



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
Π.Μ.Σ. ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ
«Τεχνικές Value – at – Risk για αποδόσεις
μετοχών»

Παναγιώτης Τσελίκης
Αρ. Μητρώου: ΜΧΑΝ1226

Επιβλέπων
Νικόλαος Εγγλέζος

Μέλη Επιτροπής
Αντωνία Μπότσαρη
Νικόλαος Εγγλέζος
Παναγιώτης Σταϊκούρας

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2014

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική διατριβή παρουσιάζονται και εφαρμόζονται ένα πλήθος διαφορετικών τεχνικών για την εκτίμηση του μέτρου κινδύνου Value – at – Risk (VaR) στις αποδόσεις του αμερικάνικου δείκτη S&P 500. Η εφαρμογή λαμβάνει χώρα σε δύο διαφορετικές περιόδους, προ και εν μέσω της χρηματοπιστωτικής κρίσης. Αρχικά, γίνεται μία εκτενής αναφορά στην χρησιμότητα του εν λόγω εργαλείου διαχείρισης κινδύνου, αλλά και στην υποχρεωτική εφαρμογή του από την Επιτροπή της Βασιλείας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο των επιμέρους τεχνικών εκτίμησης του VaR, καθώς επίσης και κάποια παραδείγματα. Επίσης, προτείνεται και ένας τρόπος αξιολόγησης της εκάστοτε τεχνικής με την χρήση στατιστικών μέσων. Τέλος, γίνεται η εφαρμογή των επιμέρους τεχνικών στον δείκτη ενδιαφέροντος και παρατίθενται τα σχετικά συμπεράσματα.

Abstract

In this thesis a variety of Value – at – Risk (VaR) techniques is demonstrated and implemented on the returns of American Index S&P 500. These techniques will be applied to two different periods; that is, prior to and during the financial crisis. Firstly, there is a detailed reference to the significance of VaR in Risk Management, as well as to its mandatory implementation according to the directives of Basle Committee. Furthermore, the theoretical background of every technique is presented and a statistical tool for their evaluation is proposed. Finally, several empirical results of these applied techniques and several conclusions derived from their application are presented.

Λέξεις κλειδιά: Value – at – Risk (VaR), Αποδόσεις (returns), Κατανομή, GARCH, EWMA, Tail Index Estimator, Historical Simulation, Monte Carlo Simulation, Backtesting, Likelihood Ratio test.

Πίνακας Περιεχομένων

1. Εισαγωγή	4
1.1. Περί Value - at - Risk	4
1.2. Κεφαλαιακές απαιτήσεις και VaR	7
1.3. Βιβλιογραφική αναφορά	10
1.4. Αντικείμενο Μελέτης	12
2. Παρουσίαση κύριων τεχνικών VaR	14
2.1. Αναλυτικό ή Παραμετρικό (Analytical or Parametric) VaR	14
2.1.1. Παραμετρικό VaR με μέσο (μ) και σταθερή διακύμανση (σ)	15
2.1.2. Υπόδειγμα GARCH	20
2.1.3. Υπόδειγμα EWMA	37
2.1.4. Ιδιότητες παραμετρικού VaR	39
2.2. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation)	41
2.3. Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo	42
2.4. Μέθοδος Tail Index Estimation	44
2.5. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τεχνικών	48
2.6. Μέθοδος Backtesting για τον έλεγχο αποτελεσματικότητας των τεχνικών VaR	49
2.7. Στατιστική αξιολόγηση του VaR	52
3. Εφαρμογή Τεχνικών και Αποτελέσματα	56
3.1. Περιγραφή δείγματος και μεθοδολογίας	56
3.2. Εμπειρικά αποτελέσματα	58
3.3. Συμπεράσματα	77
4. Επίλογος	81

1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρείται μία πρώτη επαφή με την έννοια του Value – at – Risk και γενικότερα με το πλαίσιο στο οποίο αυτή η έννοια βρίσκει εφαρμογή και αποκτά σημασία. Επιπλέον, σκιαγραφείται το θεσμικό πλαίσιο από το οποίο επιβάλλεται η χρήση τεχνικών Value – at – Risk σε κάποιες περιπτώσεις. Τέλος, το κεφάλαιο συμπεριλαμβάνει το Αντικείμενο μελέτης της παρούσας Διπλωματικής και μία βιβλιογραφική αναφορά σχετική με αυτό.

1.1. Περί Value - at - Risk

Πραγματικότητα αποτελεί το γεγονός ότι το σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον χαρακτηρίζεται σε μεγάλο βαθμό από τον ιδιαίτερα γρήγορο ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας και την έντονη αλληλεξάρτηση των χρηματαγορών. Οι σύγχρονες τεχνολογίες τηλεπικοινωνιών έχουν καταστήσει την μετάδοση των πληροφοριών σχεδόν ακαριαία, έτσι οι συμμετέχοντες στις χρηματαγορές βρίσκονται σε μία κατάσταση συνεχούς επαναξιολόγησης και επαναπροσδιορισμού των αποφάσεων τους καθώς δέχονται νέες πληροφορίες. Η δυναμική της προαναφερθείσας κατάστασης καθιστά τις διεθνείς αγορές περισσότερο ευμετάβλητες εφόσον οι αποφάσεις των ατόμων που δραστηριοποιούνται σε αυτές μεταβάλλονται σε συνεχή βάση.

Η άμεση διασπορά της πληροφορίας οδήγησε, ωστόσο, στην έντονη αλληλεξάρτηση των χρηματαγορών παγκοσμίως. Οι επενδυτές πλέον δύνανται να αγνοούν τους χωροχρονικούς περιορισμούς και με τις επενδυτικές τους επιλογές να επηρεάζουν τις παγκόσμιες αγορές ανεξαρτήτως της φυσικής τους θέσης. Έτσι, σύνηθες φαινόμενο αποτελεί πλέον το γεγονός ότι μία μικρής εμβέλειας διαταραχή σε μία αγορά μπορεί να εξαπλωθεί (contagion) και να επηρεάσει τις αγορές ανά τον κόσμο.

Οι επενδυτές όσο και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, που δραστηριοποιούνται στο εν λόγω περιβάλλον, βρίσκονται αντιμέτωποι με μία πλειάδα κινδύνων. Στην βιβλιογραφία γίνεται η εξής κατηγοριοποίηση των κινδύνων: i) επιχειρηματικός κίνδυνος (business risk), ii) στρατηγικός κίνδυνος

(strategic risk) και iii) χρηματοοικονομικός κίνδυνος (financial risk). Ο επιχειρηματικός κίνδυνος πηγάζει από την ίδια τη δραστηριότητα μίας επιχείρησης και σχετίζεται με την ικανότητα της επιχείρησης να αποκομίζει κέρδη από την λειτουργία της. Ο στρατηγικός κίνδυνος σχετίζεται με εξωγενείς, ως προς την επιχείρηση παράγοντες, όπως το οικονομικό και πολιτικό περιβάλλον στο οποίο η εταιρεία δραστηριοποιείται. Τέλος, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος ο οποίος προέρχεται από τις διακυμάνσεις και γενικότερα την μεταβλητότητα των αγορών.

Ο Χρηματοοικονομικός κίνδυνος, ο οποίος θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα, μπορεί να διακριθεί, σύμφωνα με την βιβλιογραφία, σε τέσσερις υποομάδες: τον κίνδυνο Αγοράς, τον κίνδυνο Ρευστότητας, τον Πιστωτικό κίνδυνο και τον Λειτουργικό κίνδυνο.

Αναλυτικότερα, ο κίνδυνος Αγοράς αναφέρεται στις ζημιές που ενδέχεται να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο λόγω των μεταβολών της αξίας των συστατικών του στοιχείων και μπορεί να μετρηθεί είτε σε νομισματικές μονάδες (απόλυτη μέτρηση) είτε σε σχέση με κάποιον δείκτη αναφοράς (σχετική μέτρηση).

Ο κίνδυνος Ρευστότητας μπορεί να λάβει δύο μορφές, τον κίνδυνο που σχετίζεται με την ρευστότητας της αγοράς (“βάθος”) όπου διαπραγματεύεται ένα επενδυτικό στοιχείο (Asset – liquidity risk) και τον κίνδυνο Χρηματοδότησης (Funding – liquidity risk). Συνοπτικά, ο πρώτος εμφανίζεται στην περίπτωση όπου μία πώληση, για παράδειγμα, ενός επενδυτικού στοιχείου δεν γίνεται στην αξία που επικρατεί στην αγορά αλλά σε χαμηλότερη, λόγω του μεγάλου όγκου της συναλλαγής. Ενώ ο δεύτερος, μπορεί να προκύψει από την πραγματοποίηση ζημιών λόγω μίας βεβιασμένης πώλησης κάποιου επενδυτικού στοιχείου σε αξία χαμηλότερη της εύλογης προκειμένου να καλυφθεί κάποια χρηματοδοτική υποχρέωση.

Η πιθανότητα ζημιών από την αθέτηση των υποχρεώσεων των ανπισυμβαλλόμενων αναφέρετε ως Πιστωτικός κίνδυνος. Χαρακτηριστικά αυτού του κινδύνου αποτελούν το ποσό το οποίο βρίσκεται εκτεθειμένο και το ποσοστό επανείσπραξης σε περίπτωση έλευσης του εν λόγω κινδύνου.

Τελευταία υποομάδα του χρηματοοικονομικού κινδύνου αποτελεί ο Λειτουργικός κίνδυνος. Ο εν λόγω κίνδυνος σχετίζεται με τις δυνητικές ζημιές από την αποτυχία σωστής λειτουργίας των εσωτερικών διεργασιών, τους ανθρώπους και τα συστήματα μίας εταιρείας. Εν γένει ο κίνδυνος αυτός

προέρχεται από ενδογενείς ως προς την εταιρεία παράγοντες και επηρεάζει την εκάστοτε εταιρεία μεμονωμένα.

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο προσδιορισμός και η εκτίμηση των κινδύνων στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον είναι ζωτικής σημασίας για την επιβίωση των Χρηματοπιστωτικών Ιδρυμάτων, καθώς επηρεάζει ουσιαστικά την λήψη αποφάσεων σχετικά τις επενδυτικές επιλογές και την διάθεση των πόρων των Ιδρυμάτων. Οι εν λόγω αποφάσεις μπορούν να οδηγήσουν τις Τράπεζες από την απόλυτη κερδοφορία στην πλήρη κατάρρευση. Ευλόγως, λοιπόν, θέματα που άπτονται της διαχείρισης κινδύνου απασχολούν την βιβλιογραφία.

Οι μη αναμενόμενες και ενδεχομένως καταστροφικές συνέπειες από την επέλευση των προαναφερθέντων κινδύνων δημιούργησε την ανάγκη αντιστάθμισης τους. Αυτή η ανάγκη είχε ως αποτέλεσμα την αλματώδη μεγέθυνση των αγορών παραγώγων (Derivatives). Με την έννοια αγορές παραγώγων νοούνται τόσο τα οργανωμένα χρηματιστήρια (Exchange-traded markets), όσο και οι μη οργανωμένες αγορές γνωστές με το αγγλικό όρο, Over-the-counter (OTC) markets, με τις δεύτερες να συγκεντρώνουν τον μεγαλύτερο όγκο συναλλαγών.

Απόδειξη της σημασίας της διαχείρισης του κινδύνου και κατ' επέκταση της σημασίας των παραγώγων, τα οποία συμβάλουν σε αυτό, αποτελεί το γεγονός ότι πλέον το μέγεθος των αγορών παραγώγων σε παγκόσμιο επίπεδο ανέρχεται σε αρκετά τρισεκατομμύρια δολάρια. Συγκεκριμένα, τον Ιούνιο του 2004 η συνολική αξία των συμβολαίων επί των παραγώγων ανέρχονταν στα 273 τρισεκατομμύρια δολάρια. Τον Ιούνιο του 2007 ο όγκος των συμβολαίων στα οργανωμένα χρηματιστήρια ανήρχοντο στα 96.7 τρισεκατομμύρια δολάρια και στην Over-the-counter αγορά στα 516.4. Τέλος, σύμφωνα με στοιχεία, τα οποία είναι διαθέσιμα στο διαδίκτυο¹, το μέγεθος των αγορών παραγώγων, σήμερα, εκτιμάται στα 1200 τρισεκατομμύρια δολάρια, περίπου το εικοσαπλάσιο σε μέγεθος από το παγκόσμιο Α.Ε.Π..

Ειδικότερα, από το σύνολο των κινδύνων, ο κίνδυνος αγοράς απασχολεί ιδιαίτερα την βιβλιογραφία. Επιπλέον, για τη διαχείριση του υπάρχει πλειάδα τόσο ποσοτικών εργαλείων όσο και δεδομένων που καθιστούν εφικτή τη μελέτη του. Ακόμη, η διαχείριση του αποτελεί υποχρέωση των Χρηματοπιστωτικών Ιδρυμάτων, με συγκεκριμένους κανόνες και κριτήρια,

όπως αυτά ορίζονται από διάφορες εποπτικές αρχές² με γνωστότερη την Επιτροπή της Βασιλείας (π.χ. INTERNATIONAL CONVERGENCE OF CAPITAL MEASUREMENT AND CAPITAL STANDARDS (July 1988, UPDATED TO April 1998)).

Ως προς την εκτίμηση του κινδύνου της αγοράς έχουν αναπτυχθεί αρκετές μεθοδολογίες, όπως η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης (Standard deviation) των αποδόσεων ενός επενδυτικού στοιχείου ως μέτρο του κινδύνου αγοράς. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος, η οποία αποτελεί και τον πυρήνα της παρούσας Διπλωματικής, είναι η μέθοδος Value-at-Risk (VaR) (επί το ελληνικότερον 'Αξία σε κίνδυνο'), η προέλευση του οποίου όρου Value-at-Risk δεν είναι αρκετά σαφής. Προτού επικρατήσει ο εν λόγω όρος, γινόταν χρήση και άλλων όρων όπως, Dollar-at-Risk, Income-at-Risk, Earning-at-Risk και Capital-at-Risk.

Εν γένει, το VaR ενός χαρτοφυλακίου ή ενός μεμονωμένου επενδυτικού στοιχείου είναι ένα μέτρο εκτίμησης της μέγιστης πιθανής ζημίας που μπορεί να προκύψει από μία αρνητική μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου ή του επενδυτικού στοιχείου σε μία δεδομένη χρονική περίοδο, κάτω από κανονικές συνθήκες στην αγορά και εντός ενός δεδομένου διαστήματος εμπιστοσύνης.

Ειδικότερα, το VaR αποτελεί ένα προγνωστικό εργαλείο του οποίου η χρησιμότητα έγκειται στο γεγονός ότι συνοψίζει τον συνολικό κίνδυνο μίας επενδυτικής θέσης σε έναν αριθμό. Παραδείγματος χάριν, έστω χαρτοφυλάκιο αξίας 1.000.000 €, το οποίο σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% έχει μηνιαίο/ετήσιο VaR 50.000€. Η ερμηνεία της παραπάνω πρότασης είναι η εξής, το εν λόγω χαρτοφυλάκιο αντιμετωπίζει πιθανότητα 1% να παρουσιάσει ζημιές μεγαλύτερες των 50.000€ σε διάρκεια ενός μήνα/έτους, κάτω από κανονικές συνθήκες στην αγοράς και υποθέτοντας ότι η επενδυτική θέση δεν μεταβάλλεται εντός της περιόδου υπολογισμού του VaR.

1.2. Κεφαλαιακές απαιτήσεις και VaR

Στις 15 Ιουλίου 1988 οι κεντρικές τράπεζες των 10 ισχυρότερων κρατών (G10)³, πλέον της Ελβετίας και του Λουξεμβούργου, προκειμένου την αντιμετώπιση των κινδύνων που δημιουργούνταν από την αστάθεια του χρηματοπιστωτικού συστήματος και την εγκαθίδρυση ενός ενιαίου διεθνούς

εποπτικού πλαισίου λειτουργίας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, συνυπέγραψαν ένα θεσμικό πλαίσιο, γνωστό και ως 'Βασιλεία Ι', το οποίο έθετε κάποιες κεφαλαιακές απαιτήσεις για τα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα.

Σύμφωνα με την επιτροπή, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα έπρεπε να διατηρούν ένα ελάχιστο ποσό κεφαλαίου ώστε να μπορούν να καλύψουν τυχόν μελλοντικές ζημιές. Το ποσοστό στόχος των Εποπτικών Ιδίων Κεφαλαίων προς Σταθμισμένων ως προς τον Κίνδυνο Ενεργητικών Στοιχείων έπρεπε να είναι κατ' ελάχιστον Οκτώ τοις εκατό (8%) και επίσης τα Βασικά Ίδια Κεφάλαια προς τα Σταθμισμένα ως προς τον Κίνδυνο Ενεργητικά Στοιχεία έπρεπε να είναι κατ' ελάχιστον Τέσσερα τοις εκατό (4%). Τα εποπτικά Ίδια Κεφάλαια περιλαμβάνουν τα Βασικά Ίδια Κεφάλαια (Core or Tier I Capital) και τα Συμπληρωματικά Ίδια Κεφάλαια (Supplementary or Tier II Capital)⁴.

Η Βασιλεία Ι δέχτηκε αρκετές κριτικές. Οι κυριότερες εξ αυτών σχετίζονταν α) με τα περιορισμένα περιθώρια που άφηνε στα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα όσον αφορούσε στη μεθοδολογία προσδιορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων και β) με το γεγονός ότι κατά κύριο λόγο σκοπός της ήταν η θωράκιση των Χρηματοπιστωτικών Ιδρυμάτων μόνο από τον πιστωτικό κίνδυνο (credit risk) χωρίς να λαμβάνει υπόψιν και τους υπόλοιπους κινδύνους.

Εξέλιξη της Βασιλείας Ι, αποτέλεσε η Βασιλεία ΙΙ, η οποία οριστικοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2004 και είχε χρονικό περιθώριο εφαρμογής μέχρι το 2006. Η νέα αυτή οδηγία όριζε τρεις κατευθύνσεις όσον αναφορά την εποπτεία του τραπεζικού συστήματος, γνωστές και ως οι Τρεις Πυλώνες.

Ο πρώτος πυλώνας αφορούσε τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Πλέον, όμως, οι κεφαλαιακές αυτές απαιτήσεις δεν ελάμβαναν υπόψιν μόνο τον πιστωτικό κίνδυνο, αλλά συνυπολόγιζαν τον κίνδυνο αγοράς και τον λειτουργικό κίνδυνο. Ο δεύτερος πυλώνας σχετίζονταν με τον ρόλο των εποπτικών αρχών αλλά και τους κινδύνους οι οποίοι δεν συμπεριλαμβάνονταν στον πρώτο πυλώνα, όπως ο κίνδυνος επιτοκίου. Στον εν λόγω πυλώνα ορίζονται με περισσότερες λεπτομέρειες οι ενέργειες των εποπτικών αρχών. Τέλος, ο τρίτος πυλώνας θέτει κάποιες απαιτήσεις οι οποίες σχετίζονται με τα στοιχεία που πρέπει να δημοσιοποιούν οι τράπεζες

αναφορικά με τις επενδυτικές τους θέσεις κλπ., ώστε να υπάρχει “πειθαρχεία” των τραπεζών στην αγορά.

Όπως προαναφέρθηκε στη Βασιλεία II, προβλέπονται κεφαλαιακές απαιτήσεις πλέον του πιστωτικού κινδύνου και για τον κίνδυνο αγοράς. Η νέα οδηγία δίνει στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα την επιλογή της μεθόδου για τον υπολογισμό των εν λόγω απαιτήσεων.

Έτσι τα Ιδρύματα, προκειμένου τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι του κινδύνου αγοράς, καλούνται να επιλέξουν μεταξύ της Τυποποιημένη Προσέγγισης (Standardized Approach)⁵ και της Προσέγγισης των Εσωτερικών Υποδειγμάτων (Internal-Models Approach). Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση η τράπεζα υπολογίζει μεμονωμένα, για τα χαρτοφυλάκια της, τους κίνδυνο επιτοκίου, συναλλαγματικό κίνδυνο, κίνδυνο των μετοχών και των παραγώγων σύμφωνα με συγκεκριμένες οδηγίες. Έπειτα προσδιορίζει τα εκάστοτε απαιτούμενα κεφάλαια σύμφωνα με αυτούς τους κινδύνους. Τέλος, τα συνολικά απαιτούμενα εποπτικά κεφάλαια, τα οποία θα πρέπει να διαθέτει, είναι το άθροισμα των εκάστοτε απαιτούμενων κεφαλαίων, όπως προέκυψαν από την ως άνω διαδικασία.

Στην δεύτερη προσέγγιση, δίνεται για πρώτη φορά η δυνατότητα στα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα να χρησιμοποιήσουν Υποδείγματα μέτρησης του κινδύνου, τα οποία έχουν αναπτυχθεί εσωτερικά από τα ίδια τα Ιδρύματα. Αυτό επήλθε ως αποτέλεσμα α) της έντονης κριτικής, την οποία δέχτηκε η Τυποποιημένη Προσέγγιση κυρίως διότι παραγνώριζε τα οφέλη της διαφοροποίησης (Diversification) και β) διότι είχε γίνει πλέον αντιληπτό από τις εποπτικές αρχές ότι αρκετές τράπεζες είχαν αναπτύξει δικά τους περισσότερο αποτελεσματικά εργαλεία διαχείρισης κινδύνου.

Βεβαίως τα Ιδρύματα που θα εφήρμοζαν την εν λόγω προσέγγιση θα έπρεπε να πληρούν κάποια ιδιαίτερα απαιτητικά κριτήρια. Τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά⁶. Ενδεικτικά στα κριτήρια ποιοτικού χαρακτήρα συμπεριλαμβάνονται η λειτουργία ανεξάρτητης μονάδας διαχείρισης κινδύνου εντός του ιδρύματος, η οποία μονάδα θα είναι επιφορτισμένη με την αξιολόγηση και συνεχή βελτίωση των εσωτερικών υποδειγμάτων διαχείρισης κινδύνου. Επιπλέον, τα συστήματα διαχείρισης του κινδύνου θα πρέπει να είναι έτσι δομημένα ώστε να υποστηρίζουν την καθημερινή διαχείριση του. Τέλος, από την οδηγία ορίζεται ότι θα πρέπει τακτικά να παράγεται μια

ανασκόπηση των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου από το τμήμα εσωτερικού ελέγχου των Ιδρυμάτων.

Στα ποσοτικά κριτήρια, τα οποία οφείλουν να πληρούνται κατ' ελάχιστον από τα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα, όπως τροποποιήθηκαν⁷ το 2009 σύμφωνα με το συμβουλευτικό έγγραφο (Consultative Document) "Revisions to the Basel II market risk framework" το οποίο δημοσιεύτηκε προς συζήτηση από την επιτροπή της Βασιλείας τον Ιανουάριο 2009 είναι τα παρακάτω. Οι τράπεζες θα πρέπει να υπολογίζουν σε καθημερινή βάση το "Value – at Risk" με διάστημα εμπιστοσύνης 99%. Κατά τον υπολογισμό του VaR θα πρέπει να χρησιμοποιείται μία μεταβολή στην τιμή του ενεργητικού στοιχείου ή του χαρτοφυλακίου ισοδύναμη με την μεταβολή της τιμής στο διάστημα των τελευταίων 10 ημερών. Τα ιστορικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ενός έτους και θα πρέπει να ανανεώνονται τουλάχιστον μία φορά κάθε μήνα ή και συχνότερα εάν οι συνθήκες το απαιτούν. Στην οδηγία δεν περιγράφεται κάποιο συγκεκριμένο υπόδειγμα εκτίμησης του VaR και συνεπώς οι τράπεζες μπορούν να χρησιμοποιήσουν όποιο θεωρούν καταλληλότερο.

Πλέον των κριτηρίων, τα οποία επιγραμματικά αναφέρθηκαν παραπάνω, τα Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα θα πρέπει να υπολογίζουν ένα VaR κάνοντας κάποια σενάρια δυσμενών μεταβολών της αγοράς, γνωστό ως "Stressed Value-at-Risk". Στην προκειμένη περίπτωση οι τράπεζες προσομοιώνουν σενάρια ή πραγματοποιηθέντα ιστορικά γεγονότα έτσι ώστε να ελέγξουν τα όρια αντοχής τους στην περίπτωση που υλοποιηθεί κάποιο τέτοιο σενάριο.

1.3. Βιβλιογραφική αναφορά

Το πρόβλημα της διαχείρισης κινδύνου ανέκαθεν απασχολούσε τον κλάδο των χρηματοοικονομικών και της στατιστικής, επιπλέον η διαχείριση του εν λόγω κινδύνου αποτελεί αντικείμενο ενασχόλησης και των εποπτικών αρχών και όχι μόνο των διαχειριστών των τραπεζών. Κάνοντας μία ιστορική αναδρομή, η ιδέα του VaR δεν είναι καινούργια, υιοθετήθηκε, όμως, ευρέως για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς στα επενδυτικά χαρτοφυλάκια μετά την κατάρρευση των χρηματαγορών το 1987, η οποία ξεκίνησε από το Hong Kong και διαδόθηκε σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε Ευρώπη και Αμερική,

δημιουργώντας σε ακαδημαϊκούς και επαγγελματίες του κλάδου αμφιβολίες για την ικανότητα επιβίωσης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

Ήδη το 1945 σε ένα άρθρο του Leavens υπήρχε μία διαισθητική περιγραφή κάποιου είδους VaR. Αυτή η περιγραφή αποτελεί το πρώτο μέτρο VaR που είχε δημοσιευθεί. Συγκεκριμένα, ο Leavens υπέθεσε ένα χαρτοφυλάκιο με δέκα ομόλογα τα οποία στην λήξη τους είτε θα πληρώσουν την ονομαστική αξία είτε θα κριθούν ανεπίδεκτα εισπράξεως και η αξία θα είναι μηδέν. Έτσι, ουσιαστικά στην λήξη η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι μία διωνυμική κατανομή. Στο εν λόγω άρθρο, ο Leavens έδινε ιδιαίτερη σημασία στην διαφορά μεταξύ πιθανών ζημιών και πιθανών κερδών, έχοντας υπόψιν την τυπική απόκλιση της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Σχεδόν ταυτόχρονα το 1952 οι Markowitz και Roy, δημοσίευσαν κάποιες μεθοδολογίες και μέτρα υπολογισμού της 'Αξίας σε Κίνδυνο'. Κύριος στόχος και των δύο ήταν η ανάπτυξη κάποιων μεθόδων επιλογής χαρτοφυλακίων τα οποία να είναι 'βέλτιστα', δηλαδή για δεδομένο επίπεδο κινδύνου να έχουν την μέγιστη αναμενόμενη απόδοση είτε για δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης να χαρακτηρίζονται από τον ελάχιστο κίνδυνο. Για να επιτύχουν τον στόχο τους, ο καθένας πρότεινε διάφορα μέτρα VaR τα οποία λάμβαναν υπόψιν τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των παραγόντων από τους οποίους απορρέουν τα διάφορα είδη κινδύνου. Ο Markowitz έκανε χρήση της διακύμανσης (variance) ως μέτρο του VaR, ενώ ο Roy προσπάθησε να προσδιορίσει την πιθανότητα να μειωθεί η αξία του χαρτοφυλακίου περισσότερο από ένα ανεκτό όριο⁸. Οι Schrock (1971) και Dusak (1972) περιέγραψαν μία μεθοδολογία VaR για χαρτοφυλάκια παραγώγων. Μία εφαρμοσμένη μεθοδολογία για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς που αφορά σε συνάλλαγμα προτάθηκε από τον Lietaer (1971) και ενδεχομένως να ήταν η πρώτη φορά που χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία Monte Carlo.

