

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μελέτη ενός ημι-Μαρκοβιανού μοντέλου για τη διαδικασία πλεονάσματος
ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου**

Νικολέττα - Μαρία Λώλου
(ΜΑΕ10031)

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Αν. Καθηγητής) – Επιβλέπων

Γ. Πιτσέλης (Επ. Καθηγητής)

Γ. Ψαράκος (Λέκτορας)

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

Ιανουάριος 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για τη πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, ώστε να υλοποιήσω αυτήν την εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που βρίσκεται συνεχώς στο πλευρό μου και στηρίζει κάθε επιλογή μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη μελέτη ενός ημι-Μαρκοβιανού μοντέλου για την περιγραφή της διαδικασίας πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου, με μια ενιαία μεθοδολογία. Κάποιες σχετικές τυχαίες μεταβλητές που συνδέονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή η στιγμή που το πλεόνασμα θα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η από κοινού μελέτη των τριών αυτών μεγεθών δίνει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά της διαδικασίας του πλεονάσματος από ότι η μελέτη κάθε μέτρου ξεχωριστά. Οι Gerber και Shiu ανέλυσαν ταυτόχρονα τη συμπεριφορά των παραπάνω χαρακτηριστικών μέσω της κλασικής πλέον αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu. Η εργασία έχει την ακόλουθη δομή.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος στο οποίο δίνονται οι βασικές έννοιες της εργασίας. Αρχικά, δίνεται μια σύντομη περιγραφή της διαδικασίας πλεονάσματος. Στην συνέχεια, ορίζεται το γενικό ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο και οι διάφορες εμπλεκόμενες μεταβλητές και παραμέτροί του. Τέλος, δίνεται η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και κάποιες σημαντικές περιπτώσεις της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δείχνεται ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και αναλύεται μέσω μετασχηματισμών Laplace. Επίσης δίνονται με ενιαίο τρόπο αποτελέσματα για τα διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, καθώς και η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης ποινής για κατανομές του μεγέθους ζημιάς με ελαφριά ουρά.

Τα επόμενα κεφάλαια αναλύουν επιμέρους περιπτώσεις που περιλαμβάνονται στο γενικό μοντέλο.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξειδικεύονται τα αποτελέσματα του δεύτερου κεφαλαίου για το κλασικό μοντέλο σύνθετης Poisson της θεωρίας κινδύνων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται η ειδική περίπτωση για το ανανεωτικό Sparre Andersen μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης κινδύνων να ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang κατανομή δύο σταδίων.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται σε μια άλλη ειδική περίπτωση του ανανεωτικού Sparre Andersen μοντέλου με τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης κινδύνων να ακολουθούν phase-type κατανομή δύο φάσεων.

Το έκτο κεφάλαιο εστιάζει σε μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα θεωρείται η περίπτωση όπου οι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων εξαρτώνται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης. Η εξάρτηση αυτού του είδους επίσης

περιλαμβάνεται και αναλύεται από το προτεινόμενο γενικό μοντέλο. Ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας.

Τέλος, στο παράρτημα παρατίθενται ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace για συναρτήσεις και κατανομές πιθανοτήτων, και οι σχετικές ιδιότητές του που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ABSTRACT

This thesis deals with the study of a semi - Markov model for the surplus process of a portfolio under a unified methodology. Some relevant random variables associated with the ruin probability are the *time of ruin*, that is, the time that the surplus will first get a negative value, the *surplus just before ruin* and the *deficit at ruin*. The joint study of these three characteristics gives more information about the behavior of the surplus process than studying each one separately. Gerber and Shiu analyzed simultaneously the behavior of the above-mentioned measures through a particular by now classical *discounted penalty function at ruin*. The thesis has the following structure.

The first chapter is an introductory section regarding the basic notions of the thesis. First, a general description of the surplus process is given. Second, the general semi-Markov model and its involved parameters and variables are defined. Finally, the expected discounted penalty function of the Gerber-Shiu and several of its cases are also provided.

The second chapter displays that the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu satisfies an integro-differential equation which can be approached by means of Laplace transforms. Results for various ruin measures are provided and also the asymptotic behavior of the penalty function for light-tailed claim size is discussed.

The following chapters discuss several cases included in the general model.

In chapter three, the results obtained by the analysis performed in chapter two are specified for the *classical compound Poisson* risk model.

In the fourth chapter, the case of Sparre Andersen renewal risk model with *generalized two-stage Erlang* distributed interclaim time is analyzed.

Chapter fifth considers another special case of Sparre Andersen renewal model, the one which intermediate risk occurrence times follow phase-type distribution with two phases.

Chapter six focuses on a certain generalization of the classical run model, where the distribution of the time between two claim occurrences depends on the previous claim size. This *dependence* case is also contained in the studied model and is analyzed by the proposed unified framework. A numerical example is given to clarify the proposed methodology.

Finally, the appendix provides the definition of *Laplace transform* for a given function and a distribution, and lists its relevant properties used in this study.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	5
1.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.....	6
1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu.....	11
2. ΤΟ ΗΜΙ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	15
2.1 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση της $m_{\delta}(u)$	17
2.2 Επίλυση των $m_{\delta,i}(u)$ για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο ($u = 0$).....	21
2.3 Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T^-)$ και $ U(T) $ και οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις αυτών, όταν $u = 0$	29
2.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά.....	32
2.5 Ροπές των τριών τυχαίων μεταβλητών της συνάρτησης των Gerber – Shiu	34
2.5.1 Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, T	34
2.5.2 Ροπές του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, $U(T^-)$	36
2.5.3 Ροπές του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $ U(T) $	39
3. ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ.....	42
4. ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥΣ ERLANG (2) ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ.....	60
4.1 Η Γενικευμένη Erlang κατανομή.....	60
4.2 Το γενικό μοντέλο στην περίπτωση της γενικευμένης Erlang(2) κατανομής.....	62
5. ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ	79
5.1 Phase-type κατανομές.....	79
5.2 Το γενικό μοντέλο με phase-type κατανομές.....	83
6. ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΖΗΜΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΤΟΥΣ.....	94
6.1 Το μοντέλο.....	94
6.1.1 Σύγκριση με το μοντέλο χωρίς εξάρτηση.....	107
6.2 Αριθμητική εφαρμογή	107
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ	124
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	125
Α. Μετασχηματισμός Laplace.....	125
Β. Μετασχηματισμός Laplace και πιθανότητες.....	127
Γ. Τελεστής Dickson-Hipp.....	128
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	129

