

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

**“ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΔΡΟΜΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΩΝ
ΧΡΟΝΩΝ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΣΕ
ΜΙΑ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ
ΑΝΕΛΙΞΗ”**

ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΔΟΥΚΙΣΣΑΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς

Απρίλης 2014

UNIVERSITY OF PIRAEUS



SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

STUDY OF THE BACKWARD

AND FORWARD

RECURRENCE TIMES IN A

RENEWAL FUNCTION

By

LEONIDAS DOUKISSAS

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus

April 2014

Στην Οικογένειά μου και

στην Δέσποινα.

Ευχαριστώ για την Αγάπη τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σκοπός της ζωής μας δεν είναι η χαμέρπεια. Υπάρχουν απειράκις ωραιότερα πράγματα και απ' αυτήν την αγαλαματώδη παρουσία του περασμένου έπουσ. Σκοπός της ζωής μας είναι η αγάπη. Σκοπός της ζωής μας είναι η ατελεύτητη μάζα μας. Σκοπός της ζωής μας είναι η λυσιτελής παραδοχή της ζωής μας και της κάθε μας ευχής εν παντί τόπω εις πάσαν στιγμήν εις κάθε ένθερμον αναμόχλευσιν των υπαρχόντων. Σκοπός της ζωής μας είναι το σεσημασμένον δέρας της υπάρξεώς μας.

(Τριαντάφυλλα στο παράθυρο. Ανδρέας Εμπειρικός από την Υψικάμμο, Άγρα 1980)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Πρόλογος

Νιώθω ιδιαίτερη χαρά αλλά και τιμή που μου δόθηκε η δυνατότητα να ολοκληρώσω την διπλωματική μου εργασία υπό την επίβλεψη του κ. Κωνσταντίνου Πολίτη. Η εξαιρετική του καθοδήγηση, καλοσύνη, μεθοδικότητα αποτέλεσε βασικό παράγοντα για την ολοκλήρωση του παρόντος πονήματος και της αγαστής συνεργασίας μας. Τον ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου. Παράλληλα όμως θέλω να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Μ.Κούτρα καθώς και τον κ. Ν.Μαχαιρά, για τις γνώσεις που μου παρείχαν τόσο σε Προπτυχιακό όσο και σε Μεταπτυχιακό επίπεδο όλα ετούτα τα χρόνια. Κλείνοντας, θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου για τις πολύτιμες συμβουλές στον μαθηματικό και Δήμαρχο Άνδρου κ. Ιωάννη Γλυνό.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τον προδρομικό και αναδρομικό χρόνο εμφάνισης σε μία ανανεωτική διαδικασία. Αρχικά, βρίσκουμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η κατανομή του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου ενώ επιπλέον υπολογίζουμε την από κοινού ουρά της κατανομής των δύο αυτών μεταβλητών.

Επιπροσθέτως, μελετάμε την συνάρτηση συνδιακύμανσης μεταξύ του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης. Μέσω της από κοινού συνάρτησης κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης, υπολογίζουμε ένα κλειστό τύπο στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση και έναν απλό τύπο για τη σταθερή κατάσταση. Επιπλέον, υπολογίζουμε την συνάρτηση συσχέτισης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου για τη σταθερή κατάσταση.

Τέλος, εξετάζουμε ένα στατιστικό πρόβλημα που αφορά στην εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής του προδρομικού χρόνου ζωής. Δοθέντος ενός τυχαίου δείγματος από ενδιάμεσους χρόνους, για τους οποίους η κοινή κατανομή F δεν είναι γνωστή, βρίσκουμε έναν δειγματικό εκτιμητή για την εκτιμώμενη συνάρτηση. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Glivenko – Cantelli, αποδεικνύουμε ότι αυτός ο δειγματικός εκτιμητής ο οποίος κατασκευάζεται με βάση την εμπειρική συνάρτηση κατανομής, είναι συνεπής. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι ο εκτιμητής συγκλίνει ομοιόμορφα στην εκτιμώμενη συνάρτηση, αρχικά σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, b]$, αλλά και τελικά σε όλο το $[0, \infty)$.

Abstract

To this study, we focus on the forward and backward recurrence time of a renewal process. Primarily, we find the renewal function that satisfies the density of forward and backward time and we also calculate the joint tale of the distribution of these two variables. Additionally, we study the covariance function between forward and backward recurrence time. Through the joint density function of the forward and backward recurrence time, we calculate a close type in the time depended state and a simple type for the steady state. Furthermore, we calculate the correlation function of the forward and backward recurrence time for the steady state. Finally, we examine a statistical problem which concerns the estimation of the density function for the forward recurrence time. Suppose, we have a random sample of interarrival times, that their common distribution is unknown, we find a sample estimator for the estimated function. With the assistance of the theorem Glivenko-Cantelli, we prove that this sample estimator, that is made of the empirical distribution function, it's consistent estimator. Specifically, we prove that the estimator converge uniformly to our estimated function, firstly in every interval of the type $[a,b]$ and finally in all $[0, \infty)$.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Ανανεωτικές ανελίξεις	5
2.1	Εισαγωγικές Έννοιες	5
2.2	Διαδικασία <i>Poisson</i>	10
2.3	Κατανομή ενδιάμεσων χρόνων και χρόνος αναμονής	13
2.4	Ολοκλήρωση ως προς μία αύξουσα συνάρτηση	18
2.5	Συνελίξεις: Ορισμοί και Ιδιότητες	19
2.6	Ανανεωτικές Εξισώσεις	22
3	Προδρομικοί και αναδρομικοί χρόνοι εμφάνισης	27
3.1	Ανανεωτικές εξισώσεις για τους χρόνους εμφάνισης	28
3.2	Δύο βασικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα	34
3.3	Από κοινού κατανομή των $A(t)$ και $B(t)$	36
3.4	Από κοινού κατανομή στην σταθερή κατάσταση	38
4	Η συνάρτηση συσχέτισης	41
4.1	Η συνδιακύμανση στην χρονικά εξαρτημένη περίπτωση	41
4.2	Η χρονικά εξαρτημένη συσχέτιση.	46
4.3	Η συνάρτηση συνδιακύμανσης στη σταθερή κατάσταση	47
4.4	Η συνάρτηση συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση	49
4.5	Αριθμητικά παραδείγματα στη περίπτωση της κατανομής Γάμμα.	54
5	Εκτίμηση προδρομικού χρόνου	73
5.1	Συνέπεια Εκτιμητή	74
5.2	Περιγραφή του προβλήματος	75
5.3	Ομοιόμορφη Σύγκλιση Εκτιμητών	76
5.4	Συνέπεια Εκτιμητή	79

Παράρτημα Α' Θεωρήματα σύγκλισης κατανομών	85
Παράρτημα Β' Μετασχηματισμός <i>Laplace Stieltjes</i> ($L-S$)	87
Παράρτημα Γ' Συνοπτική Επισκόπηση Θεωρίας Μέτρου	93
Παράρτημα Δ' Πρόγραμμα στο <i>Mathematica</i>	107
Βιβλιογραφία	119

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΝ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στις εφαρμοσμένες πιθανότητες είναι αρκετά σύνηθες να ασχολούμαστε με τις στοχαστικές διαδικασίες. Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$ όπου t είναι μία παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T . Μία κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών αποτελούν οι ανανεωτικές ανελίξεις που έχουν ως στόχο τους τη μελέτη διαδοχικών πραγματοποιήσεων ενός γεγονότος όταν οι ενδιαμέσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Όπως θα δούμε αναλυτικά και στο Κεφάλαιο 2 οι ανανεωτικές ανελίξεις αποτελούν γενίκευση της διαδικασίας *Poisson* αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων μπορούν να έχουν οποιαδήποτε κατανομή εν αντιθέσει με την ανέλιξη *Poisson* στην οποία είναι η εκθετική κατανομή.

Η ποσότητα που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις ανανεωτικές ανελίξεις είναι η ανανεωτική συνάρτηση και ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός ανανεώσεων της διαδικασίας σε ένα δοσμένο χρονικό διάστημα. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση θα πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων. Ακόμη και στην περίπτωση αυτή όμως, η ανανεωτική συνάρτηση είναι πραγματικά αρκετά δύσκολο να υπολογιστεί για μία πληθώρα κατανομών. Για αυτό το λόγο αρχούμε σε φράγματα και προσεγγίσεις. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με το προδρομικό και αναδρομικό χρόνο εμφάνισης ενός γεγονότος σε μία ανανεωτική διαδικασία. Θα υπολογίσουμε επιπλέον την από κοινού ουρά της κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου. Επίσης θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης και συνδιακύμασης στη σταθερή αλλά και στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση. Τέλος, θα κατασκευάσουμε έναν συνεπή εκτιμητή για τον προδρομικό χρόνο ζωής και με συνδυασμό ορισμένων θεωρημάτων και προ-

τάσεων θα επιτύχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση σε διάστημα και εν τέλει σε όλο το $(0, \infty)$.

Δομή Εργασίας

Η δομή που θα ακολουθηθεί στη παρούσα εργασία είναι η εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 θα ορίσουμε τις ανανεωτικές εξισώσεις, την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ καθώς επίσης θα μελετήσουμε και τις βασικές ιδιότητές της. Επιπλέον θα δώσουμε και τη γενική μορφή για τη λύση μίας ανανεωτικής εξίσωσης.

Στο Κεφάλαιο 3 θα ορίσουμε τον προδρομικό και αναδρομικό χρόνο εμφάνισης σε μία ανανεωτική διαδικασία. Επίσης, θα βρούμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η κατανομή του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου. Επιπροσθέτως θα υπολογίσουμε την από κοινού ουρά της κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε την συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης. Μέσω της από κοινού συνάρτησης κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης θα υπολογίσουμε ένα κλειστό τύπο στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση και έναν απλό τύπο για τη σταθερή κατάσταση. Επιπλέον, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συνδιακύμανσης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου για τη σταθερή κατάσταση. Τέλος, υπολογίζουμε αρκετά αριθμητικά παραδείγματα στη σταθερή κατάσταση καθώς και στη χρονικά εξαρτημένη κατάσταση με τη χρήση του μαθηματικού πακέτου *Mathematica*.

Στο Κεφάλαιο 5 θα ασχοληθούμε με ένα βασικό στατιστικό πρόβλημα που αφορά στην εκτίμηση του προδρομικού χρόνου ζωής. Δοθέντος ενός τυχαίου δείγματος από ενδιάμεσους χρόνους, όπου η κοινή κατανομή F δεν είναι γνωστή, θα βρούμε έναν δειγματικό εκτιμητή για την εκτιμώμενη ανανεωτική συνάρτηση. Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο δειγματικός εκτιμητής είναι συνεπής και με τη βοήθεια της εμπειρικής συνάρτησης, του θεωρήματος *Glivenko – Cantelli* αποδεικνύουμε ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για την εκτιμώμενη ανανεωτική συνάρτηση σε διάστημα $[0, b]$ αλλά και τελικά σε όλο το $[0, \infty)$.

Κεφάλαιο 2

Ανανεωτικές ανελίξεις

2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα γενικά χαρακτηριστικά και τις κυριότερες ιδιότητες μιας ειδικής κατηγορίας στοχαστικών ανελίξεων, τις ανανεωτικές ανελίξεις. Αυτές χρησιμοποιούνται ως μοντέλα σε μία πλειάδα εφαρμογών όπως για παράδειγμα τη μηχανική, την αναλογιστική επιστήμη, τη δημογραφία κλπ. Για τη θεωρία που θα ακολουθήσει στηριχθήκαμε κυρίως στο βιβλίο του *Resnick* (2002), των *Grimmet* και *Stirzaker* (2008) του *Ross* (2010) και του *Pitman* (2006). Στη παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ενδεχόμενα που συμβαίνουν σε τυχαίους χρόνους όπου οι χρόνοι αυτοί μεταξύ των ενδεχομένων μπορούν να παρασταθούν από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) που έχουν ως εύρος το διάστημα $(0, \infty)$. Έχουμε τη δυνατότητα γνωρίζοντας τη συνάρτηση πυκνότητας μίας κατανομής να υπολογίσουμε τον τυχαίο χρόνο κάποιου μεγέθους, όπως για παράδειγμα:

1. τον εναπομείναντα χρόνο αναμονής ενός ατόμου που περιμένει στη στάση μέχρι να περάσει το επόμενο λεωφορείο του.
2. το χρόνο μέχρι να εξυπηρετηθεί ο επόμενος πελάτης σε μία τράπεζα.

Έστω ότι η κατανομή ενός τυχαίου χρόνου T ορίζεται από μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$ για $0 \leq t < \infty$. Τότε για $0 \leq a < b < \infty$ έχουμε:

$$P(a < T \leq b) = \int_a^b f(t)dt \quad (2.1)$$

όπου T δηλώνει το χρόνο ζωής. Η πιθανότητα να επιβιώσει κάποιος πέρα από το χρόνο s ισούται με:

$$P(T > s) = \int_s^{\infty} f(t)dt \quad (2.2)$$

και είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του s , που ονομάζεται **συνάρτηση επιβίωσης**. Από το κανόνα της διαφοράς των πιθανοτήτων ισχύει ότι:

$$P(a < T \leq b) = P(T > a) - P(T > b) \quad (2.3)$$

έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα του τυχαίου χρόνου να βρεθεί σε οποιοδήποτε διάστημα μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση επιβίωσης. Η εκθετική κατανομή αποτελεί το απλούστερο μοντέλο για τυχαίο χρόνο που δεν έχει άνω φράγμα στο εύρος τιμών του (για παράδειγμα εξαρτήματα ορισμένων ηλεκτρικών συσκευών). Αρκετά μοντέλα που περιέχουν τη τυχειότητα στο χρόνο ονομάζονται **στοχαστικές διαδικασίες** και έχουν δημιουργηθεί από το συνδυασμό ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων χρόνων. Όπως θα αναλύσουμε και στη συνέχεια εν συντομία μία τέτοια περίπτωση (σε σημείο) αποτελεί η διαδικασία *Poisson* η οποία μας μετρά το χρόνο των επιτυχημένων αφίξεων όπως για παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ο χρόνος που εισέρχονται οι πελάτες σε μία τράπεζα. Στο μοντέλο αυτό, οι επιτυχημένοι ενδιαμέσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ο χρόνος της n -οστής άφιξης ακολουθεί τη κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (n, λ) . Αξίζει στο παρόν σημείο να σημειώσουμε ότι η εκθετική και η Γάμμα κατανομή είναι τα συνεχή ανάλογα της Γεωμετρικής και της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Αρχικά υπενθυμίζουμε τα βασικά στοιχεία (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, συνάρτηση κατανομής, μέση τιμή και διακύμανση) τριών κατανομών που θα μας φανούν αρκετά χρήσιμες στη συνέχεια.

1. Κατανομή *Poisson*

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από το τύπο:

$$f(x; \lambda) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση είναι ίσες και δίνονται από το τύπο:

$$E(x) = V(x) = \lambda$$

2. Εκθετική κατανομή

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από το τύπο:

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0, \infty)}(x)$$

Η συνάρτηση κατανομής ισούται με:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Κατανομή Γάμμα

Έστω $\lambda, r \geq 0$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}$$

όπου:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt, \quad r > 0$$

η συνάρτηση Γάμμα.

Επιπλέον ισχύουν:

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r), \quad r > 0$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\nu+1) = \nu!$$

για ακέραιο $\nu \geq 0$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα δεν είναι αρκετά εύκολο να υπολογιστεί. Ωστόσο, όταν η παράμετρος r είναι θετικός ακέραιος η αθροιστική σ.κ. ονομάζεται συνήθως με το όνομα *Erlang* και ισούται με:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{i=\nu}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{\nu-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \end{aligned} \quad (2.4)$$

για $t \geq 0$, βλέπε Κούτρας (2004)

Εν συνεχεία θα ορίσουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στην ανάλυση μας. Έστω $Y_n, n \geq 1$ ακολουθία από τ.μ. που παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές με κοινή κατανομή F (ισόνομες). Υποθέτουμε ότι $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$ ή αντίστοιχα $\forall n \geq 1$.

$$P(Y_n < 0) = 0, P(Y_n = 0) < 1.$$

Για $n \geq 0$ ορίζουμε:

$$Y_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \sum_{n=1}^n T_n. \quad (2.5)$$

Η ακολουθία $Y_n, n \geq 0$ ονομάζεται **ανανεωτική ακολουθία**. Η τ.μ. Y_n εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι το n -οστό γεγονός. Οι ποσότητες Y_n θεωρούνται ως οι χρόνοι που συνέβησαν ορισμένα συμβάντα και καλούνται **χρόνοι ανανέωσης** με $Y_0 = T_0 = 0$. Τέλος θεωρούμε το χρόνο 0 ως ένα συμβάν. Για παράδειγμα έστω Y είναι ο χρόνος ζωής μίας μηχανής που όταν χαλάει αντικαθίσταται. Τότε οι χρόνοι ανανέωσης μπορούν να παρασταθούν με τις μεταβλητές $Y_n, n \geq 0$, θεωρώντας ότι υπάρχει ανανέωση και τη χρονική στιγμή μηδέν.

• Οι μεταβλητές T_i ονομάζονται **ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής** της ανέλιξης $\{N(t)\}$.

Θεωρούμε τη σημειακή διαδικασία (*point process*) που μετρά το πλήθος των ανανεώσεων του συστήματός μας στο διάστημα $[0, t]$.

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(Y_n)$$

όπου 1_A είναι η δείκτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Y_n

Η σημειακή διαδικασία $N(t)$, βλέπε Ross (2010), είναι μία απαριθμητρία διαδικασία (*counting process*) όταν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $N(t) \geq 0$
2. Η $N(t)$ να παίρνει ακέραιες τιμές
3. Εάν $s < t$, τότε $N(s) \leq N(t)$ με πιθανότητα 1.
4. Για $s < t$ η διαφορά $N(t) - N(s)$ ισούται με τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί στο διάστημα $(s, t]$.

Μία σημειακή διαδικασία θα λέμε ότι έχει στάσιμες προσυζητήσεις εάν η κατανομή του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάθε διάστημα χρόνου εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος. Επομένως η διαδικασία έχει στάσιμες προσυζητήσεις εάν ο αριθμός των γεγονότων στο διάστημα $(s, s + t)$ έχει την ίδια κατανομή για όλα τα s .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2.2 Διαδικασία Poisson

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μία από τις πιο βασικές σημειακές διαδικασίες, τη διαδικασία *Poisson*. Η συγκεκριμένη διαδικασία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1

Η σημειακή διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ θα ονομάζεται **διαδικασία Poisson** με ρυθμό λ , $\lambda > 0$ εάν ισχύουν τα εξής:

1. $N(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
3. Ο αριθμός των γεγονότων σε κάθε διάστημα μήκους t ακολουθεί τη κατανομή *Poisson* με μέση τιμή λt .

Δηλαδή, για όλα τα $s, t \geq 0$ ισχύει:

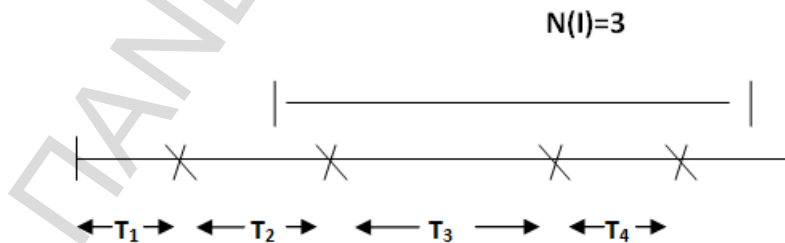
$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Από τη συνθήκη (3) προκύπτει ότι η διαδικασία *Poisson* έχει στάσιμες προσαυξήσεις και επίσης ότι η μέση τιμή ισούται με λt δηλαδή ισχύει:

$$E[N(t)] = \lambda t$$

το οποίο εξηγεί γιατί το λ ονομάζεται ο ρυθμός της διαδικασίας.

Σχήμα 1 Η κατανομή του αριθμού αφίξεων σε ένα δοσμένο χρονικό διάστημα I μήκους t ακολουθεί τη κατανομή *Poisson* (λt).



Η συνθήκη (3) του ορισμού σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δύσκολο να επαληθευτεί για αυτό το λόγο κρίνεται αναγκαίο να επισημάνουμε και έναν ισοδύναμο ορισμό για να διαπιστώνουμε εάν μία διαδικασία είναι διαδικασία *Poisson*. Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια μίας συνάρτησης $f(\cdot)$ να είναι $o(h)$.

Ορισμός 2

Η συνάρτηση $f(\cdot)$ θα ονομάζεται $o(h)$ εάν ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(h) = h^3$ είναι $o(h)$ αφού ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(h) = h$ δεν είναι $o(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \neq 0.$$

Επίσης αναφέρουμε πως αν η $f(\cdot)$ είναι $o(h)$ και η $g(\cdot)$ είναι $o(h)$ τότε και το άθροισμα $f(\cdot) + g(\cdot)$ είναι $o(h)$ αφού ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0 + 0 = 0.$$

Αντίστοιχα εάν η $f(\cdot)$ είναι $o(h)$, τότε και η $g(\cdot) = cf(\cdot)$ είναι $o(h)$ αφού ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = c \cdot 0 = 0.$$

Από τις δύο προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων που είναι $o(h)$ είναι $o(h)$. Εν συνεχεία μπορούμε να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της διαδικασίας *Poisson*.

Ορισμός 3

Η σημειακή διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία *Poisson* με ρυθμό λ , $\lambda > 0$ εάν ισχύει:

1. $N(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσauξήσεις
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

2.3 Κατανομή ενδιάμεσων χρόνων και χρόνος αναμονής

Θεωρούμε τη διαδικασία *Poisson* και όπως αναφέραμε και στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, έστω με T_1 δηλώνουμε το χρόνο του πρώτου γεγονότος. Επιπλέον, για $n > 1$, έστω η ποσότητα T_n δηλώνει τον εναπομείοντα χρόνο μεταξύ του $n - 1$ και n -οστού γεγονότος. Έτσι λοιπόν την ακολουθία $T_n, n = 1, 2, \dots$ θα την ονομάζουμε ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων. Για παράδειγμα έστω $T_1 = 5$ και $T_2 = 10$, τότε το πρώτο γεγονός της διαδικασίας *Poisson* συνέβη στο χρόνο 5 και το δεύτερο στο χρόνο 15. Θέλοντας να προσδιορίσουμε τη κατανομή του T_n , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ενδεχόμενο $T_1 > t$ πραγματοποιείται εάν και μόνο αν δεν συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα της διαδικασίας *Poisson* στο διάστημα $[0, t]$, και επομένως:

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

Επομένως ο T_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$. Για το T_2 υπολογίζουμε

$$P\{T_2 > t\} = E[P\{T_2 > t | T_1\}]$$

ενώ,

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t | T_1 = s\} &= P\{0 \text{ ενδεχόμενα στο } (0, s + t) | T_1 = s\} \\ &= P\{0 \text{ ενδεχόμενα στο } (s, s + t)\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

όπου οι τελευταίες δύο εξισώσεις έχουν ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις. Επομένως και ο T_2 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$ και επιπλέον ο T_2 είναι ανεξάρτητη από τον T_1 . Επαναλαμβάνοντας ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1

Οι $T_n, n = 1, 2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $1/\lambda$.

Δηλαδή σε κάθε σημείο στο χρόνο η διαδικασία ξεκινάει από μόνη της. Η διαδικασία σε κάθε σημείο είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη στο παρελθόν

(λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων) και επιπλέον έχει την ίδια κατανομή (λόγω των στάσιμων προσαυξήσεων). Για αυτό το λόγο λέμε ότι η διαδικασία δεν διαθέτει μνήμη και επομένως οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικοί.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5) που εκφράζει το χρόνο άφιξης του n -οστού γεγονότος, τον Ορισμό 1 της διαδικασίας *Poisson* και το γεγονός ότι το άθροισμα εκθετικών κατανομών μας δίνει τη Γάμμα κατανομή προκύπτει ότι το Y_n ακολουθεί τη κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (n, λ) .

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y_n δίνεται από τη σχέση:

$$f_{Y_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0$$

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το n -οστό γεγονός θα συμβεί πριν ή στο χρόνο t εάν και μόνο αν ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν μέχρι το χρόνο t είναι τουλάχιστον n δηλαδή:

$$N(t) \geq n \iff Y_n \leq t$$

επομένως

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P\{Y_n \leq t\} \\ &= P\{N(t) \geq n\} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &\quad - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

2.3. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ15

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή διαδικασίας Poisson σε τηλεφωνικές κλήσεις.

