Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

# Παραμετρικά Μοντέλα Επιβίωσης που προκύπτουν από μεταβολές της Έντασης Κινδύνου και του Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

Μαρία Δημητροπούλου

Επιβλέπων
Γεώργιος Ψαρράκος

Διπλωματική Εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς 2014

Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

# Παραμετρικά Μοντέλα Επιβίωσης που προκύπτουν από μεταβολές της Έντασης Κινδύνου και του Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

Μαρία Δημητροπούλου

Επιβλέπων
Γεώργιος Ψαρράκος

Διπλωματική Εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .............. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή

| | | |
|---|---|---|
| ............................................ | ............................................ | ............................................ |
| Γεώργιος Ψαρράκος | Κωνσταντίνος Πολίτης | Γεωργία Βερροπούλου |
| Λέκτορας | Αναπληρωτής Καθηγητής | Επίκουρος Καθηγήτρια |

Πειραιάς 2014

University of Piraeus
Department of Statistics and Insurance Science
Postgraduate Program in
Actuarial Science and Risk Management

# On the additive and proportional hazards and mean residual lifetime models

Maria Dimitropoulou

Supervisor
Georgios Psarrakos

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus 2014

# Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία υλοποιήθηκε στα πλαίσια της απόκτησης του Μεταπτυχιακού Διπλώματος από το Πανεπιστήμιο Πειραιώς του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που ειδικεύεται στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διοικητική Κινδύνου.

Η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας επήλθε με την βοήθεια κάποιων ανθρώπων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω. Υποστηρικτικό ρόλο αποδίδω στους γονείς μου και στην αδερφή μου οι οποίοι ήταν και είναι πάντα δίπλα μου, καθώς και στους κοντινούς μου ανθρώπους.

Ξεχωριστά, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Λέκτορα Γεώργιο Ψαρράκο για την υποστήριξη και τη βοήθεια καθ΄ όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας, όπως επίσης και τον Αναπλητωτή Καθηγητή Κωνσταντίνο Πολίτη και την Επίκουρη Καθηγήτρια Γεωργία Βερροπούλου.

# Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται παραμετρικά μοντέλα επιβίωσης που προκύπτουν από μεταβολές της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύεται το γνωστικό υπόβαθρο που απαιτείται για να γίνει κατανοητή η διπλωματική. Παρουσιάζονται συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν καταστάσεις που μελετά η Ανάλυση Επιβίωσης και αναλύονται χρήσιμες έννοιες οι οποίες στοχεύουν στην ερμηνεία τόσο της έντασης κινδύνου όσο και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται το προσθετικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και οι συνέπειες που επιφέρει αυτό, στο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και στη συνάρτηση επιβίωσης, σύμφωνα με αρκετές εφαρμογές γνωστών κατανομών.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το προσθετικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και η επίπτωση που επιφέρει αυτό στην ένταση κινδύνου. Αναλύονται αρκετές στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις γήρανσης που ικανοποιούν το μοντέλο, τόσο σε θεωρητικό όσο και πρακτικό επίπεδο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η μελέτη αυτών των δύο μοντέλων επέρχεται μέσα από το θεωρητικό υπόβαθρο που παρουσιάζεται, καθώς και από το πρακτικό μέρος που αναλύεται.

# Abstract

This diploma thesis concerns the study of parametric survival model which arise from changes in the hazard rate and mean residual life functions.

In the first chapter, an introduction is provided to many specialized facets on survival analysis.

In the second chapter, is consider the changes in the mean residual life function when a constant is added to the hazard rate function. The results are illustrated by some particular examples of life distributions.

In the third chapter, the additive mean residual life model is defined. In order to study this model, the necessary relationships of stochastic orders are definied and discussed.

In the final chapter, the proportional hazard rate model and the proportional mean residual life model have been introduced, under a few aging classes and stochastic orders.

# Περιεχόμενα

# 1

# Γνωστικό Υπόβαθρο

## 1.1 Ανάλυση Επιβίωσης

Τι σημαίνει ο όρος «ανάλυση επιβίωσης»; Προτού απαντηθεί αυτό το ερώτημα, θα γίνει μία προσέγγιση στο ρήμα «επιβιώνω». Το ρήμα αυτό παραπέμπει σε οτιδήποτε έχει διάρκεια ζωής, το οποίο σημαίνει γέννηση, ζωή, αλλαγή κατάστασης καθώς ζει και θάνατο. Επομένως, ο όρος «επιβίωση» περιγράφει μία χρονική διάρκεια ή μία διαδικασία προτού επέλθει κάτι και αλλάξει μία κατάσταση.

Η λέξη επιβίωση παραπέμπει σε ζωντανούς οργανισμούς. Συγκεκριμένα, το ανθρώπινο είδος επιβιώνει από το θάνατο ή από αρρώστιες. Αν και η επιβίωση είναι θέμα βιολογικό, σε κάποιες περιπτώσεις θεωρείται και κοινωνικό. Η ζωή του ανθρώπου περνά από πολλά στάδια, όπως είναι η περίοδος σπουδών, η επαγγελματική καριέρα και η περίοδος συνταξιοδότησης. Στο μεσοδιάστημα αυτών των περιόδων, ο άνθρωπος παντρεύεται, βιώνει οικογενειακά προβλήματα, λαμβάνει μέρος σε κοινωνικές δραστηριότητες, αποκτά συνήθειες και ενδιαφέροντα, δηλαδή προσαρμόζει τη ζωή του σύμφωνα με τις συνθήκες που επικρατούν γύρω του. Πολλές καταστάσεις δεν είναι ζωντανοί οργανισμοί, ωστόσο η «διάρκεια ζωής» τους μοιάζει με αυτή των ανθρώπων, έχουν αρχή, κάποια διάρκεια και ένα τέλος. Παραδείγματα αυτών θεωρούνται η λειτουργία ενός αυτοκινήτου μέχρι να υποστεί βλάβη, όπως και το πολιτικό σύστημα που επικρατεί σε μία χώρα μέχρι να καταρρεύσει. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπως και σε άλλες, μία κατάσταση σταματά να υφίσταται όταν συμβεί ένα γεγονός.

Στην πράξη, η ανάλυση επιβίωσης χρησιμοποιείται για να περιγραφούν, υπολογιστούν και να αναλυθούν χαρακτηριστικά καταστάσεων έτσι ώστε να γίνουν προβλέψεις όχι μόνο για την επιβίωση, αλλά και για την διακοπή μίας κατάστασης λόγω της επέλευσης ενός γεγονότος (όπως είναι οι ανύπαντροι μέχρι να παντρευτούν ή οι υγιείς μέχρι να αρρωστήσουν). Στο χώρο της γενετικής, της βιολογίας ή της μηχανικής, η διάρκεια ζωής μπορεί να διακοπεί λόγω ασθένειας, δυσμενών περιβαλλοντικών συνθηκών ή λόγω άλλων παραγόντων. Σε αρκετές έρευνες της ανάλυσης επιβίωσης πραγματοποιούνται συγκρίσεις μεταξύ ομάδων ή κατηγοριών ενός πληθυσμού, ενώ μελετώνται και οι μεταβλητές που επηρεάζουν την επιβίωση. Η εξέταση των εγγενών πληροφοριών είναι σημαντική, γι' αυτό οι επιστήμονες έχουν αναπτύξει πολλές μεθόδους και τεχνικές που συμβάλλουν στη γνωστοποίηση χαρακτηριστικών από διάφορες καταστάσεις επιβίωσης.

Στον ακαδημαϊκό χώρο, η ανάλυση επιβίωσης έχει αποκτήσει εφαρμογές σε αρκετούς κλάδους λόγω της διαθεσιμότητας διαχρονικών δεδομένων και περιστατικών που έχουν καταγράφει από διάφορες καταστάσεις επιβίωσης. Η έννοια της επιβίωσης δεν αναφέρεται πλέον μόνο σε δημογραφικά γεγονότα ή βιολογικά περιστατικά, αντιθέτως έχει επεκταθεί για να δείξει το ευρύτερο πεδίο των φαινομένων που χαρακτηρίζεται από το χρόνο.

Οι κλινικές δοκιμές που γίνονται στο χώρο της ιατρικής, πραγματοποιούνται για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των νέων φάρμακων ή τη θεραπεία μιας νόσου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι ερευνητές εφαρμόζουν την ανάλυση επιβίωσης για να συγκρίνουν τον κίνδυνο θανάτου ή την ανάκαμψη από την ασθένεια μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ομάδων του πληθυσμού που λαμβάνουν διαφορετικά φάρμακα ή θεραπείες. Από τα αποτελέσματα μιας τέτοιας ανάλυσης, μπορούν να παραχθούν σημαντικές πληροφορίες για την πολιτική που θα ακολουθηθεί και για τις επιπτώσεις που θα επιφέρει.

Η ανάλυση επιβίωσης εφαρμόζεται επίσης σε έρευνες που γίνονται στον χώρο της βιολογίας. Οι μαθηματικοί βιολόγοι ενδιαφέρονται για την εξελικτική πορεία (γήρανση) των ανθρώπινων πληθυσμών και άλλων ζωντανών οργανισμών. Η ανάλυση επιβίωσης χρησιμοποιείται για να καταγραφεί ιστορικά η ζωή κάθε είδους και για να αξιολογηθούν οι καταστάσεις επιβίωσης, δεδομένου ότι έχουν ληφθεί υπόψη φυσικές ιδιότητες ή χαρακτηριστικά στη συμπεριφορά και στο περιβάλλον του κάθε πληθυσμού.

Τα δεδομένα επιβίωσης συνήθως συλλέγονται και αναλύονται από κοινωνικές υπηρεσίες με θέματα όπως η ανεργία, η χρήση ναρκωτικών, τα οικογενειακά προβλήματα, η επαγγελματική σταδιοδρομία ή άλλες κοινωνικές δραστηριότητες. Στο χώρο της δημόσιας υγείας, η ανάλυση επιβίωσης μπορεί να εφαρμοστεί για να αξιολογηθεί το επίπεδο ιατρικής περίθαλψης. Αυτή η προσέγγιση έχει ιδιαίτερη σημασία επειδή οι υπηρεσίες του συστήματος υγείας έχουν αντίκτυπο στο χώρο της πολιτικής, στην οργάνωση της οικονομίας και της κοινωνίας, δεδομένου ότι υπεισέρχονται θεμελιώδη φιλοσοφικά ζητήματα που αφορούν τη ζωή, το θάνατο και την ποιότητα της ζωής.

Η ανάλυση επιβίωσης έχει εφαρμογές και σε άλλους τομείς, όπως είναι ο χώρος της μηχανικής, των πολιτικών επιστήμων, της διοίκησης επιχειρήσεων, της γεωργίας και της οικονομίας. Για παράδειγμα στη μηχανική, οι επιστήμονες εφαρμόζουν την ανάλυση επιβίωσης για να ελέγξουν την ανθεκτικότητα των μηχανικών ή των ηλεκτρικών συσκευών. Συγκεκριμένα, η πρόβλεψη της αξιοπιστίας μιας κατηγορίας μηχανημάτων, επέρχεται μετά από την παρακολούθηση ενός δείγματος μηχανημάτων καθ' όλη τη διάρκεια ζωής τους. Σε αυτή, αξιολογούνται τα χαρακτηριστικά και τα υλικά που είναι σχεδιασμένο το προϊόν. Τα αποτελέσματα από μια τέτοια μελέτη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της ποιότητας του προϊόντος.

Ο χρόνος είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την ανάλυση επιβίωσης. Ανέκαθεν αποτελούσε αντικείμενο προβληματισμού και ανάλυσης γιατί επιβεβαίωνε την ανάγκη του ανθρώπου να προβλέπει γεγονότα και καταστάσεις. Ο χρόνος μπορεί να περιγράψει μία οποιαδήποτε κατάσταση επιβίωσης μέσα από συναρτήσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να διευκρινίσουν, να ερμηνεύσουν και να προβλέψουν τις διαφορετικές πτυχές των δεδομένων.

Οι συναρτήσεις που θα αναλυθούν στην συνέχεια θα στηρίζονται στην εξής παραδοχή, ο χρόνος θα θεωρείται συνεχής και μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Η προσέγγιση των συναρτήσεων γίνεται κατά κύριο λόγο, με βάση το βιβλίο του Liu (2012, Κεφάλαιο 1).

## 1.2 Συνάρτηση Κατανομής

Έστω $f(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου $T$. Τότε σύμφωνα με τη θεωρία πιθανοτήτων, η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής $F(t)$, εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $T$ να λάβει τιμές από τη χρονική στιγμή 0 έως την $t$, ορίζεται ως

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx \tag{1.1}$$

και είναι αύξουσα με $F(0) = 0$ και $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Η συνάρτηση κατανομής ισοδυναμεί με την πιθανότητα κανένα γεγονός να μη συμβεί από τη χρονική στιγμή 0 έως την $t$. Εξαιτίας αυτού του μαθηματικού ορισμού, δημιουργείται η ανάγκη της οριοθέτησης της συμπληρωματικής συνάρτησης της $F(t)$. Αυτή είναι η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$.

## 1.3 Συνάρτηση Επιβίωσης

Η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$, αντιπροσωπεύει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $T$ να λάβει τιμές από τη χρονική στιγμή $t$ έως το άπειρο θεωρητικά, ορίζεται ως

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx\,, \tag{1.2}$$

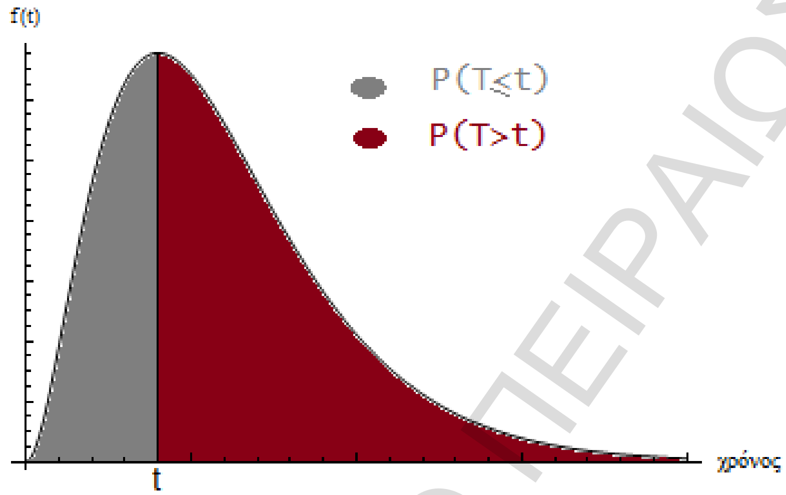
είναι η συμπληρωματική συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής, δηλαδή

$$S(t) = 1 - F(t) \tag{1.3}$$

και είναι φθίνουσα με $S(0) = 1$ και $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

Η ανάλυση δεδομένων γίνεται πιο εύκολη μερικές φορές, διότι οι στατιστικοί και οι δημογράφοι ορίζουν ένα πεπερασμένο τέλος του χρόνου, συμβολίζεται με $\omega$ και υποτίθεται ότι κανείς δεν επιβιώνει πέρα από αυτό το χρονικό σημείο. Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή, θα ισχύει $S(0) = 1$ και $S(\omega) = 0$. Εμπειρικά, η χρονική στιγμή ω μπορεί να ταυτιστεί με τη μέγιστη διάρκεια ζωής που έχει παρατηρηθεί σ΄ ένα μηχάνημα ή σ΄ έναν οργανισμό, έτσι ώστε η πολύ μικρή τιμή του $S(\omega)$ να μπορεί να αγνοηθεί.

Η συνάρτηση κατανομής και η συμπληρωματική αυτής, δηλαδή η συνάρτηση επιβίωσης, απεικονίζονται στο Σχήμα 1.1.




Σχήμα 1.1: Απεικόνιση της συνάρτησης κατανομής $F(t) = P(T \leq t)$ και της συνάρτησης επιβίωσης $S(t) = P(T > t)$.

## 1.4 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $T$ θα ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες

(α΄) $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, \infty)$ , και

(β΄) $\int_0^\infty f(t)\, dt = 1$ .

Αν είναι γνωστή η συνάρτηση κατανομής, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, υπολογίζεται ως

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

το οποίο ισχύει όταν το χρονικό διάστημα $\Delta t$ είναι πολύ μικρό. Κατά προσέγγιση, η πιθανότητα $P(t < T \leq t + \Delta t)$ ισοδυναμεί με το γινόμενο $f(t) \cdot \Delta t$ και υποδηλώνει ότι θα συμβεί ένα γεγονός στο χρονικό διάστημα $(t, t + \Delta t]$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστή η συνάρτηση επιβίωση $S(t)$, δηλαδή

$$f(t) = -\frac{d}{dt} S(t) \,. \tag{1.4}$$

Η σχέση (1.4) δείχνει ότι η παραγώγιση της συνάρτησης επιβίωσης καθορίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $T$. Το αρνητικό πρόσημο της (1.4) προκύπτει από την παραγώγιση της μη αρνητικής συνάρτησης $f(t)$, δεδομένου ότι η $S(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

## 1.5 Συνάρτηση Έντασης Κινδύνου

Η συνάρτηση έντασης κινδύνου - hazard rate (HR) - τη χρονική στιγμή $t$ ορίζεται, ως το στιγμιαίο ποσοστό αποτυχίας τη στιγμή $t$. Συμβολίζεται με $h(t)$ και υπολογίζεται ως

$$h(t) = -\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{1.5}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T \in (t, t+\Delta t] \,|\, T \geq t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t+\Delta t \,|\, T \geq t)}{\Delta t}\,. \tag{1.6}$$

Από τη σχέση (1.5) προκύπτει ότι η ένταση κινδύνου είναι ένα στιγμιαίο ποσοστό αποτυχίας συνδεδεμένο με ένα ποσοστό επιβίωσης στο χρόνο $t$.

Η σχέση (1.6) εκφράζει την πιθανότητα να εκδηλωθεί ένα γεγονός τη χρονική στιγμή $t$, δοθέντος ότι ο χρόνος έχει μεταβληθεί απειροελάχιστα κατά $\Delta t$. Η ένταση κινδύνου μπορεί να γίνει κατανοητή ως η δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας σε σχέση με το όριο του χρονικού διαστήματος, δεδομένου ότι το χρονικό διάστημα $\Delta t$ τείνει στο μηδέν. Σύμφωνα με αυτή τη στιγμιαία ιδιότητα, η ένταση κινδύνου ορίζεται ως ένταση θνησιμότητας ή ως στιγμιαίος κίνδυνος.

**Παρατήρηση 1.1.** *Στην ανάλυση επιβίωσης, η συνάρτηση της έντασης κινδύνου θεωρείται ως ο προτιμότερος δείκτης για την εκτίμηση της εμφάνισης κινδύνου ενός γεγονότος. Αυτό συμβαίνει λόγω της μεταβολής που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση επιβίωσης.*

Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου τη χρονική στιγμή $t$ μπορεί να γραφεί και ως

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln S(t)\,. \tag{1.7}$$

Από τη σχέση (1.7), προκύπτει ότι η ένταση κινδύνου ορίζεται μαθηματικά ως η παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης επιβίωσης τη χρονική στιγμή $t$, πολλαπλασιασμένη με $-1$. Η συνάρτηση επιβίωσης είναι φθίνουσα, γι' αυτό η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι μη αρνητική.

Οι παραπάνω σχέσεις φανερώνουν τη σύνδεση που έχουν μεταξύ τους οι συναρτήσεις $f(t), S(t)$ και $h(t)$. Από μαθηματική άποψη, οι σχέσεις αντικατοπτρίζουν διαφορετικές ερμηνείες μιας ενιαίας διάρκειας ζωής, με κάθε μία να παρέχει μια μοναδική πτυχή των δεδομένων επιβίωσης. Συνεπώς, κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις μπορεί να εκφραστεί άμεσα από μία άλλη. Για παράδειγμα, η πιθανότητα επιβίωσης $S(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως μετασχηματισμός της συνάρτησης (1.7)

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(x)dx\right\} = \exp[-H(t)]\,, \tag{1.8}$$

όπου $H(t)$ ορίζεται ως η αθροιστική συνάρτηση έντασης κινδύνου τη χρονική στιγμή $t$, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx\,.$$

Από τη σχέση (1.8), προκύπτει ότι η $H(t)$ μπορεί να γραφεί ως ο λογάριθμος της $S(t)$

$$H(t) = -\ln S(t)\,.$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (1.5) και (1.8), προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, μπορεί να γραφεί συναρτήσει της έντασης κινδύνου ως

$$f(t) = h(t)\exp\left\{-\int_0^t h(x)dx\right\}. \tag{1.9}$$

Στο βιβλίο των Marshall και Olkin (2007, Κεφάλαιο 1) υπάρχει η ακόλουθη πρόταση σύμφωνα με την οποία γνωστοποιούνται κάποιες προϋποθέσεις έτσι ώστε μία συνάρτηση $h(t)$ να είναι συνάρτηση έντασης κινδύνου.

**Πρόταση 1.1.** *Από τις σχέσεις (1.5) και (1.8) προκύπτει ότι μία συνάρτηση* $h(t)$ *θα είναι συνάρτηση έντασης κινδύνου μιας μη αρνητικής και συνεχής τυχαίας μεταβλητής* $T$ *αν και μόνο εάν*

*(α')* $h(t) \geq 0$ *για κάθε* $t > 0$ ,

*(β')* $\int_0^t h(x)dx < \infty$ *για κάποιο* $t > 0$ ,

*(γ')* $\int_0^\infty h(t)dt = \infty$ ,

*(δ')* $\int_0^t h(x)dx = \infty$, *υποδηλώνει* $h(z) = \infty$ *για κάθε* $z > t$ .

## 1.6 Μέση Τιμή

Η μέση τιμή του χρόνου $T$ που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(t)$, συμβολίζεται με $E(T)$, είναι πεπερασμένη, δηλαδή $E(T) < \infty$, και υπολογίζεται ως

$$E(T) = \int_0^\infty t\,f(t)dt\,. \tag{1.10}$$

Είναι γνωστό ότι $f(t) = -S^{'}(t)$, γι΄ αυτό ισχύει

$$E(T) = -\int_0^{\infty} t\, S^{'}(t)dt$$

στο οποίο αν εφαρμοστεί ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα προκύψει

$$E(T) = -[t\, S(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} S(t)dt$$

και επειδή $E(T) < \infty$ , θα είναι $[t\, S(t)]_0^{\infty} = 0$ . Συνεπώς, γνωρίζοντας τη συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$, υπολογίζεται η μέση τιμή του χρόνου $T$ ως

$$E(T) = \int_0^{\infty} S(t)dt\,.$$

## 1.7 Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής

Το γεγονός ότι υπάρχει επιβίωση μέχρι τη χρονική στιγμή $t$, δημιουργεί το ερώτημα «σε ποια χρονική στιγμή μετά την $t$, δεν θα υπάρχει επιβίωση» . Η υπολειπόμενη διάρκεια ζωής παρουσιάζει σημαντικό πρακτικό ενδιαφέρον γιατί τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής, είναι αρκετά χρήσιμα.

Η τυχαία μεταβλητή $T$ εκφράζει το χρόνο ζωής και έχει συνάρτηση επιβίωσης την $S(t)$, για την οποία ισχύει $S(0) = 1$, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X_t = T - t \,|\, T > t$$

θα ορίζεται ως εναπομείναν ή υπολειπόμενος χρόνος ζωής δοθέντος ότι υπάρχει επιβίωση στην ηλικία $t$.

Η συνάρτηση επιβίωσης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής συμβολίζεται με $S(x|t)$, και για $S(t) > 0$ υπολογίζεται ως

$$S(x|t) = P(T > t + x \,|\, T > t) = \frac{S(t+x)}{S(t)}\,.$$

Είναι κατανοητό ότι, η συνάρτηση επιβίωσης $S(x|t)$ ορίζεται σαν μια δεσμευμένη πιθανότητα. Εφόσον υπάρχει η συνάρτηση επιβίωσης $S(x|t)$, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x|t)$ καθώς και ένταση κινδύνου $h(x|t)$.

## 1.8 Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ή η μέση εναπομείναν ζωή - mean residual lifetime (MRL) - εκφράζει το μέσο χρόνο ζωής που απομένει μετά την ηλικία $t$, συμβολίζεται με $m(t)$, και υπολογίζεται ως

$$m(t) = E(T - t \,|\, T > t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} S(x)dx\,. \qquad (1.11)$$

Είναι προφανές ότι για κάθε $t = 0$ ισχύει $S(0) = 1$ και $m(0) = E(T)$ .

Η μελέτη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, στοχεύει στην εκτίμηση του χρονικού περιθώριου ζωής που έχει ένα μηχάνημα ή ένας οργανισμός. Συγκεκριμένα, οι δοκιμές που έχουν πραγματοποιηθεί στον τομέα της μηχανικής, στοχεύουν στην πρόβλεψη αντικατάστασης ή επιδιόρθωσης μηχανημάτων, μέσω των πληροφοριών που παρέχει η συνάρτησή του.

**Συμπέρασμα 1.1.** *Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής έχει αποδειχτεί πιο αξιόπιστη πηγή πληροφοριών από τη συνάρτηση της έντασης κινδύνου. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής συνοψίζει όλη την κατανομή του χρόνου ζωής, ενώ η ένταση κινδύνου σχετίζεται με το στιγμιαίο κίνδυνο αποτυχίας.*

Γενικά $m(t) \geq 0$, ωστόσο δεν προκύπτει ότι κάθε μη αρνητική συνάρτηση θα είναι συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Στο βιβλίο των Shaked και Shanthikumar (2007, Κεφάλαιο 2), υπάρχει η ακόλουθη πρόταση σύμφωνα με την οποία γνωστοποιούνται κάποιες προϋποθέσεις έτσι ώστε μία συνάρτηση $m(t)$ να είναι συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

**Πρόταση 1.2.** *Μία συνάρτηση* $m(t)$ *θα είναι συνάρτηση μέσου υπολεπόμενου χρόνου ζωής μιας μη αρνητικής και συνεχής τυχαίας μεταβλητής* $T$ *αν και μόνο έαν*

*(α')* $0 \leq m(t) < \infty$ *για κάθε* $t \geq 0$ ,

*(β')* $m(0) > 0$ ,

*(γ')* $m(t)$ *είναι συνεχής συνάρτηση,*

*(δ')* $m(t) + t$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t \geq 0$ ,

*(ε')* *υπάρχει* $t_0$ *τέτοιο ώστε* $m(t_0) = 0$, *τότε* $m(t) = 0$ *για όλα εκείνα τα* $t \geq t_0$, *διαφορετικά όταν δεν υπάρχει* $t_0$ *με* $m(t_0) = 0$ , *τότε* $\int_0^{\infty} \frac{1}{m(t)} dt = \infty$.

## 1.9 Σύνδεση Συναρτήσεων

Στο βιβλίο των Lai και Xie (2005, Κεφάλαιο 4), παρουσιάζονται οι ακόλουθες σχέσεις για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, την ένταση κινδύνου και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της σχέσης (1.11) παραγωγίζεται και προκύπτει

$$m'(t) = \frac{-S(t)^2 + f(t)\int_t^{\infty} S(x)dx}{S(t)^2}$$

το οποίο ισοδυναμεί με τη σχέση

$$m'(t) = h(t)m(t) - 1 \tag{1.12}$$

η οποία διαφορετικά γράφεται ως

$$h(t) = \frac{m'(t) + 1}{m(t)} . \tag{1.13}$$

**Παρατήρηση 1.2.** *Αν $m'(0) > 0$ για $t = 0$, τότε από τη σχέση (1.12) προκύπτει $h(0)m(0) > 1$.*

Από την πρώτη ισότητα της σχέσης (1.8) και από την (1.13) προκύπτει η συνάρτηση επιβίωσης

$$S(t) = \frac{m(0)}{m(t)} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{m(x)}\, dx\right\} \tag{1.14}$$

ενώ, από τις σχέσεις (1.5), (1.13) και (1.14) προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(t) = \frac{m(0)\,[m'(t) + 1]}{[m(t)]^2} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{m(x)}\, dx\right\} \tag{1.15}$$

αυτό σημαίνει ότι η κατανομή της διάρκειας ζωής προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Η συνάρτηση επίβιωσης $S(t)$, η συνάρτηση της έντασης κινδύνου $h(t)$ και η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ είναι ισοδύναμες ποσότητες με την έννοια, πως αν μία από αυτές είναι γνωστή, τότε οι άλλες δύο μπορεί να προσδιορισθούν, υποθέτοντας ότι υπάρχουν.

# 1.10 Ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα αναφέρονται περιεκτικά, βασικές έννοιες Μαθηματικής Ανάλυσης, σύμφωνα με το βιβλίο του Ρασσιά (2004, Κεφάλαια 2 και 6). Αυτή η αναφορά, στοχεύει στην κατανόηση και την ερμηνεία της γραφικής συμπεριφοράς των προαναφερθέντων συναρτήσεων. Αρχικά ορίζεται η έννοια της μονοτονίας μιας οποιασδήποτε συνάρτησης.

## Μονοτονία

**Ορισμός 1.1.** *Έστω μία συνάρτηση $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, και ένα υποσύνολο αυτού $B$. Τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία που ανήκουν στο $B$, η συνάρτηση $g$ θα λέγεται*

- *αύξουσα - increasing - στο $B$, αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $g(t_1) \leq g(t_2)$,*
- *φθίνουσα - decreasing - στο $B$, αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $g(t_1) \geq g(t_2)$,*
- *γνησίως αύξουσα στο $B$, αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $g(t_1) < g(t_2)$,*
- *γνησίως φθίνουσα στο $B$, αν για $t_1 < t_2$ ισχύει ότι $g(t_1) > g(t_2)$,*

- *μονότονη - monotonic - στο* $B$*, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα,*
- *γνησίως μονότονη στο* $B$*, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο ορισμός των ολικών ακροτάτων μίας συνάρτησης καθώς και ένα θεώρημα για τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης.

## Ακρότατα

**Ορισμός 1.2.** *Έστω μία συνάρτηση* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, όπου* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Τότε σ΄ ένα σημείο* $t_0 \in A$*, η συνάρτηση* $g$ *θα παρούσιάζει*

- *μέγιστο ή ολικό μέγιστο, αν ισχύει ότι* $g(t) \leq g(t_0)$ *για κάθε* $t \in A$*,*
- *ελάχιστο ή ολικό ελάχιστο, αν ισχύει ότι* $g(t) \geq g(t_0)$ *για κάθε* $t \in A$*.*

**Θεώρημα 1.1.** *Έστω μία συνάρτηση* $g(t)$ *συνεχής στο διάστημα* $[a, b]$ *και παραγωγίσιμη στα διαστήματα* $(a, t_0), (t_0, b)$*. Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα.*

*(α΄) Αν* $g'(t) > 0$ *στο* $(a, t_0)$ *και* $g'(t) < 0$ *στο* $(t_0, b)$*, τότε η* $g(t)$ *έχει τοπικό μέγιστο στο* $t_0$*.*

*(β΄) Αν* $g'(t) < 0$ *στο* $(a, t_0)$ *και* $g'(t) > 0$ *στο* $(t_0, b)$*, τότε η* $g(t)$ *έχει τοπικό ελάχιστο στο* $t_0$*.*

Τέλος αναφέρονται, ένα θεώρημα το οποίο περιγράφει τις προϋποθέσεις για τη μορφή κυρτότητας μιας συνάρτησης, ένας ορισμός του σημείου καμπής καθώς και ένα συνδυαστικό θεώρημα.

## Κυρτότητα

**Θεώρημα 1.2.** *Έστω μία συνάρτηση* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, συνεχής στο διάστημα* $A$ *και δύο φορές παραγωγήσιμη στο εσωτερικό του* $A$*. Τότε για κάθε εσωτερικό σημείο του* $A$ *θα ισχύουν τα ακόλουθα.*

- *Αν* $g''(t) \geq 0$*, τότε η* $g$ *είναι κυρτή - convex - στο* $A$*.*
- *Αν* $g''(t) \leq 0$*, τότε η* $g$ *είναι κοίλη - concave - στο* $A$*.*

**Ορισμός 1.3.** *Έστω μία συνάρτηση* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, μ΄ ένα σημείο* $t_0 \in A$*. Τότε το σημείο* $(t_0, g(t_0))$ *θα λέγεται σημείο καμπής της συνάρτησης* $g$ *αν αυτή είναι*

*(α΄) συνεχής στο* $t_0$ *,*

*(β΄) είναι κυρτή αριστερά του* $t_0$ *και κοίλη δεξιά του* $t_0$ *ή αντίστροφα,*

*(γ΄) παραγωγίσιμη στο* $t_0$ *ή η παράγωγος* $g'(t_0)$ *απειρίζεται θετικά ή αρνητικά.*

**Παρατήρηση 1.3.** *Η ύπαρξη σημείου καμπής, υποδηλώνει ότι σε αυτό το σημείο υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.*

**Θεώρημα 1.3.** *Έστω μία συνάρτηση* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο* $t_0$, $t_0 \in A$ *και* $g'(t_0) = 0$. *Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα*

- *αν* $g''(t_0) > 0$, *τότε η* $g$ *έχει τοπικό ελάχιστο στο* $t_0$ ,
- *αν* $g''(t_0) < 0$, *τότε η* $g$ *έχει τοπικό μέγιστο στο* $t_0$ ,
- *αν* $g''(t_0) = 0$ *και* $g'''(t_0) \neq 0$, *τότε το* $t_0$ *θα υποδηλώνει σημείο καμπής.*

## 1.11 Απεικόνιση Συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η απεικόνιση της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Συγκεκριμένα, θα γίνει εκτενής προσέγγιση για το λεκανοειδές σχήμα της έντασης κινδύνου, θα αναλυθούν οι προϋποθέσεις οι οποίες συνδέουν γραφικά τις δύο συναρτήσεις και θα παρουσιαστούν αρκετές εφαρμογές στις οποίες θα αποδεικνύεται η γραφική σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των συναρτήσεων.