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αποτελεσματική λειτουργία μίας ασφαλιστικής επιχείρησης κατά κύριο λόγο εξαρτάται από τη δημιουργία ικανών (επαρκών) αποθεματικών κεφαλαίων, έτσι ώστε να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις της τόσο έναντι των ασφαλισμένων (ασφαλιστικά ρίσκα) όσο και έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) καθώς επίσης και για την κάλυψη διαφόρων λειτουργικών εξόδων. Τα αποθεματικά κεφάλαια στην ασφαλιστική ορολογία χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα και αποτελούν τη διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική αποτίμηση των υποχρεώσεων – αποζημιώσεων της.

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της κλασικής θεωρίας κινδύνου είναι η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας μη επάρκειας των αποθεματικών για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων έναντι των ασφαλισμένων. Τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας των κινδύνων ετέθησαν μετά τη δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του Σουηδού μαθηματικού Filip Lundberg το 1903 με τίτλο “Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen”. Αργότερα ο Harald Cramér (1930) βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg δημοσίευσε μία σειρά από εργασίες που αναφέρονταν στη θεωρία κινδύνου και στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών ή στοχαστικών ανελιξέων. Έτσι, με βάση αυτές τις εργασίες το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο ονομάστηκε κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér –Lundberg. Αυτό το μοντέλο αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της κλασικής θεωρίας κινδύνου. Μία βασική παραδοχή αυτού του μοντέλου είναι ότι ο αριθμός (πλήθος) των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου για το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ή και ολόκληρης της ασφαλιστικής επιχείρησης έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίαζε στο 15^ο Αναλογιστικό Συνέδριο στη Νέα

Υόρκη, την εργασία με τίτλο “On the collective theory of risk in case of contagion between the claims”. Σε αυτήν την εργασία ο Sparre Andersen υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου Sparre Andersen είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (που δεν ακολουθούν κατ’ ανάγκη την εκθετική κατανομή). Έτσι, είναι προφανές ότι αυτό το μοντέλο αποτελεί μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου και ονομάστηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Μία ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου είναι να θεωρήσει κανείς ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν μία Erlang κατανομή (που αποτελεί γενίκευση της εκθετικής κατανομής). Το εν λόγω μοντέλο έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από αρκετούς ερευνητές, και ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, έχουν μελετηθεί διάφορα ανανεωτικά μοντέλα στη θεωρία κινδύνου. Μεταξύ άλλων, οι αναφορές περιλαμβάνουν τις εργασίες των Dickson and Hipp (2001a, 2001b), Cheng and Tang (2003), Gerber and Shiu (2003a, 2003b), Li (2003), Lin (2003), Li and Garrido (2004), Sun (2004), Gerber and Shiu (2005), Li and Garrido (2005), Schmidli (2005), Albrecher (2005), Tsai (2005), Li (2005), Ng (2005), Yin and Chiu (2005), Ko (2007), Ren (2007), Willmot (2007), Landriault et al. (2008), Li (2008), Song et al. (2010).

Η κύρια διαφορά μεταξύ των διαφόρων ανανεωτικών μοντέλων της θεωρίας κινδύνου αφορά στην κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων. Επειδή μία στοχαστική ανανεωτική διαδικασία ορίζεται από τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων, είναι φανερό ότι τα διάφορα μοντέλα που εισήχθησαν για την μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος εξαρτώνται άμεσα από τη στοχαστική διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του πλήθους των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

1.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Το πιο σημαντικό βήμα για την μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής επιχείρησης αποτελεί ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων που εμφανίζονται.

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστάνει τον αριθμό των κινδύνων που εμφανίστηκαν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Η $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται *απαριθμήτρια* και ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.1

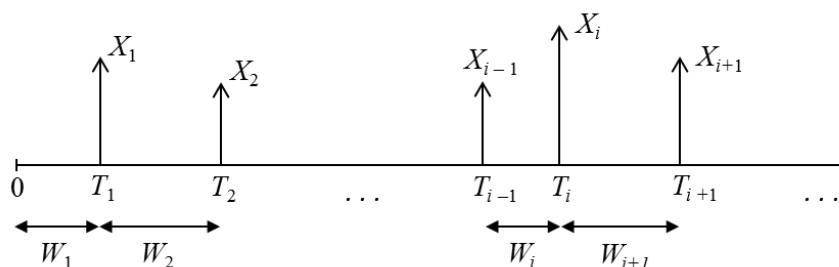
Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται *απαριθμήτρια διαδικασία* αν και μόνο αν

- i. $N(t) > 0$, με $N(0) = 0$,
- ii. $N(t)$ είναι διακριτή,
- iii. αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$.

Μία από τις πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενες απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες, τόσο στη θεωρία κινδύνου όσο και σε άλλα ερευνητικά πεδία της θεωρίας πιθανοτήτων (π.χ. θεωρία ουρών), είναι οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες. Ένας τρόπος ορισμού τους, βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους των ενδεχομένων (κινδύνων) που απαριθμεί η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$.