Έκτοτε και καθώς η τεχνολογία βελτιωνόταν και οι αγορές εξελίσσονταν, οι μεθοδολογίες VaR άρχισαν να γίνονται περισσότερο εφαρμοσμένες, καθώς η έλλειψη υπολογιστικών πόρων επέτρεπε μέχρι τότε μόνο την θεωρητική περιγραφή τους. Την δεκαετία 1970 - 1980, λόγω των παραπάνω εξελίξεων στην εκτίμηση του VaR, πραγματοποιήθηκαν αρκετές αλλαγές. Αρχικά τα μέτρα VaR εφαρμόστηκαν σε περισσότερα ενεργητικά στοιχεία πέραν των

μετοχών, άλλαξε ο τρόπος με τον οποίο οι επιχειρήσεις αναλαμβάνουν ρίσκο και τέλος ήταν πλέον διαθέσιμα τα μέσα για την εφαρμογή των τεχνικών VaR.

Παράδειγμα εφαρμογής VaR σε άλλου είδους επενδυτικά στοιχεία εκτός των μετοχών αποτελεί η προσπάθεια του Kenneth Garbade (1986), ο οποίος εφήρμοσε VaR σε χαρτοφυλάκια ομολόγων. Πιο συγκεκριμένα, τα μέτρα VaR που πρότεινε εδράζονταν στην σχέση μεταξύ των μεταβολών της τιμής ενός ομολόγου και των μεταβολών της απόδοσης του.

Σημαντική στην εξέλιξη του VaR ήταν η συμβολή της εργασίας του Wilson (1993), ο οποίος εργαζόμενος στην McKinsey & Co δημοσίευσε ένα νέο μέτρο του VaR. Η ειδοποιός διαφορά της εργασίας του Wilson από των υπολοίπων ήταν η προσπάθεια ενσωμάτωσης της λεπτοκύρτωσης και της πολυσυγγραμμικότητας στον υπολογισμό του VaR.

Αναμφισβήτητα, την μεγαλύτερη συμβολή στην διάδοση και εφαρμογή των μέτρων Value-at-Risk είχε η δημοσίευση, από την JP Morgan, των μεθοδολογιών VaR και η δωρεάν πρόσβαση που έδωσε στο κοινό σε υπηρεσίες υπολογισμού του. Έχουν δημοσιευθεί αρκετά άρθρα από την εν λόγω εταιρεία σχετικά με τεχνικές λεπτομέρειες που αφορούν στο Value-at-Risk, όπως RiskMetrics - Technical Document, Value-at-Risk: An Overview of analytical VaR, An Overview of Value-at-Risk: Part II - Historical Simulations VaR, An Overview of Value-at-Risk: Part III – Monte Carlo Simulations VaR, Back Testing Value-at-Risk, Stress Testing Value-at-Risk. Ορισμένα από τα οποία τα οποία θα συζητηθούν σε μεταγενέστερα κεφάλαια.

1.4. Αντικείμενο Μελέτης

Το αντικείμενο μελέτης της εν λόγω διατριβής εστιάζεται στην μέτρηση του κινδύνου αγοράς (market risk), ο οποίος ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία του χρηματοοικονομικού κινδύνου. Ο κίνδυνος αγοράς πηγάζει από το ενδεχόμενο δυσμενών μεταβολών των τιμών των αξιόγραφων.

Επί παραδείγματι, έστω χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο επενδυτικών στοιχείων (Assets), τα οποία διαπραγματεύονται στις αγορές και οι τιμές τους είναι διαθέσιμες ανά πάσα στιγμή, όπως μετοχές, ομόλογα, συνάλλαγμα κλπ.. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα των μεταβολών των αξιών των επιμέρους

επενδυτικών στοιχείων. Ο κίνδυνος της αγοράς αναφέρεται στην ενδεχόμενη αρνητική μεταβολή της τιμής ενός επενδυτικού στοιχείου ή του συνόλου αυτών.

Συνεπώς, ένα από τα προβλήματα το οποίο καλείται να αντιμετωπίσει ο εκάστοτε παράγοντας που δραστηριοποιείται στις αγορές και κυρίως τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και οι εταιρείες διαχείρισης κεφαλαίων είναι η ποσοτικοποίηση του εν λόγω κινδύνου. Για του πρώτους, η ποσοτικοποίηση του κινδύνου αγοράς δεν αποτελεί απλώς μία διαδικασία προαιρετικού χαρακτήρα, αλλά επιβάλλεται από τις εποπτικές αρχές και διεθνείς κανονισμούς σε μία προσπάθεια ολοκλήρωσης του λειτουργικού πλαισίου του τραπεζικού συστήματος σε παγκόσμιο επίπεδο.

Συνοψίζοντας, στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας θα παρουσιασθούν οι τέσσερις επικρατέστερες κατηγορίες τεχνικών εκτίμησης του Value – at – Risk, οι οποίες είναι: i) η τεχνική του Παραμετρικού (Αναλυτικού) VaR, ii) η τεχνική των Ιστορικών Προσομοιώσεων, iii) η τεχνική των Monte Carlo Προσομοιώσεων και iv) η τεχνική Tail Index estimation. Επιπλέον, στο εν λόγω κεφάλαιο θα παρουσιασθεί η μεθοδολογία του Backtesting, η οποία σε συνδυασμό με το Likelihood Ratio test που προτάθηκε από τον Paul H. Kupiec(1995), θα χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας της εκάστοτε τεχνικής. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθενται τα εμπειρικά αποτελέσματα από την εφαρμογή των τεχνικών στο δείκτη Standard & Poor's 500, καθώς επίσης και τα συμπεράσματα τα οποία εξάγονται.

2. Παρουσίαση κύριων τεχνικών VaR

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της εκάστοτε τεχνικής και των επιμέρους υποπεριπτώσεων τους. Επιπλέον, παρατίθενται κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της έννοια του VaR, καθώς και μία σύγκριση μεταξύ των κύριων τεχνικών εκτίμησης του VaR. Τέλος, αναλύεται η μεθοδολογία Backtesting και περιγράφεται ο στατιστικός έλεγχος για την αξιοπιστία της εκάστοτε τεχνικής.

2.1. Αναλυτικό ή Παραμετρικό (Analytical or Parametric) VaR

Όπως έχει αναφερθεί, η μεθοδολογία VaR αποτελεί ένα προγνωστικό εργαλείο το οποίο συνοψίζει τον συνολικό κίνδυνο μίας επενδυτικής θέσης σε έναν αριθμό, ο οποίος αποτελεί εκτίμηση της μεγαλύτερης πιθανής απώλειας που μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αρχικά, για την εκτίμηση του VaR πρέπει να ορισθούν ο επενδυτικός ορίζοντας και το επίπεδο εμπιστοσύνης. Η επιλογή του επενδυτικού ορίζοντα ουσιαστικά ορίζει τον ορίζοντα της ανάλυσης, φεριπνήν εάν επιλεγεί ως επενδυτικός ορίζοντας ο μήνας, τότε το VaR δίνει μία εκτίμηση για το ποιά είναι η μέγιστη ζημιά, η οποία πιθανόν να συμβεί, μέσα στο διάστημα του επόμενου μήνα, με δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και κάτω από κανονικές συνθήκες στην αγορά.

Το επίπεδο εμπιστοσύνης αποτελεί ένα μέτρο αξιοπιστίας της ακρίβειας της εκτίμησης του VaR. Όσο υψηλότερο το επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ. 95%, 99%) τόσο πιο κοντά στην πραγματική της τιμής αναμένεται να είναι η εκτίμηση του VaR, αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι εποπτικές αρχές επιλέγουν υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης.

Μαθηματικά το Παραμετρικό VaR εκφράζεται ως εξής: $VaR_{1-\alpha} = -\chi_{\alpha} * P$, όπου $VaR_{1-\alpha}$ είναι ένας εκτιμητής του VaR μέσα σε διάστημα εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Υπό την υπόθεση ότι η αναμενόμενη απόδοση ενός ενεργητικού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου ακολουθεί μία παραμετρική κατανομή, όπως είναι η κανονική ή η Students's - t, το χ_{α} εκφράζει την πιθανότητα η εν λόγω αναμενόμενη απόδοση να είναι μικρότερη από το χ_{α} για επίπεδο

σημαντικότητα α . Τέλος, P είναι η τρέχουσα αξία του ενεργητικού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου για το οποίο υπολογίζεται το VaR.

2.1.1. Παραμετρικό VaR με μέσο (μ) και σταθερή διακύμανση (σ)

2.1.1.1. VaR υπό την υπόθεση κανικότητας των αποδόσεων

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα (Central Limit Theorem) η κατανομή ενός μεγάλου συνόλου (θεωρητικά προσεγγίζει το άπειρο) τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες χαρακτηρίζονται από ανεξαρτησία και ταυτονομία (independent and identically distributed - iid) τείνει να προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις ενός ενεργητικού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες διέπονται από ανεξαρτησία και ταυτονομία, τότε μπορεί να στηριχθεί το επιχείρημα ότι ακολουθούν κανονική κατανομή.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, νομιμοποιούμαστε να συσχετίσουμε την κατανομή της αναμενόμενης απόδοσης με την τυποποιημένη κανονική κατανομή χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή, έστω z , η οποία ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή με μέσο (μ) μηδέν και σταθερή διακύμανση (σ^2) ένα, $z \sim N(0,1)$.

Έτσι, έχουμε $z_a = (x_a - \mu) / \sigma$ και λύνοντας ως προς x_a , προκύπτει $x_a = \mu + z_a * \sigma$, όπου z_a είναι το εμβαδόν (άρα η πιθανότητα) κάτω από την αθροιστική τυποποιημένη κανονική κατανομή για επίπεδο σημαντικότητας α . Συνεπώς, με την τεχνική αυτή το μέτρο του VaR υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο, $VaR_{1-\alpha} = - (\mu + z_a * \sigma) * P$.

Η παραπάνω ανάλυση αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία γίνεται χρήση των ποσοστιαίων αποδόσεων [$x_i = (p_i - p_{i-1}) / p_{i-1}$], όπου p η αξία (τιμή) του περιουσιακού στοιχείου. Στην περίπτωση, όπου οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων είναι λογαριθμικές [$x_i = \log(p_i / p_{i-1})$], τότε το παραπάνω υπόδειγμα λαμβάνει την εξής μορφή: $VaR_{1-\alpha} = - (e^{\mu + z_a * \sigma} - 1) * P$, εφόσον, ισχύει ότι $(p_i - p_{i-1}) / p_{i-1} = p_i / p_{i-1} - 1 = e^{x_i} - 1$ και $x_a = \mu + z_a * \sigma$ και προβαίνοντας στις αντικαταστάσεις προκύπτει το παραπάνω υπόδειγμα.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων μ και σ θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Method). Η συνάρτηση

πυκνότητας πιθανότητας στην περίπτωση, όπου γίνεται υπόθεση ότι οι αποδόσεις (x_i) ακολουθούν κανονική κατανομή, είναι:

$$PDF = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

και η συνάρτηση πιθανότητα είναι:

$$\prod_{i=1}^T PDF_i = \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Επομένως, οι καταλληλότεροι εκτιμητές των μ και σ , $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}$, αντίστοιχα, είναι εκείνοι που μεγιστοποιούν την Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανοφάνειας (Log Likelihood Function), έστω L:

$$\begin{aligned} L &= \log\left(\prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^T \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \log e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log 1 - \log \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \log e\right] \\ &= T[\log 1 - \log \sigma - \log \sqrt{2\pi}] - \sum_{i=1}^T \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η παρακάτω έκφραση:

$$\sum_{i=1}^T \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

2.1.1.2. Παραμετρικό VaR υπό την υπόθεση Student –t κατανομής

Εμπειρικά έχει παρατηρηθεί ότι οι κατανομές που χαρακτηρίζουν τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων τείνουν να έχουν παχύτερες “ουρές” (Fat tails), δηλαδή συντελεστή κύρτωσης μικρότερο του 3 ($\alpha_4 < 3$), γεγονός το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψιν όταν γίνεται υπόθεση κανονικότητας των αποδόσεων ($\alpha_4 = 3$). Προκειμένου να συνυπολογισθεί αυτή η παράμετρος στην εκτίμηση του VaR, θα μπορούσε στο παραπάνω υπόδειγμα να εισαχθεί η υπόθεση ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν κατανομή Student – t, η οποία χαρακτηρίζεται από παχύτερες “ουρές”⁹.

Εν γένει, η Student ‘s – t κατανομή προσδιορίζεται από τρεις παραμέτρους, τον μέσο μ , την διακύμανση $\gamma^2/(v-2)$ και τους βαθμούς ελευθερίας v . Στην περίπτωση της Student – t κατανομής η μαθηματική έκφραση που περιγράφει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) είναι:

$$PDF(x/v, \mu, \gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi\gamma^2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} * \left(1 + \frac{1}{v} \frac{(x-\mu)^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

όπου, v είναι οι βαθμοί ελευθερίας (σημείωση: εάν $v \rightarrow \infty$, τότε η κατανομή Student ‘s – t τείνει προς την κανονική κατανομή), $\mu = E(x)$ για $v > 1$, γ^2 είναι η διακύμανση της κανονικής κατανομής και Γ είναι η συνάρτηση Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Οι παράμετροι μ , γ , και v εκτιμώνται με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Έστω ότι οι αποδόσεις x_i , όπου, $i=1,2,\dots,T$ είναι τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας $PDF_i(x/v, \mu, \gamma)$. Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας (Likelihood function) των x_i είναι το γινόμενο των επιμέρους PDFs:

$$\prod_{i=1}^T PDF_i = \prod_{i=1}^T \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi\gamma^2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{v} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Σύμφωνα με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας οι καλύτεροι εκτιμητές των μ , γ , και v είναι εκείνοι οι οποίοι μεγιστοποιούν την Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανότητας (Log Likelihood Function). Έστω L , η λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητα, τότε:

$$\begin{aligned}
L &= \text{Log}(\prod_{i=1}^T \text{PDF}_i) = \log \left[\prod_{i=1}^T \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi\gamma^2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^T \left[\log \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi\gamma^2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right] + \log \left[\left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \right] \right] \\
&= \sum_{i=1}^T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \log \sqrt{\nu\pi\gamma^2} - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{\nu+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2} \right] \right] \\
&= \sum_{i=1}^T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \nu \pi \gamma^2 - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{\nu+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2} \right] \right] \\
&= \sum_{i=1}^T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \nu \pi - \log \gamma - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + \sum_{i=1}^T \left[-\frac{\nu+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2} \right] \right] \\
&= T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \nu \pi - \log \gamma - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] - \frac{\nu+1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\log \left[1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x_i-\mu)^2}{\gamma^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων συμπεριφέρονται ως τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί Student – t κατανομή, τότε η τυχαία αυτή μεταβλητή (εν προκειμένω οι αποδόσεις) έχει μέσο μ και διακύμανση $\frac{\nu\gamma^2}{\nu-2}$, όπου γ^2 είναι η διακύμανση στην περίπτωση της κανονικής κατανομής.

$$\text{Συνεπώς, } \mathbf{VaR}_{1-a} = -(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{Q}_a^* \boldsymbol{\gamma}) * \mathbf{P}$$

όπου, μ ο μέσος και $\mathbf{Q}_a^* \sim \chi^2(0, \frac{\nu}{\nu-2})$ (Συσσωρευτική τυποποιημένη κατανομή τυχαίας μεταβλητής, η οποία ακολουθεί Student – t κατανομή.)

Στην περίπτωση Λογαριθμικών αποδόσεων ο παραπάνω τύπος του VaR μετασχηματίζεται ως εξής: $\mathbf{VaR}_{1-a} = -(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu} + \mathbf{Q}_a^* \boldsymbol{\gamma}} - \mathbf{1}) * \mathbf{P}$.

2.1.1.3. Παραμετρικό VaR υπό την υπόθεση Power Exponential κατανομής

Εναλλακτικά της υπόθεσης των δύο παραπάνω κατανομών, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων κατανέμονται σύμφωνα με την Power Exponential Distribution (P.E.D.) και ο μέσος τους είναι μηδέν.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραπάνω κατανομής είναι:

$$PDF(x, \sigma, \delta) = \frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x}{\varphi \sigma} \right|^\delta}$$

όπου, $\varphi = \left[\frac{2^{-\frac{2}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\delta}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx$, σ^2 η

διακύμανση της Power Exponential Distribution και δ μία παράμετρος που καθορίζει την κύρτωση της κατανομής

Αναλόγως της τιμής του δ η κατανομή έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Εάν $\delta=2$: Η P.E.D. μετατρέπεται σε κανονική κατανομή
- Εάν $\delta>2$: Η P.E.D. παρουσιάζει λεπτές ουρές (Thin-tailed)
- Εάν $\delta<2$: Η P.E.D. γίνεται λεπτόκυρτη με παχιές ουρές (Fat-tailed).

Η εκτίμηση της διακύμανσης θα γίνει με την γνωστή μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Η Συνάρτηση Πιθανοφάνειας είναι:

$$\prod_{i=1}^T PDF_i(x, \sigma, \delta) = \prod_{i=1}^T \frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta}$$

Ενώ, η Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανοφάνειας (L) είναι:

$$\begin{aligned} L &= \log\left(\prod_{i=1}^T PDF_i(x, \sigma, \delta)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^T \frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta}\right) \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\left(\frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sigma}\right) + \log e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta} \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log(\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sigma) - \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta \log e \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) - \log \sigma - \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) - \log \sigma \right] - \sum_{i=1}^T \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta \end{aligned}$$

$$= T[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) - \log \sigma] - \sum_{i=1}^T \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta$$

Συνεπώς, ο καλύτερος εκτιμητής για τη διακύμανση είναι εκείνος που ελαχιστοποιεί την παρακάτω παράσταση.

$$-T \log \sigma - \sum_{i=1}^T \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma} \right|^\delta$$

Στην περίπτωση της PED η εκτίμηση της τυπική απόκλιση με την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας, όταν ο μέσος είναι μηδέν, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

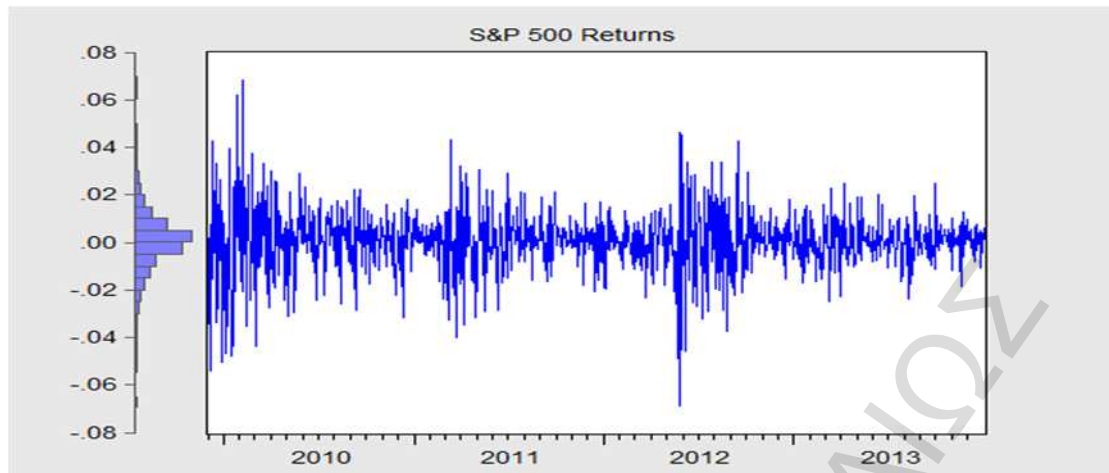
$$\sigma = \sqrt{\delta g(\delta) * \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |x_i|^\delta}, \text{ όπου } g(\delta) = \delta \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \right]^{\frac{\delta}{2}}$$

Επομένως, $\text{VaR}_{1-a} = - (\mu + \text{PED}_a * \sigma) * P$, όπου μ ο μέσος και $\text{PED}_a \sim \text{PED}(0,1)$ (Συσσωρευτική τυποποιημένη κατανομή τυχαίας μεταβλητής, η οποία ακολουθεί PED κατανομή).

Στην περίπτωση Λογαριθμικών αποδόσεων ο παραπάνω τύπος του VaR μετασχηματίζεται ως εξής: $\text{VaR}_{1-a} = - (e^{\mu + \text{PED}_a * \sigma} - 1) * P$.

2.1.2. Υπόδειγμα GARCH

Οι στοχαστικές ανελίξεις των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, πέραν του γεγονότος ότι οι κατανομές τους χαρακτηρίζονται στην πλειονότητα τους από παχιές “ουρές”, σε πολλές περιπτώσεις παρουσιάζουν μη σταθερή διακύμανση. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό και ως Ετεροσκεδαστικότητα και χαρακτηριστικό γνώρισμα του είναι οι συστάδες που παρουσιάζει η διακύμανση (volatility clustering).



Παράδειγμα volatility clustering. Το διάγραμμα αφορά στις αποδόσεις του S&P500

Η χρήση υποδειγμάτων τα οποία υποθέτουν σταθερή διακύμανση (σ^2) δεν λαμβάνουν υπόψιν αυτό το φαινόμενο με αποτέλεσμα να χάνεται σημαντική πληροφορία. Προκειμένου να συνηπολογισθεί αυτή η παράμετρος, προτείνεται η χρήση ενός υποδείγματος ή μίας ευρύτερης “οικογένειας” υποδειγμάτων τα οποία μοντελοποιούν την διακύμανση. Μία τέτοια κατηγορία είναι τα γνωστά Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) μοντέλα. Τα παραπάνω υποδείγματα, όπως προϊδεάζει το όνομα τους, μοντελοποιούν την δεσμευμένη διακύμανση (conditional variance).

Στην γενική τους μορφή ένα υπόδειγμα GARCH(p,q) μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω αλγεβρική έκφραση:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \alpha_2 x_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q x_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

ή εναλλακτικά

$$\sigma_t^2 = \delta V_L + \sum_{i=1}^q a_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Ερμηνεύοντας την παραπάνω μαθηματική έκφραση, το δV_L ($\omega = \delta v_L$) είναι ο μακροχρόνιος μέσος όρος της διακύμανσης, τα a_i και β_i είναι οι σταθμίσεις (weights) των παρελθοντικών τιμών των εκάστοτε τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή το πόσο οι προηγούμενες παρατηρήσεις των x_{t-i}^2 και σ_{t-i}^2 επηρεάζουν το σ_t^2 , όπου x_{t-i} είναι η ποσοστιαία μεταβολή της μεταβλητής την ημέρα t-i,

στην προκειμένη περίπτωση η μεταβλητή είναι η αξία (τιμή) ενός περιουσιακού στοιχείου και κατά συνέπεια το x_{t-i} ($x_{t-i} = \log x_t - \log x_{t-1}$) είναι οι αποδόσεις του υπό εξέταση περιουσιακού στοιχείου και το σ_{t-i}^2 είναι η διακύμανση των αποδόσεων την ημέρα $t-i$.

Εν προκειμένω, στα φαινόμενα χρηματοοικονομικής φύσεως, έχει τεκμηριωθεί εμπειρικά, από πλειάδα μελετών, ότι ένα υπόδειγμα GARCH(1,1) είναι επαρκές για να συλλάβει την μεταβλητότητα της διακύμανσης, ωστόσο ακολουθεί μία οικονομετρική ανάλυση που αφορά στον δείκτη S&P 500 για την πληρέστερη τεκμηρίωση των προλεχθέντων. Εξάλλου η χρήση υποδειγμάτων GARCH ανώτερης τάξης, εγκυμονεί τον κίνδυνο, το υπόδειγμα να περιγράφει ικανοποιητικά το δεδομένο δείγμα, όμως να αποτυγχάνει στην περιγραφή του γενικότερου φαινομένου (overfitting).

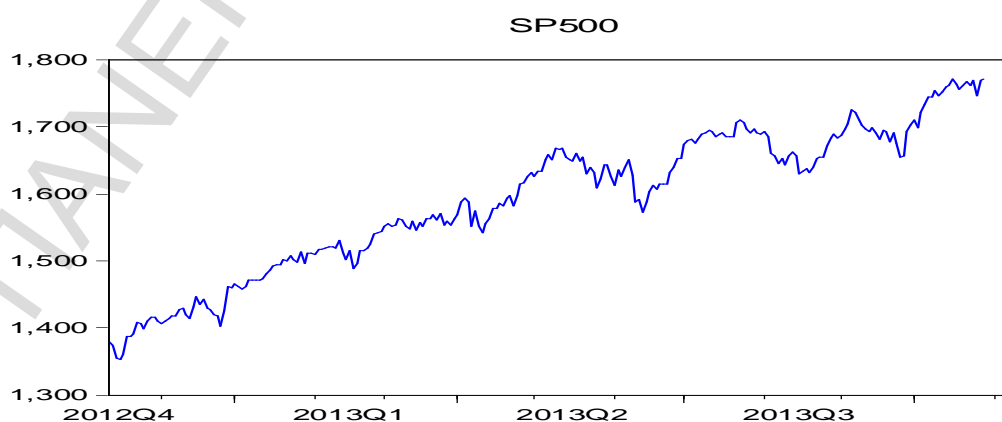
Ένα υπόδειγμα GARCH(1,1) μπορεί να ορισθεί ως εξής:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha x_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Οικονομετρική ανάλυση

Η παρούσα οικονομετρική προσέγγιση βασίζεται σε ένα δείγμα ιστορικών τιμών του δείκτη S&P 500, το οποίο αναφέρεται στην περίοδο 11/12/2012 έως 11/11/2013.