Έστω ότι οι τηλεφωνικές κλήσεις φθάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο με ρυθμό 3 κλήσεις το λεπτό, σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson. Για παράδειγμα έστω $N(2, 4)$ ο αριθμός των κλήσεων στο χρόνο $t = 2$ και $t = 4$ ακολουθεί τη κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda(4 - 2) = 3 \times 2 = 6$ και ο T_3 , δηλαδή ο χρόνος αναμονής μεταξύ της δεύτερης και τρίτης κλήσης ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 3$. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε:

- (α) Τη πιθανότητα να μην εμφανιστούν καθόλου κλήσεις μεταξύ των χρόνων $t = 0$ και $t = 2$.

Αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει $N(0, 2]$ ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν σε αυτό το διάστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson(6) η πιθανότητα αυτή ισούται με:

$$P(N(0, 2] = 0) = e^{-6} = 0.0025$$

- (β) Τη πιθανότητα ότι η πρώτη κλήση μετά το χρόνο $t = 0$ θα πάρει περισσότερο από 2 λεπτά να φτάσει.

Αφού ο T_1 ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 3$ τότε η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(T_1 > 2) = e^{-3 \times 2} = e^{-6} = 0.0025$$

Η απάντηση στο (β) είναι η ίδια με το (α) επειδή τα ενδεχόμενα είναι ταυτοτικά.

- (γ) Η πιθανότητα να μην φθάσουν καθόλου κλήσεις μεταξύ του διαστήματος $t = 0$ και $t = 2$ και τουλάχιστον τέσσερις κλήσεις να φθάσουν μεταξύ του διαστήματος $t = 2$ και $t = 3$ ισούται με:

$$\begin{aligned} P(N(0, 2] = 0) \times P(N(2, 3] \leq 4) &= e^{-6} \times e^{-3} \times \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}\right) \\ &= 0.0020 \end{aligned}$$

- (δ) Η πιθανότητα ότι η τέταρτη κλήση θα φτάσει με διαφορά 30 δευτερολέπτων από τη τρίτη ισούται με:

$$\begin{aligned} P(T_4 \leq 0.5) &= 1 - P(T_4 > 0.5) = 1 - e^{-3 \times 0.5} \\ &= 0.7769 \end{aligned}$$

- (ε) Η πιθανότητα ότι η πρώτη κλήση μετά από το χρόνο $t = 0$ θα πάρει λιγότερο 20 δευτερόλεπτα για να φτάσει και ο χρόνος αναμονής μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κλήσης είναι μεγαλύτερος των 3 λεπτών ισούται με:

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq 1/3) \times P(T_2 > 3) &= (1 - e^{-3 \times 20/60}) \times e^{-3 \times 3} \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

- (στ) Η πιθανότητα ότι η πέμπτη κλήση θα χρειαστεί περισσότερο από 2 λεπτά για να φτάσει. Επειδή ο χρόνος άφιξης της πέμπτης κλήσης ισούται με το άθροισμα των πέντε πρώτων ενδιάμεσων χρόνων, το πρόβλημα έγκειται στο να εντοπίσουμε την:

$$P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) > 2$$

όπου οι T_i είναι ανεξάρτητοι ενδιάμεσοι χρόνοι που ακολουθούν εκθετική κατανομή παραμέτρου 3. Το πρόβλημα λύνεται αν ερμηνεύσουμε με ακρίβεια τη κατανομή *Poisson*. Η πέμπτη κλήση παίρνει περισσότερο από 2 λεπτά να φτάσει εάν και μόνο αν τουλάχιστον τέσσερις κλήσεις φτάσουν μεταξύ του χρόνου $t = 0$ και $t = 2$. Έτσι λοιπόν η απαιτούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 > 2) &= P(N(0, 2] \leq 4) \\ &= e^{-6} \left(1 + 6 + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} \right) \\ &= 0.2851 \end{aligned}$$

2.3. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ17

Σχεδόν πάντα η κατανομή του $N(t)$ δεν είναι γνωστή (με εξαίρεση όπως είδαμε την ανέλιξη *Poisson* όπου τα $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και οι $N(t) \forall t \geq 0$ ακολουθούν τη κατανομή *Poisson* με μέση τιμή λt). Για αυτό το λόγο λοιπόν μελετάμε την μέση τιμή της $N(t)$ την οποία καλούμε **ανανεωτική συνάρτηση**. Σε πολλές περιπτώσεις ούτε η συνάρτηση $U(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, οπότε χρησιμοποιούμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Για $t \geq 0$, έστω η συνάρτηση:

$$E(N(t)) = U(t)$$

Η συνάρτηση $U(t)$:

- Είναι αύξουσα
- και **δεν** είναι συνάρτηση κατανομής διότι

$$U(x) \rightarrow \infty \quad \text{οταν } x \rightarrow \infty$$

ενώ αν ήταν θα έπρεπε να ισχύει $U(x) \rightarrow 1$ όταν $x \rightarrow \infty$. Μπορούμε να τη θεωρήσουμε (ορίσουμε):

1. είτε ως συνολοσυνάρτηση (*set function*) όπου τότε θα ισούται με

$$U\{I\} = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}\{I\} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_k \in I)$$

για κάθε σύνολο *Borel* I στον ημιάξονα $[0, \infty)$

2. είτε ως συνήθη μαθηματική συνάρτηση

$$U : [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x).$$

Επισημαίνουμε πως όταν $I = [0, x]$ οι δύο ανωτέρω αριθμοί συμπίπτουν.

2.4 Ολοκλήρωση ως προς μία αύξουσα συνάρτηση

Έχοντας ως στόχο να ολοκληρώσουμε ως προς τις μονότονες συναρτήσεις $U(x)$ στο $[0, +\infty)$ δηλαδή να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{\infty} g(x) dU(x). \quad (2.6)$$

Παρατηρούμε πως εάν η $U(x)$ παρουσιάζει ένα άλμα στο 0 τότε αυτό πρέπει να υπολογιστεί στην ολοκλήρωση. Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Εάν η $U(x)$ είναι απολύτως συνεχής (α.σ) δηλαδή υπάρχει μία πυκνότητα u που ικανοποιεί $u(x) \geq 0$, έτσι ώστε

$$\int_0^T u(x) dx < \infty, \quad \forall T > 0 \text{ και}$$

και για $b > a \geq 0$

$$\int_a^b u(s) ds = U(b) - U(a),$$

τότε το ολοκλήρωμα στην (2.6) γράφεται

$$\int_0^{\infty} g(x) U(dx) = \int_0^{\infty} g(x) u(x) dx.$$

Η συνάρτηση $u(x)$ ονομάζεται ανανεωτική πυκνότητα.

2. Εάν η U είναι διακριτή τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_i και βάρη w_i , με $w_i < \infty$ και ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} U(a_i) - U(a_i - h) = w_i > 0$$

δηλαδή το μέτρο U (δείτε παράρτημα Γ) έχει μάζα w_i στο a_i . Η αύξουσα συνάρτηση $U(x)$ είναι σταθερή (εκτός των σημείων a_i όπου παρουσιάζει άλμα ποσότητας w_i). Συνεπώς λοιπόν, η συνάρτηση $U(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$U(x) = \sum_{i: 0 \leq a_i < x} U(\{a_i\}) = \sum_{i: 0 \leq a_i < x} w_i$$

Έτσι το ολοκλήρωμα (2.6) γίνεται:

$$\int g(x)U(dx) = \int g(x)dU(x) := \sum_i w_i g(a_i)$$

3. Εάν η U είναι μία μείξη του τύπου:

$$U\{A\} = \alpha U_{\alpha,\sigma}\{A\} + \beta U_{\text{διακριτή}}\{A\}$$

για κάθε σύνολο *Borel* A , τότε

$$\begin{aligned} \int g(x)dU(x) &= \alpha \int g(x)U_{\alpha,\sigma}(dx) + \beta \int g(x)dU_{\text{διακριτή}}(x) \\ &= \alpha \int g(x)u_{\alpha,\sigma}(x)dx + \beta \sum g(a_i)w_i, \end{aligned}$$

όπου $U_{\alpha,\sigma}, U_{\text{διακριτή}}$, δηλώνουν αντίστοιχα το συνεχές και το διακριτό τμήμα της U .

2.5 Συνελίξεις: Ορισμοί και Ιδιότητες

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ και όλες οι κατανομές είναι συγκεντρωμένες στο \mathbb{R}_+ . Ονομάζουμε μία συνάρτηση g **τοπικά φραγμένη** εάν η g είναι φραγμένη σε **πεπερασμένα διαστήματα**. Δοθείσης μίας φραγμένης συνάρτησης και μίας συνάρτησης κατανομής F μπορούμε να ορίσουμε τη **συνέλιξη** της F και g ως τη συνάρτηση:

$$F \star g(t) := \int_0^t g(t-x)F(dx) \text{ για } t \geq 0.$$

Εν συνεχεία αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες:

1. $F \star g \geq 0$ με την προϋπόθεση ότι $g(x) \geq 0 \forall x$
2. Η $F \star g$ είναι **τοπικά φραγμένη**:

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |F \star g(s)| \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \right) F(t).$$

3. Εάν η g είναι φραγμένη και συνεχής, τότε και η $F \star g$ είναι συνεχής, αφού

$$F \star g(t) = Eg(t - Y_1)$$

όπου η Y_1 έχει κατανομή F . Συνεπώς εάν $t_n \rightarrow t$ έχουμε σχεδόν βέβαια ότι:

$$g(t_n - Y_1) \rightarrow g(t - Y_1)$$

από τη συνέχεια και αφού η g είναι φραγμένη, από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης συνεπάγεται ότι:

$$Eg(t_n - Y_1) = F \star g(t_n) \rightarrow Eg(t - Y_n) = F \star g(t).$$

4. Ο τελεστής της συνέλιξης μπορεί να επαναληφθεί:

$$F \star (F \star g)$$

- $F^{\star 0}(x) = 1_{[0, \infty)}(x)$ (η δείκτρια συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$)
- $F^{\star 1}(x) = F(x)$ και για $n \geq 1$ έχουμε:

$$F^{\star(n+1)}(x) = F^{\star n} \star F(x).$$

- ο $F^{\star 0}(x)$ λειτουργεί ως ταυτοτικός τελεστής για τη πράξη της συνέλιξης. Πράγματι,

$$(F^{\star 0} \star g)(x) = \int_0^x g(x-y) dF^{\star 0}(y),$$

αλλά η $F^{\star 0}$ είναι μία κατανομή πιθανότητας εκφυλισμένη στο σημείο 0. Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$F^{\star 0} \star g = g$$

για κάθε τοπικά φραγμένη συνάρτηση g .

- Επίσης ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$F \star (F \star g) = (F \star F) \star g = F^{\star 2} \star g.$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως αν η F είναι συνάρτηση κατανομής τότε το ίδιο ισχύει και για την $F^{\star 2}$, και γενικά για την $F^{\star n}$.

5. Επισημαίνουμε πως η συνέλιξη δύο κατανομών αντιστοιχεί σε αθροίσματα ανεξάρτητων τ.μ. Έστω για παράδειγμα ότι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και έχουν κατανομή F_i για $i = 1, 2$ τότε το άθροισμα $X_1 + X_2$ έχει κατανομή $F_1 \star F_2$, αφού για $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 \leq t] &= P[(X_1, X_2) \in \{R_+^2 : x + y \leq t\}] \\ &= \int \int_{(x,y \in R_+^2): x+y \leq t} F_1(dx)F_2(dy) \end{aligned}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα *Fubini* και δεδομένου ότι οι ποσότητες μας είναι θετικές μπορεί να γίνει εναλλαγή στα ολοκληρώματα. Έτσι παίρνουμε:

$$\int_0^t \left[\int_{y=0}^{t-x} F_2(dy) \right] F_1(dx) = \int_0^t F_2(t-x)F_1(dx).$$

6. Η απόδειξη της τελευταίας σχέσης μας δείχνει ότι ισχύει η αντιμεταθετικότητα $F_1 \star F_2 = F_2 \star F_1$.
7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί πως εάν X_1, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή F τότε το άθροισμα $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ έχει κατανομή $F^{n\star}$.
8. Εάν οι F_i είναι απολύτως συνεχείς (α.σ) με πυκνότητες f_i , $i = 1, 2$, τότε και η $F_1 \star F_2$ είναι απολύτως συνεχής με πυκνότητα:

$$f_1 \star f_2(t) := \int_0^t f_1(t-y)f_2(y)dy = \int_0^t f_2(t-y)f_1(y)dy.$$

Σύμφωνα με τον (*Feller, 1971*), εάν η F είναι απολύτως συνεχής, τότε για **κάθε** κατανομή G η $F \star G$ είναι απολύτως συνεχής.

2.6 Ανανεωτικές Εξισώσεις

Μία ανανεωτική εξίσωση είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής:

$$Z = z + F \star Z$$

ή αντίστοιχα

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)F(dy).$$

Όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο $[0, \infty)$ και θέτουμε $z(t) = Z(t) = F(t) = 0$ για $t < 0$. Επιπλέον σημειώνουμε πως η Z είναι η **άγνωστη** συνάρτηση η z είναι μία γνωστή και τοπικά φραγμένη συνάρτηση και η F είναι μία συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$. Επισημαίνουμε πως ο όρος της συνέλιξης της ανανεωτικής εξίσωσης προκύπτει συχνά όταν σε μία ανανεωτική ανέλιξη, δεσμεύσουμε ως προς το χρόνο της πρώτης ανανέωσης και προχωρήσουμε στην αρχή του χρόνου μέχρι την **αρχική** στιγμή ανανέωσης.

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

για κάθε τ.μ. X με τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots\}$ η οποία αποδεικνύεται στη συνέχεια.

Απόδειξη Πράγματι από τον ορισμό της μέσης τιμής ισχύει:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1.P(X = 1) && + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3) && + 4.P(X = 4) + \dots \\ &= P(X = 1) && + P(X = 2) + P(X = 3) && + P(X = 4) + \dots \\ &&& + P(X = 2) + P(X = 3) && + P(X = 4) + \dots \\ &&& && + P(X = 3) && + P(X = 4) + \dots \\ &&&&&& && + P(X = 4) + \dots \\ &= P(X \geq 1) && + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) && + P(X \geq 4) + \dots, \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη.

Πρόταση 2 Έστω μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ στην οποία η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι F και έστω $U(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε για κάθε $t \geq 0$, η $U(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Απόδειξη: Αρχικά κρίνεται αναγκαίο να αναφέρουμε μία βασική σχέση που ισχύει σε κάθε ανανεωτική ανέλιξη. Για κάθε ακέραιο n και $t \geq 0$,

$$N(t) \geq n \text{ όταν και μόνο όταν } Y_n \leq t.$$

Δηλαδή το ενδεχόμενο $\{N(t) \geq n\}$ μας πληροφορεί ότι έχουμε τουλάχιστο n γεγονότα μέχρι το χρόνο t . Επιπροσθέτως, το ενδεχόμενο $Y_n \leq t$ σημαίνει πως ο χρόνος αναμονής έως ότου συμβούν n γεγονότα δηλαδή ανανεώσεις είναι το πολύ t . Οι δύο ανωτέρω σχέσεις εκφράζουν το ίδιο ενδεχόμενο με διαφορετικό τρόπο και επομένως είναι ισοδύναμες. Αφού λοιπόν αποδείξαμε ότι τα ενδεχόμενα αυτά είναι ίσα θα έχουν και την ίδια πιθανότητα, δηλαδή ισχύει

$$P(N(t) \geq n) = P(Y_n \leq t).$$

Αθροίζοντας για όλες τις θετικές τιμές του n έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \leq t) \quad (2.7)$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης (2.7) ισούται με τη μέση τιμή $E(N(t))$. Για το δεξιό μέλος, έχουμε

$$Y_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

και οι T_i είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή F . Επομένως η κατανομή της μεταβλητής Y_n θα ισούται με τη συνέλιξη F^{*n} .

Παράδειγμα 4

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι εάν η F είναι η εκθετική με παράμετρο λ δηλαδή $Exp(\lambda)$ τότε η $U(x)$ που έχει μάζα στο μηδέν και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ ισούται με:

$$U(x) = 1 + \lambda x.$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί αυτό αφού μπορούμε να γράψουμε τη $U(x)$ ως άθροισμα κ -τάξης συνελίξεων και έτσι λοιπόν παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x) = F^{*0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(x). \quad (2.8)$$

Όμως η

$$m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(x)$$

είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της ανωτέρω σχέσης (και αλλάζοντας τη σειρά μεταξύ αθροίσματος και παραγώγου) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} u(t) &= m'(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1} \lambda e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda t} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

αφού γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = e^{\lambda t}.$$

Επομένως ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $u'(t)$ βρίσκουμε την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ για την ανέλιξη *Poisson*.

$$\int_0^t u'(t)dt = m(t) = \int_0^t \lambda dt = \lambda t.$$

Αφού πλέον βρήκαμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(x) = \lambda t$$

η σχέση (2.8) γίνεται:

$$U(x) = 1_{[0,\infty)}(x) + \lambda x.$$

Προς αποφυγήν σύγχυσης του συμβολισμού της ανανεωτικής συνάρτησης $U(x)$ σημειώνουμε τους δύο πιο διαδεδομένους τρόπους γραφής που συναντώνται στην διεθνή βιβλιογραφία.

1.

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x). \quad (2.9)$$

2.

$$m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(x). \quad (2.10)$$

Επομένως λοιπόν όπως είναι λογικό ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$U(x) = 1 + m(x), \quad x \geq 0. \quad (2.11)$$

Παράδειγμα 5

Θεωρούμε την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$. Για τη συνάρτηση αυτή παίρνουμε διαδοχικά τα εξής:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) = F^{*0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

και

$$F^{*0}(t) + F^{*1} \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n-1)}(t) = F^{*0}(t) + F \star U(t).$$

Συνεπώς έχουμε την ανανεωτική εξίσωση με $Z = U$ και $z = F^{*0}$.

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα αναφέρουμε ένα αρκετά σημαντικό θεώρημα που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια. Το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει πως εάν z είναι τοπικά φραγμένη και $F(0) < 1$ τότε υπάρχει μία τοπικά φραγμένη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης $U \star z(t)$ και μάλιστα είναι μοναδική.

Θεώρημα 1 (Feller, 1971)

Έστω $Z(t) = 0$ για $t < 0$ και η z είναι τοπικά φραγμένη. Έστω επίσης ότι $F(0) < 1$, δηλαδή η F δεν είναι εκφυλισμένη στο σημείο μηδέν, τότε ισχύει ότι:

1. Μία τοπικά φραγμένη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι η:

$$U \star z(t) = \int_0^t z(t-u)U(du).$$

2. Δεν υπάρχει άλλη τοπικά φραγμένη λύση στο $(0, +\infty)$.

Συμπερασματικά λοιπόν στο κεφάλαιο αυτό, ορίσαμε τις ανανεωτικές εξισώσεις, την ανανεωτική μας συνάρτηση $U(t)$ και μελετήσαμε τις ιδιότητες της. Τέλος ορίστηκε και η γενική μορφή μίας ανανεωτικής εξίσωσης.

Κεφάλαιο 3

Προδρομικοί και αναδρομικοί χρόνοι εμφάνισης

Έστω ότι ξεκινάμε να παρατηρούμε μία ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ τη χρονική στιγμή t . Ένας συγκεκριμένος αριθμός $N(t) - 1$ ανανεώσεων θα έχει συμβεί μέχρι τότε και η επόμενη ανανέωση θα συμβεί την χρονική στιγμή $Y_{N(t)}$. Δηλαδή έχουμε ξεκινήσει την παρατήρησή μας σε ένα σημείο του τυχαίου διαστήματος $T_n = Y_{N(t)} - Y_{N(t)-1}$ και επομένως μπορούμε να ορίσουμε την ανανεωτική ακολουθία:

$$\{Y_n, n \geq 0\} \text{ με } Y_n - Y_{n-1} = T_n.$$

Επιπλέον ορίζουμε ως:

$$B(t) = Y_{N(t)} - t.$$

τον χρόνο μέχρι το επόμενο γεγονός (προδρομικός χρόνος ζωής) (*excess of life*) δηλαδή τον χρόνο από την παρούσα χρονική στιγμή μέχρι την επόμενη ανανέωση.

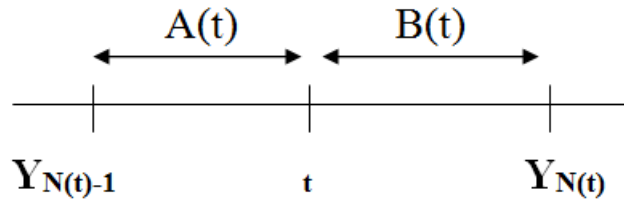
Επιπλέον ορίζουμε ως:

$$A(t) = t - Y_{N(t)-1}$$

τον χρόνο αφότου έχει συμβεί η τελευταία ανανέωση (αναδρομικός χρόνος, *backward recurrence time*).

Σχήμα 2

Προδρομικοί και αναδρομικοί χρόνοι σε μία ανανεωτική ανέλιξη.



3.1 Ανανεωτικές εξισώσεις για τους χρόνους εμφάνισης

Για τη μελέτη των τυχαίων μεταβλητών $A(t)$ και $B(t)$, θα χρησιμοποιήσουμε μία ανανεωτική εξίσωση και στην συνέχεια θα τη λύσουμε.

• Για τη κατανομή του $A(t)$ παρατηρούμε ότι:

$$P[A(t) \leq x] = P[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] + P[A(t) \leq x, Y_1 > t]. \quad (3.1)$$

Ισχύει $A(t) = t$ στο διάστημα $[Y_1 > t]$ και συνεπώς:

$$P[A(t) \leq x, Y_1 > t] = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t). \quad (3.2)$$

Στο διάστημα $[Y_1 \leq t]$, παρατηρούμε ότι η $A(t)$ ξεκινά από την αρχή στο Y_1 , έτσι:

$$P[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] = \int_0^t P[A(t-y) \leq x]F(dy). \quad (3.3)$$

Συνεπώς λοιπόν από τις σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3), προκύπτει η ανανεωτική εξίσωση για το $A(t)$:

$$P[A(t) \leq x] = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t) + \int_0^t P[A(t-y) \leq x]F(dy). \quad (3.4)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ανανεωτική εξίσωση:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)F(dy)$$

3.1. ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ²⁹

και έστω $m = F(\infty) < \infty$ και $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$. Επομένως παρατηρούμε ότι η $U(t)$ είναι **πεπερασμένη** για κάθε πραγματικό t .

Η λύση της εξίσωσης (3.4) είναι η $(U \star g_{1,x})(t)$, όπου

$$g_{1,x}(t) = [1 - F(t)]1_{[0,x]}(t)$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} (g_{1,x} \star U)(t) &= g_{1,x}(t) + (g_x \star m)(t) \\ &= g_{1,x}(t) + \int_0^t g_x(t-y)dm(y) \\ &= g_{1,x}(t) + \int_0^t [1 - F(t-y)]1_{[0,x]}(t-y)d \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(y)}_{m(y)} \end{aligned}$$

Αλλάζοντας την σειρά μεταξύ αθροίσματος και ολοκλήρωσης βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα της δεύτερης ισότητας ισούται με:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [1 - F(t-y)]1_{[0,x]}(t-y)dF^{*k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t-x}^t [1 - F(t-y)]dF^{*k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{t-x}^t dF^{*k}(y) - \int_{t-x}^t F(t-y)dF^{*k}(y) \right\}. \end{aligned}$$

30 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΔΡΟΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ

Από την ανωτέρω σχέση παίρνουμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται για $t > x$ με $F^{*k}(t) - F^{*k}(t-x)$. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [F^{*k}(t) - F^{*k}(t-x)] - \left[\int_0^t F(t-y) dF^{*k}(y) - \int_0^{t-x} F(t-y) dF^{*k}(y) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [F^{*k}(t) - F^{*k}(t-x)] - \left[F^{*(k+1)}(t) - \int_0^{t-x} F(t-y) dF^{*k}(y) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t-x) - \sum_{k=1}^{\infty} F^{*(k+1)}(t) + \int_0^{t-x} F(t-y) dF^{*k}(y) \\ &= F(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t-x) + \int_0^{t-x} F(t-y) dF^{*k}(y), \end{aligned}$$

καθώς το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν έχει την μορφή συνέλιξης, δεν είναι γενικά εύκολο η παραπάνω παράσταση να απλοποιηθεί περαιτέρω. Επομένως συμπεριλαμβάνουμε ότι η κατανομή του $A(t)$ ισούται με,

$$\begin{aligned} P[A(t) \leq x] &= (1 - F(t))1_{[0,x]}(t) + F(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t-x) \\ &\quad + \int_0^{t-x} F(t-y) dF^{*k}(y) \end{aligned}$$

• Για την κατανομή του $B(t)$ για $x > 0$ και υποθέτοντας ότι $Y_0 = 0$ παρατηρούμε ότι:

$$Z_2(t) = P[B(t) > x] = P[B(t) > x, Y_1 \leq t] + P[B(t) > x, Y_1 > t].$$

Θέτοντας ως στόχο να έχουμε $B(t) > x$ στο διάστημα $[Y_1 > t]$ πρέπει να έχουμε $Y_1 > t + x$. Στο διάστημα $Y_1 \leq t$ το $B(t)$ ξεκινά στο Y_1 έτσι λοιπόν υπολογίζουμε την εξίσωση για το $B(t)$:

$$Z_2(t) = P[B(t) > x] = \int_0^t P[B(t-y) > x] F(dy) + 1 - F(t+x). \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την **ανανεωτική εξίσωση**:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y) F(dy)$$

3.1. ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ 31

και έστω $n = F(\infty) < \infty$ και $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Επομένως παρατηρούμε ότι η $U(t)$ είναι **πεπερασμένη** για κάθε πραγματικό t .