Έστω $\{T_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$, όπου $T_i, i \geq 1$ συμβολίζει την χρονική στιγμή εμφάνισης του i -οστού ενδεχομένου (κινδύνου). Έστω, τώρα, οι τυχαίες μεταβλητές $W_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$. Τότε η W_1 εκφράζει τον χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου ενδεχομένου και η $W_i, i \geq 2$, εκφράζει τον χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ ενδεχομένου μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου, δηλαδή, $\{W_i, i = 1, 2, \dots\}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παριστά τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων. Αν $W_0 = 0$, τότε $T_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n, n \geq 0$ και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n, n = 0, 1, \dots\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε, η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

Σχηματικά έχουμε,



Σχήμα 1.1: Χρόνοι άφιξης απαιτήσεων, μεγέθη απαιτήσεων, ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

Ορισμός 1.2

Έστω $\{W_i, i=1,2,\dots\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και $\{T_i, i=1,2,\dots\}$ μία ακολουθία ανανεώσεων με $T_i = W_1 + W_2 + \dots + W_i, i \geq 1$ και $T_0 = W_0 = 0$. Τότε, η απαριθμητρία διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με $N(0)$ που ορίζεται από την σχέση
$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}(T_n \leq t)$$
 ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο $[0, t]$.

Από τον ορισμό 1.2 είναι προφανές ότι για κάθε ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ισχύει ότι:

$$\{N(t) = n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Επίσης, είναι φανερό ότι $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ και $P[N(t) \geq n] = P(T_n \leq t)$. Μία σημαντική ιδιότητα των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών αποτελεί και το παρακάτω πολύ γνωστό θεώρημα.

Θεώρημα 1.1

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε:

i. με πιθανότητα 1 ισχύει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)},$$

ii.
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

Το αποτέλεσμα (ii) στο παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (elementary renewal theory) και για την απόδειξη βλ., Rolski et al. (1996, σελ. 211).

Από τον ορισμό 1.2 έπεται ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson είναι μία ειδική περίπτωση μίας ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, αν θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων (κινδύνων) $\{W_i, i=1,2,\dots\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Αφού έχουμε μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, στην συνέχεια και για τον καθορισμό του πλεονάσματος, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε τις συνολικές απαιτήσεις (ζημιές, αποζημιώσεις) του χαρτοφυλακίου. Έστω, $\{ X_i, i=1,2,\dots \}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών όπου η X_i παριστά το μέγεθος της ζημιάς από την εμφάνιση του i -οστού κινδύνου και $S(t), t \geq 0$, παριστά τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.3

Έστω $N(t), t \geq 0$ ο αριθμός των κινδύνων στο $[0, t]$, και $X_i, i \geq 1$ το μέγεθος της i -οστής ζημιάς. Τότε, οι συνολικές απαιτήσεις στο $[0, t]$ παριστάνονται από τη σύνθετη στοχαστική διαδικασία $\{S(t), t \geq 0\}$, όπου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}$$

Στην κλασσική θεωρία κινδύνου οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες, καθώς επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές θεωρούνται οι X_i και η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $N(t), t \geq 0$, που παριστά τον αριθμό των κινδύνων μέχρι την χρονική στιγμή t .

Έστω $P(t)$ μία συνάρτηση που εκφράζει τα συνολικά έσοδα της ασφαλιστικής επιχείρησης από την είσπραξη των ασφαλιστρών στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Η $P(t)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t . Στην κλασσική θεωρία κινδύνου θεωρούμε σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλιστρών, οπότε η $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση της μορφής $P(t) = ct$, όπου $c > 0$ είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρου ανά μονάδα χρόνου (ένταση ασφαλιστρου).

Έστω τώρα $U(t), t \geq 0$, παριστά το πλεόνασμα της ασφαλιστικής επιχείρησης μέχρι την χρονική στιγμή t που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.4

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως

$$U(t) = u + P(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

όπου $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό απόθεμα, $c \geq 0$ ο ρυθμός εισπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου, $S(t)$ οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ όπως δίνονται στον Ορισμό 1.3.

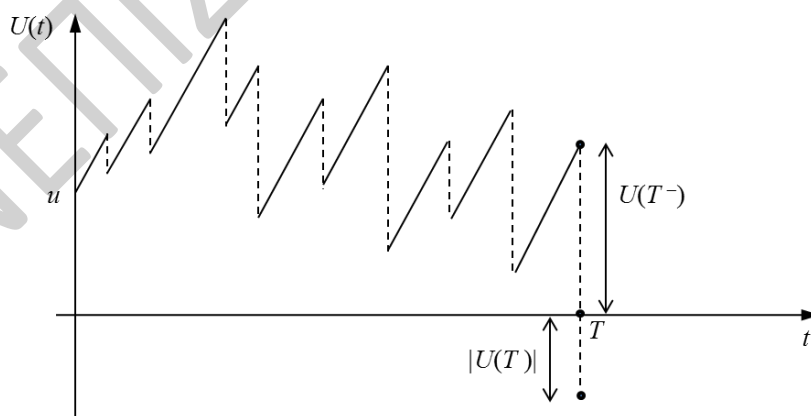
Από τον Ορισμό 1.4 είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, τότε έχουμε χρεοκοπία και προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα δώσουμε αρχικά τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.5

Η χρονική στιγμή T κατά την οποία για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από την σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\}, \\ \infty, \text{ αν } U(t) \geq 0 \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παρασταθεί και με το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.2: Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

όπου T είναι χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας, η τυχαία μεταβλητή $U(T^-)$ δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν πληρωθεί από την ασφαλιστική εταιρεία η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία, $U(T)$ είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Η ποσότητα $U(T^-)$ παίρνει θετικές τιμές, ενώ η ποσότητα $U(T)$ αρνητικές τιμές, οπότε ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $|U(T)|$ που δηλώνει τη σφροφρότητα ή δριμύτητα της χρεοκοπίας δηλαδή το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.6

Για αρχικό απόθεμα $u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από την σχέση

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u).$$

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία, ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ή πιθανότητα επιβίωσης, συμβολίζεται με $\phi(u)$ και δίνεται από την σχέση

$$\phi(u) = 1 - \psi(u).$$

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Ο χρόνος χρεοκοπίας T , το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U(T^-)$ και η σφροφρότητα της χρεοκοπίας $|U(T)|$ δίνουν πλήρη εικόνα των οικονομικών συνθηκών κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Οι Gerber και Shiu (1998) μοντελοποίησαν τις τρεις αυτές τυχαίες μεταβλητές σε μία συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) ή συνάρτηση των Gerber – Shiu, η οποία ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.7

Για $u \geq 0$, $\delta \geq 0$, ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

$$m_\delta(u) := E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) | (T < \infty | U(0) = u)],$$

όπου δ είναι ένταση ανατοκισμού (παράγοντας προεξόφλησης-discounted factor) ή η παράμετρος s του μετασχηματισμού Laplace, $w(x_1, x_2)$ είναι μια συνάρτηση ποινής (penalty function), με $0 \leq w(x_1, x_2) < \infty$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, T είναι χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το

αρχικό κεφάλαιο είναι u , $U(T^-)$ είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$ είναι η σφροφρότητα (δριμύτητα) χρεοκοπίας που ισούται με το έλλειμμα στο ταμείο κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και I είναι δείκτηρια συνάρτηση η οποία τονίζει ότι η ποινή ασκείται εάν και εφόσον τελικά συμβεί χρεοκοπία όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεγέθους u .