S&P 500 price graph

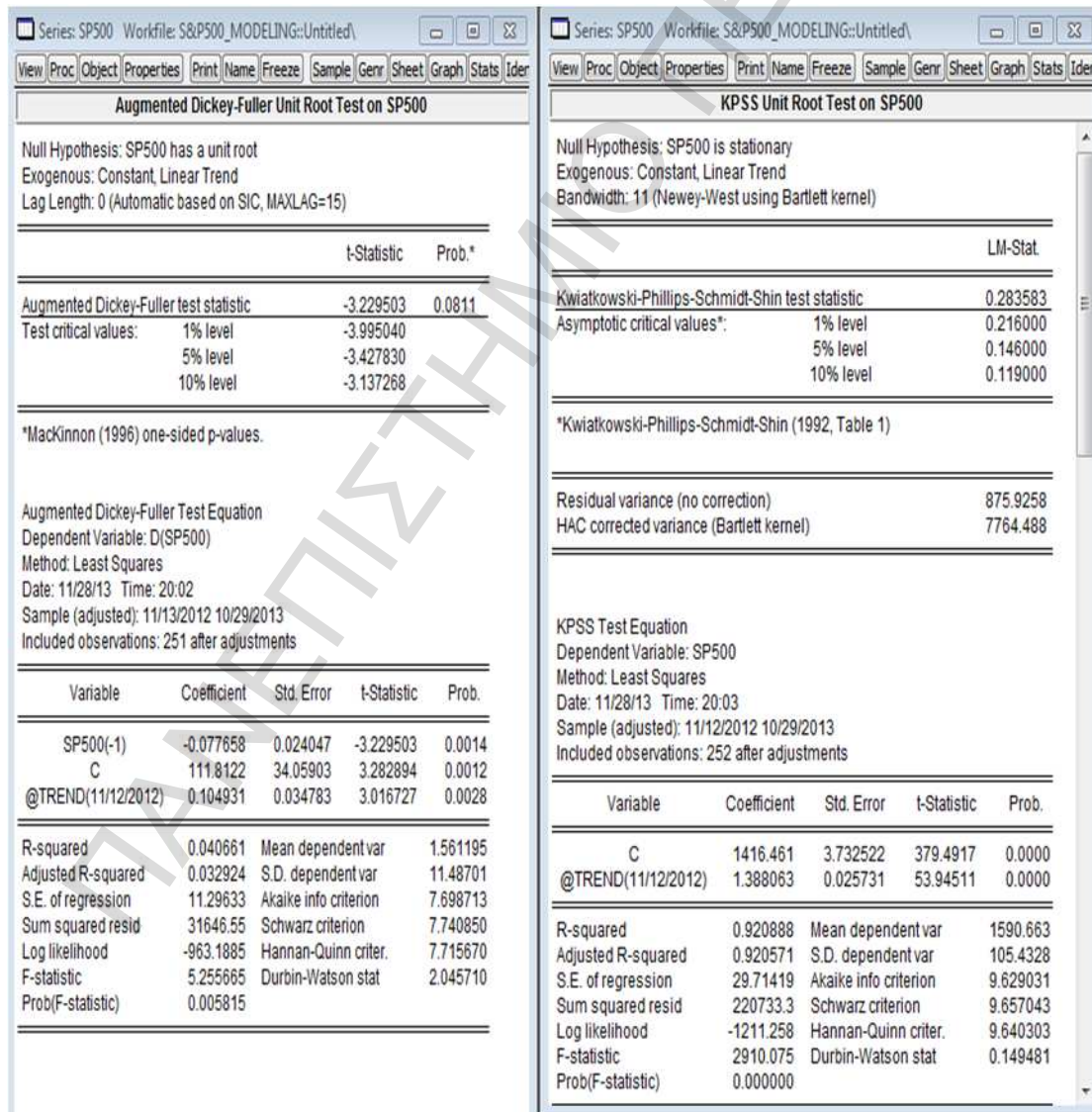


Από το γράφημα φαίνεται ότι η στοχαστική ανέλιξη των τιμών έχει μοναδιαία ρίζα (unit root), γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται από τους παρακάτω ελέγχους 'Augmented Dickey - Fuller' και 'KPSS'.

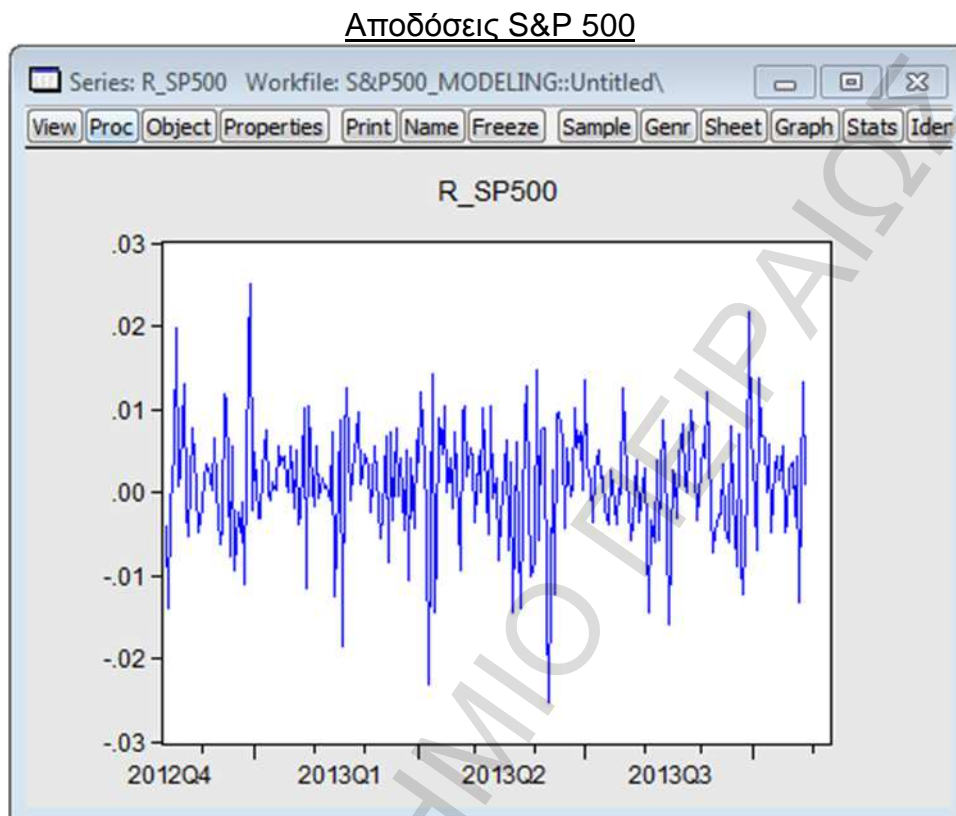
Το P-value του Augmented Dickey – Fuller είναι $0,0811 > 0,05$, επομένως γίνεται αποδεκτή η Μηδενική Υπόθεση του ελέγχου ότι η στοχαστική ανέλιξη έχει μοναδιαία ρίζα.

Επιπλέον, το t-statistic του ελέγχου KPSS είναι $0,2835 > 0,1450$ σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%, επομένως απορρίπτεται η Μηδενική υπόθεση του ελέγχου ότι η στοχαστική ανέλιξη είναι στάσιμη.

Συμπερασματικά, και οι δύο έλεγχοι συμφωνούν ότι με σχετική βεβαιότητα της τάξης του 95%, η στοχαστική ανέλιξη έχει μοναδιαία ρίζα και δεν έχει νόημα η προσπάθεια μοντελοποίησης της.

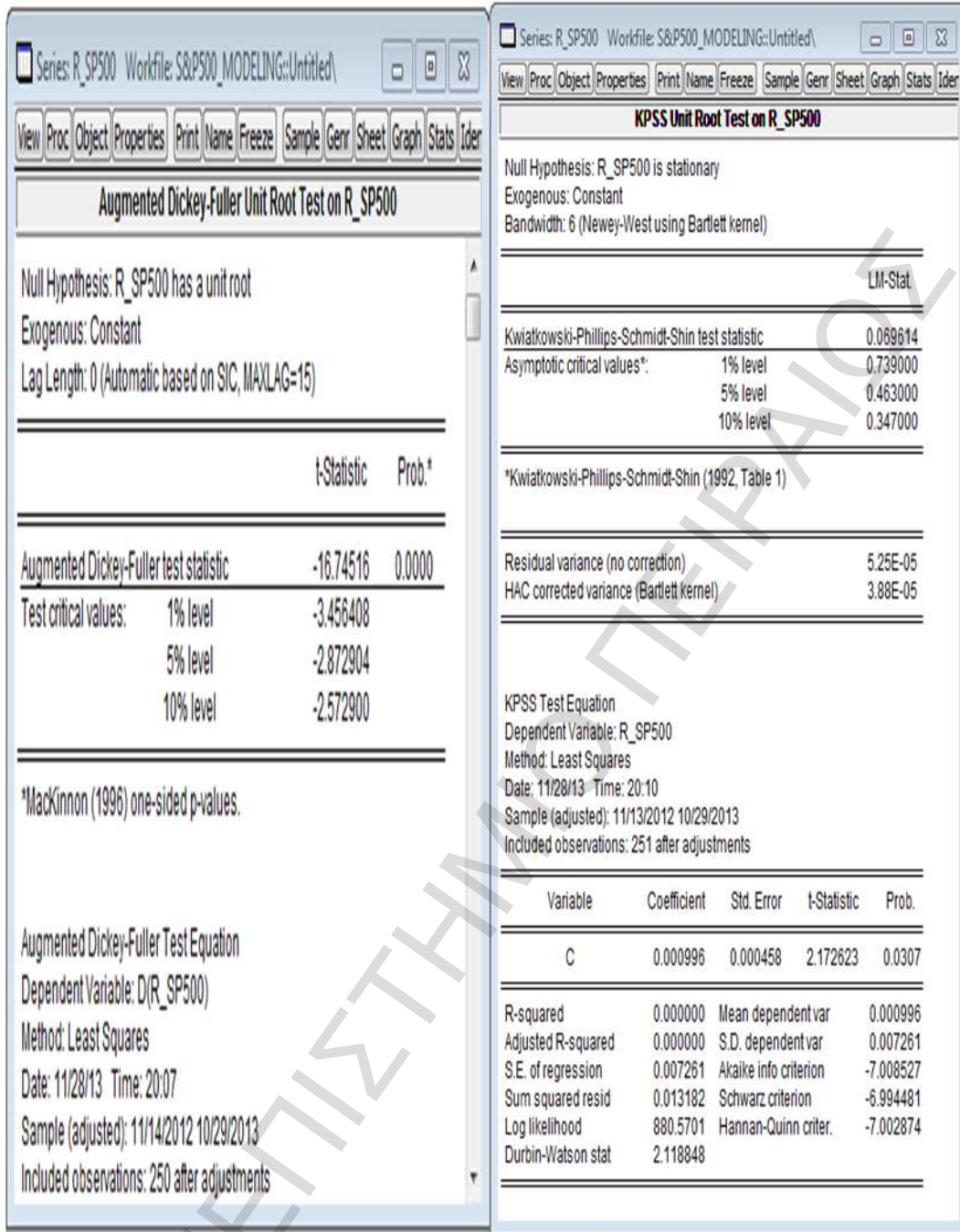


Επομένως, η μοντελοποίηση θα λάβει χώρα στην στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων, η οποία είναι στάσιμη, όπως φαίνεται από τους παρακάτω ελέγχους 'Augmented Dickey - Fuller' και 'KPSS'.



Το P-value του Augmented Dickey – Fuller είναι $0,00 < 0,05$, επομένως απορρίπτεται Μηδενική Υπόθεση του ελέγχου ότι η στοχαστική ανέλιξη έχει μοναδιαία ρίζα.

Επιπλέον, το t-statistic του ελέγχου KPSS είναι $0,069 < 0,453$ σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%, επομένως γίνεται αποδεκτή η Μηδενική υπόθεση του ελέγχου ότι η στοχαστική ανέλιξη είναι στάσιμη.



Συνεχίζοντας την διαδικασία μοντελοποίησης της στοχαστικής ανέλιξης των αποδόσεων του δείκτη εξετάζονται οι συναρτήσεις Αυτοσυσχέτισης και Μερικής Αυτοσυσχέτισης, προκειμένου να προσδιορισθεί η ευρύτερη οικογένεια υποδειγμάτων που θα μπορούσαν την περιγράψουν. Παρακάτω παρατίθενται ο πίνακας με τις εν λόγω συναρτήσεις (Correlogram).

Οι συναρτήσεις Αυτοσυσχέτισης και Μερικής Αυτοσυσχέτισης μελετώνται από το Correlogram, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, το οποίο παράχθηκε με το οικονομετρικό πακέτο E – views. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης δείχνει το πώς μία παρατήρηση την χρονική στιγμή t επηρεάζεται από τις προηγούμενες. Ενώ, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης δείχνει το πώς μία παρατήρηση την χρονική στιγμή t επηρεάζεται από μία προηγούμενη (έστω την $t-n$), έχοντας αφαιρεθεί η επίδραση των ενδιάμεσων παρατηρήσεων.

Πίνακας Αυτοσυσχέτισης και Μερικής Αυτοσυσχέτισης

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.060	-0.060	0.9258	0.336		
2	-0.050	-0.054	1.5619	0.458		
3	-0.022	-0.028	1.6815	0.641		
4	-0.019	-0.025	1.7746	0.777		
5	-0.112	-0.118	4.9898	0.417		
6	0.065	0.048	6.0925	0.413		
7	0.030	0.024	6.3290	0.502		
8	0.066	0.071	7.4731	0.487		
9	-0.047	-0.039	8.0597	0.528		
10	-0.022	-0.030	8.1918	0.610		
11	-0.021	-0.011	8.3059	0.686		
12	-0.029	-0.030	8.5225	0.743		
13	-0.037	-0.035	8.8844	0.782		
14	-0.058	-0.089	9.7919	0.777		
15	-0.058	-0.082	10.705	0.773		
16	0.049	0.026	11.354	0.787		
17	-0.001	-0.007	11.355	0.838		
18	-0.013	-0.019	11.400	0.877		
19	-0.047	-0.066	12.009	0.885		
20	-0.027	-0.039	12.204	0.909		
21	-0.023	-0.013	12.349	0.930		
22	-0.051	-0.062	13.079	0.931		
23	0.015	-0.009	13.141	0.949		
24	-0.038	-0.082	13.536	0.956		
25	-0.061	-0.086	14.598	0.950		
26	0.073	0.052	16.101	0.934		
27	-0.039	-0.060	16.532	0.942		
28	0.048	0.038	17.178	0.945		
29	0.048	0.023	17.848	0.947		
30	-0.050	-0.054	18.561	0.949		
31	-0.019	-0.006	18.669	0.960		
32	-0.090	-0.130	21.018	0.931		

Δεδομένων του γραφήματος των αποδόσεων το οποίο παρουσιάζει έντονο volatility clustering και του Correlogram, η μοντελοποίηση θα γίνει στα πλαίσια της ευρύτερης οικογένειας των Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity υποδειγμάτων, διότι η μη σταθερή διακύμανση προϋποθέτει ότι η ιστορικά προγενέστερες διακυμάνσεις επηρεάζουν τις τωρινές. Πιο συγκεκριμένα, μετά από μία περίοδο με υψηλές διακυμάνσεις είναι πιθανότερο να ακολουθήσει μία περίοδος με επίσης υψηλές διακυμάνσεις.

Αρχικά, υπό την υπόθεση ότι ο μέσος της σειράς είναι κοντά στο μηδέν θα μοντελοποιήσουμε την διακύμανση με ένα υπόδειγμα GARCH(2,1), ακολουθώντας μία διαδικασία από το Γενικό προς το Ειδικό (General to Specific process). Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του εν λόγω υποδείγματος.

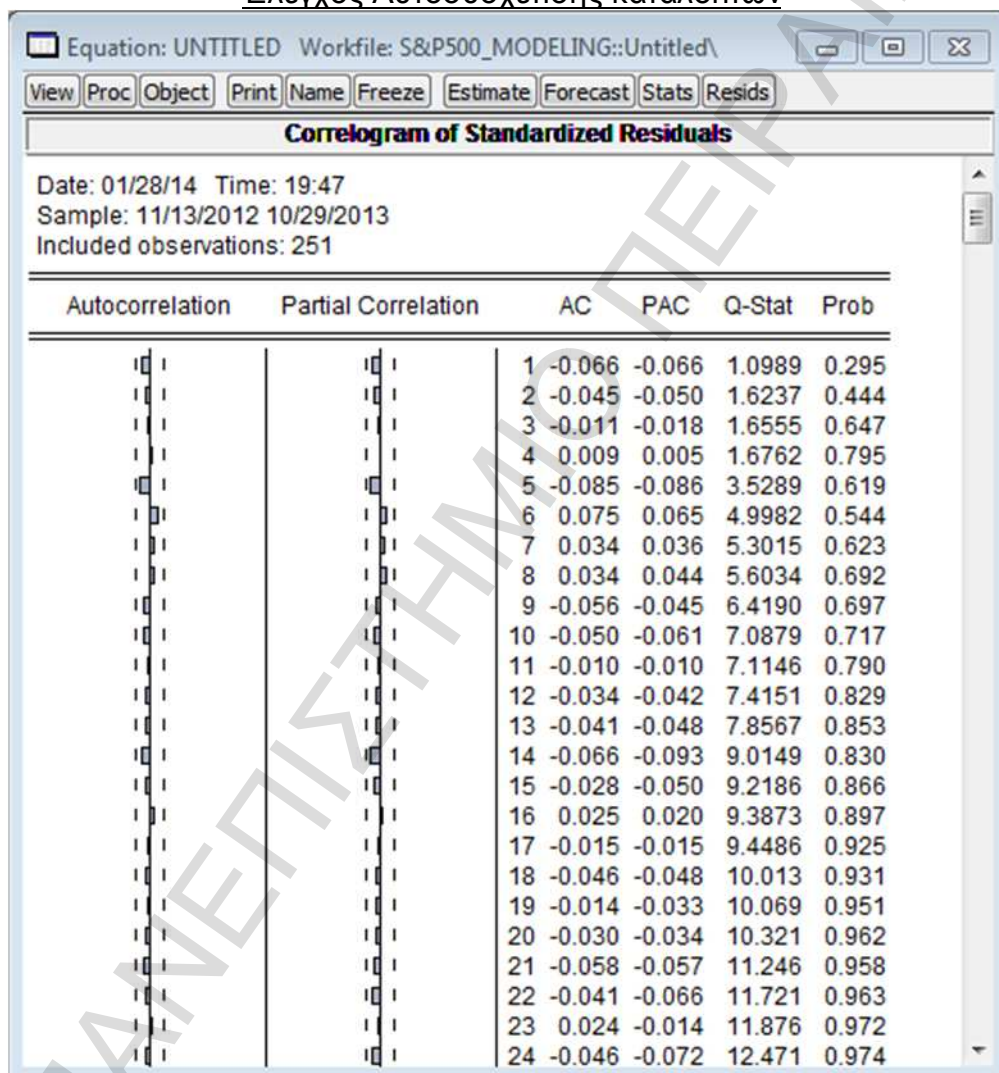
GARCH(2,1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001112	0.000377	2.949796	0.0032
Variance Equation				
C	9.32E-06	1.89E-06	4.924059	0.0000
RESID(-1) ²	0.138713	0.039361	3.524154	0.0004
GARCH(-1)	1.319633	0.093454	14.12065	0.0000
GARCH(-2)	-0.615623	0.086528	-7.114731	0.0000
R-squared	-0.000257	Mean dependent var	0.000996	
Adjusted R-squared	-0.016522	S.D. dependent var	0.007261	
S.E. of regression	0.007321	Akaike info criterion	-7.061683	
Sum squared resid	0.013185	Schwarz criterion	-6.991454	
Log likelihood	891.2412	Hannan-Quinn criter.	-7.033421	
Durbin-Watson stat	2.118303			

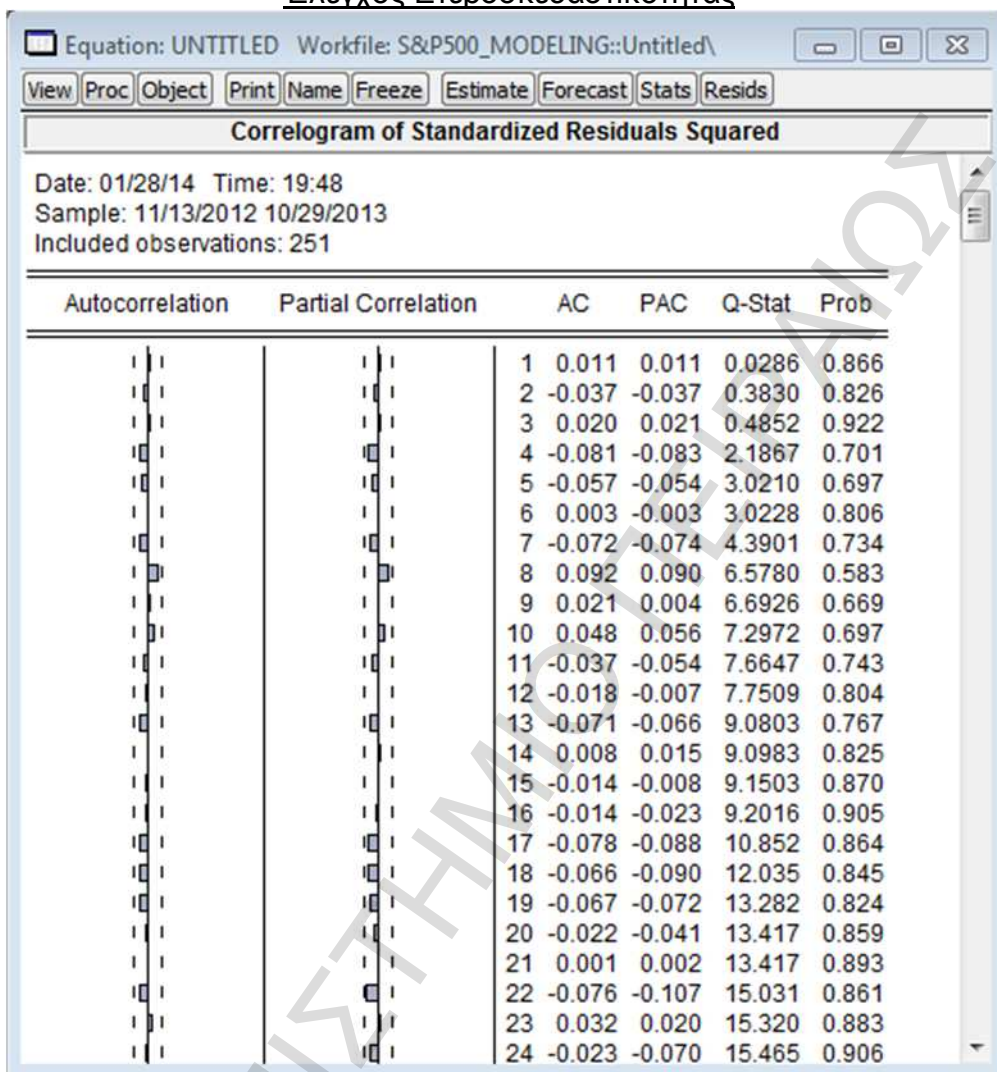
Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνεται ότι όλοι οι παράμετροι του υποδείγματος είναι στατιστικά σημαντικοί (σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητα 5%), σύμφωνα με τα P-values τους, τα οποία είναι μικρότερα του 5%

Εν συνεχεία, μελετάται του Correlogram των καταλοίπων του υποδείγματος GARCH(2,1) και των τετραγώνων των εν λόγω καταλοίπων.

Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης καταλοίπων



Έλεγχος Ετεροσκεδαστικότητας



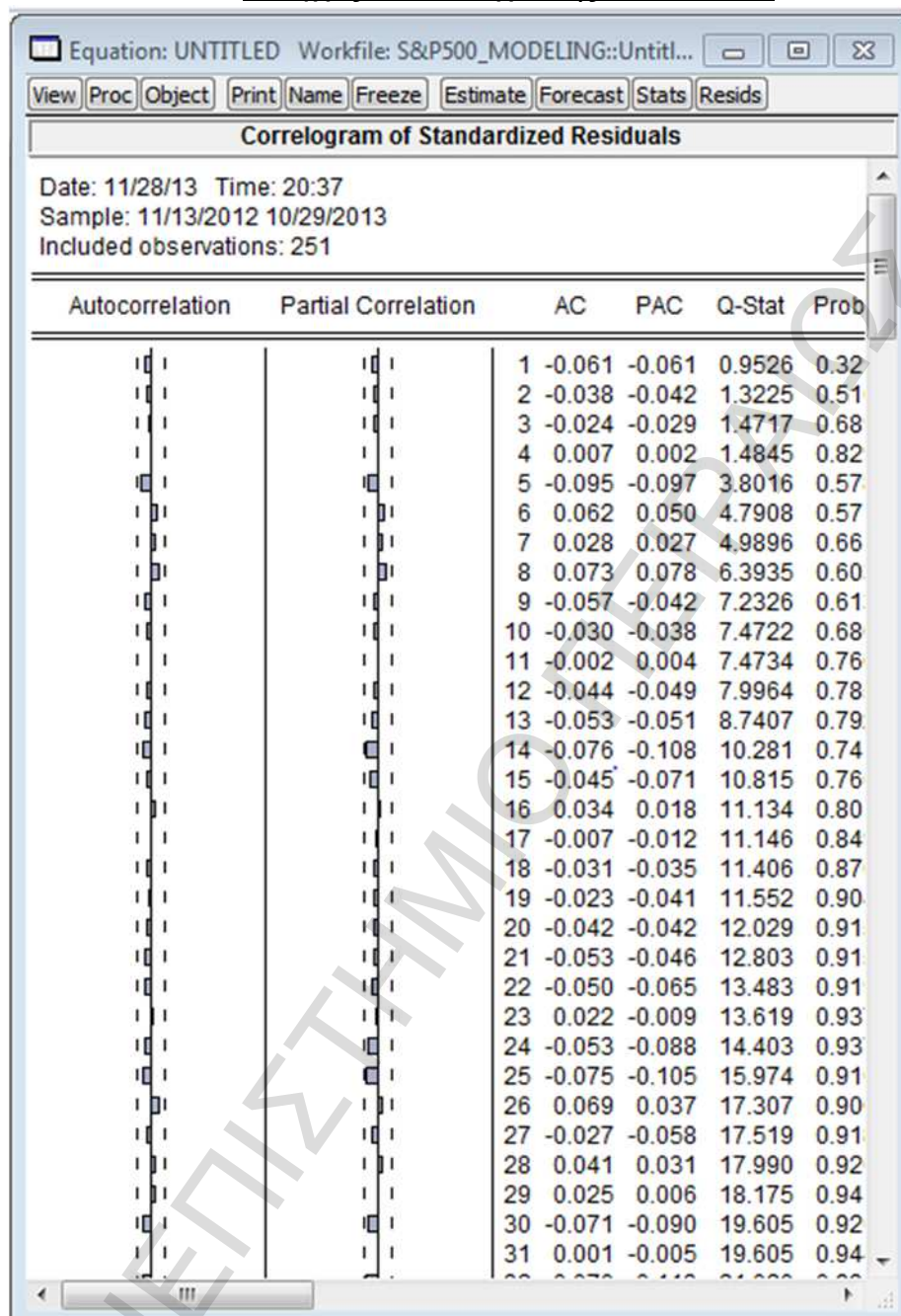
Από τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων και των τετραγώνων των καταλοίπων του GARCH(2,1) παρατηρούμε ότι τα κατάλοιπα και τα τετράγωνα των καταλοίπων δεν χαρακτηρίζονται από ισχυρή συσχέτιση, γεγονός που υποδηλώνει ότι σχεδόν όλη η συστηματική πληροφορία της στοχαστικής ανέλιξης έχει μοντελοποιηθεί. Αυτό τεκμηριώνεται από το γεγονός ότι τα P-values είναι μεγαλύτερα του 5%, συνεπώς η μηδενική υπόθεση του ελέγχου Q-statistic των Box – Pierce – Ljung, η οποία αναφέρει μη ύπαρξη αυτοσυσχέτισης, γίνεται αποδεκτή.

