Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΟΥ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Χριστίνα Κ. Τσάκλα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Κούτρας Μάρκος
- Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT**

THE CORRELATION BETWEEN THE SURPLUS PRIOR TO AND AT RUIN IN THE CLASSICAL MODEL OF RISK THEORY

By

Christine K. Tsakla

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
February 2014

Στη μητέρα μου
Όλγα

Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την τιμή που μου προσέφερε δίνοντάς μου για ακόμα μία φορά τη δυνατότητα να συνεργαστώ μαζί του σε μία τόσο σημαντική στιγμή της ζωής μου, όπως ήταν η εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας στον ερευνητικό τομέα τον οποίο επιθυμούσα. Οι πολύτιμες γνώσεις, η ουσιαστική καθοδήγησή του, αλλά και η πίστη του προς εμένα και τις δυνατότητές μου, αποτελούσαν συνεχώς την κινητήρια δύναμη που με βοήθησαν να συνεχίσω με υπομονή, επιμονή, αλλά και θέληση για ποιοτική δουλειά, προς την ολοκλήρωση της συγγραφής της παρούσας εργασίας.

Επίσης, να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τους κυρίους Μάρκο Κούτρα, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, και Γεώργιο Ψαρράκο, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την επίβλεψή τους.

Τέλος, θα ήθελα να ολοκληρώσω τις ευχαριστίες μου αναφερόμενη σε ένα πολυαγαπημένο μου πρόσωπο, το οποίο έχει υπάρξει συνοδοιπόρος σε κάθε “ταξίδι” της ζωής μου και στο οποίο οφείλω κάθε επίτευγμα και διάκρισή μου έως σήμερα, τη μητέρα μου. Την ευχαριστώ για την υπομονή και την αστείρευτη υποστήριξη που μου έχει προσφέρει καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας είναι η συσχέτιση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας, για την περίπτωση του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων. Όπως είναι γνωστό, ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών αυτών επηρεάζεται άμεσα από το πρόσημο της συνδιακύμανσης. Σύμφωνα με σχετικές μελέτες ερευνητών, το πρόσημο της συνδιακύμανσης συνδέεται με την κλάση γήρανσης στην οποία ανήκει η κατανομή ισορροπίας των αποζημιώσεων που καταβάλλει μία ασφαλιστική εταιρίας προς τους ασφαλισμένους της.

Η μελέτη μας θα ξεκινήσει με την εξέταση της Εκθετικής κατανομής των αποζημιώσεων, η οποία αποτελεί την απλούστερη μορφή όλων των εξεταζόμενων περιπτώσεων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με περισσότερο σύνθετες περιπτώσεις, όπως είναι το ενδεχόμενο οι απαιτήσεις μιας ασφαλιστικής εταιρίας να ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή, τη μίξη δύο Εκθετικών ή τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών. Όπως θα δούμε αναλυτικά και στις σελίδες που ακολουθούν, κάθε μία από τις κατανομές αυτές αποτελεί μοναδική περίπτωση και παράγει τα δικά της αποτελέσματα σε σχέση με τη συμπεριφορά της μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας. Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων, μπορεί να ανήκει αποκλειστικά και μόνο σε μία κλάση γήρανσης, να παρουσιάζει διπλή μονοτονία ή σε κάποιες άλλες περιπτώσεις ενδέχεται να εμφανίζει εναλλαγή της μονοτονίας της κατά τον θετικό ημιάξονα.

Όλα τα ζητήματα πάνω στα οποία διαπραγματεύεται η παρούσα εργασία, μελετώνται και ερμηνεύονται τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο, μέσα από την παράθεση αριθμητικών παραδειγμάτων, την παρουσίαση γραφημάτων, αλλά και την ερμηνεία της συμπεριφοράς των υπό εξέταση κάθε φορά μεταβλητών ή ποσοτήτων. Η μελέτη καθώς και όλοι οι συναφείς υπολογισμοί που πραγματώνονται και λαμβάνουν χώρα στην παρούσα εργασία, εξελίσσονται με τη βοήθεια του αλγεβρικού υπολογιστικού προγράμματος Maple. Ο κώδικας παρουσιάζεται σε σχετικό παράρτημα μετά το πέρας των κεφαλαίων, προκειμένου να βοηθήσει τον αναγνώστη στην καλύτερη κατανόηση της υπολογιστικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε.

Abstract

The subject of this dissertation is to study the correlation between the surplus prior to and at ruin in the classical model of Risk Theory, given that ruin occurs. As it is well known, the correlation coefficient of these two variables is influenced by the sign of the covariance. Relevant research studies have shown that the sign of the covariance is associated with the ageing class of the equilibrium distribution of the claims, paid by an insurance company to its policyholders.

Our study begins with the examination of the case that the claim size distribution function is Exponential, which is the simplest form of all the cases examined in this study. Further we will study more complex cases, such as the case that claims follow a Gamma distribution, a mixture of two Exponential distributions or a mixture of two Gamma distributions. As we will see in detail in the following pages, each of these claim size distributions is unique and produces different results as long as the monotonicity of the failure rate. The failure rate of the equilibrium distribution of claims, can belong only to one ageing class, be both increasing and decreasing or may sometimes change its monotony on the positive axis.

All the issues nagotiated in the present study, will be discussed both in a theoretical and practical way, through the apposition of numerical examples, the presentation of graphs and analysis of the behavior of the variables or quantities we examine each time. Most of the calculations have been made via the mathematical software suite Maple. The relevant code is given at the end of the chapters, in an Appendix, in order to help the reader understand further the computational procedure that was followed.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ xix

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ xxi

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ xxiii

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

2. ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ 7

2.1. Βαθμίδα αποτυχίας 7

2.1.1. Ορισμοί 7

2.1.2. Μορφές μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας 10

2.2. Κλάσεις κατανομών 10

2.2.1. Οικογένειες κατανομών IFR και DFR 11

2.2.2. Οικογένειες κατανομών NBU και NWU 12

2.2.3. Οικογένειες κατανομών NBUE και NWUE 12

2.2.4. Οικογένειες κατανομών HNBUE και HNWUE 13

2.2.5. Σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων 14

2.3. Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα & γραφικές παραστάσεις 15

2.3.1. Βαθμίδα αποτυχίας Εκθετικής κατανομής 16

2.3.2. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών 18

2.3.3. Βαθμίδα αποτυχίας Γάμμα κατανομής 21

2.3.4. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών 26

3. ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ 33

3.1. Η διαδικασία του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο 34

3.1.1. Ορισμός της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος 35

3.1.2. Υποθέσεις του κλασικού μοντέλου 36

3.1.3. Ορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας 37

3.2. Βασικές παράμετροι & θεμελιώδεις σχέσεις της θεωρίας κινδύνων 38

3.2.1. Τυχαίες μεταβλητές σχετικές με το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας 38

3.2.2. Εξίσωση Lundberg και συντελεστής προσαρμογής 42

3.2.3. Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής των μεταβλητών $U(T-),|U(T)|$ 43
3.3. Η πιθανότητα χρεοκοπίας 45
3.3.1. Ολοκληρο-διαφορικές και ανανεωτικές εξισώσεις για τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας 45
3.3.2. Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας ζημιοκατανομών με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων & γραφικές παραστάσεις 48
3.3.2.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής... 48
3.3.2.2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών με παραμέτρους κλίμακας μεγαλύτερη και μικρότερη της μονάδας . 50
3.4. Η γενίκευση της έννοιας της χρεοκοπίας από τους Gerber & Shiu 53

4. ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΩΝ Τ.Μ. U(T-),|U(T)| ΕΝ ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΥ (u=0) 57

4.1. Βασικοί ορισμοί 57
4.1.1. Υπολογισμός των μη ελλειμματικών τυχαίων μεταβλητών $U(T-),|U(T)|$ και της από κοινού κατανομής αυτών 58
4.1.2. Συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $U(T-),|U(T)|$ 61
4.1.2.1. Ορισμός συνδιακύμανσης 62
4.1.2.2. Υπολογισμός της συνδιακύμανσης στην περίπτωση των τ.μ. $U(T-),|U(T)|$ 62
4.2. Το πρόσημο της συνδιακύμανσης 65
4.3. Υπολογισμός της συνδιακύμανσης των τ.μ. $V(T-),V(T)$ στην περίπτωση γνωστών ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα και γραφική αναπαράσταση του συντελεστή 68
4.3.1. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων 69
4.3.2. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών 70
4.3.3. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα 75

4.3.4. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών 83

5. ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΩΝ Τ.Μ. U(T-),|U(T)|, ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΥ (u=0) 97

5.1. Ορισμός συντελεστή συσχέτισης 97

5.2. Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης στην περίπτωση των τ.μ. $V(T-),V(T)$ 98

5.3. Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. $V(T-),V(T)$ στην περίπτωση γνωστών ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα και γραφική αναπαράσταση του συντελεστή 100

5.3.1. Η συσχέτιση στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων 101

5.3.2. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών 102

5.3.3. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα 105

5.3.4. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών 108

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α Παρουσίαση εντολών του αλγεβρικού προγράμματος Maple 117

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 129

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

2.1. Υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδος ή ενός συστήματος 8

2.2. Σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων κατανομών 15

2.3. Η θέση της Εκθετικής κατανομής μεταξύ των διαφόρων κλάσεων γήρανσης 17

2.4. Βαθμίδα αποτυχίας της Εκθετικής κατανομής όταν F=Exp(2) 18

2.5. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών 20

2.6. Βαθμίδα αποτυχίας της Γάμμα κατανομής όταν F=G(3,λ) 24

2.7. Βαθμίδα αποτυχίας της Γάμμα κατανομής όταν F=G(1/2,λ) 25

2.8. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(1/2,λ1)+(1α)G(1/4,λ2)................................ 28

2.9. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(2,λ1)+(1-α)G(4,λ2)................................ 29

2.10. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(2,λ1)+(1-α)G(1/2,λ2)................................ 31

2.11. Ταξινόμηση των κατανομών χρόνου ζωής ανά κλάση γήρανσης 31

3.1. Η ανέλιξη του πλεονάσματος 40

3.2. Γραφική παράσταση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη πλεονάσματος 41

3.3. Πιθανότητα χρεοκοπίας της Εκθετικής κατανομής................................ 50

3.4. Πιθανότητα χρεοκοπίας μίξης δύο Εκθετικών κατανομών, όταν F=bExp(1/2)+(1-b)Exp(2) 52

4.1. Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4)................................ 73

4.2. Συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας, όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4) 74

4.3.(α) Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ) 77

4.3.(β) Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ) 78

4.4. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων όταν Fe=1/2G(1,λ)+ 1/2G(2,λ) ... 80

4.5. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων όταν Fe=1/3G(1,λ)+ 1/3G(2,λ)+1/3G(3,λ) ... 82

4.6. Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=αG(n1,λ1)+ (1-α)G(n2,λ2) ... 85

4.7. Βαθμίδες αποτυχίας r(x) & re(x) της κατανομής των αποζημιώσεων όταν F=1/2G(2,4)+ 1/2G(2,1/2) ... 91

4.8. Βαθμίδες αποτυχίας r(x) & re(x) της κατανομής των αποζημιώσεων όταν F=1/2G(1,1/2)+ 1/2G(2,3) ... 94

5.1. Τυπική απόκλιση της τ.μ. V(T), όταν F=Exp(λ) ... 102

5.2. Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4) ... 104

5.3. Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ) ... 107

5.4. Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=αG(n1,λ1)+ (1-α)G(n2,λ2) ... 110

5.5. Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=1/2G(2,1)+ 1/2G(n2,1/3) ... 114

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

BFR	Bathtub Failure Rate
UBFR	Upside-down Bathtub Failure Rate
MBUBFRR	Mixed Bathtub & Upside-down Bathtub Failure Rate
IFR	Increasing Failure Rate
DFR	Decreasing Failure Rate
NBU	New Better than Used
NWU	New Worse than Used
NBUE	New Better than Used in Expectation
NWUE	New Worse than Used in Expectation
HNBUE	Harmonic New Better than Used in Expectation
HWBUE	Harmonic New Worse than Used in Expectation
$\mathrm{Exp}(\bullet)$	Exponential
$\mathrm{G}(\bullet)$	Gamma
$\mathrm{Geo}(\bullet)$	Geometrical
$\mathrm{P}(\bullet)$	Poisson
inf	infinitive
τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
βλ.	βλέπε

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

$(1) \Rightarrow (2)$	Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται προκειμένου να δηλώσει ότι από τη σχέση (1) μπορούμε να οδηγηθούμε στη σχέση (2), αλλά όχι το αντίστροφο.
$(1) \Leftrightarrow (2)$	Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται προκειμένου να δηλώσει ότι από τη σχέση (1) μπορούμε να οδηγηθούμε στη σχέση (2) και το αντίστροφο.
$(\bullet)$	Ο συμβολισμός αυτός εκφράζει μια οποιαδήποτε παράμετρο ή συνάρτηση.
$(\bullet)\uparrow$	Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε παράμετρος ή συνάρτηση, τείνει σε ένα αριθμό από τα αριστερά.
$(\bullet)\downarrow$	Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε παράμετρος ή συνάρτηση, τείνει σε ένα αριθμό από τα δεξιά.
$\sim$	Ο συμβολισμός αυτός δηλώνει την ακολουθία μίας τυχαίας μεταβλητής ως προς μία κατανομή κινδύνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα μπορούσε κανείς αδιαμφισβήτητα να ισχυριστεί πως ο θεσμός της ασφάλισης είναι τόσο παλαιός όσο και η ίδια η ύπαρξη του ανθρώπου, με πολλές από τις έννοιες της ιδιωτικής ασφάλισης να κάνουν δειλά δειλά την εμφάνισή τους πριν από τέσσερις περίπου χιλιετίες, όπως συναντώνται σαφώς διατυπωμένες στα πιο αρχαία κείμενα. Οι ρίζες του θεσμού αυτού απαντώνται στην 3η π.Χ. χιλιετία, με την ασφάλιση να κάνει την πρώτη της εμφάνιση υπό τη μορφή «αλληλοβοήθειας» μεταξύ ομάδων ατόμων οι οποίες εκτελούσαν ένα συναφές είδος εργασίας. Το πρώτο «ταμείο αλληλοβοήθειας» συστάθηκε στην αρχαία Αίγυπτο και είχε ως στόχο την εξυγίανση και τη βελτίωση των άθλιων συνθηκών κάτω κάτω από τις οποίες απασχολούνταν οι εργάτες κατασκευής των πυραμίδων, με τα εργατικά ατυχήματα και τις ασθένειες να δεσπόζουν.

Η έννοια όμως της ασφαλιστικής κάλυψης ήταν ευρέως διαδεδομένη και στην αρχαία Αθήνα, όπου τον 6ο αιώνα π.Χ. ο Σόλωνας μέσα από σχετική νομοθετική ρύθμιση θεσπίζει τον πρώτο ασφαλιστικό νόμο, ο οποίος καθορίζει τη λειτουργία των λεγόμενων ερανικών εταιριών που είχαν ως στόχο την ανάληψη κινδύνων και την κάλυψη των εξόδων. Στην Κύπρο τον 5ο π.Χ. αιώνα εμφανίσθηκε το πρώτο ασφαλιστικό πρόγραμμα υγείας και περίθαλψης της ιστορίας, ενώ από τους λεγεωνάριους της αρχαίας Ρώμης θεσπίστηκε το πρώτο συνταξιοδοτικό σύστημα της ανθρωπότητας.

Αναφορά στον θεσμό της θαλάσσιας ασφάλισης συναντάμε για πρώτη φορά τον 4ο αιώνα π.Χ. με την ίδρυση ειδικών ναυλομεσιτικών γραφείων τα οποία αναλάμβαναν τον κίνδυνο οικονομικής καταστροφής σε περίπτωση μη επιστροφής ενός εμπορικού πλοίου, με το παλαιότερο σωζόμενο ασφαλιστήριο συμβόλαιο θαλάσσης να φέρει ημερομηνία έκδοσης την 23η Οκτωβρίου του 1347 και να αναφέρεται στην κάλυψη του πλοίου Santa Clara για το ταξίδι που πραγματοποίησε από τη Γένοβα της Ιταλίας προς τη Μαγιόρκα της Ισπανίας.

Αξίζει να σημειωθεί δε πως η πρώτη Ελληνική ασφαλιστική εταιρία ιδρύθηκε το 1828 στη Σύρο φέροντας την διακριτή επωνυμία «Ασφαλιστικόν Κατάστημα», η οποία ένα μόλις χρόνο μετά μετονομάστηκε σε «Ελληνικόν Ασφαλιστικόν Κατάστημα». Το 1970 ψηφίστηκε ο σύγχρονος ασφαλιστικός νόμος της Ελλάδας, ο οποίος μετά την ενσωμάτωση της χώρας μας στην Ευρωπαϊκή Ένωση εκσυγχρονίστηκε και εναρμονίστηκε με τις ασφαλιστικές διατάξεις των λοιπών Ευρωπαϊκών κρατών-μελών της (βλ. Κουτσόπουλος (1999) και http://asfalistis.tripod.com/istoria.htm).

Στις μέρες μας ο θεσμός της ασφάλισης έχει εξελιχθεί σε ολόκληρη επιστήμη με αυτήν να διακρίνεται δύο μεγάλα πεδία, την Ιδιωτική και την Κοινωνική ασφάλιση, ανάλογα με τον φορέα που αναλαμβάνει κάθε φορά τον κίνδυνο. Η Ιδιωτική ασφάλιση η οποία ασκείται από τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις και τους αλληλασφαλιστικούς συνεταιρισμούς, διακρίνεται σε δύο κύριους κλάδους, τον κλάδο ασφαλίσεων Ζωής και Υγείας (Life Insurance) και τον κλάδο των Γενικών Ασφαλίσεων (Non-Life Insurance). Ο πρώτος κλάδος αναφέρεται σε ασφαλίσεις προσώπων, ενώ ο δεύτερος στις εμπράγματες ασφαλίσεις-ασφαλίσεις περιουσίας αλλά και τις ασφαλίσεις ευθύνης, οι οποίες αποτελούν όπως σημειώθηκε και προηγουμένως τον μακροβιότερο κλάδο ασφάλισης σημειώνοντας πορεία ενεργούς δράσης για περισσότερες από τέσσερις χιλιετίες. Η Κοινωνική ασφάλιση η οποία βιώνει μόλις το δεύτερο αιώνα λειτουργίας της, λειτουργεί υπό κρατικό έλεγχο και ασκείται από τα ταμεία κοινωνικής ασφάλισης. Αφορά κατά κύριο λόγο ασφαλίσεις προσώπων και αντίθετα με την Ιδιωτική ασφάλιση είναι υποχρεωτική για όλους τους ασφαλιζόμενους.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας το θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε αφορά στον ιδιωτικό τομέα ασφάλισης και συγκεκριμένα τον κλάδο Ασφαλίσεων Ζημιών (Non-Life Insurance). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, αυτός ασκείται κατά κύριο λόγο από τις ασφαλιστικές εταιρίες οι οποίες αναλαμβάνουν τον πρόσθετο κίνδυνο που φέρουν οι ασφαλισμένοι έναντι της υποχρέωσης καταβολής των συμφωνημένων ασφαλίστρων, με την υπόσχεση οι πρώτοι να αποζημιώσουν τους δεύτερους σε περίπτωση επέλευσης ενός καταστροφικού ασφαλίσιμου ζημιογόνου ενδεχομένου, με απώτερο σκοπό την αποκόμιση κέρδους από την πλευρά των εταιριών. Η αναλογιστική επιστήμη αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους τομείς του θεσμού της ασφάλισης, διαδραματίζοντας σημαντικό ρόλο σε κάθε πτυχή και δραστηριότητα της ιδιωτικής ασφάλισης, σημειώνοντας συγκριτικά με τον ευρύτερο θεσμό της ασφάλισης έναν σύντομο βίο διάρκειας περίπου 350 ετών.

Παρά το γεγονός ότι οι γενικές ασφαλίσεις είναι αρκετά προγενέστερες των ασφαλίσεων ζώης, τα μαθηματικά των γενικών ασφαλίσεων αναπτύχθηκαν πιο πρόσφατα.

Η Θεωρία των Κινδύνων αποτελεί έναν ξεχωριστό κλάδο της αναλογιστικής επιστήμης τα θεμέλια της οποίας τέθηκαν το 1909 από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg, ο οποίος στα πλαίσια της διατριβής του με τίτλο "On the Theory of Reinsurance" εισήγαγε το λεγόμενο «κλασικό υπόδειγμα της Θεωρίας Χρεοκοπίας», πάνω στο οποίο βασίζονται μέχρι και σήμερα όλοι οι επιστήμονες που ασχολούνται με το εν λόγω ερευνητικό πεδίο. Ο όρος "χρεοκοπία" τον οποίο θα συναντήσουμε να επαναλαμβάνεται σε πάρα πολλά σημεία στις σελίδες που θα ακολουθήσουν, θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι δεν αντιστοιχεί σε παύση των διαδικασιών και της ευρύτερης λειτουργίας μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, όπως είναι ευρέως γνωστός με τη συνήθη ετυμολογία, παρά χρησιμοποιείται προκειμένου να περιγράψει μία δυνητική κατάσταση κατά την οποία τα έσοδα της εταιρίας δεν επαρκούν πλήρως για την κάλυψη των απαιτήσεων που καταφθάνουν από τους ασφαλισμένους σε ένα ή σε περισσότερα χαρτοφυλάκιά της.

Η παρούσα εργασία όπως αναφέρει και ο τίτλος της, αφορά στη μελέτη της συσχέτισης του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία στη Θεωρία Κινδύνων και συγκεκριμένα υπό την ισχύ του κλασικού προτύπου του Lundberg. Όπως θα παρουσιαστεί και στη συνέχεια, πρόκειται για έναν συντελεστή το τελικό πρόσημο του οποίου διαμορφώνεται βάσει της τιμής που λαμβάνει η συνδιακύμανση των υπό εξέταση μεταβλητών μας. Η ποσότητα αυτή επιτυγχάνει να αποδώσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο όλες τις πληροφορίες αναφορικά με τον τρόπο μεταβολής της μίας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη.

Από τα αποτελέσματα σχετικών μελετών που πραγματοποιήθηκαν πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, προέκυψε ότι στον καθορισμό του προσήμου της συνδιακύμανσης καθοριστικό ρόλο παίζει η κατανομή ισορροπίας της αρχικής κατανομής των αποζημιώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας. Συγκεκριμένα, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας είναι εκείνη που διαδραματίζει καθοριστικό παράγοντα στο είδος της συσχέτισης που θα προκύψει μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Για το λόγο αυτό στο Κεφάλαιο 2 που επακολουθεί, γίνεται αναφορά σε κάποιες από τις σημαντικότερες έννοιες της Θεωρίας Αξιοπιστίας, όπως είναι η παρουσίαση των κλάσεων κατανομών αξιοπιστίας, αλλά και η μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η ταξινόμηση των κατανομών σε αυτές τις κλάσεις. Η μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας πραγματώνεται τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο, μέσα από την εξατομικευμένη εφαρμογή της για κάθε μία από τις περιπτώσεις κατανομών στις οποίες θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για την εύρεση του συντελεστή συσχέτισης του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία. Πρόκειται για τις περιπτώσεις της Εκθετικής, της Γάμμα, της μίξης δύο Εκθετικών αλλά και της μίξης δύο Γάμμα κατανομών.

Στο Κεφάλαιο 3, γίνεται μία σύντομη επισκόπηση της Θεωρίας Χρεοκοπίας με κεντρικό σημείο αναφοράς την παρουσίαση του κλασικού υποδείγματος της Θεωρίας Κινδύνων, όπως αυτό εισήχθε από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg, ενώ θα παρακολουθήσουμε στη συνέχεια και τη γενίκευση της έννοιας της χρεοκοπίας από τους Hans Gerber και Elias Shiu. Έννοιες όπως είναι το πλεόνασμα, το έλλειμμα, η χρεοκοπία, ο χρόνος χρεοκοπίας ή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ελλείμματος-πλεονάσματος, είναι μόλις κάποιες από τις έννοιες όπου θα έχει την ευχέρεια να παρακολουθήσει ο αναγνώστης στο κεφάλαιο αυτό. Ταυτόχρονα, θα είναι σε θέση να παρακολουθήσει τη διαδικασία υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής και της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών.

Ακολουθεί το Κεφάλαιο 4, το οποίο είναι αφιερωμένο στη μελέτη μιας ιδιατέρως σημαντικής ποσότητας, τα αποτελέσματα της οποίας διαδραματίζουν καθοριστικό παράγοντα στον καθορισμό του προσήμου του συντελεστή συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Πρόκειται για το συντελεστή της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών μας, ο οποίος μελετάται εν απουσία αρχικού αποθεματικού. Η μελέτη αυτή συνδυάζεται με την παρουσίαση των σημαντικότερων ερευνητικών αποτελεσμάτων και θεωρημάτων όπου έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς από σχετικές μελέτες, οι οποίες συνδέουν τον καθορισμό του προσήμου της συνδιακύμανσης με την κλάση γήρανσης στην οποία ανήκει η κατανομή ισορροπίας των αποζημιώσεων ή το συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας. Η μελέτη ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό της συνδιακύμανσης για τις περιπτώσεις των κατανομών που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 2.

Τέλος παρουσιάζεται το Κεφάλαιο 5, στο οποίο κορυφώνεται η παρούσα έρευνά μας μέσα από τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, εφαρμόζοντας για την περίπτωση του κλασικού υποδείγματος της Θεωρίας Κινδύνων, αναλυτικά για κάθε μία από τις περιπτώσεις της Εκθετικής κατανομής, της Γάμμα, της μίξης δύο Εκθετικών, καθώς και της μίξης δύο Γάμμα κατανομών. Τα παραγόμενα αποτελέσματα προκύπτουν μέσα από το συνδυασμό των αποτελεσμάτων που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 4 και τον υπολογισμό της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος και της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής του ελλείμματος που υλοποιείται στο τρέχον κεφάλαιο.

Όλα τα παραπάνω Κεφάλαια 2-5, συνδυάζονται με την παράθεση σχετικών αριθμητικών παραδειγμάτων στο αλγεβρικό υπολογιστικό πρόγραμμα της Maple, για κάθε μία των περιπτώσεων κατανομών τις οποίες εξετάζουμε και ολοκληρώνονται με την παρουσίαση των αντίστοιχων γραφημάτων και την ανάλυση της συμπεριφοράς των εξεταζόμενων μεταβλητών ή ποσοτήτων. Για το λόγο αυτό κρίνεται αναγκαία η ύπαρξη του Παραρτήματος Α, στο οποίο παρουσιάζεται για μία κάθε φορά από τις περιπτώσεις κατανομών τις οποίες εξετάζουμε στα κεφάλαια που ακολουθούν, ενδεικτικά ο κώδικας εντολών που χρησιμοποιήθηκε για την αντίστοιχη υπολογιστική διαδικασία που ακολουθήθηκε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η μελέτη διαφόρων κλάσεων κατανομών, οι οποίες εισάγονται στη Θεωρία Αξιοπιστίας με σκοπό τη μελέτη του χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Η ταξινόμηση των κατανομών σε αυτές τις κλάσεις γίνεται συνήθως μέσω της βαθμίδας αποτυχίας ή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής τους. Για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμο να εισάγουμε πριν από οποιαδήποτε είδους ανάλυση, την έννοια της βαθμίδας αποτυχίας μίας μονάδας ή ενός συστήματος (failure rate or hazard rate), το πώς αυτή ορίζεται, καθώς και τί μορφές μπορεί να λάβει. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τις διάφορες κλάσεις κατανομών, τις ισοδυναμίες όπου θα εξασφαλίζουν ότι μία κατανομή ανήκει στη συγκεκριμένη κλάση, αλλά και τη σχέση που συνδέει τις κλάσεις κατανομών μεταξύ τους. Τέλος, θα αναφερθούμε ξεχωριστά για κάθε μία από τις κατανομές κινδύνων στις οποίες θα επιγκεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής για τη μελέτη του συντελεστή συσχέτισης. Πρόκειται για τις περιπτώσεις της Εκθετικής κατανομής, της μίξης δύο Εκθετικών, της Γάμμα και της μίξης δύο Γάμμα κατανομών. Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τη βαθμίδα αποτυχίας τους και θα προσδιορίσουμε την κλάση κατανομής στην οποία ανήκουν, παραθέτοντας κάποιες αριθμητικές εφαρμογές και απεικονίζοντας γραφικά τη βαθμίδα αποτυχίας.

2.1. Βαθμίδα αποτυχίας

2.1.1. Ορισμοί

Για την περιγραφή της κατανομής του χρόνου ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος, θα χρησιμοποιήσουμε μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Έστω Χ μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή, με σύνολο τιμών R_X όπου $R_X \subseteq [0,\infty)$, συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Ισχύει ότι:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(u)du\,, \quad x \ge 0\,, \tag{2.1}$$

με $F(0)=0$ και $F(+\infty)=1$, δηλαδή η σ.κ. $F(x)$ είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά, ενώ:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=F'(x)\ . \tag{2.2}$$

Η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$, γνωστή και ως συνάρτηση αξιοπιστίας, ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$S(x)=P(X>x)=\int_x^\infty f(u)du=1-\int_0^x f(u)du=1-P(X\le x)=1-F(x)=\overline{F}(x), \tag{2.3}$$

με $S(0)=1$ και $\lim_{x\to\infty}S(x)=0$, δηλαδή η σ.ε. $S(x)$ είναι φθίνουσα και συνεχής.

Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ συνδέεται με τη συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$ μέσω της σχέσης $f(x)=-S'(x)$.

Έστω ότι έχουμε την πληροφορία ότι μία μονάδα ή ένα σύστημα έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t και μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τι θα συμβεί στο αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα x, όπως φαίνεται επεξηγηματικά στο διάγραμμα που ακολουθεί:

ΣΧΗΜΑ 2.1.

Υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδος ή ενός συστήματος

Σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας ισχύει ότι:

$$P(A\cap B)=P(A\,|\,B)\cdot P(B)\Leftrightarrow P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \tag{2.4}$$

όπου A και B δύο ενδεχόμενα στον ίδιο δειγματικό χώρο.

Με βάση λοιπόν τα προηγούμενα και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.4), προκύπτει αντίστοιχα για τη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης $S(x\,|\,t)$:

$$S(x\,|\,t)=P(X>t+x\,|\,X>t)=\frac{P(X>t+x)}{P(X>t)}=\frac{S(t+x)}{S(t)}, \tag{2.5}$$

με $S(t)>0$, ενώ για τη δεσμευμένη συνάρτηση αποτυχίας $F(x\,|\,t)$ προκύπτει ότι:

$$F(x\,|\,t) = P(X \le t + x \,|\, X > t) = \frac{P(t < X \le t + x)}{P(X > t)} = \frac{F(t+x) - F(t)}{S(t)}\,, \tag{2.6}$$

ή

$$F(x\,|\,t) = 1 - S(x\,|\,t) = \frac{S(t) - S(t+x)}{S(t)}\ . \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε μία άλλη εξίσου σημαντική ποσότητα στη Θεωρία Αξιοπιστίας, τη βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) ή αλλιώς συνάρτηση κινδύνου (hazard rate), την οποία θα συμβολίσουμε με $r(t)$ και η οποία εκφράζει τη στιγμιαία πιθανότητα "θανάτου" μίας μονάδας ή ενός συστήματος το χρόνο t, δοθέντος ότι έχει επιζήσει μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή t.

Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$r(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{P(t \le X \le t + x \,|\, X \ge t)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{P(t \le X \le t + x)}{P(X \ge t)}\,.$$

Από την τελευταία ισότητα και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.2) που είδαμε προηγουμένως, προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$r(t) = \frac{f(t)}{S(t)}\,, \quad S(t) > 0 \tag{2.8}$$

ή κάνοντας χρήση της σχέσης $f(x) = -S'(x)$:

$$r(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d \ln S(t)}{dt}\,, \quad S(t) > 0\,. \tag{2.9}$$

Βλ. Αντζουλάκος (2003).

Από τις σχέσεις (2.8) και (2.9) παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ και η συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ είναι δύο μεγέθη αρνητικώς συσχετιζόμενα, με αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές της $S(t)$ η $r(t)$ να λαμβάνει μικρές τιμές, ενώ για μικρές τιμές της $S(t)$ η $r(t)$ να λαμβάνει μεγάλες τιμές.

2.1.2. Μορφές μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας

Η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ μιας μη αρνητικής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, είναι ιδιαίτερα σημαντική για την περιγραφή κατανομών χρόνου ζωής, καθώς μας δείχνει πώς μεταβάλλεται η στιγμιαία πιθανότητα θανάτου μίας μονάδας ή ενός συστήματος στο πέρασμα του χρόνου. Για το λόγο αυτό, κατά τη μελέτη της $r(t)$, αυτό το οποίο μας ενδιαφέρει είναι κατά κύριο λόγο η μονοτονία της συνάρτησης αυτής.

Υπάρχουν τέσσερις βασικές μορφές της συνάρτησης αυτής ως προς τη μονοτονία, οι οποίες παρουσιάζονται ακολούθως:

α) Η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι φθίνουσα σε όλο το διάστημα $(0,\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή F των χρόνων ζωής θα λέμε ότι έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας.

β) Η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι αύξουσα σε όλο το διάστημα $(0,\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή F των χρόνων ζωής θα λέμε ότι έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας.

γ) Η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα $[0,t*)$ και αύξουσα στο διάστημα $[t*,\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει λεκανοειδή μορφή και η κατανομή F των χρόνων ζωής θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα BFR (bathtub failure rate).

δ) Η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι αύξουσα σε ένα διάστημα $[0,t*)$ και φθίνουσα στο διάστημα $[t*,\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει ανάποδη λεκανοειδή μορφή και η κατανομή F των χρόνων ζωής θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα UBFR (upside-down bathtub failure rate).

2.2. Κλάσεις κατανομών

Στην υποενότητα αυτή, θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στη μελέτη κάποιων συγκεκριμένων κλάσεων γήρανσης όπου θα μας απασχολήσουν. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τις κλάσεις IFR, DFR, NBU, NWU, NBUE, NWUE, HNBUE και HNWUE. Για κάθε μία ξεχωριστά, θα εισάγουμε τον αντίστοιχο ορισμό και θα τις ερμηνεύσουμε, ενώ θα παρουσιάσουμε και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται αυτές μεταξύ τους.

2.2.1. Οικογένειες κατανομών IFR και DFR

Ορισμός 2.1. Έστω X μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με κατανομή F. Θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα IFR - Increasing Failure Rate (DFR - Decreasing Failure Rate) αν και μόνον αν η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση ως προς το χρόνο t, όπου $t \in [0, \infty)$.

Στο σημείο αυτό, θα παρουσιάσουμε δύο σημαντικά θεωρήματα τα οποία αναφέρονται στις συγκεκριμένες οικογένειες και τα οποία θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμα στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου. Θα μας βοηθήσουν στη θεωρητική απόξειξη της κλάσης κατανομής στην οποία ανήκουν κάποιες από τις ζημιοκατανομές, με τη μελέτη των οποίων θα ασχοληθούμε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται. Συγκεκριμένα, πρόκειται για την περίπτωση της Εκθετικής κατανομής και της κατανομής Erlang (είναι η κατανομή Γάμμα για ακέραια τιμή της παραμέτρου κλίμακας).

Θεώρημα 2.1. Έστω X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με κατανομές F_1 και F_2 αντίστοιχα, και F η κατανομή των $X_1 + X_2$. Εάν οι κατανομές F_1 και F_2 ανήκουν στη κλάση IFR, τότε και η συνέλιξη αυτών F, η οποία ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$F(t) = \int_0^t F_2(t-x)\, dF_1(x),$$

θα ανήκει επίσης στη κλάση γήρανσης IFR, δηλαδή θα ισχύει ότι $F \in IFR$.

Απόδειξη: Βλ. Barlow & Proschan (1975), σελ.100-101.

Θεώρημα 2.2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με κατανομές $F_1, F_2, \ldots, F_n$ αντίστοιχα. Εάν οι κατανομές F_i με i=1,2,…,n, ανήκουν στην κλάση DFR, τότε και η μίξη αυτών F η οποία ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot F_i(x),$$

για την οποία ισχύει ότι $\alpha_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, θα ανήκει επίσης στην κλάση γήρανσης DFR, δηλαδή θα ισχύει ότι $F \in DFR$.

Απόδειξη: Βλ. Barlow & Proschan (1975), σελ.102-103.

Θα πρέπει να σημειώσουμε αναφορικά με το Θεώρημα 2.2. ότι δεν ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση της κλάσης IFR, καθώς η μίξη F συνεχών κατανομών που ανήκουν στη κλάση IFR, δεν συνεπάγεται (κατ' ανάγκη) ότι ανήκει και εκείνη στην κλάση IFR. Για παράδειγμα, η Εκθετική κατανομή ανήκει στην κλάση αξιοπιστίας IFR, όμως η μίξη δύο Εκθετικών όπως θα δούμε και στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, έχει την ιδιότητα DFR.

2.2.2. Οικογένειες κατανομών NBU και NWU

Ορισμός 2.2. Έστω X μία θετική μη διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας S, η οποία εκφράζει το χρόνο ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος. Θα λέμε ότι η κατανομή F ανήκει στην κλάση NBU - New Better than Used (NWU – New Worse than Used), εάν ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$P(X > t + x \mid X > t) \leq (\geq) P(X > x), \quad \forall\ t \geq 0,\ x \geq 0.$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης $\frac{S(t+x)}{S(t)}$ μίας μονάδας ή ενός συστήματος ηλικίας t, είναι μικρότερη (μεγαλύτερη) από την αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$ μίας νέας μονάδας ή συστήματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ισότητα της παραπάνω σχέσης ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση των εκθετικών κατανομών.

Η παραπάνω ισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα και ως:

$$S(t+x) \leq (\geq) S(x) \cdot S(t), \quad \forall\ t \geq 0,\ x \geq 0.$$

2.2.3. Οικογένειες κατανομών NBUE και NWUE

Στη συνέχεια, ορίζουμε δύο ακόμα κλάσεις κατανομών που επεκτείνουν αυτές που έχουμε δει μέχρι στιγμής στις προηγούμενες υποενότητες.

Ορισμός 2.3. Έστω Χ μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας S, η οποία εκφράζει το χρόνο ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος. Θα λέμε ότι η κατανομή F ανήκει στην κλάση NBUE - New Better than Used in Expectation (NWUE - New Worse than Used in Expectation), εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(α) Η κατανομή F έχει πεπερασμένο μέσο μ.

