαγών είναι το θ'' . Δηλαδή, $\theta'' \succcurlyeq_i' \theta'$.

3.3.1.4 Παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια ασφάλισης με μη-πλήρεις αγορές

Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα : (δεν υπάρχει διαθέσιμο δικαίωμα προαίρεσης)

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (2, 3, 3, 0).
3. Μια μετοχή με απόδοση (1, 5, 2, 0).

Άρα, ο πίνακας αποδόσεων R των χρεογράφων είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο θ = (1, 2, 3). Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θ, Rθ, ισούται με :

$$R\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η απόδοση ασφάλισης του χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο k = 9 είναι :

$$\max \{R\theta, \mathbf{9}\} = \max \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Η απόδοση αυτή δεν είναι εμπορεύσιμη (διαφορετικός αριθμός διαθέσιμων χρεογράφων και καταστάσεων του κόσμου).

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τέσσερα χαρτοφυλάκια (το πολύ) μέσα από τους τέσσερις 3x3 πίνακες, των οποίων οι γραμμές εκπορεύονται από τον πίνακα αποδόσεων R. Αυτοί οι πίνακες είναι :

$$R_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R_{(1,2,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{(2,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και οι τέσσερις αυτοί πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι θεωρούμε τα παρακάτω χαρτοφυλάκια :

$\theta'_{(1,2,3)} = R^{-1}_{(1,2,3)} \max\{ R_{(1,2,3)}\theta, \mathbf{9} \} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\theta'_{(1,2,4)} = R^{-1}_{(1,2,4)} \max\{ R_{(1,2,4)}\theta, \mathbf{9} \} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1.85714 \\ 3.714286 \end{bmatrix}$.

$\theta'_{(1,3,4)} = R^{-1}_{(1,3,4)} \max\{ R_{(1,3,4)}\theta, \mathbf{9}\} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

$\theta'_{(2,3,4)} = R^{-1}_{(2,3,4)} \max\{ R_{(2,3,4)}\theta, \mathbf{9} \} = \begin{bmatrix} 9 \\ -0.67 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι τα χαρτοφυλάκια $\theta'_{(1,3,4)}$ και $\theta'_{(2,3,4)}$ έχουν απόδοση μεγαλύτερη από την απόδοση ασφάλισης του θ με κατώτατο όριο **k**. Έτσι :

$$R\,\theta'_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 37 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R\,\theta'_{(2,3,4)} = \begin{bmatrix} 10.66667 \\ 22 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ας πάρουμε τώρα μια τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage :

Έστω $q = (1, 2, 1)$ Από την εξίσωση $q \cdot \theta'_{(1,3,4)} = 9 < q \cdot \theta'_{(2,3,4)} = 10.66667$, βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για την τιμή q είναι το $\theta'_{(1,3,4)}$.

Διαχωρίζουμε το $\theta'_{(1,3,4)}$ σε $\theta'^{+}_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ και $\theta'^{-}_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3/2, 2/3)$, $q^S = (1/3, 1/2, 1/3)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta'^{+}_{(1,3,4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(1,3,4)} = 9.3333$

Αντίστοιχα, διαχωρίζουμε το $\theta'_{(2,\,3,\,4)}$ σε $\theta'^{+}_{(2,\,3,\,4)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\theta'^{-}_{(1,\,3,\,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}67 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 3/2, 2/3)$, $q^S = (1/3, 1/2, 1/3)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta'^{+}_{(2,\,3,\,4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(2,\,3,\,4)} = 7.66667$

$$\text{Δηλαδή, } q^B\ \theta'^{+}_{(2,\,3,\,4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(2,\,3,\,4)} < q^B\ \theta'^{+}_{(1,\,3,\,4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(1,\,3,\,4)}$$

Άρα βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου αλλάζει με την εισαγωγή του κόστους συναλλαγών και είναι το $\theta'_{(2,\,3,\,4)}$. Δηλαδή $\theta'_{(2,\,3,\,4)} \succcurlyeq_{i'} \theta'_{(1,3,4)}$.

Ακολουθώντας την διαδικασία για διαφορετικά κατώτερα όρια $\mathbf{k}$, παρατηρήσαμε πως η ίδια εναλλαγή στα χαρτοφυλάκια ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου από το $\theta'_{(1,\,3,\,4)}$ στο $\theta'_{(2,\,3,\,4)}$ ισχύει για $6 \le \mathbf{k} \le 12$.