Στην συνέχεια, θα υποθεθεί ότι ο μέσος είναι μηδέν και ότι ένα GARCH(1,1) είναι επαρκές για την διακύμανση. Ακολουθούν τα εμπειρικά αποτελέσματα:

Υπόδειγμα GARCH(1,1)

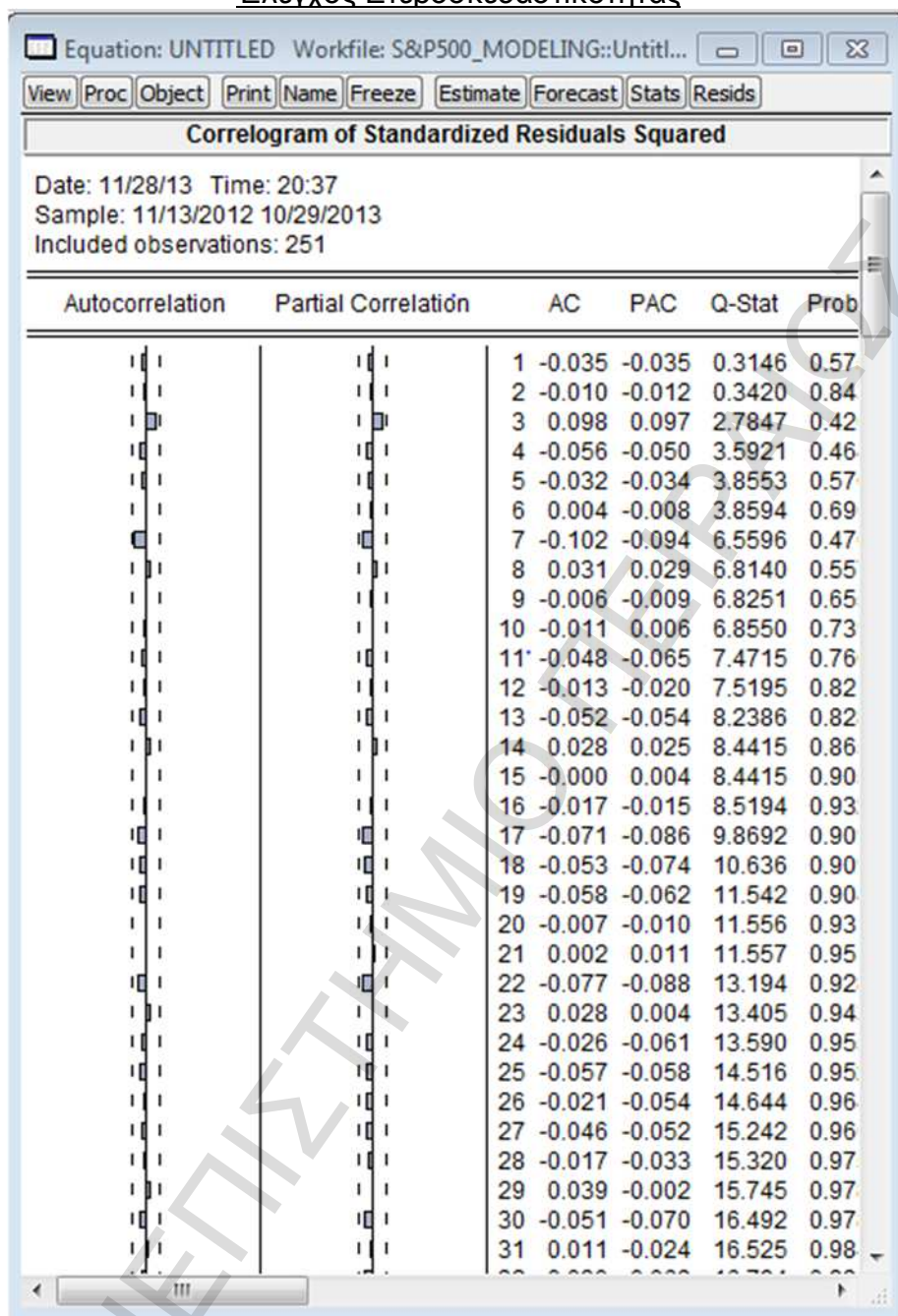
Equation: UNTITLED Workfile: S&P500_MODELING::Untitl...				
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids				
Dependent Variable: R_SP500				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 11/28/13 Time: 20:36				
Sample (adjusted): 11/13/2012 10/29/2013				
Included observations: 251 after adjustments				
Convergence achieved after 9 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001105	0.000429	2.575957	0.0100
Variance Equation				
C	1.27E-05	7.03E-06	1.803790	0.0713
RESID(-1)^2	0.224400	0.087902	2.552848	0.0107
GARCH(-1)	0.544960	0.175602	3.103377	0.0019
R-squared	-0.000228	Mean dependent var		0.000996
Adjusted R-squared	-0.012376	S.D. dependent var		0.007261
S.E. of regression	0.007306	Akaike info criterion		-7.043986
Sum squared resid	0.013185	Schwarz criterion		-6.987803
Log likelihood	888.0202	Hannan-Quinn criter.		-7.021377
Durbin-Watson stat	2.118366			

Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης καταλοίπων



Διενεργώντας μία παρόμοια ανάλυση για τα Correlograms των καταλοίπων και των τετραγώνων των καταλοίπων του υποδείγματος GARCH (1,1), συμπεραίνουμε ότι και το GARCH(1,1) μοντελοποιεί την συστηματική πληροφορία.

Έλεγχος Ετεροσκεδαστικότητας



Όπως φαίνεται από τα παραπάνω αποτελέσματα και την μελέτη του Correlogram, μάλλον ένα GARCH(2,1) θα αποτελούσε καλύτερη επιλογή για την μοντελοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης των αποδόσεων του δείκτη. Παρόλα αυτά, για τους σκοπούς εκτίμησης του VaR θα υποθέσουμε ένα υπόδειγμα GARCH(1,1), αφενός για να υπάρξει σύμπτωση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία και αφετέρου για την πρόληψη του φαινομένου “Overfitting”, το

οποίο αναλύθηκε προγενέστερα. Άλλωστε το υπόδειγμα GARCH(2,1) οριακά υπερτερεί του GARCH(1,1).

2.1.2.1 GARCH - Normal

Η εκτίμηση των παραμέτρων του παραπάνω υποδείγματος γίνεται με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (log – likelihood maximization). Υπό την υπόθεση ότι τα x_i κατανομονται κανονικά με μέσο μηδέν ($E(x_i)=0$), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) είναι:

$$PDF = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι το γινόμενο των επιμέρους PDFs:

$$\prod_{i=1}^T PDF_i = \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2\sigma_i^2}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (Log Likelihood Function), έστω L, είναι η εξής:

$$\begin{aligned} L &= \log \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2\sigma_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} + \log e^{-x_i^2/2\sigma_i^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log 1 - \log \sqrt{\sigma_i^2 2\pi} - \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2} \ln e \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log(\sigma_i^2 2\pi) - \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \sigma_i^2 - \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2} \right] \\ &= T \left[-\frac{1}{2} \log 2\pi \right] + \sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log \sigma_i^2 - \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2} \right] \\ &= -\frac{T}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[-\log \sigma_i^2 - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right] \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι καλύτεροι εκτιμητές των παραμέτρων ω , α και β είναι εκείνοι που μεγιστοποιούν την παρακάτω έκφραση.

$$\sum_{i=1}^T \left[-\log \sigma_i^2 - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right]$$

Η εκτίμηση του VaR για την επόμενη χρονική στιγμή είναι:

$$\mathbf{VaR}_{1-a} = -(\mathbf{e}^{z_a \sigma_{t+1}} - \mathbf{1}) * \mathbf{P},$$

όπου z_a είναι η τιμή της αθροιστικής τυποποιημένης κανονικής κατανομής και σ_{t+1} είναι η πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης σύμφωνα με το υπόδειγμα GARCH.

2.1.2.2. GARCH - Student's-t

Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η παράμετρος των “fat tails” των κατανομών των αποδόσεων, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν student's – t κατανομή.

Έτσι, η εκτίμηση των παραμέτρων του παραπάνω υποδείγματος GARCH(1,1) γίνεται με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (log – likelihood maximization) υπό την υπόθεση ότι τα x_i ακολουθούν student's – t κατανομή με μέσο μηδέν ($E(x_i)=0$) και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF):

$$PDF_i = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_i^2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας (Log Likelihood Function), έστω L , είναι η εξής:

$$\begin{aligned} L &= \log\left(\prod_{i=1}^T PDF_i\right) = \log\left[\prod_{i=1}^T \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_i^2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_i^2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right] + \log\left[\left(1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}\right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_i^2} - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu+1}{2} \log\left[1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log((\nu-2)\pi\sigma_i^2) - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu+1}{2} \log\left[1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right] \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log ((\nu-2)\pi) - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + \sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log \sigma_i^2 - \frac{\nu+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right] \right]$$

Συνεπώς, οι καλύτεροι εκτιμητές των παραμέτρων ω , α και β είναι εκείνοι που μεγιστοποιούν την παρακάτω παράσταση.

$$\sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log \sigma_i^2 - \frac{\nu+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right] \right]$$

Η εκτίμηση του VaR για την επόμενη χρονική στιγμή είναι:

$$\mathbf{VaR}_{1-a} = -(e^{Q_a \sigma_{t+1}} - 1) * P,$$

όπου $Q_a \sim \chi^2(0, \frac{\nu}{\nu-2})$ και σ_{t+1} είναι η πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης για την επόμενη χρονική στιγμή από το υπόδειγμα GARCH.

2.1.2.3. GARCH - Power Exponential Distribution

Εναλλακτικά των δύο προαναφερθέντων κατανομών, μπορεί να υποτεθεί ότι οι αποδόσεις ακολουθούν την Power Exponential Distribution (Generalized Error Distribution or Box-Tiao Distribution), η οποία είναι συμμετρική.

Επομένως, η εκτίμηση των παραμέτρων του παραπάνω υποδείγματος GARCH(1,1) γίνεται με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (log - likelihood maximization) υπό την υπόθεση ότι τα x_i ακολουθούν Power Exponential Distribution κατανομή με μέσο μηδέν ($E(x_i)=0$) και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF):

$$PDF(x, \sigma, \delta) = \frac{\delta}{\varphi^2 \frac{\delta+1}{\delta} \Gamma(\frac{1}{\delta}) \sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{|x|}{\varphi \sigma}},$$

όπου $\varphi = \left[\frac{2^{-\frac{2}{\delta}} \Gamma(\frac{1}{\delta})}{\Gamma(\frac{3}{\delta})} \right]^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\delta}-1} dx$, σ^2 η

διακύμανση της Power Exponential Distribution και δ μία παράμετρος που καθορίζει την κύρτωση της κατανομής.

Έτσι, η Συνάρτηση Πιθανοφάνειας είναι:

$$\prod_{i=1}^T PDF_i(x, \sigma, \delta) = \prod_{i=1}^T \frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma(\frac{1}{\delta}) \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta}}$$

Ενώ η Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανοφάνειας (L) είναι:

$$\begin{aligned} L &= \log\left(\prod_{i=1}^T PDF_i(x, \sigma, \delta)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^T \frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma(\frac{1}{\delta}) \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log\left(\frac{\delta}{\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma(\frac{1}{\delta}) \sigma_i}\right) + \log e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log(\varphi 2^{\frac{\delta+1}{\delta}} \Gamma(\frac{1}{\delta}) \sigma_i) - \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta} \log e \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) - \log \sigma_i - \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta} \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) - \sum_{i=1}^T \left[\log \sigma_i - \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta} \right] \right] \\ &= T \left[\log \delta - \log \varphi - \frac{\delta+1}{\delta} \log 2 - \log \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \right] - \sum_{i=1}^T \left[\log \sigma_i + \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta} \right] \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι καλύτεροι εκτιμητές των παραμέτρων ω , α και β είναι εκείνοι που ελαχιστοποιούν την παρακάτω παράσταση.

$$\sum_{i=1}^T \left[\log \sigma_i + \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\varphi \sigma_i} \right|^{\delta} \right]$$

Η εκτίμηση του VaR για την επόμενη χρονική στιγμή είναι:

$$\text{VaR}_{1-a} = -(e^{\text{PED}_a * \sigma_{t+1}} - 1) * P,$$

όπου, PED_a είναι η τιμή της αθροιστικής τυποποιημένης Power Exponential κατανομής και σ_{t+1} είναι η προβλεπόμενη από το υπόδειγμα GARCH τυπική απόκλιση για την επόμενη χρονική στιγμή.

2.1.3. Υπόδειγμα EWMA

Μία εναλλακτική επιλογή για την μοντελοποίηση της διακύμανσης των αποδόσεων, με απώτερο σκοπό την εκτίμηση του VaR, αποτελεί η χρήση μίας άλλης ομάδας υποδειγμάτων, γνωστή ως Exponentially Weighted Moving Average. Στην γενική του μορφή ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) u_{t-1}^2$$

Σύμφωνα με το παραπάνω υπόδειγμα η εκτίμηση του σ_t^2 είναι το αποτέλεσμα της στάθμισης του σ_{t-1}^2 και του u_{t-1}^2 με σταθμίσεις λ και $1-\lambda$, αντίστοιχα. Διαχρονικά, η επίδραση των παρελθουσών παρατηρήσεων στο σ_t^2 φθίνει. Αυτό γίνεται αντιληπτό με την διενέργεια συνεχών αντικαταστάσεων, όπως παρακάτω.

$$\sigma_t^2 = \lambda(\lambda \sigma_{t-2}^2 + (1 - \lambda) u_{t-2}^2) + (1 - \lambda) u_{t-1}^2 = (1 - \lambda)(u_{t-1}^2 + \lambda u_{t-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{t-2}^2$$

Μετά από t αντικαταστάσεις προκύπτει:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{t-i}^2 + \lambda^m \sigma_{t-m}^2$$

Συνεπώς, όταν $m \rightarrow \infty$ το $\lambda^m \rightarrow 0$, καθώς $0 < \lambda < 1$. Έτσι, οι σταθμίσεις των u_i^2 και των σ_i^2 τείνουν να είναι αμελητέες για μεγάλα m και επομένως μπορούν να παραλειφθούν.

Η παραπάνω προσέγγιση εμφανίζει αρκετά πλεονεκτήματα. Καταρχάς, δεν απαιτείται μεγάλος αριθμός παρατηρήσεων για την εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος. Επιπλέον, σε κάθε χρονική στιγμή η εκτίμηση της διακύμανσης στηρίζεται στα πιο πρόσφατα διαθέσιμα δεδομένα, καθώς οι σταθμίσεις των παλαιότερων αγνοούνται. Ουσιαστικά το παραπάνω υπόδειγμα “ακολουθεί” (track) την διακύμανση.

Εκτίμηση παραμέτρων EWMA

Υπό την υπόθεση ότι οι αποδόσεις x_i κατανέμονται κανονικά (normality hypothesis), τότε όπως και στην περίπτωση εκτίμησης των παραμέτρων ενός GARCH, χρησιμοποιείται η Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανοφάνειας:

$$L = \log \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2 / 2\sigma_i^2}$$

Όπου για την εκτίμηση των παραμέτρων αρκεί η μεγιστοποίηση της παρακάτω έκφρασης,

$$\sum_{i=1}^T \left[-\log \sigma_i^2 - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right]$$

Εάν, εναλλακτικά, υποτεθεί ότι τα x_i ακολουθούν Student's – t κατανομή, τότε οι καλύτεροι εκτιμητές των παραμέτρων του EWMA είναι εκείνοι οι οποίοι μεγιστοποιούν την παρακάτω Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανότητας

$$\sum_{i=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log \sigma_i^2 - \frac{\nu + 1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{\nu - 2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right] \right]$$

Τέλος, εάν υποθέσουμε Power Exponential Distribution τότε οι καλύτεροι εκτιμητές των παραμέτρων, είναι εκείνοι που ελαχιστοποιούν την Λογαριθμική Συνάρτηση Πιθανοφάνειας:

$$\sum_{i=1}^T \left[\log \sigma_i + \frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\sigma_i} \right|^\delta \right]$$

Μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων Variance Targeting

Ως προς την εκτίμηση των παραμέτρων ω , α και β ενός GARCH θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μία εναλλακτική μέθοδος γνωστή ως Variance Targeting. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, ο μακροχρόνιος μέσος όρος της διακύμανσης (long-run Average Variance) V_L ορίζεται ως η δειγματική διακύμανση $V_L = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Επιπλέον, για το παραπάνω GARCH ισχύει ότι $\delta + \alpha + \beta = 1$ και εφόσον $\omega = \delta V_L$, τότε $\omega = V_L(1 - \alpha - \beta)$. Συνεπώς, αρκεί να προσδιορισθούν τα α και β , ώστε να εκτιμηθεί το υπόδειγμα.

Ομοίως, στην περίπτωση του EWMA το ω δεσμεύεται στο μηδέν και τα α και β στο $1 - \lambda$ και λ , αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο η εκτίμηση μίας μόνο παραμέτρου είναι αρκετή για να προσδιορισθεί το υπόδειγμα.

2.1.4. Ιδιότητες παραμετρικού VaR

2.1.4.1. Εφαρμογή VaR για ένα ενεργητικό στοιχείο

Έστω επένδυση σε ένα ενεργητικό στοιχείο (π.χ. μετοχή) ύψους 100.000 €. Επίσης, έστω ότι η εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης, δηλαδή ο μέσος (μ) του εν λόγω ενεργητικού στοιχείου είναι 0,005 και η διακύμανση των αποδόσεων (σ^2) 0,05. Το analytical VaR με Normal Distribution, σε διάστημα εμπιστοσύνης 99%, του εν λόγω ενεργητικού στοιχείου είναι:

$$\text{VaR}_{99\%} = - (0,005 + 2,326 * 0,05) * 100.000 = 11.131\text{€}$$

Το παραπάνω ποσό ερμηνεύεται ως εξής, υπάρχει 1% πιθανότητα η επένδυση να απολέσει αξία μεγαλύτερη των 11.131€ εντός της επόμενης ημέρας διαπραγμάτευσης, υπό κανονικές συνθήκες στην αγορά.

Στην περίπτωση όπου μεταβάλλονταν το διάστημα εμπιστοσύνης, έστω από 99% σε 95% τότε το VaR θα ήταν:

$$\text{VaR}_{95\%} = - (0,005 + 1,64485 * 0,05) * 100.000 = 8.724\text{€}$$

με την αντίστοιχη ερμηνεία, δηλαδή υπάρχει 5% πιθανότητα η επένδυση να χάσει από την αρχική της αξία μεγαλύτερη των 8.724€ εντός της επόμενης ημέρας διαπραγμάτευσης, υπό κανονικές συνθήκες.

Όπως, γίνεται αντιληπτό όσο περιορίζεται το διάστημα εμπιστοσύνης η εκτίμηση του VaR τείνει να μειώνεται.

2.1.4.2. Τροποποίηση περιόδου υπολογισμού του VaR

Το VaR με περίοδο αναφοράς την μία ημέρα (daily VaR) μπορεί να τροποποιηθεί παραδείγματος χάριν σε VaR με περίοδο αναφοράς το έτος (annually VaR) πολλαπλασιάζοντας το με την τετραγωνική ρίζα της χρονικής περιόδου αναφοράς.

Στο εν λόγω παράδειγμα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι κατά την διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους υπάρχουν 265 ημέρες διαπραγμάτευσης, το παραπάνω daily VaR μπορεί να μετατραπεί σε ετήσιο πολλαπλασιάζοντας το με $\sqrt{265}$,

$$\text{VaR}_{99\%, 1 \text{ year}} = - (0,005 + 2,326 * 0,05) * 100.000 * \sqrt{265} = 176.348\text{€ και}$$

$$\text{VaR}_{95\%, 1 \text{ year}} = - (0,005 + 1,64485 * 0,05) * 100.000 * \sqrt{265} = 138.214\text{€}$$

2.1.4.3. Υπολογισμός Value - at - Risk για χαρτοφυλάκιο επενδυτικών στοιχείων

Η παραπάνω ανάλυση αφορά στην εκτίμηση του VaR για ένα μεμονωμένο επενδυτικό στοιχείο. Για τον υπολογισμό του VaR σε επίπεδο ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου η βάση της ανάλυσης εν πολλοίς παραμένει ως έχει. Οι διαφορές εντοπίζονται στον διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της αναμενόμενης απόδοσης (μ) και της διακύμανσης (μέτρο κινδύνου) (σ_p^2) του χαρτοφυλακίου.

Πιο συγκεκριμένα, η αναμενόμενη απόδοση, ή διαφορετικά ο μέσος των αποδόσεων, του χαρτοφυλακίου (μ_p) είναι ο σταθμικός μέσος (weighted average) των μέσων του εκάστοτε επενδυτικού στοιχείου (μ_i), τα οποία

συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο. Έστω, λοιπόν, ότι αναφερόμαστε σε χαρτοφυλάκιο το οποίο περιλαμβάνει n επενδυτικά στοιχεία με στάθμιση έκαστου στοιχείου w_i . Τότε, ο μέσος του χαρτοφυλακίου (μ_p) είναι:

$$\mu_p = w_1 * \mu_1 + w_2 * \mu_2 + w_3 * \mu_3 + \dots + w_n * \mu_n = \sum_{i=1}^n w_i * \mu_i$$

Ελάχιστα πολυπλοκότερη είναι η εκτίμηση της διακύμανσης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου, η οποία αποτελεί ένα μέτρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Η διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου προκύπτει από τον γενικότερο τύπο:

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 * \sigma_i^2 + 2 * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \text{cov}(i, j),$$

όπου: σ_p^2 και $\text{Var}(p)$ είναι η διακύμανση του χαρτοφυλακίου,

w_i είναι η στάθμιση έκαστου ενεργητικού στοιχείου μέσα στο χαρτοφυλάκιο (αξία ενεργητικού στοιχείου / συνολική αξία χαρτοφυλακίου),

$\text{cov}(i, j)$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ του ενεργητικού στοιχείου i και του j .

Τέλος, εφόσον έχουν υπολογιστεί τα εν λόγω μέτρα, μέσος και διακύμανση, εφαρμόζοντας το τύπο προκύπτει το VaR του χαρτοφυλακίου.

2.2. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation)

Μία δεύτερη προσέγγιση για τον υπολογισμό του VaR, η οποία δεν υποθέτει κανονικότητα των αποδόσεων όπως στο Αναλυτικό ή Παραμετρικό VaR, αποτελεί η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης. Παρόλα αυτά υπόκειται σε μια σειρά άλλων γενναιόδωρων υποθέσεων ως προς τα χαρακτηριστικά των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, υποθέτει ότι οι ιστορικές αποδόσεις έχουν την τάση να επαναλαμβάνονται στο μέλλον. Επιπλέον, υποθέτει ότι το χαρτοφυλάκιο διατηρείται αμετάβλητο κατά την διάρκεια της περιόδου ανάλυσης.

Αρχικά, υπολογίζονται οι ιστορικές αποδόσεις κάθε μεμονωμένου ενεργητικού στοιχείου, οι οποίες μπορεί να είναι ημερήσιες, μηνιαίες, ετήσιες

κλπ. ανάλογα με την διαθεσιμότητα των δεδομένων, για παράδειγμα μία επένδυση σε hedge fund δεν μπορεί να αξιολογηθεί σε ημερήσια βάση.

Εν συνεχεία, οι ιστορικές αυτές αποδόσεις αντιμετωπίζονται ως ισοπίθανες μελλοντικές αποδόσεις. Έτσι, προσομοιώνονται οι ιστορικές αποδόσεις στην σημερινή αξία έκαστου επενδυτικού στοιχείου από όπου και προκύπτει κέρδος ή ζημία, αναλόγως. Εάν θεωρηθεί, για παράδειγμα ότι κατά την διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους προκύπτουν 265 παρατηρήσεις τότε για τον υπολογισμό του ετήσιου VaR με την μέθοδο αυτή, θα προκύψουν 264 ισοπίθανες μελλοντικές αποδόσεις. Εφόσον, υπολογιστούν τα κέρδη ή ζημιές για το κάθε επενδυτικό στοιχείο που συμπεριλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο, τότε αθροίζονται και προκύπτει το πιθανό κέρδος ή ζημιά του χαρτοφυλακίου. Ουσιαστικά γίνεται μία προσομοίωση των παρελθόντων αποδόσεων, ιξού και η ονομασία.

Τέλος, τα ποσά των ζημιών και των κερδών τα οποία προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά. Έπειτα, αφού καθορισθεί το διάστημα εμπιστοσύνης, συνήθως 95% ή 99%, εντοπίζεται, στην ταξινομημένη σειρά με τις προσομοιώσεις, η τιμή που αντιστοιχεί στο 5% ή 1% των παρατηρήσεων αντίστοιχα ($1 - 95\%$ ή $1 - 99\%$). Για παράδειγμα, εάν υπάρχουν 260 προσομοιώσεις και το διάστημα εμπιστοσύνης είναι 5%, τότε εντοπίζεται η 13 παρατήρηση.

Τυποποιημένα μπορεί να γραφεί ως εξής: $VaR_{1-\alpha, \text{annual}} = r$, όπου r η παρατήρηση που αντιστοιχεί στο $\alpha\%$ των παρατηρήσεων (έστω 260 παρατηρήσεις και επίπεδο σημαντικότητα $\alpha = 5\%$, τότε το r είναι η απόδοση που αντιστοιχεί στην θέση $0,05 * 260 = 13$ της ταξινομημένης σειράς των αποδόσεων).