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής $w(x_1, x_2)$ προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω:

- i. Για $w(x_1, x_2) = 1$ και $\delta > 0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν εμφανίζεται χρεοκοπία,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty | U(0) = u)].$$

- ii. Για $w(x_1, x_2) = 1$ και $\delta = 0$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(T < \infty | U(0) = u)] = P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u).$$

- iii. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)I(x_2 \leq y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq y_1) I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_1, y_2 | u).$$

- iv. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)I(x_2 \leq y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) \leq y_1) I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] \\ &= P(U(T^-) \leq y_1, |U(T)| \leq y_2, T < \infty | U(0) = u) = F_0(y_1, y_2 | u). \end{aligned}$$

Η $F_0(y_1, y_2 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1 , ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2 .

- v. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2 = y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) = y_1) I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_1, y_2 | u).$$

- vi. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2 = y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = y_1)I(|U(T)| = y_2)I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_1, y_2 | u).$$

- vii. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(x) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_1 | u).$$

- viii. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) \leq y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] \\ &= P(U(T^-) \leq y_1, T < \infty | U(0) = u) = F_0(y_1 | u). \end{aligned}$$

Η $F_0(y_1 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1 .

- ix. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_1 | u).$$

- x. Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_1 | u).$$

- xi. Για $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_2 | u).$$

- xii. Για $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] \\ &= P(|U(T)| \leq y_2, T < \infty | U(0) = u) = F_0(y_2 | u). \end{aligned}$$

Η $F_0(y_2 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το ύψος ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2 .

xiii. Για $w(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_2 | u).$$

xiv. Για $w(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_2 | u).$$

xv. Για $w(x_1, x_2) = x_1^k$ ή $w(x_1, x_2) = x_2^k$ και $\delta = 0$, προκύπτει η ροπή k -τάξης του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία ή του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία αντίστοιχα, δηλαδή

$$m_0(u) = E[U(T^-)^k I(T < \infty | U(0) = u)],$$

ή

$$m_0(u) = E[|U(T)|^k I(T < \infty | U(0) = u)]$$

αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΗΜΙ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται ένα μοντέλο βασιζόμενο σε ημι-Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες. Αρχικά αναφέρονται οι σχετικές εμπλεκόμενες έννοιες.

Η ανέλιξη πλεονάσματος $U(t)$ είναι συνεχούς χρόνου. Παρατηρώντας τη διαδικασία τις χρονικές στιγμές άφιξης μιας απαίτησης ($T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$) προκύπτει μια εμφυτευμένη (empdedded) διαδικασία διακριτού χρόνου.

Έστω $\{Z_n, n \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\{1, \dots, M\}$. Η $\{Z_n, n \geq 0\}$ θα λέγεται *αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου* (Discrete Time Markov Chain – DTMC) ή απλά *αλυσίδα Markov*, εάν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$P(Z_n = z_n | Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_{n-2} = z_{n-2}, \dots, Z_0 = z_0) = P(Z_n = z_n | Z_{n-1} = z_{n-1}).$$

Μια αλυσίδα Markov θα λέγεται *χρονικά ομογενής* εάν η πιθανότητα $p_{ij} = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i)$ είναι ανεξάρτητη του n . Δηλαδή η αλυσίδα Markov μεταβαίνει από μία κατάσταση i σε μια κατάσταση j , με πιθανότητα μετάβασης ανεξάρτητη του χρόνου που γίνεται η μετάβαση.

Μια αλυσίδα Markov χαρακτηρίζεται από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, που συμβολίζεται με \mathbf{P} , του οποίου το (i, j) στοιχείο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα p_{ij} .

Έστω $p_{ij}^n = P(Z_{k+n} = j | Z_k = i)$ η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε n βήματα. Τότε

1. Η κατάσταση j λέγεται *προσβάσιμη* (reachable) από την κατάσταση i , εάν υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^n > 0$.
2. Μια αλυσίδα Markov λέγεται *μη απλοποιήσιμη* (irreducible) εάν οποιαδήποτε κατάσταση i είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση j .

Έστω μια μη απλοποιήσιμη αλυσίδα Markov M καταστάσεων. Η διαδικασία καλείται *ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία* (semi-Markov process) εάν επιπλέον θεωρήσουμε ότι κάθε φορά που μεταβαίνει σε μια κατάσταση i παραμένει εκεί για ένα τυχαίο χρόνο με μέσο μ_i και στη συνέχεια μεταπηδά σε μια κατάσταση j με πιθανότητα p_{ij} . Στην περίπτωση που ο χρόνος

παραμονής σε μια κατάσταση πριν η διαδικασία μεταβεί σε μια άλλη, είναι 1 (μία χρονική μονάδα), τότε η ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία είναι απλά μια αλυσίδα Markov.