3.3.1.5 Παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια ασφάλισης με μη-πλήρεις αγορές για k = 0

Έστω ότι υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις στον κόσμο και η αγορά έχει τα παρακάτω, ανεξάρτητα μεταξύ τους, χρεόγραφα (δεν υπάρχει διαθέσιμο δικαίωμα προαίρεσης) :

1. Ένα ομόλογο του δημοσίου με απόδοση **1** = (1, 1, 1, 1).
2. Ένα εταιρικό ομόλογο με απόδοση (2, 2, 0, 1).
3. Μια μετοχή με απόδοση (1, 3, 1, 0).

Άρα, ο πίνακας αποδόσεων R των χρεογράφων είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο θ = (3, -2, 4). Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θ, Rθ, ισούται με :

$$R\theta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times (-2) + 1 \times 4 + 0 \times 0 \\ 1 \times 3 + 2 \times (-2) + 4 \times 3 + 0 \times 0 \\ 1 \times 3 + 0 \times (-2) + 1 \times 4 + 0 \times 0 \\ 1 \times 3 + 1 \times (-2) + 0 \times 4 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η απόδοση ασφάλισης του χαρτοφυλακίου θ σε ένα κατώτατο όριο k = 0 (δηλαδή στο σύνολο όλων των χαρτοφυλακίων με θετικές αποδόσεις) είναι :

$$\max\{R\theta, \mathbf{0}\} = \max\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Η απόδοση αυτή δεν είναι εμπορεύσιμη (διαφορετικός αριθμός διαθέσιμων χρεογράφων και καταστάσεων του κόσμου).

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τέσσερα χαρτοφυλάκια (το πολύ) μέσα από τους τέσσερις 3x3 πίνακες, των οποίων οι γραμμές εκπορεύονται από τον πίνακα αποδόσεων R. Αυτοί οι πίνακες είναι :

$$R_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_{(1,2,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{(2,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και οι τέσσερις αυτοί πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι θεωρούμε τα παρακάτω χαρτοφυλάκια :

$\theta'_{(1,2,3)} = R^{-1}_{(1,2,3)} \max\{R_{(1,2,3)}\theta, \mathbf{0}\} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\theta'_{(1,2,4)} = R^{-1}_{(1,2,4)} \max\{R_{(1,2,4)}\theta, \mathbf{0}\} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$\theta'_{(1,3,4)} = R^{-1}_{(1,3,4)} \max\{R_{(1,3,4)}\theta, \mathbf{0}\} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\theta'_{(2,3,4)} = R^{-1}_{(2,3,4)} \max\{R_{(2,3,4)}\theta, \mathbf{0}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι τα χαρτοφυλάκια $\theta'_{(1,2,3)} = \theta'_{(1,3,4)}$ και $\theta'_{(2,3,4)}$ έχουν απόδοση μεγαλύτερη από την απόδοση ασφάλισης του θ με κατώτατο όριο $\mathbf{k}$. Έτσι :

$$R\,\theta'_{(1,2,3)} = R\,\theta'_{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R\,\theta'_{(2,3,4)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε τώρα μια τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage, έστω την $q = (1, 3, 2)$.

Από την εξίσωση : $q \cdot \theta'_{(1,2,3)} = q \cdot \theta'_{(1,3,4)} = 5 < q \cdot \theta'_{(2,3,4)} = 7$, βλέπουμε ότι χαρτοφυλάκια ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου για την τιμή q είναι τα $\theta'_{(1,2,3)}$ και $\theta'_{(1,3,4)}$.

Διαχωρίζουμε το $\theta'_{(1,2,3)}$ σε $\theta'^{+}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\theta'^{-}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε $q^B = (2/3, 5/2, 3/2)$, $q^S = (1/3, 1/2, 1/2)$ με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta'^{+}_{(1,2,3)} + q^S\ \theta'^{-}_{(1,2,3)} = 7$.

*Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για το χαρτοφυλάκιο $\theta'_{(1, 3, 4)}$.

Αντίστοιχα, διαχωρίζουμε το $\theta'_{(2, 3, 4)}$ σε $\theta'^{+}_{(2, 3, 4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\theta'^{-}_{(1, 3, 4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

και την τιμή q, σε q^B = (2/3, 5/2, 3/2) , q^S = (1/3, 1/2, 1/2) με $q^B > q^S$.

