

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μέτρηση Κινδύνου μέσω της Θεωρίας Ακραίων Τιμών

Στεργιανή Α. Πολύζου

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς μέρος των απαιτήσεων
του Μεταπτυχιακού προγράμματος στην Αναλογιστική Επιστήμη
και Διοικητική κινδύνου.

Πειραιάς
Μάιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)
-
-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

Risk Measurement Using Extreme Value Theory

Stergiani A. Polyzou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

**Piraeus, Greece
2014**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εκτίμηση του κινδύνου στην χρηματοοικονομική επιστήμη, πέρα από τις γνωστές παραμετρικές μεθόδους, μπορεί να πραγματοποιηθεί αποτελεσματικά και μέσω της Θεωρίας Ακραίων Τιμών (ΘΑΤ). Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζονται και εφαρμόζονται δύο βασικές μέθοδοι της ΘΑΤ, η μέθοδος Block Maxima και η γνωστότερη και νεότερη μέθοδος Peaks Over Threshold (POT).

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη, στο θεωρητικό (Κεφάλαια 1,2,3) και στο πρακτικό μέρος (Κεφάλαιο 4). Στο πρώτο κομμάτι αναλύονται οι κατανομές των ακραίων τιμών (GEV και GPD) και οι εκτιμήτριες των παραμέτρων τους. Επίσης αναλύονται δύο μέτρα κινδύνου, η Μέγιστη αναμενόμενη δυνητική Ζημιά (Value at Risk-VaR) και η αναμενόμενη Ζημιά ουράς(Expected Shortfall-ES) μέσω της ΘΑΤ, της Ιστορική Προσομοίωση αλλά και μέσω της μεθόδου Διακύμανσης –Συνδιακύμανσης. Στο δεύτερο μέρος πραγματοποιείται η μελέτη των ακραίων προσαυξήσεων τριών συγκεκριμένων χρηματοοικονομικών σειρών (από το χρηματιστήριο New York Stock Exchange-NYSE) μέσω της θεωρίας που παρουσιάζεται στο πρώτο μέρος. Επίσης, χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία πραγματοποιείται η μελέτη των ακραίων προσαυξήσεων των τιμών δέκα μετοχών του ελληνικού χρηματιστηρίου, προ και μετά της οικονομικής κρίσης.

Abstract

The evaluation of risk in financial science, apart from the well-known parametric methods can also be performed efficiently through Extreme Value Theory (EVT). This Master Thesis presents and applies (using specific financial series) two basic methods of EVT: Block Maxima method (BM) and Peaks Over Threshold (POT) method.

The work is divided into two parts, the theoretical (Chapters 1,2,3) and the practical part (Chapter 4). The first part presents theoretical results concerning (a) the Generalized Extreme Value and Generalized Pareto (GEV and GPD) distributions, and (b) the estimators of their parameters. Furthermore two well known risk measures are analysed: the Value at Risk (VaR) and the Expected Shortfall (ES) through EVT, historical simulation and through the Variance-Covariance method. The second part consists of the study of the extreme changes of three specific financial series (from the New York Stock Exchange-NYSE stock market) through the techniques presented in the first part. Finally, using the same methodology, the extreme increases or decreases of the values of ten specific shares of Greek stock market is investigated, before and after recent economic crisis (2009).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	3
Η Θεωρία ακραίων τιμών, δυο αρχικές προσεγγίσεις.....	3
1.1. Γενικευμένη Οικογένεια Κατανομών Ακραίων Τιμών (GEV)	4
Μέθοδος «Μέγιστα Υποσυνόλων» (Blockmaxima)	4
Πόλοι Έλξης (Domains of Attraction)	8
1.2. Οικογένεια Κατανομών της Γενικευμένης Pareto (Generalized Pareto Distribution, GPD). 9	
Η μέθοδος POT	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	12
Συναρτήσεις κατανομών ακραίων τιμών.....	12
2.1. GEV κατανομή	12
Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων των κατανομών ακρότατων και των ποσοστημορίων.....	12
Εκτίμηση παραμέτρων	14
Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας	14
2.2. Μέθοδος «υπερβάσεων κατωφλίου» (Peaks Over Threshold, POT).....	16
Εκτίμηση παραμέτρων	18
Επιλογές κατωφλιού	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	22
Βασικά μέτρα κινδύνου, η χρησιμότητα τους	22
3.1. Μέγιστη Αναμενόμενη Δυνητική Ζημιά (Value at Risk, VaR)	22
Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance).....	24
Ιστορική Προσομοίωση (Historical or Back Simulation)	25
Θεωρία Ακραίων Τιμών.....	25
3.2. Αναμενόμενη Ζημιά Ουράς (Expected Shortfall, ES)	27
3.3. Αποτελεσματικότητα εκτιμήσεων.....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	31
Εμπειρική μελέτη με πραγματικά δεδομένα	31
4.1 Block Maxima	34
Ανάλυση δεδομένων	34

Εκτίμηση παραμέτρων	38
Εκτίμηση του VaR	43
4.2 POT	45
Επιλογή κατωφλιού	45
Εκτίμηση παραμέτρων	47
VaR.....	50
ES	51
4.3 Σχόλια-Συμπεράσματα	52
Οι χρονοσειρές F, XLF, ULPSX του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης	52
Οι δέκα ελληνικές τράπεζες του χρηματιστηρίου Αθηνών	61
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	66
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	67
Συγκεντρωτικοί - Συγκριτικοί Πίνακες Α	67
Συγκεντρωτικοί - Συγκριτικοί Πίνακες Β	77

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ακραίες τιμές παρατηρήσεων σε φυσικά φαινόμενα είναι τόσο σημαντικές ώστε η σύγχρονη ιστορία απέδειξε ότι είναι πολύ κρίσιμο να μελετούνται ξεχωριστά από τις υπόλοιπες τιμές και να παρατηρείται ενδελεχώς η συμπεριφορά τους. Μετά το έτος 1950, διαπιστώθηκε για πρώτη φορά η ανάγκη να αναπτυχθεί μία θεωρία για την μοντελοποίηση ακραίων φυσικών φαινομένων. Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (ΘΑΤ) έδωσε ένα καινούριο πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να μελετηθούν και, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα, να προβλεφθούν μελλοντικά ακραία φαινόμενα. Με μια πιο στατιστική ορολογία, ως ακραία φαινόμενα, θα εννοείται η λήψη πολύ υψηλών τιμών (ως προς την διάμεσο) μιας τυχαίας μεταβλητής, και ως πρόβλεψη θα εννοείται ο ακριβής προσδιορισμός της πιθανότητας πραγματοποίησης των ενδεχομένων αυτών, σε διάφορα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας.

Η ΘΑΤ έχει βρει μεγάλη εφαρμοσιμότητα στην σεισμολογία, στην μετεωρολογία, στην πρόβλεψη ακραίων καιρικών φαινομένων, στην αστρονομία (π.χ. μελέτη εμφάνισης ηλιακών καταιγίδων) αλλά και σε πρόβλεψη αποτελεσμάτων σε τυχερά παιχνίδια, θεωρία ουρών, σε διακυμάνσεις της αντοχής διαφόρων υλικών κ.α.

Η μοντελοποίηση των ακραίων τιμών τράβηξε την προσοχή της επιστημονικής κοινότητας καθώς η ανάγκη της μελέτης των ακραίων χρηματοοικονομικών κινδύνων έγινε πάρα πολύ σημαντική μετά από τις τεράστιες αποσταθεροποιήσεις στην παγκόσμια αγορά (Embrechts 1999). Μάλιστα σύμφωνα με επίσημα στοιχεία οι οικονομικές απώλειες από ακραία φαινόμενα έχουν εννεαπλασιαστεί τα τελευταία 40 χρόνια παγκοσμίως. Έτσι προστέθηκε και ένας μεγάλος αριθμός μελετών στα χρηματοοικονομικά και στην ασφάλιση. Στην συγκεκριμένη εργασία ενδιαφέρον αποτελεί η εφαρμοσιμότητα της ΘΑΤ, σε χρηματοοικονομικά δεδομένα.

Η ΘΑΤ είναι μια ισχυρή στατιστική μέθοδος που αναλύει τις ακραίες τιμές ενός δείγματος και χρησιμοποιείται με στόχο την προέκταση (extrapolation) σε πιο ακραία επίπεδα από αυτά τα οποία έχουν ιστορικά παρατηρηθεί - και παράγει από αυτές, ένα μοντέλο συχνότητας, το οποίο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί (σε διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης)

ως βάση για μελέτη μελλοντικών προβλέψεων. Παραδείγματος χάρη, χρησιμοποιώντας την ΘΑΤ μπορεί κανείς να εξάγει ασφαλή συμπεράσματα σε ερωτήματα του τύπου :

- Για τον επόμενο μήνα ποια είναι η κατανομή της μέγιστης τιμής που μπορεί να πάρει ένας χρηματιστηριακός τίτλος ή δείκτης;
- Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή μέσα στο επόμενο τρίμηνο για την οποία καμία απαίτηση ζημιάς δεν θα την υπερβεί με πιθανότητα 0,05;
- Πόσα χρήματα θα πρέπει να υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο μίας ασφαλιστικής εταιρίας ώστε να μην χρεοκοπήσει με πιθανότητα 2,5% μέσα στα επόμενα 2 έτη;

κ.ο.κ.

Συνεπώς, εφόσον η εμφάνιση ακραίων τιμών αποτελεί μάλλον τον κανόνα σε μια διαχρονική εξέλιξη ενός φαινομένου, παρά την εξαίρεση, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής αποτελεί μια απόπειρα να προβλεφτεί «το απρόβλεπτο».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η Θεωρία ακραίων τιμών, δυο αρχικές προσεγγίσεις

Διαχρονικά η Θεωρία Ακραίων Τιμών έχει ακολουθήσει δύο κεντρικούς άξονες-μεθοδολογίες ανάπτυξης :

- 1) Μέσω της Γενικευμένης Οικογένειας Κατανομών Ακραίων Τιμών (GEV-Generalised Extreme Value distribution) - μέθοδος που βασίζεται στα «Μέγιστα Υποσυνόλων» (Block Maxima), η οποία είναι και η παλαιότερη χρονικά, και η οποία χρησιμοποιεί τις μέγιστες παρατηρήσεις οι οποίες έχουν προέλθει από μεγάλα δείγματα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και
- 2) Μέσω της Οικογένειας Κατανομών της Γενικευμένης Pareto (GPD-Generalised Pareto Distribution) - μέθοδος που βασίζεται στις «υπερβάσεις ενός υψηλού κατωφλίου» (POT-Peaks Over Threshold), μια χρονικά νεότερη μεθοδολογία.

Στην 1^η προσέγγιση, ο ερευνητής χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων σε μικρότερες ομάδες ίδιου χρονικού ορίζοντα μεταξύ τους και κρατάει την μέγιστη παρατήρηση από την κάθε ομάδα. Μπορεί εδώ το μέγιστο του χρονικού ορίζοντα εξέτασης να μην θεωρείται καν ως ακραία τιμή, γεγονός το οποίο είναι αρνητικό για το μοντέλο, ωστόσο είναι ίσως πιο σημαντική η καταγραφή της συχνότητας των ακραίων περιστατικών, το κάθε ποτέ συμβαίνουν, ακόμα και αν αυτό οφείλεται σε κάποιον μη ελεγχόμενο παράγοντα.

Στην 2^η προσέγγιση, οι τιμές που χρησιμοποιούνται είναι αυτές που υπερβαίνουν μια προκαθορισμένη (από τον ερευνητή) τιμή / κατώφλι. Εδώ το τελικό σύνολο των παρατηρήσεων που θα μελετηθεί ενδέχεται να λαμβάνει υπόψη υψηλές τιμές που η BM δεν λαμβάνει, αλλά και να χάνει άλλες μικρότερες που η BM κρατά.

Θα γίνει αναφορά και στις δύο μεθόδους αρχικά, και θα αναζητηθούν περαιτέρω οι πιο προσεγγιστικές κατανομές, με εύρεση παραμέτρων στο επόμενο κεφάλαιο

1.1. Γενικευμένη Οικογένεια Κατανομών Ακραίων Τιμών (GEV)

Μέθοδος «Μέγιστα Υποσυνόλων» (Blockmaxima)

Η οριακή κατανομή ακραίων παρατηρήσεων

Αρχική υπόθεση είναι ότι οι X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (independent and identically distributed (i.i.d.)). Η κοινή συνάρτηση κατανομής συμβολίζεται με F και ορίζεται επιπλέον η τ.μ.

$$M_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Τα δεδομένα αυτά, σε χρηματοοικονομικές ή ασφαλιστικές εφαρμογές, μπορεί να έχουν προέλθει από καθημερινές αποδόσεις κάποιου χαρτοφυλακίου, ή από λειτουργικούς κινδύνους ή καταστροφικές ασφαλιστικές αποζημιώσεις κτλ.

Η συνάρτηση κατανομής της M_n για $x \in R$ θα είναι

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= F(x)^n. \end{aligned}$$

Εδώ μπορεί να συμπληρωθεί ότι αν οι X_1, X_2, \dots, X_n προέρχονται από διαφορετικές συναρτήσεις κατανομών τότε είναι

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n F_i(x) \end{aligned}$$

Η $F(x)^n$ ($F_i(x)^n$) είναι γενικά άγνωστη (εσ) κατανομή (εσ). Θα γίνει μια προσπάθεια να βρεθεί κατά προσέγγιση όταν το όριο της τείνει στο άπειρο, $n \rightarrow \infty$.

Το δεξιό ακραίο σημείο της $F(x)$ συμβολίζεται με x^* , δηλαδή,

$$x^* := \sup\{x: F(x) < 1\}.$$

Παρατηρείται ότι το $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ τείνει στο x^* όταν το n τείνει στο άπειρο. Συγκεκριμένα,

$$- \text{αν } x < x^* \text{ τότε } F(x)^n \rightarrow 0 \text{ για } n \rightarrow \infty$$

$$- \text{αν } x > x^* \text{ τότε } F(x)^n \rightarrow 1 \text{ για } n \rightarrow \infty$$

Επομένως η οριακή κατανομή του M_n είναι εκφυλισμένη.

Στη συνέχεια θα εφαρμοστεί ένας γραμμικός μετασχηματισμός στην τυχαία μεταβλητή M_n με στόχο να προκύψει μια ακολουθία η οποία θα τείνει σε μια μη εκφυλισμένη κατανομή. Υπενθυμίζεται ότι, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό θεώρημα για πεπερασμένο σ ($\sigma < \infty$), ισχύει ότι

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow_d N(0,1).$$

Όμοια, εικάζεται ότι μπορεί να υπάρχει και το όριο της (τυποποιημένης) ακολουθίας

$$\frac{M_n - b_n}{\alpha_n}$$

για κατάλληλες ακολουθίες $b_n \in \mathcal{R}$, $\alpha_n > 0$.

Επειδή ισχύει

$$P\left(\frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{\alpha_n} \leq x\right) = P\left(\frac{M_n - b_n}{\alpha_n} \leq x\right) = F(\alpha_n x + b_n)^n,$$

θα αναζητηθούν οι περιπτώσεις που ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\alpha_n x + b_n)^n = G(x),$$

για κάποια συνάρτηση κατανομής G (μη εκφυλισμένη).

Η τάξη των κατανομών F που ικανοποιούν την τελευταία σχέση για κάποια συγκεκριμένη οριακή κατανομή G ονομάζεται μέγιστος πόλος έλξης (Maximum Domain of Attraction, MDA) της G . Σημειώνεται ότι η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και για τις μικρότερες και για τις μεγαλύτερες ακραίες τιμές διότι

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$$

Το **θεώρημα του Fisher-Tippett** (1928) αναφέρεται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της M_n . Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι αν η F είναι τέτοια ώστε να υπάρχει κατανομή G και οι ακολουθίες α_n, b_n να ικανοποιούν την

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\alpha_n x + b_n)^n = G(x)$$

τότε η G αναγκαστικά θα πρέπει να είναι του ίδιου τύπου με μία από τις ακόλουθες τρεις κατανομές

$$\text{Frechet } \Phi_a(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-a}}, & x > 0 \end{cases}, \quad a > 0$$

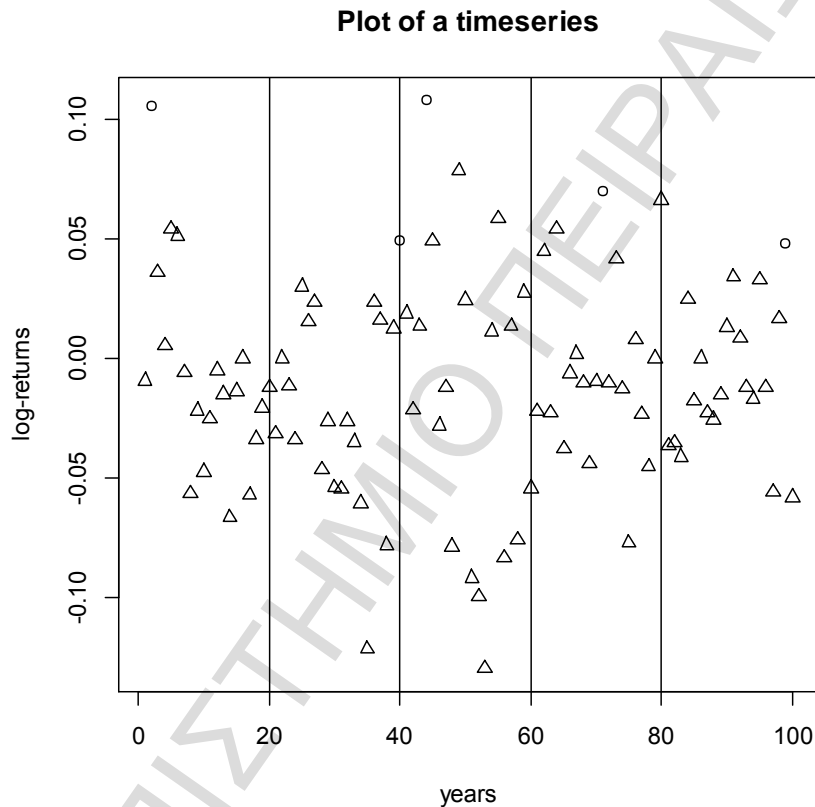
$$\text{Weibull } \Psi_a(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^a}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad a > 0$$

$$\text{Gumbel } \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αυτό το θεώρημα είναι εξαιρετικά σημαντικό, αφού είναι γνωστό ότι η ασυμπτωτική κατανομή των ακραίων τιμών (όταν αυτή υπάρχει) θα ισούται με μία από τις τρεις παραπάνω κατανομές. Μάλιστα δεν χρειάζεται να γίνει καμία υπόθεση για την φύση της κατανομής F , που γενικά δεν είναι γνωστή όπως έχει αναφερθεί παραπάνω. Οι τρεις τύποι που προκύπτουν έχουν διαφορετική συμπεριφορά ανάλογα με τη σύγκλιση των ουρών τους. Εξετάζοντας την συμπεριφορά της δεξιάς ουράς της F μπορούν να βγουν πιο ακριβή συμπεράσματα.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου Block maxima επιλέγεται το κατάλληλο μήκος της περιόδου που θα μελετηθεί, η οποία έστω ότι θα έχει n παρατηρήσεις και k υποσύνολα (blocks). Επομένως κάθε υποσύνολο θα έχει m παρατηρήσεις. Στη μέθοδο αυτή συχνά το μήκος του κάθε υποσύνολου (block) αντιστοιχεί στην μονάδα ενός χρονικού διαστήματος: ενός έτους, ενός μήνα, μίας εβδομάδας κτλ. Από τις αρχικές παρατηρήσεις που

θα έχει ο ερευνητής στη διάθεση του για την μελέτη του, δηλαδή τις X_1, X_2, \dots, X_n όπου $n = km$, θα επιλέξει την μέγιστη τιμή από κάθε block και θα χρησιμοποιήσει το σύνολο αυτών, των μερικών μέγιστων δηλαδή των M_1, M_2, \dots, M_k , για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο σχήμα έχουν χωριστεί οι παρατηρήσεις (log-returns) σε 5 blocks, σε καθένα από τα οποία λαμβάνεται η μέγιστη παρατήρηση.



Όπως γίνεται αντιληπτό, οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n , δεν χρειάζεται να είναι γνωστές στον ερευνητή, παρά μόνο τα μερικά μέγιστα M_1, M_2, \dots, M_k . Τα μερικά μέγιστα, σύμφωνα με το θεώρημα Fisher-Tippett, θα συγκλίνουν κατά κατανομή σε μία από τις τρεις γνωστές κατανομές Frechet, Weibull, Gumbel. Οπότε μπορεί να επιλεγεί κάποια από αυτές και στη συνέχεια να γίνει εξαγωγή συμπερασμάτων, με κίνδυνο όμως αυτά να είναι λανθασμένα αν η κατανομή που επιλέχθηκε δεν ήταν πράγματι η κατάλληλη.

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να ενοποιηθούν οι τρεις κατανομές ακροτάτων σε μια κατανομή, η οποία θα καλείται GEV με τρεις παραμέτρους μ, σ, ξ και στη συνέχεια να ε-

κτιμηθούν αυτές οι παράμετροι. Τα τυποποιημένα M_1, M_2, \dots, M_k θα ακολουθούν την GEV και επομένως αποδεικνύεται εύκολα ότι και τα μη-τυποποιημένα M_1, M_2, \dots, M_k ακολουθούν την GEV (με παραμέτρους που περιλαμβάνουν και τις σταθερές τυποποίησης).

Πόλοι Έλξης (Domains of Attraction)

Γενικά, η τάξη των κατανομών F είναι προφανώς πολύ μεγάλη, ωστόσο για κάθε κατανομή των X_1, X_2, \dots, X_n θα υπάρχει μια μοναδική οριακή κατανομή από τις τρεις προαναφερθείσες οριακές.

Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \rightarrow_d G$$

όπου $a_n > 0$ και $b_n \in \mathcal{R}$. Τότε η κατανομή F θα λέμε ότι ανήκει στον πόλο έλξης της κατανομής ακρότατων G . Ο συμβολισμός είναι X ή $F \in MDA(G)$.

Ο καθορισμός του πόλου έλξης (ή περιοχή διαφορετικά) έχει να κάνει με την μορφή της δεξιάς ουράς, ουσιαστικά με το πόσο γρήγορα αυτή συγκλίνει στο μηδέν.

Θεώρημα. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. τ.μ. με σ.κ. F και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{\alpha_n} \leq x\right) = \Phi_\alpha(x),$$

όπου $b_n = 0$ και $\alpha_n = F^\leftarrow(1 - 1/n)$, όπου $F^\leftarrow(t)$ είναι η γενικευμένη αντίστροφη της F , δηλαδή

$$F^\leftarrow(t) = \inf\{x \in \mathcal{R}: F(x) \geq t\}, 0 < t < 1.$$

Όταν ικανοποιείται η σχέση (1) τότε η F καλείται συνάρτηση ομαλής κύμανσης με δείκτη $-\alpha$ και ανήκει στον πόλο έλξης της Φ_α . Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{R}_{-\alpha}$ το σύνολο των κατανομών με την παραπάνω ιδιότητα τότε ο μέγιστος πόλος έλξης της Φ_α είναι το $\mathcal{R}_{-\alpha}$. Δηλαδή $\text{MDA}(\Phi_\alpha) = \mathcal{R}_{-\alpha}$.

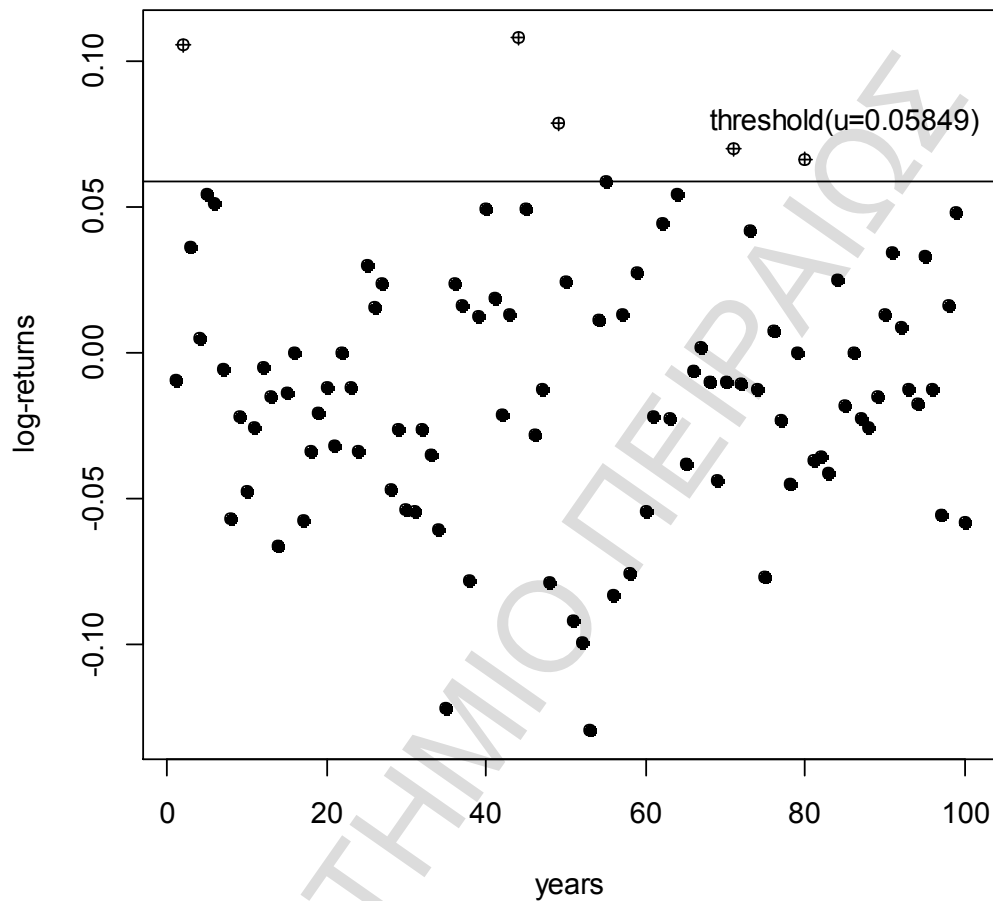
Στον $\text{MDA}(\Phi_\alpha)$ ανήκουν οι κατανομές Pareto, Cauchy, Log-gamma κ.α. (κατανομές με βαριά δεξιά ουρά). Με παρόμοιο αλλά πιο σύνθετο τρόπο καθορίζονται οι $\text{MDA}(\Psi_\alpha)$ και $\text{MDA}(I)$. Κάποιες κατανομές στον $\text{MDA}(\Psi_\alpha)$ είναι για παράδειγμα η ομοιόμορφη, η βήτα κ.α. (κατανομές με φραγμένη δεξιά ουρά). Στον $\text{MDA}(I)$ ανήκουν οι κατανομές: εκθετική, κανονική, γάμμα, Weibull, Lognormal κ.α. (κατανομές με λεπτή ή μετρίως βαριά δεξιά ουρά).

