Διπλωματική Εργασία

Εγγυήσεις Τόκων σε Χρηματοδοτικές Συμβάσεις

Μαρία-Ευθυμία Σακελλαρίδη

Πειραιάς, 2014

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης,
ΠΜΣ "Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου"
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Dissertation

Interest Guarantees
on
Loans and Saving Contracts

Maria-Efthymia Sakellaridi

Piraeus, 2014

Department of Statistics and Insurance Science,
M.Sc. in Actuarial Science and Risk Management
University of Piraeus

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε τις εγγυήσεις επιτοκίων σε χρηματοδοτικές συμβάσεις. Διάφορες μορφές δανειακών συμβολαίων και εγγυήσεων εξετάζονται αρχικά, και παράλληλα γίνεται μια σημαντική διάκριση μεταξύ των δανείων με σταθερές πληρωμές, σε αντιδιαστολή με δάνεια με σταθερές αποσβέσεις. Στη συνέχεια, γίνεται χρήση της στοχαστικής θεωρίας σε μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDE's) για την εύρεση των τιμών των εγγυήσεων. Τέλος, παρουσιάζονται λύσεις κλειστού τύπου για τυποποιημένα συμβόλαια σε συγκεκριμένα και καλά δομημένα μοντέλα.

Abstract

The aim of this dissertation is to study the interest guarantees on loans and saving contracts. Various forms of loan contracts and guarantees are examined and there is a significant distinction between loans with fixed repayments in contrast to loans with fixed amortizations. Finally, stochastic theory and partial differential equations (PDE's) are employed for estimating the guarantee prices. Some closed form solutions for standard contracts in specific and well-structured models are also examined.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, τόσο για την εμπιστοσύνη και ανάθεση της εργασίας αυτής, όσο και για την καθοριστική βοήθεια και καθοδήγηση καθ' όλη την διάρκεια της συγγραφής της.

Ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κύριο Μιχαήλ Γκλεζάκο, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και Διευθυντή του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, όπως επίσης και τον κύριο Κλέωνα Τσίμπο, Καθηγητή του ιδίου Τμήματος.

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου για την υποστήριξη καθ' όλη την διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών και ειδικά στον πατέρα μου για την αμέριστη αγάπη και κατανόηση που μου προσφέρει καθημερινά. Ευχαριστώ θερμά τον σύζυγό μου, Γιώργο, και τα παιδιά μας, Κωνσταντίνο και Χρύσα, καθώς αποτελούν την κινητήρια δύναμη για να βελτιώνομαι συνεχώς.

Τέλος, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω όλες μου τις φίλες και ειδικά τις Μ. Δημητροπούλου, Σ. Θεοχαρίδη, Δ. Κοντραφούρη, Μ. Μπαλτά και Σ. Νταλαπέρα για την υπομονή, την υποστήριξη και την ενθάρρυνση τους κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Μαρία-Ευθυμία Σακελλαρίδη
Πειραιάς, 2014

Εισαγωγή

Σύμφωνα με τους Miltersen, K. R. και Persson, S.-A. [8], οι εγγυήσεις επιτοκίων περιέχονται σε πολλά χρηματοοικονομικά προϊόντα. Είναι γεγονός ότι, αρκετά ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής ή επενδυτικά συμβόλαια εγγυήσεων εξασφαλίζουν στον κάτοχο τους ένα σταθερό ετήσιο ποσοστό επιστροφής. Μια συμβατική εγγύηση που εφαρμόζεται τόσο στα δάνεια όσο στις πάγιες επενδύσεις, περιορίζει την κίνηση των επιτοκίων μέσα σε ένα καθορισμένο εύρος και για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Με αυτό τον τρόπο οι δανειστές (ή οι επενδυτές στην περίπτωση επενδύσεων) προστατεύονται από μια απότομη πτώση των επιτοκίων ενώ ταυτόχρονα οι δανειολήπτες προστατεύονται από την αύξηση αυτών. Σε κάθε περίπτωση, ως εγγύηση καταβάλλεται κάποιο χρηματικό ποσό (premium). Οι εγγυήσεις τόκων σε συμβόλαια δανείων και καταθέσεων θεωρούνται χρηματοοικονομικές απαιτήσεις και τιμολογούνται από την αρχή της μη κερδοσκοπικής αγοραπωλησίας (arbitrage) μέσω ενός μοντέλου διάχυσης επιτοκίου συνεχούς χρόνου και ενός μοντέλου αλυσίδας Markov [9]. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εύρεση των τιμών των εγγυήσεων δανείων σε καλά δομημένα μοντέλα.

Πιο συγκεκριμένα, η δομή της εργασίας έχει ως εξής: Στο πρώτο κεφάλαιο, παραθέτουμε βασικές έννοιες και ορισμούς τόσο από τη θεωρία Πιθανοτήτων, όσο από τη θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων. Έννοιες όπως αυτή της μετρήσιμης συνάρτησης, της τυχαίας μεταβλητής, της σ-άλγεβρας, της μέσης και της υπό συνθήκη μέσης τιμής, θα λειτουργήσουν ως βάσεις για την κατανόηση των εννοιών που θα ακολουθήσουν στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο. Στο δεύτερο κεφάλαιο, διευρύνουμε το μαθηματικό μας υπόβαθρο μελετώντας δυο πολύ βασικές στοχαστικές διαδικασίες, τις διαδικασίες martingale και την κίνηση Brown. Οι martingales όσο η κίνηση Brown είναι διαδικασίες - κλειδιά για την κατανόηση του στοχαστικού ολοκληρώματος και του λήμματος του *Itô* πάνω στα οποία θα βασιστούμε για την εύρεση των τιμών των εγγυήσεων τόκων των δανείων στο τέταρτο κεφάλαιο. Επιπλέον, αναλύεται μια πολύ βασική ιδιότητα της κίνησης Brown, η ιδιότητα Markov, η οποία όπως θα δούμε κατά τη μελέτη του κεφαλαίου προσδίδει στη διαδικασία αυτή την ιδιότητα έλλειψης μνήμης. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε έννοιες από το Στοχαστικό Λογισμό και τη Θεωρία της Στοχαστικής Ολοκλήρωσης. Στο τέταρτο κεφάλαιο, που αποτελεί και το κύριο μέρος της εργασίας, παρουσιάζονται οι γενικοί όροι ενός δανειακού συμβολαίου και περιγράφονται τρεις ειδικοί τύποι δανείων που είναι ευρέως χρησιμοποιούμενοι. Στη συνέχεια, περιγράφεται η εγγύηση που ενσωματώνεται σε κάθε συμβόλαιο που ορίζει ένα ονομαστικό επιτόκιο διαφορετικό από την τιμή αγοράς, και παρουσιάζει το πρόβλημα του σχεδιασμού ενός δανειακού συμβολαίου ως ζήτημα στην τιμολόγηση μιας οικονομικής απαίτησης. Η απαίτηση αυτή είναι ένα παράγωγο επιτοκίου αν το ονομαστικό επιτόκιο είναι συνάρτηση του επιτοκίου της αγοράς. Έπειτα τίθεται το πρόβλημα της τιμολόγησης μιας γενικής συνάρτησης ονομαστικού επιτοκίου σε ένα γενικό μοντέλο διάχυσης επιτοκίου και γίνεται χρήση μερικών διαφορικών εξισώσεων για την εύρεση τιμών των εγγυήσεων δανείων με σταθερές αποπληρωμές σε αντιδιαστολή με δάνεια με σταθερές αποσβέσεις. Τέλος, παρουσιάζονται λύσεις κλειστού τύπου στο μοντέλο του *Vasiček*, ένα στοχαστικό μοντέλο περιγραφής της μεταβολής των επιτοκίων, το οποίο χρησιμοποιείται για την αποτίμηση επιτοκιακών παραγώγων.

Περιεχόμενα

1

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται επισκόπηση βασικών εννοιών από τη θεωρία πιθανοτήτων, οι οποίες θα διευκολύνουν την παρακολούθηση της ροής αυτής της εργασίας. Θα μελετηθούν έννοιες όπως αυτή της σ-άλγεβρας, της άλγεβρας Borel, των τυχαίων μεταβλητών και άλλων μαθηματικών εννοιών και θα δοθούν απλά παραδείγματα προς κατανόηση των προαναφερθέντων. Ένα μικρό κομμάτι στο τέλος το κεφαλαίου είναι αφιερωμένο σε εισαγωγικές έννοιες από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, απαραίτητες για την κατανόηση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, με τις οποίες ασχολούμαστε τόσο στο τρίτο, όσο στο τέταρτο κεφάλαιο, το κύριο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, η οποία εμβαθύνει στα δανειακά συμβόλαια.

1.1. Βασική Θεωρία Πιθανοτήτων

Στην καθημερινότητα, πολλές φορές συναντάμε την ανάγκη μελέτης φαινομένων των οποίων η έκβαση δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Παραδείγματος χάριν, μια ασφαλιστική εταιρεία δε μπορεί να γνωρίζει το ύψος των αποζημιώσεων που θα κληθεί να καταβάλλει κατά τη διάρκεια του έτους, όπως επίσης κατά τη ρίψη ενός νομίσματος δε μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν θα έρθει κορώνα ή γράμματα, ή κατά τη ρίψη ενός ζαριού δε γνωρίζουμε ποιο από τα έξι δυνατά αποτελέσματα θα τύχει. Τέτοια φαινόμενα ονομάζονται τυχαία πειράματα ή στοχαστικά φαινόμενα, ενώ το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός στοχαστικού φαινομένου θα λέγεται δειγματικός χώρος και θα συμβολίζεται με Ω.

1.1.1. σ-άλγεβρες και Μετρήσιμοι Χώροι

Θα ξεκινήσουμε με την παράθεση των ορισμών σχετικών με σ-άλγεβρες και μετρήσιμους χώρους. Για περαιτέρω ανάλυση και επεξήγηση, καθώς και επιπλέον παραδείγματα , παραπέμπουμε στο [16] (σελ. 2-11).

Ορισμός 1 (σ-άλγεβρα) *Έστω Ω ένα σύνολο. Τότε ως σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επί του συνόλου Ω, θα ορίζεται κάθε οικογένεια υποσυνόλων του, με τις εξής τρεις ιδιότητες:*

i. $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$

iii. $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, γίνεται εφαρμογή του Ορισμού 1 με σκοπό τον χαρακτηρισμό δύο υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω ως σ-άλγεβρες ή όχι:

Παράδειγμα 1 *Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{11, 12, 13, 14\}$ και τα υποσύνολα του*

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{11\}, \{12\}, \{11, 13, 14\}\}$$

και

$$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{11\}, \{12\}, \{11, 12\}, \{13, 14\}, \{11, 13, 14\}, \{12, 13, 14\}\}$$

Να εξεταστεί αν τα $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ είναι σ-άλγεβρες.

Λύση:

Για την $\mathcal{F}_1$ παρατηρούμε ότι δεν είναι σ-άλγεβρα καθώς δεν πληρείται η ιδιότητα iii. του Ορισμού 1 γιατί, ενώ περιέχει τα υποσύνολα $\{11\}, \{12\}$, **δεν** περιέχει το $\{11\} \cup \{12\} = \{11, 12\}$. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, καταλήγουμε στο οτι η $\mathcal{F}_2$ είναι σ-άλγεβρα καθώς πληρούνται και οι τρεις ιδιότητες του Ορισμού 1.

Ορισμός 2 (Ελάχιστη σ-άλγεβρα) *Έστω ένα σύνολο A, τότε ως ελάχιστη σ-άλγεβρα σ(A), θα ορίζεται η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το A.*

Για παράδειγμα, έστω ένα σύνολο Α και η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}=\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. Η άλγεβρα $\mathcal{F}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο Α, συνεπώς η $\mathcal{F}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα του Α και συμβολίζεται με σ(Α).

Ορισμός 3 (Ανεξάρτητες σ-άλγεβρες) *Έστω η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επί του συνόλου Ω . Τότε οι σ-υποάλγεβρες $\mathcal{F}_i$ της $\mathcal{F}$ $i \in$ θα ονομάζονται ανεξάρτητες αν για οποιοδήποτε υποσύνολο J του I και οποιοδήποτε σύνολο $A_i \in \mathcal{F}_i$ ισχύει*

$$\mathbf{P}(\cap_{n \in J} A_n) = \prod_{n \in J} \mathbf{P}(A_n)$$

Μια ειδική κατηγορία σ-άλγεβρας, είναι η άλγεβρα Borel, η οποία συμβολίζεται με $\mathfrak{B}$. Έχοντας ως οδηγούς τους Ορισμούς 1 και 2 της σ-άλγεβρας και της Ελάχιστης σ-άλγεβρας αντίστοιχα, και θεωρώντας ως $\Omega = \mathbb{R}$, διατυπώνουμε το ορισμό της άλγεβρας Borel:

Ορισμός 4 (Άλγεβρα Borel) *Ως Άλγεβρα Borel $\mathfrak{B}$, ορίζεται η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα διαστήματα της μορφής (-∞,x). Τα στοιχεία του $\mathfrak{B}$ θα λέγονται σύνολα Borel.*

Έχοντας πλέον κατανοήσει την έννοια της σ-άλγεβρας, μπορούμε να προχωρήσουμε σε αυτή του μετρήσιμου χώρου, η οποία δίνεται στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5 (Μετρήσιμος Χώρος) *Έστω το σύνολο Ω και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα αποτελούμενη από υποσύνολα αυτού, τότε ως μετρήσιμος χώρος ορίζεται το ζεύγος ($\Omega, \mathcal{F}$).*

Σχόλιο-παράδειγμα: Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να συμπεράνουμε πως πως το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ του Παραδείγματος 1 είναι ένας μετρήσιμος χώρος.

Μέχρι στιγμής, αναφερόμαστε συνεχώς σε ενδεχόμενα κάποιου συνόλου Ω. Ενδιαφέρον όμως για τη Θεωρία Πιθανοτήτων παρουσιάζει το κατά πόσο είναι δυνατό αυτά τα ενδεχόμενα να πραγματοποιηθούν. Το κατά πόσο είναι λοιπόν δυνατή η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου εκφράζεται μέσω κάποιας συνάρτησης, η οποία αντιστοιχεί ένα σύνολο σε κάποιο αριθμό του διαστήματος [0,1]. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται μέτρο πιθανότητας και είναι μια ειδική περίπτωση μέτρου.

Ορισμός 6 (Μέτρο Πιθανότητας) *Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Τότε ως μέτρο πιθανότητας επί του μετρήσιμου χώρου θα ορίζεται η απεικόνιση P: $\mathcal{F} \to [0,1]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$

ii. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

iii. *Αν* $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$ *και τα* $\{A_i\}$ *είναι ανά δύο ξένα, τότε*

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

Παρατήρηση: Ως **μέτρο**, ορίζουμε την απεικόνιση μ που πληροί τις ιδιότητες *i.* και *iii.* του Ορισμού 6.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, δίνουμε κάποιους εισαγωγικούς ορισμούς που θα λειτουργήσουν ως βάση για τις **τυχαίες μεταβλητές**, με τις οποίες ασχολούμαστε στην αμέσως επόμενη παράγραφο. Για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα σχετικά με τις μετρήσιμες συναρτήσεις παραπέμπουμε στα [16] (σελ. 11) και [17] (κεφ. 5).

Ορισμός 7 (Μετρήσιμη Συνάρτηση) *Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$ και η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Η συνάρτηση f θα λέγεται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ η αντίστροφη εικόνα του μέσω της συνάρτησης f ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Δηλαδή, εάν ισχύει ότι:*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } A \subset \mathbb{R}^d$$

Ορισμός 8 (Χώρος Πιθανότητας) *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος, η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, και $\mathbf{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας. Τότε το σύνολο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ θα καλείται χώρος πιθανότητας.*

Ορισμός 9 (Τυχαία Μεταβλητή) *Θεωρώντας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ένα χώρο πιθανοτήτων, τότε ως τυχαία μεταβλητή ορίζεται μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση X: $\Omega \to \mathbb{R}^d$. Με άλλα λόγια, ως τυχαία μεταβλητή ορίζεται μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση X η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω, αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό X_ω.*

1.1.2. Τυχαίες Μεταβλητές

Ξεκινώντας αυτή την παράγραφο, η οποία ασχολείται με τις τυχαίες μεταβλητές, θα πρέπει να σημειώσουμε πως σε ότι ακολουθεί έχει δοθεί έμφαση στην συνεχή εκδοχή τους, καθώς τόσο στην κίνηση Brown όσο στη στοχαστική θεωρία, που είναι και οι βάσεις της παρούσας εργασίας, οι συνεχείς μεταβλητές πρωταγωνιστούν. Μια τυχαία μεταβλητή, μας διευκολύνει στο να περιγράφουμε εύκολα με ακρίβεια τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν και στη συνέχεια να υπολογίζουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες. Για παράδειγμα, αν κατά τη ρίψη δυο ζαριών παρουσιάζει ενδιαφέρον το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών να είναι το πολύ 8, τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X να είναι το άθροισμα των αποτελεσμάτων της ρίψης και στη συνέχεια προσπαθούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(X \leq 8)$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X, ορίζει ένα μέτρο (την κατανομή της X) μ_x επί του $\mathbb{R}^d$, βάσει της σχέσης $\mu_x = \mathbf{P}(X^{-1}(\mathfrak{B}))$ για κάποιο σύνολο Borel $\mathfrak{B}$ στο $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Υπενθυμίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής όταν μπορεί να πάρει όλες τις δυνατές τιμές της ένωσης ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου το πλήθος υποσυνόλων A του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 10 (Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας) *Έστω η τυχαία μεταβλητή X και έστω ότι υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση f $(f(x) \geq 0)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $A = [0, \infty)$ για την οποία ισχύει:*

i. $\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Τότε η f θα ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 11 (Συνάρτηση Κατανομής) *Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x). Τότε, η συνάρτηση $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ για την οποία ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες, θα λέγεται συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.*

i. *Η F_X είναι αύξουσα*

ii. *Η F_X είναι δεξιά συνεχής*

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *και* $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

iv. *f(x)=$F^{'}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$*

v. $\mathbf{P}(\alpha \leq x \leq b) = \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Σχόλιο: Από τον παραπάνω Ορισμό παρατηρούμε πως είναι εύκολη η μετάβαση από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στη συνάρτηση κατανομής, και το αντίστροφο, καθώς η γνώση της μιας, μας εξασφαλίσει την εύρεση της άλλης.

Το ακόλουθο παράδειγμα στηρίζεται στο παράδειγμα 6.1.2 [19] (σελ.338).

Παράδειγμα 2 *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Y περιγράφει το χρόνο που παρεμβάλλεται μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων του λεωφορείου της γραμμής Γλυφάδα-Πειραιά. Είναι προφανές ότι η Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και έστω ότι η συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τον τύπο*

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{2y}{5}} - \frac{2y}{5}e^{-\frac{2y}{5}} \ , y > 0$$

Ζητείται αρχικά να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας και στη συνέχεια η πιθανότητα να χρειαστεί κάποιος να περιμένει στη στάση από 1 έως 3 λεπτά.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα iv του Ορισμού 11 της συνάρτησης κατανομής, από όπου προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} f(y) = F^{'}(y) &= \left[1 - e^{-\frac{2y}{5}} - \frac{2y}{5}e^{-\frac{2y}{5}}\right]^{'} \\ &= \frac{2}{5}e^{-\frac{2y}{5}} - \frac{2}{5}e^{-\frac{2y}{5}} + \frac{2y}{5}\frac{2}{5}e^{-\frac{2y}{5}} \\ &= \frac{4}{25}ye^{-\frac{2y}{5}} \\ &\Rightarrow f(y) = \frac{4}{25}ye^{-\frac{2y}{5}} \ , y > 0 \end{aligned}$$

Για την εύρεση της ζητούμενης πιθανότητας, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα v του Ορισμού 11 καθώς το ζητούμενο ερμηνεύεται μαθηματικά ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1 < Y < 3) = F(3) - F(1) &= (1 - e^{-\frac{6}{5}} - \frac{6}{5}e^{-\frac{6}{5}}) - (1 - e^{-\frac{2}{5}} - \frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}}) \\ &= \frac{7}{5}e^{-\frac{2}{5}} - \frac{11}{5}e^{-\frac{6}{5}} \\ &\Rightarrow \mathbf{P}(1 < Y < 3) \simeq 0.276 \end{aligned}$$

Στηριζόμενοι πάνω στον ορισμό των ανεξάρτητων σ-αλγεβρών, μπορούμε να διατυπώσουμε στον ορισμό των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών:

Ορισμός 12 (Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές) *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \in I$ θα λέγονται ανεξάρτητες, αν παράγουν ανεξάρτητες σ-άλγεβρες.*

- Διδιάστατες Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Σε ότι έχει συζητηθεί έως τώρα σχετικά με τη μελέτη στοχαστικών φαινομένων, έχει αναφερθεί η μονοδιάστατη εκδοχή τους, δηλαδή μελετήσαμε κάποια πειράματα τύχης (όπως το Παράδειγμα 2) παρατηρώντας μια μόνο τυχαία μεταβλητή. Πολλές φορές ωστόσο για τη μελέτη του πειράματος τύχης, κρίνεται αναγκαία η εισαγωγή και συνεπώς η παρατήρηση δυο η περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών, για παράδειγμα κατά τη διενέργεια κλινικής έρευνας, μπορεί να είναι σκόπιμο να μελετηθεί το πως ο χρόνος αντίδρασης ενός ασθενούς στη λήψη συγκεκριμένης φαρμακευτικής αγωγής επηρεάζεται από την ηλικία του. Από εδώ και στο εξής, όταν θα λέμε (συνεχής) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή, θα εννοούμε το συνδυασμό δύο (συνεχών) τυχαίων μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, εκτός από την παρατήρηση της κάθε μιας τυχαίας μεταβλητής ξεχωριστά, παρουσιάζεται η ανάγκη της μελέτης της από κοινού συμπεριφορά τους καθώς και το πόσο η συμπεριφορά της μιας, επηρεάζει τη συμπεριφορά της δεύτερης [18]. Θα διατυπώσουμε τους ορισμούς της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, της από κοινού συνάρτησης κατανομής και της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας, για να καταλήξουμε στον ορισμό της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που αποτελεί τη βάση για τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής η οποία θα μας απασχολήσει αρκετά στο τέταρτο κεφάλαιο.

Ορισμός 13 (Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) *Έστω οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο και $A \subset \mathbb{R}^2$. Τότε η μη αρνητική πραγματική συνάρτηση $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:*

$$\mathbf{P}[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)\,dx\,dy$$

και πληρεί τις κάτωθι ιδιότητες:

- *i.* $f(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- *ii.* $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

θα ονομάζεται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X,Y).

Ορισμός 14 (Από κοινού συνάρτηση κατανομής) *Η συνάρτηση F(x,y) η οποία δίνεται από τη σχέση:*

$$F(x,y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}[X \in (-\infty,x), Y \in (-\infty,y)] = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt$$

θα λέγεται απο κοινού συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής Y.

Ορισμός 15 (Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας) *Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή (X, Y) και ας είναι f(x,y) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας. Τότε οι συναρτήσεις πυκνότητας των μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών X και Y,* $f_X(x)$ *και* $f_Y(y)$ *θα δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

i. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \; , x \in \mathbb{R}$

ii. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \; , y \in \mathbb{R}$

και θα ονομάζονται περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας.

Ορισμός 16 (Δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) *Έστω (X, Y) μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή, f(x,y) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας και* $f_X(x)$ *,* $f_Y(y)$ *οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών X και Y, αντίστοιχα. Θα ορίζουμε ως δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δοθέντος οτι η τυχαία μεταβλητή Y έχει την τιμή y (για την οποία ισχύει ότι* $f_Y(y) \neq 0$*) και θα συμβολίζουμε με* $f_{X|Y}(x|y)$ *τη συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \; , x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο: Με όμοιο σκεπτικό, μπορούμε να ορίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δοθέντος ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την τιμή x (για την οποία ισχύει ότι $f_X(x) \neq 0$) ως

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \; , y \in \mathbb{R}$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί [22] (σελ. 71), είναι γνωστή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) και φαίνεται πώς κάνοντας απλή χρήση των προαναφερθέντων ορισμών, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών X,Y καθώς επίσης και τις δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας.