### 1.11.1 Απεικόνιση Έντασης Κινδύνου

Κατά κύριο λόγο, η συνάρτηση της ένταση κινδύνου $h(t)$ μπορεί να είναι μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, να έχει λεκανοειδές σχήμα - bathtub shaped (BT) - ή ανάποδο λεκανοειδές σχήμα - upside-down bathtub shaped (UBT), να έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα αν η $h(t)$ είναι αρχικά αύξουσα και στη συνέχεια με λεκανοειδές σχήμα, ή να έγει γενικευμένο λεκανοειδές σχήμα αν η $h(t)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

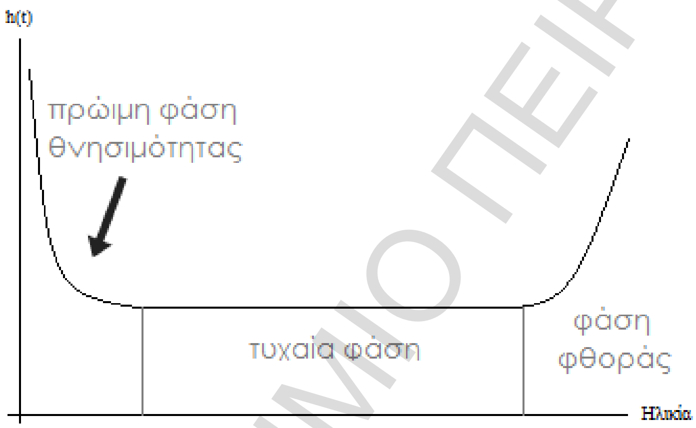
Στο βιβλίο των Lai και Xie (2005, Κεφάλαιο 2), παρουσιάζεται ο ακόλουθος ορισμός, στον οποίο ορίζεται η απεικόνιση της έντασης κινδύνου.

**Ορισμός 1.4.** *Έστω μια συνάρτηση έντασης κινδύνου* $h(t)$, *παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, τότε αυτή ορίζεται να*

- *είναι γνησίως αύξουσα, αν* $h^{'}(t) > 0$ *για όλα τα* $t$,
- *είναι γνησίως φθίνουσα, αν* $h^{'}(t) < 0$ *για όλα τα* $t$,
- *έχει λεκανοειδές σχήμα, αν*
$$h^{'}(t) < 0 \quad \textit{για} \quad t \in (0, t_0) \quad \textit{και} \quad h'(t_0) = 0\,,\, h^{'}(t) > 0 \quad \textit{για} \quad t > t_0\ ,$$
- *έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, αν*
$$h^{'}(t) > 0 \quad \textit{για} \quad t \in (0, t_0) \quad \textit{και} \quad h'(t_0) = 0,\, h'(t) > 0 \quad \textit{για} \quad t > t_0\ ,$$
- *έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα, αν η* $h(t)$ *είναι αρχικά αύξουσα και στη συνέχεια έχει λεκανοειδές σχήμα.*

## Λεκανοειδές Σχήμα

Σύμφωνα με τον Singpurwalla (2006), είναι γεγονός ότι η απεικόνιση της έντασης κινδύνου μπορεί να παραπέμπει σε λεκανοειδές σχήμα. Η καμπύλη του λεκανοειδούς σχήματος αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα αρκετών εφαρμογών. Για παράδειγμα μπορεί να ερμηνεύσει το χρόνο ζωής των ανθρώπων ή το χρόνο λειτουργίας τεχνολογικών συσκευών. Από το Σχήμα 1.2 είναι εμφανές ότι η λεκανοειδής καμπύλη μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα. Το αριστερό τμήμα αντιστοιχεί σε φθίνουσα συνάρτηση και μπορεί να οριστεί ως η φάση «πρώιμης θνησιμότητας», το μεσαίο τμήμα είναι σταθερό και ορίζεται ως «τυχαία» φάση, ενώ το δεξί τμήμα αντιστοιχεί σε αύξουσα συνάρτηση και μπορεί να οριστεί ως η φάση «γήρανσης» ή φάση «φθοράς».

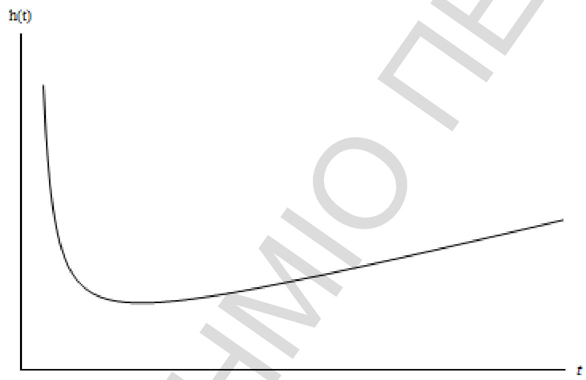



Σχήμα 1.2: Μοντέλο λεκανοειδούς καμπύλης.

Η ερμηνεία της λεκανοειδούς καμπύλης θεωρείται σημαντική. Στην επιστήμη που μελετά τα μηχανήματα, το αριστερό τμήμα της καμπύλης αντιστοιχεί στην πρώιμη εξέλιξη ενός νέου μηχανήματος, στο οποίο μπορεί να υπάρχουν λάθη στο σχεδιασμό του ή λάθη στη διαδικασία παραγωγής του. Αυτή η φάση ονομάζεται πρώιμη εμφάνιση ελαττωμάτων και μπορεί να πυροδοτήσει μια αρκετά νωρίς, χρονικά αποτυχία. Συνεπώς, η αρχική συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι φθίνουσα γιατί προέρχεται από μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο. Όταν το σύστημα δεν υφίσταται αποτυχία εξαιτίας των πρώιμων ελαττωμάτων τότε η αποτυχία που θα επέλθει, θα οφείλεται σε παράγοντες που δεν μπορούν να εξηγηθούν. Συνεπώς, η μεσαία φάση της έντασης κινδύνου είναι σταθερή σε συνάρτηση με το χρόνο. Αν το μηχάνημα καταφέρει να επιβιώσει από τη μεσαία φάση, τότε η αποτυχία που θα επέλθει, είναι απόρροια της αλλοίωσης και της φθοράς. Συνεπώς, στην τελική φάση, η ένταση κινδύνου είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο, γιατί καθώς περνούν τα χρόνια, η χρήση του μηχανήματος λειτουργεί ως παράγοντας φθοράς.

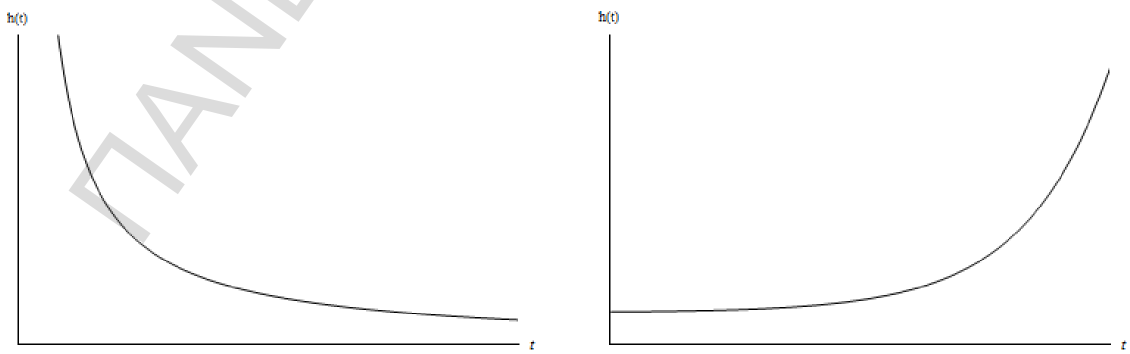
Το λεκανοειδές σχήμα της έντασης κινδύνου χρησιμοποιείται και από τους αναλογιστές για να τεκμηριωθούν τα ασφαλιστήρια συμβόλαια. Η πρώιμη περίοδος θνησιμότητας θεωρείται ότι είναι από τη στιγμή της γέννησης μέχρι το $10^o$ έτος, η τυχαία φάση είναι από το $10^o$ έως το $30^o$ έτος, ενώ η περίοδος γήρανσης ξεκινά από το $30^o$ έτος, όπου τα ασφαλιστήρια συμβόλαια αυξάνονται. Αναλυτικότερα, η ένταση θνησιμότητας των ανθρώπων στην πρώιμη περίοδο, δηλαδή μετά τη γέννηση, είναι αρκετά υψηλή γιατί ο κίνδυνος θανάτου είναι υψηλός. Αυτή η γνώση εφοδιάζει την πολιτική των ασφαλιστικών εταιρειών, έτσι ώστε να συνάπτουν συμβόλαια που τίθονται σε ισχύ 15 μέρες μετά από τη γέννηση. Οι αιτίες θανάτου μεταξύ των ηλικιών 10 έως 30 εικάζεται ότι είναι τυχαίες και παρατηρούνται εξαιτίας γεγονότων, όπως επιδημιών ή πολέμων. Η περίοδος γήρανσης υποτίθεται ότι ξεκινά στην ηλικία των 30.

Το λεκανοειδές σχήμα της έντασης κινδύνου αποτελεί λογική εξιδανίκευση στην περίπτωση των ανθρώπων. Ωστόσο το ίδιο δε συμβαίνει πάντα για συγκεκριμένα μηχανικά και βιολογικά συστήματα. Σε πολλά μηχανήματα, η περίπτωση της σταθερής έντασης κινδύνου δεν αποδίδει νόημα μεστού περιεχομένου γιατί, το σύστημα ούτε βελτιώνεται ούτε αλλοιώνεται με τη χρήση. Τα συστήματα που έχουν λεκονοειδές σχήμα έντασης κινδύνου, μπορούν να απεικονιστούν με μορφή που δίνεται στο Σχήμα 1.3.




Σχήμα 1.3: Λεκανοειδές σχήμα για την ένταση κινδύνου.

Για τα συστήματα που δεν υφίστανται φθορά, θεωρείται πιο κατάλληλη η γνησίως φθίνουσα μορφή. Αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 1.4(α′). Για τα συστήματα που δεν υφίστανται πρώιμη θνησιμότητα, θεωρείται πιο κατάλληλη η γνησίως αύξουσα μορφή ή η σταθερή μορφή ή η αρχικά σταθερή και στη συνέχεια αύξουσα μορφή. Αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 1.4(β′).




(α′) (β′)

Σχήμα 1.4: Φθίνουσα καμπύλη (α′) και αύξουσα καμπύλη (β′) για την ένταση κινδύνου.

### 1.11.2 Απεικόνιση Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ταξινομείται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησής του. Είναι μονότονος ή δεν είναι μονότονος. Κατά κύριο λόγο, μονότονος χαρακτηρίζεται όταν η απεικόνισή του είναι αύξουσα ή φθίνουσα, ενώ δεν είναι μονότονος όταν έχει λεκανοειδές σχήμα ή ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.

### 1.11.3 Σύγκριση

Στο βιβλίο των Lai και Xie (2005, Κεφάλαιο 4), γίνεται μία προσέγγιση στην οριοθέτηση της σύνδεσης που υπάρχει μεταξύ της γραφικής παράστασης της έντασης κινδύνου και της γραφικής παράστασης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Από το ακόλουθο θεώρημα προκύπτουν τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία ο μονότονος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$, καθορίζει τη μονότονη απεικόνηση της έντασης κινδύνου $h(t)$.

**Θεώρημα 1.4.** *Έστω η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής* $m(t)$ *και* $h(t)$ *η αντίστοιχη συνάρτηση της έντασης κινδύνου, τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα.*

*(α΄) Αν* $m(t)$ *είναι φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση, τότε* $h(t)$ *είναι γνησίως αύξουσα στο* $t \geq 0$ *.*

*(β΄) Αν* $m(t)$ *είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση, τότε* $h(t)$ *είναι γνησίως φθίνουσα στο* $t \geq 0$ *.*

Από τα δύο ακόλουθα θεωρήματα προκύπτουν σαφή κριτήρια που υποδηλώνουν την αντιστοιχία μονοτονίας ή μη μονοτονίας του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$, δεδομένου ότι η ένταση κινδύνου $h(t)$ δεν είναι μονότονη συνάρτηση.

**Θεώρημα 1.5**. *Αν η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *έχει λεκανοειδές σχήμα, τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος* $m(t)$ *θα έχει*

*(α΄) φθίνουσα συνάρτηση, αν* $h(0)m(0) \leq 1$,

*(β΄) ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, αν* $h(0)m(0) > 1$.

**Θεώρημα 1.6**. *Αν η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος* $m(t)$ *θα έχει*

*(α΄) αύξουσα συνάρτηση, αν* $h(0)m(0) \geq 1$,

*(β΄) λεκανοειδές σχήμα, αν* $h(0)m(0) < 1$.

△

Από το ακόλουθο παράδειγμα επαληθεύεται η θεωρητική σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της μονότονης συμπεριφοράς του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τη μη μονότονη συμπεριφορά της έντασης κινδύνου.

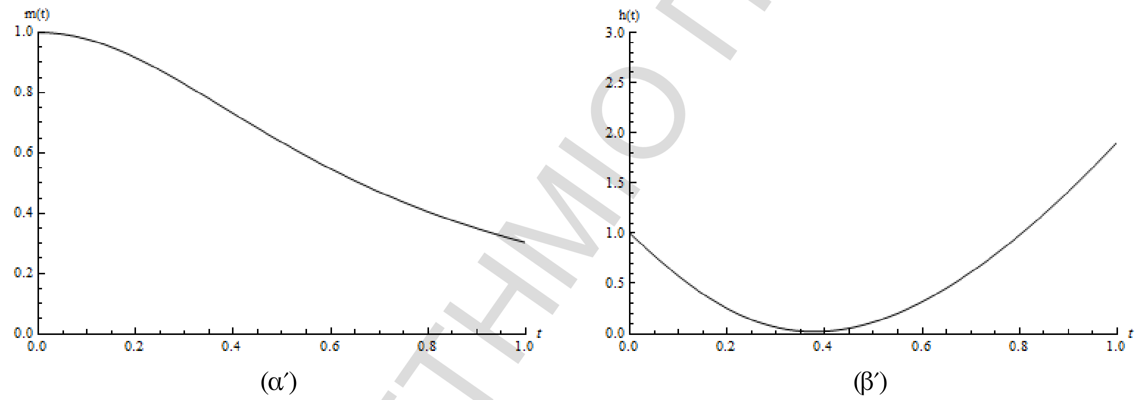
**Παράδειγμα 1.1.** *Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής*

$$\mathrm{m}(\mathrm{t}) = \frac{1}{1+2.3\mathrm{t}^2} ,$$

*είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ η αντίστοιχη ένταση κινδύνου*

$$\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \frac{(1+2.3\mathrm{t}^2)^2 - 4.6\mathrm{t}}{1+2.3\mathrm{t}^2} ,$$

*έχει λεκανοειδές σχήμα για κάθε* $\mathrm{t} \geq 0$*. Αξίζει να αναφερθεί ότι από την εξίσωση* $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = 0$*, δεν προκύπτουν λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς, ενώ ισχύει* $\mathrm{h}(0)\mathrm{m}(0) \leq 1$*. Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 1.5.*




Σχήμα 1.5: Φθίνων μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής (α′) και ένταση κινδύνου με λεκανοειδές σχήμα (β′) όταν $\mathrm{t} \in [0,1]$.

Από το ακόλουθο παράδειγμα επαληθεύεται η θεωρητική σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της μη μονότονης συμπεριφοράς του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τη μη μονότονη συμπεριφορά της έντασης κινδύνου.

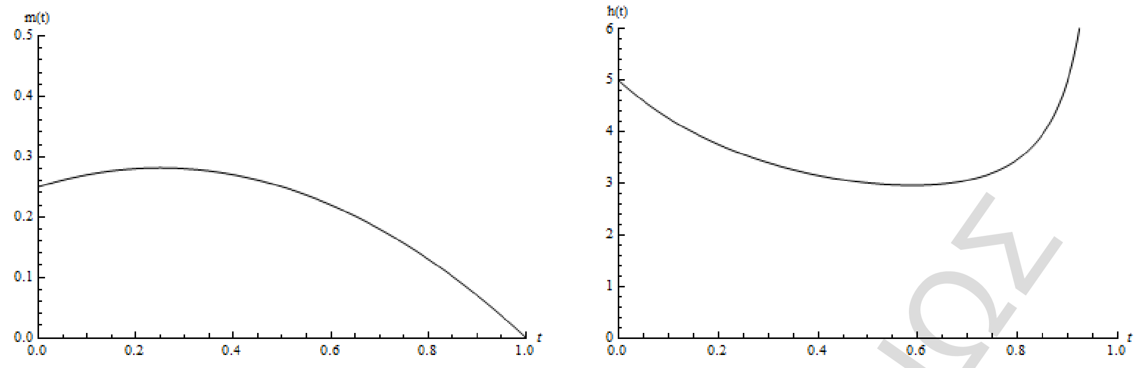
**Παράδειγμα 1.2.** *Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής*

$$\mathrm{m}(\mathrm{t}) = \frac{1}{4}(1-\mathrm{t})(1+2\mathrm{t})$$

*έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ η αντίστοιχη ένταση κινδύνου*

$$\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \frac{5-4\mathrm{t}}{(1-\mathrm{t})(1+2\mathrm{t})} ,$$

*έχει λεκανοειδές σχήμα, για κάθε* $0 \leq \mathrm{t} < 1$*. Όταν* $\mathrm{t} = 0$ *ισχύει* $\mathrm{h}(0)\mathrm{m}(0) > 1$*. Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 1.6.*




(α′) (β′)

Σχήμα 1.6: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με ανάποδο λεκανοειδές σχήμα (α′) και ένταση κινδύνου με λεκανοειδές σχήμα (β′) όταν $t \in [0, 1)$.

Από το ακόλουθο παράδειγμα επαληθεύεται η θεωρητική σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της μονότονης συμπεριφοράς του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τη μη μονότονη συμπεριφορά της έντασης κινδύνου.

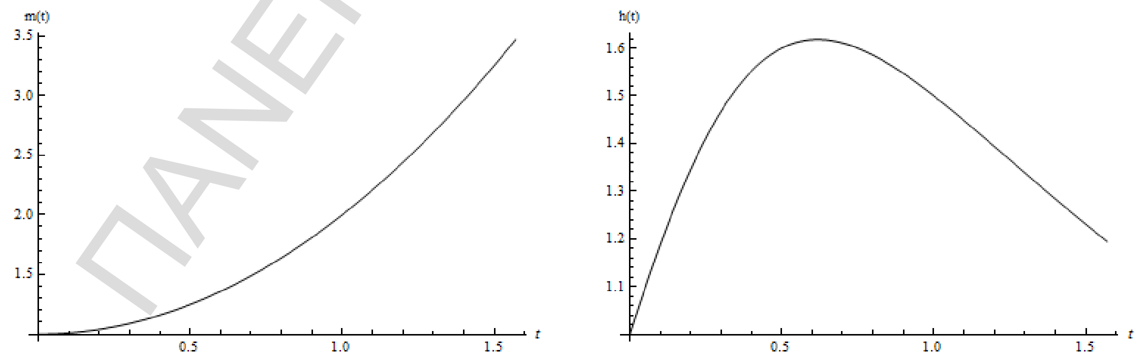
**Παράδειγμα 1.3.** *Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής*

$$m(t) = 1 + t^2 ,$$

*είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ενώ η αντίστοιχη ένταση κινδύνου*

$$h(t) = \frac{1 + 2t}{1 + t^2} ,$$

*έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα για κάθε* $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ . *Όταν* $t = 0$ *ισχύει* $h(0)m(0) \geq 1$. *Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 1.7.*




(α′) (β′)

Σχήμα 1.7: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αύξουσας συνάρτησης (α′) και ένταση κινδύνου με ανάποδο λεκανοειδές σχήμα (β′) όταν $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

## 1.12 Μοντέλα επιβίωσης

Οι Xie, Strickler και Xue (2013), υποστηρίζουν ότι η «χρονική ανάλυση» ενός κλινικού γεγονότος εξαρτάται από το περιστατικό και τους παράγοντες κινδύνου που σχετίζονται με αυτό. Κλινικά περιστατικά που τίθονται υπό μελέτη μπορεί να είναι ο χρόνος που εξελίσσεται μια ασθένια, ο χρόνος νοσηλείας σ' ένα νοσοκομείο, ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση υποτροπής ή ο χρόνος ζωής μέχρι τη στιγμή θανάτου. Μια τέτοια κατάσταση, μπορεί να περιγραφεί μέσα από κάποιο μοντέλο. Αυτά τα μοντέλα μπορεί να είναι παραμετρικά, ημιπαραμετρικά ή μη παραμετρικά.

Ως παραμετρικό μοντέλο - parametric model - χαρακτηρίζεται μια οικογένεια κατανομών η οποία περιγράφεται χρησιμοποιώντας πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων. Το διάνυσμα $\theta = (\theta_1, \theta_2, ...\theta_k)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό παραμέτρων. Η Εκθετική κατανομή με μοναδική παράμετρο $\theta$ και η Κανονική κατανομή με $\theta = (\mu, \sigma)$, θεωρούνται παραδείγματα παραμετρικών μοντέλων. Ως μη παραμετρικό μοντέλο - nonparametric model - χαρακτηρίζεται το μοντέλο που δεν εκφράζεται από μια γνωστή οικογένεια κατανομών. Ένα τέτοιο μη παραμετρικό μοντέλο, μπορεί να μελετηθεί από τη μέθοδο Kaplan - Meier. Τα ημιπαραμετρικά μοντέλα - semiparametric models - έχουν παραμετρικά και μη παραμετρικά στοιχεία. Ως ημιπαραμετρικό μοντέλο θεωρείται το μοντέλο παλινδρόμησης της πολλαπλασιαστικής έντασης κινδύνου, του Cox.

Στα παραμετρικά μοντέλα, ο χρόνος αναλύεται μέσω κατανομών. Θεωρείται ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ του λογάριθμου του χρόνου και των συμμεταβλητών του μοντέλου, ενώ χρησιμοποιείται η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας. Στα ημιπαραμετρικά μοντέλα, θεωρείται ότι η ένταση κινδύνου συνδέει πολλαπλασιαστικά τις συμμεταβλητές με μια μη προκαθορισμένη συνάρτηση έντασης κινδύνου και χρησιμοποιείται η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας για να εκτιμηθούν οι παράμετροι. Στα μη παραμετρικά μοντέλα δεν γίνονται υποθέσεις για τη σχέση του κινδύνου με τις συμμεταβλητές. Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε συμμεταβλητή προκύπτει σαν εκτίμηση σύμφωνα με εμπειρικές μεθόδους, ενώ οι ελέγχοι - test - που γίνονται, δείχνουν το μέγεθος της επιρροής που έχουν οι συμμεταβλητές.

### 1.12.1 Μοντέλα Πολλαπλών Διαστάσεων

Σύμφωνα με τους Beamonte και Bermúdez (2003), στην ανάλυση επιβίωσης χρησιμοποιούνται μοντέλα προσθετικού και πολλαπλασιαστικού κινδύνου - additive and multiplicative risk models. Αυτά τα μοντέλα χαρακτηρίζονται από βασικές συναρτήσεις οι οποίες συνδέουν τους παράγοντες κινδύνου με το χρόνο.

Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $T$ η οποία εκφράζει το χρόνο επιβίωσης ή το χρόνο νοσηλείας ενός ασθενή, και ένα διάνυσμα συμμεταβλητών $p$ - όρων, $Z = (Z_1, Z_2, ...Z_p)$, το οποίο μπορεί να εκφράζει την ηλικία, το φύλο ή τη χορήγηση κάποιων φαρμάκων. Τότε ο χρόνος $T$, ορίζεται να έχει ως ένταση κινδύνου τη συνάρτηση

$$h(t|Z) = \frac{f(t|Z)}{1 - F(t|Z)}\,.$$

όπου $f(t|Z)$ και $F(t|Z)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα, της μεταβλητής $T$ δοθέντος του διανύσματος συμμεταβλητών $Z$. Η συνάρτηση $S(t|Z) = 1 - F(t|Z)$ λέγεται συνάρτηση επιβίωσης.

Σύμφωνα με το προσθετικό μοντέλο κινδύνου, η ένταση κινδύνου θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$h(t|Z) = h_0(t) + \beta' Z \tag{1.16}$$

ενώ, σύμφωνα με το πολλαπλασιαστικό μοντέλο κινδύνου (του Cox) θα έχει

$$h(t|Z) = h_0(t)\, e^{(\alpha' Z)} \tag{1.17}$$

όπου $h(t|Z)$ είναι η ένταση κινδύνου του χρόνου $T$, $h_0(t)$ είναι η αναφορική (αρχική) συνάρτηση έντασης κινδύνου όταν $Z = 0$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ και $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ είναι τα διανύσματα $p$ - διάστασης των παραμέτρων της παλινδρόμησης.

Ανάλογα μοντέλα μπορούν να προκύψουν και για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, εξαιτίας της συμμεταβλητότητας. Συγκεκριμένα, υπάρχει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (το οποίο προτάθηκε από τους Oakes και Dasu, 1990)

$$m(t|Z) = m_0(t) e^{(\gamma' Z)}$$

όπου $m(t|Z)$ είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής του χρόνου $T$, $m_0(t)$ είναι ο αναφορικός (αρχικός) μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $Z = 0$, και $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ είναι η παράμετρος της παλινδρόμησης, $p$ - διάστασης.

Η μερολιπτική προσέγγιση της πιθανοφάνειας (η οποία γνωστοποιήθηκε από τον Cox, 1972), συνέβαλε στην εκτεταμένη χρήση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου $h(t|Z) = h_0(t)\, e^{(\alpha' Z)}$ , ωστόσο η υπόθεση της πολλαπλασιαστικής έντασης κινδύνου δεν έχει πάντα εφαρμογή. Σύμφωνα με τη μπεζιανή προσέγγιση, το πολλαπλασιαστικό μοντέλο κινδύνου είναι περισσότερο συνηθισμένο και επαληθευμένο στατιστικά. Το προσθετικό μοντέλο κινδύνου περιγράφει μια διαφορετική προσέγγιση για τη σχέση μεταξύ του χρόνου και των συμμεταβλητών. Υποστηρίζεται από πολλούς ερευνητές (Buckley 1984, Kim και Lee 1998) και χρησιμοποιείται σε ανταγωνιστικές καταστάσεις κινδύνου, όταν οι κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

## 1.12.2 Παραμετρικά Μοντέλα

Τα παραμετρικά μοντέλα επιβίωσης αναλύονται εκτενέστερα στα επόμενα τρία κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το προσθετικό μοντέλο της έντασης κινδύνου θετικού και σταθερού όρου, με αρκετά παραδείγμα από γνωστές κατανομές. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το προσθετικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής τόσο σε θεωρητικό όσο και πρακτικό επίπεδο. Ενώ, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, καθώς και το δυναμικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μέσα από παραδειγμάτα στοχαστικών διατάξεων και κλάσεων γήρανσης.

# 2

# Προσθετικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου

## Εισαγωγή

Το δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται κατά κύριο λόγο, με γνώμονα την εργασία των Bebbington, Lai και Zitikis (2008). Σύμφωνα με αυτή, πολλές εφαρμογές του αναλογισμού, της οικονομετρίας, της μηχανικής και της ιατρικής πραγματεύονται την ένταση κινδύνου - hazard rate (HR) - και τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής - mean residual life (MRL). Οι μαθηματικές ιδιότητες των δύο αυτών συναρτήσεων, βοηθούν στην ερμηνεία και την κατανόηση πολλών χαρακτηριστικών που υποδηλώνουν τα δεδομένα. Είναι γενικά αποδεκτό ότι, εξωτερικοί παράγοντες δρουν στο σύστημα και μεταβάλλουν τη δυναμική του. Οι αλλαγές και οι επιπτώσεις που επιφέρουν, δεν είναι ίδιες. Δημιουργείται λοιπόν ενδιαφέρον, για την έκβαση των διαφορετικών αποτελεσμάτων που θα προκύψουν. Αптό παράδειγμα θεωρείται στον κλάδο της μηχανικής, η πολιτική που ακολουθείται από μία εταιρεία εμπορίας μηχανημάτων σε θέματα συντήρησης, ή στον ασφαλιστικό τομέα, οι προυποθέσεις που λαμβάνονται υπόψη για να γίνει ο καθορισμός των ασφαλίστρων. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάται η επίδραση που επιφέρει η παρουσία ενός θετικού και σταθερού όρου στο σύστημα.

## 2.1 Περιγραφή Μοντέλου

Έστω μια μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή T, η οποία εκφράζει το χρόνο ζωής. Η T έχει συνάρτηση κατανομής τη συνάρτηση $F(t)$ και ένταση κινδύνου τη συνάρτηση $h(t)$. Αν στην ένταση κινδύνου $h(t)$, προστεθεί μία μη αρνητική συνάρτηση $\lambda(t)$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$h_\lambda(t) = h(t) + \lambda(t) \tag{2.1}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Δυναμικό Προσθετικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου» - Dynamic Additive Hazard Rate Model.

Αν στην ένταση κινδύνου $h(t)$, προστεθεί θετικός και σταθερός όρος $\lambda$, θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$h_\lambda(t) = h(t) + \lambda \tag{2.2}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Προσθετικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου» - Additive Hazard Rate Model.

Η παρουσία του σταθερού και θετικού όρου $\lambda$ δεν επηρεάζει μόνο την ένταση κινδύνου. Αντιθέτως, προκαλεί τη δημιουργία νέων συναρτήσεων, όπως της συνάρτησης επιβίωσης και της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Η νέα συνάρτηση επιβίωσης $S_\lambda(t)$, βασίζεται στη σχέση (1.8) και υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$S_\lambda(t) = e^{-\lambda t} S(t)\,. \tag{2.3}$$

Ο νέος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m_\lambda(t)$, προκύπτει ως επέκταση του $m(t)$ που ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Ορίζεται ως

$$m_\lambda(t) = E[T_\lambda - t|T_\lambda > t] = \frac{1}{S_\lambda(t)}\int_t^\infty S_\lambda(x)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} S(x|t)dx\,, \tag{2.4}$$

όπου $T_\lambda$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, της οποίας η συνάρτηση επιβίωσης είναι η $S_\lambda(t)$, ενώ η $S(x|t)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης η οποία δίνεται από τη σχέση $S(x|t) = \frac{S(t+x)}{S(t)}$ .

Αν εφαρμοστεί ολοκλήρωση κατά παράγοντες στη σχέση (2.4), τότε

$$m_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x|t)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - E[e^{-\lambda X_t}]\right) \tag{2.5}$$

όπου

- $X_t = T - t|T > t$ είναι η υπολειπόμενη διάρκεια ζωής με συνάρτηση κατανομής την $F(x|t) = 1 - S(x|t)$,

- $E[e^{-\lambda X_t}]$ ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της $X_t$ , ο οποίος χρησιμοποιείται για να περιγράψει αρκετές κατανομές χρόνου ζωής. Όταν $\lambda \to 0$, από τη σχέση (2.5) προκύπτει ότι $E[X_t] = m(t)$ .

Ο μετασχηματισμός Laplace της υπολειπόμενης διάρκειας ζωής $X_t$ , ισούται με $1-\lambda m_\lambda(t)$ και μπορεί να ερμηνεύει αρκετές εφαρμογές στο χώρο του αναλογισμού και της οικονομίας.

Γενικά, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m_\lambda(t)$, εξαρτάται από την αρχική συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$. Η εξάρτηση αυτή δημιουργεί δυσκολία στον υπολογισμό του, δεδομένου ότι η συνάρτηση επιβίωσης εκφράζεται ως ολοκλήρωμα. Η δυσκολία έγκειται στην ύπαρξη διπλών ολοκληρωμάτων. Ωστόσο, το πρόβλημα δεν υφίσταται αν εφαρμοστούν οι ακόλουθοι - εναλλακτικοί τύποι

$$m_\lambda(t) = \frac{\int_t^\infty e^{-\lambda x} S(x)dx}{e^{-\lambda t} S(t)} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\int_t^\infty e^{-\lambda x} f(x)dx}{e^{-\lambda t} S(t)}\right) \tag{2.6}$$

και

$$m(t) = \left(\frac{\int_t^\infty x\, f(x)dx}{S(t)}\right) - t\,. \tag{2.7}$$

Η σχέση (2.7) αποδεικνύεται στηριζόμενη στο ότι

$$\int_t^\infty S(x)dx = \int_t^\infty x'\, S(x)dx = [x\, S(x)]_t^\infty + \int_t^\infty x\, f(x)dx$$

το οποίο γράφεται

$$\int_t^\infty S(x)dx = -t\, S(t) + \int_t^\infty x\, f(x)dx$$

όμως, δεδομένου ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ικανοποιεί τη σχέση (1.11), τότε θα προκύψει ότι

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty x\, f(x)dx}{S(t)} - t\,.$$

Η σχέση (2.6) αποδεικνύεται, αν εφαρμοστεί ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην δεύτερη ισότητα του τύπου (2.4).