Η μέθοδος block maxima θα μελετηθεί περαιτέρω και σε επόμενο κεφάλαιο, εξετάζοντας κάποιες μεθόδους εκτιμήσεων των παραμέτρων των κατανομών ακροτάτων.

1.2. Οικογένεια Κατανομών της Γενικευμένης Pareto (Generalized Pareto Distribution, GPD).

Η μέθοδος που θα εξεταστεί στη συνέχεια είναι μια μέθοδος που περιγράφει την συμπεριφορά μεγάλων παρατηρήσεων που υπερβαίνουν κάποιο πολύ υψηλό κατώφλι, το οποίο θέτει ουσιαστικά μια ένδειξη «ακρότητας». Με το να απομονώνονται οι τιμές πάνω από κάποια συγκεκριμένη τιμή, δημιουργείται ένα νέο δείγμα, το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ότι ασυμπτωτικά προέρχεται από κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Για την επιλογή αυτής της τιμής (του κατωφλίου) υπάρχουν αρκετοί τρόποι, και θα γίνει αναφορά πιο διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο σχήμα λαμβάνονται οι παρατηρήσεις (log-returns) οι οποίες υπερβαίνουν την τιμή $u = 0.05849$.

Plot of a timeseries



Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, οι αρχικές τιμές μπορεί να προέρχονται από μια άγνωστη κατανομή F , η οποία «μεταφέρεται» στην κατανομή των παρατηρήσεων πάνω από το κατώφλι. Το πρόβλημα ξεπερνιέται χρησιμοποιώντας την οριακή κατανομή των παρατηρήσεων αυτών. Η κατανομή αυτή αποδεικνύεται ότι είναι η γενικευμένη Pareto (Generalized Pareto Distribution). Είναι γενικευμένη με την έννοια ότι σε αυτήν εντάσσονται άλλες κατανομές κάτω από μια κοινή παραμετρική φόρμα.

Η μέθοδος πάνω από ένα κατώφλι (Peaks Over Threshold – POT), έχει ως κυρία διαφορά με την μέθοδο μέγιστων υποσυνόλων το γεγονός ότι όλα τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται ξεπερνούν το επιλεγμένο κατώφλι (ενώ στην μέθοδο Block maxima χρησιμοποιούμε τα τοπικά μέγιστα). Συνεπώς μπορεί να ελεγχθεί ο αριθμός των δεδομένων

που θα είναι κατάλληλα προς χρήση (με την καλύτερη επιλογή του κατωφλιού). Από την άλλη μεριά έχει ως κύριο μειονέκτημα ότι τα δεδομένα που βρίσκονται κοντά στις μέγιστες τιμές μπορεί να διαφέρουν χρονικά αρκετά μεταξύ τους συνεπώς να υπεισέρχονται διαφορετικές αιτιολογήσεις για την διακύμανσή τους.

Η μέθοδος POT

Έστω $X_i \sim F$ και μια ακραία τιμή, u ορισμένη ως κατώφλι. Η πιθανότητα να πάρει η μεταβλητή X , τιμή μεγαλύτερη από u , είναι πολύ μικρή, και αν τεθεί ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα δειγματοληψίας, τότε μπορεί να θεωρηθεί, ότι το πλήθος των παρατηρήσεων, που υπερβαίνουν το κατώφλι u , ακολουθούν κατανομή Poisson.

Αν συμβολιστεί με F_u η συνάρτηση κατανομής των υπερβάσεων των X_i πάνω από το u , τότε θα ισχύει

$$F_u(x) = P(X_i - u \leq x | X_i > u) = \frac{P(X_i - u \leq x, X_i > u)}{P(X_i > u)} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής των X_i

Η κατανομή F_u , εξαρτάται φυσικά, από την κατανομή F , αλλά αποδεικνύεται ότι για πολύ μεγάλα u , η συνάρτηση F_u , προσεγγίζεται, από συναρτήσεις κατανομών της GPD (Generalized Pareto). (βλ. παράγραφο 1.2.2)

Οι συγκεκριμένες οριακές κατανομές ονομάζονται κατανομές γενικευμένης Pareto και είναι της μορφής (για $\xi \neq 0$),

$$G(x; \sigma; \xi) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

όπου $\sigma > 0$, $x \geq 0$ όταν $\xi \geq 0$, και $0 \leq x \leq -\sigma/\xi$ όταν $\xi < 0$. Είναι δηλαδή παραμετρικές, με παραμέτρους ξ και σ . Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι η επιλογή του u , είναι καθοριστική. Για μικρές τιμές του u , δεν θα υπάρχει ταύτιση με την GPD, ενώ για μεγάλες τιμές του u , δεν θα υπάρχουν αρκετά δεδομένα. Υπάρχουν δύο κυρίως τρόποι προσδιορισμού του κατωφλιού, και εφόσον αυτό έχει προσδιοριστεί, μπορεί να γίνει η διερεύνηση των άλλων παραμέτρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συναρτήσεις κατανομών ακραίων τιμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνηθούν περαιτέρω, οριακές κατανομές ακροτάτων, και από τις δύο μεθόδους (Block maxima, POT), και θα εκτιμηθούν οι παράμετροί τους, με διάφορες μεθόδους.

2.1. GEV κατανομή

Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων των κατανομών ακροτάτων και των ποσοστημορίων

Στο θεώρημα Fisher - Tippet αποδείχθηκε ότι το τυποποιημένο όριο της M_n , όταν το n τείνει στο άπειρο, συγκλίνει κατά κατανομή σε μια από τρεις κατανομές ακροτάτων. Για λόγους ενιαίας αντιμετώπισης των προβλημάτων ακραίων τιμών, όπως αναφέρεται και παραπάνω, γίνεται ενοποίηση των τριών κατανομών σε μια κατανομή η οποία καλείται *GEV* (Generalized Extreme Value distribution) ή γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών. Σε αυτή περιλαμβάνονται οι τρεις κατανομές ακροτάτων (καθώς και οι κατανομές ίδιου τύπου με αυτές). Η *GEV* θα έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$G(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp\left(-\left\{1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right).$$

Οι παράμετροι της *GEV*, θέσης, κλίμακας και σχήματος αντίστοιχα έχουν τους εξής περιορισμούς: $\mu \in \mathcal{R}$, $\sigma > 0$, και $\xi \in \mathcal{R}$ και επίσης υπάρχει και ο περιορισμός

$$1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0.$$

Η παράμετρος θέσης μ δείχνει που βρίσκεται η μάζα των παρατηρήσεων και η παράμετρος κλίμακας σ πόσο ποικίλουν οι ακραίες τιμές. Η παράμετρος ξ ονομάζεται παράμετρος «σχήματος» γιατί από την τιμή της μπορούν να βγουν συμπεράσματα για την ουσία της κατανομής και ταυτόχρονα η τιμή του καθορίζει σε ποια από τις τρεις οριακές

κατανομές ακρότατων προσαρμόζονται τα δεδομένα. Μάλιστα όσο μεγαλύτερο το ξ τόσο πιο βαριά η ουρά της GEV αλλά και της κατανομής των αρχικών παρατηρήσεων.

Πιο συγκεκριμένα,

α) Για $\xi > 0$ προκύπτει μία κατανομή με βαριά ουρά, κι όσο το ξ αυξάνεται τόσο η ουρά βαραίνει (Frechet)

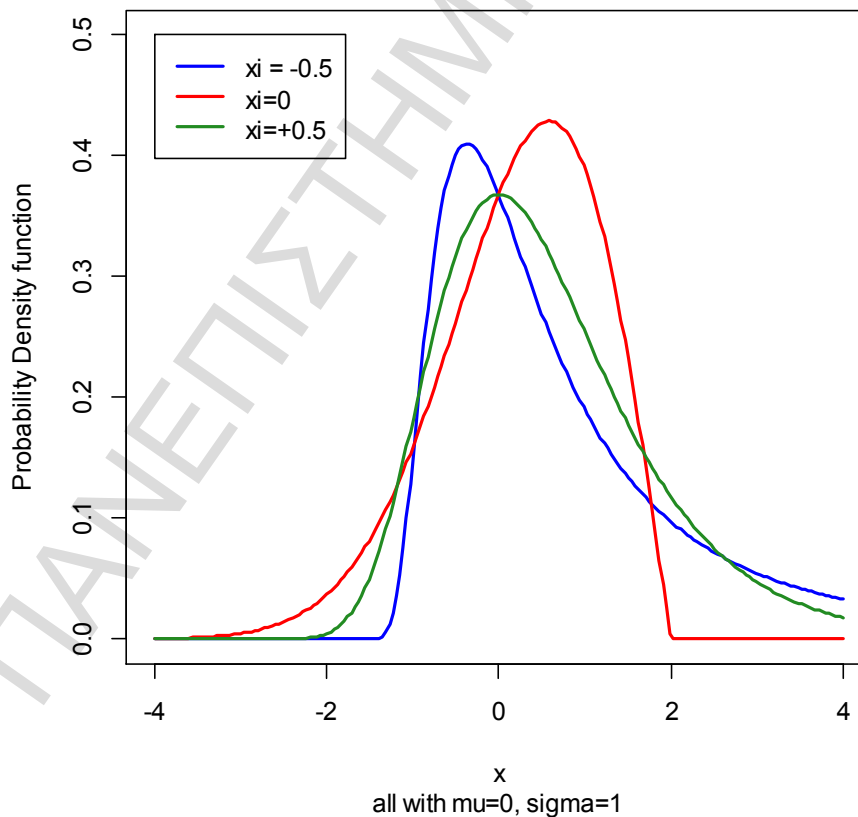
β) Για $\xi < 0$ φραγμένη ουρά (αντεστραμμένη Weibull)

γ) Για $\xi = 0$ δίνεται

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} G(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

Η παραπάνω κατανομή καλείται κατανομή Gumbel, και εμφανίζει εκθετικά μειωμένη ουρά.

Generalized extreme value distributions



Η Frechet που έχει θετικό ξ , οπότε έχει και πιο παχιές ουρές, έχει διαπιστωθεί ότι συνήθως προσαρμόζεται καλύτερα σε μέγιστα από χρηματοοικονομικά δεδομένα.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων και των ποσοστημορίων της GEV υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες ανάλογα όμως και με το ποιες υποθέσεις θα τεθούν, σχετικά με τα X_i . Οι αρχικές παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n χωρίζονται σε k ομάδες των m παρατηρήσεων, και συμβολίζονται με M_1, M_2, \dots, M_k τα μέγιστα X_i μέσα σε αυτές τις k ομάδες αντίστοιχα ($n = km$). Τα M_i δεν ακολουθούν επακριβώς την GEV αλλά κατά προσέγγιση, για μεγάλο n . Πρακτικά όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα M_i ακολουθούν την GEV

Εκτίμηση παραμέτρων

Γενικά για την εκτίμηση των παραμέτρων μ, σ, ξ της GEV μέσω των M_1, M_2, \dots, M_k έχουν αναπτυχθεί κυρίως οι μέθοδοι με γραφήματα (προσεγγιστικός υπολογισμός - μέθοδος Q-Q plots), η μέθοδος των ροπών, των διατεταγμένων παρατηρήσεων και η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Στην παρούσα διπλωματική θα αναλυθεί περισσότερο η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, οι εκτιμήτριες της οποίας, έχουν (συγκριτικά με τις άλλες μεθόδους) μικρότερη διακύμανση, και ακολουθούν μια συνεχή κατανομή, και ακόμη θα χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος με τα γραφήματα Q-Q plot, για μια πιο εποπτική εικόνα, αλλά και ως επαλήθευση των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Με την υπόθεση ότι οι ακραίες παρατηρήσεις M_1, M_2, \dots, M_k ακολουθούν ακριβώς την GEV_ξ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΜΜΠ). Η ΜΜΠ χρησιμοποιείται για την εξαγωγή εκτιμητών των μ, σ, ξ , των τιμών δηλαδή των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την συνάρτηση πιθανοφάνειας $\ell(\mu, \sigma, \xi)$ του δείγματος των M_1, M_2, \dots, M_k .

Η μέθοδος δίνει καλές εκτιμήσεις και για $\xi > -0.5$, το οποίο είναι πολύ σημαντικό για τον τομέα των οικονομικών όπου συνηθέστερα οι ουρές είναι παχιές. Για $-0.5 > \xi > -1$ η ΜΠΠ μπορεί να εφαρμοστεί μεν, αλλά δημιουργείται ένα πρόβλημα με τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών, και τέλος για $\xi < -1$ η ΜΜΠ δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Για $\xi \neq 0$ η πιθανοφάνεια θα είναι :

$$\ell(\mu, \sigma, \xi) = -k \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^k \log \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{i=1}^k \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$\text{με } 1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) > 0$$

Για $\xi = 0$ θα είναι

$$\ell(\mu, \sigma) = -k \log \sigma - \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^k \exp\left\{-\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\}.$$

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\xi}$ ακολουθούν ασυμπτωτικά μία τριδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή $(\mu, \sigma, \xi)^T$ και πίνακα διασποράς τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας.

Για τα διαστήματα εμπιστοσύνης των εκτιμητριών, μπορούμε, είτε να βασιστούμε στην οριακή πολυδιάστατη κανονική κατανομή, είτε να χρησιμοποιήσουμε βοηθητικές συναρτήσεις απόκλισης (deviance functions)

Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί, ότι σε οποιαδήποτε πρακτική εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, θα χρειαστεί να ελεγχθεί η προσαρμογή (goodness of fit) των δεδομένων, στην συγκεκριμένη (με τις εκτιμημένες παραμέτρους) κατανομή. Αυτό μπορεί να γίνει και γραφικά με την βοήθεια των Q-Q plots (η οποία αναφέρθηκε παραπάνω ως προσεγγιστική μέθοδος εκτίμησης). Κατά την μέθοδο αυτή, όπως επίσης και κατά τον προσεγγιστικό έλεγχο καλής προσαρμογής (goodness of fit), σχηματίζεται αρχικά το Q-Q

plot των block maxima, ως προς την εκτιμώμενη GEV. Τα σημεία του γραφήματος θα έχουν ως συντεταγμένες τα

$$(M_i, G^{-1}(\frac{i}{k+1}); \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}), i = 1, 2, \dots, k$$

όπου M_i το μέγιστο του i μπλοκ (σε ανάλυση διαχωρισμού του δείγματος σε k μπλοκ).

Θα προκύψουν τελικά k σημεία, τα οποία, όταν οι παρατηρήσεις προέρχονται από την GEV θα πρέπει να είναι κοντά στην διαγώνιο.

2.2. Μέθοδος «υπερβάσεων κατωφλίου» (Peaks Over Threshold, POT)

Η μέθοδος POT μπορεί να εφαρμοστεί με δυο τρόπους. Α) μέσω του ημιπαραμετρικού μοντέλου (εκτιμητής Hill) και β) μέσω του παραμετρικού μοντέλου που βασίζεται στην γενικευμένη Pareto κατανομή.

Και οι δυο τρόποι είναι θεωρητικά αποδεκτοί και χρήσιμοι, αλλά ο δεύτερος τρόπος ανάλυσης, είναι πιο απλός και δίνει και εκτιμήσεις του στατιστικού λάθους χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, οπότε και αυτός θα αναλυθεί στην εργασία.

Ήδη αναφέρθηκε στο 1^ο κεφάλαιο, η επιλογή των δεδομένων πάνω από μια συγκεκριμένη τιμή. Έστω λοιπόν ότι από μια κατανομή F προέρχονται n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n . Τότε η κατανομή των τιμών που υπερβαίνουν ένα κατώφλι u , Y_1, Y_2, \dots, Y_k ($Y_i = X_i - u | X_i > u$) θα έχουν κατανομή F_u της μορφής,

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = 1 - \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}, y > 0$$

Θα διερευνηθεί η ύπαρξη ή μη, μιας οριακής κατανομής της F_u , με στόχο, να είναι ανεξάρτητη της αρχικής F . Σύμφωνα με θεώρημα των Balkema and de Haan (1974) και Pickands(1975), για μια μεγάλη τάξη κατανομών F (κανονική, γάμμα, εκθετική, ομοιόμορφη, βήτα, χ^2 , t, lognormal, κ.α.) υπάρχει μία θετική γραμμικά αύξουσα συνάρτηση $\beta(u)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{u \rightarrow x^*} \sup_{0 \leq y < x^* - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0,$$

όπου η $G_{\xi, \beta}(y)$ θα συμβολίζει την σ.κ. της Γενικευμένης κατανομής Pareto, και συγκεκριμένα,

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + y\xi/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-y/\beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

Όπου

$$\beta > 0, y \geq 0 \text{ όταν } \xi \geq 0, \text{ και}$$

$$0 \leq y \leq -\beta/\xi \text{ όταν } \xi < 0.$$

Όταν λοιπόν μεγαλώνει το κατώφλι u και τείνει προς το δεξιό άκρο της $F(x^*)$ τότε η F_u μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γενικευμένη κατανομή Pareto (GPD). Για ένα σχετικά υψηλό κατώφλι u δηλαδή ισχύει ότι $F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}(y)$.

Π.χ. Έστω $P(Y_i > y) = e^{-\lambda y}$ (εκθετική κατανομή με παράμετρο λ τότε

$$F_u(y) = 1 - \frac{1 - F(u+y)}{1 - F(u)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(u+y)}}{e^{-\lambda u}} = 1 - e^{-\lambda y}$$

δηλαδή $F_u \sim G$ με $\xi = 0$, $\beta = 1/\lambda$. Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή F_u δεν συγκλίνει απλώς στην GPD αλλά είναι ακριβώς ίση με την GPD (για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων).

Γενικά η μέθοδος εφαρμόζεται για ανεξάρτητα δεδομένα, ωστόσο στην αντίθετη περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί κάποια μέθοδος απο-ομαδοποίησης (declustering), όταν η σειρά των δεδομένων είναι μικρής μνήμης. Το ίδιο ισχύει και για το φαινόμενο της εποχικότητας, όπου η μέθοδος POT να εφαρμοστεί σε υπο-ομάδες.

Εκτίμηση παραμέτρων

Όπως αναφέρθηκε, η Generalized Pareto Distribution (GPD) έχει συνάρτηση κατανομής:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + y\xi/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-y/\beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

Όπου $\beta > 0$, και $y \geq 0$ όταν $\xi \geq 0$ και $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ όταν $\xi < 0$.

Όπως μπορεί να διαπιστωθεί για $\xi = 0$ η κατανομή είναι η εκθετική, με παράμετρο $1/\beta$ και οι αρχικές παρατηρήσεις ανήκουν στον πόλο έλξης της Gumbel.

Για $\xi < 0$ η κατανομή είναι η Pareto τύπου II, έχει άνω όριο το $u - \beta/\xi$ και πόλο έλξης την αντεστραμμένη Weibull.

Και για τις θετικές τιμές του ξ , που εμφανίζεται σε αρκετές εφαρμογές της Διοικητικής Κινδύνου, η κατανομή GPD παρουσιάζει παχιά δεξιά ουρά η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και οι αρχικές παρατηρήσεις ανήκουν στον πόλο έλξης της Frechet.

Η παράμετρος β είναι συνάρτηση των παραμέτρων της GEV και η ξ είναι η ίδια παράμετρος και στις δυο κατανομές. Επίσης για τις ειδικές περιπτώσεις που το $\xi = 1$ και $\xi = -1$ λαμβάνονται οι κατανομές Cauchy και η ομοιόμορφη αντίστοιχα. Η μέση τιμή της GPD είναι $\beta/(1 - \xi)$ για $\xi < 1$. Γενικά η κανονική κατανομή δεν μπορεί να μοντελοποιήσει φαινόμενα για μεγάλες π.χ. αποζημιώσεις ενώ η GPD μπορεί να αποδώσει ακριβώς τέτοιου είδους συμπεριφορές. Κι αυτό γιατί οι μεγάλες αποζημιώσεις χρειάζονται μια άπειρη δεύτερη ροπή ή μια τέταρτη και η κανονική έχει όλες τις τάξεις των ροπών, ενώ οι κατανομές με βαριές ουρές δεν έχουν.

Επίσης η εκτίμηση των ξ και β , υποθέτοντας ότι N_u είναι το πλήθος των τιμών πάνω από το κατώφλι u στο σύνολο των n παρατηρήσεων, μπορεί να γίνει με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Έστω λοιπόν $Y_i = X_i - u$ για $X_i > u$. Όπως έχει αναφερθεί, η μεταβλητή Y ακολουθεί προσεγγιστικά την F_u . Υπολογίζεται η log-likelihood της F_u ,

$$\ell(\sigma, \xi) = -k \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \xi \frac{Y_i}{\sigma}\right) + \sum_{i=1}^k \log I(Y_i, \sigma, \xi)$$

Το άθροισμα των $\log I(Y_i, \sigma, \xi)$ είναι ίσο με 0 αν τα σ, ξ ικανοποιούν την $1 + \frac{\xi Y_i}{\sigma} > 0$ για όλα τα Y_i , και $-\infty$ διαφορετικά. Για να μεγιστοποιηθεί η likelihood (\mathcal{L}), αρκεί να μεγιστοποιηθεί η log-likelihood(ℓ)

Όταν $\xi = 0$ η GPD γίνεται η εκθετική κατανομή και η εκτιμήτρια του σ είναι

$$\sigma(= \hat{\sigma}) = \bar{y}$$

Στην περίπτωση που $\xi \neq 0$, ο υπολογισμός γίνεται πιο περίπλοκος για τις ε.μ.π., όπου χρησιμοποιούνται συνήθως αριθμητικές μέθοδοι για συγκεκριμένες σειρές δεδομένων.

Η εκτίμηση της F μπορεί να γίνει με την χρήση του εμπειρικού εκτιμητή $\hat{F}(u) = (n - N_u)/n$ όπου N_u είναι το πλήθος των παρατηρήσεων X_i πάνω από το u . Η χρήση της ιστορικής προσομοίωσης για όλη την ουρά της $F(x)$ δεν είναι βοηθητική γιατί απλούστατα στην ουρά οι παρατηρήσεις είναι λίγες και αραιές. Η σ.κ. F είναι άμεσο να δειχθεί ότι είναι ίση και με

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u)$$

κι έτσι τελικά η εκτίμηση της ουράς έχει την παρακάτω μορφή

$$1 - \hat{F}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 + \xi \frac{x - u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\xi}$$

Επιλογές κατωφλιού

Οι παραπάνω εκτιμήσεις παραμέτρων της GPD, προϋποθέτουν την κατάλληλη πρώτη επιλογή κατωφλιού u . Για την εφαρμογή της μεθόδου POT ο ερευνητής θα πρέπει να διαλέξει υποκειμενικά κάποιες παραμέτρους, όπως το ποιο θα είναι το κατώφλι u και αυτή είναι μία από τις δυσκολίες αυτής της μεθόδου. Πολλές φορές προτείνεται η δοκιμή του 90 %, 95 %, 98% ποσοστημορίου ως κατώφλι και μετά ο έλεγχος των αποτελεσμάτων

Ο καθορισμός του u είναι πολύ σημαντικός γιατί αν το κατώφλι είναι πολύ υψηλό, τότε η πληροφορία θα είναι πολύ μικρή (οι υπερβάσεις θα είναι λίγες), ενώ αν είναι πολύ

χαμηλό τότε η F_u δεν θα προσεγγίζει ικανοποιητικά την GPD. Γενικά αν η κατανομή της M_n προσεγγίζει την GEV τότε η F_u θα προσεγγίζει την GPD.

Sample mean excess plot

Μία άλλη λύση για την επιλογή του u , είναι η χρήση του γραφήματος της μέσης υπερβάλλουσας συνάρτησης του δείγματος (sample mean excess plot).

$$\{(u, e_n(u)), X_{n:n} < u < X_{1:n}\}$$

Η $e_n(u)$ είναι η μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση του δείγματος, με τις $X_{1:n}$ και $X_{n:n}$ να είναι η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή αντίστοιχα. Η $e_n(u)$ έχει την παρακάτω μορφή,

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}}$$

και είναι η εμπειρική εκτίμηση της

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\beta + \xi(u - \mu)}{1 - \xi}, \quad u > u_0$$

που είναι η μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση, το u_0 είναι το μικρότερο u ώστε $F_u \approx GPD$.

Όταν λοιπόν στο γράφημα απεικονίζεται μία ευθεία γραμμή με θετική κλίση πάνω από ένα κατώφλι u , τότε η F_u μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί προσεγγιστικά την GPD με θετικό ξ . Αν οι τελευταίες ακραίες τιμές του γραφήματος δεν ακολουθούν την γραμμικότητα μπορούν να εξαιρεθούν.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Ένας δεύτερος τρόπος για τον καθορισμό του u είναι μέσω της εκτίμησης των παραμέτρων της GPD για διαφορετικές τιμές του u με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Αν ισχύει ότι $F_u \approx GPD$ τότε η παράμετρος ξ δεν πρέπει να επηρεάζεται από την επιλογή του u , ενώ το β θα μεταβάλλεται γραμμικά, ως προς αυτό. Επομένως, από κατάλλη-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

λο γράφημα μπορεί και πάλι να γίνει η επιλογή του μικρότερου u που ικανοποιεί το παραπάνω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικά μέτρα κινδύνου, η χρησιμότητά τους

Τα μέτρα κινδύνου είναι τα βασικά εργαλεία των διαχειριστών κινδύνου (Risk Managers) και των επενδυτών ώστε να πάρουν σημαντικές αποφάσεις σχετικά με την διαχείριση των επιχειρήσεών τους ή των χαρτοφυλακίων τους. Επιπλέον, τα μέτρα κινδύνου αποτελούν και αναγκαιότητα διότι είναι υποχρεωμένες (από ρυθμιστικές κανονιστικές αρχές παγκοσμίως), οι τράπεζες, οι ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές εταιρίες, οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί και άλλες επιχειρήσεις να αναφέρουν και να δημοσιοποιούν ανά τακτά χρονικά διαστήματα την κεφαλαιακή τους επάρκεια, καθώς και τους τρόπους και τα μοντέλα που ανέπτυξαν για τον υπολογισμό αυτών.

Η μέτρηση του κινδύνου ουσιαστικά μπορεί να γίνει με τον υπολογισμό κάποιου ποσοτικού μεγέθους που να δείχνει το επίπεδο του κινδύνου. Στατιστικά περιγραφικά μέτρα, όπως ο μέσος και η τυπική απόκλιση δίνουν κάποια πληροφορία για τον κίνδυνο, δεν δίνουν όμως αρκετή πληροφορία για τον ακραίο κίνδυνο. Έτσι με το πέρασμα του χρόνου έχουν υπάρξει διάφορα επιπλέον εργαλεία. Αυτά που έχουν επικρατήσει είναι η Μέγιστη Αναμενόμενη Δυνητική Ζημιά (VaR) και η Αναμενόμενη Ζημιά Ουράς (ES), μαζί με κάποιες παραλλαγές των δύο. Μερικά παραδείγματα είναι το Marginal VaR, Relative VaR, incremental VaR.