Παράδειγμα 3 *Θεωρούμε την διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τη σχέση:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y) & 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 2 \\ \\ 0 & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ζητούνται να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X,Y καθώς και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας.

Λύση:

Υπολογίζουμε αρχικά την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X:

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{5}x(x+y)\,dy &= \frac{3}{5}x\left(x+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2\right) \\ &= \frac{3}{5}x\,(\,x+[2-0]\,) \\ &= \frac{6}{5}x(x+1) \end{aligned}$$

οπότε τώρα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δοθέντος X=x:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{3}{5}x(x+y)}{\frac{6}{5}x(x+1)} \\ &= \frac{x+y}{2(x+1)} \end{aligned}$$

Ακολουθώντας όμοιο σκεπτικό έχουμε για την τυχαία μεταβλητή Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{3}{5}x(x+y)\,dx \\ &= \frac{3}{5}\left[\frac{x^3}{3}+y\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{3y+2}{10} \end{aligned}$$

Συνεπώς, εύκολα υπολογίζεται και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δοθέντος Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{5}x(x+y)}{\frac{3y+2}{10}}$$

1.1.3. Τα Χαρακτηριστικά μιας Τυχαίας Μεταβλητής

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με τα χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής και πιο συγκεκριμένα με τη μέση της τιμή, τη διακύμανση και την δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) μέση τιμή. Μια συνοπτική εικόνα της συμπεριφοράς της τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τη μελέτη των παραμέτρων της κατανομής, όπως για παράδειγμα από τη μέση τιμή, η οποία μας δίνει μία πρώτη ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία είναι μαζεμένες οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής. Ωστόσο, πολλές φορές δεν είναι επαρκώς ικανοποιητική η πληροφορία που μας παρέχει η μέση τιμή για την τυχαία μεταβλητή, και δημιουργείται ανάγκη εισαγωγής ποσοτικών μέτρων τα οποία εκτιμούν όλες τις δυνατές αποκλίσεις $Y = |X - \mu|$ της τυχαίας μεταβλητής από τη μέση της τιμή. Τέτοια μέτρα ονομάζονται μέτρα διασποράς, όμως λόγω δυσκολιών στους υπολογισμούς, η διερεύνηση των οποίων ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, επικράτησε η χρήση της ποσότητας $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[(X-\mu)^2]$ η οποία ονομάζεται **διακύμανση**.

Η μέση τιμή $\mathbf{E}$(X) μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X_{\omega}\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} x\, d\mu_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x\mu_X(x)\, dx \tag{1.1}$$

ή αλλιώς μέσω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, θα ισχύει ο κάτωθι ορισμός:

Ορισμός 17 (Μέση Τιμή) *Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x). Τότε ως μέση τιμή της X θα ορίζεται η ποσότητα που δίνεται από τη σχέση:*

$$\mu = \mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

υπό την προϋπόθεση της απόλυτης σύγκλισης του δεξιού μέλους της ισότητας.

Παρατήρηση: Στον παραπάνω ορισμό η προϋπόθεση της απόλυτης σύγκλισης απαιτεί να υπάρχει η τιμή $\mathbf{E}[|X|]$ και να είναι πεπερασμένη δηλαδή

$$\mathbf{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα κάνουμε χρήση του Ορισμού 17 ώστε να βρούμε τον ημερήσιο μέσο χρόνο χρήσης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή από έναν φοιτητή:

Παράδειγμα 4 *Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει σε ώρες το συνολικό χρόνο της ημερήσιας χρήσης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή από ένα φοιτητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τη σχέση:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{9} & 0 \leq x \leq 3 \\ \\ -\dfrac{x-6}{9} & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Ζητείται ο υπολογισμός του ημερήσιου χρόνου χρήσης του υπολογιστή.

Λύση:

Από τον Ορισμό 17 της μέσης τιμής έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx &= \int_0^3 x\frac{x}{9}\, dx + \int_3^6 x\left(-\frac{x-6}{9}\right) dx \\
&= \frac{1}{9}\int_0^3 x^2\, dx - \frac{1}{9}\int_3^6 (x^2-6x)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{27}\right]_3^6 + \left[\frac{x^2}{3}\right]_3^6 \\
&= \frac{3^3}{27} - \frac{6^3-3^3}{27} + \frac{6^2-3^2}{3} \\
&\Rightarrow \mathbf{E}(X) = 3 \text{ ώρες}
\end{aligned}
$$

- Οι Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

Για τη μέση τιμή, ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Αν X,Y τυχαίες μεταβλητές και c_1, c_2 σταθερές τότε: $\mathbf{E}[c_1 X + c_2 Y] = c_1\mathbf{E}[X] + c_2\mathbf{E}[Y]$.

ii. Αν $X \leq Y$ τότε $\mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$.

iii. Για X=c με c σταθερά, τότε $\mathbf{E}[X]$=c.

- Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Έστω η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y). Κατά την περιγραφή των διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών, αναφέραμε πως πολλές φορές παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη της αλληλεπίδρασης δυο τυχαίων μεταβλητών όταν η μία είναι γνωστή και άλλη παραμένει άγνωστη. Απλοϊκά, μπορούμε να πούμε πως η γνωστή τυχαία μεταβλητή λειτουργεί ως η πληροφορία βάσει της οποίας θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη θέση γύρω από την οποία είναι συγκεντρωμένες οι τιμές της άγνωστης τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή θα υπολογίσουμε τη δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) μέση τιμή της μίας, δοθείσης της άλλης. Αρχικά, θα αναφερθούμε σε απλούς ορισμούς και παραδείγματα και στη συνέχεια, θα ορίσουμε τη δεσμευμένη μεταβλητή να είναι μια σ-άλγεβρα, καθώς τέτοιου είδους δεσμεύσεις θα μας απασχολήσουν στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών martingale, με τις οποίες ασχολούμαστε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Ορισμός 18 (Δεσμευμένη μέση τιμή) *Έστω η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) και $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δοθέντος ότι Y=y. Τότε, ως δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος Y = y θα ορίζεται η σχέση*

$$\mathbf{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

Σχόλιο: Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η δεσμευμένη μέση τιμή της Y δοθέντος X=x.

Παράδειγμα 5 *Έστω η δισδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X,Y) με δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X|Y}(x|y)$ η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$f_{X|Y}(x|y) = x(y+1)^2 \text{ , } 1 \leq x < 2$$

Ζητείται ο υπολογισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής της τ.μ. X.

Λύση:

Από τον Ορισμό 18 της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$\mathbf{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{1}^{2} x(y+1)^2 x\, dx = (y+1)^2 \int_{1}^{2} x^2\, dx = \frac{7}{3}(y+1)^2$$

Έχοντας πάρει μια καλή γνώση για τη δέσμευση τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$:

Ορισμός 19 (Δεσμευμένη Μέση Τιμή) *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ και μια $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, της οποίας η μέση τιμή $\mathbf{E}[X]$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη (δηλαδή $\mathbf{E}[|X|] < \infty$). Τότε, ως δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ καλείται η τυχαία μεταβλητή Y=$\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. $Y \in \mathcal{F}$

ii. $\int_A X\, dP = \int_A Y\, dP$ *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$

- Ιδιότητες της Δεσμευμένης Μέσης Τιμής

Για τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$, ισχύουν οι ιδιότητες της μέσης τιμής που αναφέρθηκαν προηγουμένως, καθώς και οι ακόλουθες:

i. $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]] = X$.

ii. Αν $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σ-άλγεβρες για τις οποίες ισχύει $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ τότε:

α΄) $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_1]\,|\,\mathcal{F}_2] = \mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{F}_1]$.

β′) $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_2]\,|\mathcal{F}_1] = \mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{F}_1]$, δηλαδή πρωταγωνιστικό ρόλο παίζει η μικρότερη σ-άλγεβρα.

iii. Αν A $\in G$ και $\mathbf{E}[|Y|] < \infty$ τότε $\mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A|G] = \mathbf{1}_A\mathbf{E}[Y|G]$.

iv. Αν X $\in G$ και $\mathbf{E}[|Y|], \mathbf{E}[|XY|] < \infty$ τότε $\mathbf{E}[XY\,|\,G] = X\mathbf{E}[Y\,|\,G]$.

v. Αν X τυχαία μεταβλητή **ανεξάρτητη** της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$ τότε $\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{F}] = \mathbf{E}[X]$

Παρατήρηση: Ως δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου A σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ορίζεται η δίτιμη τυχαία μεταβλητή $X(\omega)$=: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Πρέπει επίσης να τονίσουμε πως η ιδιότητα v. ισχύει μόνο στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}$. Αν $\mathcal{F}$ =σ(x), δηλαδή αν $\mathcal{F}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X τότε ισχύει $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = X$.

Ορισμός 20 (Διακύμανση) *Έστω η τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή E(X), τότε ως διακύμανση ορίζεται η σχέση*

$$V(X) = \sigma^2 = \mathbf{E}[(X-\mu)^2]$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές, έστω X και Y αυτές, τότε μια αριθμητική ποσότητα που μας δείχνει συνοπτικά τον τρόπο που μεταβάλλεται η μια τυχαία μεταβλητή ως προς την άλλη είναι η *συνδιακύμανση*, cov(X, Y). Δηλαδή στην ποσότητα cov(X, Y) αντικατοπτρίζεται η από κοινού συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών X,Y και ο αυστηρός ορισμός της είναι ο ακόλουθος [18]:

Ορισμός 21 (Συνδιακύμανση των τ.μ X,Y) *Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X,Y με μέσες τιμές* $\mathbf{E}[X] = \mu_x$, *και* $\mathbf{E}[Y] = \mu_y$ *αντίστοιχα. Τότε ως συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X,Y θα ορίζεται η σχέση*

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

Από τους Ορισμούς 20 και 21 είναι εύκολο να συμπεράνουμε πως $V(X) = cov(X,X)$. Ένας εναλλακτικός ορισμός της συνδιακύμανσης δυο τυχαίων μεταβλητών δίνεται ως εξής [18]:

Ορισμός 22 (Εναλλακτικός ορισμός συνδιακύμανσης) *Για δύο τυχαίες μεταβλητές X,Y η συνδιακύμανση τους δίνεται από τη σχέση*

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 20 της διακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \mathbf{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \\
&= \mathbf{E}[XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y] \\
&= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mu_y - \mathbf{E}[Y]\mu_x + \mu_x\mu_y \\
&= \mathbf{E}[XY] - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y \\
&= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο, είναι σκόπιμο να εισάγουμε την έννοια των ροπογεννητριών συναρτήσεων, καθώς μας παρέχουν επιπρόσθετες της μέσης τιμής και της διακύμανσης πληροφορίες για τη συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών:

Ορισμός 23 (Ροπογεννήτρια Συνάρτηση) *Έστω η τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει ότι* $\mathbf{E}(e^{tX}) < \infty$ *για κάθε* $t \in (-\delta, \delta)$. *Ως ροπογεννήτρια θα ορίζεται η συνάρτηση:*

$$M_x(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$$

Μέσω της ροπογεννήτριας, λαμβάνουμε τις ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής βάσει της σχέσης

$$\mathbf{E}(X^r) = M^{(r)}(0) = \frac{d^r}{dt^r}M(t)|_{t=0} \text{ για } r = 1, 2, \ldots$$

Κλείνοντας την παράγραφο, θα δώσουμε μία πολύ βασική συνεχή κατανομή, η οποία εμπλέκεται στη θεωρία της κίνησης Brown, την Κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss:

Ορισμός 24 (Κανονική κατανομή $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$) *Η κατανομή με παραμέτρους* $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ *και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

θα ονομάζεται Κανονική Κατανομή και θα συμβολίζεται με $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. *Στην περίπτωση που* $\mu = 0$ *και* $\sigma^2 = 1$, *θα έχουμε την Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα συμβολίζεται με* φ *ενώ η συνάρτηση κατανομής με* Φ.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής.

Παράδειγμα 6 *Έστω η τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0,1)$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται ως*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, , z \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Z.

Λύση:

Η ροπογεννήτρια θα δίνεται από τον τύπο του Ορισμού 23

$$M_z(t) = \mathbf{E}(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(tz-\frac{z^2}{2})}\,dz$$

Όμως,

$$tz - \frac{z^2}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}(z-t)^2$$

συνεπώς

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(tz-\frac{z^2}{2})\,dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}(z-t)^2}\,dz$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\,dz$$

$$\Rightarrow M_z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

καθώς η ποσότητα εντός του τελευταίου ολοκληρώματος είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y \sim \mathbf{N}(t,1)$. Για περισσότερα παραδείγματα και αναλυτικές λύσεις σχετικά με όσα προαναφέρθηκαν, παραπέμπουμε στο [22].

1.2. Εισαγωγή στη Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι η βάση του κλασσικού λογισμού καθώς τέτοιες εξισώσεις λειτούγησαν ως κίνητρα για την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Για να κατανοήσουμε τη λογική μιας διαφορικής εξίσωσης, ας θεωρήσουμε τη συναρτησιακή ισότητα

$$f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots.) = 0, \qquad 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

στην οποία εμπλέκεται ο χρόνος t, μια άγνωστη συνάρτηση x(t) και πεπερασμένο πλήθος παραγώγων της. Ο σκοπός μας, είναι η εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης x(t) η οποία ικανοποιεί τη σχέση (1.3), ονομάζεται *λύση της διαφορικής εξίσωσης* και είναι μοναδική για μια δοσμένη αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$.

Οι απλούστερες διαφορικές εξισώσεις, είναι αυτές της πρώτης τάξης, δηλαδή αυτές που περιέχουν μόνο το χρόνο t, τη συνάρτηση x(t) και την πρώτη της παράγωγο, $x^{'}(t)$. Ιδανικά, μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \alpha(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0 \tag{1.4}$$

όπου $\alpha(t, x(t))$ κάποια γνωστή συνάρτηση. Συνήθως, η σχέση (1.4) δίδεται στη μορφή:

$$dx(t) = \alpha(t, x(t))dt, \qquad x(0) = x_0 \tag{1.5}$$

Αν θεωρήσουμε τη x(t) ως τη θέση ενός μονοδιάστατου σωματιδίου τη χρονική στιγμή t, η σχέση (1.5) περιγράφει την αλλαγή της θέσης του σωματιδίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα [t, t+dt]. Τότε, η σχέση (1.5) μας λέει ότι η dx(t)=x(t+dt)-x(t) είναι ανάλογη της χρονικής μεταβολής dt με συντελεστή $\alpha(t, x(t))$. Εναλλακτικά, η σχέση (1.4) μας λέει ότι η ταχύτητα του σωματιδίου $x'(t)$, είναι μια δοθείσα συνάρτηση δύο παραμέτρων, του χρόνου t και της θέσης x(t). Στο παράδειγμα που ακολουθεί [7] (σελ. 132), θα δούμε μια απλή διαφορική εξίσωση και τον τρόπο επίλυσής της:

Παράδειγμα 7 *Υποθέτουμε πως η ταχύτητα $x'(t)$, είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και δίνεται από τη σχέση:*

$$x'(t) = \alpha(t)$$

Να λυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Λύση:

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης, αρκεί να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της, από 0 εως t:

$$\int_0^t x'(s)\,ds = x(t) - x(0) = \int \alpha(s)\,ds$$
$$\Rightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t \alpha(s)\,ds$$

Η εξίσωση του Παραδείγματος 7 είναι η απλούστερη μορφή διαφορικής εξίσωσης, καθώς το δεξί μέλος της δεν εξαρτάται καθόλου από την άγνωστη συνάρτηση x(t).

Στο ακόλουθο παράδειγμα [7] (σελ.133), δίνουμε μια τεχνική επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, τη μέθοδο των **χωριζομένων μεταβλητών**.

Παράδειγμα 8 *Δίνεται η διαφορική εξίσωση (1.4)*

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \alpha(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

Να βρεθεί η λύση της με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών.

Λύση:

Υποθέτουμε πως το δεξί μέλος της εξίσωσης (1.4) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο συναρτήσεων:

$$x'(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(x(t)) \Rightarrow \frac{dx}{\alpha_2(x)} = \alpha_1(t)dt$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{a_2(x)} = \int_0^t \alpha_1(s)\,ds$$

Στο αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας, προκύπτει μια συνάρτηση του x(t) ενώ στο δεξί μια συνάρτηση του t, και με αυτή τη διαδικασία ελπίζουμε να καταλήξουμε σε μια ρητή μορφή της συνάρτησης x(t). Η προσέγγιση αυτή αποδεικνύεται, διαφοροποιώντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης ως διαστήματα των άνω άκρων του ολοκληρώματος. Λαμβάνουμε τότε $\frac{x'(t)}{\alpha_2(x(t))} = \alpha_1(t)$. Εφαρμόζουμε αυτή τη μέθοδο στη διαφορική εξίσωση $x'(t) = cx(t)$ με x(0)≠0 και προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = cx \Rightarrow \frac{dx}{x} = cdt$$

$$\Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = c\int_0^t ds$$

$$\Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} (lnx)'\,dx = ct$$

$$\Rightarrow ln(\frac{x(t)}{x(0)}) = ct \Rightarrow e^{(ln(\frac{x(t)}{x(0)})} = e^{ct}$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0)e^{ct}$$

Κλείνοντας το πρώτο κεφάλαιο, μπορούμε συνοπτικά μέσα από όλα όσα προαναφέρθηκαν να συμπεράνουμε τα εξής σημεία-κλειδιά για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων [7] (σελ. 134):

i. Οι λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης n-τάξης, $n \geq 1$ είναι άπειρες το πλήθος συναρτήσεις.

ii. Προκειμένου να λάβουμε μοναδική λύση, πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$.

iii. Οι ρητές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων είναι η εξαίρεση στον κανόνα. Γενικά, χρειάζεται να βασιστούμε σε αριθμητικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων.

Για περισσότερα παραδείγματα και αναλυτικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων παραπέμπουμε στο [21].

2

Στοχαστικές Διαδικασίες Martingale και Κίνηση Brown

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου μελετάται μια ειδική κλάση των στοχαστικών διαδικασιών, οι διαδικασίες martingale, πάνω στις οποίες στηρίζεται η θεωρία των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών. Επιλέξαμε να αφιερώσουμε το πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού στις διαδικασίες martingale, καθώς είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του στοχαστικού ολοκληρώματος του *Itô*, με το οποίο θα ασχοληθούμε στο τρίτο κεφάλαιο. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, εισάγεται μια πολύ σημαντική στοχαστική διαδικασία, η κίνηση Brown, η οποία είναι βασική για τη στοχαστική ανάλυση και ειδικότερα για τις διαδικασίες διάχυσης, έχει ισχυρή εφαρμογή στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και ταυτόχρονα αποτελεί τη βάση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, σε ότι αφορά μοντέλα συνεχούς χρόνου. Τέλος, μελετώνται κάποιες από τις ιδιότητές της, όπως η ιδιότητα του Markov.

2.1. Στοχαστικές Διαδικασίες

Ας υποθέσουμε πως η συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ δολαρίου και ευρώ κάθε χρονική στιγμή μεταξύ της ενάτης και δεκάτης πρωινής της σημερινής ημέρας, είναι τυχαία. Ως εκ τούτου, μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως μια πραγματοποίηση $X_t(\omega)$ της τυχαίας μεταβλητής X_t και να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της για κάθε $t \in [9,10]$. Για να κάνουμε μια πρόβλεψη στις 10 π.μ για την τιμή $X_{11}(\omega)$ της ισοτιμίας στις 11 π.μ, είναι λογικό να εξετάσουμε την όλη εξέλιξη των τιμών $X_t(\omega)$ μεταξύ 9 π.μ και 10 π.μ. Ένα μαθηματικό μοντέλο που μας βοηθάει να περιγράφουμε τέτοια φαινόμενα ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** [7], [24].

Ορισμός 25 (Στοχαστική Διαδικασία) *Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών* $(X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$ *, ορισμένη σε ένα χώρο* Ω*, τον χώρο καταστάσεων. Το σύνολο T είναι συνήθως ένα διάστημα της μορφής* $[a,b]$ *ή* $[a,\infty]$*, ενώ ο δείκτης t της στοχαστικής διαδικασίας* $X_t(\omega)$*, θα αναφέρεται ως χρόνος. Αν ο χώρος καταστάσεων είναι της μορφής* $\Omega = \{0,1,\ldots\}$ *τότε η στοχαστική διαδικασία θα ονομάζεται διακριτού χώρου καταστάσεων, ενώ αν* $\Omega = \{-\infty,\infty\}$ *η στοχαστική διαδικασία θα καλείται συνεχούς χώρου καταστάσεων.*

Ορισμός 26 (Τροχιά της Στοχαστικής Διαδικασίας) *Μια στοχαστική διαδικασία X είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών:*

i. *Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t η* $X(\cdot,t)$ *είναι μια τυχαία μεταβλητή:*

$$X(\cdot,t) = X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

ii. *Για ένα συγκεκριμένο τυχαίο αποτέλεσμα* $\omega \in \Omega$*, η* $X(\omega,\cdot)$ *είναι μια συνάρτηση του χρόνου t και καλείται* ***τροχιά*** *της στοχαστικής διαδικασίας:*

$$X(\omega,\cdot) : X_t = X_t(\omega), t \in T$$

Σε αυτό το σημείο, θα δώσουμε τον ορισμό των Μαρκοβιανών στοχαστικών διαδικασιών. Η ιδιότητα Markov θα μελετηθεί στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, ειδικεύοντας την για την κίνηση Brown. Επιπλέον επεξήγηση μπορεί να αναζητηθεί στο [24].

Ορισμός 27 (Μαρκοβιανή Στοχαστική Διαδικασία) *Η στοχαστική διαδικασία* $(X_t\ , t \in T)$ *θα λέγεται Μαρκοβιανή όταν για κάθε* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$ *και* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *,* $n < 2$ *ισχύει η σχέση*

$$\mathbf{P}[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_n-1} = x_{n-1}, X_{t_n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1] = \mathbf{P}[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_n-1} = x_{n-1}]$$

Οι μαρκοβιανές διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων καλούνται αλλιώς και αλυσίδες Markov.