Τότε : $q^B\ \theta'^{+}_{(2, 3, 4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(2, 3, 4)} = 6.66667$

Δηλαδή, $q^B\ \theta'^{+}_{(2, 3, 4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(2, 3, 4)} < q^B\ \theta'^{+}_{(1, 2, 3)} + q^S\ \theta'^{-}_{(1, 2, 3)}$

και $q^B\ \theta'^{+}_{(2, 3, 4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(2, 3, 4)} < q^B\ \theta'^{+}_{(1, 3, 4)} + q^S\ \theta'^{-}_{(1, 3, 4)}$.

Άρα βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης κινδύνου αλλάζει με την εισαγωγή του κόστους συναλλαγών και είναι το $\theta'_{(2, 3, 4)}$. Δηλαδή $\theta'_{(2, 3, 4)} \succcurlyeq_{i'} \theta'_{(1, 2, 3)} = \theta'_{(1, 3, 4)}$.

3.3.2 Συμπεράσματα

Θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε τα βασικά συμπεράσματα από την ανάπτυξη των παραπάνω παραδειγμάτων.

Το πρώτο παράδειγμα καταπιάνεται με την ύπαρξη δύο διαθέσιμων χαρτοφυλακίων, τα οποία αποτελούνται από τα ίδια χρεόγραφα και το μόνο το οποίο διαφέρει είναι ο αριθμός του εκάστοτε χρεογράφου στο κάθε χαρτοφυλάκιο. Παρατηρούμε, πως μία φαινομενικά εύκολη απόφαση για τον επενδυτή, ως προς το κόστος, μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα αν συμπεριληφθούν τα κόστη συναλλαγών. Το πρώτο χαρτοφυλάκιο φαντάζει φθηνότερο. Κάτι τέτοιο όμως, ανατρέπεται στο περιβάλλον δύο τιμών, αγοράς και πώλησης, με αποτέλεσμα να αποδεικνύεται πως η σωστή επιλογή για τον επενδυτή είναι το δεύτερο χαρτοφυλάκιο. Γνωρίζοντας πως τα κόστη συναλλαγών επιβαρύνουν περισσότερο τις θέσεις αγοράς (long position) ($q^B > q^S$) μπορούμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος με μια πρώτη ματιά, αφού παρατηρούμε πως το χαρτοφυλάκιο θ_1 περιλαμβάνει περισσότερες θέσεις αγοράς σε χρεόγραφα που δίνουν μεγαλύτερες αποδόσεις, συνεπώς είναι και πιο ακριβά. Ωστόσο, χωρίς την εισαγωγή του κόστους συναλλαγών κάτι τέτοιο δεν αποτυπώνεται στα αποτελέσματα. Παρατηρήσαμε επίσης πως διαφοροποιώντας τα σταθμά στις τιμές q^B και q^S το τελικό αποτέλεσμα αλλάζει πάλι και παραμένει φθηνότερο τα χαρτοφυλάκιο $θ_1$. Συνεπώς, παράλληλα με τα κόστη συναλλαγών μεγάλο μέρος στο υπολογισμό του αποτελέσματος κατέχει και το μέγεθος των συναλλακτικών κοστών.

Με το δεύτερο παράδειγμα αποτυπώνεται εντονότερα το μέγεθος της συμβολής του κόστους συναλλαγών στις προτιμήσεις των επενδυτών. Δύο χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από τα ίδια χρεόγραφα, αρχικά φαντάζουν μηδενικού κόστους, κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage. Το, αρχικά, μηδενικό κόστος και στα δύο χαρτοφυλάκια εξασφαλίζεται μέσα από τον κατάλληλο συνδυασμό θέσεων αγοράς και πώλησης στα χρεόγραφα. Το αποτέλεσμα, μετά την μεθοδολογία εισαγωγής του κόστους συναλλαγών, φέρνει στην επιφάνεια τις συνέπειες του κόστους αυτού διατάσσοντας (μιλώντας και σε όρους διάταξης κυριαρχίας, την οποία έχουμε ορίσει, ως προς την προτίμηση) το χαρτοφυλάκιο $θ_1$ προτιμότερο για τον επενδυτή. Μάλιστα, αξίζει να αναφέρουμε πως σε μια τέτοια περίπτωση χαρτοφυλακίων μηδενικού κόστους το μέγεθος των συναλλακτικών κοστών παίζει μεν αρκετά σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα, παρ' όλα αυτά η ύπαρξή τους, και μόνο, αρκεί για να καταστήσει ένα εκ των δύο χαρτοφυλακίων προτιμότερο του άλλου.