3.1. Μέγιστη Αναμενόμενη Δυνητική Ζημιά (Value at Risk, VaR)

Η αποδοχή και χρήση του VaR έχει εξαπλωθεί γρήγορα από τις αρχές της δεκαετίας του 1990. Η δημοτικότητα του αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι μέσω της ομαδοποίησης των διαφόρων συνιστωσών του κινδύνου σε μια εταιρεία, σε συνδυασμό με τα επίπεδα της αγοράς, το VaR αντιστοιχεί σε ένα και μόνο μέγεθος.

Το VaR είναι η μέγιστη πιθανή ζημιά που μπορεί να συμβεί στην αξία ενός χαρτοφυλακίου για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης, για δεδομένο χρονικό ορίζοντα και υπό την

προϋπόθεση ότι πρόκειται για μια κανονική αγορά. Οι περιορισμοί του βέβαια είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε μια ευρεία ποικιλία αποτελεσμάτων κάτω από διαφορετικές παραδοχές και μεθόδους.

Ο χρονικός ορίζοντας ονομάζεται και περίοδος διακράτησης και υπολογίζεται συνήθως για 1 μέρα, 2 μέρες και 10 μέρες. Το VaR μπορεί να υπολογιστεί για οποιαδήποτε περίοδο διακράτησης, και όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο μεγαλύτερο είναι το VaR. Επίσης το διάστημα εμπιστοσύνης συνήθως είναι 95% και 99%. Το μειονέκτημα του ωστόσο είναι ότι στην περίπτωση που μια ζημιά το υπερβεί δεν δίνεται η πληροφορία του πόσο μεγαλύτερη θα είναι η ζημιά όταν δεν θα είναι μέσα στο 95% ή στο 99%. Επιπλέον, αν ένα χαρτοφυλάκιο χωριστεί σε μικρότερα χαρτοφυλάκια, τότε το άθροισμα των VaR τους δεν θα συμπίπτει με το VaR του αρχικού χαρτοφυλακίου αλλά θα είναι μικρότερο, και γι' αυτό το λόγο θεωρείται μέτρο μη συνεκτικό.

Οι τρόποι εκτίμησης του VaR είναι πολλοί, κι έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες. Οι μέθοδοι αυτές συνήθως χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Στην μέθοδο διακύμανσης-συνδιακύμανσης, στη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης και της Monte Carlo προσομοίωσης.

Μια γενικότερη ταξινόμηση των μεθόδων εκτίμησης του VaR είναι: (α) στις παραμετρικές εκτιμήσεις όπου γίνεται η υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη κατανομή, όπως η κανονική ή η student (RiskMetrics και GARCH (οικονομετρική μέθοδος)), (β) στις μη παραμετρικές, όπου δεν γίνεται κάποια υπόθεση για συγκεκριμένη κατανομή αποδόσεων (ιστορική προσομοίωση και υβριδικό μοντέλο) και τέλος (γ) στις ημιπαραμετρικές (ΘΑΤ, quasi-maximum likelihood GARCH, και Conditional Autoregressive VAR, (CAViaR)).

Στη συνέχεια επιλέχθηκε να γίνει μια αναφορά σε μία παραμετρική και σε μια μη παραμετρική μέθοδο ενώ αναλύεται ο υπολογισμός της VaR μέσω και της Θεωρίας Ακραιών Τιμών που είναι ημιπαραμετρική μέθοδος, και αποτελεί έναν από τους βασικούς σκοπούς της προκειμένης εργασίας.

Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance)

Η μέθοδος Διακύμανσης – Συνδιακύμανσης είναι μια παραμετρική μέθοδος που ονομάζεται και δέλτα-κανονική μέθοδος, με απαραίτητη προϋπόθεση οι παρατηρήσεις να ακολουθούν την κανονική κατανομή F , όπως φαίνεται και από την ονομασία της μεθόδου. Είναι η πιο κατανοητή μέθοδος και απαιτεί μόνο την εκτίμηση δύο στατιστικών μέτρων για τον υπολογισμό του VAR, τον αναμενόμενο μέσο όρο και την διακύμανση. Ουσιαστικά υπολογίζεται μέσω της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Αυτή η μεθοδολογία μοιάζει πολύ με αυτή της ιστορικής προσομοίωσης με την διαφορά ότι συνήθως χρησιμοποιεί την κανονική κατανομή αντί των πραγματικών δεδομένων. Σε αυτό το σημείο είναι και το μειονέκτημα της, διότι δεν είναι κατάλληλη για δεδομένα από κατανομές με βαριές ουρές. Συνήθως οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, αλλά έχουν παχιές ουρές, οπότε ο κίνδυνος υποεκτιμάται.

Έστω r_t οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, όπου $r_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$, t ο χρόνος και οι τ.μ. ϵ_t έχουν μία συνάρτηση κατανομής F με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση 1. Δεν είναι κατάλληλη για δεδομένα από κατανομές με βαριές ουρές. Τέλος οι εκτιμήσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης θα είναι

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i, \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{\mu}_t)^2$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι η JP Morgan ανέπτυξε μία προσέγγιση βασισμένη σε αυτήν την μέθοδο για τον υπολογισμό του κινδύνου αγοράς. Είναι πολύ απλή, γρήγορη, προϋποθέτει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου είναι στάσιμες στο χρόνο και ονομάστηκε RiskMetrics (π.χ. βλ. www.riskmetrics.com)

Επίσης άλλα μοντέλα αρκετά δημοφιλή για την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας είναι το μοντέλο ARCH και GARCH. Η δεύτερη προσέγγιση ταιριάζει καλά σε υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικά μοντέλα. Γενικά τα υπο-συνθήκη μοντέλα είναι προτιμότερα για βραχυχρόνιες προβλέψεις. Επίσης τα πρόσφατα ιστορικά δεδομένα δεν μπορούν

να δώσουν μεγάλη πληροφορία για γεγονότα στο μακρινό μέλλον, πόσο μάλλον για ακραία γεγονότα, τα οποία είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. Οπότε πιο ποιοτικές προβλέψεις μπορούν να γίνουν χωρίς να έχει γίνει υπόθεση για κάποια συνθήκη για τις κατανομές των παρατηρήσεων.

Ιστορική Προσομοίωση (Historical or Back Simulation)

Η μέθοδος αυτή δεν είναι παραμετρική, δεν προϋποθέτει δηλαδή ότι τα δεδομένα ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Ωστόσο προϋποθέτει μία συνεχή – σταθερή κατανομή των παραγόντων της αγοράς και ιστορικά δεδομένα μεγάλων χρονικών περιόδων που να περιλαμβάνουν και ακραίες τιμές.

Το πρόβλημα σε αυτή τη μεθοδολογία είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις υπάρχει έλλειψη δεδομένων μεγάλων χρονικών περιόδων που να περιλαμβάνουν και ακραίες τιμές με αποτέλεσμα το VaR να είναι ευαίσθητο σε αλλαγές των τιμών του δείγματος. Επίσης δεν είναι δυνατό να προβλεφθούν σενάρια χειρότερα από τα μέγιστα του υπάρχοντος δείγματος.

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, αφού ληφθεί μια σειρά ποσοστιαίων μεταβολών για κάθε στοιχείο ή παράγοντα κίνδυνου, ταξινομείται σε εκατοστημόρια, και η VaR του χαρτοφυλακίου εκτιμάται από εκείνη τη μεταβολή της αξίας του που βρίσκεται στο εκατοστημόριο που αντιστοιχεί στο απαιτούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης χαρτοφυλακίου.

Θεωρία Ακραίων Τιμών

Στη μέθοδο της συνδιακύμανσης ο ερευνητής γνωρίζει ότι σίγουρα θα υποεκτιμηθεί ο κίνδυνος όταν πρόκειται για χρηματοοικονομικά δεδομένα, μιας και έχει αποδειχθεί ότι έχουν βαριές ουρές. Η γενικευμένη Pareto και η GEV όμως, σε σχέση με την κανονική κατανομή προσαρμόζονται καλά σε ακραία γεγονότα, ενώ επίσης δεν υπάρχει η ανάγκη να γίνουν υποθέσεις για την κατανομή των πραγματικών δεδομένων.

Σύμφωνα με την μεθοδολογία της ΘΑΤ, το Value at Risk εκτιμάται ανάλογα με την μέθοδο με την οποία θα γίνει η επιλογή της ουράς των δεδομένων, δηλαδή μέσω της Block Maxima ή της POT.

Στην πρώτη περίπτωση (block maxima), η GEV η οποία έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$G(x; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right), & \text{αν } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}\right), & \text{αν } \xi = 0 \end{cases}, x \in \mathcal{R}$$

προσαρμόζεται στα κανονικοποιημένα μέγιστα και κατόπιν μπορεί να βρεθεί η στάθμη απόδοσης, δηλαδή το VaR για κάθε k σύνολα-blocks, αντιστρέφοντας την παραπάνω σ.κ:

$$\widehat{VaR} = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(1 - (-\log(1 - 1/k))^{-\hat{\xi}}\right)$$

Όπου $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ και $\hat{\xi}$ οι εκτιμώμενες παράμετροι της GEV και k ο αριθμός των blocks.

Ακόμη, ο ερευνητής μπορεί εναλλακτικά να μην εκτιμήσει το VaR για τα επόμενα k -σύνολα (χρονικές περιόδους), αλλά να εκτιμήσει την στάθμη που ξεπερνά μια παρατήρηση με μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Για παράδειγμα αν θέλει ο ερευνητής να εκτιμήσει με πιθανότητα 95% το VaR τότε αρκεί να θέσει στον παραπάνω τύπο k τέτοιο ώστε να ισχύει

$$0.95 = (1 - 1/k)^{1/m},$$

όπου m ο αριθμός των παρατηρήσεων μέσα σε κάθε block. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την παραπάνω μεθοδολογία ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Bekiros and Georgoutsos (2005).

Στην δεύτερη περίπτωση, μέσω της μεθόδου POT, οι υπερβάσεις Y_1, Y_2, \dots, Y_k (πάνω από το u) έχουν κατανομή

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = 1 - \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}, y > 0$$

της οποίας η οριακή κατανομή (για μεγάλο u) έχει αποδειχθεί ότι ακολουθεί την γενικευμένη κατανομή Pareto με παραμέτρους ξ και β (βλ.2.2.1.).

Αν k είναι το πλήθος των παρατηρήσεων πάνω από το κατώφλι u και θεωρώντας ότι οι Y_1, Y_2, \dots, Y_k είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές που ακολουθούν μια Generalized Pareto κατανομή, τότε σύμφωνα με την μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων τους θα είναι ασυμπτωτικά κανονικές, όσο το k τείνει στο άπειρο.

Το $\bar{F}(u)$ εκτιμάται από το N_u/n , και $q = 1/m$ είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης. Οπότε το VaR θα εκτιμάται:

$$\widehat{\text{VaR}}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\xi} \left(\left(\frac{N_u}{nq} \right)^\xi - 1 \right)$$

Τα X_i υπερβαίνουν την παραπάνω τιμή κατά μέσο όρο κάθε m παρατηρήσεις περίπου.

3.2. Αναμενόμενη Ζημιά Ουράς (Expected Shortfall, ES)

Το ES αποτελεί το εμβαδόν της ουράς της κατανομής και δίνει την τιμή της αναμενόμενης απώλειας, δεδομένου ότι η απώλεια έχει ξεπεράσει το VaR. Τα μειονεκτήματα του VaR τα οποία έχουν ήδη αναφερθεί και προγενέστερα, είναι δύο και το ES έρχεται για να τα αντιμετωπίσει. Το πρώτο, αφορά το γεγονός ότι το VaR δεν δίνει καμία πληροφορία για το μέγεθος της ζημιάς σε περίπτωση που επέλθει το χειρότερο σενάριο. Το μειονέκτημα αυτό αντιμετωπίζεται με το ES, αφού το ES ουσιαστικά εκφράζει αυτό το μέγεθος ακριβώς, με την προϋπόθεση ότι η αναμενόμενη ζημιά θα υπερβεί το VaR για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης και χρονικό ορίζοντα. Το δεύτερο μειονέκτημα έχει να κάνει με το ότι το VaR δεν αποτελεί ένα μέτρο με συνοχή ενώ το ES αποτελεί. Παρ' ότι όμως θεωρητικά είναι καλύτερο μέτρο κίνδυνου δεν είναι αποδεκτό από τις ρυθμιστικές αρχές για τον υπολογισμό του οικονομικού κεφαλαίου.

Το ES συναντάται συχνά με διαφορετική ονοματολογία στη διεθνή βιβλιογραφία. Συναντάται το ίδιο ή παραλλαγές του ως υπό-συνθήκη VaR (conditional VaR), ως αναμενόμενη ζημιά ουράς (Expected Tail Loss/ Tail Conditional Expectation) και τέλος ως Μέση Υπέρβαση Ζημιάς (Mean Excess Loss).

Το ES είναι η αναμενόμενη ζημιά με δεδομένο ότι η ζημιά έχει υπερβεί το VaR.

Και επομένως αφού $VaR_q = F^{-1}(q)$, το ES θα ορίζεται ως εξής:

$$ES_q = E[X|X \geq VaR_q]$$

Ουσιαστικά το ES αποτελεί τον μέσο των τιμών των παρατηρήσεων πάνω από το VaR.

Στην περίπτωση της ΘΑΤ το ES εκτιμάται μόνο με την POT κι όχι με την BlockMaxima λόγω της φύσεως της μεθόδου της BM. Στην POT από τα συνολικά δεδομένα έχουν επιλεγθεί αυτά που βρίσκονται πάνω από ένα κατώφλι, ενώ στην BM μπορεί από τα συνολικά δεδομένα να μένουν έξω από το τελικό δείγμα ακραίες παρατηρήσεις.

Οπότε για την POT μέθοδο, το ES μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του παρακάτω τύπου (π.χ. βλ. McNeil(1999), p8):

$$\frac{ES_q}{VaR_q} = \frac{1}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1-\xi)VaR_q} \Rightarrow \widehat{ES}_q = \frac{\widehat{VaR}_q}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}$$

3.3. Αποτελεσματικότητα εκτιμήσεων

Η σημαντικότητα της διαχείρισης κινδύνων σχετίζεται με την σπουδαιότητα μιας πρώτης συλλογικής προσπάθειας των ατόμων που ασχολούνται με τις αγορές και των ρυθμιστικών αρχών να καταφέρουν να εντοπίσουν και να αναγνωρίσουν τους κινδύνους της αγοράς και τελικά να κατασκευάσουν μεθοδολογίες αποτίμησης των κινδύνων και μεταγενέστερα την αποτελεσματική διαχείριση αυτών.

Για να μπορέσει να εφαρμοστεί μια κατάλληλη μεθοδολογία εντοπίστηκαν πρώτα οι παράγοντες που μπορεί να προκαλέσουν μεγάλες ζημιές. Η εκτίμηση ενός κινδύνου σχετίζεται με την κατανομή των μεταβολών των τιμών, το μέγεθος των μεταβολών των τιμών, (για παράδειγμα ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου, ενός συνολικού ισολογισμού, επιτόκια, τιμές μετοχών, συναλλαγματικές ισοτιμίες) την σταθερότητα του μέσου και της τυπικής απόκλισης στον χρόνο, την συσχέτιση και την αλληλεπίδραση των μεταβολών των τιμών.

Από τα δυο μέτρα κινδύνου που αναπτύχθηκαν (VaR, ES) το καλύτερο και πιο ευρέως αποδεκτό λοιπόν, είναι αυτό του VaR, που καταφέρνει να απεικονίσει την έκθεση του χαρτοφυλακίου ολοκληρωμένα και συνολικά με ένα και μόνο αριθμό. Ανάλογα βέβαια όμως με το είδος των κινδύνων η πρόβλεψη του VaR, έχει διαφορετικές μεθοδολογίες, και το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει κανείς είναι ότι δεν υπάρχει βέλτιστη παρά μόνο καταλληλότερη μεθοδολογία. Η κατανομή των απωλειών είναι αυτή που καθορίζει ποια μέθοδος είναι καλύτερη για να υπολογίσει το VaR και το ES ώστε να μπορεί να καταλήξει σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα και συμπεράσματα. Και πιο συγκεκριμένα, στην ερώτηση του ποια μέθοδος είναι η καλύτερη θα μπορούσε κανείς να πει ότι η απάντηση διαφέρει ανάλογα με τις διαστάσεις-είδη των κινδύνων του χαρτοφυλακίου (διάφορα παράγωγα χρηματοοικονομικά στοιχεία).

Αν για παράδειγμα τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή η καλύτερη μέθοδος είναι η Variance-Covariance, ειδικά στις περιπτώσεις που το χαρτοφυλάκιο δεν περιέχει πολλά options ή παρόμοια παράγωγα. Επίσης αν ακολουθούν μία άλλη οποιαδήποτε γνωστή κατανομή η καλύτερη προσέγγιση είναι αυτή της ιστορικής προσομοίωσης, αν δεν είναι γνωστή η κατανομή τότε η καλύτερη μέθοδος είναι η Monte Carlo. Και τέλος

στη περίπτωση που τα δεδομένα του ερευνητή δεν ακολουθούν μία γνωστή κατανομή, και το ενδιαφέρον του επικεντρώνεται σε πραγματικά ακραίες καταστάσεις, είναι προτιμότερη η μέθοδος της ΘΑΤ.

Η ΘΑΤ είναι μια τεχνική ανώτερης λογικής. Οι μέθοδοι που στηρίζονται σε κανονικές κατανομές θα υποεκτιμήσουν τον κίνδυνο, ενώ η ιστορική προσέγγιση θα δώσει μη ακριβείς εκτιμήσεις για την ουρά της κατανομής. Η BlockMaxima και ακόμα περισσότερο η POT είναι τεχνικές που επικεντρώνονται στην ουρά της κατανομής με αποτέλεσμα να δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα, όπου χρειάζεται να γίνει πρόβλεψη ακραίων γεγονότων. Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι η POT δίνει καλύτερες εκτιμήσεις από την BM γιατί η δεύτερη χρειάζεται περισσότερα δεδομένα για να γίνει σωστή πρόβλεψη κι ακόμη η επιλογή του μεγέθους του block επηρεάζει πολύ τις εκτιμήσεις των παραμέτρων της GEV. Το μοναδικό μειονέκτημα της ΘΑΤ είναι ότι έχει υψηλότερες τυπικές αποκλίσεις σε σχέση με την μέθοδο της συνδιακύμανσης και οι εκτιμήσεις της ΘΑΤ μπορεί να μην είναι ακριβείς όταν τα δεδομένα της ουράς είναι πολύ λίγα.

Η μέθοδος της ΘΑΤ δίνει τιμές VaR υψηλότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους, κάτι που θα εξεταστεί και πρακτικά στο Κεφάλαιο 4.

Ωστόσο το VaR δεν είναι πανάκεια, για έναν Risk Manager, είναι ένα βασικό εργαλείο που θα πρέπει να συνδυαστεί και με επιπλέον αναλύσεις συγκεκριμένων σεναρίων, stress tests, back testings, κ.α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εμπειρική μελέτη με πραγματικά δεδομένα

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να εφαρμοστεί η θεωρία των ακραίων τιμών που παρουσιάστηκε σε προηγούμενα κεφάλαια σε πραγματικά δεδομένα. Έτσι λοιπόν, για την εμπειρική αυτή μελέτη επιλέχθηκαν τρία προϊόντα του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης (από την επίσημη ιστοσελίδα <http://finance.yahoo.com/>) και δέκα μετοχές τραπεζών του χρηματιστηρίου Αθηνών. Πιο συγκεκριμένα τα προϊόντα που επιλέχθηκαν από το ξένο χρηματιστήριο είναι:

- η μετοχή *Ford Motor Co. (F)*

Η Ford Motor Company κατασκευάζει αυτοκίνητα και φορτηγά. Η εταιρεία παρέχει ακόμα οχήματα με χρηματοδοτική μίσθωση, όπως επίσης και υπηρεσίες ασφάλισης μέσω της θυγατρικής της. Το 1903 η ιστορία του αυτοκινήτου άλλαξε οριστικά με την ίδρυση της Ford Motor Company, στην οποία ο Henry Ford είχε το 25,5% των μετοχών και ήταν αντιπρόεδρος και αρχιμηχανικός. Στο εργοστάσιο της Ford, στην αρχή, η παραγωγή περιοριζόταν σε λίγα αυτοκίνητα ανά ημέρα στη Mack Avenue του Detroit, όπου δυο ή τρεις άνθρωποι εργάζονταν για την κατασκευή κάθε αυτοκινήτου από εξαρτήματα που κατασκεύαζαν κατά παραγγελία άλλες εταιρείες.

- το *option Financial Select Sector SPDR (XLF)*

Το Financial Select Sector SPDR (XLF), είναι ένα διαπραγματεύσιμο αμοιβαίο κεφάλαιο (Exchange Traded Fund –ETF) που παρακολουθεί την πορεία του πιστωτικού τομέα, των χρηματιστηριακών και των ασφαλιστικών εταιριών στις ΗΠΑ. Στόχος του δείκτη είναι να παρέχει τα αποτελέσματα επένδυσης που, πριν από τα έξοδα, αντιστοιχεί στην απόδοση του Financial Select Sector. Ο Δείκτης περιλαμβάνει εταιρείες παροχής χρηματοοικονομικών υπηρεσιών.

κονομικών υπηρεσιών των οποίων το εύρος της δραστηριότητας κυμαίνεται από τη διαχείριση των επενδύσεων έως εμπορικές και τραπεζικές επιχειρήσεις.

- το mutual fund ProFunds UltraBull Svc (ULPSX)

Το ProFunds UltraBull PROFUND είναι ένα αμοιβαίο κεφάλαιο που συναλλάσσεται στις ΗΠΑ. Σκοπός του είναι να προσφέρει αποδόσεις των επενδύσεων που αντιστοιχούν στο 200% της απόδοσης του δείκτη S & P 500, δηλαδή σε διπλάσια ημερήσια απόδοση. Το Αμοιβαίο Κεφάλαιο επενδύει σε μετοχικές κινητές αξίες ή / και χρηματοοικονομικά παράγωγα.

Οι δέκα μετοχές του τραπεζικού τομέα του ελληνικού χρηματιστηρίου είναι:

- **Αγροτική Τράπεζα**
- **Εθνική Τράπεζα**
- **Γενική Τράπεζα**
- **Τράπεζα Eurobank εργασίας**
- **Τράπεζα Πειραιώς**
- **ΑΤΤΙCΑ ΒΑΝΚ**
- **ΑΛΡΗΑ ΒΑΝΚ**
- **Τράπεζα Ελλάδος**
- **Τράπεζα Κύπρου**
- **Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο**

Για την ανάλυση των παραπάνω σειρών χρησιμοποιήθηκαν οι καθημερινές τιμές κλεισίματος τους και αναλύθηκαν με το λογισμικό R i386 3.0.2. Το πακέτο αυτό δίνει την δυνατότητα στατιστικών αναλύσεων και στηρίζεται στην γλώσσα προγραμματισμού R (ή S). Για να γίνουν όλες οι απαραίτητες αναλύσεις για την συγκεκριμένη εργασία και γενικότερα για υπολογισμούς που σχετίζονται με την ΘΑΤ, θα πρέπει επίσης να γίνει η φόρτωση των πακέτων του R, extRemes και PerformanceAnalytics.

Συνεπώς σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει η ανάλυση των τιμών μέσω της ΘΑΤ, για τις δυο μεθόδους Block Maxima (με την GEV distribution) και POT (με την Generalized Pareto distribution) για τις ελάχιστες τιμές (ζημιές). Ακόμη θα βρεθούν οι εκτιμήτριες των παραμέτρων των κατανομών τους και τα δυο μέτρα κινδύνου VaR και ES όπως αναλύθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Τέλος θα γίνει η εξέταση της καλής προσαρμογής των ακραίων παρατηρήσεων στην GEV ή στην GPD, για να θεωρούνται αξιόπιστα τα αποτελέσματα.

Στο παράρτημα υπάρχουν συγκεντρωτικοί πίνακες με τα αποτελέσματα των τριών χρονοσειρών του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης αλλά και πίνακες με τα αποτελέσματα των δέκα τραπεζών του ελληνικού χρηματιστηρίου. Για τις τιμές κλεισίματος των τραπεζών έχει γίνει χωριστή μελέτη για δύο τριετίες, από το 2006 έως και το 2008 και από το 2009 έως το 2011. Επίσης η ανάλυση έχει γίνει και για τις ελάχιστες τιμές (ζημιές) αλλά και για τις μέγιστες (κέρδος). Σκοπός αυτού του χωρισμού των χρονοσειρών είναι να παρατηρηθούν τυχόν αλλαγές στα μέτρα κινδύνου πριν και μετά την οικονομική κρίση.

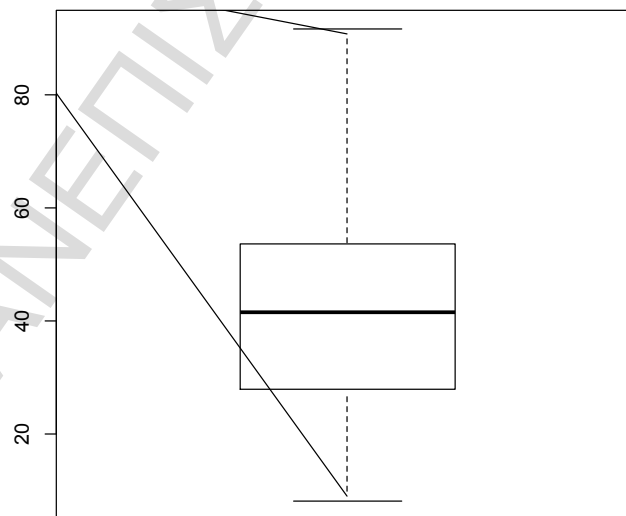
4.1 Block Maxima

Ανάλυση δεδομένων

Οι τιμές κλεισίματος του δικαιώματος Financial Select Sector SPDR (XLF) και του ProFunds UltraBull Svc (ULPSX) είναι από 19/01/1999 έως 28/01/2014, στο σύνολο 3780 τιμές κλεισίματος η κάθε χρονοσειρά. Οι τιμές κλεισίματος της μετοχής Ford Motor Co. (F), στο σύνολο 9072, ξεκινούν από 03/01/1978 και φτάνουν έως 16/12/2013. Αρχικά θα γίνει η αναλυτική παρουσίαση της ανάλυσης μόνο της ProFunds UltraBull Svc (ULPSX) χρονοσειράς και έπειτα θα συγκριθούν τα αποτελέσματα και των τριών.