• Με βάση το Θεώρημα 1 και την σχέση (3.5) για την κατανομή της ουράς της κατανομής που ακολουθεί η μεταβλητή $B(t)$ παίρνουμε ότι:

$$Z_2(t) = P[B(t) > x] = U \star g_{2,x}(t) \quad (3.6)$$

όπου:

$$g_{2,x}(t) = 1 - F(t + x). \quad (3.7)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα μας πληροφορεί πως η πιθανότητα του προδρομικού χρόνου ισούται με τη συνέλιξη της ουράς της συνάρτησης F ως προς την ανανεωτική μας συνάρτηση δηλαδή αποτελεί τη λύση της εξίσωσης (3.5).

$$Z_2(t) = P[B(t) > x] = \int_0^t (1 - F(x + t - y))U(dy). \quad (3.8)$$

Γενικά οι ανανεωτικές εξισώσεις προκύπτουν δεσμεύοντας ως προς μία αρχική ανανέωση ή **άλμα** της διαδικασίας πριν το χρόνο t .

Θέλοντας να δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη της (3.8) σημειώνουμε ότι: Για $x > 0$, τότε:

$$P[\text{να υπάρχει κάποια ανανέωση στο } (x, x + dx)]$$

$$= P \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} [Y_n \in (x, x + dx)] \right\}.$$

Παρατηρούμε πως επειδή το διάστημα $(x, x + dx)$ είναι αρκετά μικρό θα μπορούσε να συμβεί το πολύ μία ανανέωση μέσα σε αυτό. Συνεπώς για $n = 0, 1, 2, \dots$, τα ενδεχόμενα:

$$\{[Y_n \in (x, x + dx)], n \geq 0\}$$

είναι **ξένα** και προκύπτει ότι:

$$P[\text{κάποια ανανέωση στο } (x, x + dx)] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y_n \in (x, x + dx)] = U(dx).$$

32ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΔΡΟΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ

Ερμηνεύοντας την (3.8) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} P[B(t) > x] &= \int_{u \leq t} P[\text{τελευταία ανανέωση πριν το } t \text{ στο } (u, u + du], \text{όχι ανανέωση στο } (t, t + x]] \\ &= \int_{u \leq t} P[\text{κάποια ανανέωση στο } (u, u + du], \text{όχι ανανέωση στο } (t, t + x)] \\ &= \int_{u \leq t} U(du)(1 - F(t + x - u)). \end{aligned}$$

Η απόδειξη της σχέσης (3.8) στηρίζεται στην λογική που αναπτύξαμε ανωτέρω δηλαδή στη τελευταία ανανέωση πριν το t .

Δοθέντος ότι $Y_0 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P[B(t) > x] &= P[Y_{N(t)} - t > x] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P[Y_n - t > x; N(t) = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P[Y_n - t > x, Y_{n-1} \leq t < Y_n] \end{aligned}$$

δεσμεύοντας ως προς τη μεταβλητή Y_{n-1} και χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης για την εναλλαγή αθροίσματος και ολοκληρώματος (ισχύει αφού όλοι οι όροι μας είναι θετικές ποσότητες) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P[y - t + Y_n > x, t < y + Y_n] F^{(n-1)*}(dy) \\ &= \int_0^t P[Y_n > t + x - y] \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(dy) \\ &= \int_0^t (1 - F(t + x - y)) U(dy), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει τη σχέση (3.8).

Εν συνεχεία αναφέρουμε ένα παράδειγμα όπου η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι εκθετική με παράμετρο α και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.8) συμπεραίνουμε πως και ο προδρομικός χρόνος $B(t)$ ακολουθεί επίσης την εκθετική κατανομή.

Παράδειγμα 6

Έστω ότι $F(dx) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0, \infty)}(x) dx$, δηλαδή η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι η εκθετική με παράμετρο α . Τότε παίρνουμε χρησιμοποιώντας την (3.8):

$$P(B(t) > x) = \int_0^t (1 - F(x + t - y)) U(dy).$$

Όμως η $U(dy)$ έχει μάζα στο μηδέν και πυκνότητα στο $(0, +\infty)$ επομένως σύμφωνα με την σχέση:

$$U(y) = F^{*0}(y) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(y)}_{m(y)},$$

χρησιμοποιώντας ότι $u(y) = \alpha$, $\forall y \geq 0$, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1 του Κεφαλαίου 2, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^t (1 - F(x + t - y)) U(dy) &= \int_0^t 1 - F(x + t - y) dF^{*0}(y) + \int_0^t 1 - F(x + t - y) u(y) dy \\ &= 1 \cdot (1 - F(x + t)) + \int_0^t 1 - F(x + t - y) u(y) dy \\ &= 1 - F(x + t) + \alpha \int_0^t 1 - F(x + t - y) dy \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(x+t-y)} dy \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + e^{-\alpha x} \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha t}) = e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $B(t)$ έχει εκθετική πυκνότητα για κάθε t αφού αποδείξαμε ότι $P[B(t) > x] = e^{-\alpha x}$.

3.2 Δύο βασικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δύο κύρια ασυμπτωτικά αποτελέσματα για ποσότητες με ενδιαφέρον στην ανανεωτική θεωρία. Το πρώτο αφορά τη συμπεριφορά της συνάρτησης $U(x)$, το δεύτερο την αντίστοιχη συμπεριφορά καθώς $x \rightarrow \infty$ της λύσης $Z(x)$ μίας ανανεωτικής εξίσωσης με την προϋπόθεση ότι η F είναι μη διακριτή (*non-lattice*). Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία *Poisson* είναι η μόνη ανανεωτική διαδικασία (σε συνεχή χρόνο) που η ανανεωτική συνάρτηση $U(t) = E[N(t)]$ είναι ακριβώς γραμμική. Όλες οι ανανεωτικές συναρτήσεις είναι ασυμπτωτικά γραμμικές δηλαδή ισχύει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

όπου $\mu = E[X_k]$ η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων. Ο μέσος αριθμός των ανανεώσεων σε ένα διάστημα είναι ανάλογος του μήκους του διαστήματος με σταθερά αναλογίας $1/\mu$.

Το ανανεωτικό θεώρημα περιγράφει τη συμπεριφορά στο χρόνο των στοχαστικών μοντέλων ανανεωτικών διαδικασιών.

1. Θεώρημα 2 : Blackwell

Για συνήθεις ανανεωτικές ανελίξεις, ισχύει:

$$U(t+a) - U(t) \rightarrow \frac{a}{\mu}, \text{ για } t \rightarrow \infty$$

για οποιαδήποτε θετική σταθερά a .

2. Θεώρημα 3 Βασικό ανανεωτικό θεώρημα

Θεωρούμε τη λύση:

$$Z = U \star z$$

της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$Z = z + F \star Z$$

όπου η F είναι μία δοθείσα κατανομή. Έστω ότι η z είναι απευθείας ολοκληρώσιμη κατά *Riemann* (αυτό ισχύει για παράδειγμα όταν η z είναι φθίνουσα και ολοκληρώσιμη), τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U \star z = \mu^{-1} \int_0^{\infty} z(s) ds.$$

Παράδειγμα 7

Σύμφωνα με τη σχέση (3.6) γνωρίζουμε ότι:

$$P[B(t) > x] = U \star g_x(t).$$

Στη συνέχεια θέτουμε:

$$z(s) = 1 - F(s + x)$$

Συνεπώς για κάθε $x > 0$ εφαρμόζοντας το βασικό ανανεωτικό επιχείρημα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P[B(t) > x] &= \mu^{-1} \int_0^{\infty} z(u) du \\ &= \mu^{-1} \int_0^{\infty} (1 - F(u + x)) du \\ &= \mu^{-1} \int_x^{\infty} (1 - F(s)) ds := 1 - F_0(x), \end{aligned}$$

η οποία είναι η κατανομή του πρώτου χρόνου αναμονής T_1 σε μία στάσιμη ανανεωτική ανελίξη (*stationary renewal process*).

3.3 Από κοινού κατανομή των $A(t)$ και $B(t)$

Βασικός μας στόχος στην παρούσα ενότητα είναι η μελέτη της από κοινού κατανομής των $A(t)$ και $B(t)$. Στο επόμενο παράδειγμα υπολογίζουμε την ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση

$$Z(t) = P[A(t) > x, B(t) > y]$$

που μας δίνει την από κοινού ουρά της κατανομής των $A(t)$ και $B(t)$.

Παράδειγμα 8

1. Θα βρούμε μία ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση:

$$Z_3(t) = P[A(t) > x, B(t) > y].$$

Λύση:

Γράφουμε το ενδεχόμενο στην αγκύλη της τελευταίας σχέσης σαν ένωση δύο ενδεχομένων ανάλογα με το αν $Y_1 > t$ ή $Y_1 \leq t$. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned} Z_3(t) &= P[A(t) > x, B(t) > y] \\ &= P[A(t) > x, B(t) > y, Y_1 > t] + P[A(t) > x, B(t) > y, Y_1 \leq t] \end{aligned}$$

- Στο διάστημα $[Y_1 > t]$ έχουμε ότι: $A(t) = t$ επειδή η πρώτη ανανέωση δεν έχει συμβεί ακόμα, και $Y_1 = t + B(t)$.

Συνεπώς το ενδεχόμενο:

$$\begin{aligned} \{A(t) > x, B(t) > y, Y_1 > t\} &= \{t > x, Y_1 - t > y, Y_1 > t\} \\ &= \{t > x, Y_1 > y + t, Y_1 > t\} \\ &= \{t > x, Y_1 > t + y\}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} P[A(t) > x, B(t) > y, Y_1 > t] &= P[t > x, Y_1 > t + y] \\ &= [(1 - F(t + y))1_{(x, \infty)}(t)]. \end{aligned}$$

- Στο διάστημα $[Y_1 \leq t]$ έχουμε ότι η πρώτη ανανέωση πήρε μέρος στο χρόνο t και η διαδικασία ανανεώθηκε μετά από αυτό το χρόνο. Συνεπώς έχουμε:

$$P[A(t) > x, B(t) > y, Y_1 \leq t]$$

$$= \int_0^t P[A(t-s) > x, B(t-s) > y] F(ds) = F \star Z(t).$$

Τελικά παίρνουμε ότι,

$$P[A(t) > x, B(t) > y] = [(1-F(t+y))1_{(x,\infty)}(t)] + \int_0^t P[A(t-s) > x, B(t-s) > y] F(ds).$$

Συνεπώς η Z ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση:

$$Z(t) = z(t) + F \star Z(t)$$

με

$$z(t) = g_3(t) = (1 - F(t+y))1_{(x,\infty)}(t).$$

2. Η λύση της είναι η $Z(t) = U \star z(t)$, όπου $U(t) = E[N(t)]$.
3. Για να βρούμε το $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)$ θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3 από παραπάνω. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty z(s) ds \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(s+y))1_{(x,\infty)}(s) ds \\ &= \frac{1}{\mu} \int_x^\infty (1 - F(s+y)) ds \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) &= \frac{1}{\mu} \int_{x+y}^\infty (1 - F(s)) ds. \end{aligned}$$

3.4 Από κοινού κατανομή στην σταθερή κατάσταση

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_1, X_2, \dots είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη μέση τιμή. Ο προδρομικός χρόνος $B(t)$ μέχρι το επόμενο γεγονός, δηλαδή από την παρούσα χρονική στιγμή μέχρι την επόμενη ανανέωση, έχει την οριακή κατανομή που θα μπορούσαμε να πούμε ότι στο σύστημά μας επέρχεται η ισορροπία για αυτό και ονομάζεται σταθερή κατάσταση και ισούται με:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{B(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy \quad (3.9)$$

όπου ορίζουμε ως:

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y)$$

τη συνάρτηση ουράς της κατανομής F . Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισούται με:

$$h(y) = \frac{1}{\mu} [1 - F(y)] \quad (3.10)$$

Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της σταθερής κατανομής μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} yh(y)dy &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} y[1 - F(y)]dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} y \left\{ \int_y^{\infty} f(t)dt \right\} dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \int_0^t ydy \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{\infty} t^2 f(t)dt \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} \end{aligned}$$

όπου σ^2 είναι η κοινή διακύμανση των ενδιάμεσων χρόνων X_1, X_2, \dots

Για να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή στη σταθερή κατάσταση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα:

$$\{B(t) \geq x \text{ και } A(t) \geq y\}$$

πραγματοποιούνται αν και μόνο αν:

$$B(t - y) \geq x + y$$

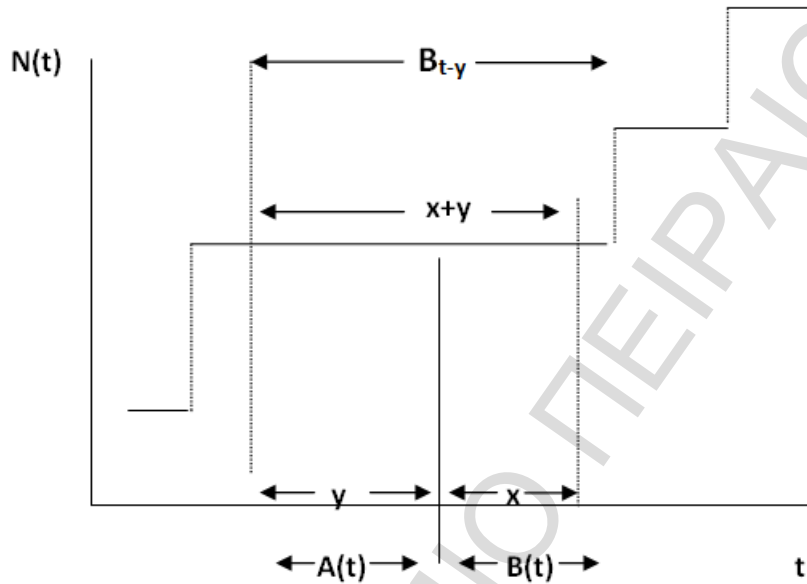
δείτε το Σχήμα 3. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει τώρα ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P \{B(t) \geq x, A(t) \geq y\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P \{B(t - y) \geq x + y\} \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{x+y}^{\infty} [1 - F(z)] dz \end{aligned}$$

με τη βοήθεια της σχέσης (3.9) για να υπολογίσουμε το $\lim_{t \rightarrow \infty} P \{A(t) \geq y\}$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P \{A(t) \geq y\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P \{B(t) \geq 0, A(t) \geq y\} \\ &= \frac{1}{\mu} \int_y^{\infty} [1 - F(z)] dz \\ &= 1 - H(y) \end{aligned}$$

Σχήμα 3



Έτσι λοιπόν η από κοινού συνάρτηση κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου ισούται με:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{B(t) > x, A(t) > y\} = \frac{1}{\mu} \int_{x+y}^{\infty} [1 - F(z)] dz \quad (3.11)$$

Εν κατακλείδι, σε αυτό το κεφάλαιο, ορίσαμε τους προδρομικούς $B(t)$ και αναδρομικούς χρόνους $A(t)$ επανεμφάνισης μίας ανανεωτικής διαδικασίας. Επίσης θεωρήσαμε την ανανεωτική εξίσωση $Z(t)$ που ικανοποιεί η κατανομή του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου. Τέλος, υπολογίσαμε την από κοινού ουρά της κατανομής των $A(t)$ και $B(t)$.

Κεφάλαιο 4

Η συνάρτηση συσχέτισης

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί η συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης. Με τη βοήθεια της από κοινού συνάρτησης κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης θα υπολογίσουμε ένα κλειστό τύπο στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση, και ένα απλό τύπο για τη σταθερή κατάσταση. Επιπλέον θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συνδιακύμανσης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου για τη σταθερή κατάσταση σε μία συνήθη ανανεωτική διαδικασία σε όρους των τριών πρώτων ροπών των ενδιαμέσων ανανεωτικών χρόνων και έτσι επομένως θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε μία κλειστού τύπου έκφραση. Στις δύο επόμενες ενότητες θα ακολουθήσουμε την ανάλυση που υπάρχει στο άρθρο των *Gakis and Sivazlian* (1994).

4.1 Η συνδιακύμανση στην χρονικά εξαρτημένη περίπτωση

Όπως γνωρίζουμε από το ανωτέρω άρθρο, η από κοινού συνάρτηση κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού τύπου ισούται με:

$$P\{B(t) > x, A(t) > y\} = \begin{cases} 1 - F(t+y) + \int_x^t u(t-r)[1 - F(r+y)]dr, & 0 \leq x < t \\ 0, & t \leq x < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών μπορούν να υπολογιστούν εάν θέσουμε όπου $y = 0$ και $x = 0$ αντίστοιχα.

$$P\{B(t) > x\} = \begin{cases} 1 - F(t) + \int_x^t u(t-r)[1 - F(r)]dr, & 0 \leq x < t \\ 0, & t \leq x < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

και

$$P\{A(t) > y\} = 1 - F(t) + \int_0^t u(t-r)[1 - F(r+y)]dv, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (4.3)$$

Επομένως μπορούμε να βρούμε την παρακάτω έκφραση για την μέση τιμή $E[B(t)A(t)]$.

$$\begin{aligned} E[B(t)A(t)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty P\{B(t) > x, A(t) > y\} dy dx \\ &= \int_0^t \int_0^\infty [1 - F(t+y)] dy dx + \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{t-x} [1 - F(t+y-k)]u(k)dk dy dx \\ &= \int_0^t \int_t^\infty [1 - F(r)]dr dx + \int_0^t \int_0^{t-x} \int_{t-r}^\infty [1 - F(r)]u(k)dr dk dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Εάν θέσουμε

$$\Lambda(t) = \int_t^\infty [1 - F(r)]dr, \quad (4.5)$$

η (4.4) γίνεται:

$$\begin{aligned} E[B(t)A(t)] &= \int_0^t \Lambda(t)dx + \int_0^t \int_0^{t-x} \Lambda(t-k)u(k)dk dx \\ &= t\Lambda(t) + \int_0^t \int_0^{t-k} \Lambda(t-k)u(k)dx dk \\ &= t\Lambda(t) + \int_0^t (t-k)\Lambda(t-k)u(k)dk \\ &= t\Lambda(t) + [t\Lambda(t)] \star u(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1. Η ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΣΗ ΣΤΗΝ ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ43

Εν συνεχεία έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε εκφράσεις για τις μέσες τιμές $E(B(t))$ και $E(A(t))$ που θα μας χρησιμεύσουν για τον υπολογισμό της συνδιακύμανσης των $Cov(B(t), A(t))$. Αρχικά ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της σχέσης (4.2) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 E[B(t)] &= \int_0^{\infty} P\{B(t) > x\} dx \\
 &= \int_0^t [1 - F(t)] dx + \int_0^t \int_x^t u(t-r)[1 - F(r)] dr dx \\
 &= t[1 - F(t)] + \int_0^t \int_0^r u(t-r)[1 - F(r)] dx dr \\
 &= t[1 - F(t)] + \int_0^t r[1 - F(r)] u(t-r) dr.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Εάν θέσουμε:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) \tag{4.8}$$

η σχέση (4.7) γίνεται:

$$E[B(t)] = t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] \star u(t). \tag{4.9}$$

Αντίστοιχα μπορούμε να εργαστούμε και για τη μέση τιμή του αναδρομικού χρόνου εμφάνισης, δηλαδή την $E[A(t)]$. Συγκεκριμένα, από την (4.3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 E[A(t)] &= \int_0^{\infty} P\{A(t) > y\} dy \\
 &= \int_0^{\infty} [1 - F(t+y)] dy + \int_0^{\infty} \int_0^t u(t-r)[1 - F(r+y)] dr dy \\
 &= \Lambda(t) + \Lambda(t) \star u(t) \\
 &= \mu[1 + m(t)] - t,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

όπου μ δηλώνει τη μέση τιμή του ενδιαμέσου χρόνου ανανέωσης και $m(t)$ την ανανεωτική συνάρτηση όπως ορίστηκε στη σχέση (2.10).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.6), (4.9), (4.10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 Cov[B(t), A(t)] &= E[B(t)A(t)] - E[B(t)]E[A(t)] \\
 &= t\Lambda(t) + [t\Lambda(t)] \star u(t) \\
 &\quad - \{t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] \star u(t)\} \{\mu[1 + m(t)] - t\}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Από τη σχέση (4.11) μπορούμε να παρατηρήσουμε πως αν και οι ποσότητες στο δεξιό μέλος δεν είναι κλειστού τύπου, παρόλα αυτά έχουν ίδια δομή με μία ανανεωτική εξίσωση και για αυτό το λόγο μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς *Laplace* τους.

Παράδειγμα 9

Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συνδιακύμανσης για την εκθετική κατανομή. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.5) παίρνουμε:

$$\Lambda(t) = \int_t^{\infty} [1 - 1 + e^{-\lambda x}] dx = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} [t\Lambda(t)] \star u(t) &= \int_0^t x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \lambda dx \\ &= \int_0^t x e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

και επομένως από τη σχέση (4.6) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[B(t)A(t)] &= \frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

Επιπλέον από τη σχέση (4.7) υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[B(t)] &= te^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= te^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

4.1. Η ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΣΗ ΣΤΗΝ ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ45

Επίσης, από τη σχέση (4.10) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} E[A(t)] &= \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda t) - t \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$$Cov[B(t), A(t)] = \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t}) - \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t}) = 0,$$

το οποίο αποτελεί μία άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης.

4.2 Η χρονικά εξαρτημένη συσχέτιση.

Σε αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε την συσχέτιση όταν αυτή εξαρτάται από τον χρόνο t . Χρησιμοποιώντας λοιπόν την περιθώρια συνάρτηση ουράς της σχέσης (4.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τη $E[B^2(t)]$ η οποία ισούται με:

$$\begin{aligned} E[B^2(t)] &= 2 \int_0^t x[1 - F(t)]dx + 2 \int_0^t \int_0^t xu(t-r)[1 - F(r)]drdx \\ &= t^2\bar{F}(t) + [t^2\bar{F}(t)] \star u(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Αντίστοιχα από τη σχέση (4.3) μπορούμε να υπολογίσουμε τη $E[A^2(t)]$ η οποία ισούται:

$$\begin{aligned} E[A^2(t)] &= 2 \int_0^\infty y[1 - F(t+y)]dy + 2 \int_0^\infty \int_0^t yu(t-r)[1 - F(r+y)]drdy \\ &= Q(t) + Q(t) \star u(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου:

$$Q(t) = 2 \int_0^\infty y[1 - F(t+y)]dy.$$

Συμπερασματικά λοιπόν η χρονικά εξαρτημένη συνάρτηση συσχέτισης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου επανεφάνισης ισούται με:

$$\begin{aligned} \rho[B(t), A(t)] &= \frac{t\Lambda(t) + [t\Lambda(t)] \star u(t) - \{t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] \star u(t)\} \{\mu[1 + U(t)] - t\}}{\sqrt{t^2\bar{F}(t) + [t^2\bar{F}(t)] \star u(t) - E^2[B(t)]} \sqrt{Q(t) + Q(t) \star u(t) - E^2[A(t)]}} \\ & \quad (4.14) \end{aligned}$$

Στο Παράρτημα Δ παρουσιάζεται ο αναλυτικός υπολογισμός της σχέσης (4.14) για $\lambda = 3$ και $r = 3$ με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος *Mathematica*.

4.3 Η συνάρτηση συνδιακύμανσης στη σταθερή κατάσταση

Με τον όρο σταθερή (ή στάσιμη) κατάσταση εδώ εννοούμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η στοχαστική ανέλιξη μετά την παρέλευση ‘μεγάλου’ χρόνου. Για το λόγο αυτό, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια είναι ασυμπτωτικά ως προς το χρόνο t . Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε από τη σχέση (3.11) πως για τη σταθερή κατάσταση η από κοινού συνάρτηση κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και ισούται με:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{B(t) > x, A(t) > y\} = \frac{1}{\mu} \int_{x+y}^{\infty} [1 - F(v)] dv. \quad (4.15)$$

Επομένως κάνοντας αλλαγή μεταβλητής και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.15) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E[B(t)A(t)] &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_x^r [1 - F(r+y)] dr dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^r [1 - F(r+y)] dx dr dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} r [1 - F(r+y)] dr dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_v^{\infty} r [1 - F(x)] dx dr \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} [1 - F(x)] dx \\ &= \frac{\mu_3}{6\mu}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[B(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[A(t)] = \frac{\mu_2}{2\mu}.$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov[B(t), A(t)] = \frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{(\mu_2)^2}{4\mu^2}, \quad (4.17)$$

όπου μ_2 και μ_3 είναι η δεύτερη και η τρίτη ροπή των ενδιαμέσων χρόνων.