(β) Εάν ισχύει ότι:

$$\mu_t \leq (\geq) E(X), \tag{2.10}$$

όπου $E(X) = \int_0^\infty S(x)dx = \mu$ είναι ο μέσος χρόνος ζωής μίας νέας μονάδας, ενώ:

$$\mu_t = \int_0^\infty S(x \mid t)dx = \frac{\int_0^\infty S(t+x)dx}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(z)dz}{S(t)}, \tag{2.11}$$

όπου $t \geq 0$ και $z = t + x$, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t.

Η παραπάνω σχέση εκφράζει ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μίας χρησιμοποιημένης μονάδας ηλικίας t δεν υπερβαίνει, ή υπερβαίνει αντίστοιχα, τον μέσο χρόνο ζωής μίας νέας μονάδας.

Η (2.10) κάνοντας χρήση της σχέσης (2.11), μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα και ως ακολούθως:

$$\int_t^\infty S(z)dz \leq (\geq) \mu \cdot S(t), \quad t \geq 0.$$

2.2.4. Οικογένειες κατανομών HNBUE και HNWUE

Ορισμός 2.4. Έστω Χ μία θετική μη διακριτή τυχαία μεταβλητή, με κατανομή F και συνάρτηση αξιοπιστίας S_μ, η οποία εκφράζει το χρόνο ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος και η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ, δηλαδή Χ~Exp(1/μ). Η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι ίση με $S_\mu(x) = e^{-x/\mu}$. Έστω μία άλλη συνάρτηση επιβίωσης S με την ίδια μέση τιμή μ. Εάν ισχύει:

$$S(x) \le S_\mu(x),$$

τότε η S είναι στοχαστικά μικρότερη από τη συνάρτηση επιβίωσης S_μ.

Θα λέμε ότι η κατανομή F ανήκει στην κλάση HNBUE – Harmonic New Better than Used in Expectation (HNWUE – Harmonic New Worse than Used in Expectation), εάν ισχύει:

$$\int_t^\infty S(y)dy \le (\ge) \int_t^\infty S_\mu(y)dy,$$

ή ισοδύναμα:

$$\int_t^\infty S(y)dy \le (\ge) \mu \cdot \exp\left(-t/\mu\right), \quad t \ge 0,$$

όπου $\mu = \int_0^\infty S(x)dx$ είναι ο μέσος της κατανομής F της νέας μονάδας.

Βλ. Rolski (1975) και http://digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/858/3/3.pdf.

Εάν μία κατανομή F ανήκει στην κλάση αξιοπιστίας HNBUE (HWBUE), τότε θα ισχύει ότι ο χρόνος ζωής της μονάδας αυτής είναι στοχαστικά μικρότερος από τον χρόνο ζωής μίας άλλης μονάδας η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ.

2.2.5. Σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων

Οι κλάσεις κατανομών τις οποίες μόλις περιγράψαμε, συνδέονται μεταξύ τους μέσω κάποιων διατάξεων, οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 2.2. που ακολουθεί. Σύμφωνα με αυτό, ισχύει η παρακάτω αλληλουχία υποσυνόλων:

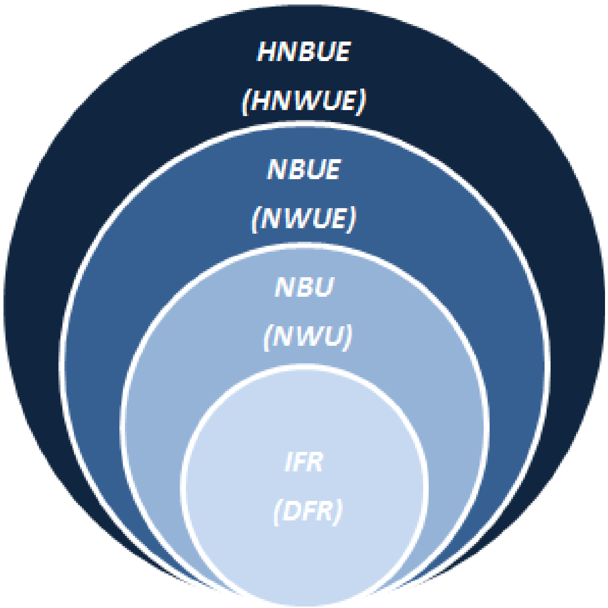
$$IFR \subseteq NBU \subseteq NBUE \subseteq HNBUE \tag{2.12}$$

$$DFR \subseteq NWU \subseteq NWUE \subseteq HNWUE \tag{2.13}$$

Απόδειξη: Βλ. Barlow & Proschan (1975), σελ.159.

ΣΧΗΜΑ 2.2.

Σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων κατανομών



Συνεπώς, εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία κατανομή F ανήκει σε κάποια από τις οικογένειες κατανομών NBU (NWU) ή NBUE (NWUE) ή HNBUE (HNWUE), αρκεί να αποδείξουμε είναι ότι η F ανήκει στη μικρότερη κλάση γήρανσης IFR (DFR), η οποία αποτελεί υποσύνολο των προαναφερθεισών και η ένταξή της σε αυτήν, συνεπάγεται αυτομάτως και την ένταξη της F στις μεγαλύτερες κλάσεις αξιοπιστίας.

2.3. Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα & γραφικές παραστάσεις

Στο σημείο αυτό, θα αξιοποιήσουμε όλα όσα παρουσιάσαμε μέχρι στιγμής στο παρόν κεφάλαιο και θα μελετήσουμε τη βαθμίδα αποτυχίας λίγο πιο αναλυτικά, για την περίπτωση κάποιων γνωστών μας ζημιοκατανομών, οι οποίες θα επικεντρώσουν το ενδιαφέρον μας στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τη βαθμίδα αποτυχίας της Εκθετικής κατανομής, της μίξης δύο Εκθετικών, της Γάμμα και της μίξης δύο Γάμμα κατανομών και θα δούμε σε ποια κλάση κατανομών ανήκουν. Στη συνέχεια, θα αποδώσουμε για κάθε μία από αυτές κάποια σχετικά αριθμητικά παραδείγματα, ενώ θα παρουσιάσουμε και τα αντίστοιχα γραφήματα τα οποία θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας τους.

2.3.1. Βαθμίδα αποτυχίας Εκθετικής κατανομής

Έστω X μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει τον χρόνο ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος, με κατανομή F, η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, δηλαδή X~Exp(λ). Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση πυκνότητας θα ισούται με $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, όπου $\lambda > 0,\ x \geq 0$, ενώ για τη συνάρτηση κατανομής θα ισχύει ότι:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

και για τη συνάρτηση επιβίωσης ή αλλιώς συνάρτηση αξιοπιστίας θα έχουμε τη σχέση $S(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$, με $\lambda > 0,\ x \geq 0$ αντίστοιχα.

Κάνοντας χρήση της σχέσης (2.8) που παρουσιάσαμε στην αρχή του παρόντος Κεφαλαίου, προκύπτει για τη βαθμίδα αποτυχίας:

$$r(x) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda, \quad \text{όπου } \lambda > 0 \text{ μία θετική σταθερά.} \qquad (2.14)$$

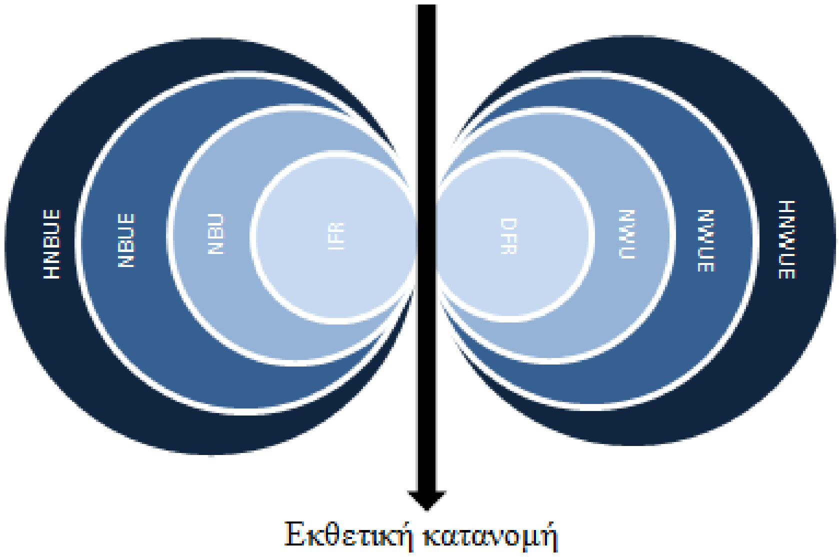
Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής, η βαθμίδα αποτυχίας είναι μία σταθερή συνάρτηση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή F του χρόνου ζωής να ανήκει τόσο στην κλάση IFR όσο και στην κλάση DFR, και κατ’ επέκταση στις κλάσεις HNBUE και HNWUE (Βλ. Σχήμα 2.3). Το γεγονός αυτό αποτελεί κύριο χαρακτηριστικό της Εκθετικής κατανομής, το οποίο οφείλεται σε μία σημαντική ιδιότητα της εν λόγω κατανομής, της λεγόμενης «αμνήμονος» ή «ιδιότητα της έλλειψης της μνήμης». Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, ο δεσμευμένος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μίας μονάδας ηλικίας t είναι ανεξάρτητος του αρχικού χρόνου ζωής t. Ισχύει δηλαδή το παρακάτω:

$$P(X > x + t \mid X > t) = P(X > x), \quad \text{όπου } x \geq 0 \text{ ανεξάρτητο του } t \geq 0.$$

Στην περίπτωση εφαρμογής της βαθμίδας αποτυχίας της Εκθετικής κατανομής στον Κλάδο Ασφαλίσεων Ζωής, η παραπάνω ιδιότητα εκφράζει ότι ένα άτομο παραμένει “αγέραστο” με την πάροδο του χρόνου εφόσον ισχύει για τη βαθμίδα αποτυχίας $r(x) = \lambda$, όπου λ μία θετική σταθερά, αλλά όχι όμως αθάνατο καθώς $r(x) \neq 0$.

ΣΧΗΜΑ 2.3.

Η θέση της Εκθετικής κατανομής μεταξύ των διαφόρων κλάσεων γήρανσης



Πριν ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας για τη βαθμίδα αποτυχίας της Εκθετικής κατανομής, αξίζει να σημειώσουμε ότι η Εκθετική αποτελεί τη μοναδική κατανομή χρόνων ζωής η οποία παρουσιάζει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα ως εξής. Έστω ότι η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ είναι ίση με μ, όπου μ>0 μία θετική σταθερά. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t)}{S(t)} = \mu &\Rightarrow -\frac{S'(t)}{S(t)} = \mu \\
&\Rightarrow -\int_0^t (\log S(u))' \, du = \int_0^t \mu \, du \\
&\Rightarrow -\log S(t) = \mu \cdot t \\
&\Rightarrow S(t) = e^{-\mu \cdot t}
\end{aligned}
$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι όταν η βαθμίδα αποτυχίας μίας κατανομής F είναι σταθερή, η συνάρτηση αξιοπιστίας δίνεται από τη σχέση $S(t) = e^{-\mu \cdot t}$, δηλαδή είναι ίση με τη συνάρτηση αξιοπιστίας μίας Εκθετικής κατανομής με παράμετρο μ. Συνεπώς, ισχύει ότι η X~Exp(μ). Αντίστροφα, εάν για τη συνάρτηση επιβίωσης μίας κατανομής ισχύει ότι $S(t) = e^{-\mu \cdot t}$, δηλαδή αναφερόμαστε στην περίπτωση της Εκθετικής με παράμετρο λ, μέσω αντικατάστασης στη σχέση (2.8) προκύπτει ότι $r(t) = \mu$.

Εφαρμογή 2.1. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $Exp(2)$.

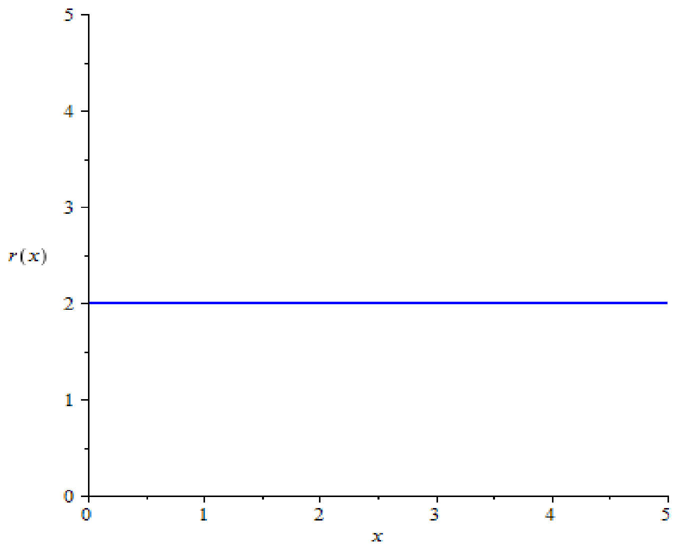
Στην περίπτωση όπου η κατανομή F του χρόνου ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος είναι η Εκθετική κατανομή με παραμέτρο $\lambda = 2$, η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι ίση με:

$$r(x;2) = 2\,,\ \ x \geq 0\,. \qquad (2.15)$$

Στο Σχήμα 2.4. που ακολουθεί εμφανίζεται η γραφική απεικόνιση της σχέσης (2.15), συναρτήσει της τιμής x:

ΣΧΗΜΑ 2.4.

Βαθμίδα αποτυχίας της Εκθετικής κατανομής όταν F=Exp(2)



2.3.2. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X του χρόνου ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος, ακολουθεί μία μίξη δύο Εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2 > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f(x) = \alpha \cdot \beta_1 e^{-\beta_1 \cdot x} + (1-\alpha) \cdot \beta_2 e^{-\beta_2 \cdot x}\ ,\quad x \geq 0\,, \qquad (2.16)$$

όπου $\alpha \in [0,1]$, $\beta_i > 0$ για $\forall i = 1,2$, ενώ για τη συνάρτηση αξιοπιστίας $S(x)$ θα ισχύει:

$$S(x) = \alpha \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} + (1-\alpha) \cdot e^{-\beta_2 \cdot x}\ ,\quad x \geq 0\,. \qquad (2.17)$$

Κάνοντας αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων (2.16) και (2.17) στη σχέση (2.8), προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών είναι ίση με:

$$r(x;\alpha,\beta_{1,}\beta_2)=\frac{\alpha\cdot\beta_1 e^{-\beta_1\cdot x}+(1-\alpha)\cdot\beta_2 e^{-\beta_2\cdot x}}{\alpha\cdot e^{-\beta_1\cdot x}+(1-\alpha)\cdot e^{-\beta_2\cdot x}},\quad x\geq 0. \tag{2.18}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$r'(x;\alpha,\beta_{1,}\beta_2)=\frac{-\alpha\cdot\beta_1^{\ 2}e^{-\beta_1\cdot x}-(1-\alpha)\cdot\beta_2^{\ 2}e^{-\beta_2\cdot x}}{-\alpha\cdot\beta_1\cdot e^{-\beta_1\cdot x}-(1-\alpha)\cdot\beta_2\cdot e^{-\beta_2\cdot x}}<0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $r(x;\alpha,\beta_{1,}\beta_2)$ της σχέσης (2.18) έχει αρνητική πρώτη παράγωγο ως προς x, επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1. η κατανομή F της μίξης δύο Εκθετικών θα έχει την ιδιότητα DFR και κατ' επέκταση θα ανήκει και στην κλάση γήρανσης HNWUE. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε απόλυτη συμφωνία όπως ήταν αναμενόμενο και με το Θεώρημα 2.2., καθώς οι Εκθετικές κατανομές με παραμέτρους $\beta_1>0$ και $\beta_2>0$ αντίστοιχα, έχουν την ιδιότητα DFR και συνεπώς η μίξη τους θα έχει την ίδια ακριβώς ιδιότητα.

Εφαρμογή 2.2. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $\alpha Exp\left(1/2\right)+(1-\alpha)Exp\left(1/4\right)$.

Στην περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη μίξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1=1/2$ και $\beta_2=1/4$, η βαθμίδα αποτυχίας της θα ισούται με:

$$r\left(x;\alpha,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=\frac{\alpha\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot x}+(1-\alpha)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}\cdot x}}{\alpha\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}+(1-\alpha)\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x}},\quad x\geq 0. \tag{2.19}$$

Εφαρμογή 2.3. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $\alpha Exp(3)+(1-\alpha)Exp(5)$.

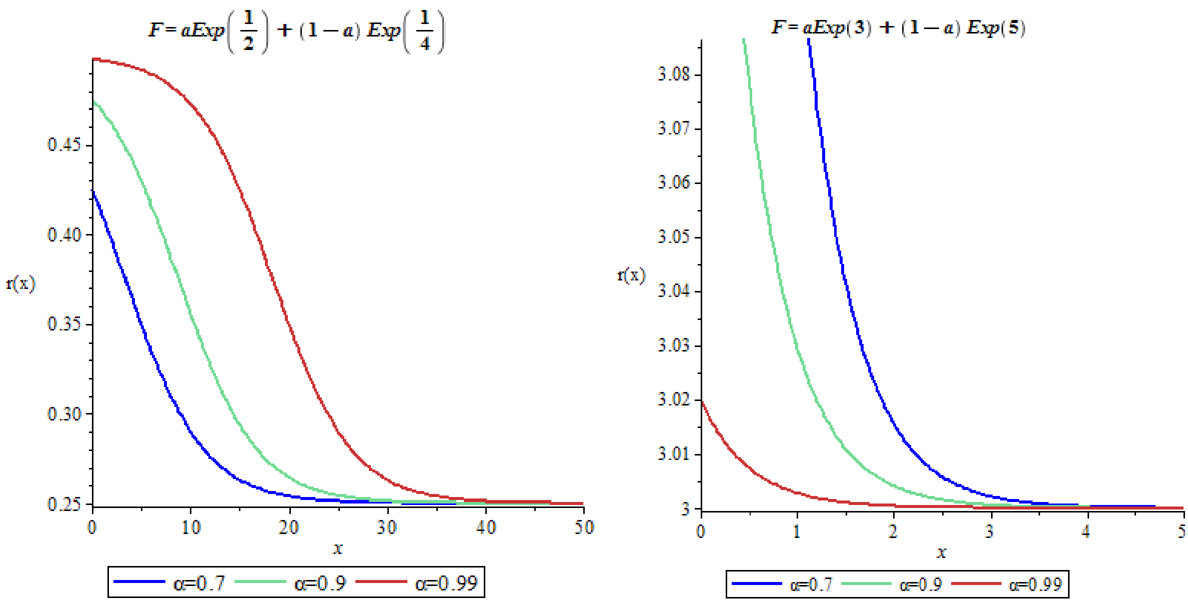
Στην περίπτωση όπου η κατανομή F είναι η μίξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1=3$ και $\beta_2=5$, η βαθμίδα αποτυχίας της θα ισούται με:

$$r(x;\alpha,3,5)=\frac{\alpha\cdot 3e^{-3\cdot x}+(1-\alpha)\cdot 5e^{-5\cdot x}}{\alpha\cdot e^{-3\cdot x}+(1-\alpha)\cdot e^{-5\cdot x}},\ x\geq 0 \tag{2.20}$$

Στο Σχήμα 2.5. που ακολουθεί παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των βαθμίδων αποτυχίας των σχέσεων (2.19) και (2.20) αντίστοιχα, συναρτήσει του x. Όπως ήταν αναμενόμενο και στις δύο περιπτώσεις η βαθμίδα αποτυχίας $r(x)$ παρουσιάζει φθίνουσα κλίση. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή που λαμβάνουν οι παράμετροι β_1 και β_2 της κατανομής τόσο πιο απότομη είναι η κλίση της $r(x)$ για κάθε $\alpha \in [0,1]$, σε αντίθεση με μικρές τιμές των παραμέτρων όπου η βαθμίδα αποτυχίας φθίνει εξαιρετικά αργά και λαμβάνει μικρές τιμές (βλ. παρόμοια αποτελέσματα Γαλανάκης (2012), σελ. 42).

ΣΧΗΜΑ 2.5.

Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών



Επιπλέον, παρατηρούμε πως για τη βαθμίδα αποτυχίας $r_1(x)$ του πρώτου γραφήματος και $r_2(x)$ του δεύτερου, ισχύει ότι $\lim_{x\to\infty} r_1(x) = 1/4$ και $\lim_{x\to\infty} r_2(x) = 3$ αντίστοιχα. Προκύπτει λοιπόν και για τις δύο περιπτώσεις, πως τα όρια των βαθμίδων αποτυχίας είναι ανεξάρτητα του συντελεστή α, αλλά σχετίζονται άμεσα με την παράμετρο β της κατανομής εκείνης που παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή στη μίξη των Εκθετικών κατανομών μας, καθώς για x τείνοντος στο άπειρο η βαθμίδα αποτυχίας λαμβάνει την τιμή της μικρότερης παραμέτρου β_i, $i = 1,2$ της κατανομής μας.

2.3.3. Βαθμίδα αποτυχίας Γάμμα κατανομής

Έστω ότι ο χρόνος ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος έχει κατανομή F η οποία είναι η Γάμμα κατανομή με παράμετρο κλίμακας λ και παράμετρο μορφής n, όπου $\lambda, n > 0$, δηλαδή F=G(n, λ). Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ θα είναι της μορφής:

$$f(x;n,\lambda) = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{\Gamma(n)} \quad , \quad x \geq 0 \text{ και } \lambda, n > 0, \tag{2.21}$$

όπου $\Gamma(n)$, $n > 0$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$.

Στην περίπτωση της Γάμμα κατανομής, η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και κατ' επέκταση η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$ είναι δύσχρηστες μορφολογικά καθώς εκφράζονται μέσω της μη πλήρους Γάμμα συνάρτησης $I(n,x)$, όπου $n, x > 0$. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση επιβίωσης υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$S(x;n,\lambda) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_x^\infty t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\lambda x}^\infty u^{n-1} \cdot e^{-u} du, \quad \text{όπου } u = \lambda t$$

$$\Leftrightarrow S(x;n,\lambda) = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda x} u^{n-1} \cdot e^{-u} du = 1 - I(n, \lambda x). \tag{2.22}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η παράμετρος λ=1, η σχέση (2.22) γίνεται:

$$S(x;n,1) = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x u^{n-1} \cdot e^{-u} du = 1 - I(x;n). \tag{2.23}$$

Για το λόγο αυτό, θα μελετήσουμε την κατανομή Γάμμα για την περίπτωση όπου η παράμετρος μορφής της n είναι θετικός ακέραιος, δηλαδή n=1,2,3,... . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$ και προκύπτει η κατανομή Erlang με συνάρτηση κατανομής:

$$F(x;n,\lambda) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad n = 1,2,3,... \tag{2.24}$$

Κάνοντας αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στη σχέση (2.8), προκύπτει ότι για την περίπτωση της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $n \in \mathbb{Z}$ και λ>0, η βαθμίδα αποτυχίας είναι η εξής:

$$r(x;n,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}}, \tag{2.25}$$

όπου $\lambda > 0$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Ένας τρόπος για να μελετήσουμε τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας $r(x)$ και κατ' επέκταση να προσδιορίσουμε την κλάση κατανομής στην οποία ανήκει η Γάμμα, είναι να μελετήσουμε τον λόγο $\frac{f(y+x)}{f(x)}$, ο οποίος συνδέεται με τη βαθμίδα αποτυχίας όπως παρουσιάζεται στη σχέση που ακολουθεί:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{S(x)}{f(x)} = \int_x^\infty \frac{f(y)}{f(x)} dy = \int_0^\infty \frac{f(y+x)}{f(x)} dy . \tag{2.26}$$

Κάνοντας λοιπόν αντικατάσταση της σχέσης (2.21), προκύπτει:

$$\frac{f(y+x)}{f(x)} = \left(\frac{y+x}{x}\right)^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} .$$

Παρατηρούμε ότι για $n > 1$ η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας είναι φθίνουσα ως προς x, ενώ για τιμές της παραμέτρου $n < 1$ τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα. Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (2.25), η βαθμίδα αποτυχίας για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές θα είναι αύξουσα και φθίνουσα αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου $n = 1$, τότε προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή και ίση με λ όπου $\lambda > 0$, το οποίο είναι αναμενόμενο διότι όπως είναι γνωστό για $n = 1$ η κατανομή Γάμμα συμπίπτει με την Εκθετική κατανομή. Από τον Ορισμό 2.1. προκύπτει λοιπόν ότι για $n > 1$ η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα ανήκει στην κλάση γήρανσης IFR και άρα και στην HNBUE, για $n < 1$ στη κλάση γήρανσης DFR αλλά και στην HNWUE, ενώ για $n = 1$ η κατανομή της Γάμμα θα ανήκει σε όλες τις παραπάνω οικογένειες κατανομών.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μπορεί να μελετηθεί μέσω της σχέσης που ακολουθεί, κάνοντας χρήση του κανόνα De L' Hopital:

$$r(\infty)=\lim_{x\to\infty} r(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{S(x)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} \quad . \tag{2.27}$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$f'(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\left[(n-1)\cdot x^{n-2}-\lambda\cdot x^{n-1}\right]$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (2.27) προκύπτει ότι:

$$r(\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda\cdot x^{n-1}-(n-1)\cdot x^{n-2}}{x^{n-1}}=\lambda-\lim_{x\to\infty}\frac{n-1}{x}=\lambda\,.$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι η βαθμίδα αποτυχίας $r(x)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) για $n\geq(\leq)\ 1$ με $\lim_{x\to\infty} r(x)=\lambda$.

Στο σημείο αυτό θα συνεχίσουμε με δύο αριθμητικές εφαρμογές προκειμένου να δούμε και στη πράξη όλα όσα αποδείξαμε μέχρι στιγμής, παραθέτοντας και τα αντίστοιχα γραφήματα της βαθμίδας αποτυχίας.

Εφαρμογή 2.4. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~$G(3,\lambda)$.

Στην περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη κατανομή Γάμμα με παράμετρο κλίμακας $\lambda>0$ και παράμετρο μορφής $n=3$, η βαθμίδα αποτυχίας κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (2.25) για $n=3$ θα ισούται:

$$r(x;3,\lambda)=\frac{x^2\lambda^3}{2+2\lambda x+\lambda^2x^2},\quad \lambda>0\,. \tag{2.28}$$

Ισχύει για την πρώτη παράγωγο ότι:

$$r'(x;3,\lambda)=\frac{2\lambda^3x\cdot(\lambda x+2)}{\left(2+2\lambda x+\lambda^2x^2\right)^2}>0\,,$$

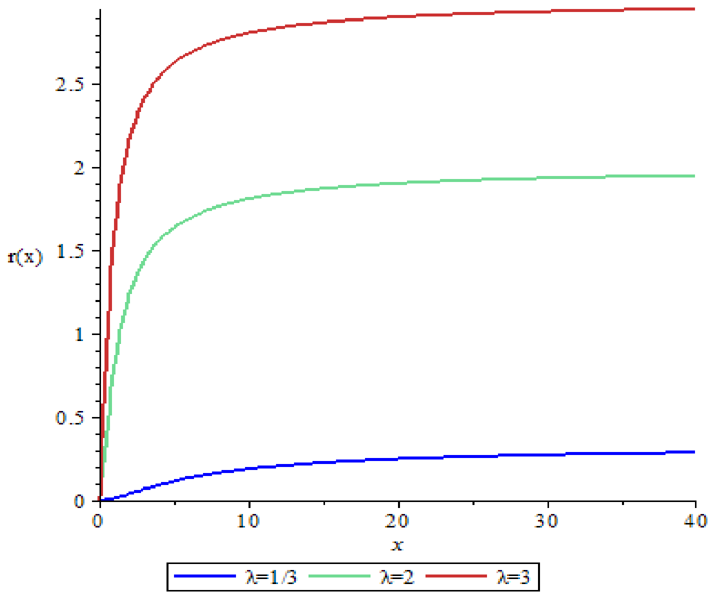
ενώ για τη δεύτερη προκύπτει ότι:

$$r''(x;3,\lambda)=-\frac{4\lambda^3\cdot(-2+3\lambda^2x^2+\lambda^3x^3)}{\left(2+2\lambda x+\lambda^2x^2\right)^3}<0\,.$$

Συνεπώς, αναμένουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής $G(3,\lambda)$ θα είναι γνησίως αύξουσα ως προς x και θα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, όπως ακριβώς επιβεβαιώνεται και από το γράφημα του Σχήματος 2.6. που ακολουθεί στη συνέχεια. Παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της παραμέτρου λ της κατανομής, δηλαδή της παραμέτρου κλίμακας, τόσο πιο απότομη είναι και η κλίση της βαθμίδας αποτυχίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις που απεικονίζονται στη γραφική παράσταση, η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνει από το σημείο x=0 μέχρι και το σημείο x=10 και στη συνέχεια σταθεροποιείται, με την $r(x;3,3)$ να παρουσιάζει την πιο απότομη κλίση και να σταθεροποιείται πιο αργά σε σχέση με τις υπόλοιπες (βλ. παρόμοια αποτελέσματα Γαλανάκης (2012), σελ. 47).

ΣΧΗΜΑ 2.6.

Βαθμίδα αποτυχίας της Γάμμα κατανομής όταν F=G(3,λ)



Εφαρμογή 2.5. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~$G\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή F είναι η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\lambda > 0$ και $n = 1/2$, η συνάρτηση πυκνότητας είναι ίση με:

$$f\left(x;\frac{1}{2}\lambda\right) = \frac{\sqrt{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}},$$

ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας θα δίνεται από τη σχέση:

$$S\left(x,\frac{1}{2},\lambda\right) = 1 - I\left(\frac{1}{2},\lambda x\right).$$

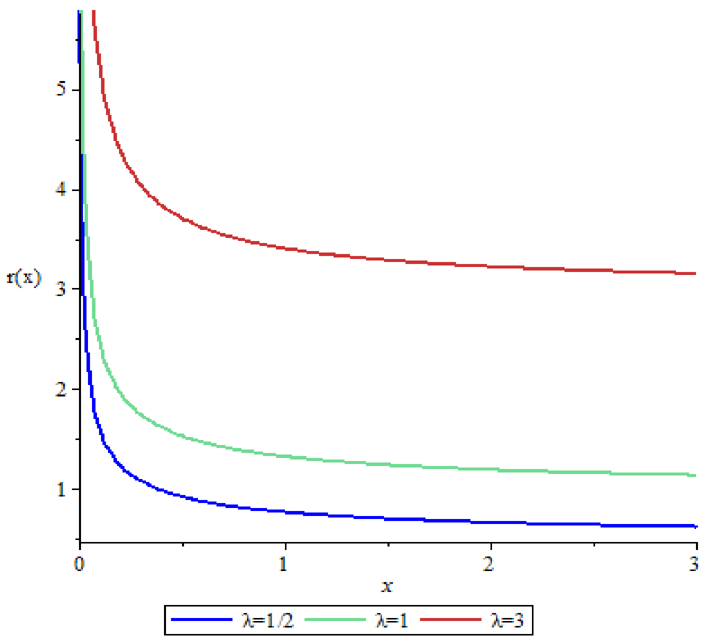
Η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι της μορφής:

$$r\left(x;\frac{1}{2},\lambda\right)=\frac{\sqrt{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}\cdot\left(1-I\left(\frac{1}{2},\lambda x\right)\right)},\quad \text{όπου } \lambda>0\,. \tag{2.29}$$

Στο Σχήμα 2.7. παρουσιάζεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (2.29) συναρτήσει του x, για διάφορες τιμές της παραμέτρου κλίμακας λ της κατανομής μας. Επιβεβαιώνεται λοιπόν πώς στην περίπτωση της Γάμμα κατανομής με τιμή της παραμέτρου μορφής μικρότερης της μονάδας $(0<n<1)$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Σε αντίθεση με τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6., εδώ η απότομη κλίση της βαθμίδας αποτυχίας φαίνεται να συνδέεται με μικρές τιμές της παραμέτρου λ. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνει από το σημείο x=0 μέχρι και το σημείο x=1 και στη συνέχεια σταθεροποιείται, με την $r\left(x;{}^{1}\!/_{2},{}^{1}\!/_{2}\right)$ να παρουσιάζει την πιο απότομη κλίση και να σταθεροποιείται πιο αργά σε σχέση με τις $r\left(x;{}^{1}\!/_{2},1\right)$ και $r\left(x;{}^{1}\!/_{2},3\right)$.

ΣΧΗΜΑ 2.7.

Βαθμίδα αποτυχίας της Γάμμα κατανομής όταν F=G(1/2,λ)



2.3.4. Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά το χρόνο ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος, ακολουθεί μία μίξη δύο Γάμμα κατανομών $G(n_1, \lambda_1)$ και $G(n_2, \lambda_2)$, με $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$f(x; a, n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha \frac{\lambda_1^{n_1} \cdot x^{n_1 - 1} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot x}}{\Gamma(n_1)} + (1-\alpha) \frac{\lambda_2^{n_2} \cdot x^{n_2 - 1} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot x}}{\Gamma(n_2)} \quad , \quad x \geq 0 \qquad (2.30)$$

όπου $\lambda_i, n_i > 0$ για $\forall i = 1,2$ και $\alpha \in [0,1]$, ενώ $\Gamma(n_i)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\Gamma(n_i) = \int_0^\infty t^{n_i - 1} \cdot e^{-t} dt \text{ με } n_i > 0.$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι της μορφής:

$$S(x; a, n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2) = a \cdot (1 - I(n_1, \lambda_1 x)) + (1-a) \cdot (1 - I(n_2, \lambda_2 x)) \qquad (2.31)$$

Από το πηλίκο των σχέσεων (2.30) και (2.31) προκύπτει η βαθμίδα αποτυχίας στνη περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών.

Το αποτέλεσμα που αναμένουμε για την περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους $n_1, n_2 < 1$ ως μίξη κατανομών που ανήκουν στη κλάση DFR, σύμφωνα με το Θεώρημα (2.2) θα ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR και συνεπώς και στην HNWUE. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση όπου οι παράμετροι n_1, n_2 είναι ίσες με τη μονάδα, διότι στην περίπτωση αυτή κάθε μία από τις δύο Γάμμα θα ταυτίζεται με μία Εκθετική κατανομή, η οποία Εκθετική όπως αποδείχθηκε προηγουμένως έχει την ιδιότητα DFR και συνεπώς η μίξη τους θα ανήκει επίσης στις κλάσεις γήρανσης DFR και HNWUE. Το ερώτημα που γεννάται όμως στο σημείο αυτό είναι το τί συμβαίνει στην περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα όταν οι παράμετροι $n_1, n_2 > 1$ ή όταν η μία κατανομή Γάμμα έχει παράμετρο $n_1 > 1$ και η άλλη $n_2 < 1$. Απάντηση στα ερωτήματα αυτά θα δώσουμε μέσω των αριθμητικών εφαρμογών που ακολουθούν.

Εφαρμογή 2.6. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $\alpha G\left(\frac{1}{2},\lambda_1\right)+(1-\alpha)G\left(\frac{1}{4},\lambda_2\right)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή F του χρόνου ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους $n_1 = 1/2, n_2 = 1/4$, η συνάρτηση πυκνότητας θα είναι ίση με:

$$f\left(x;\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_2^{1/4}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}-\lambda_2^{1/4}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\alpha+2\alpha\sqrt{\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\cdot x}\cdot x^{1/4}\cdot\pi}{x^{3/4}\cdot\pi^{3/2}},$$

ενώ για τη συνάρτηση αξιοπιστίας κάνοντας χρήση της σχέσης (2.31) προκύπτει ότι:

$$S\left(x;\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\alpha\cdot\left(1-I\left(\frac{1}{2},\lambda_1 x\right)\right)+(1-\alpha)\cdot\left(1-I\left(\frac{1}{4},\lambda_2 x\right)\right).$$

Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση αυτή θα είναι της μορφής:

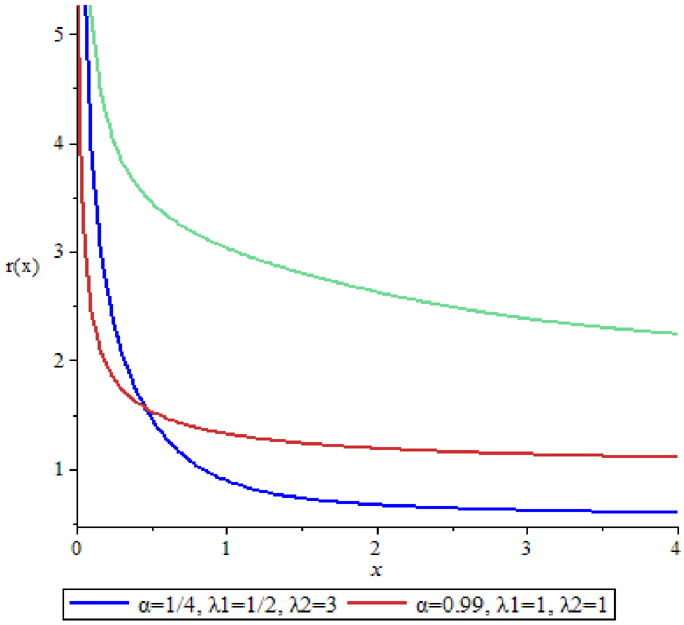
$$r\left(x;\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_2^{1/4}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}-\lambda_2^{1/4}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\alpha+2\alpha\sqrt{\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\cdot x}\cdot x^{1/4}\cdot\pi}{x^{3/4}\cdot\pi^{3/2}\cdot\left(\alpha\cdot\left(1-I\left(\frac{1}{2},\lambda_1 x\right)\right)+(1-\alpha)\cdot\left(1-I\left(\frac{1}{4},\lambda_2 x\right)\right)\right)},\tag{2.32}$$

όπου $\lambda_i > 0$ για i=1,2 , $x \geq 0$ και $a \in [0,1]$.

Στο Σχήμα 2.8. που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (2.32) συναρτήσει του x, για διάφορες τιμές των παραμέτρων λ_1, λ_2, αλλά και του συντελεστή $a \in [0,1]$. Σε όλες των περιπτώσεων, η $r(x; 1/2, 1/2, \lambda_1, \lambda_2)$ είναι γνησίως φθίνουσα και επιβεβαιώνεται αυτό που προαναφέραμε ότι δηλαδή στην περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους $n_1, n_2 < 1$, η κατανομή θα ανήκει στην κλάση γήρανσης DFR.

ΣΧΗΜΑ 2.8.

Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(1/2,λ1)+(1-α)G(1/4,λ2)



Εφαρμογή 2.7. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $\alpha G(2,\lambda_1)+(1-\alpha)G(4,\lambda_2)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή F είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους $n_1=2, n_2=4$ και $\lambda_1,\lambda_2>0$, η συνάρτηση πυκνότητας θα ισούται με:

$$f(x;2,4,\lambda_1,\lambda_2)=a\lambda_1^{2}xe^{-\lambda_1\cdot x}+\frac{1}{6}(1-a)\lambda_2^{4}x^3e^{-\lambda_2\cdot x},$$

ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας θα δίνεται από τη σχέση:

$$S(x;2,4,\lambda_1,\lambda_2)=a\cdot\left(e^{-\lambda_1\cdot x}+e^{-\lambda_1\cdot x}\lambda_1 x\right)+(1-\alpha)\cdot\left(e^{-\lambda_2\cdot x}+e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2 x+\frac{1}{2}e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2^{2}x^2+\frac{1}{6}e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2^{3}x^3\right).$$

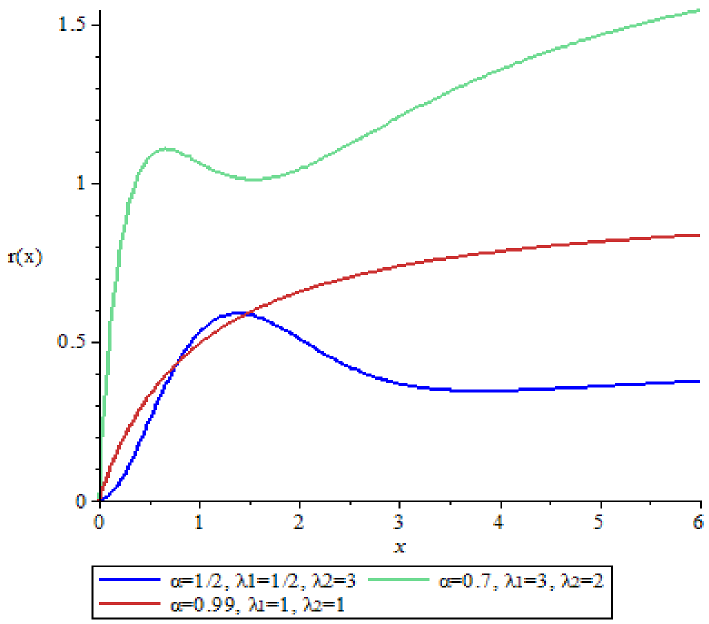
Η βαθμίδα αποτυχίας της για $x\geq 0$ θα είναι ίση με:

$$r(x;2,4,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{a\lambda_1^{2}xe^{-\lambda_1\cdot x}+\frac{1}{6}(1-a)\lambda_2^{4}x^3e^{-\lambda_2\cdot x}}{\left(a\cdot\left(e^{-\lambda_1\cdot x}+e^{-\lambda_1\cdot x}\lambda_1 x\right)+(1-\alpha)\cdot\left(e^{-\lambda_2\cdot x}+e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2 x+\frac{1}{2}e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2^{2}x^2+\frac{1}{6}e^{-\lambda_2\cdot x}\lambda_2^{3}x^3\right)\right)}. \tag{2.33}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (2.33), συναρτήσει του x, για διάφορες τιμές των α, και λ_1, λ_2. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της μίξης δύο κατανομών Γάμμα με παραμέτρους $n_1, n_2 > 1$, η $r(x;2,4,\lambda_1,\lambda_2)$ δεν είναι αυστηρώς μονότονη σε όλο το διάστημα x, αλλά αντιθέτως μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου η κατανομή του χρόνου ζωής μιας μονάδας είναι η $\mathrm{F} = 0.99G(2,1) + 0.01G(4,1)$, τότε η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως αύξουσα και συγκεκριμένα αυξάνεται απότομα από το σημείο x=0 μέχρι το x=2 και εν συνεχεία σταθεροποιείται. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου $\mathrm{F} = \frac{1}{2}G\left(2,\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}G(4,3)$, η βαθμίδα αποτυχίας αρχικά παρουσιάζει αύξουσα πορεία από το σημείο x=0 μέχρι το x=1.3 και στη συνέχεια φθίνουσα πορεία μέχρι το σημείο x=3.5 όπου αρχίζει να σταθεροποιείται (ανάποδη λεκανοειδής μορφή μονοτονίας-ιδιότητα UBFR). Τέλος, η κατανομή $F = 0.7G(2,3) + 0.3G(4,2)$ παρουσιάζει απότομη αύξουσα κλίση από το σημείο x=0 μέχρι το x=0.5, στη συνέχεια ακολουθεί φθίνουσα πορεία μέχρι το σημείο x=1.5 για να ξαναρχίσει εκ νέου την αρχική ανοδική της πορεία (συνδυασμός ανάποδης λεκανοειδούς μορφής μονοτονία-ιδιότητα UBFR με λεκανοειδή μορφή μονοτονίας-ιδιότητα BFR).

ΣΧΗΜΑ 2.9.

Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(2,λ1)+(1-α)G(4,λ2)



Εφαρμογή 2.8. Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F, όταν X~ $\alpha G(2,\lambda_1)+(1-\alpha)G\left(\frac{1}{2},\lambda_2\right)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή F του χρόνου ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους $n_1 = 2, n_2 = 1/2$ και $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, η συνάρτηση πυκνότητας θα είναι ίση με:

$$f\left(x;2,\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\alpha\lambda_1^{\,2}xe^{-\lambda_1\cdot x}+\frac{(1-a)\sqrt{\lambda_2}\,e^{-\lambda_2\cdot x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}},$$

ενώ για τη συνάρτηση αξιοπιστίας χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.31), θα ισχύει:

$$S\left(x;2,\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\alpha\left(1-I(2,\lambda_1 x)\right)+(1-\alpha)\left(1-I\left(\frac{1}{2},\lambda_2 x\right)\right).$$

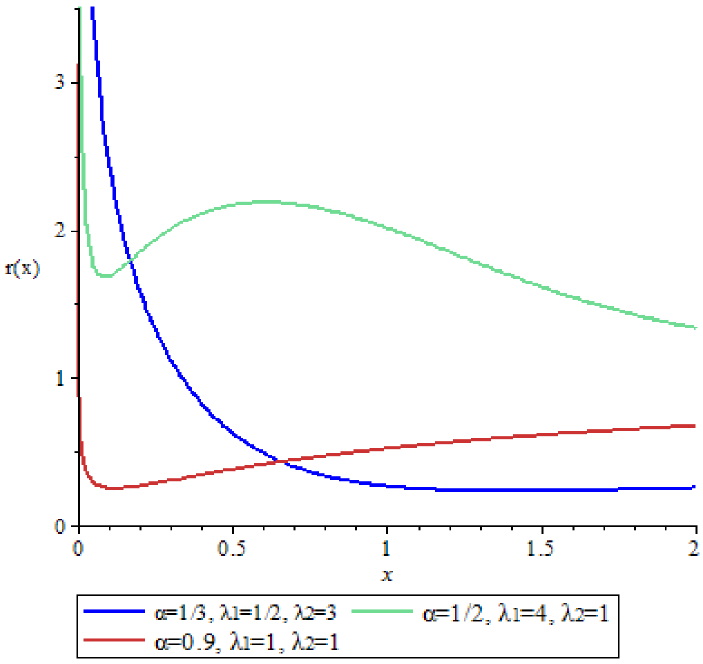
Στην περίπτωση αυτή η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι της μορφής:

$$r\left(x;2,\frac{1}{2},\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{\sqrt{x}\sqrt{\pi}\cdot\alpha\lambda_1^{\,2}xe^{-\lambda_1\cdot x}+(1-a)\sqrt{\lambda_2}\,e^{-\lambda_2\cdot x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}\cdot\left(\alpha\left(1-I(2,\lambda_1 x)\right)+(1-\alpha)\left(1-I\left(\frac{1}{2},\lambda_2 x\right)\right)\right)},\quad x\geq 0. \qquad (2.34)$$

Στο Σχήμα 2.10. που ακολουθεί παρουσιάζεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (2.34) συναρτήσει του x, για διάφορους συνδυασμούς τιμών του συντελεστή α και των παραμέτρων λ_1,λ_2 της κατανομής. Παρατηρούμε ότι και εδώ όπως και στην περίπτωση της μίξης δύο κατανομών Γάμμα με παραμέτρους $n_1,n_2 > 1$ (Βλ. Σχήμα 2.9), η βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να παρουσιάσει διάφορες μορφές μονοτονίας. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πώς στην περίπτωση της κατανομής $F=\frac{1}{3}G\left(2,\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}G\left(\frac{1}{2},3\right)$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως φθίνουσα και συγκεκριμένα μειώνεται από το σημείο x=0 μέχρι το x=1 όπου αρχίζει να σταθεροποιείται. Στην περίπτωση της κατανομής του χρόνου ζωής μίας μονάδας $F=0.9G(2,1)+0.1G\left(1/2,1\right)$, η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει απότομη φθίνουσα κλίση από το σημείο x=0 μέχρι το x=0.1, ενώ από το σημείο x=0.1 είναι γνησίως αύξουσα (ιδιότητα BFR). Τέλος, η κατανομή $F=\frac{1}{2}G(2,4)+\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2},1\right)$ παρουσιάζει απότομη φθίνουσα κλίση από το σημείο x=0 μέχρι το x=0.1, στη συνέχεια είναι γνησίως αύξουσα μέχρι το σημείο x=0.6 και εξελίσσεται ως γνησίως φθίνουσα (συνδυασμός ιδιότητας BFR και UBFR).

ΣΧΗΜΑ 2.10.

Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης δύο Γάμμα κατανομών όταν F=αG(2,λ1)+(1-α)G(1/2,λ2)



Στον πίνακα που ακολουθεί (Βλ. Σχήμα 2.11.), παραθέτουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν για τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας $r(x)$, για κάθε μία από τις κατανομές τις οποίες μελετήσαμε στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου.

ΣΧΗΜΑ 2.11.

Ταξινόμηση των κατανομών χρόνου ζωής ανά κλάση γήρανσης

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ	ΚΛΑΣΗ ΓΗΡΑΝΣΗΣ
Εκθετική κατανομή	IFR & DFR
Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	DFR
Κατανομή Γάμμα	▪ Για $n>1$: IFR ▪ Για $n<1$: DFR ▪ Για $n=1$: IFR & DFR
Μίξη δύο Γάμμα κατανομών	▪ Για $n_1,n_2<1$: DFR ▪ Για $n_1,n_2>1$ ή $n_i>1$ & $n_j<1$, με $i\neq j$: IFR ή DFR ή BFR ή UBFR ή συνδυασμός BFR-UBFR

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Ένα σημαντικό και ιδιαίτερα μεγάλο σε έκταση ερευνητικό κομμάτι της θεωρίας κινδύνων είναι αφιερωμένο στη μελέτη της χρεοκοπίας. Με τον όρο “κίνδυνο” εννοούμε κάθε απρόοπτο και αβέβαιο τυχαίο ενδεχόμενο, το οποίο μπορεί να θέσει σε κίνδυνο την εύρυθμη λειτουργία μιας ασφαλιστικής εταιρίας και να επηρεάσει ακόμη και την επιβίωσή της. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι αναφερόμαστε στη θεωρία χρεοκοπίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου και όχι σε κάποιου είδους χρηματοπιστωτική πτώχευση, ενώ ο όρος “χρεοκοπία” δεν αναφέρεται εδώ με την κυριολεκτική σημασία αλλά μεταφορικά, καθώς αποτελεί περισσότερο έναν τεχνικό όρο ο οποίος χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη φερεγγυότητα και αξιοπιστία ενός χαρτοφυλακίου.

Βασικό αντικείμενο ενδιαφέροντος της θεωρίας χρεοκοπίας αποτελεί η μελέτη των εσόδων και εξόδων μιας εταιρίας διαχρονικά, δηλαδή η παρακολούθηση του ύψους τους και το πώς εξελίσσονται τα μεγέθη αυτά στο πέρασμα του χρόνου. Κάθε ασφαλιστική εταρία κατά την διάρκεια λειτουργίας και ενεργούς δράσης της διαθέτει υπό την εποπτεία της διάφορα χαρτοφυλάκια σε ισχύ, όπως για παράδειγμα ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης κατοικίας ή επιχειρήσεων, ζημιών αυτοκινήτων, αστικής ευθύνης, τεχνικής προστασίας ή ασφάλισης σκαφών. Αυτό το οποίο την απασχολεί κυρίως και εστιάζει το ενδιαφέρον της δεν είναι η κάθε ζημιά που ενδέχεται να προκύψει από τις εξατομικευμένες απαιτήσεις των ασφαλισμένων της, αλλά το συνολικό ποσό αποζημίωσης όπου θα κληθεί να καταβάλλει για αυτές εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος όπου εκείνη θα επιλέξει (πχ ένα έτος).

Αναλόγως με τον χρονικό ορίζοντα όπου θα επιλέξει μία ασφαλιστική εταιρία για την από κοινού μελέτη των εσόδων και εξόδων της, πεπερασμένος ή άπειρος, διακριτός ή συνεχής χρόνος, αλλά και από τον μεταξύ τους συνδυασμό, το πρόβλημα της θεωρίας χρεοκοπίας μπορεί να λάβει διάφορες μορφές. Εκείνη η οποία παρουσίασε κατά καιρούς ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον με πληθώρα αναλυτικών αποτελεσμάτων και σχέσεων και στην οποία θα επικεντρώσουμε και το δικό μας ενδιαφέρον στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, είναι η μελέτη χρεοκοπίας σε άπειρο και συνεχή χρόνο και συγκεκριμένα θα μελετήσουμε το λεγόμενο κλασικό πρότυπο, το οποίο εισήχθη το 1909 από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg, ενώ στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γενίκευσή του από τους Gerber U. Hans & Shiu S. W. Elias. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, πως το μεγαλύτερο μέρος του υλικού του παρόντος κεφαλαίου έχει παρθεί από το βιβλίο "Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου", του Κ. Πολίτη (2012), το οποίο αποτέλεσε πολύτιμο οδηγό για τη συγγραφή του.

3.1. Η διαδικασία του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι όπως αναφέραμε και προηγουμένως η μελέτη της κατανομής των αποζημιώσεων στο διηνεκές, το πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη αυτά μεταξύ τους αλλά και το πώς εξελίσσονται στο πέρασμα του χρόνου. Λόγω της αβεβαιότητας που κυριαρχεί τόσο ως προς το πλήθος των απαιτήσεων όπου ενδέχεται να καταφθάσουν σε μία δεδομένη χρονική περίοδο σε μία ασφαλιστική, όσο και ως προς το μέγεθος των απαιτήσεων αυτών, ιδιαίτερα κατά την έναρξη των διαδικασιών μιας ασφαλιστικής στην αρχή της λειτουργίας της, για το λόγο αυτό κάνουμε χρήση στοχαστικών διαδικασιών. Έστω η απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t): t \geq 0\}$ η οποία εκφράζει το πλήθος των κινδύνων (αποζημιώσεων) όπου καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική στο διάστημα $[0,t]$ και η τυχαία μεταβλητή X_i, $i \geq 1$ η οποία αναπαριστά το μέγεθος της αποζημίωσης από την επέλευση του i-κινδύνου. Τότε το συνολικό μέγεθος των αποζημιώσεων όπου θα κληθεί να καταβάλλει η ασφαλιστική εκφράζεται μέσω της σύνθετης στοχαστικής διαδικασίας $\{S(t): t \geq 0\}$, η οποία ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} \tag{3.1}$$

ή ισοδύναμα:

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \ N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \alpha\nu \ N(t) \geq 1 \end{cases} . \tag{3.2}$$

Επιπλέον, θεωρούμε μία συνάρτηση $P(t)$ η οποία αντιπροσωπεύει το συνολικό ποσό των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο διάστημα $[0,t]$ για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν χρειάζεται να κάνουμε χρήση κάποιου είδους στοχαστικής ανέλιξης καθώς τα ασφάλιστρα μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια από τον ασφαλιστή και δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς το πώς θα κυμανθούν στο χρόνο.

3.1.1. Ορισμός της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος

Μία ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη πλέον και νομοθετικά, πέραν από κεφάλαια επαρκή για την απρόσκοπτη και αποτελεσματική άσκηση των δραστηριοτήτων της, να διαθέτει για κάθε ένα από τα χαρτοφυλάκια τα οποία έχει υπό την εποπτεία της και κάποια πρόσθετα κεφάλαια (αποθεματικά). Η αναγκαιότητα ύπαρξης αυτών των αποθεματικών ενδείκνυται κυρίως στο ενδεχόμενο εμφάνισης πολύ μεγάλων απαιτήσεων, οι οποίες μπορεί να επηρεάσουν την εύρυθμη λειτουργία της επιχείρισης και να θέσουν σε κίνδυνο ακόμα και την επιβίωσή της. Ο κίνδυνος αυτός γίνεται ακόμα μεγαλύτερος όταν μιλάμε για χαρτοφυλάκια τα οποία βρίσκονται στην αρχή της λειτουργίας τους, καθώς στην περίπτωση αυτή τα έσοδα όπου διαθέτει μία ασφαλιστική, κυρίως από την είσπραξη των ασφαλίστρων, είναι περιορισμένα και δυσανάλογα σε σχέση με τον κίνδυνο όπου έχει αναλάβει.

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, η οποία ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ μέσω της σχέσης:

$$U(t) = u + P(t) + I(t) - S(t), \tag{3.3}$$

όπου:

- u, συμβολίζει το αρχικό αποθεματικό ή αρχικό πλεόνασμα $(U(0) = u)$ όπου διαθέτει η εταιρία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο,
- $P(t)$, αντιπροσωπεύει το σύνολο των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχθεί από τους ασφαλισμένους στο διάστημα $[0, t]$,
- $I(t)$, είναι μία ανέλιξη προσόδου η οποία δηλώνει τα έσοδα από επενδύσεις όπου έχει πραγματοποιήσει η ασφαλιστική στο διάστημα $[0, t]$, και
- $S(t)$, είναι μία σύνθετη στοχαστική διαδικασία η οποία εκφράζει το συνολικό ύψος των απαιτήσεων που έχουν καταφθάσει στην εταιρία στο ίδιο διάστημα $[0, t]$.

3.1.2. Υποθέσεις του κλασικού μοντέλου

Στο κλασικό υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων θεωρούμε ότι μοναδική πηγή εσόδων της εταιρίας, αποτελούν τα ασφάλιστρα όπου εισπράττονται από τους ασφαλιζομένους ως αντίτιμο για τον κίνδυνο τον οποίο αναλαμβάνει, ενώ μοναδική πηγή εξόδων είναι οι αποζημιώσεις-απαιτήσεις όπου θα κληθεί να καταβάλει σε περίπτωση επεύλευσης του ασφαλιζομένου κινδύνου στους δικαιούχους του ασφαλίσματος. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι ισχύει για την ανέλιξη προσόδου $I(t)=0$ και η σχέση (3.3) η οποία αντιπροσωπεύει τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο, αναδιαμορφώνεται και αντικαθίσταται από την παρακάτω σχέση:

$$U(t)=u+P(t)-S(t), \quad t\geq 0. \tag{3.4}$$

Στην περίπτωση όπου ικανοποιούνται τα παραπάνω και συγχρόνως ισχύουν οι υποθέσεις:

- η συνάρτηση του συνολικού ποσού των καταβληθέντων ασφαλίστρων δίνεται από τη σχέση $P(t)=ct$, όπου $c>0$ καλείται "ένταση ασφαλίστρου" και είναι μία σταθερά η οποία εκφράζει το ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων στο χρόνο $t\geq 0$, δηλαδή η $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση,
- η απαριθμήτρια ζημιών $\{N(t): t\geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη Poisson με ένταση μ, όπου η παράμετρος μ εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό άφιξης ζημιών στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή $N(t)\sim P(\mu t),\ \mu>0, t\geq 0$, έτσι ώστε η $\{S(t): t\geq 0\}$ η οποία παρουσιάζεται στη σχέση (3.2) να είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson,
- οι τυχαίες μεταβλητές X_i οι οποίες αντιπροσωπεύουν το ύψος των απαιτήσεων των ασφαλισμένων, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες έστω με την τυχαία μεταβλητή X και είναι επίσης ανεξάρτητες από τις αφίξεις των απαιτήσεων $\{N(t): t\geq 0\}$,

τότε μιλάμε για το κλασικό μοντέλο ή κλασικό πρότυπο ή κλασικό υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων.

Τέλος, μία βασική υπόθεση που κάνουμε πάντοτε όταν μελετάμε το κλασικό υπόδειγμα, είναι ότι τα αναμενόμενα έξοδα της επιχείρησης δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τα έσοδά της. Απαιτούμε δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή τα ασφάλιστρα που εισπράττονται να είναι μεγαλύτερα κατά μέσο όρο από τις αποζημιώσεις που καταβάλλονται προς τους ασφαλιζομένους, δηλαδή να ισχύει η συνθήκη:

$$\begin{aligned} & ct > E(S(t)) \\ \Leftrightarrow\ & ct > E(N(t)) \cdot E(X) \\ \Leftrightarrow\ & ct > \mu t E(X) \\ \Leftrightarrow\ & c > \mu p_1 , \end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου $p_1 = E(X)$. Από τη σχέση (3.5) προκύπτει για την ένταση ασφαλίστρου c ότι:

$$c = (1+\theta)\mu p_1 , \tag{3.6}$$

ή ισοδύναμα:

$$\theta = \frac{c}{\mu p_1} - 1 , \tag{3.7}$$

όπου θ καλείται περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας και είναι αυστηρά θετικός, δηλαδή θ>0, διότι στην αντίθετη περίπτωση όπου $\theta \leq 0$ θα είχαμε βέβαιη χρεοκοπία. Σε ένα μοντέλο για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθεματικού u, όσο αυξάνεται η τιμή του συντελεστή ασφαλείας τόσο μικραίνει η πιθανότητα εμφάνισης χρεοκοπίας. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι αποτελεί ένα μέτρο έκφρασης του αναμενόμενου ποσοστού κέρδους μιας ασφαλιστικής για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή πόσο μεγαλύτερα είναι κατά μέσο όρο τα έσοδά της σε σχέση με τα έξοδα και λαμβάνει τιμές συνήθως μεταξύ του 0 και του 1 προκειμένου το χαρτοφυλάκιο να παραμείνει ανταγωνιστικό και προσιτό προς τους ασφαλιζομένους και να έχουν κίνητρο για να το επιλέξουν.

3.1.3. Ορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας

Η ποσότητα που παρουσιάζει το μεγαλύτερο από πλευράς ερευνητικού ενδιαφέροντος στη θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία εκφράζεται συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού. Ως χρεοκοπία νοείται μία δυσμενής κατάσταση κατά την οποία το αποθεματικό της εταιρίας λαμβάνει αρνητική τιμή. Με βάση λοιπόν τα όσα ειπώθηκαν μέχρι στιγμής, για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό έστω $u \geq 0$, προκύπτει ο παρακάτω καθαρά συμβολικός (μη υπολογιστικός) ορισμός:

$$\psi(u) = P[U(t)<0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 \mid U(0) = u] , \tag{3.8}$$

με αντίστοιχη πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u)=1-ψ(u), η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$\delta(u) = P[U(t) \geq 0 \text{ για } \forall t \geq 0]. \tag{3.9}$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u και συγκεκριμένα ισχύει ότι $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$. Αντιθέτως, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u) είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u και ισχύει ότι $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$.

3.2. Βασικές παράμετροι & θεμελιώδεις σχέσεις της θεωρίας κινδύνων

Κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας χρεοκοπίας αποτελεί ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας. Στην υποενότητα αυτή θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην παρουσίαση μιας σειράς από τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες συνδέονται με το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας και βοηθούν στη μελέτη του. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε την τυχαία μεταβλητή του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος της ασφαλιστικής εταιρίας πριν την καταβολή της αποζημίωσης όπου προκαλεί χρεοκοπία, αλλά και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Μία άλλη μεταβλητή που σημειώνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και με την οποία θα ασχοληθούμε επίσης, είναι εκείνη που εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό της εταιρίας u, αλλά και η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μία σημαντική ποσότητα η οποία παίζει κεντρικό ρόλο στη μελέτη για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και η οποία ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής. Θα παρακολουθήσουμε δύο πολύ σημαντικά αποτελέσματα του κλασικού υποδείγματος της θεωρίας κινδύνων, τα οποία αφορούν την πιθανότητα χρεοκοπίας και βασίζονται στο συντελεστή προσαρμογής, η ανισότητα του Lundberg και ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg. Τέλος, θα ολοκληρώσουμε την αναφορά μας με την παρουσίαση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας της κατανομής των $U(T-), |U(T)|$, αλλά και των περιθώριων πυκνοτήτων τους.

3.2.1. Τυχαίες μεταβλητές σχετικές με το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας

Ο όρος "χρεοκοπία" όπως αναφέραμε και προηγουμένως, χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία δυσμενή κατάσταση κατά την οποία το αποθεματικό της εταιρίας γίνεται αρνητικό. Ως χρόνο χρεοκοπίας ορίζουμε τη χρονική στιγμή όπου η τιμή του πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, δηλαδή η ανέλιξη πλεονάσματος όπως αυτή παρουσιάστηκε στη σχέση (3.4) λαμβάνει μη θετική τιμή, συμβολίζεται με Τ και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty, \ \alpha\nu \ U(t) \geq 0 \ \text{για} \ \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Εφόσον υποθέτουμε πάντοτε ότι $c > \mu p_1$ (βλ. σχέση (3.5)), η εταιρία μπορεί να μην χρεοκοπήσει ποτέ και η πιθανότητα χρεοκοπίας λαμβάνει τιμές στο διάστημα (0,1). Από τη σχέση (3.10) προκύπτει για τον χρόνο χρεοκοπίας Τ ότι:

$$P(T < \infty) < 1 \quad \text{ή} \quad P(T = \infty) > 0,$$

πρόκειται δηλαδή για μία ελλειμματική (ή ελαττωματική) τυχαία μεταβλητή καθώς μπορεί να λάβει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα και συγκεκριμένα η πιθανότητα αυτή είναι ίση με:

$$P(T = \infty) = P\big(U(t) \geq 0 \ \text{για} \ \forall t \geq 0\big) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές αυτό που και διαισθητικά θα περίμενε κανείς, ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Τ εξαρτάται από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u της εταιρίας.

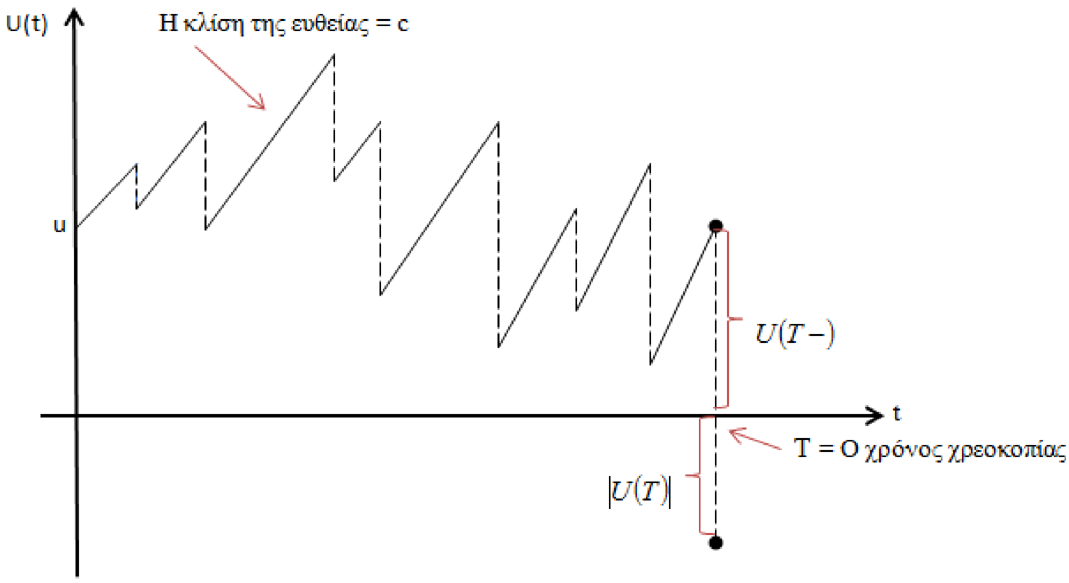
Μία δεύτερη τυχαία μεταβλητή τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζουν ιδαίτερο ενδιαφέρον για τον ασφαλιστή σε περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και η οποία δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή εμφάνισης της χρεοκοπίας Τ. Επειδή η τυχαία αυτή μεταβλητή λαμβάνει πάντοτε αρνητικές τιμές, για το λόγο αυτό την εξετάζουμε κατ' απόλυτη τιμή και τη συμβολίζουμε με $|U(T)|$. Επίσης, εξετάζουμε την τυχαία μεταβλητή $U(T-)$ η οποία ονομάζεται πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρονική στιγμή Τ όπου πραγματοποιείται η καταβολή της ασφαλιστικής αποζημίωσης όπου οδηγεί σε χρεοκοπία. Η τυχαία μεταβλητή $U(T-)$ λαμβάνει μόνο θετικές τιμές και ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$U(T-) = \lim_{t \to T-} U(t).$$

Στο Σχήμα 3.1. που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της ανέλιξης του πλεονάσματος $U(T)$, παρουσία των τυχαίων μεταβλητών που μόλις παρουσιάσαμε.

ΣΧΗΜΑ 3.1.

Η ανέλιξη του πλεονάσματος



Τέλος, ιδιαίτερα σημαντική είναι και η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Συμβολίζεται με L_1 και εφόσον εξετάζουμε και πάλι την πτώση του πλεονάσματος κατ' απόλυτη τιμή λαμβάνει θετικές τιμές, ενώ στην περίπτωση όπου δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, ισχύει ότι $L_1 = 0$. Έστω ότι t_1 είναι η χρονική στιγμή όπου η τιμή του πλεονάσματος πέφτει για πρώτη φορά κάτω από τη τιμή του αρχικού αποθεματικού u και συγκεκριμένα λαμβάνει την τιμή $u_1 = U(t_1)$. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή θα ισούται με $L_1 = u - u_1$. Αντίστοιχα ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή L_2 η οποία δηλώνει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1, τη μεταβλητή L_3 που δηλώνει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_2 κ.ο.κ..

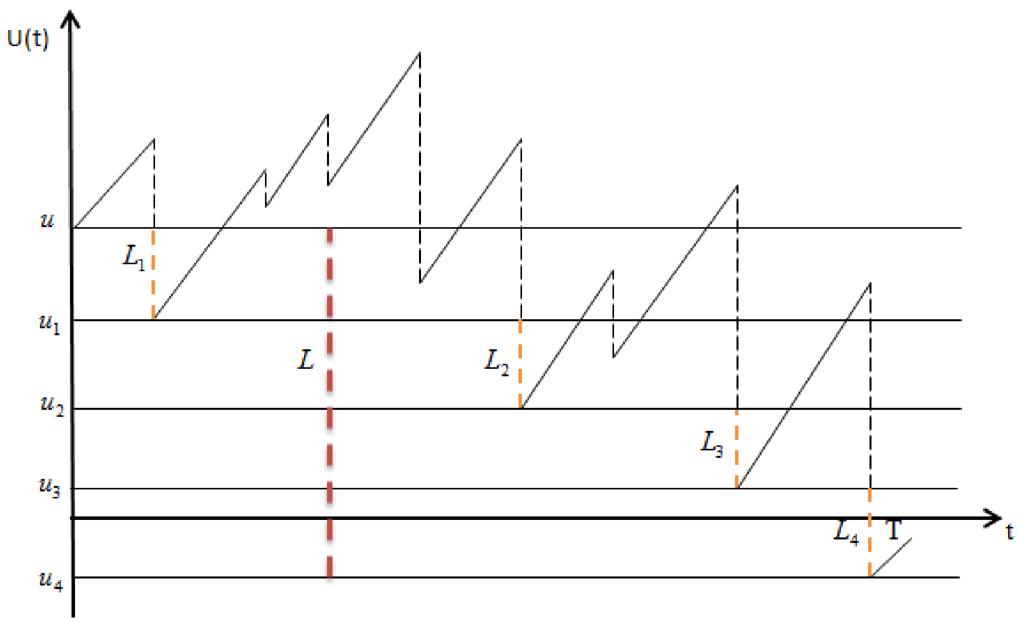
Με βάση λοιπόν τα παραπάνω, προκύπτει μία ακολουθία μεταβλητών $L_1, L_2, L_3, \ldots$, η οποία θεωρείται πεπερασμένη στην περίπτωση που λαμβάνει μηδενικές τιμές από ένα σημείο και μετά, δηλαδή όταν ισχύει $L_z = 0$ για $z = i, i+1, \ldots$. Οι μεταβλητές της ακολουθίας αυτής $L_1, L_2, L_3,...$ ονομάζονται επίσης κλιμακωτά ύψη και εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την αρχική τιμή πλεονάσματος u μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T ή, εάν δεν συμβεί χρεοκοπία, μέχρι την ελάχιστη τιμή που παίρνει η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$.

Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή K η οποία εκφράζει το πλήθος των κλιμακωτών υψών, δηλαδή των μεταβλητών L_i σε μία ανέλιξη πλεονάσματος και η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές $L_1, L_2, L_3,...$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες της τυχαίας μεταβλητής K, προκύπτει μία σύνθετη τυχαία μεταβλητή η L, η μελέτη της οποίας παίζει κεντρικό ρόλο στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο και η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$L = \begin{cases} 0, & \text{αν } K = 0 \\ L_1 + L_2 + ... + L_K, & \text{αν } K \geq 1 \end{cases}. \tag{3.11}$$

ΣΧΗΜΑ 3.2.

Γραφική παράσταση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη πλεονάσματος



Η τυχαία μεταβλητή L ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος στο υπόδειγμα από την αρχική τιμή του αποθεματικού u έως την ελάχιστη τιμή της στοχαστικής διαδιακασίας πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$. Η κατανομή της L είναι όπως φαίνεται και από την σχέση (3.11) μικτή και συγκεκριμένα ακολουθεί την σύνθετη γεωμετρική κατανομή εφόσον η τυχαία μεταβλητή του πλήθους των κλιμακωτών υψών K ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, δηλαδή ισχύει ότι $K \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, ότι η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας και συγκεκριμένα ισχύει:

$$P(L > u) = \psi(u) \quad \text{και} \quad P(L \leq u) = \delta(u),$$

δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν είναι τίποτα άλλο από τη δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που παρουσιάζεται στη σχέση (3.11) .

3.2.2. Εξίσωση Lundberg και συντελεστής προσαρμογής

Μία πολύ σημαντική παράμετρος η οποία συνδέεται με την πιθανότητα εμφάνισης χρεοκοπίας είναι ο συντελεστής προσαρμογής R, ο οποίος προκύπτει ως λύση της εξίσωσης:

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r), \tag{3.12}$$

όπου $M_X(r) = E(e^{rX})$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής του ύψους των απαιτήσεων X και θ>0 το περιθώριο ασφαλείας. Η εξίσωση της σχέσης (3.12) ονομάζεται εξίσωση του Lundberg ή εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής και από την λύση της προκύπτει το πολύ μία θετική ρίζα, η οποία είναι η τιμή του συντελεστή προσαρμογής R. Ο συντελεστής R δηλαδή προκύπτει από το σημείο τομής των καμπυλών $\varepsilon_1 : y = 1 + (1+\theta)p_1 r$ και $\varepsilon_2 : y = M_X(r)$. Να σημειώσουμε ότι η εύρεση του συντελεστή συσχέτισης δεν είναι πάντα εφικτή, καθώς στις περιπτώσεις κατανομών με βαριά δεξιά ουρά, όπως είναι για παράδειγμα η κατανομή Weibull, η Pareto ή η λογαριθμοκανονική κατανομή όπου η ροπογεννήτρια συνάρτηση των αποζημιώσεων $M_X(r)$ απειρίζεται για κάθε $r > 0$, ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει.

Δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θωρίας κινδύνων, τα οποία αποτέλεσαν την αφετηρία για μία ενδελεχή έρευνα του υποδείγματος οδηγώντας σε μία σειρά από γενικεύσεις και επεκτάσεις του, με δυνατότητα εφαρμογής και εξαγωγής πολύτιμων συμπερασμάτων και σε άλλα γενικότερα μοντέλα της θεωρίας χρεοκοπίας πέραν του κλασικού, συνδέονται άμεσα με τον συντελεστή προσαρμογής R. Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα, αναφέρεται ως ανισότητα του Lundberg και μας παρέχει υπό την μορφή ενός άνω φράγματος, μερική γνώση για την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για τον ακριβή υπολογισμό της. Σύμφωνα με την ανισότητα Lundberg, η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) στο κλασικό υπόδειγμα ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \text{για κάθε } u \geq 0. \tag{3.13}$$

Το δεύτερο εξίσου σημαντικό αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, είναι γνωστό ως ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg και παρέχει μία προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας για πολύ μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού u. Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ικανοποιεί τη σχέση:

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad \text{καθώς } u \to \infty, \tag{3.14}$$

δηλαδή ισχύει ότι:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C,$$

όπου $C > 0$ είναι μία σταθερά, η οποία υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$C = \frac{\theta p_1}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx}, \tag{3.15}$$

με $\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx < \infty$.

3.2.3. Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής των μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$

Έστω $f(x, y \mid 0)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, όταν η τιμή του αρχικού αποθεματικού u=0. Η $f(x, y \mid 0)$ ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$f(x, y \mid 0) = \frac{\mu}{c} f(x+y), \quad \text{όπου } x, y \geq 0. \tag{3.16}$$

Από τη σχέση (3.16) παρατηρούμε ότι η από κοινού πυκνότητα των $U(T-), |U(T)|$ είναι συμμετρική ως προς x και y. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.16) ως προς y, παίρνουμε την περιθώρια πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, έστω $f_1(x \mid 0)$, ενώ ολοκληρώνοντας ομοίως ως προς x, παίρνουμε την περιθώρια πυκνότητα του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπία, έστω $f_2(y \mid 0)$, για τις οποίες ισχύουν αντίστοιχα:

$$f_1(x \mid 0) = \int_0^\infty \frac{\mu}{c} f(x+y)dy = \frac{\mu}{c}[1-F(x)], \tag{3.17}$$

και

$$f_2(y \mid 0) = \int_0^\infty \frac{\mu}{c} f(x+y)dx = \frac{\mu}{c}[1-F(y)]. \tag{3.18}$$

Από τις σχέσεις (3.17) και (3.18) είναι εμφανές ότι στην περίπτωση του κλασικού υποδείγματος και για μηδενικό αρχικό αποθεματικό (u=0), η πυκνότητα $f_1(x \mid 0)$ του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T-)$ και η πυκνότητα $f_2(y \mid 0)$ του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, $|U(T)|$, είναι ισόνομες και δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$f_1(x \mid 0) = f_2(x \mid 0) = \frac{\mu}{c}[1-F(x)], \tag{3.19}$$

βλ. Gerber & Shiu (1997).