Γράφοντας $X_t = k$ δηλώνουμε πως η στοχαστική διαδικασία X_t βρίσκεται στην κατάσταση k τη χρονική στιγμή t και θα ονομάζουμε πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης την πιθανότητα:

$$\mathbf{p}_{ij}[s,t] = \mathbf{P}[X_t = j | X_s = i] \text{ για κάθε } 0 \leq s < t \text{ και } i, j \in \Omega$$

Τέλος, η διαδικασία X_t θα λέγεται **ομογενής** με στάσιμες πιθανότητες μεταπήδησης, αν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{p}_{ij}[s,t] = \mathbf{P}[X_t = j | X_s = i] = \mathbf{p}_{ij}[0, t-s]$$

- Πεπερασμένης Διάστασης Κατανομές [finite-dimensional distribution, (fidis)]

Σε αντιστοιχία με τις τυχαίες μεταβλητές, έτσι και στις στοχαστικές διαδικασίες, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τα μη τυχαία χαρακτηριστικά τους όπως για παράδειγμα την κατανομή τους, ωστόσο η μελέτη αυτή είναι λίγο πιο περίπλοκη συγκριτικά με τη μελέτη των χαρακτηριστικών μιας τυχαίας μεταβλητής. Πράγματι, μια μη τετριμμένη στοχαστική διαδικασία X_t, $t \in T$, με T να είναι ένα άπειρο σύνολο δεικτών, μπορεί να νοηθεί ως μια άπειρη συλλογή (οικογένεια) τυχαίων μεταβλητών X_t, $t \in T$. Δεδομένου ότι οι τιμές της X_t είναι συναρτήσεις του T, η κατανομή της θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολα ενός ορισμένου χώρου συναρτήσεων, δηλαδή

$$\mathbf{P}(X \in A)\,, A \in F \tag{2.1}$$

με F να είναι μια συλλογή κατάλληλων υποσυνόλων αυτού του χώρου συναρτήσεων. Η παρατήρηση κλειδί για αυτή τη μελέτη είναι ότι μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συλλογή τυχαίων διανυσμάτων και έτσι καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 28 (Πεπερασμένης Διάστασης Κατανομές) *Οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές (fidis) της στοχαστικής διαδικασίας X_t είναι οι κατανομές των πεπερασμένης διάστασης διανυσμάτων $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$, $t_1,\ldots,t_n \in T$ για κάθε δυνατή επιλογή χρονικών στιγμών $t_1,\ldots,t_n \in T$ και για κάθε $n \geq 1$.*

Οι στοχαστικές διαδικασίες, διαχωρίζονται σε κατηγορίες βάσει διαφόρων κριτηρίων και ένα από αυτά είναι οι fidis, για τις οποίες αποδεικνύεται πως καθορίζουν την κατανομή της X_t. Συνεπώς, κατά αυτή την έννοια ορίζουμε ως κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας μια συλλογή από fidis ([7] σελ. 26). Για παράδειγμα, μια απλή διαδικασία Gauss (ή κανονική διαδικασία) στο T=[0,1], αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυποποιημένες κανονικές τυχαίες μεταβλητές δηλαδή:

$$X_{t_1},\ldots,X_{t_n} \sim \mathbf{N}(0,1)$$

Τότε, οι fidis χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις κατανομής:

$$\mathbf{P}(X_{t_1} \leq x_1,\ldots,X_{t_n} \leq x_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} \leq x_1)\ldots\mathbf{P}(X_{t_n} \leq x_n) = \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)$$

$$\text{με } 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1 \text{ και } (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Μέση τιμή, Διακύμανση και Συνδιακύμανση

Για ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ γνωρίζουμε πως ισχύει για τη μέση τιμή του, ότι ισχύει και για τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Δηλαδή:

$$\mathbf{E}[X] = (\mathbf{E}[X_1],\ldots,\mathbf{E}[X_n])$$

και για τον πίνακα συνδιακύμανσης ισχύει

$$\sum_x = (cov(X_i,X_j), i, j = 1,\ldots,n)$$

Μια στοχαστική διαδικασία X=$X_t, t \in T$ μπορεί να θεωρηθεί όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ως μια συλλογή τυχαίων διανυσμάτων $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$. Για κάθε ένα από αυτά τα διανύσματα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και το πίνακα συνδιακύμανσης τους, ή εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτές τις ποσότητες ως συναρτήσεις του $t \in T$, οπότε και προκύπτουν τα εξής:

i. Η συνάρτηση της μέσης τιμής της X δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_x(t) = \mu_{x_t} = \mathbf{E}[X_t] \tag{2.2}$$

ii. Η συνάρτηση της συνδιακύμανσης της X δίνεται από τη σχέση:

$$c_x(t,s) = cov(X_t, X_s) = \mathbf{E}[(X_t - \mu_x(t))(X_s - \mu_x(s))]\ , t, s \in T \tag{2.3}$$

iii. Η συνάρτηση της διακύμανσης δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_x^2(t) = c_x(t,t) = V(X_t)\ , t \in T \tag{2.4}$$

2.1.1. Στοχαστικές Διαδικασίες Martingale

Στην παράγραφο αυτή, μελετάμε τις διαδικασίες martingale. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της **διήθησης**, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια αύξουσα δομή πληροφορίας στο πέρασμα του χρόνου. Βάσει του [16], ο αυστηρός ορισμός της διατυπώνεται ως εξής:

Ορισμός 29 (Διήθηση) *Έστω $\mathcal{F}_t$ μια οικογένεια από σ-άλγεβρες για την οποία ισχύει η εξής συνθήκη:*

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Τότε η $\mathcal{F}_t$ θα ονομάζεται διήθηση (filtration).

Μια ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια είναι αυτή της **φυσικής διήθησης**, η οποία είναι η διήθηση που παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία Y_t, και όσο περνάει ο χρόνος, τόσο αυξάνεται η διαθέσιμη πληροφορία για τη διαδικασία αυτή. Συνεχίζουμε, δίνοντας τον ορισμό των προσαρμοσμένων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 30 (Προσαρμοσμένες Τυχαίες Μεταβλητες) *Η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών Y_t θα λέγεται προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_i$, αν η Y_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε t.*

Δηλαδή, όλη η σχετική με την στοχαστική μεταβλητή Y_t πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή t, περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$.

Παρατήρηση: Από την ερμηνεία της φυσικής διήθησης και τον Ορισμό 30 των προσαρμοσμένων τυχαίων μεταβλητών, παρατηρούμε πως κάθε στοχαστική διαδικασία Y_t είναι προσαρμοσμένη στη φυσική της διήθηση.

Έχοντας εισάγει αυτές τις βασικές έννοιες μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον ορισμό των στοχαστικών διαδικασιών martingale καθώς και των σχετικών με τις martingales, supermartingale και submartingale. Να σημειώσουμε πως πολλές φορές σε ότι ακολουθεί, θα εμφανίζεται η έκφραση *σχεδόν βέβαια* (σ.β), με την οποία εννοούμε πως μία ιδιότητα ισχύει σε όλα τα σύνολα, εκτός από αυτά μηδενικού μέτρου ([16], σελ 17).

Ορισμός 31 (Διαδικασία Martingale) *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η διήθηση $\mathcal{F}_t$ στην $\mathcal{F}$ με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ και η οικογένεια Y_t των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t$, τότε η Y_t είναι διαδικασία martingale αν πληρούνται οι εξής δυο συνθήκες:*

$$\mathbf{E}[|Y_t|] < \infty \text{ και } \mathbf{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] = Y_s \text{ σχεδόν βέβαια}, \quad s \leq t \tag{2.5}$$

Σχόλιο: Από τον παραπάνω Ορισμό, καταλαβαίνουμε πως για να είναι η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών Xt διαδικασία martingale, απαραίτητη προϋπόθεση για την Yt είναι να είναι ολοκληρώσιμη δηλαδή η μέση της τιμή να υπάρχει και να είναι πεπερασμένη: $\mathbf{E}[|Y_t|] < \infty$

Επομένως, για μια οικογένεια martingale Y_t, αν γνωρίζουμε την πληροφορία που περιέχεται στην διήθηση $\mathcal{F}_s$, τότε η τιμή Y_s είναι η βέλτιστη δυνατή πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της Y_t. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των martingales ως προς τη μέση τιμή, εκφράζεται μέσω του ακόλουθου Θεωρήματος:

Θεώρημα 1 *Για μια στοχαστική διαδικασία martingale Y_t θα ισχύει ότι:*

$$\mathbf{E}[Y_t] = \mathbf{E}[Y_0] \text{ και } \mathbf{E}[Y_t - Y_s] = 0$$

Διαισθητικά βάσει του ορισμού των διαδικασιών martingale, είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως για μια οικογένεια **supermartingale** Y_t θα ισχύει

$$\mathbf{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] \leq Y_s \text{ σχεδόν βέβαια}, \quad s \leq t \tag{2.6}$$

δηλαδή, δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται στην διήθηση $\mathcal{F}_s$, η βέλτιστη πρόβλεψη για την X_t θα είναι το πολύ ίση με την τιμή της Y_s. Συλλογιζόμενοι με το ίδιο σκεπτικό, για μια οικογένεια **submartingale** θα ισχύει

$$\mathbf{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] \geq Y_s \text{ σχεδόν βέβαια}, \quad s \leq t \tag{2.7}$$

δηλαδή, δεδομένης της πληροφορίας της διήθησης $\mathcal{F}_s$, η βέλτιστη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή της Y_t θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την τιμή Y_s. Για να γίνουμε πιο ξεκάθαροι, δίνουμε στο t την έννοια του χρόνου και θεωρούμε τη Y_t ως μια στοχαστική διαδικασία και την διήθηση $\mathcal{F}_t$ ως τη δεδομένη πληροφορία για τη συμπεριφορά της διαδικασίας, από τη στιγμή εκκίνησης της παρατήρησης t=0 έως τη χρονική στιγμή t. Τότε αν η διαδικασία Y_t είναι martingale, δεδομένου ότι γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της μέχρι τη χρονική στιγμή s, η βέλτιστη δυνατή πρόβλεψη για την Y_t για κάποια χρονική στιγμή t > s είναι η Y_s, δηλαδή η τιμή της διαδικασίας τη στιγμή λήξης της περιόδου παρατήρησης.

Έχοντας αναφερθεί σε αυστηρούς ορισμούς και διαισθητικές έννοιες, δίνουμε ένα παράδειγμα μιας διαδικασίας martingale, ώστε να γίνουν κατανοητά τα προαναφερθέντα.

Παράδειγμα 9 *Υποθέτουμε τις διαδοχικές ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος, δηλαδή ενός κέρματος στο οποίο τα ενδεχόμενα* $A_i = \{$*Το αποτέλεσμα της i ρίψης είναι Κορώνα*$\}$,
$B_i = \{$*Το αποτέλεσμα της i ρίψης είναι Γράμματα*$\}$, *είναι ισοπίθανα. Θεωρούμε επιπλέον πως ο παίκτης κερδίζει 1 ευρώ αν φέρει Γράμματα, ενώ χάνει 1 ευρώ αν φέρει Κορώνα. Ορίζουμε για την n-οστη ρίψη τις τυχαίες μεταβλητές* Y_n, S_n *με*

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{αν το αποτέλεσμα είναι Γράμματα} \\ -1 & \text{αν το αποτέλεσμα είναι Κορώνα} \end{cases}$$

να δηλώνει το κέρδος της i-ρίψης και

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ να είναι το συνολικό κέρδος των n ρίψεων.}$$

Να δείξετε οτι S_n *είναι μια στοχαστική διαδικασία martingale.*

Λύση:

Θεωρούμε ως $\mathcal{F}_n$ την σ -άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $Y_1, \ldots, Y_n$. Η τυχαία μεταβλητή Y_{n+1} είναι ανεξάρτητη των $Y_1, \ldots, Y_n$ και επομένως ανεξάρτητη της σ - άλγεβρας $\mathcal{F}_n$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας επιπλέον το γεγονός πως η τυχαία μεταβλητή S_n είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη, ισχύει ότι

$$\mathbf{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[S_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[S_n|F_n] + \mathbf{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbf{E}[Y_{n+1}] = S_n$$

Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε λέγοντας πως εφόσον $\mathbf{E}[S_m|\mathcal{F}_n] = S_n$ για κάθε m > n και δεδομένου ότι $\mathbf{E}[|S_n|] < \infty$, η S_n είναι μια διαδικασία martingale. Σε σύνδεση με όσα προαναφέρθηκαν, αυτό σημαίνει πως κατά τη n+1-οστή ρίψη, ο παίκτης αναμένει να έχει την ίδια περιουσία που είχε και στην n-οστή ρίψη, δεδομένου του παρελθόντος του παιχνιδιού.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε πως μια διαδικασία martingale δεν ορίζεται μόνο ως προς μια διήθηση, αλλά και ως προς ένα μέτρο πιθανότητας, όπως θα αποδειχθεί στο ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 10 *Έστω η ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή Y, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, *και η διήθηση* $\mathcal{F}_n$ *με* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$. *Να δειχθεί ότι η στοχαστική διαδικασία* $X_n = \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ *είναι μια διαδικασία martingale.*

Λύση:

Η X_n από την κατασκευή της της είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη και σύμφωνα με τον Ορισμό 31 , για να είναι η $X_n = \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ διαδικασία martingale, θα πρέπει αρχικά η X_n να είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ισχύει ότι $\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$ το οποίο αποδεικνύεται ως εξής:

$$\mathbf{E}[|X_n|] = \mathbf{E}[|\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_n]|] \leq \mathbf{E}[|Y|]$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[|X_n|] \leq \mathbf{E}[|Y|] < \infty$$

Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο, αρκεί πλέον να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{E}[X_s|\mathcal{F}_n] = X_n$$

το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής:

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{F}_2]\,|\,\mathcal{F}_1] = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_1] \text{ για } \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$$

οπότε στην προκειμένη περίπτωση έχουμε για $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_s$ ότι:

$$\mathbf{E}[X_s|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y\,|\,\mathcal{F}_s]\,|\,\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[Y\,|\,\mathcal{F}_n] = X_n$$

και συνεπώς η διαδικασία X_n είναι διαδικασία martingale.

Δηλαδή στις περισσότερες των περιπτώσεων, μια διαδικασία X_t μπορεί να μετατραπεί σε διαδικασία martingale, προσαρμόζοντάς την σε ένα κατάλληλο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$, χωρίς αυτό να συμβαίνει πάντα. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, στο Παράδειγμα 9 δείξαμε για τη στοχαστική διαδικασία Y_n ότι είναι martingale υπό την προϋπόθεση του αμερόληπτου κέρματος, ωστόσο η ίδια διαδικασία, δεν είναι martingale κάτω από την υπόθεση της μεροληψίας, δηλαδή υπό το μέτρο πιθανότητας Q που ορίζει ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ισοπίθανα, δηλαδή $Q(A) \neq Q(B) \neq \frac{1}{2}$.

2.1.2. Χρόνοι Στάσης και Επιλεκτική Στάση

Στην παράγραφο αυτή, ασχολούμαστε με μια ειδική και πολύ σημαντική κατηγορία τυχαίων μεταβλητών, τους χρόνους στάσης, οι οποίοι στις περισσότερες των περιπτώσεων αντιστοιχούν στην πρώτη φορά που συμβαίνει ένα ενδεχόμενο. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε μια πολύ χρήσιμη τεχνική της στοχαστικής ανάλυσης, την επιλεκτική στάση (optional stopping), η οποία διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς ποσοτήτων σχετικών με χρόνους στάσης([16] σελ. 58-60).

Ορισμός 32 (Χρόνος Στάσης) *Έστω I ένα όχι κατ' ανάγκη διακριτό σύνολο δεικτών και $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ διήθηση επί ενός συνόλου A. Τότε, ως χρόνος στάσης (stopping time) σχετικά με τη διήθηση $\mathcal{F}_t$ ορίζεται η απεικόνιση $T : A \longrightarrow I$ για τη οποία ισχύει ότι:*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ κάθε } t \in I$$

Παρατήρηση: Από τον παραπάνω ορισμό αντιλαμβανόμαστε πως η απεικόνιση $T : A \longrightarrow I$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Επιπλέον, ορίζοντας στο Παράδειγμα 9 ως T την πρώτη φορά που ο παίκτης λαμβάνει Z ευρώ, η τυχαία μεταβλητή T θα είναι ένας χρόνος στάσης.

Δυο κατηγορίες των χρόνων στάσης είναι ο χρόνος εισόδου T^G και ο χρόνος εξόδου τ^G μιας στοχαστικής διαδικασίας σε και από ένα σύνολο G αντίστοιχα. Οι αυστηροί ορισμοί τους δίνονται παρακάτω:

Ορισμός 33 (Χρόνος Εισόδου) *Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, ο χρόνος εισόδου μια διαδικασίας X_t σε ένα σύνολο G, είναι ένας χρόνος στάσης που εκφράζεται από τη σχέση:*

$$T^G(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in G\}$$

Ορισμός 34 (Χρόνος Εξόδου) *Ο χρόνος εξόδου μια διαδικασίας X_t από ένα σύνολο G είναι ένας χρόνος στάσης που εκφράζεται από τη σχέση:*

$$T^G(\omega) = inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \notin G\}$$

Παρατήρηση: Αν οι τυχαίες μεταβλητές T , S είναι χρόνοι στάσης, τότε χρόνοι στάσης θα είναι και οι:

$$S + T \ , S \vee T \ , S \wedge T \ , t \wedge T$$

όπου $S \wedge T = min(S,T)$ και $S \vee T = max(S,T)$

Έχοντας ορίσει τους χρόνους στάσης, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επιλεκτική στάση, η οποία συνδέεται άμεσα με αυτούς, καθώς μας πληροφορεί σχετικά με το τι συμβαίνει αν μια διαδικασία martingale σταματήσει σε κάποιο χρόνο στάσης. Τέτοιες διαδικασίες ονομάζονται σταματημένες διαδικασίες, και όπως θα δούμε και στον ορισμό που ακολουθεί, μια σταματημένη διαδικασία X_t^T έχει μέχρι το χρόνο στάσης T τις ίδιες τροχιές με την X_t, ενώ από το χρόνο στάσης και μετά η διαδικασία X_t^T παγώνει στην τιμή X_T :

Ορισμός 35 (Σταματημένη Διαδικασία) *Για ένα χρόνο στάσης T ορίζεται ως σταματημένη, η διαδικασία:*

$$X_t^T := X_{t \wedge T} = \begin{cases} X_t(\omega) & t < T(\omega) \\ X_T(\omega) & t \geq T \end{cases}$$

Θεώρημα 2 *Έστω X_t μια διαδικασία martingale και T χρόνος στάσης ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$. Τότε, η σταματημένη διαδικασία $X_t^T = X_{t \wedge T}$ είναι και αυτή μια διαδικασία martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$, και κατά συνέπεια για τη μέση τιμή θα ισχύει:*

$$\mathbf{E}[X_{t \wedge T}] = \mathbf{E}[X_0]$$

Έχοντας λάβει ένα στέρεο γνωστικό υπόβαθρο για τις διαδικασίες martingale, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επόμενη παράγραφο, που ασχολείται με την μελέτη της κίνησης Brown και των ιδιοτήτων της.

2.2. Η Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown πήρε το όνομά της από τον βιολόγο Robert Brown, του οποίου το ερευνητικό έργο εντοπίζεται περίπου στο 1820, ενώ αργότερα ο Norbert Wiener, ήταν ο πρώτος ο οποίος έθεσε μια σταθερή μαθηματική βάση στην κίνηση αυτή. Ξεκινάμε δίνοντας τις έννοιες των στάσιμων και των ανεξάρτητων μεταβολών μια στοχαστικής διαδικασίας ([7] σελ.30), δυο έννοιες που καθορίζουν τόσο την κίνηση Brown όσο και την τυπική κίνηση Brown, με τις οποίες ασχολούμαστε παρακάτω.

Έστω T ένα διάστημα: $T \subset \mathbb{R}$ και X_t, $t \in T$ μια στοχαστική διαδικασία, τότε:

Ορισμός 36 (Στάσιμες Μεταβολές) *Η στοχαστική διαδικασία X_t έχει στάσιμες μεταβολές αν:*

$$X_t - X_s = (d)X_{t+h} - X_{s+h}$$

για κάθε $t,s \in T$ καθώς και $h, h+t, h+s \in T$.

Ορισμός 37 (Ανεξάρτητες μεταβολές) *Η στοχαστική διαδικασία X_t έχει ανεξάρτητες μεταβολές αν για κάθε επιλογή $t_i \in T$ με $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ και $n \geq 1$ οι μεταβολές $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Ορισμός 38 (Κίνηση Brown) *Μια στοχαστική διαδικασία B_t με τιμές στο $\mathbb{R}$ και τις κάτωθι τρεις ιδιότητες:*

i. Για $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι μεταβολές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

ii. Για s,t ≥ 0 οι μεταβολές ακολουθούν την κανονική κατανομή, δηλαδή

$$\mathbf{P}(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}} e^{(-\frac{|x|^2}{2t})}$$

όπου A ένα σύνολο Borel.

iii. Οι τροχιές της διαδικασίας είναι συνεχείς με πιθανότητα 1.

*θα λέγεται **Κίνηση Brown**.*

Να τονίσουμε σε αυτό το σημείο πως οι ιδιότητες i. , ii. , iii. ορίζουν μια και μοναδική στοχαστική διαδικασία([16] σελ. 92).

Ορισμός 39 (Τυπική Κίνηση Brown) *Μια στοχαστική διαδικασία B_t, $t \in [0, \infty)$ θα λέγεται τυπική κίνηση Brown αν ικανοποιούνται οι κάτωθι συνθήκες:*

i. $B_0 = 0$ δηλαδή η κίνηση ξεκινάει τη χρονική στιγμή t = 0.

ii. Οι μεταβολές της είναι στάσιμες και ανεξάρτητες.

iii. Για κάθε t > 0 η διαδικασία B_t ακολουθεί την κανονική κατανομή:

$$B_t \sim \mathbf{N}(0, t).$$

iv. Έχει συνεχείς τροχιές: "δεν παρουσιάζονται άλματα".

Να σημειώσουμε πως η κίνηση Brown (όπως και η τυπική κίνηση Brown) δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Από τους παραπάνω ορισμούς, είναι άμεσα εξαγόμενο το συμπέρασμα πως για τη συνάρτηση μέσης τιμής της κίνησης Brown θα ισχύει

$$\mathbf{E}[B_t] = \mu_{B_t} = 0$$

Για τη συνάρτηση συνδιακύμανσης, θα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες και πιο συγκεκριμένα οι μεταβολές $B_s - B_0 = B_s$ και $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητες για t > s, οπότε λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} c_B(t,s) = \mathbf{E}[(B_t - \mu_{B_t})(B_s - \mu_{B_s})] &= \mathbf{E}[[(B_t - B_s) + B_s]B_s] \\ &= \mathbf{E}[[(B_t - B_s)B_s] + \mathbf{E}[B_s^2] \\ &= \mathbf{E}[(B_t - B_s)]\mathbf{E}[B_s] + s \\ &= 0 + s = 0\ , \quad 0 \le s < t \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι μια διαδικασία Gauss χαρακτηρίζεται από τις συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιακύμανσης, μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό([7] σελ. 35):

Ορισμός 40 (Εναλλακτικός ορισμός της Κίνησης Brown) *Η κίνηση Brown είναι μια διαδικασία Gauss για την οποία ισχύει ότι*

$$\mu_{B_t} = 0 \text{ και } c_B(t,s) = min(s,t)$$

Η κίνηση Brown επάγει το μέτρο Wiener που συμβολίζεται με μ για το οποίο ισχύει:

$$\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \ldots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \qquad (2.8)$$

όπου

$$x_0 = x\ ,\ t_1 = 0 \text{ και } \mathbf{p}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}} e^{(-\frac{|y-x|^2}{2t})}$$

Η σχέση (2.8) εκφράζει την πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία στα $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ τις χρονικές στιγμές t_i και θεωρώντας τα A_i ως υποσύνολα του $\mathbb{R}$, είναι προφανές πως η σχέση (2.8) εκφράζει την πιθανότητα η κίνηση Brown να βρίσκεται τις χρονικές στιγμές t_i σε συγκεκριμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Το αριστερό μέλος της (2.8) εκφράζεται αλλιώς ως

$$\mathbf{P}(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n)$$

είναι η πεπερασμένης διάστασης κατανομή της και παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή του μέτρου μ ([16] σελ. 91-92).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της Κίνησης Brown, είναι αυτή της αυτοομοιότητας ([7] και [16]). Μια στοχαστική διαδικασία X_t, $t \in [0,\infty)$ η οποία περιέχει μία κίνηση Brown, θα λέμε ότι είναι H-αυτοόμοια για κάποιο H > 0 αν οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$(T^H B_{t_1}, \ldots, T^H B_{t_n}) = (d)(B_{T_{t_1}}, \ldots, B_{T_{t_n}}) \tag{2.9}$$

για κάθε $T > 0$ και οποιαδήποτε επιλογή των $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ και $n \geq 1$. Με οδηγό λοιπόν τη σχέση (2.9) μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για την κίνηση Brown:

Ορισμός 41 (Ιδιότητα αυτοομοιότητας της κίνησης Brown) *Η κίνηση Brown είναι 0.5-αυτοόμοια, δηλαδή ισχύει ότι*

$$(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, \ldots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n}) = (d)(B_{T_{t_1}}, \ldots, B_{T_{t_n}}) \tag{2.10}$$

για κάθε $T > 0$ και οποιαδήποτε επιλογή των $t_i \geq 0$,$i = 1, \ldots, n$ και $n \geq 1$.