2.3. Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Στην ίδια φιλοσοφία, αλλά αξιοποιώντας διαφορετικά εργαλεία, κινείται η τεχνική της Monte Carlo προσομοίωσης. Γενικότερα, στην παρούσα μεθοδολογία ακολουθείται η εξής λογική. Με την βοήθεια ενός αλγορίθμου παράγονται τυχαίοι αριθμοί, οι οποίοι στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ενός υποδείγματος το οποίο δεν έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή, αυτή είναι και η κύρια διαφορά μεταξύ της προσομοίωσης Monte

Carlo και της ιστορικής προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη τεχνική οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί που παράγονται χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουν την πιθανή εξέλιξη των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου, ενώ στην δεύτερη τεχνική η πιθανή εξέλιξη των αποδόσεων εκτιμάται με την χρήση ιστορικών τιμών.

Σύμφωνα με την τεχνική Monte Carlo, αρχικά καθορίζεται ο χρονικός ορίζοντας της ανάλυσης και διαιρείται σε πολύ μικρές υποπεριόδους. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι ο ορίζοντας είναι η μία ημέρα, τότε μπορεί να διαιρεθεί είτε σε ώρες, είτε σε λεπτά ακόμα και σε δευτερόλεπτα, όσο μικρότερα είναι τα διαστήματα αυτά, τόσο βελτιώνεται η αξιοπιστία της εκτίμησης και αυτό διότι κάνει την τεχνική συνεπή με την υπόθεση της συνεχούς διαπραγματεύσεως του ενεργητικού στοιχείου.

Στην συνέχεια, καθορίζεται μία διαδικασία ή καλύτερα ένας μηχανισμός ο οποίος παράγει τυχαίες αποδόσεις. Οι τυχαίες αυτές αποδόσεις ακολουθούν κάποια θεωρητική κατανομή, συνήθως ακολουθείται η κανονική κατανομή, η οποία αποτελεί δομικό συστατικό του μηχανισμού.

Παραδείγματος χάριν, εάν θεωρήσουμε ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί Geometric Brownian Motion, τότε ως μηχανισμός τυχαίων αποδόσεων θα μπορούσε να θεωρηθεί ο εξής: $R_i = \Delta S/S = v \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$,

όπου, R_i η απόδοση του ενεργητικού στοιχείου,

S η τιμή του ενεργητικού στοιχείου,

v ο μέσος του δείγματος των τιμών του ενεργητικού στοιχείου ο οποίος υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο $v = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_i$,

Δt η μεταβολή του χρόνου,

σ η τυπική απόκλιση του δείγματος των τιμών ($\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (R_i - \mu)^2}$)

και ε ένας τυχαίος αριθμός ο οποίος προκύπτει από την τυποποιημένη κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση ένα.

Εφόσον προσδιορισθεί ο μηχανισμός του προηγούμενου βήματός, τότε τίθεται σε λειτουργία και επαναλαμβάνεται μέχρις ότου καλυφθεί ο προκαθορισμένος χρονικός ορίζοντας εφαρμογής. Πιο συγκεκριμένα, εάν

θέσουμε ως χρονικό ορίζοντα την μία ημέρα (υποθέτοντας ότι το ενεργητικό στοιχείο διαπραγματεύεται ολόκληρο το εικοσιτετράωρο) και βήμα χρόνου την μία ώρα, τότε επαναλαμβάνεται η διαδικασία 24 φορές και κάθε φορά η απόδοση που παράγεται χρησιμοποιείται ως εισροή για την επόμενη επανάληψη. Με αυτόν τον τρόπο, μετά από 24 επαναλήψεις καταλήγουμε σε μία πιθανή απόδοση στο τέλος της ημέρας.

Τέλος, επαναλαμβάνεται το προηγούμενο βήμα αρκετές φορές, έστω N , ούτως ώστε να παραχθούν N πιθανές αποδόσεις για το τέλος της ημέρας. Οι N αυτές αποδόσεις θα είναι διαφορετικές παρά το γεγονός ότι για την παραγωγή τους χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος μηχανισμός και αυτό διότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί διαφορετικό μονοπάτι σε κάθε επανάληψη, καθώς συστατικό στοιχείο του μηχανισμού αποτελεί ο στοχαστικός παράγοντας ϵ .

Ο προσδιορισμός του VaR με αυτήν την τεχνική ολοκληρώνεται με το ίδιο τρόπο όπως και στην τεχνική της ιστορικής προσομοίωσης. Δηλαδή, οι N αποδόσεις που παρήχθησαν ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά και εφόσον έχει καθορισθεί το επίπεδο σημαντικότητας $\alpha\%$, το VaR αντιστοιχεί στην $\alpha\% * N$ θέση της ταξινομημένης σειράς.

2.4. Μέθοδος Tail Index Estimation

Ο εκτιμητής της “ουράς” (στο εξής tail index estimator) αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού του “πάχους” (fatness) των ουρών μίας κατανομής, στην προκειμένη περίπτωση μίας κατανομής αποδόσεων. Η εκτίμηση του στηρίζεται στην θεωρία της Ακραίας Τιμής (στο εξής Extreme Value Theory ή EVT), σύμφωνα με την οποία περιγράφεται η συμπεριφορά της ουράς (tail) της υπό εξέταση κατανομής.

Extreme Value Theory

Η εν λόγω θεωρία παρέχει ένα σύνολο πιθανοτικών και στατιστικών εργαλείων προκειμένου να επιτευχθεί η μοντελοποίηση σπανίως εμφανιζόμενων (χαμηλής συχνότητας) φαινομένων. Στην EVT κεντρικό ρόλο κατέχει η Generalized Extreme Value distribution (GEV).

Σύμφωνα με το θεώρημα των Fisher και Trippett, ισχύει ότι για ένα ευρύ σύνολο κατανομών, η κατανομή του κανονικοποιημένου δείγματος με τις

μεγαλύτερης/μικρότερης αξίας τιμές μίας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών η οποία χαρακτηρίζεται από ταυτονομία και ανεξαρτησίας (iid), γνωστά ως κανονικοποιημένα δειγματικά μέγιστα/ελάχιστα (normalized sample maxima και normalized sample minima), συγκλίνει στην GEV distribution, όταν αυξάνει το μέγεθος του δείγματος.

Έστω, r_1, r_2, \dots, r_n ταυτόνομες και ανεξάρτητες (Independent and identically distributed) τυχαίες μεταβλητές προερχόμενες από μία άγνωστη κατανομή F και επιπλέον έστω, a_n και b_n οι κατάλληλοι συντελεστές κανονικοποίησης (normalization coefficients). Τότε για το sample maxima $M_n = \max(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ισχύει ότι: $\text{plim} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq r \right) = H(r)$, όπου plim είναι το όριο της πιθανότητας όταν $n \rightarrow \infty$ και $H(r)$ είναι η GEV.

Η Generalized Extreme Value ορίζεται ως εξής:

$$H(r) = f(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi*r)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e^r}, & \xi = 0 \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η GEV περιλαμβάνει τις εξής τρεις extreme value κατανομές:

- i. Για $\xi > 0$: GEV \rightarrow Frechet distribution
- ii. Για $\xi = 0$: GEV \rightarrow Weibull distribution
- iii. Για $\xi < 0$: GEV \rightarrow Gumbel distribution

Επιπλέον, αναλόγως της τιμής του ξ , η άγνωστη κατανομή F κατηγοριοποιείται ως εξής:

- i. Για $\xi > 0$: $F \rightarrow$ Fat tailed
- ii. Για $\xi = 0$: $F \rightarrow$ Thin tailed
- iii. Για $\xi < 0$: $F \rightarrow$ Short tailed

Δεδομένου ότι στην παρούσα διπλωματική οι κατανομές που αποτελούν αντικείμενο εξέτασης αφορούν αποδόσεις, οι οποίες κατά κύριο λόγο έχουν παχιές ουρές, θα αναλυθεί η υποπερίπτωση όπου $\xi > 0$.

Όπως προαναφέρθηκε, το normalized sample maxima (minima) μίας κατανομής με παχιές ουρές, συγκλίνει στην Frechet κατανομή: $\Phi(r) = e^{-r^\alpha}$, εάν ισχύει ότι $1 - F(r) = r^{-\frac{1}{\xi}} * L(r)$, όπου $L(r)$ είναι μία slowly varying function¹¹ και $\alpha=1/\xi$ είναι ο δείκτης της ουράς της κατανομής (tail index). Όσο μικρότερο το α τόσο πιο λεπτές οι ουρές.

Συνεπώς, ακόμη και για μία άγνωστη κατανομή F, εφόσον τα α και $L(r)$ μπορούν να προσδιορισθούν, είναι εφικτή η εκτίμηση των ακραίων εκατοστημόριων.

Hill's Tail Index Estimator

Ο Hill(1975) για την εκτίμηση της ουράς μίας κατανομής πρότεινε τον εξής εκτιμητή:

$$\begin{aligned}\xi(m) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(x_{n-i+1}) - \log(x_{n-m}), m \geq 2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log\left(\frac{x_{n-i+1}}{x_{n-m}}\right),\end{aligned}$$

όπου, m είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων που συμπεριλαμβάνονται στην δεξιά ουρά της κατανομής, n είναι το μέγεθος του δείγματος και x_i είναι η i-οστή παρατηρούμενη απόδοση από την ταξινομημένη σειρά των αποδόσεων.

Κατανομή Pareto

Αρχικά υποθέτουμε ότι οι m αποδόσεις της εμπειρικής κατανομής, οι οποίες βρίσκονται στην δεξιά ουρά της, προσιδιάζουν στην ουρά της Pareto κατανομής, η οποία ορίζεται ως εξής:

$F_\alpha(x) = 1 - s^\alpha x^{-\alpha}, x > s$, όπου s είναι η παρατήρηση της ταξινομημένης σειράς από την οποία και έπειτα θεωρούμε ότι ισχύει η Pareto κατανομή.

Εν συνεχεία, θεωρούμε δύο πιθανότητες p και q , οι οποίες βρίσκονται στην ουρά της κατανομής και ισχύει ότι $p < q$. Επιπλέον, ορίζουμε τα αντίστοιχα ποσοστημόρια x_p και x_q .

$$P(X \leq x_p) = 1 - p$$

$$F(x_p) = 1 - p \Rightarrow 1 - s^a x_p^{-a} = 1 - p \Rightarrow p = s^a x_p^{-a}$$

$$P(X \leq x_q) = 1 - q$$

$$F(x_q) = 1 - q \Rightarrow 1 - s^a x_q^{-a} = 1 - q \Rightarrow q = s^a x_q^{-a}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις, συγκεκριμένα διαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει ότι:

$$\frac{p}{q} = \frac{x_p^{-a}}{x_q^{-a}} = \left(\frac{x_q}{x_p}\right)^a \Rightarrow \frac{x_q}{x_p} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{a}} \Rightarrow x_p = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{a}} x_q$$

Εάν ως x_q ορίσουμε την παρατήρηση της ταξινομημένης σειράς από την οποία και έπειτα θεωρούμε ότι ισχύει η κατανομή Pareto τότε, $q \approx \frac{m}{n}$. Επομένως, το ποσοστημόριο x_p μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

$x_p = x_{n-m+1} \left(\frac{m}{np}\right)^\xi$, όπου x_{n-m+1} είναι η παρατήρηση από την οποία και έπειτα θεωρούμε κατανομή Pareto, ξ είναι ο εκτιμητής του Hill, m το πλήθος των παρατηρήσεων στην ουρά της κατανομής για την οποία θεωρούμε ότι συγκλίνει στην ουρά της κατανομής Pareto και p η πιθανότητα.

Συνεπώς, το x_p αποτελεί την εκτίμηση του Value – at – risk για δεδομένη πιθανότητα p και δεδομένο πλήθος m , το οποίο πλήθος m ορίστηκε στις 20 παρατηρήσεις ύστερα από μία διαδικασία δοκιμών.

2.5. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τεχνικών

Αναλυτικό ή Παραμετρικό VaR	
ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
Σχετικά εύκολο στην εφαρμογή.	Περίπτωση έλλειψης ιστορικών στοιχείων.
	Υπόθεση κανονικότητας των αποδόσεων τόσο των μεμονωμένων επενδυτικών στοιχείων όσο και του χαρτοφυλακίου.
	Δεν είναι αποτελεσματικό στην περίπτωση όπου στο χαρτοφυλάκιο συμπεριλαμβάνονται ενεργητικά στοιχεία όπως παράγωγα.

Τεχνική Ιστορικών Προσομοιώσεων	
ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
Σχετικά εύκολη εφαρμογή.	Η χρήση ιστορικών δεδομένων την κάνει ευάλωτη στα χαρακτηριστικά του δείγματος, π.χ. δεδομένα από περίοδο κρίσης δεν αποτελούν και το πλέον αντιπροσωπευτικό δείγμα.
Λογική και εύλογη διαδικασία.	Δεν ενσωματώνει τις δομικές αλλαγές της αγοράς.
	Ιδιαίτερα δύσκολη εφαρμογή σε χαρτοφυλάκια με μεγάλο πλήθος επενδυτικών στοιχείων.
	Απαιτεί ένα ελάχιστο μέγεθος δείγματος.

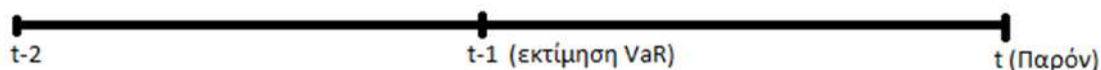
Τεχνική προσομοιώσεων Monte Carlo	
ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
Είναι κατάλληλη τεχνική για χαρτοφυλάκια που περιέχουν πολύπλοκα επενδυτικά στοιχεία όπως παράγωγα.	Δύσκολη εφαρμογή.
Δεν επηρεάζεται τόσο πολύ από ακραία γεγονότα / συμβάντα διότι δεν χρησιμοποιεί ιστορικά στοιχεία.	Απαιτεί τεράστιους υπολογιστικούς πόρους για να επιτευχθούν οι προσομοιώσεις.
Δίνει την επιλογή χρήσης οποιασδήποτε στατιστικής κατανομής, δεν περιορίζεται μόνο στην κανονική.	Λόγω του μεγάλου πλήθους των προσομοιώσεων υπάρχει αυξημένος κίνδυνος σφάλματος του μοντέλου (model risk).

2.6. Μέθοδος Backtesting για τον έλεγχο αποτελεσματικότητας των τεχνικών VaR

Η επιτροπή της Βασιλείας εξέδωσε τον Ιανουάριο του 1996 ένα άρθρο σχετικά με το πλαίσιο και την μεθοδολογία εφαρμογής του Backtesting. Αρκετά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα συνέκριναν σε ημερήσια βάση τα πραγματοποιηθέντα αποτελέσματα (κέρδη ή ζημίες) με αυτά που αναμένονταν σύμφωνα με τα εσωτερικά υποδείγματα (Internal models) τα οποία χρησιμοποιούσαν προκειμένου να ποσοτικοποιήσουν τον κίνδυνο αγοράς.

Με αυτόν τον τρόπο ουσιαστικά αξιολογείται η αποτελεσματικότητα και η ακρίβεια των εσωτερικών υποδειγμάτων τα οποία έχουν αναπτυχθεί από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην περιοδική σύγκριση των εκτιμήσεων των ημερήσιων VaR (daily VaR), τα οποία προκύπτουν από τα εσωτερικά υποδείγματα του εκάστοτε χρηματοπιστωτικού ιδρύματος, με τα πραγματικά (actual) κέρδη ή ζημίες. Η επιτροπή ορίζει σχετικά με τον τρόπο εφαρμογής της εν λόγω μεθοδολογίας ότι θα πρέπει το VaR να υπολογίζεται σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% και με ημερήσιο χρονικό ορίζοντα. Συνεπώς, το σημείο αναφοράς για το Backtesting θα πρέπει να είναι η μία ημέρα.

Πιο συγκεκριμένα, η χρήση μίας εφαρμογής θα καταστήσει περισσότερο κατανοητή την εν λόγω μέθοδο. Έστω δύο παρελθούσες χρονικές περιόδους, η πρώτη από το $t-2$ έως το $t-1$ και η δεύτερη από το $t-1$ έως το t (παρόν). Τα δεδομένα της πρώτης περιόδου αναφέρονται ως *δείγμα εκτίμησης* και της δεύτερης ως *δείγμα αξιολόγησης*. Επιπλέον, έστω ότι με την χρήση μίας οποιασδήποτε τεχνικής έχει προσδιορισθεί μία εκτίμηση VaR για ένα χαρτοφυλάκιο αξίας P , με χρονικό ορίζοντα ανάλυσης D ημέρες διαπραγμάτευσης του ενεργητικού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου, σε διάστημα εμπιστοσύνης $1-\alpha\%$ κάτω από κανονικές συνθήκες αγοράς και έστω ότι η εκτίμηση αυτή είναι $VaR_{1-\alpha\%, D} = A$. Ουσιαστικά, η πρώτη περίοδος έχει λόγο ύπαρξης μόνο στην περίπτωση όπου το VaR εκτιμάται με την τεχνική του Αναλυτικού VaR ή των Ιστορικών Προσομοιώσεων και είναι η περίοδος από όπου θα αντληθούν τα ιστορικά δεδομένα για τις προαναφερθείσες δύο τεχνικές.



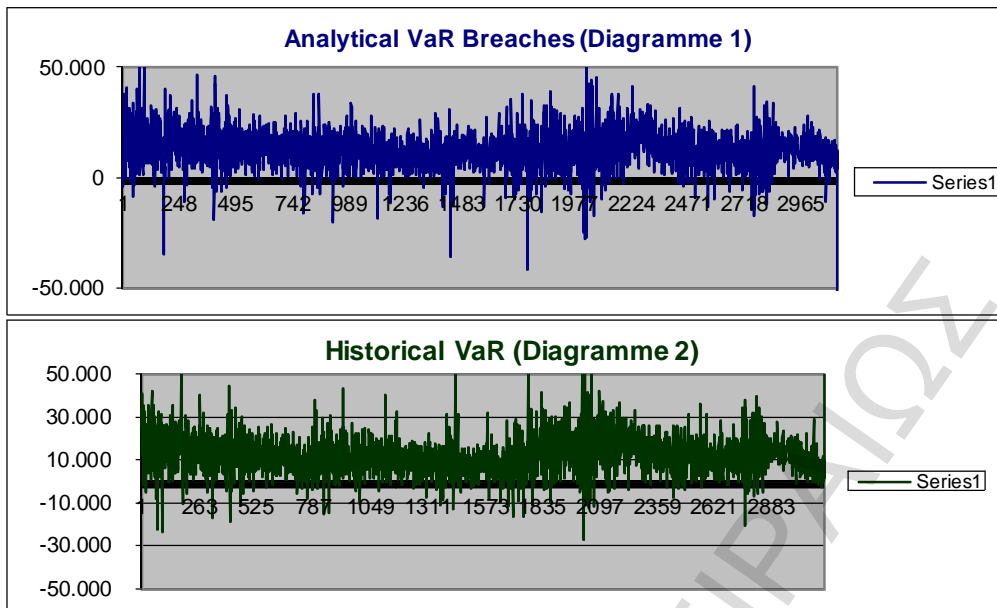
Εν συνεχεία, στην χρονική στιγμή t-1 εκτιμάται το VaR με χρονικό ορίζοντα που εκτείνεται μέχρι την στιγμή t και διάστημα εμπιστοσύνης 1-α%. Τέλος, συγκρίνονται τα πραγματικά κέρδη ή ζημιές, τα οποία προέκυψαν από το χαρτοφυλάκιο ή το μεμονωμένο επενδυτικό στοιχείο, από το t-1 έως το t με την εκτίμηση του VaR.

Εάν οι πραγματικές (actual) ζημιές δεν ξεπερνούν το $VaR_{1-\alpha\%, D} = A$ μέχρι την χρονική στιγμή t, τότε η εν λόγω εκτίμηση μπορεί να θεωρηθεί ένα καλό μέτρο για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο ή επενδυτικό στοιχείο. Στην περίπτωση όπου, εν τέλει, οι ζημιές είναι μεγαλύτερες από αυτές που αναμένονταν από το VaR, τότε υπάρχει παραβίαση (breach or violation) του VaR και θα πρέπει να αναθεωρηθεί η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε.

Ενδεικτικά, παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα ελέγχου (backtesting) δύο τεχνικών VaR, του αναλυτικού και των ιστορικών προσομοιώσεων, οι οποίες τεχνικές αφορούν στο ίδιο χαρτοφυλάκιο, έχοντας χρησιμοποιηθεί το ίδιο πακέτο δεδομένων (data set), για την ίδια περίοδο και για το ίδιο διάστημα εμπιστοσύνης. Παρατηρείται ότι, παρά το γεγονός ότι και οι δύο τεχνικές δεν ξεφεύγουν από τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης, το αναλυτικό VaR έχει λιγότερες παραβιάσεις (breaches) από αυτό των ιστορικών προσομοιώσεων.

Analytical VaR Backtesting	Historical VaR Backtesting
Select Confidence Interval	Select. Confidence Level
95%	95%
Critical Value based on C.I.	Critical Value based on C.I.
-1,644853476	-1,644853476
Number of VaR breaches	Number of VaR breaches
132	148
Number of backtested cases	Number of backtested cases
3129	3129
Empirical Size	Empirical Size
4,22%	4,75%

*Πηγή: από εργασία στο μάθημα 'ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ'



*Πηγή: από εργασία στο μάθημα 'ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ'

Βέβαια όπως έχει ήδη αποσαφηνιστεί, αυτό δεν αποτελεί κανόνα, καθώς η καταλληλότητα της τεχνικής VaR επηρεάζεται από τα ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά του εκάστοτε χαρτοφυλακίου ή επενδυτικού στοιχείου.

Στην δημοσίευση της επιτροπής της Βασιλείας γίνεται η εξής κατηγοριοποίηση των εσωτερικών υποδειγμάτων σύμφωνα με την συχνότητα αποτυχίας τους, η οποία συχνότητα αποτυχίας επισύρει και επιπλέον κεφαλαιακές απαιτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με τον αριθμό των αποτυχιών (actual losses > VaR estimation) των εσωτερικών υποδειγμάτων, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα κατατάσσονται σε τρεις ζώνες, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

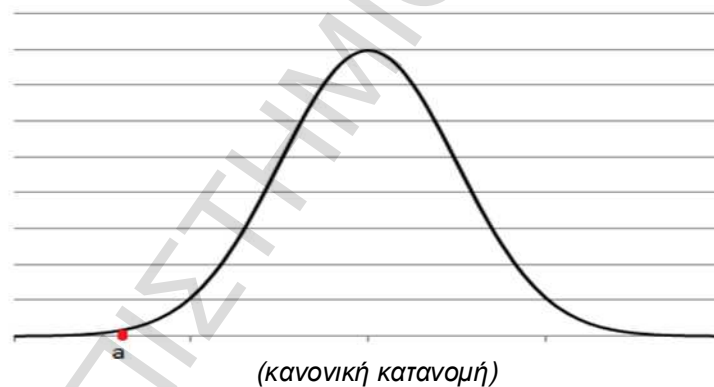
Zone	Number of exceptions	Increase in scaling factor
Green zone	0	0,00
	1	0,00
	2	0,00
	3	0,00
	4	0,00
Yellow zone	5	0,40
	6	0,50
	7	0,65
	8	0,75
	9	0,85
Red zone	10 or more	1,00

Πηγή: <http://www.bis.org/publ/bcbs22.htm>

2.7. Στατιστική αξιολόγηση του VaR

Όπως αναλύθηκε στην παραπάνω διαδικασία, από την εφαρμογή της μεθόδου Backtesting προκύπτει ένα ποσοστό αποτυχίας (failure rate) του VaR ως ο λόγος των παραβιάσεων (breaches) του VaR (N) προς το πλήθος του δείγματος αξιολόγησης (T), N/T . Το εν λόγω μέτρο αποτελεί των ακρογωνιαίο λίθο για την απόφαση αποδοχής ή απόρριψης του υποδείγματος VaR που χρησιμοποιήθηκε. Η παρούσα υποενότητα πραγματεύεται ελέγχους που αφορούν την στατιστική σημαντικότητα του εν λόγω ποσοστού.

Ποίο είναι, όμως, το νόημα του ποσοστού αποτυχίας φαίνεται από τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει. Εφόσον, το failure rate είναι ο λόγος παραβίασης (αποτυχίας) του VaR προς το σύνολο του δείγματος, είναι εύλογο να συγκριθεί με το επίπεδο σημαντικότητας α (αριστερή “ουρά” της κατανομής που υποθέτει η τεχνική υπολογισμού του VaR)¹² το οποίο χρησιμοποιήθηκε για να εκτιμηθεί το VaR.



Εάν τα δύο αυτά ποσοστά συγκλίνουν, τότε η τεχνική υπολογισμού του VaR μπορεί να θεωρηθεί ακριβής. Αντιθέτως, εάν αποκλίνουν σημαντικά τότε μάλλον το χρησιμοποιηθέν υπόδειγμα θα πρέπει να απορριφθεί.

Η διαδικασία δεν θα μπορούσε να είναι τόσο αξιόπιστη από την στιγμή που για την εφαρμογή της γίνεται χρήση δείγματος δεδομένων. Για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας του μέτρου του VaR που χρησιμοποιείται κάθε φορά θα πρέπει το ποσοστό αποτυχίας να υποβάλλεται σε κάποιον στατιστικό έλεγχο.

Εάν τεθεί ως N ο αριθμός των παραβιάσεων του VaR και T το μέγεθος του δείγματός, τότε ο λόγος N/T (failure ratio) θα πρέπει να συγκλίνει με την

πιθανότητα α καθώς οι παρατηρήσεις του δείγματος αυξάνονται. Για την αξιολόγηση του μέτρου του VaR προτάθηκαν από τον Kupiec (1995) δύο μέθοδοι. Η πρώτη εξ αυτών στηρίζεται στον αριθμό των παρατηρήσεων μέχρι την πρώτη παραβίαση του VaR, ενώ η δεύτερη στηρίζεται στην στατιστική αξιολόγηση του ποσοστού αποτυχίας. Στην παρούσα διπλωματική η αξιολόγηση της εκάστοτε τεχνικής διενεργείται με την μέθοδο του ποσοστού αποτυχίας (failure ratio).