Εάν ολοκληρώσουμε κάθε μία από τις πυκνότητες $f_1(x \mid 0)$ και $f_2(y \mid 0)$ των παραπάνω σχέσεων στο διάστημα $(0,\infty)$, το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι μονάδα αλλά η ποσότητα $\frac{\mu p_1}{c} < 1$, διότι υποθέτουμε πάντα ότι $c > \mu p_1$.

Προκειμένου να πάρουμε πυκνότητες πιθανότητας με τη συνήθη έννοια οι οποίες ολοκληρώνουν στην μονάδα, δεσμεύουμε ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, με τιμή αρχικού αποθεματικού u=0, δίνεται από τη σχέση:

$$P(U(T-) \le z \mid T < \infty, U(0)=0) = \frac{\int_0^z f_1(x \mid 0)dx}{P(T < \infty \mid U(0)=0)} = \frac{\int_0^z \frac{\mu}{c}[1-F(x)]dx}{\frac{\mu p_1}{c}},$$

ή ισοδύναμα:

$$P(U(T-)\leq z \mid T<\infty, U(0)=0)=\frac{1}{p_1}\int_0^z [1-F(x)]dx. \qquad (3.20)$$

Αντίστοιχα, προκύπτει για τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ ότι:

$$P(|U(T)|\leq w \mid T<\infty, U(0)=0)=\frac{1}{p_1}\int_0^w [1-F(y)]dy. \qquad (3.21)$$

3.3. Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο σημείο του παρόντος κεφαλαίου, χρεοκοπία πραγματοποιείται όταν το αποθεματικό της εταιρίας γίνεται αρνητικό. Έστω T η χρονική στιγμή όπου συμβαίνει χρεοκοπία για πρώτη φορά. Τότε ο τύπος της σχέσης (3.8) στον οποίο παρουσιάζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορεί να ξαναδιατυπωθεί ως ακολούθως:

$$\psi(u)=P[T<\infty \mid U(0)=u], \quad u\geq 0, \qquad (3.22)$$

ενώ η σχέση (3.9) της πιθανότητας να μην συμβεί χρεοκοπία ως:

$$\delta(u)=P[T=\infty \mid U(0)=u], \quad u\geq 0, \qquad (3.23)$$

όπου το ενδεχόμενο $\{T<\infty\}$ σημαίνει ότι συμβαίνει χρεοκοπία κάποια στιγμή στο μέλλον, ενώ το $\{T=0\}$ υποδηλώνει ότι δεν πραγματοποιείται χρεοκοπία.

3.3.1. Ολοκληρο-διαφορικές και ανανεωτικές εξισώσεις για τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας

Κάνοντας χρήση του νόμου της ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προσδιοριστεί από τη λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης, η οποία παρουσιάζεται στη σχέση που ακολουθεί:

$$\psi(u)=\int_0^\infty f_w(t)\left\{\int_0^{u+ct}\psi(u+ct-x)f_X(x)dx\right\}dt+\int_0^\infty f_w(t)P(X>u+ct)dt, \qquad (3.24)$$

όπου $f_w(\bullet)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων W και $f_X(\bullet)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους των απαιτήσεων X. Να σημειώσουμε ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος όπως αυτό παρουσιάζεται στη σχέση (3.24) αναφέρεται στο ενδεχόμενο εμφάνισης ζημιάς, η οποία όμως δεν οδηγεί σε χρεοκοπία καθώς το ύψος της απαίτησης είναι $X \le u + ct$, ενώ ο δεύτερος όρος υποδηλώνει ότι συμβαίνει χρεοκοπία και ισχύει $X > u + ct$. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u) είναι η:

$$\delta(u) = \int_0^\infty f_w(t) \left\{ \int_0^{u+ct} \delta(u + ct - x) f_X(x) dx \right\} dt, \tag{3.25}$$

βλ. Χατζηκωνσταντινίδης (2012).

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές T_i, $i \ge 0$ που εκφράζουν το χρόνο εμφάνισης του i-κινδύνου. Ισχύει ότι $T_i = \min\{t : N(t) = i\}$, δηλαδή είναι η πρώτη χρονική στιγμή όπου ο αριθμός των αποζημιώσεων λαμβάνει την τιμή i. Στο κλασικό υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων, όταν η απαριθμήτρια ζημιών ακολουθεί την κατανομή Poison, δηλαδή $N(t) \sim P(\mu t)$, τότε οι ενδιάμεσοι χρόνοι των ενδεχομένων $W_i = T_i - T_{i-1}$, $i \ge 1$ με $T_0 = 0$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, έστω με μία τυχαία μεταβλητή W, και ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Ισχύει δηλαδή $W \sim E(\mu)$ και $T_i \sim Gamma(n, \mu)$.

Δεσμεύοντας την σχέση (3.24) ως προς το μέγεθος και το χρόνο εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου, η σχέση της πιθανότητας χρεοκοπίας λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-x) f_e(x) dx + \frac{1}{1+\theta} \overline{F_e}(u), \qquad u \ge 0, \tag{3.26}$$

όπου $\overline{F}_e(\bullet)$ και $f_e(\bullet)$, η συνάρτηση επιβίωσης και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αντίστοιχα, της κατανομής ισορροπίας (equilibrium distribution) της τυχαίας μεταβλητής X_e που αντιστοιχεί στην κατανομή F της τυχαίας μεταβλητής X του ύψους των απαιτήσεων και οι οποίες υπολογίζονται μέσω των σχέσεων:

$$f_e(s) = \frac{\overline{F}(s)}{E(X)} = \frac{1}{p_1} \overline{F}(s), \tag{3.27}$$

$$\overline{F}_e(s) = \frac{1}{p_1} \int_x^\infty \overline{F}(z) dz$$

και

$$\hat{\overline{F}}_e(s)=\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}_e(u)du=\frac{1-\hat{f}_e(s)}{s}, \tag{3.28}$$

βλ. Χατζηκωνσταντινίδης (2012).

Κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Laplace στη σχέση (3.26), προκύπτει η παρακάτω σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\hat{\psi}(s)=\frac{1}{1+\theta}\hat{\psi}(s)\hat{f}_e(s)+\frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{F}}_e(s) \;\Leftrightarrow\; \hat{\psi}(s)=\frac{\frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{F}}_e(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)},$$

ή

$$\hat{\psi}(s)=\frac{\frac{1}{1+\theta}\left(1-\hat{f}_e(s)\right)}{s\cdot\left(1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)\right)}, \tag{3.29}$$

βλ. Χατζηκωνσταντινίδης (2012).

Τέλος, να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση του κλασικού υποδείγματος της θεωρίας κινδύνων, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u) ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική συνάρτηση:

$$\delta'(u)=\frac{\mu}{c}\delta(u)-\frac{\mu}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx, \tag{3.30}$$

ενώ, η αντίστοιχη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ανάγεται στη σχέση:

$$\psi'(u)=\frac{\mu}{c}\psi(u)-\frac{\mu}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx-\frac{\mu}{c}\overline{F}(u), \qquad u\geq 0. \tag{3.31}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα και θέτοντας ότι το αρχικό αποθεματικό u=0, προκύπτουν ότι:

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta} \tag{3.32}$$

και

$$\delta(0)=1-\psi(0)=\frac{\theta}{1+\theta}, \qquad \theta>0, \tag{3.33}$$

όπου ψ(0) και δ(0), η πιθανότητα χρεοκοπίας και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας αντίστοιχα με μηδέν αρχικό αποθεματικό.

3.3.2. Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας ζημιοκατανομών με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων & γραφικές παραστάσεις

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, κάνοντας χρήση των σχέσεων και των αντίστοιχων εξισώσεων που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για την περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αλλά και της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών, μέσα από σχετικά αριθμητικά παραδείγματα και παρουσιάζοντας για την κάθε μία το αντίστοιχο γράφημα, όπως αυτό προκύπτει από το αλγεβρικό πρόγραμμα Maple.

3.3.2.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής

Έστω ότι η κατανομή F των απαιτήσεων όπου καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική, είναι η Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ και συνάρτηση επιβίωσης $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, ενώ για τη μέση τιμή ισχύει ότι $E(X) = 1/\lambda$.

Κάνοντας αντικατάσταση των προαναφερθέντων μεγεθών στη σχέση (3.27), προκύπτει για τη συνάρτηση της πυκνότητας ισορροπίας:

$$f_e(s) = \lambda e^{-\lambda x}, \tag{3.34}$$

ενώ, υπολογίζοντας στη συνέχεια τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace της f_e, προκύπτει:

$$\hat{f}_e(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}. \tag{3.35}$$

Μέσω αντικατάστασης της σχέσης (3.35) στη (3.29), οδηγούμαστε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{(1+\theta)\cdot\left(\frac{\theta\lambda}{1+\theta} + s\right)}. \tag{3.36}$$

Από τη σχέση (3.36) παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace, καταλήγουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν τα μεγέθη αποζημιώσεων μιας ασφαλιστικής εταιρίας ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, είναι της μορφής:

$$\psi(u) = \frac{e^{-\frac{\theta\lambda u}{1+\theta}}}{1+\theta}, \quad \text{όπου } u \geq 0 \text{ και } \lambda, \theta > 0. \tag{3.37}$$

Παίρνοντας διάφορους συνδυασμούς τιμών της παραμέτρου λ της κατανομής μας, αλλά και του περιθωρίου ασφαλείας θ, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για τη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας:

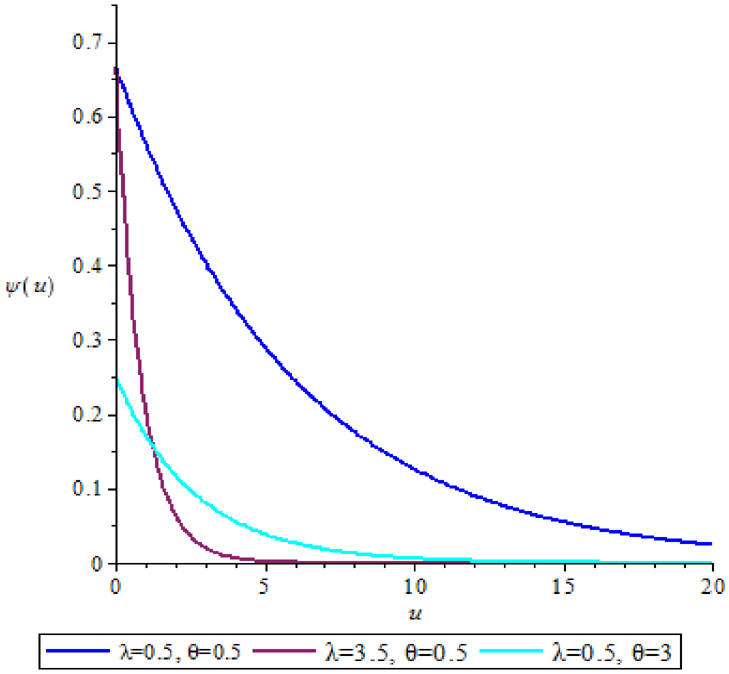
- Για $\lambda = 0.5$ και $\theta = 0.5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.6667\ e^{-0.1667u}$.
- Για $\lambda = 3.5$ και $\theta = 0.5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.6667\ e^{-1.167u}$.
- Για $\lambda = 0.5$ και $\theta = 3$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.2500\ e^{-0.3750u}$.

Στο Σχήμα 3.3. που ακολουθεί παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των αναλυτικών αποτελεσμάτων που μόλις παρουσιάσαμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας στη περίπτωση της Εκθετικής κατανομής, συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u. Όπως ήταν αναμενόμενο σε όλες των περιπτώσεων, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ παρουσιάζει φθίνουσα κλίση. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της παραμέτρου λ της κατανομής τόσο πιο απότομη είναι η κλίση της $\psi(u)$ για $u \geq 0$, σε αντίθεση με μικρές τιμές της παραμέτρου όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας φθίνει πιο αργά.

Επιπλέον, από το γράφημα προκύπτει ότι για $\theta_1 < \theta_2$ ισχύει ότι $\psi_1(0) > \psi_2(0)$, το οποίο είναι απόλυτα λογικό να συμβαίνει, αφού για τιμή αρχικού αποθεματικού ίση με το μηδέν η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με το πηλίκο $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$. Προκύπτει δηλαδή ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας και το περιθώριο ασφαλείας είναι δύο μεγέθη αντιστρόφως συσχετιζόμενα, με αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας η πιθανότητα χρεοκοπίας να λαμβάνει μικρές τιμές και αντίθετα.

ΣΧΗΜΑ 3.3.

Πιθανότητα χρεοκοπίας της Εκθετικής κατανομής



3.3.2.2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών με παραμέτρους κλίμακας μεγαλύτερη και μικρότερη της μονάδας

Έστω ότι οι αποζημιώσεις όπου καλείται μία ασφαλιστική να καταβάλει προς τους ασφαλισμένους της, ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών με παραμέτρους $\lambda_1 = 1/2$ και $\lambda_2 = 2$, ενώ $b \in [0,1]$. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση πυκνότητας θα ισούται με:

$$f(x) = b\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + (1-b)2e^{-2x},$$

ενώ για τη συνάρτηση επιβίωσης θα ισχύει ότι:

$$S(x) = be^{-\frac{1}{2}x} + (1-b)e^{-2x}, \quad \text{όπου } x \geq 0.$$

Η κατανομή μας θα έχει μέση τιμή:

$$E(X) = \frac{3}{2}b + \frac{1}{2} .$$

και αντικαθιστώντας τα ζητούμενα μεγέθη στη σχέση (3.27), προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας ισορροπίας θα είναι ίση με:

$$f_e(s) = \frac{be^{-\frac{1}{2}x} + (1-b)e^{-2x}}{\frac{3}{2}b + \frac{1}{2}}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας ισορροπίας, από όπου προκύπτει:

$$\hat{f}_e(s) = \frac{2(3b + 2s + 1)}{(3b+1)(2s+1)(s+2)},$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο υπολογισμού του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας, όπως αυτός παρουσιάζεται στη σχέση (3.29), καταλήγουμε ότι η $\hat{\psi}(s)$ είναι της παρακάτω μορφής:

$$\hat{\psi}(s) = \frac{(6b+2)s + 15b + 1}{(6b + 2 + 2\theta + 6b\theta)(s - s_1)(s - s_2)},$$

όπου s_1, s_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

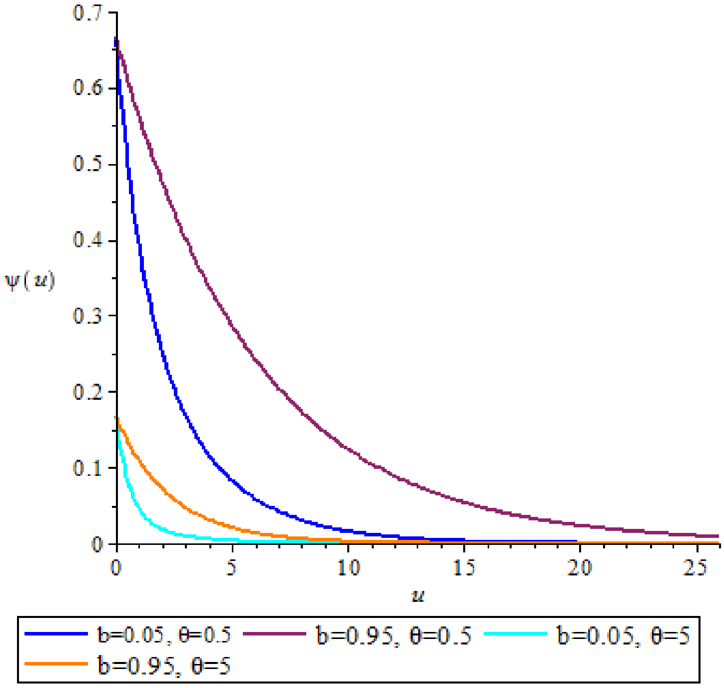
$$(6b + 2 + 2\theta + 6b\theta)s^2 + (5\theta + 1 + 15b + 15b\theta)s + (6b+2)\theta = 0.$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\hat{\psi}(s)$ και αντικαθιστώντας για κατάλληλες τιμές του συντελεστή b και του περιθωρίου ασφαλείας θ, προκύπτουν τα ακόλουθα αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών, η γραφική απεικόνιση των οποίων παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4. που ακολουθεί:

- Για $b = 0.05$ και $\theta = 0.5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.2447\ e^{-1.011u} + 0.4220\ e^{-0.3298u}$.
- Για $b = 0.95$ και $\theta = 0.5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.001945\ e^{-1.986u} + 0.6647\ e^{-0.1679u}$.
- Για $b = 0.05$ και $\theta = 5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.1294\ e^{-1.728u} + 0.03728\ e^{-0.4823u}$.
- Για $b = 0.95$ και $\theta = 5$, έχουμε ότι $\psi(u) = 0.001624\ e^{-1.996u} + 0.1650\ e^{-0.4175u}$.

ΣΧΗΜΑ 3.4.

Πιθανότητα χρεοκοπίας μίξης δύο Εκθετικών κατανομών, όταν F=bExp(1/2)+(1-b)Exp(2)



Όπως προκύπτει λοιπόν από το παραπάνω γράφημα, η κλίση της πιθανότητας χρεοκοπίας επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από την παράμετρο λ_i της Εκθετικής εκείνης που παρουσιάζει το μεγαλύτερο συντελεστή βάρους b_i, όπου $i=1,2$. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της κατανομής που εξετάζουμε για την οποία ισχύει ότι $F=$bExp(1/2)+(1-b)Exp(2), όταν ο συντελεστής b λαμβάνει τη τιμή 0.05 παρατηρούμε πώς η πιθανότητα χρεοκοπίας παρουσιάζει πιο απότομη κλίση σε σχέση με την περίπτωση όπου $b=0.95$, δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας παραμένει σταθερό και στις δύο περιπτώσεις ($\theta=0.5$). Αυτό συμβαίνει διότι για $b=0.05$, η Exp(1/2) παρουσιάζει μικρότερο συντελεστή βάρους, $b_1=0.05$, σε σχέση με την Exp(2) για την οποία ισχύει ότι $b_2=0.95$. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ψ(u) να εμφανίζει απότομη κλίση και να φθίνει πιο γρήγορα συγκριτικά με την περίπτωση που $b=0.95$, όπου η Exp(1/2) παρουσιάζει εδώ το μεγαλύτερο συντελεστή βάρους μεταξύ των δύο και η πιθανότητα χρεοκοπίας επηρεάζεται κυρίως από την τιμή της παραμέτρου $\lambda_1=1/2<1$, με αποτέλεσμα να φθίνει πιο αργά σε σχέση με πριν.

Επιπλέον, όπως σημειώσαμε και προηγουμένως για την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής, έτσι και στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών προκύπτει ότι για σταθερή τιμή των λ_1, λ_2 και b, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου επηρεάζεται αντιστρόφως ανάλογα του περιθωρίου ασφαλείας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε στο Σχήμα 3.4. ότι για $\theta_1 = 5$ η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$, $u \geq 0$ παρουσιάζει μικρότερες τιμές συγκριτικά με την $\psi_2(u)$ που ισχύει για τιμή περιθωρίου ασφαλείας $\theta_2 = 0.5$. Μάλιστα βλέπουμε πως, δοθέντος αρχικού αποθεματικού $u = 0$, η $\psi_2(u)$ τέμνει τον κάθετο άξονα σε υψηλότερα σημεία απ' ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$.

3.4. Η γενίκευση της έννοιας της χρεοκοπίας από τους Gerber & Shiu

Στα τέλη του περασμένου αιώνα και συγκεκριμένα το 1998, οι Hans Gerber & Elias Shiu κατάφεραν ύστερα από ενδελεχή έρευνα να δώσουν μια νέα διάσταση στη μελέτη του κλασικού υποδείγματος της θεωρίας κινδύνων. Εισήγαγαν στον τύπο υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας, μία μη αρνητική διδιάστατη συνάρτηση $w(x, y)$, $x, y > 0$, η οποία καλείται συνάρτηση ποινής (penalty function) και η οποία για κατάλληλα ορίσματα των μεταβλητών, οδηγεί σε πληθώρα αποτελεσμάτων και εξαγόμενων συναρτήσεων.

Όπως ορίσαμε και σε προηγούμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου, έστω Τ η χρονική στιγμή εμφάνισης χρεοκοπίας, $U(T-)$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν την καταβολή της ασφαλιστικής αποζημίωσης όπου οδηγεί σε χρεοκοπία και $|U(T)|$ το έλλειμμα αμέσως μετά την εμφάνιση του ζημιογόνου ενδεχομένου. Τότε η συνάρτηση:

$$\phi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u\right], \tag{3.38}$$

καλείται αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) ή προεξοφλημένη συνάρτηση των Gerber-Shiu, όπου $w(x, y)$ η συνάρτηση ποινής, $\delta \geq 0$ μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως ένας προεξοφλητικός παράγοντας (ένταση επιτοκίου), είτε ως μία μεταβλητή στο πλαίσιο των μετασχηματισμών Laplace, ενώ $I(T < \infty)$ η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης χρεοκοπίας για την οποία ισχύει:

$$I(T<\infty)=\begin{cases}1, & \text{συμβαίνει χρεοκοπία}\\ 0, & \text{δεν συμβαίνει χρεοκοπία}\end{cases}.$$

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu αποτελεί ένα σπουδαίο εργαλείο με ευρεία και σημαντική χρήση εκτός από την επιστήμη των αναλογιστικών μαθηματικών και στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον παράδειγμα εφαρμογής, ανάγεται στην περίπτωση αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης (American put option), όπου η συνάρτηση ποινής αντικαθίσταται από την πληρωμή κατά την άσκηση και συγκεκριμένα ισχύει ότι $w(x,y)=(0,K-x)$, όπου Κ είναι η τιμή άσκησης και x η αγοραία αξία του δικαιώματος και η συνάρτηση $\phi_\delta(u)$ χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση του Αμερικανικού put option. Τέλος, η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς μέσω της από κοινού μελέτης των μεγεθών T, $U(T-)$ και $|U(T)|$ μπορούμε να αντλήσουμε περισσότερες ποιοτικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του πλεονάσματος απ' ότι η μελέτη της κάθε μεταβλητής μεμονωμένα.

Στο σημείο αυτό, θα παραθέσουμε κάποιες ενδεικτικές ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης ποινής από τις οποίες προκύπτουν οι σημαντικότερες ποσότητες για τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας και των μεταβλητών $U(T-)$ και $|U(T)|$. Έχουμε λοιπόν:

i. Για $\delta>0$ και $w(x,y)=1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας στο σημείο δ ή προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας, για την οποία ισχύει:

$$\phi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right],$$

ενώ στην περίπτωση όπου ισχύει ότι δ=0, προκύπτει η γνωστή σε όλους μας πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\phi_0(u)=E\left[I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]=\Pr(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u).$$

ii. Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I(U(T-)\le x)\cdot I(|U(T)|\le y)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-),|U(T)|$, ισχύει δηλαδή:

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u)&=E\left[e^{-\delta T}I(U(T-)\le x)\cdot I(|U(T)|\le y)\cdot I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]\\&=e^{-\delta T}\Pr\left[U(T-)\le x,|U(T)|\le y,T<\infty\,|\,U(0)=u\right],\end{aligned}$$

ενώ στην περίπτωση όπου δ=0, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-),|U(T)|$:

$$\phi_0(u) = \Pr\left[U(T-) \le x, |U(T)| \le y, T < \infty \,|\, U(0) = u\right].$$

iii. Για $\delta > 0$ και $w(x,y) = I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y)$, παράγεται η προεξοφλημένη από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών $U(T-),|U(T)|$, επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) \,|\, U(0) = u\right] \\ &= e^{-\delta T} \Pr\left[U(T-) = x, |U(T)| = y, T < \infty \,|\, U(0) = u\right],\end{aligned}$$

ενώ εάν ισχύει για την ένταση επιτοκίου ότι δ=0, προκύπτει η από κοινού πυκνότητα των $U(T-),|U(T)|$:

$$\phi_0(u) = \Pr\left[U(T-) = x, |U(T)| = y, T < \infty \,|\, U(0) = u\right].$$

iv. Για $\delta > 0$ και $w(x,y) = I(U(T-) = x)$, παράγεται η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη στιγμή χρεοκοπίας, για την οποία προκύπτει:

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty) \,|\, U(0) = u\right] \\ &= e^{-\delta T} \Pr\left[U(T-) = x, T < \infty \,|\, U(0) = u\right].\end{aligned}$$

v. Για $\delta > 0$ και $w(x,y) = I(|U(T)| = y)$, παράγεται η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα του ελλείμματος τη στιγμή χρεοκοπίας, ισχύει δηλαδή:

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) \,|\, U(0) = u\right] \\ &= e^{-\delta T} \Pr\left[|U(T)| = y, T < \infty \,|\, U(0) = u\right].\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΩΝ Τ.Μ. U(T-),|U(T)| ΕΝ ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΥ (u=0)

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η μελέτη της συνδιακύμανσης (covariance) του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείμματος $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό (u=0), δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία. Πρόκειται για μία ιδιαιτέρως σημαντική ποσότητα, τα αποτελέσματα της οποίας διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του προσήμου του συντελεστή συσχέτισης των δύο προαναφερθεισών μεταβλητών, τον ακριβή υπολογισμό του οποίου θα παρακολουθήσουμε στο Κεφάλαιο 5. Στο τρέχον λοιπόν κεφάλαιο, θα αναφερθούμε εκτενώς στην παρουσίαση της συνδιακύμανσης των $U(T-),|U(T)|$, παραθέτοντας αρχικά κάποιους σημαντικούς ορισμούς και ποσότητες, αλλά και κάνοντας αναφορά στα σημαντικότερα ερευνητικά αποτελέσματα όπου έχουν προκύψει κατά καιρούς από σχετικές μελέτες. Τέλος, θα επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε σε πρακτικό επίπεδο όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις της Εκθετικής κατανομής, της μίξης δύο Εκθετικών, της κατανομής Γάμμα αλλά και της μίξης δύο Γάμμα, εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πρόσημο της συνδιακύμανσης για τις διάφορες κατανομές κινδύνων.

4.1. Βασικοί ορισμοί

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, το παρόν κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη μελέτη της συνδιακύμανσης των $U(T-),|U(T)|$. Για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμη πριν από οποιαδήποτε είδους σχετική ανάλυση, η παράθεση κάποιων βασικών ορισμών όπως είναι η παρουσίαση της έννοιας της συνδιακύμανσης, αλλά και ο ορισμός των μη ελλειμματικών τυχαίων μεταβλητών του πλεονάσματος πριν και του ελλείματος μετά τη στιγμή της χρεοκοπίας, οι οποίες είναι απαραίτητες για την υπολογιστική διαδικασία που θα ακολουθήσει.

4.1.1. Υπολογισμός των μη ελλειμματικών τυχαίων μεταβλητών $U(T-),|U(T)|$ και της από κοινού μη ελλειμματικής κατανομής αυτών

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.2.3 του προηγούμενου κεφαλαίου, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y\,|\,0)$ της κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, όταν η τιμή του αρχικού αποθεματικού είναι μηδέν, δίνεται μέσω της σχέσης:

$$f(x,y\,|\,0)=\frac{\lambda}{c}f(x+y), \quad \text{όπου } x,y\geq 0\,.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς y, προκύπτει η περιθώρια πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, έστω $f_1(x\,|\,0)$, ενώ ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε την περιθώρια πυκνότητα του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπία $f_2(y\,|\,0)$, τα αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται στις σχέσεις (3.17) και (3.18) αντίστοιχα. Τόσο η πυκνότητα $f_1(x\,|\,0)$ όσο και η $f_2(y\,|\,0)$, είναι ελλειμματικές συναρτήσεις πυκνότητας τις οποίες εάν επιχειρήσουμε να ολοκληρώσουμε στο διάστημα $(0,\infty)$, το αποτέλεσμα που θα προκύψει δεν θα είναι μονάδα όπως θα ανέμενε κάποιος να συμβαίνει στην περίπτωση μιας τυχαίας μεταβλητής. Αντιθέτως, αυτό το οποίο προκύπτει είναι η ποσότητα:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}[1-F(x)]dx=\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}[1-F(y)]dy=\frac{\lambda p_1}{c},$$

η οποία είναι μικρότερη της μονάδος δεδομένου της βασικής υπόθεση του μοντέλου μας $c>\lambda p_1$, δηλαδή ότι τα αναμενόμενα έξοδα της επιχείρησης δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τα έσοδά της. Επιπλέον, επειδή κάθε μία από τις μεταβλητές $U(T-)$ και $|U(T)|$ είναι μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, άρα και το ζεύγος $(U(T-),|U(T)|)$ θα ακολουθεί μία διασδιάστατη ελλειμματική κατανομή.

Προκειμένου να πάρουμε μη ελλειμματικές πυκνότητες πιθανότητας οι οποίες ολοκληρώνουν στη μονάδα, δεσμεύουμε ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία. Έστω λοιπόν $V(T-)$ η τυχαία μεταβλητή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και η τυχαία μεταβλήτη $V(T)$ η οποία εκφράζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι δεν θα συμβεί χρεοκοπία, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως:

$$V(T-)=U(T-)\,|\,T<\infty, U(0)=0\,, \tag{4.1}$$

και

$$V(T) = |U(T)| \,|\, T < \infty, U(0) = 0 . \tag{4.2}$$

Έστω η συνάρτηση $h_{XY}(x, y \,|\, 0)$, η οποία εκφράζει την από κοινού (μη ελλειμματική) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, δηλαδή την από κοινού πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και ότι το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με μηδέν. Αντίστοιχα, ορίζουμε τη συνάρτηση $h_X(x \,|\, 0)$, η οποία εκφράζει την περιθώρια (μη ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής $V(T-)$ και τη συνάρτηση $h_Y(y \,|\, 0)$, η οποία εκφράζει την περιθώρια (μη ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής $V(T)$. Βάσει των ορισμών που μόλις παραθέσαμε, προκύπτουν τα παρακάτω αλγεβρικά αποτελέσματα:

- Περιθώρια κατανομή $h_X(x \,|\, 0)$ του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία.

$$\begin{aligned} h_X(x \,|\, 0) = P(U(T-) \approx x \,|\, T < \infty, U(0) = 0) &= \frac{f(x \,|\, 0)}{P(T < \infty \,|\, U(0) = 0)} \\ &= \frac{f(x \,|\, 0)}{\psi(0)} \\ &= \frac{E[I(U(T-) = x) I(T < \infty) \,|\, U(0) = 0]}{E[I(T < \infty) \,|\, U(0) = 0]} \\ &= E[I(U(T-) = x) \,|\, T < \infty, U(0) = 0], \end{aligned} \tag{4.3}$$

ή αντίστοιχα από τη σχέση (4.3), κάνοντας αντικατάσταση των αποτελεσμάτων των σχέσεων (3.17) και (3.32) και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (3.7) για το περιθώριο ασφαλείας θ, η $h_X(x \,|\, 0)$ μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά ως:

$$\begin{aligned} h_X(x \,|\, 0) = \frac{\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)]}{\frac{1}{1+\theta}} &= \frac{\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)]}{\frac{\lambda p_1}{c}} \\ &= \frac{1}{p_1} \overline{F}(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Περιθώρια κατανομή $h_Y(y\,|\,0)$ του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

$$h_Y(x\,|\,0)=P\big(|U(T)|\approx y\,|\,T<\infty,U(0)=0\big)=\frac{f(y\,|\,0)}{P(T<\infty\,|\,U(0)=0)}$$

$$=\frac{f(y\,|\,0)}{\psi(0)} \tag{4.5}$$

$$=\frac{E\big[I(|U(T)|=x)I(T<\infty)\,|\,U(0)=0\big]}{E\big[I(T<\infty)\,|\,U(0)=0\big]}$$

$$=E\big[I(|U(T)|=x)\,|\,T<\infty,U(0)=0\big],$$

ή εναλλακτικά από τη σχέση (4.5), κάνοντας αντικατάσταση των αποτελεσμάτων των σχέσεων (3.18) και (3.32) και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (3.7), προκύπτει για την $h_Y(y\,|\,0)$:

$$h_Y(y\,|\,0)=\frac{\frac{\lambda}{c}[1-F(y)]}{\frac{1}{1+\theta}}=\frac{\frac{\lambda}{c}[1-F(y)]}{\frac{\lambda p_1}{c}}$$

$$=\frac{1}{p_1}\overline{F}(y). \tag{4.6}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε ομοίως και την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$. Έχουμε λοιπόν:

- Από κοινού κατανομή $h_{XY}(x,y\,|\,0)$ του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

$$h_{XY}(x,y\,|\,0)=P\big(U(T-)\approx x,|U(T)|\approx y\,|\,T<\infty,U(0)=0\big)=\frac{f(x,y\,|\,0)}{P(T<\infty\,|\,U(0)=0)}$$

$$=\frac{f(x,y\,|\,0)}{\psi(0)} \tag{4.7}$$

$$=\frac{E\big[I(U(T-)=x)I(|U(T)|=y)I(T<\infty)\,|\,U(0)=0\big]}{E\big[I(T<\infty)\,|\,U(0)=0\big]}$$

$$=E\big[I(U(T-)=x)I(|U(T)|=y)\,|\,T<\infty,U(0)=0\big].$$

Από τη σχέση (4.7), μέσω αντικατάστασης των σχέσεων (3.16) και (3.32) και συμπεριλαμβανομένου του αποτελέσματος της σχέσης (3.7) αναφορικά με το περιθώριο ασφαλείας, η $h_{XY}(x, y \mid 0)$ μπορεί να διατυπωθεί και ως:

$$h_{XY}(x, y \mid 0) = \frac{\frac{\lambda}{c} f(x+y)}{\frac{1}{1+\theta}} = \frac{\frac{\lambda}{c} f(x+y)}{\frac{\lambda p_1}{c}}$$

$$= \frac{1}{p_1} f(x+y), \tag{4.8}$$

βλ. Χατζηκωνσταντινίδης (2012).

Παρατήρηση 4.1. Από τα αποτελέσματα των σχέσεων (4.4) και (4.6) προκύπτει ότι η μη ελλειμματική πυκνότητα $h_X(x \mid 0)$ του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $V(T-)$, είναι ίδια με τη μη ελλειμματική πυκνότητα $h_Y(y \mid 0)$ του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $V(T)$, για οποιαδήποτε κατανομή κινδύνων F και σε συνδυασμό με τη σχέση (3.19) μπορούμε να πούμε ότι ισχύει:

$$U(T-) \overset{d}{=} |U(T)| \;\Rightarrow\; V(T-) \overset{d}{=} V(T). \tag{4.9}$$

Παρατήρηση 4.2. Από τις σχέσεις (4.4), (4.6) και (4.8) παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου με μηδενικό αρχικό αποθεματικό, τόσο οι περιθώριες κατανομές $h_X(x \mid 0)$ και $h_Y(y \mid 0)$ του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία αντίστοιχα, όσο και η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h_{XY}(x, y \mid 0)$ των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, δεν εξαρτώνται από το περιθώριο ασφαλείας θ και κατ' επέκταση δεν επηρεάζονται τα αποτελέσματά τους από τις τιμές όπου αυτό λαμβάνει.

4.1.2. Συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$

Στην υποενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με την έννοια της συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών. Θα ξεκινήσουμε αποδίδοντας τον σχετικό ορισμό και κάνοντας μία συνοπτική αναφορά στα κύρια χαρακτηριστικά της συνδιακύμανσης. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε την περιγραφή μας για την περίπτωση της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, περιγράφοντας τη σχετική υπολογιστική διαδικασία και αποδίδοντας τον αντίστοιχο μαθηματικό τύπο.

4.1.2.1. Ορισμός συνδιακύμανσης

Έστω X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές με μαθηματική ελπίδα (μέση τιμή) $\mu_X = E(X)$ και $\mu_Y = E(Y)$ αντίστοιχα. Τότε η ποσότητα:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y), \end{aligned} \tag{4.10}$$

θα καλείται συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και συγκεκριμένα μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Εάν ισχύει $Cov(X,Y) > 0$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X,Y χαρακτηρίζονται ως θετικά συσχετισμένες. Αντίστοιχα, εάν $Cov(X,Y) < 0$ οι X,Y καλούνται αρνητικά συσχετισμένες, ενώ τέλος εάν συμβεί να ισχύει ότι $Cov(X,Y) = 0$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X,Y καλούνται ασυσχέτιστες.

Το πιο κλασικό παράδειγμα ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών είναι η περίπτωση των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Πράγματι, εάν Z,T είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, θα ισχύει:

$$E(ZT) = E(Z) \cdot E(T),$$

και μέσω αντικατάστασης του παραπάνω αποτελέσματος στη σχέση (4.9) προκύπτει:

$$Cov(Z,T) = 0, \quad \text{όπου Z,T ανεξάρτητες τ.μ..} \tag{4.11}$$

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, πως εάν δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες τότε θα ισχύει ότι είναι και ασυσχέτιστες, η αντίστροφη όμως συνεπαγωγή δεν ισχύει.

4.1.2.2. Υπολογισμός της συνδιακύμανσης στην περίπτωση των τ.μ. $U(T-), |U(T)|$

Αναφερόμενοι στις τυχαίες μεταβλητές $U(T-), |U(T)|$, διαισθητικά θα ανέμενε κάποιος να υπάρχει κάποιου είδους συσχέτιση μεταξύ των δύο και συγκεκριμένα αρνητική, δηλαδή όσο πιο μεγάλο είναι το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής πριν τη χρεοκοπία, τόσο πιο μικρό να είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και αντίστροφα όσο πιο μικρό είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, τόσο πιο μεγάλο αναμένεται να είναι το έλλειμμα που θα εμφανιστεί. Όμως όπως αναφέραμε και προηγουμένως, οι μεταβλητές $U(T-), |U(T)|$ είναι ελλειμματικές και γι' αυτό δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για τη συνδιακύμανση ή τον συντελεστή συσχέτισής τους, παρά μόνον εάν δεσμεύσουμε ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιούμε τις δεσμευμένες τυχαίες μεταβλητές μας $V(T-)$ και $V(T)$, όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις (4.1) και (4.2) αντίστοιχα. Πλέον, μπορούμε να μιλάμε για τη συνδιακύμανση των $V(T-), V(T)$, η οποία εξαρτάται από τη τιμή του αρχικού αποθεματικού u μιας εταιρίας, όμως στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου με αρχικό αποθεματικό u=0, συμβολίζεται με $C(0)$ και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C(0) = Cov(V(T-), V(T)) = E(V(T-)V(T)) - E(V(T-))E(V(T)). \tag{4.12}$$

Κάνοντας χρήση των πυκνοτήτων που προέκυψαν από τις σχέσεις (4.4), (4.6) και (4.8), μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε μια από τις μαθηματικές ελπίδες της παραπάνω σχέσης. Έχουμε λοιπόν:

- Μέση τιμή $E(V(T-))$ του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία.

$$\begin{aligned}
E(V(T-)) &= \int_0^\infty x \cdot h_X(x \mid 0)dx \\
&= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty x[1-F(x)dx] \\
&= \frac{1}{p_1}\left\{\left[\frac{x^2}{2}[1-F(x)]\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x^2}{2}[1-F(x)]' dx\right\} \\
&= \frac{1}{2p_1}\int_0^\infty x^2 f(x)dx.
\end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$E(V(T-)) = \frac{p_2}{2p_1}, \tag{4.13}$$

όπου $p_1 = \int_0^\infty x f(x) dx$ και $p_2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx$, είναι η πρώτη και δεύτερη τάξεως ροπή της κατανομής F γύρω από το μηδέν.