-Μονοδιάστατη Κίνηση Brown

Έστω B_t μια μονοδιάστατη κίνηση Brown, τότε

$$\mathbf{E}[f(B_t)] = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{(-\frac{|y-x\delta|^2}{2t})} \, dy$$

όπου

$$\delta = \begin{cases} 0 & B_0 = 0 \\ 1 & B_0 = x \end{cases}$$

Παρατηρούμε δηλαδή πως η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο μ που ορίζει κάθε φορά η κίνηση Brown, ανάλογα με τη χρονική στιγμή εκκίνησης της.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί ([16] σελ.93), θα δείξουμε πως οι οικογένειες της μονοδιάστατης τυπικής κίνησης Brown $\{B_{st}, s \geq 0\}$ και $\{t^{\frac{1}{2}} B_s, s \geq 0\}$ είναι ισόνομες:

Παράδειγμα 11 *Έστω η τυπική κίνηση Brown B_t,για την οποία ισχύει ότι $B_0 = 0$ και ας θεωρήσουμε τις οικογένειες $\{B_{st}, s \geq 0\}$ και $\{t^{\frac{1}{2}} B_s, s \geq 0\}$. Να δειχθεί ότι οι δύο αυτές οικογένειες, έχουν την ίδια πεπερασμένης διάστασης κατανομή:*

$$\mathbf{P}[B_{st} \leq \alpha] = \frac{1}{\sqrt{2\pi st}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2st}} \, dx$$

Λύση:

Για την επίλυση του ολοκληρώματος, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= t^{-\frac{1}{2}} x \\
&\Rightarrow \quad x = x_1 t^{\frac{1}{2}} \\
&\Rightarrow \quad dx = t^{\frac{1}{2}} dx_1
\end{aligned}
$$

Για τα άκρα του ολοκληρώματος παρατηρούμε πως αλλάζει το άνω άκρο και λαμβάνει την τιμή $x_1 = \alpha\, t^{-\frac{1}{2}}$, ενώ το κάτω άκρο παραμένει ως έχει. Συνεπώς προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}[B_{st} \leq \alpha] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi st}} \int_{-\infty}^{\alpha t^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{{x_1}^2}{2s}} t^{\frac{1}{2}} \, dx_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\alpha t^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{{x_1}^2}{2s}} \, dx_1 \\
&= \mathbf{P}[B_s \leq \alpha t^{-\frac{1}{2}}] \\
&= \mathbf{P}[t^{\frac{1}{2}} B_s \leq \alpha]
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Η Κίνηση Brown ως Martingale

Όπως θα δείξουμε και στο Θεώρημα που ακολουθεί, η κίνηση Brown είναι και αυτή μια διαδικασία martingale ως προς κάποια συγκεκριμένη διήθηση, και συνεπώς θα οφείλει πολλές από τις ιδιότητες της στο γεγονός αυτό.

Θεώρημα 3 *Η κίνηση Brown B_t είναι μια διαδικασία martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$.*

Απόδειξη

Για να είναι η B_t martingale, θα πρέπει βάσει του Ορισμού 31 της διαδικασίας martingale να πληρούνται οι εξής δύο συνθήκες:

i. Η μέση τιμή της κίνησης να υπάρχει και να είναι πεπερασμένη, δηλαδή :$\mathbf{E}[|B_t|] < \infty$

ii. $\mathbf{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$, $s \leq t$.

Θα δείξουμε αρχικά λοιπόν πως $\mathbf{E}[|B_t|] < \infty$:

$$\mathbf{E}[|B_t|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{(-\frac{|x|^2}{2t})}\, dx$$

Όμως η συνάρτηση $f(x) = |x|e^{(-\frac{|x|^2}{2t})}$ είναι άρτια άρα θα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{(-\frac{|x|^2}{2t})}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} x \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{(-\frac{x^2}{2t})}\, dx$$

και συνεπώς

$$\mathbf{E}[|B_t|] = 2\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \int_0^{\infty} x e^{(-\frac{x^2}{2t})}\, dx = \frac{2t}{(2\pi t)^{1/2}} \int_0^{\infty} (-e^{(-\frac{x^2}{2t})})'\, dx$$

$$= \frac{2t}{(2\pi t)^{1/2}} (\lim_{x\to\infty}(-e^{(-\frac{x^2}{2t})}) - \lim_{x\to 0}(-e^{(-\frac{x^2}{2t})}))$$

$$= \frac{2t}{(2\pi t)^{1/2}}(0+1) = \frac{2t}{(2\pi t)^{1/2}} < \infty$$

Για να είναι η B_t martingale αρκεί πλέον να δείξουμε ότι: $\mathbf{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$, για $s \leq t$

$$\mathbf{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t + B_s - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[B_s|\mathcal{F}_s]$$

Η μεταβολή $B_t - B_s$, όπως έχουμε ήδη δει στον ορισμό της (τυπικής) κίνησης Brown, είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ άρα

$$\mathbf{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t - B_s]$$

και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mathbf{E}[B_t - B_s]$=0. Επιπλέον η B_s είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_s$ και συνεπώς $\mathbf{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$. Καταλήγουμε λοιπόν στην ισότητα

$$\mathbf{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$$

οπότε και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Η ακόλουθη παρατήρηση, είναι στην ουσία ένας σχολιασμός πάνω τις ιδιότητες των μεταβολών της κίνησης Brown και γενικότερα πάνω σε ότι έχει μέχρι στιγμής αναφερθεί για αυτή, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί και ως εισαγωγή στην ιδιότητα Markov της κίνησης Brown με την οποία θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο:

Παρατήρηση: Από την συνθήκη ii του Ορισμού 38 της κίνησης Brown προκύπτει ότι

$$\mathbf{P}(B_t - B_s \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{(-\frac{x^2}{2(t-s)})}$$

άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ = $B_t - B_s$ είναι η συνάρτηση $\mathbf{p}(t-s,0,x)$. Από αυτό το αποτέλεσμα, και σε συνδυασμό με την επεξήγηση της σχέσης (2.8) συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{E}[f(B_t - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\, dx$$

Δεδομένου ότι οι μεταβολές ακολουθούν την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ =0 και $\sigma^2 = t - s$ θα ισχύει ότι

$$\mathbf{E}(X) = 0 \text{ και } \mathbf{E}(X^2) = t - s$$

Έστω η σ- άλγεβρα $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ η οποία παράγεται από την κίνηση Brown μέχρι τη χρονική στιγμή s. Τότε λόγω της ιδιότητας i. του Ορισμού 38, αλλά και των ιδιοτήτων της υπό συνθήκη μέσης τιμής:

$$\mathbf{E}[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[(B_t - B_s)] = 0 \text{ και } \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

Ένα γεγονός στο οποίο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή, είναι το ότι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$ είναι η μεταβολή $B_t - B_s$ και όχι η ίδια η κίνηση. Συνεπώς, ισχύει:

$$\mathbf{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$$

2.2.1. Η Ιδιότητα Markov της Κίνησης Brown

Η ιδιότητα Markov καθώς και η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι δύο χρήσιμα εργαλεία τα οποία ευκολύνουν κατά πολύ υπολογισμούς σχετικούς με την κίνηση Brown([16]). Παραδείγματος χάρη, κάνοντας χρήση της ιδιότητας Markov μπορούμε να να απλοποιήσουμε δεσμευμένες ως προς κάποια διήθηση σχετική με την ιστορία της κίνησης Brown μέσες τιμές. Επιπλέον, εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή στην αρχή της ανάκλασης, μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές παραγώγων συμβολαίων με φράγματα (barrier options). Η κίνηση Brown έχει επίσης την ισχυρή ιδιότητα Markov, που είναι στην ουσία ίδια με την ιδιότητα Markov με μόνη διαφορά ότι επεκτείνεται και στους τυχαίους χρόνους στάσης. Βέβαια η κίνηση Brown δεν είναι η μόνη διαδικασία με αυτές τις ιδιότητες, ωστόσο στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ασχολούμαστε κυρίως με αυτή.

Κάνοντας μια πρώτη προσπάθεια να εξηγήσουμε την ιδιότητα Markov της κίνησης Brown, ας θεωρήσουμε την μεταβολή $B_{t+s} - B_s$ της κίνησης B_t για κάποιο $s \geq 0$. Από τον Ορισμό 38 η μεταβολή $B_{t+s} - B_s$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια νέα κίνηση Brown με μέση τιμή μ=0 και διασπορά σ^2=(t+s)-s=t, το οποίο με απλά λόγια σημαίνει πως η διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι ακριβώς ίδια με την τυπική κίνηση Brown που τρέχει για χρόνο t. Δηλαδή η **ιδιότητα Markov** προσδίδει στη κίνηση Brown την **ιδιότητα έλλειψης μνήμης** και συνεπώς για την διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ η εξέλιξη της από τη χρονική στιγμή s και μετά θα εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή B_s. Θα προσπαθήσουμε τώρα, κάνοντας χρήση τόσο του Ορισμού 38 της κίνησης Brown όσο και της δεσμευμένης μέσης τιμής και των ιδιοτήτων της, να ορίσουμε σε πιο αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο την ιδιότητα Markov.

Έστω η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, η οποία παράγεται από την κίνηση Brown ως τη χρονική στιγμή s, και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που καθιστά την τυχαία μεταβλητή B_r, (r≤ s) μετρήσιμη. Η $\mathcal{F}_s$ περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με τη συμπεριφορά της κίνησης Brown ως τη χρονική στιγμή s. Θεωρούμε επιπλέον την φραγμένη συνάρτηση f, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, και λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown από την $\mathcal{F}_s$, θα ισχύει:

$$\mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{(-\frac{y^2}{2t})}\,dy$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{E}_x[f(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s]$$

και δεδομένου ότι

i. η μεταβολή $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$

ii. η τιμή B_s γνωστή μέχρι τη χρονική στιγμή s,

θα ισχύει:

$$\mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s + z)]$$

όπου z η τιμή της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή s: $B_s = z$. Όμως, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μεταβολή $B_{t+s} - B_s$, είναι η τυπική κίνηση Brown η οποία τρέχει για χρόνο (t+s)-s=t. Συνεπώς η διαδικασία $B_{t+s} - B_s + z$ είναι ισόνομη με μια κίνηση Brown η οποία ξεκινάει τη χρονική στιγμή z και τρέχει για χρόνο t. Άρα:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x[f(B_{t+s} - B_s + z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y+z)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}}\,dy \\ &= \mathbf{E}_z[f(B_t)] = \mathbf{E}_{B_s}[f(B_t)]\end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια έκφραση της ιδιότητας Markov της κίνησης Brown:

$$\mathbf{E}_x[f(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_{B_s}[f(B_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{(y-B_s)^2}{2t}}\,dy \tag{2.11}$$

Παρατήρηση: Μια εναλλακτική έκφραση για την ιδιότητα Markov της κίνησης Brown είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{E}_x[f(B_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_{B_s}[f(B_{t-s})] \quad s \leq t$$

η οποία πρακτικά δηλώνει πως αν ζητάμε να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t έχοντας γνώση της παρελθοντικής συμπεριφοράς της έως τη χρονική στιγμή s, μπορούμε ισοδύναμα να υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας νέας κίνησης Brown B_s, με σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή s (στην ουσία τη χρονική στιγμή λήξης της παρατήρησης για την προηγούμενη κίνηση Brown B_t) και χρονική διάρκεια t-s. Δηλαδή, η παρελθοντική συμπεριφορά πριν τη χρονική στιγμή s της έναρξης της νέας κίνησης Brown, δεν χρησιμεύει πουθενά (η ιδιότητα έλλειψης μνήμης).

2.2.2. Παραγόμενες από την Κίνηση Brown Διαδικασίες

Πολλές στοχαστικές διαδικασίες, πρακτικής σημασίας, παράγονται από την κίνηση Brown. Στα πλαίσια αυτής της παραγράφου,θα μελετήσουμε την τυπική γέφυρα του Brown και την κίνηση Brown με μετατόπιση (drift) και θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην τρίτη παραγόμενη διαδικασία, τη γεωμετρική κίνηση Brown. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με παραγόμενες διαδικασίες από την κίνηση Brown, παραπέμπουμε στο [7] (σελ. 40-44). Σε ότι ακολουθεί σε αυτή την παράγραφο, θα θεωρήσουμε ως B_t την τυπική κίνηση Brown.

- Η Τυπική Γέφυρα του Brown

Έστω η στοχαστική διαδικασία $X_t = B_t - tB_1,\ 0 \leq t \leq 1$. Τότε είναι προφανές ότι

$$X_0 = B_0 - 0B_1 = B_0 = 0$$

δηλαδή διαδικασία X_t ξεκινάει και αυτή από το σημείο 0, όπως ακριβώς και η τυπική κίνηση Brown και

$$X_1 = B_1 - B_1 = 0$$

οπότε, τερματίζει στο σημείο 0. Για αυτό το λόγο, η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία, ονομάζεται Τυπική Γέφυρα του Brown. Η X_t είναι μια διαδικασία Gauss, κάτι που αποδεικνύεται κάνοντας χρήση γραμμικών συνδυασμών των μεταβολών της κίνησης Brown που εμπλέκεται σε αυτή, δε θα εμβαθύνουμε όμως τόσο, καθώς η απόδειξη αυτή ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Θεωρώντας λοιπόν ως δεδομένο ότι η X_t είναι διαδικασία Gauss, μπορούμε να πούμε ότι η γέφυρα του Brown θα χαρακτηρίζεται μόνο από τις ποσότητες $\mu_x(t)$, $c_x(t,s)$, οι οποίες υπολογίζονται ως εξής:

i.

$$\mu_x(t) = \mathbf{E}[X_t] = \mathbf{E}[B_t - tB_1] = \mathbf{E}[B_t] - t\mathbf{E}[B_1] = 0$$

με

$$B_t \sim \mathbf{N}(0,t) \text{ και } B_1 \sim \mathbf{N}(0,1)$$

ii.

$$
\begin{aligned}
c_x(t,s) &= \mathbf{E}[(X_t-\mu_x(t))(X_s-\mu_x(s))] = \mathbf{E}[X_tX_s] \\
&= \mathbf{E}[(B_t-tB_1)(B_s-sB_1)] \\
&= \mathbf{E}[B_tB_s - sB_tB_1 - tB_1B_s + tsB_1{}^2] \\
&= \mathbf{E}[B_tB_s] - s\mathbf{E}[B_tB_1] - t\mathbf{E}[B_1B_s] + st\mathbf{E}[B_1{}^2] \\
&= \min(s,t) - s\min(t,1) - t\min(s,1) + stV(B_1) \\
&= \min(s,t) - st - st + st \\
&\Rightarrow c_x(t,s) = \min(s,t) - st \text{ με } 0 \le s,\, t \le 1
\end{aligned}
$$

- Κίνηση Brown με μετατόπιση

Έστω η στοχαστική διαδικασία $X_t = \mu t + \sigma B_t$, $t \geq 0$ με σ μη αρνητική σταθερά και $\mu \in \mathbb{R}$. Η διαδικασία X_t είναι μια διαδικασία Gauss, κάτι που έπεται της κατασκευής της, καθώς η τυπική κίνηση Brown B_t που εμπλέκεται σε αυτή είναι επίσης διαδικασία Gauss. Όπως και προηγουμένως λοιπόν, η κίνηση Brown με μετατόπιση θα χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες $\mu_x(t), c_x(t,s)$ οι οποίες υπολογίζονται ως εξής:

i.

$$\mu_x(t) = \mathbf{E}[X_t] = \mathbf{E}[\mu t + \sigma B_t] = \mathbf{E}[\mu t] + \mathbf{E}[\sigma B_t] = \mu t \Rightarrow \mu_x(t) = \mu t$$

ii.

$$
\begin{aligned}
c_x(t,s) &= \mathbf{E}[(X_t-\mu_x(t))(X_s-\mu_x(s))] \\
&= \mathbf{E}[(\mu t + \sigma B_t - \mu t)(\mu s + \sigma B_s - \mu s)] \\
&= \mathbf{E}[\sigma B_t \sigma B_s] = \sigma^2 \mathbf{E}[B_tB_s] = \sigma^2 \min(s,t) \\
&\Rightarrow c_x(t,s) = \sigma^2 \min(s,t)
\end{aligned}
$$

Όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε από τον εναλλακτικό Ορισμό 40 της κίνησης Brown το γεγονός ότι $c_B(t,s) = \min(s,t)$.

Η συνάρτηση $\mu_x(t)$ είναι αυτή που ουσιαστικά καθορίζει το σχήμα των τροχιών της διαδικασίας.

- Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Μετά τη θεμελιώδη ανακάλυψη του Bachelier το 1900 ότι οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων υψηλού κινδύνου, όπως για παράδειγμα οι τιμές χρηματιστηριακών δεικτών και συναλλαγματικών ισοτιμιών, μπορούν πλήρως να περιγραφούν μέσω της κίνησης Brown, γεννήθηκε μια νέα περιοχή εφαρμογών των στοχαστικών διαδικασιών. Ωστόσο, η κίνηση Brown ως διαδικασία Gauss, μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές με θετική πιθανότητα, ιδιότητα η οποία δεν είναι επιθυμητή για τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Έτσι,το 1973 οι Black-Scholes και Merton πρότειναν μια άλλη στοχαστική διαδικασία ως μοντέλο για την περιγραφή των κερδοσκοπικών αυτών τιμών, την γεωμετρική κίνηση Brown, η οποία είναι στη ουσία το εκθετικό της γεωμετρικής κίνησης Brown με μετατόπιση:

$$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}, \qquad t \geq 0 \tag{2.12}$$

Να σημειώσουμε πως η γεωμετρική κίνηση Brown δεν είναι διαδικασία Gauss. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μέσης τιμής, συνδιακύμανσης και διακύμανσης:

Έστω η τυχαία μεταβλητή $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$ τότε θα ισχύει:

$$\mathbf{E}[e^{\lambda z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(z-\lambda)^2}{2}}\, dz,$$

όμως

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(z-\lambda)^2}{2}}\, dz = 1$$

γιατί είναι η πυκνότητα μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους λ,1. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}[e^{\lambda z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\mu_x(t) = \mathbf{E}[X_t] = e^{\mu t}\mathbf{E}[e^{\sigma B_t}]$$

και λόγω της ιδιότητας της αυτοομοιότητας της κίνησης Brown θα ισχύει:

$$\mu_x(t) = e^{\mu t}\mathbf{E}[e^{\sigma t^{\frac{1}{2}} B_1}] = e^{(\mu + 0.5\sigma^2)t}$$

Συνεχίζουμε, υπολογίζοντας τη συνδιακύμανση:

Για $s \leq t$ οι μεταβολές $B_t - B_s, B_s$ είναι ανεξάρτητες και επιπλέον $B_t - B_s = (d) B_{t-s}$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} c_x(t,s) &= \mathbf{E}[X_t X_s] - \mathbf{E}[X_t]\mathbf{E}[X_s] \\ &= e^{\mu(t+s)}\mathbf{E}[e^{\sigma(B_t + B_s)}] - e^{(\mu+0.5\sigma^2)(t+s)} \\ &= e^{(\mu+0.5\sigma^2)(t+s)}(e^{\sigma^2 s} - 1) \end{aligned}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό της συνάρτησης διακύμανσης, αρκεί να θυμηθούμε πως

$$\sigma^2_{X_t} = cov(X_t, X_t) = c_x(t,t)$$

συνεπώς αν στην προηγούμενη σχέση, αντικαταστήσουμε όπου s = t θα λάβουμε οτι:

$$\sigma^2_{X_t} = e^{(2\mu+\sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

2.2.3. Έλεγχος Στοχαστικών Διαδικασιών ως προς την Κίνηση Brown

Ο τρόπος ελέγχου μιας στοχαστικής διαδικασίας ως προς την κίνηση Brown στηρίζεται στο θεμελιώδες Θεώρημα του Paul Levy, το οποίο χρησιμοποιεί τις ιδιότητες martingale της κίνησης. Το θεώρημα αυτό βρίσκει εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά. Σημείο στο οποίο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία είναι το ότι αν μια διαδικασία είναι ή όχι κίνηση Brown, εξαρτάται τόσο από τη συνοδευόμενη διήθηση όσο από το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο την παρατηρούμε.

Θεώρημα 4 *Έστω η στοχαστική διαδικασία X_t και η παραγόμενη διήθηση $\mathfrak{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Η X_t θα είναι κίνηση Brown αν και μόνο αν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

i. *Το σημείο εκκίνησης της είναι η χρονική στιγμή t=0 δηλαδή $X_0 = 0$ σχεδόν βέβαια.*

ii. *Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

iii. *Η X_t είναι διαδικασία martingale ως προς τη διήθηση $\mathfrak{G}_t$.*

iv. *Η $X_t^2 - t$ είναι διαδικασία martingale ως προς τη διήθηση $\mathfrak{G}_t$.*

Ακολουθεί ένα παράδειγμα ([7] σελ. 112) στο οποίο γίνεται χρήση του Θεωρήματος 4 του Levy:

Παράδειγμα 12 *Έστω η κίνηση Brown B_t ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, ο ντετερμινιστικός χρόνος T, η στοχαστική διαδικασία $X_t = B_{t+T} - B_T$ και η παραγόμενη από αυτή διήθηση $\mathfrak{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Να δείξετε ότι η X_t είναι μια κίνηση Brown.*

Λύση:

Ξεκινώντας, δείχνουμε ότι η διήθηση $\mathfrak{G}_t$ σχετίζεται με την παραγόμενη από την κίνηση Brown διήθηση $\mathcal{F}_t$:

$$\mathfrak{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t) = \sigma(B_{s+T} - B_T, s \leq t) = \sigma(B_s, s \leq t+T) = \mathcal{F}_{t+T}$$

Συνεχίζουμε, ελέγχοντας τις ιδιότητες i.-iv. του Θεωρήματος 4 :
Για την ιδιότητα i.

$$X_0 = B_{0+T} - B_T = 0$$

Η ιδιότητα ii. ισχύει από τον ορισμό της κίνησης Brown
Για την ιδιότητα iii. ελέγχουμε αν ισχύει ότι $\mathbf{E}[X_t|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] = X_s$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] &= \mathbf{E}[X_t - X_s + X_s|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] \\ &= \mathbf{E}[X_s|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] + \mathbf{E}[X_t - X_s|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] \\ &= X_s + \mathbf{E}[B_{t+T} - B_{s+T}|\mathcal{F}_{t+T}] \\ &= X_s + \mathbf{E}[B_{t+T} - B_{s+T}] = X_s\end{aligned}$$

Τέλος, για την ιδιότητα iv.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t^2 - t|\mathfrak{G}_\mathfrak{t}] &= \mathbf{E}[(X_t - X_s + X_s)^2 - t|\mathfrak{G}_\mathfrak{t}] \\ &= \mathbf{E}[(X_t - X_s)^2 + 2(X_t - X_s)X_s + X_s^2|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] \\ &= \mathbf{E}[(X_t - X_s)^2 + 2X_s\mathbf{E}[(X_t - X_s)|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] + X_s^2 - t\end{aligned}$$

Όμως

$$\mathbf{E}[(X_t - X_s)|\mathfrak{G}_\mathfrak{s}] = \mathbf{E}[B_{t+T} + B_{s+T}] = 0$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t^2 - t|\mathfrak{G}_\mathfrak{t}] &= \mathbf{E}[(B_{t+T} - B_{s+T})^2|\mathcal{F}_{s+T}] \\ &= (t + T - (s+T)) - t + {X_s}^2 \\ &= {X_s}^2 - s\end{aligned}$$

οπότε και αποδείχθηκε το ζητούμενο, καθώς πληρούνται και οι τέσσερις συνθήκες του Θεωρήματος 4.

Έχοντας θέσει το απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο σχετικά με τις διαδικασίες martingale, την κίνηση Brown και τις ιδιότητες τους, θα ακολουθήσει το τρίτο κεφάλαιο, το οποίο πραγματεύεται τη θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

3

Στοχαστική Θεωρία

Το κεφάλαιο αυτό, ασχολείται με τη θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης, η οποία έχει ισχυρή εφαρμογή στη χρηματοοικονομική και πιο συγκεκριμένα σε θέματα που αφορούν στην τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων, όπως για παράδειγμα τιμολόγηση παραγώγων συμβολαίων. Μελετώνται βασικές έννοιες της στοχαστικής ανάλυσης, και πιο συγκεκριμένα, θέματα σχετικά με τη στοχαστική ολοκλήρωση πάνω στην κίνηση Brown καθώς και οι ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος. Στη συνέχεια, παρατίθεται το Λήμμα του *Itô*, ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, ασχολούμαστε με έννοιες από τη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να νοηθούν ως ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις, στις οποίες έχει επέλθει διαταραχή μέσω ενός τυχαίου θορύβου.

3.1. Το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του *Itô*

Στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε πως η κίνηση Brown δεν είναι σε κανένα σημείο παραγωγίσιμη, ωστόσο μπορούμε να ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτή. Τα ολοκληρώματα πάνω στην κίνηση Brown είναι χρήσιμα εργαλεία για τη θεωρία της διάχυσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, κάτι που θα μελετηθεί στη συνέχεια. Θα δώσουμε αρχικά μια διαισθητική προσέγγιση του ολοκληρώματος *Itô* και στη συνέχεια, μέσω εισαγωγικών ορισμών και εννοιών, θα θέσουμε σε αυστηρότερο μαθηματικό πλαίσιο την αρχική διαισθητική μας προσέγγιση.