Στο Παράδειγμα 9 είδαμε ότι όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι η εκθετική, οι τυχαίες μεταβλητές $A(t)$ και $B(t)$ είναι ασυσχέτιστες. Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τη συνδιακύμανση των ενδιάμεσων χρόνων όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη κατανομή Γάμμα.

Παράδειγμα 10

Θα μελετήσουμε τη συνδιακύμανση του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου επανεμφάνισης όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Γάμμα (λ, r) . Γνωρίζουμε πως:

$$\mu = \frac{r}{\lambda}, \mu_2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}, \mu_3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{\lambda^3} \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.17) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Cov[B(t)A(t)] &= \frac{\lambda r(r+1)(r+2)}{6r\lambda^3} - \frac{\lambda^2 r^2 (r+1)^2}{4r^2 \lambda^4} \\ &= \frac{1-r^2}{12\lambda^2}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για $r > 1$ η (ασυμπτωτική) συνδιακύμανση των μεταβλητών $A(t), B(t)$ είναι αρνητική, ενώ για $r < 1$ είναι θετική.

4.4 Η συνάρτηση συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση

Αντίστοιχα με την περίπτωση της συνδιακύμανσης στη σταθερή κατάσταση, έτσι και εδώ θα μελετήσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση δηλαδή, όταν έχει μεσολαβήσει αρκετά μεγάλος χρόνος στη στοχαστική μας ανέλιξη και μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα ασυμπτωτικά αποτελέσματα ως προς το χρόνο t .

Για τις ροπές του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου επανεμφάνισης γνωρίζουμε ότι ισχύουν:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[B(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[A(t)] = \frac{\mu_2}{2\mu} \quad (4.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[B^2(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[A^2(t)] = \frac{\mu_3}{3\mu}. \quad (4.20)$$

Επομένως η συνάρτηση συσχέτισης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου επανεμφάνισης δίνεται ασυμπτωτικά από τον ακόλουθο τύπο:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho[B(t), A(t)] &= \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} Cov[B(t), A(t)]}{\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{Var[B(t)]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{Var[A(t)]}} \\ &= \frac{\mu_3/(6\mu) - \mu_2^2/(4\mu^2)}{\mu_3/(3\mu) - \mu_2^2/(4\mu^2)} \\ &= 1 - \frac{2\mu\mu_3}{4\mu\mu_3 - 3\mu_2^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα μελετήσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι σε μία ανανεωτική ανέλιξη ακολουθούν τη κατανομή *Weibull* για διάφορες τιμές των παραμέτρων τ και γ .

Παράδειγμα 11 Υπολογισμός συνάρτησης συσχέτισης της κατανομής *Weibull* για διάφορες τιμές των παραμέτρων (τ και γ) στη σταθερή κατάσταση.

Για να υπολογίσουμε τον τύπο της σχέσης (4.21) θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την πρώτη, την δεύτερη καθώς και την τρίτη ροπή. Ο τύπος που μας δίνει τις διάφορες ροπές της κατανομής *Weibull* είναι ο ακόλουθος:

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{\gamma})}{\tau^{n/\gamma}}, \quad (4.22)$$

βλέπε *Dickson* (2006)

1. Για $\tau = 3$ και $\gamma = 2$

Σημειώνουμε πως για $\gamma = 2$ η κατανομή *Weibull* παρουσιάζει ελαφριά ουρά. (διότι $\gamma > 1$)

Για $n = 1, 2$ και 3 ο τύπος (4.22) μας δίνει αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \frac{\Gamma(1 + 1/2)}{3^{1/2}} \\ &= \frac{\Gamma(1.5)}{1.73} \\ &= \frac{0.886}{1.73} \\ &\Rightarrow \mu = 0.512. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της δεύτερης ροπής παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E(X^2) \\ &= \frac{\Gamma(1 + 2/2)}{3^{2/2}} \\ &= \frac{\Gamma(2)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \mu_2 = 0.33. \end{aligned}$$

4.4. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΣΤΗ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ 51

Τέλος υπολογίζουμε και την τρίτη ροπή:

$$\begin{aligned}\mu_3 &= E(X^3) \\ &= \frac{\Gamma(1 + 3/2)}{3^{3/2}} \\ &= \frac{\Gamma(5/2)}{3^{3/2}} \\ &= \frac{1.33}{5.196} \\ &\Rightarrow \mu_3 = 0.256.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε πως όλες οι αριθμητικές τιμές της συνάρτησης Γάμμα υπολογίστηκαν με τη βοήθεια του μαθηματικού προγράμματος *Mathematica*.

Επομένως για τις ανωτέρω τιμές των παραμέτρων της κατανομής *Weibull*, και αντικαθιστώντας στη σχέση (4.21) η συσχέτιση ισούται με:

$$\begin{aligned}\rho[B(t), A(t)] &= 1 - \frac{2 \times 0.512 \times 0.256}{4 \times 0.512 \times 0.256 - 3 \times (0.33)^2} \\ &= 1 - \frac{0.262}{0.197} \\ &\Rightarrow \rho[B(t), A(t)] = -0.33.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $\tau = 3$ και $\gamma = 2$ η συσχέτιση για τη κατανομή *Weibull* του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου είναι αρνητική και ισούται με -0.33.

2. Για $\tau = 3$ και $\gamma = 1/2$

Αντίστοιχα σε αυτή τη περίπτωση αφού $\gamma = 1/2$ η κατανομή *Weibull* παρουσιάζει βαριά ουρά (διότι $\gamma < 1$).

Αντικαθιστώντας $n = 1, 2$ και 3 στο τύπο (4.22) έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(X) \\
 &= \frac{\Gamma(1 + 1/(1/2))}{3^{1/(1/2)}} \\
 &= \frac{\Gamma(3)}{3^2} \\
 &= \frac{2}{9} \\
 &\Rightarrow \mu = 0.22.
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της δεύτερης ροπής παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= E(X^2) \\
 &= \frac{\Gamma(1 + 2/(1/2))}{3^{2/(1/2)}} \\
 &= \frac{\Gamma(5)}{3^5} \\
 &= \frac{24}{243} \\
 &\Rightarrow \mu_2 = 0.099.
 \end{aligned}$$

Τέλος υπολογίζουμε και την τρίτη ροπή:

$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E(X^3) \\
 &= \frac{\Gamma(1 + 3/(1/2))}{3^{3/(1/2)}} \\
 &= \frac{\Gamma(7)}{3^7} \\
 &= \frac{720}{2187} \\
 &\Rightarrow \mu_3 = 0.33.
 \end{aligned}$$

Για τις ανωτέρω τιμές των παραμέτρων της κατανομής *Weibull*, και αντικαθιστώντας στη σχέση (4.21) η συσχέτιση ισούται με:

$$\begin{aligned}
 \rho[B(t), A(t)] &= 1 - \frac{2 \times 0.22 \times 0.33}{4 \times 0.22 \times 0.33 - 3 \times (0.099)^2} \\
 &= 1 - \frac{0.1452}{0.261} \\
 &\Rightarrow \rho[B(t), A(t)] = 0.44.
 \end{aligned}$$

4.4. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΣΤΗ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ 53

Αντίστοιχα εδώ για $\tau = 3$ και $\gamma = 1/2$ η συσχέτιση για την κατανομή *Weibull* του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου είναι θετική και ισούται με 0.44.

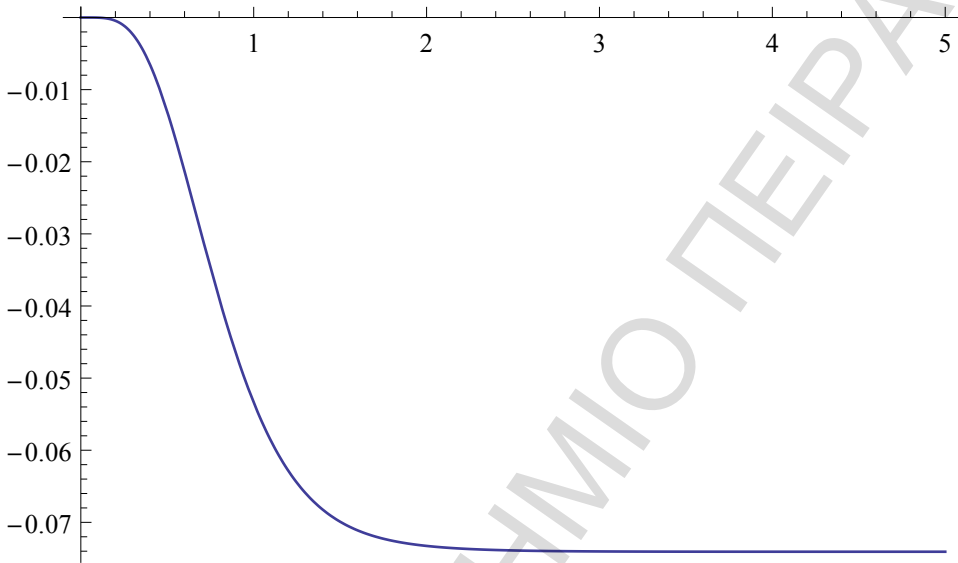
Εν κατακλείδι λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα μας παρατηρούμε ότι για την ίδια τιμή της πρώτης παραμέτρου (δηλαδή $\tau = 3$) και για διαφορετικό γ (στην πρώτη περίπτωση μεγαλύτερο της μονάδας και στη δεύτερη μικρότερο) η συνάρτηση συσχέτισης έχει αντίθετο πρόσημο.

4.5 Αριθμητικά παραδείγματα στη περίπτωση της κατανομής Γάμμα.

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε την συνάρτηση συνδιακύμανσης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου που δίνεται από τη σχέση (4.11) για την κατανομή Γάμμα για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων αυτής της κατανομής. Επιπλέον θα υπολογίσουμε και την συνάρτηση συσχέτισης που δίνεται από την σχέση (4.14). Σημειώνουμε πως ο υπολογισμός έγινε με τη χρήση του υπολογιστικού προγράμματος *Mathematica*. Ο τρόπος υπολογισμού αναφέρεται στον Παράρτημα Δ. Επιπροσθέτως, στο Πίνακα 1 έχουμε υπολογίσει για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της κατανομής Γάμμα την συνάρτηση συνδιακύμανσης καθώς και την συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου. Όπως είναι αναμενόμενο οι τιμές στην σταθερή κατάσταση συμφωνούν με το όριο της χρονικά εξαρτημένης περίπτωσης και για την συνάρτηση συνδιακύμανσης αλλά και για την συνάρτηση συσχέτισης. Τέλος, έχουμε μελετήσει ως προς την μονοτονία την συνάρτηση συσχέτισης για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της κατανομής Γάμμα. Για μη ακέραιες τιμές της παραμέτρου r της Γάμμα κατανομής, επομένως και για $0 < r < 1$, η συνδιακύμανση (άρα και η συσχέτιση) μεταξύ των μεταβλητών $A(t)$ και $B(t)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση. Επομένως, εξετάζουμε ακέραιες τιμές του r μεγαλύτερες της μονάδας. Για τις τιμές αυτές, έχουμε ήδη βρει στο Παράδειγμα 10 ότι η συνδιακύμανση είναι ασυμπτωτικά $t \rightarrow \infty$ αρνητική. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν κάτι τέτοιο ισχύει $\forall t \geq 0$ και όχι μόνο στη σταθερή κατάσταση. Τα αποτελέσματα μαζί με τα αντίστοιχα διαγράμματα παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 12 Υπολογισμός συνάρτησης συνδιακύμανσης της κατανομής Γάμμα για διάφορες τιμές των παραμέτρων (r, λ) στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση.

Σχήμα 4 Η συνάρτηση συνδιακύμανσης για $r = 3$ και $\lambda = 3$

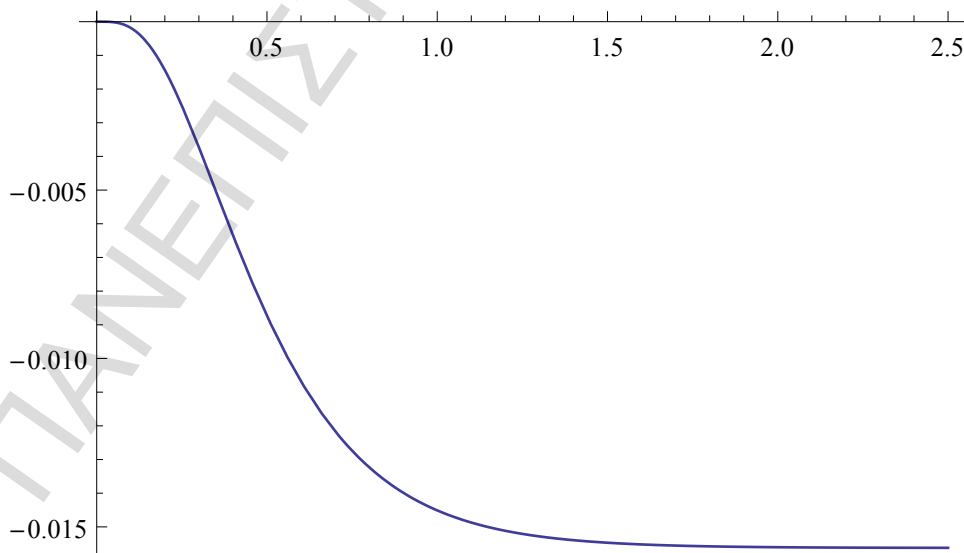


Στο Σχήμα 4 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης παίρνει αρνητικές τιμές. Συγκεκριμένα είναι γνησίως φθίνουσα από το μηδέν μέχρι και το 2 και για $t \rightarrow \infty$ σταθεροποιείται στην τιμή -0.074. Εν συνεχεία αναφέρουμε ενδεικτικά τη συνάρτηση συνδιακύμανσης για $r = 3, \lambda = 3$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο υπολογισμού και τις εντολές ανατρέξτε στο Παράρτημα Δ.

$$\begin{aligned}
Cov[B(t), A(t)] &= \frac{1}{2}e^{-3t}t(2 + 4t + 3t^2) + \frac{1}{54}e^{-9t/2} \\
&\quad \times (e^{3t/2}(20e^{3t} - 9(2 + 6t + 12t^2 + 9t^3)) \\
&\quad - 2 \cos[\frac{3\sqrt{3}t}{2}] - 2\sqrt{3} \sin[\frac{3\sqrt{3}t}{2}]) \\
&\quad - (\frac{1}{2}e^{3t}t(2 + 6t + 9t^2) + \frac{1}{18}e^{-9t/2} \\
&\quad \times (3e^{3t/2}(4e^{3t} - 3(2 + 2t + 6t^2 + 9t^3)) \\
&\quad + 6 \cos[\frac{3\sqrt{3}t}{2}] - 2\sqrt{3} \sin[\frac{2\sqrt{3}t}{2}])) \\
&\quad (1 - t + \frac{1}{9}(-3 + 9t + e^{-9t/2}(3 \cos[\frac{3\sqrt{3}t}{2}] \\
&\quad + \sqrt{3} \sin[\frac{3\sqrt{3}t}{2}]))).
\end{aligned}$$

Στο επόμενο σχήμα υπολογίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνδιακύμανσης για $r = 2$ και $\lambda = 4$.

Σχήμα 5 Η συνάρτηση συνδιακύμανσης για $r = 2$ και $\lambda = 4$

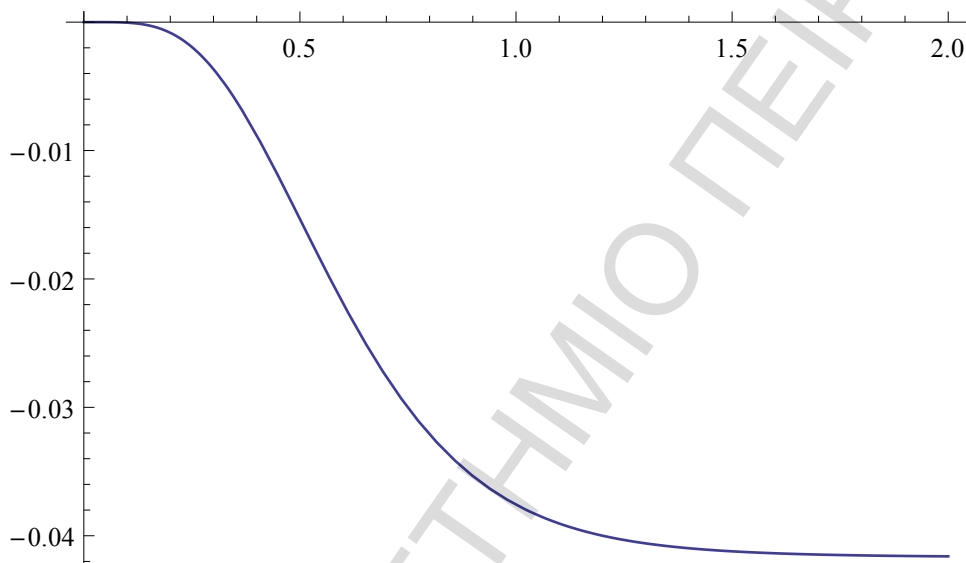


4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.57

Στο Σχήμα 5 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνει πιο γρήγορα συγκριτικά με το Σχήμα 4) και για $t \rightarrow \infty$ η συνάρτηση συνδιακύμανσης σταθεροποιείται στη τιμή -0.0156 .

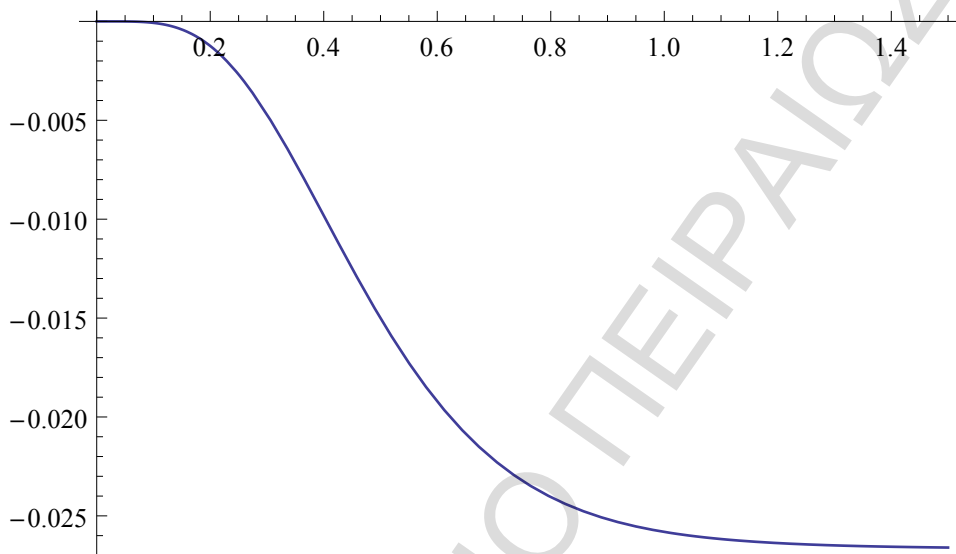
Στο επόμενο σχήμα υπολογίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνδιακύμανσης για $r = 3$ και $\lambda = 4$.

Σχήμα 6 Η συνάρτηση συνδιακύμανσης για $r = 3$ και $\lambda = 4$



Στο Σχήμα 6 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης φθίνει με αρκετά γρήγορο ρυθμό όπως στο Σχήμα 5. Για $t \rightarrow \infty$ η συνάρτηση συνδιακύμανσης παίρνει την τιμή -0.04167 .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνδιακύμανσης για $r = 3$ και $\lambda = 5$.

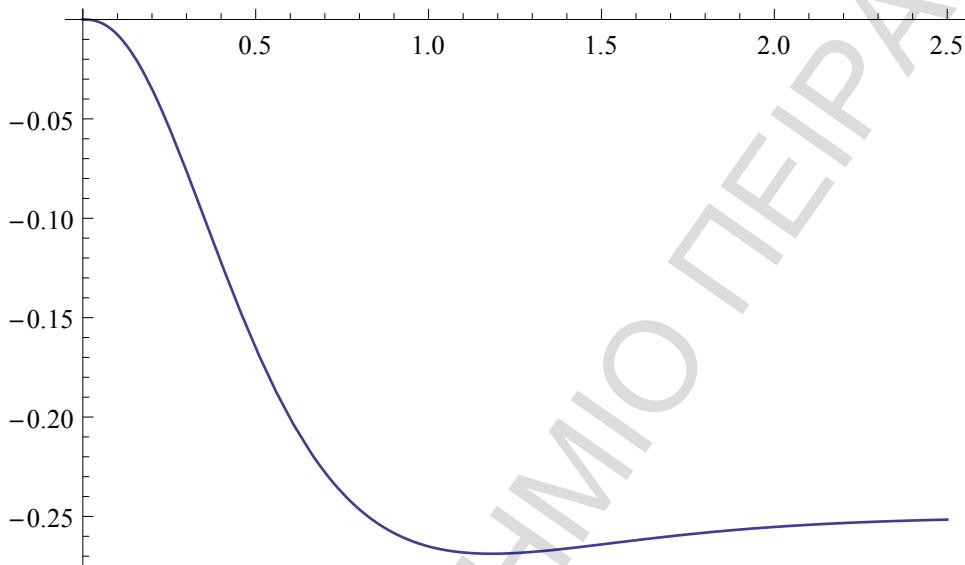
Σχήμα 7 Η συνάρτηση συνδιακύμανσης για $r = 3$ και $\lambda = 5$ 

Στο Σχήμα 7 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης είναι και εδώ γνησίως φθίνουσα. Επισημαίνουμε όμως ότι αν και φθίνει και αυτή αρκετά απότομα σταθεροποιείται για μεγάλες τιμές του t σε τιμή μικρότερη συγκριτικά με το Σχήμα 6 αφού παίρνει την τιμή -0.0260 . Για το ίδιο λοιπόν r και μεγαλύτερο λ στο παρόν Σχήμα παρουσιάζεται αυτή η διαφορά.

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης της κατανομής Γάμμα για διάφορες τιμές των παραμέτρων (r, λ) στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση.

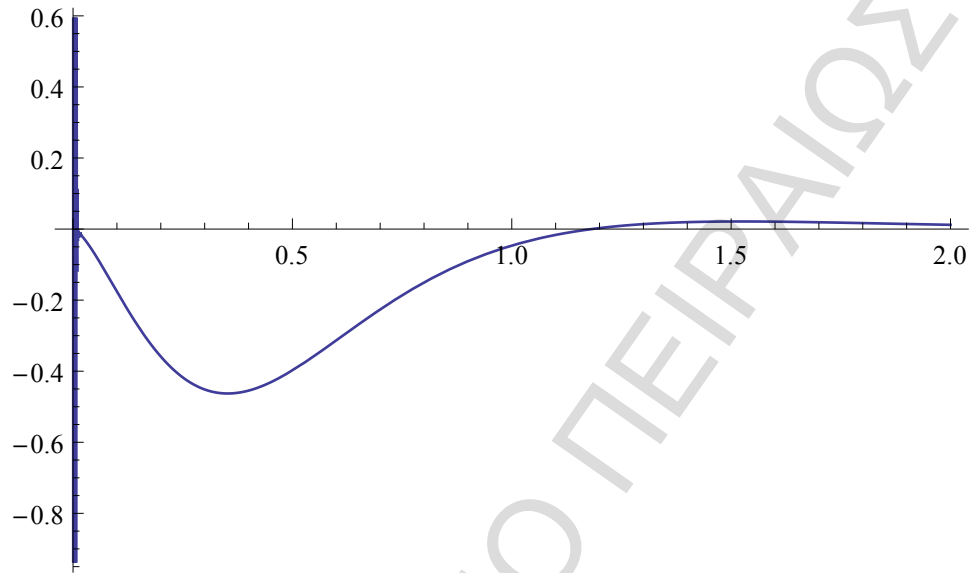
Παράδειγμα 13 Υπολογισμός συνάρτησης συσχέτισης της κατανομής Γάμμα για διάφορες τιμές των παραμέτρων (r, λ) στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση.