## Διάταξη Μέσων Υπολειπόμενων Χρόνων Ζωής

Το γεγονός ότι η συνάρτηση $h_\lambda(t)$, είναι υψηλότερη κατά $\lambda > 0$ από την $h(t)$, προκαλεί ενδιαφέρον για το κατά πόσο η συνάρτηση $m_\lambda(t)$ είναι χαμηλότερη από τη $m(t)$. Η εκτίμηση της απόστασης μεταξύ των δύο συναρτήσεων $m(t), m_\lambda(t)$ προκύπτει εύκολα αν είναι γνωστές οι δύο συναρτήσεις.

Από τη δεύτερη ισότητα της σχέσης (2.4) όταν $t \le x < \infty$ , προκύπτει ότι

$$m_\lambda(t) = \frac{\int_t^\infty e^{-\lambda x} S(x)dx}{e^{-\lambda t} S(t)} \le \frac{e^{-\lambda t}\int_t^\infty S(x)dx}{e^{-\lambda t} S(t)} = m(t)$$

άρα,

$$m_\lambda(t) \le m(t) \text{ για κάθε } t \ge 0\ .$$

**Συμπέρασμα 2.1.** *Με την αύξηση της συνάρτησης της έντασης κινδύνου κατά ένα θετικό και σταθερό όρο, επέρχεται μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

## Διάταξη Σημείων Καμπής

Φυσικό επακόλουθο αποτελεί η διαπίστωση ότι, η σταθερή και θετική αύξηση δεν επηρεάζει τις γεωμετρικές ιδιότητες της έντασης κινδύνου. Συγκεκριμένα, η αρχική ένταση κινδύνου $h(t)$ και η νέα $h_\lambda(t)$ έχουν τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες. Γι΄ αυτό ποσότητες όπως τα σημεία καμπής, είναι κοινά και για τις δύο. Ωστόσο, η σταθερή αύξηση της έντασης κινδύνου, δεν σημαίνει σταθερή μείωση της αντίστοιχης συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, και γι᾽ αυτό τα σημεία καμπής της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μεταβάλλονται, σε αντίθεση με εκείνα της έντασης κινδύνου. Συνεπώς, αξίζει να μελετηθούν οι αλλαγές που επιφέρει η σταθερή αύξηση της έντασης κινδύνου, τόσο στη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, όσο και στις θέσεις των σημείων καμπής αυτού, δεδομένου ότι η μετατόπιση των σημείων καμπής, καθορίζει την αλλαγή της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Η μέτρηση της απόστασης μεταξύ των σημείων $t_0$ και $t_\lambda$, τα οποία είναι τα σημεία καμπής των συναρτήσεων $m(t)$ και $m_\lambda(t)$ αντίστοιχα, εξαρτάται από την απεικόνιση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η απεικόνιση του, όπως ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα, μπορεί να έχει λεκανοειδές σχήμα ή ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.

Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους τα σημεία καμπής $t_0$ και $t_\lambda$, των αντίστοιχων συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ και $m_\lambda(t)$, διευκρινίστηκε και παρουσιάζεται απλουστευμένα από το ακόλουθο θεώρημα (Belzunce, Ortega και Ruiz, 2007).

**Θεώρημα 2.1.** *Αν η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής* $m(t)$ *έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, τότε για κάθε* $\lambda > 0$, *το σημείο καμπής* $t_\lambda$ *του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής* $m_\lambda(t)$ *είναι μεγαλύτερο από το σημείο καμπής* $t_0$ *του* $m(t)$.

Ο τρόπος με τον οποίο συνδέθηκε γραφικά η ένταση κινδύνου με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής διευκρινίστηκε και παρουσιάζεται απλουστευμένα από το ακόλουθο θεώρημα (Gupta και Akman, 1995). Αυτό το θεώρημα διατυπώθηκε αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο, χωρίς όμως να γίνει αναφορά σε σημεία καμπής.

**Θεώρημα 2.2.** *Αν η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *παραγωγίζεται και έχει λεκανοειδές σχήμα με σημείο καμπής το* $t_1 \in (0, \infty)$, *τότε η καμπύλη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής* $m(t)$ *καθορίζεται σύμφωνα με τα κάτωθι*

*(α΄)* *αν* $h(0)\,E(T) > 1$ , *τότε η συνάρτηση* $m(t)$ *έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα και το σημείο καμπής* $t_0$ *του* $m(t)$ *ανήκει στο διάστημα* $(0, t_1)$ , *ενώ*

*(β΄)* *αν* $h(0)\,E(T) \leq 1$ , *τότε η συνάρτηση* $m(t)$ *είναι φθίνουσα.*

**Παρατήρηση 2.1.** *Αν το σημείο $t_\lambda$ είναι μηδέν, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 , η $m_\lambda(t)$ δεν έχει πλέον ανάποδο λεκανοειδές σχήμα αλλά είναι φθίνουσα.*

**Συμπέρασμα 2.2.** *Από το συνδιασμό των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 απορρέει ως συμπέρασμα η σχέση που συνδέει τα σημεία καμπής $t_0, t_\lambda$ και $t_1$ των συναρτήσεων $m(t), m_\lambda(t)$ και $h(t)$, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση $h(t)$ είναι διαφορίσιμη, έχει λεκανοειδές σχήμα με $h(0)E(T) > 1$, τότε για κάθε $\lambda > 0$, προκύπτει $[h(0) + \lambda]\, E(T_\lambda) > 1$, το οποίο σημαίνει ότι $t_0 < t_\lambda < t_1$. Η εύρεση των αναλυτικών τύπων για τα σημεία καμπής $t_0, t_\lambda$ είναι πολλές φορές δύσκολη.*

△

Εφαρμογή των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 αποτελεί η κατανομή Hjorth η οποία αναλύεται στη συνέχεια.

## 2.2 Μελέτη Κατανομών

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζεται το προσθετικό μοντέλο της έντασης κινδύνου σταθερού και θετικού όρου σε αρκετές γνωστές κατανομές.

### 2.2.1 Εκθετική

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Εκθετική κατανομή, με παράμετρο $\theta > 0$ , $T \sim Exp(\theta)$. Η T θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ , συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = e^{-\theta t}$ , ένταση κινδύνου την $h(t) = \theta$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t) = \dfrac{1}{\theta}$.

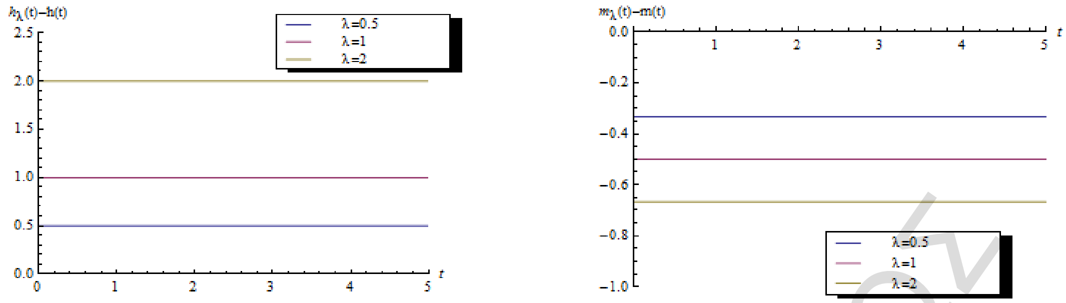
Η Εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από μία αξιοπρόσεκτη ιδιότητα, την «αμνήμον ιδιότητα» [1]. Σύμφωνα με αυτή, η συνάρτηση επιβίωσης δεν εξαρτάται από τις χρονικές μεταβολές που μπορεί να παρατηρηθούν και παραμένει αναλλοίωτη. Η χρήση της αμνήμων ιδιότητας, διευκολύνει τον υπολογισμό του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Δεδομένου ότι $S(x|t) = S(x)$, προκύπτει

$$m_\lambda(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} S(x|t)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} S(x)dx = \frac{1}{\theta + \lambda}$$

το οποίο σημαίνει ότι, ο νέος μέσος υπολειπόμενος χρόνος είναι ανεξάρτητος του χρόνου t.

Στην Εκθετική κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά έναν άλλο θετικό και σταθερό όρο. Δηλαδή είναι, $h_\lambda(t) = h(t) + \lambda$ και $m_\lambda(t) = m(t) - \dfrac{\lambda}{\theta(\lambda + \theta)}$ . Αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.1.

[1] «Αμνήμων Ιδιότητα» - Memoryless Property




Σχήμα 2.1: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c$ με $c > 0$, για κάθε $\lambda$ και $\theta = 1$.

**Παρατήρηση 2.2.** *Ο θετικός και σταθερός όρος $\lambda$ του μοντέλου (2.2) μπορεί να θεωρηθεί ως η ένταση κινδύνου μιας Εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\lambda$, η οποία ορίζεται ως $h^*(t) = \lambda$.*

**Θεώρημα 2.3.** *Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $T$ που έχει ένταση κινδύνου $h(t)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Η $T$ λόγω μιας αύξησης σταθερού και θετικού όρου $\lambda$, θα περιγράφεται από νέες συναρτήσεις έντασης κινδύνου $h_\lambda(t)$ και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\lambda(t)$, για τις οποίες θα ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις*

$$h_\lambda(t) = h(t) + \lambda \quad \textit{και} \quad m_\lambda(t) = m(t) - c$$

*γνωρίζοντας ότι $c > 0$ . Τότε η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ θα προέρχεται από την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{\theta}$ και θα έχει μέση τιμή*

$$\theta(\lambda, c) = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 + 4\frac{\lambda}{c}} - \lambda} .$$

*Απόδειξη.* Η σχέση (1.12) πρέπει να ικανοποιείται ομοίως για $m(t)$ και $m_\lambda'(t)$. Συνεπώς θα ισχύουν $m'(t) = m(t)\,h(t) - 1$ και $m_\lambda'(t) = m_\lambda(t)\,h_\lambda(t) - 1$ . Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $m_\lambda'(t) - m'(t) = m_\lambda(t)\,h_\lambda(t) - m(t)\,h(t)$ το οποίο αντικαθιστώντας τις ισότητες που ισχύουν λόγω υπόθεσης, ισοδυναμεί με $m_\lambda'(t) - m'(t) = \lambda\, m(t) - c\, h(t) - c\,\lambda$ . Επειδή, $m_\lambda(t) = m(t) - c \Rightarrow m_\lambda'(t) - m'(t) = 0$ θα είναι $\lambda m(t) - c h(t) - c\lambda = 0$ . Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τη σχέση (1.11), προκύπτει

$$\lambda \int_t^\infty S(x)dx + c\,S'(t) - \frac{\lambda}{c} S(t) = 0$$

Έστω μία τυχαία μεταβλητή $T$ που ακολουθεί Εκθετική κατανομή. Τότε η $T$ θα έχει την «αμνήμων ιδιότητα», που σημαίνει ότι για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, b > 0$ ισχύει ότι $P(T > a + b \,|\, T > b) = P(T > a)$.

το οποίο παραγωγίζοντας κατά μέλη, ισοδυναμεί με

$$S''(t) - \lambda S'(t) - \frac{\lambda}{c} S(t) = 0 \,. \tag{2.8}$$

Η εξίσωση (2.8) είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές, και έχει γενική λύση της μορφής

$$S(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}$$

με

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\frac{\lambda}{c}}}{2} > 0 \;\; \text{και} \;\; x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\frac{\lambda}{c}}}{2} < 0$$

όπου $c_1$ και $c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Ωστόσο, η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι μία συνάρτηση επιβίωσης με $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$ , γι' αυτό $c_1 = 0$ αφού $x_1 > 0$. Εφόσον, $S(0) = 1$ θα είναι $c_2 = 1$ . Συνεπώς, ως μοναδική μη-εκφυλισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.8) προκύπτει να είναι η συνάρτηση επιβίωσης μιας Εκθετικής κατανομής, δηλαδή η $S(t) = e^{x_2 t}$. Επειδή το $x_2$ είναι αρνητικό, η εκθετική συνάρτηση γράφεται ως $S(t) = \exp\left\{-\frac{t}{\theta(\lambda, c)}\right\}$ , όπου $\theta(\lambda, c) = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 + 4\frac{\lambda}{c}} - \lambda}$ είναι θετικός σταθερός όρος. Συνεπώς, ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

### 2.2.2 Erlang

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Erlang κατανομή, $T \sim \mathrm{Erlang}(\nu, \theta)$, όπου $\nu$ οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός, παράμετρος σχήματος, και $\theta > 0$ η ένταση. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(t) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-\theta t}$ , επειδή όμως $\nu$ θετικός ακέραιος ισχύει ότι $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$ , άρα,

$$f(t) = \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} t^{\nu-1} e^{-\theta t} \,.$$

Η $T$ θα έχει ως συνάρτηση επιβίωσης την

$$S(t) = \mathrm{GammaRegularized}[\nu, \theta t] \; ^{2}$$

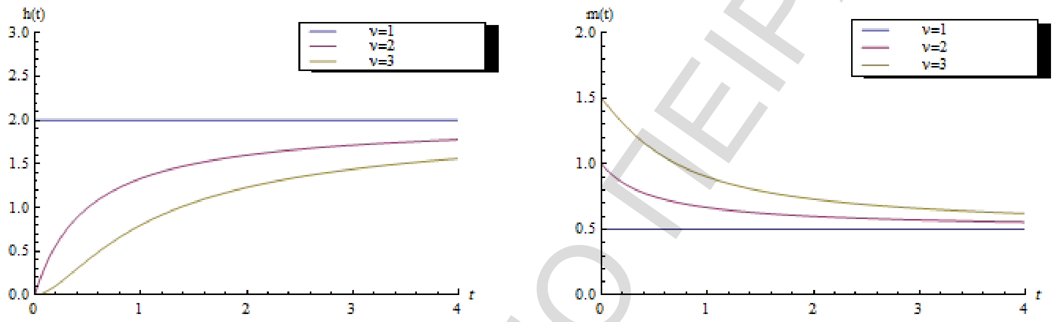
[2] Μία τυχαία μεταβλητή $Z$ ακολουθεί GammaRegularized κατανομή, $Z \sim Q(a, z)$, όταν $Q(a, z) = \frac{\Gamma(a, z)}{\Gamma(a)}$ , όπου η σύναρτηση $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$ ορίζεται ως η μη πλήρης Γάμμα κατανομή, ενώ η σύναρτηση $\Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z}\, dz$ ορίζεται ως η πλήρης Γάμμα κατανομή.

και ένταση κινδύνου την

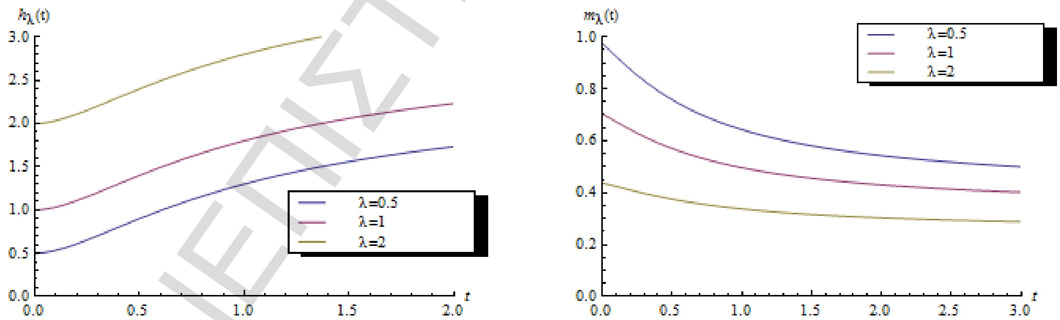
$$h(t) = \frac{\theta^{\nu}\, t^{\nu-1}\, e^{-\theta t}}{\Gamma(\nu, \theta t)} \; .$$

Οι συναρτήσεις $m(t)$ και $m_{\lambda}(t)$ δεν εκφράζονται από απλές συναρτήσεις γι΄ αυτό η παράθεσή τους παραλείπεται.

Από το Σχήμα 2.2 και το Σχήμα 2.3 φαίνεται ότι οι συναρτήσεις $h(t)$ και $h_{\lambda}(t)$ είναι αύξουσες για κάθε $\nu > 1$, ενώ οι συναρτήσεις $m(t)$ και $m_{\lambda}(t)$ είναι φθίνουσες για $\nu > 1$. Αξιοπρόσεκτο είναι το γεγονός ότι για $\nu = 1$, η Erlang κατανομή συμπεριφέρεται ως Εκθετική μόνο για τις συναρτήσεις $h(t)$ και $m(t)$.

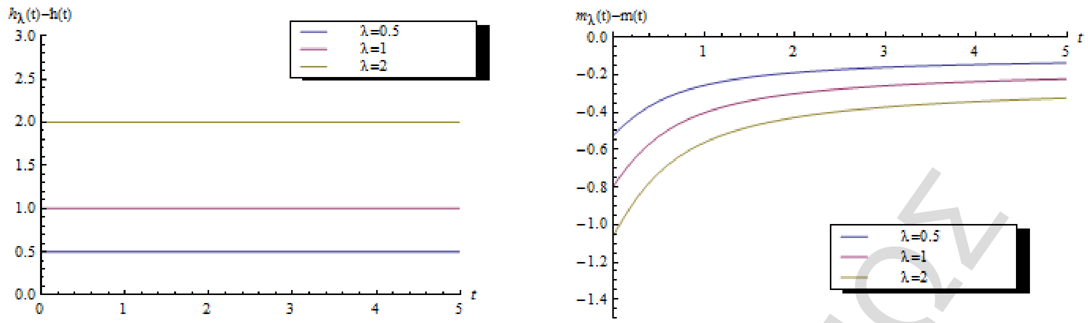



Σχήμα 2.2: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $\theta = 2$.



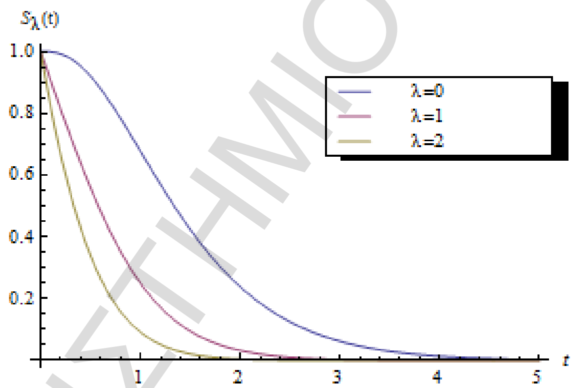

Σχήμα 2.3: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε $\lambda$, $\nu = 3$ και $\theta = 2$.

Στην Erlang κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική και αύξουσα συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο t. Δηλαδή είναι, $h_{\lambda}(t) = h(t) + \lambda$ και $m_{\lambda}(t) = m(t) - c(t)$. Αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.4.




Σχήμα 2.4: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε $\lambda$, $\nu = 3$ και $\theta = 2$.

Από το Σχήμα 2.5 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρει η προσθήκη του θετικού και σταθερού όρου $\lambda$ στη συνάρτηση επιβίωσης. Η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=1}(t)$ και $S_{\lambda=2}(t)$.




Σχήμα 2.5: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε $\lambda$, $\nu = 3$ και $\theta = 2$.

### 2.2.3 Lomax

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Lomax κατανομή, με παραμέτρους $k > 0$ και $a > 1$. Η T θα έχει συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = (1 + kt)^{-a}$ και ένταση κινδύνου την

$$h(t) = \frac{ak}{a + kt} .$$

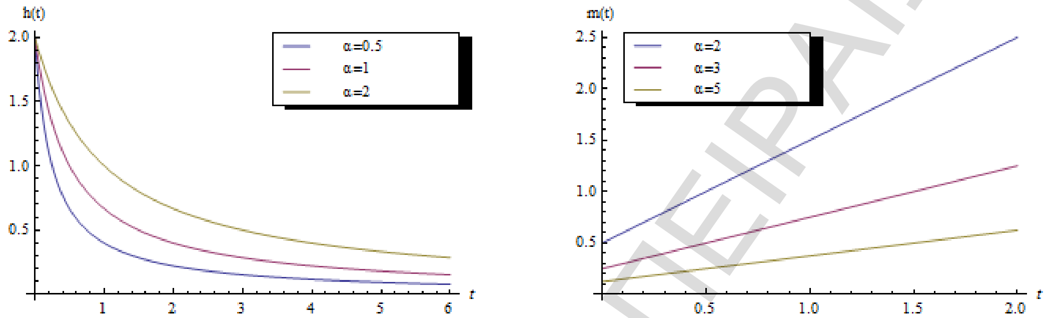
Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$, ισούται με

$$m(t) = \frac{1}{k(a-1)} + \frac{t}{a-1} ,$$

ενώ η συνάρτηση του $m_\lambda(t)$, βασίζεται στη σχέση (2.4) και ισούται με

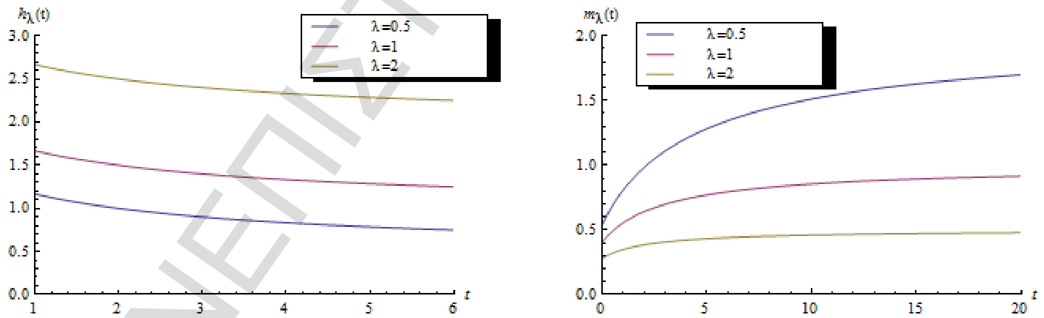
$$m_\lambda(t) = \exp\left(\frac{\lambda}{k} + \lambda t\right) \lambda^{a-1} \left(\frac{k}{1+kt}\right)^{-a} \Gamma\left(1-a, \frac{\lambda}{k} + \lambda t\right).$$

Από το Σχήμα 2.6 προκύπτει ότι η ένταση κινδύνου $h(t)$ είναι φθίνουσα, ενώ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$ είναι αύξουσα και γραμμική συνάρτηση.



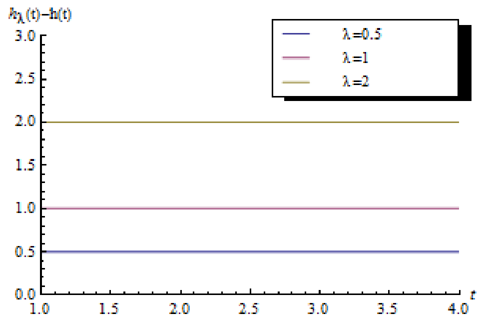

Σχήμα 2.6: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $k = 2$.

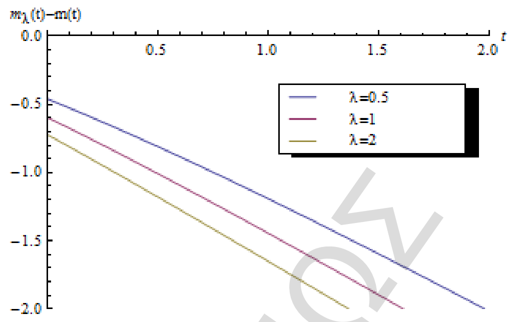
Στο προσθετικό μοντέλο που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.7 παρατηρείται ότι η ένταση κινδύνου $h_\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m_\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση.




Σχήμα 2.7: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε $\lambda$, $k = 1$ και $a = 2$.

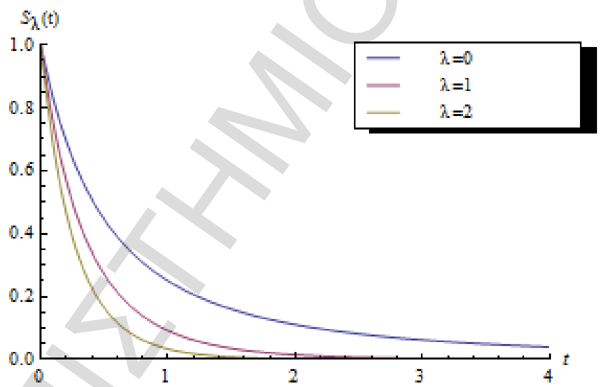
Στην Lomax κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο $t$. Δηλαδή είναι, $h_\lambda(t) = h(t) + \lambda$ και $m_\lambda(t) = m(t) - c(t)$. Αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.8.




Σχήμα 2.8: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε λ, $k = 1$ και $a = 2$.

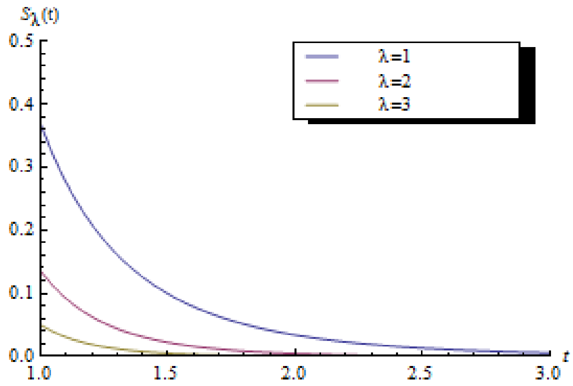
Από το Σχήμα 2.9 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρει η προσθήκη του θετικού και σταθερού όρου λ στη συνάρτηση επιβίωσης. Η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=1}(t)$ και $S_{\lambda=2}(t)$.




Σχήμα 2.9: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε λ, $k = 1$ και $a = 2$.

**Παρατήρηση 2.3.** *Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Pareto κατανομή,* $T \sim \text{Pareto}(k, a)$, *όπου* $k > 0$ *είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή* $t$, *δηλαδή* $k \leq t < \infty$ *και* $a > 1$ *η παράμετρος σχήματος. Η* $T$ *θα έχει συνάρτηση επιβίωσης την* $S(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^a$.

*Αν εφαρμοστεί το μοντέλο* $h_\lambda(t) = h(t) + \lambda$, *τότε θα προκύψει η συνάρτηση* $S_\lambda(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{k}{t}\right)^\alpha$, *η οποία όμως δεν είναι συνάρτηση επιβίωσης λόγω του ότι* $\lim_{t\to 0} S_\lambda(t) \neq 1$. *Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 2.10.*




Σχήμα 2.10: Η $S_\lambda(t)$ δεν είναι συνάρτηση επιβίωσης για κάθε λ, $k = 1$ και $a = 2$.

### 2.2.4 Γάμμα

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Γάμμα κατανομή, $T \sim \Gamma(a, b)$, όπου $a > 0$ παράμετρος σχήματος και $b > 0$ παράμετρος κλίμακας. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(t) = \frac{b^{-a}\, e^{-t/b}\, t^{a-1}}{\Gamma(a)} ,$$

συνάρτηση επιβίωσης την

$$S(t) = Q(a, \tfrac{t}{b}) = \frac{\Gamma\left(a, \dfrac{t}{b}\right)}{\Gamma(a)} ,$$

και ένταση κινδύνου την

$$h(t) = \frac{b^{a}\, e^{-t/b}\, t^{a-1}}{\Gamma\left(a, \dfrac{t}{b}\right)} .$$

Η ένταση κινδύνου υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (1.5) και γράφεται ως

$$h(t) = \frac{f(t)}{\displaystyle\int_t^\infty f(x)dx} = \frac{e^{-t/b}\, t^{a-1}}{\displaystyle\int_0^\infty e^{(x+t)/b}\,(x+t)^{a-1}\,dx} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x/b}\left(\frac{x}{t}+1\right)^{a-1} dx}$$

το οποίο σημαίνει ότι η $h(t)$ είναι

(α΄) (γνησίως) φθίνουσα, όταν $0 < a < 1$,

(β΄) σταθερή, όταν $a = 1$, και

(γ΄) (γνησίως) αύξουσα, όταν $a > 1$.

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (1.11) και ισούται με

$$m(t) = \frac{e^{-t/b}\, t^{1+a}\, b^{-a} + (ab - t)\, \Gamma(1 + a, \frac{t}{b})}{a\, \Gamma(a, \frac{t}{b})}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της μη πλήρους κατανομής Γάμμα [3] και κάνοντας απλοποιήσεις προκύπτει τελικά ότι

$$m(t) = ab + \frac{b^{1-a}\, t^{a}\, e^{-t/b}}{\Gamma(a, \frac{t}{b})} - t\,.$$

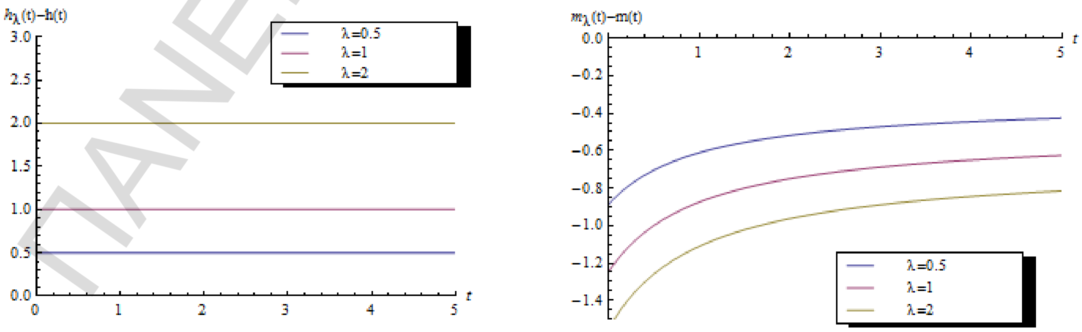
Η εφαρμογή του μοντέλου (2.2) οδηγεί στη μελέτη των νέων συναρτήσεων που προκύπτουν, όπως για παράδειγμα της νέας συνάρτησης επιβίωσης $S_\lambda(t)$ και του νέου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\lambda(t)$. Η συνάρτηση $S_\lambda(t)$ υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.3) και ισούται με

$$S_\lambda(t) = \frac{e^{-\lambda t}\, \Gamma(a, \frac{t}{b})}{\Gamma(a)}$$

ενώ, η συνάρτηση $m_\lambda(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση (2.4) και ισούται με

$$m_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{e^{\lambda t}\, \Gamma[a, t(\frac{1}{b} + \lambda)]}{(1 + \lambda b)^{a}\, \Gamma(a, \frac{t}{b})}\right).$$

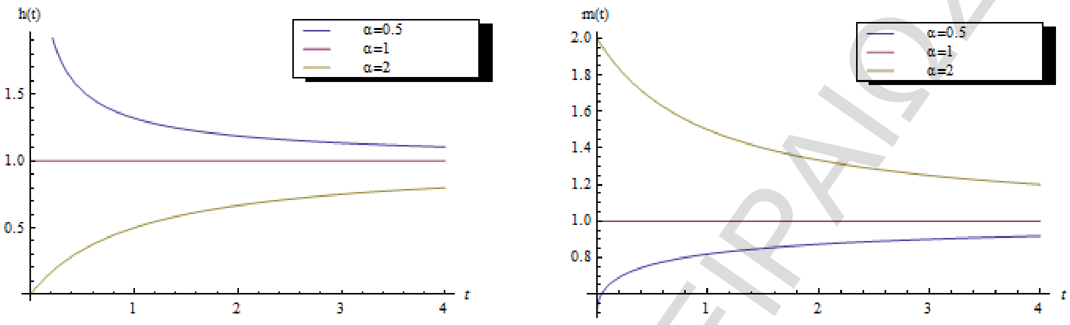
Στη Γάμμα κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική και αύξουσα συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο t. Δηλαδή είναι, $h_\lambda(t) = h(t) + \lambda$ και $m_\lambda(t) = m(t) - c(t)$. Αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.11.




Σχήμα 2.11: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε $\lambda$, $b = 1$ και $a = 2$.

[3] Γνωστή ιδιότητα : $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^{a} e^{-x}$

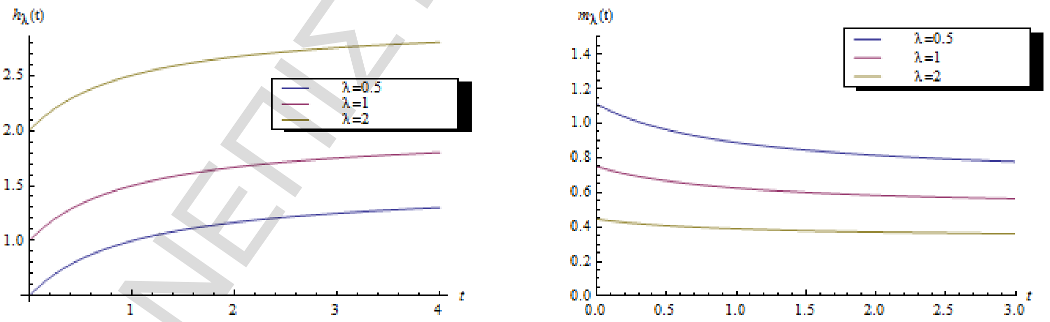
Από το Σχήμα 2.12 φαίνεται ότι η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι φθίνουσα για $a < 1$ και αύξουσα για $a > 1$, ενώ η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι αύξουσα για $a < 1$ και φθίνουσα για $a > 1$. Αξιοπρόσεκτο είναι το γεγονός ότι, για $a = 1$, η Γάμμα κατανομή συμπεριφέρεται ως Εκθετική.