- Ένα εισαγωγικό παράδειγμα ([7] σελ.96-99)

Ας θεωρήσουμε την κίνηση Brown $B = (B_t, t \geq 0)$. Γνωρίζουμε πως δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 B_t(\omega)\, dB_t(\omega)$ πάνω στις τροχιές της κίνησης Brown (τροχιά προς τροχιά) όπως στα ντετερμινιστικά ολοκληρώματα. Προκειμένου να μπορέσουμε να κατανοήσουμε τι συμβαίνει, θα θεωρήσουμε τα αθροίσματα Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \Delta_i B$$

όπου τ_n είναι η διαμέριση του διαστήματος [0, t]

$$\tau_n : \quad 0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = t$$

και για οποιαδήποτε συνάρτηση f στο διάστημα [0, t] συμβολίζουμε με Δf τις αντίστοιχες μεταβολές της δηλαδή,

$$\Delta f : \quad \Delta_i f = f(t_i - f_{t_{i-1}})$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Με αυτό τον τρόπο, το άθροισμα S_n αντιστοιχεί στη διαμέριση τ_n ενώ η ενδιάμεση διαμέριση $y_i = (t_{i-1})$ είναι το κάτω άκρο του διαστήματος $[t_{i-1}, t_i]$. Η διαδικασία που περιγράψαμε, είναι τυπική για τον προσδιορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος του *Itô*.

Μια εναλλακτική έκφραση του αθροίσματος S_n είναι η ακόλουθη:

$$S_n = \frac{1}{2} {B_t}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i B)^2 =: \frac{1}{2} {B_t}^2 - \frac{1}{2} Q_n(t).$$

Οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες και συνεπώς:

$$\mathbf{E}(\Delta_i B \Delta_j B) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ V(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} & i = j \end{cases}$$

Τότε είναι φανερό ότι

$$\mathbf{E}[Q_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta_i B)^2 = \sum_{t=1}^{n} \Delta_i = t$$

και λαμβάνοντας ξανά υπόψη την ανεξαρτησία των μεταβολών της κίνησης Brown καθώς και τη σχέση $V(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$, συμπεραίνουμε ότι

$$V(Q_n)(t) = \sum_{i=1}^{n} V([\Delta_i B]^2) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{E}(\Delta_i B)^4 - {\Delta_i}^2]$$

Είναι γνωστό πως για μια τυχαία μεταβλητή B_1 η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή ισχύει ότι $\mathbf{E}[B_1^4] = 3$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}[(\Delta_i B)^4] = \mathbf{E}[B_{t_i - t_{i-1}}]^4 = \mathbf{E}[(\Delta_i)^{\frac{1}{2}} B_1]^4 = 3{\Delta_i}^2$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$V(Q_n)(t) = 2\sum_{i=1}^{n} \Delta_i{}^2$$

Έτσι αν

$$mesh(\tau_n) = \max_{i=1,\dots,n} \Delta_i \to 0$$

λαμβάνουμε ότι

$$V(Q_n)(t) \leq 2mesh(\tau_n)\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 2tmesh(\tau_n) \to 0$$

Δεδομένου ότι $V(Q_n(t)) = \mathbf{E}(Q_n(t)-t)^2$ καταλήγουμε στα εξής δύο συμπεράσματα:

i. Η σειρά $Q_n(t)$ συγκλίνει κατά μέση τετραγωνική σύγκλιση στο t, και ως εκ τούτου και κατά πιθανότητα.

ii. Η οριακή συνάρτηση f(t)=t είναι χαρακτηριστική μόνο για την κίνηση Brown και ονομάζεται τετραγωνική μεταβολή της κίνησης στο διάστημα [0,t].

Δεδομένου ότι η σειρά $Q_n(t)$ δε συγκλίνει για μια δοσμένη απλή τροχιά της κίνησης Brown και τις αντίστοιχες διαμερίσεις τ_n, μπορούμε να ισχυρισθούμε πως το ολοκλήρωμα $\int_0^t B_s\,dB_s$ δεν μπορεί να προσδιοριστεί ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα αυτό, υπολογίζεται ως ένα μέσο τετραγωνικό όριο. Πράγματι, από τη στιγμή που ισχύει για το άθροισμα

$$S_n = \frac{1}{2}[B_t{}^2 - Q_n(t)] \to \frac{1}{2}(B_t{}^2 - t)$$

καταλήγουμε πως αυτή είναι και η τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος του *Itô*, δηλαδή:

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \tag{3.1}$$

Η μεταβολή $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ στο διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$, ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{E}[\Delta_i B] = 0$ καθώς και την $\mathbf{E}[(\Delta_i B)^2] = \Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Το μέσο τετραγωνικό όριο του αθροίσματος Q_n είναι t, οπότε συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή $(\Delta_i B)^2$ είναι της τάξης Δ_i. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε πως τα ολοκληρώματα τα σχετικά με τις τροχιές της κίνησης Brown, τα οποία δε μπορούν να ορισθούν με την έννοια των Riemann-Stieltjes, προσπαθούμε να τα ορίσουμε μέσω της έννοιας της μέσης τετραγωνικής σύγκλισης. Τέλος σημειώνουμε πως σε όρους διαφορικού γράφουμε

$$(dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 = dt$$

με την αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή να δίνεται ως

$$\int_0^t (dB_s)^2 = \int_0^t ds = t$$

- Το Ολοκλήρωμα *Itô* συναρτήσεων της κίνησης Brown

Έστω ο χώρος πιθανοτήτων $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, η τυπική κίνηση Brown B_t και η συνάρτηση

$$f(t,\omega) : (0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

η οποία εξαρτάται μέσω του ω από τη συμπεριφορά της κίνησης Brown. Ζητάμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dB_t(\omega)$$

Θεωρούμε επιπλέον τη διαμέριση του διαστήματος [a,b]: $\{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ καθώς και ότι η προσέγγιση της $f(t,\omega)$ γίνεται μέσω του αθροίσματος $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_i+1)}$ δηλαδή:

$$f(t,\omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_i+1)}(t)$$

Ορισμός 42 (Το ολοκλήρωμα *Itô*) *Ως ολοκλήρωμα Itô ορίζεται το ολοκλήρωμα:*

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i,\omega)[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega)$$

Δύο βασικά σημεία τα οποία διαφοροποιούν τον Ορισμό 42 του ολοκληρώματος του *Itô* από άλλους πιθανούς ορισμούς τόσο στοχαστικών, όσο ντετερμινιστικών ολοκληρωμάτων είναι τα εξής([16] σελ. 128):

i. Το όριο λαμβάνεται κατά την $\mathbf{L}^2$ έννοια, δηλαδή για κάθε ω , και όχι σημειακά.
ii. Η τιμή της συνάρτησης $f(t,\omega)$ τη χρονική στιγμή t θα πρέπει να εξαρτάται από τις τιμές B_s για $s \leq t$, όχι όμως για $s \geq t$.

Θα προσπαθήσουμε σε αυτό το σημείο, να δώσουμε έναν πιο αυστηρό ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος, αφού προηγηθεί η έννοια της διαδικασίας βήματος (step process):

Ορισμός 43 (Διαδικασία Βήματος) *Έστω [a,b] ένα διάστημα και $\{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ η διαμέριση αυτού. Υποθέτουμε ακόμα τις τυχαίες $\mathcal{F}_{t_j}$-μετρήσιμες μεταβλητές n_j για τις οποίες ισχύει οτι $\mathbf{E}[{n_j}^2] < \infty$. Τότε, κάθε στοχαστική διαδικασία f που μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$f(t) = \sum n_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$$

θα λέγεται διαδικασία βήματος, ενώ θα συμβολίζουμε με $\mathbf{M}_{step}([a,b])$ το σύνολο των διαδικασιών βήματος του διαστήματος [a,b].

Ορισμός 44 (Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Διαδικασίας Βήματος) *Έστω η διαδικασία βήματος*

$$f(t) = \sum n_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$$

τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμά της ως προς την κίνηση Brown θα είναι

$$\int_a^b f(t)\, dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} n_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

- Οι Ιδιότητες του Ολοκληρώματος *Itô*

Πριν αναφερθούμε στις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος, είναι σκόπιμο να δώσουμε τον ορισμό των στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στον χώρο M^2. Οι διαδικασίες αυτές είναι μια γενικότερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών, για τις οποίες μπορεί να οριστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα [16] (σελ.133) .

Ορισμός 45 (Οι διαδικασίες του χώρου M^2) *Έστω f μια στοχαστική διαδικασία και η διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Θα λέμε οτι η f ανήκει στο χώρο $\mathrm{M}^2([a,b])$ αν είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t$ και επιπλέον ισχύει:*

$$||f||_{M^2([a,b])} := \mathbf{E}\left[\int_a^b |f|^2\,dt\right] < \infty$$

Στο Θεώρημα που ακολουθεί υποθέτουμε πως η συνάρτηση εντός των ολοκληρωμάτων, ανήκει σε κατάλληλα επιλεγμένο χώρο M^2. Για υποδείξεις σχετικές με την απόδειξη των ακόλουθων ιδιοτήτων, παραπέμπουμε στο [16] (σελ. 139-140).

Θεώρημα 5 *Το ολοκλήρωμα του Itô έχει τις εξής τέσσερις βασικές ιδιότητες:*

i. ***Γραμμική Ιδιότητα**: Για τις στοχαστικές διαδικασίες f_1, f_2 θα ισχύει οτι*

$$I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$$

ii. ***Μηδενική Μέση Τιμή:***

$$\mathbf{E}\left[\int_a^b f\,dB_t\right] = 0$$

iii. ***Ισομετρία:***

$$\mathbf{E}\left[\left|\int_a^b f(t,\omega)\,dB_t\right|^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_a^b |f(t,\omega)|^2\,dt\right]$$

iv. ***Για κάθε f, g $\in \mathrm{M}^2$ ισχύει:***

$$\mathbf{E}[I(f)I(g)] = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t)\,dB_t \int_0^T g(t)\,dB_t\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t)g(t)\,dt\right]$$

-Το Ολοκλήρωμα του *Itô* σαν Στοχαστική Διαδικασία

Στα πλαίσια των αναγκών αυτής της παραγράφου, θεωρούμε ότι το κάτω άκρο α του στοχαστικού ολοκληρώματος του *Itô* παραμένει σταθερό και δίχως βλάβη της γενικότητας θέτουμε a = 0, ενώ ταυτόχρονα θεωρούμε ότι το άνω άκρο, b, είναι μεταβαλλόμενο και θέτουμε b = t. Για κάθε $t \in [0,T]$ και για κατάλληλα επιλεγμένη διαδικασία f του χώρου $\mathrm{M}^2([0,T])$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t f(s)\,dB_s$ παράγει μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, την I_t. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάσαμε μια στοχαστική διαδικασία, το λεγόμενο **αόριστο ολοκλήρωμα** του *Itô* [16] (σελ.141):

$$I_t := \int_0^t f(s)\,dB_s$$

Η στοχαστική διαδικασία I_t μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως το στοχαστικό ολοκλήρωμα της $f(t)\mathbf{1}_{[0,t]}$ με όρια ολοκληρώσεως 0 και T:

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,dB_s$$

Θεώρημα 6 *Έστω $t \in [0,T]$ και f η κατάλληλα επιλεγμένη στοχαστική διαδικασία του χώρου $\mathbf{M}^2([0,T])$. Τότε η στοχαστική διαδικασία*

$$I_t := \int_0^t f(s)\,dB_s$$

είναι μια διαδικασία martingale.

Απόδειξη

Δεδομένου ότι είναι ολοκληρώσιμη, για να είναι η I_t διαδικασία martingale, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει: $\mathbf{E}[I_t|\mathcal{F}_s] = I_s$.

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^t f(s)\,dB_s = \int_0^s f(y)\,dB_y + \int_s^t f(y)\,dB_y \\ &\Rightarrow I_t = I_s + \int_s^t f(y)\,dB_y \end{aligned}$$

Όμως, το ολοκλήρωμα $\int_s^t f(y)\,dB_y$ είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{F}_s$ συνεπώς θα ισχύει ότι

$$\mathbf{E}\left[\int_s^t f(y)\,dB_y|\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_s^t f(y)\,dB_y\right]$$

και επιπλέον κάνοντας χρήση της ιδιότητας ii. του Θεωρήματος 5 καταλήγουμε στο ότι $\mathbf{E}[\int_s^t f(y)\,dB_y] = 0$ και συνεπώς

$$\mathbf{E}[I_t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[I_s|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}\left[\int_s^t f(y)\,dB_y|\mathcal{F}_s\right] = I_s$$

Επομένως, το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, θα γενικεύσουμε το αόριστο στοχαστικό ολοκλήρωμα θεωρώντας ως άνω όριο ένα χρόνο στάσης. Η γενίκευση αυτή είναι αναμενόμενη και απολύτως λογική, από τη στιγμή που δείξαμε ότι το I_t είναι μια διαδικασία martingale και συνεπώς θα φέρει ιδιότητες των martingales.

Θεωρούμε τη δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ του στοχαστικού διαστήματος $[0,\tau]$ με τ να είναι ένας χρόνος στάσης. Η δείκτρια $\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή, προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, φραγμένη και δεξιά συνεχής. Συνεπώς, κατά αντιστοιχία με τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος με ντετερμινιστικά άκρα, μπορούμε τώρα να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα I_τ:

$$I_\tau := \int_0^\tau f(t)\,dB_t := \int_0^T f(t)\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\,dB_t$$

Φυσικά, μπορούμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό όταν και τα δύο άκρα του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι τυχαίοι χρόνοι στάσης ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$ δηλαδή έστω τ_1, τ_2 δυο τυχαίοι χρόνοι στάσης και έστω δίχως βλάβη της γενικότητας ότι $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Τότε, ορίζεται το στοχαστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dB_t := \int_0^{\tau_2} f(t)\,dB_t - \int_0^{\tau_1} f(t)\,dB_t := I_{\tau_2} - I_{\tau_1}$$

Για περισσότερα παραδείγματα παραπέμπουμε στο[16] (σελ. 143-144).

3.2. Το Λήμμα του *Itô*

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με το Λήμμα *Itô* και θα γίνει αναφορά στις διαδικασίες *Itô*. Οι διαδικασίες αυτές έχουν πολλές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά, για παράδειγμα μας δίνουν μοντέλα για τη χρονική εξέλιξη των επιτοκίων ενώ το Λήμμα του *Itô* χαρακτηρίζει τις ιδιότητες των διαδικασιών *Itô* κάτω από αλλαγή μεταβλητών. Το Λήμμα αυτό, μας προσφέρει έναν κανόνα αλλαγής μεταβλητών τέτοιον ώστε να ισχύει για τα στοχαστικά ολοκληρώματα. Στην ουσία, είναι το στοχαστικό ανάλογο του κλασσικού κανόνα της αλυσίδας για αυτό το λόγο θα προηγηθεί μια σύντομη αναφορά στον κανόνα αυτό και στη συνέχεια θα δοθούν διάφορες εκφράσεις του Λήμματος *Itô*.

Ας θεωρήσουμε την ντετερμινιστική διαφορίσιμη συνάρτηση b(t) για την οποία ισχύει ότι b(0)=0. Τότε [7] (σελ. 100):

$$\frac{1}{2}\frac{db^2(s)}{ds} = \frac{1}{2}2b(s)\frac{db(s)}{ds} = b(s)\frac{db(s)}{ds}$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t και τα δύο μέλη, λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{db^2(s)}{ds}\,ds = \frac{1}{2}b^2(t) = \int_0^t b(s)\frac{db(s)}{ds}\,ds = \int_0^t b(s)db(s) \tag{3.2}$$

Δε μπορούμε απλά να αντικαταστήσουμε στην (3.2) στη θέση της συνάρτησης b(s) μια απλή τροχιά $B_s(\omega)$ της κίνησης Brown, καθώς είναι γνωστό πως οι τροχιές της δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμες [7] (σελ.113). Μερικές παραγράφους πριν, και συγκεκριμένα στην (3.1) καταλήξαμε στο ότι:

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

ωστόσο αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με το αποτέλεσμα της (3.2). Παρατηρούμε πως η τιμή $\frac{1}{2}(B^2(t)-t)$ είναι στην ουσία η

$$\frac{1}{2}B^2(t)$$

δηλαδή η τιμή που περιμέναμε να λάβουμε από τον κλασσικό κανόνα διαφόρισης, διορθωμένη κατά $-\frac{1}{2}t$. Το γεγονός αυτό μας δίνει μια ένδειξη πως πρέπει να εισάγουμε ένα διορθωτικό όρο στον κλασσικό κανόνα της αλυσίδας, ώστε να λάβουμε τον στοχαστικό κανόνα αλυσίδας.

Προκειμένου λοιπόν να κατανοήσουμε τον στοχαστικό κανόνα αλυσίδας, υπενθυμίζουμε αρχικά τον ντετερμινιστικό κανόνα. Για λόγους ευκολίας, θα συμβολίζουμε με h'(t), h''(t) τις συνήθεις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα, της συνάρτησης h στο σημείο t. Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται ο κλασικός κανόνας αλυσίδας της διαφόρισης [7] (σελ. 113):

Θεώρημα 7 (Ο κλασσικός κανόνας της αλυσίδας) *Για δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις f, g ο κλασικός κανόνας της αλυσίδας δίνεται ως*

$$[f(g(s))]' = f'(g(s))g'(s)$$

με αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή την

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)\,ds = \int_0^t f'(g(s))\,dg(s)$$

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα επιχείρημα για την εγκυρότητα του κανόνα της αλυσίδας, το οποίο αποτελεί ταυτόχρονα ένα κίνητρο για να καταλήξουμε στη διατύπωση μιας απλής μορφής του λήμματος του *Itô*.

Η διαφορική μορφή της σχέσης $[f(g(s))]' = f'(g(s))g'(s)$ του Θεωρήματος 7 είναι η df(g)=f' dg. Το διαφορικό αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως ο όρος πρώτης τάξης του αναπτύγματος της σειράς Taylor [7] (σελ. 114):

$$f(g(t)+dg(t)) - f(g(t)) = f'(g(t))dg(t) + \frac{1}{2}f''(g(t))[dg(t)]^2 + \dots \tag{3.3}$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος dg(t)=g(t+dt) - g(t) είναι η μεταβολή της συνάρτησης g στο διάστημα [t, t+dt], ενώ κάτω από κατάλληλες συνθήκες οι όροι δεύτερης και ανώτερης τάξης σε αυτό το ανάπτυγμα είναι αμελητέοι για μικρό dt. Υποθέτουμε τώρα πως η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και στην (3.3) αντικαθιστούμε την συνάρτηση g(t) με μια τροχιά $B_t(\omega)$ της κίνησης Brown, ενώ παράλληλα συμβολίζουμε με $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ τη μεταβολή της B στο διάστημα [t, t+dt]. Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως προηγουμένως, καταλήγουμε στη σχέση:

$$f(B_t + dB_t) - f(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2 + \dots \tag{3.4}$$

Μερικές παραγράφους πριν, διατυπώσαμε τη ακόλουθη σχέση:

$$(dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 = dt$$

από την οποία λαμβάνουμε πως το τετραγωνικό διαφορικό $(dB_t)^2$ μπορεί να ερμηνευθεί ως dt. Συνεπώς, σε αντίθεση με την (3.3) (ντετερμινιστική περίπτωση), η συνεισφορά των όρων δεύτερης τάξης στην (3.4) δεν είναι αμελητέα. Αυτό το γεγονός είναι και ο λόγος της απόκλισης από τον κλασικό κανόνα της αλυσίδας [7] (σελ. 114). Ολοκληρόνωντας και τα δύο μέλη του παραπάνω αναπτύγματος και θερώντας αμελητέους τους όρους τρίτης τάξης και άνω, λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_s^t df(B_x) &:= f(B_t) - f(B_s) \\ &= \int_s^t f'(B_x)\,dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)\,dx\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μια απλή μορφή του Λήμματος *Itô* η οποία δίνεται ακολούθως:

Λήμμα 1 (Το Λήμμα του *Itô***)** *Έστω f μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε ο τύπος*

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)\,dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)\,dx \quad s < t$$

θα ονομάζεται το Λήμμα του Itô.

Για μια λεπτομερέστερη περιγραφή του σκεπτικού που ακολουθήθηκε παραπέμπουμε στο [7] (σελ. 114).

Παράδειγμα 13 *Έστω η συνάρτηση $f(t) = t^2$, ζητείται να γίνει εφαρμογή του Λήμματος του Itô.*

Λύση:

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη:

$$f'(t) = 2t,\ f''(t) = 2 \tag{3.5}$$

Επιπλέον $f(B_t) = {B_t}^2$, οπότε από το Λήμμα του Itô

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)\,dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)\,dx$$

και αντικαθιστώντας όπου t = B_t στην (3.5), προκύπτει ότι:

$${B_t}^2 - {B_s}^2 = 2\int_s^t B_x\,dB_x + \int_s^t dx$$

ενώ για s = 0 καταλήγουμε στο ήδη γνωστό

$$\int_s^t B_x\,dB_x = \frac{1}{2}({B_t}^2 - t)$$

Εναλλακτικές μορφές του Λήμματος *Itô*

Σε αυτό το σημείο θα επεκτείνουμε το απλό Λήμμα του *Itô* για τη στοχαστική διαδικασία $f(t,B_t)$, υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f(t,x) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τουλάχιστον δεύτερης τάξης [7] (σελ. 117).

Σε ότι ακολουθεί, θα συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης με

$$f_i(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1,x_2)|_{x_1=t,x_2=x} \qquad i=1,2$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f θα συμβολίζονται ως:

$$f_{ij}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1,x_2)|_{x_1=t,x_2=x} \qquad i,j=1,2$$

Στηριζόμενοι στον παραπάνω συμβολισμό, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor την f μέχρι και τους όρους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} f(t+dt,B_{t+dt}) - f(t,B_t) &= f_1(t,B_t)dt + f_2(t,B_t)dB_t \\ &+\frac{1}{2}[f_{11}(t,B_t(dt)^2 + 2f_{12}(t,B_t)dtdB_t + f_{22}(t,B_t)(dB_t)^2] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Καθώς στον κλασσικό λογισμό, οι όροι τάξης μεγαλύτερης της δεύτερης στην (3.6) θεωρούνται αμελητέοι, ως αμελητέοι θα θεωρούνται και οι όροι με συντελεστές $dtdB_t$ και $(dt)^2$. Ωστόσο, όροι με συντελεστή $(dB_t)^2$ δεν μπορούν να αγνοηθούν καθώς έχουμε προαναφέρει πως $(dB_t)^2 = dt$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, καταλήγουμε στην εξής παραλλαγή του Λήμματος *Itô*:

Λήμμα 2 *Έστω f(t,x) μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Τότε*

$$f(t,B_t) - f(s,B_s) = \int_s^t [f_1(x,B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x,B_x)]\, dx + \int_s^t f_2(x,B_x)\, dB_x, \quad s<t$$

Παράδειγμα 14 *(The Itô exponential, [7] σελ.118) Έστω η διαδικασία* $X_t = f(t,B_t) = e^{(c-0.5\sigma^2)t+\sigma B_t}$, *όπου c, σ θετικές σταθερές. Για τη συνάρτηση f(t,x) γνωρίζουμε πως έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Να γίνει εφαρμογή του Λήμματος Itô.*

Λύση:

Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του *Itô*, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης της f(t,x):

$$f(t,x) = e^{(c-0.5\sigma^2)t+\sigma x} \qquad f_1(t,x) = (c-0.5\sigma^2)f(t,x)$$
$$f_2(t,x) = \sigma f(t,x) \qquad f_{22}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2

$$f(t,B_t) - f(s,B_s) = \int_s^t \left[f_1(x,B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x,B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x,B_x)\, dB_x, \quad s < t$$

και για s = 0 προκύπτει ότι:

$$X_t - X_0 = c\int_0^t X_s\, ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

Πριν κλείσουμε την παράγραφο, θα δώσουμε μια ακόμα εναλλακτική έκφραση του Λήμματος *Itô* στην οποία συμμετέχουν οι λεγόμενες διαδικασίες *Itô*, ο ορισμός των οποίων δίνεται παρακάτω:

Ορισμός 46 (Διαδικασίες *Itô*) *Διαδικασία Itô θα ονομάζεται μια διαδικασία της μορφής*

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)}\, ds + \int_0^t A_s^{(2)}\, dB_s$$

με τις $A_s^{(1)}, A_s^{(2)}$ να είναι διαδικασίες προσαρμοσμένες στην κίνηση Brown.