Στην εργασία αυτή θεωρούμε μια ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία με εξαρτήσεις της μορφής:

$$P(W_{n+1} \leq x, X_{n+1} \leq y, Z_{n+1} = j \mid Z_n = i, (W_r, X_r, Z_r), 0 \leq r \leq n) = \\ = P(W_1 \leq x, X_1 \leq y, Z_1 = j \mid Z_0 = i) = (1 - e^{-\lambda_j x}) p_{ij} B_j(y),$$

όπου $\{Z_n, n \geq 0\}$ είναι μια μη απλοποιήσιμη αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\{1, \dots, M\}$, πίνακα μετάβασης $\mathbf{P} = ((p_{ij}), 1 \leq i, j \leq M)$. Σε κάθε στιγμή άφιξης μιας απαίτησης η αλυσίδα μεταπηδά σε μια κατάσταση j όπου η κατανομή της απαίτησης B_j εξαρτάται από την κατάσταση j . Ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την άφιξη της επόμενης απαίτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λ_j .

Παρατηρούμε ότι, δοθέντος των καταστάσεων Z_{n-1} και Z_n , οι ποσότητες $W_n = T_n - T_{n-1}$ και X_n είναι ανεξάρτητες, αλλά υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ διαδοχικών μεγεθών ζημιών και μεταξύ διαδοχικών ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων καθώς επίσης και συσχέτιση μεταξύ των W_n και X_n .

Το εξεταζόμενο μοντέλο στην εργασία αυτή είναι ένα γενικό μοντέλο και περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις τα παρακάτω μοντέλα της θεωρίας κινδύνου:

- α) Το κλασικό μοντέλο κινδύνου της σύνθετης Poisson, αν θέσουμε $M = 1$. Αυτό είναι το αντικείμενο του κεφαλαίου 3.
- β) Το μοντέλο Sparre Andersen θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ αφίξεων διαδοχικών κινδύνων ακολουθεί την γενικευμένη Erlang(n) κατανομή, αν θέσουμε $M = n$. Στο κεφάλαιο 4 εξετάζεται αυτή η περίπτωση και συγκεκριμένα για $n = 2$.
- γ) Το μοντέλο Sparre Andersen θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης κινδύνων ακολουθούν μια phase-type κατανομή δύο φάσεων. Αυτό αποτελεί αντικείμενο του κεφαλαίου 5.
- δ) Την περίπτωση όπου υπάρχει μια ορισμένου τύπου εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών των κινδύνων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης αυτών. Συγκεκριμένα θεωρούμε την περίπτωση στην οποία η κατανομή του χρόνου W_i εξαρτάται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης. Συγκεκριμένα, εάν η απαίτηση X_{i-1} ξεπεράσει κάποιο κατώφλι K_i (που μπορεί να είναι κάποια σταθερή τιμή ή και τυχαία μεταβλητή), τότε ο χρόνος W_i είναι

εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό λ_1 , ενώ σε αντίθετη περίπτωση είναι εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό λ_2 . Η περίπτωση αυτή εξετάζεται στο κεφάλαιο 6.

Έστω $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M)$ το διάνυσμα της στάσιμης (stationary) κατανομής της διαδικασίας $\{Z_n\}$. Έστω, $\mu_i^{(j)}$ συμβολίζει την ροπή της τάξεως j της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής B_i (δοθέντος ότι υπάρχει) και επιπλέον $\mu_i = \mu_i^{(1)}$. Στη συνέχεια, θα θεωρούμε πάντοτε ότι ισχύει η παρακάτω συνθήκη (net profit condition)

$$\sum_{i=1}^M \pi_i \mu_i < c \sum_{i=1}^M \frac{\pi_i}{\lambda_i},$$

η οποία εξασφαλίζει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μικρότερη της μονάδας, δηλαδή ότι $\psi(u) < 1$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε διάφορες χαρακτηριστικές ποσότητες της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος (1.1) κάτω από την μορφή της ημι – Μαρκοβιανής εξάρτησης που περιγράψαμε παραπάνω. Προς τούτο θα μελετήσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $m_\delta(u)$ των Gerber – Shiu.

Έστω, $m_{\delta,i}(u)$ παριστά την συνάρτηση των Gerber – Shiu δοθέντος ότι $Z_0 = i$, $i = 1, 2, \dots, M$ επειδή τότε προφανώς ισχύει ότι

$$m_\delta(u) = \sum_{i=1}^M \pi_i m_{\delta,i}(u),$$

έπεται ότι για την μελέτη της $m_\delta(u)$ είναι αρκετό να μελετήσουμε τις συναρτήσεις $m_{\delta,i}(u)$, $i = 1, 2, \dots, M$.

2.1 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση της $m_\delta(u)$

Αρχικά, θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $m_{\delta,i}(u)$ των Gerber – Shiu ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων. Έτσι, έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1

Η $m_{\delta,i}(u)$, ($i = 1, \dots, M$) ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$c \frac{d m_{\delta,i}(u)}{du} - (\lambda_i + \delta) m_{\delta,i}(u) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^u m_{\delta,j}(u-y) b_j(y) dy + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_u^\infty w(u, y-u) b_j(y) dy = 0. \quad (2.1.1)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα $(0, dt)$. Τότε, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και ως προς το μέγεθος της πρώτης απαίτησης στο εν λόγω διάστημα παίρνουμε,

$$m_{\delta,i}(u) = (1 - \lambda_i dt) e^{-\delta dt} m_{\delta,i}(u + cdt) + \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^{u+cdt} e^{-\delta dt} m_{\delta,j}(u + cdt - y) b_j(y) dy \\ + \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} e^{-\delta dt} w(u + cdt, y - u - cdt) b_j(y) dy + o(dt) \quad (i = 1, \dots, M) \quad (2.1.2)$$

από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor έχουμε $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$ οπότε παίρνουμε:

$$(1 - \lambda_i dt) e^{-\delta dt} = (1 - \lambda_i dt)[1 - \delta dt + o(dt)] \\ = 1 - \delta dt - \lambda_i dt + \delta \lambda_i (dt)^2 + o(dt) \\ = 1 - \delta dt - \lambda_i dt + o(dt) \quad (\text{αφού } (dt)^n = 0, \forall n \geq 2) \\ = 1 - (\delta + \lambda_i)dt + o(dt),$$