Σχήμα 2.12: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $b = 1$.

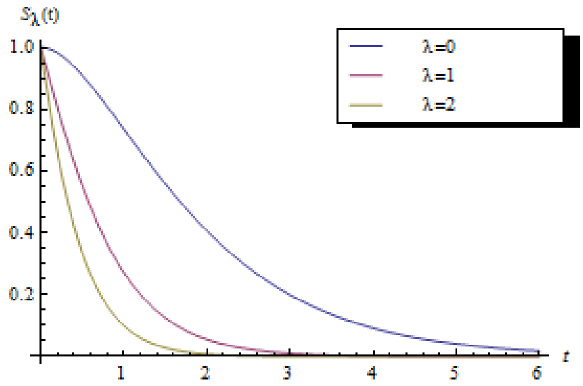
**Παρατήρηση 2.4.** *Η ένταση κινδύνου για κάθε* $a$ *και* $b$ *συγκλίνει στο ένα, καθώς ο χρόνος* $t \to \infty$ .

Στο προσθετικό μοντέλο που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.13 παρατηρείται ότι η ένταση κινδύνου είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι φθίνουσα συνάρτηση.




Σχήμα 2.13: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε $\lambda$, $b = 1$ και $a = 2$.

Από το Σχήμα 2.14 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρει η προσθήκη του θετικού και σταθερού όρου $\lambda$ στη συνάρτηση επιβίωσης. Η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=1}(t)$ και $S_{\lambda=2}(t)$.



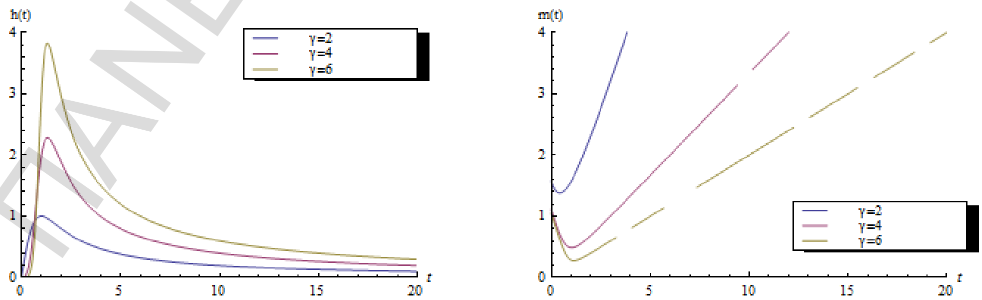

Σχήμα 2.14: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε $\lambda$, $b = 1$ και $a = 2$.

## 2.2.5 ΛογαριθμοΛογιστική

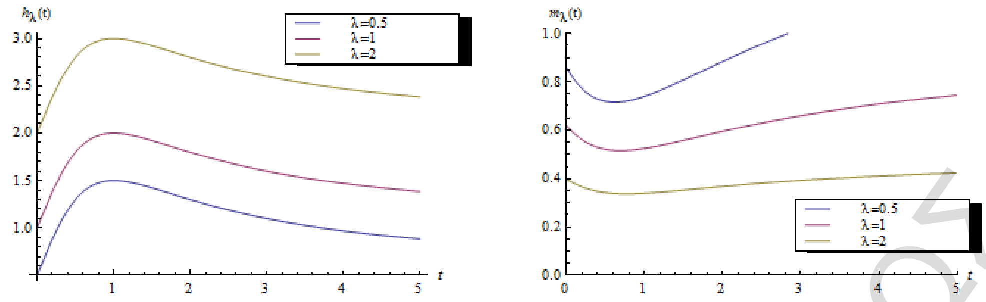
Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ΛογαριθμοΛογιστική κατανομή, $T \sim \mathrm{LogLogistic}(\gamma, \sigma)$, όπου $\gamma > 0$ είναι η παράμετρος σχήματος και $\sigma > 0$ είναι η παράμετρος κλίμακας. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(t) = \dfrac{\gamma\, \sigma^{-\gamma}\, t^{\gamma-1}}{\left[1+\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right]^2}$ , συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}}$ και ένταση κινδύνου την

$$h(t) = \frac{\gamma}{t\left[1+\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right]}\ .$$

Από το Σχήμα 2.15 και το Σχήμα 2.16 γίνεται αντιληπτό πως οι συναρτήσεις της έντασης κινδύνου $h(t)$ και $h_\lambda(t)$ έχουν ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ οι συναρτήσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχουν λεκανοειδές σχήμα.

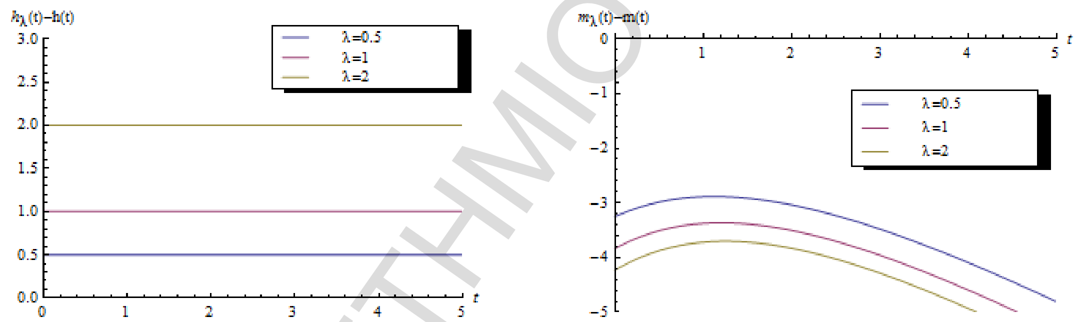



Σχήμα 2.15: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $\sigma = 1$.




Σχήμα 2.16: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε λ, $\sigma = 1$ και $\gamma = 2$.

Στη ΛογαριθμοΛογιστική κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο t. Αυτό επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.17.




Σχήμα 2.17: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε λ, $\sigma = 3$ και $\gamma = 2$.

## 2.2.6 Gompertz

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Gompertz κατανομή, με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, $T \sim \text{Gompertz}(\alpha, \beta)$. Η T θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(t) = \alpha\, e^{\beta t} \exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)\right],$$

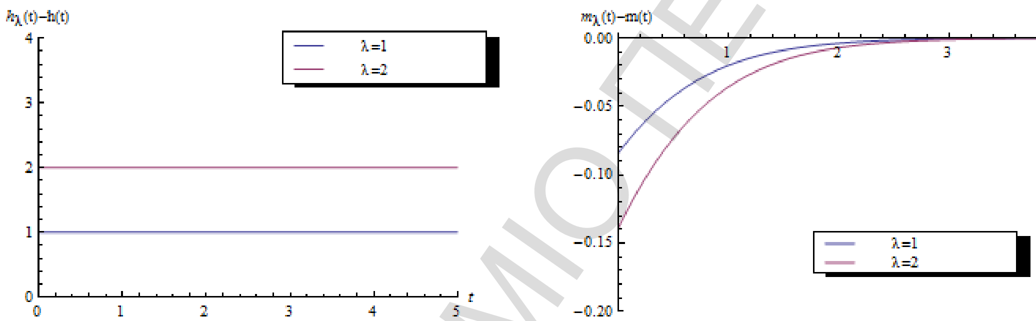
συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = \exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)\right]$ και ένταση κινδύνου τη συνάρτηση $h(t) = \alpha\, e^{\beta t}$ . Αν εφαρμοστεί το προσθετικό μοντέλο (2.2), τότε θα προκύψει μια νέα κατανομή γνωστή ως Gompertz-Makeham.

### 2.2.7 Gompertz-Makeham

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Gompertz-Makeham κατανομή, με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, $T \sim \mathrm{Gompertz} - \mathrm{Makeham}(\alpha, \beta)$. Η $T$ θα έχει συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = e^{\beta\,(1-e^{\alpha t})}$ , συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(t) = \alpha\,\beta\,\exp[\beta\,(1-e^{\alpha t}) + \alpha t]$ και ένταση κινδύνου την

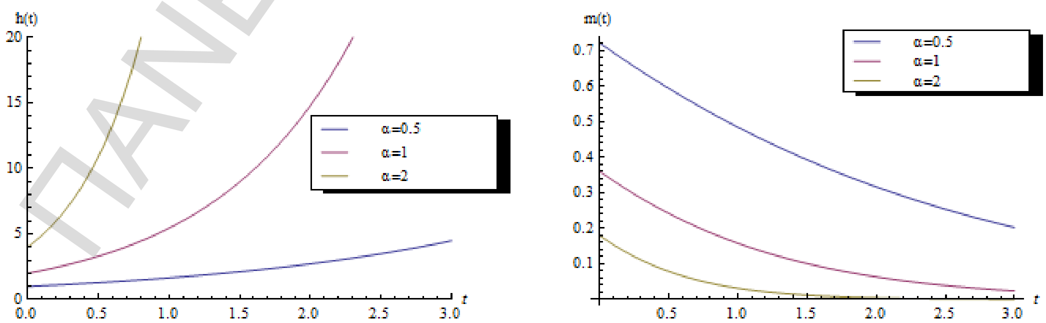
$$h(t) = \alpha\,\beta\,e^{\alpha t}\ .$$

Στη Gompertz-Makeham κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική και αύξουσα συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο $t$. Αυτό επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.18.



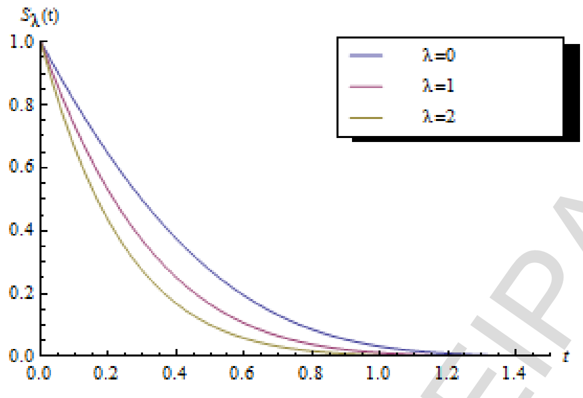

Σχήμα 2.18: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε $\lambda$, $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

Από το Σχήμα 2.19 φαίνεται πως η συνάρτηση της έντασης κινδύνου $h(t)$ είναι αύξουσα, ενώ η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ είναι φθίνουσα.




Σχήμα 2.19: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $\beta = 2$.

Από το Σχήμα 2.20 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρει η προσθήκη του θετικού και σταθερού όρου $\lambda$ στη συνάρτηση επιβίωσης. Η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=1}(t)$ και $S_{\lambda=2}(t)$.




Σχήμα 2.20: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε $\lambda$, $a = 1$ και $\beta = 2$.

## 2.2.8 Burr XII

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Burr XII κατανομή, $T \sim Br(c, d)$, με παραμέτρους σχήματος $c > 0$ και $d > 0$. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

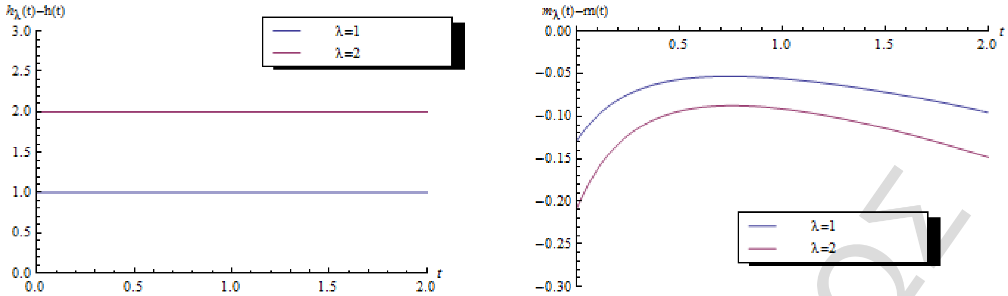
$$f(t) = \frac{c\,d\,t^{c-1}}{(1+t^c)^{d+1}} ,$$

συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = \dfrac{1}{(1+t^c)^d}$ , ένταση κινδύνου την $h(t) = \dfrac{c\,d\,t^{c-1}}{1+t^c}$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής

$$m(t) = \tfrac{1}{c}\,(-1)^{\frac{1}{c}-d}\,(1+t^c)^d\,B\left[-t^{-c}, d-\tfrac{1}{c}, 1-d\right] \text{ [4]} .$$

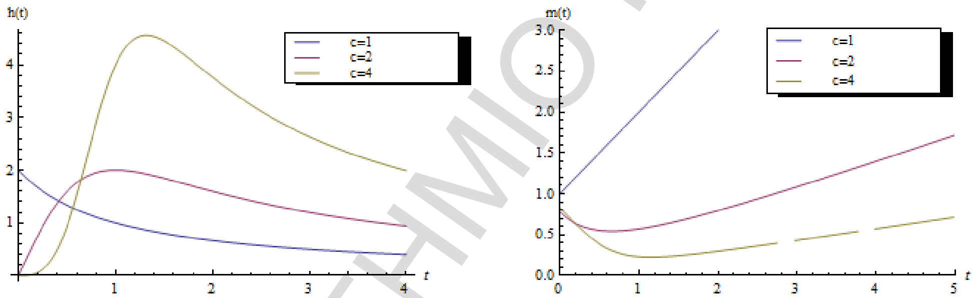
Στη Burr XII κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική συνάρτηση με λεκανοειδές σχήμα, η οποία εξαρτάται από το χρόνο $t$. Αυτό φαίνεται από το Σχήμα 2.21.

[4] Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται ως $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ , η μη πλήρης Βήτα συνάρτηση ορίζεται ως $B(z,a,b) = \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ , ενώ η μη πλήρης γενικευμένη Βήτα συνάρτηση ορίζεται ως $B(z_0,z_1,a,b) = \int_{z_0}^{z_1} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ .



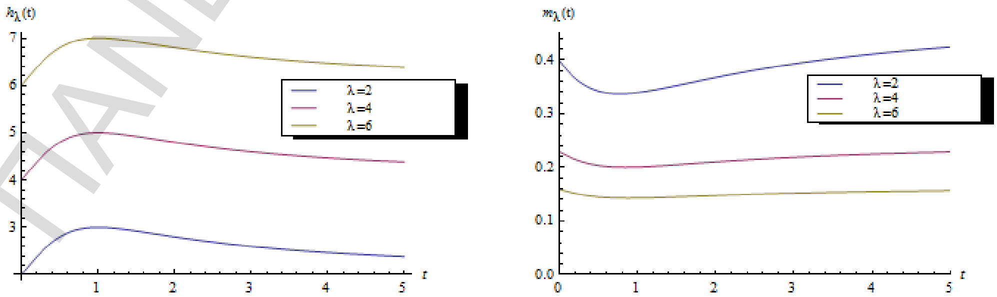

Σχήμα 2.21: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε λ, $c = 2$ και $d = 4$.

Από το Σχήμα 2.22 φαίνεται πως η συνάρτηση $h(t)$ είναι φθίνουσα για $c = 1$ και έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα για $c > 1$, ενώ η συνάρτηση $m(t)$ είναι αύξουσα - γραμμική για $c = 1$ και με λεκανοειδές σχήμα για $c > 1$.




Σχήμα 2.22: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $d = 2$.

Από το Σχήμα 2.23 φαίνεται ότι η συνάρτηση $h_\lambda(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ η συνάρτηση $m_\lambda(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα.




Σχήμα 2.23: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε λ, $c = 2$ και $d = 1$.

### 2.2.9 ΛογαριθμοΚανονική

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ΛογαριθμοΚανονική κατανομή, $T \sim \mathrm{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$, με παραμέτρους $\mu$ και $\sigma^2$, όπου $\mu$ είναι η μέση τιμή και $\sigma^2$ είναι η διακύμανση. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(t) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}{t\sigma\sqrt{2\pi}}$$

και συνάρτηση επιβίωσης την

$$S(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[-\frac{\mu-\ln t}{\sqrt{2}\sigma}\right].$$

Γνωρίζοντας όμως, ότι ισχύει η ιδιότητα για τη συνάρτηση Erfc [5] η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι

$$S(t) = 1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right),$$

όπου $\Phi$ είναι η συνάρτηση της Τυπικής Κανονικής κατανομής. Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$ υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.7). Αναλυτικά είναι

$$\int_t^\infty x\,f(x)\,dx = \int_t^\infty x\,\frac{\exp[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}]}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty \exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$

θέτοντας

$$z = \frac{\ln x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = e^{z\sigma+\mu} \Rightarrow dx = \sigma\,e^{z\sigma+\mu}\,dz$$

προκύπτει ότι

$$t < x < \infty \Rightarrow \frac{\ln t-\mu}{\sigma} < z < \infty$$

δηλαδή,

$$\int_t^\infty x\,f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln t-\mu}{\sigma}}^\infty \exp\left(-\frac{z}{2}+\sigma z+\mu\right)dz$$

το οποίο γράφεται ως

$$\int_t^\infty x\,f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{\frac{\ln t-\mu}{\sigma}}^\infty \exp\left[-\left(\frac{z-\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right]dz$$

αν όμως

$$y = \frac{z-\sigma}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = \sqrt{2}\,y+\sigma \Rightarrow dz = \sqrt{2}\,dy$$

[5] Η συνάρτηση Error Function Complementary ορίζεται ως $\mathrm{Erfc}(x) = 2[1-\Phi(x\sqrt{2})]$ και $\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$.

τότε

$$\frac{\ln t-\mu}{\sigma}<z<\infty \Rightarrow \frac{\frac{\ln t-\mu}{\sigma}-\sigma}{\sqrt{2}}<\frac{z-\sigma}{\sqrt{2}}<\infty \Rightarrow \frac{\ln t-\mu-\sigma^2}{\sqrt{2}\,\sigma}<y<\infty$$

άρα,

$$\int_t^{\infty} x\,f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{\frac{\ln t-\mu-\sigma^2}{\sqrt{2}\,\sigma}}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

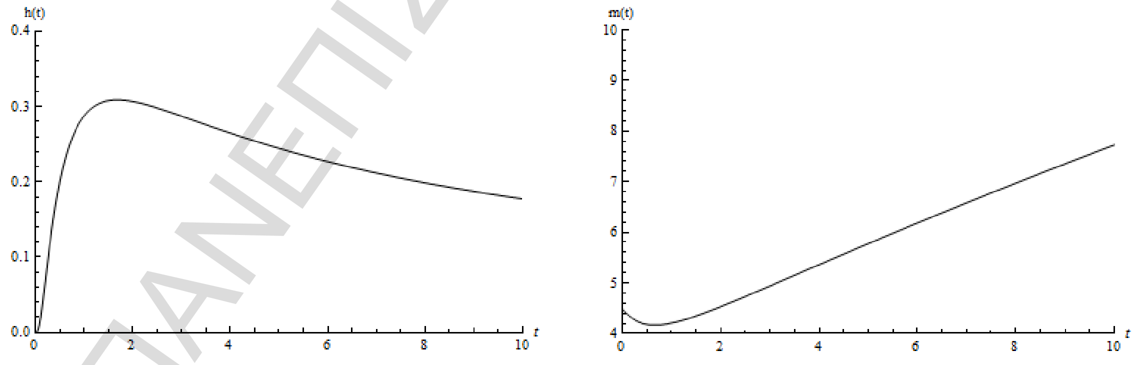
το οποίο ισούται με

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty} x\,f(x)dx &= \frac{1}{2}\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\ln t-\mu-\sigma^2}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\\ &= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right]\\ &= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right].\end{aligned}$$

Άρα, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$ θα είναι

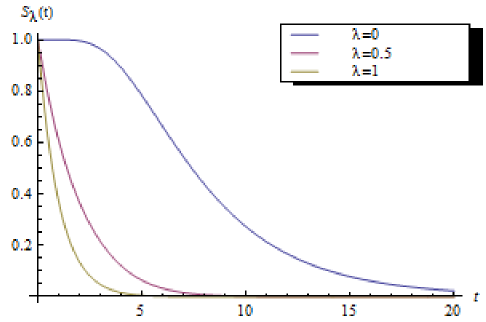
$$m(t)=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right]}{\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\right]}.$$

Από το Σχήμα 2.24 φαίνεται πως η συνάρτηση της έντασης κινδύνου έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχει λεκανοειδές σχήμα.




Σχήμα 2.24: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $\mu=1$ και $\sigma=1$.

Από το Σχήμα 2.25 φαίνεται πως η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t\to\infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0.5}(t)$ και $S_{\lambda=1}(t)$.




Σχήμα 2.25: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε $\lambda$, $\mu = 1$ και $\sigma = 1$.

### 2.2.10 Hjorth

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Hjorth κατανομή, με παράμετρο κλίμακας $\beta > 0$ και παραμέτρους σχήματος $\theta, \delta > 0$. Η T θα έχει ως συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = (1+\beta t)^{-\theta/\beta} \exp\left(-\dfrac{\delta t^2}{2}\right)$ και ένταση κινδύνου την $h(t) = \delta t + \dfrac{\theta}{1+\beta t}$ , η οποία παραγωγίζεται και έχει ως σημεία καμπής τα κάτωθι

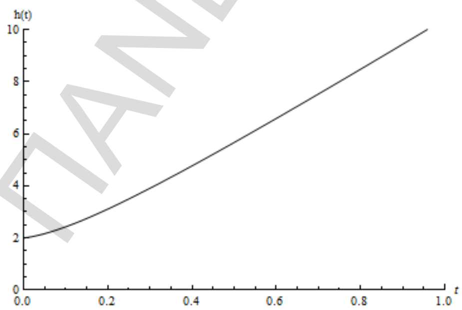
$$t_1 = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\frac{\theta\beta}{\delta}} - 1\right) > 0 \quad \text{και} \quad t_2 = -\frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\frac{\theta\beta}{\delta}} + 1\right) < 0 \ .$$

Η μονοτονία της έντασης κινδύνου καθορίζεται από το σημείο $t_1$ και συγκεκριμένα από τον όρο $\frac{\theta\beta}{\delta}$ , γι' αυτό η $h(t)$

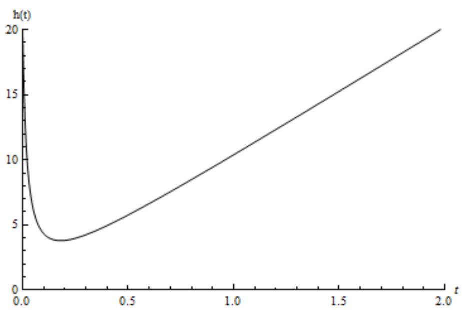
(α') θα είναι αύξουσα, αν $\frac{\theta\beta}{\delta} \leq 1$ , ενώ

(β') θα έχει λεκανοειδές σχήμα, αν $\frac{\theta\beta}{\delta} > 1$ , με σημείο καμπής το $t_1$.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, επαληθεύονται γραφικά, στο Σχήμα 2.26.



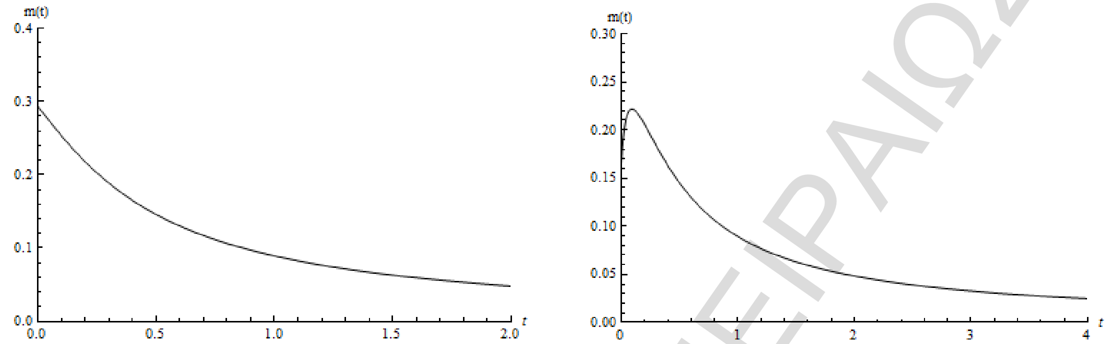

(α')




(β')

Σχήμα 2.26: Η ένταση κινδύνου με αύξουσα συνάρτηση (α') όταν $\frac{\theta\beta}{\delta} < 1$ και με λεκανοειδές σχήμα (β') όταν $\frac{\theta\beta}{\delta} > 1$.

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής δεν είναι εύκολα υπολογίσιμος. Η ύπαρξη του Θεωρήματος 2.2 διευκολύνει τον γραφικό προσδιορισμό του $m(t)$. Συγκεκριμένα, αν $\theta\,E[T] > 1$, ο $m(t)$ θα έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα μ΄ ένα μοναδικό σημείο καμπής $t_0$ στο διάστημα $(0, t_1)$, ενώ αν $\theta\,E[T] \leq 1$, ο $m(t)$ θα είναι φθίνουσα συνάρτηση. Οι διαπιστώσεις αυτές επαληθεύονται γραφικά, στο Σχήμα 2.27, σύμφωνα με την τιμή που λαμβάνει ο όρος $\frac{\theta\beta}{\delta}$ .




(α′) (β′)

Σχήμα 2.27: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$ με φθίνουσα συνάρτηση (α′) όταν $\frac{\theta\beta}{\delta} < 1$ και με ανάποδο λεκανοειδές σχήμα (β′) όταν $\frac{\theta\beta}{\delta} > 1$ .

Αν στο Θεώρημα 2.2 αντικατασταθεί η μέση τιμή που ορίζεται στο πρώτο κεφάλαιο ως $E(T) = \int_0^\infty S(t)\,dt$ και η σχέση (2.3), τότε θα προκύψει ο γραφικός προσδιορισμός του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m_\lambda(t)$, της αντίστοιχης έντασης κινδύνου $h_\lambda(t)$ , $\lambda > 0$, που έχει σημείο καμπής το $t_1$ , σύμφωνα με τα ακόλουθα

(α′) αν $(\theta + \lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda x} S(x)\,dx > 1$, τότε η συνάρτηση του $m_\lambda(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα με ένα μοναδικό σημείο καμπής $t_\lambda \in (0, t_1)$, ενώ

(β′) αν $(\theta + \lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda x} S(x)\,dx \leq 1$, τότε η συνάρτηση του $m_\lambda(t)$ είναι φθίνουσα.

### 2.2.11 Weibull

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Weibull κατανομή, $T \sim \mathrm{Weibull}(a, b)$, με παράμετρο σχήματος $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $b > 0$. Η $T$ θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(t) = ab^{-1}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}\right],$$

συνάρτηση επιβίωσης την

$$S(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^{a}\right]$$

και ένταση κινδύνου τη συνάρτηση

$$h(t) = a\, b^{-1}\, t^{a-1}\,.$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής βασίζεται στη σχέση (1.11). Από αυτή, ο όρος

$$\int_t^\infty S(x)\,dx = \int_t^\infty e^{-(x/b)^a}\,dx\,.$$

Θέτοντας

$$z = \left(\frac{x}{b}\right)^a \Rightarrow x = bz^{1/a} \Rightarrow dx = \frac{b}{a}\, z^{1/a-1}\,dz$$

προκύπτει ότι

$$t < x < \infty \Rightarrow t^a < x^a < \infty \Rightarrow \frac{t^a}{b^a} < \frac{x^a}{b^a} < \infty \Rightarrow \frac{t^a}{b^a} < z < \infty$$

άρα,

$$\int_t^\infty S(x)\,dx = \frac{b}{a}\int_{(t/b)^a}^\infty e^{-z}\, z^{1/a-1}\,dz$$

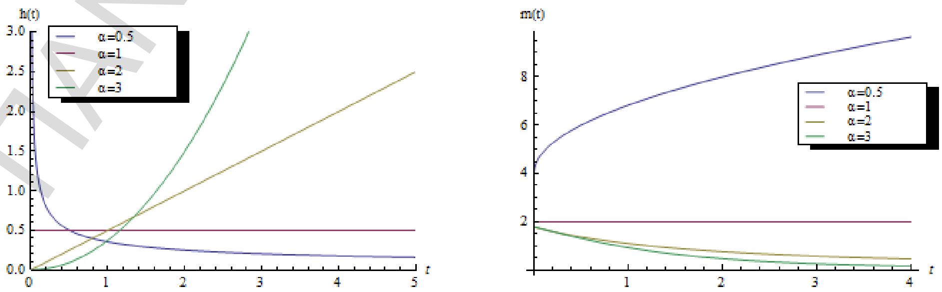
το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\int_t^\infty S(x)\,dx = \frac{b}{a}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}, \frac{t^a}{b^a}\right)$$

επειδή το ολοκλήρωμα $\int_{(t/b)^a}^\infty e^{-z}\, z^{1/a-1}\,dz$ παραπέμπει στη μη πλήρη Γάμμα κατανομή. Συνεπώς, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα είναι

$$m(t) = \frac{a}{b}\exp\left(\frac{t}{b}\right)^a \Gamma\left(\frac{1}{a}, \frac{t^a}{b^a}\right)\,.$$

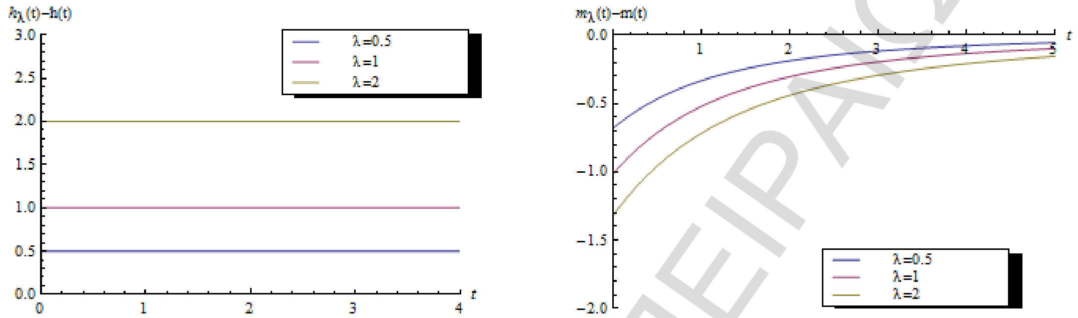
Από το Σχήμα 2.28 φαίνεται πως η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι φθίνουσα για $a < 1$ και αύξουσα για $a > 1$, ενώ η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι αύξουσα για $a < 1$ και φθίνουσα για $a < 1$.




Σχήμα 2.28: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής όταν $b = 2$.

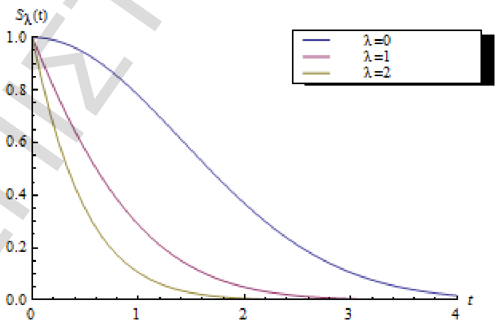
Όταν $a = 2$ και $b = 2$, η $h(t)$ είναι γραμμική και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ενώ όταν $a = 1$ η Weibull κατανομή συμπεριφέρεται ως Εκθετική.

Στη Weibull κατανομή, η αύξηση της έντασης κινδύνου μ΄ ένα θετικό και σταθερό όρο, συνοδεύεται από τη μείωση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής κατά μία μη αρνητική και αύξουσα συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το χρόνο t. Αυτό επιβεβαιώνεται γραφικά στο Σχήμα 2.29.




Σχήμα 2.29: Επαλήθευση των σχέσεων $h_\lambda(t) - h(t) = \lambda$ και $m_\lambda(t) - m(t) = -c(t)$ με $c(t) > 0$ για κάθε λ, $a = 2$ και $b = 2$.

Από το Σχήμα 2.30 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρει η προσθήκη του θετικού και σταθερού όρου λ στη συνάρτηση επιβίωσης. Η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=1}(t)$ και $S_{\lambda=2}(t)$.




Σχήμα 2.30: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε λ, $a = 2$ και $b = 2$.

## 2.3 Ειδικές Κατανομές

Σύμφωνα με την εργασία των Bebbington, Lai και Zitikis (2008), υπάρχει μία ενδελεχής αναζήτηση νέων κατανομών, ιδίως εκείνων που έχουν λεκανοειδές σχήμα, με σκοπό την καλύτερη ανάλυση της διάρκειας ζωής ενός μοντέλου.

Στη συνέχεια, μελετώνται δύο παραμετρικές κατανομές, η Ανηγμένη Προσθετική Weibull - Reduced Additive Weibull (RAW) και η Προσαρμόσιμη Weibull - Flexible Weibull (FW). Αξίζει να αναφερθεί ότι η μείξη αυτών των κατανομών, ερμηνεύει τα δεδομένα και περιγράφει τα στάδια ζωής ενός μοντέλου ανθρώπινης θνησιμότητας με εξαιρετικά εφαρμόσιμο τρόπο, καλύπτοντας όλη την διάρκεια ζωής των γυναικών και των ανδρών στον Καναδά και την Ινδονησία.