Σχόλιο: Παρατηρώντας τον παραπάνω ορισμό, συμπεραίνουμε πως η γεωμετρική κίνηση Brown είναι μια διαδικασία *Itô* με $A_s^{(1)} = cX$ και $A_s^{(2)} = \sigma X$

Χρησιμοποιώντας πάλι το ανάπτυγμα Taylor και ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με προηγουμένως, διατυπώνουμε την κάτωθι εναλλακτική έκφραση του Λήμματος *Itô*. Για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα, παραπέμπουμε στο [7] (σελ. 120-112).

Λήμμα 3 *Έστω X μια στοχαστική διαδικασία Itô και η συνάρτηση f(t, x), η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερη τάξης. Τότε θα ισχύει,*

$$f(t,X_t) - f(s,X_s) = \int_s^t [f_1(y,X_y) + A_y^{(1)} f_2(y,X_y) + \frac{1}{2}[A_y^{(2)}]^2 f_{22}(y,X_y)]\, dy + \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y,X_y)\, dB_y$$

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο να σημειώσουμε πως πολλές φορές, το Λήμμα 3 παρουσιάζεται ως:

$$f(t,X_t) - f(s,X_s) = \int_s^t [f_1(y,X_y) + \frac{1}{2}[A_y^{(2)}]^2 f_{22}(y,X_y)]\, dy + \int_s^t f_2(y,X_y)\, dX_y$$

όπου

$$dX_y = A_y^{(1)} dy + A_y^{(2)} dB_y$$

3.3. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις κατά *Itô*

Ξεκινάμε αυτή την παράγραφο, θέτοντας το ερώτημα: *Τι είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση*; Για την απάντηση του ερωτήματος, ας θεωρήσουμε την ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση

$$dx(t) = \alpha(t, x(t))dt, \qquad x(0) = x_0$$

Ο απλούστερος τρόπος για να εισάγουμε τυχαιότητα σε αυτή την εξίσωση είναι να τυχαιοποιήσουμε την αρχική συνθήκη. Τότε η λύση x(t) μετατρέπεται σε μια στοχαστική διαδικασία $X_t, t \in [0, T]$:

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt, \qquad X_0(\omega) = Y(\omega)$$

Μια τέτοια εξίσωση θα καλείται τυχαία διαφορική εξίσωση, και η επίλυσή της δεν απαιτεί χρήση στοχαστικού λογισμού, καθώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις κλασσικές μεθόδους και απλά να προσαρμόσουμε τη λύση στο αντίστοιχο αποτέλεσμα της αρχικής συνθήκης. Οι τυχαίες διαφορικές εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν λοιπόν ως ντετερμινιστικές, στις οποίες έχει επέλθει μια διαταραχή στην αρχική τους συνθήκη[7].

Για τους σκοπούς της παραγράφου, θεωρούμε πως η τυχαιότητα στη διαφορική εξίσωση εισάγεται μέσω μιας πρόσθετης συνθήκης τυχαίου θορύβου:

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0(\omega) = Y(\omega) \tag{3.7}$$

Να σημειώσουμε πως με B_t συμβολίζουμε μια κίνηση Brown και οτι οι $\alpha(t, x)$, $b(t, x)$ είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις. Τότε, η λύση X_t, αν υπάρχει, είναι μια στοχαστική διαδικασία και η τυχαιότητα της πηγάζει τόσο από την αρχική συνθήκη όσο από τον θόρυβο που παράγει η κίνηση Brown.

Μια απλοϊκή ερμηνεία της (3.7) μας λέει πως η μεταβολή $dX_t = X_{t+dt} - X_t$ έχει προκληθεί από μια μικρή μεταβολή του χρόνου dt, με συντελεστή $\alpha(t, X_t)$, σε συνδυασμό με τη μεταβολή της κίνησης Brown $dB_t = B_{t+dt} - B_t$, με συντελεστή $b(t, X_t)$. Δεδομένου ότι οι τροχιές της κίνησης Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμες, δημιουργείται το εξής ερώτημα: *Κατά ποια έννοια θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την σχέση (3.7);* Είναι βέβαια λογικό το γεγονός ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, δεν είναι μοναδική, ωστόσο δεδομένης της γνώσης μας για το λογισμό κατά *Itô*, μπορούμε να προτείνουμε την ακόλουθη ερμηνεία-ορισμό [7] (σελ. 136):

Ορισμός 47 (Η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση του *Itô*) *Η (3.7) ερμηνεύεται ως η στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, X_s)\, ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dB_s, \qquad 0 \le t \le T \tag{3.8}$$

στην οποία, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann ενώ το δεύτερο είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô, και καλείται στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô. Η κίνηση Brown που εμπλέκεται στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (3.8) καλείται διαδικασία οδηγός.

Αμέσως μετά τον ορισμό της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης του *Itô*, είναι λογικό να προβληματιστεί κανείς σχετικά με τη λύση και τη μορφή της. Όπως και προηγουμένως, η απάντηση το ερώτημα αυτό δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν δύο είδη λύσεων μιας στοχαστικής διαφορική εξίσωσης [7] (σελ. 137), οι **ισχυρές** και οι **ασθενείς** λύσεις:

Ορισμός 48 (Ισχυρή Λύση) *Ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.8) είναι μια στοχαστική διαδικασία* $X = (X_t, t \in [0,T])$*, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

i. Η στοχαστική διαδικασία X είναι προσαρμοσμένη σε μια κίνηση Brown: τη χρονική στιγμή $t \leq s$ *είναι μια συνάρτηση της* B_s*.*

ii. Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην (3.8) είναι καλά ορισμένα.

iii. Η διαδικασία X είναι συνάρτηση τόσο της τροχιάς της υποκείμενης κίνησης Brown όσο των συναρτήσεων των συντελεστών $\alpha(t,x), b(t,x)$

Επομένως, μια ισχυρή λύση της (3.8) εξαρτάται από την τροχιά της κίνησης Brown και όπως είναι αναμενόμενο, αντικατάσταση της υποκείμενης κίνησης με μια άλλη κίνηση Brown θα μας έδινε μια άλλη ισχυρή λύση, από την ίδια σχέση, αλλά μέσω της νέας κίνησης. Για τις **ασθενείς** λύσεις, δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις τροχιές της κίνησης Brown, παρά μόνο την κατανομή της X, καθώς αυτές οι λύσεις επαρκούν για να καθορίσουμε τα χαρακτηριστικά της κατανομής όπως τη μέση τιμή και τη διασπορά. Μας δίδεται η αρχική συνθήκη X_0 και οι συναρτήσεις των συντελεστών $\alpha(x,t), b(x,t)$ και ζητάμε να βρούμε για ποια κίνηση Brown ισχύει η (3.8). Μια έννοια που θα συναντήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο είναι αυτή της διαδικασίας διάχυσης, η οποία σχετίζεται με τις προαναφερθείσες ασθενείς και ισχυρές λύσεις μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης *Itô*, όπως φαίνεται και στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 49 (Διαδικασία Διάχυσης) *Μια ισχυρή ή ασθενής λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης του Itô (3.8) θα ονομάζεται διάχυση. Ειδικότερα, αν θέσουμε στη σχέση (3.8)* $\alpha(t,x) = 0$ *και* $b(t,x) = 1$ *τότε η υποκείμενη κίνηση Brown θα καλείται διαδικασία διάχυσης.*

Στο Θεώρημα που ακολουθεί [7], δίνονται οι συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας των ισχυρών λύσεων μια στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης *Itô*.

Θεώρημα 8 *Έστω ότι η αρχική συνθήκη* X_0 *έχει πεπερασμένη δεύτερη ροπή* $\mathbf{E}[X_0]^2 < \infty$ *και είναι ανεξάρτητη της κίνησης Brown* B_t*,* $t \geqslant 0$*. Υποθέτουμε ακόμα ότι για κάθε* $t \in [0,T]$ *και* $x,y \in \mathbb{R}$ *οι συναρτήσεις των συντελεστών* $\alpha(t,x), b(t,x)$ *πληρούν τις κάτωθι συνθήκες:*

i. Είναι συνεχείς.

ii. Πληρούν τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

$$|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|$$

Τότε η εξίσωση (3.8) έχει μοναδική ισχυρή λύση στο διάστημα [0, T].

Σχόλιο: Μια πραγματική συνάρτηση f $A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}$, θα λέγεται Lipschitz συνεχής συνάρτηση [22] και θα ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, αν υπάρχει σταθερά $L \geq 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{3.9}$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί (Linear stochastic differential equation, [7] σελ.138), δίνεται μια γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση *Itô* η οποία θα δείξουμε ότι έχει μοναδική ισχυρή λύση:

Παράδειγμα 15 *Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t (c_1 X_s + c_2)\, ds + \int_0^t (\sigma_1 X_s + \sigma_2)\, dB_s, t \in [0, T] \tag{3.10}$$

με c_i, σ_i σταθερές για i=1,2. Να εξεταστεί αν εξίσωση αυτή έχει μοναδική ισχυρή λύση.

Λύση:

Παρατηρούμε πως αν επιλέξουμε $\alpha(t,x) = c_1 x + c_2$, $b(t,x) = \sigma_1 x + \sigma_2$ οι συντελεστές α, b είναι συνεχείς συναρτήσεις, ως πρωτοβάθμια πολυώνυμα ως προς x, και επιπλέον:

$$\begin{aligned}
|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| &= |c_1 x + c_2 - (c_1 y + c_2)| + |\sigma_1 x + \sigma_2 - (\sigma_1 y + \sigma_2)| \\
&= |c_1 x + c_2 - c_1 y - c_2| + |\sigma_1 x + \sigma_2 - \sigma_1 y - \sigma_2| \\
&= |c_1 x - c_1 y| + |\sigma_1 x - \sigma_1 y| \\
&= |c_1 (x - y)| + |\sigma_1 (x - y)| \\
&= |c_1||x - y| + |\sigma_1||x - y| \\
&= (|c_1| + |\sigma_1|)|x - y|
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $K = |c_1| + |\sigma_1|$ καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση

$$|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x - y|$$

Συνεπώς υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση.

3.4. Η Γενική Γραμμική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

Η γενική γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση (general linear stochastic differential equation) [7] (σελ.150) δίνεται ως:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t [c_1(s)X_s + c_2(s)]\,ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)]\,dB_s, \qquad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Οι συντελεστές c_i, σ_i της (3.11) είναι συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις στο διάστημα [0,T] και εύκολα μπορούμε να δούμε πως πληρούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 8, για την ύπαρξη μοναδικής ισχυρής λύσης της εξίσωσης.

Παρατήρηση: Η (3.11) είναι μεγάλης σημασίας, καθώς η λύση της μπορεί να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση των συντελεστών c_i, σ_i και της υποκείμενης κίνησης Brown.

Αν στην (3.11) θέσουμε $\sigma_1(t) = 0$, προκύπτει η **γραμμική εξίσωση με προστιθέμενο θόρυβο** (linear equation with additive noise) [7] (σελ.151):

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t [c_1(s)X_s + c_2(s)]\,ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma_2(s)\,dB_s, \qquad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{3.12}$$

η οποία οφείλει το όνομά της στο γεγονός ότι η διαδικασία X_t δεν εμπλέκεται άμεσα στο στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για την εύρεση της λύσης της (3.12), υποθέτουμε ότι

$$X_t = [y(t)]^{-1} Y_t$$

με

$$y(t) = e^{-\int_0^t c_1(s)\,ds} \text{ και } Y_t = f(t, X_t),$$

για κάποια ομαλή συνάρτηση f. Κατόπιν εφαρμογής του κατάλληλου Λήμματος It$\hat{o}$ και μέσω ολοκλήρωσης προκύπτει η λύση:

$$X_t = [y(t)]^{-1} \left(X_0 + \int_0^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)y(s)\,dB_s \right) \tag{3.13}$$

Αν η X_0 είναι σταθερά, τότε η X_t είναι μία διαδικασία Gauss (κανονική διαδικασία). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη διαδικασία εύρεσης της λύσης της (3.12), παραπέμπουμε στο [7] (σελ.151). Πριν ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο, παραθέτουμε τη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck [7] (σελ. 141) η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μία μερική περίπτωση της (3.12). Να αναφέρουμε πως το μοντέλο *Vasiček* το οποίο θα μελετηθεί στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου, στηρίζεται στη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.

Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s\,ds + \sigma\int_0^t dB_s, \qquad t\in[0,t] \tag{3.14}$$

η οποία πολλές φορές αναφέρεται και ως εξίσωση Langevin, και είναι στην ουσία η εξίσωση(3.12) με $c_1(t)=c$, $c_2(t)=0$ και $\sigma_2(t)=\sigma$ με c, σ σταθερές.

Για την επίλυση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.14) θεωρούμε το μετασχηματισμό της $X_t : Y_t = e^{-ct}X_t$ και παρατηρούμε πως για τις διαδικασίες X_t, Y_t ισχύει οτι $Y_0 = X_0$ δηλαδή και οι δυο ικανοποιούν την ίδια αρχική συνθήκη.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση f(t, x)= $e^{-ct}x$ και υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της μέχρι τη δεύτερη τάξη:

$$f(t,x) = e^{-ct}x \qquad f_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,x) = -ce^{-ct}x$$

$$f_2(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}f(t,x) = e^{-ct} \qquad f_{22}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) = 0$$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 3 υποθέτοντας ότι $A^{(1)} = cX$ και $A^{(2)} = \sigma$, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_0 &= \int_0^t \left[f_1(s,X_s) + cX_s f_2(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{22}(s,X_s) \right] ds \\
&\quad + \int_0^t [\sigma f_2(s,X_s)]\,dB_s \\
&= \int_0^t [-cY_s + cY_s + 0]\,ds + \int_0^t [\sigma e^{-cs}]\,dB_s \\
&= \int_0^t [\sigma e^{-cs}]\,dB_s \\
\Rightarrow Y_t &= Y_0 + \int_0^t [\sigma e^{-cs}]\,dB_s
\end{aligned}$$

Όμως $Y_t = e^{-ct}X_t$, $Y_0 = X_0$ και $X_t = e^{ct}Y_t$ οπότε η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$\begin{aligned}
e^{-ct}X_t &= X_0 + \int_0^t [\sigma e^{-cs}]\,dB_s \\
\Rightarrow X_t &= e^{ct}X_0 + \sigma e^{ct}\int_0^t e^{-cs}\,dB_s
\end{aligned}$$

Η διαδικασία X_t είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.14). Η λύση αυτή θα μπορούσε εναλλακτικά να προκύψει με τη βοήθεια της (3.13). Αν η αρχική συνθήκη X_0 είναι σταθερά, τότε η διαδικασία X_t καλείται διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, και είναι ένα μοντέλο που δίνει τη χρονική εξέλιξη των επιτοκίων. Για λεπτομέρειες και περισσότερα παραδείγματα παραπέμπουμε στα [7] και [16].

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα μελετηθούν οι εγγυήσεις επιτοκίων στην τραπεζική, το οποίο αποτελεί και το κύριο μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι διαδικασίες martingale και οι διαδικασίες *Itô*, οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις καθώς και τα βασικά θεωρήματα, οι έννοιες και ορισμοί που αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής, θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των θεμάτων που ακολουθούν.

4

Εγγυήσεις Επιτοκίων στην Τραπεζική

Γενικά, μια εγγύηση επιτοκίου είναι μία ρήτρα επί ενός χρηματοοικονομικού συμβολαίου που επιβάλλει τον περιορισμό του τόκου εντός συγκεκριμένων ορίων. Στην τραπεζική, τέτοιες εγγυήσεις χρησιμοποιούνται ευρέως σε συμβόλαια δανείων και αποταμιεύσεων, με σκοπό να προστατευτεί ο πελάτης απέναντι σε υπερβολικά δυσμενείς διακυμάνσεις των επιτοκίων. Στην πιο συνηθισμένη τους μορφή, οι εγγυήσεις καθορίζουν ένα ονομαστικό επιτόκιο διαφορετικό από αυτό της αγοράς, βάσει του οποίου θα χρεώνεται ή θα πιστώνεται ο τόκος καθ' όλη την διάρκεια του συμβολαίου. Το ονομαστικό επιτόκιο μπορεί να είναι σταθερό, ή να συνδέεται με κάποιους δείκτες της αγοράς. Για παράδειγμα, μια τράπεζα μπορεί να χορηγήσει σε έναν δανειολήπτη μια εγγύηση η οποία θέτει ένα πλαφόν (cap), στο επιτόκιο της αγοράς. Μια παραλλαγή της εγγύησης επιτοκίου αποτελεί το λεγόμενο Ασιατικό πλαφόν (Asian cap),το οποίο περιορίζει το συνολικό ποσό του τόκου που πληρώνεται κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων περιόδων, όπως για παράδειγμα ανά χρόνο. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις μορφές πλαφόν, υπάρχει ένας αντίστοιχος λογαριασμός ταμιευτηρίου, το κατώφλι (floor), μέσω του οποίου η τράπεζα θέτει ένα κάτω φράγμα στον τόκο που κερδίζεται από τον κάτοχο του λογαριασμού. Τέτοιες εγγυήσεις, εκλαμβάνονται ως χρηματοοικονομικές απαιτήσεις και μπορούν να τιμολογηθούν με βάση τις οικονομικές αρχές.

Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει τα ειδικά χαρακτηριστικά των δανειακών συμβολαίων καθώς και τις εγγυήσεις επιτοκίου που ενσωματώνονται σε αυτά και επιπλέον τιμολογεί τις εγγυήσεις σύμφωνα με το μοντέλο επιτοκίου του Vasiček.

4.1. Εγγυήσεις Τόκων σε Δάνεια

- Δάνεια

Δάνειο είναι ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο μεταξύ δύο μερών, τον δανειστή και τον δανειολήπτη, με τα ακόλουθα βασικά χαρακτηριστικά. Τη χρονική στιγμή t=0 ο δανειστής παραχωρεί στον δανειολήπτη ένα συμφωνημένο ποσό S_0, το λεγόμενο αρχικό κεφάλαιο (principal) και εν συνεχεία ο δανειολήπτης αποπληρώνει τις αποσβέσεις (amortizations) στον δανειστή. Με A_t συμβολίζουμε το συνολικό ποσό των αποσβέσεων που έχει καταβληθεί μέχρι τη χρονική στιγμή $t \geq 0$. Η συνάρτηση πληρωμής A_t είναι πεπερασμένη, δεξιά συνεχής, μη-φθίνουσα, ενώ για τη χρονική στιγμή t = 0 ισχύει ότι $A_0 = 0$. Ο χρόνος

$$T = \{t : A_t = A_\infty\} \tag{4.1}$$

ονομάζεται *διάρκεια* του συμβολαίου, και το δάνειο θα καλείται *διηνεκές* αν $T = \infty$. Το δάνειο, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$, φέρει ονομαστικό επιτόκιο με στιγμιαίο δείκτη r_t^*. Το επιτόκιο μπορεί να είναι σταθερό, το οποίο σημαίνει ότι το r_t^* είναι μια σταθερά r^* που καθορίζεται στην έναρξη, ή μπορεί να είναι μεταβαλλόμενο, οπότε το r_t^* προσαρμόζεται συνεχώς στις συνθήκες της αγοράς. Το ονομαστικό επιτόκιο καθορίζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύει πάντα

$$r_t^* \geq 0, \ \ t \geq 0 \tag{4.2}$$

καθώς και

$$\int_0^\infty r_u^* \, du = \infty \tag{4.3}$$

Οι αποσβέσεις σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η παρούσα αξία τους τη χρονική στιγμή t = 0 να είναι ίση με το αρχικό κεφάλαιο. Θεωρώντας ως αρχικό κεφάλαιο μια νομισματική μονάδα, θέτουμε $S_0 = 1$ και έχουμε

$$\int_0^T a^{-1}(\tau) \, dA_\tau = 1 \tag{4.4}$$

όπου στην παραπάνω σχέση η ποσότητα $a^{-1}(\tau) = e^{-\int_0^\tau r_u^* \, du}$ εκφράζει την παρούσα αξία του δανείου τη χρονική στιγμή τ .

Για λογιστικούς και φορολογικούς σκοπούς, πρέπει να είναι σαφές από τη δομή του συμβολαίου πώς οι αποσβέσεις αποσυντίθενται σε αποπληρωμές κεφαλαίου και τόκο. Επομένως, για κάθε $t \geq 0$, ισχύει

$$A_t = F_t + I_t \tag{4.5}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση αποπληρωμής, I είναι μια συνάρτηση τόκου, και οι δύο δεξιά συνεχείς, μη-αρνητικές και μη-φθίνουσες, ενώ παράλληλα ισχύει ότι $F_0 = I_0 = 0$, καθώς $A_0 = 0$. Είναι αναμενόμενο το γεγονός πως οι αποπληρωμές θα πρέπει να είναι κλάσματα του αρχικού κεφαλαίου, καθώς και ότι ένα δάνειο πεπερασμένης διάρκειας θα πρέπει να αποπληρωθεί στο σύνολό του, δηλαδή:

$$F_t < 1 \text{ και } F_T = 1 \text{ εάν } T < \infty$$

Από τις (4.2) και (4.4) προκύπτει ότι $A_T \geq 1$. Η διαφορά $A_T - 1$ του αρχικού κεφαλαίου από τις αποσβέσεις είναι ο τόκος, ωστόσο αυτή η παρατήρηση από μόνη της δεν επιβάλει κάποια συγκεκριμένη δομή στις συναρτήσεις F και I. Η (4.4) με τη βοήθεια της (4.5) και για t = τ, γίνεται:

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau = 1 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} d(F_\tau + I_\tau) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau + \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dI_\tau = 1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος της (4.6) για τυχαίο t και μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης, ανάγεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau &= -\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} d(1-F_\tau) \\ &= -\left[e^{-\int_0^\tau r_u^* du}(1-F_\tau)\right]_0^t + \int_0^t (1-F_\tau)\left(e^{-\int_0^\tau r_u^* du}\right)' d\tau \\ &= -e^{-\int_0^t r_u^* du}(1-F_t) + (1-F_0) - \int_0^t (1-F_\tau) e^{-\int_0^\tau r_u^* du} r_\tau^* d\tau \\ &= -e^{-\int_0^t r_u^* du}(1-F_t) + 1 - \int_0^t (1-F_\tau) e^{-\int_0^\tau r_u^* du} r_\tau^* d\tau \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau &= 1 - e^{-\int_0^t r_u^* du}(1-F_t) - \int_0^t (1-F_\tau) e^{-\int_0^\tau r_u^* du} r_\tau^* d\tau \Rightarrow \\ e^{-\int_0^t r_u^* du}(1-F_t) &= 1 - \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du}(1-F_\tau) r_\tau^* d\tau - \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau \end{aligned} \tag{4.7}$$

Θα μελετήσουμε το αριστερό μέλος της (4.7) για t = T. Ιδιαίτερα έχουμε:

i. Αν $t = \infty$ και με τη βοήθεια της (4.3), προκύπτει:

$$e^{-\int_0^\infty r_u^* du}(1-F_T) = 0$$

ii. Αν $<\infty$, τότε είναι προφανές λόγω της σχέσης $F_T = 1$ ότι:

$$e^{-\int_0 r_u^* du}(1 - F_T) = 0$$

Τελικά, από (4.7) προκύπτει για t = T:

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau + \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du}(1 - F_\tau) r_\tau^* d\tau = 1 \tag{4.8}$$

Από τις (4.6) και (4.8) λαμβάνουμε εύκολα ότι:

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dI_\tau = \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du}(1 - F_\tau) r_\tau^* d\tau \tag{4.9}$$

Η σχέση αυτή περιγράφει τη θεώρηση του συνεχώς καταβαλλόμενου φυσικού τόκου, και ορίζει ως dI_t:

$$dI_t = (1 - F_t) r_t^* dt \tag{4.10}$$

ή εναλλακτικά ως

$$I_t = \int_0^t (1 - F_\tau) r_\tau^* d\tau \tag{4.11}$$

Στην (4.10), η έκφραση $1 - F_t$ είναι το άληκτο κεφάλαιο τη χρονική στιγμή t και το ονομαστικό επιτόκιο που παράγεται από το κεφάλαιο αυτό στο χρονικό διάστημα $[t, t + dt)$ είναι η έκφραση στο δεξί μέλος. Έτσι, το δεξί μέλος της (4.9) δηλώνει ότι η προεξοφλημένη συνολική αξία των καταβολών του τόκου θα πρέπει να ισούται με την προεξοφλημένη συνολική αξία του τόκου που προκύπτει συνεχώς από τις τρέχουσες άληκτες οφειλές.