Περιγραφή μεθόδου αξιολόγησης του Ποσοστού αποτυχίας

Όπως αναλύθηκε παραπάνω, από την εφαρμογή του Backtesting προκύπτει ο λόγος παραβιάσεων του VaR προς το πλήθος των Backtests. Σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο, εξετάζεται το εάν αυτός ο λόγος, ο οποίος ουσιαστικά είναι το ποσοστό αποτυχίας (failure Ratio), όπως αυτό προκύπτει από την μεθοδολογία του Backtesting, είναι στατιστικά σημαντικός ή όχι. Κατά συνέπεια αυτός ο στατιστικός έλεγχος αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την λήψη της απόφαση σχετικά με την ακρίβεια και την αξιοπιστία της εκάστοτε τεχνικής VaR που χρησιμοποιείται.

Πιο συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε ως τυχαίο πείραμα την επιλογή ως προς την καταλληλότητα του VaR με δύο πιθανά αποτελέσματα την επιτυχή επιλογή (Actual Losses < VaR) ή όχι (Actual Losses > VaR) και πιθανότητα αποτυχίας p , τότε: η πιθανότητα (p) να παρατηρηθούν N παραβιάσεις του VaR σε ένα δείγμα μεγέθους T , ανεξαρτήτως σειράς δίνεται ως εξής:

Binomial $[T,N] \cdot (1-p)^{T-N} \cdot p^N$, όπου Binomial $[T,N]$ είναι ο συντελεστής της διωνυμικής κατανομής και p είναι η πιθανότητα αποτυχίας για οποιαδήποτε ανεξάρτητη δοκιμή (επανάληψη πειράματος).

Ο στατιστικός έλεγχος για την στήριξη ή μη της μηδενικής υπόθεσης είναι ο εξής:

$$LR (\text{likelihood ratio}) = -2\log[(1-p^*)^{T-N} p^N] + 2\log[(1-[N/T])^{T-N} (N/T)^N],$$

όπου p^* είναι η πιθανότητα αποτυχίας του VaR κάτω από την μηδενική υπόθεση, T το πλήθος των Backtests και N ο αριθμός των παραβιάσεων του VaR στο δεδομένο δείγμα.

Η μηδενική υπόθεση, η οποία εξετάζεται με αυτόν το στατιστικό έλεγχο, (H_0) είναι $H_0: p=p^*$ και η εναλλακτική $H_1: p \neq p^*$. Ο παραπάνω έλεγχος είναι γνωστός ως Proportion of Failure (PF) test και ακολουθεί χ^2 κατανομή με έναν βαθμό ελευθερίας.

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τις κριτικές τιμές (critical values) αποδοχής ή απόρριψης της μηδενικής σύμφωνα με το LR test για N_i ($i=1,2, \dots, 10$), p^*_j ($j=0.01, 0.02, \dots, 0.05$) και επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha=0,05$.

Παραβιάσεις (N)	$p^*=1\%$	$p^*=2\%$	$p^*=3\%$	$p^*=4\%$	$p^*=5\%$
N=1	6	3			
N=2	34	17	11	9	
N=3	75	38	26	19	16
N=4	125	63	42	32	26
N=5	180	91	61	46	37
N=6	240	121	81	61	49
N=7	302	152	102	77	62
N=8	367	184	124	93	75
N=9	434	218	146	110	88
N=10	503	253	169	127	102

Επί παραδείγματι, εάν παρατηρηθούν 4 παραβιάσεις του VaR (N) σε δείγμα (T) μεγέθους μικρότερο των 126 παρατηρήσεων, τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η μηδενική υπόθεση $H_0: p=1\%$ απορρίπτεται σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Τέλος, παρατίθεται ένας πίνακας όπου παρουσιάζονται τα διαστήματα στα οποία η μηδενική υπόθεση $H_0: p=p^*$ στηρίζεται για δεδομένα p^* , δεδομένο μέγεθος δείγματος (T) και επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%. Παραδείγματος χάριν, εάν σε δείγμα μεγέθους 500 παρατηρήσεων παρατηρηθούν περισσότερες από 17 και λιγότερες από 35 παραβιάσεις, τότε γίνεται αποδεκτή η υπόθεση ότι $p^* = 5\%$.

p^*	T=250	T=500	T=1000
5,00%	$7 \leq N \leq 19$	$17 \leq N \leq 35$	$38 \leq N \leq 64$
1,00%	$1 \leq N \leq 6$	$2 \leq N \leq 9$	$5 \leq N \leq 16$
0,50%	$0 \leq N \leq 4$	$1 \leq N \leq 6$	$2 \leq N \leq 9$
0,10%	$0 \leq N \leq 1$	$0 \leq N \leq 2$	$0 \leq N \leq 3$
0,01%	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 0$	$0 \leq N \leq 1$

Χαρακτηριστικό του Proportion of Failure test, όταν διενεργείται σε μικρά δείγματα, είναι ότι αυξάνεται η πιθανότητα να διαπραχθεί σφάλμα τύπου II, με άλλα λόγια αυξάνεται ο κίνδυνος να γίνει αποδεκτή η μηδενική υπόθεση ενώ είναι λανθασμένη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

3. Εφαρμογή Τεχνικών και Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο ακολουθεί η περιγραφή του δείγματος και της μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των εμπειρικών αποτελεσμάτων. Επιπλέον, παρατίθενται τα αποτελέσματα των εφαρμοζόμενων τεχνικών και τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από την σύγκριση των επιμέρους τεχνικών.

3.1. Περιγραφή δείγματος και μεθοδολογίας

Η εφαρμογή των παραπάνω τεχνικών εκτίμησης του VaR θα εφαρμοστεί σε ένα δείγμα παρατηρήσεων το οποίο αποτελείται από τις αποδόσεις του δείκτη S&P 500. Η συλλογή των εν λόγω αποδόσεων πραγματοποιήθηκε από την πλατφόρμα Bloomberg.

Τιμές S&P 500 2010-2013



πηγή: <http://www.bloomberg.com/>

Ο δείκτης ενδιαφέροντος περιλαμβάνει συνολικά 500 εταιρείες και η στάθμιση της εκάστοτε εταιρείας στον δείκτη γίνεται με κριτήριο την κεφαλαιοποίηση της. Έτσι η εφαρμογή των τεχνικών εκτίμησης του VaR ουσιαστικά λαμβάνει χώρα σε ένα χαρτοφυλάκιο 500 μετοχών.

Οι αποδόσεις αφορούν την περίοδο από 12/1/2009 έως 31/12/2013 και έχουν υπολογισθεί σε ημερήσια βάση ως η διαφορά του φυσικού λογαρίθμου ως εξής: $x_t = \log P_t - \log P_{t-1}$, όπου x_t είναι η απόδοση την χρονική στιγμή t και P_t είναι η τιμή του δείκτη την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Για την εκάστοτε εκτίμηση του ημερήσιου VaR λαμβάνονται υπόψιν οι 252 παρελθοντικές αποδόσεις (περίπου το πλήθος των ημερών διαπραγμάτευσης εντός ενός έτους).

Ωστόσο, για να καταστεί δυνατή η εξαγωγή περισσότερο αξιόπιστων συμπερασμάτων σχετικά με την αποτελεσματικότητα της εκάστοτε τεχνικής διαχρονικά, οι τεχνικές αυτές θα εφαρμοστούν σε δύο διαφορετικές περιόδους. Η πρώτη περίοδος, είναι η περίοδος η οποία περιγράφεται παραπάνω και χαρακτηριστικό της γνώρισμα είναι ότι η παγκόσμια οικονομία βρίσκεται σε αναταραχή λόγω της χρηματοπιστωτικής κρίσης η οποία ξέσπασε περί το 2007 στην Αμερική. Δεδομένου, όμως, του γεγονότος ότι η εκτίμηση του VaR υποθέτει κανονικές συνθήκες (normal market conditions) στην αγορά, η παραπάνω εμπειρική ανάλυση θα εφαρμοστεί επιπλέον στις αποδόσεις του ίδιου δείκτη αλλά για την περίοδο από το 2004 έως το 2007. Κατά την περίοδο αυτή τόσο η παγκόσμια οικονομία όσο και η Αμερικάνικη θεωρείται ότι διανύουν μία περίοδο χωρίς αναταραχές.

Σχετικά με τη μεθοδολογία, η οποία ακολουθήθηκε, προκειμένου την εφαρμογή των τεχνικών και την εξαγωγή συμπερασμάτων, κάθε δείγμα αποτελείται από 1252 παρατηρήσεις, οι οποίες είναι οι ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη. Προκειμένου να γίνει η εκτίμηση του VaR στην εκάστοτε χρονική στιγμή t , η οποία αφορά την χρονική στιγμή $t+1$, γίνεται χρήση των 252 προηγούμενων παρατηρήσεων. Έτσι κάνοντας χρήση ενός κυλιόμενου χρονικού “παραθύρου” (rolling window) από τις 1252 παρατηρήσεις προκύπτουν 1000 εκτιμήσεις του VaR.

Η προαναφερθείσα εκτίμηση του VaR αφορά την επόμενη χρονική στιγμή. Εφόσον, όμως, τα στοιχεία είναι ιστορικά είναι γνωστή η πραγματοποιηθείσα

(actual return) μεταβολή του δείκτη την επόμενη ημέρα. Συνεπώς, μπορούμε να προβούμε σε άμεσο έλεγχο σχετικά με το εάν το VaR που εκτιμήθηκε με την εκάστοτε μέθοδο παραβιάζεται η όχι.

Προφανώς, όμως, μία παρατήρηση δεν είναι αρκετή για να εξαχθούν αξιόπιστα συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα της χρησιμοποιηθείσας τεχνικής. Για τον λόγο αυτόν, η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται 1000 φορές και έτσι προκύπτουν 1000 εκτιμήσεις του VaR οι οποίες συγκρίνονται με την πραγματική μεταβολή της ημέρας στην οποία αναφέρονται. Τέλος, η αξιοπιστία της κάθε τεχνικής αξιολογείται σύμφωνα με το Likelihood Ratio test, όπως περιγράφεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Η παραπάνω μεθοδολογία είναι κοινή για όλες τις τεχνικές που εφαρμόζονται στην παρούσα διπλωματική.

Η εμπειρική μελέτη υλοποιήθηκε με την χρήση του προγράμματος MatLab (*Matrix Laboratory*) και οι κώδικες που αναπτύχθηκαν για του υπολογιστικούς σκοπούς της παρούσας διπλωματικής παρατίθεται παρακάτω.

3.2. Εμπειρικά αποτελέσματα

Παρακάτω παρατίθενται τα εμπειρικά αποτελέσματα για την εκάστοτε τεχνική και χρονική περίοδο. Στους πίνακες των αποτελεσμάτων εμφανίζεται το σύμβολο ‘*’ δίπλα στον αριθμό των παραβιάσεων, εάν η τεχνική θεωρείται αξιόπιστη σύμφωνα με το Likelihood Ratio test.

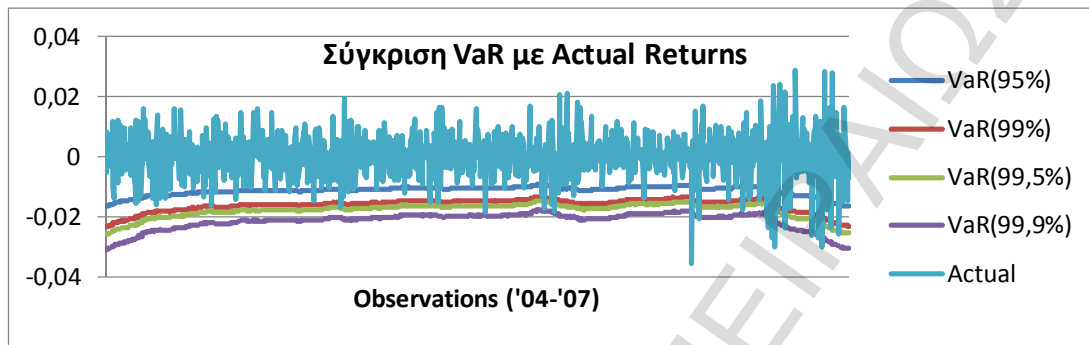
Παραμετρικό VaR υπό την υπόθεση κανονικότητας των αποδόσεων

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων αναπτύχθηκε ο παρακάτω κώδικας:

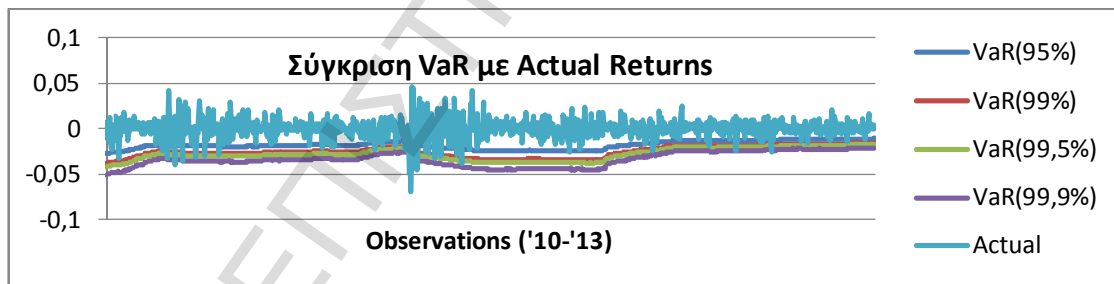
```
function [ VaR ] = VaR_Normal( N,Interval,data,CI)
for i=1:N-Interval
    est(i,:)=mle(data(i:i+Interval-1));
    vaR(i,1)= -(exp(est(i,1)+norminv(1-CI,0,1)*est(i,2))-1);
end
VaR=-vaR;
end
```

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της εν λόγω τεχνικής:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	67	$38 \leq N \leq 64$
99%	24	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	18	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	10	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	49*	$38 \leq N \leq 64$
99%	21	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	15	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	9	$0 \leq N \leq 3$



Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, η υπό εξέταση τεχνική, μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστη, σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%, μόνο στην περίοδο 2010 – 2013.

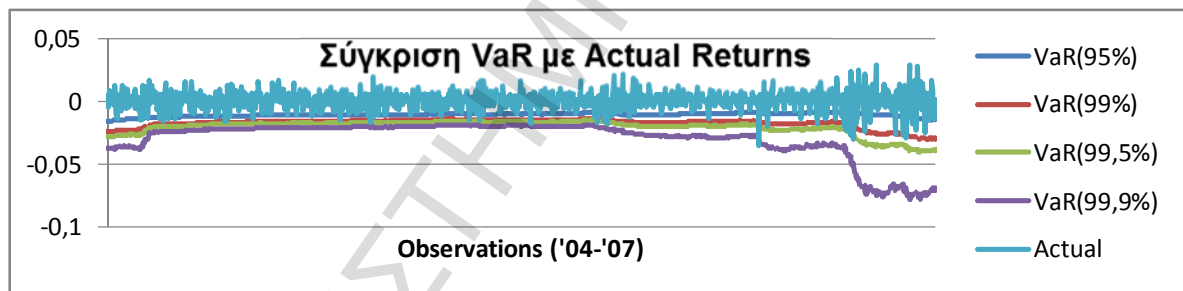
Παραμετρικό VaR υπό την υπόθεση Student's – t κατανομής

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι ο παρακάτω:

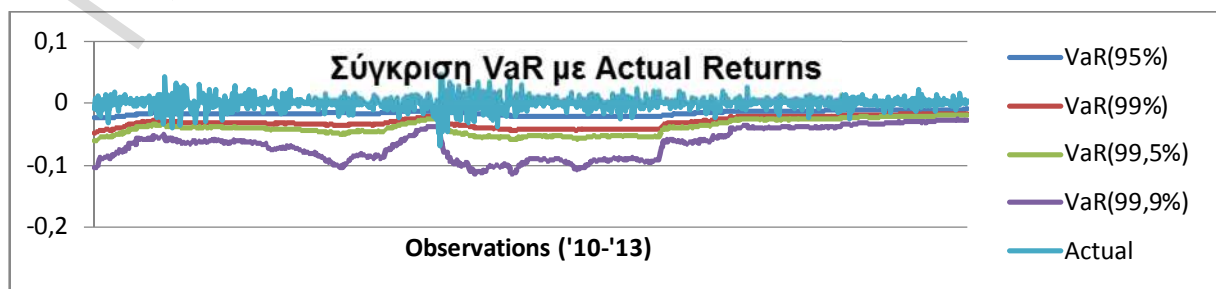
```
function [ VaR ] = VaR_T( N,Interval,data,CI)
for i=1:N-Interval
    est(i,:)=mle(data(i:i+Interval-1),'distribution','t');
    t_cdf=tinv(1-CI,est(i,3));
    vaR(i,1)=-(exp(est(i,1)+t_cdf*est(i,2))-1);
end
VaR=-vaR;
end
```

Τα αποτελέσματα για τις δύο χρονικές περιόδους και για διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης παρατίθενται παρακάτω:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	72	$38 \leq N \leq 64$
99%	20	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	7*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	63*	$38 \leq N \leq 64$
99%	11*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	7*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	2*	$0 \leq N \leq 3$



Παρατηρείται μία σχετικά καλή επίδοση της τεχνικής, η οποία ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι η Student's – t κατανομή εφαρμόζει καλύτερα στην εμπειρική κατανομή των αποδόσεων καθώς χαρακτηριστικό της είναι οι παχιές ουρές (fat tailed).

Παραμετρικό VaR υπό την υπόθεση Power Exponential κατανομής

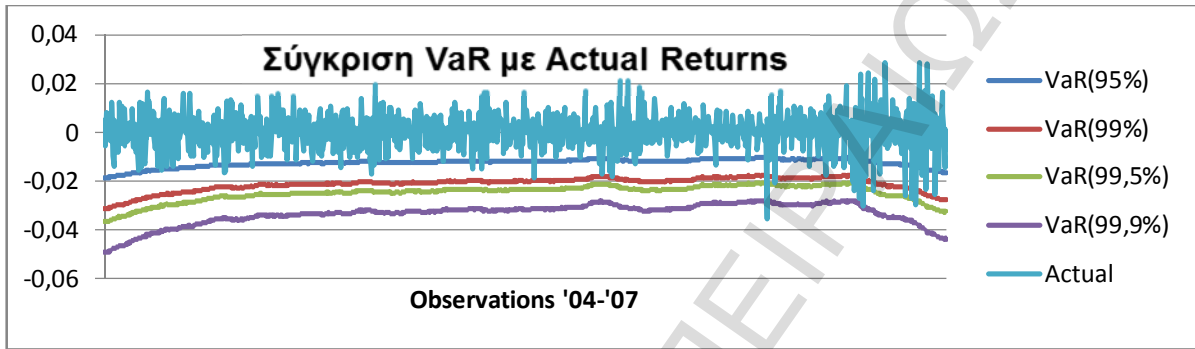
Για τις υπολογιστικές ανάγκες αυτής της τεχνικής αναπτύχθηκαν δύο κώδικες. Ο πρώτος υπολογίζει την τιμή της αντίστροφης Αθροιστικής Power Exponential κατανομής που έχει μέσο μηδέν και διακύμανση ένα, ενώ ο δεύτερος υπολογίζει το VaR κάνοντας χρήση των τιμών του ποσοστημορίου που προκύπτει από τον πρώτο κώδικα. Παρακάτω παρατίθενται οι εν λόγω κώδικες.

```
1ος) function [ perc ] = ped_cdf( m,s,d,CI )
    x=0;
    e=0.5;
    while e>1-CI
        x=x-0.01;
        arg1=(abs(x-m)/(s*(gamma(1/d)/gamma(3/d))^0.5)).^d;
        arg2=1./d;
        num=gammainc(arg1,arg2,'lower');
        den=2;
        e=0.5+sign(x-m).*(num./den);
    end
    perc=x;
end
```

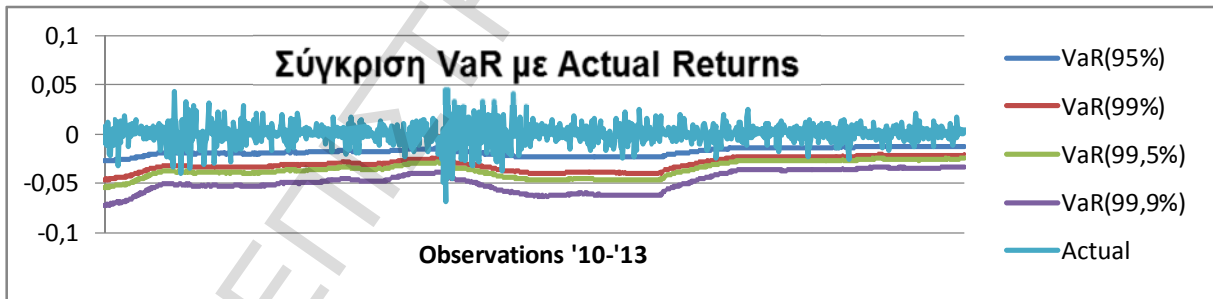
```
2ος) function [ VaR ] = VaR_PED(N,Interval,data,d,CI)
    mu=0;
    for i=1:N-Interval
        fun_g=d*(gamma(3/d)/gamma(1/d))^(d/2);
        std_d=fun_g*(1/Interval)*sum(abs(data(i:i+Interval-1)).^d);
        std=nthroot(std_d,d);
        vaR(i,1)=-(exp(mu+ped_cdf( 0,1,d,CI )*std)-1);
    end
    VaR=-vaR;
end
```

Παρακάτω παρατίθενται τα εμπειρικά αποτελέσματα.

Backtesting Sample Size 1000 ('04 - '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	48*	$38 \leq N \leq 64$
99%	10*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	5*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	46*	$38 \leq N \leq 64$
99%	12*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	5*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	4	$0 \leq N \leq 3$



Πρέπει να σημειωθεί ότι η παράμετρος δ , η οποία όπως αναλύεται στο δεύτερο κεφάλαιο και η οποία προσδιορίζει την κύρτωση της κατανομής, ορίστηκε στο ένα. Η επιλογή της τιμής αυτής έγινε ύστερα από μία διαδικασία δοκιμών της τιμής του δ στο διάστημα $[0.5, 1.5]$. Σχολιάζοντας την αξιοπιστία της παρούσας τεχνικής, παρατηρούμε ότι είναι αρκετά αξιόπιστη και στις δύο υποπεριόδους. Η καλή αυτή επίδοση οφείλεται στο γεγονός ότι η Power Exponential κατανομή με παράμετρο κύρτωσης ένα (1) χαρακτηρίζεται από παχύτερες “ουρές” σε σχέση με την κανονική κατανομή, το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό της εμπειρικής κατανομής των αποδόσεων και κατά συνέπεια δίνει καλύτερες εκτιμήσεις.

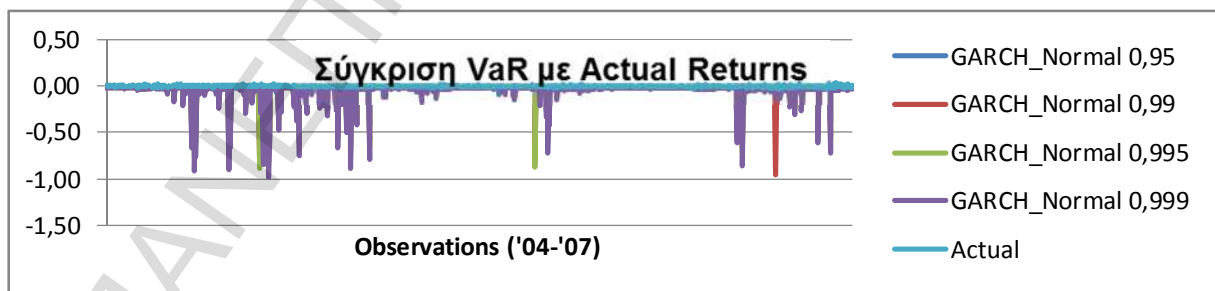
GARCH – normal

Δεδομένης της πολυπλοκότητας της εν λόγω τεχνικής, ο κώδικας είναι περισσότερο σύνθετος:

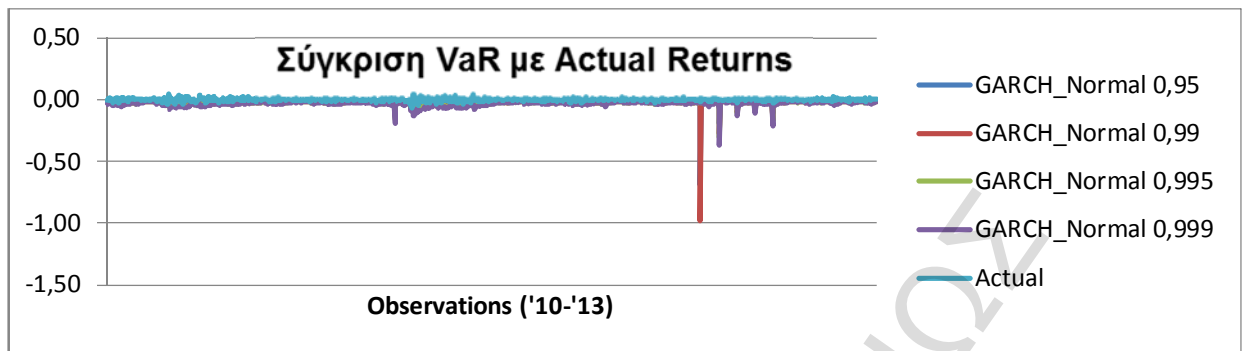
```
function [ VaR ] = garch_normal( N,Interval,data,CI )
for i=1:N-Interval
n=Interval;
u = data(i:i+Interval-1);
v0 = u(1,1).^2;
u0 = u(1,1);
v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(3)*ones(n-1,1),-...
...1))\((x(1)+[x(2)*u0^2+x(3)*v0;x(2)*u(1:end-1).^2]);
f=@(x)-sum(-log(v(x)) - u.^2./v(x));
x0 = [0.001; 0.2; 0.8];
xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1
1],1,[0;0;0],[inf;1;1],[],optimset('Algorithm','interior-point'));
par(i,:)=xmin;
Var_forecast(i,1)=ugarchpred(u,par(i,1),par(i,3),par(i,2),1);
end
VaR=(exp(norminv(1-CI,0,1)*sqrt(Var_forecast))-1);
end
```

Ακολουθούν οι πίνακες των εμπειρικών αποτελεσμάτων:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	38*	$38 \leq N \leq 64$
99%	14*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	7*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	3*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	46*	$38 \leq N \leq 64$
99%	19	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	13	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	6	$0 \leq N \leq 3$



Από τα στοιχεία φαίνεται ότι η τεχνική που υποθέτει ότι η διακύμανση των αποδόσεων μπορεί να μοντελοποιηθεί στα πλαίσια ενός GARCH (1,1) υποδείγματος φαίνεται να λειτουργεί καλύτερα στην προ κρίσης περίοδο.