- Μέση τιμή $E(V(T))$ του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία.

$$E(V(T)) = \int_0^\infty y \cdot h_Y (y \mid 0) dy$$
$$= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty y [1 - F(y) dy]$$
$$= \frac{1}{2p_1} \int_0^\infty y^2 f(y) dy .$$

Προκύπτει λοιπόν αντίστοιχα με προηγουμένως ότι:

$$E(V(T)) = \frac{p_2}{2p_1} . \tag{4.14}$$

Το αποτέλεσμα της σχέσης (4.14) ήταν αναμενόμενο, διότι όπως σημειώσαμε και στην Παρατήρηση 4.1. οι τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ισόνομες και συνεπώς θα έχουν και την ίδια μέση τιμή.

- Μέση τιμή $E(V(T-)V(T))$ του πλεονάσματος πριν και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία.

$$E(V(T-)V(T)) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy h_{XY}(x, y \mid 0) dx dy$$
$$= \frac{1}{p_1} \int_0^\infty y \left(\int_0^\infty x f(x+y) dx \right) dy , \tag{4.15}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.8).

Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα θέτουμε $x + y = z \Rightarrow dx = dz$. Όταν $x \to 0$, τότε έχουμε ότι $z \to y$, ενώ όταν $x \to \infty$ ισχύει $z \to \infty$. Επομένως, το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_0^\infty x f(x+y) dx = \int_y^\infty (z-y) f(z) dz = \int_y^\infty z f(z) dz - \int_y^\infty y f(z) dz . \tag{4.16}$$

Μέσω αντικατάστασης της σχέσης (4.16) στη σχέση (4.15), προκύπτει για τη μέση τιμή του γινομένου των $V(T-),V(T)$:

$$E(V(T-)V(T))=\frac{1}{p_1}\left[\int_0^{\infty} y\int_y^{\infty} zf(z)dzdy-\int_0^{\infty}\int_y^{\infty} yf(z)dzdy\right]. \qquad (4.17)$$

Ισχύει ότι $z>y$ και $0<y<\infty$. Κάνοντας λοιπόν αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης στη σχέση (4.17) έχουμε:

$$E(V(T-)V(T))=\frac{1}{p_1}\left[\int_0^{\infty} zf(z)\int_0^{z} ydydz-\int_0^{\infty} f(z)\int_0^{z} y^2dydz\right]$$

$$=\frac{1}{p_1}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\infty} z^3 f(z)dz-3\int_0^{\infty} z^3 f(z)dz\right\}$$

$$=\frac{1}{p_1}\left\{\frac{1}{2}p_3-\frac{1}{3}p_3\right\}.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$E(V(T-)V(T))=\frac{p_3}{6p_1}, \qquad (4.18)$$

όπου $p_3=\int_0^{\infty} x^3 f(x)dx$, η τρίτη τάξης ροπή της κατανομής F γύρω από το μηδέν.

Αντικαθιστώντας λοιπόν τα αποτελέσματα των μαθηματικών ελπίδων όπως αυτά προέκυψαν από τις σχέσεις (4.13), (4.14) και (4.18), στη σχέση (4.12) για την εύρεση της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$, εμφανίζεται ότι η διακύμανση είναι της μορφής:

$$C(0)=\frac{p_3}{6p_1}-\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2. \qquad (4.19)$$

4.2. Το πρόσημο της συνδιακύμανσης

Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών όπως σημειώθηκε και στην ενότητα 4.1.2.1., μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Ύστερα από σχετική έρευνα προέκυψε ότι στον καθορισμό του προσήμου της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$, καθοριστικό ρόλο παίζει η κατανομή ισορροπίας F_e της τυχαίας μεταβλητής X_e. Συγκεκριμένα, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας, έστω r_e, είναι εκείνη που διαδραματίζει καθοριστικό παράγοντα στο είδος συσχέτισης που θα προκύψει μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών, όπως παρουσιάζεται στην Πρόταση που ακολουθεί:

Πρόταση 4.1. Εάν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση γήρανσης HNWUE (HNBUE), τότε θα ισχύει αντίστοιχα για το συντελεστή συσχέτισης:

$$C(0) \geq (\leq) 0 .$$

Απόδειξη: Βλ. Psarrakos and Politis (2012), σελ. 639.

Σύμφωνα με όσα είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η κλάση HNWUE (HNBUE) παρουσιάζεται να είναι η μεγαλύτερη μεταξύ των γνωστών κλάσεων κατανομής (Βλ. Σχήμα 2.2). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.12) και (2.13), εάν μία κατανομή ανήκει στη μικρότερη κλάση γήρανσης IFR τότε θα ανήκει και στην κλάση HNBUE. Αντίστοιχα, εάν μία κατανομή είναι DFR, τότε θα είναι αυτομάτως και HNWUE. Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη όσα ειπώθηκαν μέχρι στιγμής, η Πρόταση 4.1. μπορεί να αναδιαμορφωθεί ως εξής:

Πρόταση 4.2. Έστω r_e η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας F_e. Αναλόγως τη μορφή μονοτονίας αυτής, η συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-), V(T)$ διαμορφώνεται ως εξής:

(i) $r_e'(x) < 0 \Rightarrow F_e \in DFR \Rightarrow C(0) \geq 0$.

(ii) $r_e'(x) > 0 \Rightarrow F_e \in IFR \Rightarrow C(0) \leq 0$.

(iii) $r_e'(x) = 0 \Rightarrow F_e \in IFR$ & $F_e \in DFR \Rightarrow C(0) = 0$.

Απόδειξη: Βλ. Ορισμό 2.1 & §2.3.1.

Παρατήρηση 4.3. Από τις Προτάσεις 4.1 και 4.2., παρατηρούμε ότι οι συνεπαγωγές για τη διακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$ λαμβάνουν υπόψη την κατανομή ισορροπίας F_e και όχι απευθείας την κατανομή των αποζημιώσεων F. Παρά το γεγονός αυτό όμως, τα παραπάνω αποτελέσματα δεν φαίνεται να διαφοροποιούνται καθόλου στην περίπτωση των αποζημιώσεων F, διότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας φαίνεται να "μιμείται" την πορεία της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής F. Συκεκριμένα, ισχύει ότι εάν η $F \in IFR$ τότε και η $F_e \in IFR$, ενώ στην περίπτωση όπου $F \in DFR$ ισχύει $F_e \in DFR$ (βλ. Psarrakos and Politis (2012), σελ. 639).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνεπαγωγή της Πρότασης 4.1. η οποία συνδέει την κλάση γήρανσης της κατανομής ισορροπίας με το πρόσημο της συνδιακύμανσης των $V(T-),V(T)$, είναι μίας κατεύθυνσης και δεν ισχύει το αντίστροφο. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις κατανομών, όπως για παράδειγμα είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών (Βλ. Εφαρμογή 2.7 και 2.8), όπου η κατανομή δεν είναι HNWUE ούτε HNBUE, με αποτέλεσμα η Πρόταση 4.1. να μην έχει ισχύ. Σε αυτές τις περιπτώσεις, υπάρχει ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του συντελεστή $C(0)$, ο οποίος συμπεριλαμβάνει στον υπολογισμό του το συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας CV_e. Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο σχετικό Θεώρημα:

Θεώρημα 4.1. Έστω CV_e ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e. Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό u=0, δίνεται από τη σχέση:

$$C(0)=\frac{{p_2}^2}{8{p_1}^2}\left(CV_e{}^2-1\right). \tag{4.20}$$

Ο συντελεστής CV_e, ορίζεται ως το πηλίκο της τυπικής απόκλισης της κατανομής ισορροπίας δια το μέσο της και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$CV_e=\frac{\sigma_e}{\mu_e}=\frac{\sqrt{E\left[Z_e{}^2\right]-E\left[Z_e\right]^2}}{E\left[Z_e\right]}=\frac{\sqrt{p_{2,e}-p_{1,e}^2}}{p_{1,e}}, \tag{4.21}$$

ή

$$CV_e=\frac{\sqrt{\dfrac{p_3}{3p_1}-\dfrac{{p_2}^2}{4{p_1}^2}}}{\dfrac{p_2}{2p_1}},$$

όπου Z_e είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή F_e.

Πρόταση 4.3. Ισχύει ότι $CV_e\geq 1$ $\left(0\leq CV_e\leq 1\right)$, εάν και μόνον αν, ισχύει για τη συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ ότι:

$$C(0) \geq (\leq) 0 .$$

Απόδειξη: Βλ. Psarrakos and Politis (2012), σελ. 640.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Προτάσεων 4.1., 4.2. και 4.3 μπορούμε να συνοψίσουμε όλες τις παραπάνω πληροφορίες στην Πρόταση 4.4 που ακολουθεί:

Πρόταση 4.4. Έστω r_e και CV_e, η βαθμίδα αποτυχίας και ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e αντίστοιχα, ενώ $C(0)$ ο συντελεστής συσχέτισης του πλεονάσματος πριν και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, για αρχικό αποθεματικό u=0. Ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

(i) $r_e'(x) < 0 \;\Rightarrow\; F_e \in DFR \;\Rightarrow\; C(0) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; CV_e \geq 1.$

(ii) $r_e'(x) > 0 \;\Rightarrow\; F_e \in IFR \;\Rightarrow\; C(0) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; CV_e \leq 1.$

(iii) $r_e'(x) = 0 \;\Rightarrow\; F_e \in IFR \;\&\; F_e \in DFR \;\Rightarrow\; C(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; CV_e = 1.$

4.3. Υπολογισμός της συνδιακύμανσης των τ.μ. $V(T-), V(T)$ στην περίπτωση γνωστών ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα και γραφική αναπαράσταση του συντελεστή

Στο παρόν κεφάλαιο, έως τώρα παρακολουθήσαμε τη διαδικασία υπολογισμού της συνδιακύμανσης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, παρουσιάζοντας τον τελικό υπολογιστικό τύπο για την εύρεσή της, αλλά και τα σημαντικότερα θεωρήματα και προτάσεις όπου έχουν προκύψει από σχετική μελέτη. Στο σημείο αυτό κάνοντας χρήση της σχέσης (4.19), θα υπολογίσουμε τη συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$ για τις περιπτώσεις της Εκθετικής, της μίξης δύο Εκθετικών, της κατανομής Γάμμα, αλλά και της μίξης δύο Γάμμα κατανομών και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μεταβάλλεται το πρόσημό της. Ταυτόχρονα, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της κατανομής ισορροπίας μέσω της βαθμίδας αποτυχίας αλλά και του συντελεστή μεταβλητότητάς της, και θα ελέγξουμε εάν πράγματι επαληθεύονται για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις κατανομών τα όσα ειπώθηκαν μέχρι στιγμής.

4.3.1. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων

Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι ίσες με $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$ αντίστοιχα, $x \geq 0$, ενώ για τη μέση τιμή θα ισχύει ότι $E(X) = p_1 = 1/\lambda$. Κάνοντας αντικατάσταση των προαναφερθέντων μεγεθών στις σχέσεις (4.4), (4.6) και (4.8), προκύπτει για τις περιθώριες μη ελλειμματικές κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$h_X(x \mid 0) = h_Y(y \mid 0) = \lambda e^{-\lambda x},$$

όπου $\lambda > 0, x \geq 0$, ενώ για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτών:

$$\begin{aligned} h_{XY}(x, y \mid 0) &= \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \\ &= h_X(x \mid 0) h_Y(y \mid 0). \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (4.10) για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης, έχουμε:

$$Cov(V(T-), V(T)) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων, ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με μηδέν. Δηλαδή το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, για αρχικό αποθεματικό u=0 και δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας, δεν σχετίζονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό στο οποίο καταλήξαμε, φαίνεται να έχει μια λογική ερμηνεία δεδομένης της “αμνήμονος” ιδιότητας της Εκθετικής κατανομής, γνωστής και ως “ιδιότητα της έλλειψης της μνήμης”.

Επιπλέον, στην Ενότητα 3.3.2.1. αποδείξαμε ότι στην περίπτωση όπου οι απαιτήσεις μιας ασφαλιστικής εταιρίας ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, τότε και η συνάρτηση της πυκνότητας ισορροπίας θα ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο (Βλ. Σχέση (3.34)). Δηλαδή ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$F = Exp(\lambda) \Rightarrow F_e = Exp(\lambda). \tag{4.22}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα αποτελέσματα της Ενότητας 2.3.1., η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας θα είναι σταθερή και μάλιστα θα ισχύει $r_e = \lambda$. Συνεπώς η κατανομή ισορροπίας, ομοίως με την αρχική κατανομή F των αποζημιώσεών μας, θα ανήκει τόσο στην κλάση IFR όσο και στην DFR και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2. (iii) καταλήγουμε ότι $C(0)=0$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και μέσω της Πρότασης 4.3., η οποία συνδέει την τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας CV_e της κατανομής ισορροπίας με το πρόσημο της συνδιακύμανσης. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν, προκύπτει ότι:

$$CV_e = \frac{\sigma_e}{\mu_e} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}}{\frac{1}{\lambda}} = 1 \;\Leftrightarrow\; Cov(V(T-),V(T)) = 0.$$

4.3.2. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Έστω ότι η κατανομή F των αποζημιώσεων μίας ασφαλιστικής, είναι η μίξη δύο Εκθετικών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2 > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \alpha \cdot \beta_1 e^{-\beta_1 \cdot x} + (1-\alpha)\cdot \beta_2 e^{-\beta_2 \cdot x} \;,\quad x \ge 0 \text{ και } \alpha \in [0,1].$$

Η k-τάξεως ροπή της κατανομής ζημιών θα είναι της μορφής:

$$p_k = E\left[X^k\right] = a\frac{k!}{\beta_1^{\,k}} + (1-a)\frac{k!}{\beta_2^{\,k}}. \tag{4.23}$$

Θέτοντας k=1,2,3 στη σχέση (4.23), λαμβάνουμε την τιμή της πρώτης, δεύτερης και τρίτης ροπής της κατανομής F αντίστοιχα. Προκύπτει λοιπόν:

$$p_1 = E[X] = a\frac{1}{\beta_1} + (1-a)\frac{1}{\beta_2},$$

$$p_2 = E\left[X^2\right] = a\frac{2}{\beta_1^{\,2}} + (1-a)\frac{2}{\beta_2^{\,2}},$$

$$p_3 = E\left[X^3\right] = a\frac{6}{\beta_1^{\,3}} + (1-a)\frac{6}{\beta_2^{\,3}}.$$

Αντικαθιστώντας στο Maple τις τιμές των p_1, p_2, p_3 που προέκυψαν παραπάνω, στον υπολογιστικό τύπο της σχέσης (4.19) για την εύρεση της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, προκύπτει ότι είναι της μορφής:

$$Cov(V(T-), V(T)) = \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha\beta_2 + (1-\alpha)\beta_1} \right)^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta_1\beta_2}. \tag{4.24}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η συνδιακύμανση παρουσιάζεται να είναι της μορφής γινομένου δύο κλασμάτων, έστω:

$$A = \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha\beta_2 + (1-\alpha)\beta_1} \right)^2 \text{ και } B = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta_1\beta_2}.$$

Στην περίπτωση όπου ισχύει για τις παραμέτρους κλίμακας της κατανομής μας $\beta_1 = \beta_2$ ή ότι ο συντελεστής βάρους $a \in \{0,1\}$, τότε έχουμε Εκθετική κατανομή και σύμφωνα με την Ενότητα 3.2.1. θα ισχύει ότι $Cov(V(T-), V(T)) = 0$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, δηλαδή για $\alpha \in (0,1)$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, θα ισχύει ότι $A \neq 0$ και $B \neq 0$ με αποτέλεσμα να προκύπτει θετική συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, δηλαδη θα ισχύει $Cov(V(T-), V(T)) > 0$.

Στην περίπτωση λοιπόν των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών, η συνάρτηση $Cov(V(T-), V(T))$ παρουσιάζεται να είναι μη αρνητική. Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε πολύ εύκολα να οδηγηθούμε και μέσω της μελέτης της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων. Στην περίπτωση όπου για την κατανομή F των αποζημιώσεων ισχύει $F = aExp(\beta_1) + (1-a)Exp(\beta_2)$, με $\beta_1, \beta_2 > 0$ και $\alpha \in [0,1]$, η κατανομή ισορροπίας θα είναι ίση:

$$F_e(x) = \frac{ae^{-\beta_1 x} + (1-a)e^{-\beta_2 x}}{\frac{a}{\beta_1} + \frac{1-a}{\beta_2}}$$

$$= \frac{a\beta_2}{a\beta_2 + \beta_1 - a\beta_1} \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \frac{(1-a)\beta_1}{a\beta_2 + (1-a)\beta_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x}. \tag{4.25}$$

Στη σχέση (4.25), η F_e παρουσιάζεται να έχει τη μορφή της "μίξης δύο Εκθετικών κατανομών" με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2 > 0$, όμοιες με εκείνες της αρχικής μας κατανομής αποζημιώσεων και "συντελεστή βάρους":

$$a' = \frac{a\beta_2}{a\beta_2 + (1-a)\beta_1}.$$

Προκειμένου όμως να μιλάμε με βεβαιότητα ότι η τυχαία μεταβλητή X_e ακολουθεί τη μίξη δύο Εκθετικών, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη δέσμευση:

$$0 \le a' \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{a\beta_2}{a\beta_2 + (1-a)\beta_1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a\beta_2 \le a\beta_2 + \beta_1 - a\beta_1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a\beta_1 \le \beta_1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a \le 1, \text{ που ισχύει.}$$

Συνεπώς, στην περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις που καλείται μία ασφαλιστική να καταβάλλει προς τους ασφαλισμένους της ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών, ισχύει:

$$F = aExp(\beta_1) + (1-\alpha)Exp(\beta_2) \Rightarrow F_e = a'Exp(\beta_1) + (1-\alpha')Exp(\beta_2). \qquad (4.26)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την ενότητα 2.3.2., θα ισχύει ότι $r_e' < 0$, δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας θα είναι φθίνουσα και επομένως η κατανομή ισορροπίας F_e θα ανήκει στην κλάση γήρανσης DFR, όπως συμβαίνει και με την αρχική κατανομή των αποζημιώσεων F. Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 4.2. (i), επαληθεύεται το γεγονός ότι $Cov(V(T-), V(T)) \ge 0$ και κατ' επέκταση θα ισχύει ότι $CV_e \ge 1$.

Εφαρμογή 4.1. Συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-), V(T)$, όταν $F = \alpha Exp\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)Exp\left(\frac{1}{4}\right)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή των απαιτήσεων όπου καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική ακολουθεί τη μίξη δύο εκθετικών με παραμέτρους $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$ και συντελεστή βάρους $a \in [0,1]$, η συνδιακύμανση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό u =0 θα είναι ίση με:

$$Cov\left(V(T-),V(T);\alpha,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=8\frac{a(1-a)}{(a-2)^2},\quad a\in[0,1]. \tag{4.27}$$

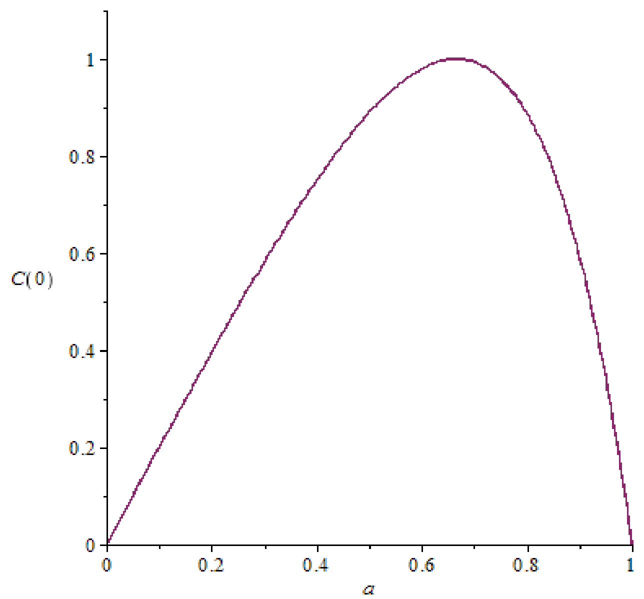
Στο Σχήμα 4.1. που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση της σχέσης (4.27) συναρτήσει του συντελεστή α. Όπως σημειώσαμε και προηγουμένως, για τιμές 0 και 1 του συντελεστή βάρους της μίξης της κατανομής μας η συνδιακύμανση είναι ίση με το μηδέν. Ισχύει δηλαδή:

$$Cov\left(V(T-),V(T);0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=Cov\left(V(T-),V(T);1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=0.$$

Το γεγονός αυτό είναι απολύτως αναμενόμενο διότι στις περιπτώσεις όπου $a=0$ και $a=1$, η μίξη Εκθετικών κατανομών συμπίπτει με την Εκθετική και όπως παρουσιάσαμε στην ενότητα 4.3.1. προκύπτει ότι $C(0)=0$ (βλ. παρόμοια αποτελέσματα Γαλανάκης (2012), σελ. 67).

ΣΧΗΜΑ 4.1.

Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4)



Ισχύει ότι:

$$\frac{d}{da}Cov\left(V(T-),V(T);\alpha,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=0\Rightarrow\frac{8(3a-2)}{(a-2)^3}=0\Rightarrow a=\frac{2}{3},$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στη σχέση (4.27), προκύπτει ότι η μεγιστοποίηση της μη αρνητικής συνάρτησης $Cov(V(T-),V(T))$, όπως αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1., επιτυγχάνεται στο σημείο $a = 2/3$. Η συνδιακύμανση ισούται με:

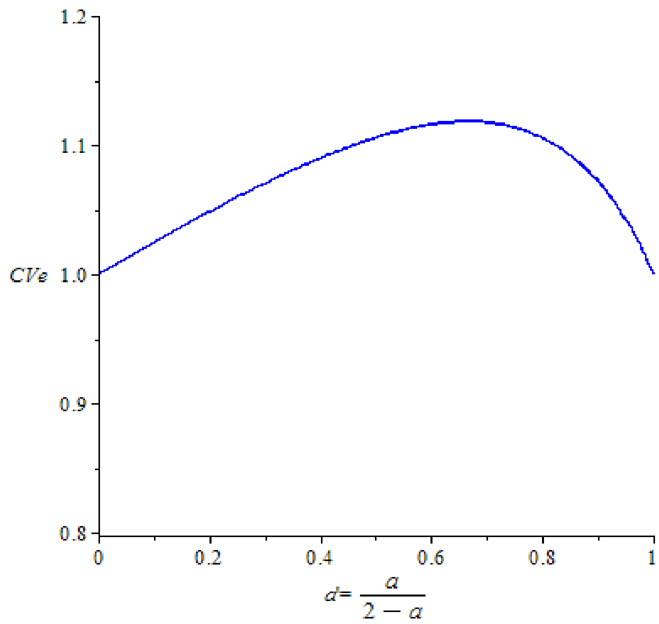
$$Cov\left(V(T-),V(T);\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=1.$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας μας θα είναι ίσος με:

$$CV_e = -\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{-8a'+16-4(a')^2}}{\frac{1}{4}a'-\frac{1}{2}}, \quad \text{όπου } a' \in [0,1]. \tag{4.28}$$

ΣΧΗΜΑ 4.2.

Συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας, όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4)



Στο Σχήμα 4.2. παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση του συντελεστή μεταβλητότητας CV_e της σχέσης (4.28), συναρτήσει του συντελεστή βάρους της κατανομής ισορροπίας. Σύμφωνα με αυτή, ο CV_e εμφανίζεται να ξεκινάει από το σημείο $a' = 0$ με τιμή $CV_e(0) = 1$ και να σημειώνει γνησίως αύξουσα πορεία μέχρι ένα σημείο z, από το οποίο ο συντελεστής μεταβλητότητας ξεκινάει τη γνησίως φθίνουσα πορεία του για να καταλήξει στο σημείο $a' = 1$ σημειώνοντας τιμή $CV_e(1) = 1$, ίδια με την αρχική τιμή του.

Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας και θέτοντάς την ίση με το μηδέν, έχουμε ότι:

$$\frac{d}{da'}CV_e = 0 \Rightarrow \frac{3-3a'}{(a'-2)^2\sqrt{-2a'+4-(a')^2}} = 0 \Rightarrow a' = \frac{2}{3},$$

δηλαδή ο συντελεστής μεταβλητότητας παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $z = 2/3$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στη σχέση (4.28), προκύπτει ότι κατά τη μεγιστοποίηση αυτή ισχύει ότι $CV_e(2/3) \approx 1.1181$. Επαληθεύουμε λοιπόν το γεγονός, σύμφωνα με τα όσα μας παρουσιάζονται στην Πρόταση 4.3., ότι στην περίπτωση της μίξης δύο Εκθετικών κατανομών με $C(0) \geq 0$ ισχύει επιπλέον $CV_e \geq 1$.

4.3.3. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα

Έστω ότι η κατανομή F των απαιτήσεων όπου καταφθάνουν προς μία ασφαλιστική εταιρία από τους ασφαλισμένους της, είναι η Γάμμα με παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ και παράμετρο μορφής $n > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι ίση με:

$$f(x;n,\lambda) = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{\Gamma(n)}, \quad x \geq 0 \text{ και } \lambda, n > 0,$$

όπου $\Gamma(n)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$.

Η k-τάξεως ροπή της κατανομής ζημιών θα είναι της μορφής:

$$p_k = E[X^k] = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\lambda^k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot n}{\lambda^k}. \tag{4.29}$$

Απόδειξη: Βλ. Κούτρας (2004), σελ. 437.

Θέτοντας k=1,2,3 στη σχέση (4.29), λαμβάνουμε τις τρεις πρώτες ροπές της Γάμμα κατανομής αποζημιώσεων, οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό της συνάρτησης της συνδιακύμανσης. Έχουμε λοιπόν:

$$p_1 = E[X] = \frac{n}{\lambda},$$

$$p_2 = E[X^2] = \frac{n(n+1)}{\lambda^2},$$

$$p_3 = E[X^3] = \frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των p_1, p_2, p_3 στον υπολογιστικό τύπο της σχέσης (4.19) για την εύρεση της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, προκύπτει ότι αυτή στην περίπτωση της Γάμμα κατανομής αποζημιώσεων είναι της μορφής:

$$Cov(V(T-), V(T)) = \frac{1-n^2}{12 \cdot \lambda^2}. \tag{4.30}$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι η μεταβολή του προσήμου της συνδιακύμανσης των $V(T-), V(T)$ στην περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις μιας ασφαλιστικής ακολουθούν την κατανομή Γάμμα, είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου κλίμακας και επηρεάζεται αποκλειστικά και μόνον από τις τιμές της παραμέτρου μορφής n της κατανομής μας.

Προκύπτουν λοιπόν οι εξής δυνατές περιπτώσεις:

(α) Για $0 < n < 1 \Rightarrow Cov(V(T-), V(T)) > 0$.

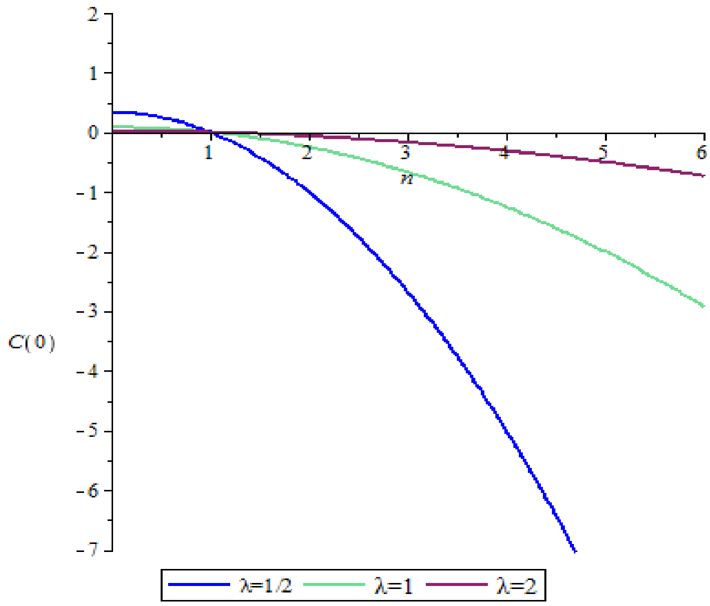
(β) Για $n = 1 \Rightarrow Cov(V(T-), V(T)) = 0$.

(γ) Για $n > 1 \Rightarrow Cov(V(T-), V(T)) < 0$.

Στο Σχήμα 4.3.(α) που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνδιακύμανσης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό u=0 συναρτήσει της παραμέτρου μορφής n, όπως αυτή παρουσιάζεται στη σχέση (4.30). Η συνάρτηση της συνδιακύμανσης εμφανίζεται να είναι γνησίως φθίνουσα ως προς την παράμετρο n, λαμβάνοντας θετικές τιμές για τιμές της παραμέτρου μορφής $0 < n < 1$ και αρνητικές τιμές για $n > 1$, ενώ όπως ήταν αναμενόμενο, για $n = 1$ επειδή η Γάμμα κατανομή ταυτίζεται με την Εκθετική, η συνάρτηση $V(T-), V(T)$ μηδενίζεται.

ΣΧΗΜΑ 4.3. (α)

Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ)

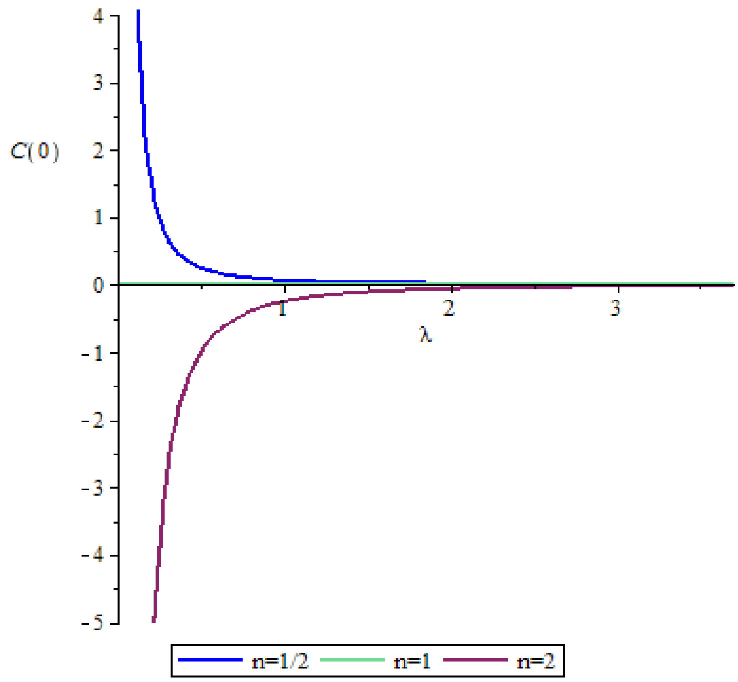


Επιπλέον, όπως γίνεται αντιληπτό και από τη σχέση (4.30), η συνάρτηση $Cov(V(T-),V(T))$ και η παράμετρος κλίμακας λ είναι δύο μεγέθη αρνητικά συσχετιζόμενα. Πράγματι, όπως προκύπτει και από το γράφημα (βλ. Σχήμα 4.3.(β)) που ακολουθεί, παρατηρούμε ότι για $\lambda \uparrow \infty$ ισχύει ότι $C(0) \downarrow 0$, ενώ για $\lambda \downarrow 0$ όπως προκύπτει παρουσιάζονται δύο δυνατά ενδεχόμενα. Στην περίπτωση της παραμέτρου κλίμακας μικρότερης της μονάδας θα ισχύει ότι $C(0) \uparrow +\infty$, ενώ για $n > 1$ προκύπτει ότι $C(0) \uparrow -\infty$. Ισχύει λοιπόν ότι η $Cov(V(T-),V(T))$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τις παραμέτρους n,λ της κατανομής Γάμμα των αποζημιώσεων.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2., η συμπεριφορά της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ ερμηνεύεται μέσω της συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας F_e και της κλάσης γήρανσης όπου αυτή ανήκει. Συνεπώς, το γεγονός ότι για το διάστημα $0 < n < 1$ ισχύει $Cov(V(T-),V(T)) > 0$, οφείλεται στο ότι $r_e'(x) < 0$ και επομένως θα έχουμε ότι $F_e \in DFR$ για κάθε $\lambda > 0$, ενώ ότι για $n > 1$ ισχύει $Cov(V(T-),V(T)) < 0$, οφείλεται στο γεγονός ότι ισχύει για τη βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας $r_e'(x) > 0$ και κατ' επέκταση $F_e \in IFR$ για κάθε $\lambda > 0$. Τέλος, για τιμή της παραμέτρου μορφής $n = 1$, ισχύει ότι $Cov(V(T-),V(T)) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή Γάμμα συμπίπτει με την Εκθετική με αποτέλεσμα σύμφωνα με τη σχέση (4.26), η κατανομή ισορροπίας να ακολουθεί ομοίως την Εκθετική κατανομή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η F_e να ανήκει τόσο στην κλάση γήρανσης IFR όσο και στην DFR και να ισχύει ταυτόχρονα για τη βαθμίδα αποτυχίας ότι $r_e'(x) \geq 0$ και $r_e'(x) \leq 0$.

ΣΧΗΜΑ 4.3. (β)

Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ)



Καταλήξαμε λοιπόν στο γεγονός ότι στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα, η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας ταυτίζεται με εκείνη της αρχικής κατανομής αποζημιώσεών μας, όπως αυτή παρουσιάστηκε αναλυτικά στην προηγούμενη Ενότητα 2.3.3.. Όμως, όπως προκύπτει και από τα παραδείγματα που ακολουθούν, το γεγονός ότι οι $r(x)$ και $r_e(x)$ παρουσιάζουν την ίδια ακριβώς μονοτονία, δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι και η κατανομή ισορροπίας θα είναι Γάμμα όπως συμβαίνει με την κατανομή F των αποζημιώσεων.

Εφαρμογή 4.2. Συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-), V(T)$, όταν $F = Gamma(2, \lambda)$.

Όταν οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς μία ασφαλιστική ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $n = 2$ και $\lambda > 0$, η συνδιακύμανση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό u =0 θα ισούται:

$$Cov(V(T-),V(T);2,\lambda)=-\frac{1}{4\lambda^2}, \qquad \forall\lambda>0 \ . \tag{4.31}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, για τιμή της παραμέτρου μορφής $n=2\ (>0)$ ισχύει $Cov(V(T-),V(T);2,\lambda)<0$. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας θα είναι ίση με:

$$f_e=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}(1+\lambda x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}\lambda^2 xe^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F_e=\frac{1}{2}Gamma(1,\lambda)+\frac{1}{2}Gamma(2,\lambda), \qquad \forall\lambda>0. \tag{4.32}$$

Από τη σχέση (4.32) προκύπτει ότι η κατανομή ισορροπίας F_e είναι η μίξη δύο κατανομών Γάμμα με συντελεστές βάρους $a_i=1/2$, όπου $i=1,2$ και $a_1+a_2=1$, κοινή παράμετρο κλίμακας λ και παραμέτρους μορφής $n_1=1$ και $n_2=2$ αντίστοιχα.

Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας κάνοντας χρήση της σχέσης (2.8) θα είναι ίση:

$$r_e(x)=\frac{\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}\lambda^2 xe^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}e^{-\lambda x}\lambda x}, \qquad \forall\lambda>0, x\geq 0. \tag{4.33}$$

Προκειμένου να καταλάβουμε τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων, κρίνεται σκόπιμο να υπολογίσουμε τις δύο πρώτες παραγώγους της. Κατόπιν υπολογισμών προκύπτει για την πρώτη παράγωγο:

$$r_e'\left(x;\frac{1}{2},1,2,\lambda\right)=\frac{\lambda^2}{(2+\lambda x)^2}>0,$$

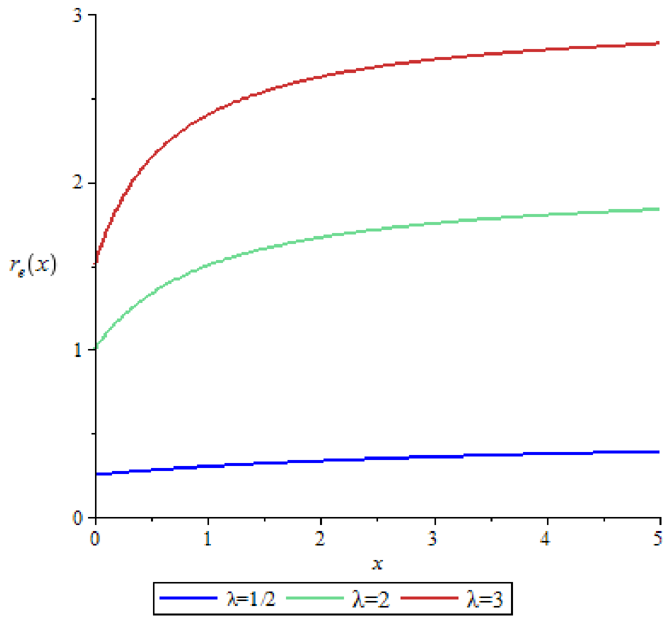
ενώ για τη δεύτερη ισχύει ότι:

$$r_e''\left(x;\frac{1}{2},1,2,\lambda\right)=-\frac{2\lambda^3}{(2+\lambda x)^3}<0.$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα λοιπόν που προκύπτουν, η συνάρτηση $r_e(x;½,1,2,\lambda)$ αναμένεται να είναι γνησίως αύξουσα ως προς x, στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω και θα ισχύει ότι $F_e \in IFR$. Το γεγονός αυτό έρχεται να επαληθεύσει και το Σχήμα 4.4. που ακολουθεί, στο οποίο παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (4.33) συναρτήσει του x, για διάφορες τιμές της παραμέτρου κλίμακας λ της κατανομής των αποζημιώσεων. Επαληθεύτηκε λοιπόν το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2. (ii), σύμφωνα με το οποίο εάν για μία κατανομή κινδύνων ισχύει $r_e'(x)>0$, τότε η F_e θα ανήκει στη κλάση γήρανσης IFR και θα προκύπτει ότι $Cov(V(T-),V(T))\le 0$, ενώ σύμφωνα με τη Πρόταση 4.3. αναμένουμε να ισχύει επιπροσθέτως ότι $CV_e \le 1$.