και

$$\lambda_i dt e^{-\delta dt} = \lambda_i dt [1 - \delta dt + o(dt)] = \lambda_i dt - \delta \lambda_i (dt)^2 + o(dt) = \lambda_i dt + o(dt).$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (2.1.2) προκύπτει ότι

$$m_{\delta,i}(u) = [1 - (\delta + \lambda_i)dt] m_{\delta,i}(u + cdt) + \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^{u+cdt} m_{\delta,j}(u + cdt - y) b_j(y) dy \\ + \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, y - u - cdt) b_j(y) dy + o(dt), \quad (i = 1, \dots, M)$$

ή ισοδύναμα

$$m_{\delta,i}(u + cdt) - m_{\delta,i}(u) = (\delta + \lambda_i)dt m_{\delta,i}(u + cdt) - \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^{u+cdt} m_{\delta,j}(u + cdt - y) b_j(y) dy \\ - \lambda_i dt \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, y - u - cdt) b_j(y) dy + o(dt). \quad (i = 1, \dots, M)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με dt έχουμε

$$c \frac{m_{\delta,i}(u + cdt) - m_{\delta,i}(u)}{cdt} = (\delta + \lambda_i) m_{\delta,i}(u + cdt) - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^{u+cdt} m_{\delta,j}(u + cdt - y) b_j(y) dy \\ - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, y - u - cdt) b_j(y) dy + \frac{o(dt)}{dt}, \quad (i = 1, \dots, M)$$

οπότε παίρνοντας και στα δύο μέλη της ισότητας το όριο καθώς $dt \rightarrow 0$ και επειδή

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0, \text{ προκύπτει}$$

$$c \frac{dm_{\delta,i}(u)}{du} = (\delta + \lambda_i) m_{\delta,i}(u) - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^u m_{\delta,j}(u-y) b_j(y) dy - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_u^\infty w(u, y-u) b_j(y) dy, \quad (i = 1, \dots, M)$$

από την οποία προκύπτει η ζητούμενη σχέση (2.1.1). \square

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace καθώς αυτός αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο ιδιαίτερα χρήσιμο στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων.

Αρχικά ορίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των ποσοτήτων που εμπλέκονται στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση για $\text{Re}(s) \geq 0$:

$$\bullet \hat{m}_{\delta,i}(s) = L\{m_{\delta,i}(u)\} := \int_0^\infty e^{-su} m_{\delta,i}(u) du, \quad i = 1, \dots, M$$

$$\bullet \hat{b}_i(s) = L\{b_i(x)\} := \int_0^\infty e^{-sx} b_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, M$$

$$\bullet \hat{w}_i(s) = L\left\{ \int_u^\infty w(u, y-u) b_i(y) dy \right\} := \int_0^\infty e^{-su} \int_u^\infty w(u, y-u) b_i(y) dy du, \quad i = 1, \dots, M$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (2.1.1) έχουμε

$$L\left\{ c \frac{dm_{\delta,i}(u)}{du} - (\lambda_i + \delta) m_{\delta,i}(u) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_0^u m_{\delta,j}(u-y) b_j(y) dy + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_u^\infty w(u, y-u) b_j(y) dy \right\} = L\{0\},$$

και από την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει

$$cL\left\{ \frac{dm_{\delta,i}(u)}{du} \right\} - (\lambda_i + \delta)L\{m_{\delta,i}(u)\} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} L\left\{ \int_0^u m_{\delta,j}(u-y) b_j(y) dy \right\} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} L\left\{ \int_u^\infty w(u, y-u) b_j(y) dy \right\} = 0.$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός Laplace αφορά σε παράγωγο και ο τρίτος σε συνέλιξη, οπότε

$$c[s \hat{m}_{\delta,i}(s) - m_{\delta,i}(0)] - (\lambda_i + \delta) \hat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{m}_{\delta,j}(s) \hat{b}_j(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{w}_j(s) = 0,$$

ή

$$[(cs - \delta) - \lambda_i] \hat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \hat{m}_{\delta,j}(s) = c \hat{m}_{\delta,i}(0) - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{w}_j(s), \quad i = 1, \dots, M \quad (2.1.3)$$

Η τελευταία σχέση σε διανυσματική μορφή γράφεται

$$[(cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s)] \vec{\hat{m}}_{\delta}(s) = c \vec{\hat{m}}_{\delta}(0) - \mathbf{\Lambda P} \vec{\hat{w}}(s) \quad (2.1.4)$$

όπου οι σχετικοί πίνακες και διανύσματα, αναφορικά με το μοντέλο των M καταστάσεων που εξετάζουμε, είναι

$$\vec{\hat{m}}_{\delta}(s) = \begin{pmatrix} \hat{m}_{\delta,1}(s) \\ \hat{m}_{\delta,2}(s) \\ \vdots \\ \hat{m}_{\delta,M}(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{\hat{m}}_{\delta}(0) = \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \\ \vdots \\ m_{\delta,M}(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{\hat{w}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s) \\ \hat{w}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{w}_M(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\hat{B}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{b}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{b}_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{b}_M(s) \end{pmatrix}.$$

Ορίζοντας,

$$\mathbf{A}_{\delta}(s) := (cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s) \quad (2.1.5)$$

η (2.1.4) σε διανυσματική μορφή γράφεται ως

$$\mathbf{A}_{\delta}(s) \vec{\hat{m}}_{\delta}(s) = c \vec{\hat{m}}_{\delta}(0) - \mathbf{\Lambda P} \vec{\hat{w}}(s). \quad (2.1.6)$$

Από την (2.1.6) έπεται ότι οι συναρτήσεις $\hat{m}_{\delta,i}(s)$ ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο πρέπει να λύσουμε. Είναι προφανές πάλι από την (2.1.6) ότι πρώτα πρέπει να βρεθούν οι ποσότητες $m_{\delta,i}(0)$, $i = 1, \dots, M$. Προς τούτο θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2

Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία καλείται γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

$$\det(\mathbf{A}_{\delta}(s)) = 0 \quad \text{ή} \quad \det[(cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s)] = 0. \quad (2.1.7)$$

(i) Εάν $\delta = 0$, η εξίσωση $\det(\mathbf{A}_0(s)) = 0$ έχει μία ρίζα $s_1 = 0$, και $M - 1$ ρίζες s_2, \dots, s_M με $\text{Re}(s_i) > 0$.

