ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΘΕΜΑ

ΣΥΝΕΠΗ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ & ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΑΠΟΜΕΙΩΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΡΙΜΑΛΗΣ
ΜΑΕ 11026

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- .... (Επιβλέπων)
- ....
- ....

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ACTUARIAL&RISK MANAGEMENT

MSc DISSERTATION

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE
IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK MANAGEMENT

COHERENT MEASURES & EXPECTED SHORTFALL

BY

DIMITRIS PRIMALIS
MAE 11026

PIRAEUS, NOVEMBER 2013

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE

Ευχαριστώ
τους συμφοιτητές και καθηγητές μου
που έκαναν αυτήν την διαδικασία
μαγική

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική έχει σαν σκοπό την ανασκόπηση των θεμελιωδών μέτρων κινδύνου που θεωρούνται συνεπή (Coherent Measures) και την μελέτη της αναμενόμενης απομείωσης κινδύνου (Expected Shortfall). Θα κάνουμε μια εισαγωγή στην ποσοτική διοικητική κινδύνου ή αλλιώς στην διαχείριση κινδύνου ανά ποσοστημόριο, στις ιδιότητες των μέτρων κινδύνων, πως μπορούν αυτά να εκτιμηθούν και πως τελικά μπορούν να εφαρμοστούν στον ασφαλιστικό κλάδο. Θα παρουσιάσουμε επίσης προεκτάσεις των μέτρων αυτών και θα μελετήσουμε την αποτελεσματικότητά τους.

Ξεκινώντας από την Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk) και αναλύοντάς την, θα την συγκρίνουμε με τα Συνεπή Μέτρα Κινδύνου και θα δούμε κάποιες βασικές μεθόδους εκτίμησης (Estimation Methods). Τέλος θα δούμε ένα παράδειγμα με πραγματικά στοιχεία ασφαλιστικής εταιρείας από την ελληνική αγορά, πάνω στα οποία θα κάνουμε εφαρμογή των βασικών μέτρων κινδύνου, θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα, τις εκτιμήσεις καθώς και τις μεταξύ τους συγκρίσεις.

Abstract

The purpose of this dissertation is to review the basic coherent risk measures and the expected shortfall. It aims at giving an introduction to Quantitative Risk Management and to the properties of risk measures, how they can be estimated and discuss some of the many ways they can be applied to insurance risk problems. Some extensions of these measures will also be presented and we will research how sufficient they are.

First of all, we gonna analyse the Value at Risk measure and then gonna compare it with the coherent measures such as Expected Shortfall. Some of the basic estimation methods gonna also be presented. At the end of the dissertation there is an example with real data of a greek insurance company. We gonna estimate the basic risk measures, analyse and compare the results and the assumptions we came to.

Π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν α

1 Εισαγωγή

Για τις ανάγκες της αναλογιστικής επιστήμης και του risk management στον ασφαλιστικό τομέα χρησιμοποιούσαμε για καιρό, μέτρα κινδύνου που είχαν δημιουργηθεί για τις ανάγκες χρηματοοικονομικών προϊόντων. Έτσι λοιπόν, μέτρα χρηματοοικονομικού κινδύνου κάλυπταν ανάγκες ασφαλιστικών προϊόντων και εταιριών, όπως τον καθορισμό του κεφαλαίου κινδύνου, το ύψος των ασφαλίστρων, το ύψος των απαιτήσεων, των ζημιών, την πρόβλεψη μέγιστης απαίτησης, καθώς και σενάρια καταστροφής. Αυτά τα σενάρια και οι προβλέψεις αφορούν βασικά μέτρα κινδύνου που βασίζονται στα ποσοστημόρια (quantile - based risk measures - QBRMs). Μια διαδικασία την οποία θα αναλύσουμε στα επόμενα κεφάλαια (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Αυτές οι ανάγκες οδήγησαν σε πιο εξελιγμένα μέτρα που να μπορούν να εξυπηρετούν τον ασφαλιστικό τομέα. Οδήγησαν από την Αξία σε Κίνδυνο *(Value at Risk)* του χρηματοοικονομικού risk management, σε νέα μέτρα κινδύνου, περισσότερο σύνθετα, όπως π.χ. τα *Συνεπή Μέτρα Κινδύνου (Coherent Risk Measures),* με τα οποία θα ασχοληθούμε αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια.

Στην συνέχεια λοιπόν της εργασίας, θα αναλύσουμε τρία βασικά μέτρα κινδύνου που βασίζονται στα ποσοστημόρια, τα κοινά τους, τις διαφορές τους και πως μπορούν αυτά να βρουν χρήση στην ασφαλιστική αγορά. Πριν προχωρήσουμε στην λεπτομερή ανάλυσή τους, θα πρέπει να κάνουμε τρεις βασικές υποθέσεις (βλέπε Dowd and Blake, 2006):

1. Υπάρχουν αρκετά μέτρα κινδύνου, αλλά ποιό από όλα αυτά, θα χρησιμοποιήσουμε τελικά για την κάλυψη των αναγκών μας, ποιό από αυτά θα δώσει τις καλύτερες προβλέψεις στο εκάστοτε πρόβλημά μας, εξαρτάται από εμάς. Είναι καθαρά υποκειμενικό. Θέμα εμπειρίας και ενστίκτου.
2. Η εκτίμηση κάθε βασικού μέτρου κινδύνου ανά ποσοστημόριο είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, από την στιγμή που έχουμε διαθέσιμο ένα καλό Value at Risk μέτρο κινδύνου.
3. Τα ασφαλιστικά μέτρα κινδύνου έχουν ιδιαιτερότητες και είναι πιο σύνθετα από αυτά των οικονομικών κινδύνων, δυσκολίες τις οποίες θα ονοματίσουμε στην πορεία της εργασίας. Αυτό οφείλεται σε πολλούς διαφορετικούς παράγοντες και συνήθως ο μεγαλύτερος αριθμός αυτών των μέτρων, προσεγγίζεται με την χρήση στοχαστικών διαδικασιών

προσομοίωσης (τις οποίες θα δούμε παρακάτω στο κεφάλαιο των μεθόδων εκτίμησης).

Στην συνέχεια λοιπόν, θα δούμε τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου βάση ποσοστιαίας πιθανότητας κινδύνου, δηλαδή τα βασικά μέτρα κινδύνου που βασίζονται στα ποσοστημόρια. Θα εστιάσουμε κυρίως στην *Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR)*, στα *Συνεπή Μέτρα Κινδύνου (Coherent Measures),* καθώς και στην *Αναμενόμενη Απομείωση Κινδύνου (Expected Shortfall - ES)*. Αφού αποφασίσουμε ποιο μέτρο είναι το καταλληλότερο, θα πρέπει μετά να κάνουμε χρήση μεθόδων εκτίμησης (estimation methods) για να προσεγγίσουμε το μέτρο που διαλέξαμε.

Μια παραδοχή που πρέπει από την αρχή της μελέτης μας να κάνουμε, είναι η εξής: οι κατανομές κέρδους και ζημίας (Profit & Loss, P&L) στον τραπεζικό τομέα παίρνουν συχνά αρνητικές τιμές. Και με τα μέτρα που θα ασχοληθούμε στην συνέχεια, τα οποία μετράνε τις ακραίες τιμές μιας κατανομής, θα έχουμε να κάνουμε συνήθως με αρνητικές τιμές. Αν δηλαδή Y η τυχαία μεταβλητή, τότε θα μας ενδιαφέρουν οι ακραίες τιμές της αριστερής ουράς, άρα $Y<0$. Σε αντίθεση με αυτήν την παρατήρηση, στον ασφαλιστικό κλάδο, έχουμε να κάνουμε με ζημιές μεγάλων ποσών. Οι ακραίες τιμές της μεταβλητής X, ανήκουν στην δεξιά ουρά, είναι πολύ μεγάλα θετικά ποσά. Και έτσι πάντα θα έχουμε θετικές τιμές, δηλαδή $X>0$. Θα πρέπει λοιπόν, όλοι οι ορισμοί που θα παρουσιάσουμε παρακάτω να προσαρμοστούν ανάλογα με την χρήση τους και των σκοπό που θέλουμε να εξυπηρετήσουν. Αν θα αντιπροσωπεύουν δηλαδή χρηματοοικονομικά ή ασφαλιστικά μεγέθη.

Τέλος θα πάρουμε πραγματικά δεδομένα από μια ασφαλιστική εταιρεία της ελληνικής αγοράς και θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα μέτρα και κάποιες από τις μεθόδους που μελετήσαμε. Θα συγκρίνουμε μεταξύ τους τα αποτελέσματα και θα καταλήξουμε στο ιδανικότερο για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

2 Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk)

Η χρήση της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk) ή αλλιώς VaR ως εσωτερικό μοντέλο πρόβλεψης κινδύνου σε οικονομικούς οργανισμούς, εμφανίζεται στα τέλη της δεκαετίας του '70, αρχές του '80. Όσο πιο μεγάλη ήταν η εταιρεία τόσο πιο δύσκολη γινόταν αυτή η διαδικασία. Επίσης έλειπε η μεθοδολογία για μια τέτοια εργασία. Η σημαντικότερη αναπτύχθηκε από την JP Morgan, όπου μες τη δεκαετία του '90, πήρε την μορφή που γνωρίζουμε σήμερα. Αυτή η μέθοδος βασιζόταν σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο και με την χρήση της τυπικής απόκλισης και συσχετισμού των αποδόσεων, προέβλεπε σε καθημερινή βάση το value at risk δηλαδή την μέγιστη πιθανή ζημία της επόμενης μέρας - χρήσης. Η πιθανότητα στην οποία περιορίζεται η πρόβλεψη, αφορά ένα ποσοστό τοις εκατό, συνήθως 95%, το λεγόμενο **ποσοστό φερεγγυότητας**. Αυτό πρακτικά προβλέπει την μεγαλύτερη ζημιά που θα έχει η εταιρεία στις καλύτερες 95 από τις 100 ημέρες. Έτσι λοιπόν, διαφορετικά VaR μοντέλα διαφέρουν ως προς τον ορίζοντα πρόβλεψης (horizon period), ως προς το επίπεδο φερεγγυότητας, καθώς και ως προς την μεθοδολογία προσέγγισής τους. Έτσι κάποια βασίζονται στην θεωρία χαρτοφυλακίου (*portfolio theory*), στην ιστορική προσομοίωση (*historical simulation - HS*) και λοιπές στοχαστικές διαδικασίες (τις οποίες θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο). Στην συνέχεια θα αναλύσουμε το σημαντικό αυτό μέτρο κινδύνου του VaR και θα δούμε πως μπορεί να έχει εφαρμογή από τον οικονομικό κλάδο στον ασφαλιστικό. (Βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Από τη στιγμή λοιπόν που εμφανίστηκε και εξελίχθηκε η αξία σε κίνδυνο ως μέτρο κινδύνου, διαδόθηκε πολύ γρήγορα στους ασφαλιστικούς οίκους, σε οικονομικούς επενδυτικούς φορείς και τελικά κυριάρχησε σε όλη την χρηματοοικονομική και ασφαλιστική αγορά, με αποτέλεσμα στα μέσα της δεκαετίας του '90 να είναι η επικρατέστερη μέθοδος πρόβλεψης οικονομικού κινδύνου. Από τότε έχει συνεχίσει να εξελίσσεται και με τον χρόνο και την μελέτη, να γίνεται πιο πολύπλοκη, πιο σύνθετη και να επεκτείνεται και σε άλλους τομείς όπως τον πιστωτικό, τον κίνδυνο αγοράς, τον λειτουργικό κίνδυνο κ.α. (Βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Ορισμός: (Βλέπε Dowd and Blake, 2006) Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που μπορεί να έχει τυχαίες ζημιές σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα (horizon period). Έστω α η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει και q_α το α-ποσοστημόριο του πεδίου ζημιών (α-quantile). Το VaR λοιπόν του χαρτοφυλακίου με επίπεδο εμπιστοσύνης α, ή επίπεδο φερεγγυότητας α, είναι το q_α quantile της ζημιοκατανομής, δηλαδή,

$$\mathbf{VaR_\alpha = q_\alpha \text{ ή } Q_\alpha.}$$

Η ανάπτυξη του VaR οφείλεται κατά κύριο λόγο στην υπεροχή του σε σχέση με άλλες παραδοσιακές μεθόδους που χρησιμοποιούνταν μέχρι τότε. Μερικά από τα χαρακτηριστικά που του έδωσαν αυτό το προβάδισμα ήταν (Βλέπε Dowd and Blake, 2006):

- Το VaR είναι ένα κοινό μέτρο κινδύνου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορους τομείς και να προβλέψει διάφορους κινδύνους. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικά χαρτοφυλάκια και μας δίνει την δυνατότητα να συγκρίνουμε τον κίνδυνο μεταξύ αυτών.
- Μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον κίνδυνο αθροιστικά στον βαθμό που αυτοί οι κίνδυνοι αλληλοεπηρεάζονται, ενώ παραδοσιακά μοντέλα δεν έχουν αυτήν την ευαισθησία στον συσσωρευμένο κίνδυνο.
- Το VaR δίνει πιο ολοκληρωμένο αποτέλεσμα, πιο ολοκληρωμένη πρόβλεψη κινδύνου από αυτήν των παλαιότερων τρόπων προσέγγισης, που έδιναν αποτελέσματα για τον κάθε κίνδυνο ξεχωριστά. Έτσι λοιπόν δίνει τον συνολικό κίνδυνο σε ένα χαρτοφυλάκιο και όχι σε κάθε τμήμα του χωριστά.
- Υπολογίζουμε τον κίνδυνο σε σχέση με πιθανότητα και μπορεί να μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες βάση των πιθανοτήτων που σχετίζονται με συγκεκριμένες ζημιές. Παραδοσιακές μέθοδοι δίνουν απαντήσεις στο "τι θα συμβεί αν;" και αδυνατούν να δώσουν κάποιο μέτρο που να μπορεί να συνδυάσει το ποσοστό πιθανότητας με το ύψος της ζημιάς.
- Ένα τελευταίο αλλά σημαντικό στοιχείο που δίνει προβάδισμα στο Value at Risk είναι ότι εκφράζεται σε μια πολύ απλή και κατανοητή μονάδα μέτρησης: απώλεια χρημάτων. Κάτι το οποίο το κάνει πολύ προσεγγίσιμο και εύχρηστο την στιγμή που παλαιότερες προσεγγίσεις ήταν εκφρασμένες σε πιο πολύπλοκες μονάδες.

Παρόλα αυτά, το VaR έχει και μερικούς περιορισμούς. Ένας από αυτούς είναι ότι μας λέει τι θα συμβεί και το ποσό που θα χάσουμε σε κανονικές συνθήκες με κάποιο μεγάλο ποσοστό πιθανότητας. Δεν έχουμε όμως καμία πληροφορία για τις ζημιές που θα συμβούν σε κακές συνθήκες ή διαφορετικά, για τις ζημιές στην ουρά της κατανομής, σε αυτές δηλαδή που ξεπερνάνε το ποσό του VaR. Αυτή η αδυναμία μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα να αφήσει τον επενδυτή (αν μιλάμε για επενδύσεις) εκτεθειμένο σε πολύ μεγάλες ζημιές. Ζημιές που δεν τις έχει υπολογίσει, ούτε καν λάβει υπόψιν, γιατί το μέτρο του Value at Risk δεν δίνει αυτήν την πληροφορία.

Τέλος, αυτή η αδυναμία του μέτρου, μπορεί να προκαλέσει ηθικό κίνδυνο (moral hazard). Αυτό συμβαίνει όταν οι μεσολαβητές - traders παίρνουν μεγάλα ρίσκα με το ενδεχόμενο κερδών, χωρίς να είναι εις γνώσιν του κεφαλαιούχου οι οικονομικές απώλειες που μπορεί να συμβούν όταν θα έχουμε ακραίες τιμές στις ζημιές.

Ας ρίξουμε όμως μια πιο προσεκτική ματιά σε αυτό το μέτρο κινδύνου και ας προσπαθήσουμε να το προσεγγίσουμε με απλά παραδείγματα. Ο ορισμός που δίνει ο Harry H. Panjer (βλέπε Harry, 2006) για το VaR είναι ο εξής:

Ορισμός 2.1: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει ζημιά. Η *Αξία σε Κίνδυνο* του X για το 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης, το οποίο συμβολίζεται ως $VaR_α(X)$ ή $x_α$, είναι το α-ποσοστημόριο (α-quantile) της κατανομής του X.

Για τις συνεχής κατανομές, η τιμή του $VaR_α$ ή το $x_α$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση (βλέπε Harry P., 2006)

$$Pr[X > VaR_\alpha(X)] = 1 - \alpha \qquad (2.1)$$

Ένας από τους πιο ολοκληρωμένους ορισμούς του VaR ωστόσο είναι ο ακόλουθος (βλέπε Carlo, 2003):

Ορισμός 2.2: έστω T χρονικός ορίζοντας και $α \in (0, 1)$ είναι το επίπεδο φερεγγυότητας που επιλέγουμε.

Το κάτω α–Value at Risk (**lower VaR, $VaR_α(X)$**) είναι η ζημία που θα έχουμε στο καλύτερο σενάριο των 100α% χειρότερων περιπτώσεων. Ή διαφορετικά, η καλύτερη τιμή από τις α χειρότερες περιπτώσεις.

Το άνω α–Value at Risk (**upper VaR, $VaR^{\alpha}(X)$**) είναι η ζημιά που σχετίζεται με την χειρότερη περίπτωση των 100(1-α)% καλύτερων σεναρίων. Η χειρότερη, δηλαδή, τιμή των 1-α καλύτερων περιπτώσεων.

Διαφορετικά με την χρήση της συνάρτησης κατανομής του X, $F_X(x)=P\{X \leq x\}$, ο παραπάνω ορισμός παίρνει της εξής μορφή (βλέπε Carlo, 2003):

$$VaR_{\alpha}(X) = -\sup \{x / F_x(x) < \alpha\} = -q_{\alpha}(X) \tag{2.2}$$

$$VaR^{\alpha}(X) = -\inf \{x / F_X(x) > \alpha\} = -q^{\alpha}(X) \tag{2.3}$$

Το μέτρο λοιπόν $VaR_{5\%}$ που αφορά ζημιές ενός χαρτοφυλακίου, δηλώνει την καλύτερη περίπτωση από τις 5% χειρότερες περιπτώσεις που μπορεί να συμβούν στον χρονικό ορίζοντα T. Ή διαφορετικά είναι η χειρότερη περίπτωση από τις 95% καλύτερες περιπτώσεις. Το $VaR_{5\%}$ λοιπόν είναι η πιο αισιόδοξη εκτίμηση για τις 5% των πιο απαισιόδοξων προβλέψεων στον χρονικό μας ορίζοντα.

Ωστόσο αυτή η εκτίμηση δεν μας δίνει καθόλου στοιχεία για τις ζημιές πέρα από αυτήν την ζημιά που έχουμε αξιολογήσει. Δεν μας δίνει δηλαδή στοιχεία, ούτε χαρακτηριστικά για την δεξιά ουρά της κατανομής πέρα από το VaR. Στην συνέχεια θα δούμε ένα απλό παράδειγμα, πως για δύο χαρτοφυλάκια, που ενώ με την χρήση του VaR, θα έχουμε τα ίδια αποτελέσματα, δηλαδή ίδια απαίτηση κεφαλαίου κινδύνου, ο κίνδυνος τελικά είναι διαφορετικός (βλέπε Carlo, 2003).