ΣΧΗΜΑ 4.4.

Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων όταν Fe=1/2G(1,λ)+ 1/2G(2,λ)



Πράγματι, στην περίπτωση όπου η κατανομή ισορροπίας είναι της μορφής $F_e = ½Gamma(1,\lambda)+½Gamma(2,\lambda)$, η πρώτη και δεύτερη τάξεως ροπή της F_e γύρω από το μηδέν θα είναι αντίστοιχα ίσες με:

$$p_{1,e} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\lambda}=\frac{3}{2\lambda} \quad \text{και} \quad p_{2,e} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\lambda^2}=\frac{4}{\lambda^2}.$$

Κάνοντας λοιπόν αντικατάσταση των $p_{1,e}, p_{2,e}$ στην σχέση (4.21), προκύπτει ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας είναι ίσος με:

$$CV_e = \frac{\sqrt{\frac{4}{\lambda^2} - \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2}}{\frac{3}{2\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0.8819 \quad < 1.$$

Εφαρμογή 4.3. Συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-), V(T)$, όταν $F = Gamma(3, \lambda)$.

Έστω ότι η κατανομή F των αποζημιώσεων μίας ασφαλιστικής εταιρίας ακολουθούν τη Γάμμα, με παραμέτρους $n = 3$ και $\lambda > 0$. Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$ θα είναι ίση με:

$$Cov(V(T-), V(T); 3, \lambda) = -\frac{2}{3\lambda^2} \quad < 0, \qquad \forall \lambda > 0, \tag{4.34}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας θα ισούται:

$$f_e = \frac{1}{6}\lambda e^{-\lambda x}\left(2 + 2\lambda x + \lambda^2 x^2\right) = \frac{2}{3}\lambda e^{-\lambda x} + \frac{2}{3}\lambda^2 x e^{-\lambda x} + \frac{1}{6}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F_e = \frac{1}{3}Gamma(1, \lambda) + \frac{1}{3}Gamma(2, \lambda) + \frac{1}{3}Gamma(3, \lambda), \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4.35}$$

Από τη σχέση (4.35) προκύπτει ότι η κατανομή ισορροπίας F_e είναι η μίξη τριών Γάμμα κατανομών με συντελεστές βάρους $a_i = 1/3$, όπου $i = 1,2,3$ και $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, κοινή παράμετρο κλίμακας λ και παραμέτρους μορφής $n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3$.

Η βαθμίδα αποτυχίας της F_e κάνοντας χρήση της σχέσης (2.8) θα ισούται με:

$$r_e(x) = \frac{\frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1}{3}\lambda^2 x e^{-\lambda x} + \frac{1}{6}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x} + \frac{2}{3}e^{-\lambda x}\lambda x + \frac{1}{6}e^{-\lambda x}\lambda^2 x^2}, \qquad \forall \lambda > 0, x \geq 0, \tag{4.36}$$

ενώ στη συνέχεια υπολογίζοντας τις δύο πρώτες παραγώγους της σχέσης (4.36) προκύπτει:

$$r_e'(x; 1/3, 1,2,3, \lambda) = \frac{2\lambda^2\left(\lambda^2 x^2 + 2 + 4\lambda x\right)}{\left(6 + 4\lambda x + \lambda^2 x^2\right)^2} > 0,$$

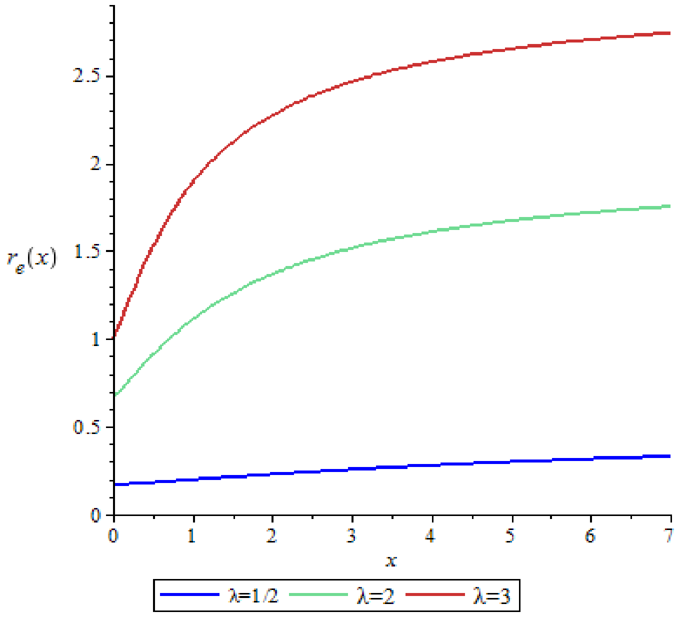
και

$$r_e''(x; 1/3, 1,2,3,\lambda) = -\frac{4\lambda^3\left(6\lambda x + 6\lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 - 4\right)}{\left(6 + 4\lambda x + \lambda^2 x^2\right)^3} < 0 .$$

Στο Σχήμα 4.5. που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας της σχέσης (4.36) συναρτήσει του x, για τιμές της παραμέτρου κλίμακας $\lambda = 1/2$, $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$. Όπως προέκυψε και προηγουμένως για την $r_e(x; 1/2, 1,2,\lambda)$ στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούσαν την κατανομή $Gamma(2,\lambda)$, έτσι και εδώ στην περίπτωση της κατανομής αποζημιώσεων $F = Gamma(3,\lambda)$, η βαθμίδα αποτυχίας $r_e(x; 1/3, 1,2,3,\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς x και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και κατ' επέκταση θα ισχύει για την κατανομή ισορροπίας ότι $F_e \in IFR$.

ΣΧΗΜΑ 4.5.

Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων όταν Fe=1/3G(1,λ)+ 1/3G(2,λ)+1/3G(3,λ)



Στην περίπτωση της κατανομής $F_e = 1/3\,Gamma(1,\lambda) + 1/3\,Gamma(2,\lambda) + 1/3\,Gamma(3,\lambda)$, η πρώτη και δεύτερη τάξεως ροπή της κατανομής ισορροπίας γύρω από το μηδέν θα είναι:

$$p_{1,e} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

και

$$p_{2,e} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{\lambda^2} = \frac{20}{3\lambda^2},$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές των $p_{1,e}, p_{2,e}$ στην σχέση (4.21), προκύπτει για τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας ότι:

$$CV_e = \frac{\sqrt{\frac{20}{3\lambda^2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2}}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8164 \quad < 1.$$

Σύμφωνα λοιπόν με όσα παρουσιάστηκαν μέχρι στιγμής, καταφέραμε να επαληθεύσουμε την Πρόταση 4.2. (ii) και για την περίπτωση των αποζημιώσεων όπου ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή, με παράμετρο μορφής $n = 3$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$.

Παρατήρηση 4.4. Στις εφαρμογές 4.2. και 4.3. παρακολουθήσαμε την διαδικασία υπολογισμού της συνδιακύμανσης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό u=0, για τις περιπτώσεις των κατανομών $F = Gamma(2, \lambda)$ και $F = Gamma(3, \lambda)$ αντίστοιχα, με παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των σχέσεων (4.32) και (4.35) που προέκυψαν, παρατηρούμε πως και στις δύο περιπτώσεις η κατανομή ισορροπίας εμφανίζεται να είναι η μίξη $k = n$ κατανομών Γάμμα, με παραμέτρους μορφής $k = 1,..,n$, κοινές παραμέτρους κλίμακας $\lambda > 0$ ίδιες με την αρχική κατανομή των αποζημιώσεών μας και συντελεστές βάρους $w_i = 1/n$. Παρατηρούμε δηλαδή να ισχύει η σχέση:

$$F = Gamma\,(n, \lambda) \Rightarrow F_e = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} Gamma\,(k, \lambda), \quad \text{όπου } n = 2{,}3. \tag{4.37}$$

4.3.4. Η συνδιακύμανση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών

Έστω ότι οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς μία ασφαλιστική ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών, έστω $G(n_1, \lambda_1)$ και $G(n_2, \lambda_2)$, με παραμέτρους $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ και συντελεστή βάρους $\alpha \in [0,1]$. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ θα είναι ίση:

$$f(x;a,n_1,n_2,\lambda_1,\lambda_2)=\alpha\frac{\lambda_1^{n_1}\cdot x^{n_1-1}\cdot e^{-\lambda_1\cdot x}}{\Gamma(n_1)}+(1-\alpha)\frac{\lambda_2^{n_2}\cdot x^{n_2-1}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}}{\Gamma(n_2)} \quad , \quad x\geq 0\,,$$

όπου $\Gamma(n)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης $\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}\cdot e^{-t}dt$.

Η k-τάξεως ροπή της κατανομής των ζημιών κάνοντας χρήση της σχέσης (4.29), θα είναι της μορφής:

$$p_k=E\left[X^k\right]=a\frac{\Gamma(n_1+k)}{\Gamma(n_1)\lambda^k}+(1-a)\frac{\Gamma(n_2+k)}{\Gamma(n_2)\lambda^k}\,. \tag{4.38}$$

Στη σχέση (4.38) για k=1,2,3, λαμβάνουμε τις τιμές των τριών πρώτων ροπών της κατανομής των αποζημιώσεών μας που απαιτούνται στον υπολογιστικό τύπο της συνδιακύμανσης. Έχουμε λοιπόν:

$$p_1=E[X]=a\frac{n_1}{\lambda_1}+(1-a)\frac{n_2}{\lambda_2}\,,$$

$$p_2=E\left[X^2\right]=a\frac{(n_1+1)n_1}{\lambda_1^{\,2}}+(1-a)\frac{(n_2+1)n_2}{\lambda_2^{\,2}}\,,$$

$$p_3=E\left[X^3\right]=a\frac{(n_1+2)(n_1+1)n_1}{\lambda_1^{\,2}}+(1-a)\frac{(n_2+2)(n_2+1)n_2}{\lambda_2^{\,2}}\,.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των ροπών που προέκυψαν στον υπολογιστικό τύπο της σχέσης (4.19), προκύπτει ότι η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$, ισούται:

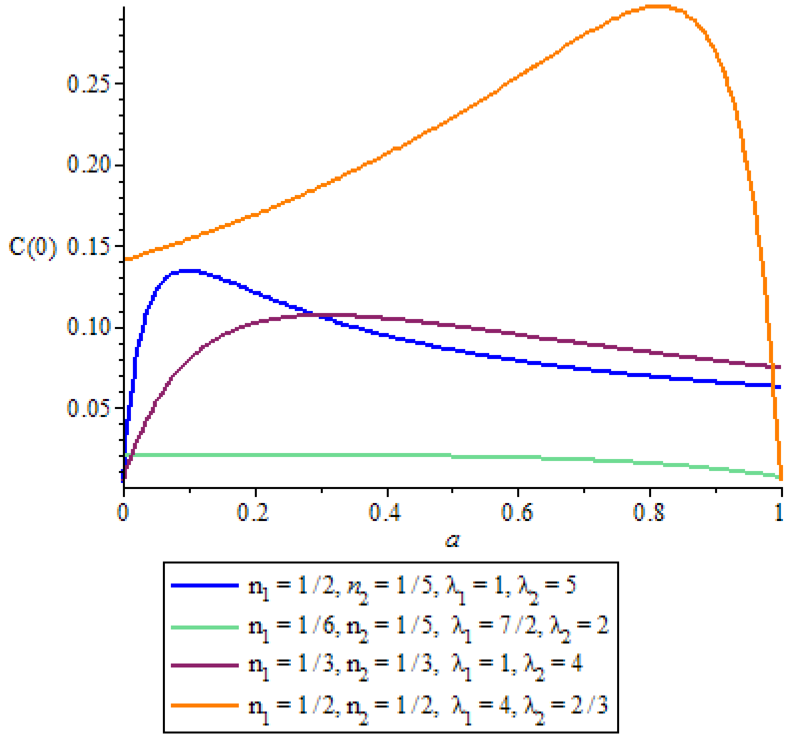
$$Cov(V(T-),V(T))=\frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha n_1\lambda_2^{\,3}\left[(n_1+1)(n_1+2)\right]+(1-a)n_2\lambda_1^{\,3}\left[(n_2+1)(n_2+2)\right]}{\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,2}\left[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1\right]}$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left[an_1\lambda_2^{\,2}(n_1+1)+(1-a)n_2\lambda_1^{\,2}(n_2+1)\right]^2}{\lambda_1^{\,2}\lambda_2^{\,2}\left[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1\right]^2}\,. \tag{4.39}$$

Από τη σχέση (4.39) που προέκυψε, λόγω του σύνθετου κλάσματος δεν μπορούμε να αποφανθούμε και να εξάγουμε κάποιο γενικό συμπέρασμα για το πρόσημο της συνάρτησης $Cov(V(T-),V(T))$ στην περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών. Διαφωτιστικό προς την κατεύθυνση αυτή παρουσιάζεται να είναι το Σχήμα 4.6. που ακολουθεί στη συνέχεια, στο οποίο απεικονίζονται κάποιες γραφικές παραστάσεις της συνδιακύμανσης της σχέσης (4.39) συναρτήσει του συντελεστή βάρους $\alpha \in [0,1]$, για διάφορους συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2$ της κατανομής των αποζημιώσεων, όπου $n_i, \lambda_i > 0$ με $i = 1,2$. Ο διαχωρισμός μεταξύ των γραφημάτων που ακολουθούν, έχει γίνει με κριτήριο τις παραμέτρους μορφής n_1, n_2 της κατανομής μας και το εύρος τιμών όπου ενδέχεται αυτές να λάβουν, με αποτέλεσμα να προκύπτουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις. Το γράφημα (i) αναφέρεται στην περίπτωση όπου και οι δύο παράμετροι μορφής της κατανομής μας είναι μικρότερες της μονάδας, το (ii) στην περίπτωση όπου αυτές είναι μεγαλύτερες της μονάδας, το (iii) όταν έστω μία από τις παραμέτρους n_1, n_2 ισούται με τη μονάδα, ενώ τέλος το γράφημα (iv) αναφέρεται στην περίπτωση όπου $n_i < 1$ και $n_j > 1$, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\}$.

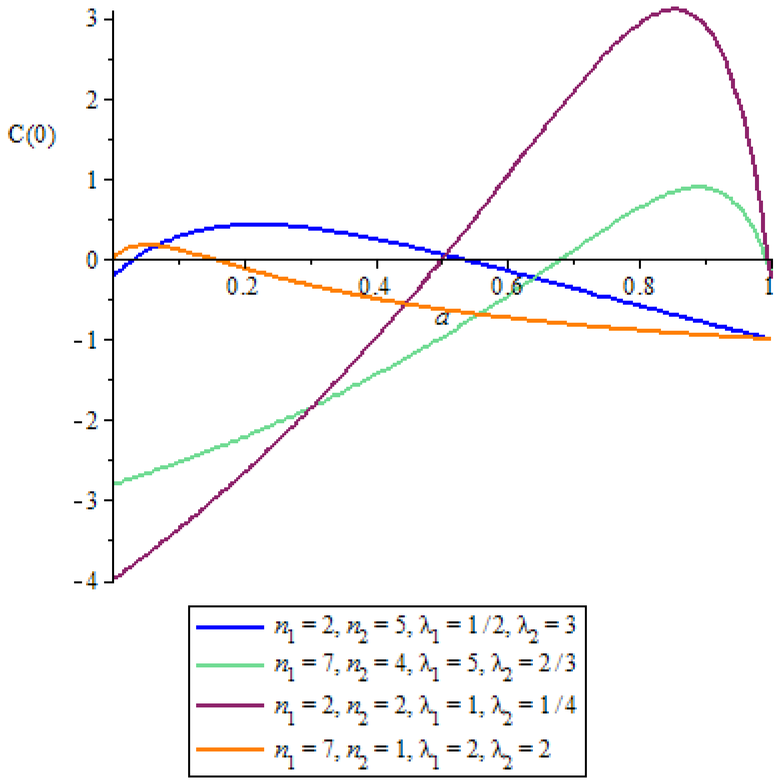
ΣΧΗΜΑ 4.6.

Συνδιακύμανση των V(T-),V(T), όταν F=αG(n1,λ1)+ (1-α)G(n2,λ2)

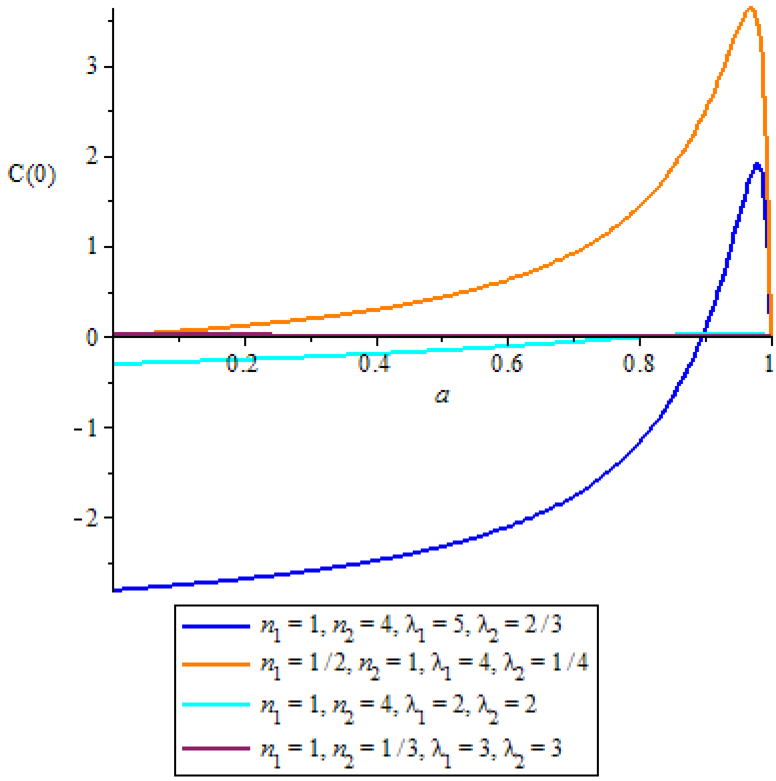
(i) $n_1, n_2 < 1$



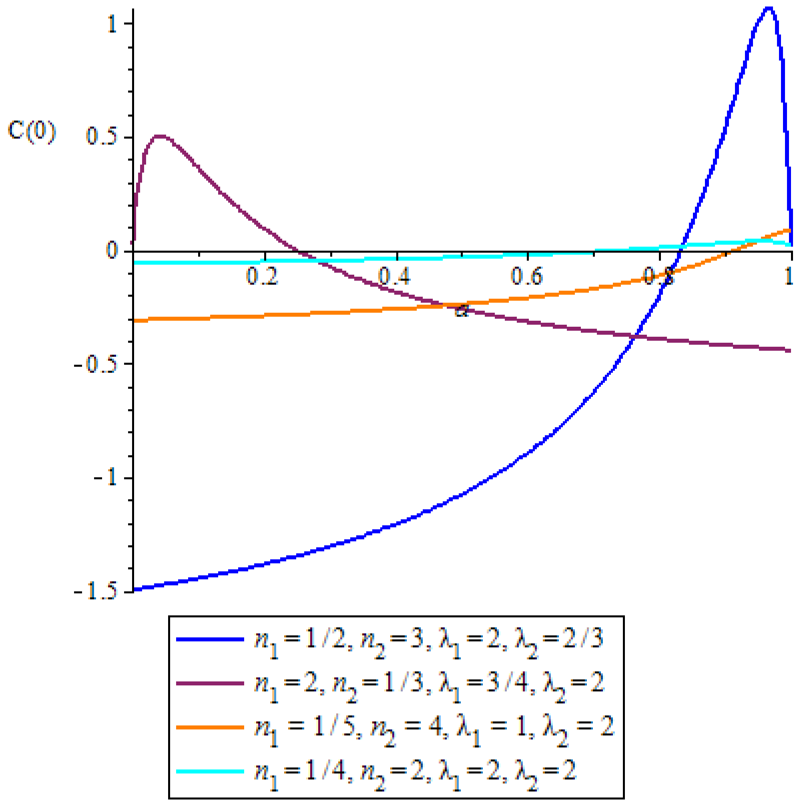
(ii) $n_1, n_2 > 1$



(iii) $n_i = 1$ και $n_j \neq 1$, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\}$



(iv) $\mathbf{n}_i < 1$ και $\mathbf{n}_j > 1$, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\}$



Όπως λοιπόν προκύπτει από τα ανωτέρω γραφήματα, η συνάρτηση $Cov(V(T-),V(T))$ φαίνεται να παρουσιάζει σταθερή συμπεριφορά ως προς τη μεταβολή του προσήμου της, μόνο στην περίπτωση όπου οι παράμετροι μορφής της κατανομής των αποζημιώσεών μας είναι μικρότερες της μονάδες (βλ. γράφημα 4.6 (i)). Συνεπώς, στην περίπτωση όπου για τη μίξη των δύο Γάμμα κατανομών έχουμε $n_1, n_2 < 1$ και ανεξαρτήτως των λοιπών τιμών των a, λ_1, λ_2, θα ισχύει πάντοτε ότι $Cov(V(T-),V(T)) \geq 0$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.(i) θα ισχύει $F_e \in DFR$. Προκύπτει δηλαδή ότι η κατανομή ισορροπίας ακολουθεί την ίδια συμπεριφορά με την αρχική κατανομή των αποζημιώσεων F, η οποία όπως προέκυψε από την εφαρμογή 2.6. ανήκει ομοίως στην κλάση γήρανσης DFR ως μίξη κατανομών DFR.

Αντίθετα, στις περιπτώσεις αποζημιώσεων όπου ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών με παραμέτρους μορφής $n_1, n_2 > 1$ ή η μία εκ των δύο Γάμμα έχει παράμετρο μορφής μικρότερη της μονάδος και η άλλη μεγαλύτερη, παρατηρούμε από τα γραφήματα 4.6 (ii) και 4.6 (iv) αντίστοιχα, ότι το πρόσημο της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ μπορεί να ποικίλει. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ισχύει σε κάποιες των περιπτώσεων ότι $Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ και σε κάποιες άλλες $Cov(V(T-),V(T))\leq 0$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γράφημα 4.6 (iii), στο οποίο απεικονίζεται η περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών εκ των οποίων για την μία ισχύει $n_i<1$ και για την άλλην $n_j>1$, όπου $i\neq j$, $i,j\in\{1,2\}$. Σύμφωνα με αυτήν, η κατανομή των απαιτήσεων που καταφθάνουν προς μία ασφαλιστική ταυτίζεται με τη μίξη μίας Εκθετικής και μίας Γάμμα κατανομής, με αποτέλεσμα να ισχύει $r'(x)<0$ και $F\in DFR$ ως μίξη κατανομών που ανήκουν στη κλάση γήρανσης DFR (βλ. Θεώρημα 2.2). Σύμφωνα λοιπόν με το γράφημα 4.6 (iii), στην περίπτωση της κατανομής $F=aGamma(1,\lambda)+(1-a)Gamma(n,\lambda)$, $n<1$, θα ισχύει ότι $Cov(V(T-),V(T))\geq 0$, με αποτέλεσμα η κατανομή ισορροπίας να μιμείται τη συμπεριφορά της αρχικής κατανομής των αποζημώσεων και να ισχύει $F_e\in DFR$.

Τέλος, στην περίπτωση αποζημιώσεων όπου $F=aGamma(1,\lambda)+(1-a)Gamma(n,\lambda)$, $n>1$, το πρόσημο της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών παρουσιάζει και πάλι διάφορες μορφές, σημειώνοντας άλλοτε $Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ και άλλοτε $Cov(V(T-),V(T))\leq 0$.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, προκύπτει ότι στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών, η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Κάνοντας μία προσπάθεια συνδυασμού των αποτελεσμάτων που προέκυψαν για το πρόσημο της συνάρτησης $Cov(V(T-),V(T))$ από το Σχήμα 4.6. με εκείνα της μελέτης της βαθμίδας αποτυχίας του 2ου Κεφαλαίου, προκύπτει ότι:

(α) Για $n_1,n_2<1\Rightarrow F\in DFR\Rightarrow F_e\in DFR\Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0\Rightarrow CV_e\geq 1$.

(β) Για $n_1,n_2>1\Rightarrow F\in IFR \text{ ή } DFR \text{ ή } BFR \text{ ή } UBFR\overset{?}{\Rightarrow} F_e\Rightarrow$

$$\Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0 \text{ ή } Cov(V(T-),V(T))\leq 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow CV_e\geq 1 \text{ ή } CV_e\leq 1 \text{ αντίστοιχα.}$$

(γ) Για $a \cdot G(1,\lambda)+(1-a)\cdot G(n,\lambda)$, όπου $n<1 \Rightarrow F \in DFR \Rightarrow F_e \in DFR \Rightarrow$

$$\Rightarrow Cov(V(T-),V(T)) \geq 0 \Rightarrow CV_e \geq 1.$$

(δ) Για $a \cdot G(1,\lambda)+(1-a)\cdot G(n,\lambda)$, όπου $n>1 \Rightarrow F \in IFR$ *ή* DFR *ή* BFR *ή* $UBFR \Rightarrow$

$$\overset{?}{\Rightarrow} F_e \Rightarrow Cov(V(T-),V(T)) \geq 0 \text{ ή } Cov(V(T-),V(T)) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CV_e \geq 1 \text{ ή } CV_e \leq 1 \text{ αντίστοιχα.}$$

(ε) Για $n_i<1$ & $n_j>1$, $\mu\varepsilon\, i \neq j \;\kappa\alpha\iota\; i,j \in \{1,2\} \Rightarrow F \in IFR$ *ή* DFR *ή* BFR *ή* $UBFR \Rightarrow$

$$\overset{?}{\Rightarrow} F_e \Rightarrow Cov(V(T-),V(T)) \geq 0 \text{ ή } Cov(V(T-),V(T)) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CV_e \geq 1 \text{ ή } CV_e \leq 1 \text{ αντίστοιχα.}$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα τα οποία θα αναφέρονται στις περιπτώσεις (β) και (δ) αντίστοιχα, οι οποίες όπως είναι φυσικό παρουσιάζουν μαζί με εκείνη της περίπτωσης (ε) και το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Όπως γίνεται αντιληπτό και από τα ανωτέρω αποτελέσματα στις περιπτώσεις αυτές, πέραν των δυνατών ενδεχομένων να ισχύει για την κατανομή των αποζημιώσεων $F \in IFR$ ή $F \in DFR$, για τις οποίες σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.3. θα ισχύει ομοίως και για την κατανομή ισορροπίας $F_e \in IFR$ ή $F_e \in DFR$ αντίστοιχα, υπάρχει το ενδεχόμενο η F να ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις γήρανσης *BFR* ή *UBFR*. Αξίζει λοιπόν να εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας σε αυτές τις περιπτώσεις και να εξετάσουμε το κατά πόσο η βαθμίδα αποτυχίας r_e "μιμείται" την συμπεριφορά της $r(x)$, ακολουθώντας την ίδια μονοτονία με αυτήν και για τη συγκεκριμένη κατηγορία κλάσεων.

Εφαρμογή 4.4. Συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-),V(T)$, όταν $F = \frac{1}{2}G(2,1)+\frac{1}{2}G(4,2)$.

Έστω ότι η κατανομή F των αποζημιώσεων μίας ασφαλιστικής είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών με συντελεστή βάρους $a=1/2$, παραμέτρους μορφής $n_1=2, n_2=4$ και παραμέτρους κλίμακας $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι ίση:

$$f(x)=\frac{1}{6}xe^{-x}\left(3+8e^{-x}x^2\right), \quad x \geq 0,$$

ενώ η συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}x+\frac{1}{2}e^{-2x}+e^{-2x}x+e^{-2x}x^2+\frac{2}{3}e^{-2x}x^3, \quad x \geq 0.$$

Υπολογίζοντας τις τρεις πρώτες ροπές της κατανομής μας σύμφωνα με τη σχέση (4.38) και αντικαθιστώντας στον υπολογιστικό τύπο (4.19) για την εύρεση της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, προκύπτει ότι η συνάρτηση της συνδιακύμανσης είναι μη θετική και συγκεκριμένα:

$$Cov(V(T-), V(T)) = -\frac{17}{64}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.8), η βαθμίδα αποτυχίας των αποζημιώσεών μας θα είναι ίση με:

$$r(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{xe^{-x}\left(3 + 8^{-x}x^2\right)}{\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}x + \frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-2x}x + e^{-2x}x^2 + \frac{2}{3}e^{-2x}x^3}, \quad x \geq 0.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας (βλ. Σχέση 3.27) θα ισούται με:

$$f_e = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}x + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x}x^2 + \frac{1}{3}e^{-2x}x^3$$

$$\Rightarrow F_e = \frac{1}{4}G(1,1) + \frac{1}{4}G(2,1) + \frac{1}{8}G(1,2) + \frac{1}{8}G(2,2) + \frac{1}{8}G(3,2) + \frac{1}{8}G(4,2). \qquad (4.40)$$

Προκύπτει λοιπόν, ότι η κατανομή ισορροπίας F_e είναι η μίξη $\mathrm{k} = n_1 + n_2 = 6$ Γάμμα κατανομών με συντελεστές βάρους για τους οποίους ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1, \text{ όπου } k = 1,..,6.$$

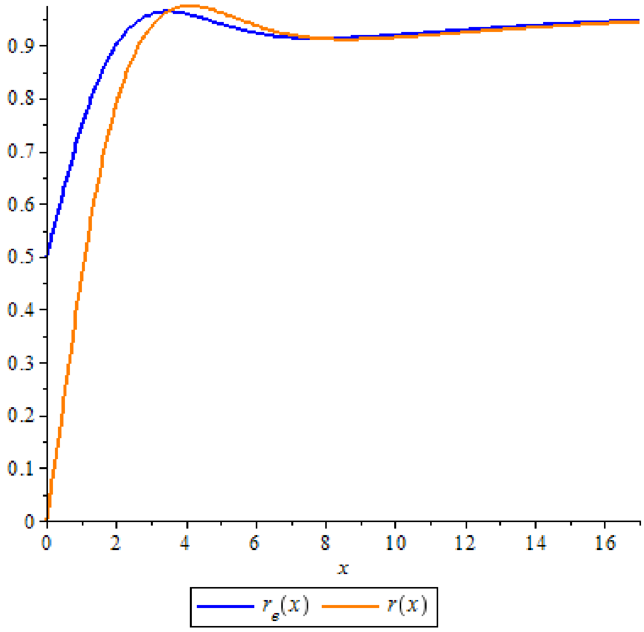
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, υπολογίζουμε τη βαθμίδα αποτυχίας της F_e η οποία είναι ίση:

$$r_e(x) = \frac{\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}x + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x}x^2 + \frac{1}{3}e^{-2x}x^3}{\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}x + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x}x^2 + \frac{1}{6}e^{-2x}x^3}, \quad x \geq 0.$$

ΣΧΗΜΑ 4.7.

Βαθμίδες αποτυχίας r(x) & re(x) της κατανομής των αποζημιώσεων

όταν F=1/2G(2,4)+ 1/2G(2,1/2)



Στο Σχήμα 4.7. παρουσιάζονται τα γραφήματα των βαθμίδων αποτυχίας $r(x)$ και $r_e(x)$ για την περίπτωση όπου η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $F = 1/2G(2,2) + 1/2G(4,1/2)$. Όπως λοιπόν προκύπτει, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας φαίνεται να "μιμείται" τη μονοτονία της κατανομής εκείνης των αρχικών αποζημιώσεων και να διαγράφουν σχεδόν όμοια πορεία. Υπολογίζοντας τα αντίστοιχα όρια στο υπολογιστικό πρόγραμμα Maple προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0} r_e(x) = 1/2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} r(x) = 0.$$

Παρουσιάζεται λοιπόν η βαθμίδα αποτυχίας $r(x)$ να ξεκινάει από το σημείο x=0 λαμβάνοντας τη τιμή μηδέν και να σημειώνει μία ανοδική πορεία περίπου μέχρι το $x \approx 4$, για να ακολουθήσει στη συνέχεια μία σύντομη καθοδική πορεία μέχρι το σημείο $x \approx 8$ και να αρχίσει ξανά την αύξουσα πορεία της (συνδυασμός ιδιοτήτων UBFR και BFR). Αντίστοιχα, η $r_e(x)$ παρουσιάζεται να ξεκινάει από το σημείο x=0 λαμβάνοντας τιμή $r_e(0)$=0.5, και να ακολουθεί την ίδια ακριβώς πορεία με την $r(x)$, σημειώνοντας ανοδική πορεία περίπου μέχρι το σημείο $x \approx 3$, στη συνέχεια φθίνουσα μέχρι το $x \approx 7$ και να συνεχίσει με τη σειρά της εκ νέου την ανοδική της πορεία. Και για τις δύο περιπτώσεις, προκύπτει για τις βαθμίδες αποτυχίας $r(x)$ και $r_e(x)$ ότι:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} r_e(x) = 1,$$

δηλαδή τόσο η βαθμίδα αποτυχίας της αρχικής κατανομής των αποζημιώσεών μας όσο και η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας, συγκλίνουν στη μονάδα.

Τέλος, υπολογίζοντας τις δύο πρώτες ροπές της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων και αντικαθιστώντας σύμφωνα με την σχέση (4.21) προκύπτει για το συντελεστή μεταβλητότητας:

$$CV_e = \frac{\sqrt{\frac{13}{4} - \left(\frac{11}{8}\right)^2}}{\frac{11}{8}} = \frac{\sqrt{\frac{87}{64}}}{\frac{11}{8}} = \frac{1}{11}\sqrt{87} \approx 0.84794 \ < 1.$$

Συγκεντρώνοντας όλα τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν, καταλήξαμε στο γεγονός ότι στην περίπτωση αποζημιώσεων όπου $F = 1/2G(2,2) + 1/2G(4,1/2)$, η κατανομή των αποζημιώσεων αλλά και η κατανομή ισορροπίας F_e θα ανήκουν σε μία νέα κλάση κατανομών, η οποία για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας θα αποκαλείται έστω MBUBFR (Mixed Bathtub & Upside-down Bathtub Failure Rate). Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για $u = 0$ θα είναι αρνητική, ενώ για το συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας θα ισχύει ότι αυτός θα είναι μικρότερος της μονάδας.

Εφαρμογή 4.5. Συνδιακύμανση των τ.μ. $V(T-), V(T)$, όταν $F = \frac{1}{2}G\left(1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}G(2,3)$.

Έστω ότι οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς μία ασφαλιστική ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα, με συντελεστή βάρους $a = 1/2$ και παραμέτρους $n_1 = 1, n_2 = 2, \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 3$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι ίσες με:

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{9}{2}xe^{-3x}, \quad x \geq 0,$$

και

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{3}{2}xe^{-3x}, \quad x \geq 0.$$

Κατόπιν υπολογισμού προκύπτει ότι $p_1 = 4/3$, $p_1 = 13/3$, $p_1 = 220/9$ και αντικαθιστώντας στον υπολογιστικό τύπο της συνδιακύμανσης στη σχέση (4.19) προκύπτει ότι:

$$Cov(V(T-),V(T)) = \frac{239}{576} \approx 0.41493 \quad > 0.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας σύμφωνα με τη σχέση (3.27), θα είναι ίση με:

$$f_e = \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{8}e^{-3x} + \frac{9}{8}xe^{-3x}$$

$$\Rightarrow F_e = \frac{6}{8}G\left(1, \tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}G(1,3) + \frac{1}{8}G(2,3). \qquad (4.41)$$

Από την σχέση (4.41) είναι εμφανές ότι η F_e ακολουθεί τη μίξη $\mathrm{k} = n_1 + n_2 = 3$ Γάμμα κατανομών με συντελεστές βάρους a_i, $i = 1,2,3$, για τους οποίους ισχύει $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Η βαθμίδα αποτυχίας των αποζημιώσεων θα είναι ίση με το πηλίκο:

$$r(x) = \frac{\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{9}{2}xe^{-3x}}{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{3}{2}xe^{-3x}}, \qquad x \geq 0,$$

ενώ η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας θα δίνεται από τη σχέση:

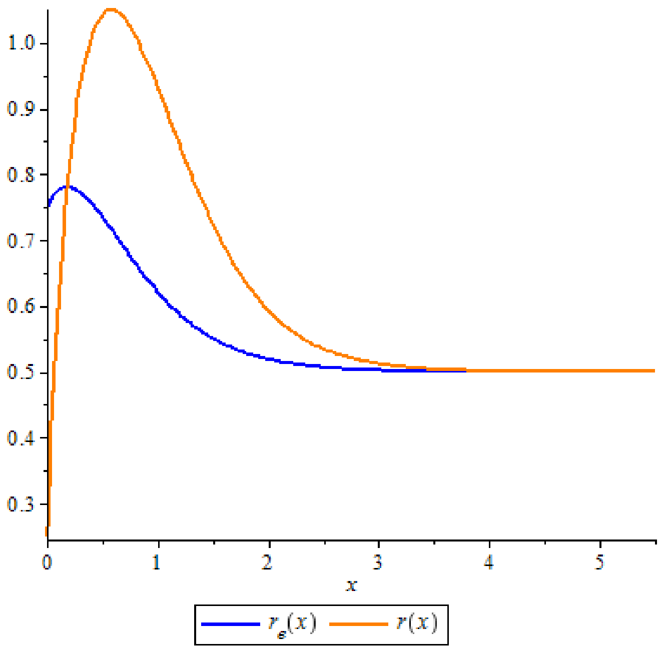
$$r_e(x) = \frac{\frac{3}{8}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{8}e^{-3x} + \frac{9}{8}xe^{-3x}}{\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{-3x} + \frac{3}{8}xe^{-3x}}, \qquad x \geq 0.$$

Στο Σχήμα 4.8. που ακολουθεί παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των βαθμίδων αποτυχίας $r(x)$ και $r_e(x)$ για την περίπτωση της κατανομής αποζημιώσεων $F = 1/2G(2,1/2) + 1/2G(2,3)$ συναρτήσει του x. Παρατηρούμε πως για ακόμη μία φορά επαληθεύεται το γεγονός ότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας μιμείται κατά κάποιον τρόπο τη μονοτονία της $r(x)$, ακολουθώντας σχεδόν την ίδια πορεία με αυτή. Συγκεκριμένα, η βαθμίδα αποτυχίας $r(x)$ παρουσιάζεται να ξεκινάει από το σημείο x=0 λαμβάνοντας τη τιμή μηδέν, σημειώνοντας μία απότομη ανοδική πορεία μέχρι το x=0.6 και στη συνέχεια φθίνουσα πορεία μέχρι το σημείο x=3.5, όπου αρχίζει να σταθεροποιείται (ανάποδη λεκανοειδή μορφή μονοτονίας-ιδιότητα UBFR). Αντίθετα, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας παρουσιάζεται να ξεκινάει από το σημείο x=0 σημειώντας θετική τιμή $r_e(0)$=0.75, να ακολουθεί μία εξαιρετικά σύντομη ανοδική πορεία μέχρι το σημείο x=0.25, για συνεχίσει μιμούμενη την $r(x)$ μία καθοδική πορεία μέχρι το σημείο x=2.5 για να συνεχίσει τη σταθερή πορεία της, με $\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} r_e(x) = 1/2$.