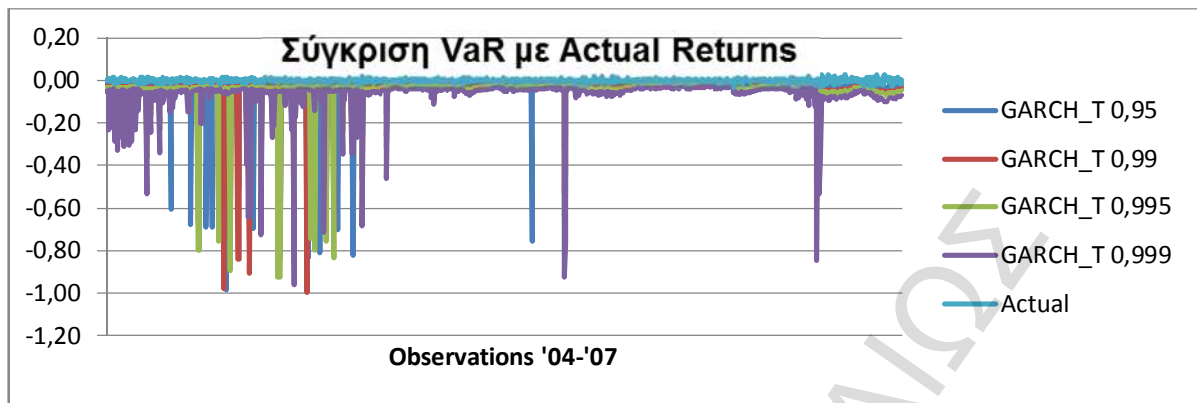
GARCH – Student's –t

Κώδικας εφαρμογής:

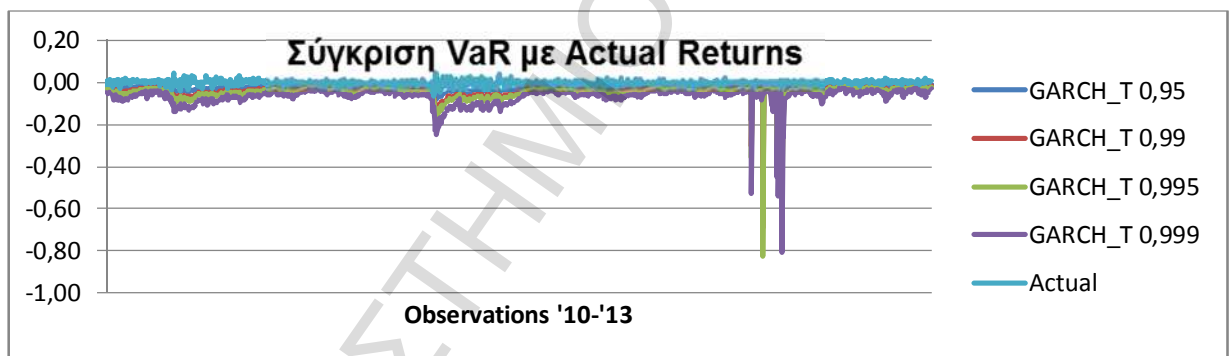
```
function [ VaR ] = garch_t( N,Interval,data,CI,df )
for i=1:N-Interval
    n=Interval;
    u = data(i:i+Interval-1);
    v0 = u(1,1).^2;
    u0 = u(1,1);
    v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(3)*ones(n-1,1),...
    ...-1))\((x(1)+[x(2)*u0^2+x(3)*v0;x(2)*u(1:end-1).^2]);
    f=@(x)sum(0.5*log(v(x))+0.5*(df+1)*log(1+(u.^2)./(df-2)*v(x)));
    x0 = [0.001; 0.1; 0.9];
    xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1...
    ... 1],1,[0;0;0],[inf;1;1],[],optimset('Algorithm','interior-point'));
    par(i,:)=xmin;
    Var_forecast(i,1)=ugarchpred(u,par(i,1),par(i,3),par(i,2),1);
end
VaR=(exp(tinv(1-CI,df)*sqrt(Var_forecast))-1);
end
```

Εμπειρικά αποτελέσματα:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	19	38≤N≤64
99%	2	5≤N≤16
99,5%	1	2≤N≤9
99,9%	1*	0≤N≤3



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	29	$38 \leq N \leq 64$
99%	2	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	0	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	0*	$0 \leq N \leq 3$



Από τα εμπειρικά αποτελέσματα μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η τεχνική του GARCH με υπόθεση Student's-t κατανομής με 5 βαθμούς ελευθερίας (ο προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας έγινε ύστερα από δοκιμές) δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο σε διάστημα εμπιστοσύνης 99,9%, τόσο για την προ κρίσης όσο και για την εν μέσω κρίσης περίοδο.

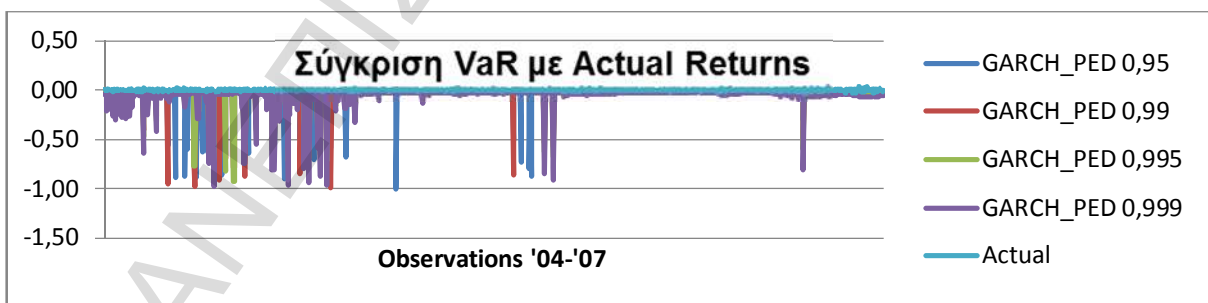
GARCH – Power Exponential Distribution

Ο αντίστοιχος κώδικας παρατίθεται παρακάτω:

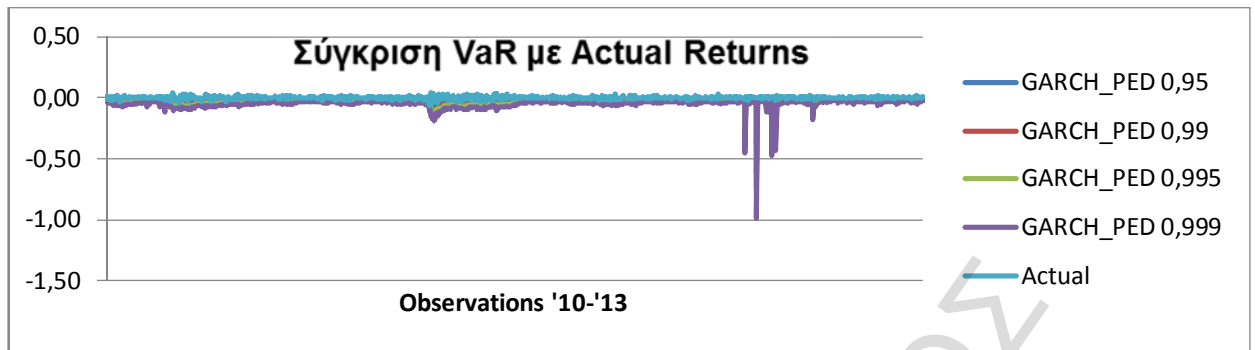
```
function [ VaR ] = garch_ped( N,Interval,data,CI,d )
for i=1:N-Interval
    n=Interval;
        u = data(i:i+Interval-1);
    v0 = u(1,1).^2;
    u0 = u(1,1);
    v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(3)*ones(n-1,1),...
    ... -1))\((x(1)+[x(2)*u0^2+x(3)*v0;x(2)*u(1:end-1).^2]);
    phi=((2^(-2/d))*gamma(1/d)/gamma(3/d))^0.5;
    f=@(x)sum(log(sqrt(v(x)))+0.5*abs(u./(phi*sqrt(v(x))))).^d);
    x0 = [0.001; 0.2; 0.8];
    xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1...
    ... 1],1,[0;0;0],[inf;1;1],[],optimset('Algorithm','interior-point'));
    par(i,:)=xmin;
    Var_forecast(i,1)=ugarchpred(u,par(i,1),par(i,3),par(i,2),1);
end
VaR=(exp(ped_cdf( 0,1,d,CI )*sqrt(Var_forecast))-1);
end
```

Αποτελέσματα εφαρμογής της εν λόγω τεχνικής:

Backtesting Sample Size 1000 ('04-'07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	39*	38≤N≤64
99%	5*	5≤N≤16
99,5%	3*	2≤N≤9
99,9%	1*	0≤N≤3



Backtesting Sample Size 1000 ('10-'13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	45*	38≤N≤64
99%	7*	5≤N≤16
99,5%	2*	2≤N≤9
99,9%	0*	0≤N≤3



Σε ό,τι αφορά την τεχνική εκτίμησης του GARCH με την υπόθεση της Power Exponential Distribution (με συντελεστή κύρτωσης 1) φαίνεται να δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα για το εκάστοτε διάστημα εμπιστοσύνης και στις δύο χρονικές υποπεριόδους.

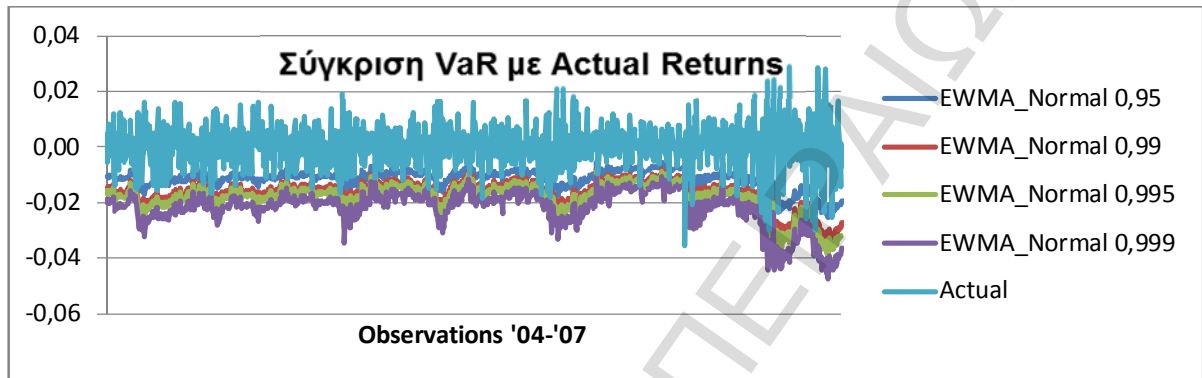
EWMA – normal

Συνεχίζοντας με μία ακόμα τεχνική εκτίμησης του VaR, η οποία υποθέτει μη σταθερή διακύμανση, όπως και προηγουμένως, παρατίθεται ο αντίστοιχος κώδικας:

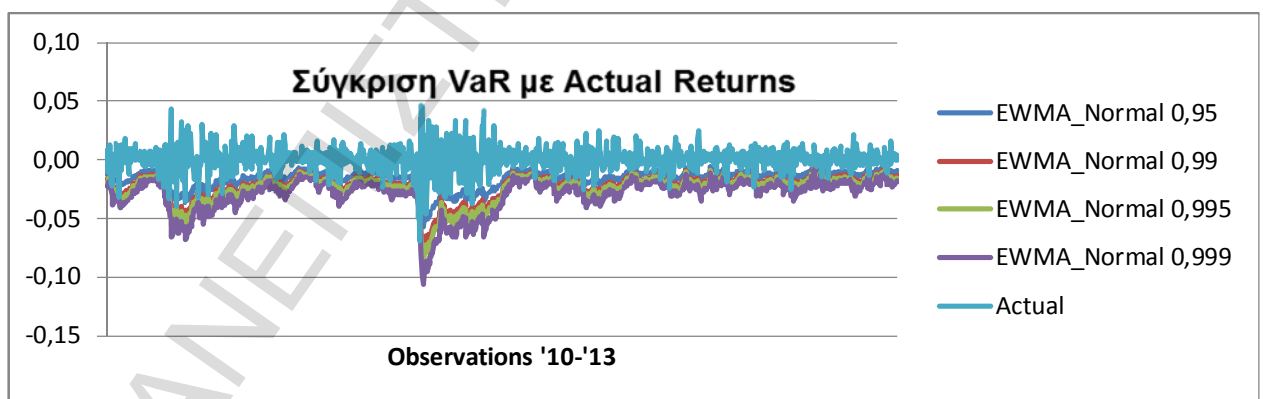
```
function [ VaR ] = ewma_normal( N,Interval,data,CI )
for i=1:N-Interval
n=Interval;
u = data(i:i+Interval-1);
v0 = u(1,1).^2;
u0 = u(1,1);
v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(2)*ones(n-1,1),-...
...1))\([x(1)*u0^2+x(2)*v0;x(1)*u(1:end-1).^2]);
f=@(x)-sum(-log(v(x)) - u.^2./v(x));
x0 = [ 0.2; 0.8];
xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1],1,[0;0],[1;1],[],optimset('Algorithm','interior-
...point'));
par(1,:)=xmin;
sigma_sq(1,1)=u(1,1)^2;
for j=1:Interval
sigma_sq(j+1,1)=par(1,2)*sigma_sq(j,1)+par(1,1)*(u(j,1)^2);
end
Var_forecast(i,1)=sigma_sq(Interval+1);
end
VaR=(exp(norminv(1-CI,0,1)*sqrt(Var_forecast))-1);
end
```

Ακολουθούν τα εμπειρικά ευρήματα της υπό εξέταση τεχνικής.

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	54*	$38 \leq N \leq 64$
99%	23	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	19	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	8	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	67	$38 \leq N \leq 64$
99%	27	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	19	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	10	$0 \leq N \leq 3$



Από την εφαρμογή της τεχνικής εκτίμησης με την υπόθεση ότι η διακύμανση της στοχαστικής ανέλιξης των αποδόσεων μοντελοποιείται με ένα υπόδειγμα Exponential Weighted Moving Average, παρατηρούμε ότι η αξιοπιστία της τόσο σε προ κρίσης όσο και εν μέσω κρίσης περίοδο δεν είναι

ικανοποιητική καθώς, σύμφωνα με τον στατιστικό έλεγχο, μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5% και μόνο σε περιόδους, όπου οι συνθήκες στην αγορά μπορούν να χαρακτηριστούν ως “κανονικές” (προ κρίσης περιόδου).

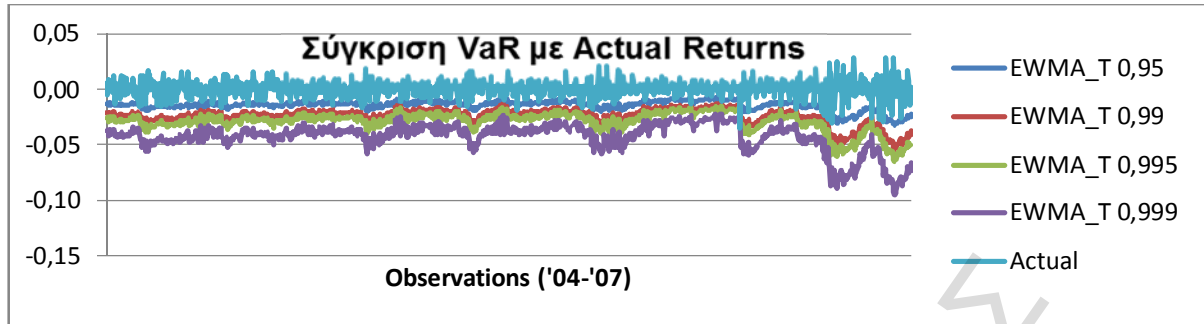
EWMA – Students’s – t

Κώδικας εφαρμογής:

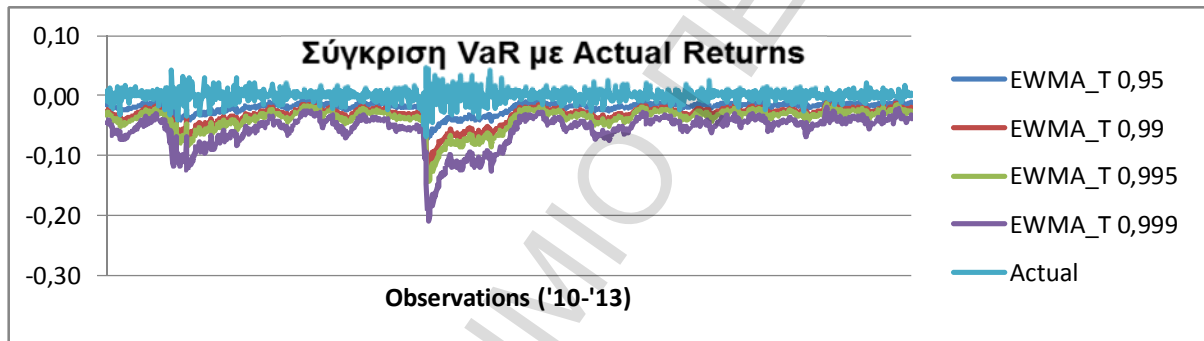
```
function [ VaR ] = ewma_t( N,Interval,data,CI,df )
for i=1:N-Interval
    n=Interval;
    u = data(i:i+Interval-1);
    v0 = u(1,1).^2;
    u0 = u(1,1);
    v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(2)*ones(n-1,1),-...
... 1))\([x(1)*u0^2+x(2)*v0;x(1)*u(1:end-1).^2]);
    f=@(x)sum(0.5*log(v(x))+0.5*(df+1)*log(1+(u.^2)./(df-2)*v(x)));
    x0 = [ 0.2; 0.8];
    xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1],1,[0;0],[1;1],[],optimset('Algorithm','interior
...point'));
    par(1,:)=xmin;
    sigma_sq(1,1)=u(1,1)^2;
    for j=1:Interval
        sigma_sq(j+1,1)=par(1,2)*sigma_sq(j,1)+par(1,1)*(u(j,1)^2);
    end
    Var_forecast(i,1)=sigma_sq(Interval+1);
end
VaR=(exp(tinv(1-CI,df)*sqrt(Var_forecast))-1);
end
```

Ακολουθούν τα εμπειρικά αποτελέσματα:

Backtesting Sample Size 1000 ('04-'07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	33	38≤N≤64
99%	2	5≤N≤16
99,5%	1	2≤N≤9
99,9%	1*	0≤N≤3



Backtesting Sample Size 1000 ('10-'13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	39*	$38 \leq N \leq 64$
99%	7*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	2*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	0*	$0 \leq N \leq 3$



Το υπόδειγμα EWMA με υπόθεση Student's – t κατανομής παρατηρούμε ότι παράγει αξιόπιστες εκτιμήσεις στην εντός κρίσης περίοδο. Το χαρακτηριστικό αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι η παχύτερες “ουρές” της Student's – t λαμβάνουν υπόψιν τις ακραίες παρατηρήσεις των αποδόσεων που εμφανίζονται εντός κρίσης.

EWMA – Power Exponential Distribution

Κώδικας εφαρμογής:

```
function [ VaR ] = ewma_ped( N,Interval,data,CI,d )
for i=1:N-Interval
n=Interval;
u = data(i:i+Interval-1);
v0 = u(1,1).^2;
u0 = u(1,1);
v = @(x) (diag(ones(n,1),0)+diag(-x(2)*ones(n-1,1),-
... 1))\([x(1)*u0^2+x(2)*v0;x(1)*u(1:end-1).^2]);
phi=((2^(-2/d))*gamma(1/d)/gamma(3/d))^0.5;
f=@(x)sum(log(sqrt(v(x)))+0.5*abs(u./(phi*sqrt(v(x))))).^d);
x0 = [ 0.2; 0.8];
```

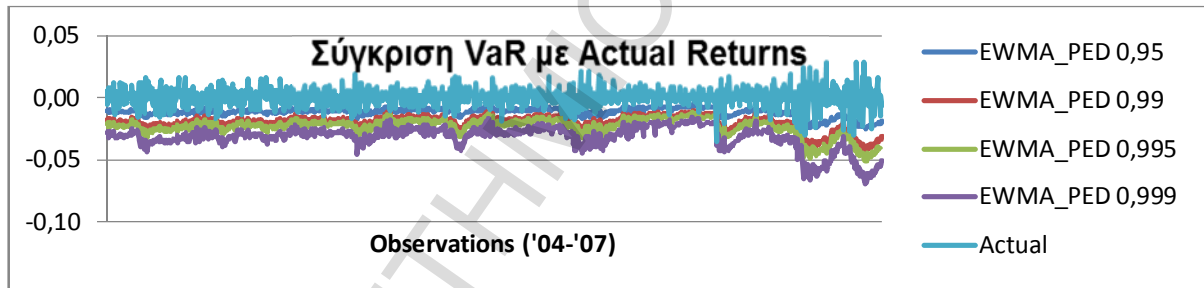
```

xmin = fmincon(f,x0,[],[],[1 1],1,[0;0],[1;1],[],optimset('Algorithm','interior-
...point'));
par(1,:)=xmin;
sigma_sq(1,1)=u(1,1)^2;
for j=1:Interval
    sigma_sq(j+1,1)=par(1,2)*sigma_sq(j,1)+par(1,1)*(u(j,1)^2);
end
Var_forecast(i,1)=sigma_sq(Interval+1);
end
VaR=(exp(ped_cdf( 0,1,d,CI ))*sqrt(Var_forecast))-1);
end

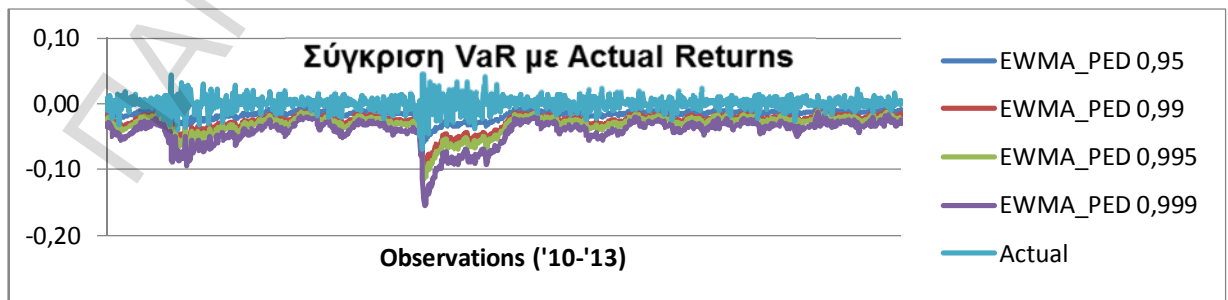
```

Εμπειρικά αποτελέσματα:

Backtesting Sample Size 1000 ('04-'07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	55*	$38 \leq N \leq 64$
99%	10*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	3*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10-'13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR Test Critical Values
95%	69	$38 \leq N \leq 64$
99%	18	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	10	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	0*	$0 \leq N \leq 3$



Όπως παρατηρείται από τα παραπάνω αποτελέσματα, η εν λόγω τεχνική είναι κατάλληλη μόνο για περιόδους όπου οι διαταραχές απουσιάζουν.

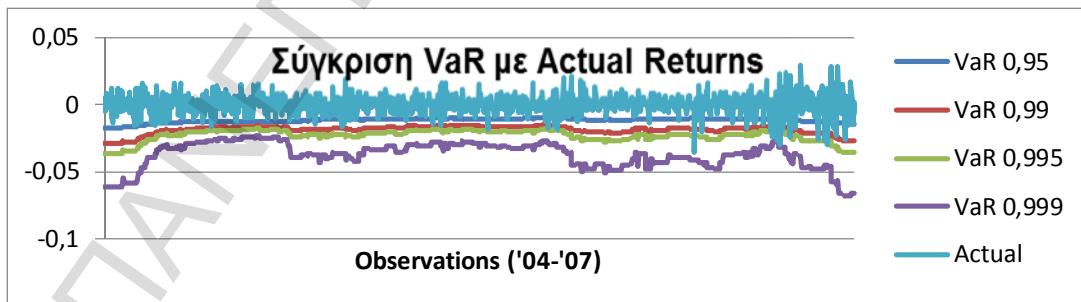
Tail Index Estimation

Προκειμένου να εκτιμηθεί το VaR με την μέθοδο του Tail Index Estimator, αναπτύχθηκε ο παρακάτω κώδικας:

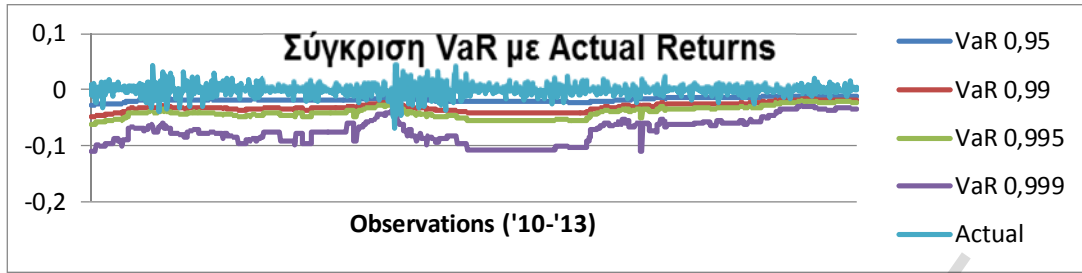
```
function [ quantile ] = tail_index_est( data,N,Interval,CI,m )
for i=1:N-Interval
    dataset=data(i:i+Interval-1);
    sorted_ret=sortrows(dataset);
    for j=1:m
        a(j,1)=log(sorted_ret(Interval-j+1)/sorted_ret(Interval-m));
    end
    Hill_est=(1/m)*sum(a);
    quan(i,1)=sorted_ret(Interval-m+1)*(m/(Interval*(1-CI)))^Hill_est;
end
quantile=-quan;
end
```

Τα εμπειρικά αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 - '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	61*	$38 \leq N \leq 64$
99%	16*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	8*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	52*	$38 \leq N \leq 64$
99%	11*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	6*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	2*	$0 \leq N \leq 3$



Οι παραβιάσεις του VaR, το οποίο εκτιμήθηκε με την τεχνική του tail index estimation, τόσο για την περίοδο προ κρίσης όσο και για την περίοδο εντός κρίσης, είναι εντός των ορίων των περιοχών αποδοχής για το σύνολο των διαστημάτων εμπιστοσύνης.