Υπό τη θεώρηση του φυσικού τόκου υπάρχει μια "ένα προς ένα" αντιστοιχία των συναρτήσεων A και F. Από τη μια μεριά για ένα δεδομένο πλάνο αποπληρωμής F, οι αποσβέσεις σύμφωνα με την (4.5) και με τη βοήθεια της (4.11) δίνονται από

$$A_t = F_t + \int_0^t (1 - F_\tau) r_\tau^* d\tau \tag{4.12}$$

Από την άλλη μεριά, για δεδομένο πλάνο απόσβεσης A, το σκεπτικό που ακολουθούμε για την εύρεση της έκφρασης των αποπληρωμών, έχει ως εξής: Η διαφορική έκφραση της (4.5) είναι η

$$dA_t = dF_t + dI_t \tag{4.13}$$

οπότε, αντικαθιστώντας την (4.10) στην (4.13) προκύπτει ότι:

$$dA_t = dF_t + (1 - F_t) r_t^* dt \tag{4.14}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με $e^{-\int_0^\tau r_u^* du}$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως t, λαμβάνουμε:

$$\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau = \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dF_\tau + \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du}(1 - F_\tau) r_\tau^* d\tau \tag{4.15}$$

Με τη βοήθεια των (4.7) και (4.15), εύκολα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau &= 1 - e^{-\int_0^t r_u^* du}(1 - F_t) \\ \Rightarrow e^{-\int_0^t r_u^* du}(1 - F_t) &= 1 - \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau \end{aligned}$$

και επιλύοντας ως προς τον όρο $1 - F_t$, έχουμε:

$$1 - F_t = e^{\int_0^t r_u^* du}\left(1 - \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau\right). \tag{4.16}$$

Η (4.16) δηλώνει ότι το υπολειπόμενο αρχικό κεφάλαιο είναι η τιμή του αρχικού κεφαλαίου αφαιρώντας τις ήδη πληρωμένες αποσβέσεις, με όλα τα ποσά ανατοκισμένα. Επίσης, με τη βοήθεια της (4.4) και για χρονικό διάστημα [t, T] με t > 0, παίρνουμε την εναλλακτική σχέση

$$\int_t^T e^{-\int_t^\tau r_u^* du} dA\tau = 1 - F_t \tag{4.17}$$

η οποία δηλώνει ότι υπολειπόμενο αρχικό κεφάλαιο είναι η προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών αποσβέσεων. Εκτός και αν η διαδικασία r_t^* είναι ντετερμινιστική, η έκφραση (4.16) είναι πιο χρήσιμη καθώς ερμηνεύει την έκφραση $1 - F_t$ σε όρους παρατηρήσιμους τη χρονική στιγμή t.

- Κλασικά Δανειακά Συμβόλαια

Στην υποενότητα αυτή, θα παραθέσουμε τρεις κύριες μορφές δανείων που χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινότητα, θεωρώντας αυτές σε συνεχή χρόνο υπό την παραδοχή του φυσικού τόκου, όπως αυτός ορίζεται από την (4.10).

• Η πρώτη και πιο απλή μορφή, είναι αυτή στην οποία το δάνειο προκαθορισμένης διάρκειας T αποπληρώνεται σε μια μόνο δόση, με τη συνάρτηση αποπληρωμών να δίνεται από τη σχέση:

$$F_t = 1_{[T,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \omega \in [T, \infty) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.18}$$

• Η δεύτερη μορφή, αφορά δάνεια με σταθερές αποπληρωμές για μια συγκεκριμένη περίοδο T ετών, και η συνάρτηση F_t δίνεται από τη σχέση

$$F_t = \frac{t \wedge T}{T}, \quad \text{όπου } t \wedge T = \min(t, T)$$

• Η τρίτη μορφή δανείου, είναι αυτή όπου οι αποσβέσεις καταβάλλονται με σταθερό ρυθμό μέχρι και τη λήξη του συμβολαίου, και ονομάζεται *ράντα*. Πιο συγκεκριμένα, το διαφορικό της συνάρτησης A γράφεται ως

$$dA_t = 1_{(0,T]}(t)\,\alpha\,dt \Rightarrow 1_{(0,T]}(t)\,\alpha = \frac{dA_t}{dt}$$

με α να εκφράζει το ρυθμό μεταβολής των αποσβέσεων και να είναι σταθερά τη χρονική στιγμή t = 0. Αντικαθιστώντας τη σχέση $dA_t = 1_{(0,T]}(t)\,\alpha\, dt$ για $t = \tau$ στην (4.4), προκύπτει:

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} dA_\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} 1_{(0,T]}(\tau)\alpha d\tau = 1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u^* du} d_\tau = 1, \tag{4.19}$$

όπου για τη διάρκεια T του δανείου, ισχύει πως είναι η μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Σε σχήμα μεταβλητού επιτοκίου με r_t^* να είναι μια στοχαστική διαδικασία, η T είναι μια τυχαία μεταβλητή (ένας χρόνος στάσης). Είναι προφανές πως το α πρέπει να επιλεγεί αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε η πιθανότητα το δάνειο να αποπληρωθεί στο σύνολό του να είναι βέβαιη, δηλαδή:

$$\mathbf{P}\left[\alpha \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau r_u^* du} d_\tau \geq 1\right] = 1 \tag{4.20}$$

4.2. Αποτίμηση των Δανείων

- Τιμολόγηση των Δανείων ως Παράγωγα

Ας υποθέσουμε πως το ονομαστικό επιτόκιο σε οποιαδήποτε στιγμή είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του τρέχοντος επιτοκίου αγοράς:

$$r_t^* = r^*(r_t) \tag{4.21}$$

Τότε, το δανειακό συμβόλαιο είναι ένα επιτοκιακό παράγωγο. Η τιμή του τη χρονική στιγμή t = 0 είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία του συνόλου των πληρωμών από τον δανειολήπτη στον δανειστή,

$$\pi = 1 - \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dA_\tau\right] \tag{4.22}$$

Η αναμενόμενη μέση τιμή $\mathbf{E}$ είναι συνδεδεμένη με το μέτρο τιμολόγησης που εφαρμόζεται στην αγορά. Υποθέτουμε στο εξής ότι η μέση τιμή στην (4.22) υπάρχει και είναι πεπερασμένη.

Προς το παρόν θα εργαστούμε με τον φυσικό τόκο, όπως αυτός δίνεται από την (4.10) και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.13) και (4.21) έχουμε

$$dA_t = dF_t + (1 - F_t)r^*(r_t)dt$$

Προσθαφαιρώντας στην παραπάνω σχέση την ποσότητα $(1-F_t)r_t dt$, προκύπτει

$$dA_t = dF_t + (1-F_t)r_t dt - (1-F_t)(r_t - r^*(r_t))dt$$

Βάσει της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dA_\tau &= \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} \left[dF_\tau + (1-F_\tau)r_\tau d\tau - (1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))d\tau\right] \\
\Rightarrow \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dA_\tau &= \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dF_\tau + \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} (1-F_\tau) r_\tau d\tau \\
&\quad - \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} (1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))d\tau, \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της (4.23) δίνουν άθροισμα 1 (προφανές λόγω της (4.8) άν θέσουμε όπου r_t^* το r_t) και συνεπώς:

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dA_\tau = 1 - \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} (1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))d\tau \qquad (4.24)$$

Αντικαθιστώντας την (4.24) στην (4.22), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\pi = 1 - \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} dA_\tau\right] &= 1 - \mathbf{E}\left[1 - \int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du} (1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))d\tau\right] \\
&= 1 - 1 + \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))\, d\tau\right] \\
\Rightarrow \pi &= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))\, d\tau\right] \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Έτσι, η τιμή π καλύπτει το έλλειμμα του ονομαστικού επιτοκίου συγκριτικά με το επιτόκιο της αγοράς καθ' όλη τη διάρκεια του δανειακού συμβολαίου.

- Εγγυήσεις Επιτοκίου

Ο σκοπός του καθορισμού ενός ονομαστικού επιτοκίου διαφορετικού από το επιτόκιο της αγοράς είναι η προστασία του δανειολήπτη από τον κίνδυνο της ασαφούς εξέλιξης της πορείας της αγοράς. Επομένως, το δάνειο έχει μια εγγύηση επιτοκίου ενσωματωμένη σε αυτό, χαρακτηριστικό που εμφανίζεται στην (4.25). Είναι αναμενόμενο πως η εγγύηση δε μπορεί να δοθεί άνευ χρέωσης, αλλά η ουσία βρίσκεται στο ότι η τιμή της είναι γνωστή και ακίνδυνη συγκριτικά με οποιαδήποτε κατάσταση της αγοράς.

Για ένα καλά σχεδιασμένο δανειακό προϊόν η τιμή του π στη σχέση (4.25) θα ήταν ένα μικρό ποσό που θα μπορούσε να κρατηθεί προκαταβολικά τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε το π ως μια προμήθεια του δανείου. Ωστόσο, το δανειακό συμβόλαιο συχνά θα σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να καθιστά την τιμή του π μηδενική, με αποτέλεσμα η εγγύηση και η τιμή της να γίνονται "αόρατες" στον πελάτη (ο οποίος βλέπει μόνο το ονομαστικό επιτόκιο). Αν το π ήταν ένα μεγάλο ποσό, τότε ίσως θα μετατρεπόταν σε μια σειρά δόσεων των οποίων η συνολική αγοραία τιμή τη χρονική στιγμή t = 0 είναι π.

Αν το ονομαστικό επιτόκιο είναι ακριβώς το επιτόκιο της αγοράς, δηλαδή $r^*(r_t)$, τότε η τιμή του π που προκύπτει από την (4.25) είναι μηδενική. Αυτή είναι μια περίπτωση - σημείο αναφοράς - όπου δεν υφίσταται εγγύηση και δεν παρέχεται καμία ανακούφιση όσον αφορά το επιτόκιο βάσει του οποίου αποπληρώνει το δάνειο ο δανειολήπτης. Πλήρης εξάλειψη του επιτοκιακού κινδύνου που αντιμετωπίζει ο δανειολήπτης επιτυγχάνεται με το σχέδιο σταθερού επιτοκίου με r^* σταθερά. Συνήθως επιλέγεται r^* με τέτοιο τρόπο, ώστε να προκύπτει μηδενική τιμή του π στην σχέση (4.25). Πιο συγκεκριμένα, επιλέγοντας την ακόλουθη τιμή για το r^*

$$r^* = \frac{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)r_\tau d\tau]}{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)\, d\tau]}$$

και αντικαθιστώντας αυτή στην (4.25), λαμβάνουμε $\pi = 0$. Όντως έχουμε:

$$\begin{aligned}
\pi &= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)(r_\tau - r^*(r_\tau))\, d\tau\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)\left(r_\tau - \frac{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)r_\tau d\tau]}{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)\, d\tau]}\right) d\tau\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)\left(\frac{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)r_\tau d\tau] - \mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)r_\tau d\tau]}{\mathbf{E}[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(1-F_\tau)\, d\tau]}\right) d\tau\right] \\
\Rightarrow \pi &= 0
\end{aligned}$$

Τα πιθανά σχήματα μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων που περιγράφονται παραπάνω είναι πολλά. Μια μορφή εγγύησης επιτοκίου που χρησιμοποιείται συχνά είναι η

$$r^*(r_t) = r_t \wedge \bar{r} := min(r_t, \bar{r})$$

με $\bar{r}$ κάποια θετική σταθερά. Επομένως, το ονομαστικό επιτόκιο είναι το επιτόκιο της αγοράς προσαρμοσμένο σε κάποιο σταθερό ανώτατο φράγμα $\bar{r}$. Σύμφωνα με το κάτωθι σχήμα

$$r_t - r^*(r_t) = (r_t - \bar{r})_+ := (r_t - \bar{r}) \vee 0 = max(r_t - \bar{r}, 0)$$

και την (4.25) προκύπτει:

$$\pi = \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u du}(r_\tau - \bar{r})_+ (1-F_\tau)\, d\tau\right] \tag{4.26}$$

Αν η F είναι σταθερή, έτσι ώστε το T να είναι μη τυχαίο, τότε η (4.26) ανάγεται στην

$$\pi = \int_0^T \pi_\tau^c (1 - F_\tau)\, d\tau \tag{4.27}$$

με

$$\pi_t^c = \mathbf{E}\left[e^{-\int_0^t r_u du} (r_t - \bar{r})_+ \right] \tag{4.28}$$

να είναι η τιμή του επιτοκιακού παραγώγου με πληρωμή $(r_t - \bar{r})_+$ τη χρονική στιγμή t. Αυτό το παράγωγο είναι στενά συνδεδεμένο με το λεγόμενο επιτόκιο πλαφόν (caplet) με πληρωμή $r \wedge \bar{r} = r_t - (r_t - \bar{r})_+$ τη χρονική στιγμή t.

Εξαιτίας της μη-γραμμικότητας του ολοκληρώματος στην (4.26), η τιμή του $\bar{r}$ για την οποία προκύπτει $\pi = 0$ δε μπορεί να καθοριστεί τόσο άμεσα όσο στην περίπτωση του σταθερού επιτοκίου. Θα πρέπει με δοκιμές να βρούμε τη ρίζα της εξίσωσης $\pi(\bar{r}) = 0$, γεγονός σχετικά εύκολο καθώς το π είναι φθίνουσα συνάρτηση του $\bar{r}$. Στο εξής θα επικεντρωθούμε στον καθορισμό του π για μια συγκεκριμένη συνάρτηση του ονομαστικού επιτοκίου $r^*(\cdot)$. Αυτό το πρόβλημα εξαρτάται από τις προδιαγραφές του μοντέλου του επιτοκίου, και θα μελετήσουμε τις λεπτομέρειες σε ένα μοντέλο - υπόδειγμα: το μοντέλο διάχυσης επιτοκίου.

4.3. Εγγυήσεις σε Επιτόκια Διάχυσης

Θα μελετήσουμε πρώτα το μοντέλο διάχυσης επιτοκίου.

◊ Το μοντέλο διάχυσης επιτοκίου

Ένα γενικευμένο μοντέλο διάχυσης επιτοκίου καθορίζει ότι το $(r_t)_{t \geq 0}$ είναι η λύση σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t \tag{4.29}$$

ξεκινώντας από μια δοσμένη τιμή του r_0. Εδώ W είναι μια τυπική κίνηση Brown (κάτω από το μέτρο τιμολόγησης), η **τάση** $\mu(r_t, t)$ καθορίζει την τοπική συστηματική εξέλιξη της διαδικασίας, και οι κλίμακες μεταβλητότητας $\sigma(r_t, t)$ ορίζουν την καθαρά τυχαία κίνηση Brown. Θεωρούμε επαρκείς υποθέσεις ομαλότητας για τους συντελεστές μ και σ ώστε να εξασφαλίσουμε ότι η στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.29) έχει μια λύση η οποία ικανοποιεί κάθε ιδιότητα που της αποδίδεται σύμφωνα με τα ακόλουθα.

Ο χώρος καταστάσεων της διαδικασίας εξαρτάται από τον καθορισμό των συντελεστών σ και μ και τυπικά είναι ή ο πραγματικός άξονας ή ο γνήσια θετικός ημιάξονας. Υποθέτουμε ότι είναι ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής $(\underline{r}, \infty)$. Υποθέτουμε επιπλέον τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = \{r_t = r\}$ (βλέπε αργότερα σχέση (4.31)) στην οποία είναι προσαρμοσμένη η διαδικασία r, καθώς και ότι η $\mathcal{F}_0$ είναι η τετριμμένη. Η διαδικασία r είναι διαδικασία Markov γιατί το δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης (4.29) αφορά μόνο την τρέχουσα κατάσταση r_t. Αν προσθέσουμε την υπόθεση ομοιογένειας,

$$(\mu(r,t),\sigma(r,t)) = (\mu(r),\sigma(r)) \tag{4.30}$$

ανεξάρτητη από το t, τότε η διαδικασία r έχει στάσιμη κατανομή. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικές με την κίνηση Brown, τις στοχαστικές διαδικασίες και τις ιδιότητες τους, παραπέμπουμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

- Δάνεια με σταθερή Συνάρτηση Αποπληρωμής

Ας θεωρήσουμε ένα δάνειο με σταθερή συνάρτηση αποπληρωμής F και συνεπώς σταθερή διάρκεια T. Σκοπεύοντας να λάβουμε το π της σχέσης (4.25) ως λύση της διαφορικής εξίσωσης, ξεκινάμε από τη martingale M_t που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
M_t &= \mathbf{E}\left(\int_0^T e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|\mathcal{F}_t + \int_t^T e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|\mathcal{F}_t\right)\\
&\quad +\mathbf{E}\left(\int_t^T e^{-\int_0^t r_u\,du}e^{-\int_t^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|\mathcal{F}_t\right)\\
\Rightarrow M_t &= \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau + e^{-\int_0^t r_u\,du}V(r_t,t)
\end{aligned}$$

όπου

$$V(r,t) = \mathbf{E}\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau|r_t = r\right] \tag{4.31}$$

Βάσει της ιδιότητας Markov, η παρελθοντική συμπεριφορά της διαδικασίας πριν από τη χρονική στιγμή t δεν επηρεάζει τη μελλοντική της εξέλιξη, όταν η παρούσα κατάσταση r_t είναι δοσμένη. Από το γενικό κανόνα αλυσίδας, διαφορίζοντας την (4.31) και με τη βοήθεια της (4.29), προκύπτει:

$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(r_\tau - r^*(r_\tau))(1-F_\tau)\,d\tau\right]dt + \frac{d}{dt}\left[e^{-\int_0^t r_u\,du}\right]dt\,V(r_t,t) \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_u\,du}\,d(V(r_t,t)) \\ &= e^{-\int_0^t r_u\,du}(r_t - r^*(r_t))(1-F_t)\,dt + \frac{d}{dt}\left[-\int_0^t r_u\,du\right]e^{-\int_0^t r_u\,du}V(r_t,t)dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_u\,du}dV(r_t,t) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Θα υπολογίσουμε το $dV(r_t,t)$ ως ανάπτυγμα σε σειρά Taylor [14] της συνάρτησης $V(r_t,t)$ η οποία είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών.

$$\begin{aligned} dV(r_t,t) &= \left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)V(r_t,dt) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)^2 V(r_t,dt) + O\left((\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial t}dt)^3\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(dr)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial t}dr\,dt\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}(\mu(r_t,t)\,dt + \sigma(r_t,t)\,dW_t) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(\mu(r_t,t)\,dt + \sigma(r_t,t)\,dW_t)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\mu(r_t,t)\,dt + \frac{\partial V}{\partial r}\sigma(r_t,t)\,dW_t + \frac{\partial V}{\partial t}dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\left(\mu^2(r_t,t)\,(dt)^2 + \sigma^2(r_t,t)\,d(W_t)^2 + 2\mu(r_t,t)\sigma(r_t,t)\,dW_t\,dt\right) \\ \Rightarrow dV(r_t,t) &= \frac{\partial V}{\partial r}\mu(r_t,t)\,dt + \frac{\partial V}{\partial r}\sigma(r_t,t)\,dW_t + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sigma^2(r_t,t)\,dt \end{aligned}$$

Για την εκτέλεση των παραπάνω πράξεων, ελήφθησαν υπόψη τα κάτωθι:

i. $d(W_t)^2 = dt$ και $(dt)^2 = dt\,dt = 0$ ([16] σελ. 149)

ii. Δεν έχουν αναπτυχθεί οι όροι τρίτης τάξης $O\left((\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial t}dt)^3\right)$, καθώς έχουν μηδενική συνεισφορά. Αναφέρουμε από μαθηματική άποψη ότι γενικά O(f)= g $\iff \exists$ σταθερά M τέτοια ώστε

$$|g(x)| \leq M\,|f(x)|$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $dV(r_t,t)$ στην (4.32) , φτάνουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} dM_t &= e^{-\int_0^t r_u du}(r_t - r^*(r_t))(1-F_t)dt - e^{-\int_0^t r_u du} r_t dt V(r_t,t) \\ &+ e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial}{\partial r}V(r_t,t)(\mu(r_t,t)dt + \sigma(r_t,t)dW_t) \\ &+ e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial}{\partial t}V(r_t,t)dt + \frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial^2}{\partial r^2}V(r_t,t)\sigma^2(r_t,t)dt \end{aligned} \tag{4.33}$$

Επειδή η M είναι διαδικασία martingale, οι όροι που περιέχουν dt στο δεξί μέλος εξαλείφονται σχεδόν βέβαια (σ.β.), και έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 9 *Η συνάρτηση V(r,t) της σχέσης (4.31) ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}V(r,t) &= rV(r,t) - (r - r^*(r))(1-F_t) \\ &-\mu(r,t)\frac{\partial}{\partial r}V(r,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)\frac{\partial^2}{\partial r^2}V(r,t) \end{aligned} \tag{4.34}$$

με $(r,t) \in (\underline{r},\infty) \times (0,T)$ *και την συνοριακή συνθήκη*

$$V(r,T) = 0, \quad r \in (\underline{r},\infty) \tag{4.35}$$

Η τιμή του π *στην (4.25) είναι* $\pi = V(r_0,0)$

Απόδειξη

Με τη βοήθεια της (4.33), αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση V(r, t) ικανοποιεί την (4.34). Φαίνεται καθαρά ότι για t = T , η (4.34) παίρνει τη μορφή $F_T = 1$ δεδομένης της συνθήκης (4.35). Τέλος, όσον αφορά την τιμή του π, το αποτέλεσμα προκύπτει με τη βοήθεια των σχέσεων 4.25 και 4.31 , αν στην τελευταία θέσουμε t = 0.

- Ράντες

Μια ράντα δεν περιέχει εγγύηση επιτοκίου, καθώς οι ίδιες οι αποσβέσεις είναι σταθερές, ανεξάρτητα από τις διακυμάνσεις του επιτοκίου της αγοράς. Με τον τόκο να χρεώνεται σύμφωνα με το επιτόκιο της αγοράς, το ρίσκο του τόκου θα πραγματωνόταν μόνο σε τυχαία χρονική στιγμή λήξης του δανείου, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (4.19) με $r_t^* = r_t$.