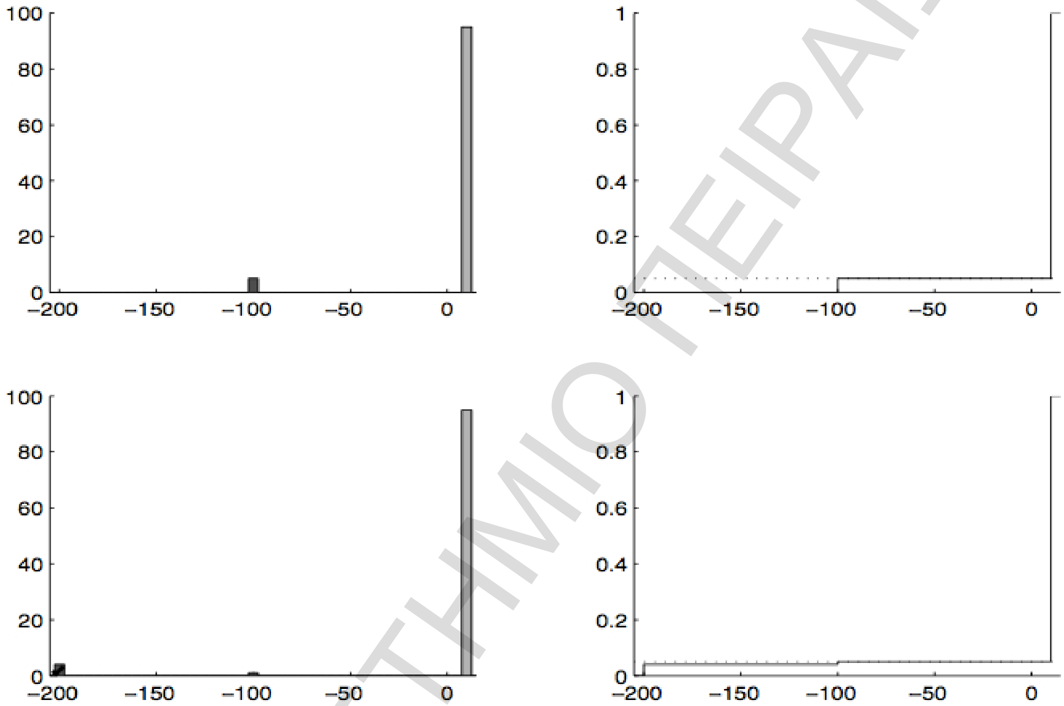
Παράδειγμα 2.1: Έστω ένα χαρτοφυλάκιο με δύο σενάρια κέρδους και ζημίας και τις αντίστοιχες πιθανότητες τους:

X	Prob
-100$	5%
+10$	95%

Έστω τώρα ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο, με τρία πιθανά σενάρια κερδών και ζημιών (p&l):

Y	Prob
-200$	4%
-100$	1%
+10$	95%

Αντίστοιχα στο παρακάτω πίνακα, φαίνονται γραφικά η κατανομή πικνότητας πιθανοτήτων (pdf) και η συνάρτηση κατανομής (cdf).



Πίνακας 2.1: pdf και cdf του X (πάνω) και του Y (κάτω) (βλέπε Carlo, 2003)

Συγκρίνοντας αυτά τα δύο χαρτοφυλάκια προκύπτει ότι τα VaR είναι ίδια:

$$\boldsymbol{VaR_{5\%}(X) = VaR_{5\%}(Y) = 100\ \$,}$$

παρότι το Y είναι πολύ πιο επικίνδυνο διότι αν για 95% θα έχουν το ίδιο κέρδος, ενδέχεται με πιθανότητα 5%, το Y να έχει 300$ ζημία έναντι 100$ που έχει το πρώτο. Επίσης παρατηρούμε ότι το άνω 5% VaR είναι το ίδιο:

$$\boldsymbol{VaR^{5\%}(X) = VaR^{5\%}(Y) = -10\ \$.}$$

Αυτό το απλό παράδειγμα μας δείχνει ότι το VaR δεν έχει ευαισθησία στις μεγάλες ζημιές της δεξιάς ζημιάς πέρα από το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Επίσης όπως έχουμε παρατηρήσει και παραπάνω, για την χρήση στην αναλογιστική επιστήμη, θα πρέπει να γίνει μια προσαρμογή στον ορισμό του VaR, ούτως ώστε να ανταποκρίνεται στα δεδομένα του ασφαλιστικού τομέα. Εδώ λοιπόν δεν έχουμε αρνητικές τιμές, αλλά μόνο θετικές και μάλιστα μεγάλων ποσών. Παρακάτω θα δούμε πρακτικά παραδείγματα και πως καταλήγουμε στην εκτίμηση του μέτρου του VaR με την βοήθεια των κατανομών βάση των οποίων καθορίζεται η τυχαία μας μεταβλητή.

2.1 VaR στον Αναλογισμό

Αφού ορίσαμε το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο και είδαμε ένα απλό παράδειγμα που απαντούσε σε πρόβλημα με χρηματοοικονομικά προϊόντα, τώρα θα ασχοληθούμε με το πως μπορεί να εφαρμοστεί σε αντίστοιχα ασφαλιστικά. Θα μελετήσουμε λοιπόν το μέτρο κινδύνου μέσα από τέσσερα παραδείγματα, μιας διακριτής περίπτωσης και τριών συνεχών κατανομών.

Θα πρέπει λοιπόν να προσαρμόσουμε τον τύπο του μέτρου μας στα ασφαλιστικά δεδομένα. Όπως είπαμε το α-VaR είναι η ζημιά, που με πιθανότητα α, δεν θα ξεπεραστεί.

Από την Hardy Mary (2006) προκύπτει ο εξής ορισμός: για $0 \leq \alpha \leq 1$

$$VAR_\alpha = Q_\alpha = min\{Q: Pr[L \leq Q] \geq \alpha\}, \tag{2.1.1}$$

ο οποίος τύπος είναι στην ουσία ο τύπος (2.3) χωρίς το αρνητικό πρόσημο.

Στην συνεχή περίπτωση, διαμορφώνεται ως εξής:

$$Pr[L \leq Q_\alpha] = \alpha, \tag{2.1.2}$$

όπου και αυτός ο τύπος είναι ο ίδιος με τον (2.1).

Ας δούμε τώρα το πρώτο παράδειγμα διακριτής περίπτωσης:

Παράδειγμα 2.1.1: (βλέπε Hardy, 2006) Έστω μια ζημιά μπορεί να πάρει τις παρακάτω τιμές με τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Loss	**Prob.**
100	0,005
50	0,045
10	0,10
0	0,85

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι:

$P[L \leq 100] = P(100) + P(50) + P(10) + P(0) = 1$
$P[L \leq 50] = P(50) + P(10) + P(0) = 0{,}995$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

X	$Pr[L \leq X]$
100	1,00
50	0,995
10	0,95
0	0,85

Έστω ότι ζητάμε το $VaR_{99\%}$. Δεν υπάρχει κάποιο Q ούτως ώστε να ισχύει $P[L \leq Q] = 0{,}99$. Σύμφωνα με τον τύπο (2.1.1) επιλέγουμε λοιπόν την μικρότερη τιμή της ζημιάς η οποία μας δίνει τουλάχιστον 99% πιθανότητα κάθε άλλη ζημιά να είναι μικρότερη. Έτσι έχουμε:

$$VaR_{99\%} = min\{Q: Pr[L \leq Q] \geq 0{,}99\} = min\{100, 50\} = 50.$$

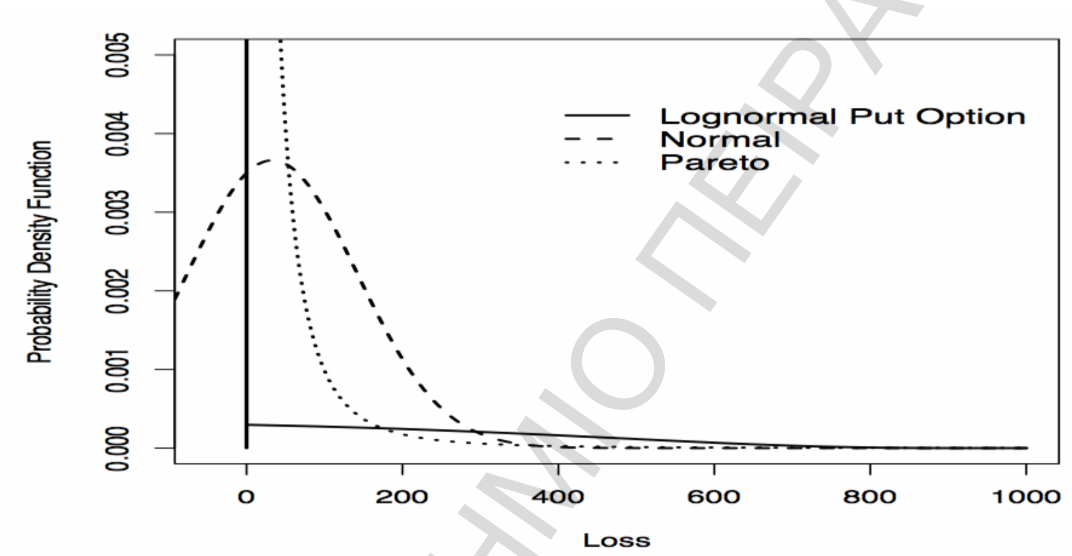
Στην συνέχεια θα δούμε τρία παραδείγματα συνεχών κατανομών (βλέπε Hardy, 2006):

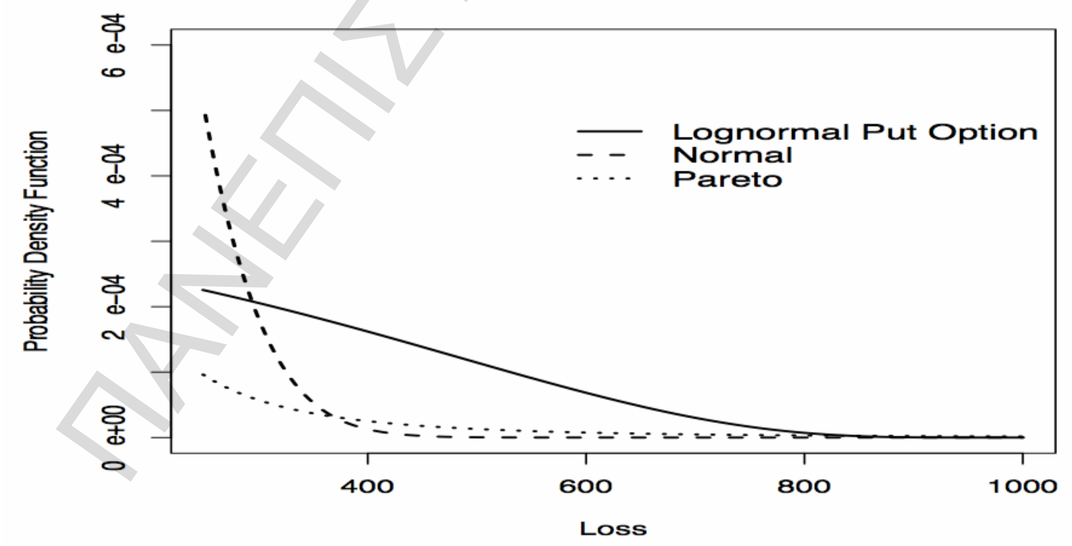
1. Η ζημιά ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 33 και τυπική απόκλιση 109, $X \sim \mathcal{N}(33, 109^2)$
2. Η ζημιά ακολουθεί κατανομή Pareto με μέσο 33 και τυπική απόκλιση 109, Η ζημιά ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο

33 και τυπική απόκλιση 109, $X \sim Pareto(a, \lambda)$

3. Η ζημιά ακολουθεί ένα put option προϊόν και δίνεται από τον τύπο $1000\max(1-S_{10}, 0)$, όπου το S_{10} είναι η τιμή π.χ. της μετοχής τον χρόνο $T = 10$, ενώ αρχική τιμή αγοράς $S_0 = 1$. Θεωρούμε ότι η τιμή S_t ακολουθεί κατανομή lognormal με μέσο 0,08 και τυπική απόκλιση 0,22, $S_t \sim LN(0.08, 0.22^2)$

Παρακάτω δίνουμε στον πρώτο πίνακα τα σχεδιαγράμματα των τριών περιπτώσεων και στην δεύτερο πίνακα απομονώνουμε την δεξιά ουρά των συναρτήσεων.





Πίνακας 2.1.1 (βλέπε Hardy, 2006)

Παράδειγμα 2.1.2, Κανονικής Κατανομής:

Έστω $X \sim \mathcal{N}(33, 109^2)$.

Αναζητούμε πάλι το VaR για το 99% τεταρτημόριο. Έχουμε:

$VaR_{99\%}$ = $P[L \leq Q]$ =0,99

Από τον γνωστό τύπο της κανονικής κατανομής $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, όπου *Φ(x) η CDF της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1).* Έχουμε λοιπόν

$$\Phi\left(\frac{Q-33}{109}\right) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q-33}{109}\right) = 2{,}326$$

$$\Rightarrow Q = 286{,}53$$

Έτσι λοιπόν το $VaR_{99\%}$=\$286,53

Παράδειγμα 2.1.3, Κατανομής Pareto:

Βάση της μελέτης Klugman, Panjer and Willmot (2004), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(\theta + x)^{\alpha+1}}$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\alpha$$

Δοθέντος μ=33 και σ=109, έχουμε θ=39,660 και α=2,2018. Το VaR λοιπόν για το 99% τεταρτημόριο είναι

$$P[L \leq Q] = 0{,}99$$

$$\Rightarrow F(Q) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + Q}\right)^\alpha = 0{,}99$$

$\Rightarrow Q = 282{,}63$

Έτσι λοιπόν το $VaR_{99\%}$=$282,63

Παράδειγμα 2.1.4, Lognormal Put Option:

Σε αυτή την περίπτωση και επειδή έχουμε συνάρτηση μάζας πιθανότητας στο σημείο 0, θα δούμε πρώτα αν η πιθανότητα που ζητάμε, δηλαδή το Q για το 99%, πέφτει σε αυτό το σημείο. Η πιθανότητα λοιπόν στο 0 είναι

$$P(L = 0) = P(S_{10} \geq 1) = 1 - \Phi\left(\frac{log(1) - 10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right) = 0{,}8749$$

Άρα το 99% τεταρτημόριο είναι στο συνεχές κομμάτι της ζημιοκατανομής μας.

Έτσι λοιπόν για να βρούμε πάλι το $Q_{0,99}$ έχουμε:

$$P[L \leq Q] = 0{,}99$$

$$\Rightarrow P[1000(1 - S_{10}) \leq Q] = 0{,}99$$

$$\Rightarrow P[S_{10} \geq \left(1 - \frac{Q}{1000}\right) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{log\left(1 - \frac{Q}{1000}\right) - 10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{log\left(1 - \frac{Q}{1000}\right) - 10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right) = 0{,}01$$

$$\Rightarrow \left(\frac{log\left(1 - \frac{Q}{1000}\right) - 10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right) = -2{,}325$$

$$\Rightarrow Q = 558{,}88$$

Άρα $VaR_{99\%}$=$558,88

Η αξία σε κίνδυνο λοιπόν ως μέτρο κινδύνου με βάση το ποσοστημόριο, μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για το χειρότερο σενάριο που μπορεί να συμβεί με κάποια α% πιθανότητα. Ένα μέτρο που έχει χρησιμοποιηθεί πολύ μέχρι τις μέρες μας, τόσο στον οικονομικό όσο και στον ασφαλιστικό κλάδο, μιας και είναι εύκολος και ο υπολογισμός του και η χρήση του. Δεν έχουμε όμως καμία πληροφορία για την συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής μας πέρα από το Q_α, πόσο ακραίες τιμές μπορεί να πάρει, πόσο μεγάλες ζημιές μπορεί να έχει ή πόσο ριψοκίνδυνο μπορεί να είναι ένα χαρτοφυλάκιο.

Λόγο αυτής της αδυναμίας λοιπόν θα αναζητήσουμε άλλα μέτρα, όπως τα συνεπή μέτρα κινδύνου και τα Spectral Risk Measures, που μπορούν να εκτιμήσουν και τα χειρότερα σενάρια, που είναι πέρα από το επίπεδο εμπιστοσύνης του Q_α.

3 Συνεπή Μέτρα Κινδύνου

(Coherent Risk Measures)

Από την δεκαετία του '90 λοιπόν και μετά, πολλές μελέτες και θεωρητικές προσεγγίσεις έχουν γίνει για το μέτρο του VaR και πώς αυτό εκτιμάει τον κίνδυνο. Στην προσπάθεια λοιπόν αυτήν, κατέστη απαραίτητο, πριν αναζητήσουμε τον κίνδυνο και τον μελετήσουμε με ένα μέτρο κινδύνου, να κάνουμε ξεκάθαρο τι εννοούμε μέτρο κινδύνου και πότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μέτρο ως συνεπές.

Έτσι λοιπόν αναπτύχθηκαν τέσσερα αξιώματα βάση των οποίων μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα μέτρο κινδύνου ως *συνεπές (coherent)*. Ας υποθέσουμε X μια κατάσταση κινδύνου, π.χ. ενός χαρτοφυλακίου, και ρ(X) ένα μέτρο του κινδύνου X. Έστω ότι ρ(.) είναι το ελάχιστο επιπλέον κεφάλαιο που πρέπει μια εταιρεία να έχει, για να είναι αποδεχτή η έκθεσή της στον κίνδυνο, βάση κάποιων οικονομικών ή κρατικών κανονισμών. Αν το ρ(.) είναι θετικό, τότε αυτό το ποσό θα πρέπει να προστεθεί στα κεφάλαια για να είναι αποδεκτό - φερέγγυο το επιχειρησιακό κεφάλαιο. Αν είναι το ρ(.) αρνητικό, τότε τόσο μπορεί να αφαιρεθεί από τα κεφάλαια και πάλι να είναι αρκετά τα ιδία κεφάλαια ώστε να καλύπτουν τα όρια φερεγγυότητας (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Έστω τώρα δύο θέσεις κινδύνου X και Y, ή διαφορετικά, οι πιθανές οικονομικές καταστάσεις, που αν συμβούν δίνουν τις αντίστοιχες ποσοτικές θέσεις, V(X) και V(Y). Το μέτρο κινδύνου ρ(.) θεωρείται συνεπές μέτρο όταν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (βλέπε Dowd and Blake, 2006):

Ιδιότητες:

Μονοτονία (Monotonicity): $V(Y) \geq V(X) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$ (1)

Υποπροσθετική (Subadditivity): $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (2)

Θετική Ομοιογένεια (Positive homogeneity):

$\rho(hX) = h\rho(X)$ *για κάθε* $h > 0$ (3)

Μετατοπιστική Αμεταβλητότητα (Translational invariance):

$\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$ *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$ (4)

Η πρώτη, η τρίτη και η τέταρτη ιδιότητα χαρακτηρίζονται ως συνθήκες καλής συμπεριφοράς.