Σχήμα 8 Η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 3$

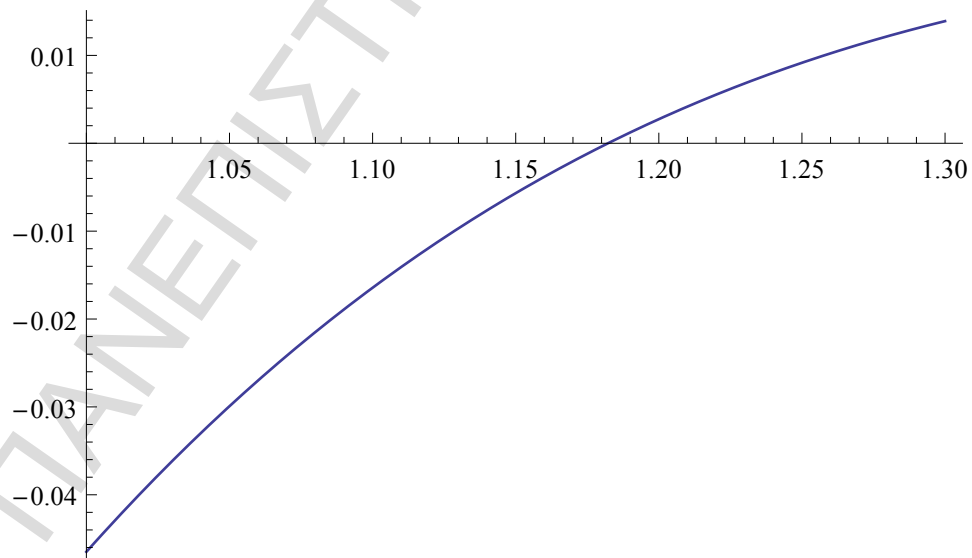


Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται ότι η συνάρτηση αλλάζει μονοτονία περίπου στο σημείο 1.17. Για να διερευνηθεί περαιτέρω η ένδειξη αυτή κάνουμε το διάγραμμα της πρώτης παραγώγου (σε δύο διαφορετικές κλίμακες) όπως φαίνεται από το επόμενο σχήμα όπου διαπιστώνουμε ότι όντως αλλάζει η μονοτονία στο σημείο 1.17.

Σχήμα 9 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 3$



Σχήμα 10 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 3$

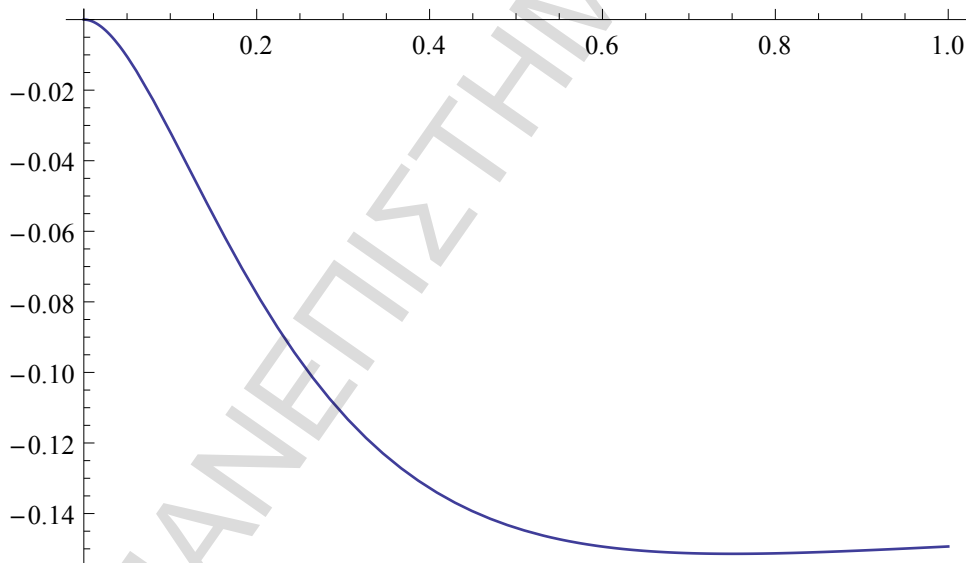


4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.61

Λόγω πολυπλοκότητας του τύπου της συνάρτησης πρώτης παραγώγου σημειώνουμε πως το *Mathematica* δεν μπορεί να λύσει την εξίσωση αυτή. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε τη γραφική επίλυση και διαπιστώνουμε ότι στο σημείο 1.17 μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Παρουσιάζει λοιπόν η συνάρτηση συσχέτισης Τοπικό Ελάχιστο στην τιμή 1.17. Άρα η αρχική μας ένδειξη επαληθεύεται. Συμπερασματικά λοιπόν στο Σχήμα 8 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως φθίνουσα από το 0 μέχρι και το 1.17 (T.E.) ενώ είναι αύξουσα μέχρι και το 2. Το επιβεβαιώνουν και τα διαγράμματα της παραγώγου της συσχέτισης. Εν συνεχεία δείχνει να σταθεροποιείται και συγκλίνει στον αριθμό -0.024. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το τρόπο υπολογισμού και τις εντολές που χρησιμοποιήσαμε με το μαθηματικό πρόγραμμα *Mathematica* ανατρέξτε στο Παράρτημα Δ.

Στο επόμενο σχήμα θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$.

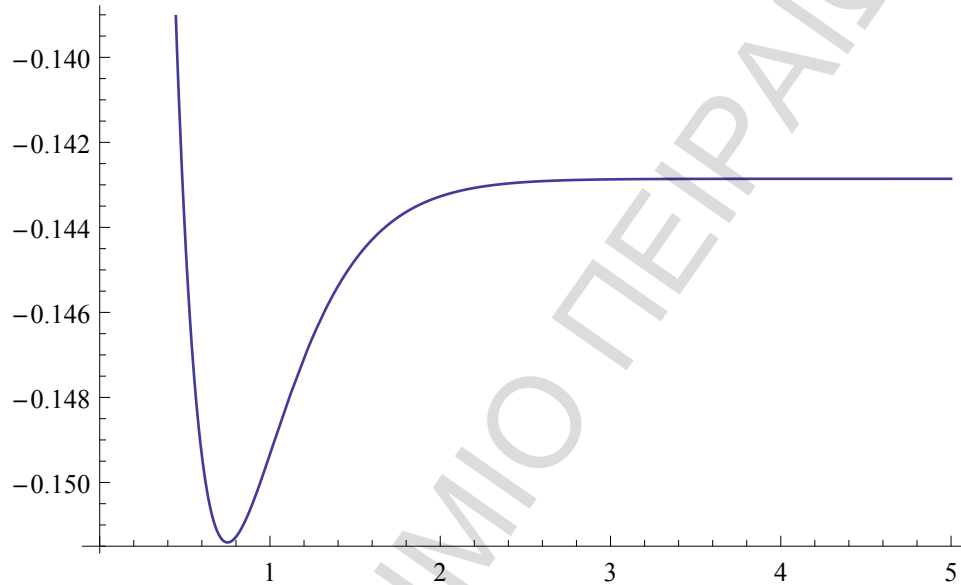
Σχήμα 11 Η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$ ισούται με:



Στο σχήμα 11 παίρνουμε την ένδειξη ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι και το σημείο 0.7. Για αυτό το λόγο θα εξετάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συσχέτισης της παραγώγου για ένα ακριβέστερο συμπέρασμα μελέτης της μονοτονίας της.

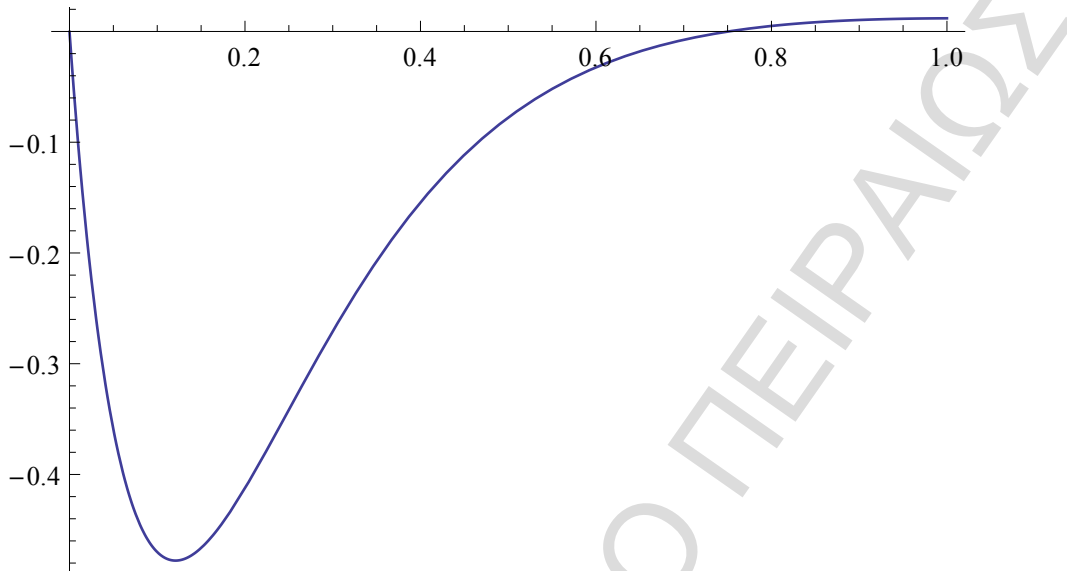
Στο Σχήμα 12 παρατηρούμε ότι για $t \rightarrow \infty$ η συνάρτηση σταθεροποιείται στη τιμή -0.143 .

Σχήμα 12 Η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$ ισούται με:

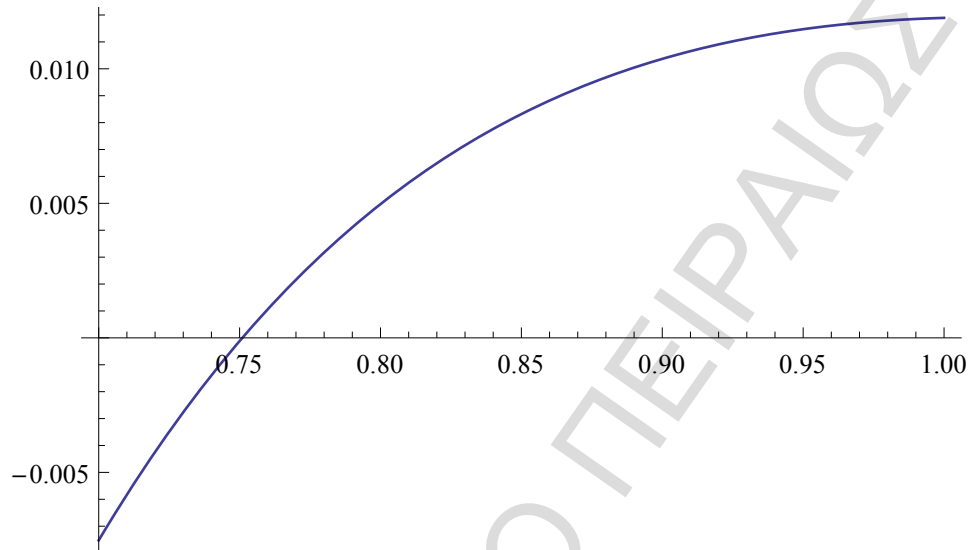


Το επόμενο διάγραμμα μας πληροφορεί για την παράγωγο της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$.

Σχήμα 13 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$



Όπως παρατηρούμε στα Σχήματα 13 και 14 η αρχική μας ένδειξη ήταν σωστή διότι η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο 0.751. Παρουσιάζει λοιπόν η συνάρτηση συσχέτισης Τοπικό Ελάχιστο στη τιμή 0.751. Σημειώνουμε επιπλέον ότι και στο παρόν παράδειγμα είναι αρκετά δύσκολος ο τύπος της παραγώγου. Συγκεκριμένα, δεν μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση του *Mathematica* για αυτό το λόγο προχωρήσαμε σε γραφική επίλυση μηδενισμού της παραγώγου.

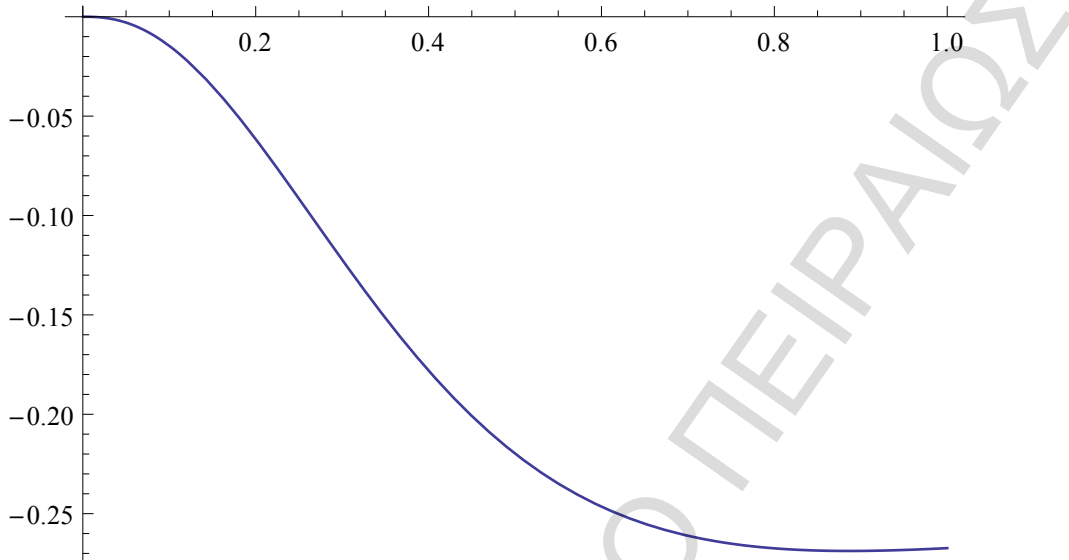
Σχήμα 14 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 2$ και $\lambda = 4$ 

Συνοπτικά λοιπόν στο Σχήμα 13 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως φθίνουσα από το 0 μέχρι και το 0.75 (Τ.Ε.) ενώ είναι αύξουσα μέχρι και το 2 όπως διαπιστώσαμε και από τα αντίστοιχα διαγράμματα της παραγώγου της συνάρτησης συσχέτισης. Εν συνεχεία συγκλίνει στον αριθμό -0.143. Ενδεικτικά η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 2$, $\lambda = 4$ ισούται με:

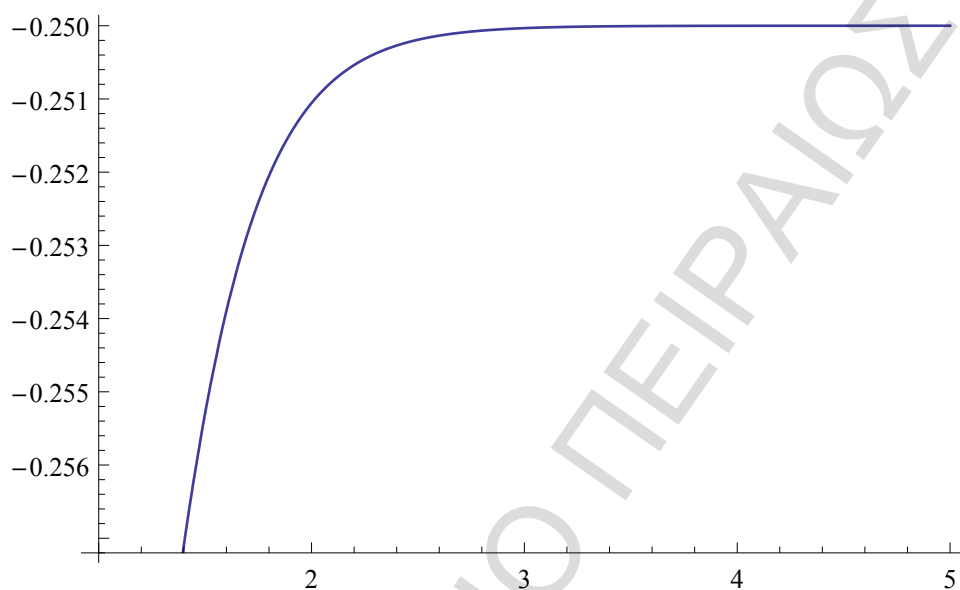
$$\rho[B[t], A[t]] = \frac{e^{-16t}(-1 + e^{4t})^4}{\sqrt{7 - e^{-16t} + 2e^{-8t}} \sqrt{e^{-16t}(-1 + 8e^{4t} - 30e^{8t} + 7e^{16t} + e^{12t}(16 - 96t))}}$$

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.65

Σχήμα 15 Η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 4$



Αρχικά στο Σχήμα 15 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι και το σημείο 0.8 (θα ελεγχθεί εν συνεχεία με τη γραφική μέθοδο μηδενισμού της πρώτης παραγώγου, δείτε Σχήματα 16 και 17) και εν συνεχεία αύξουσα μέχρι και το σημείο 1 όπου είναι και η έκταση της κλίμακας του παρόντος γραφήματος.

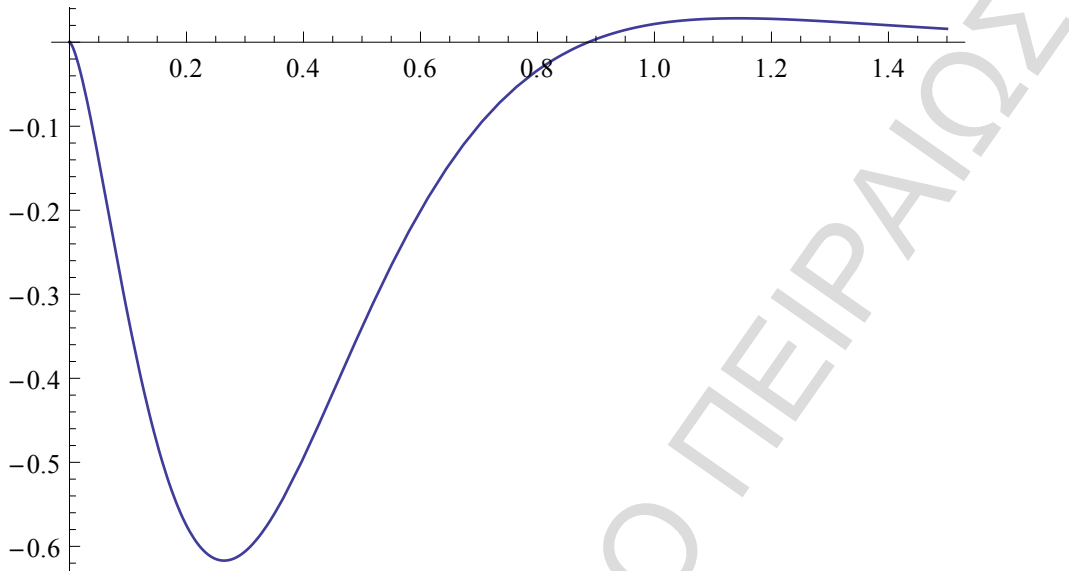
Σχήμα 16 Η συνάρτηση συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 4$ 

Στο Διάγραμμα 16 αρχικά αναφέρουμε ότι η κλίμακα εκτείνεται από το 1 έως το 5 και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως αύξουσα μέχρι και το σημείο 2.15. Στη συνέχεια για $t \rightarrow \infty$ σταθεροποιείται στον αριθμό -0.250.

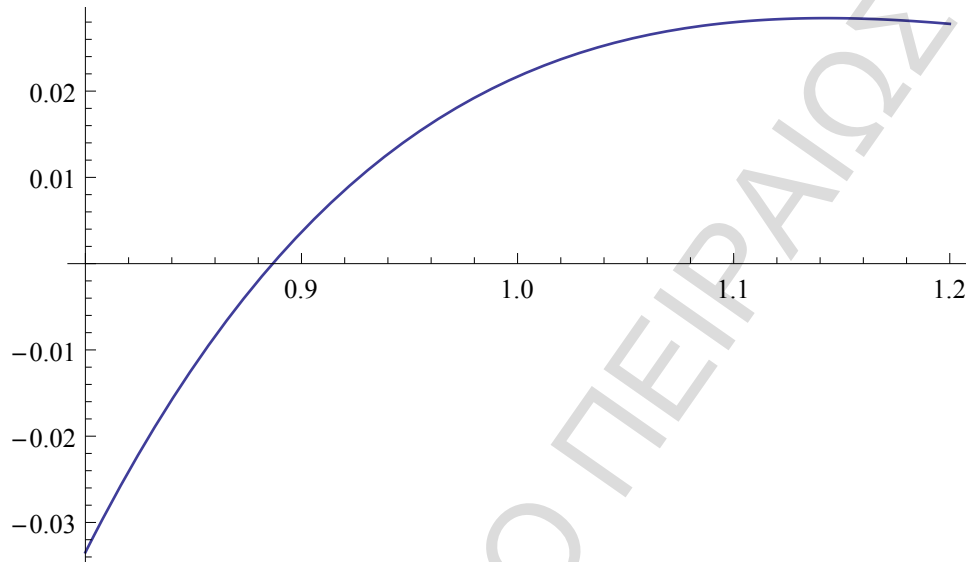
Στα επόμενα διαγράμματα παρουσιάζουμε την παράγωγο της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 4$.

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.67

Σχήμα 17 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 4$



Στο Σχήμα 17 έχουμε υπολογίσει την παράγωγο της συνάρτησης συσχέτισης. Επισημαίνουμε ότι και στην παρούσα περίπτωση το *Mathematica* συναντά δυσκολία στην επίλυση της εξίσωσης της παραγώγου και έτσι επιλέγουμε και εδώ τη γραφική επίλυση. Προσπαθώντας να εντοπίσουμε τη ρίζα της παραγώγου, το Διάγραμμα 18 σε κλίμακα από το 0 έως το 1.2 μας διευκολύνει αρκετά.

Σχήμα 18 Η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης για $r = 3$ και $\lambda = 4$ 

Έτσι λοιπόν είναι ξεκάθαρο ότι η παράγωγος της συνάρτησης συσχέτισης μηδενίζεται στη τιμή 0.82. Παρουσιάζει λοιπόν η συνάρτηση συσχέτισης Τοπικό Ελάχιστο στη τιμή 0.82.

Συμπερασματικά, στα Σχήματα 15 και 16 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συσχέτισης είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι και το 0.82 (Τ.Ε.) ενώ είναι αύξουσα μέχρι και το 2.2. Το επιβεβαιώνουν και τα διαγράμματα της παραγώγου της συσχέτισης. Εν συνεχεία η παράγωγος αυτή δείχνει να σταθεροποιείται και συγκλίνει στον αριθμό -0.0250. Τέλος

Στον επόμενο πίνακα, στην πρώτη του στήλη έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση συνδιακύμανσης και στη δεύτερη τη συνάρτηση συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση για τις ανωτέρω τιμές των παραμέτρων r , λ και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα για την κάθε περίπτωση.

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.69

Τιμές r και λ	$Cov[B(t)A(t)]$	$\rho[B(t)A(t)]$
$r = 3$ και $\lambda = 3$	-0.074	-0.250
$r = 3$ και $\lambda = 4$	-0.042	-0.250
$r = 3$ και $\lambda = 5$	-0.027	-0.250
$r = 2$ και $\lambda = 4$	-0.016	-0.143
$r = 2$ και $\lambda = 5$	-0.010	-0.143
$r = 4$ και $\lambda = 3$	-0.014	-0.336
$r = 4$ και $\lambda = 4$	-0.078	-0.333

Πίνακας 4.1: Συνάρτηση Συνδιακύμανσης και Συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση

Από τον πίνακα (4.1) παρατηρούμε τα εξής:
 Αρχικά, κρατώντας σταθερή την τιμή του r και συγκεκριμένα για $r = 3$ και αυξάνοντας τις τιμές του λ ($\lambda = 3, \lambda = 4, \lambda = 5$) η συνάρτηση συνδιακύμανσης μειώνεται και η συνάρτηση συσχέτισης παραμένει σταθερή και ίση με -0.250. Αντίστοιχα όταν η τιμή του r ισούται με $r = 2$ και το λ αυξάνεται, παίρνοντας τις τιμές 4 και 5 αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση συνδιακύμανσης μειώνεται και η συνάρτηση συσχέτισης παραμένει σταθερή και ίση με -0.143. Τέλος κρατώντας σταθερή και ίση με 4 την τιμή του r και θέτοντας $\lambda = 3, \lambda = 4$, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης αυξάνεται και η συνάρτηση συσχέτισης μεταβάλλεται ελάχιστα. Αντίθετα τώρα, εάν διατηρήσουμε σταθερή την τιμή του λ και μεταβάλλουμε την τιμή του r τότε παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Για $\lambda = 3$ και $r = 3$ ή $r = 4$ η συνάρτηση συνδιακύμανσης μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή του r ενώ επίσης η συνάρτηση συσχέτισης μειώνεται (από -0.250 σε -0,336). Για $\lambda = 4$ και $r = 2$ ή $r = 3$ ή $r = 4$ και εδώ η συνάρτηση συνδιακύμανσης μειώνεται καθώς επίσης και η συνάρτηση συσχέτισης (από -0,143 σε -0,250 και -0,333). Τέλος για $\lambda = 5$ και $r = 2$ ή $r = 3$ έχουμε παρόμοια συμπεριφορά στις τιμές των συναρτήσεων συνδιακύμανσης και συσχέτισης, δηλαδή μειώνονται και οι δύο συναρτήσεις όσο αυξάνεται η τιμή του r .