### 2.3.1 Ανηγμένη Προσθετική Weibull

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Ανηγμένη Προσθετική Weibull (RAW) κατανομή, με παραμέτρους $a > 0$ και $b > 1$. Η T θα έχει συνάρτηση επιβίωσης την

$$S_{RAW}(t) = \exp[-(at)^b - (at)^{1/b}]$$

και ένταση κινδύνου την

$$h_{RAW}(t) = ab(at)^{b-1} + \frac{a}{b}(at)^{(1/b-1)}.$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι χρήσιμο για την απεικόνιση της έντασης κινδύνου στην Ανηγμένη Προσθετική Weibull κατανομή.

**Θεώρημα 2.4.** *Η ένταση κινδύνου* $h_{RAW}(t) = ab(at)^{b-1} + \frac{a}{b}(at)^{(1/b-1)}$

- *έχει ελάχιστο σημείο, το οποίο επιτυγχάνεται στο σημείο* $t_0 = a^{-1}b^{-3b/(b^2-1)}$ *και είναι γνησίως φθίνουσα όταν* $t < t_0$ *και γνησίως αύξουσα όταν* $t > t_0$ ,
- *είναι κυρτή υπό την προϋπόθεση ότι το* $b \geq 2$, *ενώ όταν* $b \in (1, 2)$ *η δεύτερη παράγωγος της* $h(t)$ *είναι (γνησίως) θετική, μόνο εάν* $t < t_1$ , *όπου* $t_1 = a^{-1}\left(\frac{2b-1}{2b^4 - b^5}\right)^{b/(b^2-1)}$ .

**Παρατήρηση 2.5.** *Δεδομένου ότι* $t_0 < t_1$, *η συνάρτηση* $h_{RAW}(t)$ *είναι*

*(α') κυρτή, όταν* $t < t_1$ ,

*(β') κοίλη, όταν* $t > t_1$ .

**Παρατήρηση 2.6.** *Το Θεώρημα 2.4 ισχύει και για το προσθετικό μοντέλο*

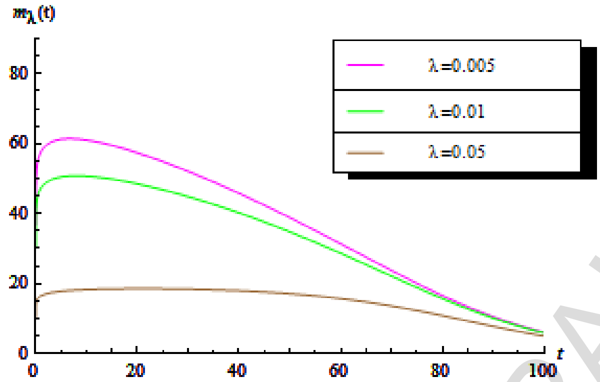
$$h_{RAW,\lambda}(t) = h_{RAW}(t) + \lambda .$$

**Πρόταση 2.1.** *Η συνάρτηση του* $m_{RAW,\lambda}(t)$ *έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 2.4 προκύπτει ότι η $h_{RAW}(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα. Εφόσον, $\lim_{t\to 0} h_{RAW}(t) = \infty$ τότε $h_{RAW,\lambda}(0)\,E(T_\lambda) > 1$ και άρα, από το Θεώρημα 2.2 συνεπάγεται ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m_{RAW,\lambda}(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.

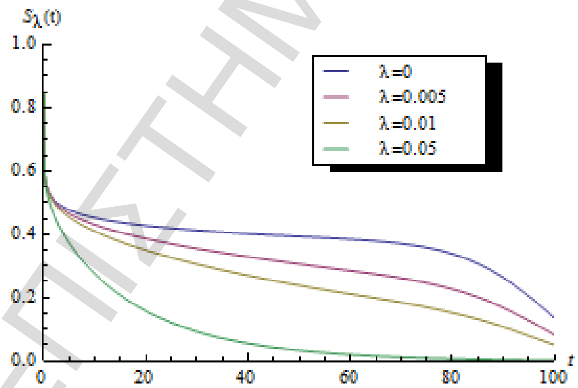
□

Η Πρόταση 2.1 επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 2.31




Σχήμα 2.31: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε λ, $a = 0.01$ και $b = 10$.

Από το Σχήμα 2.32 φαίνεται πως η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0.05}(t)$. Επιπλέον, δεν είναι προφανές πως όταν $t = 0$ για κάθε λ, η συνάρτηση επιβίωσης ισούται με ένα, γεγονός που επαληθεύεται υπολογιστικά.




Σχήμα 2.32: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε λ, $a = 0.01$ και $b = 10$.

### 2.3.2 Προσαρμόσιμη Weibull

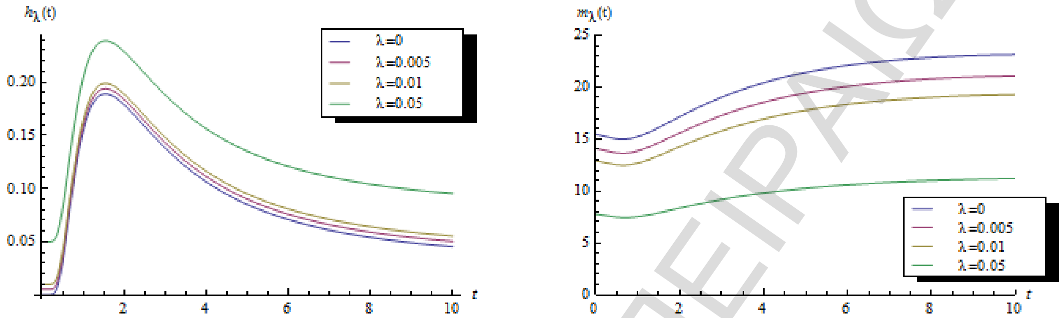
Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Προσαρμόσιμη Weibull (FW) κατανομή, με παραμέτρους $a, b > 0$. Η T θα έχει συνάρτηση επιβίωσης την

$$S_{FW}(t) = \exp(-e^{at-b/t})$$

και ένταση κινδύνου την

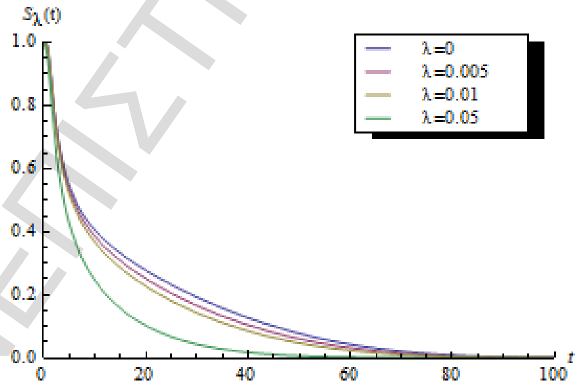
$$h_{FW}(t) = (a + b/t^2)\, e^{at-b/t} \; .$$

Από το Σχήμα 2.33 φαίνεται πως η συνάρτηση της έντασης κινδύνου $h_{FW,\lambda}(t)$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m_{FW,\lambda}(t)$ έχει λεκανοειδές σχήμα.




Σχήμα 2.33: Η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για κάθε λ, $a = 0.02$ και $b = 3$.

Από το Σχήμα 2.34 φαίνεται πως η συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0}(t)$ συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S_{\lambda=0.05}(t)$.




Σχήμα 2.34: Η συνάρτηση επιβίωσης για κάθε λ, $a = 0.02$ και $b = 3$.

**Θεώρημα 2.5.** *Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου* $h_{FW}(t)$

*(α΄) είναι αύξουσα, αν και μόνο αν* $ab > \frac{27}{64}$ ,

*(β΄) είναι γνησίως αύξουσα, όταν* $ab = \frac{27}{64}$ , *εκτός από* $t = \frac{3}{8a}$ , *όπου γίνεται σταθερή στιγμιαία, και*

(γ') *έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα, όταν* $ab < \frac{27}{64}$ .
*Συγκεκριμένα, η συνάρτηση* $h_{FW}(t)$ *είναι*

- *γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $(0, t_1)$,
- *γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $(t_1, t_2)$ *και*
- *γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $(t_2, \infty)$, *όπου τα δύο σημεία καμπής* $t_1 < t_2$ *ορίζονται ως*

$$t_1 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2, \ t_2 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2,$$

*όπου*

$$d = -\frac{\sqrt{2b}}{a},$$

*και*

$$y = \left(\frac{b}{a^2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{64}{27}ab}\right)\right)^{1/3} + \left(\frac{b}{a^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{64}{27}ab}\right)\right)^{1/3}$$

*Απόδειξη.* Οι ισχυρισμοί προκύπτουν από την εξέταση της μονοτονίας της πρώτης παραγώγου $h'_{FW}(t)$. Η πρώτη παράγωγός της έντασης κινδύνου είναι

$$h'_{FW}(t) = \left[\left(a + \frac{b}{t^2}\right)^2 - \frac{2b}{t^3}\right] \exp\left\{at - \frac{b}{t}\right\}$$

Η εξίσωση $h'_{FW}(t) = 0$, δεδομένου ότι $e^{at-b/t} > 0$, είναι ισοδύναμη με την

$$a^2t^4 + 2abt^2 - 2bt + b^2 = 0$$

η οποία γράφεται ως $(at^2+b)^2 = 2bt$. Η $at^2-(2bt)^{1/2}+b = 0$, μετά την αλλαγή μεταβλητών $t = x^2$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση 4ης τάξης $x^4 + dx + c = 0$, όπου $d = -\frac{\sqrt{2b}}{a}$ και $c = \frac{b}{a}$. Είναι γνωστό ότι οι τέσσερις λύσεις της εξίσωσης $x^4 + dx + c = 0$ είναι

$$\frac{\sqrt{y}}{2} - \varepsilon_1\sqrt{-\frac{y}{4} + \varepsilon_2\frac{d}{2\sqrt{y}}}\ , \ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (-1, 1)$$

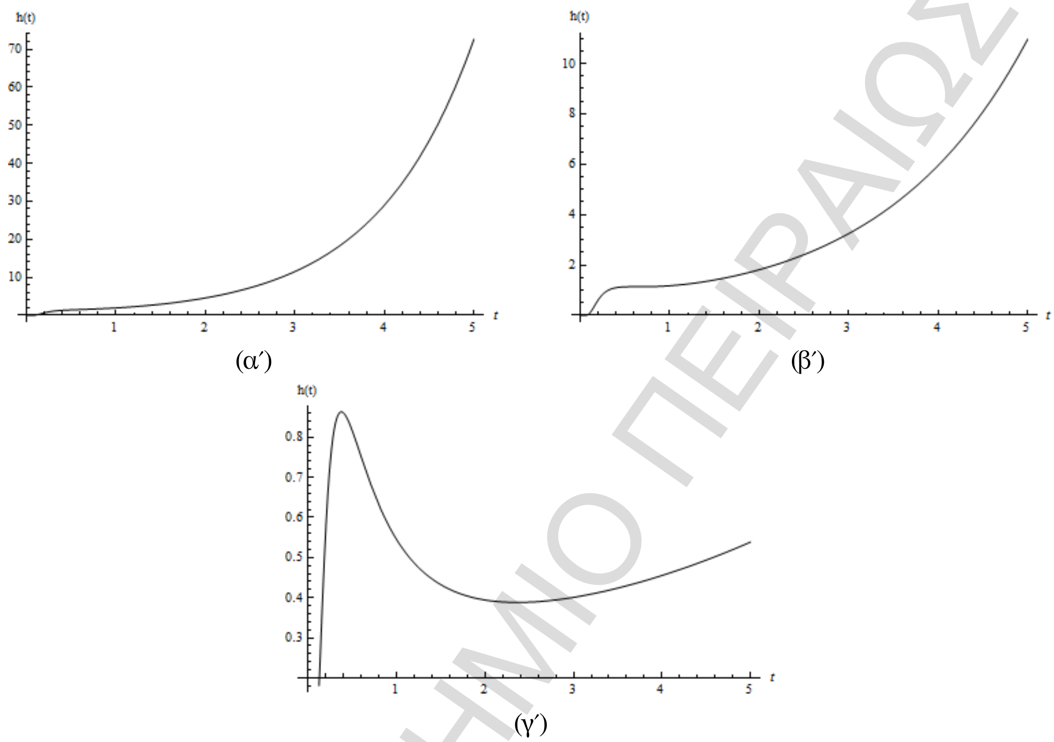
όπου το $y > 0$ είναι μία από τις ρίζες της εξίσωσης 3ης τάξης $y^3-4cy-d^2 = 0$ ή της «κανονικής μορφής» $y^3 + 3py + 2q = 0$ όπου $p = -\frac{4c}{3}$ και $q = -\frac{d^2}{2}$ .

Θέτοντας όπου $y = u+v$ στην τελευταία εξίσωση προκύπτει το πολυώνυμο $u^3+v^3+3(u+v)(uv+p)+2q = 0$, η ισότητα του οποίου ισχύει αν $u^3+v^3 = -2q$ και $uv = -p \Rightarrow u^3v^3 = -p^3$. Αυτοί οι ισχυρισμοί, οδηγούν σε ένα νέο πολυώνυμο $w^2 + 2qw - p^3 = 0$ που έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(p^3 + q^2)$.

Για $\Delta \geq 0$ ή $ab \leq \frac{27}{64}$ η εξίσωση 3ης τάξης έχει μόνο μία πραγματική λύση, η οποία γράφεται ως $y = (-q + \sqrt{\Delta})^{1/3} + (-q - \sqrt{\Delta})^{1/3}$ ή ως

$$y = \left(\frac{b}{a^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{64}{27}ab}\right)\right)^{1/3} + \left(\frac{b}{a^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{64}{27}ab}\right)\right)^{1/3}.$$

Η γραφική επαλήθευση για το τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα της έντασης κινδύνου $h_{FW}(t)$, γίνεται από το Σχήμα 2.35.




Σχήμα 2.35: Η ένταση κινδύνου $h_{FW}(t)$, είναι αύξουσα όταν $ab > \frac{27}{64}$ στο ($\alpha'$), είναι γνησίως αύξουσα όταν $ab = \frac{27}{64}$ στο ($\beta'$), ενώ, έχει τροποποιημένο λεκανοειδές σχήμα όταν $ab < \frac{27}{64}$ στο ($\gamma'$).

$\square$

# 3

# Προσθετικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

## 3.1 Περιγραφή Μοντέλου

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το προσθετικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, με γνώμονα την εργασία των Das και Nanda (2013).

Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T$ με συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$, ένταση κινδύνου $h(t)$, πεπερασμένη μέση τιμή και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Επιπλέον, έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T^*$ , με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m^*(t)$.

Αν στο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$ προστεθεί μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$m^*(t) = m(t) + c(t) \tag{3.1}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Δυναμικό Προσθετικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής» - Dynamic Additive Mean Residual Life Model.

Αν στο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$ προστεθεί θετικός και σταθερός όρος $c$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$m^*(t) = m(t) + c \tag{3.2}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Προσθετικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής» - Additive Mean Residual Life Model.

Στο ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύονται οι σχέσεις που ισχύουν για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη συνάρτηση επιβίωσης και την ένταση κινδύνου μιας τυχαίας μεταβλητής $T^*$ που ικανοποιεί το μοντέλο (3.1).

**Θεώρημα 3.1.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο $m^*(t) = m(t) + c(t)$, τότε*

*(α')* $$f^*(t) = f(t)\, g(t) \left(1 + \frac{c(0)}{E(T)}\right) \left(\frac{m(t)}{m(t) + c(t)}\right)^2 \exp\left[\int_0^t \frac{c(x)}{m(x) \cdot [m(x) + c(x)]} dx\right]$$

*όπου η συνάρτηση*

$$g(t) = \left(1 + \frac{c'(t)}{m'(t)+1}\right) ,$$

*(β′)* $S^*(t) = S(t)\left(1 + \frac{c(0)}{E(T)}\right)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right)exp\left[\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)\cdot[m(x)+c(x)]}dx\right] ,$

*(γ′)* $h^*(t) = h(t)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right) + \frac{c'(t)}{m(t)+c(t)} .$

*Απόδειξη.* $(\alpha)'$ Εφόσον το μοντέλο (3.1) ικανοποιεί τη σχέση (1.15), τότε προκύπτει ότι η νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f^*(t)$, θα ισούται με

$$f^*(t) = \frac{[E(T)+c(0)]\,[m'(t)+c'(t)+1]}{[m(t)+c(t)]^2}\,exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m(x)+c(x)}\,dx\right) .$$

Αν διαιρεθούν κατά μέλη οι συναρτήσεις $f^*(t)$, $f(t)$, τότε θα προκύψει η ζητούμενη σχέση

$$\frac{f^*(t)}{f(t)} = \frac{\dfrac{[E(T)+c(0)]\,[m'(t)+c'(t)+1]}{[m(t)+c(t)]^2}}{\dfrac{E(T)[m'(t)+1]}{[m(t)]^2}}\,exp\left(\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)\cdot[m(x)+c(x)]}\,dx\right) .$$

$(\beta)'$ Εφόσον το μοντέλο (3.1) ικανοποιεί τη σχέση (1.14), τότε προκύπτει ότι η νέα συνάρτηση επιβίωσης $S^*(t)$, θα ισούται με

$$S^*(t) = \frac{E(T)+c(0)}{m(t)+c(t)}\,exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m(x)+c(t)}\,dx\right) .$$

Αν διαιρεθούν κατά μέλη οι συναρτήσεις $S^*(t)$, $S(t)$, τότε θα προκύψει η ζητούμενη σχέση

$$\frac{S^*(t)}{S(t)} = \frac{\dfrac{E(T)+c(0)}{m(t)+c(t)}}{\dfrac{E(T)}{m(t)}}\,exp\left(\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)+c(x)}\,dx\right) .$$

$(\gamma)'$ Αν συνδιαστούν τα ερωτήματα (α), (β) σύμφωνα με τη σχέση (1.5), τότε θα ισχύει ότι

$$h^*(t) = h(t)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right)\left(1 + \frac{c'(t)}{m'(t)+1}\right) .$$

Ωστόσο, αν ληφθεί υπόψη ο τύπος (1.12), τότε θα προκύψει η ζητούμενη σχέση

$$h^*(t) = h(t)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right) + \frac{c'(t)}{m(t)+c(t)} .$$

□

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η συνάρτηση επιβίωσης και η ένταση κινδύνου μιας τυχαίας μεταβλητής $T^*$ που ικανοποιεί το μοντέλο (3.2).

**Θεώρημα 3.2.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c$*, τότε*

*(α')* $f^*(t) = f(t)\left(1+\frac{c}{E(T)}\right)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c}\right)^2 \exp\left[\int_0^t \frac{c}{m(x)\cdot[m(x)+c]}dx\right],$

*(β')* $S^*(t) = S(t)\left(1+\frac{c}{E(T)}\right)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c}\right) \exp\left[\int_0^t \frac{c}{m(x)\cdot[m(x)+c]}dx\right],$

*(γ')* $h^*(t) = h(t)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c}\right).$

Με την ακόλουθη πρόταση γνωστοποιούνται κάποιες ικανές προυποθέσεις έτσι ώστε μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, να επαληθεύει το μοντέλο (3.1).

**Πρόταση 3.1.** *Αν υπάρχουν δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$*, τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα*

*(α')* $0 \leq m(t) + c(t) < \infty$ *για κάθε* $t \geq 0$ ,

*(β')* $c(t)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t \geq 0$ ,

*(γ')* $m(t) + c(t) + t$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t \geq 0$ ,

*(δ')* *αν δεν υπάρχει κάποιο* $t_0$ *τέτοιο ώστε* $m(t_0) = 0$*, τότε*

$$\int_0^\infty \frac{1}{c(t)+m(t)}dt = \infty .$$

△

Ένα καίριο ερώτημα που επικρατεί είναι το αν το προσθετικό μοντέλο της έντασης κινδύνου συνυπάρχει με το προσθετικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται με τα ακόλουθα.

**Παράδειγμα 3.1.** *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *που ακολουθούν Γάμμα κατανομή. Η* $T$ *θα έχει μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και ένταση κινδύνου τις συναρτήσεις*

$$h(t) = \frac{t}{1+t} \quad \text{και} \quad m(t) = \frac{2+t}{1+t}$$

*ενώ, η* $T^*$ *θα έχει*

$$h^*(t) = \frac{1+2t}{1+t} \quad \text{και} \quad m^*(t) = \frac{5+2t}{4(1+t)} .$$

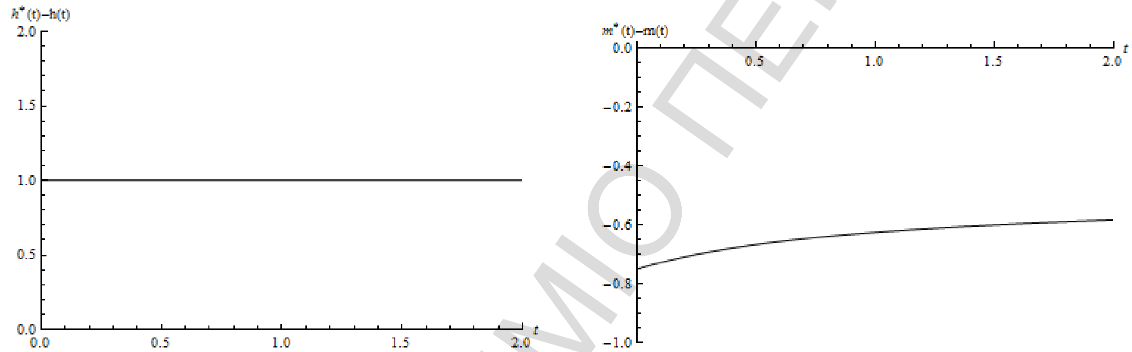
*Τότε προκύπτει*

$$h^*(t) - h(t) = \frac{1+2t}{1+t} - \frac{t}{1+t} \Rightarrow h^*(t) = h(t) + 1$$

*και*

$$m^*(t) - m(t) = \frac{5+2t}{4(1+t)} - \frac{2+t}{1+t} \Rightarrow m^*(t) = m(t) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(1+t)} + 1\right], \, t \geq 0\,.$$

*Είναι λοιπόν προφανές πως η ένταση κινδύνου* $h^*(t)$, *προκύπτει αν προστεθεί σταθερός και θετικός όρος στην ένταση κινδύνου* $h(t)$. *Ενώ, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής* $m^*(t)$, *προκύπτει αν αφαιρεθεί ένας θετικός αλλά μη σταθερός όρος από το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής* $m(t)$. *Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 3.1.*




Σχήμα 3.1: Επαλήθευση των σχέσεων $h^*(t) - h(t) = 1$ και $m^*(t) - m(t) = -c(t)$, όπου $c(t) > 0$.

**Αντιπαράδειγμα 3.1**. *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *που ακολουθούν Lomax κατανομή. Η* $T$ *θα έχει μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και ένταση κινδύνου τις συναρτήσεις*

$$m(t) = 2 + t \;\; \text{και} \;\; h(t) = \frac{2}{2+t}\,,$$

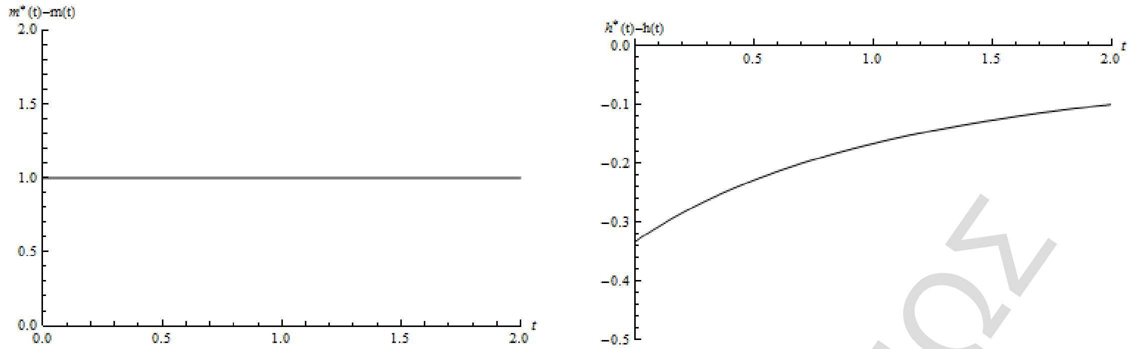
*ενώ, η* $T^*$ *θα έχει*

$$m^*(t) = 3 + t \;\; \text{και} \;\; h^*(t) = \frac{2}{3+t}\,.$$

*Τότε, προκύπτει*

$$h^*(t) = h(t) - \frac{2}{(3+t)(2+t)} \quad \text{και} \quad m^*(t) = m(t) + 1\,,\, t \geq 0\,.$$

*Είναι λοιπόν προφανές πως η ένταση κινδύνου* $h^*(t)$, *προκύπτει αν από την ένταση κινδύνου* $h(t)$ *αφαιρεθεί θετικός και μη σταθερός όρος. Ενώ, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής* $m^*(t)$, *προκύπτει αν προστεθέι ένας θετικός και σταθερός όρος στο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής* $m(t)$. *Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 3.2.*




Σχήμα 3.2: Επαλήθευση των σχέσεων $m^*(t) - m(t) = 1$ και $h^*(t) - h(t) = -c(t)$ , όπου $c(t) > 0$.

## 3.2 Κλάσεις Κατανομών Γήρανσης

Στο βιβλίο των Lai και Xie (2005, Κεφάλαιο 2), σχεδόν όλες οι κλάσεις στην θεωρία αξιοπιστίας ορίζονται σύμφωνα με ορισμένες ποσότητες οι οποίες παρέχουν πιθανοθεωρητικές πληροφορίες σχετικά με την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής. Αρκετές φορές, ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής παραπέμπει σε ένα χρονικό διάστημα το οποίο καλείται περίοδος γήρανσης. Η «γήρανση» είναι μια έμφυτη ιδιότητα και χαρακτηρίζει ένα μηχάνημα ή έναν οργανισμό μέσα από την ένταση κινδύνου $h(t)$, τη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης $S(x|t)$ ή το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Από αυτήν την προσέγγιση προκύπτει ότι, οι κλάσεις αξιοπιστίας έχουν προσαρμοστεί σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προκαλεί η γήρανση.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες από τις κλάσεις αξιοπιστίας καθώς και μερικές διαπιστώσεις που έχουν προκύψει μέσα από μελέτη.

**Πρόταση 3.2.** *Η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ θα έχει αύξουσα ένταση κινδύνου*

- *αν η $S(x|t)$ είναι φθίνουσα ως προς $0 \leq x < \infty$ για κάθε $t \geq 0$,*
- *αν και μόνο αν η συνάρτηση $-\ln S(t)$ είναι κυρτή.*

**Πρόταση 3.3.** *Η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ θα έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου*

- *αν η $S(x|t)$ είναι αύξουσα ως προς $t$,*
- *αν και μόνο αν η συνάρτηση $-\ln S(t)$ είναι κοίλη.*

**Πρόταση 3.4.** *Από τη σχέση (1.5), προκύπτει ότι αν η ένταση κινδύνου $h(t)$ είναι φθίνουσα στο $t = t_0$, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$ θα είναι επίσης φθίνουσα στο $t_0$.*

**Ορισμός 3.1.** *Μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T$ θα έχει*

- *αύξουσα ένταση κινδύνου - increasing in hazard rate (IHR), αν η $h(t)$ είναι αύξουσα ως προς $t$,*

- *φθίνουσα ένταση κινδύνου - decreasing in hazard rate (DHR), αν η* $h(t)$ *είναι φθίνουσα ως προς* $t$.

**Πρόταση 3.5.** *Η συνάρτηση κατανομής* $F(t)$ *θα έχει αύξουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής αν ισχύει* $m(s) \leq m(t)$ *με* $0 \leq s < t$, *ενώ θα έχει φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής* $m(t) = \int_0^{\infty} S(x|t)\,dx$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς* $t$, *δηλαδή* $m(s) \geq m(t)$ *για* $0 \leq s < t$.

**Παρατήρηση 3.1.** *Η έκφραση «*$m(s) \geq m(t)$ *με* $0 \leq s < t$*» διατυπώνεται ως εξής στον τομέα της μηχανικής : ένα μηχάνημα με μικρότερη χρονική διάρκεια λειτουργίας, θα έχει μεγαλύτερο μέσο χρόνο ζωής από από ένα άλλο μηχάνημα, το οποίο ήταν σε λειτουργία περισσότερο χρόνο.*

**Ορισμός 3.2.** *Μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή* $T$ *θα είναι*

- *αύξουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής - increasing in mean residual life (IMRL), αν ο* $m(t)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t$,
- *φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής - decreasing in mean residual life (DMRL), αν ο* $m(t)$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς* $t$.

**Παρατήρηση 3.2.** *Η διάταξη της έντασης κινδύνου, συνήθως επηρεάζει την διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ισχύει πάντοτε ότι, η κλάση της αύξουσας έντασης κινδύνου συμπεριλαμβάνεται σε αυτή της φθίνουσας συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ωστόσο, η κλάση της φθίνουσας έντασης κινδύνου, δε συμπεριλαμβάνεται πάντοτε σε αυτή της αύξουσας συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

**Ορισμός 3.3.** *Μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή* $T$ *θα ανήκει στην κλάση*

- *new better than used in expectation (NBUE), αν* $\int_0^{\infty} S(x|t)dx \leq E(T)$ *το οποίο ισοδυναμεί με* $m(t) \leq E(T)$,
- *new worse than used in expectation (NWUE), αν* $m(t) \geq E(T)$ .

**Ορισμός 3.4.** *Μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή* $T$ *θα ανήκει στην κλάση*

- *harmonic new better than used in expectation (HNBUE), αν ισχύει*

$$\int_t^{\infty} S(x)dx \leq E(T)\exp\left(-\frac{t}{E(T)}\right),$$

- *harmonic new worse than used in expectation (HNBUE), αν ισχύει*

$$\int_t^\infty S(x)dx \geq E(T)\exp\left(-\frac{t}{E(T)}\right).$$

**Ορισμός 3.5.** *Μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή* $T$ *θα ανήκει στην κλάση*

- *new better than used in hazard rate (NBUHR), αν ισχύει* $h(t) > h(0)$ ,
- *new worse than used in hazard rate (NWUHR), αν ισχύει* $h(t) < h(0)$ .

Ο Πίνακας 3.1 δείχνει την αλυσιδωτή σχέση που υπάρχει μεταξύ των προαναφερθέντων κλάσεων γήρανσης.

$$\begin{array}{lllll} \text{IHR} & & \Longrightarrow & & \text{NBUHR} \\ \Downarrow & & & & \\ \text{DMRL} & \Rightarrow & \text{NBUE} & \Rightarrow & \text{HNBUE} \end{array}$$

Πίνακας 3.1: Αλυσίδα σχέσεων μεταξύ των κλάσεων γήρανσης.

## 3.3 Στοχαστικές Διατάξεις

Σε αυτή την ενότητα, μελετώνται οι διατάξεις μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών. Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές $T$ και $T^*$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους ζωής. Η διάταξη αυτών των μεταβλητών προκύπτει από τη σύγκριση που γίνεται στις εντάσεις κινδύνου $h(t)$ και $h^*(t)$, στις συναρτήσεις επιβίωσης $S(t)$ και $S^*(t)$, στους μέσους υπολειπόμενους χρόνους ζωής $m(t)$ και $m^*(t)$ ή σε άλλα χαρακτηρίστηκα αυτών. Οι συναρτήσεις $h(t)$, $S(t)$ και $m(t)$ αντιστοιχούν στην μεταβλητή $T$, ενώ οι $h^*(t)$, $S^*(t)$ και $m^*(t)$, αποτελούν απλοποίηση των $h_{T^*}(t)$, $S_{T^*}(t)$, $m_{T^*}(t)$, και αντιστοιχούν στη μεταβλητή $T^*$.

Στο βιβλίο των Lai και Xie (2005, Κεφάλαιο 2), δίνονται οι ορισμοί για αρκετές στοχαστικές διατάξεις. Στη συνέχεια, παρατίθονται κάποιοι από αυτούς.

**Ορισμός 3.6.** *Μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή* $T$ *θα είναι μεγαλύτερη από μία άλλη μη αρνητική τυχαία μεταβλητή* $T^*$ *σύμφωνα με*

- *τη στοχαστική διάταξη - stochastic ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{ST} T^*$ *, αν ισχύει* $S(t) \geq S^*(t)$ ,
- *τη διάταξη έντασης κινδύνου - hazard rate ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{HR} T^*$, *αν ισχύει* $h(t) \leq h^*(t)$ *ή η συνάρτηση* $\dfrac{S(t)}{S^*(t)}$ *είναι αύξουσα ως προς* $t$,

- *τη διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής - mean residual ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{MRL} T^*$ *, αν ισχύει* $m(t) \geq m^*(t)$ *ή αν και μόνο εάν η συνάρτηση*

$$\frac{\int_t^{\infty} S(x)dx}{\int_t^{\infty} S^*(x)dx}$$

*είναι αύξουσα ως προς* $t$,

- *τη διάταξη αρμονικού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής - harmonic average mean residual ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{HAMR} T^*$ *, αν*

$$\frac{\int_t^{\infty} S(x)dx}{m(0)} \geq \frac{\int_t^{\infty} S^*(x)dx}{m^*(0)},$$

- *την κυρτή διάταξη - convex ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{CX} T^*$ *, αν ισχύει*

$$\int_t^{\infty} S(x)dx \geq \int_t^{\infty} S^*(x)dx ,$$

- *την κοίλη διάταξη - concave ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{CV} T^*$ *, αν ισχύει*

$$\int_0^{t} S(x)dx \geq \int_0^{t} S^*(x)dx ,$$

- *τη διάταξη πηλίκου πιθανοφάνειας - likelihood ratio ordering, συμβολίζεται* $T \geq_{LR} T^*$ *, αν η συνάρτηση* $\dfrac{f(t)}{f^*(t)}$ *είναι αύξουσα ως προς* $t$,

- *τη διάταξη ασθενούς πηλίκου πιθανοφάνειας - weak likelihood ratio ordering, συμβολίζεται,* $T \geq_{WLR} T^*$ *, αν*

$$\frac{f(t)}{f^*(t)} \geq \frac{f(0)}{f^*(0)} .$$

Ο Πίνακας 3.2 δείχνει τις σχέσεις που ισχύουν κατά κύριο λόγο, μεταξύ των προαναφερθέντων στοχαστικών διατάξεων.