(ii) Εάν $\delta > 0$, η εξίσωση $\det(\mathbf{A}_{\delta}(s)) = 0$ έχει M ρίζες s_1, \dots, s_M με $\text{Re}(s_i) > 0$.

Οι ρίζες s_i της εξίσωσης $\det(\mathbf{A}_0(s)) = 0$ με $Re(s_i) < 0$ προσδιορίζουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $m_\delta(u)$, ενώ οι ρίζες με $Re(s_i) > 0$ προσδιορίζουν τις σταθερές στην ακριβή έκφραση της $m_\delta(u)$.

Στη συνέχεια ενδιαφερόμαστε για τις λύσεις της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποιής όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν, δηλαδή, αναζητάμε τις ποσότητες $m_{\delta,i}(0)$, που αποτελεί το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

2.2 Επίλυση των $m_{\delta,i}(u)$ για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο ($u = 0$)

Η επόμενη πρόταση (2.3) αναφέρει τη μεθοδολογία εύρεσης των ποσοτήτων $m_{\delta,i}(0)$, ενώ η πρόταση (2.4) δίνει την ακριβή έκφραση της λύσης των.

Πρόταση 2.3

Για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, $u = 0$, οι λύσεις $m_{\delta,i}(0)$, $i = 1, \dots, M$, δίνονται από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$[c\bar{m}_\delta(0) - \Lambda\mathbf{P}\bar{w}(s_i)]^T \bar{k}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.2.1)$$

όπου το διάνυσμα \bar{k}_i είναι μία μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης $\mathbf{A}^T_\delta(s_i)\bar{k}_i = \vec{0}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη σχέση (2.1.6)

$$\mathbf{A}_\delta(s)\bar{m}_\delta(s) = c\bar{m}_\delta(0) - \Lambda\mathbf{P}\bar{w}(s).$$

Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέλη, έχουμε

$$[\mathbf{A}_\delta(s)\bar{m}_\delta(s)]^T = [c\bar{m}_\delta(0) - \Lambda\mathbf{P}\bar{w}(s)]^T,$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα ανάστροφων πινάκων $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, γίνεται

$$\bar{m}_\delta^T(s)\mathbf{A}_\delta^T(s) = [c\bar{m}_\delta(0) - \Lambda\mathbf{P}\bar{w}(s)]^T.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με ένα διάνυσμα στήλη \bar{k}_i , προκύπτει

$$\bar{m}_\delta^T(s_i)\mathbf{A}_\delta^T(s_i)\bar{k}_i = [c\bar{m}_\delta(0) - \Lambda\mathbf{P}\bar{w}(s_i)]^T \bar{k}_i, \quad (i = 1, \dots, M) \quad (2.2.2)$$

$$\text{όπου } \vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_{i,1} \\ k_{i,2} \\ \vdots \\ k_{i,M} \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια για την εύρεση των $m_{\delta,i}(0)$ κάνουμε τα ακόλουθα βήματα:

1) Από την εξίσωση (2.1.7)

$$\det(\mathbf{A}_\delta(s)) = 0$$

βρίσκουμε τους πόλους s_1, \dots, s_M .

2) Από την εξίσωση

$$\mathbf{A}_\delta^\top(s_i) \vec{k}_i = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2.2.3)$$

βρίσκουμε μη τετριμένα, δηλαδή όχι μηδενικά, διανύσματα \vec{k}_i ένα για κάθε πόλο s_i .

3) Από την (2.2.2) αφού το πρώτο μέλος της είναι μηδέν, λόγω (2.2.3), έχουμε ότι και το δεύτερο μέλος της είναι μηδέν, δηλαδή

$$[c \vec{m}_\delta(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \hat{w}(s_i)]^\top \vec{k}_i = 0, \quad i = 1, \dots, M,$$

από την οποία παίρνουμε M γραμμικές εξισώσεις για τα $m_{\delta,1}(0), m_{\delta,2}(0), \dots, m_{\delta,M}(0)$.

□

Πρόταση 2.4

Έστω ο πίνακας $\mathbf{K} := (\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_M)^\top$, όπου $\vec{k}_i = (\vec{k}_{i,1}, \vec{k}_{i,2}, \dots, \vec{k}_{i,M})^\top$. Για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο οι λύσεις $m_{\delta,i}(0)$ δίνονται από τη σχέση

$$m_{\delta,i}(0) = \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) \hat{w}_{j_1}(s_{j_2}), \quad (i = 1, \dots, M). \quad (2.2.4)$$

Οι συντελεστές $C_{j_1, j_2}^{(i)}$, με $j_1, j_2 = 1, \dots, M$, δίνονται από τον τύπο

$$C_{j_1, j_2}^{(i)} = \frac{(-1)^{i+j_2} \cdot \det K_{j_2, i} \cdot \sum_{l=1}^M \lambda_l p_{l, j_1} k_{j_2, l}}{c \det \mathbf{K}}, \quad (2.2.5)$$

όπου $k_{j_2, l}$, ($l = 1, \dots, M$), το l -στοιχείο του διανύσματος \vec{k}_{j_2} , και με $\det K_{j_2, i}$ συμβολίζεται η ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα \mathbf{K} , δηλαδή η ορίζουσα του υποπίνακα που προκύπτει εάν διαγράψουμε την j_2 γραμμή και την i στήλη του πίνακα \mathbf{K} .