Στο παρακάτω πίνακα των περιγραφικών στατιστικών μέτρων φαίνεται ότι τα δεδομένα προέρχονται από κάποια κατανομή με βαριά ουρά, αφού στο τρίτο τεταρτημόριο τα δεδομένα κυμαίνονται μεταξύ 41.58 και 53.7, και στο τέταρτο από 53.7 μέχρι 91.58.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
8.00	27.85	41.58	41.74	53.7	91.58



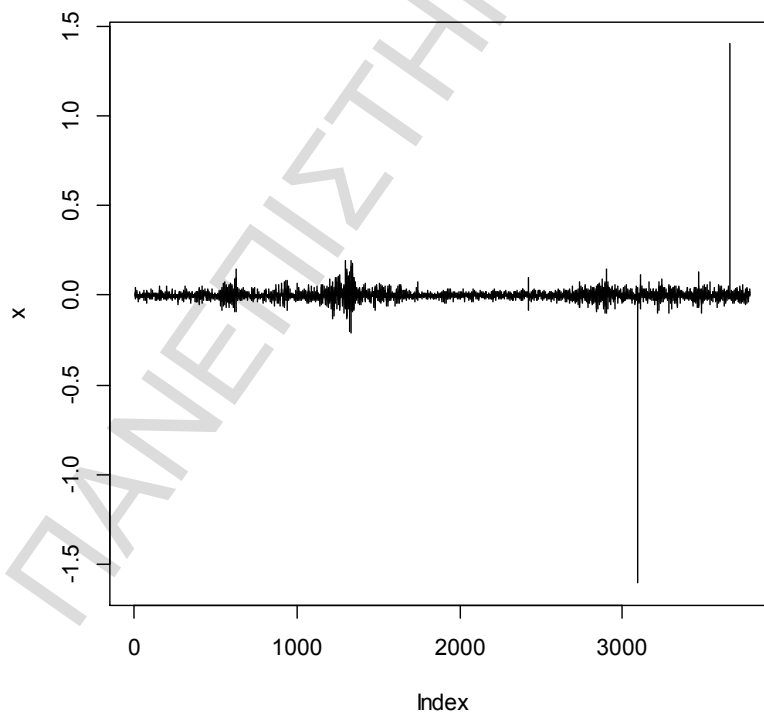
Σχήμα 1: Θηκόγραμμα των τιμών κλεισίματος της ULPSX

Υπενθυμίζεται σε αυτό το σημείο ότι δεν είναι καθόλου ασφαλές να θεωρηθεί ότι οι αποδόσεις της τιμής της μετοχής της ULPSX προέρχονται από κάποια γνωστή κατανομή. Ευτυχώς, η κατανομή F των αποδόσεων δεν χρειάζεται να βρεθεί, μιας και όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η κατανομή των Block Maxima δεν εξαρτάται από αυτήν αλλά από τον πόλο έλξης που ανήκει.

Θα μελετηθούν οι αποδόσεις της μετοχής και σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes οι λογαριθμικές αποδόσεις θα είναι

$$X_i = \ln \frac{S_{i+1}}{S_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Το αρχικό δείγμα των 3780 παρατηρήσεων, θα χωριστεί σε 45 blocks από 84 παρατηρήσεις το καθένα. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται λαμβάνοντας υπόψη ότι το κάθε block αντιπροσωπεύει ένα τετράμηνο, αφού κάθε έτος έχει μέσο όρο 252 παρατηρήσεις. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων σε κάθε block είναι σχετικά μεγάλο, μπορεί να θεωρηθεί ότι η κατανομή των Block Maxima θα ακολουθεί προσεγγιστικά την GEV, δηλαδή μιας από τις κατανομές Frechet, Gumbel ή Weibul.

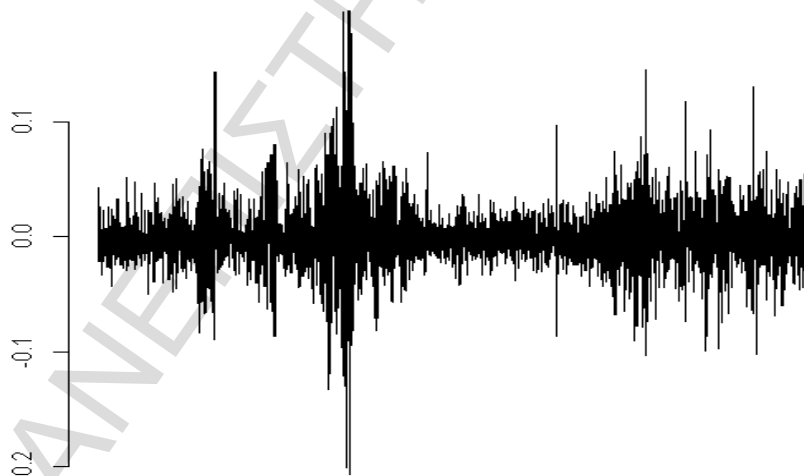


Σχήμα 2: Γράφημα των αποδόσεων

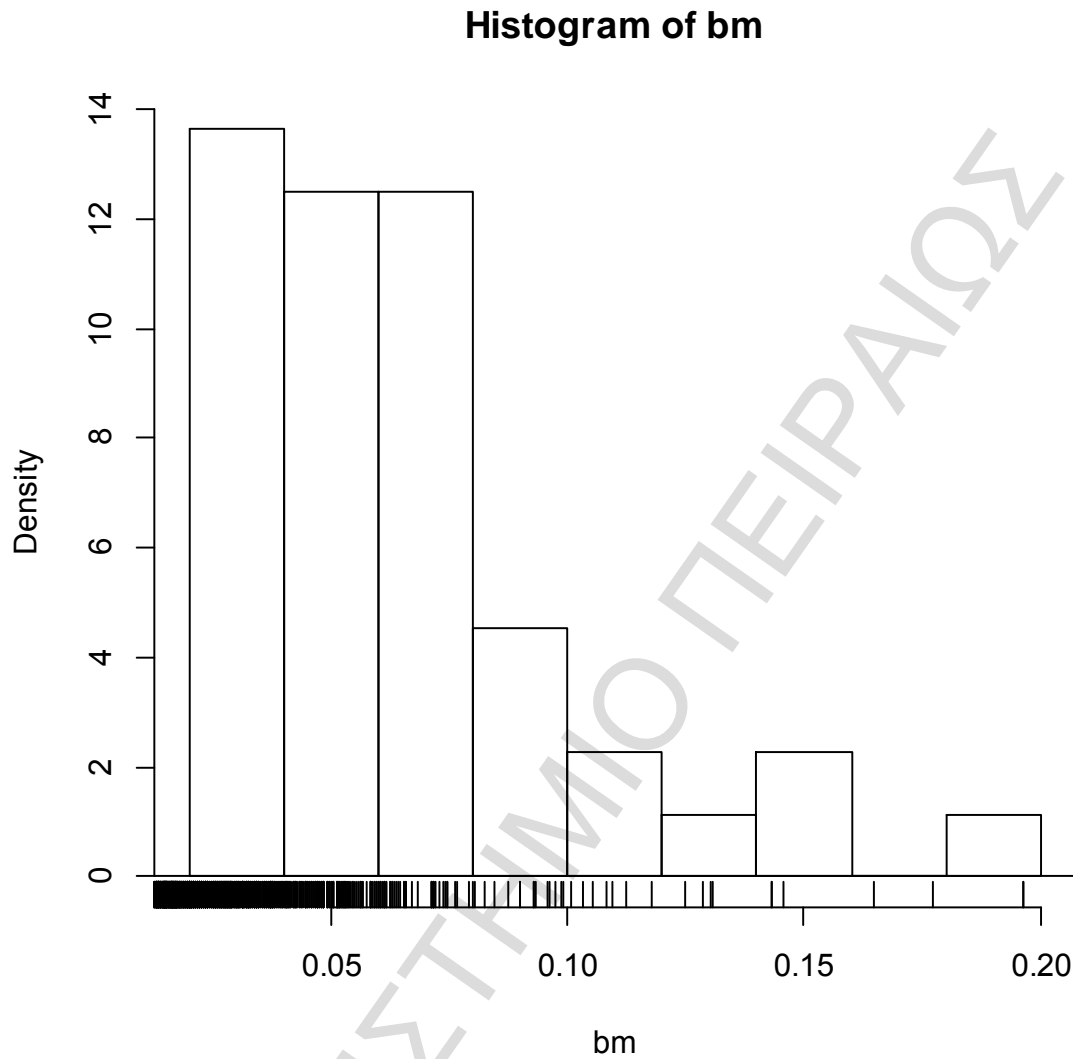
Στο γράφημα των αποδόσεων φαίνεται ξεκάθαρα ότι υπάρχουν 2 τιμές που έχουν τεράστια απόκλιση από τις υπόλοιπες αποδόσεις. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να διερευνηθεί αν υπήρχε κάποια συγκεκριμένη αιτία που συνέβη αυτό. Όντως μετά από έρευνα διαπιστώθηκε ότι στις 19 Ιουλίου το 1999 και στις 15 Οκτωβρίου το 2001 έγινε «stock split».

Όταν μια εταιρεία θέλει να αυξήσει τον αριθμό των μετοχών προβαίνει σε stock split, δηλαδή σε διάσπαση-διαίρεση μετοχών. Πιο συγκεκριμένα αν γίνει stock split 2-1 και κάποιος έχει στην κατοχή του συνολικά 30 μετοχές αξίας 10 ευρώ η μία, στη συνέχεια θα έχει 60 μετοχές αξίας 5 ευρώ η μία. Για το ULPSX έγινε stock split 4-1 στις 19 Ιουλίου το 1999 (ακραία αρνητική τιμή) και 1-5 στις 15 Οκτωβρίου το 2001(ακραία θετική τιμή).

Το παραπάνω γεγονός οδηγεί στην απόφαση να αφαιρεθούν οι 2 συγκεκριμένες αποδόσεις από την μελέτη της χρονοσειράς, αφού υπήρχε συγκεκριμένη αιτία που οδήγησε σε αυτές τις δύο ακραίες τιμές. Επομένως το τελικό γράφημα των αποδόσεων θα έχει τη παρακάτω μορφή.



Σχήμα 3: Γράφημα αποδόσεων μετά την αφαίρεση των 2 ακραίων τιμών



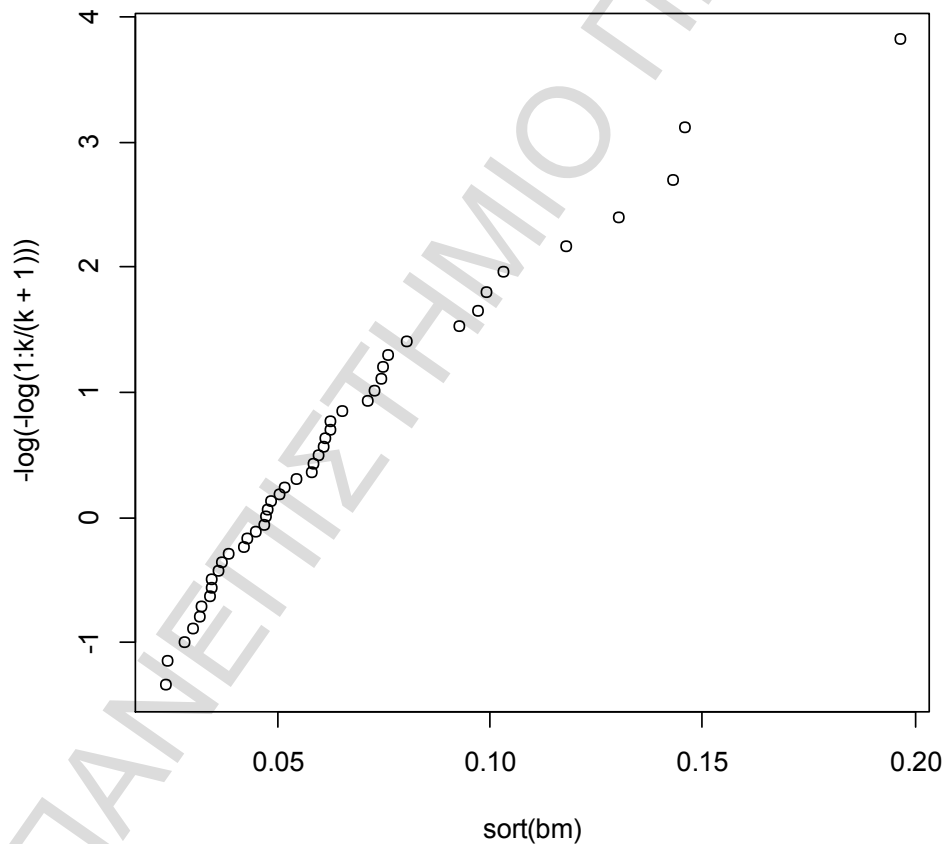
Σχήμα 4: Ιστόγραμμα των block maxima

Ιδιαίτερα από το ιστόγραμμα των block maxima φαίνεται ότι πρόκειται για μια κατανομή με βαριά δεξιά ουρά.

Επιπλέον θα πρέπει να αναφερθεί ότι μετά την αφαίρεση των δυο τιμών και για να έχουν τα blocks τον ίδιο αριθμό τιμών προστέθηκαν δυο αποδόσεις τιμών έως δηλαδή την 30 Ιανουαρίου του 2014.

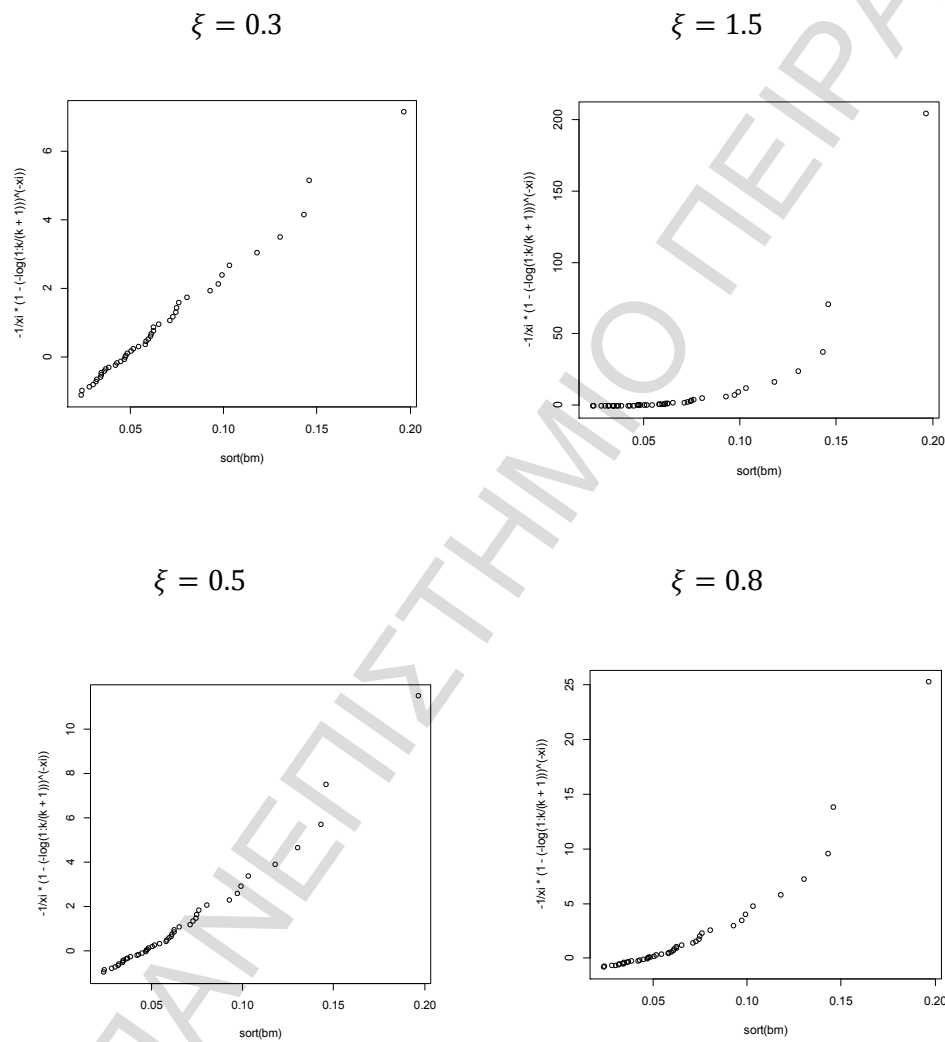
Εκτίμηση παραμέτρων

Η καλύτερη οδός για ασφαλή συμπεράσματα είναι πρώτα να εκτιμηθούν οι παράμετροι της GEV μ, σ και ξ . Αρχικά μπορεί να γίνει μία πρώτη εκτίμηση του ξ με δεδομένα $\mu = 0$ και $\sigma = 1$. Από το Gumbel Q-Q plot των block maxima, που εμφανίζεται παρακάτω φαίνεται ότι το ξ είναι θετικός αριθμός επειδή η καμπύλη των σημείων είναι σχεδόν κοίλη.



Σχήμα 5: Γράφημα σημείων στο Gumbel Q-Q plot

Δοκιμάζοντας διάφορες πιθανές τιμές του ξ στα Q-Q plot της GEV, φαίνεται ότι το ξ βρίσκεται κοντά στο 0.3



Σχήμα 6: Q-Q plots της GEV με $\mu=0$ και $\sigma=1$ για διάφορες τιμές του ξ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επίσης, για την εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας. Με την εντολή `a<-gen.fit(bm)` οι εκτιμήτριες των παραμέτρων της GEV θα είναι ως εξής:

```
$conv
```

```
[1] 0
```

```
$nllh
```

```
[1] -97.40702
```

```
$mle
```

```
[1] 0.04666609 0.02009545 0.28842883
```

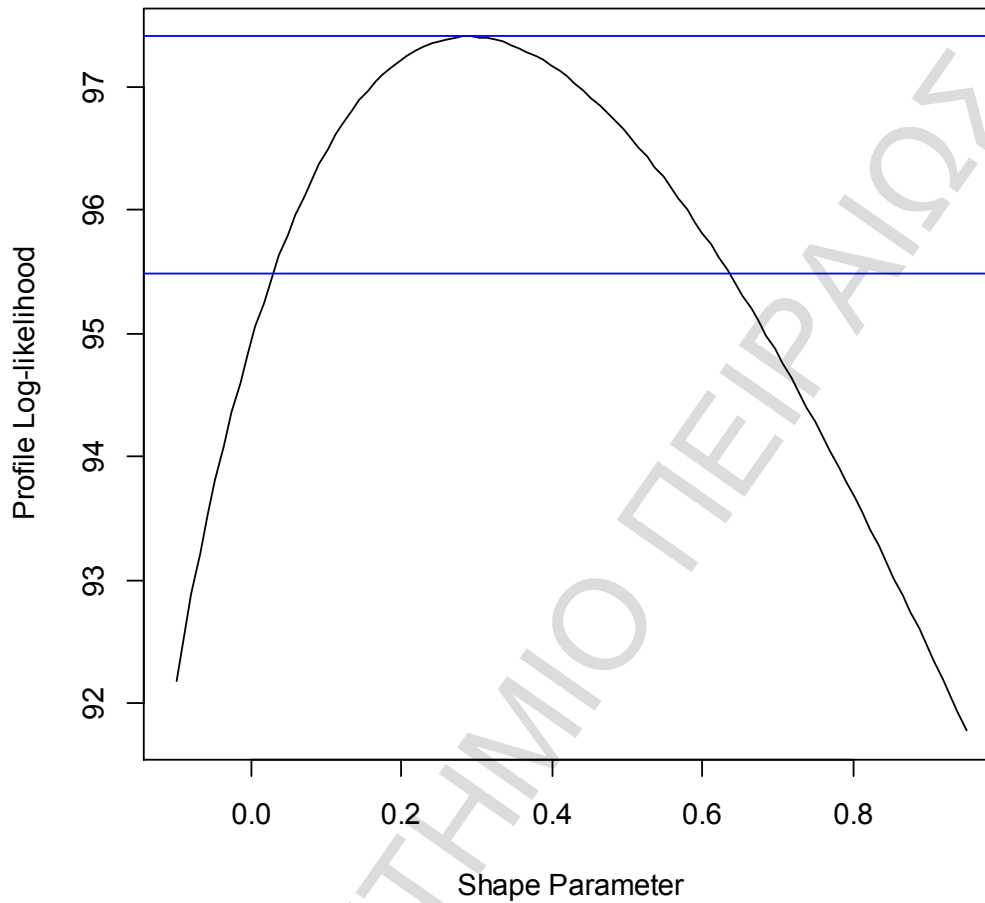
```
$se
```

```
[1] 0.003523555 0.002915555 0.153221861
```

Και συγκεκριμένα,

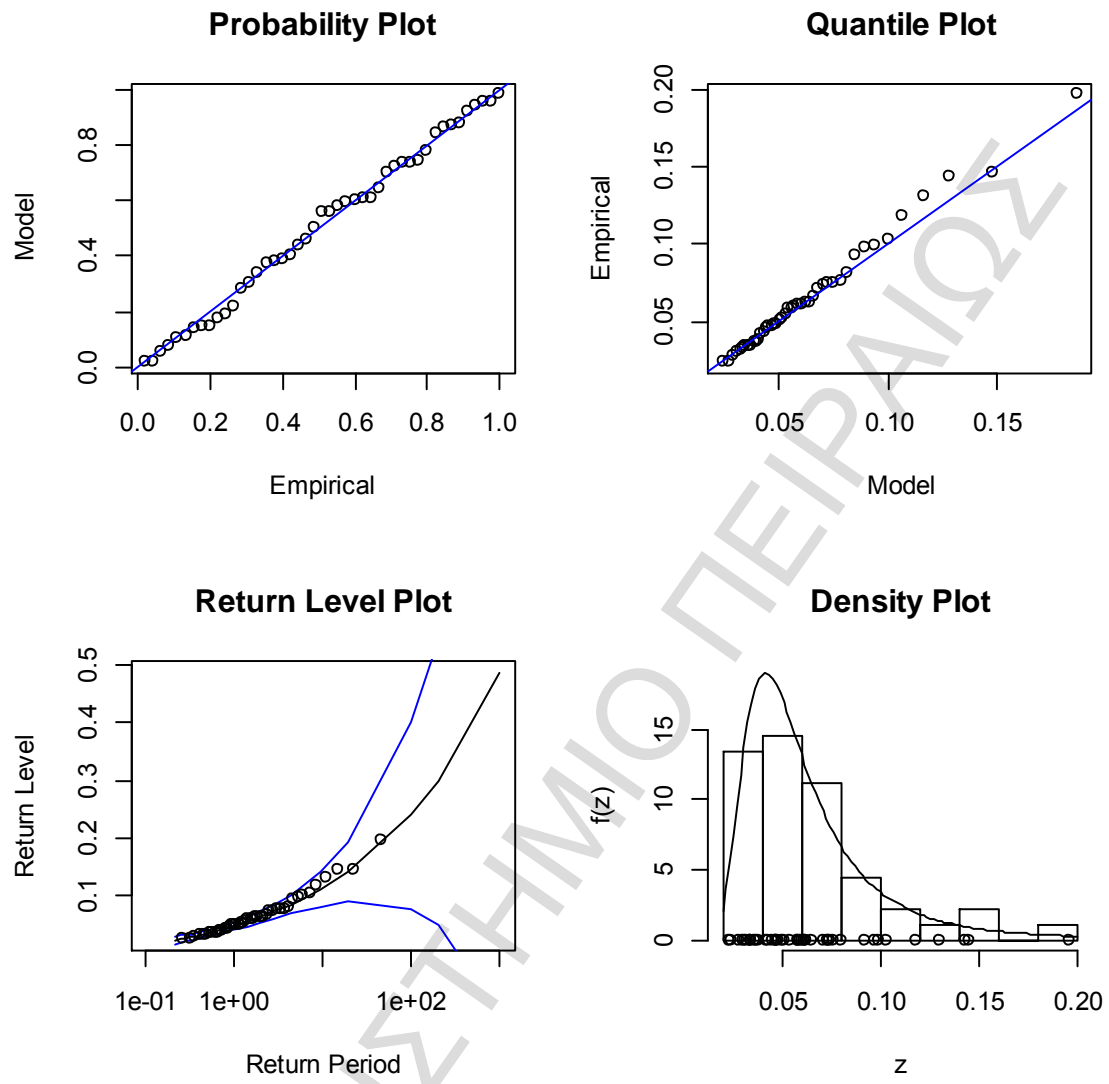
$$\hat{\mu} = 0.04666609, \quad \hat{\sigma} = 0.02009545, \quad \hat{\xi} = 0.28842883$$

Μέσω του R μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα (Profile log – likelihood) από το οποίο λαμβάνεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης του ξ σε επίπεδο σημαντικότητας 95%. Το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης είναι (0.05, 0.65) περίπου, και επομένως πρόκειται για παρατηρήσεις από κατανομή με βαριά δεξιά ουρά.



Σχήμα 7: Γράφημα της συνάρτησης της μεγιστοποιημένης πιθανοφάνειας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα πρέπει πάντα να ελέγχεται και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να ελεγχθεί πόσο καλά προσαρμόζονται τα μέγιστα των παρατηρήσεων στην κατανομή GEV. Η απάντηση μπορεί να δοθεί και πάλι με την κατασκευή κατάλληλων γραφημάτων όπως φαίνεται παρακάτω. Το probability plot και το quantile plot δείχνουν ότι επιτυγχάνεται μια ικανοποιητική προσαρμογή, με λίγες μόνο τιμές να μην “πατάνε” πάνω στην ευθεία της κατανομής.



Σχήμα 8: Διαγνωστικά γραφήματα καλής προσαρμογής των b_m στην GEV

Εκτίμηση του VaR

Για να εκτιμηθεί η μέγιστη αναμενόμενη δυνητική ζημιά χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος

$$\widehat{VaR} = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left(1 - (-\log(1 - 1/k))^{-\xi} \right)$$

Για $k = 1$, το VaR για το επόμενο τετράμηνο είναι -0.02300605

Για $k = 2$, το VaR για το επόμενο 8μηνο είναι 0.05443472 (0.9917822)

Για $k = 3$, το VaR για το επόμενο έτος είναι 0.06738733 (99,518)

Για $k = 6$, το VaR για το επόμενα 2 έτη είναι 0.09082343 (99,783).

Στις παρενθέσεις δίδεται το αντίστοιχο ποσοστημόριο του VaR όπως αναλύθηκε στην Παράγραφο 3.1. Μέγιστη Αναμενόμενη Δυνητική Ζημιά (Value at Risk, VaR).