ΣΧΗΜΑ 4.8.

Βαθμίδες αποτυχίας r(x) & re(x) της κατανομής των αποζημιώσεων

όταν F=1/2G(1,1/2)+ 1/2G(2,3)



Τέλος, υπολογίζοντας τις δύο πρώτες ροπές της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων και σύμφωνα με την σχέση (4.21) προκύπτει για το συντελεστή μεταβλητότητας:

$$CV_e = \frac{\sqrt{\frac{55}{9} - \left(\frac{13}{8}\right)^2}}{\frac{13}{8}} = \frac{\sqrt{\frac{1999}{576}}}{\frac{13}{8}} = \frac{1}{39}\sqrt{1999} \approx 1.14641 \quad > 1.$$

Στην περίπτωση λοιπόν της κατανομής αποζημιώσεων για την οποία ισχύει $F = \frac{1}{2}G\left(1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}G(2,3)$, αποδείξαμε ότι η αρχική κατανομή των αποζημιώσεων F αλλά και η κατανομή ισορροπίας ανήκουν στην κλάση γήρανσης UBFR. Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-)V(T)$ θα είναι θετική, ενώ ο συντελεστής μεταβλητότητας CV_e θα είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΩΝ Τ.Μ. U(T-),|U(T)|, ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΟΥ (u=0)

Στο πέμπτο και τελευταίο αυτό κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη του συντελεστή συσχέτισης (correlation coefficient) του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και για αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Θα ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας παρουσιάζοντας τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών, εφαρμόζοντας για την περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών μας $V(T-), V(T)$, προκειμένου να καταλήξουμε στον αντίστοιχο υπολογιστικό μαθηματικό τύπο για την εύρεσή του. Στη συνέχεια, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σχετική ανάλυση του Κεφαλαίου 4 αναφορικά με τη συνδιακύμανση των $V(T-), V(T)$, θα ασχοληθούμε με την μελέτη του εν λόγω συντελεστή, εφαρμόζοντας για τις περιπτώσεις κατανομών που παρακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως θα δούμε και παρακάτω, το πρόσημο του συντελεστή συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία και δεδομένου του μηδενικού αρχικού αποθεματικού, θα είναι ίδιο με εκείνο του συντελεστή $Cov(V(T-), V(T))$ και θα μεταβάλλεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο με αυτόν.

5.1. Ορισμός συντελεστή συσχέτισης

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X,Y με συντελεστή συνδιακύμανσης $Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y}$ και διασπορά $\mathrm{V}(X) = \sigma_{\mathrm{X}}^2$ και $\mathrm{V}(Y) = \sigma_Y^2$ αντίστοιχα. Ο συντελεστής συσχέτισης ορίζεται ως το πηλίκο της συνδιακύμανσης ως προς το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των τυχαίων μεταβλητών X και Y, όπως παρουσιάζεται στη σχέση που ακολουθεί:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{5.1}$$

Ο συντελεστής $\rho_{X,Y}$ αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού της γραμμικής σχέσης μεταξύ των τ.μ. X,Y. Όπως είναι εμφανές από την σχέση (5.1), ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το γινόμενο δύο θετικών συναρτήσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο συντελεστής συσχέτισης να επηρεάζεται άμεσα από τις τιμές της συνδιακύμανσης και να αναπαράγει όλες τις πληροφορίες όπου αυτός παρέχει, όσον αφορά τον τρόπο μεταβολής της μίας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη. Ισχύουν δηλαδή οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

$$\rho_{X,Y} > 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) > 0, \tag{5.2}$$

$$\rho_{X,Y} < 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) < 0, \tag{5.3}$$

$$\rho_{X,Y} = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0. \tag{5.4}$$

Το πλεονέκτημα που παρουσιάζει ο συντελεστής συσχέτισης έναντι της συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών X,Y, είναι ότι ο πρώτος δεν επηρεάζεται από τυχόν προκύπτουσες αλλαγές στις μονάδες μέτρησης σε αντίθεση με τον δεύτερο. Επιπλέον, ισχύει ότι $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$, δηλαδή υπάρχει περιορισμένο εύρος τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης, σε αντίθεση με την ποσότητα $Cov(X,Y)$ που μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή, αρνητική, θετική ή μηδέν. Μάλιστα, στις περιπτώσεις εκείνες για τις οποίες ισχύει ότι $\rho_{X,Y} = 1$ ή $\rho_{X,Y} = -1$, προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους μέσω γραμμικού συνδυασμού και συγκεκριμένα θα ισχύει ότι:

$$Y = \alpha X + \beta, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathrm{R},\ \alpha > 0.$$

Απόδειξη: Βλ. Κούτρας (2005), σελ.192-193.

5.2. Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης στην περίπτωση των τ.μ. $V(T-), V(T)$

Ο συντελεστής συσχέτισης των πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $V(T-)$ και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $V(T)$, δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, αντικαθιστώντας στην σχέση (5.1) είναι της μορφής:

$$\rho(0) = Corr[V(T-), V(T)] = \frac{Cov(V(T-), V(T))}{\sqrt{\mathrm{V}(V(T-))} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(V(T))}}, \tag{5.5}$$

όπου η τιμή $Cov(V(T-),V(T))$ υπολογίζεται μέσω της σχέσης (4.19) όπου παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για την εύρεση της διακύμανσης του πλεονάσματος πριν και κατ' επέκταση και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $V(T-),V(T)$ είναι ισόνομες (βλ. σχέση (4.9)), χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{V}(V(T-)) = E\left[(V(T-))^2\right] - \left[E(V(T-))\right]^2, \tag{5.6}$$

όπου $E(V(T-)) = \dfrac{p_2}{2p_1}$.

Κάνοντας χρήση της πυκνότητας πιθανότητας της σχέσεως (4.4), υπολογίζουμε την δεύτερη ροπή της τ.μ. $V(T-)$. Σύμφωνα με αυτήν έχουμε:

$$\begin{aligned}
E\left[(V(T-))^2\right] &= \int_0^\infty x^2 \cdot h_X(x\,|\,0)dx \\
&= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty x^2\left[1-F(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{p_1}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\left[1-F(x)\right]\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x^3}{3}\left[1-F(x)\right]' dx\right\} \\
&= \frac{1}{3p_1}\int_0^\infty x^3 f(x)dx.
\end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$E\left[(V(T-))^2\right] = \frac{p_3}{3p_1}, \tag{5.7}$$

όπου p_1, p_3, είναι η πρώτη και τρίτη τάξεως ροπή της κατανομής F γύρω από το μηδέν.

Σύμφωνα λοιπόν με το αποτέλεσμα της σχέσεως (5.7) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{V}(V(T-)) = \mathrm{V}(V(T)) = \frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2, \tag{5.8}$$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (5.5) για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$, έχουμε:

$$Corr[V(T-),V(T)] = \frac{\frac{p_3}{6p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}{\sqrt{\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}} = \frac{\frac{p_3}{6p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}{\sqrt{\left[\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2\right]^2}}$$

$$\Rightarrow Corr[V(T-),V(T)] = \rho(0) = \frac{\frac{p_3}{6p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}{\frac{p_3}{3p_1} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2}. \tag{5.9}$$

Η παραπάνω σχέση (βλ. σχέση (5.9)), μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά αντί κάνοντας χρήση των ροπών της αρχικής κατανομής των αποζημιώσεών μας, μέσω του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας, απ’ όπου προκύπτει:

$$\rho(0) = \frac{CV_e^2 - 1}{2CV_e^2} < \frac{1}{2}, \tag{5.10}$$

βλ. Psarrakos and Politis (2012), σελ. 649.

5.3. Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. $V(T-),V(T)$ στην περίπτωση γνωστών ζημιοκατανομών, αριθμητικά παραδείγματα και γραφική αναπαράσταση του συντελεστή

Στην προηγούμενη ενότητα παρακολουθήσαμε τη διαδικασία υπολογισμού του συντελεστή συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για $u = 0$, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, παρουσιάζοντας τον αντίστοιχο μαθηματικό τύπο για την εύρεσή του. Στο σημείο αυτό, για κάθε μία των περιπτώσεων κατανομών με τις οποίες ασχοληθήκαμε στα πλαίσια του Κεφαλαίου 4, θα υπολογίσουμε τις τυπικές αποκλίσεις των μη ελλειμματικών τ.μ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη της ποσότητας $C(0)$, θα υπολογίσουμε τον συντελεστή $Corr[V(T-),V(T)]$ βάσει της σχέσεως (5.9). Θα επαληθεύσουμε ότι η μεταβολή του προσήμου του συντελεστή $\rho(0)$ είναι ανάλογη της τιμής της συνδιακύμανσης που παρακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ ταυτόχρονα θα επιβεβαιώσουμε την ισχύ της σχέσεως (5.10), σύμφωνα με την οποία το εύρος τιμών του $Corr[V(T-),V(T)]$ κυμαίνεται μεταξύ των τιμών -1 και 1/2.

5.3.1. Η συσχέτιση στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων

Έστω ότι οι αποζημιώσεις προς τους ασφαλισμένους σε μία ασφαλιστική ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι ίσες με $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$ αντίστοιχα, $x \geq 0$.

Η k-τάξεως ροπή της κατανομής ζημιών θα είναι της μορφής:

$$p_k = E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k},$$

όπου αντικαθιστώντας για k=1,2 λαμβάνουμε την τιμή της πρώτης και δεύτερης ροπής της κατανομής F αντίστοιχα. Προκύπτει λοιπόν:

$$p_1 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad p_2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Η διακύμανση (διασπορά) της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, για $u = 0$, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία θα υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathrm{V}(V(T-)) = \mathrm{V}(V(T)) = E(X^2) - [E(X)]^2, \tag{5.11}$$

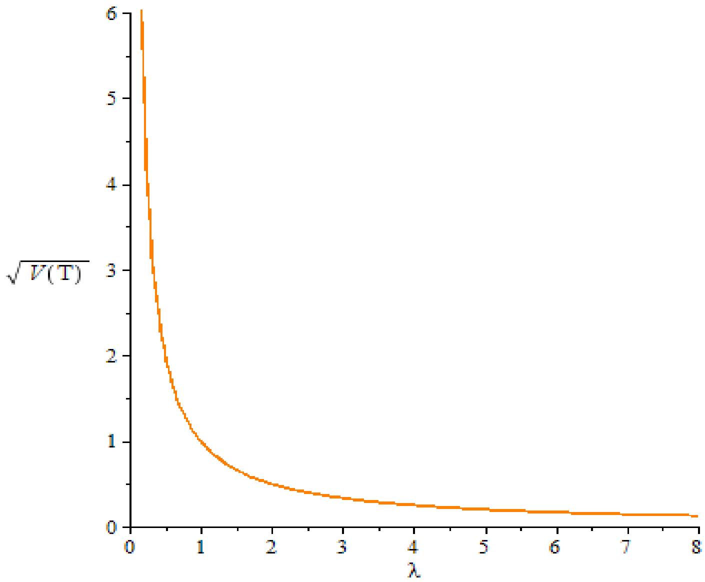
από όπου προκύπτει για την περίπτωση της Εκθετικής κατανομής των αποζημιώσεων:

$$\mathrm{V}(V(T-)) = \mathrm{V}(V(T)) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.12}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό από την παραπάνω σχέση, η διασπορά των τ.μ. $V(T-),V(T)$ και η παράμετρος λ της κατανομής των αποζημιώσεών μας, είναι μεγέθη αντιστρόφως συσχετιζόμενα. Πράγματι, όπως παρουσιάζεται και στο γράφημα που ακολουθεί, στο οποίο απεικονίζεται η τυπική απόκλιση του ελλείμματος (πλεονάσματος) δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή η ποσότητα $\sqrt{V(T)}$ (ή $\sqrt{V(T-)}$ αντίστοιχα) συναρτήσει της παραμέτρου λ, προκύπτει ότι για $\lambda \uparrow \infty$ ισχύει $\sqrt{V(T)} \downarrow 0$, ενώ όταν $\lambda \downarrow 0$ ισχύει $\sqrt{V(T)} \uparrow +\infty$.

ΣΧΗΜΑ 5.1.

Τυπική απόκλιση της τ.μ. V(T), όταν F=Exp(λ)



Από τη σχέση (5.12) και λαμβανομένου υπόψη του αποτελέσματος της Ενότητας 3.2.1. ότι στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής αποζημιώσεων ισχύει $Cov(V(T-),V(T))=0$, αντικαθιστώντας στη σχέση (5.5) για την εύρεση του συντελεστή συσχέτισης προκύπτει ότι:

$$Corr[V(T-),V(T)]=0. \tag{5.13}$$

Δηλαδή για αρχικό αποθεματικό ίσο με το μηδέν, η τυχαία μεταβλητή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο εμφάνισης χρεοκοπίας, είναι δύο στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, να μην διαδραματίζει κανένα καθοριστικό παράγοντα στη διαμόρφωση του μεγέθους του ελλείμματος όταν επέλθει χρεοκοπία, το οποίο είναι φυσική συνέπεια της αμνημόνου ιδιότητας που χαρακτηρίζει την εν λόγω κατανομή.

5.3.2. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Έστω ότι η κατανομή F των αποζημιώσεων μίας ασφαλιστικής, είναι η μίξη δύο Εκθετικών με παραμέτρους $\beta_1,\beta_2>0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)=\alpha\cdot\beta_1 e^{-\beta_1\cdot x}+(1-\alpha)\cdot\beta_2 e^{-\beta_2\cdot x}\ ,\quad x\geq 0 \text{ και } \alpha\in[0,1].$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Ενότητας 4.3.2., ισχύει για τις τρεις πρώτες ροπές ότι:

$$p_1=a\frac{1}{\beta_1}+(1-a)\frac{1}{\beta_2},\quad p_2=a\frac{2}{\beta_1^{\ 2}}+(1-a)\frac{2}{\beta_2^{\ 2}},\quad p_3=a\frac{6}{\beta_1^{\ 3}}+(1-a)\frac{6}{\beta_2^{\ 3}},$$

ενώ ο συντελεστής συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ είναι ίσος με:

$$Cov(V(T-),V(T))=\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha\beta_2+(1-\alpha)\beta_1}\right)^2\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta_1\beta_2}.$$

Η διασπορά του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας), δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για $u=0$, σύμφωνα με τη σχέση (5.8) θα είναι ίση:

$$\mathrm{V}(V(T-))=\frac{a^2\beta_2^4+2\alpha\beta_1(1-\alpha)\beta_2^3+2\alpha\beta_1^2(\alpha-1)\beta_2^2+2\alpha\beta_1^3(1-\alpha)\beta_2+\beta_1^4\left(1-2\alpha+\alpha^2\right)}{\beta_1^2\beta_2^2\left[\alpha\beta_2+(1-\alpha)\beta_1\right]^2}.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στο Maple βάσει της σχέσεως (5.5) για την εύρεση του συντελεστή συσχέτισης των $V(T-),V(T)$ και κάνοντας κάποιους αλγεβρικούς υπολογισμούς, προκύπτει ότι:

$$\rho(0)=\frac{a(1-a)\beta_1\beta_2(\beta_1-\beta_2)^2}{a^2\beta_2^4+2\alpha(1-\alpha)\beta_1\beta_2\left[(\beta_1-\beta_2)^2+\beta_1\beta_2\right]+(1-a)^2\beta_1^4}. \tag{5.14}$$

Από τη σχέση (5.14) προκύπτει ότι στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Εκθετικών, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, για μηδενικό αρχικό αποθεματικό δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι δύο άλλοτε θετικά συσχετιζόμενες και άλλοτε ασχυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές. Δηλαδή προκύπτει ότι $\rho(0)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει στην περίπτωση οι παράμετροι β_1,β_2 της κατανομής μας είναι ίσες μεταξύ τους $(\beta_1=\beta_2)$, ή ο συντελεστής βάρους ανήκει στο σύνολο $\{0,1\}$. Προφανώς η συσχέτιση παρουσιάζει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά με εκείνη της συνάρτησης $Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ η οποία μελετήθηκε στην Ενότητα 4.3.2..

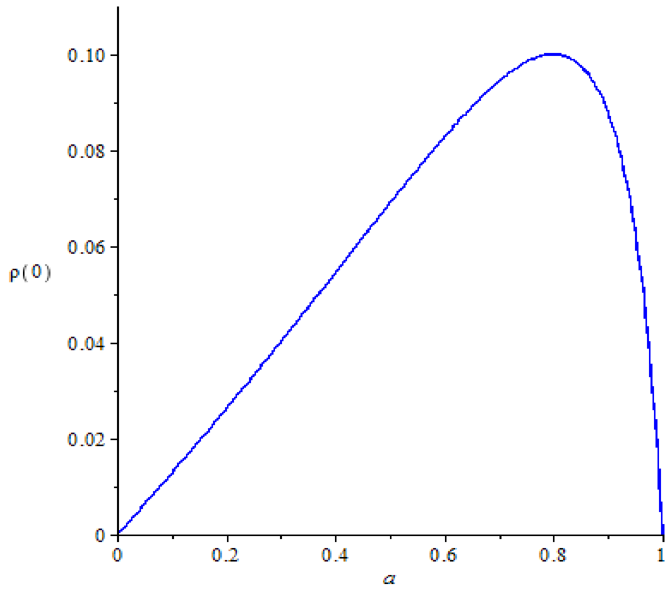
Εφαρμογή 5.1. Συσχέτιση των τ.μ. $V(T-), V(T)$, όταν $F = \alpha Exp\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)Exp\left(\frac{1}{4}\right)$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή των απαιτήσεων όπου καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική ακολουθεί τη μίξη δύο εκθετικών με παραμέτρους $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$ και συντελεστή βάρους $a \in [0,1]$, ο συντελεστής συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για u =0 θα είναι ίσος:

$$Corr\left[V(T-), V(T); \alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] = \frac{2a(1-a)}{5a^2 - 20a + 16}, \quad a \in [0,1]. \tag{5.15}$$

ΣΧΗΜΑ 5.2.

Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=αExp(1/2)+(1-α)Exp(1/4)



Στο Σχήμα 5.2. παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση του συντελεστή της σχέσης (5.15) συναρτήσει του συντελεστή βάρους α της κατανομής μας. Παρατηρούμε πως για τιμές 0 και 1 του συντελεστή βάρους της μίξης κατανομών μας ο συντελεστής συσχέτισης μηδενίζεται, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τη συνδιακύμανση της εν λόγω κατανομής που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ισχύει δηλαδή:

$$Corr\left[V(T-), V(T); 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] = Corr\left[V(T-), V(T); 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] = 0.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι στην περίπτωση της κατανομής αποζημιώσεων $F = \alpha Exp(1/2) + (1-\alpha)Exp(1/4)$, ισχύει ότι $\rho(0) \geq 0$, με το συντελεστή συσχέτισης να παρουσιάζει μέγιστο στα σημεία:

$$\frac{d}{da} Corr\left[V(T-), V(T); \alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] = 0 \Rightarrow \frac{2(5a-4)(3a-4)}{(5a^2-20a+16)^2} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3} \;\&\; a_2 = \frac{4}{5}\;.$$

Από τις λύσεις που προέκυψαν, η $a_1 = 4/3$ απορρίπτεται καθώς ισχύει για το συντελεστή βάρους ο περιορισμός $a \in [0,1]$. Συνεπώς, η μεγιστοποίηση του συντελεστή συσχέτισης επιτυγχάνεται στο σημείο $a = 4/5$, με το συντελεστή $\rho(0)$ να σημειώνει τιμή:

$$Corr\left[V(T-), V(T); \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{10} \quad \left(< \frac{1}{2}\right).$$

5.3.3. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα

Έστω ότι η κατανομή F των απαιτήσεων που καταφθάνουν προς μία ασφαλιστική εταιρία από τους ασφαλισμένους της, είναι η Γάμμα με παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ και παράμετρο μορφής $n > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι ίση με:

$$f(x; n, \lambda) = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{\Gamma(n)} \;, \quad x \geq 0 \text{ και } \lambda, n > 0,$$

όπου $\Gamma(n)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$.

Από τους υπολογισμούς της Ενότητας 4.3.3., προκύπτει ότι η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$ είναι ίση με:

$$Cov(V(T-), V(T)) = \frac{1-n^2}{12\lambda^2}\,,$$

ενώ η διασπορά του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας), δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για $u = 0$, σύμφωνα με τη σχέση (5.8) και δεδομένου των ροπών που προέκυψαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. σχέση (4.29) θα ισούται:

$$\mathrm{V}\big(V(T-)\big)=\frac{(n+1)(n+5)}{12\,\lambda^2}.$$

Υπολογίζοντας το πηλίκο της συνδιακύμανσης των τ.μ. $V(T-),V(T)$, προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διασπορών τους (βλ. σχέση (5.5)), προκύπτει ότι ο συντελεστής συσχέτισης των εν λόγω μεταβλητών είναι ίσος με:

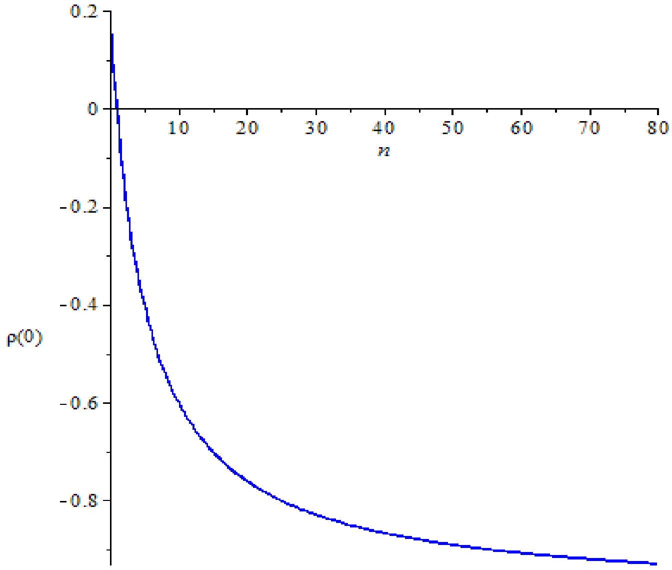
$$Corr\big[V(T-),V(T)\big]=\frac{1-n}{n+5},\quad n>0. \tag{5.16}$$

Παρατήρηση 5.1. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, για αρχικό αποθεματικό $u=0$, είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου κλίμακας λ της κατανομής των αποζημιώσεων και εξαρτάται αποκλειστικά και μόνον από την παράμετρο μορφής $n>0$.

Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι για τιμές της παραμέτρου $0<n<1$ ισχύει ότι $\rho(0)>0$, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $V(T-),V(T)$ είναι θετικά συσχετιζόμενες. Για $n=1$ όπως ήταν αναμενόμενο, η Γάμμα κατανομή των αποζημιώσεων ταυτίζεται με την Εκθετική με αποτέλεσμα ο συντελεστής συσχέτισης να μηδενίζεται ($\rho(0)=0$). Τέλος, για τιμές της παραμέτρου μορφής $n>1$, προκύπτει ότι $\rho(0)<0$, δηλαδή υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ των τ.μ. $V(T-),V(T)$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για αρχικό αποθεματικό $u=0$, όσο μεγαλύτερη η τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, αναμένεται να παρουσιαστεί μικρότερο έλλειμμα την στιγμή επέλευσης της χρεοκοπίας, ενώ αντίθετα για μικρές τιμές της τ.μ. $V(T-)$, το έλλειμμα που αναμένεται να σημειωθεί κατά τη χρεοκοπία είναι μεγάλο. Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι αντίστοιχα εκείνων που προέκυψαν κατά τη μελέτη της συνδιακύμανσης στην περίπτωση της Γάμμα κατανομής στο Κεφάλαιο 4 και συνοψίζονται στο γράφημα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 5.3.

Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=Gamma(n,λ)



Σύμφωνα με το Σχήμα 5.3., ο συντελεστής συσχέτισης ρ(0) των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ είναι μία φθίνουσα κυρτή συνάρτηση, όπως προκύπτει και κατά τον υπολογισμό των δύο πρώτων παραγώγων της συνάρτησης αυτής ως προς n. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\rho'(0;n) = -\frac{6}{(n+5)^2} < 0 \quad \text{και} \quad \rho''(0;n) = \frac{12}{(n+5)^3} > 0 .$$

Επιπλέον, λόγω της ασυμπωτικής συμπεριφοράς του συντελεστή συσχέτισης στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή, υπολογίζοντας τα αντίστοιχα όρια προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to 0} \rho(0) = 1/5 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \rho(0) = -1,$$

δηλαδή η συνάρτηση $Corr[V(T-),V(T)]$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 0.2, με το εύρος τιμών της να κυμαίνεται εντός του διαστήματος που ορίζεται στη δέσμευση της σχέσεως (5.10).

5.3.4. Η συσχέτιση στην περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών

Έστω ότι οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς μία ασφαλιστική ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών, έστω $G(n_1,\lambda_1)$ και $G(n_2,\lambda_2)$, με παραμέτρους μορφής $n_1,n_2>0$, παραμέτρους κλίμακας $\lambda_1,\lambda_2>0$ και συντελεστή βάρους $\alpha\in[0,1]$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ θα υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$f(x;a,n_1,n_2,\lambda_1,\lambda_2)=\alpha\frac{\lambda_1^{n_1}\cdot x^{n_1-1}\cdot e^{-\lambda_1\cdot x}}{\Gamma(n_1)}+(1-\alpha)\frac{\lambda_2^{n_2}\cdot x^{n_2-1}\cdot e^{-\lambda_2\cdot x}}{\Gamma(n_2)}\quad,\quad x\geq 0,$$

όπου $\Gamma(n)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}t^{n-1}\cdot e^{-t}dt$.

Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ σύμφωνα με τη σχέση (4.39) είναι ίση με:

$$Corr[V(T-),V(T)]=\frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha n_1\lambda_2^{3}[(n_1+1)(n_1+2)]+(1-a)n_2\lambda_1^{3}[(n_2+1)(n_2+2)]}{\lambda_1^{2}\lambda_2^{2}[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1]}$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left[an_1\lambda_2^{2}(n_1+1)+(1-a)n_2\lambda_1^{2}(n_2+1)\right]^2}{\lambda_1^{2}\lambda_2^{2}[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1]^2}.$$

Στην Ενότητα 4.3.4. βάσει της σχέσεως (4.38) υπολογίσαμε τις τρεις πρώτες ροπές για την περίπτωση της μίξης δύο Γάμμα κατανομών. Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν καταλλήλως σύμφωνα με τη σχέση (5.8), προκύπτει ότι η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $V(T-)$ ($V(T)$ αντίστοιχα) ισούται με:

$$\mathrm{V}[V(T-)]=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha n_1\lambda_2^{3}[(n_1+1)(n_1+2)]+(1-a)n_2\lambda_1^{3}[(n_2+1)(n_2+2)]}{\lambda_1^{2}\lambda_2^{2}[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1]}$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left[an_1\lambda_2^{2}(n_1+1)+(1-a)n_2\lambda_1^{2}(n_2+1)\right]^2}{\lambda_1^{2}\lambda_2^{2}[an_1\lambda_2+(1-a)n_2\lambda_1]^2}.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι ο συντελεστής συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι ίσος:

$$\rho(0) = \frac{2A - 3B^2}{4A - 3B^2}, \tag{5.17}$$

όπου:

$$A = \left[an_1\lambda_2 + (1-a)n_2\lambda_1\right] \cdot \left\{an_1\lambda_2^{\,3}\left[(n_1+1)(n_1+2)\right] + (1-a)n_2\lambda_1^{\,3}\left[(n_2+1)(n_2+2)\right]\right\},$$

και

$$B = an_1\lambda_2^{\,2}(n_1+1) + (1-a)n_2\lambda_1^{\,2}(n_2+1).$$

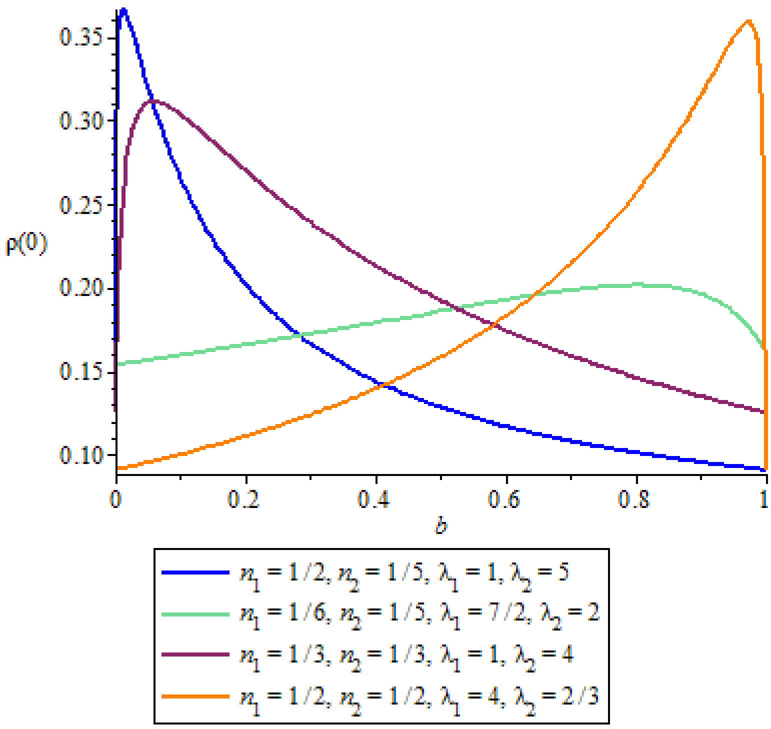
Όπως και στην περίπτωση της διακύμανσης των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών, έτσι και εδώ, είναι δύσκολο να βγάλουμε κάποιο γενικό συμπέρασμα για το πρόσημο της συσχέτισης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $V(T-), V(T)$, λόγω του πολύπλοκου κλάσματος. Το μόνο σίγουρο είναι ότι το πρόσημο της συνάρτησης $\rho(0)$ θα μεταβάλλεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο με εκείνο της συνάρτησης $Cov(V(T-), V(T))$, για όλες των περιπτώσεων που εξετάσαμε στην Ενότητα 4.3.4..

Στο Σχήμα 5.4. που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα γραφήματα του συντελεστή συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για $u = 0$, συναρτήσει του συντελεστή βάρους $\alpha \in [0,1]$, για τους συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων $n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2$ της κατανομής των αποζημιώσεων, με $n_i, \lambda_i > 0$, $i = 1,2$, οι οποίοι εξετάστηκαν και στο Κεφάλαιο 4.

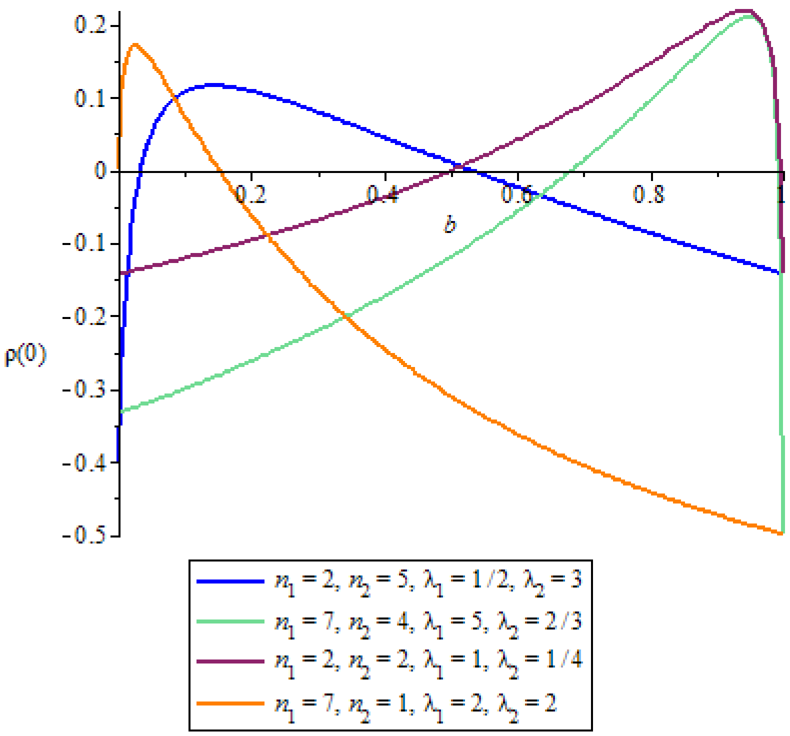
ΣΧΗΜΑ 5.4.

Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=αG(n1,λ1)+ (1-α)G(n2,λ2)

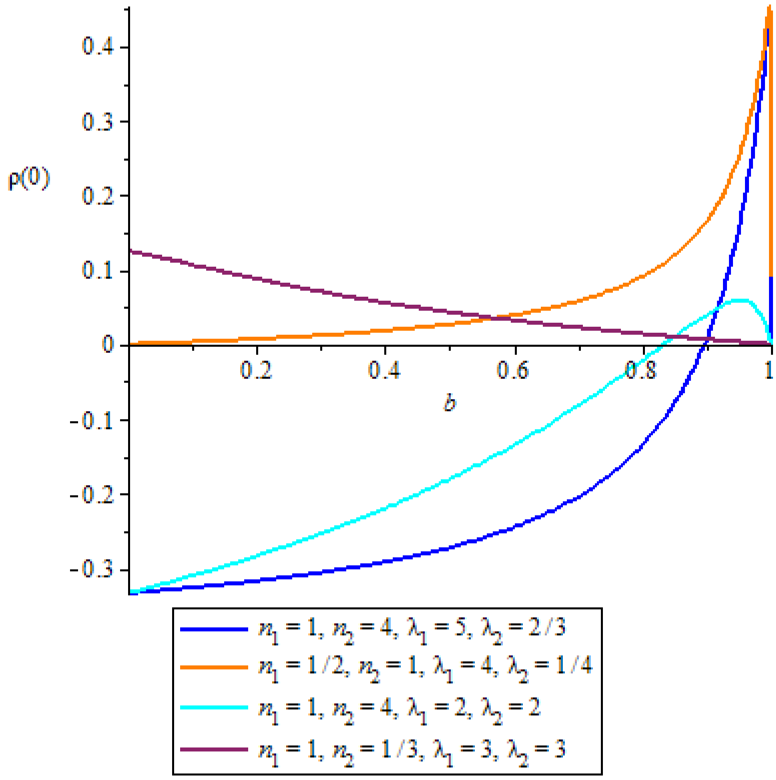
(i) $n_1, n_2 < 1$



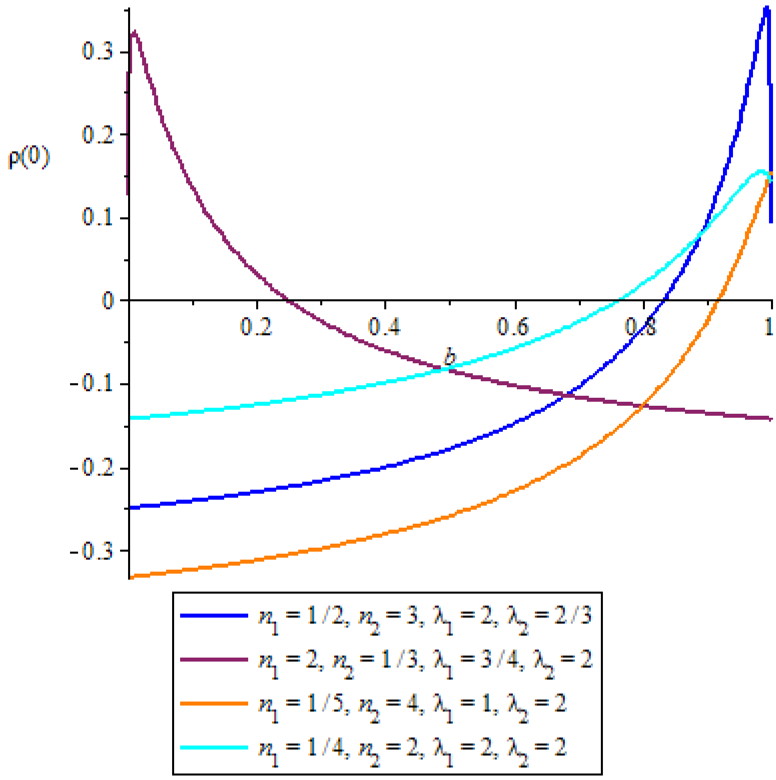
(ii) $n_1, n_2 > 1$



(iii) n_i=1 και $n_j \neq 1$, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\}$



(iv) n_i <1 και n_j >1, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\}$



Συνδυάζοντας τα παραπάνω γραφήματα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη της συνάρτησης $Cov(V(T-),V(T))$ στην Ενότητα 4.3.4., προκύπτει ότι ανεξαρτήτως των τιμών των παραμέτρων κλίμακας $\lambda_1,\lambda_2>0$ της κατανομής των αποζημιώσεών μας, το πρόσημο του συντελεστή συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ στην περίπτωση των αποζημιώσεων όπου ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα, παρουσιάζει τις ακόλουθες δυνατές περιπτώσεις:

(α) Για $n_1,n_2<1 \Rightarrow Cov(V(T-)V(T))\geq 0 \Rightarrow \rho(0)\geq 0$.

(β) Για $n_1,n_2>1 \Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ *ή* $Cov(V(T-),V(T))\leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(0)\geq 0$ *ή* $\rho(0)\leq 0$ αντίστοιχα.

(γ) Για $a\cdot G(1,\lambda)+(1-a)\cdot G(n,\lambda)$, όπου $n_j<1 \Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0 \Rightarrow \rho(0)\geq 0$

(δ) Για $a\cdot G(1,\lambda)+(1-a)\cdot G(n,\lambda)$, όπου $n_j>1 \Rightarrow$
$\Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ *ή* $Cov(V(T-),V(T))\leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(0)\geq 0$ *ή* $\rho(0)\leq 0$ αντίστοιχα.

(ε) Για $n_i<1$ & $n_j>1$, $\mu\varepsilon\; i\neq j\; \kappa\alpha\iota\; i,j\in\{1,2\} \Rightarrow$
$\Rightarrow Cov(V(T-),V(T))\geq 0$ *ή* $Cov(V(T-),V(T))\leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(0)\geq 0$ *ή* $\rho(0)\leq 0$ αντίστοιχα.