Η πρώτη ιδιότητα, monotonicity, σημαίνει ότι αν συμβεί το ενδεχόμενο Y σε μια εταιρεία, δηλαδή ο κίνδυνος Y, θα προκαλέσει την οικονομική κατάσταση V(Y). Αν αυτή η οικονομική κατάσταση είναι μεγαλύτερη του V(X), τότε η εταιρεία θα έχει εκτεθεί σε μικρότερο κίνδυνο με μικρότερη ζημία από ότι αν συνέβαινε το ενδεχόμενο X. Και σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, σε αυτήν την περίπτωση σημαίνει ότι είναι μικρότερο το μέτρο κινδύνου, δηλαδή μικρότερο το ποσό που πρέπει να προσθέσουμε στην πρώτη περίπτωση του Y για να γίνει το κεφάλαιο αποδεκτό - φερέγγυο.

Positive Homogeneity σημαίνει ότι ο κίνδυνος μια θέσης είναι αναλογικός αυτής της θέσης.

Η ιδιότητα Translational Invariance αποδεικνύει ότι η αύξηση ενός ποσού σε μια οικονομική κατάσταση, μειώνει κατά το ίδιο ποσό το κίνδυνο, δηλαδή το ποσό που πρέπει να προστεθεί για να καλυφθεί το κεφάλαιο φερεγγυότητας.

Η σημαντικότερη από τις παραπάνω τέσσερις ιδιότητες είναι η δεύτερη, η υποπροσθετική ιδιότητα. Αυτή μας λέει ότι το χαρτοφυλάκιο που υποδιαιρείται σε υπό χαρτοφυλάκια, απαιτεί μικρότερο, αν όχι το ίδιο, κεφάλαιο κινδύνου από τα κεφάλαια που απαιτεί το κάθε ένα από αυτά χωριστά. Δηλαδή, ο συνολικός κίνδυνος δεν θα ξεπεράσει ποτέ το άθροισμα των μεμονωμένων κινδύνων και αυτή είναι η βασική απαίτηση κάθε αξιόλογου συνεπούς μέτρου κινδύνου και αντίστροφα (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Παράδειγμα: Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω. Έστω ότι έχουμε δυο τράπεζες A και B, και έστω ότι έχουν κρατήσει κεφάλαια κινδύνου για τα χαρτοφυλάκιά τους, $\rho(\Pi_\alpha)$ και $\rho(\Pi_\beta)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυτές οι εταιρείες συγχωνεύονται σε μια. Δημιουργείται έτσι ένα ενιαίο χαρτοφυλάκιο, το $\Pi_\alpha+\Pi_\beta$ και πρέπει να έχουν ένα επί πλέον κεφάλαιο που να καλύψει τον κίνδυνο αυτού του νέου χαρτοφυλακίου. Αν το μέτρο κινδύνου, δηλαδή το $\rho(\Pi_\alpha + \Pi_\beta)$ που έχουμε επιλέξει, δεν μας δίνει μικρότερο ή τουλάχιστον το ίδιο κεφάλαιο κινδύνου σε σχέση με τα κεφάλαια που είχαν κρατήσει στην αρχική περίπτωση, τότε δεν καλύπτεται η ανάγκη μείωσης του συνολικού κινδύνου, που είναι και η αιτία του να μπουν τα ενεργητικά των δύο τραπεζών σε ένα. Έτσι το μέτρο ρ(.) δεν είναι συνεπές. Αν δηλαδή $\rho(\Pi_\alpha + \Pi_\beta) \nleq \rho(\Pi_\alpha) + \rho(\Pi_\beta)$ τότε το ρ(.) δεν είναι coherent measure. (βλέπε Acerbi, 2003)
Σημαντική επίσης είναι η δεύτερη και τρίτη ιδιότητα, όσο αφορά προβλέψεις που έχουν να κάνουν με κίνδυνο ρευστότητας

(Liquidity Risk). Σε αυτήν την περίπτωση η υποπροσθετική ιδιότητα και η θετική ομοιογένεια αντικαθίστανται από την παρακάτω (βλέπε Acerbi, 2003):

Για κάθε X, Y $\in$ V και α $\in$ [0, 1] ισχύει:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y).$$

Εδώ είναι και η αδυναμία του VaR, το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεπές μέτρο κινδύνου, γιατί δεν καλύπτει την υποπροσθετική ιδιότητα. Αλλά το σημαντικότερο πρόβλημα είναι ότι το VaR δεν στηρίζεται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων μέτρου κινδύνου. Έτσι αν και κάποιοι υποστηρικτές του VaR δεν θεωρούν τόσο σημαντική την υποπροσθετική ιδιότητα, κανείς από αυτούς δεν έχει στοιχειοθετήσει κάποια αξιώματα που να έχουν σχέση και να καλύπτουν το VaR. (βλέπε Acerbi, 2004)

Εξαιτίας λοιπόν αυτών των προβλημάτων, θα αναζητήσουμε εναλλακτικά μέτρα κινδύνου που να κρατάνε τα προτερήματα του VaR αλλά και να ξεπερνάνε τα προβλήματα και τις αδυναμίες του. Επιπλέον, στον βαθμό που θέλουμε να έχουμε τα προτερήματα του VaR, είναι λογικό να θεωρούμε κάθε τέτοιο μέτρο ως "VaR-like", εφόσον θα απεικονίζουν μια ζημιοκατανομή σε κάποιο ποσοστημόριο (quantile based). (βλέπε Dowd and Blake, 2006)

4 Αναμενόμενη Απομείωση Κινδύνου

(Expected Shortfall)

Ένα μέτρο κινδύνου που είναι αρκετά αξιόπιστο, είναι η Αναμενόμενη Απομείωση Κινδύνου (Expected Shortfall - ES), το οποίο απεικονίζει την αναμενόμενη τιμή, δηλαδή τον μέσο όρο των χειρότερων 100(1-α)% ζημιών.

Ορισμός 4.1: Έστω Τ ο χρονικός ορίζοντας και $\alpha \in (0,1]$ το ζητούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης. Η αναμενόμενη απομείωση Κινδύνου (α-Expected Shortfall ή $ES_\alpha(X)$) είναι η μέση ζημιά των (1-α) χειρότερων περιπτώσεων του χαρτοφυλακίου Χ. (βλέπε Dowd and Blake, 2006)

Στην περίπτωση συνεχούς κατανομής το ES δίνεται από τον τύπο:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_p \, dp, \qquad (4.1)$$

ενώ στην περίπτωση που η κατανομή είναι διακριτή, έχουμε τον τύπο:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{p=\alpha}^{1} \begin{matrix} (p^{th} \text{ χειρότερο σενάριο}) \times \\ (\text{πιθανότητα } p^{th} \text{ χειρότερου σεναρίου}). \end{matrix} \qquad (4.2)$$

Αυτό το μέτρο κινδύνου είναι πολύ δημοφιλές στον αναλογιστικό κλάδο, αν και μπορεί να διαφέρει η ονομασία του. Στην Αμερική είναι γνωστό ως Conditional Tail Expectation (CTE), ενώ στην Ευρώπη έχει επικρατήσει ως Tail VaR. Στους χρηματοοικονομικούς κύκλους εμφανίζεται και ως Expected Tail Loss, Tail Conditional Expectation, Conditional VaR, Tail Conditional VaR, Worst Conditional Expectation κ.α.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει μια καθιερωμένη ονομασία ούτε στα οικονομικά, ούτε στον αναλογισμό, αλλά σε αυτό το μέτρο κινδύνου εντοπίζουμε δύο κυρίως χαρακτηριστικά. Πρώτον ότι εκφράζεται με όρους πιθανοτήτων και δεύτερον είναι ένα μέτρο ποσοστημορίου, το οποίο μας δίνει τον μέσο όρο των ζημιών που υπερβαίνουν το VaR, δηλαδή:

$$ES=E[X \mid X>q_\alpha(X)].$$

Παράδειγμα 4.1: (βλέπε Acerbi, 2003) Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για να κατανοήσουμε καλύτερα το μέτρο. Ας πάρουμε πάλι το παράδειγμα 2.1 και τα δεδομένα των δύο χαρτοφυλακίων X και Y. Προκύπτουν τα παρακάτω:

$$ES_{5\%}(X) = 100\ \$$$
$$ES_{5\%}(Y) = (4\% \times 200 + 1\% \times 100)/5\% = 180\ \$$$

Έτσι συνοψίζοντας:

	X	Y
$VaR_{5\%}$	100$	100$
$VaR^{5\%}$	-10$	-10$
$ES_{5\%}$	100$	180$

Μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα ότι για κάθε α και X ισχύει πάντα ο γενικός τύπος, (βλέπε Acerbi, 2003)

$$ES_{\alpha}(X) \geq VaR_{\alpha}(X) \geq VaR^{\alpha}(X). \qquad (4.3)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το ES δεν υπάρχει λόγος διαχωρισμού άνω και κάτω εκδοχής όπως στην περίπτωση του VaR (upper & lower VaR) μιας και μιλάμε για μέσο όρο.

Επίσης άλλη μία παρατήρηση είναι ότι το ES αφορά το μέσο των χειρότερων σεναρίων με κάτω κατώφλι ένα ποσοστό πιθανότητας και όχι το ποσό ως κατώφλι. Δεν παίρνουμε το μέσο μεταξύ των χειρότερων ποσών του τεταρτημορίου, αλλά την μέση ζημιά από ένα δείγμα των 100α% χειρότερων περιπτώσεων.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ES αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου, καλύπτοντας την ιδιότητα της υποπροσθετικής καθώς και τις υπόλοιπες ιδιότητες. Αναλυτικά θα ασχοληθούμε με αυτό σε επόμενο κεφάλαιο, δίνοντας και πρακτικά παραδείγματα.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε την διαφορά του ES με το μέτρο που ονομάζεται Δεσμευμένη Μέση Τιμή της ουράς της κατανομής *(Conditional Tail Expectation - CTE)* (επίσης μπορεί να το βρούμε και ως Expected Loss ή Conditional Value at Risk ή Tail Conditional Expectation).

Ορισμός 4.2: (βλέπε Acerbi, 2003) Έστω T ο χρονικός ορίζοντας και $\alpha \in (0, 1]$ το επιλεγμένο επίπεδο φερεγγυότητας. Ορίζουμε κάτω δεσμευμένη μέση τιμή της ουράς της κατανομής για επίπεδο εμπιστοσύνης α (α–Conditional Tail Expectation ή $CTE_\alpha(X)$) ως

$$CTE_\alpha = -\mathrm{E}\ \{X/X \leq q_\alpha(X)\}$$

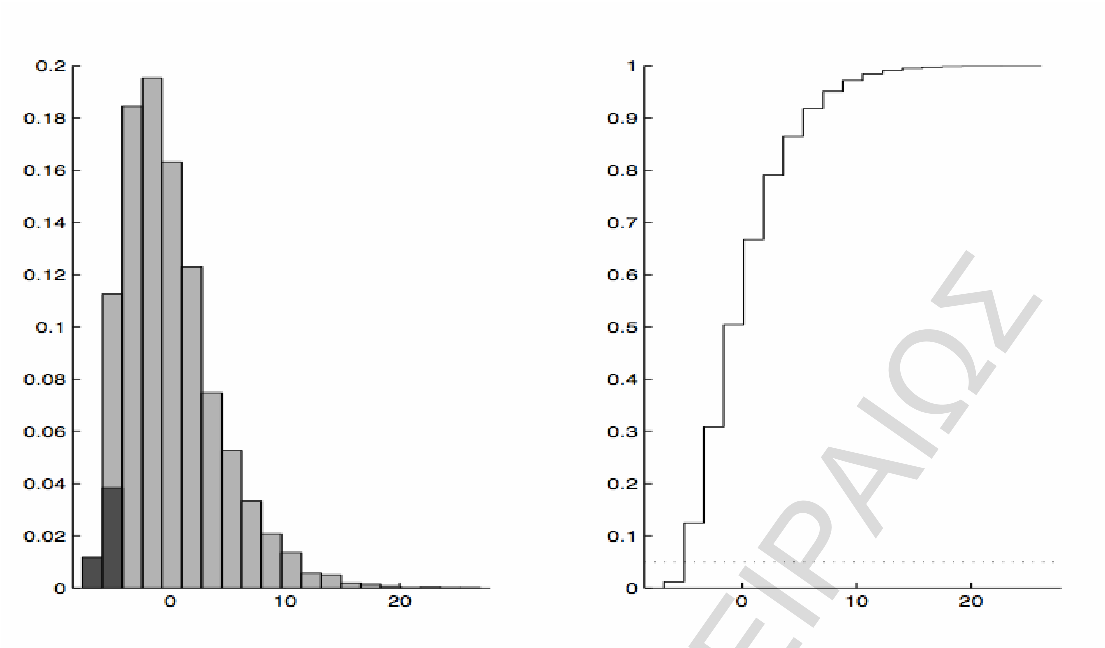
και άνω α-CTE ($CTE^\alpha(X)$) ως

$$CTE^\alpha = -\mathrm{E}\ \{X/X \leq q^\alpha(X)\}.$$

Το μέτρο κινδύνου CTE είναι λοιπόν η αναμενόμενη ζημιά, των περιπτώσεων που είναι κάτω από το (άνω ή κάτω) τεταρτημόριο. Σε αυτήν την περίπτωση η μέση ζημιά περιορίζεται από ένα συγκεκριμένο μέγεθος ζημιάς και όχι από μια πιθανότητα.

Παράδειγμα 4.2: (βλέπε Acerbi, 2003) Ας θεωρήσουμε την διακριτή περίπτωση του πίνακα 4.3. Κάθε κολόνα δηλώνει ένα πιθανό έξοδο. Το σκούρο γκρι μέρος υποδηλώνει τις 5% χειρότερες περιπτώσεις, το οποίο είναι στις στήλες του τεταρτημόριο $q_{5\%}(X)$. Η μέση τιμή αυτής της περιοχής είναι το $ES_{5\%}$. Σύμφωνα με τον ορισμό 4.2, το $CTE_{5\%} = CTE^{5\%}$ είναι το μέσο ενός μεγαλύτερου δείγματος μιας και περιλαμβάνει ολόκληρη την στήλη των ζημιών που αφορά το 5% τεταρτημόριο. Οπότε και έχουμε σε αυτήν την περίπτωση $ES_{5\%} > CTE_{5\%} = CTE^{5\%}$.

Από το παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι στην διακριτή περίπτωση αντιμετωπίζουμε ορισμένες δυσκολίες και ανωμαλίες μιας και το άνω CTE σε σχέση με το κάτω, δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα καθώς επίσης και αν επιλέξουμε $<$ *αντί* $\leq$ στον ορισμό 4.2 του CTE, πάλι θα μας οδηγήσει σε άλλα αποτελέσματα.



Πίνακας 4.3: Διακριτή περίπτωση όπου ES≠CTE (βλέπε Acerbi, 2003)

Προκύπτει λοιπόν ότι το ES δεν πρέπει να θεωρηθεί ως το μέσο των ζημιών πάνω από ένα δεδομένο τεταρτημόριο. Δεν είναι η αναμενόμενη ζημιά πάνω από το VaR. Έτσι λοιπόν για να προσεγγίσουμε το ES μέσω μαθηματικού τύπου, για το μέσο πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες, και συγκεκριμένα το p στο πεδίο [0,α], ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση κατανομής (βλέπε Acerbi, 2003)

$$F_X^{\leftarrow}(p) = \sup\{x / F_X(x) < p\}.$$

Πρόταση: *Το Expected Shortfall μπορεί να εκφραστεί με τον παρακάτω τρόπο* (βλέπε Acerbi, 2003):

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{a}\int_0^a F_X^{\leftarrow}(p)\,dp.$$

Η έννοια του ES μπορεί να γίνει πιο κατανοητή στην διακριτή περίπτωση στην οποία έχουμε τον τύπο

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{a}\sum_{p=0}^{a} \frac{(p^{th}\ \chi\varepsilon\iota\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\ \sigma\varepsilon\nu\acute{\alpha}\rho\iota o) \times}{(\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p^{th}\ \chi\varepsilon\iota\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\upsilon\ \sigma\varepsilon\nu\alpha\rho\acute{\iota}o\upsilon)'}$$

δηλαδή το άθροισμα των p^{th} χειρότερων ενδεχόμενων επί την πιθανότητα του να συμβούν, όταν το p παίρνει τιμές από 0 έως α, προς το πλήθος αυτών, δηλαδή προς α.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω στην συνεχή περίπτωση τα μέτρα αυτά ταυτίζονται, δηλαδή:

Πρόταση: Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί συνεχή κατανομή τότε έχουμε:

$$ES_\alpha(X) = TCE_\alpha(X) = TCE^\alpha(X), \text{ για κάθε } \alpha \in (0,1]$$

Διαισθητικά, η απόδειξη είναι εμφανής, μιας και στην συνεχή κατανομή, υπάρχει μια συγκεκριμένη τιμή q_α για κάθε α, η οποία χωρίζει τα χειρότερα σενάρια με πιθανότητα 100α%.

Είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε το CTE από το ES, διότι το δεύτερο προκύπτει ότι είναι συνεπές μέτρο, ενώ το πρώτο δεν καλύπτει τις συνθήκες των συνεπών μέτρων. Γι' αυτό και δεν θα ασχοληθούμε πολύ με το CTE παρά μόνο στο βαθμό που ταυτίζεται με το ES.

Ας δούμε τώρα πως συμπεριφέρεται το ES στις ακραίες τιμές του α. Από τον ορισμό του μέτρου, είχαμε εξαιρέσει την περίπτωση του α=0. Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε αυτήν την τιμή ως εξής: (βλέπε Carlo, 2003)

$$ES_0(X) \equiv -\text{ess.}\inf\{X\} = \inf\{x / F_X(x) > 0\},$$

που δεν σημαίνει τίποτα άλλο από την χειρότερη δυνατή ζημία που μπορεί να έχει το χαρτοφυλάκιο. Είναι μια αόριστη τιμή η οποία, για μια συνεχή συνάρτηση κατανομής, βρίσκεται στην δεξιά ουρά που καταλήγει στο άπειρο.

Η άλλη ακραία τιμή, όταν α=1, συμβολίζει στην ουσία την μέση τιμή του X, δηλαδή

$$ES_1(X) = -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p)\,dp = -E[X].$$

Οπότε μπορούμε στο εξής να θεωρούμε ότι το ES_α καλύπτει το κλειστό διάστημα [0,1] μαζί με τις ακραίες τιμές του για 0 και 1.

Σε πολλές εργασίες συνηθίζεται να γίνεται η παραδοχή ότι έχουμε να κάνουμε με συνεχείς κατανομές, κυρίως για πρακτικούς λόγους και επειδή είναι πιο εύκολο να κατανοούμε τις έννοιες με αυτήν την περίπτωση.