Στο παράδειγμα που ακολουθεί υπολογίζουμε τη συνάρτηση συσχέτισης στην σταθερή κατάσταση για την κατανομή Γάμμα.

Παράδειγμα 14 Υπολογισμός της συνάρτησης συσχέτισης στη σταθερή κατάσταση για την κατανομή Γάμμα.

Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης για την Γάμμα κατανομή (r, λ) . Αντικαθιστώντας τις τρεις πρώτες ροπές της κατανομής Γάμμα από τη σχέση (4.18) καθώς και με τη βοήθεια της σχέσης (4.21) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho[B(t), A(t)] &= 1 - \frac{2(r/\lambda)[r(r+1)(r+2)/\lambda^3]}{4(r/\lambda)[r(r+1)(r+2)]/(\lambda^3) - 3[r^2(r+1)^2/\lambda^4]} \\ &= 1 - \frac{2r+4}{r+5} \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι, για $t \rightarrow \infty$:

- Για $r < 1$ η συσχέτιση είναι θετική.
- Για $r = 1$ η συσχέτιση ισούται με μηδέν.
- Για $r > 1$ η συσχέτιση είναι αρνητική.

Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι ασυμπτωτικά η συσχέτιση δεν εξαρτάται από τη παράμετρο λ , ενώ η συνδιακύμανση εξαρτάται όπως είδαμε στο Παράδειγμα 10.

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΑΜΜΑ.71

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήσαμε την συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης. Μέσω της από κοινού συνάρτησης κατανομής του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης υπολογίσαμε έναν κλειστό τύπο στην χρονικά εξαρτημένη περίπτωση και έναν απλό τύπο για την σταθερή κατάσταση. Επίσης, υπολογίστηκε η συνάρτηση συνδιακύμανσης του προδρομικού και αναδρομικού χρόνου εμφάνισης για την σταθερή κατάσταση. Τέλος, υπολογίστηκαν αρκετά αριθμητικά παραδείγματα για τις συναρτήσεις συνδιακύμανσης και συσχέτισης στην σταθερή κατάσταση καθώς και για την χρονικά εξαρτημένη κατάσταση με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος *Mathematica*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 5

Εκτίμηση προδρομικού χρόνου

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ένα στατιστικό πρόβλημα (εν αντιθέσει με τα προηγούμενα κεφάλαια που ασχοληθήκαμε με ένα στοχαστικό πρόβλημα) και αφορά την εκτίμηση του προδρομικού χρόνου ζωής όταν έχουμε διαθέσιμο ένα τυχαίο δείγμα από ενδιάμεσους χρόνους, η (κοινή) κατανομή F των οποίων δεν είναι γνωστή. Αντίστοιχα προβλήματα έχουν μελετηθεί στα άρθρα των *Grubel and Pitts*(1993), *Baxter and Li* (1994), *Pitts and Politis* (2000). Σημαντικό ρόλο στη μεθοδολογία που θα ακολουθήσει είναι η **συνέπεια** του δειγματικού μας εκτιμητή. Στην προσπάθειά μας λοιπόν να εντοπίσουμε συνεπή εκτιμητή θα παίζει βασικό ρόλο η εμπειρική συνάρτηση κατανομής $\hat{F}_n(x)$ καθώς επίσης και η εκτιμώμενη ανανεωτική μας συνάρτηση $\hat{U}_n(x)$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος *Glivenko – Cantelli* που επιτυγχάνουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για την εμπειρική συνάρτηση καθώς επίσης και με κάποια αποτελέσματα των *Grubel και Pitts* (1993) μπορούμε να αποφανθούμε χρήσιμα συμπεράσματα για την ανανεωτική μας συνάρτηση (ομοιόμορφη σύγκλιση σε φραγμένα διαστήματα). Τέλος μέσω του Λήμματος 1 και της Πρότασης 4 καταλήγουμε ότι υπάρχει συνεπής εκτιμητής για τον προδρομικό χρόνο ζωής. Ξεκινώντας λοιπόν από την αρχή ας ορίσουμε την έννοια της συνέπειας ενός δειγματικού εκτιμητή.

5.1 Συνέπεια Εκτιμητή

Η συνέπεια που προτάθηκε από τον *R.A.Fisher* αποτελεί μία ιδιότητα ενός δειγματικού εκτιμητή και δηλώνει το εξής: Έστω ότι έχουμε μία ακολουθία από εκτιμητές $\{T_n \equiv T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) : n \geq 1\}$ για κάποια άγνωστη πραγματική παραμετρική συνάρτηση $\tau(\theta)$ όπου $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει εξάρτηση των εκτιμητών από το μέγεθος του δείγματος n και αυτό θα το δηλώνουμε βάζοντας το n ως δείκτη στους εκτιμητές μας. Για περισσότερες πληροφορίες δείτε *Mukhopadhyay* (2000). Σύμφωνα λοιπόν με τα ανωτέρω έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4 Συνέπεια Εκτιμητή

Θεωρούμε $\{T_n \equiv T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) : n \geq 1\}$ μία ακολουθία εκτιμητών για κάποια άγνωστη παραμετρική συνάρτηση $\tau(\theta)$ όπου $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε ο T_n ονομάζεται *συνεπής* για τη ποσότητα $\tau(\theta)$ εάν και μόνο αν:

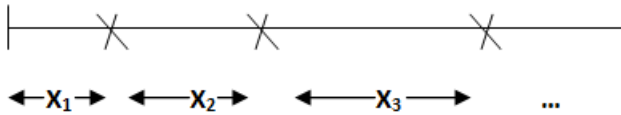
$$T_n \longrightarrow \tau(\theta) \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

Επίσης ο T_n ονομάζεται *μη-συνεπής* για την ποσότητα $\tau(\theta)$ εάν ο T_n δεν είναι συνεπής για την $\tau(\theta)$.

5.2 Περιγραφή του προβλήματος

Έστω ότι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα από μία άγνωστη κατανομή F , η οποία αποτελεί την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων σε μία ανανεωτική ανέλιξη.

Σχήμα 19



Μπορούμε να υπολογίσουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\#\{X_i \leq n\}}{n}.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F συνδέεται με την ανανεωτική μας συνάρτηση $U(x)$ και αντίστοιχα η ανανεωτική συνάρτηση συνδέεται με τον προδρομικό χρόνο ζωής $Z_2(x)$. Έτσι λοιπόν θέλουμε να διαπιστώσουμε εάν από την εκτιμήτρια που διαθέτουμε, $\hat{F}_n(x)$, (δηλαδή την εμπειρική συνάρτηση κατανομής) μπορούμε να υπολογίσουμε την εκτιμώμενη ανανεωτική συνάρτηση $\hat{U}_n(x)$ και τέλος τον εκτιμώμενο προδρομικό χρόνο ζωής $\hat{Z}_{2,n}(x)$. Σχηματικά λοιπόν τα παραπάνω παριστάνονται ως εξής:

$$F(x) \longrightarrow U(x) \longrightarrow Z_2(x)$$

$$\hat{F}_n(x) \longrightarrow \hat{U}_n(x) \longrightarrow \hat{Z}_{2,n}(x)$$

όπου:

$$Z_2(x) = g_{2,x}(t) + \int Z_2(x-y)dF(y)$$

δηλώνει την ουρά της κατανομής του προδρομικού χρόνου εμφάνισης. Όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1, που αναφέρθηκε στο τέλος του Κεφαλαίου 2, η λύση της εξίσωσης ισούται με:

$$Z_2(t) = \int g_{2,x}(t-y)dU(y) \quad (5.1)$$

5.3 Ομοιόμορφη Σύγκλιση Εκτιμητών

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών γνωρίζουμε ότι για κάθε σταθερό x , η $\hat{F}_n(x)$ είναι μία ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές που συγκλίνει στην $F(x)$ σχεδόν βέβαια, δηλαδή η \hat{F}_n συγκλίνει στην F σημειακά. Οι *Glivenko* και *Cantelli* ενδυνάμωσαν το παραπάνω αποτέλεσμα αποδεικνύοντας ότι η \hat{F}_n συγκλίνει ομοιόμορφως στην F με πιθανότητα 1. Ισχύει λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4 (Glivenko Cantelli)

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από μία συνάρτηση κατανομής F και η $\hat{F}_n(x)$ η εμπειρική συνάρτηση κατανομής. Τότε για αυτό το δείγμα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \hat{F}_n - F \right\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| = 0$$

σχεδόν βέβαια.

Στην συνέχεια θα πρέπει να διαπιστώσουμε εάν ο εκτιμητής $\widehat{Z}_{2,n}$ είναι συνεπής για την συνάρτηση $Z_2(x)$ ως προς την ομοιόμορφη νόρμα. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει

$$\sup_x \left| \hat{Z}_n(x) - Z(x) \right| \rightarrow 0$$

με πιθανότητα 1, όταν $n \rightarrow \infty$.

Για να κατασκευάσουμε τον εκτιμητή $\hat{Z}_{2,n}(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα *plug-in*. Υπενθυμίζουμε πως θα ακολουθήσουμε τη πορεία

$$\hat{F}_n(x) \longrightarrow \hat{U}_n(x) \longrightarrow \hat{Z}_{2,n}(x).$$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x)$$

και θεωρούμε ότι η F είναι συνεχής.

Η εκτιμήτρια ανανεωτική συνάρτηση, την οποία αποκαλούμε εμπειρική ανανεωτική συνάρτηση, ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{U}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}_n^{*k}(x)$$

όπου η \hat{F}_n είναι μία αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση. Διάφορες ιδιότητες της ποσότητας αυτής έχουν μελετηθεί στο άρθρο των *Grubel & Pitts* (1993). Για το επόμενο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (5.1). Γνωρίζουμε ότι για την ουρά του προδρομικού χρόνου ζωής στο χρονικό σημείο t η $Z_2(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$Z_2(t) = (U \star g_{2,x})(t)$$

επομένως χρησιμοποιώντας την μέθοδο *plug-in* μπορούμε να γράψουμε την εκτιμήτρια της Z_2 ως:

$$\hat{Z}_{2,n} = \hat{U}_n \star \hat{g}_{2,x,n}.$$

Επιπλέον γνωρίζουμε από τη σχέση (3.7) ότι:

$$g_{2,x}(t) = [1 - F(t)] 1_{[0,x]}(t).$$

Συνεπώς η εκτιμώμενη ποσότητα $\hat{g}_{2,x,n}(t)$ θα ισούται με:

$$\hat{g}_{2,x,n}(t) = [1 - \hat{F}_n(t)] 1_{[0,x]}(t). \quad (5.2)$$

Επιστρέφοντας στο θεώρημα *Glivenko-Cantelli* και προσπαθώντας να συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρουμε το εξής: Σύμφωνα με το θεώρημα *Glivenko-Cantelli*, υπάρχει ένα σύνολο

$$A = \{\omega_i : \omega_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}, \dots)\}$$

που αποτελείται από ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση κατανομής F , έτσι ώστε

$$\lim_n \sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0$$

για όλα τα ω_i στο σύνολο A και επιπλέον έχουμε $P(A) = 1$. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι για όλα τα $\omega_i \in A$,

1. η εμπειρική ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο ω_i συγκλίνει $\forall x \in \mathfrak{R}$, στην ανανεωτική συνάρτηση $U(x)$
2. στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για τον εμπειρικό εκτιμητή $\hat{Z}_{2,n}$ ο οποίος κατά συνέπεια συγκλίνει ομοιόμορφα στη ποσότητα $Z_2(t)$.

Το πρώτο από τα δύο αυτά αποτελέσματα, εξασφαλίζεται από την παρακάτω πρόταση, η οποία μάλιστα μας δίνει ότι η σύγκλιση του εκτιμητή \hat{U}_n στη συνάρτηση U είναι ομοιόμορφη σε φραγμένα διαστήματα.

Πρόταση 3 Grubel και Pitts (1993)

Έστω F μία συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$, U η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση, \hat{F}_n η εμπειρική συνάρτηση που προκύπτει από ένα δείγμα μεγέθους n από την F και \hat{U}_n η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην \hat{F}_n . Τότε η $\hat{U}_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $U(x)$ σε κάθε φραγμένο διάστημα δηλαδή ισχύει:

$$\lim \sup_{x \in [0, t]} |\hat{U}_n(x) - U(x)| = 0.$$

Επισημαίνουμε πως η σύγκλιση **δεν** μπορεί να είναι σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$ διότι όπως γνωρίζουμε από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα:

$$U(x) \sim \frac{x}{\mu} \quad \text{για } x \rightarrow \infty$$

όπου:

$$\mu = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

άρα και η:

$$\hat{U}_n(x) \sim \frac{x}{\hat{\mu}_n}$$

όπου $\hat{\mu}_n$ είναι ο μέσος όρος της \hat{F}_n ,

$$\hat{\mu}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Για να είχαμε σύγκλιση σε όλο το $[0, \infty)$ θα έπρεπε να ισχύει:

$$\hat{\mu}_n = \mu$$

για κάθε n μεγαλύτερο ή ίσο από κάποια θετική σταθερά n_0 . Όπως γνωρίζουμε όμως από το νόμο των μεγάλων αριθμών ισχύει:

$$\lim \hat{\mu}_n = \mu$$

χωρίς απαραίτητα οι τιμές $\hat{\mu}_n$ να είναι ίσες με το μ .

5.4 Συνέπεια Εκτιμητή

Στη συνέχεια με την βοήθεια των ανωτέρω θα αποδείξουμε ότι ο εκτιμητής $\hat{Z}_{2,n}(t)$ είναι **συνεπής** εκτιμητής για τη ποσότητα $Z_2(t)$. Για να το αποδείξουμε αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$\left| \hat{Z}_{2,n}(t) - Z_2(t) \right| \rightarrow 0, \text{ με πιθανότητα } 1. \quad (5.3)$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$Z_2(t) = (g_{2,x} \star U)(t).$$

Όπως είναι λογικό, θα χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση της $Z(t)$, δηλαδή τη συνάρτηση $\hat{Z}_n(t)$ η οποία ισούται με:

$$\hat{Z}_{2,n}(t) = (\hat{g}_{2,x,n} \star \hat{U}_n)(t)$$

όπου η $\hat{g}_{2,x}(t)$ δίνεται από τη σχέση (5.2). Αρχικά παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το θεώρημα *Glivenko – Cantelli* η εμπειρική συνάρτηση κατανομής $\forall t$ συγκλίνει σημειακά στην F . Δηλαδή ισχύει:

$$\left| \hat{F}_n(t) - F(t) \right| \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

επομένως θα ισχύει:

$$\left| \underbrace{\left[1 - \hat{F}_n(t+x) \right]}_{\hat{g}_{2,x,n}(t)} - \underbrace{\left[1 - F(t+x) \right]}_{g_{2,x}(t)} \right| \rightarrow 0, \quad (5.5)$$

$\forall t$ ομοίμορφα στο 0. Από τις σχέσεις λοιπόν (5.4) και (5.5) παρατηρούμε ότι $\forall t$ συγκλίνουν ομοίμορφα η $\hat{F}_n \rightarrow F$ καθώς και η $\hat{g}_{2,x,n}(t) \rightarrow g_{2,x}(t)$. Το επόμενο ερώτημα μας είναι εάν η $\hat{Z}_{2,n}(t) \rightarrow Z_2(t)$ δηλαδή εάν ισχύει η συνέπεια της συνέλιξης:

$$(\hat{g}_{2,x,n} \star \hat{U}_n)(t) \rightarrow (g_{2,x} \star U)(t) \quad (5.6)$$

ομοίμορφα ως προς t για κάθε σταθερό $x \geq 0$. Για την απάντηση της ανωτέρω ερώτησης θα μας φανεί χρήσιμο το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1 (Baxter, και Li 1994)

Έστω $\{f_n(t)\}$ είναι μία ακολουθία από πεπερασμένες, μη φθίνουσες συναρτήσεις στο $[0, b]$ και έστω $f(t)$ είναι μία συνεχής και πεπερασμένη συνάρτηση στο $[0, b]$ έτσι ώστε η $f_n(t)$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(t)$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Επιπλέον έστω $g_n : [0, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, $n = 1, 2, \dots$ μία ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στη $g : [0, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Τότε:

$$\int_0^x g_n(t) df_n(t) \longrightarrow \int_0^x g(t) df(t) \quad (5.7)$$

ομοιόμορφα για $x \in [0, b]$ καθώς $n \rightarrow \infty$, όπου όλα τα ολοκληρώματα ερμηνεύονται ως ολοκληρώματα Lebesgue (βλέπε παράρτημα Γ).

Πρόταση 4 Έστω F μία συνεχής (ώστε να ισχύει το ανωτέρω Λήμμα) συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$, U η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση, \hat{F}_n η εμπειρική συνάρτηση κατανομής που προκύπτει από ένα δείγμα μεγέθους n από την F και \hat{U}_n η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην \hat{F}_n . Τότε ο εκτιμητής \hat{Z}_2 είναι συνεπής εκτιμητής ως προς την ομοιόμορφη νόρμα σε κάθε διάστημα $[0, b]$ για την ποσότητα $Z_2(t)$ του προδρομικού χρόνου ζωής.

Απόδειξη Εάν θέσουμε όπου $t = t - y$ στο τύπο g_n της σχέσης (5.7) καθώς επίσης και όπου $df_n(t) = d\hat{U}_n(t)$, $\hat{g}_{2,x,n} = g_n$, $g_{2,x} = g$ παίρνουμε:

$$\int_0^t \hat{g}_{2,x,n}(t-y) d\hat{U}_n(y) \longrightarrow \int_0^t g_{2,x}(t-y) dU(y). \quad (5.8)$$

Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε:

1. Η $\hat{U}_n \longrightarrow U$ σύμφωνα με την πρόταση των Grubel και Pitts με πιθανότητα 1.
2. Η $\hat{g}_{2,x,n}(t) \longrightarrow g_{2,x}(t)$ από σχέση (5.5) με πιθανότητα 1.
3. Τη συνέχεια της συνελίξης $\int_0^x \hat{g}_{2,x,n}(t-y) d\hat{U}_n(t) \longrightarrow \int_0^x g_{2,x}(t-y) dU(t)$.

Με βάση το Λήμμα 1, από τα ανωτέρω έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για $t \in [0, b]$ δηλαδή ισχύει:

$$\sup_{t \in [0, b]} \left| \hat{Z}_{2,n}(t) - Z_2(t) \right| \longrightarrow 0 \quad (5.9)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 4.

Παρατήρηση

Η Πρόταση 4 έχει αποδειχθεί (με άλλο τρόπο) στο άρθρο των *Politis and Pitts* (2000).

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Μήπως μπορούμε να ισχυροποιήσουμε την ανωτέρω σχέση; Δηλαδή η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη $\forall t \in [0, \infty)$;

Γνωρίζουμε πως το U είναι ένα άπειρο μέτρο, ενώ για κάθε x σταθερό η $g_x(t)$ είναι η ουρά κάποιας κατανομής που είναι πεπερασμένη (αφού τείνει στη μονάδα.) Το ερώτημα έγκειται λοιπόν στο να προσδιορίσουμε την συνέλιξη $Z(t) = (g_x \star U)(t)$. Είναι άπειρη ή πεπερασμένη; Γνωρίζουμε πως η $Z(t)$ είναι η ουρά της κατανομής του προδρομικού χρόνου και επομένως η ουρά μίας συνάρτησης κατανομής δηλαδή η συνολική μάζα πιθανότητας θα ισούται με 1. Μία πρώτη διαισθητική εκτίμηση λοιπόν είναι ότι η Πρόταση 4 θα πρέπει να ισχύει για $\forall t \in [0, \infty)$.

Για την επιβεβαίωση του ανωτέρου συλλογισμού θα μας φανεί χρήσιμο το ακόλουθο αποτέλεσμα που δίνεται ως η Άσκηση 5 του κεφαλαίου 7 στο βιβλίο του Feller (1971).

Λήμμα 2

Αν μία ακολουθία F_n από αύξουσες συναρτήσεις συγκλίνει σημειακά σε μία **συνεχή** συνάρτηση F , τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) &= F(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| &= 0. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που ακολουθεί, μία συνάρτηση ονομάζεται φραγμένης κύμανσης εάν η κύμανση της είναι πεπερασμένη.

Ορισμός 5

Για κάθε πραγματική συνάρτηση f σε ένα σύνολο $J \subset \mathfrak{R}$, η συνολική της κύμανση στο J ορίζεται ως:

$$Var_f J := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : x_0 < x_1 < \dots < x_n, x_i \in J \right\}$$

όπου $x_i \in J$ για $i = 0, 1, \dots, n$. Εάν η $\text{Var}_f J < +\infty$ λέμε ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης στο J . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις με φραγμένη κύμανση σε όλο τον μη αρνητικό ημιάξονα δηλαδή θα εξεταστεί η περίπτωση όπου $J = [0, +\infty)$

Πιο συγκεκριμένα, για να μπορέσουμε να επεκτείνουμε το Λήμμα 2 στη δική μας κατηγορία συναρτήσεων εκμεταλλευόμαστε την ακόλουθη Πρόταση όπου μας πληροφορεί ότι μία συνάρτηση έχει φραγμένη κύμανση στο διάστημα $(0, \infty)$ αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο αυξουσών και φραγμένων συναρτήσεων. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Πρόταση 5

Μία μη αρνητική συνάρτηση f έχει φραγμένη κύμανση στο διάστημα $(0, \infty)$ αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

όπου οι f^+ , f^- είναι αύξουσες και φραγμένες.

Με βάση λοιπόν τη Πρόταση 5, θα αποδείξουμε ότι το Λήμμα 2 ισχύει και για συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.

Πρόταση 6

Αν μία ακολουθία $\{F_n\}$ από συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $(0, \infty)$ συγκλίνει σημειακά σε μία συνεχή συνάρτηση F , τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη

Έστω $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης $\forall n = 1, 2, \dots, n$ η F_n γράφεται ως:

$$F_n(t) = \underbrace{F_n^+(t) - F_n^-(t)}_{\text{αύξουσες}}$$

επιπλέον,

$$F_n^+(t) \rightarrow F^+(t)$$

$$F_n^-(t) \rightarrow F^-(t).$$

Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι η σύγκλιση

$$F_n^+(t) \rightarrow F^+(t)$$

και

$$F_n^-(t) \rightarrow F^-(t)$$

είναι ομοιόμορφη.

Άρα,

$$\underbrace{F_n^+ - F_n^-}_{F_n} \rightarrow \underbrace{F^+ - F^-}_F$$

ομοιόμορφα.

Με βάση τη σχέση (5.9) ισχύει ότι:

∀ω σε ένα σύνολο πιθανότητας ένα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\hat{Z}_{2,n}(t)}_{\text{φραγμένη κύμανση}} = \underbrace{Z_2(t)}_{\text{συνεχής}},$$

όπου για $\forall x$ σταθερό

$$g_{2,x}(t) = 1 - F(t+x)$$

και

$$\begin{aligned} Z_2(t) &= \int_0^t g_{2,x}(t-y) dU(y) \\ &= \underbrace{g_{2,x}(t)}_{\text{μάζα στο μηδέν}} + \int_0^t g_{2,x}(t-y) u(y) dy \\ &= \underbrace{1 - F(t+x)}_{\text{συνεχής}} + \int \underbrace{[1 - F(x+t-y)]}_{\text{συνεχής}} \underbrace{u(y) dy}_{\text{φραγμένη}} \end{aligned}$$

όπου σύμφωνα με το θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης για $t \rightarrow \infty$ ο πρώτος όρος του τελευταίου ολοκληρώματος τείνει στο μηδέν.

• Για την εκτίμηση του προδρομικού χρόνου επανεμφάνισης $B(t)$ παρατηρούμε ότι αφού ισχύει η σχέση (3.6) εμείς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για εκτίμηση του προδρομικού χρόνου την ακόλουθη σχέση και εν συνεχεία να αποδείξουμε τη συνέπεια του εκτιμητή:

$$P[\hat{B}(t) > x] = (\hat{U}_n \star \hat{g}_{x,n})(t). \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας και εδώ το Λήμμα 1 συμπεραίνουμε ότι για τη κατανομή της ουράς ισχύει:

$$P[\hat{B}(t) > x] \longrightarrow P[B(t) > x]$$

δηλαδή $\forall t$ συγκλίνει σημειακά η συνέλιξη:

$$\hat{U}_n(t) \star \hat{g}_{x,n}(t) \longrightarrow U(t) \star g(t) \quad (5.11)$$

με πιθανότητα 1.

Χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση 4 και την Πρόταση 5, προκύπτει το εξής:

Πρόταση 7

Κάτω από τις υποθέσεις της Πρότασης 4, ισχύει ότι:

$$\limsup_n \sup_t \left| \hat{U}_n(t) \star \hat{g}_{x,n}(t) - U(t) \star g_{2,x}(t) \right| = 0. \quad (5.12)$$

Συνεπώς, αφού αποδείξαμε ότι ισχύει:

$$\left| \hat{U}_n(t) \star \hat{g}_{x,n}(t) - U(t) \star g(t) \right| \longrightarrow 0,$$

ο εκτιμητής για τη ποσότητα $B(t)$ είναι συνεπής.