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις της μετοχής

$$X_i = \ln \frac{S_{i+1}}{S_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

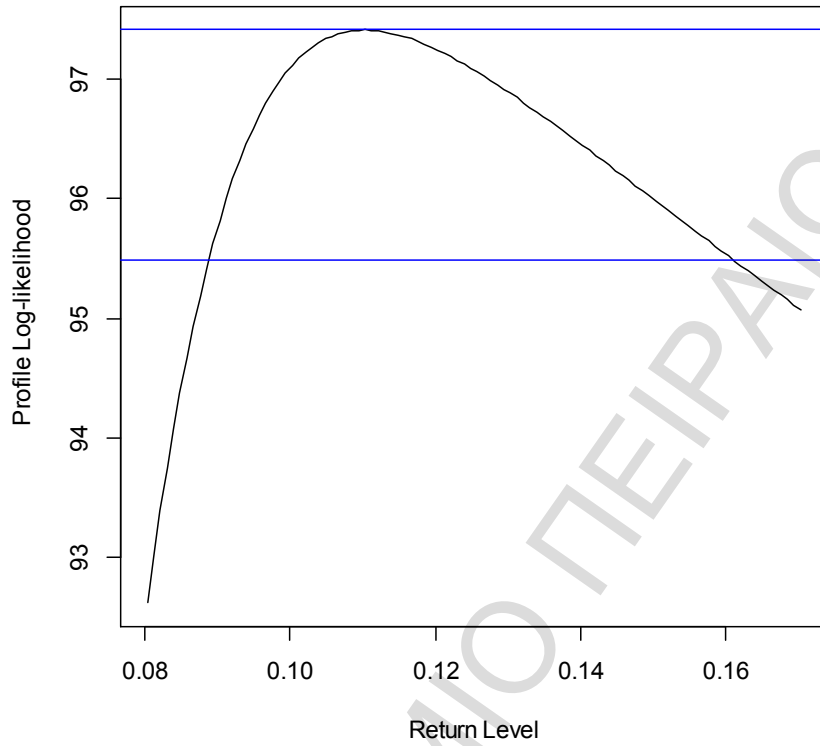
υπερβαίνουν την τιμή 0.106 (δηλαδή $S_{i+1} > e^{0.1} S_i \approx 1.1118 S_i$ για κάποιο i περίπου κάθε 2 χρόνια κατά μέσο όρο).

Αν κάποιος θέλει να εκτιμήσει το 95^ο ποσοστημόριο θα πρέπει να λάβει το k από την εξίσωση:

$$0.95 = (1 - 1/k)^{1/m},$$

όπου m ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε block. Εδώ $m = 84$, οπότε αρκεί να βρεθεί το k .

Το γράφημα της profile likelihood που έχει κατασκευαστεί παρακάτω δίνει ένα δ.ε. 95% για το VaR. Από ό,τι φαίνεται το διάστημα εμπιστοσύνης είναι από 0.09 έως 0.16 περίπου, για $k = 10$.

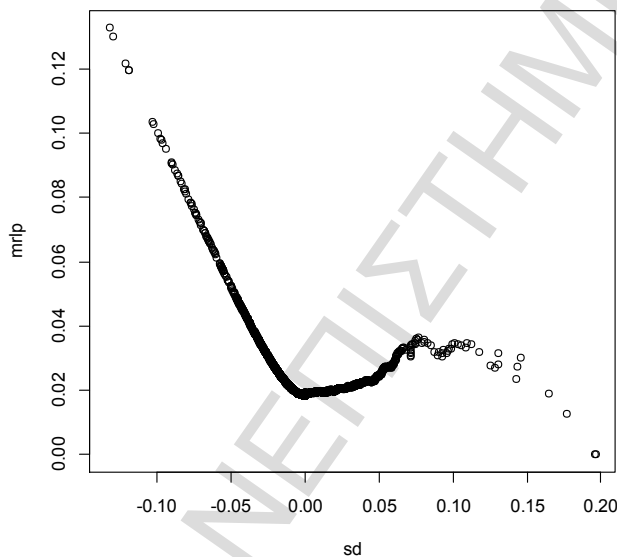


Σχήμα 9: Διάγραμμα profile log-likelihood για την εκτίμηση δ.ε του VaR για τα επόμενα 10 blocks

4.2 POT

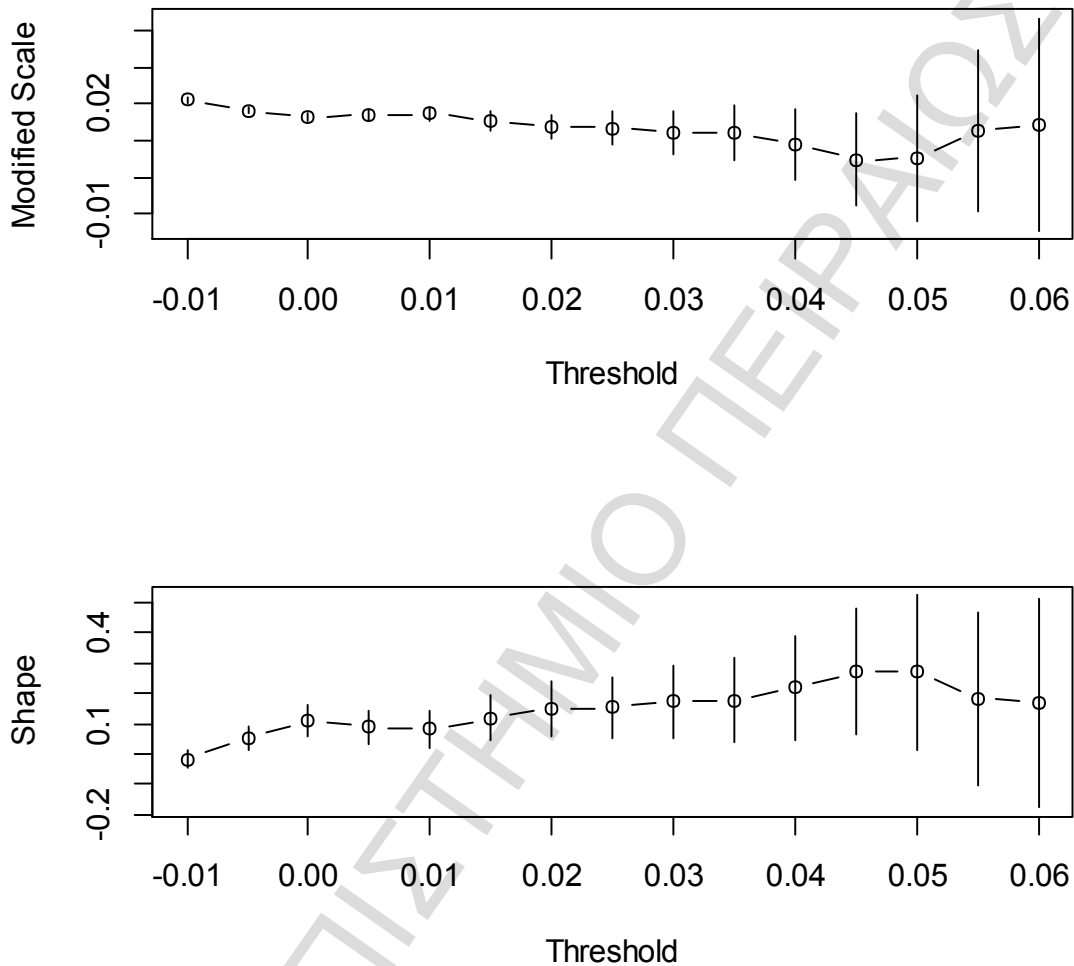
Επιλογή κατώφλιού

Με την μέθοδο POT δεν θα μελετηθούν όλα τα δεδομένα, αλλά μόνο αυτά που υπερβαίνουν ένα υψηλό κατώφλι u . Πρωταρχικό βήμα είναι να καθοριστεί το συγκεκριμένο κατώφλι. Το mean excess plot θα δώσει μια πρώτη εικόνα. Επιλέγεται ως u η τιμή μετά από την οποία μοιάζει να ευθυγραμμίζεται το γράφημα. Εδώ μοιάζει να είναι κάποια τιμή μεταξύ 0 και 0.05 (εξαιρούνται οι τελευταίες δεξιά ακραίες παρατηρήσεις). Από τα δύο τελευταία γραφήματα μπορεί το u να επιλεγθεί με μεγαλύτερη ακόμη ασφάλεια. Σε αυτά τα διαγράμματα επιλέγεται το u πάνω από το σημείο εκείνο που η γραμμή των σημείων μοιάζει ευθεία. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι αφού η F_u προσεγγίζει καλά την γενικευμένη Pareto, η παράμετρος $\hat{\beta}$ μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το u και το ξ σταθεροποιείται.



Σχήμα 10: Γράφημα της mean residual life plot

Το u θα οριστεί ίσο με 0.03, σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα.



Σχήμα 11: Γραφήματα με διάφορες τιμές του u ως προς το ξ και σ

Ωστόσο για τις υπόλοιπες χρονοσειρές στην συγκεκριμένη εργασία και για απλότητα θα επιλέγεται το κατώφλι με την εντολή `findThreshold` του πακέτου `fExtremes`. Η συγκεκριμένη εντολή ορίζει το κατώφλι στην παρατήρηση πάνω από την οποία βρίσκεται το 5% των πιο ακραίων παρατηρήσεων. Με την εντολή αυτή το κατώφλι για την συγκεκριμένη χρονοσειρά θα ήταν $u = 0.04153993$.

Εκτίμηση παραμέτρων

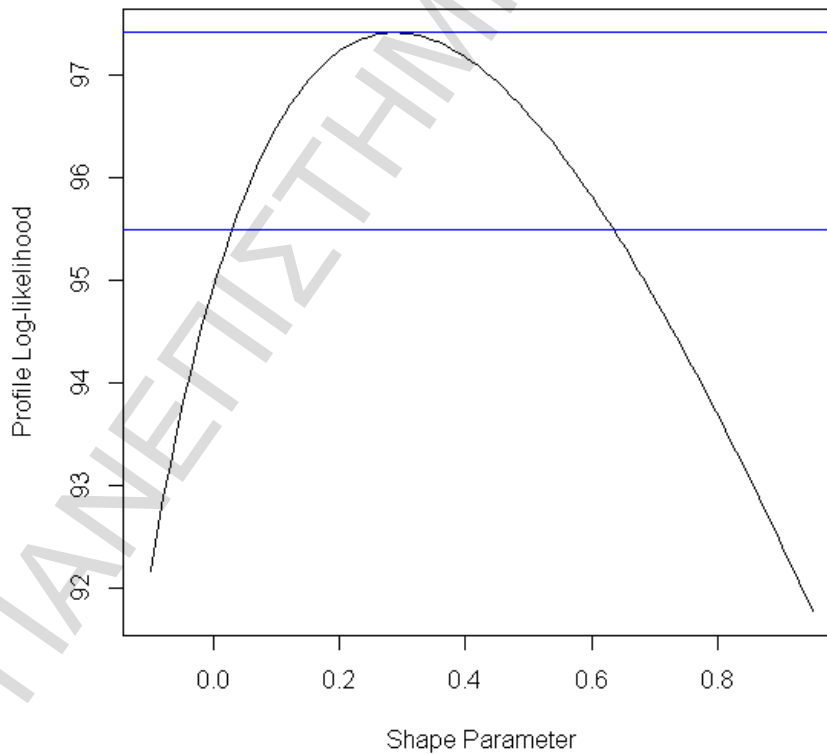
Σε προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκε η σ.κ. της Γενικευμένης κατανομής Pareto $G_{\xi,\beta}(y)$, η οποία είναι

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + y\xi/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-y/\beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

όπου

$\beta > 0, y \geq 0$ όταν $\xi \geq 0$ και $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ όταν $\xi < 0$.

Μια πρώτη εκτίμηση της παραμέτρου ξ μπορεί να γίνει από την profile Deviance Function με διάστημα εμπιστοσύνης 95%. Η εκτίμηση του ξ είναι μεταξύ 0.1 και 0.7 (δ.ε. 95%) με σημειακή εκτίμηση την τιμή 0.3 περίπου.



Σχήμα 12: Διάγραμμα της profile log-likelihood για το δ.ε. του ξ

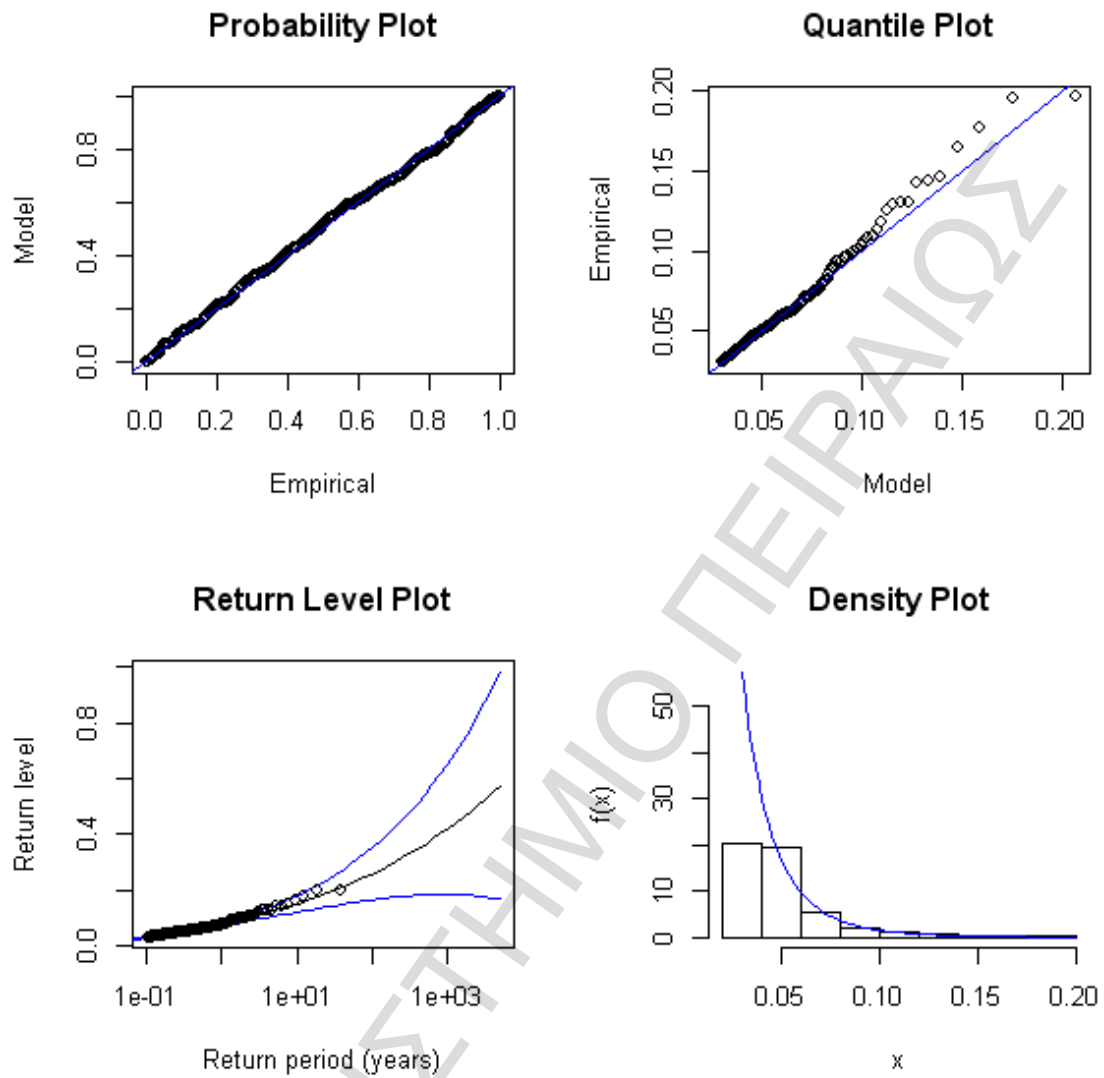
Επίσης με την Μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας λαμβάνονται μέσω του R οι εξής πληροφορίες: με κατώφλι το $u = 0.03$ οι αποδόσεις που χρησιμοποιούνται για ανάλυση είναι 352, και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της GPD είναι $\hat{\beta} = 0.01743559$ και $\hat{\xi} = 0.17248505$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται και οι τυπικές αποκλίσεις των εκτιμώμενων παραμέτρων και ο λόγος των παρατηρήσεων πάνω από το κατώφλι προς το σύνολο των παρατηρήσεων (0.09312169), δηλαδή περίπου το 10% που υπενθυμίζει ότι με την συγκεκριμένη μέθοδο υπάρχει πολύ περισσότερη πληροφορία (κρατούνται πολύ περισσότερες παρατηρήσεις για μελέτη) από ότι στην Block Maxima.

```

threshold
[1] 0.03
$nexc
[1] 352
$convc
[1] 0
$nllh
[1] -1012.685
$mle
[1] 0.01743559 0.17248505
$rate
[1] 0.09312169
$se
[1] 0.00139915 0.06159419

```

Με τα ίδια διαγνωστικά γραφήματα που κατασκευάστηκαν και στην Block Maxima ελέγχεται πόσο καλά προσαρμόζονται τα δεδομένα πάνω από το κατώφλι u στην γενικευμένη Pareto. Η εικόνα είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα της GEV κατανομής.



Σχήμα 13: Γραφήματα καλής προσαρμογής των POT στην GPD

VaR

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο εκτιμάται το VaR για διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης.

$$\widehat{VaR}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{N_u}{nq} \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right)$$

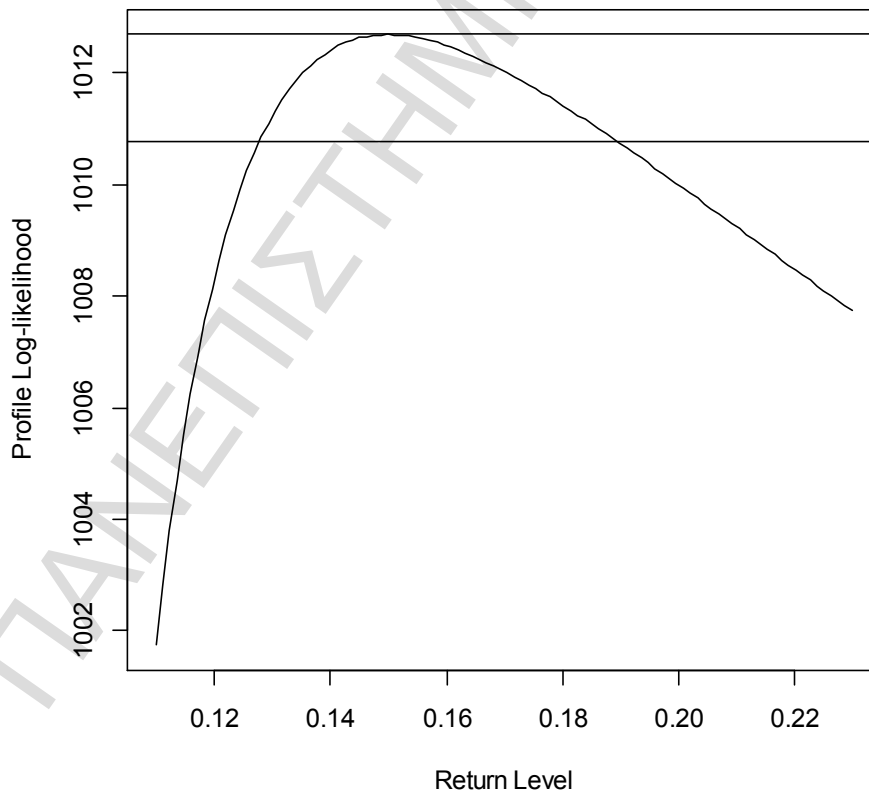
$VAR_{0.95} = 0.04144582$

$VAR_{0.97} = 0.05181077$

$VAR_{0.99} = 0.07745144$

$VAR_{0.999} = 0.1498771$

Επίσης παρακάτω δίδεται το γράφημα της Profile log-likelihood για το $VaR_{0.999}$ από όπου λαμβάνεται και δ.ε. 95%, (0.13, 0.19) περίπου.



Σχήμα 14: Διάγραμμα profile log-likelihood για την εκτίμηση δ.ε του $VaR_{0.999}$

ES

Τέλος με την βοήθεια του R και τον παρακάτω τύπο, δίδεται ο πίνακας του Expected Shortfall για διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης.

$$\widehat{ES}_q = \frac{\widehat{VaR}_q}{1 - \xi} + \frac{\hat{\beta} - \xi u}{1 - \xi}$$

p	VaR	ES
95%	0.04144582	0.06490137
97%	0.05181077	0.07742677
99%	0.07745144	0.1084119
99,5%	0.09631524	0.1312076
99,9%	0.1498771	0.1959337
99.95%	0.1779388	0.2298446

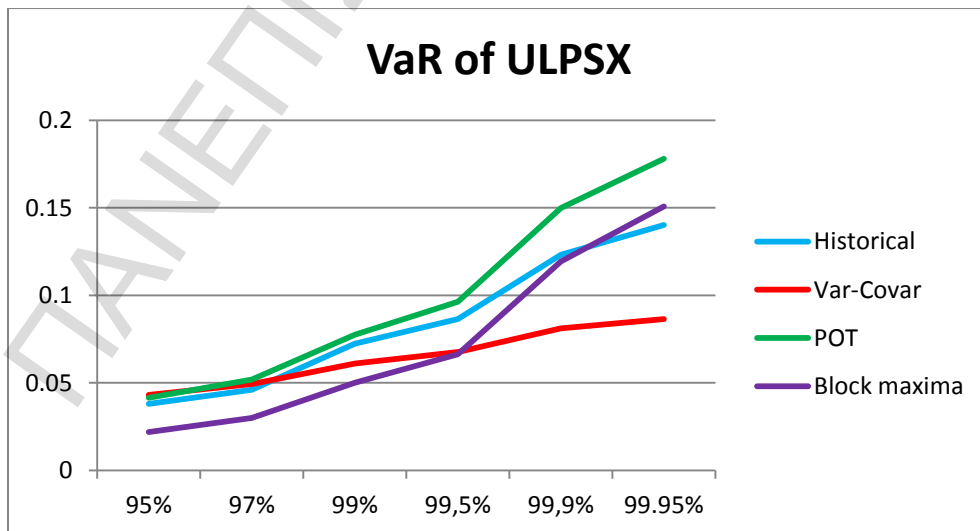
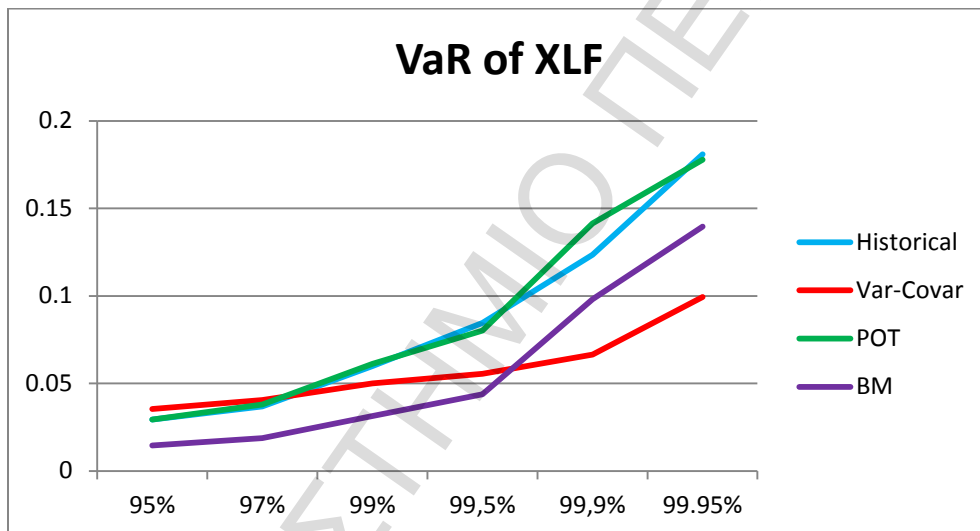
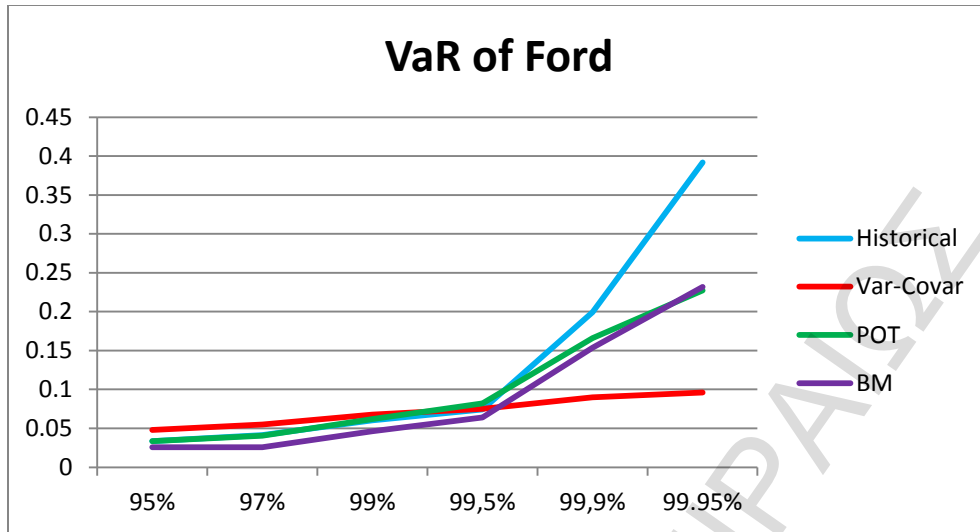
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