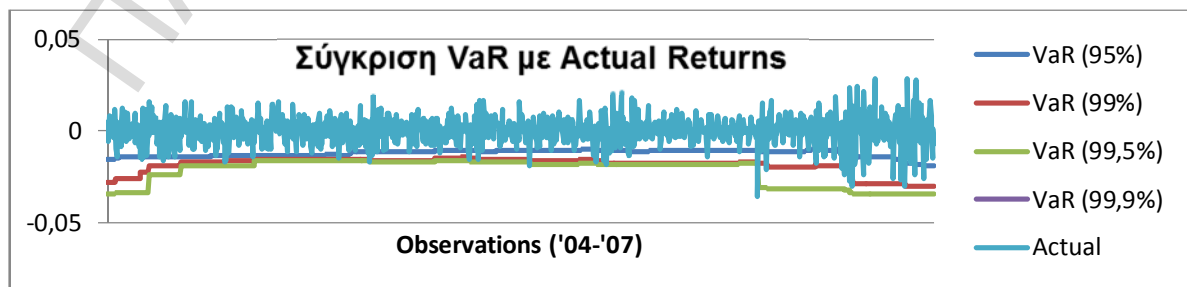
Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation)

Κώδικας εκτέλεσης:

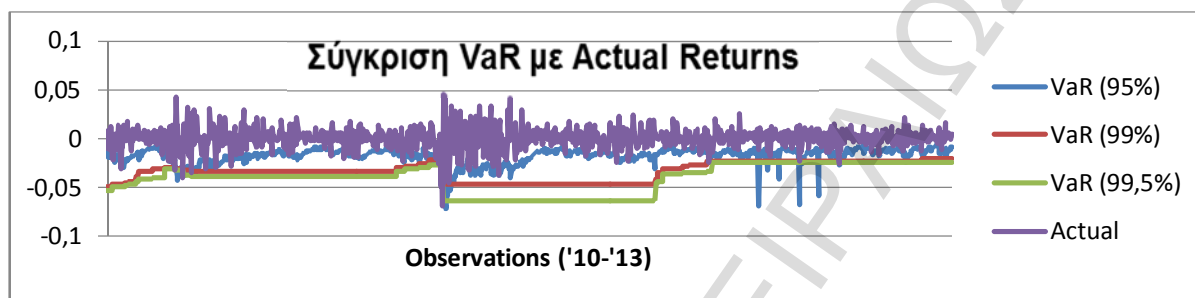
```
function [ Hist_Sim ] = VaR_Hist_Sim( N,Interval,data,CI)
VaRs=zeros(N-Interval,1);
for i=1:N-Interval
    sorted=sortrows(data(i:i+Interval-1));
    VaRs(i,1)=interp1(sorted,(1-CI)*Interval);
end
Hist_Sim=VaRs;
End
```

Εμπειρικά αποτελέσματα:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 – '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	58*	$38 \leq N \leq 64$
99%	14*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	3*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	-	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	46*	$38 \leq N \leq 64$
99%	10*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	5*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	-	$0 \leq N \leq 3$



Η παρούσα τεχνική είναι εξίσου αξιόπιστη και στις δύο χρονικές περιόδους, καθώς οι παρατηρούμενες παραβιάσεις είναι εντός των ορίων αποδοχής.

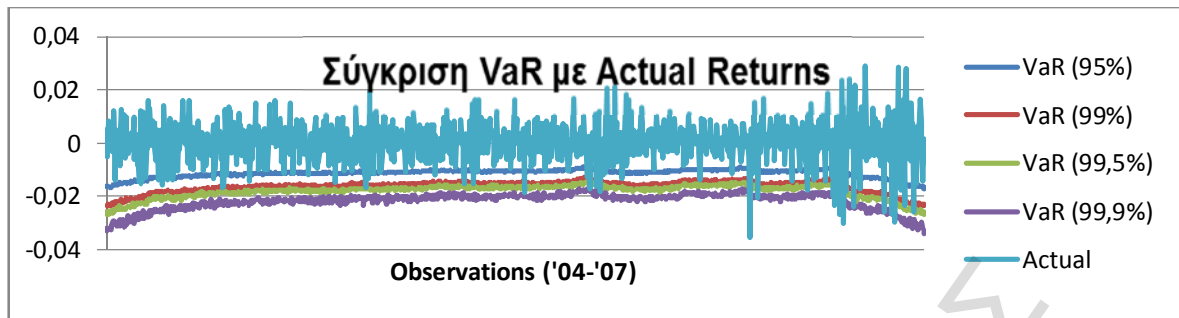
Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε για την παρούσα τεχνική παρατίθεται παρακάτω:

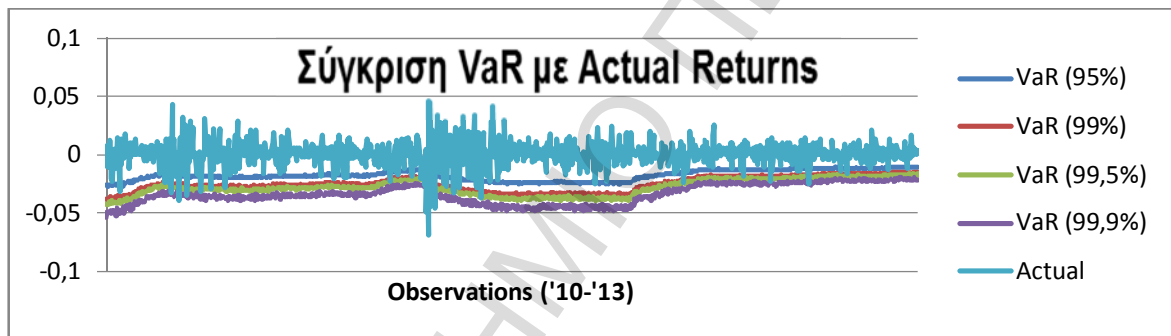
```
function [ Monte_Carlo_Sim ] = VaR_MC_Sim_R( N,Interval,data,T,NRepl,CI)
VaRs=zeros(N-Interval,1);
for i=1:N-Interval
    ret=mean(data(i:i+Interval-1))*T+std(data(i:i+Interval-...
... 1))*randn(NRepl,1)*sqrt(T);
    sorted_ret=sortrows(ret);
    VaRs(i,1)=interp1(sorted_ret,(1-CI)*NRepl);
end
Monte_Carlo_Sim=VaRs;
end
```

Τα αποτελέσματα της εν λόγω τεχνικής εκτίθενται στους παρακάτω πίνακες:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 - '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	63*	$38 \leq N \leq 64$
99%	11*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	7*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	2*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10 - '13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	49*	$38 \leq N \leq 64$
99%	22	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	14	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	9	$0 \leq N \leq 3$



Δεδομένων των εμπειρικών αποτελεσμάτων, παρατηρείται ότι οι προσομοιώσεις Monte Carlo αποδίδουν καλύτερα στην προ κρίσης περίοδο, γεγονός που δεν φαίνεται να ισχύει για την περίοδο που η οικονομία χαρακτηρίζεται από διαταραχές.

Στο σημείο αυτό θα δοκιμασθεί μία παραλλαγή της τεχνικής των Monte Carlo προσομοιώσεων. Σε αυτή την παραλλαγή οι τυχαίοι αριθμοί που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση, δεν θα προέρχονται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, αλλά από μία Student's - t κατανομή με 5 βαθμούς ελευθερίας. Οι Βαθμοί ελευθερίας προσδιορίστηκαν από μία διαδικασία trial and error.

Ακολουθεί ο κώδικας:

```
function [ Monte_Carlo_Sim ] = VaR_MC_Sim_R(...
...N,Interval,data,T,NRepl,CI,df)
    VaRs=zeros(N-Interval,1);
    for i=1:N-Interval
```

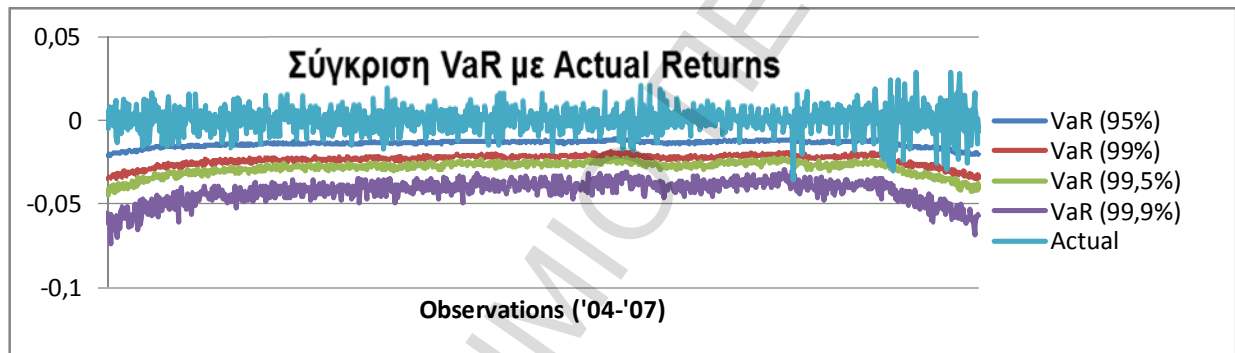
```

ret=mean(data(i:i+Interval-1))*T+std(data(i:i+Interval-...
...1))*trnd(df,NRepl,1)*sqrt(T);
sorted_ret=sortrows(ret);
VaRs(i,1)=interp1(sorted_ret,(1-CI)*NRepl);
end
Monte_Carlo_Sim=VaRs;
end

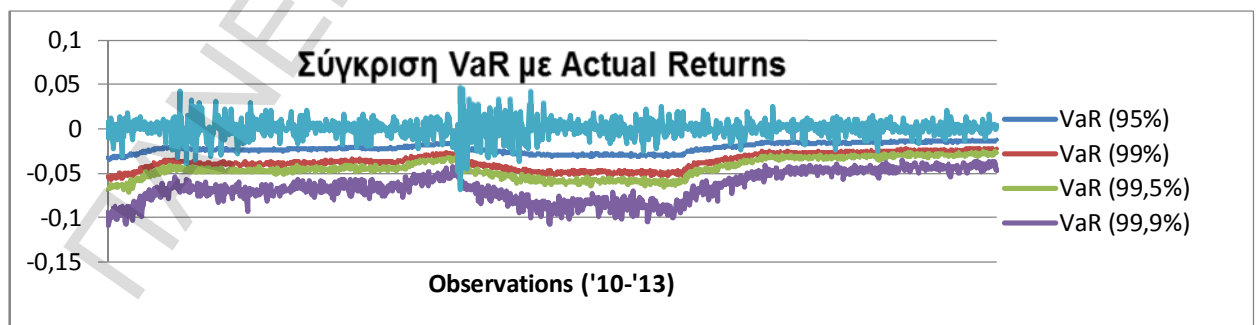
```

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα:

Backtesting Sample Size 1000 ('04 - '07)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	34	$38 \leq N \leq 64$
99%	4	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	3*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Backtesting Sample Size 1000 ('10-'13)		
Confidence Interval	VaR Violations	LR test Critical Values
95%	31	$38 \leq N \leq 64$
99%	5*	$5 \leq N \leq 16$
99,5%	3*	$2 \leq N \leq 9$
99,9%	1*	$0 \leq N \leq 3$



Η τροποποίηση της κατανομής των τυχαίων αριθμών φαίνεται να επέδρασε θετικά στην βελτίωση της αξιοπιστίας της εν λόγω τεχνικής, καθώς σε σχέση με την υπόθεση της κανονικής κατανομής δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

3.3. Συμπεράσματα

Προκειμένου να γίνει σύγκριση μεταξύ των διαφορετικών τεχνικών παρατίθενται οι παρακάτω πίνακες, όπου για την εκάστοτε χρονική περίοδο και διάστημα εμπιστοσύνης υπάρχει μία οριζόντια σύγκριση ως προς την αξιοπιστία μεταξύ των τεχνικών εκτίμησης του VaR. Το σύμβολο ‘*’ υποδηλώνει ότι η τεχνική είναι αξιόπιστη σύμφωνα με το Likelihood Ratio test του Kuripec.

Ξεκινώντας από την τεχνική του παραμετρικού VaR με την υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, παρατηρούμε ότι είναι αξιόπιστη μόνο στην περίοδο εντός της οικονομικής κρίσης και για διάστημα εμπιστοσύνης 95%, αντιθέτως στην προ κρίσης περίοδο η τεχνική αυτή φαίνεται να μην οδηγεί σε αξιόπιστα αποτελέσματα. Συγκρίνοντας την με την παραλλαγή του παραμετρικού VaR που υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν Student’s – t κατανομή, θα λέγαμε ότι η δεύτερη είναι σαφώς καλύτερη καθώς εντός κρίσης είναι αξιόπιστη για όλα τα διαστήματα εμπιστοσύνης και επιπλέον στην προ κρίσης περίοδο είναι αξιόπιστη για τα δύο υψηλότερα διαστήματα εμπιστοσύνης. Η καλύτερη απόδοση της δεύτερης τεχνικής, ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι η κατανομή των αποδόσεων έχει παχύτερες “ουρές”, χαρακτηριστικό το οποίο λαμβάνεται υπόψιν στην εν λόγω περίπτωση. Αξιοσημείωτη είναι η αξιοπιστία της τεχνικής εκτίμησης η οποία υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν Power Exponential Distribution (PED) με παράμετρο $\delta=1$. Παρέχει αξιόπιστες εκτιμήσεις τόσο στην περίοδο προ όσο και εν μέσω κρίσης.

Σχολιάζοντας την επίδοση των τριών παραλλαγών που υποθέτουν σταθερό μέσο και διακύμανση, παρατηρείται ότι η τεχνική που υποθέτει PED είναι η πλέον αξιόπιστη. Η αξιοπιστία αυτή οφείλεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στο χαρακτηριστικό της “ουράς” της PED. Συγκρίνοντας, τις τρεις παραπάνω τεχνικές παρατηρούμε ότι καθώς η κατανομή που υποθέτει η εκάστοτε τεχνική έχει πιο παχιές “ουρές”, τόσο πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις παράγει.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ Πίνακας Στατιστικής Αξιολόγησης VaR Περίοδου '04-'07													
C.I.	Var_Normal	Var_T	Var_PED	Var_GARCH_N	Var_GARCH_T	Var_GARCH_PED	Var_EWMA_N	Var_EWMA_T	Var_EWMA_PED	Var_Tail_Index_Est.	Var_Hist_Sim	Var_MC_Sim_N	Var_MC_Sim_T
95%			*	*		*	*		*	*	*	*	
99%			*	*		*			*	*	*	*	
99,5%		*	*	*		*			*	*	*	*	*
99,9%		*	*	*		*			*	*	NAN	*	*

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ Πίνακας Στατιστικής Αξιολόγησης VaR Περίοδου '10-'13													
C.I.	Var_Normal	Var_T	Var_PED	Var_GARCH_N	Var_GARCH_T	Var_GARCH_PED	Var_EWMA_N	Var_EWMA_T	Var_EWMA_PED	Var_Tail_Index_Est.	Var_Hist_Sim	Var_MC_Sim_N	Var_MC_Sim_T
95%	*	*	*	*		*			*	*	*	*	
99%		*	*			*			*	*	*	*	
99,5%		*	*			*			*	*	*	*	*
99,9%		*				*			*	*	NAN	*	*

Αναφερόμενοι σε τεχνικές οι οποίες υποθέτουν μεταβλητή διακύμανση των αποδόσεων, όπως αποτελεί η εκτίμηση του VaR με την υπόθεση ότι οι αποδόσεις έχουν μέσο μηδέν και διακύμανση η οποία μοντελοποιείται στα πλαίσια ενός GARCH (1,1) μοντέλου ή στα πλαίσια ενός EWMA, παρατηρούμε ότι η τεχνική GARCH - Normal είναι σαφώς πιο αξιόπιστη από την EWMA - Normal. Το συμπέρασμα αυτό, όμως, εξαντλείται στην περίοδο προ κρίσης, αντιθέτως εν μέσω κρίσης η προβλεπτική τους ικανότητα για την χειρότερη πιθανή απώλεια μειώνεται αισθητά. Πιθανόν, όταν στην αγορά δεν επικρατούν “κανονικές” συνθήκες, όπως συμβαίνει σε περιόδους ύφεσης, η πρόβλεψη της μεταβλητότητας των αποδόσεων καθίσταται δυσκολότερη και για αυτόν τον λόγο τόσο το GARCH όσο και το EWMA αποτυγχάνουν να παράγουν αξιόπιστες εκτιμήσεις.

Μη ικανοποιητική είναι και η αξιοπιστία της τεχνικής GARCH – Student’s – t στις δύο περιόδους όπου εφαρμόζεται. Να σημειωθεί ότι η μη καταλληλότητα του εν λόγω υποδείγματος οφείλεται στο γεγονός ότι έχει λιγότερες παραβιάσεις από το κατώτερο όριο που ορίζει το Likelihood Ratio test. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το εν λόγω υπόδειγμα δεν περιγράφει αρκετά καλά τις αποδόσεις του δείκτη και συνεπώς δίνει εκτιμήσεις πολύ μεγαλύτερες από τις πραγματικές. Οικονομικά αυτό σημαίνει ότι εάν ένα Χρηματοπιστωτικό Ίδρυμα καθορίζει τα κεφάλαια, τα οποία θα διακρατά ως ασφάλεια έναντι πιθανών απωλειών της επενδυτικής του θέσης, βασιζόμενο στην εν λόγω τεχνική τότε θα πρέπει να διακρατήσει περισσότερα κεφάλαια ως ασφάλεια χωρίς να υφίσταται πραγματικός λόγος. Αποτέλεσμα αυτού θα είναι η μη αποτελεσματική εκμετάλλευση των κεφαλαίων που κατέχει, το οποίο μεταφράζεται σε απώλεια δυναμικών κερδών.

Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με την τεχνική EWMA – Student’s – t στην περίοδο ’04-’07. Αντιθέτως, στην περίοδο ’10 – ’13 η τεχνική αυτή δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σε όλα τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Αναφορικά με την τεχνική GARCH – PED, παρατηρείται μία ιδιαίτερα ικανοποιητική επίδοση καθώς στις δύο περιόδους και σε όλα τα διαστήματα εμπιστοσύνης αποδίδει αξιόπιστες εκτιμήσεις. Την ίδια αξιοπιστία εμφανίζει και η τεχνική EWMA – PED, αλλά μόνο για την περίοδο ’10 – ’13.

Σχετικά με την τεχνική του Tail Index Estimation, τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από τον έλεγχο αξιοπιστίας είναι θεαματικά. Τόσο σε περίοδο

προ κρίσης και εν μέσω κρίσης, αλλά και για όλα τα διαστήματα εμπιστοσύνης, η εν λόγω τεχνική τείνει να δίνει πάντοτε αξιόπιστες εκτιμήσεις. Ενδεχομένως η καλή αυτή επίδοση να οφείλεται στο γεγονός ότι μέσω της υπόθεσης ότι η “ουρά” της εμπειρικής κατανομής των αποδόσεων προσιδιάζει με αυτή της Pareto κατανομής λαμβάνεται υπόψιν το fat tailness της κατανομής των αποδόσεων.

Εξίσου εντυπωσιακά είναι και τα αποτελέσματα της τεχνικής των Ιστορικών Προσομοιώσεων. Η τεχνική αυτή, όπως και η προηγούμενη, δίνει καθολικά αξιόπιστα αποτελέσματα. Να σημειωθεί ότι η εν λόγω τεχνική δεν μπορεί να δώσει εκτιμήσεις για διάστημα εμπιστοσύνης 99,9% με το δεδομένο δείγμα των 252 παρατηρήσεων, μπορεί όμως για αρκετά μεγαλύτερο δείγμα. Η απαίτηση μεγάλου δείγματος είναι και ένα από τα μειονεκτήματα της.

Τέλος, η μέθοδος των Προσομοιώσεων Monte Carlo με την χρήση τυχαίων αριθμών από την τυποποιημένη κανονική κατανομή είναι αξιόπιστη σε όλα τα διαστήματα εμπιστοσύνης μόνο όμως για την περίοδο, όπου η αγορά δεν χαρακτηρίζεται από αναταραχές. Στην περίοδο της ύφεσης, η ικανότητα να παράγει αξιόπιστες προβλέψεις περιορίζεται μόνο στο διάστημα εμπιστοσύνης του 95%. Αντιθέτως, η παραλλαγή της εν λόγω τεχνικής, στην οποία οι τυχαίοι αριθμοί προέρχονται από Student's – t κατανομή, αποδίδει καλύτερα στην εντός κρίσης περίοδο.

4. Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε και εφαρμόστηκε ένα ευρύ πλήθος τεχνικών εκτίμησης του Value - at - Risk. Από την εφαρμογή τους εξήχθη ένα σύνολο συμπερασμάτων ως προς την καταλληλότητα και την αξιοπιστία της εκάστοτε τεχνικής.

Συνοψίζοντας, στην πρώτη περίοδο, η οποία αναφέρεται στο προ κρίσης διάστημα, οι τεχνικές εκτίμησης του VaR με υπόδειγμα GARCH, Tail Index Estimation, Historical και Monte Carlo Simulation είναι οι πιο αξιόπιστες. Στην δεύτερη περίοδο, όπου η αγορά είναι περισσότερο ευμετάβλητη, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι οι τεχνικές του παραμετρικού VaR με την υπόθεση της Student's - t κατανομής, του Tail Index Estimation και του Historical Simulation είναι οι πλέον αξιόπιστες.

Επιπλέον, μεταξύ των τεχνικών που υποθέτουν σταθερό μέσο και διακύμανση η τεχνική VaR - PED υπερισχύει των άλλων δύο, σε αξιοπιστία στην προ κρίσης περίοδο, ενώ στην εντός κρίσης περίοδο η τεχνική VaR - T είναι περισσότερο αξιόπιστη. Συγκρίνοντας τις τεχνικές που υποθέτουν μέσο μηδέν και μη σταθερή διακύμανση θα λέγαμε ότι στην περίοδο '04 - '07, οι τεχνικές GARCH - normal, GARCH - PED και EWMA - PED είναι οι πλέον αξιόπιστες. Αντίθετα, στην περίοδο '10 - '13, οι τεχνικές GARCH - PED και EWMA - Student's - t υπερισχύουν. Τέλος, μεταξύ των υπολοίπων τεχνικών στην προ κρίσης περίοδο, μόνο η τεχνική προσομοιώσεων Monte Carlo - Student's - t δεν αποδίδει εξίσου καλά με τις υπόλοιπες. Στην εντός κρίσης περίοδο, υπερισχύουν οι τεχνικές Tail Index estimation, Historical simulation και Monte Carlo - Student's - t.

Λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό που τίθεται από το θεσμικό πλαίσιο (Basel Accords) σχετικά με το διάστημα εμπιστοσύνης (99%) εντός του οποίου θα πρέπει να διενεργείται η εκτίμηση του VaR, παρατηρείται ότι οι τεχνικές VaR - PED, GARCH - PED, Tail Index estimation και Historical Simulation παράγουν αξιόπιστες εκτιμήσεις στο εν λόγω διάστημα εμπιστοσύνης και στις δύο χρονικές υποπεριόδους.

Βέβαια, όπως γίνεται αντιληπτό, η εκτίμηση του VaR με την εκάστοτε τεχνική επηρεάζεται σημαντικά και από τα χαρακτηριστικά των αποδόσεων του περιουσιακού στοιχείου για το οποίο κάθε φορά γίνεται εκτίμηση.

Επομένως, τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν παραπάνω, ενδεχομένως να διαφέρουν εάν αλλάξει το υπό εξέταση περιουσιακό στοιχείο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Υποσημειώσεις

1. <http://www.globalresearch.ca/financial-implosion-global-derivatives-market-at-1-200-trillion-dollars-20-times-the-world-economy/30944>.
2. Άλλες εποπτικές αρχές αποτελούν οι SEC (Securities and Exchange Commission, website: <http://www.sec.gov/>), IOSCO (International Organization of Securities Commissions, website: <http://www.iosco.org/>).
3. Οι χώρες οι οποίες συμπεριλαμβάνονται στους G10 είναι: Η.Π.Α., Γερμανία, Ιαπωνία, Γαλλία, Μεγάλη Βρετανία, Καναδάς, Ιταλία, Ολλανδία, Σουηδία & Βέλγιο.
4. Για λεπτομερή ανάλυση βλέπε “INTERNATIONAL CONVERGENCE OF CAPITAL MEASUREMENT AND CAPITAL STANDARDS (July 1988, UPDATED TO April 1998)1” (διαθέσιμο στο <http://www.bis.org/publ/bcbssc111.pdf>)
5. Για λεπτομερή περιγραφή βλέπε “REVISIONS TO THE BASEL I MARKET RISK FRAMEWORK”. (διαθέσιμο στο <http://www.bis.org/publ/bcbs158.pdf>)
6. Πληρέστερη περιγραφή βλέπε “Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks (Updated November 2005)” & Consultative document “Revisions to the Basel II market risk framework (January 2009)”
7. Αρχικά τα ποσοτικά κριτήρια καθορίζονταν από το “Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks” το οποίο αναθεωρήθηκε τον Νοέμβριο του 2005 και παρείχαν μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας.
8. Η τεχνική αυτή αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως ‘Shortfall Risk measure’ (για εκτενή αναφορά βλέπε ‘Shortfall as a risk measure: properties,

optimization and applications των Dimitris Bertsimas, Geoffrey J. Lauprete, Alexander Samarov’).

9. Βέβαια όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο, τότε η Student – t κατανομή προσιδιάζει της κανονικής.
10. Η JP Morgan ανανέωσε την βάση δεδομένων RiskMetrics χρησιμοποιώντας ένα EWMA με παράμετρο $\lambda=0,94$.
11. A function $L: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ is called *slowly varying* (at infinity) if for all $a > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(ar)}{L(r)} = 1$
12. Το Analytical VaR υποθέτει κανονική κατανομή για τις αποδόσεις, ενώ το Historical Simulations VaR κάνει χρήση της εμπειρικής κατανομής των αποδόσεων.

Βιβλιογραφία

John C. Hull, (2009) *OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVES*, Upper Saddle River, New Jersey.

Philippe Jorion, (2007) *Value at Risk: The new Benchmark for Managing Financial Risk (3rd edition)*, Two Penn Plaza, New York.

Joel Bessis, (2002) *RISK MANAGEMENT IN BANKING*, West Sussex, England.

Paolo Brandimarte, (2006) *Numerical Methods in Finance and Economics, A MATLAB-Based Introduction (2nd edition)*, Hoboken, New Jersey.

Rob van den Goorbergh and Peter Vlaar (1999) 'Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?'

RiskMetrics (1996) 'Technical Document'

Mei-Ying Liu, Chi-Yeh Wu and Hsien-Feng Lee (2004) 'VaR Estimation with Power EWMA Model - Conservativeness, Accuracy and Efficiency'

Paul H. Kupiec (1995) 'TECHNIQUES FOR VERIFYING THE ACCURACY OF RISK MEASUREMENT MODELS'

V. Chavez-Demoulin and P. Embrechts (2004) 'Advanced Extremal Models for Operational Risk'

Martin Odening and Jan Hinrichs 'Using Extreme Value Theory to Estimate Value-at-Risk'

Darrell Duffie and Jun Pan (1997) 'An Overview of Value at Risk'

Darryll Hendricks (1996) 'Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data'

Glyn A. Holton (2002) 'History of Value – at - Risk: 1922 - 1998'