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{LR} & \Rightarrow & \text{HR} & & \Longrightarrow & & \text{MR} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
\text{WLR} & & \text{ST} & \Rightarrow & \text{CX} & \Leftarrow & \text{HARM} \\
 & & \Downarrow & & & & \\
 & & \text{CV} & & & &
\end{array}$$

Πίνακας 3.2: Αλυσίδα σχέσεων μεταξύ στοχαστικών διατάξεων.

## 3.4 Παραδείγματα Στοχαστικών Διατάξεων

Σε αυτή την ενότητα μελετάται η εφαρμογή κάποιων στοχαστικών διατάξεων στο μοντέλο (3.1) μέσα από θεωρήματα, παραδειγμάτα και αντιπαραδείγματα.

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται η συνθήκη σύμφωνα με την οποία επαληθεύεται η διάταξη της έντασης κινδύνου στο μονέλο $m^*(t) = m(t) + c(t)$ .

**Θεώρημα 3.3.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (3.1). Τότε θα ισχύει $T \leq_{HR} T^*$ αν και μόνο αν $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$ .*

*Απόδειξη.* Η διάταξη $T \leq_{HR} T^*$ σημαίνει $h(t) \geq h^*(t)$, για κάθε $t \geq 0$. Στο μοντέλο (3.1), η ένταση κινδύνου υπολογίζεται από το Θεώρημα 3.1 ως

$$h^*(t) = h(t)\left(\frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right) + \frac{c'(t)}{m(t)+c(t)}$$

γι΄ αυτό, η διαφορά $h(t) - h^*(t)$ θα ισούται με

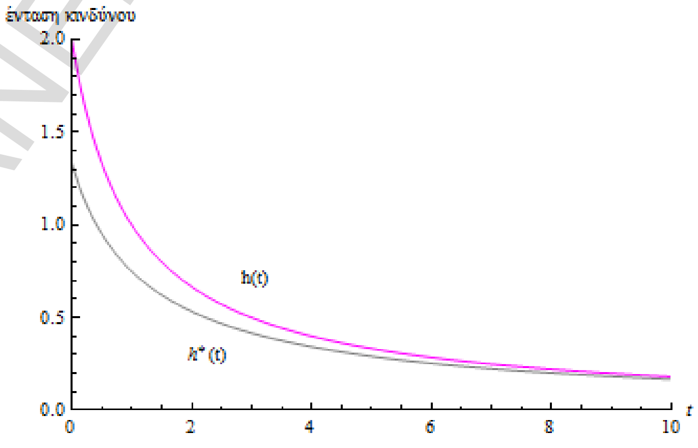
$$h(t)\left(1 - \frac{m(t)}{m(t)+c(t)}\right) - \frac{c'(t)}{m(t)+c(t)} \geq 0\,,$$

το οποίο ευσταθεί, αν και μόνο αν $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$.

□

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 3.2.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή $T$ που ακολουθεί Pareto κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$ , $t \geq 0$. Η διάταξη $T \leq_{HR} T^*$ ισχύει όταν $c(t) = \dfrac{1+t}{2+t} \Rightarrow c'(t) = \dfrac{1}{(2+t)^2}$ , $h(t) = \dfrac{f(t)}{S(t)} = \dfrac{-S'(t)}{S(t)} \Rightarrow h(t) = \dfrac{2}{1+t}$ και $m(t) = \displaystyle\int_t^\infty S(x)dx \Rightarrow m(t) = 1 + t$ . Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 3.3.*




Σχήμα 3.3: Γραφική επαλήθευση της στοχαστικής διάταξης $T \leq_{HR} T^*$.

Από το ακόλουθο θεώρημα επιβεβαιώνεται ότι το μονέλο (3.1) επαληθεύει τη διάταξη της συνάρτησης επιβίωσης.

**Θεώρημα 3.4.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$. *Τότε θα ισχύει* $\mathsf{T} \leq_{ST} \mathsf{T}^*$ *αν* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$.

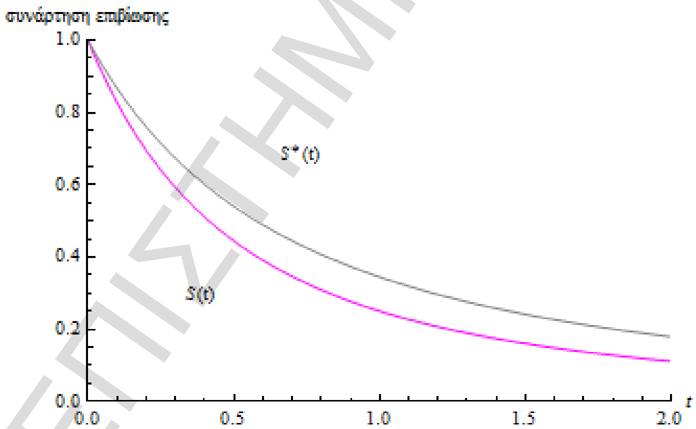
Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 3.3.** *Έστω ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που ακολουθεί Pareto κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την* $S(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, $t \geq 0$. *Όταν* $c(t) = \dfrac{1+t}{2+t}$, $t \geq 0$, *η συνθήκη του Θεωρήματος 3.4 γράφεται ως*

$$c(t)h(t) - c'(t) = \frac{1+t}{2+t} \cdot \frac{2}{1+t} - \frac{1}{(2+t)^2}$$

$$= \frac{3+2t}{(2+t)^2} > 0\,,\ t \geq 0\,.$$

*το οποίο σημαίνει ότι ισχύει η στοχαστική διάταξη* $\mathsf{T} \leq_{ST} \mathsf{T}^*$. *Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 3.4.*




Σχήμα 3.4: Γραφική επαλήθευση της στοχαστικής διάταξης $\mathsf{T} \leq_{ST} \mathsf{T}^*$.

Από την εργασία των Das και Nanda (2013), επιβεβαιώνεται ότι το μονέλο (3.1) επαληθεύει την αύξουσα κυρτή διάταξη.

**Θεώρημα 3.5.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$. *Τότε θα ισχύει αύξουσα κυρτή διάταξη - increasing convex order - συμβολίζεται* $\mathsf{T} \leq_{ICX} \mathsf{T}^*$ , *αν και μόνο αν*

$$\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)[m(x)+c(x)]}\,dx - \ln\left(\frac{E(T)}{c(0)+E(T)}\right) \geq 0 \tag{3.3}$$

*δοθέντος ότι* $c(0) + E(T) > 0$ .

*Απόδειξη.* Από την προηγούμενη ενότητα, είναι γνωστό ότι $T \leq_{\mathrm{ICX}} T^*$ , αν και μόνο αν $S(t)\, m(t) \leq S^*(t)\, m^*(t)$ για κάθε $t \geq 0$ ή ισοδύναμα αν

$$m(t)\,\frac{E(T)}{m(t)}\exp\left[-\int_0^t \frac{dx}{m(x)}\right] \leq [c(t)+m(t)]\left(\frac{c(0)+E(T)}{m(t)+c(t)}\right)\exp\left[-\int_0^t \frac{dx}{m(x)+c(x)}\right].$$

Μετά από πράξεις, η τελευταία ανισότητα μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)[m(x)+c(x)]}\,dx - \ln\left(\frac{E(T)}{c(0)+E(T)}\right) \geq 0 \tag{3.4}$$

για κάθε $t \geq 0$, το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

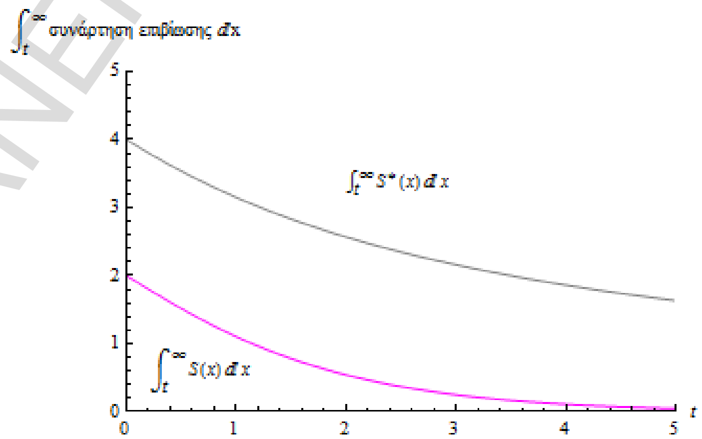
**Παράδειγμα 3.4.** *Έστω ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή $T$, που ακολουθεί Erlang κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = (1+t)\,e^{-t}$, $t \geq 0$. Ισχύει $T \leq_{\mathrm{ICX}} T^*$, δοθέντος ότι $c(t) = 2 + t$, το οποίο ισοδυναμεί με το ότι πρέπει να επαληθεύεται η σχέση (3.4). Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι*

$$m(t) = \frac{1}{S(t)}\int_t^\infty S(x)dx \Rightarrow m(t) = \frac{2+t}{1+t}$$

*και*

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{c(x)}{m(x)[m(x)+c(x)]}\,dx - \ln\left(\frac{E(T)}{c(0)+E(T)}\right) &= t + \frac{t}{4+2t} + \ln 8 - 2\ln(2+t)\\ &= \frac{t+2}{2} + \ln\frac{8}{(2+t)^2}\end{aligned}$$

*το οποίο είναι θετικό για κάθε $t > 0$, δεδομένου ότι $E(T) = 2$ και $c(0) = 2$. Το αποτέλεσμα επαληθεύεται γραφικά από το Σχήμα 3.5.*




Σχήμα 3.5: Γραφική επαλήθευση της στοχαστικής διάταξης $T \leq_{\mathrm{ICX}} T^*$.

**Παρατήρηση 3.3.** *Αξίζει να αναφερθεί ότι αν* $c(t) \geq c(0) = 0$, *τότε* $T \leq_{ICX} T^*$.

△

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται η συνθήκη σύμφωνα με την οποία ισχύει η αύξουσα κοίλη διάταξη στο μονέλο (3.1).

**Θεώρημα 3.6.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$. *Τότε θα ισχύει αύξουσα κοίλη διάταξη - increasing concave order - συμβολίζεται* $T \leq_{ICV} T^*$, *αν ισχύει* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$.

△

Από το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται η αύξουσα διάταξη της έντασης κινδύνου στο μοντέλο (3.1).

**Θεώρημα 3.7.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$. *Τότε θα ισχύει* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ *αν*

*(α′) η* $T$ *έχει αύξουσα ένταση κινδύνου και*

*(β′)* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \geq 0$ .

*Απόδειξη.* Εφόσον η τυχαία μεταβλητή $T$ έχει αύξουσα ένταση κινδύνου, τότε θα ισχύει $h(t) \leq h(t+x)$ . Από την προηγούμενη ενότητα είναι γνωστό ότι $T \leq_{HR\uparrow} T^*$, αν και μόνο αν $h(t) \geq h^*(t)$ . Επειδή η $T$ έχει αύξουσα ένταση κινδύνου, θα είναι

$$h^*(t) \leq h(t) \leq h(t+x) \Rightarrow h^*(t) \leq h(t+x) .$$

Σύμφωνα με την ένταση κινδύνου που δίνεται από το Θεώρημα 3.1 , προκύπτει

$$h(t)\frac{m(t)}{m(t)+c(t)} + \frac{c'(t)}{m(t)+c(t)} - h(t+x) \leq 0$$

δηλαδή

$$h(t) - h(t+x) - \left(\frac{h(t)c(t) - c'(t)}{m(t)+c(t)}\right) \leq 0$$

το οποίο ευσταθεί, εφόσον $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$, για κάθε $t, x \geq 0$, και η $T$ έχει αύξουσα ένταση κινδύνου.

□

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 3.5.** *Έστω ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $T$ *η οποία έχει ως ένταση κινδύνου τη συνάρτηση*

$$h(t) = \begin{cases} 2 & \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ 1+t & \text{για } t > 1 \end{cases}$$

*η οποία είναι αύξουσα. Ισχύει* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$*, δοθέντος ότι* $c(t) = 1 + t\,,\, t \geq 0$ *. Εφόσον* $c'(t) = 1$*, προκύπτει*

$$h(t)c(t) - c'(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{για } \ 0 \leq t \leq 1 \\ t(2 + t) & \text{για } \ t > 1 \end{cases}$$

*το οποίο είναι θετικό, για κάθε* $t \geq 0$*.*

Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 3.7 δεν μπορεί να παραληφθεί για να ισχύει η διάταξη $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ .

**Αντιπαράδειγμα 3.2.** *Έστω ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $T$ *η οποία έχει ένταση κινδύνου τη συνάρτηση*

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1+t}{2+t} & \text{για } \ 0 \leq t \leq 1 \\[2ex] \dfrac{2}{2+t} & \text{για } \ t > 1 \end{cases}$$

*και* $c(t) = 2 + t\,,\, t \geq 0$ *. Η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *δεν είναι αύξουσα συνάρτηση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7 η διάταξη* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ *υφίσταται αν ισχύει*

$$h(t)c(t) - c'(t) \geq 0\ .$$

*Αυτό αποδεικνύεται εφόσον η σχέση*

$$h(t)c(t) - c'(t) = \begin{cases} t & \text{για } \ 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{για } \ t > 1 \end{cases}$$

*είναι πάντα θετική για κάθε* $t > 0$*. Παρατηρείται όμως πως η σχέση*

$$h(t) - h(t + x) - \left(\frac{h(t)c(t) - c'(t)}{m(t) + c(t)}\right) = \frac{2}{2+t} - \frac{2}{2+t+x} - \frac{1}{4+2t}$$

*έχει είτε θετικό πρόσημο (όταν* $x = t = 2$*) είτε αρνητικό, ανάλογα με την τιμή που λαμβάνουν κάθε φορά τα* $x, t$*. Συνεπώς, δεν προκύπτει η επαλήθευση της διάταξης* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$*.*

Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 3.7 δεν μπορεί να παραληφθεί για να ισχύει η διάταξη $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ .

**Αντιπαράδειγμα 3.3.** *Έστω ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Erlang κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την* $S(t) = (1+t)\, e^{-t}$ *, ένταση κινδύνου την αύξουσα συνάρτηση* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ *και* $c(t) = 1 + t\ ,\ t \geq 0$ *. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7 η διάταξη* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ *υφίσταται αν ισχύει* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$ *. Ωστόσο αυτό δεν αποδεικνύεται, εφόσον η σχέση*

$$h(t)c(t) - c'(t) = t - 1$$

*δεν έχει θετικό πρόσημο για κάθε* $t \geq 0$. *Επιπλέον, παρατηρείται ότι η σχέση*

$$h(t) - h(t+x) - \left(\frac{h(t)c(t) - c'(t)}{m(t) + c(t)}\right) = \frac{1 - t^2}{(1+t)^2 + 2 + t} - \frac{x}{(1+t)(1+t+x)}$$

*έχει θετικό πρόσημο (όταν* $t = 0,2$ *και* $x = 0,3$*) και αρνητικό πρόσημο (όταν* $t = x = 1$*) . Συνεπώς, δεν προκύπτει η επαλήθευση της διάταξης* $T \leq_{HR\uparrow} T^*$ .

△

Από το ακόλουθο θεώρημα προκύπτει η φθίνουσα διάταξη της έντασης κινδύνου στο μοντέλο (3.1).

**Θεώρημα 3.8.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$. *Τότε θα ισχύει* $T \leq_{HR\downarrow} T^*$ *αν*

*(α′) η* $T$ *έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου και*

*(β′)* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \geq 0$ .

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 3.6.** *Έστω ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $T$ *η οποία έχει ως ένταση κινδύνου τη συνάρτηση*

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+t} & \text{για } \ 0 \leq t \leq 1 \\ \\ 1 & \text{για } \ t > 1 \end{cases}$$

*η οποία είναι φθίνουσα. Ισχύει* $T \leq_{HR\downarrow} T^*$ *, δοθέντος ότι* $c(t) = 1 + t \Rightarrow c'(t) = 1$ *επειδή*

$$h(t)c(t) - c'(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } \ 0 \leq t \leq 1 \\ t & \text{για } \ t > 1 \end{cases}$$

*το οποίο είναι θετικό, για κάθε* $t \geq 0$.

**Παρατήρηση 3.4.** *Από το Παράδειγμα 3.2 προκύπτει ότι η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 4.9 είναι ικανή αλλά δεν είναι αναγκαία για να ισχύει η διάταξη* $T \leq_{HR\downarrow} T^*$ .

## 3.5 Ιδιότητες Γήρανσης

Σύμφωνα με τους Nanda, Bhattacharjee και Alam (2007), η έννοια της γήρανσης δημιούργησε την ανάγκη για να οριστεί η συνάρτηση της έντασης γήρανσης. Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται, για να αξιολογηθούν και να εκτιμηθούν οι ιδιότητες γήρανσης ενός οργανισμού ή ενός μηχανήματος.

Η συνάρτηση της έντασης γήρανσης - aging intensity (AI) - μιας μη αρνητικής και συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $T$, συμβολίζεται με $L(t)$ και ορίζεται ως ο λόγος της στιγμιαίας έντασης κινδύνου $h(t)$, προς μια αναφορική ένταση κινδύνου, δηλαδή

$$L(t) = \frac{h(t)}{B(t)}$$

όπου ως αναφορική ένταση κινδύνου, μπορεί να οριστεί ο μέσος όρος της έντασης κινδύνου, δηλαδή $B(t) = \dfrac{\int_0^t h(u)\,du}{t}$. Η συνάρτηση της έντασης γήρανσης μπορεί να γραφεί και ως $L(t) = \dfrac{t \cdot f(t)}{S(t)\,\ln S(t)}$ .

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της $L(t)$, τόσο πιο ισχυρή είναι η τάση προς γήρανση που περιγράφει τη μεταβλητή $T$.

**Ορισμός 3.7.** *Μία συνάρτηση $g(y)$ είναι λογαριθμικά κοίλη, αν η συνάρτηση $\ln g(y)$ είναι κοίλη, ενώ μία συνάρτηση $g(y)$ είναι λογαριθμικά κυρτή, αν η συνάρτηση $\ln g(y)$ είναι κυρτή.*

**Πρόταση 3.6.** *Μία συνάρτηση $g(y)$ καλείται λογαριθμικά κοίλη εάν $\dfrac{g(y+x)}{g(y)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή $y$ για κάθε $x \geq 0$, ενώ μία συνάρτηση $g(y)$ καλείται λογαριθμικά κυρτή εάν $\dfrac{g(y+x)}{g(y)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή $y$ για κάθε $x \geq 0$.*

**Θεώρημα 3.9.** *Έστω ότι υπάρχει μία συνεχής και μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $T$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f(t)$. Τότε η $T$ θα έχει αύξουσα ένταση κινδύνου.*

*Απόδειξη.* Εφόσον η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι λογαριθμικά κοίλη, για $t_1 < t_2$ θα ισχύει από την Πρόταση 3.6 ότι

$$\frac{f(t_1+x)}{f(t_1)} \geq \frac{f(t_2+x)}{f(t_2)}\,.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $x$, προκύπτει

$$\frac{\int_0^\infty f(t_1+x)dx}{f(t_1)} \geq \frac{\int_0^\infty f(t_2+x)dx}{f(t_2)} \Rightarrow \frac{\int_{t_1}^\infty f(x)dx}{f(t_1)} \geq \frac{\int_{t_2}^\infty f(x)dx}{f(t_2)}$$

το οποίο ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{S(t_1)}{f(t_1)} \geq \frac{S(t_2)}{f(t_2)} \Rightarrow h(t_1) \leq h(t_2)\,.$$

□

**Ορισμός 3.8.** *Μία τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *λέγεται ότι είναι μικρότερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}^*$ *σύμφωνα με τη διάταξη της έντασης γήρανσης - ageing intensity ordering, συμβολίζεται* $\mathsf{T} \leq_{\mathrm{AI}} \mathsf{T}^*$*, αν για κάθε* $t \geq 0$ *ισχύει ότι*

$$\frac{\int_0^t h(x)dx}{h(t)} \leq \frac{\int_0^t h^*(x)dx}{h^*(t)} .$$

**Λήμμα 3.1.** *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

- *αν η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς* $t$*, τότε*

$$\frac{t \cdot h(t)}{\int_0^t h(x)dx} \leq 1 ,$$

- *αν η ένταση κινδύνου* $h(t)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t$*, τότε*

$$\frac{t \cdot h(t)}{\int_0^t h(x)dx} \geq 1 .$$

$\triangle$

Σύμφωνα με τους Das και Nanda (2013), τα δύο ακόλουθα θεωρήματα επιβεβαιώνουν ότι το μοντέλο (3.1) επαληθεύει τη διάταξη για την ένταση γήρανσης.

**Θεώρημα 3.10.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$*. Τότε θα ισχύει* $\mathsf{T} \leq_{\mathrm{AI}} \mathsf{T}^*$ *αν*

*(α')* *η* $\mathsf{T}$ *έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου,*

*(β')* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$,

*(γ')* $\dfrac{c(t)}{m(t)[m(t)+c(t)]} + m(t)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t$,

*(δ')* $1 + \dfrac{c(t)}{m(t)}$ *είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.*

**Θεώρημα 3.11.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = m(t) + c(t)$*. Τότε θα ισχύει* $\mathsf{T} \geq_{\mathrm{AI}} \mathsf{T}^*$ *αν*

*(α')* *η* $\mathsf{T}$ *έχει αύξουσα ένταση κινδύνου,*

*(β')* $h(t)c(t) - c'(t) \geq 0$,

*(γ')* $\dfrac{c(t)}{m(t)[m(t)+c(t)]} + m(t)$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς* $t$,

*(δ')* $1 + \dfrac{c(t)}{m(t)}$ *είναι λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση.*

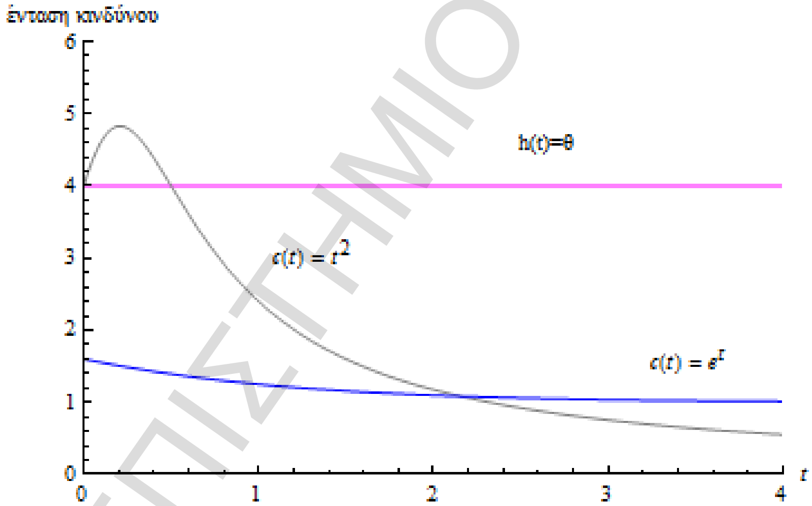
## 3.6 Εφαρμογές Γνωστών Κατανομών

Σε αυτήν την ενότητα μελετάται η επιρροή που έχει το μοντέλο (3.1), στην Εκθετική και την Lomax κατανομή.

### 3.6.1 Εκθετική

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t) = \frac{1}{\theta}$. Το μοντέλο (3.1) επαληθεύεται όταν $c(t) = t^2$ με $h^*(t) = \theta\left(\frac{1+2t}{1+\theta\, t^2}\right)$ και όταν $c(t) = e^t$ με $h^*(t) = \theta\left(\frac{1+e^t}{1+\theta\, e^t}\right)$.

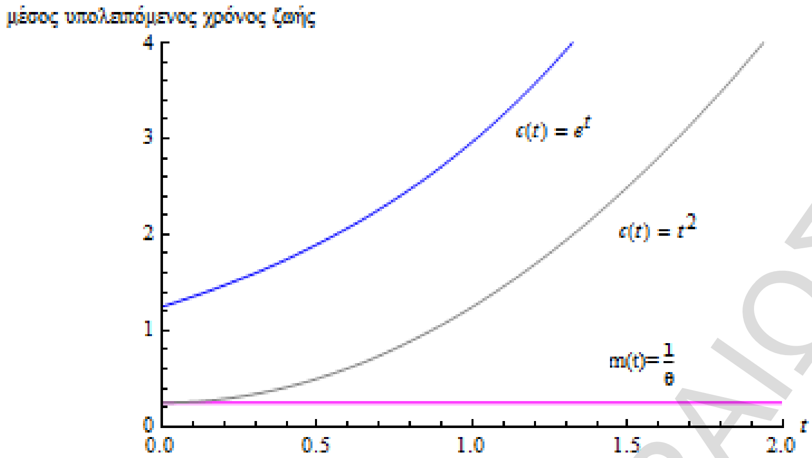
Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται πως η ένταση κινδύνου $h(t) = \theta$ είναι σταθερή συνάρτηση, η $h^*(t)$ όταν $c(t) = t^2$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα, ενώ η $h^*(t)$ όταν $c(t) = e^t$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.




Σχήμα 3.6: Η απεικόνιση της έντασης κινδύνου όταν $\theta = 4$.

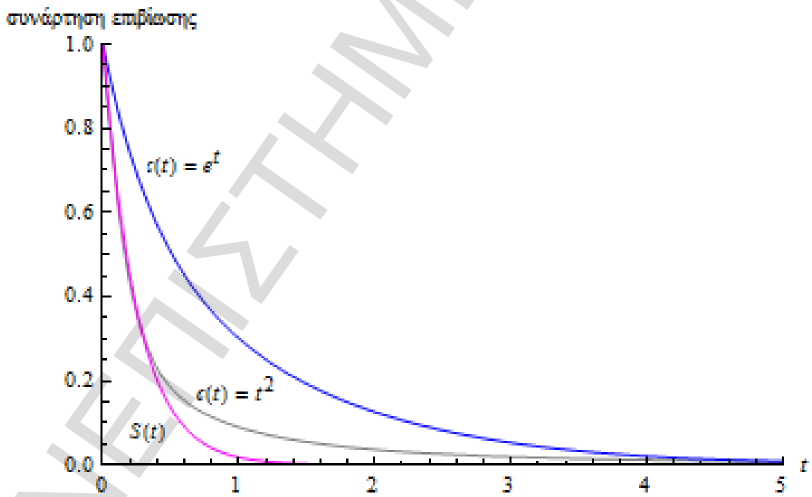
**Παρατήρηση 3.5**. *Όταν* $c(t) = e^t$ *ισχύει* $\lim_{t\to\infty} S^*(t) = 1$, *ενώ όταν* $c(t) = t^2$ *ισχύει* $\lim_{t\to\infty} S^*(t) = 0$.

Στο Σχήμα 3.7 φαίνεται πως ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$ είναι σταθερή συνάρτηση, ενώ οι $m^*(t)$ για $c(t) = t^2$ και $c(t) = e^t$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$, ισούται με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m^*(t) = \frac{1}{\theta} + t^2$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, ανεξάρτητα από την τιμή του $\theta$.




Σχήμα 3.7: Η απεικόνιση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όταν $\theta = 4$.

Από το Σχήμα 3.8 γίνεται κατανοητή η επίδραση που επιφέρουν στη συνάρτηση επιβίωσης, οι συναρτήσεις $c(t) = t^2$ και $c(t) = e^t$ όταν προστεθούν στην αρχική συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$, της Εκθετικής κατανομής. Η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης $S^*(t)$ με $c(t) = t^2$ και την $S^*(t)$ με $c(t) = e^t$ .




Σχήμα 3.8: Η απεικόνιση της συνάρτησης επιβίωσης όταν $\theta = 4$.

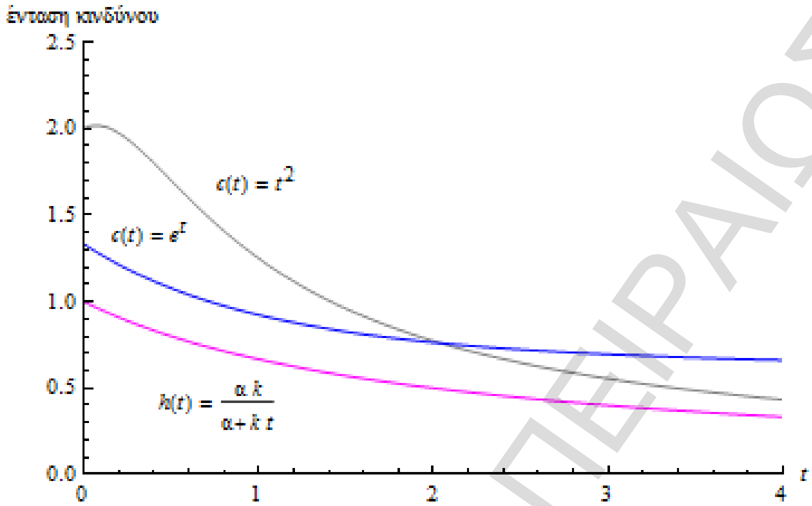
## 3.6.2 Lomax

Έστω μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί Lomax κατανομή, με παραμέτρους $k > 0$, $a > 1$ και συνάρτηση επιβίωσης την

$$S(t) = (1 + kt)^{-a} \ .$$

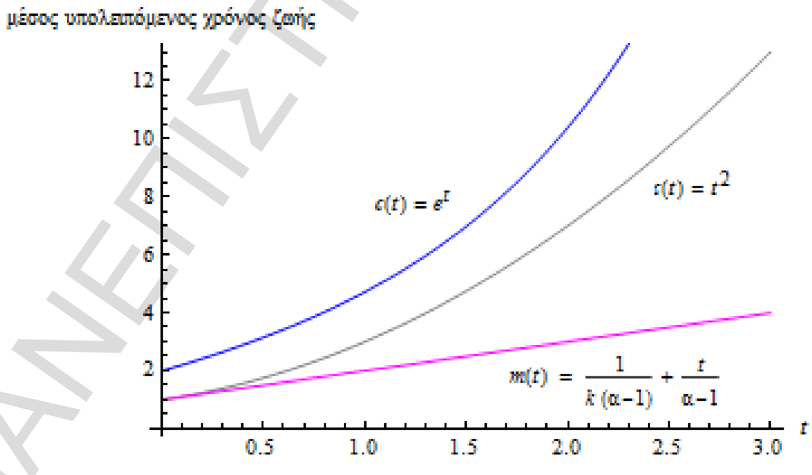
Το μοντέλο (3.1) επαληθεύεται για $c(t) = t^2$ και $c(t) = e^t$ .

Από το Σχήμα 3.9 φαίνεται πως η ένταση κινδύνου $h(t) = \dfrac{ak}{a+kt}$ και η $h^*(t)$ όταν $c(t) = e^t$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, ενώ η $h^*(t)$ όταν $c(t) = t^2$ έχει ανάποδο λεκανοειδές σχήμα.



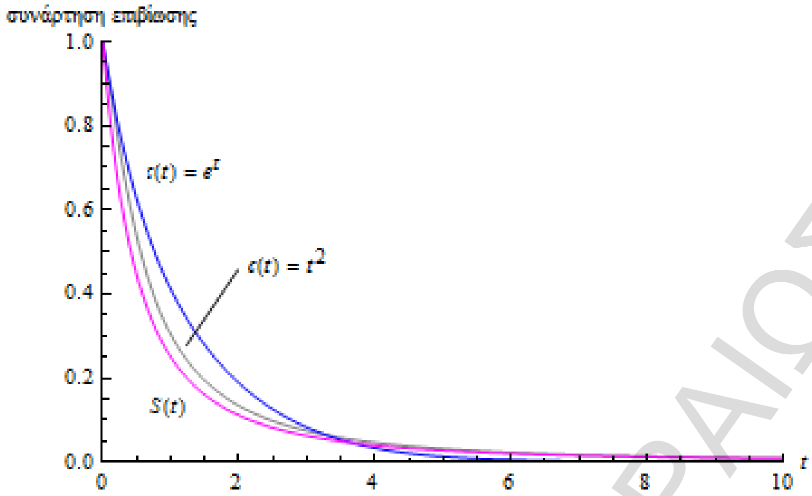

Σχήμα 3.9: Η απεικόνιση της έντασης κινδύνου όταν $a = 2$ και $k = 1$.

Από το Σχήμα 3.10 φαίνεται πως ο αρχικός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t) = \dfrac{t}{a-1} + \dfrac{1}{k(a-1)}$ είναι αύξουσα και γραμμική συνάρτηση, ενώ οι $m^*(t)$ για $c(t) = t^2$ και $c(t) = e^t$ είναι αύξουσες συναρτήσεις.