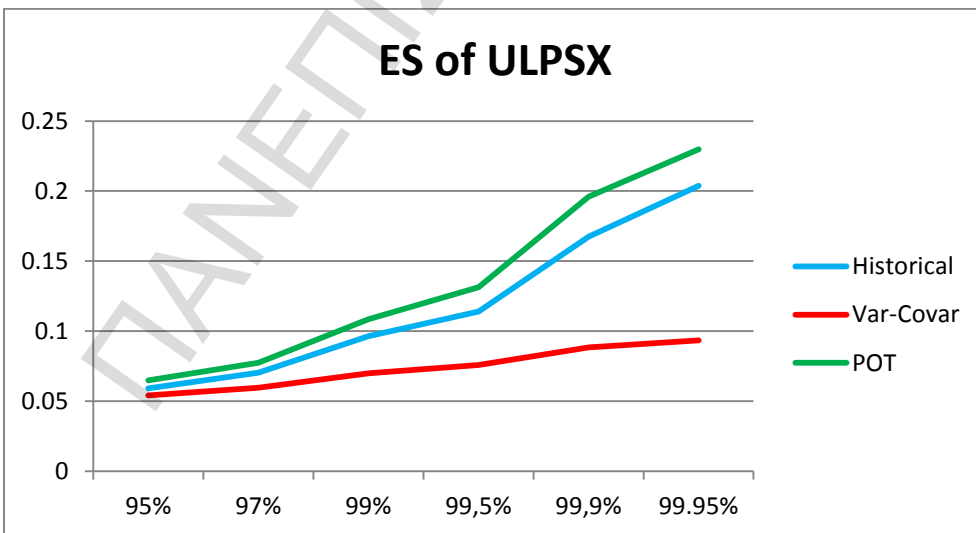
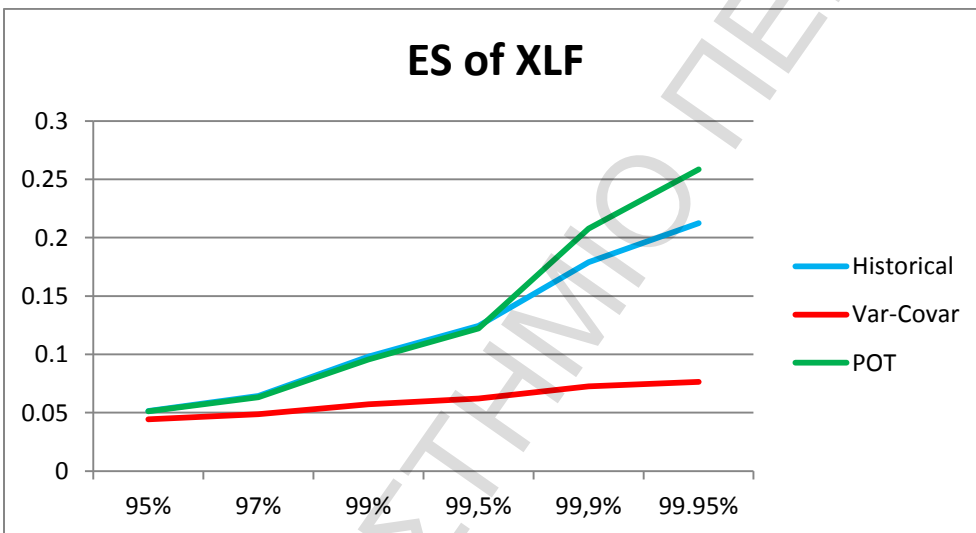
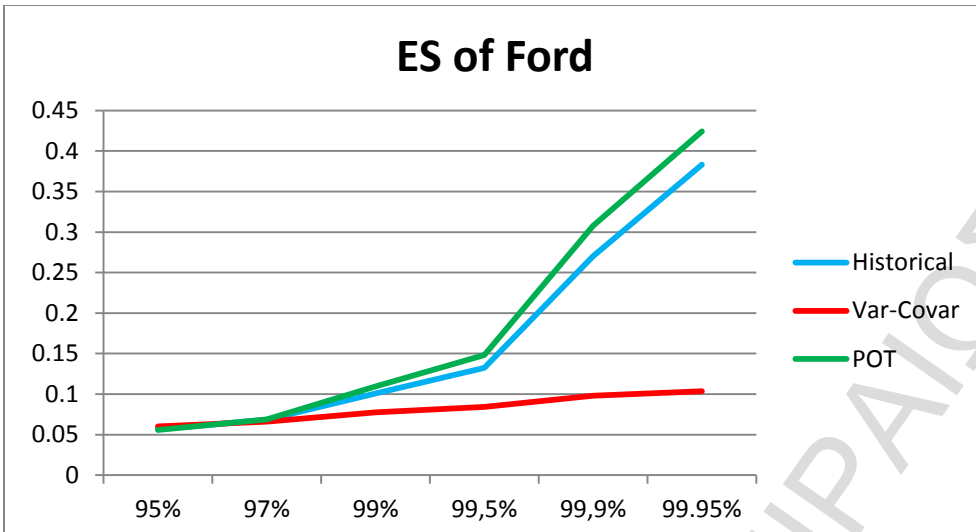
4.3 Σχόλια-Συμπεράσματα

Οι χρονοσειρές F, XLF, ULPSX του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης

Σε σχέση με τα αποτελέσματα των μέτρων κινδύνου, ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η εκτίμηση του VaR σε ποσοστήμorio 95 % δεν έχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα σε όλες τις μεθόδους. Ωστόσο για 95 % το VaR που εκτιμάται μέσω της μεθόδου Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης είναι το υψηλότερο και το VaR που εκτιμάται μέσω της μεθόδου Block Maxima το χαμηλότερο. Οι διαφοροποιήσεις είναι πιο αισθητές σε ανώτερα ποσοστημόρια της τάξης του 99.5% και άνω. Στα ανώτερα ποσοστημόρια για όλες τις χρονοσειρές η μέθοδος της Συνδιακύμανσης είχε τις μικρότερες τιμές για το μέτρο κινδύνου ενώ η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης και της POT είχαν τις μεγαλύτερες τιμές με μικρή διαφοροποίηση τα αποτελέσματα της ULPSX, όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα. Αυτό ήταν αναμενόμενο διότι η μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης βασίζεται στην υπόθεση ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από κανονική κατανομή, δηλαδή από κατανομή με λεπτή ουρά ($\xi = 0$) και επομένως ο κίνδυνος για την εμφάνιση ακραίων προσαυξήσεων θα εκτιμάται μικρός.

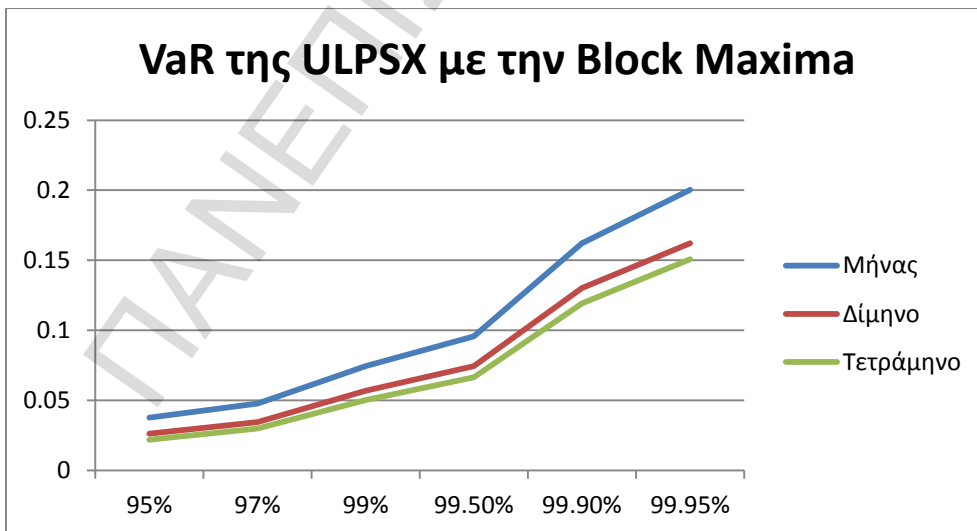
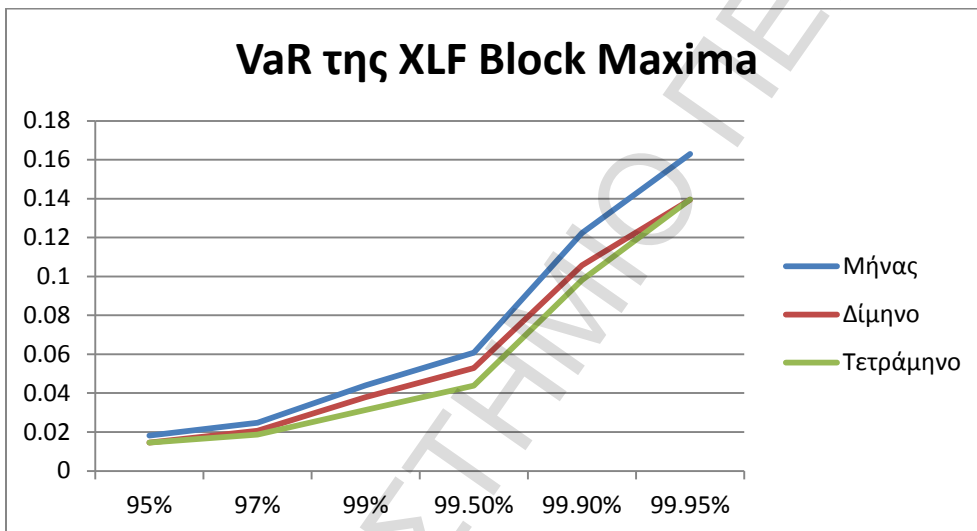
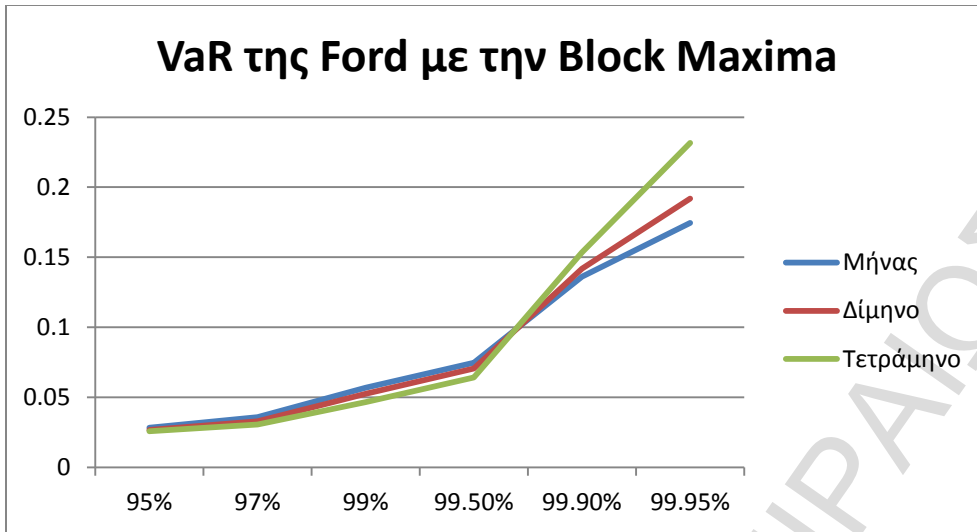
Ακόμη στα επόμενα τρία διαγράμματα φαίνεται το ES για τις τρεις χρονοσειρές. Σε όλες τις περιπτώσεις η μέθοδος της συνδιακύμανσης έχει τις μικρότερες τιμές και τις μεγαλύτερες έχει η μέθοδος POT. Οι διαφορές είναι αισθητές σε μεγαλύτερα ποσοστημόρια και πάλι. Τα διαγράμματα παρακάτω έχουν εξαχθεί από τους πίνακες του παραρτήματος και βοηθούν στην εξαγωγή περιγραφικών συμπερασμάτων.



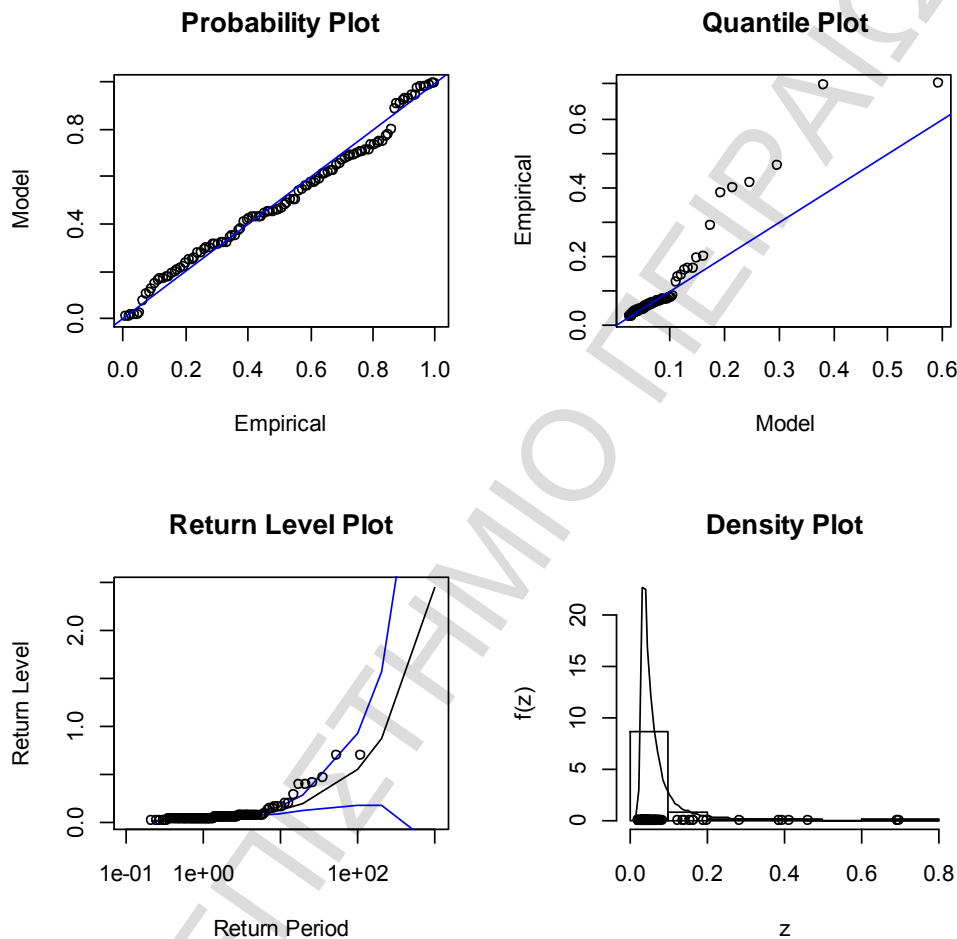


Για την μέθοδο Block Maxima έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι τα αποτελέσματα μπορεί να έχουν μεγάλες αποκλίσεις ανάλογα με την επιλογή του μεγέθους του block. Γι' αυτό το λόγο παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα γραμμής για τρία διαφορετικά blocks, για έναν μήνα, για δίμηνο και για τετράμηνο. Αυτό που παρατηρείται πάλι είναι ότι για μικρότερα ποσοστημόρια, κάτω από 99.5% οι διαφορές δεν είναι αισθητές. Όμως για μεγαλύτερα φαίνεται ότι το μέτρο κινδύνου αλλάζει αισθητά. Πιο συγκεκριμένα ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι για την Ford το μέτρο κινδύνου είναι μεγαλύτερο για μεγαλύτερο block(τετράμηνο) ενώ για τα άλλα δύο προϊόντα για μικρότερο block (μήνα) το VaR είναι μεγαλύτερο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

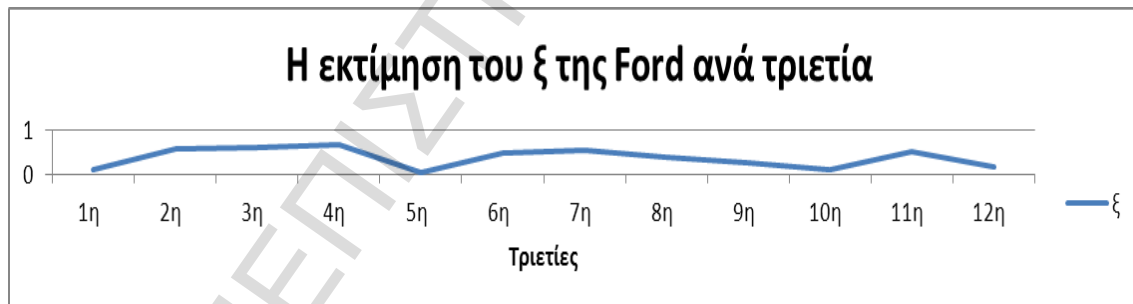
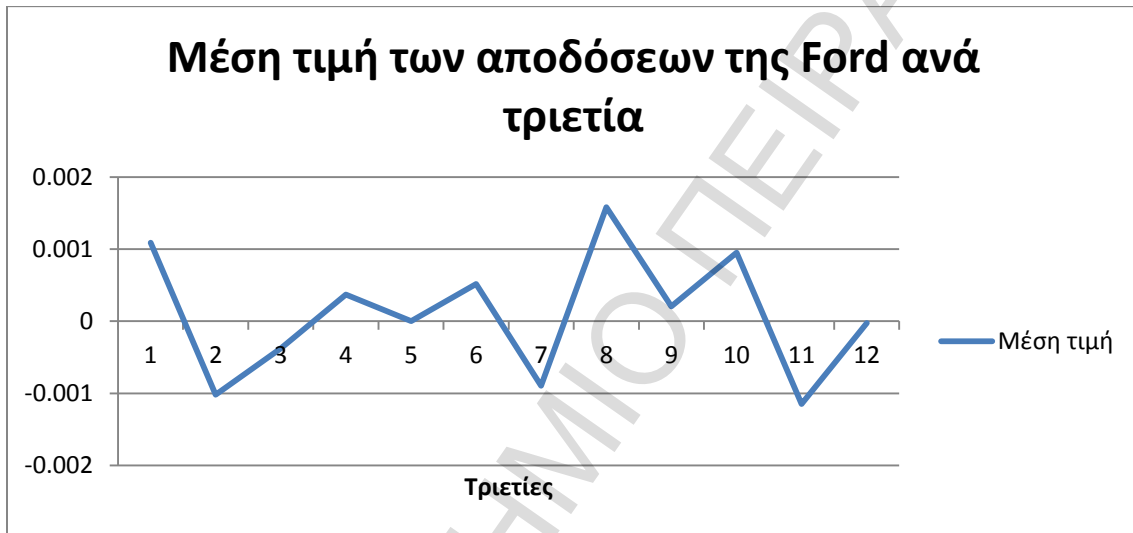


Αξίζει να σημειωθεί ότι για τη μετοχή της Ford κατά την ανάλυση παρατηρήθηκε ότι το quantile plot για την περίπτωση της GEV κατανομής τα δεδομένα της μετοχής δεν έχουν πάρα πολύ καλή προσαρμογή.



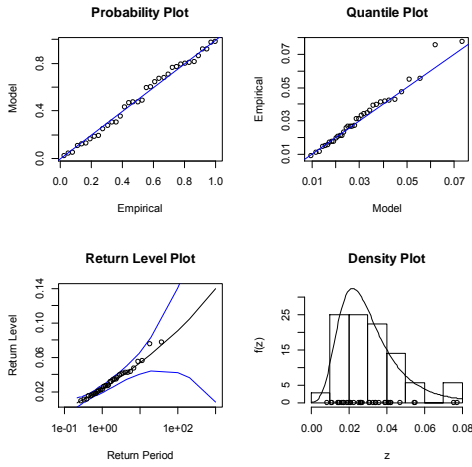
Θα πρέπει λοιπόν να παρατηρηθεί ότι καταγράφονται δεδομένα 36 ολόκληρων ετών. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο κίνδυνος να μην παραμένει η μέση τιμή των δεδομένων σταθερή για ένα τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα. Έτσι ένας πολύ απλός τρόπος για να μελετηθεί ενδεχόμενη μεταβολή του μέσου και της διασποράς των παρατηρήσεων στη διάρκεια του χρόνου είναι να μελετηθούν τα περιγραφικά μέτρα της χρονοσειράς και οι εκτιμήτριες παράμετροι των δύο κατανομών (GEV και GPD) για τα 36 έτη της χρονοσειράς συνολικά αλλά και για μικρότερα χρονικά διαστήματα ξεχωριστά. Ακριβέστερα

η χρονοσειρά μπορεί να διασπαστεί σε 12 τριετίες που θα μελετηθούν και θα εξεταστούν. Παρακάτω φαίνεται η μέση τιμή των αποδόσεων της Ford ανά τριετία, το διάγραμμα έχει προκύψει από τα αποτελέσματα του πίνακα 5 στο παράρτημα. Από ότι φαίνεται η μέση τιμή δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα και το ίδιο ισχύει και για την εκτίμηση του ξ από τον πίνακα 6 του παραρτήματος. Η εκτίμηση του ξ παραμένει σταθερά θετική για όλες τις τριετίες γεγονός που αποδεικνύει ότι πρόκειται για μια κατανομή με άλλοτε περισσότερο βαριά δεξιά ουρά και άλλοτε λιγότερο.

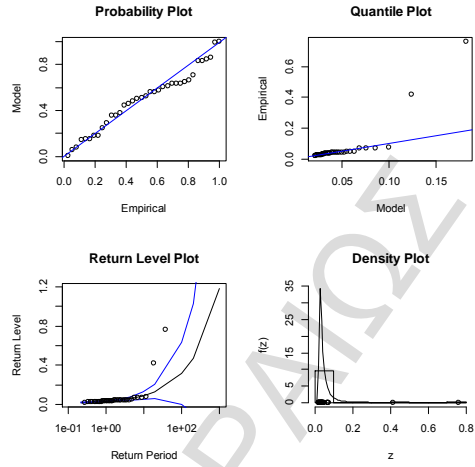


Τέλος δίνονται τα γραφήματα ελέγχου καλής προσαρμογής για κάθε τριετία και αυτό που παρατηρείται είναι ότι η προσαρμογή είναι πάντα καλή με αρκετές τριετίες να παρουσιάζουν δυο με τρεις τιμές να έχουν μεγάλη απόκλιση. Οπότε μετά από έρευνα διαπιστώθηκε ότι και σε αυτή τη χρονοσειρά υπήρχαν splits στις 2/12/1983 (3-2), στις 3/6/1986(3-2), στις 13/1/1988 (2-1), στις 6/7/1994 (2-1) κ.α. γεγονός που εξηγεί την κακή προσαρμογή των δεδομένων.

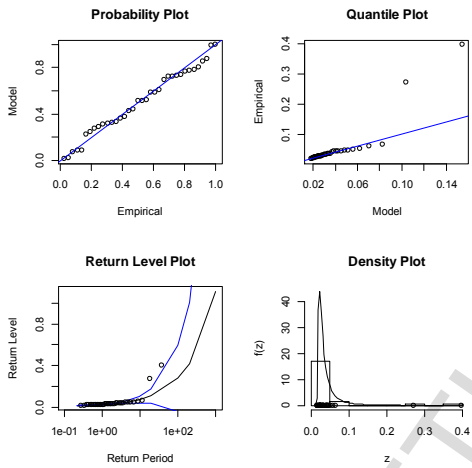
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4



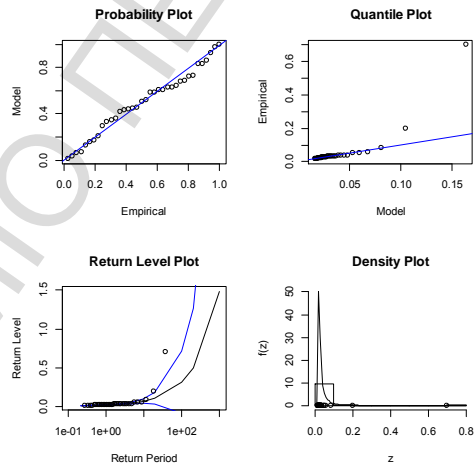
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 1^η τριετία



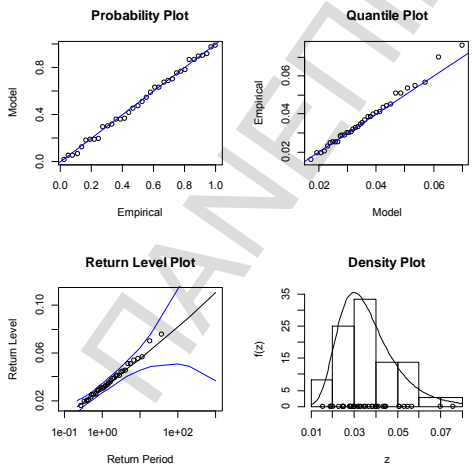
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 2^η τριετία



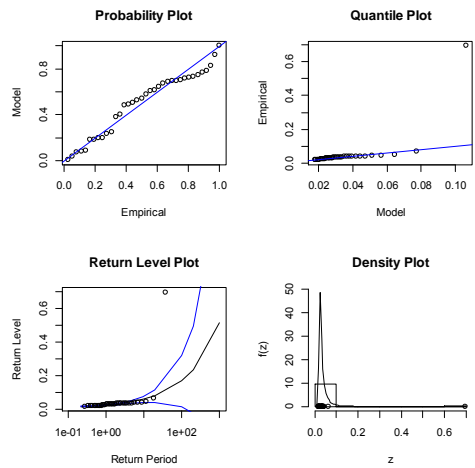
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 3^η τριετία



Γραφήματα καλής προσαρμογής για 4^η τριετία

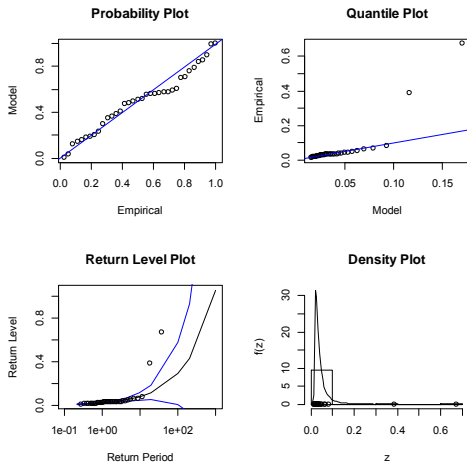


Γραφήματα καλής προσαρμογής για 5^η τριετία

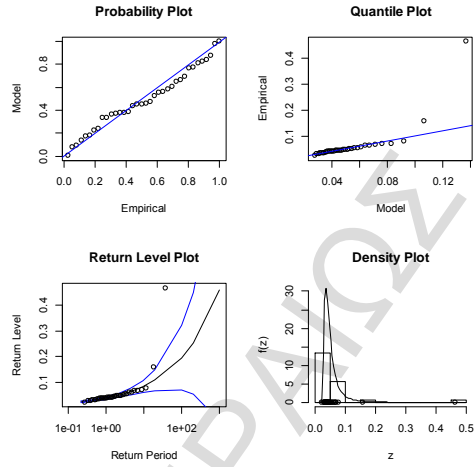


Γραφήματα καλής προσαρμογής για 6^η τριετία

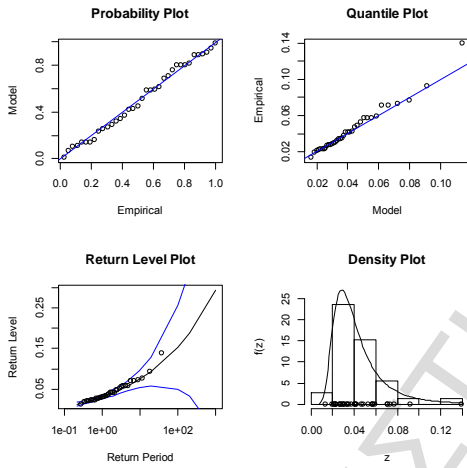
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4



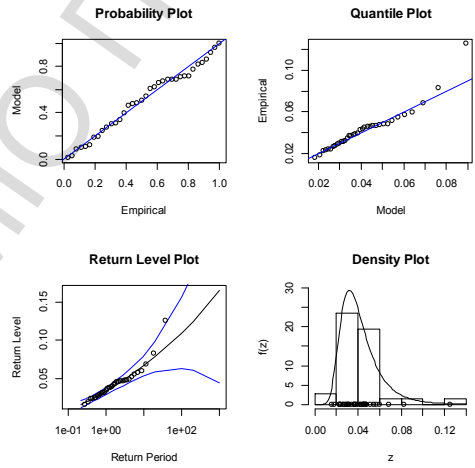
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 7^η τριετία