Κλείνοντας, σε αυτό το κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με ένα βασικό στατιστικό πρόβλημα που αφορούσε την εκτίμηση του προδρομικού χρόνου ζωής δοθέντος ενός τυχαίου δείγματος από ενδιάμεσους χρόνους όπου η κοινή κατανομή F δεν είναι γνωστή. Αποδείξαμε επίσης τα εξής δύο πράγματα: Αφενός ότι ο δειγματικός εκτιμητής που θεωρήσαμε είναι συνεπής και αφετέρου με τη βοήθεια της εμπειρικής συνάρτησης καθώς και του θεωρήματος *Glivenko – Cantelli* επιτυγχάνουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για την εκτιμώμενη ανανεωτική συνάρτηση σε διάστημα $[0, b]$ αλλά και σε όλο τελικά το $(0, \infty]$.

Παράρτημα Α'

Θεωρήματα σύγκλισης κατανομών

Υπενθύμιση βασικών θεωρημάτων σύγκλισης.

Θεώρημα 5 Μονότονης Σύγκλισης

Έστω $0 \leq X_n \uparrow X$ τότε

$$0 \leq E(X_n) \uparrow E(X)$$

ή ισοδύναμα

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow E(X_n)$$

Στις σειρές (όπως και στο ολοκλήρωμα αντίστοιχα) μπορούμε να εναλλάσσουμε την μέση τιμή και τη σειρά, εφόσον οι ποσότητες είναι μη αρνητικές. Έστω $\xi_i \geq 0$, μη αρνητικές τ.μ. για $n \geq 1$ τότε:

$$E\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\xi_j).$$

Θεώρημα 6 Λήμμα Fatou

Έστω $X_n \geq 0$, τότε:

$$E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

Γενικότερα: Εάν υπάρχει $z \in L_1$ και $X_n \geq Z$ τότε:

$$E(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

Συνέπεια 1 Fatou Έστω $X_n \leq Z$ όπου $Z \in L_1$, τότε:

$$E(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

Θεώρημα 7 Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Lebesgue's dominated convergence)
Εάν $X_n \rightarrow X$ και υπάρχει μία τ.μ. Z που 'κυριαρχεί' την ακολουθία X_n με την $Z \in L_1$, τέτοια ώστε:

$$|X_n| \leq Z$$

τότε

$$E(X_n) \rightarrow E(X)$$

και

$$E(|X_n - X|) \rightarrow 0$$

Παράρτημα Β'

Μετασχηματισμός *Laplace Stieltjes* ($L - S$)

Ο μετασχηματισμός *Laplace* είναι ένας τελεστής που μετασχηματίζει, συνήθως ως προς το χρόνο. Χρησιμοποιείται για παράδειγμα σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σταθερών συντελεστών και ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις μετατρέποντας τις σε αλγεβρικές εξισώσεις. Ο μετασχηματισμός *Laplace* ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

όπου \mathcal{L} συμβολίζει το μετασχηματισμό *Laplace* και υπάρχει με τη προϋπόθεση ότι το επόμενο ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποιες πεπερασμένες θετικές τιμές των M .

$$\int_0^{\infty} |f(x)| e^{-\sigma x} dx \leq M$$

• Ο μετασχηματισμός *Laplace Stieltjes* ($L-S$) αναφέρεται σε μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής F ή και γενικότερα σε οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση (όπως για παράδειγμα η ανανεωτική μας συνάρτηση U) και ορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{F}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x)$$

ή αντίστοιχα

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dm(x).$$

88 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE STIELTJES (L-S)

Αν η F έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), τότε ο μετασχηματισμός Laplace είναι ισοδύναμος με τον μετασχηματισμό Laplace Stieltjes δηλαδή ισχύει:

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{F}(\lambda)$$

Όπως έχουμε αναφέρει, η ανανεωτική συνάρτηση ισούται με:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $L-S$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x) \right] (\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [F^{(k)}] (\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{F}(\lambda)]^k \\ &= \frac{1}{1 - \hat{F}(\lambda)} \end{aligned}$$

αν ισχύει $|\hat{F}(\lambda)| < 1$ αφού το άθροισμα στη προτελευταία γραμμή είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Αυτό ισχύει για κάθε λ αν η F είναι απόλυτα συνεχής.

• Μετασχηματισμός Laplace για την ανανεωτική πυκνότητα (*renewal density*). Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{*k}(x) \\ \Rightarrow \hat{u}(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{f}(\lambda)]^k \\ &= \frac{\hat{f}(\lambda)}{1 - \hat{f}(\lambda)}. \end{aligned}$$

Επομένως η ανανεωτική πυκνότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{u}(x) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{1 - \hat{f}(\lambda)} \quad (\text{B'.1})$$

και έτσι λοιπόν η ανανεωτική συνάρτηση με τη βοήθεια της ανανεωτικής πυκνότητας (B'.1) μπορεί να υπολογιστεί από το τύπο:

$$U(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt.$$

Εδώ $U(x)$ είναι η (άγνωστη) ανανεωτική συνάρτηση και $u(t)$ η ανανεωτική πυκνότητα. Συνεπώς, η σειρά που θα ακολουθήσουμε για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού $L-S$ είναι η εξής:

$$f \rightarrow \hat{f} \rightarrow \hat{u} \rightarrow u.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό *Laplace*.

• Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής όπως γνωρίζουμε δίνεται από τη σχέση: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\forall x \geq 0$, τότε ο μετασχηματισμός $L-S$ $\hat{F}(\lambda)$ ισούται με:

$$\hat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(s) = \hat{f}(s). \quad (\text{B'.2})$$

Αφού η F έχει σ.π.π. την f ισχύει ότι $\hat{F}(s) = \hat{f}(s)$ και επομένως η (B'.2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-ts} \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-s(t+\lambda)} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{e^{-s(\lambda+s)}}{\lambda+s} \right]_0^{\infty} \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda+s} \cdot \frac{1}{e^{\infty}} + \frac{1}{\lambda+s} \right] \\ \Rightarrow \hat{f}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda+s}. \end{aligned}$$

90 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE STIELTJES (L-S)

Γνωρίζουμε όμως ότι η ροπογεννήτρια της εκθετικής ισούται με :

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Επομένως

$$\hat{f}(t) = -\frac{\lambda}{\lambda + t} = M_X(-t).$$

Ο μετασχηματισμός L_S για την ανανεωτική πυκνότητα ισούται με :

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} \right]^\wedge(\lambda) \\ &= \frac{\hat{f}(\lambda)}{1 - \hat{f}(\lambda)} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\lambda+t}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+t}} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\lambda+t}}{\frac{t}{\lambda+t}} \\ \Rightarrow \hat{u}(t) &= \frac{\lambda}{t}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό L_S της $\hat{u}(\lambda)$ δηλαδή τον $u(y)$. Γνωρίζουμε ότι

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dm(x)$$

Με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος *Mathematica* υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* που ισούται με:

$$u(y) = \lambda$$

Επομένως η ανανεωτική συνάρτηση ισούται με:

$$\begin{aligned}U(x) &= 1 + \int_0^x u(y)dy \\ &= 1 + \int_0^x \lambda dy \\ &= 1 + \lambda x \\ \Rightarrow U(x) &= 1 + \lambda x.\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

92 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE STIELTJES ($L-S$)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Παράρτημα Γ'

Συνοπτική Επισκόπηση Θεωρίας Μέτρου

Ένα πολύ μεγάλο μέρος της θεωρίας που θα ακολουθήσει χρησιμοποιήθηκε από το βιβλίο *Measure Integral and Probability* των συγγραφέων *M. Karinsky* και *E. Kopp* (2004).

Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι συνήθως το \mathbb{R} . Αρχικά ορίζουμε ως \mathcal{M} όλα τα *Lebesgue* μετρήσιμα υποσύνολα του \mathbb{R} και m το μέτρο *Lebesgue*: $\mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$. Πώς προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα *Lebesgue*; Αντί να χωρίσουμε το πεδίο ορισμού της ολοκλήρωσης σε μικρά κομμάτια, διασπάμε το **πεδίο τιμών** της συνάρτησης. Υπολογίζουμε το:

$$\sum_{i=1}^N c_n m(f^{-1}(J_n)),$$

όπου m το μέτρο *Lebesgue* όπως δηλώθηκε ανωτέρω.

Ορισμός 6 Έστω ότι το E είναι *Lebesgue* μετρήσιμο σύνολο. Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : E \mapsto \mathbb{R}$ είναι **Lebesgue μετρήσιμη** εάν για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{-1}(I) = \{x \in E : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}$$

Εάν όλα τα σύνολα $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}$ δηλαδή είναι σύνολα *Borel* ονομάζουμε την f *Borel* μετρήσιμη ή απλά *Borel* συνάρτηση.

* Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι **μετρήσιμες**. Το $(a, +\infty)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα και έτσι $f^{-1}(a, +\infty)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα επειδή γνωρίζουμε ότι όλα τα ανοιχτά σύνολα είναι μετρήσιμα. Συμπερασματικά λοιπόν όπως φαίνεται και στη συνέχεια η κλάση των μετρήσιμων συναρτήσεων είναι πολύ πλούσια!

Θεώρημα 8 Το σύνολο των πραγματικών μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος και κλειστός κάτω από τον πολλαπλασιασμό δηλαδή εάν f και g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις τότε $f + g$, και $f \cdot g$ είναι επίσης μετρήσιμες. Συγκεκριμένα εάν g είναι σταθερή συνάρτηση $g \equiv c$ τότε $c \cdot f$ είναι μετρήσιμη για όλους τους πραγματικούς c .

**** Τοπολογικό γεγονός**

Κάθε ανοιχτό σύνολο στον \mathbb{R}^2 αναλύεται σε μία αριθμήσιμη ένωση ορθογώνων, σε αντίστοιχη αναλογία με τα ανοιχτά σύνολα στον \mathbb{R} .

Λήμμα 3 Έστω ότι $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση. Εάν f και g είναι μετρήσιμες τότε $h(x) = F(f(x), g(x))$ είναι επίσης μετρήσιμη.

Για την ακόλουθη πρόταση θα χρειαστεί να ορίσουμε το θετικό μέρος (f^+) και το αρνητικό μέρος (f^-) μίας μετρήσιμης συνάρτησης. Ορίζουμε λοιπόν ως:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{εάν } f(x) > 0 \\ 0, & \text{εάν } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad (\Gamma'.1)$$

και,

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } f(x) > 0 \\ -f(x), & \text{εάν } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad (\Gamma'.2)$$

Πρόταση 8 Έστω E ένα μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} .

1. $f : E \mapsto \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη **εάν και μόνο αν** και οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.
2. Εάν η f είναι μετρήσιμη, επίσης και η $|f|$ είναι μετρήσιμη αλλά το αντίστροφο **δεν ισχύει**.

Θεώρημα 9 Έστω f_n είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο E στο \mathbb{R} , τότε οι ακόλουθες είναι μετρήσιμες συναρτήσεις:

$$\max_{n \leq k} f_n, \min_{n \leq k} f_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Συνέπεια: Εάν μία ακολουθία f_n μετρήσιμων συναρτήσεων συγκλίνει (σημειακά) τότε το όριο είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 10 Έστω $f : E \mapsto \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη και $E \in \mathcal{M}$, $g : E \mapsto \mathbb{R}$, έτσι ώστε το σύνολο $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ είναι μηδενικό, τότε η g είναι μετρήσιμη

Συνέπεια : Έστω f_n είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f_n \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού για τη $x \in E$ τότε η f είναι μετρήσιμη.

* Αφού είμαστε ικανοί να βρούμε μία συνάρτηση f σε μηδενικό σύνολο χωρίς να αλλάξουμε τις ιδιότητες της μέτρησης, ο ακόλουθος ορισμός είναι χρήσιμος να εστιάζουμε στις τιμές της f που μετράνε **πραγματικά** για τη θεωρία της ολοκλήρωσης, προσδιορίζοντας τα όρια, έξω από τα μηδενικά σύνολα.

$$\sup\{z : f \geq z\}$$

Πρόταση 9 Εάν f, g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις τότε:

$$ess \sup f \leq \sup f,$$

όπου ορίζουμε $ess \sup f$ ως: $\{\inf z : f \leq z\}$

Πιθανότητα: Στην ειδική περίπτωση των χώρων πιθανότητας χρησιμοποιούμε τη φράση **τυχαία μεταβλητή** αντί **μετρήσιμη συνάρτηση**. Δηλαδή εάν (Ω, \mathcal{F}, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας, (χ.π) τότε $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή (μετρήσιμη συνάρτηση) εάν για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $X^{-1}([a, \infty))$ βρίσκεται στην \mathcal{F}

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\} \in \mathcal{F}$$

** Στη περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ είναι η σ -άλγεβρα των **Borel** υποσυνόλων του Ω οι τυχαίες μεταβλητές $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζονται συναρτήσεις **Borel**. Θεωρούμε διαφορετικές σ -άλγεβρες που περιέχονται στην \mathcal{F} . Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια συνόλων:

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{S \in \mathcal{F} : S = X^{-1}(B) \text{ για κάποιο } B \in \mathcal{B}\}$$

είναι σ -άλγεβρα.

96 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ'. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

1. Εάν η X παίρνει δύο τιμές $a \neq b$ τότε η \mathcal{F}_X περιέχει 4 στοιχεία.

$$\mathcal{F}_X = \{\emptyset, \Omega, X^{-1}(\{a\}), X^{-1}(\{b\})\}$$

2. Εάν το X παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές η \mathcal{F}_X είναι πεπερασμένη.

• Η έννοια της \mathcal{F}_X έχει την εξής ερμηνεία: Οι τιμές της μέτρησης X είναι όλες που μπορούμε να παρατηρήσουμε. Από αυτές εξηγούμε κάποια πληροφορία στο βαθμό της περιπλοκότητας του τυχαίου πειράματος, δηλαδή του μεγέθους των Ω και \mathcal{F}_X και μπορούμε να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες των συνόλων στην \mathcal{F}_X με στατιστικές μεθόδους. Η παραγόμενη σ -άλγεβρα αναπαριστά το μέγεθος της πληροφορίας που έχει παραχθεί από τη τυχαία μεταβλητή.

Κατανομές Πιθανότητας:

Για κάθε συνεχή τ.μ. X μπορούμε να παράγουμε ένα μέτρο στη σ -άλγεβρα των Borel συνόλων B , θέτοντας

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

όπου η συνάρτηση αυτή αποτελεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X .

Θεώρημα 11 Η συνολοσυνάρτηση P_X είναι αριθμήσιμα προσθετική.

*Κατανομή πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής:

$$P_X(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{a_i}(B)$$

Ανεξαρτησία τ.μ.:

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες εάν οι σ -άλγεβρες που γεννώνται από αυτές είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή για κάθε Borel σύνολα B, C στον \mathbb{R} ,

$$P(X^{-1}(B) \cap Y^{-1}(C)) = P(X^{-1}(B)) \cdot P(Y^{-1}(C))$$

Ολοκλήρωμα

Χρειάζομαστε το m να είναι ένα μέτρο δηλαδή μία αριθμήσιμα προσθετική πραγματική συνάρτηση m ορισμένη σε μία σ -άλγεβρα υποσυνόλων ενός δοσμένου συνόλου Ω με $m(\emptyset) = 0$.

Λύση του προβλήματος, πως να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις όπως $1_{\mathbb{Q}}$, που παίρνουμε μόνο πεπερασμένες το πλήθος τιμές, αλλά τα σύνολα που παίρνουν τις τιμές αυτές δεν είναι σαν τα διαστήματα

Ορισμός 7 Μία μη αρνητική συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ που παίρνει μόνο πεπερασμένες το πλήθος τιμές, δηλαδή το σύνολο τιμών της φ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από διακριτούς μη-αρνητικούς πραγματικούς $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ είναι μία **απλή συνάρτηση** (*simple function*) εάν όλα τα σύνολα:

$$A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\}) = \{x : \varphi(x) = a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

είναι μετρήσιμα σύνολα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σύνολα $A_i \in \mathcal{M}$ είναι ανά δύο ξένα και η ένωση τους είναι όλο το \mathbb{R} . Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$$

και συνεπώς κάθε απλή συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

Ορισμός 8 Το ολοκλήρωμα *Lebesgue* στο $E \in \mathcal{M}$ της απλής συνάρτησης φ δίνεται από:

$$\int_E \varphi dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap E)$$

* Θεωρούμε $0 \cdot \infty = 0$

Παράδειγμα 15 Έστω η *simple function* $1_{\mathbb{Q}}$ που παίρνει τη τιμή 1 στο \mathbb{Q} και 0 στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Από τον ανωτέρω ορισμό έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} dm = 1 \times m(\mathbb{Q}) + 0 \times m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$$

επειδή το \mathbb{Q} είναι μηδενικό σύνολο. (Η ανωτέρω συνάρτηση δεν είχε ολοκλήρωμα *Riemann*.)

Ορισμός 9 Για κάθε μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f και $E \in \mathcal{F}$ το ολοκλήρωμα $\int_E f dm$ ορίζεται ως:

$$\int_E f dm = \sup Y(E, f), \quad \text{οπου}$$

$$Y(E, f) = \left\{ \int_E \varphi dm : 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ είναι απλή} \right\}$$

98 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ'. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

Το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι $+\infty$ και πάντα είναι μη αρνητικό. Ξεκάθαρα το σύνολο $Y(E, f)$, είναι πάντα του τύπου $[0, x]$ ή $0, x$ όπου η τιμή $x = +\infty$ επιτρέπεται.

★ Εάν $E = [a, b]$ γράφουμε το ολοκλήρωμα ως:

$$\int_a^b f dm, \text{ ή } \int_a^b f(x) dm(x), \text{ ή } \int_a^b f(x) d(x),$$

Θεώρημα 12 Έστω φ, ψ είναι απλές συναρτήσεις τότε:

1. Εάν $\varphi \leq \psi$ τότε $\int_E \varphi dm \leq \int_E \psi dm$.

2. Εάν A, B είναι ξένα σύνολα στο \mathcal{M} , τότε

$$\int_{A \cup B} \varphi dm = \int_A \varphi dm + \int_B \varphi dm.$$

3. Για όλες τις σταθερές, $a > 0$

$$\int_E a\varphi dm = a \int_E \varphi dm$$

Έστω f και g είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις:

1. Εάν $A \in \mathcal{M}$ και $f \leq g$ στο A , τότε

$$\int_A f dm \leq \int_A g dm$$

2. Εάν $B \subseteq A$, $A, B \in \mathcal{M}$ και τότε:

$$\int_B f dm \leq \int_A f dm$$

3. Εάν $\alpha \geq 0$

$$\int_A \alpha f dm = \alpha \int_A f dm$$

4. Εάν A μηδενικό σύνολο τότε:

$$\int_A f dm = 0$$

5. Εάν $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset$ τότε:

$$\int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$$

Θεώρημα 13 Έστω η f είναι μία μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση τότε η $f = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $\int_{\mathbb{R}} f dm = 0$.

Πρόταση 10 Εάν f και g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις τότε $f \leq g \Rightarrow \int f dm \leq \int g dm$

Πρόταση 11 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, εάν και μόνο αν και οι δύο συναρτήσεις f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.

Θεώρημα 14 Μονότονης Σύγκλισης:

Εάν $\{f_n\}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων τότε και $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ αυξάνει μονότονα στο $f(x)$ για κάθε x , δηλαδή $f_n \uparrow f$ σημειακά, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dm = \int_E f dm$$

Συνέπεια:

Έστω f_n και f είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες. Εάν f_n αυξάνει στην f σχεδόν παντού, τότε επίσης έχουμε $\int_E f_n dm \uparrow \int_E f dm$ για όλο το μετρήσιμο E .

*Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης είναι βολικό να προσεγγίσουμε με μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων.

Πρόταση 12 Για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f , υπάρχει μία ακολουθία S_n από μη αρνητικές απλές συναρτήσεις έτσι ώστε $S_n \uparrow f$

Ορισμός 10 Εάν $E \in \mathcal{M}$ και η μετρήσιμη συνάρτηση f έχει και τα δύο $\int_E f^+ dm$ και $\int_E f^- dm$ πεπερασμένα τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ορίζουμε

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm$$

* Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες πάνω στο \mathbb{R} δηλώνεται με \mathcal{L}^1

** Παρατηρούμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη εάν και μόνο αν $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, και έτσι:

$$\int_E |f| dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm$$

Εφόσον,

$$f = f^+ - f^-$$

και

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Πρόταση 13 Εάν η f και g είναι ολοκληρώσιμες, $f \leq g$, τότε $\int f dm \leq \int g dm$

Θεώρημα 15 Για κάθε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g , το άθροισμά τους είναι επίσης ολοκληρώσιμο και $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E (f + g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

Πρόταση 14 Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη και $c \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\int_E (c \cdot f) dm = c \int_E f dm.$$

Θεώρημα 16 Για κάθε μετρήσιμο σύνολο E , $\mathcal{L}^1(E)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα 17 Εάν ισχύει $\int_A f dm \leq \int_A g dm$ για όλα τα $A \in \mathcal{M}$ τότε $f \leq g$ σχεδόν παντού. Συγκεκριμένα, εάν $\int_A f dm = \int_A g dm$ για όλα τα $A \in \mathcal{M}$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού.

Πρόταση 15 Ιδιότητες

1. Μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

2. Για μετρήσιμα f και A ,

$$m(A) \inf_A f(x) \leq \int_A f \, dm \leq m(A) \sup_A f(x).$$

3. $|\int f \, dm| \leq \int |f| \, dm$.

4. Έστω $f \geq 0$ και $\int f \, dm = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.

*Πότε ισχύει αυτό; $\int f_n \, dm = \int (\lim f_n) \, dm$;

Η ολοκλήρωση είναι μία **οριακή διαδικασία**. Το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης μας παρέχει την απάντηση, ότι αυτό το συμπέρασμα ισχύει για γνησίως αύξουσες ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων (εάν υπάρχουν τα όρια.)

Θεώρημα 18 Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Dominated Convergence)

Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$. Έστω f_n είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων έτσι ώστε: $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο E για όλα τα $n \geq 1$, όπου g είναι ολοκληρώσιμη στο E . Εάν $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, dm = \int_E f \, dm$$

Πρόταση 16 Για μία ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n , έχουμε:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, dm.$$

Θεώρημα 19 Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| \, dm$ είναι πεπερασμένο τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει για τουλάχιστον όλα τα x το άθροισμα της είναι ολοκληρώσιμο και:

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, dm.$$

Πρόταση 17 Σχέση με το Ολοκλήρωμα Riemann

Εάν $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και η συνάρτηση F που ορίζεται:

$$F(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

είναι ολοκληρώσιμη για $x \in (a, b)$ με παράγωγο $F' = f$.

Θεώρημα 20 Έστω $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι φραγμένη

1. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann εάν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε σχέση με το μέτρο Lebesgue στο $[a, b]$
2. Οι ολοκληρώσιμες Riemann συναρτήσεις στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμες σε σχέση με το μέτρο Lebesgue στο $[a, b]$ και τα ολοκληρώματα είναι τα ίδια.

Θεώρημα 21 Εάν $f \geq 0$ και το άνω Riemann ολοκλήρωμα υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} f dm$ πάντα υπάρχει και ισούται με το improper integral

* Προσεγγίζοντας τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 22 Εάν η f είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, τότε δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει μία κλιμακωτή συνάρτηση h (stepfunction) έτσι ώστε:

$$\int_a^b |f - h| < \varepsilon.$$

Θεώρημα 23 Δοθείσης μίας συνάρτησης $f \in \mathcal{L}^1$ και $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε μία συνεχή συνάρτηση g , που μηδενίζεται έξω από κάποιο πεπερασμένο διάστημα έτσι ώστε:

$$\int |f - g| dm < \varepsilon.$$

Θεώρημα 24 Έστω $P_X = \sum_i p_i P_i$ όπου τα P_i είναι μέτρα πιθανότητας, $\sum p_i = 1$, $p_i \geq 0$ τότε:

$$\int g(x) dP_X(x) = \sum p_i \int g(x) dP_i(x).$$

Απολύτως συνεχή μέτρα

Τα μέτρα P του τύπου:

$$A \mapsto P(A) = \int_A f dm$$

ονομάζονται απολύτως συνεχή.

Αθροιστική συνάρτηση

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx$$

* Στη συνέχεια θα ορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{M}, P) .

$$F_X(y) = P(\{\omega : X(\omega) \leq y\}) = P_X((-\infty, y)).$$

Πρόταση 18 Ιδιότητες

1. Η F_X είναι μη-φθίνουσα. (Έστω $y_1 \leq y_2 \Rightarrow F_X(y_1) \leq F_X(y_2)$)

2.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_X(y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F_X(y) = 0$$

3. F_X είναι δεξιά συνεχής (έστω $y \rightarrow y_0, y \geq y_0$ εάν

$$P_X(\{y\}) = 0$$

για όλα τα y .)