Στην συνέχεια θα δούμε κάποιους τύπους του ES και πως αυτό το μέτρο μπορεί να έχει εφαρμογή σε τρεις συνεχής συναρτήσεις. Στην κανονική κατανομή, στην εκθετική και στην κατανομή t. Σε πολλές εργασίες θα δούμε το Expected Shortfall ως Tail VaR. Σύμφωνα με τον Harry Panjer (2006) έχουμε τον τύπο:

$$TVaR_a(x) = E(x|x > q_a) = \frac{\int_q^{\infty} x\, dF(x)}{1 - F(q)},$$

όπου βέβαια το F(x) είναι η συνάρτηση κατανομής του X. Καθώς επίσης και τους εναλλακτικούς τύπους:

$$TVaR_a(x) = \frac{\int_q^{\infty} x\, f(x)\, dx}{1 - F(q)}$$

$$= \frac{\int_a^1 VaR_u(X)\, du}{1 - a},$$

όπου ο τελευταίος τύπος είναι στην ουσία ο τύπος (4.1) που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Τέλος η αναμενόμενη μέση ζημιά πέρα από το επίπεδο α, μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$TVaR_\alpha(x)=E(X/X>q_\alpha)$$

$$= q_a + \frac{\int_q^{\infty} (x - q)\, dF(x)}{1 - F(q)}$$

$$=VaR_\alpha(x) + e(q_\alpha),$$

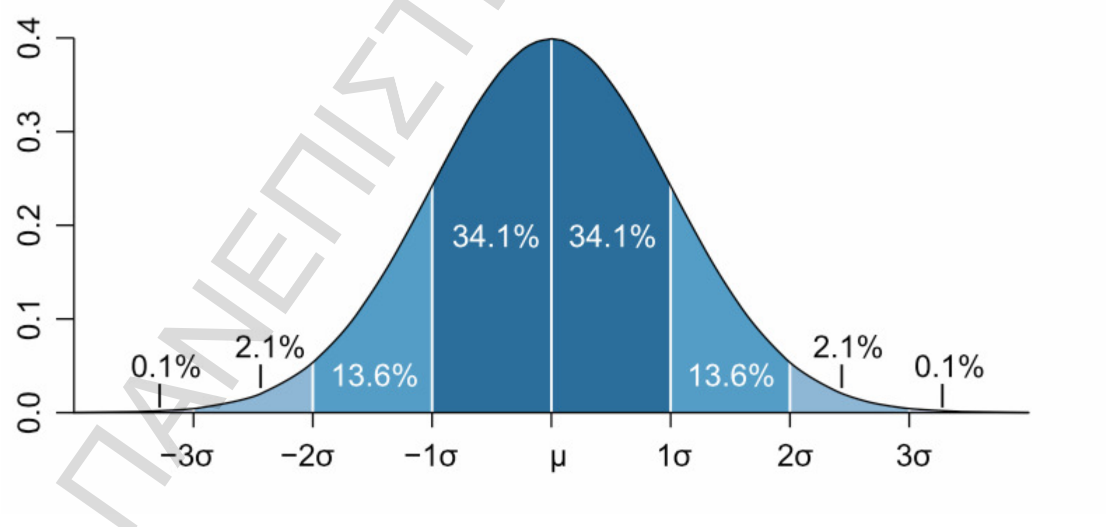
όπου $e(q_\alpha)$ είναι η μέση τιμή των ζημιών που ξεπερνούν το VaR (mean excess loss function).(βλέπε Panjer, 2006).

Και σε αυτήν την περίπτωση, ο Harry H. Panjer δεν κάνει διαχωρισμό μεταξύ Tail Conditional Expectation, TCE ή CTE, που χρησιμοποιείται κυρίως με αυτές τις ονομασίες στην Βόρεια Αμερική, ενώ στην Ευρώπη είναι πιο διαδεδομένη η ονομασία του ως Expected Shortfall (ES).

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα συνεχών κατανομών. Πριν από αυτά όμως ας δούμε την αρχή της τυπικής απόκλισης.

Ορισμός: Η αρχή της τυπικής απόκλισης (Standard deviation principle). Το αξίωμα αυτό είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας μιας κατανομής. Έστω μια κατανομή ζημιών με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ. Το μέγεθος μ+kσ, όπου k είναι μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε κατανομή, είναι ένα μέτρο κινδύνου που ονομάζεται Standard Deviation Principle. Η παράμετρος k δηλώνει ότι η ζημιά μπορεί να υπερβεί το μέτρο κινδύνου για μία κατανομή με ένα συγκεκριμένο μικρό ποσοστό. (βλέπε Panjer, 2006).

Παράδειγμα: Έστω η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή. Η πιθανότητα, η ζημιά να ξεπεράσει το μέτρο κινδύνου του Standard deviation principle είναι 5%, δηλαδή Pr(X>μ+kσ)=5%, τότε το k παίρνει την τιμή 1.645. Για k=2.576 έχουμε Pr(X>μ+kσ)=0.5%. (βλέπε Panjer, 2006)



Standard deviation διάγραμμα κανονικής κατανομής (Πηγή: wikipedia)

Πάνω σε αυτή την λογική της πιθανότητας η ζημιά να ξεπεράσει το ποσοστημόριο μ+kσ με την αντίστοιχη τιμή του k, στηρίζεται η λογική του Value at Risk. Στην συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα γνωστών κατανομών (βλέπε Panjer H., 2006).

Παράδειγμα Κανονικής Κατανομής:

Έστω κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Θα δούμε πως μπορούν να εκφραστούν τα μέτρα κινδύνου του VaR και του ES για την συγκεκριμένη κατανομή.

Όπως είδαμε και παραπάνω, φ(X) και Φ(X) θεωρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) και συνάρτηση κατανομής (cdf) της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, δηλαδή της N(0,1).

Συνάρτηση ποσοστημορίου (Quantile Function) μιας κατανομής είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής (cdf). Αυτή η συνάρτηση για την τυποποιημένη κανονική κατανομή ονομάζεται probit function, συμβολίζεται με $\Phi^{-1}(p)$ και εκφράζεται με την αντίστροφη της error function:

$$\Phi^{-1}(p) = \sqrt{2}\, erf^{-1}(2p-1), \quad p \in (0,1).$$

Το $\Phi^{-1}(p)$ ποσοστημόριο συνήθως συμβολίζεται ως z_p. Έτσι λοιπόν η τυχαία μεταβλητή X θα υπερβεί το $\mu+\sigma z_p$ με πιθανότητα 1-p, και θα είναι εκτός του διαστήματος $\mu \pm \sigma z_p$ με πιθανότητα 2(1-p). Αυτός ακριβώς είναι και ο ορισμός του Value at Risk, οπότε,

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Στην συνέχεια θα αναζητήσουμε το μέτρο της Αναμενόμενης Απομείωσης Κινδύνου. Έστω ότι $X \sim N(0,1)$. Το TVaR ή ES θα είναι (βλέπε Hult and Lindskog, 2007):

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} x \; d\Phi(x)$$

$$= \frac{1}{1-a} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} x\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{1-a} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\ dx$$

$$= \frac{1}{1-a} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-a} [-\varphi(x)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}$$

$$= \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}.$$

Ενώ για το CTE αν $X' \sim N(\mu, \sigma^2)$ έχουμε (βλέπε Hult and Lindskog, 2007):

$$TVaR_\alpha(X) = E(X' | X' \geq VaR_\alpha(X'))$$

$$= E\left(\mu + \sigma X \mid \mu + \sigma X \geq VaR_\alpha(\mu + \sigma X)\right)$$

$$= E\left(\mu + \sigma X \mid X \geq VaR_\alpha(X)\right)$$

$$= \mu + \sigma TVaR_\alpha(X)$$

$$= \mu + \sigma \frac{\varphi[\Phi^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}.$$

Παράδειγμα Εκθετικής Κατανομής:

Θα δούμε τώρα τα ίδια μέτρα κινδύνου για την περίπτωση της εκθετικής. Έστω ότι η τυχαία μας μεταβλητή ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο θ, δηλαδή X~E($\frac{1}{\theta}$), τότε η pdf θα είναι

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{1}{\theta}} \ , \qquad x > 0.$$

Η quantile function της εκθετικής είναι η $F^{-1}(p;\lambda)$ όπου ισχύει

$$F^{-1}(p;\lambda) = \frac{\ln(1-p)}{\lambda}, \qquad p \in [0,1),$$

και στην δικιά μας την περίπτωση λοιπόν έχουμε

$$VaR_\alpha(X)= \theta\, ln(1\text{-}\alpha)$$

και

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \theta.$$

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη μέση ζημιά που ξεπερνάει το VaR είναι πάντα το μέσο θ για κάθε τιμή του α και αυτό γιατί η εκθετική κατανομή είναι η μόνη συνεχής κατανομή πιθανοτήτων που δεν έχει μνήμη. (βλέπε Panjer, 2006).

Παράδειγμα Κατανομής t:

Τέλος θα δούμε την κατανομή t και πως διαμορφώνονται τα συγκεκριμένα μέτρα κινδύνου Έστω η μη τυποποιημένη t κατανομή με location παράμετρο μ, scale παράμετρο σ, και ν βαθμούς ελευθερίας, με Χ=μ+σΤ. Τότε η pdf δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}\,\sigma}\left[1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Έστω t(x) και T(x) η pdf και η cdf της τυποποιημένης κατανομής t, με μ=0 και σ=1, με βαθμούς ελευθερίας ν>2. Τότε

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma T^{-1}(\alpha)$$

και το TVaR ή ES προκύπτει από τον τύπο (βλέπε Panjer H., 2006):

$$
\begin{aligned}
TVaR_a(X) &= \frac{\int_a^1 VaR_u(x)du}{1-a} \\
&= \frac{1}{1-a}\int_a^1 \mu + \sigma T^{-1}(u)\, du \\
&= \frac{1}{1-a}\int_a^1 \mu\, du + \frac{1}{1-a}\int_a^1 \sigma T^{-1}(u)\, du \\
&= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_\alpha^1 T^{-1}(u)du
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow TVaR_a(X) = \mu + \sigma\frac{t[T^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}\left\{\frac{\nu + [T^{-1}(\alpha)]^2}{\nu - 1}\right\}.
$$

Το TVaR όπως θα δούμε και παρακάτω, είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Παρόλα αυτά όταν το χρησιμοποιούμε, ποτέ δεν ασχολούμαστε με το πρόβλημα της υποπροσθετικής του VaR. Παρόλα αυτά το TVaR είναι πολύ κατάλληλο μέτρο κινδύνου για να εκτιμήσουμε τι συμβαίνει πέρα από το VaR, δίνοντας μας την μέση τιμή της ζημιάς που το υπερβαίνει.

4.1 Αναμενόμενη Απομείωση Κινδύνου (Expected Shortfall) και CTE στον Αναλογισμό

Οι παραπάνω ορισμοί και πηγές αναφέρονται σε χρηματοοικονομικά προϊόντα, για αυτό το λόγο βλέπουμε το αρνητικό πρόσημο στους τύπους του μέτρου CTE στην σχέση (4.2), ο οποίος ούτως η άλλως χρειάζεται τροποποίηση για να εξυπηρετήσει τις ανάγκες του ασφαλιστικού κλάδου.

Έτσι λοιπόν ως CTE θεωρούμε την μέση αναμένομενη ζημιά των χειροτέρων (1-α) σεναρίων της ζημιοκατανομής. Η μέση τιμή του μέρους της κατανομής πάνω από το Q_α. Έχουμε δηλαδή

$$\mathbf{CTE_\alpha = E\,[\,L|L>Q_\alpha\,].}$$

Αυτός ο τύπος ισχύει όταν το Q_α δεν πέφτει σε σημείο που έχουμε μάζα πιθανότητας.

Ας δούμε ένα από παράδειγμα για την διακριτή περίπτωση.

Παράδειγμα: (βλέπε Hardy, 2006) Έχω X τυχαία μεταβλητή που δηλώνει ζημιές με πιθανότητα σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

X	**Prob**
0	0,90
100	0,06
1000	0,04

Έστω ότι ζητάμε το $CTE_{0,90}$. Δηλαδή βάση του παραπάνω τύπου $CTE_{0,90}=E[X|X>Q_{0,90}]$. Για το 90% τεταρτημόριο όμως, $Q_{0,90}=0$. Οπότε κάνοντας χρήση του τύπου (4.2) έχουμε

$$CTE_{0,90}= E[X|X>0]= \frac{(0{,}06)(100)+(0{,}04)(1000)}{0{,}10} = 460,$$

δηλαδή 460 είναι η μέση ζημιά για το ακραίο 10% της κατανομής.
Ας αναζητήσουμε τώρα το 95% τεταρτημόριο. Παρατηρούμε ότι το $Q_{96}=Q_{95}=100$. Έτσι για να βρούμε το μέσο για το άνω 5%, έχουμε την τιμή που παίρνει με πιθανότητα 0,04 (1000) και την τιμή που θα πάρει για την υπόλοιπη πιθανότητα που ζητάμε 0,01 (100). Δηλαδή,

$$CTE_{0,95}= \frac{(0{,}01)(100)+(0{,}04)(1000)}{0{,}05} = 820.$$

Ενώ για την συνεχή κατανομή έχουμε τον μέσο όρο που προκύπτει από τον τύπο

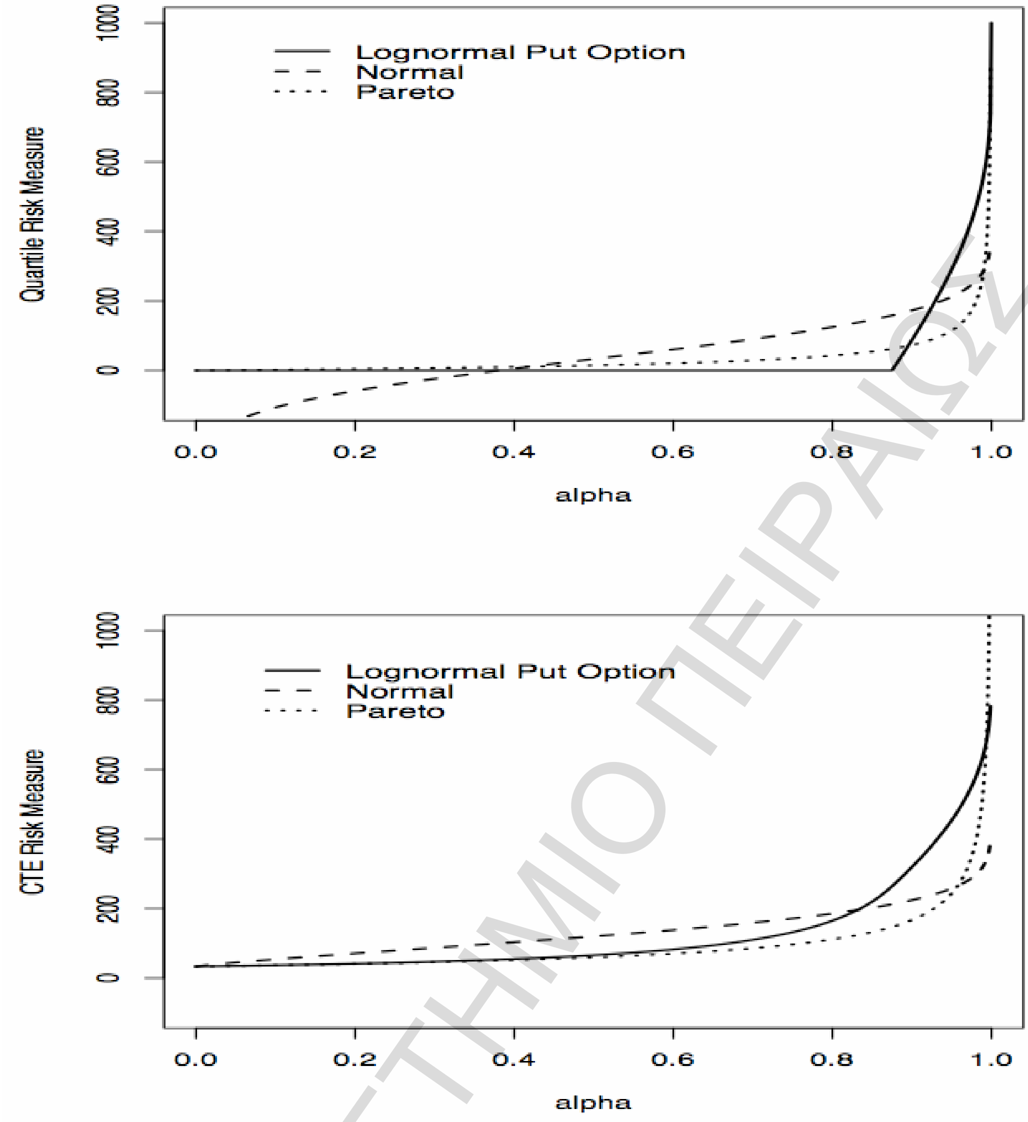
$$CTE_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} yf(y)\,dy.$$

Παρατηρήσεις: Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις πάνω στο ποσοστημόριο Q_α και στο CTE ή διαφορετικά στο VaR και στο ES: (βλέπε Hardy, 2006)

1. Ισχύει πάντα $TCE_\alpha \geq Q_\alpha$, με την ισότητα να ισχύει όταν το Q_α είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η τυχαία μας μεταβλητή.
2. $TCE_{0\%}$ είναι απλά η μέση τιμή της μεταβλητής μας.
3. $Q_{0\%}$ είναι η ελάχιστη ζημιά, ενώ το $Q_{50\%}$ είναι η διάμεση (median) τιμή των ζημιών.

4. Από το σχεδιάγραμμα 4.1 που ακολουθεί, βλέπουμε την κατανομή του CTE και του Q για τα τρία παραπάνω παραδείγματα κατανομών που είχαμε αναλύσει (για την κανονική κατανομή, για κατανομή Pareto και για την Lognormal Put Option κατανομή) και τις τιμές που παίρνουν σε τιμές του α μεταξύ 0 και 1. Στο πρώτο διάγραμμα παρατηρούμε ότι για α=0, στην Pareto και στην Put Option οι τιμές του VaR είναι 0, μιας και είναι η μικρότερη δυνατή ζημιά. Για την κανονική κατανομή έχουμε και αρνητικές τιμές. Στην Put Option η τιμή του Q παραμένει μηδέν για κάθε α<0,875. Στο διάγραμμα του TCE στην αριστερή μεριά παρατηρούμε ότι οι τρις μας περιπτώσεις συγκλίνουν, μιας και έχουν ίδια μέση ζημιά. Στην δεξιά ουρά έχουμε απότομη αύξηση των τιμών, κάτι το οποίο οφείλεται στις βαριές ουρές των συναρτήσεων, και κυρίως της Pareto. Έτσι οι ακραίες τιμές του TCE, για τιμές του α που τείνουν στο ένα, υποδηλώνουν πολύ μεγάλες πιθανές ζημιές. Η μεγαλύτερη τιμή του α στο σχήμα μας είναι 0,999 και σε αυτό το σημείο, η Pareto έχει τιμή για το μέτρο κινδύνου $1634, η κανονική έχει $400, ενώ η Put Option $783.
5. Για τις περιπτώσεις που μελετάμε τιμές, όπως η ζημίες που θα έχει ο κλάδος αστικής ευθύνης μιας ασφαλιστικής εταιρείας, οι οποίες δεν μπορεί να πάρουν αρνητικές τιμές, θα πρέπει να αφαιρέσουμε αυτές τις τιμές. Έτσι στην κανονική κατανομή θα θεωρήσουμε μηδέν το μέτρο κινδύνου μας για κάθε α<0,38, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές του ισχύει το υπάρχον σχεδιάγραμμα. Βέβαια σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε και αύξηση του TCE για τις τιμές του α<0,38, καθώς θα καθώς θα καθοριζόταν από τον τύπο

$$TCE = E[max(L,0)/L>Q_\alpha].$$



Πίνακας 4.1 (βλέπε Hardy, 2006)

4.2 Διακύμανση του CTE

Μιας λοιπόν και το Conditional Tail Expectation έχει αρχίσει να επεκτείνεται συνεχώς σε αναλογιστικές πρακτικές (π.χ. Καναδά και American Academy of Actuaries προτείνεται ως μέτρο κινδύνου για την εκτίμηση του κεφαλαίου βάση κινδύνου) και να γίνεται όλο και πιο δημοφιλές στον χώρο, διαφαίνεται ότι ήρθε για να μείνει και να εξελιχθεί.