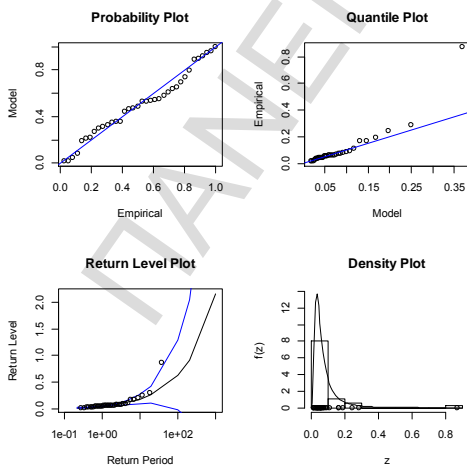
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 8^η τριετία



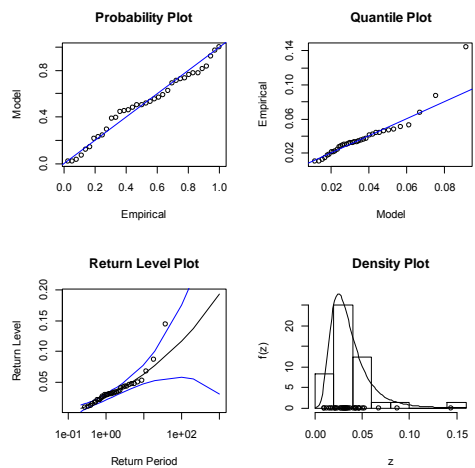
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 9^η τριετία



Γραφήματα καλής προσαρμογής για 10^η τριετία



Γραφήματα καλής προσαρμογής για 11^η τριετία

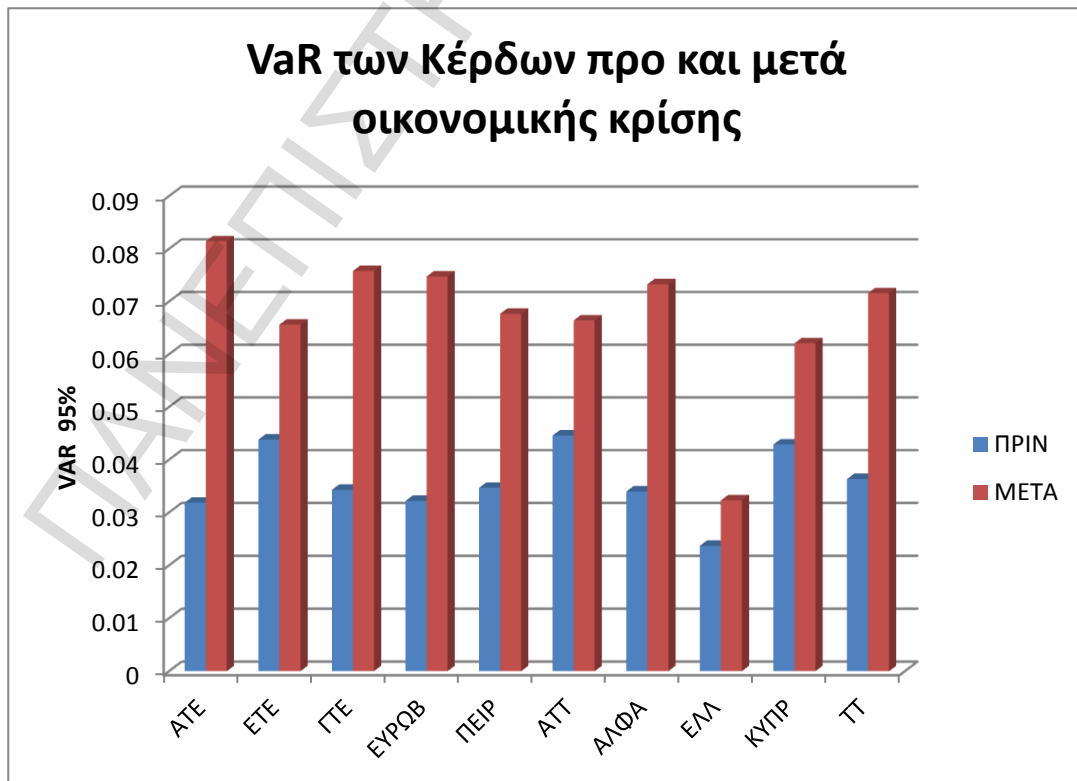


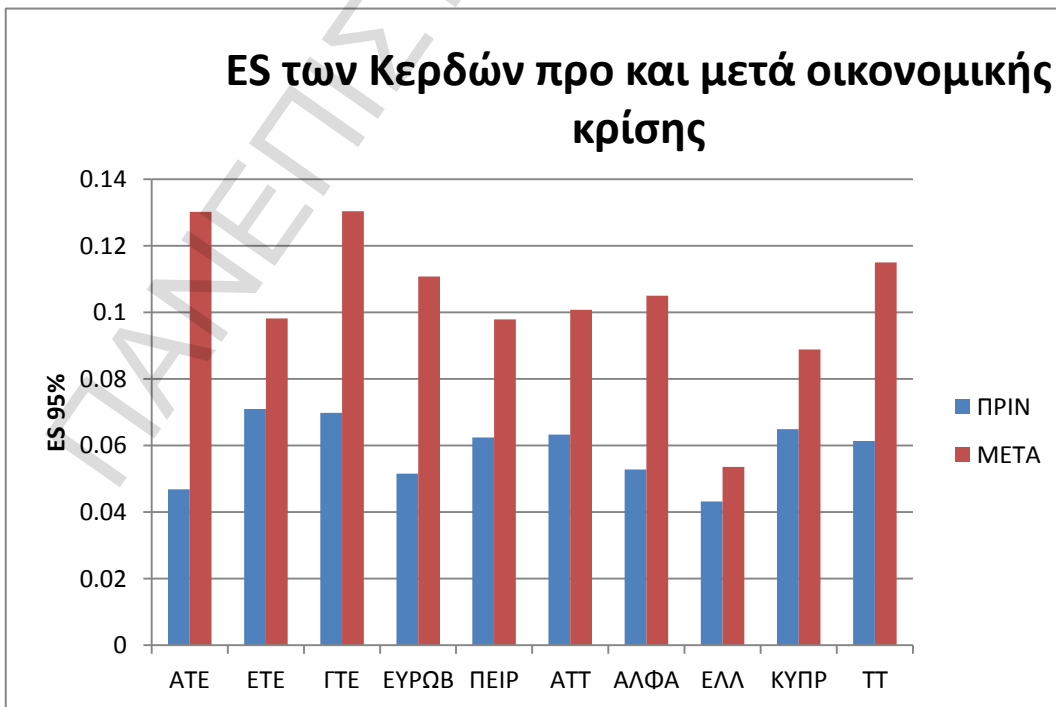
Γραφήματα καλής προσαρμογής για 12^η τριετία

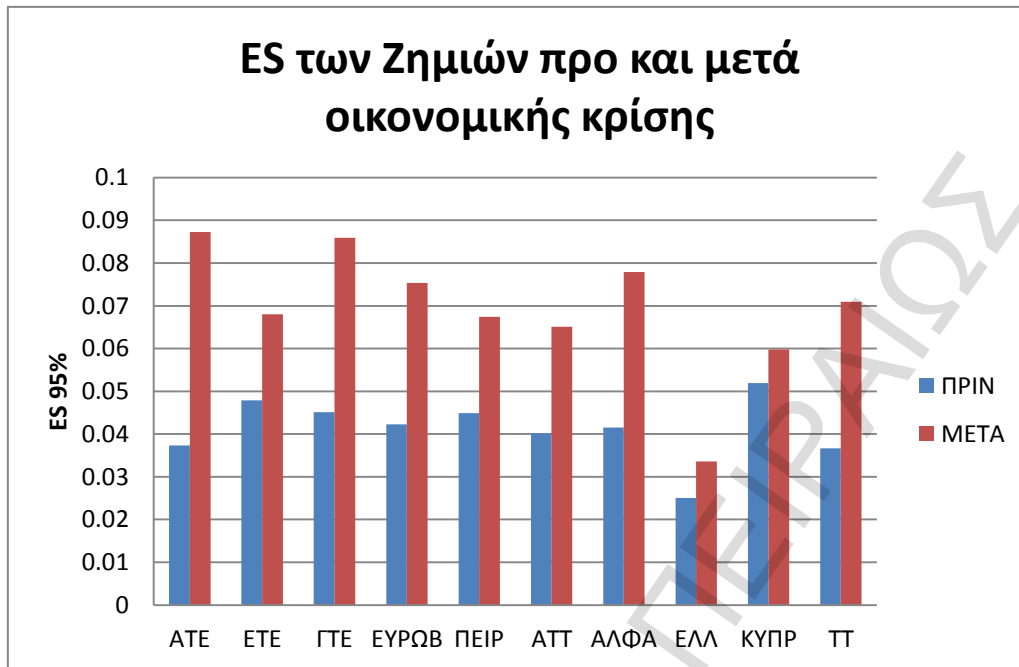
Οι δέκα ελληνικές τράπεζες του χρηματιστηρίου Αθηνών

Η εκτίμηση του κινδύνου με την μεθοδολογία της ΡΟΤ και για τις δέκα τράπεζες όσο αφορά στα κέρδη αλλά και στις ζημιές μετά την οικονομική κρίση μοιάζει να είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με πριν την κρίση. Τα παρακάτω ραβδογράμματα βοηθούν αρκετά στην εξαγωγή αυτών των συμπερασμάτων. Μάλιστα η μέτρηση του κινδύνου και με τις υπόλοιπες μεθοδολογίες δίνει παρόμοιες εικόνες για τα συγκριτικά αποτελέσματα πριν και μετά την οικονομική κρίση σύμφωνα με τους πίνακες του παραρτήματος.

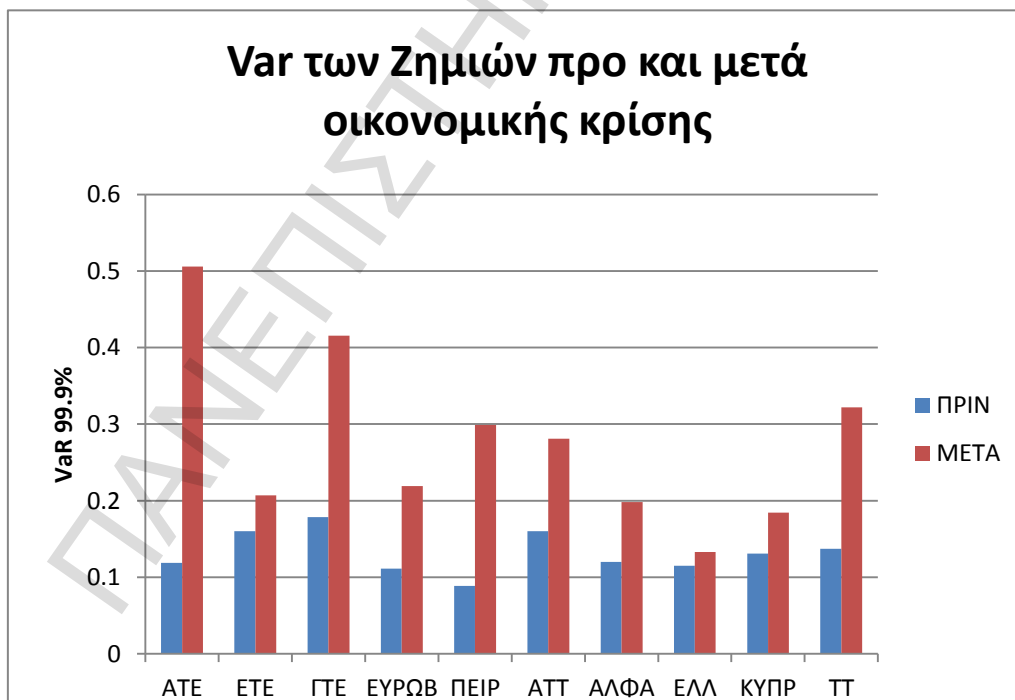
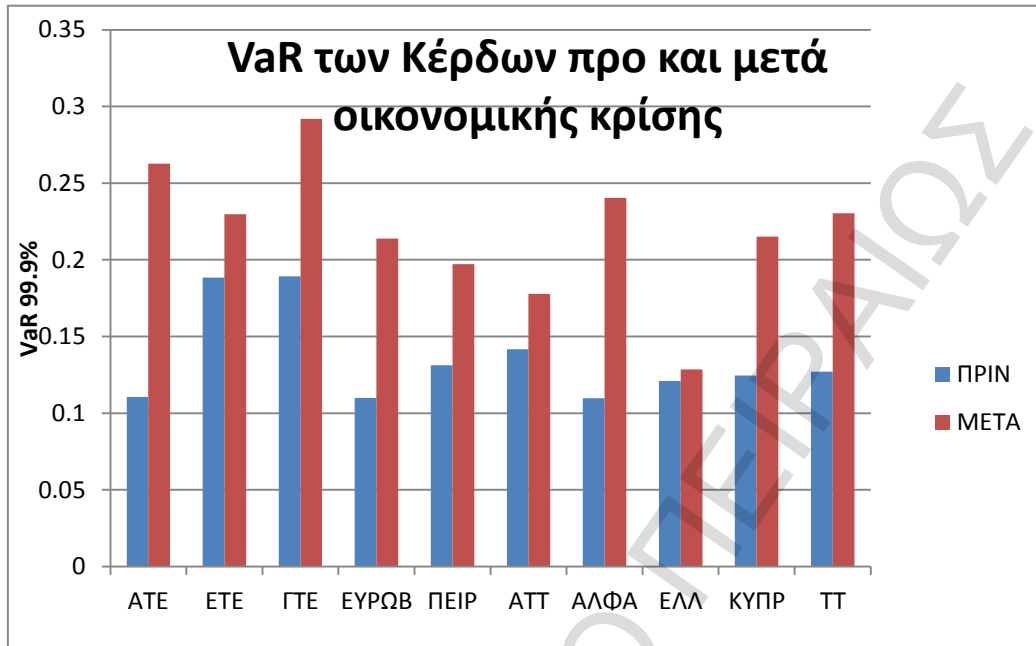
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο κίνδυνος είναι σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερος μετά την οικονομική κρίση. Πριν την οικονομική κρίση τον μεγαλύτερο κίνδυνο κερδών με την εκτίμηση του VaR για 95% είχαν η ΕΤΕ, η ΑΤΤ και η Κύπρου και μετά έχουν η ΑΤΕ, η ΓΤΕ και η Eurobank. Τον μεγαλύτερο κίνδυνο ζημιάς πριν την οικονομική κρίση είχαν η Κύπρου, η ΕΤΕ και η Πειραιώς και μετά έχουν η ΑΤΕ, η ΓΤΕ και η ΑΛΦΑ. Μπορεί να ειπωθεί ότι τα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου ES δεν δίνει ιδιαίτερα διαφορετικά αποτελέσματα. Επίσης για όλες τις περιπτώσεις η Τράπεζα Ελλάδος έχει πάντα τον μικρότερο κίνδυνο.







Πριν την οικονομική κρίση τον μεγαλύτερο κίνδυνο κερδών με την εκτίμηση του VaR για 99.9% είχαν η ΕΤΕ, η ΓΤΕ και η ΑΤΤ και μετά έχουν η ΓΤΕ(0.2918), η ΑΤΕ(0.2625) και η ΑΛΦΑ(0.24). Τον μεγαλύτερο κίνδυνο ζημιάς πριν την οικονομική κρίση είχαν η ΓΤΕ (0.1783), η ΕΤΕ(0.1599) και η ΑΤΤ(0.16) και μετά έχουν η ΑΤΕ, η ΓΤΕ και το ΤΤ.



Όπως αναλύθηκε και στην παράγραφο Εκτίμηση παραμέτρων όταν η εκτίμηση του ξ είναι μικρότερη του μηδενός τότε η κατανομή είναι Pareto τύπου II, όταν είναι θετική τότε η κατανομή GPD παρουσιάζει παχιά δεξιά ουρά η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και οι αρχικές παρατηρήσεις ανήκουν στον πόλο έλξης της Fréchet. Στην περίπτωση δε που η εκτίμηση του ξ ισούται με το μηδέν η κατανομή είναι εκθετική. Από το παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι το ξ είναι κυρίως θετικό με εξαιρέσεις την τράπεζα Πειραιώς, Άλφα και Κύπρου πριν την οικονομική κρίση.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μπούτσικας Μ.(2008), *“Θεωρία ακραίων τιμών”*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΜΠΣ στην *“Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου”*

J.McNeal A.(1999), *“Extreme Value Theory for Risk Managers”*, Internal Modelling and CAD II published by RISK Books

J.McNeal A.& Thomas Saladin (1997), *“The peaks over threshold Method for Estimating high quantiles of loss distributions”*, Internal Modelling and CAD II published by RISK Books

Coles S.(2001), *“An introduction to statistical modeling of Extreme Values”*, Springer Series in Statistics

Bekiros S.& Georgoutsos D.(2005), *“Estimation of Value-at-Risk by Extreme Value and Conventional Methods: a comparative evaluation of their predictive performance”*, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, Vol 15, No 3, pp. 209-228

Embrechts P., I. Resnick S., and Samorodnitsky G.(1999) *“Extreme Value Theory as a Risk Management Tool”*, *North American Actuarial Journal*, Volume 3, Number 2, pp 30-41

Georgescu V. (2009), *“Measuring Risk with Extreme Value Theory”*, Master Thesis presented to Prof. Dr. Wolfgang Härdle, CASE - Center of Applied Statistics and Economics, Humboldt University, Berlin

J. McNeil A. (1996) *“Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory”*, Departement Mathematik, Zurich

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συγκεντρωτικοί - Συγκριτικοί Πίνακες Α

Ford Motor Co.

Πίνακας 1: Εκτιμήσεις VaR με την Μέθοδο Block Maxima σε απόλυτες τιμές και οι εκτιμήτριες παραμέτρων μαζί με δ.ε. 95% για κάθε μήνα, δίμηνο και τετράμηνο.

Μεταβλητές	Μήνας	Δίμηνο	Τετράμηνο
m	21	42	84
k	432	216	108
μ	0.02930445 (0.02812,0.03048)	0.03647061 (0.03463,0.03831)	0.04330022 (0.04013,0.04646)
σ	0.01353385 (0.01258229,0.01448541)	0.01521008 (0.01360843,0.01681174)	0.01798770 (0.0147909,0.0211845)
ξ	0.33418300 (0.2766107,0.3917553)	0.44196871 (0.3568793,0.5270582)	0.64706296 (0.4866766, 0.8074493)
VaR(95%)	K=1.51 0.02820977	K=1.13 0.02653025	K=1.01 0.02583504
VaR(97%)	K=2.11 0.03576109	K=1.38 0.03281098	K=1.08 0.03047132
VaR(99%)	K=5.25 0.05688901	K=2.9 0.05240059	K= 1.75 0.04644649
VaR(99.5%)	K=10 0.07471569	K=5.26 0.07052803	K=2.9 0.06401951
VaR(99.9%)	K=48.09 0.1360472	K=24.3 0.1417303	K=12.4 0.1534793
VaR(99.95%)	K=95.71 0.1744488	K=48.1 0.1918067	K=24.3 0.2316335

Πίνακας 2: Εκτιμήσεις μέτρων κινδύνου με την μέθοδο POT

Για $u= 0.03371106$ και οι εκτιμήτριες των παραμέτρων της GPD $\beta= 0.0117526$ και $\xi= 0.47416929$

ρ	VaR	ES
95%	0.03369567	0.05582458
97%	0.04041485	0.06861719
99%	0.06177762	0.1092897
99,5%	0.08226105	0.148288
99,9%	0.1660503	0.307814
99.95%	0.2271676	0.4241748

Πίνακας 3: Εκτιμήσεις του VaR με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης, της διακύμανσης-συνδιακύμανσης, με την POT και την Block Maxima.

ρ	Historical	Var-Covar	POT	BM
95%	0.03369804	0.04793263	0.03369567	0.02583504
97%	0.04118229	0.05480841	0.04041485	0.02583504
99%	0.06039866	0.06779278	0.06177762	0.04644649
99,5%	0.07445859	0.07506318	0.08226105	0.06401951
99,9%	0.199248	0.09005394	0.1660503	0.1534793
99.95%	0.3917606	0.09589093	0.2271676	0.2316335

Πίνακας 4: Εκτιμήσεις του ES με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης, της διακύμανσης-συνδιακύμανσης, με την POT και την Block Maxima.

P	Historical	Var-Covar	POT
95%	0.05674969	0.06011015	0.05582458
97%	0.06840333	0.06609421	0.06861719
99%	0.1008263	0.07766731	0.1092897
99,5%	0.1322376	0.08427446	0.148288
99,9%	0.2703684	0.09812029	0.307814
99.95%	0.3831804	0.103578	0.4241748

Πίνακας 5: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση των λογαριθμικών αποδόσεων της Ford ανά τριετία.

	Μέση τιμή	Τυπική Απόκλιση
1 ^η τριετία	0.001087	0.01661277
2 ^η τριετία	-0.001021	0.02733315
3 ^η τριετία	-0.0003771	0.02286312
4 ^η τριετία	0.0003686	0.03176301
5 ^η τριετία	3.720e-06	0.01966778
6 ^η τριετία	0.0005159	0.03054451
7 ^η τριετία	-0.0008948	0.02366778
8 ^η τριετία	0.001580	0.02973036
9 ^η τριετία	0.0002080	0.0260639
10 ^η τριετία	0.0009499	0.02118445
11 ^η τριετία	-0.001150	0.04559506
12 ^η τριετία	-2.458e-05	0.01915498
36 έτη	0.0001079	0.02720561

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 6: Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της GEV των λογαριθμικών αποδόσεων της Ford ανά τριετία μαζί τα αντίστοιχα 95% δ.ε..

	μ	σ	ξ
1 ^η τριετία	0.02325576 (0.01958949,0.02692203)	0.01143922 (0.008732197,0.01414625)	0.10604890 (-0.1516375,0.3637353)
2 ^η τριετία	0.03177293 (0.02814458,0.03540128)	0.01227873 (0.009029929,0.01552752)	0.58154175 (0.3316171,0.8314664)
3 ^η τριετία	0.026564571 (0.02358785,0.02954129)	0.009660518 (0.007100114,0.01222092)	0.615395954 (0.3124149,0.918377)
4 ^η τριετία	0.024021671 (0.02132163,0.02672171)	0.008886912 (0.006770008,0.01100382)	0.685118828 (0.3534351,1.016803)
5 ^η τριετία	0.03033352 (0.02707282,0.03359422)	0.01036798 (0.008063643,0.01267232)	0.03404210 (-0.195626,0.2637102)
6 ^η τριετία	0.025360165 (0.02294197,0.02777837)	0.008059813 (0.00620783,0.009911797)	0.498100609 (0.2360312,0.76017)
7 ^η τριετία	0.02668097 (0.02299443,0.03036751)	0.01248842 (0.009208438,0.0157684)	0.55735250 (0.3175977,0.7971073)
8 ^η τριετία	0.04048541 (0.0367429,0.04422792)	0.01264582 (0.009613485,0.01567816)	0.37572563 (0.1863728,0.5650784)
9 ^η τριετία	0.03160255 (0.02718608,0.03601902)	0.01402350 (0.01051113,0.01753587)	0.25230189 (0.0005282961,0.504075 5)
10 ^η τριετία	0.03333689 (0.02947303,0.03720074)	0.01256276 (0.009759865,0.01536565)	0.11369285 (- 0.08281206,0.3101978)
11 ^η τριετία	0.04556492 (0.03625958,0.05487026)	0.03005927 (0.02110389,0.03901465)	0.52742068 (0.263088,0.7917534)
12 ^η τριετία	0.02699930 (0.02289827,0.03110034)	0.01336177 (0.01032966,0.01639388)	0.15611992 (- 0.03958029,0.3518201)
36 έτη	0.02930445 (0.02812816,0.03048075)	0.01353385 (0.01258229,0.01448541)	0.33418300 (0.2766107,0.3917553)

XLF(option)**Πίνακας 7:** Εκτιμήσεις VaR με την Μέθοδο Block Maxima σε απόλυτες τιμές

Μεταβλητές	Μήνας	Δίμηνο	Τετράμηνο
m	21	42	84
k	180	90	45
μ	0.01914155	0.02396119	0.02898032
σ	0.01169733	0.01390267	0.01369064
ξ	0.38196431	0.35635486	0.52029953
VaR(95%)	K=1.51 0.01819725	K=1.13 0.01458616	K=1.01 0.01454129
VaR(97%)	K=2.11 0.02478294	K=1.38 0.02058013	K=1.08 0.01866386
VaR(99%)	K=5.25 0.04396991	K=2.9 0.03796563	K= 1.75 0.03134956
VaR(99.5%)	K=10 0.06085535	K=5.26 0.05288553	K=2.9 0.04384499
VaR(99.9%)	K=48.09 0.1224262	K=24.3 0.1056575	K=12.4 0.09808831
VaR(99.95%)	K=95.71 0.1630388	K=48.1 0.1394849	K=24.3 0.1395566

Πίνακας 8: Εκτιμήσεις μέτρων κινδύνου με την μέθοδο POT

Για $u=0.02927038$ και οι εκτιμήτριες των παραμέτρων της GPD $\beta= 0.01560764$

$\xi= 0.28387310$

ρ	VaR	ES
95%	0.0293528	0.05117999
97%	0.0379455	0.06317884
99%	0.06124189	0.09570993
99,5%	0.0801505	0.1221139
99,9%	0.1414582	0.2077241
99.95%	0.1778106	0.2584865

Πίνακας 9: Εκτιμήσεις VaR για τις μεθοδολογίες: Ιστορική προσομοίωση, Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης, POT και BM.

ρ	Historical	Var-Covar	POT	Block maxima
95%	0.02927231	0.03538849	0.0293528	0.01454129
97%	0.0368839	0.04046443	0.0379455	0.01866386
99%	0.05994992	0.05004994	0.06124189	0.03134956
99,5%	0.08453918	0.05541721	0.0801505	0.04384499
99,9%	0.1234355	0.06648391	0.1414582	0.09808831
99.95%	0.1808525	0.09933679	0.1778106	0.1395566

Πίνακας 10: Εκτιμήσεις ES για τις μεθοδολογίες: Ιστορική προσομοίωση, Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης και POT.