Λίγο πριν ολοκληρώσουμε την παρούσα ενότητα, θα παρουσιάσουμε δύο αριθμητικές εφαρμογές, εκ των οποίων η πρώτη αποτελεί συνέχεια της Εφαρμογής 4.4. που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και θα παρακολουθήσουμε την διαδικασία υπολογισμού του συντελεστή συσχέτισης $\rho(0)$. Στην δεύτερη, θα μελετήσουμε μία άλλη περίπτωση κατανομής αποζημιώσεων η οποία όπως θα δούμε και παρακάτω, επιτυγχάνει να συνδυάσει στο ίδιο παράδειγμα τις περιπτώσεις (β), (ε) και (στ) που μόλις παρουσιάσαμε.

Εφαρμογή 5.2. Συσχέτιση των τ.μ. $V(T-),V(T)$, όταν $F=\frac{1}{2}G(2,1)+\frac{1}{2}G(4,2)$.

Έστω ότι η κατανομή F των αποζημιώσεων μίας ασφαλιστικής είναι η μίξη δύο Γάμμα κατανομών με συντελεστή βάρους $a=1/2$ και παραμέτρους $n_1=2,\ n_2=4$, $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται:

$$f(x)=\frac{1}{6}xe^{-x}\left(3+8e^{-x}x^2\right), \quad x\geq 0,$$

και οι τρεις πρώτες ροπές βάσει της σχέσεως (4.38) θα είναι ίσες:

$$p_1=2, \quad p_2=\frac{11}{2}, \quad p_3=\frac{39}{2}.$$

Από την Εφαρμογή 4.4. προκύπτει ότι η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $V(T-),V(T)$ ισούται:

$$Cov(V(T-),V(T))=-\frac{17}{64},$$

ενώ η διασπορά του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας), δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για $u=0$ (βλ. σχέση (5.8)) θα είναι:

$$\mathrm{V}(V(T-))=\frac{87}{64}.$$

Υπολογίζοντας το πηλίκο της συνδιακύμανσης των τ.μ. $V(T-),V(T)$, προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διασπορών τους, προκύπτει ότι ο συντελεστής συσχέτισης των εν λόγω μεταβλητών είναι ίσος:

$$Corr[V(T-),V(T)]=-\frac{17}{87}\approx -0.1954 \quad \left(<\frac{1}{2}\right).$$

Εφαρμογή 5.3. Συσχέτιση των τ.μ. $V(T-),V(T)$, όταν $F=\frac{1}{2}G(2,1)+\frac{1}{2}G\left(n_2,\frac{1}{3}\right)$.

Έστω ότι οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς μία ασφαλιστική ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών, με συντελεστή βάρους $a=1/2$ και παραμέτρους $n_1=2$, $\lambda_1=1, \lambda_2=1/3$ και $n_2>0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι ίση:

$$f(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2\Gamma(n_2)}\left(\frac{1}{3}\right)^{n_2}x^{n_2-1}e^{-\frac{1}{3}x}, \quad x\geq 0.$$

Κατόπιν υπολογισμού προκύπτει για τις τρεις πρώτες ροπές:

$$p_1=1+\frac{3}{2}n_2, \quad p_2=3+\frac{9}{2}n_2+\frac{9}{2}n_2^2, \quad p_3=12+27n_2+\frac{81}{2}n_2^2+\frac{27}{2}n_2^3.$$

Αντικαθιστώντας στον υπολογιστικό τύπο της συνδιακύμανσης βάσει της σχέσεως (4.19) αλλά και τον αντίστοιχο τύπο της σχέσης (5.8) για τον υπολογισμό της διασποράς του πλεονάσματος (ελλείμματος) δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, προκύπτουν ότι:

$$Cov(V(T-),V(T)) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{27n_2^4 - 36n_2^3 - 27n_2^2 - 12n_2 + 4}{(2+3n_2)^2},$$

και

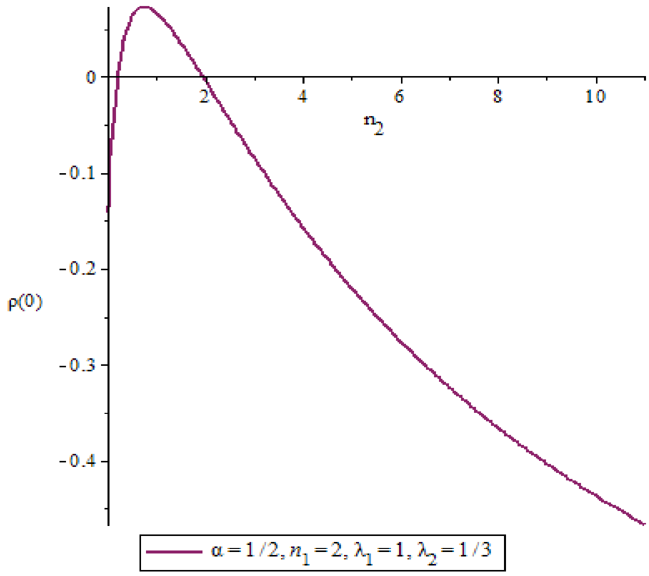
$$\mathrm{V}(V(T-)) = \frac{1}{4}\cdot\frac{27n_2^4 + 234n_2^3 + 243n_2^2 + 132n_2 + 28}{(2+3n_2)^2}.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα σύμφωνα με την σχέση (5.5), προκύπτει ότι ο συντελεστής συσχέτισης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, για αρχικό αποθεματικό μηδέν δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, στην περίπτωση της κατανομής $\mathrm{F} = 1/2\mathrm{G}(2,1) + 1/2\mathrm{G}(\mathrm{n}_2,1/3)$ θα είναι ίσος:

$$Corr[V(T-),V(T)] = -\frac{27n_2^4 - 36n_2^3 - 27n_2^2 - 12n_2 + 4}{27n_2^4 + 234n_2^3 + 243n_2^2 + 132n_2 + 28}. \tag{5.18}$$

ΣΧΗΜΑ 5.5.

Συσχέτιση των V(T-),V(T), όταν F=1/2G(2,1)+ 1/2G(n2,1/3)



Στο Σχήμα 5.5. παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συσχέτισης των τ.μ. $V(T-),V(T)$ για την περίπτωση αποζημιώσεων που ακολουθούν την κατανομή $\mathrm{F} = 1/2\mathrm{G}(2,1) + 1/2\mathrm{G}(\mathrm{n}_2,1/3)$, συναρτήσει της παραμέτρου μορφής $n_2 > 0$. Σύμφωνα λοιπόν με αυτό, προκύπτει ότι για τις μη ακέραιες τιμές της παραμέτρου $n_2 \approx 0.21$ και

$n_2 \approx 1.95$, ο συντελεστής συσχέτισης μηδενίζεται με αποτέλεσμα οι τυχαίες μεταβλητές $V(T-), V(T)$ να είναι ασυσχέτιστες. Για τιμές της παραμέτρου μορφής n_2 της κατανομής των αποζημιώσεων οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $[0,0.21)$ αλλά και $(1.95,+\infty)$, προκύπτει ότι $\rho(0)<0$, ενώ όταν $n_2 \in (0.21,1.95)$, τότε παρατηρούμε ότι ισχύει για τον συντελεστή συσχέτισης $\rho(0)>0$, δηλαδή το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας για $u=0$ δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι δύο θετικά συσχετιζόμενες τυχαίες μεταβλητές. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, τόσο μεγαλύτερο αναμένεται να είναι και το έλλειμμα που θα σημειωθεί κατά την επέλευση του ζημιογόνου αυτού ενδεχομένου και αντίστροφα. Επιπλέον υπολογίζοντας τα αντίστοιχα όρια στο υπολογιστικό πρόγραμμα της Maple προκύπτει ότι:

$$\lim_{n_2 \to 0} \rho(0) = -\frac{1}{7} \quad \text{και} \quad \lim_{n_2 \to \infty} \rho(0) = -1 .$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο συντελεστής συσχέτισης εμφανίζεται να ξεκινάει από το σημείο $n_2 = 0$ με τιμή $\rho(0) = -1/7$ και να σημειώνει γνησίως αύξουσα πορεία μέχρι ένα σημείο z*, από το οποίο ο συντελεστής συσχέτισης ξεκινάει τη γνησίως φθίνουσα πορεία του για καταλήξει ασυμπτωτικά στην τιμή -1, όπου είναι και η ελάχιστη επιτρεπτή τιμή που μπορεί να λάβει η συσχέτιση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών. Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο του συντελεστή συσχέτισης της κατανομής των αποζημιώσεών μας $\mathrm{F} = 1/2\mathrm{G}(2,1) + 1/2\mathrm{G}(\mathrm{n}_2, 1/3)$ ως προς τη μεταβλητή n_2 και θέτοντάς την ίση με το μηδέν, υπό τον περιορισμό ότι ισχύει $0 < n_2 < 1.5$ όπως προκύπτει από το Σχήμα 5.5, προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dn_2}\rho(0) = 0 \Rightarrow -\frac{54\left(3n_2^2 + 3n_2 + 2\right)\left(45n_2^4 + 45n_2^3 - 18n_2^2 - 20n_2 - 8\right)}{\left(27n_2^4 + 234n_2^3 + 243n_2^2 + 132n_2 + 28\right)^2} = 0 \Rightarrow n_2 = 0.749 ,$$

δηλαδή ο συντελεστής συσχέτισης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $n_2 = 0.749$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στη σχέση (5.18), προκύπτει ότι κατά τη μεγιστοποίηση αυτή ισχύει ότι $\rho(0) \approx 0.0723$.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μέλετη του πέμπτου Κεφαλαίου, προκύπτει ο ακόλουθος συγκεντρωτικός πίνακας:

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ	ΕΙΔΟΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ Τ.Μ. V(T-),V(T)
Εκθετική κατανομή	Ασυσχέτιστες τ.μ.
Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	▪ Για $\beta_1 = \beta_2$ ή $\alpha \in \{0,1\}$ $\Rightarrow$ Ασυσχέτιστες ▪ Για $\beta_1 \neq \beta_2$ ή $\alpha \in (0,1)$ $\Rightarrow$ Θετικά συσχετισμένες
Κατανομή Γάμμα	▪ Για $0 < n < 1 \Rightarrow$ Θετικά συσχετισμένες ▪ Για $n > 1 \Rightarrow$ Αρνητικά συσχετισμένες Για $n = 1 \Rightarrow$ Ασυσχέτιστες
Μίξη δύο Γάμμα κατανομών	▪ Για $n_1, n_2 < 1 \Rightarrow$ Θετικά συσχετισμένες ▪ Για $n_1, n_2 > 1 \Rightarrow$ Οποιαδήποτε συσχέτιση ▪ $n_i > 1$ & $n_j < 1$, με $i \neq j$ και $i, j \in \{1,2\} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Οποιαδήποτε συσχέτιση
Μίξη Εκθετικής & Γάμμα κατανομής	▪ Για $0 < n < 1$ $\Rightarrow$Θετικά συσχετισμένες ▪ Για $n > 1$ $\Rightarrow$ Οποιαδήποτε συσχέτιση

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΝΤΟΛΩΝ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MAPLE

Σκοπός του Παραρτήματος αυτού, είναι η παρουσίαση της υπολογιστικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε στα Κεφάλαια 2-5 της παρούσας διπλωματικής εργασίας, για την επίλυση των εφαρμογών στο αλγεβρικό πρόγραμμα Maple (Έκδοση 16). Ο αναγνώστης θα έχει τη δυνατότητα να παρακολουθήσει αναλυτικά τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, μέσα από την παρουσίαση των αντίστοιχων εντολών του προγράμματος, για κάποια από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις κάθε κεφαλαίου.

Να σημειώσουμε, πως στην αρχή της διαδικασίας υπολογισμού μιας νέας κατανομής αποζημιώσεων ξεκινάμε πάντα με την εντολή "restart", προκειμένου να αποδεσμευτεί η μνήμη του υπολογιστικού μας φύλλου από προηγούνες τιμές.

§ 2.3.4.

> **#Υπολογισμός της Βαθμίδας Αποτυχίας στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη μίξη δύο Γάμμα κατανομών: X~αG(2, λ1) + (1 − α)G(4, λ2)#**

> *restart;*

> #Ορισμός των παραμέτρων μορφής#

> $n1 := 2; n2 := 4;$

$$n1 := 2$$

$$n2 := 4$$

> #Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας#

> $f := x \rightarrow a \cdot \left(\frac{\lambda 1^{n1} \cdot x^{(n1-1)} \cdot \exp(-\lambda 1 \cdot x)}{\Gamma(n1)} \right) + (1-a) \cdot \left(\frac{\lambda 2^{n2} \cdot x^{(n2-1)} \cdot \exp(-\lambda 2 \cdot x)}{\Gamma(n2)} \right);$

$$f := x \rightarrow \frac{a\, \lambda 1^{n1}\, x^{n1-1}\, e^{-\lambda 1\, x}}{\Gamma(n1)} + \frac{(1-a)\, \lambda 2^{n2}\, x^{n2-1}\, e^{-\lambda 2\, x}}{\Gamma(n2)}$$

> $f(x);$

$$a\, \lambda 1^2\, x\, e^{-\lambda 1\, x} + \frac{1}{6} (1-a)\, \lambda 2^4\, x^3\, e^{-\lambda 2\, x}$$

> #Συνάρτηση επιβίωσης#

> $S := x \rightarrow a \cdot \left(1 - \frac{1}{\Gamma(n1)} \cdot \left(int\left(u^{n1-1} \cdot \exp(-u), u = 0..\lambda 1 \cdot x\right)\right)\right) + (1 - a) \cdot \left(1 - \frac{1}{\Gamma(n2)} \cdot \left(int\left(u^{n2-1} \cdot \exp(-u), u = 0..\lambda 2 \cdot x\right)\right)\right);$

$$S := x \rightarrow a \left(1 - \frac{\int_0^{\lambda 1\, x} u^{n1-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u}{\Gamma(n1)}\right) + (1-a)\left(1 - \frac{\int_0^{\lambda 2\, x} u^{n2-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u}{\Gamma(n2)}\right)$$

> $S(x);$

$$a\left(\mathrm{e}^{-\lambda 1\, x} + \mathrm{e}^{-\lambda 1\, x}\lambda 1\, x\right) + (1-a)\left(\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x} + \mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2\, x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2^2 x^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2^3 x^3\right)$$

> #Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας#

> $r := x \rightarrow \frac{f(x)}{S(x)};$

$$r := x \rightarrow \frac{f(x)}{S(x)}$$

> $r(x);$

$$\left(a\,\lambda 1^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda 1\, x} + \frac{1}{6}(1-a)\,\lambda 2^4 x^3 \mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\right) \Big/ \left(a\left(\mathrm{e}^{-\lambda 1\, x} + \mathrm{e}^{-\lambda 1\, x}\lambda 1\, x\right) + (1-a)\left(\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x} + \mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2\, x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2^2 x^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\lambda 2\, x}\lambda 2^3 x^3\right)\right)$$

> #Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας για ορισμένους συνδυασμούς τιμών του συντελεστή βάρους και των παραμέτρων κλίμακας#

> $\mathrm{r1} := subs\left(a = \frac{1}{2}, \lambda 1 = \frac{1}{2}, \lambda 2 = 3, r(x)\right);$

$$r1 := \left(\frac{1}{8}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{27}{4}x^3 \mathrm{e}^{-3x}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3x}x + \frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3x}x^2 + \frac{9}{4}x^3\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

> $\mathrm{r2} := subs(a = 0.7, \lambda 1 = 3, \lambda 2 = 2, r(x));$

$$r2 := \left(6.3\,\mathrm{e}^{-3x}x + 0.8000000000\,x^3\mathrm{e}^{-2x}\right) \Big/ \left(0.7\,\mathrm{e}^{-3x} + 2.1\,\mathrm{e}^{-3x}x + 0.3\,\mathrm{e}^{-2x} + 0.6\,\mathrm{e}^{-2x}x + 0.6000000000\,\mathrm{e}^{-2x}x^2 + 0.4000000000\,x^3\mathrm{e}^{-2x}\right)$$

> $\mathrm{r3} := subs(a = 0.99, \lambda 1 = 1, \lambda 2 = 1, r(x));$

$$r3 := \left(0.99\,x\,\mathrm{e}^{-x} + 0.001666666667\,x^3\mathrm{e}^{-x}\right) \Big/ \left(1.00\,\mathrm{e}^{-x} + 1.00\,x\,\mathrm{e}^{-x} + 0.005000000000\,\mathrm{e}^{-x}x^2 + 0.001666666667\,x^3\mathrm{e}^{-x}\right)$$

> #Σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων των βαθμίδων αποτυχίας r1(x), r2(x), r3(x) στον ίδιο άξονα#

> $plot([r1, r2, r3], x = 0..6, color = [blue, aquamarine, orange], thickness = 2, title = 'Hazard\ Rate\ of\ distribution\ F = aG(2, \lambda 1) + (1 - a)G(4, \lambda 2)');$

§ 3.3.2.1.

> **#Υπολογισμός της Πιθανότητας Χρεοκοπίας στην περίπτωση των Εκθετικών αποζημιώσεων : X~Exp(λ)#**

> *restart;*

> #Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας#

> $f := x \rightarrow \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x);$

$$f := x \rightarrow \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

> $f(x);$

$$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

> #Συνάρτηση επιβίωσης#

> $S := x \rightarrow \exp(-\lambda \cdot x);$

$$S := x \rightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

> $S(x);$

$$\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

> #Μαθηματική ελπίδα (μέση τιμή)#

> $E := \frac{1}{\lambda};$

$$E := \frac{1}{\lambda}$$

> $E;$

$$\frac{1}{\lambda}$$

> #Συνάρτηση πυκνότητας ισορροπίας των αποζημιώσεων#

> $fisorropias := x \rightarrow \frac{S(x)}{E};$

$$fisorropias := x \rightarrow \frac{S(x)}{E}$$

> $fisorropias(x);$

$$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

> #Εισαγωγή πακέτου εντολών της Maple#

> $with(inttrans);$

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

> #Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας ισορροπίας#

> $Lfisorropias := s \rightarrow laplace(fisorropias(x), x, s);$

$$Lfisorropias := s \rightarrow laplace(fisorropias(x), x, s)$$

> $Lfisorropias(s);$

$$\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

> #Μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας#

> $Lpsi := s \rightarrow \dfrac{\frac{1}{(1+\text{theta})} \cdot [1 - Lfisorropias(s)]}{s \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+\text{theta})} \cdot Lfisorropias(s)\right]};$

$$Lpsi := s \rightarrow \frac{[1 - Lfisorropias(s)]}{(1+\theta)\, s \left[1 - \frac{Lfisorropias(s)}{1+\theta}\right]}$$

> $Lpsi(s);$

$$\frac{\left[1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}\right]}{(1+\theta)\, s \left[1 - \frac{\lambda}{(1+\theta)\,(s+\lambda)}\right]}$$

> #Απλοποίηση του κλάσματος Lpsi(s) προκειμένου να έρθει στη μορφή 1 $/(b+s)a$#

> $Lpsi1 := s \rightarrow \dfrac{\frac{1}{(1+\text{theta})}}{\left(\frac{\text{theta} \cdot \lambda}{1+\text{theta}}\right) + s};$

$$Lpsi1 := s \rightarrow \frac{1}{(1+\theta)\left(\frac{\theta\,\lambda}{1+\theta} + s\right)}$$

> $Lpsi1(s);$

$$\frac{1}{(1+\theta)\left(\frac{\theta\,\lambda}{1+\theta} + s\right)}$$

> #Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace#

> $\text{psi} := u \rightarrow invlaplace(\text{Lpsi1}(\text{s}), \text{s}, u);$

$$\psi := u \rightarrow invlaplace(Lpsi1(s), s, u)$$

> $\text{psi}(u);$

$$\frac{e^{-\frac{\theta\,\lambda\,u}{1+\theta}}}{1+\theta}$$

> #Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για ορισμένους συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων θ,l#

> $psi1 := subs(\lambda = 0.5, \text{theta} = 0.5, \text{psi}(\text{u}));$

$$\psi 1 := 0.6666666667\, e^{-0.1666666666\, u}$$

> $psi2 := subs(\lambda = 3.5, \text{theta} = 0.5, \text{psi}(\text{u}));$

$$\psi 2 := 0.6666666667\, e^{-1.166666667\, u}$$

> $psi3 := subs(\lambda = 0.5, \text{theta} = 3, \text{psi}(\text{u}));$

$$\psi 3 := \frac{1}{4}\, e^{-0.3750000000\, u}$$

> #Απλοποίηση των παραπάνω αποτελεσμάτων με χρήση τεσσάρων δεακαδικών ψηφίων#

> $evalf(psi1, 4);$

$$0.6667\, e^{-0.1667\, u}$$

> *evalf*(*psi2*, 4);

$$0.6667\, e^{-1.167\, u}$$

> *evalf*(*psi3*, 4);

$$0.2500\, e^{-0.3750\, u}$$

> #Σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων των πιθανοτήτων χρεοκοπίας psi1(u), psi2(u), psi3(u) στον ίδιο άξονα#

> *plot*([*psi1*(u), *psi2*(u), *psi3*(u)], u = 0 ..20, y = 0 ..0.75, *color* = [blue, maroon, cyan], *thickness* = 2, *title* ='*Probability of default when F* = *Exp*(λ)');

§ 4.3.2.

> **#Υπολογισμός της Συνδιακύμανσης στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν τη Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών : X~αExp(β1) + (1−α)Exp(β2)#**

> *restart;*

> #Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας#

> $f := x \rightarrow \alpha \cdot \beta 1 \cdot \exp(-\beta 1 \cdot x) + (1-\alpha) \cdot \beta 2 \cdot \exp(-\beta 2 \cdot x);$

$$f := x \rightarrow \alpha\, \beta 1\, e^{-\beta 1\, x} + (1-\alpha)\, \beta 2\, e^{-\beta 2\, x}$$

> $f(x);$

$$\alpha\, \beta 1\, e^{-\beta 1\, x} + (1-\alpha)\, \beta 2\, e^{-\beta 2\, x}$$

> # k-τάξεως ροπή της κατανομής ζημιών #

> $\mathrm{E} := \alpha \cdot \frac{k!}{\beta 1^{k}} + (1-\alpha) \cdot \frac{k!}{\beta 2^{k}};$

$$E := \frac{\alpha\, k!}{\beta 1^{k}} + \frac{(1-\alpha)\, k!}{\beta 2^{k}}$$

> $E;$

$$\frac{\alpha\, k!}{\beta 1^{k}} + \frac{(1-\alpha)\, k!}{\beta 2^{k}}$$

> #Πρώτη ροπή (μέση τιμή)#

> $E1 := subs(k=1, E);$

$$E1 := \frac{\alpha \cdot 1!}{\beta 1} + \frac{(1-\alpha) \cdot 1!}{\beta 2}$$

> $E1;$

$$\frac{\alpha}{\beta 1} + \frac{1-\alpha}{\beta 2}$$

> $\mathrm{v} := simplify(\mathrm{E1});$

$$v := -\frac{-\alpha \beta 2 - \beta 1 + \alpha \beta 1}{\beta 1\, \beta 2}$$

> #Δεύτερη ροπή#

> $E2 := subs(k=2, E);$

$$E2 := \frac{\alpha \cdot 2!}{\beta 1^{2}} + \frac{(1-\alpha) \cdot 2!}{\beta 2^{2}}$$

> $E2;$

$$\frac{2\,\alpha}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-\alpha)}{\beta 2^2}$$

> w := *simplify*(E2);

$$w := -\frac{2\left(-\alpha\,\beta 2^2 - \beta 1^2 + \beta 1^2\,\alpha\right)}{\beta 1^2\,\beta 2^2}$$

> #Τρίτη ροπή#

> $E3 := subs(k = 3, E);$

$$E3 := \frac{\alpha \cdot 3!}{\beta 1^3} + \frac{(1-\alpha)\cdot 3!}{\beta 2^3}$$

> $E3;$

$$\frac{6\,\alpha}{\beta 1^3} + \frac{6\,(1-\alpha)}{\beta 2^3}$$

> z := *simplify*(E3);

$$z := -\frac{6\left(-\alpha\,\beta 2^3 - \beta 1^3 + \beta 1^3\,\alpha\right)}{\beta 1^3\,\beta 2^3}$$

> #Υπολογισμός της συνδιακύμανσης#

> $Cov := \frac{z}{6\cdot v} - \left(\frac{w}{2\cdot v}\right)^2;$

$$Cov := \frac{-\alpha\,\beta 2^3 - \beta 1^3 + \beta 1^3\,\alpha}{\beta 1^2\,\beta 2^2\,(-\alpha\,\beta 2 - \beta 1 + \alpha\,\beta 1)} - \frac{\left(-\alpha\,\beta 2^2 - \beta 1^2 + \beta 1^2\,\alpha\right)^2}{\beta 1^2\,\beta 2^2\,(-\alpha\,\beta 2 - \beta 1 + \alpha\,\beta 1)^2}$$

> $Cov;$

$$\frac{-\alpha\,\beta 2^3 - \beta 1^3 + \beta 1^3\,\alpha}{\beta 1^2\,\beta 2^2\,(-\alpha\,\beta 2 - \beta 1 + \alpha\,\beta 1)} - \frac{\left(-\alpha\,\beta 2^2 - \beta 1^2 + \beta 1^2\,\alpha\right)^2}{\beta 1^2\,\beta 2^2\,(-\alpha\,\beta 2 - \beta 1 + \alpha\,\beta 1)^2}$$

> *factor*(Cov);

$$-\frac{\alpha\,(-\beta 2 + \beta 1)^2\,(-1+\alpha)}{\beta 2\,\beta 1\,(-\alpha\,\beta 2 - \beta 1 + \alpha\,\beta 1)^2}$$

> #Υπολογισμός της συνδιακύμανσης στην περίπτωση της κατανομής αποζημιώσεων F=α$Exp\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)Exp\left(\frac{1}{4}\right)$#

> $Cov1 := subs\left(\beta 1 = \frac{1}{2}, \beta 2 = \frac{1}{4}, Cov\right);$

$$Cov1 := \frac{64\left(\frac{7}{64}\,\alpha - \frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{4}\,\alpha - \frac{1}{2}} - \frac{64\left(\frac{3}{16}\,\alpha - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\,\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}$$

> *factor*(Cov1);

$$-\frac{8\,\alpha\,(-1+\alpha)}{(\alpha-2)^2}$$

> #Σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνδιακύμανσης#

> $plot\left([Cov1], c = 0..1, y = 0..1.1, color = [\text{maroon}], thickness = 1, title = \text{'Covariance when } F = aExp\left(\frac{1}{2}\right) + (1-a)Exp\left(\frac{1}{4}\right)\text{'}\right);$

> #Εύρεση του τοπικού μέγιστου της γραφικής παράστασης της συνδιακύμανσης#

> $diff(factor(Cov1), \alpha);$

$$-\frac{8(-1+\alpha)}{(\alpha-2)^2} - \frac{8\alpha}{(\alpha-2)^2} + \frac{16\alpha(-1+\alpha)}{(\alpha-2)^3}$$

> $deriv := factor(diff(factor(Cov1), \alpha));$

$$deriv := \frac{8(3\alpha-2)}{(\alpha-2)^3}$$

> $sol := solve(deriv = 0);$

$$sol := \frac{2}{3}$$

> #Τιμή της συνδιακύμανσης στο τοπικό μέγιστο $\alpha = \frac{2}{3}$#

> $subs\left(\alpha = \frac{2}{3}, factor(Cov1)\right);$

$$1$$

> #Συνάρτηση επιβίωσης#

> $S := x \rightarrow \alpha \cdot \exp(-\beta 1 \cdot x) + (1-\alpha) \cdot \exp(-\beta 2 \cdot x);$

$$S := x \rightarrow \alpha\, e^{-\beta 1\, x} + (1-\alpha)\, e^{-\beta 2\, x}$$

> $S(x);$

$$\alpha\, e^{-\beta 1\, x} + (1-\alpha)\, e^{-\beta 2\, x}$$

> #Συνάρτηση πυκνότητας ισορροπίας των αποζημιώσεων#

> $fisorropias := x \rightarrow \frac{S(x)}{E1};$

$$fisorropias := x \rightarrow \frac{S(x)}{E1}$$

> fisorropias(x);

$$\frac{\alpha\, e^{-\beta 1\, x} + (1-\alpha)\, e^{-\beta 2\, x}}{\frac{\alpha}{\beta 1} + \frac{1-\alpha}{\beta 2}}$$

> $simplify($fisorropias(x)$);$

$$-\frac{\left(\alpha\, e^{-\beta 1\, x} + e^{-\beta 2\, x} - e^{-\beta 2\, x}\alpha\right)\beta 1\, \beta 2}{-\alpha\beta 2 - \beta 1 + \alpha\beta 1}$$

> #Υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας ισορροπίας στην περίπτωση της κατανομής αποζημιώσεων F=α$Exp\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)Exp\left(\frac{1}{4}\right)$#

> fisorropias1 := $subs\left(\beta 1 = \frac{1}{2}, \beta 2 = \frac{1}{4}, \text{fisorropias}(x)\right);$

$$fisorropias1 := \frac{\alpha\, e^{-\frac{1}{2}x} + (1-\alpha)\, e^{-\frac{1}{4}x}}{-2\alpha + 4}$$

> #Ορισμός της συνάρτησης πυκνότητας ισορροπίας υπό τη μορφή της Μίξης δύο Εκθετικών κατανομών#

> $fisor1 := x \rightarrow c \cdot \beta 1 \cdot \exp(-\beta 1 \cdot x) + (1-c) \cdot \beta 2 \cdot \exp(-\beta 2 \cdot x);$

$$fisor1 := x \rightarrow c\,\beta 1\, e^{-\beta 1\, x} + (1-c)\,\beta 2\, e^{-\beta 2\, x}$$

> $fisor1(x);$

$$c\,\beta 1\, e^{-\beta 1\, x} + (1-c)\,\beta 2\, e^{-\beta 2\, x}$$

> # k-τάξεως ροπή της κατανομής ισορροπίας #

> $Ee := c\cdot\frac{k!}{\beta 1^k} + (1-c)\cdot\frac{k!}{\beta 2^k};$

$$Ee := \frac{c\,k!}{\beta 1^k} + \frac{(1-c)\,k!}{\beta 2^k}$$

> Ee;

$$\frac{c\,k!}{\beta 1^k} + \frac{(1-c)\,k!}{\beta 2^k}$$

> #Πρώτη ροπή (μέση τιμή)#

> $Ee1 := subs(k=1, Ee);$

$$Ee1 := \frac{c\cdot 1!}{\beta 1} + \frac{(1-c)\cdot 1!}{\beta 2}$$

> $Ee1;$

$$\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}$$

> #Δεύτερη ροπή#

> $Ee2 := subs(k=2, Ee);$

$$Ee2 := \frac{c\cdot 2!}{\beta 1^2} + \frac{(1-c)\cdot 2!}{\beta 2^2}$$

> Ee2;

$$\frac{2\,c}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-c)}{\beta 2^2}$$

> #Τυπική απόκλιση του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας#

> $stdevCVe := Ee2 - Ee1^2;$

$$stdevCVe := \frac{2\,c}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-c)}{\beta 2^2} - \left(\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}\right)^2$$

> $stdevCVe;$

$$\frac{2\,c}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-c)}{\beta 2^2} - \left(\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}\right)^2$$

> #Υπολογισμός του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων#

> $CVe := \frac{\sqrt{stdevCVe}}{Ee1};$

$$CVe := \frac{\sqrt{\frac{2\,c}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-c)}{\beta 2^2} - \left(\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}\right)^2}}{\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}}$$

> $CVe;$

$$\frac{\sqrt{\frac{2\,c}{\beta 1^2} + \frac{2\,(1-c)}{\beta 2^2} - \left(\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}\right)^2}}{\frac{c}{\beta 1} + \frac{1-c}{\beta 2}}$$

> #Υπολογισμός του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων Fe=cExp$\left(\frac{1}{2}\right)+(1-\mathrm{c})\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{4}\right)$#

> $CVe1 := subs\left(\beta 1=\frac{1}{2}, \beta 2=\frac{1}{4}, simplify(CVe)\right);$

$$CVe1 := -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{-8c+16-4c^2}}{\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}}$$

> $CVe1;$

$$-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{-8c+16-4c^2}}{\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}}$$

> #Σχεδιασμός της γραφικής παράστασης του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας #

> $plot([CVe1], \mathrm{c}=0..1, \mathrm{y}=0.8..1.2, color=[\mathrm{blue}], thickness=1);$

> #Εύρεση του τοπικού μέγιστου της γραφικής παράστασης του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας#

> $topikomegistoCVe1 := diff(CVe1, c);$

$$topikomegistoCVe1 := -\frac{1}{16}\frac{-8-8c}{\sqrt{-8c+16-4c^2}\left(\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{32}\frac{\sqrt{-8c+16-4c^2}}{\left(\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}\right)^2}$$

> $deriv := factor(topikomegistoCVe1);$

$$deriv := -\frac{3c-2}{\sqrt{-2c+4-c^2}\,(c-2)^2}$$

> $sol := solve(deriv=0);$

$$sol := \frac{2}{3}$$

> #Τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας των αποζημιώσεων στο τοπικό μέγιστο c=$\frac{2}{3}$#

> $subs\left(c=\frac{2}{3}, CVe1\right);$

$$\frac{1}{24}\sqrt{80}\sqrt{9}$$

> $evalf\left(subs\left(c=\frac{2}{3}, CVe1\right), 5\right);$

$$1.1181$$

§ 5.3.3.

> **#Υπολογισμός του συντελεστή Συσχέτισης στην περίπτωση όπου οι αποζημιώσεις μιας ασφαλιστικής ακολουθούν την κατανομή Γάμμα : X~Gamma(n, λ)#**

> *restart;*

> #Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας#

> $f := x \to \dfrac{\lambda^n \cdot x^{(n-1)} \cdot \exp(-\lambda \cdot x)}{\Gamma(n)};$

$$f := x \to \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$$

> $f(x);$

$$\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$$

> # k-τάξεως ροπή της κατανομής ζημιών #

> $\mathrm{E} := \dfrac{\prod_{r=1}^{k} (n+r-1)}{\lambda^k};$

$$E := \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\,\lambda^k}$$

> $E;$

$$\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\,\lambda^k}$$

> #Πρώτη ροπή (μέση τιμή)#

> $E1 := subs(k=1, E);$

$$E1 := \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\,\lambda}$$

> $simplify(E1);$

$$\frac{n}{\lambda}$$

> #Δεύτερη ροπή#

> $E2 := subs(k=2, E);$

$$E2 := \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)\,\lambda^2}$$

> $simplify(E2);$

$$\frac{n\,(n+1)}{\lambda^2}$$

> #Τρίτη ροπή#

> $E3 := subs(k=3, E);$

$$E3 := \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n)\,\lambda^3}$$

> $simplify(E3);$

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{\lambda^3}$$

> #Υπολογισμός της συνδιακύμανσης#

> $Cov := \frac{E3}{6 \cdot E1} - \left(\frac{E2}{2 \cdot E1}\right)^2;$

$$Cov := \frac{1}{6}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}$$

> $Cov;$

$$\frac{1}{6}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}$$

> $simplify(Cov);$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{n^2-1}{\lambda^2}$$

> #Υπολογισμός της διασποράς του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας), δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για u=0#

> $V := \frac{E3}{3 \cdot E1} - \left(\frac{E2}{2 \cdot E1}\right)^2;$

$$V := \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}$$

> $V;$

$$\frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}$$

> $simplify(V);$

$$\frac{1}{12}\,\frac{(n+1)\,(n+5)}{\lambda^2}$$

> #Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης#

> $Corr := \frac{Cov}{V};$

$$Corr := \frac{\frac{1}{6}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}}{\frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}}$$

> $Corr;$

$$\frac{\frac{1}{6}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}}{\frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)} - \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\lambda^2\,\Gamma(n+1)^2}}$$

> $simplify(Corr);$

$$-\frac{n-1}{n+5}$$

> #Σχεδιασμός της γραφικής παράστασης του συντελεστή συσχέτισης, συναρτήσει της παραμέτρου μορφής n#

> $plot([Corr], \mathrm{n} = 0..80, color = [blue], thickness = 1);$

> #Υπολογισμός της πρώτης παραγώγου του συντελεστή συσχέτισης#

> $deriv1 := diff(simplify(Corr), n);$

$$deriv1 := -\frac{1}{n+5} + \frac{n-1}{(n+5)^2}$$

> *factor*(*deriv1*);

$$-\frac{6}{(n+5)^2}$$

> #Υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου του συντελεστή συσχέτισης#

> *deriv2* := *diff*(*deriv1*, *n*);

$$deriv2 := \frac{2}{(n+5)^2} - \frac{2(n-1)}{(n+5)^3}$$

> *factor*(*deriv2*);

$$\frac{12}{(n+5)^3}$$

> #Υπολογισμός του ορίου του συντελεστή συσχέτισης για παράμετρο μορφής n→ ∞#

> *limit*(Corr, n = *infinity*);

$$-1$$

> #Υπολογισμός του ορίου του συντελεστή συσχέτισης για παράμετρο μορφής n→0#

> *limit*(Corr, n = 0);

$$\frac{1}{5}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ., 2003. Ανάλυση Επιβίωσης. Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ Εφαρμοσμένης Στατιστικής, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Γαλανάκης, Π., 2012. Η Συσχέτιση του πλενάσματος πριν και μετά τη Χρεοκοπία. Διπλωματική εργασία ΠΜΣ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Κούτρας, Μ., 2004. Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος Ι. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κούτρας, Μ., 2005. Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος ΙΙ. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κουτσόπουλος, Κ.Ι., 1999. Αναλογιστικά Μαθηματικά, Θεωρία των Κινδύνων, Μέρος Ι. Εκδόσεις Συμμετρία.

Πολίτης, Κ., 2012. Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Χατζηκωνσταντινίδης, Ε., 2012. Θεωρία Κινδύνου ΙΙ. Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ Αναλογιστικής Επιστήμης & Διοικητικής Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

Barlow R.E. and Proschan, F., 1975. Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models. Holt, Rinehart and Winston.

Dickson, D.C.M., 2005. Insurance Risk and Ruin, International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press.

Gerber, H.U. and Shiu E.S.W., 1997. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics, Volume 21, 129-137.

Gerber, H.U. and Shiu E.S.W., 1998. On the time Value of Ruin. North American Actuarial Journal 2, 48-78.

Psarrakos, G., and Politis, K., 2012. The Covariance between the surplus prior to and at ruin in the Classical Risk Model. Astin Bulletin 42(2), 631-653.

Rolski, T., 1975. Mean Residual Life. Bulletin of the International Statistical Institute 46, 266-270.

Willmot, G.E. and Lin, X.S., 2001. Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications, Lecture Notes in Statistics, Spring-Verlang, New York.

Ιστοσελίδες (Ημ/νία τελευταίας επίσκεψης 06.01.2014)

http://asfalistis.tripod.com/istoria.htm
http://digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/858/3/3.pdf