Με την επόμενο παράδειγμα επιχειρούμε να ερευνήσουμε την επίδραση του κόστους συναλλαγών στον καθορισμό του χαρτοφυλακίου ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου, με γνώμονα την προτίμηση των επενδυτών. Όπως και στις δύο πρώτες εφαρμογές, έτσι και σε αυτήν, ανάμεσα στα χρεόγραφα που έχουμε συμπεριλάβει στις υποθέσεις μας, συγκαταλέγονται και δικαιώματα προαίρεσης πάνω σε μετοχές οι οποίες περιλαμβάνονται, επίσης, στα χαρτοφυλάκια. Κάτι τέτοιο παρατηρείται αρκετά συχνά καθώς οι επενδυτές σε αρκετές των περιπτώσεων επιλέγουν χαρτοφυλάκια τα οποία περιλαμβάνουν εκτός από μετοχές , τα αντίστοιχα δικαιώματα προαίρεσης πάνω στις μετοχές αυτές με σκοπό να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο σε μια πιθανή πτώση της απόδοσης της μετοχής. Επιπλέον, οι επενδυτές μπορούν να προστατευτούν από ενδεχόμενες απώλειες παίρνοντας θέση σε ένα δικαίωμα προαίρεσης πώλησης με τιμή άσκησης ίσης με αυτή του κατώτατου ορίου k που έχει θεσπιστεί για την ασφάλιση της απόδοσης. Όποτε η απόδοση του χαρτοφυλακίου πέφτει κάτω από το όριο **k** το δικαίωμα προαίρεσης πώλησης πληρώνει την διαφορά μεταξύ του ορίου **k** και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, κάτι τέτοιο προϋποθέτει πως υπάρχουν διαπραγματεύσιμα δικαιώματα προαίρεσης για όλες τι διαθέσιμες μετοχές, κάτι το οποίο συνεπάγεται πλήρεις αγορές. Υπάρχει και η άποψη των C.D. Aliprantis, D.J. Brown και J. Werner που στο άρθρο τους [3] υποστηρίζουν πως η πληρότητα στις αγορές παραγώγων δεν αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου, να είναι ανεξάρτητο των τιμών. Εισάγουν ως απαραίτητη προϋπόθεση την ύπαρξη μιας μεγάλης και ετερογενούς κατηγορίας από μη-πλήρεις αγορές παραγώγων. Ο Edirisinghe (1993) [10] σε μελέτη του για την ασφάλιση του χαρτοφυλακίου υπό την παρουσία συναλλακτικού κόστους και περιορισμών διαπραγμάτευσης, υποστηρίζει πως η καλύτερη δυνατή στρατηγική εξαρτάται από την διαχρονική πορεία της τιμής της μετοχής πάνω στην οποία έχει δημιουργηθεί το εκάστοτε δικαίωμα προαίρεσης. Επιπλέον καταλήγει στο συμπέρασμα πως, υπό την παρουσία κόστους συναλλαγών είναι συνετό οι επενδυτές να λαμβάνουν μεγαλύτερες θέσεις αρχικά και σταδιακά να μειώνουν τις θέσεις τους σε επόμενα διαστήματα ή ακόμη και να μην διαπραγματεύονται καθόλου σε μερικές περιόδους. Τέλος, επισημαίνει πως οι ταμειακές ροές από την στρατηγική αυτή παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από αυτήν που ένας επενδυτής θα επιθυμούσε και έτσι θα ήταν συνετό για να αποφθεχθεί κάτι τέτοιο να επιλέγονται χρεόγραφα με μεγαλύτερη λικτότητα.

Επιστρέφοντας στο τρίτο παράδειγμα, παρουσιάζεται και εδώ το μέγεθος της επίδρασης του κόστους συναλλαγών και στον καθορισμό του χαρτοφυλακίου ασφάλισης με την μεγαλύτερη εφικτή αντιστάθμιση του κινδύνου, σε πλήρεις αγορές. Έχοντας βρει το χαρτοφυλάκιο αυτό για ένα δοσμένο ένα κατώτατο όριο απόδοσης, επιλέγουμε ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο με απόδοση, μάλιστα, μεγαλύτερη από τη απόδοση ασφάλισης που για μια επιλεγμένη τιμή φαίνεται να είναι ακριβότερο από το πρώτο. Μετά την είσοδο του κόστους συναλλαγών και εδώ τα δεδομένα ανατρέπονται και το δεύτερο χαρτοφυλάκιο καταλήγει προτιμότερο για τον επενδυτή.