P	Historical	Var-Covar	POT
95%	0.05153792	0.04436904	0.05117999
97%	0.06422908	0.04878634	0.06317884
99%	0.09816117	0.05732935	0.09570993
99,5%	0.1244967	0.0622066	0.1221139
99,9%(0.001)	0.1788432	0.07242729	0.2077241
99.95%	0.2125086	0.07645607	0.2584865

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑΩΝ

ULPSX**Πίνακας 11:** Εκτιμήσεις VaR με την Μέθοδο Block Maxima σε απόλυτες τιμές

Μεταβλητές	Μήνας	Δίμηνο	Τετράμηνο
m	21	42	84
k	180	90	45
μ	0.03204641	0.03900635	0.04666609
σ	0.01698706	0.01850731	0.02009545
ξ	0.19612812	0.25969425	0.28842883
VaR(95%)	K=1.51 0.03750482	K=1.13 0.02607139	K=1.01 0.02181578
VaR(97%)	K=2.11 0.04768818	K=1.38 0.03445052	K=1.08 0.02986761
VaR(99%)	K=5.25 0.07444829	K=2.9 0.05685672	K= 1.75 0.05007682
VaR(99.5%)	K=10 0.09558621	K=5.26 0.07450702	K=2.9 0.06629894
VaR(99.9%)	K=48.09 0.1620608	K=24.3 0.1300536	K=12.4 0.1192937
VaR(99.95%)	K=95.71 0.2004063	K=48.1 0.1620714	K=24.3 0.1508081

Πίνακας 12: Εκτιμήσεις μέτρων κινδύνου με την μέθοδο POT

$u = 0.03$ και οι εκτιμήτριες των παραμέτρων της GPD $\beta = 0.01743559$ $\xi = 0.17248505$

P	VaR	ES
95%	0.04144582	0.06490137
97%	0.05181077	0.07742677
99%	0.07745144	0.1084119
99,5%	0.09631524	0.1312076
99,9%	0.1498771	0.1959337
99.95%	0.1779388	0.2298446

Πίνακας 13: Εκτιμήσεις VAR για τις μεθοδολογίες: Ιστορική προσομοίωση, Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης, POT και BM.

P	Historical	Var-Covar	POT	Block maxima
95%	0.03793051	0.0431287	0.04144582	0.02181578
97%	0.04596654	0.04932756	0.05181077	0.02986761
99%	0.07233191	0.06103361	0.07745144	0.05007682
99,5%	0.08630847	0.06758825	0.09631524	0.06629894
99,9%	0.123214	0.08110317	0.1498771	0.1192937
99.95%	0.140148	0.08636551	0.1779388	0.1508081

Πίνακας 14: Εκτιμήσεις ES για τις μεθοδολογίες: Ιστορική προσομοίωση, Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης και POT.

p	Historical	Var-Covar	POT
95%	0.05910927	0.05409996	0.06490137
97%	0.07023688	0.05949447	0.07742677
99%	0.09645092	0.06992739	0.1084119
99,5%	0.114053	0.0758836	0.1312076
99,9%	0.1675188	0.08836535	0.1959337
99.95%	0.2038104	0.09328539	0.2298446

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΩΣ

Συγκεντρωτικοί - Συγκριτικοί Πίνακες Β

Πίνακας 15: Οι εκτιμώμενες παράμετροι των δέκα τραπεζών για την GPD (κέρδη)

		ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	υ	0.0319516	0.04349337	0.03458202	0.0318638	0.03496574	0.04436211	0.03413301	0.02383645	0.04248727	0.03658426
	β	0.01036536	0.0181975	0.03152114	0.01885580	.03126351	0.01318864	0.01827656	0.01463496	0.02339246	0.02696041
	ξ	0.30938088	0.3255279	0.11311056	0.02701122	-0.12630220	0.29257897	0.02974415	0.25216683	-0.05906947	-0.07946164
ΜΕΤΑ	υ	0.08211298	0.06529428	0.07652227	0.07425195	0.06804174	0.06697063	0.07356257	0.03203828	0.0618754	0.07089582
	β	0.05132903	0.02386453	0.05384252	0.03649343	0.02730949	0.04141323	0.02181794	0.01815322	0.01560429	.04649274
	ξ	-0.05390764	0.26389702	0.01293041	-0.01280901	0.09570052	-0.20753948	0.31409041	0.14757475	0.41284333	-0.07057211

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 16: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την ΡΟΤ (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.03185415	0.04380822	0.03428541	0.0321892	0.03467122	0.04459023	0.03396096	0.02369883	0.04289066	0.03633259
	97	0.0375737	0.0539785	0.05084384	0.04189251	0.05015554	0.0518936	0.04336575	0.03165867	0.05464965	0.0498389
	99	0.05341148	0.08252044	0.08986862	0.0632202	0.08025761	0.07183753	0.06408296	0.05268158	0.07876856	0.07709388
	99,5	0.0665574	0.106549	0.1171058	0.07700578	0.09720983	0.08814937	0.07750669	0.06927556	0.09320003	0.09310521
	99,9	0.1105091	0.1884664	0.1892255	0.1100281	0.1312925	0.1415938	0.109764	0.1210728	0.1245154	0.127051
	99.95	0.1373114	0.2393123	0.224566	0.1246983	0.1439668	0.1735888	0.1241393	0.2130867	0.1371116	0.1403852
ΜΕΤΑ	95	0.08142374	0.06561092	0.0757996	0.07473527	0.0676754	0.06641396	0.07327032	0.03227896	0.06208265	0.07157331
	97	0.1073049	0.07870712	0.10339	0.09331304	0.08195405	0.08654211	0.08530852	0.04192941	0.07100523	0.09487601
	99	0.1606096	0.1136321	0.1633486	0.1328581	0.1151329	0.1232349	0.1187734	0.06532141	0.09793646	0.1422347
	99,5	0.1926527	0.1414855	0.2016188	0.1575234	0.1379341	0.1424325	0.1466655	0.08215512	0.1224062	0.1702798
	99,9	0.2625951	0.2296573	0.2918136	0.2139569	0.197091	0.1776671	0.2404501	0.1285689	0.21517	0.2303432
	99.95	0.2908977	0.280799	0.3312404	0.2379054	0.2255132	0.1895715	0.2979373	0.1522147	0.2784801	0.254182

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 17: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την ΡΟΤ (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.04681929	0.07094054	0.06978881	0.05157749	0.06246191	0.06332784	0.05279254	0.04322224	0.06495591	0.0613269
	97	0.05510106	0.08601942	0.08845904	0.06155017	0.07620984	0.07365177	0.06248564	0.05386612	0.07605904	0.07383898
	99	0.07803379	0.1283369	0.1324609	0.08346995	0.1029363	0.1018442	0.08383796	0.08197787	0.09883272	0.09908766
	99,5	0.09706877	0.1639627	0.1631718	0.09763823	0.1179875	0.1249024	0.09767321	0.1041673	0.1124593	0.1139204
	99,9	0.1607098	0.2854167	0.2444894	0.1315772	0.1482481	0.2004506	0.1309194	0.1734304	0.142028	0.1453674
99.95	0.1995189	0.360803	0.2843371	0.1466547	0.1595012	0.2456783	0.1457354	0.2130867	0.1539217	0.15772	
ΜΕΤΑ	95	0.1301625	0.09814454	0.130338	0.1107611	0.09783624	0.1008052	0.1049453	0.05361659	0.08880439	0.1149566
	97	0.1547199	0.1159358	0.1582898	0.1291039	0.113626	0.1174739	0.122496	0.06493776	0.1040006	0.1367232
	99	0.2052981	0.1633816	0.2190338	0.1681488	0.1503161	0.1478603	0.1712851	0.09237946	0.1498678	0.18096
	99,5	0.2357021	0.2012206	0.2578054	0.1925021	0.1755303	0.1637584	0.2119494	0.1121275	0.1915428	0.2071563
	99,9	0.3020669	0.3210024	0.3491817	0.248222	0.2409477	0.1929372	0.3486797	0.1665766	0.349531	0.2632604
99.95	0.3289218	0.3904787	0.389125	0.2718676	0.2723777	0.2027956	0.4324913	0.1943161	0.4573558	0.2855277	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 18: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.03746	0.048109	0.044811	0.041676	0.045032	0.040269	0.040873	0.02507	0.052111	0.036128
	97	0.047271	0.05957	0.053066	0.050826	0.052185	0.050234	0.055113	0.035498	0.06421	0.045931
	99	0.067083	0.08362	0.088814	0.069087	0.068159	0.089556	0.076386	0.056132	0.091763	0.072158
	99,5	0.079671	0.097802	0.104169	0.078138	0.076417	0.101197	0.085472	0.060236	0.107605	0.083288
	99,9	0.12241	0.160865	0.135766	0.102682	0.08579	0.127387	0.123394	0.109489	0.124888	0.125677
	99.95	0.128822	0.168192	0.147314	0.106913	0.089359	0.159732	0.126381	0.132008	0.128051	0.146792
ΜΕΤΑ	95	0.087457	0.068373	0.085015	0.075367	0.06707	0.064495	0.07782	0.03335	0.05898	0.071086
	97	0.097005	0.08067	0.10031	0.090192	0.08433	0.077378	0.091082	0.03918	0.068329	0.09077
	99	0.161772	0.119822	0.149538	0.121943	0.125134	0.104407	0.121061	0.059897	0.088332	0.138197
	99,5	0.243375	0.141274	0.186012	0.151628	0.188197	0.146361	0.130384	0.080212	0.107648	0.183791
	99,9	0.291357	0.187441	0.386082	0.222849	0.241332	0.288441	0.212555	0.109058	0.180966	0.299173
	99.95	0.294304	0.210606	0.62919	0.224328	0.244468	0.293634	0.213779	0.113461	0.198471	0.314007

Πίνακας 19: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.05730522	0.07313928	0.06766699	0.05802081	0.05942532	0.06549406	0.06289791	0.04535784	0.07412	0.05921915
	97	0.06731152	0.08590317	0.08072137	0.06682774	0.06627582	0.07891524	0.07283631	0.05572649	0.08488979	0.07136095
	99	0.08850662	0.1164579	0.1111716	0.08502364	0.07815578	0.1107795	0.0947886	0.07790336	0.11117	0.09708626
	99,5	0.1046014	0.1420328	0.1267353	0.09778603	0.08403417	0.1257828	0.1104457	0.09810146	0.1199512	0.1103913
	99,9	0.1352345	0.1755197	0.1588607	0.1111446	0.09292733	0.1920777	0.1293667	0.154526	0.1312139	0.1679061
	99.95	0.1352345	0.1755197	0.1588607	0.1111446	0.09292733	0.1920777	0.1293667	0.154526	0.1312139	0.1679061
ΜΕΤΑ	95	0.1375149	0.1005329	0.1409256	0.1055317	0.1073202	0.09863021	0.1061972	0.0505229	0.08210647	0.118323
	97	0.1680545	0.1181726	0.1725312	0.1156814	0.1288969	0.1170218	0.121051	0.06005807	0.09449482	0.142918
	99	0.2380556	0.1562341	0.272904	0.1353108	0.1924367	0.1787291	0.1507783	0.08564161	0.1269413	0.2171228
	99,5	0.2831578	0.1787487	0.3815217	0.1465174	0.2259436	0.2272191	0.1759666	0.1058873	0.1557385	0.2698858
	99,9	0.2972515	0.2337701	0.8722992	0.1700017	0.2476038	0.2988266	0.2150024	0.1178638	0.2159751	0.3288401
	99.95	0.2972515	0.2337701	0.8722992	0.1792587	0.2476038	0.2988266	0.2150024	0.1178638	0.2159751	0.3288401

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 20: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της συνδιακύμανσης (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.037858	0.050502	0.050129	0.040389	0.043039	0.045928	0.042174	0.030917	0.049886	0.0427
	97	0.043035	0.057575	0.057001	0.045962	0.049066	0.052413	0.048039	0.035221	0.056933	0.048647
	99	0.052811	0.070931	0.069977	0.056485	0.060446	0.064659	0.059115	0.043349	0.070241	0.059878
	99,5	0.058285	0.07841	0.077243	0.062377	0.066819	0.071516	0.065317	0.047901	0.077693	0.066166
	99,9	0.069572	0.09383	0.092224	0.074526	0.079958	0.085655	0.078104	0.057285	0.093057	0.079132
	99,95	0.073967	0.099834	0.098058	0.079257	0.085074	0.09116	0.083084	0.060939	0.09904	0.084181
ΜΕΤΑ	95	0.095737	0.075513	0.10674	0.084933	0.077063	0.074618	0.080851	0.03854	0.06489	0.084541
	97	0.108856	0.085985	0.121157	0.096602	0.087626	0.08487	0.091983	0.043853	0.073967	0.096208
	99	0.13363	0.105761	0.148383	0.118639	0.107573	0.104229	0.113005	0.053886	0.091108	0.118239
	99,5	0.147502	0.116834	0.163627	0.130978	0.118742	0.115068	0.124775	0.059504	0.100707	0.130575
	99,9	0.176104	0.139666	0.195059	0.15642	0.141772	0.137419	0.149045	0.071087	0.120497	0.156011
	99,95	0.187241	0.148556	0.207298	0.166326	0.150739	0.146121	0.158495	0.075597	0.128203	0.165915

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 21: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της συνδιακύμανσης (κέρδη)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.04699631	0.06298707	0.06225868	0.05022559	0.05367703	0.05737497	0.05252699	0.03851457	0.06233	0.0531922
	97	0.05149905	0.06913873	0.06823537	0.05507238	0.05891875	0.06301541	0.05762843	0.04225837	0.06845471	0.05836429
	99	0.0602073	0.08103599	0.07979422	0.06444602	0.06905619	0.07392396	0.06749455	0.04949883	0.08030903	0.06836705
	99,5	0.06517889	0.0878282	0.08639323	0.06979747	0.0748437	0.0801517	0.07312717	0.05363244	0.08707672	0.07407767
	99,9	0.07559728	0.1020618	0.105673	0.08101191	0.08697193	0.09320247	0.08493081	0.06229479	0.101259	0.08604478
	99,95	0.07970398	0.1076724	0.105673	0.0854324	0.09175262	0.09834681	0.08958355	0.06570931	0.1068493	0.09076196
ΜΕΤΑ	95	0.1188948	0.09399831	0.1321894	0.1076802	0.09570867	0.09271411	0.1005011	0.04791861	0.08091276	0.1051348
	97	0.1303053	0.1031069	0.1447289	0.1233964	0.1048961	0.1016305	0.1101833	0.05253958	0.08880793	0.1152822
	99	0.1523731	0.1207227	0.1689802	0.1663409	0.1226644	0.1188747	0.1289086	0.0614765	0.1040771	0.134907
	99,5	0.1649717	0.1307797	0.1828255	0.1983829	0.1328084	0.1287195	0.139599	0.06657864	0.1127944	0.146111
	99,9	0.1913732	0.1518549	0.2118393	0.2258067	0.154066	0.1493501	0.1620016	0.07727059	0.1310621	0.1695898
	99,95	0.2017801	0.1601623	0.2232759	0.2258067	0.1624454	0.1574823	0.1708323	0.08148513	0.1382629	0.1788446

Πίνακας 22: Οι παράμετροι των δέκα τραπεζών για την GPD (ζημιές)

		ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	υ	0.037527	0.048122	0.04483	0.041996	0.045098	0.040382	0.041114	0.02524	0.052156	0.036225
	β	0.019825	0.022834	0.015612	0.014588	0.019661	0.021397	0.023679	0.018385	0.025448	0.020507
	ξ	0.024119	0.112354	0.355294	0.091502	-0.32788	0.1751	-0.08687	0.109488	-0.12441	0.108748
ΜΕΤΑ	υ	0.08763	0.068406	0.085522	0.075756	0.067823	0.065383	0.078252	0.033437	0.059562	0.071338
	β	0.026755	0.030547	0.026577	0.028963	0.027424	0.018831	0.02666	0.011326	0.01526	0.035186
	ξ	0.600253	0.075041	0.50598	0.117924	0.354775	0.479554	0.071361	0.367677	0.337085	0.283119

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 23: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την ΡΟΤ (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.03734	0.047907	0.0451	0.042248	0.044912	0.040181	0.041522	0.025067	0.051917	0.036665
	97	0.047527	0.0599	0.053898	0.049888	0.054188	0.051596	0.053336	0.034717	0.064527	0.047462
	99	0.069867	0.088147	0.079208	0.067583	0.069576	0.079895	0.077035	0.057391	0.089077	0.072819
	99,5	0.08427	0.107849	0.101079	0.079697	0.07679	0.100762	0.090865	0.073166	0.102927	0.090447
	99,9	0.118654	0.159971	0.178374	0.110974	0.088383	0.160196	0.119939	0.114759	0.130831	0.136888
	99.95	0.133879	0.185489	0.227936	0.125929	0.091774	0.191426	0.131262	0.135056	0.141231	0.159532
ΜΕΤΑ	95	0.087272	0.067996	0.085875	0.075367	0.067455	0.065131	0.077895	0.033587	0.059765	0.070913
	97	0.103138	0.083887	0.101472	0.090593	0.082741	0.075961	0.091751	0.039983	0.06831	0.090185
	99	0.159237	0.120199	0.152382	0.126617	0.126695	0.110533	0.123321	0.058573	0.092521	0.142404
	99,5	0.219184	0.144698	0.202535	0.151868	0.164659	0.143821	0.14455	0.074812	0.113112	0.184759
	99,9	0.505847	0.206748	0.415764	0.219106	0.298747	0.280794	0.198089	0.133072	0.184296	0.321963
	99.95	0.744639	0.235868	0.57656	0.252234	0.384676	0.381217	0.22311	0.170935	0.229042	0.403251

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 24: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την POT (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.03734	0.047907	0.0451	0.042248	0.044912	0.040181	0.041522	0.025067	0.051917	0.036665
	97	0.047527	0.0599	0.053898	0.049888	0.054188	0.051596	0.053336	0.034717	0.064527	0.047462
	99	0.069867	0.088147	0.079208	0.067583	0.069576	0.079895	0.077035	0.057391	0.089077	0.072819
	99,5	0.08427	0.107849	0.101079	0.079697	0.07679	0.100762	0.090865	0.073166	0.102927	0.090447
	99,9	0.118654	0.159971	0.178374	0.110974	0.088383	0.160196	0.119939	0.114759	0.130831	0.136888
	99.95	0.133879	0.185489	0.227936	0.125929	0.091774	0.191426	0.131262	0.135056	0.141231	0.159532
ΜΕΤΑ	95	0.087272	0.067996	0.085875	0.075367	0.067455	0.065131	0.077895	0.033587	0.059765	0.070913
	97	0.103138	0.083887	0.101472	0.090593	0.082741	0.075961	0.091751	0.039983	0.06831	0.090185
	99	0.159237	0.120199	0.152382	0.126617	0.126695	0.110533	0.123321	0.058573	0.092521	0.142404
	99,5	0.219184	0.144698	0.202535	0.151868	0.164659	0.143821	0.14455	0.074812	0.113112	0.184759
	99,9	0.505847	0.206748	0.415764	0.219106	0.298747	0.280794	0.198089	0.133072	0.184296	0.321963
	99.95	0.744639	0.235868	0.57656	0.252234	0.384676	0.381217	0.22311	0.170935	0.229042	0.403251

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 25: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.031897	0.043296	0.034499	0.031792	0.034906	0.044167	0.034064	0.023809	0.042364	0.036508
	97	0.037773	0.054691	0.048965	0.039511	0.052107	0.053208	0.042299	0.032235	0.054197	0.047996
	99	0.052374	0.088054	0.095619	0.065864	0.082049	0.064837	0.067669	0.051733	0.081054	0.081998
	99,5	0.064372	0.105676	0.116435	0.08185	0.090693	0.090679	0.078698	0.062067	0.099429	0.094408
	99,9	0.099669	0.153933	0.173405	0.10217	0.110914	0.145694	0.105968	0.130677	0.113604	0.117403
	99.95	0.113268	0.156724	0.189392	0.10545	0.133936	0.150335	0.106861	0.134821	0.114458	0.120003
ΜΕΤΑ	95	0.08206	0.065157	0.076511	0.074139	0.067682	0.066664	0.073286	0.031895	0.061794	0.070785
	97	0.103894	0.076481	0.098105	0.095062	0.082781	0.085531	0.083017	0.040971	0.070649	0.092859
	99	0.154269	0.105236	0.177795	0.126758	0.114321	0.124239	0.118924	0.067454	0.091803	0.136284
	99,5	0.193387	0.144618	0.227392	0.145703	0.132095	0.139126	0.148762	0.071247	0.125011	0.171066
	99,9	0.255755	0.217208	0.253195	0.20884	0.170325	0.173938	0.206554	0.111704	0.19451	0.210746
	99.95	0.255867	0.236559	0.256558	0.233571	0.210593	0.178385	0.234232	0.146663	0.228078	0.23472

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 26: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	-0.04625	-0.06926	-0.06908	-0.05124	-0.06203	-0.0628	-0.05247	-0.04276	-0.06456	-0.06076
	97	-0.05416	-0.0841	-0.08811	-0.06147	-0.07547	-0.07249	-0.06241	-0.05281	-0.07663	-0.07403
	99	-0.07429	-0.11855	-0.12843	-0.08453	-0.09846	-0.09957	-0.08389	-0.07873	-0.10077	-0.09958
	99,5	-0.09288	-0.13896	-0.15382	-0.09329	-0.11019	-0.12377	-0.09438	-0.10048	-0.11094	-0.11151
	99,9	-0.12687	-0.15951	-0.20538	-0.10873	-0.15696	-0.15498	-0.10775	-0.13896	-0.11531	-0.1226
	99.95	-0.12687	-0.15951	-0.20538	-0.10873	-0.15696	-0.15498	-0.10775	-0.13896	-0.11531	-0.1226
ΜΕΤΑ	95	-0.12951	-0.09731	-0.12964	-0.11028	-0.09745	-0.10011	-0.10366	-0.05337	-0.08756	-0.11431
	97	-0.15329	-0.11412	-0.15836	-0.12792	-0.11297	-0.11728	-0.12049	-0.06499	-0.10174	-0.13638
	99	-0.20708	-0.15961	-0.22405	-0.16245	-0.14544	-0.14921	-0.16278	-0.08689	-0.142	-0.17998
	99,5	-0.24445	-0.19453	-0.24599	-0.1899	-0.16755	-0.16576	-0.19613	-0.10397	-0.18279	-0.20512
	99,9	-0.25598	-0.25591	-0.25992	-0.2583	-0.25086	-0.18283	-0.26191	-0.18162	-0.26165	-0.25869
	99.95	-0.25598	-0.25591	-0.25992	-0.2583	-0.25086	-0.18283	-0.26191	-0.18162	-0.26165	-0.25869

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 27: Το μέτρο κινδύνου VaR των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της συνδιακύμανσης (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	0.034323	0.048112	0.045681	0.037308	0.040989	0.044492	0.039605	0.029099	0.048373	0.04022
	97	0.0395	0.055185	0.052552	0.04288	0.047015	0.050976	0.04547	0.033403	0.05542	0.046167
	99	0.049276	0.068541	0.065528	0.053403	0.058396	0.063223	0.056546	0.041531	0.068728	0.057398
	99,5	0.05475	0.07602	0.072794	0.059295	0.064768	0.07008	0.062748	0.046083	0.07618	0.063686
	99,9	0.066037	0.09144	0.087776	0.071445	0.077907	0.084219	0.075536	0.055467	0.091544	0.076652
	99,95	0.070432	0.097444	0.093609	0.076175	0.083023	0.089724	0.080515	0.059121	0.097527	0.081701
ΜΕΤΑ	95	0.087179	0.070502	0.094275	0.077772	0.070216	0.068316	0.07436	0.035536	0.061674	0.078126
	97	0.100298	0.080975	0.108692	0.089442	0.080779	0.078567	0.085492	0.040849	0.070751	0.089793
	99	0.125072	0.100751	0.135917	0.111478	0.100726	0.097926	0.106513	0.050882	0.087893	0.111825
	99,5	0.138944	0.111824	0.151161	0.123817	0.111895	0.108766	0.118284	0.0565	0.097491	0.124161
	99,9	0.167546	0.134656	0.182594	0.149259	0.134925	0.131116	0.142554	0.068083	0.117282	0.149597
	99,95	0.178683	0.143546	0.194833	0.159165	0.143892	0.139819	0.152004	0.072593	0.124988	0.159501

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 28: Το μέτρο κινδύνου ES των δέκα τραπεζών με την μέθοδο της συνδιακύμανσης (ζημιές)

	%	ΑΤΕ	ΕΤΕ	ΓΤΕ	ΕΥΡΩΒ	ΠΕΙΡ	ΑΤΤ	ΑΛΦΑ	ΕΛΛ	ΚΥΠΡ	ΤΤ
ΠΡΙΝ	95	-0.04346	-0.0606	-0.05781	-0.04714	-0.05163	-0.05594	-0.04996	-0.0367	-0.06081	-0.05071
	97	-0.04796	-0.06675	-0.06379	-0.05199	-0.05687	-0.06158	-0.05506	-0.04044	-0.06694	-0.05588
	99	-0.05667	-0.07865	-0.07535	-0.06136	-0.06701	-0.07249	-0.06493	-0.04768	-0.0788	-0.06589
	99,5	-0.06164	-0.08544	-0.08194	-0.06672	-0.07279	-0.07872	-0.07056	-0.05181	-0.08556	-0.0716
	99,9	-0.07206	-0.09967	-0.09577	-0.07793	-0.08492	-0.09177	-0.08236	-0.06048	-0.09975	-0.08357
	99.95	-0.07617	-0.10528	-0.10122	-0.08235	-0.0897	-0.09691	-0.08701	-0.06389	-0.10534	-0.08828
ΜΕΤΑ	95	-0.11034	-0.08899	-0.11972	-0.09837	-0.08886	-0.08641	-0.09401	-0.04491	-0.0777	-0.09872
	97	-0.12175	-0.0981	-0.13226	-0.10852	-0.09805	-0.09533	-0.10369	-0.04954	-0.08559	-0.10887
	99	-0.14381	-0.11571	-0.15651	-0.12815	-0.11582	-0.11257	-0.12242	-0.05847	-0.10086	-0.12849
	99,5	-0.15641	-0.12577	-0.17036	-0.13936	-0.12596	-0.12242	-0.13311	-0.06357	-0.10958	-0.1397
	99,9	-0.18281	-0.14684	-0.19937	-0.16284	-0.14722	-0.14305	-0.15551	-0.07427	-0.12785	-0.16318
	99.95	-0.19322	-0.15515	-0.21081	-0.1721	-0.1556	-0.15118	-0.16434	-0.07848	-0.13505	-0.17243

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τράπεζες

ΑΤΕ: Αγροτική Τράπεζα

ΕΤΕ : Εθνική Τράπεζα

ΓΤΕ: Γενική Τράπεζα

ΕΥΡΩΒ: Τράπεζα Eurobank εργασίας

ΠΕΙΡ: Τράπεζα Πειραιώς

ΑΤΤ: ΑΤΤΙCΑ ΒΑΝΚ

ΑΛΦΑ: ΑΛΡΗΑ ΒΑΝΚ

ΕΛΛ: Τράπεζα Ελλάδος

ΚΥΠΡ: Τράπεζα Κύπρου

ΤΤ: Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