Το πρώτο σημαντικό πλεονέκτημα του CTE είναι ότι είναι εύκολο στον υπολογισμό και φερέγγυο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο κινείται η δεξιά ουρά, με πιστικά αποτελέσματα για τα tail risk measures και με συνεχώς αυξανόμενη χρήση πλέον και στην χρηματοοικονομική ανάλυση. Το δεύτερο πλεονέκτημα του είναι ότι είναι συνεπές μέτρο κινδύνου, κάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο, καθώς επίσης και το ότι δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο σε λάθη του δείγματος όπως είναι άλλα πιο παραδοσιακά μέτρα κινδύνου ή το VaR.

Δεδομένης λοιπόν της σημαντικότητας αυτού του μέτρου θα πρέπει να κάνουμε και μια προσέγγιση του λάθους που ενδέχεται να έχει η εκτίμησή μας. Το πόσο δηλαδή απόκλιση μπορεί να έχει από την μέση τιμή και κατ' επέκταση, από τα πραγματικά μελλοντικά δεδομένα. Έτσι λοιπόν θα κάνουμε μια εισαγωγή στην *διακύμανση του CTE.* Να κάνουμε για άλλη μια φορά την παρατήρηση, ότι όπως και στην εργασία των John Manistre and Geoffrey Hancock (2008, 2013), όταν μιλάμε για CTE, μιλάμε ακριβώς και για το ES ή το Tail VaR.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το Conditional Tail Expectation μιας τυχαίας μεταβλητής X, με συνάρτηση κατανομής $P_r\{X \leq x\} = F(x)$ για κάποιο α επίπεδο. Έτσι λοιπόν θα έχουμε να υπολογίσουμε το μέτρο (βλέπε Manistre and Hancock, 2008 and 2013)

$$CTE(\alpha) = E[X|X > q_\alpha],$$

με q_α το γνωστό μας α-quantile ή VaR_α, όπου

$$P_r\{X > q_\alpha\} = 1 - \alpha.$$

Πριν συνεχίσουμε την προσπάθειά μας να προσεγγίσουμε την διακύμανση του CTE, θα κάνουμε την παραδοχή ότι το VaR δεν πέφτει σε μάζα πιθανότητας για να διευκολύνουμε την μελέτη μας.

Όταν το X είναι άγνωστο, ο πιο συνήθης τρόπος να προσεγγίσουμε το πρόβλημα είναι να ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο δείγμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ πλήθους n από την συνάρτηση κατανομή F(x) και στην συνέχεια να τα ταξινομήσουμε με τον ακόλουθο τρόπο (βλέπε Manistre and Hancock, 2008 and 2013)

$$(x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(n)}).$$

Από αυτά τα στατιστικά δεδομένα, το CTE για το επίπεδο

$\alpha = 1 - \frac{k}{n}$, δίνεται από το μέσο των k υψηλότερων ταξινομημένων στατιστικών δεδομένων, δηλαδή

$$\hat{CTE}(\alpha) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{(j)}.$$

Η διακύμανση της εκτίμησης είναι δύσκολο να βρεθεί γιατί τα ταξινομημένα στατιστικά δεδομένα δεν είναι ανεξάρτητα. Αυτό σημαίνει ότι η προφανής τυπική απόκλιση του CTE Estimator (SDE) δεν είναι τόσο φερέγγυα:

$$SDE = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{(x_{(j)} - \hat{CTE})^2}{(k-1)}}.$$

Η ασυνέπεια του παραπάνω τύπου έγκειται στο ότι υπολογίζουμε πρώτα δύο ποσότητες. Αυτές είναι:

1. Το $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$ quantile. Για να προσεγγίσουμε αυτό το ποσοστημόριο, έχουμε χρησιμοποιήσει το k-ιοστό ταξινομημένο δεδομένο, δηλαδή το $x_{(k)}$.
2. Το CTE που υπερβαίνει το α-quantile.

Η αβεβαιότητα αυτών των δύο παραγόντων, πρώτα στο να υπολογίσουμε το CTE και στην συνέχεια να εκτιμήσουμε την SDE, έχει ως αποτέλεσμα ο παραπάνω τύπος της SDE να μην ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε την διακύμανση από τα k ταξινομημένα δεδομένα είναι ο ακόλουθος:

$$VAR(\hat{CTE}) = E\left[VAR(\hat{CTE}|X_{(k)})\right] + VAR\left[E(\hat{CTE}|X_{(k)})\right].$$

Ο πρώτος όρος είναι διαφορετικά η ποσότητα $1/k \cdot VAR\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}\right)$, ενώ ο δεύτερος όρος μπορεί να εκτιμηθεί όταν έχουμε ένα μεγάλο δείγμα (τέτοιο όπως $n \to \infty$). Μια προσέγγιση της διακύμανσης είναι λοιπόν ο παρακάτω τύπος:

$$VAR(\hat{CTE}) \approx \frac{VAR\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}\right) + a\left(\hat{CTE} - x_{(k)}\right)^2}{k}.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που έχουμε α=0, η διακύμανση της εκτίμησής μας ισούται με το σ^2/n. Αυτό συμφωνεί με τον ορισμό του TCE, αφού $C\hat{T}E(0)$ τότε θα έχουμε k=n και θα είναι το μέσο του δείγματος $\bar{x}$.

Όταν η κατανομή μας έχει βαριά ουρά, ο πρώτος όρος είναι που επικρατεί σε αντίθεση με τις κατανομές που δεν έχουν μεγάλες αποκλίσεις στην δεξιά ουρά, όπου ο δεύτερος όρος αρχίζει να αποκτά σημασία. (βλέπε Manistre and Hancock, 2008 and 2013).

5 Η αναμενόμενη απομείωση κινδύνου ως συνεπές μέτρο κινδύνου (Coherency of ES)

Ας δούμε τώρα πόσο συνεπές μέτρο είναι το ES. Το μέτρο αυτό δημιουργήθηκε όπως επισημάναμε για να μπορούμε να εκτιμήσουμε τις ζημιές που είναι κρυμμένες στην δεξιά ουρά. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η βασική ιδιότητα των συνεπών μέτρων, αυτή της υποπροσθετικής.

Πρόταση: *Για κάθε α ∈ [0, 1] και για κάθε X και Y χαρτοφυλάκια, ισχύει*

$$ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) \geq ES_\alpha(X + Y).$$

Απόδειξη: Ας δούμε αρχικά την διακριτή περίπτωση όπου τα X και Y σενάρια έχουν έναν συγκεκριμένο αριθμό πλήθους που μπορούν να πάρουν N, δηλαδή *{Xi, Yi} όπου i*=1,…,*N* με ίση πιθανότητα να συμβεί το κάθε ένα 1/N. (Βλέπε Acerbi, 2003).

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως εξής (βλέπε Acerbi, 2003):

$$F_{X,Y}^{(N)}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} l_{\{Xi \leq x\}}\, l_{\{Yi \leq y\}}. \qquad (5.1)$$

Η απόδειξη είναι απλή (βλέπε Dowd and Blake, 2006 and Acerbi, 2003):

$$\begin{gathered} ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) = \\ = (\text{το μέσο των } N_\alpha \text{ χειρότερων σεναρίων του X}) + (\text{το μέσο των } N_\alpha \\ \text{χειρότερων σεναρίων του Y}) \\ \geq (\text{το μέσο των } N_\alpha \text{ χειρότερων σεναρίων του X+Y}) \\ = ES_\alpha(X + Y). \end{gathered}$$

Θα δούμε τώρα ένα υποθετικό παράδειγμα με τιμές που αντιστοιχούν σε ζημιές ασφαλιστικών εταιριών και θα αποδείξουμε πρακτικά ότι ισχύει για την απομείωση κινδύνου η υποπροσθετική ιδιότητα και θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τον τύπο (5.1).

Σε αυτήν την περίπτωση, οι χειρότερες τιμές, οι ακραίες τιμές, δεν είναι αρνητικές τιμές, όπως το πόσο θα πέσει η τιμή μιας μετοχής, αλλά μεγάλα θετικά ποσά που αφορούν μεγάλες ζημιές.

Αποζημιώσεις δηλαδή που είναι συνήθως το 1% των ζημιών μιας εταιρείας και μπορούν να εξαντλήσουν το κεφάλαιο κάλυψης (συνήθως θανατηφόρα ή με σοβαρές σωματικές αναπηρίες).

Παράδειγμα: Έστω δύο ασφαλιστικές εταιρείες X και Y. Θεωρούμε ότι το κεφάλαιο κάλυψης για σωματικές βλάβες είναι € 750.000 ανά παθόντα, ενώ για τις υλικές ζημιές € 750.000 ανά ζημιά και ας υποθέσουμε ότι αυτό ίσχυε για όλο το 2012 (από 01/06/2012 το κεφάλαιο κάλυψης αυξήθηκε στα € 1.000.000 ανά παθόντα και € 1.000.000 για υλικές ζημιές στο σύνολο της ζημιάς). Στον Πίνακα 5.1 παρατίθενται οι αποζημιώσεις που έχουν δοθεί ανά μήνα του 2012, για ζημιές που το ποσό αποζημίωσης ξεπερνά τα 500.000. Οι τρεις χειρότερες περιπτώσεις της κάθε εταιρείας είναι με μαύρα γράμματα. Στον Πίνακα 5.2, συγκεντρώνουμε τις τρεις χειρότερες περιπτώσεις για το άθροισμα των εταιριών, X+Y.

ΜΗΝΕΣ 2012	X	Y	X+Y
1	**1.225**	832	**2.057**
2	944	0	944
3	732	**1.083**	1.815
4	**1.543**	932	**2.475**
5	863	**998**	**1.861**
6	0	632	632
7	632	906	1.538
8	**957**	0	957
9	0	0	0
10	632	**1.163**	1.795
11	876	721	1.597
12	0	0	0

Πίνακας 5.1: Ζημιές άνω των €500.000. Τιμές εκφρασμένες σε χιλιάδες.

Ας δούμε τώρα την αναμενόμενη απομείωση κινδύνου για το 25%, δηλαδή για τις τρεις χειρότερες των περιπτώσεων του X+Y.

$$ES_{25\%}(X+Y) = \frac{1}{3}\sum_{i\in\{4,1,5\}}(X+Y)_i = \frac{1}{3}\left(\sum_{i\in\{4,1,5\}} X_i + \sum_{i\in\{4,1,5\}} Y_i\right)$$
$$= \frac{1}{3}(2.475 + 2.057 + 1.861) = 2.131$$

Στην συνέχεια θα δούμε το άθροισμα του ES για την κάθε εταιρεία χώρια.

$$ES_{25\%}(X) + ES_{25\%}(Y) = \frac{1}{3}\left(\sum_{i\in\{4,1,8\}} X_i + \sum_{i\in\{10,3,5\}} Y_i\right) = 1.242 + 1.081 = 2.323$$

ΜΗΝΕΣ 2012	X	Y	X+Y
4	1.543	932	**2.475**
1	1.225	832	**2.057**
5	863	998	**1.861**
3	732	1.083	1.815
10	632	1.163	1.795
11	876	721	1.597
7	632	906	1.538
8	957	0	957
2	944	0	944
6	0	632	632
9	0	0	0

Πίνακας 5.2: Ταξινομημένα βάση συνολικής ζημιάς X+Y

Και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι

$ES_{25\%}(X) + ES_{25\%}(Y) > ES_{25\%}(X+Y)$.

Τα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσαν να μας οδηγήσουμε στο συμπέρασμα ότι το ES ως συνεπές μέτρο κινδύνου θα αποδεικνύει ότι το κεφάλαιο που θα χρειαστεί μια εταιρεία για να καλύψει τον κίνδυνο των ακραίων περιπτώσεων (δεξιά ουρά), θα είναι μικρότερο αν συγχωνευθεί με μια δεύτερη. Το από κοινού τους κεφάλαιο φερεγγυότητας θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των κεφαλαίων που θα έβαζε η κάθε εταιρεία χώρια.

Στην συνέχεια θα δούμε με ένα αντίστοιχα απλό παράδειγμα ότι το μέτρα του VaR δεν καλύπτει την υποπροσθετική ιδιότητα, δηλαδή:

$$VaR_{\alpha}(X) + VaR_{\alpha}(Y) \ngeq VaR_{\alpha}(X+Y).$$

Παράδειγμα: (βλέπε Acerbi, 2003) Έστω ένα ριψοκίνδυνο ομόλογο Α το οποίο όταν δεν έχουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας (default), πληρώνει κουπόνι 8$ συν την εξαγορά του 100$. Υποθέτουμε επίσης ότι μπορεί να χρεοκοπήσει μερικώς (soft default) με πιθανότητα 2% και να χάσει την απόδοση του κουπονιού, ενώ υπάρχει και η πιθανότητα ολοκληρωτικής χρεοκοπίας 3% (hard default) στην οποία χάνει και το κουπόνι και την αξία της. Θεωρούμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο ομόλογο Β, με ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά. Κάνουμε την υπόθεση ότι δεν μπορούν να κάνουν και τα δύο ομόλογα ταυτόχρονα default. Όταν χρεοκοπεί το ένα δεν μπορεί να χρεοκοπήσει και το δεύτερο. Τέλος, θεωρούμε ότι το κάθε ομόλογο πωλείται στα 104,6$. Στον πίνακα 5.3 που ακολουθεί, βλέπουμε αναλυτικά τις αποδόσεις του κάθε ομολόγου με τις αντίστοιχες πιθανότητες, καθώς και τα κέρδη ή ζημίες (profit & loss) που έχει το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αυτά τα δύο ομόλογα.

		Payoff			**Profit and Loss**		
Final Event	**Prob.**	**A**	**B**	**A + B**	**A**	**B**	**A + B**
Hard Default B	3%	108 $	0 $	108 $	+3.4 $	-104.6 $	-101.2 $
Soft Default B	2%	108 $	100 $	208 $	+3.4 $	-4.6 $	-1.2 $
Hard Default A	3%	0 $	108 $	108 $	-104.6 $	+3.4 $	-101.2 $
Soft Default A	2%	100 $	108 $	208 $	-4.6 $	+3.4 $	-1.2 $
No Default	90%	108 $	108 $	216 $	+3.4 $	+3.4 $	+6.4 $

Πίνακας 5.3

Θα αναλύσουμε στην συνέχεια και θα συγκρίνουμε τα μέτρα $VaR_{5\%}$ και $ES_{5\%}$. Παρατηρούμε επίσης ότι το ένα ομόλογο είναι πολύ καλό hedge του δεύτερου ομολόγου, μιας και το default του ενός αποκλείει την χρεοκοπία του άλλου. Έτσι επιτυγχάνουμε πολύ καλό καταμερισμό κινδύνου (diversification) στο χαρτοφυλάκιό μας. Σύμφωνα λοιπόν με το ορισμό του *VaR*, θα αναζητήσουμε την καλύτερη περίπτωση από τις 5% χειρότερες περιπτώσεις.

$$VaR_{5\%}(A) = VaR_{5\%}(B) = 4.6\ \$,$$

$$VaR_{5\%}(A + B) = 101.2\ \$.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι για το VaR δεν ισχύει την υποπροσθετική ιδιότητα γιατί

$$VaR_{5\%}(A) + VaR_{5\%}(B) = 9.2\ \$ < VaR_{5\%}(A + B) = 101.2\ \$.$$

Για το ES θα πάρουμε το μέσο των 5% χειρότερων περιπτώσεων του κάθε χαρτοφυλάκιο. Δηλαδή,

$$ES_{5\%}(A) = ES_{5\%}(B) = (104.6\ \$ \times 3\% + 4.6\ \$ \times 2\%)/5\% = 64.6\ \$,$$

$$ES_{5\%}(A + B) = (101.2\ \$ \times 5\%)/5\% = 101.2\ \$,$$

και όπως βλέπουμε $ES_{5\%}(A+B) < ES_{5\%}(A) + ES_{5\%}(B)$, δηλαδή όπως περιμέναμε, το μέτρο του expected shortfall καλύπτει την βασική ιδιότητα των συνεπών μέτρων κινδύνων.

Η αναμενόμενη απομείωση κινδύνου χρησιμοποιείται και είναι πολύ δημοφιλής στον αναλογισμό και στον ασφαλιστικό κλάδο, διότι πέρα του ότι ανήκει στην κατηγορία συνεπών μέτρων, εξυπηρετεί ανάγκες που είναι καθαρά ασφαλιστικές, πχ βάση τον μέσο όρο των ζημιών που θα ξεπεράσουν την ανώτερη τιμή που θα καλυφθεί από την εταιρεία, θα στραφεί στην αντασφάλιση για να καλύψει αυτόν τον κίνδυνο. Τέλος είναι αρκετά εύκολος ο υπολογισμός του. Στην αναλογιστική παίρνουμε έναν μεγάλο αριθμό σεναρίων ζημιών και υπολογίσουμε τον μέσο όρο των 100(1-α)% μεγαλύτερων ζημιών.

6 Γενικευμένα Σενάρια Μέτρων Κινδύνου και Φασματικά Μέτρα Κινδύνου

Η θεωρία του συνεπούς μέτρου κινδύνου έχει κάποιες ενδιαφέρουσες επιπλοκές. Αποδεικνύεται π.χ. ότι τα αποτελέσματα που στηρίζονται στα σενάρια (scenario analyses) ή στα stress tests, μπορούν να θεωρηθούν ως συνεπή μέτρα κινδύνου. Έστω ότι τα αποτελέσματα από μια τέτοια προσέγγιση είναι οι ακραίες τιμές μια κατανομής, που στηρίζεται σε κάποιες πιθανότητες και ανήκουν στην ουρά της κατανομής αυτής. Ο μέσος όρος λοιπόν αυτών των ζημιών, είναι το ES, η μέση τιμή των ακραίων τιμών που ξεπερνούν ένα συγκεκριμένο α-quantile. Εφόσον λοιπόν το ES είναι συνεπές μέτρο κινδύνου, κατ' επέκταση και τα αποτελέσματα του scenarios analyses αποτελούν συνεπή μέτρα (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Ας δούμε πρακτικά πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το scenario analyses. Έστω ένα σύνολο σεναρίων (Generalized Scenarios) - το σύνολο *n* ζημιών και μια οικογένεια κατανομών από την οποία προέρχονται οι ζημιές. Χρησιμοποιώντας κάποια από αυτές τις κατανομές, παίρνουμε ένα ES. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε μια άλλη από της κατανομές και θα καταλήξουμε σε ένα διαφορετικό ES. Αυτήν την διαδικασία την επαναλαμβάνουμε για όλες τις κατανομές. Έστω λοιπόν ότι το επαναλαμβάνουμε *m* φορές και έχουμε αντίστοιχα ES που πρέπει να συγκρίνουμε. Από όλα τα αποτελέσματα που θα πάρουμε, το ES με την μεγαλύτερη τιμή θα είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Έστω ότι *n=1,* τότε έχουμε μόνο μία δεξιά ουρά στην οποία θα εφαρμόσουμε κάθε σενάριο. Οπότε και κάθε ES θα είναι ίδιο. Αν επίσης *m=1,* τότε θα έχουμε ένα μόνο σενάριο και το ES που θα προκύψει, θα είναι συνεπές. Αν *m>1,* τότε όπως είπαμε, η μεγαλύτερη αναμενόμενη ζημιά των *m* χειρότερων σεναρίων, είναι επίσης συνεπές μέτρο κινδύνου (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα αποτελέσματα των σεναρίων είναι συνεπή μέτρα κινδύνου. Αυτό είναι χρήσιμο γιατί μπορούμε να πάρουμε ως μέτρα, τα αποτελέσματα αυτά και να καταλήξουμε στις μεγαλύτερες ή στις μέσες τιμές που έχουν προκύψει βάση πιθανοτήτων.