Στο παράδειγμα σε μη-πλήρεις αγορές υποθέσαμε πως δεν υπάρχει διαθέσιμο δικαίωμα προαίρεσης και δεν συμπεριλάβαμε κάποιο. Το αποτέλεσμα, εδώ, είναι πολύ κατατοπιστικό καθώς εδώ καταλήγουμε σε δύο δυνητικά χαρτοφυλάκια ασφάλισης της ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου. Υπολογίζοντας τον παράγοντα του κόστους, με την απαλλαγμένη από ευκαιρίες για arbitrage τιμή, ως χαρτοφυλάκιο ασφάλισης υποδεικνύεται το $\theta'_{(1,\,3,\,4)}$ ενώ μέσα από της διαδικασία διαχωρισμού των τιμών και την είσοδο του συναλλακτικού κόστους ως χαρτοφυλάκιο ασφάλισης ορίζεται το εναλλακτικό $\theta'_{(2,\,3,\,4)}$. Αξίζει, στο σημείο αυτό, να αναφέρουμε πως το γεγονός ότι επαναλάβαμε την διαδικασία αυτή για διαφορετικά κατώτατα όρια k καταλήγοντας στο συμπέρασμα πως η εναλλαγή αυτή επαναλαμβάνεται για $6 \leq \mathbf{k} \leq 12$, αποδεικνύει τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η επιλογή του ορίου αυτού, καθώς για $\mathbf{k} = 5$ ή 13 θα είχαμε διαφορετικά αποτελέσματα.

Τέλος, επαναλάβαμε πάλι την διαδικασία σε μη-πλήρεις αγορές, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας ως κατώτατο όριο για την απόδοση ασφάλισης το μηδέν, αποδεχόμενοι , δηλαδή, όλα τα χαρτοφυλάκια εκείνα με θετική απόδοση. Και σε αυτή την περίπτωση, μέσα από 3 δυνητικά χαρτοφυλάκια ασφάλισης της ασφάλισης της ελάχιστης πριμοδότησης του κινδύνου, τα κόστη συναλλαγών έχουν την δυνατότητα να μεταστρέψουν τις προτιμήσεις των επενδυτών.

Σαφώς, τα κόστη συναλλαγών δεν οδηγούν πάντα τις προτιμήσεις των επενδυτών προς άλλες κατευθύνσεις. Πολλές φορές τα κόστη αυτά ενδέχεται να είναι μικρά και να μην παρουσιάζουν μεγάλη βαρύτητα στο κόστος των επενδυτικών στρατηγικών.

Δυστυχώς, όμως, αρκετοί επενδυτές, κυρίως εκείνοι που δεν είναι εξοικειωμένοι με την λειτουργία των αγορών, και απευθύνονται σε διαμεσολαβητές (brokers), είναι αυτοί που αντιμετωπίζουν τα μεγαλύτερα συναλλακτικά κόστη, σε συνδυασμό με την πληρωμή των διαμεσολαβητών αυτών, και είναι και αυτοί που δεν γνωρίζουν πώς να προστατευτούν από τα κόστη αυτά.

Τα κόστη συναλλαγών, είτε είναι ικανά να αλλάξουν τις προτιμήσεις των επενδυτών είτε όχι, πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν καθώς είναι ικανά να οδηγήσουν τις επενδυτικές επιλογές τους σε νέες τροχιές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Aliprantis C.D, Border C.Kim, (2006) " Infinite Dimensional Analysis, Chapter 8: Riesz Spaces ", Springer Berlin Heidelberg.

2. Aliprantis C.D, Brown D.J, Polyrakis I.A, Werner J, (1998) " Portfolio dominance and optimality in infinite security markets ", Journal of Mathematical Economics, pp. 347–366.

3. Aliprantis C.D, Brown D.J, Werner J, (2000) " Minimum-cost portfolio insurance", Journal of Economics Dynamics & Control 24, pp. 1703–1719.

4. Aliprantis C.D, Polyrakis I.A, Rabee Tourky, (2002) " The cheapest hedge ", Journal of Mathematical Economics, pp. 269-295.

5. Arrow K.J, (1953) "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", Review of Economic Studies 31, pp. 91-96.

6. Black F, Scholes M, (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81, pp. 637-654.

7. Cournot A, (1838), Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, London.

8. Diamond P.A, (1967) "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty", American Economic Review 57, pp. 759-776.