Θεώρημα 25 Εάν μία συνάρτηση $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ ικανοποιεί τις συνθήκες (1-3) της πρότασης 18 τότε ορίζει μία τ.μ στο χώρο πιθανότητας. $([0, 1], \mathcal{B}, m[0, 1])$, $X : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ έτσι ώστε $F = F_X$.

Μέθοδος για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα σχετικά με απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις κατανομών.

Θεώρημα 26 Εάν P_X είναι ορισμένη στον \mathbb{R}^n είναι απολύτως συνεχής με πυκνότητα $f_X, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο P_X , τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dP_X = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) g(x) dx.$$

Συνέπεια: Έχουμε λοιπόν.

$$\int_{\Omega} g(x) dP_X = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) g(x) dx.$$

Θεώρημα 27 Έστω $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη (συνεπώς και αντιστρέψιμη), τότε:

$$f_{g(x)}(y) = f_x(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y).$$

* Αντίστοιχα και όταν η g είναι φθίνουσα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Μέση Τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής:

Εάν η X είναι τ.μ. ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , τότε:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dP_X(x).$$

και για την απόλυτη συνέχεια ισχύει:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X dx.$$

Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις:

Έστω $Z = X + iY$ όπου X, Y πραγματικές τ.μ.

$$\int Z dP = \int X dP + i \int Y dP.$$

*Ισχύει ένα σημαντικό αποτέλεσμα:

$$\left| \int Z dP \right| \leq \int |Z| dP.$$

Ορισμός 11 Για μία τ.μ. X γράφουμε:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}) \text{ για } t \in \mathbb{R}.$$

*Για να υπολογίσουμε την φ_X είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τη κατανομή της τ.μ. X ,

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx} f_X(x) dx.$$

Θεώρημα 28 Η συνάρτηση φ_X ικανοποιεί:

1. $\varphi_X(0) = 1,$
 $|\varphi_X(t)| \leq 1.$
2. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at).$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Παράρτημα Δ'

Πρόγραμμα στο *Mathematica*

Το παρακάτω πρόγραμμα στο *Mathematica* υπολογίζει τη συνδιακύμανση και συσχέτιση των $A(t)$, $B(t)$ αρχικά στη χρονικά εξαρτημένη περίπτωση σύμφωνα με τη σχέση (4.14) και εν συνεχεία παίρνοντας το όριο για $t \rightarrow \infty$ για τη σταθερή κατάσταση. Στο παράδειγμα έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές $r = 3$ και $\lambda = 3$ για τις παραμέτρους της κατανομής Γάμμα.

1. Αρχικά για τη συνάρτηση συνδιακύμανσης, το πρόγραμμα είναι το εξής:

```
r := 3
l := 3
f[x_] := l^r * x^(r-1) * Exp[-l * x] / Factorial[r-1]
tailf[x_] := Integrate[f[y], {y, x, Infinity}]
tailf[x]

$$\frac{1}{2} e^{-3x} (2 + 6x + 9x^2)$$

```

```

c[s_] := LaplaceTransform[f[x], x, s]

c[s]

$$\frac{27}{(3+s)^3}$$


M[s_] := c[s] / (1 - c[s])

M[s]

$$\frac{27}{(3+s)^3 \left(1 - \frac{27}{(3+s)^3}\right)}$$


Simplify[M[s]]

$$\frac{27}{27s + 9s^2 + s^3}$$


h[t_] := InverseLaplaceTransform[M[s], s, t]

h[t]

$$e^{-9t/2} \left( e^{9t/2} - \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$


Usecond[s_] := 1 + Integrate[h[t], {t, 0, s}]

Usecond[s]

$$1 + \frac{1}{9} \left( -3 + 9s + e^{-9s/2} \left( 3 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}s}{2}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}s}{2}\right] \right) \right)$$


lambda1[t_] := t * Lambda[t]

lambda1[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 4t + 3t^2)$$


Sunelix1[t] := Integrate[lambda1[t-y] * h[y], {y, 0, t}]

Sunelix1[t]

$$\frac{1}{54} e^{-9t/2} \left( e^{9t/2} (20 e^{3t} - 9 (2 + 6t + 12t^2 + 9t^3)) - 2 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$


```

MesiAB[t_] := lambda1[t] + Sunelixi1[t]

MesiAB[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{-9t/2} \left(e^{3t/2} (20 e^{3t} - 9 (2 + 6t + 12t^2 + 9t^3)) - 2 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] - 2\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] \right)$$

ef1[t_] := t*tailf[t]

ef1[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 6t + 9t^2)$$

Sunelixi2[x_] := Integrate[ef1[x - z] * h[z], {z, 0, x}]

Sunelixi2[x]

$$\frac{1}{18} e^{-9x/2} \left(3 e^{3x/2} (4 e^{3x} - 3 (2 + 2x + 6x^2 + 9x^3)) + 6 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} x\right] - 2\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} x\right] \right)$$

mesib[t_] := ef1[t] + Sunelixi2[t]

mesib[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 6t + 9t^2) + \frac{1}{18} e^{-9t/2} \left(3 e^{3t/2} (4 e^{3t} - 3 (2 + 2t + 6t^2 + 9t^3)) + 6 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] - 2\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] \right)$$

mtimiGamma := r/1

mtimiGamma

1

mi[t_] := Usecond[t] - 1

mi[t]

$$\frac{1}{9} \left(-3 + 9t + e^{-9t/2} \left(3 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] \right) \right)$$

m2[t_] := 1 + mi[t]

m2[t]

$$1 + \frac{1}{9} \left(-3 + 9t + e^{-9t/2} \left(3 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} t\right] \right) \right)$$

m3[t_] := mtimiGamma * m2[t]

```

m3[t]
1 + 1/9 (-3 + 9 t + e^{-3 t/2} (3 Cos[3 sqrt(3) t/2] + sqrt(3) Sin[3 sqrt(3) t/2]))

mesiA[t_] := m3[t] - t

mesiA[t]
1 - t + 1/9 (-3 + 9 t + e^{-3 t/2} (3 Cos[3 sqrt(3) t/2] + sqrt(3) Sin[3 sqrt(3) t/2]))

covariance[t_] := lambda1[t] + Sunelixi1[t] - (ef1[t] + Sunelixi2[t]) * mesiA[t]

covariance[t]
1/2 e^{-3 t} t (2 + 4 t + 3 t^2) + 1/54 e^{-3 t/2} (e^{3 t/2} (20 e^{3 t} - 9 (2 + 6 t + 12 t^2 + 9 t^3)) - 2 Cos[3 sqrt(3) t/2] - 2 sqrt(3) Sin[3 sqrt(3) t/2]) -
(1/2 e^{-3 t} t (2 + 6 t + 9 t^2) + 1/18 e^{-3 t/2} (3 e^{3 t/2} (4 e^{3 t} - 3 (2 + 2 t + 6 t^2 + 9 t^3)) - 6 Cos[3 sqrt(3) t/2] - 2 sqrt(3) Sin[3 sqrt(3) t/2])) (1 - t + 1/9 (-3 + 9 t + e^{-3 t/2} (3 Cos[3 sqrt(3) t/2] + sqrt(3) Sin[3 sqrt(3) t/2])))

```

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{-3t/2} \left(e^{3t/2} (20e^{3t} - 9(2 + 6t + 12t^2 + 9t^3)) - 2\cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] - 2\sqrt{3}\sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] \right) \right) - \left(\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 6t + 9t^2) + \frac{1}{18} e^{-3t/2} \left(3e^{3t/2} (4e^{3t} - 3(2 + 2t + 6t^2 + 9t^3)) + 6\cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] - 2\sqrt{3}\sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] \right) \right) \left(1 - t + \frac{1}{9} \left(-3 + 9t + e^{-3t/2} \left(3\cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] + \sqrt{3}\sin\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right] \right) \right) \right), t \rightarrow \text{Infinity}$$

$-\frac{2}{27} // N$
 -0.0740741

2. Για τη συνάρτηση συσχέτισης, το πρόγραμμα είναι το εξής:

```

r := 3
l := 3
f[x_] := l^r * x^(r-1) * Exp[-l * x] / Factorial[r-1]
f[x]
27/2 e^-3x x^2
tailf[x_] := Integrate[f[y], {y, x, Infinity}]
tailf[x]
1/2 e^-3x (2 + 6x + 9x^2)
c[s_] := LaplaceTransform[f[x], x, s]

```

```

c[s]

$$\frac{27}{(3+s)^3}$$

M[s_] := c[s] / (1 - c[s])
M[s]

$$\frac{27}{(3+s)^3 \left(1 - \frac{27}{(3+s)^3}\right)}$$

Simplify[M[s]]

$$\frac{27}{27s + 9s^2 + s^3}$$

h[t_] := InverseLaplaceTransform[M[s], s, t]
h[t]

$$e^{-9t/2} \left( e^{9t/2} - \text{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \text{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$

Usecond[s_] := 1 + Integrate[h[t], {t, 0, s}]
Usecond[s]

$$1 + \frac{1}{9} \left( -3 + 9s + e^{-9s/2} \left( 3 \text{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}s}{2}\right] + \sqrt{3} \text{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}s}{2}\right] \right) \right)$$

Q1[t_] := 2 * Integrate[y * (tailf[t+y]), {y, 0, Infinity}]
Q1[t]

$$e^{-3t} \left( \frac{4}{3} + t(2+t) \right)$$

Lambda[x_] := Integrate[tailf[y], {y, x, Infinity}]
Lambda[x]

$$\frac{1}{2} e^{-3x} (2 + 4x + 3x^2)$$

T1[t_] := t^2 * tailf[t]
T1[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t^2 (2 + 6t + 9t^2)$$


```

```

Sunelixi1[y_] := Integrate[T1[y - z] * h[z], {z, 0, y}]
Sunelixi1[y]

$$\frac{1}{54} e^{-9y/2} \left( e^{3y/2} (40 e^{3y} - 9 (4 - 24y + 6y^2 + 18y^3 + 27y^4)) - 4 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}y}{2}\right] + 20\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}y}{2}\right] \right)$$

Mesi2B[t_] := T1[t] + Sunelixi1[t]
Mesi2B[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t^2 (2 + 6t + 9t^2) + \frac{1}{54} e^{-9t/2} \left( e^{3t/2} (40 e^{3t} - 9 (4 + 24t + 6t^2 + 18t^3 + 27t^4)) - 4 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 20\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$

Sunelixi2[y_] := Integrate[Q1[y - x] * h[x], {x, 0, y}]
Sunelixi2[y]

$$\frac{1}{12} \left( -4 + \frac{1}{9} e^{-2y/2} \left( e^{3y/2} (20 - 24y + 9y^2) + 2 (8 - 15y + 9y^2) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}y}{2}\right] - 2\sqrt{3} (-2 + 3y) \sin\left[\frac{3\sqrt{3}y}{2}\right] \right) \right)$$

Mesi2A[t_] := Q1[t] + Sunelixi2[t]
Mesi2A[t]

$$e^{-3t} \left( \frac{4}{3} + t (2 + t) \right) + \frac{1}{27} e^{-9t/2} \left( e^{3t/2} (20 e^{3t} - 9 (4 + 6t + 3t^2)) + 16 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + 4\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$

T2[t_] := t * Lambda[t]
T2[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 4t + 3t^2)$$

Sunelixi3[t_] := Integrate[T2[t - y] * h[y], {y, 0, t}]
Sunelixi3[t]

$$\frac{1}{54} e^{-9t/2} \left( e^{3t/2} (20 e^{3t} - 9 (2 - 6t + 12t^2 + 9t^3)) - 2 \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$

T3[t_] := t * tailf[t]
T3[t]

$$\frac{1}{2} e^{-3t} t (2 + 6t + 9t^2)$$

Sunelixi4[s_] := Integrate[T3[s - y] * h[y], {y, 0, s}]

```



```

Suneli4[s]
1/18 e^{-9s/2} (3 e^{3s/2} (4 e^{3s} - 3 (2 - 2s + 6s^2 + 9s^3)) + 6 Cos[3*sqrt(3)/2*s] - 2*sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*s])

Mes1B[t_] := T3[t] + Suneli4[t]
Mes1B[t]
1/2 e^{-9t} t (2 - 6t + 9t^2) - 1/18 e^{-9t/2} (3 e^{3t/2} (4 e^{3t} - 3 (2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) + 6 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - 2*sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t])

TetragB[t_] := Mes1B[t] * Mes1B[t]
TetragB[t]
(1/2 e^{-9t} t (2 - 6t + 9t^2) - 1/18 e^{-9t/2} (3 e^{3t/2} (4 e^{3t} - 3 (2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) + 6 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - 2*sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t]))^2

m1[t_] := Usecond[t] - 1
m1[t]
1/9 (-3 + 9t - e^{-9t/2} (3 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t]))

m2[t_] := 1 + m1[t]
m2[t]
1 - 1/9 (-3 + 9t - e^{-9t/2} (3 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t]))

Mes1Gamma := r/1
Mes1Gamma
1

m3[t_] := Mes1Gamma * m2[t]
m3[t]
1 - 1/9 (-3 + 9t - e^{-9t/2} (3 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t]))

Mes1A[t_] := m3[t] - t
Mes1A[t]
1 - t - 1/9 (-3 + 9t - e^{-9t/2} (3 Cos[3*sqrt(3)/2*t] - sqrt(3) Sin[3*sqrt(3)/2*t]))

```

TetragA[t]

$$\left(1 - t - \frac{1}{9}(-3 - 9t + e^{9t/2}) \left(3 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right]\right)\right)^2$$

L1[t_] := T2[t] + SuneIix13[t]

L1[t]

$$\frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (20e^{9t} - 9(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) - 2 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)$$

L2[t_] := Mes1B[t] + Mes1A[t]

L2[t]

$$\left(\frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (20e^{9t} - 9(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) - 2 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right) \left(1 - t - \frac{1}{9}(-3 - 9t + e^{9t/2}) \left(3 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right)$$

Ari[t_] := L1[t] - L2[t]

Ari[t]

$$\frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (20e^{9t} - 9(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) - 2 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) - \left(\frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 4t + 3t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (20e^{9t} - 9(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) - 2 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right) \left(1 - t - \frac{1}{9}(-3 - 9t + e^{9t/2}) \left(3 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right)$$

K1[t_] := Mes12B[t] - TetragB[t]

K1[t]

$$\frac{1}{2} e^{9t} t^2 (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (40e^{9t} - 9(4 + 24t - 6t^2 + 18t^3 + 27t^4)) - 4 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 20\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) - \frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{18} e^{9t/2} \left(3e^{9t/2} (4e^{9t} - 3(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) + 6 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)^2$$

RK1[t_] := Sqrt[
$$\frac{1}{2} e^{9t} t^2 (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (40e^{9t} - 9(4 + 24t - 6t^2 + 18t^3 + 27t^4)) - 4 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 20\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) - \frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{18} e^{9t/2} \left(3e^{9t/2} (4e^{9t} - 3(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) + 6 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)^2$$
]

RK1[t]

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} e^{9t} t^2 (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{54} e^{9t/2} \left(e^{9t/2} (40e^{9t} - 9(4 + 24t - 6t^2 + 18t^3 + 27t^4)) - 4 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 20\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) - \frac{1}{2} e^{9t} t (2 - 6t + 9t^2) + \frac{1}{18} e^{9t/2} \left(3e^{9t/2} (4e^{9t} - 3(2 - 2t - 6t^2 + 9t^3)) + 6 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right)^2}$$

K2[t_] := Mes12A[t] - TetragA[t]

K2[t]

$$e^{9t} \left(\frac{4}{3} - t (2 - t) \right) + \frac{1}{27} \left(20 - 9e^{9t} (4 - 3t (2 - t)) - 4e^{9t/2} \left(4 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right) - \left(1 - t - \frac{1}{9}(-3 - 9t + e^{9t/2}) \left(3 \operatorname{Cos}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Sin}\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right) \right)^2$$

RR2[t]

$$\sqrt{\left(e^{2t} \left(\frac{4}{3} - t(2+t) \right) - \frac{1}{27} \left(20 - 9e^{3t} (4+3t(2+t)) - 4e^{3t/2} \left(4 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) - \left(1-t - \frac{1}{9} \left(-3+9t + e^{3t/2} \left(3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)}$$

K3[t_] := RR1[t] * RR2[t]

K3[t]

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} e^{4t} t^2 (2+6t+9t^2) + \frac{1}{54} e^{3t/2} \left(40e^{3t} - 9(4+24t+6t^2+18t^3+27t^4) \right) - 4 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + 20\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^{2t} t (2+6t+9t^2) - \frac{1}{18} e^{3t/2} \left(3e^{3t/2} (4e^{3t} - 3(2+2t+6t^2+9t^3)) + 6 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) - 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right)^2 \right)}$$

$$\sqrt{\left(e^{2t} \left(\frac{4}{3} - t(2+t) \right) - \frac{1}{27} \left(20 - 9e^{3t} (4+3t(2+t)) - 4e^{3t/2} \left(4 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) - \left(1-t - \frac{1}{9} \left(-3+9t + e^{3t/2} \left(3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)}$$

kIasma[t_] := Ari[t] / K3[t]

kIasma[t]

$$\left(\frac{1}{2} e^{4t} t (2+4t+3t^2) + \frac{1}{54} \left(20 - 9e^{3t} (2+3t(2+t(4+3t))) - 2e^{3t/2} \left(\cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{3t} t (2+6t+9t^2) - \frac{1}{2} e^{3t} (2+t(2+6t+9t^2)) - \frac{1}{9} e^{3t/2} \left(-3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) \left(1-t + \frac{1}{9} \left(-3+9t + e^{3t/2} \left(3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) \right) \right) /$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} e^{4t} t^2 (2+6t+9t^2) + \frac{1}{54} e^{3t/2} \left(40e^{3t} - 9(4+24t+6t^2+18t^3+27t^4) \right) - 4 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + 20\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^{2t} t (2+6t+9t^2) - \frac{1}{18} e^{3t/2} \left(3e^{3t/2} (4e^{3t} - 3(2+2t+6t^2+9t^3)) + 6 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) - 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right)^2 \right)}$$

$$\sqrt{\left(e^{2t} \left(\frac{4}{3} - t(2+t) \right) - \frac{1}{27} \left(20 - 9e^{3t} (4+3t(2+t)) - 4e^{3t/2} \left(4 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) - \left(1-t - \frac{1}{9} \left(-3+9t + e^{3t/2} \left(3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\sqrt{3}t}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)}$$

Simplify[klasma[t]]

$$\left(e^{3t} \left(-1 + 9e^{4t} - 2e^{5t} - e^{3t/2} (-9 + 13e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \right) /$$

$$\left(\sqrt{e^{3t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{3t/2} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{3t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{3t/2} (-9 + 7e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + 14\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right)$$

$$\frac{e^{3t} \left(-1 - 9e^{4t} - 2e^{5t} - e^{3t/2} (-9 - 13e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - 2\cos[3\sqrt{3}t] - 3\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) \right)}{\sqrt{e^{3t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{3t/2} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{3t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{3t/2} (-9 + 7e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + 14\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{3t} \left(-1 + 9e^{4t} - 2e^{5t} - e^{3t/2} (-9 + 13e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \right) /$$

$$\left(\sqrt{e^{3t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{3t/2} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{3t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{3t/2} (-9 + 7e^{2t}) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + 14\sqrt{3}e^{3t/2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right),$$

t -> Infinity

$$\frac{1}{4}$$

-0.25

$$\begin{aligned}
& D \left(\frac{e^{3t} \left(-1 + 9e^{4t} - 2e^{4t} - e^{2t/2} (-9 + 13e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{2t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)}{\right. \\
& \left. \sqrt{e^{4t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{2t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right) \\
& \frac{9e^{4t} \left(-1 - 9e^{4t} - 2e^{4t} - e^{4t/2} (-9 + 13e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)}{\sqrt{e^{4t} \left(-2 - 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \\
& \frac{e^{4t} \left(54e^{4t} - 18e^{4t} - \frac{21}{2}e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \frac{21}{2}e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \frac{3}{2}e^{4t/2} (-9 + 13e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + \frac{3}{2}\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \frac{3}{2}\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + \frac{3}{2}\sqrt{3}e^{4t/2} (-9 + 13e^{4t}) \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 6\sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)}{\sqrt{e^{4t} \left(-2 - 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \sqrt{e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \\
& \left(\frac{e^{4t} \left(-1 - 9e^{4t} - 2e^{4t} - e^{4t/2} (-9 + 13e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)}{\right. \\
& \left. - 9e^{4t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right) - e^{4t} \left(72e^{4t} + 18e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 9\cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 3\sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right) \\
& \left. \frac{2 \left(\frac{e^{4t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)}{\right.} \right)^{1/2} \sqrt{e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right)}{\left. \frac{e^{4t} \left(-1 - 9e^{4t} - 2e^{4t} - e^{4t/2} (-9 + 13e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 2\cos[3\sqrt{3}t] + 3\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] \right)}{\right.} \right) \\
& \left. - 9e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right) - \right. \\
& \left. e^{4t} \left(-81e^{4t} + 72e^{4t} - 648e^{4t}t - 27e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + 21e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 3e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] + 9\cos[3\sqrt{3}t] - 9\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 63\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 3\sqrt{3}e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 3\sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right) \\
& \left. \frac{2 \sqrt{e^{4t} \left(-2 + 8e^{4t} + 4e^{4t/2} \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \left(e^{4t} \left(-2 - 27e^{4t} + 18e^{4t} + 8e^{4t} - 108e^{4t}t - 2e^{4t/2} (-9 + 7e^{4t}) \cos\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \cos[3\sqrt{3}t] - 6\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - 14\sqrt{3}e^{4t/2} \sin\left[\frac{3\sqrt{3}t}{2}\right] - \sqrt{3} \sin[3\sqrt{3}t] \right)} \right)^{1/2}}{\right.} \right)
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Κούτρας, Μ. (2004) Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος I Εκδόσεις Σταμούλης
- [2] Κούτρας, Μ. (2004) Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος II Εκδόσεις Σταμούλης
- [3] Μαχαιράς, Ν. (2006) Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- [4] Μαχαιράς, Ν. (2006) Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- [5] Πολίτης, Κ. (2012) Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου Εκδόσεις Σταμούλης

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [6] *Aliprantis, C.H. Owen O. (1998) Principles of Real Analysis, Academic Press*
- [7] *Baxter, L.A. and L.X. Li, (1995) Nonparametric Confidence Intervals for the Renewal function with Censored Data, Opa.*
- [8] *Capinski, M. and Kopp, E. (2004) Measure, Integral and Probability, 2nd edition Springer*
- [9] *Dickson, D. C. M. (2006) Insurance Risk and Ruin, Cambridge University Press, UK.*

- [10] *Dudley, R. M. (2002) Real Analysis and Probability, Cambridge University Press, UK.*
- [11] *Feller, W.(1971) An Introduction to Probability Theory and its Applications.Vol.2, 2nd edition, J.Willey, N.Y.*
- [12] *Gakis K. G. and Sivazlian B. D (1994) The correlation of the backward and forward recurrence times in a renewal process. Stochastic Analysis and Application 543 – 549.*
- [13] *Gakis K. G. and Sivazlian B. D (1992) The use of multiple integrals in the study of the backward and forward recurrence times for the ordinary renewal process. Stochastic Analysis and Applications, 409 – 416.*
- [14] *Grimmet, G. and Stirzaker, D.(2008) Probability and Random Processes, 3rd edition, Oxford*
- [15] *Mukhopadhyay N., (2000) Probability And Statistical Inference, Marcel Dekker.*
- [16] *Pinsky, M.A. and Karlin, S(2011) An introduction to Stochastic Modelling, Elsevier*
- [17] *Pitman, J.(2006) Probability, Springer.*
- [18] *Politis and Pitts (2000), Nonparametric Estimation in Renewal Theory II : Solution of Renewal – Type Equation. The Annals of Statistics Vol 28 pp. 88 – 115.*
- [19] *Pollard, D(2010) A User's Guide to Measure Theoretic Probability, Cambridge*
- [20] *Prabhu, N.U. (2007) Stochastic Processes, World Scientific*
- [21] *Resnick, S (1992) Adventures in Stochastic Process. Birkhaeuser, Boston MA.*
- [22] *Resnick, S (2005) A Probability Path. Birkhaeuser, Boston MA.*
- [23] *Ross, S. (1996) Stochastic Processes. 2nd edition J.Willey, N.Y.*

- [24] *Ross, S. (2010) Introduction to Probability Models, 10th edition Academic Press*
- [25] *Rudin, W.(1976) Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition, McGraw – Hill*
- [26] *Serfozo, R.(2009) Basics of Applied Stochastic Processes, Springer.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