Γενικά αυτό που χρειαζόμαστε είναι τα ποσά των ζημιών, σε ένα ποσοστημόριο μιας κατανομής ζημιών, η κατανομή που θα χρησιμοποιήσουμε, η οποία μας δίνει τις πιθανότητές μας, και τον τύπο του μέτρου που ψάχνουμε.

Σύμφωνα με Hult and Lindskog (2007), μας δίνεται η παρακάτω πρόταση, η οποία όμως αναφέρεται κυρίως σε χρηματοοικονομικά προοϊόντα.

Πρόταση 6.1: Δοθέντως συνολικής επιστροφής r μιας επένδυσης, το μέτρο κινδύνου ρ είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει μια οικογένεια πιθανοτήτων $\mathcal{P}$ τέτοια ώστε

$$\rho(X) = sup\{E_{\mathbb{P}}[-X/r] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}.$$

Στην περίπτωση που το ρ θέλουμε να χρησιμοποιηθεί για ασφαλιστικούς λόγους, τότε με $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ ο προυγούμενος τύπος μεταφράζεται ως εξείς: για κάθε $X \leq 0$ έχουμε

$$E_{\mathbb{Q}}[-X/r] \leq \rho(X).$$

Παράδειγμα: Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εκτίμησης συνεπούς μέτρου κινδύνου με την χρήση σεναρίων, το οποίο αναφέρεται σε πολλές εργασίες, είναι το **SPAN** margin system που χρησιμοποιείται από το Chicago Mercantile Exchange. (βλέπε Artzner, 1999)

Ας δούμε λοιπόν πως υπολογίζεται το εσωτερικό όριο βάση του SPAN margin system, για μια συγκεκριμένη εταιρεία συναλλαγών, το οποίο προκύπτει από ένα χαρτοφυλάκιο με διάφορα συμβόλαια puts και calls. Το SPAN margin λοιπόν υπολογίζεται ως εξής· για αρχή παίρνουμε 14 σενάρια, όπου το κάθε σενάριο χαρακτηρίζεται από κίνηση των τιμών προς τα πάνω, προς τα κάτω ή στασιμότητας και αυτό σε αναλογία 1/3, 2/3 και 3/3. Στην συνέχεια παίρνουμε άλλα δύο σενάρια, τα οποία χαρακτηρίζονται ως ακραία (extreme) με ανοδική και καθοδική κίνηση στις μελλοντικές τιμές. Το μέτρο κινδύνου θα είναι η μέγιστη ζημιά που θα προκύψει από τα πρώτα 14 σενάρια και από το 35% των ζημιών των 2 ακραίων σεναρίων. Παίρνοντας το 35% αυτών των ζημιών είναι μια προσαρμογή εξαιτίας της μικρής πιθανότητας που έχουν αυτά τα σενάρια σε σχέση με τα υπόλοιπα 14. Για το κάθε σενάριο και τις μελλοντικές τιμές χρησιμοποιείται ένα συγκεκριμένο μοντέλο.

Ο επενδυτής του παραπάνω χαρτοφυλακίου λοιπόν, θα πρέπει να έχει αυτό το κεφάλαιο που θα καλύψει την μέγιστη αναμενόμενη ζημιά σύμφωνα με το μέτρο κινδύνου. Διαφορετικά θα πρέπει να προσθέσει κεφάλαιο ώστε να φτάσει το SPAN margin. Αυτό το μέτρο κινδύνου με τα παραπάνω ποσοστά, ονομάζεται και γενικευμένο σενάριο. Επίσης αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου γιατί το απαιτούμενο κεφάλαιο είναι ίδιο με την μέγιστη αναμενόμενη ζημιά.

Γενικεύοντας το παραπάνω μέτρο κινδύνου βάση της SPAN εκτίμησης, έχουμε τον παρακάτω ορισμό·

Ορισμός 6.1: Έστω $\rho_{\mathcal{P}}$ το μέτρο κινδύνου που καθορίζεται από ένα μη κενό σύνολο πιθανοτήτων $\mathcal{P}$ ή "γενικευμένων σεναρίων" ενός Ω χώρου και συνολικής επιστροφής r, τότε έχουμε (βλέπε Artzner, 1998),

$$\rho_{\mathcal{P}} = sup\{E_{\mathbb{P}}[-X/r] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$$

Πρόταση 6.2: Δεδομένης της συνολικής επιστροφής r και ενός μη κενού συνόλου $\mathcal{P}$ πιθανοτήτων ή "γενικευμένων σεναρίων", σε ένα χώρο Ω, το $\rho_{\mathcal{P}}$ του παραπάνω ορισμού, είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου. Μόνο και μόνο αν το σύνολο των πιθανοτήτων $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ ισούται με τον χώρο Ω. (βλέπε Artzner, 1998).

6.1 Φασματικά Μέτρα Κινδύνου Spectral Risk Measures

Άλλη μια κατηγορία μέτρων κινδύνου στην οποία όμως δεν θα σταθούμε ιδιαίτερα είναι τα Φασματικά Μέτρα Κινδύνου (Spectral Risk Measures). Έστω M_{φ} μέτρο κινδύνου και ο τύπος (βλέπε Dowd and Blake, 2006) :

$$M_{\varphi} = \int_0^1 \varphi(p)\, q_p\, dp \qquad 6.1$$

όπου φ(p) το βάρος που σταθμίζει το Μφ, και ονομάζεται risk spectrum or risk-aversion . Το φ(p) δίνεται από τον καρακάτω τύπο:

$$\varphi(p) = \begin{cases} 1/1-\alpha, & p > \alpha \\ 0, & p \le \alpha \end{cases} \quad 6.2$$

Παρατηρούμε ότι το M_φ είναι ένας πιο γενικευμένος τύπος του ES, διότι για το διάστημα (0,α) έχουμε M_φ=0, και για το (α,1) έχουμε τον τύπο του ES όπως τον ορίσαμε. Πρέπει όμως να μελετήσουμε υπό ποιες συνθήκες το φ(p) κάνει το M_φ συνεπές μέτρο κινδύνου (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Συνθήκες:

- Μη αρνητικό: φ(p) ≥ 0 για όλα τα p ∈[0, 1].
- Κανονικότητα: $\int_0^1 \varphi(p)\,dp = 1$
- Αύξουσα: $\varphi(p_1) \le \varphi(p_2)$ για κάθε $0 \le p_1 \le p_2 \le 1$.

Η πρώτη συνθήκη απαιτεί τα βάρη να είναι θετικά ή μηδενικά, η δεύτερη ότι το άθροισμά τους κάνει 1, συνθήκες που είναι προφανείς. Η τρίτη ιδιότητα έχει περισσότερο ενδιαφέρον. Δηλώνει ότι τα βάρη που σχετίζονται με μεγαλύτερες ζημίες, πρέπει να είναι και μεγαλύτερα, ή τουλάχιστον σε καμία περίπτωση μικρότερα, από τα βάρη που σχετίζονται με μικρότερες ζημιές. Αυτή είναι και ένα βασικό χαρακτηριστικό των συνεπών μέτρων κινδύνου: το μέτρο πρέπει να δίνει μεγαλύτερο ποσό, ή τουλάχιστον να έχει το ίδιο βάρος, σε σχέση με μικρότερες ζημίες.

Αυτό εξηγεί γιατί το VaR δεν είναι συνεπές μέτρο ενώ το ES είναι. Είναι η αδυναμία του VaR να καλύψει την αύξουσα ιδιότητα. Στο σημείο α, αν δηλ. p=α, το VaR δίνει μεγάλο φ(p), ενώ σε κάθε άλλη μεγαλύτερη ζημία, το φ(p) παίρνει την τιμή 0.

7 Μέθοδοι Εκτίμησης (Estimation Methods)

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τα μέτρα κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εκτιμήσουμε ολόκληρη ή μέρος μιας ζημιοκατανομής. Για να επιτευχθεί αυτό, θεωρούμε δεδομένα ένα πλήθος πιθανοτήτων p και θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα quantile q_p που σχετίζονται με αυτές. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής θα έχουμε το q_p σε συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής p, ενώ στην διακριτή περίπτωση θα έχουμε N διαφορετικές τιμές του q_p για κάθε p, το οποίο θα ισούται με 1/N, 2/N κτλ. (Βλέπε Dowd and Blake, 2006).

- Αν το μέτρο κινδύνου είναι το VaR τότε αυτό που αναζητάμε είναι το quantile q_p.
- Αν το μέτρο είναι συνεπές ή spectral , αναζητούμε το βάρος φ(p) (τύπος 6.1) που αντιστοιχεί στο quantile και παίρνουμε το αντίστοιχο συνεπές μέτρο. Ο ευκολότερος τρόπος είναι να σπάσουμε τις συσσωρευμένες πιθανότητες σε μικρά τμήματα, π.χ. p=0.001, p=0.002 και να εκτιμήσουμε για το κάθε p το αντίστοιχο q_p. Το μέτρο κινδύνου μας θα είναι τελικά το μέσο αυτών με τα φ(p) ως βάρη.

Γενικά υπάρχουν τρεις τρόποι προσέγγισης του μέτρου κινδύνου. Αυτές είναι (Βλέπε Dowd and Blake, 2006):

- Παραμετρική μέθοδος
- Μη παραμετρική μέθοδος
- Στοχαστική διαδικασία προσομοίωσης (Monte Carlo)

Παραμετρική Μέθοδος

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην παραδοχή ότι η συνάρτηση πιθανότητας των ζημιών ακολουθεί μια συγκεκριμένη παραμετρική φόρμα και το πρώτο που έχουμε να κάνουμε είναι να εκτιμήσουμε ποια είναι αυτή. Το ποια τελικά από τις γνωστές κατανομές θα επιλέξουμε έχει να κάνει συνήθως με προσωπική εκτίμηση. Ποιά από όλες ταιριάζει περισσότερο στα δεδομένα μας. Βέβαια υπάρχουν και κάποιες παραδοχές τις οποίες μπορεί να λάβουμε υπόψιν στην αναζήτηση της καταλληλότερης κατανομής. Π.χ. αν έχουμε να κάνουμε με ακραίες τιμές, θα επιλέξουμε κατανομές που ανταποκρίνονται σε αυτά τα δεδομένα. Δηλαδή αν έχουμε να κάνουμε με δεδομένα που αφορούν φυσικές καταστροφές, είτε μεγάλες απαιτήσεις αποζημίωσης, είτε υψηλούς κινδύνους θνησιμότητας, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατανομές που ανταποκρίνονται στην extreme value θεωρία, όπως του Weibull, Gumbel ή Frechet). Είτε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Peaks Over Threshold θεωρία (την οποία θα εξετάσουμε διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο), δηλαδή να απομονώσουμε τις ακραίες τιμές θέτοντας ένα όριο. Από αυτό το κατώφλι και πάνω θα έχουμε μια κατανομή με τις ακραίες τιμές μας μεν, αλλά με μεγαλύτερη ομοιομορφία και μετά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Pareto κατανομή.

Επίσης στην επιλογή της πιο κατάλληλης κατανομής μπορούμε να λάβουμε υπόψιν παρελθοντικές εμπειρίες και την γνώση ότι κάποιες συγκεκριμένες κατανομές έχουν αποδείξει ότι ταιριάζουν καλύτερα σε ανάλογα δεδομένα. Πρέπει ακόμα να είμαστε προσεκτικοί με τις τιμές που θέλουμε να μελετήσουμε μήπως έχουν επηρεαστεί προσωρινά από κάποιο τυχαίο γεγονός (όπως π.χ. από μια προσωρινή επιδημία που θα μπορούσε να αυξήσει κατά πολύ τα έξοδα ασθενείας του προσωπικού μιας εταιρίας). Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να επιλέξουμε και να προσαρμόσουμε, όσο το δυνατόν καλύτερα μπορούμε, τα χαρακτηριστικά της κατανομής που θα επιλέξουμε.

Αφού έχουμε λοιπόν καταλήξει στην κατανομή που μας ταιριάζει περισσότερο, μπορούμε να πάρουμε στοιχεία για τα ποσοστημόρια που μας ενδιαφέρουν. Βέβαια υπάρχουν παράμετροι που πρέπει να εκτιμήσουμε και έτσι να καταλήξουμε στα ζητούμενα αποτελέσματα. Υπάρχουν περιπτώσεις που μπορεί να θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε σύνθετες κατανομές, π.χ. ένας συνδυασμός κατανομών, είτε μια κατανομή με διαφορετικούς παραμέτρους ανά χρονικές περιόδους, γιατί αυτό εξυπηρετεί καλύτερα τα δεδομένα μας.

Η παραμετρική μέθοδος είναι επαρκής για την αναζήτηση του μέτρου κινδύνου, όταν τα δεδομένα μας είναι γνωστά και φερέγγυα. Κάτι που στην πράξη δεν είναι πάντα εφικτό, κυρίως όταν έχουμε μικρό δείγμα στοιχείων. Έτσι λοιπόν αυτή η προσέγγιση είναι κατάλληλη όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε απλά προβλήματα, κάτι το οποίο δεν συναντιέται συχνά στον ασφαλιστικό χώρο (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Μη Παραμετρική Μέθοδος

Στην δεύτερη περίπτωση της μη παραμετρικής μεθόδου, αναζητούμε το μέτρο κινδύνου χωρίς να κάνουμε την υπόθεση ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή. Αντί να κάνουμε αυτήν την υπόθεση και να ταυτίσουμε τις τιμές μας με παραμετρική κατανομή, αφήνουμε τα στοιχεία να μιλήσουν από μόνα τους, μέσα από μια "εμπειρική" κατανομή. Αποφεύγουμε έτσι το ενδεχόμενο να μην ταυτίζονται οι μελλοντικές προβλέψεις της κατανομής που επιλέξαμε με τις μελλοντικές πραγματικές τιμές, το οποίο θα σήμαινε λανθασμένο μέτρο κινδύνου. Αντιθέτως, η μη παραμετρική μέθοδος στηρίζεται στην παραδοχή ότι το κοντινό μέλλον εξαρτάται κατά πολύ από το πρόσφατο παρελθόν και βασιζόμενοι σε αυτά τα δεδομένα του παρελθόντος, θα μπορέσουμε να προβλέψουμε με αρκετή ακρίβεια το μέλλον.

Έχει εκτιμηθεί ότι αυτός ο τρόπος προσέγγισης του μέτρου κινδύνου έχει τελικά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Από την άλλη μεριά, μπορεί να μην έχουμε ιδιαίτερα αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα όταν τα στοιχεία στα οποία στηριχτήκαμε δεν είναι επαρκή και αντιπροσωπευτικά. Όπως τα στοιχεία της ουράς των κατανομών τα οποία είναι αραιά, π.χ. όταν έχουμε να κάνουμε με ακραία γεγονότα, όπου οι παρατηρήσεις μας που έχουμε από το κοντινό παρελθόν είναι ενδεχομένως πολύ περιορισμένες.

Ένα χαρακτηριστικό δείγμα της συγκεκριμένης προσέγγισης εκτίμησης του μέτρου κινδύνου είναι η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation Approach), από την οποία εκτιμούμε τα quantile από ένα ιστόγραμμα που προκύπτει από ιστορικές ζημιές, το οποίο επίσης μπορεί να προσαρμοστεί κατά το δοκούν. Π.χ. μπορούμε να μελετήσουμε την ιστορική προσομοίωση χρησιμοποιώντας βάρη, μια κατηγοριοποίηση ανά ηλικία για παράδειγμα, είτε αν τα στοιχεία είναι πολλά και από διαφορετικά πεδία, μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε και να μελετήσουμε με την μέθοδο της factor analysis.

Ως άλλο ένα παράδειγμα μη παραμετρικής μεθόδου μπορεί να θεωρηθεί η θεωρία μη ιστορικών σεναρίων. Όπως το παράδειγμα του **SPAN** margin system που χρησιμοποιείται από το Chicago Mercantile Exchange το οποίο αναλύσαμε παραπάνω, στο έκτο κεφάλαιο, κάνουμε κάποια υποθετικά σενάρια με κάποιες πιθανότητες να συμβούν. Με αυτόν τον τρόπο προσπαθούμε να περιορίσουμε την αδυναμία της μελλοντικής πρόβλεψης και ιδιαίτερα ακραίων περιπτώσεων, συνδυάζοντας τα ιστορικά δεδομένα με αυτά των υποθετικών σεναρίων (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Στοχαστική διαδικασία προσομοίωσης (Monte Carlo)

Στην τρίτη μέθοδο έχουμε μια διαδικασία μέσα από την οποία παράγονται τυχαίοι αριθμοί. Καλούμαστε να μελετήσουμε ένα στοχαστικό φαινόμενο, το οποίο επηρεάζεται από κάποιες μεταβλητές οι οποίες δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές. Επομένως το εικονικό πειραματικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε με την βοήθεια Η/Υ θα πρέπει και αυτό να επηρεάζεται από κάποιους τυχαίους αριθμούς. Άρα το πρώτο που πρέπει να εξετάσουμε είναι πως να παράγουμε τυχαίους αριθμούς οι οποίοι θα εκφράζουν την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου. Με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε μια πεπερασμένη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που στην ουσία όμως, δεν είναι τυχαίες. Είναι είτε τιμές που προσπαθούν να μιμηθούν τις πραγματικές τιμές, είτε τιμές που έχουν κάποια διαφορά από τις πραγματικές και προσπαθούν να μιμηθούν προβλήματα μεγάλων αλλαγών. Παρόλα αυτά κάνουμε την παραδοχή ότι αυτή η ακολουθία τιμών είναι τυχαία (βλέπε Dowd and Blake, 2006).

Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε την στοχαστική διαδικασία πολλές φορές, έστω n, όπου όλες αυτές οι στοχαστικές διαδικασίες θα έχουν διαφορετική τροχιά που θα περιγράφει τις τιμές της ζημιάς μας ή του προϊόντος που μελετάμε. Έτσι θα καταλήγουμε κάθε φορά σε μια διαφορετική τιμή, έστω q_i, $i=1,2,\dots,n$. Έτσι λοιπόν βάση της Monte Carlo μεθόδου, η ζητούμενη τιμή του μέτρου κινδύνου που αναζητούμε είναι η μέση τιμή όλων αυτών των πιθανών σεναρίων. Δηλαδή

$$Q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

Ως αποτέλεσμα από αυτήν την διαδικασία θα είναι μία κατανομή στοχαστικών ζημιών από την οποία θα έχουμε ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα που θα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, χωρίς όμως να γνωρίζουμε την κατανομή που χρησιμοποιήθηκε (βλέπε Hardy, 2006).

Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι ιδανικές για μεγάλα προβλήματα μέτρων κινδύνου, μιας και μπορούν να ανταποκριθούν σε απαιτήσεις με πολλούς παραμέτρους και με προσεγγίσεις που δεν μπορούν να επιτευχθούν με άλλον τρόπο. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες για κάθε περίπτωση της κατανομής που μας ενδιαφέρει, όπως για την δεξιά ουρά των ακραίων τιμών. Για αυτό τον λόγο αυτή η διαδικασία επικρατεί για την μελέτη των σύνθετων προβλημάτων κινδύνου.

Αφού κάναμε μια θεωρητική προσέγγιση στις μεθόδους εκτίμησης μέτρων κινδύνων και από είδαμε τις τρεις γενικές κατηγορίες που κατατάσσονται οι διάφοροι τρόποι υπολογισμού των μέτρων κινδύνων, στην συνέχεια θα δούμε τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούμε για κάποιες από τις βασικότερες μεθόδους.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με αξία

$$V_m = f(t_m, Z_m),$$

όπου f είναι μια γνωστή συνάρτηση και Z_m είναι ένα διάνυσμα από συντελεστές κινδύνου. Τότε η ζημιά L_{m+1} δίνεται από

$$L_{m+1} = l_m(X_{m+1}).$$

Έστω ότι έχουμε παρατηρήσει τους συντελεστές κινδύνου $Z_{m-n+1},\ldots,Z_m$. Αυτές οι παρατηρήσεις ονομάζονται ιστορικά δεδομένα. Πως θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα δεδομένα λοιπόν ώστε να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο και την αναμενόμενη απομείωση κινδύνου για την ζημιά L_{m+1}, δηλαδή την ζημιά που θα συμβεί στην επόμενη χρονική περίοδο; (Βλέπε Hult and Lindskog, 2007).

7.1 Εμπειρικό VaR και ES

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε παρατηρήσεις $x_1,\ldots,x_n$ των τυχαίων μεταβλητών $X_1,\ldots,X_n$ με κατανομή F. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής δίνεται τότε από τον τύπο (βλέπε Hult and Lindskog, 2007):

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[X_k,\infty)}(x),$$

Το εμπειρικό ποσοστημόριο τότε δίνεται από

$q_a(F_n) = inf\{x \in \mathbb{R}: F_n(x) \geq a\} = F_n^{\leftarrow}(a)$,
τύπος που παραπέμπει στον τύπο (2.3) του άνω VaR (η χειρότερη περίπτωση των 100(1-α)% καλύτερων περιπτώσεων).

Αν το δείγμα $X_1,\ldots,X_n$ το ταξινομήσουμε με φθίνουσα σειρά, δηλαδή $X_{1,n} \geq \ldots \geq X_{n,n}$ και αν η κατανομή F είναι συνεχής και για κάθε $j \neq k$ *έχουμε* $X_j \neq X_k$, τότε το εμπειρικό ποσοστημόριο δίνεται από

$$q_a(F_n) = X_{[n(1-a)]+1,n}, \quad a \in (0,1) \qquad 7.1$$

όπου [y] είναι ο ακέραιος αριθμός του y, $[y] = sup\{n \in \mathbb{N}: n \leq y\}$ (δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ίσος του y).

Επίσης αν η κατανομή F είναι γνησίως αύξουσα, τότε το $q_a(F_n) \to q_a(F)$ όταν το $n \to \infty$ για κάθε $a \in (0,1)$. Έτσι πάνω στις παρατηρήσεις $X_1,\ldots,X_n$ μπορούμε να εκτιμήσουμε το $q_a(F)$ από την εμπειρική εκτίμηση $\hat{q}_a(F) = x_{[n(1-a)]+1,n}$.

Ο εμπειρικός εκτιμητής για το expected shortfall με την ίδια λογική δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{ES}_a(F) = \frac{1}{[n(1-a)]+1} \sum_{k=1}^{[n(1-a)]+1} x_{k,n} \qquad 7.2$$

που χαρακτηρίζει στην ουσία τον μέσο όρο των $[n(1-a)]+1$ μεγαλύτερων παρατηρήσεων (βλέπε Hult and Lindskog, 2007).

Η επάρκεια αυτών των εκτιμήσεων έχει άμεση σχέση με το α που επιλέγουμε και τον αριθμό των παρατηρήσεων n και ακόμα και αν η κατανομή στις παραπάνω περιπτώσεις δεν είναι γνωστή και τα διαστήματα εμπιστοσύνης δεν μπορούν να εξασφαλιστούν με ακρίβεια, παρόλα αυτά υπάρχουν τεχνικές για τις μη παραμετρικές διαδικασίες που μας επιτρέπουν να τα προσεγγίσουμε.

7.2 Ιστορική Προσομοίωση

Στην ιστορική προσομοίωση υποθέτουμε ότι έχουμε παρατηρήσεις συντελεστών κινδύνου $Z_{m-n},\ldots,Z_m$ και ως εκ τούτου παίρνουμε τις παρατηρήσεις $x_{m-n+1},\ldots,x_m$. Με την βοήθεια Η/Υ υπολογίζουμε τις ζημιές $l_k = l_{[m]}(x_{m-k+1}),\ k = 1,\ldots,n$. Το l_k είναι η ζημιά που θα έχουμε αν ο κίνδυνος x_{m-k+1} συμβεί στην επόμενη περίοδο. Αυτό μας δίνει ένα δείγμα της ζημιοκατανομής στηριζόμενοι στον παράγοντα x_{m-k+1} ο οποίος ισχύει για την επόμενη περίοδο, αυτήν των παρατηρήσεων. Κάνουμε βέβαια την παραδοχή ότι σε όλες τις χρονικές περιόδους τα δεδομένα μας ακολουθούν την ίδια κατανομή και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους *(independent and identically distributed, iid)*. Το εμπειρικό VaR και το ES μπορούν να εκτιμηθούν λοιπόν από τους παρακάτω τύπους (βλέπε Hult and Lindskog, 2007):

$$\widehat{VaR}_\alpha(L) = \hat{q}_\alpha(F_L^n) = l_{[n(1-\alpha)]+1,n},$$

$$\widehat{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{[n(1-\alpha)]+1}\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]+1} l_{i,n},$$

όπου $l_{1,n} \geq \ldots \geq l_{n,n}$ είναι το δείγμα μας ταξινομημένο.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε αθροιστικά τις μέρες που μας ενδιαφέρουν. Ας πούμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR αθροιστικά για το σύνολο των ζημιών δέκα ημερών. Τότε για να υπολογίσουμε το εμπειρικό VaR και ES χρησιμοποιούμε τις ιστορικές παρατηρήσεις από τον τύπο (βλέπε Hult and Lindskog, 2007)

$$l_k^{(10)} = l_{[m]}\left(\sum_{j=1}^{10} x_{m-n+10(k-1)+j}\right),\quad k = 1,\ldots,[n/10].$$

Η ιστορική προσομοίωση είναι μια σχετικά εύκολη μέθοδος εκτίμησης των μέτρων κινδύνου και δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σε σχέση με το διάνυσμα των συντελεστών κινδύνου X_{m-k}. Ωστόσο για να έχουμε ακριβή και φερέγγυα αποτελέσματα θα πρέπει να έχουμε έναν μεγάλο αριθμό ιστορικών παρατηρήσεων και εφόσον μας ενδιαφέρουν τα ακραία σενάρια, θα πρέπει να έχουμε ανάλογες παρατηρήσεις, μιας και "το χειρότερο σενάριο δεν είναι ποτέ χειρότερο από αυτό που έχει ήδη συμβεί στο παρελθόν" (βλέπε Hult and Lindskog, 2007).

7.3 Μέθοδος Monte Carlo

Έστω ότι έχουμε παρατηρήσεις συντελεστών κινδύνου $Z_{m-n},\ldots,Z_m$ και ως εκ τούτου παίρνουμε τις παρατηρήσεις $x_{m-n+1},\ldots,x_m$. Θα προτείνουμε ένα παραμετρικό μοντέλο για το X_{m+1}. Το X_{m+1} έχει συνάρτηση κατανομής F και ανεξάρτητες τιμές $X_{m-n+1},\ldots,X_m$.
Τότε επιλέγοντας ένα κατάλληλο μοντέλο για το X_{m+1} και τις παραμέτρους αυτού, παράγουμε έναν μεγάλο αριθμό N παρατηρήσεων από αυτή την κατανομή, έστω $\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N$. Για κάθε παρατήρηση υπολογίζουμε την αντίστοιχη ζημία $l_1,\ldots,l_N$ όπου $l_k = l_{[m]}(\tilde{x}_k)$. Η πραγματική τότε ζημιοκατανομή του L_{m+1} προσεγγίζεται από την εμπειρική κατανομή F_{L^N} και δίνεται από τον τύπο (βλέπε Hult and Lindskog, 2007):

$$F_{L^N}(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}_{[l_k,\infty)}(x)$$

Τότε το Value at Risk και το Expected Shortfall εκτιμώνται από

$$\widehat{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(F_{L^N}) = l_{[N(1-\alpha)]+1,N},$$

$$\widehat{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{[N(1-\alpha)]+1}\sum_{k=1}^{[N(1-\alpha)]+1} l_{k,N}.$$

Αυτή η μέθοδος είναι πολύ ευέλικτη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ουσία όποια κατανομή θέλουμε από την οποία θα αντλήσουμε τα στοιχεία της προσομοίωσης. Το πρόβλημα είναι ότι είναι απαραίτητη η χρήση Η/Υ και μερικές φορές, ανάλογα με την πολυπλοκότητα του μοντέλου και του προβλήματος, η διαδικασία να τρέξουμε πολλές προσομοιώσεις για να έχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, μπορεί να πάρει από ώρες έως μέρες.

8 Παράδειγμα

Στην συνέχεια και για να ολοκληρώσουμε την εργασία μας, θα δούμε ένα παράδειγμα με πραγματικά δεδομένα από μια ελληνική ασφαλιστική εταιρεία, πάνω στα οποία θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε κάποια από τα θέματα με τα οποία ασχοληθήκαμε στα παραπάνω κεφάλαια.

Θα πάρουμε λοιπόν από μια ασφαλιστική εταιρεία τα ποσά των αποζημιώσεων που έχει καταβάλει τον τελευταίο χρόνο, από Ιανουάριο του 2013 έως Δεκέμβριο του 2013, για τον κλάδο αυτοκινήτων και για όλες τις καλύψεις αστικής ευθύνης, θραύσης κρυστάλλων, ιδίων ζημιών, πυρός, κλοπής εκτός από τα λειτουργικά έξοδα του φακέλου, όπως τις αμοιβές που έχουν δοθεί σε πραγματογνώμονες, ερευνητές, δικηγόρους κτλ. Οι πληρωθείσες ζημιές λοιπόν με τα ποσά που έχουν καταβληθεί στήθηκαν σε ένα excel αλλά για οικονομία χώρου δεν θα παρουσιαστούν αναλυτικά μιας και το πλήθος αυτών είναι **n=12.565** υποθέσεις, με ποσά που κυμαίνονται από €100 έως ανώτατο €409.208,61. Το άθροισμα όλων των πληρωμών του έτους είναι €28.544.962,00 ενώ η μέση τιμή είναι **μ=2.271,78**.

Περίπτωση 1: Για το συγκεκριμένο λοιπόν πλήθος ζημιών βγάλαμε το VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 99% βάση της μεθόδου της εμπειρικής συνάρτησης που είδαμε στο κεφάλαιο 7.1, (θα δούμε τον τρόπο αναλυτικά στην συνέχεια) το οποίο προέκυψε **$VaR_{99\%}$=25.944,38**. Αυτά τα στοιχεία όμως δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ειδικά αν θέλουμε να προβλέψουμε τις μεγάλες ζημιές που μπορεί να υποστεί μια εταιρεία. Για αυτό τον λόγο θεωρήσαμε καλύτερο να εφαρμόσουμε την *Peaks Over Threshold* μέθοδο.

Η **Peaks Over Threshold** μέθοδος (POT) ορίζει τις ακραίες τιμές σε σχέση με το αν ξεπερνάνε το κατώφλι u (threshold). Η συνάρτηση κατανομής πάνω από το threshold u δίνεται από

$$F_u(x) = P(X - u \le x | X > u) \quad \text{για } x \ge 0.$$

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων μεταβλητών που ακολουθούν μια κοινή κατανομή (independent and identically distributed - IID δείγμα) αλλά με άγνωστη συνάρτηση κατανομής F(x) και δεξιά ουρά. Έχει αποδειχθεί ότι η κατανομή που χαρακτηρίζει τις τιμές X_k που ξεπερνούν το κατώφλι u είναι η *Γενικευμένη Κατανομή Pareto (GPD).* Έτσι θεωρείται κατάλληλη για να εκτιμήσουμε πιθανότητες και μεγέθη για την δεξιά ουρά κατανομών (βλέπε Artzner, 1999).

Η κατανομή αυτών των X_1, X_2,…,X_n , των τιμών δηλαδή που ξεπερνούν την τιμή u, δίνεται από την κατανομή **Generalised Pareto**, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο [Πηγή: σημειώσεις Τολίκα Κων/νου, Διοικητική Λειτουργικών Κινδύνων /en.wikipedia.org]

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & ,\acute{o}\tau\alpha\nu\ \xi \neq 0 \\ 1 - exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) & ,\acute{o}\tau\alpha\nu\ \xi = 0 \end{cases}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ x \geq \mu\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \xi \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi}\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \xi < 0,$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ \mu \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ \sigma > 0$$

Ο μέσος αυτής της κατανομής ορίζεται πάντα για ξ<1 ως

$$E(x) = \frac{\sigma}{1-\xi}$$

Πολύ σημαντικό σε αυτήν την διαδικασία είναι να διαλέξουμε κατάλληλο κατώφλι. Συνήθως αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση της *mean excess function*. Η mean excess function εκφράζει τον μέσο της κατανομής αυτής ως συνάρτηση του κατωφλιού u και δίνεται από (βλέπε McNeil, 2005)

$$e(u) = \frac{(\sigma + \xi u)}{(1-\xi)},$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ 0 \leq u < \infty\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ 0 \leq \xi < 1\ \kappa\alpha\iota\ 0 \leq u \leq -\frac{\beta}{\xi}\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \xi < 0.$$

Από εμπειρική άποψη λοιπόν, θα ορίσουμε ως threshold την τιμή u=30.000 και θα μελετήσουμε τα δεδομένα από αυτήν την τιμή και πάνω, μιας και είναι ένα ποσό που θα μπορούσε να προβληματίσει οικονομικά την εταιρεία.

Περίπτωση 2: Θα κάνουμε σύγκριση των αποτελεσμάτων μας για το αρχικό πλήθος των δεδομένων μας τις πρώτης περίπτωσης σε σχέση με αυτά που θα προκύψουν παίρνοντας το threshold που προαναφέραμε. Ξεκινώντας θα ταξινομήσουμε τα δεδομένα μας κατά φθίνοντα τρόπο, έτσι ώστε $X_{1,n} \geq \ldots \geq X_{n,n}$. Πρώτο, λοιπόν, έχουμε το μεγαλύτερο ποσό και τελευταίο το μικρότερο. Βάση του τύπου (7.1) προκύπτει ότι το VaR για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% στην περίπτωση του συνολικού πλήθους ζημιών n=12.565, είναι $VaR_{99\%}$=25.944,38. Είναι δηλαδή η παρατήρηση $X_{126,12565}$, αφού [12565(1-0,99)]+1=125+1=126. (Εντολή: LARGE(B2:B12566;126 ,Πίνακας 8.1).

Απομονώνοντας τα δεδομένα μας από το ποσό των €30.000 και πάνω, καταλήγουμε σε ένα πλήθος n=121. Το αντίστοιχο Value at Risk ισούται με: $VaR_{99\%}$=370.693,94, είναι δηλαδή η δεύτερη παρατήρηση από την αρχή μιας και [121(1-0,99)]+1= 1+1=2. (Εντολή: LARGE(B2:B122;2 ,Πίνακας 8.1).

Τα αντίστοιχα Expected Shortfalls βάση του τύπου 7.2, θα είναι για την πρώτη περίπτωση $ES_{99\%}$=113.162,21 ενώ για την δεύτερη $ES_{99\%}$=389.951,28. Είναι δηλαδή στην πρώτη περίπτωση το μέσο των 126 μεγαλύτερων παρατηρήσεων, δηλαδή από το VaR και πάνω (εντολή: AVERAGE(B2:B127), ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχουμε το μέσο των δύο μεγαλύτερων παρατηρήσεων (εντολή: AVERAGE(B2:B3).

	A	B	C	D	E	F
1	Πληρωθείσες Ζημιές Έτους 2013	Ποσά Πληρωμών				
2	19033507	409.208,61		ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ n=12.565		ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ n=121
3	19062167	370.693,94				
4	19179595	344.948,13		ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ		ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΑΠΟ 30.000
5	19209286	342.447,45		2.271,78		115.972,86
6	19047148	311.516,67				
7	285697	310.000,00		ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΛΚΙΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ		ΤΥΠ.ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΑΠΟ 30.000
8	19125820	306.570,59		14.263,68		87.450,48
9	319604	289.000,00				
10	19243683	278.000,00				
11	334013	269.101,96				
12	19090472	257.000,00		VaR 99%		VAR 99%
13	19195362	253.007,05		25.944,38		370.693,94
14	19163753	251.016,86				
15	19255967	250.000,00		Expected Shortfall		Expected Shortfall
16	19273273	250.000,00		113.162,21		389.951,28
17	19053764	249.272,50				
18	19101413	229.842,78				
19	19103297	207.500,00				
20	19028909	206.642,74				
21	19243956	202.000,00				
22	19209979	195.000,00				
23	19144729	194.627,40				
24	19201936	194.327,72				
25	19219700	185.000,00				
26	19166779	180.594,39				
27	19189678	179.389,24				
28	19120315	172.633,74				
29	322902	167.958,83				
30	266962	165.000,00				
31	19192649	162.025,50				
32	19067132	160.000,00				
33	19227189	155.712,00				

Sheet1

Πίνακας 8.1: Σύγκριση μέτρων κινδύνου για όλες τις ζημιές συνολικά σε σχέση με την χρήση της POT μεθόδου.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, μπορούμε να δούμε ότι στην πρώτη περίπτωση δεν έχουμε ικανοποιητικά μέτρα κινδύνου, την στιγμή που το VaR απέχει πολύ από τις ακραίες τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή της ζημιάς, καθώς ένδειξη είναι και η μεγάλη διαφορά που έχει το VaR με το ES. Στην δεύτερη περίπτωση αυτά τα δύο μεγέθη είναι πιο κοντινές τιμές και ασφαλώς πιο αντιπροσωπευτικές για τον κίνδυνο που έχει να αντιμετωπίσει η εταιρεία. Παίρνοντας αυτές τις τιμές ως μέτρο κινδύνου, θα μπορούσε η εταιρεία να καλύψει τις ζημιές του επόμενου χρόνου με επίπεδο εμπιστοσύνης 99% αν δεν υπάρξουν μεγάλες αποκλίσεις στις μελλοντικές απαιτήσεις, δηλαδή αν δεν υπάρξουν πολύ ακραίες τιμές.