Αν θα θέλαμε να μειώσουμε τον κίνδυνο μιας ράντας μεγάλης διάρκειας, θα μπορούσαμε να το κάνουμε με άμεσο τρόπο θέτοντας ένα άνω φράγμα στην διάρκεια του δανείου καθεαυτή, ή θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα ονομαστικό επιτόκιο που θα φράσσει τη διάρκεια του δανείου. Θα αναλύσουμε την εγγύηση τόκου της δεύτερης εκδοχής, και για αυτό το λόγο υποθέτουμε ότι το ονομαστικό επιτόκιο είναι της μορφής (4.21) το οποίο ικανοποιεί την (4.20). Θα αποδείξουμε ότι μια μεταβλητή κατάστασης σε αυτό το πρόβλημα είναι το υπολειπόμενο αρχικό κεφάλαιο $1-F_t$. Βάσει της (4.16) με $dA_t = \alpha dt$ για t < T, μπορούμε να εκφράσουμε το υπολειπόμενο αρχικό κεφάλαιο ως

$$1-F_t = S_t \vee 0 = max(S_t, 0)$$

όπου σύμφωνα με την (4.16)

$$S_t := e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\left(1-\alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right) \tag{4.36}$$

Η τιμή του π της σχέσης (4.25) είναι

$$\pi = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(S_t\vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau\right] \tag{4.37}$$

Για να καταλήξουμε σε μια διαφορική εξίσωση από την οποία θα μπορούσε να κατασκευαστεί η τιμή του π , διερευνούμε τη διαδικασία martingale, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό όπως στη σχέση (4.31):

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(S_\tau\vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(S_\tau\vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_u\,du}\mathbf{E}\left[\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r_u\,du}(S_\tau\vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{4.38}$$

Μέσα στη δεσμευμένη μέση τιμή στο δεύτερο όρο της (4.38) πρέπει να αναγνωρίσουμε εκείνες τις τυχαίες μεταβλητές που αφορούν στο παρελθόν και εκείνες που αφορούν στο μέλλον, αντίστοιχα. Για $t=\tau$ η (4.36) γίνεται:

$$S_\tau = e^{\int_0^\tau r^*(r_u)\,du}\left(1-\alpha\int_0^\tau e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right)$$

Έστω $t\in(0,\tau)$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} S_\tau &= e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}e^{\int_t^\tau r^*(r_u)\,du}\left(1-\alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu - \alpha\int_t^\tau e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right) \\ &= e^{\int_t^\tau r^*(r_u)\,du}\left[e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\left(1-\alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right) - \alpha e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\int_t^\tau e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right] \\ &= e^{\int_t^\tau r^*(r_u)\,du}\left[S_t - \alpha\int_t^\tau e^{-\int_t^0 r^*(r_u)\,du}e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right] \end{aligned}$$

Συνεπώς η διαδικασία S ικανοποιεί την αναδρομική εξίσωση:

$$S_\tau = e^{\int_t^\tau r^*(r_u)\,du}\left[S_t - \alpha \int_t^\tau e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right]$$

η οποία είναι το προφανές ανάλογο $(t,\tau]$ της (0,t] έκφρασης (4.36). Έτσι, λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας της διαδικασίας r_t, προκύπτει

$$M_t = \int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(S_\tau \vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau + e^{-\int_0^t r_u\,du}V(r_t,S_t,t) \tag{4.39}$$

όπου

$$V(r,s,t) = \mathbf{E}\left[\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau (r_u - r^*(r_u))\,du}\left(s - \alpha\int_t^\tau e^{-\int_t^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right)_+ d\tau | r_t = r\right] \tag{4.40}$$

Από το γενικό τύπο του *Itô*, χρησιμοποιώντας τη διαφορική μορφή της (4.36), προκύπτει

$$\begin{aligned}
dS_t &= \frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\right)(1 - \alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu)\,dt \\
&\quad + e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\frac{d}{dt}\left(1 - \alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right)dt \\
&= r^*(r_t)\,e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\left(1 - \alpha\int_0^t e^{-\int_0^\nu r^*(r_u)\,du}\,d\nu\right)dt \\
&\quad + e^{\int_0^t r^*(r_u)\,du}\left(-\alpha e^{-\int_0^t r^*(r_u)\,du}\,dt\right) \\
\Rightarrow dS_t &= (S_t\,r^*(r_t) - \alpha)\,dt
\end{aligned}$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (4.39), λαμβάνουμε τη διαφορική μορφή της M:

$$\begin{aligned}
dM_t &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{-\int_0^\tau r_u\,du}(S_\tau \vee 0)(r_\tau - r^*(r_\tau))\,d\tau\right]dt + \frac{d}{dt}\left[e^{-\int_0^t r_u\,du}\right]dt\,V(r_t,S_t,t) \\
&\quad + e^{-\int_0^t r_u\,du}\,d\,(V(r_t,S_t,t) \\
&= e^{-\int_0^t r_u\,du}(S_t \vee 0)(r_t - r^*(r_t))\,dt - e^{-\int_0^t r_u\,du}r_t dt\,V(r_t,S_t,t) \\
&\quad + e^{-\int_0^t r_u\,du}\,d\,(V(r_t,S_t,t)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Θα υπολογίσουμε τον όρο $d\left(V(r_t,S_t,t\right)$, αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor τη συνάρτηση τριών μεταβλητών $V(r_t,S_t,t)$

$$\begin{aligned}
d\left(V(r_t,S_t,t)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial r}dr+\frac{\partial}{\partial s}ds+\frac{\partial}{\partial t}dt\right)V(r_t,S_t,t) \\
&+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial r}dr+\frac{\partial}{\partial s}ds+\frac{\partial}{\partial t}dt\right)^2 V(r_t,S_t,t)+O\left(\frac{\partial}{\partial r}dr+\frac{\partial}{\partial s}ds+\frac{\partial}{\partial t}dt\right)^3 \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial s}ds+\frac{\partial V}{\partial t}dt \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(dr)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(ds)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial s}dr\,ds\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial t}dr\,dt+2\frac{\partial^2 V}{\partial s\partial t}ds\,dt\right] \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial s}ds+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(dr)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(ds)^2\right] \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}(\mu dt+\sigma dW_t)+\frac{\partial V}{\partial s}(S_t r^*(r_t)-\alpha)\,dt+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(\mu dt+\sigma dW_t)^2 \\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\left[(S_t r^*(r_t)-\alpha)^2\,dt^2\right] \\
&= \mu\frac{\partial V}{\partial r}dt+\sigma\frac{\partial V}{\partial r}dW_t+\frac{\partial V}{\partial s}(S_t r^*(r_t)-\alpha)\,dt+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sigma^2\,d(W_t)^2 \\
\Rightarrow d\left(V(r_t,S_t,t\right) &= \mu\frac{\partial V}{\partial r}dt+\sigma\frac{\partial V}{\partial r}dW_t+\frac{\partial V}{\partial s}(S_t r^*(r_t)-\alpha)\,dt+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sigma^2\,dt
\end{aligned}$$

Τελικά, με αντικατάσταση της τελευταίας στην (4.41) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
dM_t &= e^{-\int_0^t r_u du}(S_t\vee 0)(r_t-r^*(r_t))\,dt+e^{-\int_0^t r_u du}(-r_t dt)V(r_t,S_t,t) \\
&+e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial}{\partial r}V(r_t,S_t,t)\mu(r_t,t)dt+\sigma(r_t,t)dW_t) \\
&+e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial}{\partial s}V(r_t,S_t,t)(S_t r^*(r_t-\alpha)dt \\
&+\frac{\partial}{\partial t}V(r_t,S_t,t)dt+\frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_u du}\frac{\partial^2}{\partial r^2}V(r_t,S_t,t)\sigma^2(r_t,t)dt
\end{aligned}\tag{4.42}$$

Εξισώνοντας το άθροισμα των όρων που περιέχουν dt με το 0, καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα

Θεώρημα 10 *Η συνάρτηση V(r,s,t) ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}V(r,s,t) &= rV(r,s,t) - s(r - r^*(r)) - \mu(r,t)\frac{\partial}{\partial r}V(r,s,t) \\ &\quad -(sr^*(r) - \alpha)\frac{\partial}{\partial s}V(r,s,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)\frac{\partial^2}{\partial r^2}V(r,s,t) \qquad (4.43)\end{aligned}$$

$(r,s,t) \in (r,\infty) \times (0,1) \times (0\infty)$ *και τις συνθήκες*

$$V(r,0,t) = 0,\ (r,t) \in (\underline{r},\infty) \times (0,\infty)$$

$$V(\infty,s,t) = 0(s,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

Η τιμή του π στην (4.37) είναι $\pi = V(r_0,1,0)$.

Αν οι συντελεστές σ και μ είναι ανεξάρτητοι του t, τότε, από τη στιγμή που ο ρυθμός απόσβεσης α είναι σταθερός, η μερική διαφορική εξίσωση (4.43) ανάγεται σε μια αντίστοιχη με δύο μόνο μεταβλητές **(ελλειπτικού τύπου)**.

Πόρισμα Αν υποθέσουμε την συνθήκη ομοιογένειας (4.30) η συνάρτηση V(r,s) της (4.40) ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}&rV(r,s) - s(r - r^*(r)) - \mu(r)\frac{\partial}{\partial r}V(r,s) \\ &-(sr^*(r) - \alpha)\frac{\partial}{\partial s}V(r,s) - \frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2}{\partial r^2}V(r,s) = 0\end{aligned}$$

$(r,s) \in (\underline{r},\infty) \times (0,1)$, και τη συνθήκη

$$V(r,0) = 0,\ r \in (\underline{r},\infty)$$

Η τιμή του π στην (4.37) είναι $\pi = V(r_0,1)$

- Αριθμητικές Μέθοδοι

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDE's) που χρησιμοποιούνται σε αυτό το μέρος συνήθως δε δέχονται λύσεις κλειστού τύπου και πρέπει να λυθούν αριθμητικά. Οι καταστάσεις που συναντήσαμε στο Θεώρημα 9 και στο Πόρισμα είναι ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος του Cauchy, για τις οποίες υπάρχουν τυποποιημένες μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (Duffie, 1996). Αριθμητικές μέθοδοι για διαφορικές εξισώσεις υψηλότερης τάξης όπως αυτή στη σχέση (10) περιγράφονται από τους Press et al. (1992).

4.4. Λύσεις Κλειστού Τύπου

Το μοντέλο *Vasiček*

Μια ειδική περίπτωση του μοντέλου διάχυσης επιτοκίου (4.29) είναι το μοντέλο *Vasiček* , το οποίο ορίζει ότι το r_t είναι η λύση της

$$dr_t = \alpha(\rho - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{4.44}$$

ή της αντίστοιχης ολοκληρωτικής της μορφής μέσω της γραμμικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$r_t = r_0 + \alpha \int_0^t [\rho - r_s]\, ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad t \in [t, 0] \tag{4.45}$$

και είναι μια διαδικασία Ornstein–Uhlenbeck. Στις παραπάνω σχέσεις, ρ είναι ο σταθμικός μέσος της ανέλιξης, η μεταβλητότητα σ είναι μια σταθερά και α μια θετική παράμετρος επιστροφής ως προς τη μέση τιμή. Η διαδικασία αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη ομοιογένειας (4.30). Σε αυτό το μοντέλο η οριακή κατανομή του r_t είναι η κανονική, η οποία έπεται ότι μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές με θετική πιθανότητα.

Για την εύρεση της λύσης της (4.44), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η αντίστοιχη ολοκληρωτική της έκφραση (4.45) είναι μία γραμμική εξίσωση της μορφής (3.12) της οποίας η λύση δίνεται από την (3.13). Έστω $c_1 = -\alpha$ τότε

$$y(t) = e^{-\int_0^t c_s ds} = e^{\int_0^t \alpha ds} = e^{at}$$

Θεωρώντας επιπλέον $c_2 = \alpha\rho$ και $\sigma_2 = \sigma$ προκύπτει λόγω της (3.13) η λύση της (4.44):

$$\begin{aligned}
r_t &= e^{-\alpha t}\left(r_0 + \int_0^t \alpha\rho e^{\alpha s}\, ds + \sigma \int_0^t e^{\alpha s}\, dW_s\right) \\
&= r_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\int_0^t \alpha\rho e^{\alpha s}\, ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, dW_s \\
&= r_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\rho\left(e^{\alpha t} - 1\right) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, dW_s \\
\Rightarrow r_t &= \rho + e^{-\alpha t}(r_0 - \rho) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, dW_s
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση από 0 έως t, προκύπτει [11]:

$$\int_0^t r_u\, du = \rho t + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}(r_0 - \rho) + \frac{\sigma}{\alpha}\int_0^t (1 - e^{-\alpha(t-s)})\, dW_s$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι οι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές $X = r_t$ και $Y = \int_0^t r_u\, du$ ακολουθούν την κανονική κατανομή,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\right)$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά τις ποσότητες που αφορούν την τυχαία μεταβλητή $X = r_t$ με r_t να είναι της μορφής (4.45). Λαμβάνοντας τις μέσες τιμές και των δύο μελών της (4.45) και δεδομένου ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος ισούται με μηδέν, προκύπτει:

$$\mu_x(t) = \mu_x(0) + \int_0^t (-\alpha \mu_x(s) + \alpha \rho)\, ds$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, καταλήγουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\mu_x'(t) = -\alpha \mu_x(t) + \alpha \rho \Rightarrow \frac{d\mu_x(t)}{dt} + \alpha \mu_x(t) - \alpha \rho = 0 \tag{4.46}$$

η οποία είναι της γενικής μορφής:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y + Q(x) = 0 \tag{4.47}$$

και η λύση της είναι η

$$Y = e^{-\int P\, dx}\left[c - \int Q e^{\int P\, dx}\, dx\right] \tag{4.48}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μεθοδολογία επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, παραπέμπουμε στο [21] (σελ.39). Συγκρίνοντας τις (4.46) και (4.47), εύκολα βλέπουμε πως $P(x) = \alpha$ και $Q(x) = -\alpha\rho$. Συνεπώς, λόγω της (4.48) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\mu_x(t) &= e^{-\int \alpha dt}\left[c - \int -\alpha\rho\, e^{\int \alpha dt}\, dt\right] \\
\Rightarrow \mu_x(t) &= e^{-\alpha t}\left(c + \alpha\rho \int e^{\alpha t}\, dt\right) \\
\Rightarrow \mu_x(t) &= e^{-\alpha t}\left(c + \rho \int e^{\alpha t}\right) \\
\Rightarrow \mu_x(t) &= c e^{-\alpha t} + \rho
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή του c, θέτοντας t = 0 στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu_x(0) = r_0$. Τότε $r_0 = c + \rho$ συνεπώς $c = r_0 - \rho$. Αντικαθιστώντας την τιμή του c στην (4.49) προκύπτει τελικά η λύση της (4.46)

$$\mu_x = \rho + e^{-\alpha t}(r_0 - \rho) \tag{4.50}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς σ_{xx} της τ.μ. X, θεωρούμε αρχικά τη συνάρτηση $f(t, r_t) = r_t^2$ της οποίας οι μερικές παράγωγοι ως προς t και ως προς r_t είναι αντίστοιχα οι

$$f_1(t, r_t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, r_t) = 0$$

και
$$f_2(t,r_t) = \frac{\partial}{\partial r_t} f(t,r_t) = 2r_t.$$
Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3 και καταλήγουμε σε μια έκφραση της μορφής

$$\begin{aligned} r_t^2 &= r_0^2 + \int_0^t \left[(-\alpha r_s + \alpha\rho)\, 2\, r_s + \sigma^2\right] ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \\ \Rightarrow r_t^2 &= r_0^2 + \int_0^t \left(2\alpha\rho\, r_s - 2\,\alpha r_s^2 + \sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, συμβολίζοντας με $q_r(t) = \mathbf{E}(r_t^2)$, και δεδομένου ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι ίση με μηδέν, προκύπτει

$$q_r(t) = q_x(0) + \int_0^t \left(2\alpha\rho\, \mathbf{E}(r_s) - 2\,\alpha\, \mathbf{E}(r_s^2) + \sigma^2\right) ds \tag{4.51}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω ισότητα και με τη βοήθεια της (4.50), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} q_r'(t) &= 2\alpha\rho\left(\rho + e^{-\alpha t}(r_0 - \rho)\right) - 2\alpha q_r(t) + \sigma^2 \\ &\Rightarrow\ q_r'(t) + 2\alpha q_r(t) - 2\alpha\rho\left(\rho + e^{-\alpha t}(r_0 - \rho)\right) - \sigma^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής (4.47) της οποίας η λύση δίνεται απο την (4.48), με $P = 2\alpha$ και $Q = -2\alpha\rho\left(\rho + e^{-\alpha t}(r_0 - \rho)\right) - \sigma^2$. Αντικαθιστώντας στην (4.48), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} q_r(t) &= e^{-2\alpha t}\left(c + \int 2\alpha\rho^2 e^{2\alpha t}\, dt + 2\alpha\rho(r_0 - \rho)\int e^{\alpha t}\, dt + \int e^{2\alpha t}\sigma^2\, dt\right) \\ q_r(t) &= c e^{-2\alpha t} + \rho^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} + 2\rho(r_0 - r)e^{-\alpha t} \end{aligned} \tag{4.53}$$

Στην παραπάνω σχέση για t = 0 προκύπτει ότι $c = r_0^2 + \rho^2 - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - 2\,\rho\, r_0$. Αντικαθιστώντας την τιμή του c στην (4.53), προκύπτει

$$q_r(t) = r_0^2 e^{-2\alpha t} + \rho^2 e^{-2\alpha t} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} - 2\rho\, r_0\, e^{-2\alpha t} + \rho^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} + 2\rho(r_0 - \rho)\, e^{-\alpha t} \tag{4.54}$$

Δεδομένου ότι $\sigma_{xx} = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ και λόγω των (4.54) και (4.50) τελικά προκύπτει

$$\sigma_{xx} = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \tag{4.55}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τη μέση τιμή της τ.μ. $Y = \int_0^t r_u \, du$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t r_u \, du\right) \\
&= \int_0^t \mathbf{E}(r_u) \, du \\
&= \int_0^t \rho + e^{-\alpha u}(r_0 - \rho) \, du \\
\Rightarrow \mu_y &= \rho t + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}(r_0 - \rho) \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο όπως στον υπολογισμό της σ_{xx}, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για τη διασπορά σ_{yy} της τ.μ. Y

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left(t - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{a} + \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right) \qquad (4.57)$$

Τέλος, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής XY δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{a}\right)^2 \qquad (4.58)$$

Θα συμβολίζουμε με $\phi(x)$ τη συνάρτηση πυκνότητας: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, και με $\Phi(x)$ τη συνάρτηση κατανομής: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) \, dy$, της μονοπαραμετρικής τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Βάσει αυτών των κατανομών, μπορούμε να λάβουμε εκφράσεις κλειστού τύπου για τις τιμές συγκεκριμένων παραγώγων απλού επιτοκίου, όπως το άνω φράγμα επιτοκίου.

Σε όρους (X,Y) η τιμή του caplet στην (4.28) είναι:

$$\mathbf{E}[(X - \bar{r})_+ e^{-y}] = \mathbf{E}[(X - \bar{r})_+ \mathbf{E}[e^{-y}|X]] \qquad (4.59)$$

Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής θα χρησιμοποιήσουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ η οποία δίνεται από:

$$M_x(t) = \mathbf{E}(e^{tx}) = e^{\dfrac{2\mu t + (\sigma t)^2}{2}}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση t = -1 και σε συνδυασμό με το το γεγονός ότι

$$Y|X \sim N\left(\mu_y + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(X - \mu_x), \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}}\right)$$

προκύπτει ότι

$$\mathbf{E}[e^{-y}|X] = exp\left(-\mu_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(X-\mu_x) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}}\right)\right)$$

και έτσι η (4.59) γίνεται

$$\mathbf{E}\left[(X-\overline{r})_+ exp\left(-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(X-\mu_x) - \frac{\sigma_{xy}^2}{2\sigma_{xx}}\right)\right] exp(-\mu_y + \frac{\sigma_{yy}}{2}) \tag{4.60}$$

Συμβολίζοντας

$$A = \mathbf{E}\left[(X-\overline{r})_+ \, exp\left(-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(X-\mu_x) - \frac{\sigma_{xy}^2}{2\sigma_{xx}}\right)\right]$$

και δεδομένου οι οι τ.μ X, Y ακολουθούν τη διδιάστατη κανονική, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{xx}}}\int_{\overline{r}}^{\infty}(x-\overline{r})exp\left(-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(x-\mu_x) - \frac{\sigma_{xy}^2}{2\sigma_{xx}} - \frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_{xx}}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{xx}}}\int_{\overline{r}}^{\infty}(x-\overline{r})exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{xx}}(x-\mu_x+\sigma_{xy})^2\right)\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{xx}}}\int_{\overline{r}}^{\infty}(x-\mu_x+\sigma_{xy})exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x+\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)^2\right)dx \\
&\quad +(\mu_x-\sigma_{xy}-\overline{r})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{xx}}}\int_{\overline{r}}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x+\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)^2\right)dx \\
&= \frac{\sqrt{\sigma_{xx}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\overline{r}}^{\infty} -d\, exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x+\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)^2\right) \\
&\quad +(\mu_x-\sigma_{xy}-\overline{r})\left(1-\Phi\left(\frac{\overline{r}-\mu_x+\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\sigma_{xx}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_x-\sigma_{xy}-\overline{r}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)^2\right) \\
&\quad +(\mu_x-\sigma_{xy}-\overline{r})\Phi\left(\frac{\mu_x-\sigma_{xy}-\overline{r}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του A στην (4.60) καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο για την τιμή τη χρονική στιγμή t = 0, του caplet με αποπληρωμή $(r-\overline{r})_+$ τη χρονική στιγμή t:

$$\pi_t^c = \left(\sqrt{\sigma_{xx}}\phi\left(\frac{\mu_x - \sigma_{xy} - \bar{r}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right) + (\mu_x - \sigma_{xy} - \bar{r})\Phi\left(\frac{\mu_x - \sigma_{xy} - \bar{r}}{\sqrt{\sigma_{xx}}}\right)\right) e^{-\mu_y + \frac{\sigma_{yy}}{2}} \tag{4.61}$$

Η τιμή του πλαφόν της εγγύησης επιτοκίου σε ένα δάνειο με σταθερή συνάρτηση αποπληρωμής F είναι:

$$\pi = \int_0^T \pi_t^c (1 - F_\tau)\, d\tau$$

Ως εναλλακτικό του μοντέλου διάχυσης επιτοκίου, έχει προταθεί από τον R.Norberg το επιτοκιακό μοντέλο αλυσίδας του Markov [10]. Σε αυτό το μοντέλο, θεωρούμε πως η οικονομία καθοδηγείται από μια συνεχή και ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Ακολουθώντας προσεγγίσεις παρόμοιες με αυτές που αναλύθηκαν στο παρόν κεφάλαιο, καταλήγουμε σε ένα πεπερασμένο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (ODE). Να σημειώσουμε πως σε αντίθεση με το μοντέλο διάχυσης (στο οποίο καταλήξαμε σε μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDE's)), οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που λαμβάνουμε μέσω της μαρκοβιανής αλυσίδας, δεν επιδέχονται λύσεις κλειστού τύπου και έτσι για την εύρεση λύσεων βασιζόμαστε στις τυποποιημένες μεθόδους των Press et al. [12].

Βιβλιογραφία

[1] D. Duffie. ``Dynamic Asset Pricing Theory''. In: *Princeton, NJ: Princeton University Press* (1996).

[2] Alison Etheridge. *A course in financial calculus*. Cambridge University Press, 2002.

[3] S.E Shreve I. Karatzas. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Springer-Verlang, New York, 1991.

[4] JR. R. J Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differiential Equations*. Cambridge University, Cambridge New York, 2001.

[5] J. Kevorkian. *Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques*. 2nd ed. Chapman and Hall, 1993.

[6] F. C Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 1998.

[7] Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. 6th ed. World Scientific, 2006.

[8] K. R. Miltersen and S.-A. Persson. ``Pricing rate of return guarantees in a Heath-Jarrow-Morton framework''. In: *Insurance: Math. 'I&' Econ*, 25.3 (1999), pp. 307–325.

[9] Ragnar Norberg. ``Interest Guarantees in Banking''. In: *Applied Mathematical Finance* 12.4 (2005), pp. 351–370.

[10] Ragnar Norberg. ``The Markov chain market''. In: *ASTIN bull* 33.2 (2003), pp. 265–287.

[11] Ragnar Norberg. ``Vasiček beyond the normal''. In: *Mathematical Finance* 14.4 (2004), pp. 585–604.

[12] W.H. Press et al. *Numerical Recipes in C*. 2nd ed. Cambridge University Press, 1992.

[13] D. Sondermann. ``Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates''. In: *The Journal of Finance* 52.1 (1997), pp. 409–430.

[14] Murray R. Spiegel. *Theory and Problems of Advanced Calculus*. McGraw-Hill, 1962.

[15] David Williams. *Probability with Martingales*. 7th ed. Cambridge University Press, 1991.

[16] Α.Ν. Γιαννακόπουλος. *Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*. Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ, 2010.

[17] Α. Γιαννόπουλος. *Θεωρία Μέτρου, Σημειώσεις*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2006.

[18] Μ.Β. Κούτρας. *Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος ΙΙ, Β Έκδοση*. Αθ.Σταμούλης, 2005.

[19] Μ.Β.Κούτρας. *Εισαγωγή στις Πιθανότητες Μέρος Ι, Β Έκδοση*. Αθ.Σταμούλης, 2004.

[20] Αντώνης Οικονόμου. *Εισαγωγή στα Martingales, Σημειώσεις*. Αθήνα, 2012.

[21] Γρηγόριος Τσάγκας. *Διαφορικές Εξισώσεις - Μετασχηματισμοί*. Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη, 1991.

[22] Λ.Ν. Τσίτσα. *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός*. Συμμετρία, 2003.

[23] Δημήτρης Χελιώτης. *Εισαγωγή στο στοχαστικό λογισμό, Σημειώσεις*. 2014.

[24] Ουρανία Χρυσαφίνου. *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις*. σοφία, 2008.