9. Duffie D, Shafer W, (1985) "Equilibrium in Incomplete Markets I: Basic Model of Generic Existence", Journal of Mathematical Economics 14, pp. 285-300.

10. Edirisinghe C, (1993) "Optimal Replication of contingent claims under portfolio constraints " , Review of Financial Studies 11, pp. 59-81

11. Fisher I, (1896) "Appreciation and Interest", Publications of the American Economic Association 11.

12. Fisher I, (1906), The Nature of Capital and Income, New York: Sentry Press.

13. Fisher I, (1907), The Rate of Interest, New York: Macmillan.

14. Fisher I, (1930), The Theory of Interest, New York: Macmillan.

15. Foley K. Duncan, (1970) ‘’Economic Equilibrium with Costly Marketing’’, Journal of Economic Theory 2, pp.276-291.

16. Geanakoplos J, Magill M, Quinzii M, Drèze J, (1990) "Generic Inefficiency of Stock Market Equilibrium When Markets are Incomplete", Journal of Mathematical Economics 19, pp. 113-151.

17. Geanakoplos J, Polemarchakis H, (1986) "Existence, Regularity, and Constrained Suboptimality of Competitive Allocations when Markets are Incomplete" in Uncertainty, Information and Communication: Essays in Honor of Kenneth Arrow, Volume 3, W.P. Heller, R.M.Ross and D.A. Starrett eds. , Cambridge: Cambridge University Press.

18. Geanakoplos J, Shafer W, (1990) "Solving Systems of Simultaneous Equations in Economics", Journal of Mathematical Economics 19, pp. 69-93.

19. Grandmont J.M, (1970) "On the Temporary Competitive Equilibrium", Ph.D. Dissertation,University of California, Berkeley.

20. Grandmont J.M, (1974) "On the Short Run Equilibrium in a Monetary Economy", in Allocation Under Uncertainty, Equilibrium and Optimality, J.H. Drèze ed., London: Macmillan.

21. Green J.R, (1972) "Temporary General Equilibrium in a Sequential Trading Model with Spot and Futures Transactions", Econometrica 41, pp. 1103-1123.

22. Hahn F.H, (1971) "Equilibrium with Transaction Costs", Econometrica 39, pp. 417-439.

23. Hahn F.H, (1973) "On Transaction Costs, Inessential Sequence Economies and Money", Review of Economic Studies 40, pp. 449-461.

24. Hammond P.J, (1983) "Overlapping Expectations and Hart's Conditions for Equilibrium in a Securities Model", Journal of Economic Theory 31, pp. 170-175.

25. Hart O.D, (1974) "On the Existence of Equilibrium in a Securities Model", Journal of Economic Theory 9, pp. 293-311.

26. Hart O.D, (1975) "On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is Incomplete", Journal of Economic Theory 11, pp. 418-443.

27. Hicks J.R, (1939) Value and Capital, Oxford: Clarendon Press.

28. Hirsch M, Magill M, Mas-Colell A, (1990) "A Geometric Approach to a Class of Equilibrium Existence Theorems", Journal of Mathematical Economics 19, pp. 95-106.

29. Husseini S.Y,Lasry J.M, Magill M, (1990) "Existence of Equilibrium with Incomplete Markets", Journal of Mathematical Economics 19, pp.39-67.

30. Modigliani F, Miller M.H, (1958) "The Cost of Capital, Corporate Finance, and the Theory of Investment", American Economic Review 48, pp. 261-297.

31. Radner R, (1972) "Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets", Econometrica 40, pp. 289-304.

32. Ross S.A, (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", Journal of Economic Theory 3, pp. 343-362.

33. Ross S.A, (1978) "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams", Journal of Business 51, pp. 453-475.

34. Samuelson P.A, (1957) "Intertemporal Price Equilibrium: A Prologue to the Theory of Speculation", Weltwirtschaftliches Archiv 79, pp. 181-219.

35. Stigum B, (1969) "Competitive Equilibria under Uncertainty", Quarterly Journal of Economics 83, pp. 533-561.

36. Walras L, (1874) Elements d'Economie Pure, Lausanne: Corbaz. English translation, Elements of Pure Economics, Homewood, Il.: R.D. Irwin, (1954).

37. Werner J, (1987) "Arbitrage and the Existence of Competitive Equilibrium", Econometrica 55, pp. 1403-1418.