Περίπτωση 3: Επειδή όμως ένας χρόνος δεν είναι αρκετός, ενώ όσο περισσότερα στοιχεία έχουμε τόσο πιο καλή εκτίμηση μπορούμε να κάνουμε, θα δούμε τις ζημιές που είχε η συγκεκριμένη εταιρεία τα τελευταία 3 χρόνια, από 01/2011 έως 12/2013 για τις ζημιές από €30.000 και πάνω.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε n=304 με ανώτερη τιμή πλέον την max=540.979,27 . Αφού ταξινομήσουμε πάλι τα δεδομένα κατά φθίνοντα τρόπο και αφού [304(1-0,99)]+1=3+1=4, καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα (βλέπε Πίνακα 8.2).

Βλέπουμε λοιπόν ότι το **$VaR_{99\%}$=514.000** όσο δηλαδή η τέταρτη μεγαλύτερη τιμή ή διαφορετικά $q_{99\%}=X_{4,304}$=514.000,00 . Το Expected Shortfall θα είναι πλέον η μέση τιμή των τεσσάρων μεγαλύτερων τιμών, οπότε **$ES_{99\%}$=527.316,70**.

Σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι έχουν αυξηθεί τα μέτρα κινδύνου, κάτι το οποίο είναι λογικό μιας και έχουμε μεγαλύτερες τιμές στο δείγμα μας από ότι στην προϋγούμενη περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι προέκυψαν μεγαλύτερες ζημιές τα δύο περασμένα χρόνια. Πάλι παρατηρούμε όμως ότι δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση στα δύο μέτρα που βρήκαμε μιας και δεν υπάρχει καμία μεγάλη ζημιά, ακραία τιμή, που να ξεφεύγει πολύ από τις τελευταίες μεγάλες τιμές.

	A	B	C
1	Πληρωθείσες Ζημιές Έτους 2011-2013		
2	540.979,27		ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ n=304
3	531.575,00		
4	522.712,53		ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
5	514.000,00		127.482,56
6	504.215,67		
7	495.245,59		ΤΥΠ. ΑΠΟΚΛΙΣΗ
8	488.015,58		117.336,63
9	453.564,46		
10	450.000,00		VaR 99%
11	447.269,95		514.000,00
12	410.931,13		
13	409.208,61		Expected Shortfall
14	404.999,98		527.316,70
15	393.498,88		
16	383.581,18		
17	376.906,31		
18	375.000,00		
19	373.631,96		
20	367.216,17		
21	360.172,51		
22	349.297,51		
23	348.325,00		
24	346.691,99		
25	344.948,13		
26	342.447,45		
27	340.000,00		
28	323.510,00		

Πίνακας 8.2: Μέτρα κινδύνου με χρήση μεθόδου POT για ζημιές έτους 2011-2013.

Περίπτωση 4: Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα μέτρα κινδύνου με την **Monte Carlo** προσομοίωση. Τρέχουμε την εντολή =RAND() ,700 φορές και μας δίνει τυχαίες τιμές μεταξύ 0 και 1. Από την τρίτη περίπτωση έχουμε εκτιμήσει ότι ο μέσος όρος ζημιάς είμαι $\mu \approx 127.500$ και η τυπική απόκλιση της τάξης $\sigma \approx 117.300$, τότε αν θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, τρέχουμε την εντολή *"=NORMINV(probability;mean;standard_dev)"* για 700 φορές, όπου probability είναι οι τυχαίες τιμές που μας έδωσε η

=RAND() εντολή, καθώς μέσο και τυπική απόκλιση, οι παραπάνω τιμές που ορίσαμε. (Βλέπε Πίνακα 8.3).

Στην ουσία, η Α στήλη δίνει τις τιμές του p^{th} ποσοστημορίου της κανονικής κατανομής με μ=127.500 και σ=117.300.

Στην συνέχεια παίρνουμε τα στοιχεία της στήλης Α, κρατάμε αυτά που είναι από €30.000 και άνω και τα ταξινομούμε κατά το προηγούμενο πρότυπο. Κάνοντας τις ίδιες κινήσεις με τα προηγούμενα παραδείγματα, το VaR για 99% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι η έκτη μεγαλύτερη παρατήρηση σε πλήθος ζημιών n=552, επειδή [552(1-0,99)]+1=5+1=6. Θα μπορούσαμε βέβαια να είχαμε επαναλάβει τις επαναλήψεις της Monte Carlo προσομοίωσης πολλές περισσότερες φορές για να έχουμε μεγαλύτερο δείγμα. Έτσι λοιπόν **$VaR_{99\%}$=420.630,12** ενώ **$ES_{99\%}$=463.460,95** (Πίνακας 8.4)

	A	B	C	D	E
1	**NORMAL RV**	**RAND**			
2	228,9794304	0,14		**μ**	**127500**
3	188578,5073	0,70		**σ**	**117300**
4	89464,90571	0,37			
5	35888,48365	0,22			
6	104981,6834	0,42			
7	-53542,89069	0,06			
8	97269,6858	0,40			
9	45019,6224	0,24			
10	53216,10385	0,26			
11	110837,4845	0,44			
12	75422,07008	0,33			
13	50465,50265	0,26			
14	4046,011467	0,15			
15	349885,492	0,97			
16	-48200,24362	0,07			
17	-7721,263916	0,12			
18	102742,0075	0,42			
19	-161391,1077	0,01			
20	268947,1428	0,89			
21	-21731,63809	0,10			

Πίνακας 8.3: Monte Carlo προσομοίωση για της ζημιές έτους 2011-2013 άνω των €30.000.

	A	B	C
1	541.873,61		ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ n=552
2	487.969,27		
3	454.507,18		ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
4	452.313,80		165.483,62
5	423.471,74		
6	420.630,12		ΤΥΠ.ΑΠΟΚΛΙΣΗ
7	414.453,22		92.219,13
8	414.383,70		
9	412.448,00		
10	403.390,70		
11	398.004,06		VaR 99%
12	393.512,42		420.630,12
13	392.906,96		
14	376.523,56		Expected Shortfall
15	374.826,69		463.460,95
16	367.795,12		
17	367.244,92		
18	366.314,57		
19	365.970,38		
20	363.032,86		
21	361.238,19		
22	356.254,78		
23	353.970,53		
24	353.084,87		
25	351.224,87		
26	350.169,41		
27	347.459,19		
28	344.038,97		
29	342.540,70		
30	338.645,41		
31	335.998,02		
32	335.405,17		
33	329.914,48		
34	329.321,78		

Πίνακας 8.4: Μέτρα κινδύνου με χρήση μεθόδου Monte Carlo.

Παρατηρήσεις: Συγκρίνοντάς τα μέτρα που βρήκαμε με την χρήση της Monte Carlo μεθόδου σε σχέση με τις προϋγούμενες περιπτώσεις, συμπεραίνουμε ότι δεν έχουν μεγάλες διαφορές αν και με την διαδικασία Monte Carlo έχουμε πιο αισιόδοξες προσδοκίες για το μέλλον από τις προβλέψεις που βγάλαμε από τα τριετή δεδομένα, αλλά πιο συγκρατημένες από τα μέτρα που βγάλαμε από τον τελευταίο χρόνο, μιας και τα μέτρα είναι μεγαλύτερα από αυτά του έτους 2013.

Διαπιστώνουμε από τα παραπάνω ότι αν και δεν είχαμε μεγάλες αποκλίσεις στα αποτελέσματα που βρήκαμε, τελικά μεγάλη σημασία παίζει ο τρόπος που θα επιλέξουμε για την αναζήτηση των μέτρων κινδύνων. Συνήθως είναι θέμα του αναλυτή πώς θα προσεγγύσει το πρόβλημα, τι παραδοχές και τι προσαρμογές θα κάνει, ώστε να έχει το καλύτερο δυνατό αποτελέσμα, που θα εξυπηρετήσει καλύτερα τον σκοπό του, έτσι ώστε οι προβλέψεις που θα κάνει, να είναι πιο κοντά τις μελλοντικές πραγματικές ζημίες.

Επίλογος

Το ζήτημα του μέτρου κινδύνου έχει απασχολήσει πολύ, από την ανακάλυξη του VaR στις αρχές της δεκαετία του '90 και μέχρι σήμερα. Διαπιστώνουμε πλέον ότι το Value at Risk είχε υπερεκτιμηθεί, κάτι που ήταν αναμενόμενο μιας και δεν υπήρχαν άλλα μέτρα κινδύνου. Σήμερα όμως έχουμε στην διάθεσή μας πιο αξιόπιστα μέτρα όπως τα συνεπή, το Expected Shortfall, τα Spectral και αρκετά ακόμα τα οποία δεν είδαμε στην παρούσα εργασία. Έχουμε πλέον πολλούς τρόπους αναζήτησης των μέτρων και είναι θέμα του αναλυτή ποιόν από όλους θα επιλέξει για να καταλήξει στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα και στην πιο σωστή πρόβλεψη (όπως είπαμε και παραπάνω). Βέβαια η αναζήτηση του ενός ιδανικού μέτρου είναι μάλλον μάταιη υπόθεση. Οι παραδοχές και ο τρόπος που θα προσεγγιστεί το πρόβλημα είναι καθαρά προσωπική υπόθεση και θα έχουμε τα καλύτερα αποτελέσματα όταν μέσα από διάφορους τρόπους, δηλαδή με την χρήση διαφόρων μεθόδων εκτίμησης, φτάσουμε σε αυτό που θεωρούμε πιο αντιπροσωπευτικό, μέσα από ένα σύνολο διαφορετικών αποτελεσμάτων.

Ένα είναι το σίγουρο, αν μπορούμε να εκτιμήσουμε την Αξία σε Κίνδυνο, μπορούμε να εκτιμήσουμε κάθε μέτρο κινδύνου που βασίζεται στο ποσοστημόριο. Δηλαδή από το VaR μπορούμε να περάσουμε εύκολα σε πιο αξιόπιστα μέτρα βασισμένα στο quantile. Και σαν μέθοδο εκτίμησης, μιας και τα προβλήματα είναι σύνθετα κυρίως για των ασφαλιστικό τομέα, συνήθως θα χρησιμοποιούμε στοχαστικές διαδικασίες.

Η πρόγνωση είναι βέβαια μια υπόθεση πολύ ευαίσθητη και αβέβαιη στον χρόνο. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιες τάσεις για το Risk Management που προβλέπεται να ακολουθηθούν στο εγγύς μέλλον:

- Υπάρχουν ήδη αρκετά μέτρα κινδύνου για να επιλέξουμε με ποιο θα δουλέψουμε και αν και σε μια διαδικασία συνεχούς βελτίωσης, παρόλα αυτά δύσκολα θα έχουμε νέα μέτρα και καινοτομίες.
- Ενώ λοιπόν οι μέθοδοι εκτίμησης είναι σε διαρκή εξέλιξη, νέοι μέθοδοι φαίνεται να αναπτύσσονται σε άλλους τομείς, όπως μηχανική και φυσική, με αποτέλεσμα να γίνεται ακόμα πιο αποτελεσματική η πρόβλεψη στον οικονομικό και ασφαλιστικό κλάδο. Π.χ. στην πρόβλεψη ακραίων τιμών

(extreme theory) που έχουν να κάνουν με ακραία καιρικά φαινόμενα.

- Οι αναλυτές συνειδητοποιούν όλο και περισσότερο την σημασία των παραμέτρων, των παραδοχών και προσαρμογών που κάνουν για την αναζήτηση των μέτρων κινδύνων. Είναι όλο και πιο συχνό στον χώρο του Risk Management, να συνειδητοποιούν την αδυναμία των μέτρων και των μεθόδων εκτίμησης και την προσαρμογή αυτών στα εκάστοτε προβλήματα.
- Επίσης υπάρχει μια αδυναμία στην εκτίμηση - αξιολόγηση των μεθόδων δηλαδή στο πόσο αποτελεσματικές είναι. Π.χ. στην οικονομικό κλάδο είναι σχετικά εύκολο να αξιολογήσεις το VaR που έχεις εκτιμήσει, συγκρίνοντάς το με την αλλαγές στις τιμές ανά μέρα. Στον ασφαλιστικό κλάδο όμως είναι πιο πολύπλοκα τα θέματα. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή από και πρέπει να υπάρξει αξιολόγηση σε βάθος χρόνου.

Τέλος, κοιτώντας προς το παρελθόν, βλέπουμε τους αναλογιστές να θεωρούνται ως "ειδικοί" στο Risk Management. Στις τελευταίες όμως δύο δεκαετίες έκανε την δυναμική της εμφάνιση η διοικητική κινδύνου στον χρηματοοικονομικό τομέα, θέτοντας νέα δεδομένα σε έναν κλάδο που ανήκε στον αναλογισμό. Καθιέρωσαν λοιπόν το Value at Risk, το οποίο και κυριάρχησε για μια δεκαετία σχεδόν. Πολλοί αναλογιστές ήταν επιφυλακτικοί με αυτό το μέτρο, όπως και δικαιώθηκαν στον χρόνο, αφού μεγάλες καταστροφές, με μεγάλες φυσικά ζημίες, δεν μπόρεσαν να καλυφθούν από αυτό το μέτρο.

Παρόλα αυτά, η επανάσταση που έφερε το Value at Risk, δύσκολο να αμφισβητηθεί και μέτρα που έχουν άμεση σχέση με την Αξία σε Κίνδυνο, όπως το Expected Shortfall που αναλύσαμε, stress test και στοχαστικές διαδικασίες, αποδεικνύονται πολύ αξιόπιστα και επαρκή, κατάλληλα ακόμα και σήμερα, παρά τις εξελίξεις που έχουν σημειωθεί, για να χρησιμοποιηθούν στα ιδιαίτερα απαιτητικά προβλήματα του ασφαλιστικού κλάδου.

Παραπομπές

Acerbi C. (2002). "Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion, Journal of Banking and Finance, 26:1505-1518.

Acerbi C.,Meucci A., Tasche D. (2003) to appeat in Journal of Banking and Finance.

Acerbi C., Tasche D. (2001). "Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk". Economic Notes, 31 2 (2002), 379-388.

Acerbi C., Tasche D. (2002). "On the Coherence of Expected Shortfall".

Acerbi C. (2003). "Coherent Representation of Subjective Risk Aversion".

Acerbi C. (2004). "Coherent Representation of Subjective Risk Aversion", in Risk Measures for 21st Century (New York:Wiley), 147-207.

Alexander C. (2003). "Operational Risk: Regulation, Analysis and Management.

Alhamzawi R. and Yu K. (2012). "Bayesian Lasso-Mixed Quantile Regression", Journal of Statistical Computation and Simulation.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1997). “Thinking coherently,” RISK,10,11,68-71.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1998). "Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, 9:203-228".

Artzner P. (1999). "Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance".

Basel Committee on Banking Supervision (2003). "Overview of the new Basel Capital Accord". Consultative Document. Basel: Bank for International Settlements. April.

Berkowitz J. and J.O'Brien (2002). "How accurate are Value at Risk Models at Commercial Bank?", Journal of Finance, 57:1093-

1112.

Brazauskas V., Jones L.B., Puri L.M. and Zitikis R. (2008). "Estimating Conditional Tail Expectation with Actuarial Applications in View", Journal of Statistical Planning and Inference, 138: 3590-3604.

Cairns, A.J.G (2000). "A Discussion of Parameter and Mondel Uncertainty in Insurance", Insurance: Mathematics and Economics, 27:313-330.

Delbaen F. (2000). "Draft: Coherent Risk Measures".

Dowd K., Blake D. (2006). "After VaR: The Theory Estimation & Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures" 73 2 193-229.

Embrechts, P.,C. (1997). "Modeling Extreme Events for Insurance and Finance.

Fischer T. (2001). "Examples of Coherent Risk Measures Depending on One Sided Moments. Working paper, Darmstadt Univ. of Technology (2001).

Fischer, T. (2003). "Risk Capital Allocation by Coherent Risk Measures Based on One-Sided Moments", Insurance: Mathematics and Economics, 32: 135-146.

Gerber, H.U., and M.J. Goovaerts (1981). "On the Representation of Additive Principles of Premium Calculation". Scandinavian Actuarial Journal, 4,221-227.

Hardy M. (2006). "An Introduction to Risk Measures for Actuarial Application".

Harmantzis C.F., Miao L., Chien Y. (2005). "Empirical Study of Value at Risk and Expected Shortfall, Models with Heavy Tails".

Hult H. and Lindskog F. (2007). "Mathematical Modeling and Statistical Methods for Risk Management".

John Matistre and Geoffrey Hancock (2008). "Summary of Variance of the CTE Estimator, article from Risk Management".

Journal of Risk Finance (2002). Fall issue.

Klugman S., Panjer H. and Willmot G. (2004). "Loss Models: From data to decisions (2nd Ed.) Wiley".

Manistre J. and Hancock H.G. (2008). "Summary of Variance of the CTE Estimator", Society of Actuaries, Risk Management, 13: 37-42.

Manistre J. and Hancock H.G. (2013). "Variance of the CTE Estimator", North America Actuarial Journal, 9 2 129-136.

O'Connor, R.,J.F. Golden and R. Reck (1999). "A Value at Risk Calculation of Required Reserves for Credit Risk in Corporate Lending Portofolios", North America Actuarial Journal, 3:72-83.

Panjer H.H.(2002) "Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates".Research report 01-14, Institute and Pension Research, University of Waterloo.

Panjer H. (2006). "Operational Risk, Modeling Analytics". Measures of Risk, 3: 45-53.

Rockafellar R.T. and Uryasev S. (2002). "Conditional Value at Risk for General Loss Distributions", Journal of Banking and Finance 26: 1443-1471.

Tasche D. (2002). Expected Shortfall and Beyond. Journal of Banking & Finance 26 1519-1533.

Wang S. (1995). "Insurance Pricing and Increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms". Insurance: Mathemetics and Economics 17 43-54.

Wang S. (1996). "Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. ASTIN Bulletin 26 71-92.

Wang S. (2002). "A universal framework for pricing financial and insurance risks. ASTIN Bulletin 32 213-234.

Wang S.S.,V.R. Young and H.H. Panjer (1997). "Axiomatic Characterization of Insurance Prices", Insurance: Mathematics and Economics, 21: 173-183.

Yildirim I. (2005). "A Thesis Submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of the Middle East Technical University", Coherent and Convex Measures of Risk.

Young, V.R. (1999). "Optimal Insurance Under Wang's Premium Principle", Insurance: Mathematics and Economics, 25: 109-122.

http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution
http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution

Τολίκας Κ. (2012). "Διοικητική Λειτουργικών Κινδύνων - Μέρος Β", σημειώσεις από το αντίστοιχο μάθημα του ΜΠΣ Αναλογιστικής επιστήμη και Διοικητικής Κινδύνου.