Σχήμα 3.10: Η απεικόνιση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όταν $a = 2$ και $k = 1$.

Από το Σχήμα 3.11 γίνεται κατανοητή η επίδραση των συναρτήσεων $c(t) = t^2$ και $c(t) = e^t$ στη συνάρτηση επιβίωσης, όταν προστεθούν στην αρχική συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(t)$, της Lomax κατανομής.




Σχήμα 3.11: Η απεικόνιση της συνάρτησης επιβίωσης όταν $a = 2$ και $k = 1$.

**Παρατήρηση 3.6.** *Αξίζει να αναφερθεί ότι η συνάρτηση επιβίωσης* $S(t)$ *συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν, καθώς ο χρόνος* $t \to \infty$, *σε σύγκριση με τη συνάρτηση επιβίωσης* $S^*(t)$ *με* $c(t) = t^2$ , *ενώ η* $S^*(t)$ *με* $c(t) = e^t$ *συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν, καθώς ο χρόνος* $t \to \infty$, *σε σύγκριση με την* $S(t)$.

4

# Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο

## 4.1 Περιγραφή Μοντέλων

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με γνώμονα τις εργασίες των Nanda, Bhattacharjee και Alam (2006), και των Nanda και Das (2011).

Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T$, με ένταση κινδύνου $h(t)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Επιπλέον, έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T^*$, με ένταση κινδύνου $h^*(t)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m^*(t)$.

Αν η ένταση κινδύνου $h^*(t)$ ισούται με την ένταση κινδύνου $h(t)$ πολλαπλασιασμένη με ένα θετικό και σταθερό όρο $c$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$h^*(t) = c \cdot h(t) \tag{4.1}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου» - Proportional Hazard Rate Model ή ως «Μοντέλο Έντασης Κινδύνου του Cox» - Cox's Hazard Rate Model.

Εκτός από το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου, υφίσταται και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m^*(t)$ ισούται με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$ πολλαπλασιασμένο με ένα θετικό και σταθερό όρο $c$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$m^*(t) = c \cdot m(t) \tag{4.2}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής» - Proportional Mean Residual Life Model.

**Παρατήρηση 4.1.** *Στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου, ο σταθερός όρος που πολλαπλασιάζεται μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Ωστόσο, η ίδια παραδοχή δεν ισχύει και στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

Στο ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύονται οι σχέσεις που ισχύουν για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη συνάρτηση επιβίωσης και την ένταση κινδύνου μιας τυχαίας μεταβλητής $T^*$ η οποία αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή $T$ και ικανοποιεί το μοντέλο (4.2).

**Θεώρημα 4.1.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = c \cdot m(t)$, *τότε*

*(α′)* $$f^*(t) = \left[\frac{1}{E(T)}\int_t^{\infty} S(x)dx\right]^{(1-2c)/c} \left\{\frac{f(t)}{E(T)}\int_t^{\infty} S(x)dx + \left(\frac{1-c}{c}\right)\frac{[S(t)]^2}{E(T)}\right\},$$

*(β′)* $$S^*(t) = [S(t)]^{1/c}\left(\frac{m(t)}{E(T)}\right)^{(1-c)/c},$$

*(γ′)* $$h^*(t) = h(t) + \left(\frac{1-c}{c}\right)\frac{1}{m(t)}.$$

*Απόδειξη.* $(\alpha)'$ Εφόσον το μοντελο (4.2) ικανοποιεί τη σχέση (1.15) και (1.12), τότε προκύπτει ότι η νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f^*(t)$, θα ισούται με

$$f^*(t) = \frac{E(T)\,[c\,m'(t)+1]}{c\,[m(t)]^2}\exp\left(-\int_t^{\infty}\frac{1}{c\cdot m(x)}\,dx\right)$$

$$= \frac{E(T)\,[c\,m'(t)+1]}{c\,[m(t)]^2}\left\{\exp\left(-\int_t^{\infty}\frac{1}{m(x)}\,dx\right)\right\}^{1/c}$$

$$= \frac{E(T)\,[c\,m'(t)+1]}{c\,[m(t)]^2}\left(\frac{f(t)\,[m(t)]^2}{E(T)\,[m'(t)+1]}\right)^{1/c}$$

$$= \frac{E(T)}{c\left[\dfrac{1}{S(t)}\displaystyle\int_0^{\infty}S(x)dx\right]^2}\left[c\left(\frac{f(t)\displaystyle\int_t^{\infty}S(x)dx}{[S(t)]^2}-1\right)+1\right]\left(\frac{\displaystyle\int_t^{\infty}S(x)dx}{E(T)}\right)^{1/c}$$

$$= \frac{E(T)}{c\left[\displaystyle\int_0^{\infty}S(x)dx\right]^2}\left(c\,f(t)\int_t^{\infty}S(x)dx + (1-c)\,[S(t)]^2\right)\left(\frac{\displaystyle\int_t^{\infty}S(x)dx}{E(T)}\right)^{1/c}$$

$$= [E(T)]^{(c-1)/c}\left[\int_t^{\infty}S(x)dx\right]^{(1-2c)/c}\left(f(t)\int_t^{\infty}S(x)dx + \frac{1-c}{c}\,[S(t)]^2\right).$$

$(\beta)'$ Εφόσον το μοντελο (4.2) ικανοποιεί τη σχέση (1.14), τότε προκύπτει ότι η νέα συνάρτηση επιβίωσης $S^*(t)$, θα ισούται με

$$S^*(t) = \frac{E(T)}{m(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{c \cdot m(x)}\,dx\right) = \frac{E(T)}{m(t)} \left\{\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m(x)}\,dx\right)\right\}^{1/c}$$

το οποίο σημαίνει ότι η $S^*(t)$ εμπεριέχει την $S(t)$, δηλαδή

$$S^*(t) = \frac{E(T)}{m(t)}\left(\frac{S(t)m(t)}{E(T)}\right)^{1/c} = [S(t)]^{1/c}\left(\frac{m(t)}{E(T)}\right)^{(1-c)/c}.$$

$(\gamma)'$ Η σχέση (1.12) ισχύει για την ένταση κινδύνου $h(t)$ και την $h^*(t)$. Λόγω της σχέσης (4.2) είναι

$$\frac{h^*(t)}{h(t)} = \frac{1}{c}\left(\frac{1 + c\,m'(t)}{1 + m'(t)}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{1 + c\,[h(t)m(t) - 1]}{h(t)m(t)}\right)$$

το οποίο γράφεται

$$h^*(t) = h(t) + \left(\frac{1-c}{c}\right)\frac{1}{m(t)}.$$

□

**Παρατήρηση 4.2.** *Η επιλογή της σταθεράς $c$ έχει μεγάλη σημασία. Ένα πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ευσταθεί, αν $c$ θετικό. Ωστόσο, αυτή η προϋπόθεση δεν είναι πάντα αρκετή. Σύμφωνα με τη σχέση (1.13) ισχύει $h(t)m(t) > 0$, το οποίο ισοδυναμεί με $1 + m'(t) \geq 0$ ή με $1 + c\,m'(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$, επειδή $m^*(t) = c \cdot m(t)$. Η σχέση αυτή αποτελεί μία συνθήκη ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη ενός τέτοιου μοντέλου. Έχει παρατηρηθεί ότι η συνθήκη $1 + c\,m'(t) \geq 0$, ικανοποιείται πάντα για $c < 1$, ενώ για $c > 1$ κάποιες φορές ικανοποιείται, κάποιες όχι. Συνεπώς, η αυθαίρετη επιλογή ενός σταθερού όρου $c$, δεν διασφαλίζει την ύπαρξη ενός πολλαπλασιαστικού μοντέλου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως ένας σταθερός όρος $c$, που ικανοποιεί τη σχέση (4.2) δεν επαληθεύει την ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού μοντέλου για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

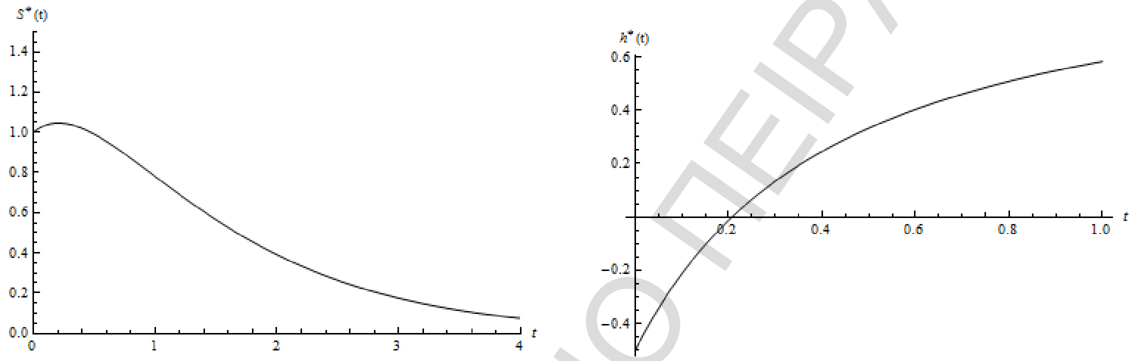
**Παράδειγμα 4.1.** *Έστω ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή $T$ που ακολουθεί Erlang κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την $S(t) = (1+2t)e^{-2t}$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t) = \dfrac{1+t}{1+2t}$, για κάθε $t \geq 0$. Αν εφαρμοστεί η σχέση της συνάρτησης επιβίωσης που δίνεται στο Θεώρημα 4.1, για $c = 2$ θα προκύψει η συνάρτηση $S^*(t) = \dfrac{e^{-t}(1+2t)}{\sqrt{1+t}}$. Από την $S^*(t)$ και τη σχέση (1.12), προκύπτει $m^*(t) = 2\,m(t) = 2\left(\dfrac{1+t}{1+2t}\right)$. Άρα, επιβεβαιώνεται το μοντέλο (4.2). Ωστόσο, από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $S^*(t)$ στο Σχήμα 4.1, φαίνεται ότι η συνάρτηση δεν είναι φθίνουσα, γεγονός που υποδηλώνει ότι δεν είναι συνάρτηση επιβίωσης.*

*Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει, από τη μελέτη της νέας έντασης κινδύνου. Αν εφαρμοστεί το μοντέλο $m^*(t) = c \cdot m(t)$ με $c = 2$ στην (1.13), τότε*

$$h^*(t) = \frac{1 + c\, m'(t)}{c\, m(t)} = \frac{4t^2 + 4t - 1}{2(1+t)(1+2t)}$$

*η οποία δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση έντασης κινδύνου, διότι διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο διάστημα $t \in [0, (\sqrt{2} - 1)/2]$, Σχήμα 4.1. Συνεπώς, η $h^*(t)$ δεν αποτελεί ένταση κινδύνου για κάθε $t \geq 0$.*

*Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι δεν ευσταθεί το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όταν $c = 2$.*




Σχήμα 4.1: Η απεικόνιση της $S^*(t)$ και της $h^*(t)$.

Στα επόμενα δύο παραδείγματα παρατίθενται δύο οικογένειες κατανομών, οι οποίες ικανοποιούν ταυτόχρονα το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

**Παράδειγμα 4.2.** *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές $T$ και $T^*$ οι οποίες ακολουθούν Εκθετική κατανομή με συναρτήσεις επιβίωσης $S(t) = e^{-\lambda t}$, και $S^*(t) = e^{(-\lambda/c)t}$ αντίστοιχα. Τότε οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής για τις μεταβλητές $T$ και $T^*$ είναι*

$$m(t) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{και} \quad m^*(t) = \frac{c}{\lambda}\ .$$

*Συνεπώς, είναι προφανές ότι επαληθεύεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m^*(t) = c \cdot m(t)$ για κάθε $t \geq 0$.*

**Παρατήρηση 4.3.** *Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου για τις μεταβλητές $T$ και $T^*$ του Παραδείγματος 4.2 είναι*

$$h(t) = \lambda \quad \textit{και} \quad h^*(t) = \frac{\lambda}{c}$$

*δηλαδή ισχύει $h^*(t) = \dfrac{1}{c} h(t)$ .*

*Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι στην Εκθετική κατανομή, το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνυπάρχει με το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου.*

**Παράδειγμα 4.3.** *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *οι οποίες ακολουθούν Pareto κατανομή με συναρτήσεις επιβίωσης*

$$S(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^{a} \quad \text{και} \quad S(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^{(a+c-1)/c}$$

*με* $t \geq k > 0$, $c > 0$ , $a > 1$ . *Τότε οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής για τις μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *είναι αντίστοιχα*

$$m(t) = \frac{t}{a-1} \quad \text{και} \quad m^*(t) = c\left(\frac{t}{a-1}\right).$$

*Συνεπώς, είναι προφανές ότι επαληθεύεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής* $m^*(t) = c \cdot m(t)$ *για* $t \geq 0$.

**Παρατήρηση 4.4.** *Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου για τις μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *του Παραδείγματος 4.3 είναι*

$$h(t) = \frac{a}{t} \quad \text{και} \quad h^*(t) = \frac{c+a-1}{a}$$

*δηλαδή* $h^*(t) = \left(\frac{c+a-1}{a}\right) h(t)$, *όπου* $\frac{c+a-1}{a}$ *είναι ο σταθερός όρος.*

*Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι στην Pareto κατανομή, το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνυπάρχει με το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου.*

$\triangle$

Με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, αναδύεται το ερώτημα αν το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου υπάρχει ταυτόχρονα με το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αρνητική απάντηση στο ερώτημα δίνουν τα ακόλουθα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 4.4.** *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *που ακολουθούν Rayleigh κατανομή με συναρτήσεις επιβίωσης* $S(t) = e^{-5t^2/2}$ *και* $S^*(t) = e^{-5t^2}$, *εντάσεις κινδύνου* $h(t) = 5t$ *και* $h^*(t) = 10t$, *και μέσους υπολειπόμενους χρόνους ζωής*

$$m(t) = -e^{-5t^2/2}\sqrt{\frac{\pi}{10}}\left[\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,t\right) - 1\right]$$

*και*

$$m^*(t) = -\frac{1}{2}\,e^{-5t^2}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\left[\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{5}\,t\right) - 1\right]$$

*για κάθε* $t \geq 0$ *αντίστοιχα. Παρατηρώντας, προκύπτει ότι* $h^*(t) = 2\,h(t)$ *, ενώ δεν υπάρχει κανένας πραγματικός σταθερός όρος* $c$ *για τον οποίο να ισχύει* $m^*(t) = c \cdot m(t)$.

**Παράδειγμα 4.5.** *Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *που έχουν ένταση κινδύνου τις συναρτήσεις*

$$h(t) = \frac{4t}{1+2t} \quad \textit{και} \quad h^*(t) = \frac{(1+2t)^2 - 0.5}{0.5(1+2t)(1+t)}$$

*και μέσους υπολειπόμενους χρόνους ζωής*

$$m(t) = \frac{1+t}{1+2t} \quad \textit{και} \quad m^*(t) = \frac{0.5(1+t)}{1+2t} \quad \textit{για κάθε} \quad t \geq 0\ .$$

*Παρατηρώντας, προκύπτει ότι ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ωστόσο δεν επαληθεύεται η συνύπαρξη αυτού με το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου.*

**Συμπέρασμα 4.1.** *Το γεγονός ότι ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο έντασης κινδύνου, δεν προϋποθέτει ότι θα υπάρχει ταυτόχρονα και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ομοίως ισχύει και το αντίστροφο.*

## 4.1.1 Ιδιότητες Διατάξεων

Μία έμφυτη ιδιότητα είναι η λεγόμενη «γήρανση», η οποία χαρακτηρίζει ένα μηχάνημα ή έναν οργανισμό μέσα από ορισμένες ποσότητες, όπως είναι η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Για αυτές τις ποσότητες ισχύουν διατάξεις οι οποιές περιγράφουν το στάδιο γήρανσης του συστήματος που μελετάται.

**Θεώρημα 4.2.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο (4.1). Αν η* $T$ *έχει αύξουσα (φθίνουσα) ένταση κινδύνου και* $c < 1$*, τότε και η* $T^*$ *θα έχει αύξουσα (φθίνουσα) έντασης κινδύνου, ενώ αν η* $T^*$ *έχει αύξουσα (φθίνουσα) έντασης κινδύνου και* $c > 1$*, τότε η* $T$ *θα έχει αύξουσα (φθίνουσα) έντασης κινδύνου.*

△

Σύμφωνα με την εργασία των Nanda, Bhattacharjee και Alam (2007), η συνάρτηση της έντασης κινδύνου προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο τη συνάρτηση της έντασης γήρανσης, το αντίστροφο δεν ισχύει. Αξίζει να αναφερθεί ότι δύο τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.1), έχουν την ίδια συνάρτηση έντασης γήρανσης.

Η ακόλουθη πρόταση επιβεβαιώνει την αντισυμμετρική ιδιότητα που ισχύει για τη διάταξη της έντασης γήρανσης.

**Πρόταση 4.1.** *Αν $T \leq_{AI} T^*$ και $T^* \leq_{AI} T$, τότε οι μεταβλητές $T$ και $T^*$ θα επαληθεύ-ουν το πολλαπλασιαστικό μοντέλο έντασης κινδύνου.*

**Θεώρημα 4.3.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο (4.2). Η $T$ θα έχει φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αν και μόνο αν η $T^*$ έχει αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

**Θεώρημα 4.4.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο (4.2). Τότε η $T$ θα ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE), αν και μόνο αν η $T^*$ ανήκει στην NBUE (NWUE),*

**Θεώρημα 4.5.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο (4.2). Τότε η $T$ θα ανήκει στην κλάση HNBUE (HNWUE), αν και μόνο αν η $T^*$ ανήκει στην HNWUE (HNWUE).*

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.4 , η $T$ θα ανήκει στην κλάση HNBUE, αν και μόνο αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\int_t^\infty S(x)dx \leq E(T)\exp\left(-\frac{t}{E(T)}\right),$$

αυτό σημαίνει ότι

$$m(t)\,S(t) \leq E(T)\exp\left(-\frac{t}{E(T)}\right)$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται ως

$$[m(t)\,S(t)]^{1/c} \leq \left\{E(T)\exp\left(-\frac{t}{E(T)}\right)\right\}^{1/c}.$$

Μετά από απλοποιήσεις ισχύει

$$m(t)\,[S(t)]^{1/c}\left(\frac{m(t)}{E(T)}\right)^{(1-c)/c} \leq E(T)\exp\left(-\frac{t}{c\,E(T)}\right).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 , η συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως

$$S^*(t) = [S(t)]^{1/c}\left(\frac{m(t)}{E(T)}\right)^{(1-c)/c}$$

γι΄ αυτό προκύπτει ότι

$$m^*(t)\,S^*(t) \leq E(T^*)\exp\left(-\frac{t}{E(T^*)}\right).$$

Συνεπώς, η $T^*$ είναι HNBUE. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η διάταξη για HNWUE.

□

**Θεώρημα 4.6.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει το πολλαπλασιαστικό μοντέλο (4.2). Τότε θα ικανοποιούνται τα ακόλουθα*

*(α΄)* $\mathsf{T} \leq_{hr} \mathsf{T}^*$ *αν* $c > 1$ *ή* $\mathsf{T} \geq_{hr} \mathsf{T}^*$ *αν* $c < 1$ ,

*(β΄)* $\mathsf{T}^* \leq_{wlr} \mathsf{T}$ *, αν η* $\mathsf{T}$ *ανήκει στην κλαση NBUFR, το οποίο σημαίνει* $h(t) \geq h(0)$ *για κάθε* $t \geq 0$ *όταν* $c < \dfrac{1}{2}$ ,

*(γ΄)* $\mathsf{T}^* \leq_{lr} \mathsf{T}$ *, αν η* $\mathsf{T}$ *έχει αύξουσα ένταση κινδύνου όταν* $c < \dfrac{1}{2}$ .

△

Τα θεωρήματα που ακολουθούν, ισχύουν σύμφωνα με την παραδοχή ότι το μοντέλο $m^*(t) = c\,m(t)$ επαληθεύεται για τις μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές $X^*$, $X$ και $Y^*$, $Y$.

**Θεώρημα 4.7.** *Αν* $X \geq_{ICX} Y$ *και* $c > 1$ *, τότε* $X^* \geq_{ICX} Y^*$ .

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 4.1 , η συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως

$$S^*(t) = S(t)\left(\frac{1}{E(T)}\int_t^{\infty} S(u)du\right)^{(1-c)/c}$$

η οποία ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως

$$E(T)\left(\frac{S^*(t)}{S(t)}\right)^{c/(1-c)} = \int_t^{\infty} S(u)du$$

για τις μεταβλητές $X^*$, $X$ και $Y^*$, $Y$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.6 , αν $X \geq_{ICX} Y$, τότε για κάθε $t \geq 0$ θα ισχύει

$$\int_t^{\infty} S_X(u)du \geq \int_t^{\infty} S_Y(u)du$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη για $c > 1$.

□

**Θεώρημα 4.8.** *Έστω ότι ισχύει* $X \leq_{ST} Y$*. Τότε θα ισχύει* $X^* \leq_{ST} Y^*$

*(α΄) αν* $c < 1$ *και* $\dfrac{m_Y(t)}{E(Y)} \geq \dfrac{m_X(t)}{E(X)}$ , *ή*

*(β΄) αν* $c > 1$ *και* $\dfrac{m_Y(t)}{E(Y)} \leq \dfrac{m_X(t)}{E(X)}$ .

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.6 , αν $X \leq_{ST} Y$, τότε $S_X(t) \leq S_Y(t)$. Δεδομένου ότι ισχύει η σχέση (1.14) , τότε προκύπτει η εξής διάταξη

$$\frac{E(X)}{m_X(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m_X(u)}\,du\right) \leq \frac{E(Y)}{m_Y(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m_Y(u)}\,du\right)$$

δηλαδή,

$$\left(\frac{E(X)}{m_X(t)}\,\frac{m_Y(t)}{E(Y)}\right) \leq \exp\left[-\left(\int_0^t \frac{1}{m_Y(u)}\,du - \int_0^t \frac{1}{m_X(u)}\,du\right)\right].$$

Με παρόμοιο τρόπο, η διάταξη $X^* \leq_{ST} Y^*$ ισχύει, αν αποδειχτεί ότι

$$\frac{E(X^*)}{m_{X^*}(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m_{X^*}(u)}\,du\right) \leq \frac{E(Y^*)}{m_{Y^*}(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m_{Y^*}(u)}\,du\right)$$

ή ισοδύναμα αν

$$\left(\frac{E(X)}{m_X(t)}\,\frac{m_Y(t)}{E(Y)}\right)^c \leq \exp\left[-\left(\int_0^t \frac{1}{m_Y(u)}\,du - \int_0^t \frac{1}{m_X(u)}\,du\right)\right].$$

Αν εφαρμοστεί είτε το ($\alpha'$) είτε το ($\beta'$) θα προκύψει

$$\left(\frac{E(X)}{m_X(t)}\,\frac{m_Y(t)}{E(Y)}\right)^c \leq \frac{E(X)}{m_X(t)}\,\frac{m_Y(t)}{E(Y)}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

**Παράδειγμα 4.6.** *Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Erlang και Εκθετική κατανομή, με αντίστοιχες συναρτήσεις επιβίωσης* $S_X(t) = e^{-\lambda t}$ *και* $S_Y(t) = (1+\lambda t)e^{-\lambda t}$ *, δοθέντος ότι* $\lambda > 0$ *και* $t \geq 0$.

*Ισχύει* $X \leq_{ST} Y$ *διότι για κάθε* $t \geq 0$ *επαληθεύεται η σχέση* $S_X(t) \leq S_Y(t)$. *Οι συναρτήσεις των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής είναι* $m_X(t) = \dfrac{1}{\lambda}$ *και* $m_Y(t) = \dfrac{(\lambda t+2)}{\lambda(1+\lambda t)}$ *, για κάθε* $t \geq 0$ *. Συνεπώς,* $\dfrac{m_X(t)}{E(X)} \geq \dfrac{m_Y(t)}{E(Y)}$ .

**Παράδειγμα 4.7.** *Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με τις αντίστοιχες συναρτήσεις επιβίωσης*

$$S_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t \leq k \\ \left(\dfrac{k}{t}\right)^a & \text{για } t \geq k \end{cases} \qquad \text{και} \qquad S_Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t \leq k \\ \left(\dfrac{k}{t}\right)^b & \text{για } t \geq k \end{cases}$$

*εφόσον* $a \geq b$ *και* $t \geq k \Rightarrow \dfrac{k}{t} \leq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{k}{t}\right)^a \leq \left(\dfrac{k}{t}\right)^b$ *προκύπτει*

$$S_X(t) \le S_Y(t) \Rightarrow X \le_{ST} Y \, .$$

*Οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής για τις μεταβλητές* X *και* Y *θα είναι*

$$m_X(t) = \begin{cases} k + \dfrac{k}{a-1} - t & \text{για } t \le k \\ \\ \dfrac{t}{a-1} & \text{για } t \ge k \end{cases} \quad \text{και} \quad m_Y(t) = \begin{cases} k + \dfrac{k}{b-1} - t & \text{για } t \le k \\ \\ \dfrac{t}{b-1} & \text{για } t \ge k \end{cases}$$

*και γι΄ αυτό ισχύει*

$$\frac{m_X(t)}{E(X)} \le \frac{m_Y(t)}{E(Y)} \, .$$

**Θεώρημα 4.9**. *Αν* $X \le_{HR} Y$ *και* $c < 1$ , *τότε* $X^* \le_{HR} Y^*$ .

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 , η συνάρτηση της έντασης κινδύνου ορίζεται ως

$$h^*(t) = \frac{1}{c}\left(\frac{1-c}{m(t)} + c \cdot h(t)\right)$$

η οποία γράφεται για τις μεταβλητές X και Y ως

$$h_{Y^*}(t) - h_{X^*}(t) = \frac{1}{c}\left[(1-c)\frac{m_X(t) - m_Y(t)}{m_X(t)\, m_Y(t)} + c[h_Y(t) - h_X(t)]\right]$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται

$$h_{Y^*}(t) - h_{X^*}(t) \le 0$$

δεδομένου ότι $X \le_{HR} Y$, συνεπώς υποδηλώνεται ότι $X \le_{MRL} Y$ .

□

**Αντιπαράδειγμα 4.1**. *Έστω* X *και* Y *δύο τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Εκθετική κατανομή, με αντίστοιχες συναρτήσεις επιβίωσης τις* $S_X(t) = e^{-20t}$ *και* $S_Y(t) = e^{-15t}$ , *για* $t \ge 0$. *Αξίζει να αναφερθεί ότι για* $c = 3$ *προκύπτουν οι εξής συναρτήσεις έντασης κινδύνου* $h_{X^*}(t) = \frac{20}{3}$ *και* $h_{Y^*}(t) = \frac{15}{3}$ , *για κάθε* $t \ge 0$. *Συνεπώς, ισχύει* $X \le_{HR} Y$ *και* $X^* \le_{HR} Y^*$, *παρότι* $c \not< 1$. *Αξιοσημείωτο είναι ότι η συνθήκη του Θεωρήματος 4.9 "*$c < 1$*" δεν είναι απαραίτητη.*

**Θεώρημα 4.10**. *Ισχύουν οι ακόλουθες διατάξεις για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και τον αρμονικό μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής*

- $X \le_{MRL} Y$, *αν και μόνο αν* $X^* \le_{MRL} Y^*$ ,
- $X \ge_{MRL} Y$, *αν και μόνο αν* $X^* \ge_{MRL} Y^*$ ,
- $X \le_{HAMRL} Y$, *αν και μόνο αν* $X^* \le_{HAMRL} Y^*$ ,
- $X \ge_{HAMRL} Y$, *αν και μόνο αν* $X^* \ge_{HAMRL} Y^*$ .

## 4.2 Δυναμικό Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο έντασης κινδύνου και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για σταθερό και θετικό όρο $c$, περιγράφονται από τις σχέσεις (4.1) και (4.2). Ωστόσο, πολλαπλασιαστικό μοντέλο υφίσταται και λόγω μίας μη αρνητικής συνάρτησης $c(t)$, σύμφωνα με τα ακόλουθα.

Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T$, με ένταση κινδύνου $h(t)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$. Επιπλέον, έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και συνεχής τυχαία μεταβλητή $T^*$, με ένταση κινδύνου $h^*(t)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m^*(t)$.

Αν η ένταση κινδύνου $h^*(t)$ ισούται με την ένταση κινδύνου $h(t)$ πολλαπλασιασμένη με μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$h^*(t) = c(t)h(t) \tag{4.3}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Δυναμικό Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Έντασης Κινδύνου» - Dynamic Proportional Hazard Rate Model

Αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m^*(t)$ ισούται με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(t)$ πολλαπλασιασμένο με μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, τότε θα προκύψει ένα μοντέλο της μορφής

$$m^*(t) = c(t)\, m(t) \tag{4.4}$$

το οποίο θα είναι γνωστό ως «Δυναμικό Πολλαπλασιαστικό Μοντέλο Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής» - Dynamic Proportional Mean Residual Life Model.

$\triangle$

Η αυθαίρετη επιλογή της συνάρτησης $c(t)$ δεν επιβεβαιώνει πάντα ότι οι συναρτήσεις $h^*(t)$ και $m^*(t)$ είναι αντίστοιχα η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας τυχαίας μεταβλητής $T^*$.

Με την ακόλουθη πρόταση γνωστοποιούνται κάποιες ικανές προϋποθέσεις έτσι ώστε μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, να επαληθεύει ένα δυναμικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο έντασης κινδύνου.

**Πρόταση 4.2.** *Δύο μη αρνητικές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *ικανοποιούν το μοντέλο* $h^*(t) = c(t)\, h(t)$ *, αν*

*(α')* $c(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \geq 0$ ,

*(β')* $\int_0^\infty c(x)\, h(t)\, dx = \infty$ ,

*(γ')* $S(t) = 0$ *για κάποιο* $t = t_0$, *τότε* $\int_0^{t_0} c(x)\, h(t)\, dx = \infty$ .

Με την ακόλουθη πρόταση γνωστοποιούνται κάποιες ικανές προϋποθέσεις έτσι ώστε μία μη αρνητική συνάρτηση $c(t)$, να επαληθεύει ένα δυναμικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

**Πρόταση 4.3.** *Δύο μη αρνητικές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές* $T$ *και* $T^*$ *ικανοποιούν το μοντέλο* $m^*(t) = c(t)\, m(t)$ , *αν*

*(α')* $0 \leq c(t) < \infty$ *για κάθε* $t \geq 0$ ,

*(β')* $c(0) > 0$ ,

*(γ')* $c(t)$ *είναι συνεχής συνάρτηση,*

*(δ')* $c(t)\, m(t) + t$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς* $t$,

*(ε')* *δεν υπάρχει ένα* $t_0$ *για το οποίο να ισχύει* $m(t_0) = 0$ , *τότε*

$$\int_0^\infty \frac{1}{c(t)\, m(t)}\, dt = \infty.$$

**Παρατήρηση 4.5.** *Αξίζει να αναφερθεί ότι αν* $0 \leq c(t) < 1$, *τότε η συνθήκη (ε') ικανοποιείται.*

$\triangle$

Στο ακόλουθο παράδειγμα επαληθεύεται η ύπαρξη του μοντέλου (4.4).

**Παράδειγμα 4.8.** *Έστω* $T$ *μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Pareto κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης την* $S(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^\lambda$, $t \geq k > 0$, $\lambda > 1$ *και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής τη συνάρτηση* $m(t) = \frac{t}{\lambda - 1}$ . *Αν* $c(t) = \frac{1+at}{1+bt}$ *με* $0 \leq a < b$ , *τότε επαληθεύεται το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.*

### 4.2.1 Ιδιότητες Γήρανσης

Σε αυτή την υποενότητα αναφέρονται οι προϋποθέσεις σύμφωνα με τις οποίες οι μεταβλητές $T$ και $T^*$ , που επαληθεύουν το μοντέλο (4.3) ή (4.4), ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες γήρανσης.

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μία συνθήκη για τη συνάρτηση $c(t)$, του μοντέλου (4.3), σύμφωνα με την οποία καθορίζεται η μονοτονία της έντασης κινδύνου της μεταβλητής $T^*$, αν είναι γνωστή η μονοτονία της $T$.

**Θεώρημα 4.11.** *Αν η τυχαία μεταβλητή* $T$ *έχει αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση έντασης κινδύνου και η συνάρτηση* $c(t)$ *είναι αύξουσα (φθίνουσα), τότε η τυχαία μεταβλητή* $T^*$ *που ικανοποιεί το μοντέλο (4.3), θα έχει αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση έντασης κινδύνου, για κάθε* $t > 0$.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 4.9**. *Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Γάμμα κατανομή με συνάτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = t\,e^{-t}$ *και ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ . *Η συνάρτηση* $c(t) = 1 + t$ *ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της Πρότασης 4.2 και είναι αύξουσα ως προς* $t$. *Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.11 προκύπτει ότι η μεταβλητή* $T^*$ *θα έχει αύξουσα συνάρτηση έντασης κινδύνου.*

Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η συνθήκη του Θεωρήματος 4.11, ″$c(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ″ είναι επαρκής αλλά δεν είναι αναγκαία.

**Αντιπαράδειγμα 4.2**. *Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Γάμμα κατανομή με συνάτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = t\,e^{-t}$ *και ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ . *Παρ΄ ότι η συνάρτηση* $c(t) = \dfrac{2+t^2}{1+t}$ *δεν είναι μονότονη, η μεταβλητή* $T^*$ *θα έχει αύξουσα συνάρτηση έντασης κινδύνου.*

△

Το ακόλουθο θεώρημα καθορίζει αν η τυχαία μεταβλητή $T^*$ που ικανοποιεί το μοντέλο (4.3), θα ανήκει στην κλάση NBUHR ή στην NWUHR. Αξίζει να αναφερθεί ότι μια τυχαία μεταβλητή $T$ ανήκει στην κλάση NBUHR αν για κάθε $t > 0$ ισχύει $h(t) \geq h(0)$ .

**Θεώρημα 4.12**. *Αν η τυχαία μεταβλητή* $T$ *ανήκει στην κλάση NBUHR και ισχύει* $c(t) \geq c(0)$ *τότε η τυχαία μεταβλητή* $T^*$ *που ικανοποιεί το μοντέλο (4.3), θα ανήκει στην κλάση NBUHR για κάθε* $t > 0$, *ενώ αν η* $T$ *ανήκει στην κλάση NWUHR και ισχύει* $c(t) \leq c(0)$ *τότε η* $T^*$, *θα ανήκει στην κλάση NWUHR για κάθε* $t > 0$.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 4.10**. *Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Γάμμα κατανομή με συνάτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = t\,e^{-t}$ *και ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ . *Αν* $c(t) = \dfrac{2+t^2}{1+t}$ *ισχύει* $c(t) \geq c(0)$. *Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.12 προκύπτει ότι η μεταβλητή* $T^*$ *θα ανήκει στην κλάση NBUHR.*

Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η συνθήκη του Θεωρήματος 4.12, ″$c(t) \geq c(0)$ ″ είναι επαρκής αλλά δεν είναι αναγκαία.

**Αντιπαράδειγμα 4.3**. *Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Γάμμα κατανομή με συνάτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = t\,e^{-t}$ *και ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ . *Αν* $c(t) = \dfrac{1+t}{1+t^2}$ *ισχύει* $c(t) \leq c(0)$ *όταν* $0 \leq t \leq 1$, *και* $c(t) \geq c(0)$ *όταν* $t > 1$. *Ωστόσο, εφόσον* $h^*(t) \geq h^*(t)$ *για κάθε* $t > 0$, *τότε η μεταβλητή* $T^*$ *θα ανήκει στην κλάση NBUHR.*

Από το ακόλουθο θεώρημα καθορίζεται η μονοτονία του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της μεταβλητής $T^*$ που ικανοποιεί το μοντέλο (4.4).

**Θεώρημα 4.13.** *Έστω $T$ και $T^*$ δύο μη αρνητικές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο $m^*(t) = c(t)\, m(t)$. Τότε η $T^*$ θα έχει φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής*

*(α′) αν η $T$ έχει φθίνουσα συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και αν η $c(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $t$,*

*(β′) αν η $T$ ανήκει στην κλάση NBUE και αν η $c(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $t$.*

*Απόδειξη.* (α′) Αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4).

(β′) Αν η $c(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $t$ και η $T$ είναι NBUE, το οποίο σημαίνει ότι $m(t) \leq E(T)$, τότε έπεται ότι

$$m^*(t) = c(t)\, m(t) \leq c(t)\, E(T) \leq c(0)\, E(T) = E(T^*).$$

□

### 4.2.2 Ιδιότητες Διατάξεων

Σε αυτή την υποενότητα αναφέρονται οι προϋποθέσεις σύμφωνα με τις οποίες, οι μεταβλητές $T$ και $T^*$ που επαληθεύουν το μοντέλο (4.3), ικανοποιούν κάποιες στοχαστικές διατάξεις.

Από το ακόλουθο θεώρημα καθορίζεται η στοχαστική διάταξη στο μοντέλο (4.3). Μία τυχαία μεταβλητή $T$ είναι μεγαλύτερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή $T^*$ σύμφωνα με τη στοχαστική διάταξη ($T \geq_{ST} T^*$) αν για κάθε $t > 0$,

$$\int_0^t h(u)du \leq \int_0^t h^*(u)du\ .$$

**Θεώρημα 4.14.** *Έστω $T$ και $T^*$ είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν $c(t) \geq 1$ τότε $T \geq_{ST} T^*$ για κάθε $t \geq 0$, ενώ αν $c(t) \leq 1$ τότε $T \leq_{ST} T^*$ για κάθε $t \geq 0$.*

Το Παράδειγμα 4.9 αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, εφόσον ισχύει $T \geq_{ST} T^*$.

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη "$c(t) \geq 1$ για κάθε $t \geq 0$" δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.4.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή $T$ που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\dfrac{1}{2}$ και ικανοποιεί το μοντέλο (4.3). Αν $c(t) = \dfrac{1+t}{2}$, τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει είτε επειδή $c(t) \leq 1$ όταν $0 \leq t \leq 1$, ενώ $c(t) \geq 1$ όταν $t > 1$, είτε επειδή η σχέση*

$$\int_0^t h(u)\,[1-c(u)]\,du = \frac{t^2}{2} - t$$

*δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t > 0$.

$\triangle$

Από το ακόλουθο θεώρημα επαληθεύεται η διάταξη της έντασης γήρανσης. Μία τυχαία μεταβλητή $T$ είναι μεγαλύτερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή $T^*$ σύμφωνα με τη διάταξη έντασης κινδύνου ($T \geq_{AI} T^*$) αν για κάθε $t > 0$,

$$\frac{h(t)}{\int_0^t h(u)du} \leq \frac{h^*(t)}{\int_0^t h^*(u)du} \, .$$

**Θεώρημα 4.15.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν η συνάρτηση* $c(t)$ *είναι αύξουσα ως προς* $t$*, τότε* $T \geq_{AI} T^*$ *για κάθε* $t \geq 0$*, ενώ αν* $c(t)$ *είναι φθίνουσα ως προς* $t$*, τότε* $T \leq_{AI} T^*$ *για κάθε* $t \geq 0$.

Το Παράδειγμα 4.9 αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, εφόσον ισχύει $T \geq_{AI} T^*$ .

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη "$c(t)$ είναι αύξουσα ως προς $t$" δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.5.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή* $T$ *που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* $f(t) = e^{-t}$ *και ικανοποιεί το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) = \dfrac{1+t^2}{1+t}$*, τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει επειδή η σχέση*

$$\int_0^t c(u)\,h(u)\,du - c(t)\int_0^t h(u)\,du = 2\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t(1+t^2)}{1+t}$$

*δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t > 0$.

$\triangle$

Από το ακόλουθο θεώρημα επαληθεύεται η αύξουσα κυρτή διάταξη . Μία τυχαία μεταβλητή $T$ είναι μεγαλύτερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή $T^*$ σύμφωνα με την αύξουσα κυρτή διάταξη ($T \geq_{ICX} T^*$) αν για κάθε $t > 0$,

$$\int_t^\infty S(u)du \geq \int_t^\infty S^*(u)du \, .$$

**Θεώρημα 4.16.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) \geq 1$ *τότε* $T \geq_{ICX} T^*$ *για κάθε* $t \geq 0$*, ενώ αν* $c(t) \leq 1$ *τότε* $T \leq_{ICX} T^*$ *για κάθε* $t \geq 0$.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 4.11.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 και ικανοποιεί το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) = 1 + t$ *για κάθε* $t \geq 0$, *τότε επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα, εφόσον ισχύει* $\mathsf{T} \geq_{ICX} \mathsf{T}^*$.

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη "$c(t) \geq 1$" δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.6.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που ακολουθεί Earlang κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = 4t\,e^{-2t}$, *ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{4t}{1+2t}$ *και ικανοποιεί το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) = \dfrac{1+2t}{4}$, *τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει είτε επειδή* $c(t) \leq 1$ *όταν* $0 \leq t \leq 1.5$, *ενώ* $c(t) \geq 1$ *όταν* $t > 1.5$, *είτε επειδή η σχέση*

$$\int_t^{\infty} \exp\left[-\int_0^x h(u)\,du\right] dx - \int_t^{\infty} \exp\left[-\int_0^x c(u)\,h(u)\,du\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}(1+2t)e^{-2t} - \int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

*δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t > 0$.

△

Από το ακόλουθο θεώρημα καθορίζεται η αύξουσα κοίλη διάταξη . Μία τυχαία μεταβλητή $\mathsf{T}$ είναι μεγαλύτερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή $\mathsf{T}^*$ σύμφωνα με την αύξουσα κοίλη διάταξη ($\mathsf{T} \geq_{ICV} \mathsf{T}^*$) αν για κάθε $t > 0$,

$$\int_0^t S(u)du \geq \int_0^t S^*(u)du \;.$$

**Θεώρημα 4.17.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) \geq 1$ *τότε* $\mathsf{T} \geq_{ICV} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t \geq 0$, *ενώ αν* $c(t) \leq 1$ *τότε* $\mathsf{T} \leq_{ICV} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t \geq 0$.

△

Από το ακόλουθο θεώρημα προκύπτει η διάταξη έντασης κινδύνου. Μία τυχαία μεταβλητή $\mathsf{T}$ είναι μεγαλύτερη από μία άλλη τυχαία μεταβλητή $\mathsf{T}^*$ σύμφωνα με διάταξη έντασης κινδύνου ($\mathsf{T} \geq_{HR} \mathsf{T}^*$) αν για κάθε $t > 0$, $h(t) \leq h^*(t)$.

**Θεώρημα 4.18.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) \geq 1$ *τότε* $\mathsf{T} \geq_{HR} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t \geq 0$, *ενώ αν* $c(t) \leq 1$ *τότε* $\mathsf{T} \leq_{HR} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t \geq 0$.

△

Από το ακόλουθο θεώρημα καθορίζεται η αύξουσα διάταξη της έντασης κινδύνου.

**Θεώρημα 4.19.** *Έστω* $\mathsf{T}$ *και* $\mathsf{T}^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t)h(t) \leq h(t+x)$ *τότε* $\mathsf{T} \geq_{\mathsf{HR}\uparrow} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t \geq 0$*, ενώ αν* $c(t)h(t) \geq h(t+x)$ *τότε* $\mathsf{T} \geq_{\mathsf{HR}\uparrow} \mathsf{T}^*$ *για κάθε* $t, x \geq 0$.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

**Παράδειγμα 4.12.** *Έστω μία τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με μέση τιμή* $\dfrac{1}{2}$ *και ικανοποιεί το μοντέλο (4.3). Αν* $c(t) = \dfrac{1}{1+t}$ *για κάθε* $t \geq 0$*, τότε* $\mathsf{T} \leq_{\mathsf{HR}\uparrow} \mathsf{T}^*$ *εφόσον ισχύει* $c(t)h(t) - h(t+x) \leq 0$.

**Παρατήρηση 4.6.** *Αν η μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *έχει αύξουσα ένταση κινδύνου και* $c(t) \leq 1$*, τότε* $\mathsf{T} \leq_{\mathsf{HR}\uparrow} \mathsf{T}^*$ .

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη "$c(t) \leq 1$" που δίνεται στην Παρατήρηση 4.6 δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.7.** *Έστω ότι υπάρχει μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που ακολουθεί Γάμμα κατανομή με συνάτηση πυκνότητας πιθανότητας την* $f(t) = t\,e^{-t}$ *και ένταση κινδύνου την* $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ . *Αν* $c(t) = \dfrac{(1+t)^2}{2+t}$ *, τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει είτε επειδή* $c(t) < 1$ *όταν* $t < 1$*, ενώ* $c(t) > 1$ *όταν* $t > 1$*, είτε επειδή η σχέση*

$$c(t)h(t) - h(t+x) = \frac{t(1+t)}{2+t} - \frac{t+x}{1+t+x}$$

*για* $(t, x) = (2, 1)$ *είναι θετική, ενώ για* $(t, x) = (\frac{1}{2}, 2)$ *είναι αρνητική, συνεπώς δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t \geq 0$.

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη που δίνεται στην Παρατήρηση 4.6 "η $\mathsf{T}$ έχει αύξουσα ένταση κινδύνου" είναι απαραίτητη για να ισχύει $\mathsf{T} \leq_{\mathsf{HR}\uparrow} \mathsf{T}^*$ .

**Αντιπαράδειγμα 4.8.** *Έστω ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $\mathsf{T}$ *που έχει ένταση κινδύνου τη συνάρτηση*

$$h(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2 & \text{για } \ 0 \leq t \leq 2\,, \\[2ex] \dfrac{1}{9} & \text{για } \ t > 2 \end{cases}$$

*η οποία δεν είναι αύξουσα. Αν* $c(t) = \dfrac{1}{1+t}$ *, τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει επειδή η σχέση*

$$c(t)h(t) - h(t+x) = \frac{1}{1+t}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 - \frac{1-t-x}{1+t+x}$$

*για* $(t,x) = (2,0)$ *είναι αρνητική, ενώ για* $(t,x) = (0,2)$ *είναι θετική, συνεπώς δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t \geq 0$.

$\triangle$

Από το ακόλουθο θεώρημα καθορίζεται η φθίνουσα διάταξη της έντασης κινδύνου.

**Θεώρημα 4.20.** *Έστω* $T$ *και* $T^*$ *είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν το μοντέλο (4.3). Τότε* $T \leq_{HR\downarrow} T^*$ *αν και μόνο αν*

$$c(t+x)\,h(t+x) - h(t) \leq 0 \quad \textit{ή} \quad c(t+x)\,h(t+x) - h(t) \geq 0\,.$$

**Παρατήρηση 4.7.** *Αν η* $T$ *έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου και* $c(t) \leq 1$, *τότε* $T \leq_{HR\downarrow} T^*$ .

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη ″$c(t) \leq 1$″ που δίνεται στην Παρατήρηση 4.7 δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.9.** *Έστω ότι υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή* $T$ *που έχει ένταση κινδύνου τη συνάρτηση* $h(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *η οποία είναι αύξουσα. Αν* $c(t) = \dfrac{(1+t)^2}{2+t}$ *για κάθε* $t \geq 0$, *τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει είτε επειδή* $c(t) < 1$ *όταν* $t < 1$, *ενώ* $c(t) > 1$ *όταν* $t > 1$, *είτε επειδή η σχέση*

$$c(t+1)\,h(t+1) - h(t) = \frac{(2+t)^2}{(3+t)\,(t^2+2t+2)} - \frac{1}{1+t^2}$$

*είναι θετική όταν* $t = 5$, *ενώ είναι αρνητική όταν* $t = 1$, *συνεπώς δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t \geq 0$.

Από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει ότι η συνθήκη που δίνεται στην Παρατήρηση 4.7 ″η $T$ έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου″ δε μπορεί να παραληφθεί.

**Αντιπαράδειγμα 4.10.** *Έστω ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $T$ *που έχει ένταση κινδύνου τη συνάρτηση*

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)^2}{1+t} & \text{για } 0 \leq t \leq 2\,, \\[2ex] \dfrac{1}{3} & \text{για } t > 2 \end{cases}$$

*η οποία δεν είναι φθίνουσα. Αν* $c(t) = \dfrac{1}{1+t}$ , *τότε δεν επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα. Αυτό προκύπτει επειδή η σχέση*

$$c(2+x)\,h(2+x) - h(2) = \frac{(1+x)^4}{(3+x)^3} - \frac{1}{9}$$

*είναι θετική όταν* $x = 2$, *ενώ είναι αρνητική όταν* $x = 0$, *συνεπώς δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε* $t \geq 0$.

## 4.3 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία απορρέει το συμπέρασμα ότι τόσο το προσθετικό μοντέλο όσο και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής χρησιμοποιείται για να περιγραφούν γεγονότα και καταστάσεις που είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με το χρόνο.

Η ύπαρξη ενός προσθετικού μοντέλου έντασης κινδύνου με θετικό και σταθερό όρο έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός προσθετικού μοντέλου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Είναι αποδεδειγμένο σε όλες τις κατανομές, εκτός από την Εκθετική, πως αν στην αρχική ένταση κινδύνου προστεθεί ένας θετικός και σταθερός όρος, τότε ο νέος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα προκύψει, αν από τον αρχικό μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής αφαιρεθεί μία μη αρνητική συνάρτηση. Έχει παρατηρηθεί σε κάποιες κατανομές ότι αυτή η συνάρτηση μοιάζει γραφικά με τη συνάρτηση της αρχικής έντασης κινδύνου. Επιπλέον λόγω του μοντέλου (2.2) παρατηρείται ότι η νέα συνάρτηση επιβίωσης που δημιουργείται, συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με την αρχική συνάρτηση επιβίωσης.

Η ύπαρξη ενός προσθετικού μοντέλου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με θετικό και σταθερό όρο δεν συνάδει με τη συνύπαρξη ενός προσθετικού μοντέλου έντασης κινδύνου με θετικό και σταθερό όρο. Το μοντέλο (3.1) εφαρμόστηκε στην Εκθετική και τη Lomax κατανομή και παρατηρήθηκε ότι η αρχική συνάρτηση επιβίωσης συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, σε σύγκριση με τη νέα συνάρτηση επιβίωσης που προκύπτει αν η μη αρνητική συνάρτηση ισούται με $t^2$ .

Η ύπαρξη ενός πολλαπλασιαστικού μοντέλου έντασης κινδύνου, δεν προϋποθέτει ότι θα υπάρχει ταυτόχρονα και το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ομοίως ισχύει και το αντίστροφο. Εξαίρεση σε αυτόν τον κανόνα αποτελούν η Εκθετική και η Pareto κατανομή.

# Παράρτημα

## Πρώτο Κεφάλαιο

### Παράδειγμα 1.2

Η παράθεση των γραφημάτων, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$m[t\_]:=\frac{1}{1+2.3t^2}$
$h[t\_]:=\frac{\left(1+2.3t^2\right)^2-4.6t}{1+2.3t^2}$

$\text{Plot}[m[t], \{t, 0, 5\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“m(t)”}\}, \text{PlotStyle} \to \text{Black}]$

$\text{Plot}[h[t], \{t, 0, 2\}, \text{PlotRange} \to \{\{0, 2\}, \{0, 6\}\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“h(t)”}\},$

$\text{PlotStyle} \to \text{Black}]$

### Παράδειγμα 1.3

Η παράθεση των γραφημάτων, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$m[t\_]:=\frac{1}{4}(1-t)(1+2t)$

$h[t\_]:=\frac{5-4t}{(1-t)*(1+2t)}$

$\text{Plot}[m[t], \{t, 0, 0.5\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“m(t)”}\}, \text{PlotStyle} \to \text{Black}]$

$\text{Plot}[h[t], \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \to \{\{0, 1\}, \{0, 6\}\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“h(t)”}\},$

$\text{PlotStyle} \to \text{Black}]$

### Παράδειγμα 1.4

Η παράθεση των γραφημάτων, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$m[t\_]{:=}1+t^2$

$h[t\_]{:=}\frac{1+2t}{1+t^2}$

Plot $\left[m[t], \left\{t, 0, \frac{Pi}{2}\right\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“m(t)”}\}, \text{PlotStyle} \to \text{Black}\right]$

Plot $\left[h[t], \left\{t, 0, \frac{Pi}{2}\right\}, \text{AxesLabel} \to \{t, \text{“h(t)”}\}, \text{PlotStyle} \to \text{Black}\right]$

# Δεύτερο Κεφάλαιο

## Μελέτη Κατανομών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούν οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για ορισμένες κατανομές.

## Γάμμα

Στην κατανόμη Γάμμα :

ο ορισμός βασικών συναρτήσεων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$f[t\_]{:=}\frac{b^{-a}e^{-\frac{t}{b}}t^{-1+a}}{\text{Gamma}[a]}$

$S[t\_]{:=}\frac{\text{Gamma}\left[a, \frac{t}{b}\right]}{\text{Gamma}[a]}$

$h[t\_]{:=}\frac{e^{-\frac{t}{b}}\left(\frac{t}{b}\right)^{-1+a}}{b\text{Gamma}\left[a, \frac{t}{b}\right]}$

$m[t\_]{:=}\frac{1}{S[t]} * \int_t^\infty S[x]\,dx$

$h1[t\_]{:=}h[t]+\lambda$

$S1[t\_]{:=}S[t] * \text{Exp}[-\lambda * t]$

$m11[t\_]{:=}\int_0^\infty \text{Exp}[-\lambda * x] * \frac{S[x+t]}{S[t]}dx$

χρησιμοποιήθηκε το πακέτο << PlotLegends`

η παράθεση των γραφημάτων, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$b = 1; a = 2;$

Plot[Evaluate@Table[h1[t] − h[t], {λ, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 5},

PlotRange → {{0, 5}, {0, 3}}, PlotLegend → {λ=0.5, λ=1, λ=2},

AxesLabel → {t, $h_\lambda$(t)-h(t)}]

$b = 1; a = 2;$

Plot[Evaluate@Table[m1[t] − m[t], {λ, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 5}, PlotRange → {{0, 6}, {0, −1.5}}, PlotLegend → {λ=0.5, λ=1, λ=2},

AxesLabel → {t, $m_\lambda$(t)-m(t)}]

b = 1;

Plot[Evaluate@Table[h[t], {a, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 4}, PlotLegend → {α=0.5, α=1, α=2},

AxesLabel → {t, h(t)}]

b = 1;

Plot[Evaluate@Table[m[t], {a, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 4}, PlotLegend → {α=0.5, α=1, α=2},

AxesLabel → {t, m(t)}]

b = 1; a = 2;

Plot[Evaluate@Table[h1[t], {λ, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 4}, PlotLegend → {λ=0.5, λ=1, λ=2},

AxesLabel → {t, $h_\lambda$(t)}]

b = 1; a = 2;

Plot[Evaluate@Table[m1[t], {λ, {0.5, 1, 2}}], {t, 0, 3}, PlotRange → {{0, 3}, {0, 1.5}},

PlotLegend → {λ=0.5, λ=1, λ=2}, AxesLabel → {t, $m_\lambda$(t)}]

b = 1; a = 2;

Plot[Evaluate@Table[S1[t], {λ, {0, 1, 2}}], {t, 0, 4}, PlotLegend → {λ=0, λ=1, λ=2},

AxesLabel → {t, $S_\lambda$(t)}]

## Hjorth

Στην κατανόμη Hjorth η παράθεση των γραφημάτων, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

h[t_]:= $\left(a + \frac{b}{t\hat{}2}\right) * \mathrm{Exp}\left[a * t - \frac{b}{t}\right]$

a = 0.9; b = 0.7;

Plot[h[t], {t, 0, 5}, AxesLabel → {t, "h(t)"}, PlotStyle → Black]

a = 0.6; b = 0.7;

Plot[h[t], {t, 0, 5}, AxesLabel → {t, "h(t)"}, PlotStyle → Black]

a = 0.2; b = 0.7;

$\text{Plot}[\text{h}[\text{t}], \{\text{t}, 0, 5\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{t}, \text{"h(t)"}\}, \text{PlotStyle} \to \text{Black}]$

## RAW

Στην κατανόμη RAW :

ο ορισμός βασικών συναρτήσεων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$h[t\_]{:=}a * b * ((a * t)^\wedge(b-1)) + \frac{a}{b} * (a * t)^\wedge\left(\frac{1}{b}-1\right)$

$S[t\_]{:=}\text{Exp}[-(a * t)^\wedge b - (a * t)^\wedge(1/b)]$

$m[t\_]{:=}\frac{1}{S[t]} * \int_t^\infty S[x]\, dx$

$S1[t\_]{:=}S[t] * \text{Exp}[-\lambda * t]$

$m1[t\_]{:=} \int_0^\infty \text{Exp}[-\lambda * x] * \frac{S[x+t]}{S[t]} dx$

χρησιμοποιήθηκε το πακέτο << PlotLegends\` .

η παράθεση των γραφημάτων, για την ένταση κινδύνου, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$a = 0.01; b = 10; \lambda = 0.005;$

p2 = Plot[S1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 1}}, PlotLegend → "λ=0.005",

PlotStyle → Magenta, AxesLabel → {t, "$S_\lambda$(t)"}]

$a = 0.01; b = 10; \lambda = 0.01;$

p3 = Plot[S1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 1}}, PlotLegend → "λ=0.01",

PlotStyle → Green, AxesLabel → {t, "$S_\lambda$(t)"}]

$a = 0.01; b = 10; \lambda = 0.05;$

p4 = Plot[S1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 1}}, PlotLegend → "λ=0.05",

PlotStyle → Brown, AxesLabel → {t, "$S_\lambda$(t)"}]

Show[p2, p3, p4]

η παράθεση των γραφημάτων, για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$a = 0.01; b = 10; \lambda = 0.005;$

q2 = Plot[m1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 90}}, PlotLegend → “λ=0.005”, PlotStyle → Magenta, AxesLabel → {t, "$m_\lambda$(t)"}]

a = 0.01; b = 10; λ = 0.01;

q3 = Plot[m1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 90}}, PlotLegend → “λ=0.01”, PlotStyle → Green, AxesLabel → {t, "$m_\lambda$(t)"}]

a = 0.01; b = 10; λ = 0.05;

q4 = Plot[m1[t], {t, 0, 100}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 90}}, PlotLegend → “λ=0.05”, PlotStyle → Brown, AxesLabel → {t, "$m_\lambda$(t)"}]

Show[q2, q3, q4]

# Τρίτο Κεφάλαιο

## Παράδειγμα 3.1

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

h[t_]:=$\frac{t}{1+t}$

h1[t_]:=$\frac{1+2t}{1+t}$

m[t_]:=$\frac{2+t}{1+t}$

m1[t_]:=$\frac{5+2t}{4(1+t)}$

Plot[m1[t] − m[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, −1}}, AxesLabel → {t, "m*(t)-m(t)"} , PlotStyle → Black]

Plot[h1[t] − h[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, 2}}, AxesLabel → {t, "h*(t)-h(t)"} , PlotStyle → Black]

## Αντιπαράδειγμα 3.1

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

h[t_]:=$\frac{2}{2+t}$

h1[t_]:=$\frac{2}{3+t}$

m[t_]:=2 + t

m1[t_]:=3 + t

Plot[m1[t] − m[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, 2}},

AxesLabel → {t, "m*(t)-m(t)"}, PlotStyle → Black]

Plot[h1[t] − h[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, −0.5}},

AxesLabel → {t, "h*(t)-h(t)"}, PlotStyle → Black]

## Παράδειγμα 3.2

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$\mathrm{S[t\_]:=}\frac{1}{(1+t)^2}$

$\mathrm{c[t\_]:=}\frac{1+t}{2+t}$

$\mathrm{m[t\_]:=}\frac{1}{\mathrm{S[t]}} * \int_t^\infty \mathrm{S[x]}\,dx$

$\mathrm{mesh:=}\frac{1}{\mathrm{S[t]}} * \int_0^\infty \mathrm{S[x]}\,dx$

(*mesh = (1 + t)$^2$γιαt = 0mesh = 1*)

$\mathrm{(*S1[t\_]:=S[t]} * \left(1+\frac{\mathrm{c[0]}}{\mathrm{mesh}}\right) * \left(\frac{\mathrm{m[t]}}{\mathrm{m[t]+c[t]}}\right) * \mathrm{Exp}\left[\int_0^t \frac{\mathrm{c[x]}}{\mathrm{m[x]*(m[x]+c[x])}}\,dx\right] \mathrm{*)}$

$\mathrm{S1[t\_]:=S[t]} * \left(1+\frac{1/2}{1}\right) * \left(\frac{\mathrm{m[t]}}{\mathrm{m[t]+c[t]}}\right) * \mathrm{Exp}\left[\int_0^t \frac{\mathrm{c[x]}}{\mathrm{m[x]*(m[x]+c[x])}}\,dx\right]$

p1 = Plot[S[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, 1}}, PlotStyle → Magenta,

AxesLabel → {t, “S(t)”}]

p2 = Plot[S1[t], {t, 0, 2}, PlotRange → {{0, 2}, {0, 1}}, PlotStyle → Gray,

AxesLabel → {t, "S*(t)"}]

Show[p1, p2, PlotRange → {{0, 2}, {0, 1}}, AxesLabel → {t, “συνάρτηση επιβίωσης ”}]

## Παράδειγμα 3.3

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$\mathrm{S[t\_]:=}\frac{1}{(1+t)^2}$

$\mathrm{c[t\_]:=}\frac{1+t}{2+t}$

$\mathrm{h[t\_]:=}\frac{2}{1+t}$

$\mathrm{m[t\_]:=}\frac{1}{\mathrm{S[t]}} * \int_t^\infty \mathrm{S[x]}\,dx$

$h1[t\_]{:=}h[t]*\frac{m[t]}{m[t]+c[t]}$

$p1 = Plot[h[t], \{t, 0, 10\}, PlotRange \to \{\{0, 10\}, \{0, 2\}\}, PlotStyle \to Magenta,$

AxesLabel → {t, "h(t)"}]

$p2 = Plot[h1[t], \{t, 0, 10\}, PlotRange \to \{\{0, 10\}, \{0, 2\}\}, PlotStyle \to Gray,$

AxesLabel → {t, "h*(t)"}]

Show[p1, p2, PlotRange → {{0, 10}, {0, 2}}, AxesLabel → {t, "ένταση κινδύνου "}]

## Παράδειγμα 3.4

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$S[t\_]{:=}(1 + t) * Exp[-t]$

$c[t\_]{:=}2 + t$

$m[t\_]{:=}\frac{1}{S[t]} * \int_t^\infty S[x]\, dx$

$mesh{:=}\frac{1}{S[t]} * \int_0^\infty S[x]\, dx$

$(*mesh = \frac{2e^t}{1+t}\gamma\iota\alpha t = 0mesh = 2*)$

$(*S1[t\_]{:=}S[t] * \left(1 + \frac{c[0]}{mesh}\right) * \left(\frac{m[t]}{m[t]+c[t]}\right) * Exp\left[\int_0^t \frac{c[x]}{m[x]*(m[x]+c[x])}\, dx\right] *)$

$S1[t\_]{:=}S[t] * \left(1 + \frac{2}{2}\right) * \left(\frac{m[t]}{m[t]+c[t]}\right) * Exp\left[\int_0^t \frac{c[x]}{m[x]*(m[x]+c[x])}\, dx\right]$

$g1[t\_]{:=}\int_t^\infty S[x]\, dx$

$g2[t\_]{:=}\int_t^\infty S1[x]\, dx$

$p1 = Plot\left[g1[t], \{t, 0, 10\}, PlotStyle \to Magenta, AxesLabel \to \left\{t, "\int_t^\infty S(x)dx"\right\}\right]$

# Τέταρτο Κεφάλαιο

## Παράδειγμα 4.1

Η παράθεση των γραφημάτων έγινε σύμφωνα με τις κάτωθι εντολές

$S[t\_]{:=}(1 + 2t)Exp[-2t]$

$m[t\_]{:=}\frac{1+t}{1+2t}$

$c = 2;$

$(*S1[t\_]{:=}S[t]^{1/c}\left(\frac{m[t]}{E(T)}\right)^{(1-c)/c} *)$

$S1[t\_]{:=}S[t]^{1/c}\left(\frac{m[t]}{1}\right)^{(1-c)/c}$

(*$m1[t\_]{:=}\frac{1}{S1[t]} * \int_t^{\infty} S1[x]\,dx$*)

$d{:=}D[m[t],t]$

$h1[t]{:=}\frac{1+c*d}{c*m[t]}$

Plot [S1[t], {t, 0, 4}, PlotRange → {{0, 4}, {0, 1.5}}, AxesLabel → {t, "S*(t)"},

PlotStyle → Black]

Plot [h1[t], {t, 0, 1}, AxesLabel → {t, "h*(t)"}, PlotStyle → Black]

# Βιβλιογραφία


**Ελληνική**

Ρασσιάς Θ., 2004. Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α΄. Σαββάλας.

**Ξενόγλωσση**

Beamonte E., Bermúdez L.D., 2003. A bayesian semiparametric analysis for additive hazard models with censored observations. Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test, 347-363.

Bebbington M., Lai C.D., Zitikis R., 2008. Reduction in mean residual life in the presence of a constant competing risk. Applied Stochastic Models In Business And Industry, 51–63.

Das S., Nanda A.K., 2013. Some stochastic orders of dynamic additive mean residual life model. Journal of Statistical Planning and Inference, 143, 400-407.

Nanda A.K., Bhattacharjee S., Alam S.S. 2006. Properties of proportional mean residual life model. Statistics and Probability Letters, 76, 880-890.

Nanda A.K., Bhattacharjee S., Alam S.S. 2007. Properties of aging intensity function. Statistics and Probability Letters, 77, 365-373.

Nanda A.K., Das S. 2011. Dynamic proportional rate and reversed hazard rate models. Journal of Statistical Planning and Inference, 141, 2108-2119.

Lai C.D., Xie M., 2005. Stochastic ageing and dependence for reliability. USA. Springer.

Liu X., 2012. Survival analysis models and applications. USA. Wiley.

Marshall A.W., Olkin I., 2007. Life distributions structure of nonparametric, semiparametric, and parametric families. USA. Springer.

Shaked M., Shanthikumar J.G., 2007. Stochastic orders. USA. Springer.

Singpurwalla N.D., 2006. Reliability and risk a bayesian perspective. USA. Wiley.

Xie X., Strickler H.D., Xue X., 2013. Additive hazard regression models: an application to the natural history of human papillomavirus. Computational and mathematical methods in medicine, to appear doi.org/10.1155/2013/796270.