Απόδειξη

Ο πίνακας \mathbf{K} έχει τη μορφή

$$\mathbf{K} = (\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_M)^T = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{2,1} & & k_{M,1} \\ k_{1,2} & k_{2,2} & \dots & k_{M,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1,M} & k_{2,M} & & k_{M,M} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & & k_{1,M} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{M,1} & k_{M,2} & & k_{M,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{k}_1^T \\ \vec{k}_2^T \\ \vdots \\ \vec{k}_M^T \end{pmatrix}.$$

Από την εξίσωση (2.2.1) έχουμε:

$$[c \vec{m}_\delta(0) - \Lambda \mathbf{P} \vec{w}(s_i)]^T \vec{k}_i = 0.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των ανάστροφων πινάκων, $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$, παίρνουμε

$$([c \vec{m}_\delta(0)]^T - [\Lambda \mathbf{P} \vec{w}(s_i)]^T) \vec{k}_i = 0,$$

ή

$$[c \vec{m}_\delta(0)]^T \vec{k}_i - [\Lambda \mathbf{P} \vec{w}(s_i)]^T \vec{k}_i = 0,$$

ή

$$[c \vec{m}_\delta(0)]^T \vec{k}_i = [\Lambda \mathbf{P} \vec{w}(s_i)]^T \vec{k}_i. \quad (i = 1, \dots, M)$$

Αντικαθιστώντας τους πίνακες και τα διανύσματα σε αναπτυγμένη μορφή προκύπτει

$$\left(c \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \\ \vdots \\ m_{\delta,M}(0) \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} k_{i,1} \\ k_{i,2} \\ \vdots \\ k_{i,M} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s_i) \\ \hat{w}_2(s_i) \\ \vdots \\ \hat{w}_M(s_i) \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} k_{i,1} \\ k_{i,2} \\ \vdots \\ k_{i,M} \end{pmatrix}.$$

Οι διαστάσεις στο αριστερό μέλος είναι $(M \times 1)^T \times (M \times 1) = (1 \times M) \times (M \times 1) = (1 \times 1)$, ενώ οι διαστάσεις στο δεξί μέλος είναι $[(M \times M) \times (M \times M) \times (M \times 1)]^T \times (M \times 1) = (M \times 1)^T \times (M \times 1) = (1 \times M) \times (M \times 1) = (1 \times 1)$.

Οι πράξεις για το στοιχείο i δίνουν $\sum_{l=1}^M c m_{\delta,l}(0) k_{i,l} = \sum_{j_1=1}^M d_{j_1}^{(i)} \hat{w}_{j_1}(s_i)$, όπου

$$d_{j_1}^{(j_2)} = \sum_{l=1}^M \lambda_l p_{l,j_1} k_{j_2,l}, \quad i = 1, \dots, M,$$

οπότε σε διανυσματική μορφή το σύστημα εξισώσεων γίνεται,

$$c \mathbf{K} \vec{m}_\delta(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\ \vdots \\ \sum_{j_1=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) \end{pmatrix},$$

και με αντικατάσταση του πίνακα \mathbf{K} και του διανύσματος $\vec{m}_\delta(0)$ έχουμε

$$c \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,M} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{M,1} & k_{M,2} & \dots & k_{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \\ \vdots \\ m_{\delta,M}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) \end{pmatrix},$$

ή

$$\begin{pmatrix} ck_{1,1} & ck_{1,2} & \dots & ck_{1,M} \\ ck_{2,1} & ck_{2,2} & \dots & ck_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ck_{M,1} & ck_{M,2} & \dots & ck_{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \\ \vdots \\ m_{\delta,M}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Για να λύσουμε το σύστημα (2.2.6) ως προς τα $m_{\delta,1}(0)$, $m_{\delta,2}(0)$, ..., $m_{\delta,M}(0)$ εφαρμόζεται η μέθοδος των οριζουσών, δηλαδή, ο κανόνας Cramér. Έτσι, για το $m_{\delta,i}(0)$ προκύπτει ότι

$$m_{\delta,i}(0) = \frac{\begin{vmatrix} ck_{1,1} & \dots & ck_{1,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) & ck_{1,i+1} & \dots & ck_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ck_{M,1} & \dots & ck_{M,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) & ck_{M,i+1} & \dots & ck_{M,M} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ck_{1,1} & ck_{1,2} & \dots & ck_{1,M} \\ ck_{2,1} & ck_{2,2} & \dots & ck_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ck_{M,1} & ck_{M,2} & \dots & ck_{M,M} \end{vmatrix}}.$$

Οι ορίζουσες στον αριθμητή και παρονομαστή αναφέρονται σε πίνακες διαστάσεων $(M \times M)$. Εφαρμόζουμε την ιδιότητα των οριζουσών που αναφέρει ότι αν όλα τα στοιχεία μιας στήλης ή γραμμής ενός πίνακα \mathbf{A} είναι πολλαπλασιασμένα με μια σταθερά k , τότε η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{A} είναι $k \det(\mathbf{A})$. Συγκεκριμένα, στον αριθμητή οι $M - 1$ στήλες και στον παρονομαστή οι M στήλες, είναι πολλαπλασιασμένες με c . Οπότε προκύπτει

$$m_{\delta,i}(0) = \frac{c^{M-1} \begin{vmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) & k_{1,i+1} & \cdots & k_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{M,1} & \cdots & k_{M,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) & k_{M,i+1} & \cdots & k_{M,M} \end{vmatrix}}{c^M \begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,M} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{M,1} & k_{M,2} & \cdots & k_{M,M} \end{vmatrix}},$$

ή

$$m_{\delta,i}(0) = \frac{\begin{vmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) & k_{1,i+1} & \cdots & k_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{M,1} & \cdots & k_{M,i-1} & \sum_{j=1}^M d_{j_1}^{(M)} \hat{w}_{j_1}(s_M) & k_{M,i+1} & \cdots & k_{M,M} \end{vmatrix}}{c \det \mathbf{K}}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στον αριθμητή ως προς την i -στήλη προκύπτει η σχέση (2.2.4). □

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, εφαρμόζουμε τις προτάσεις (2.3) και (2.4) στην ειδική περίπτωση που $M = 2$.

Εφαρμογή. Εύρεση των λύσεων-εκφράσεων των $m_{\delta,1}(0)$ και $m_{\delta,2}(0)$ όταν $M = 2$.

Στα επόμενα, υλοποιούνται τα βήματα της πρότασης (2.3) και καταλήγουμε στα αποτελέσματα της πρότασης (2.4).

(1) Θεωρούμε την εξίσωση (2.1.9) η οποία διαδοχικά γίνεται

$$\det(\mathbf{A}_\delta(s)) = 0,$$

$$\det[(cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s)] = 0,$$

$$\det \left[(cs - \delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1(s) & 0 \\ 0 & \hat{b}_2(s) \end{pmatrix} \right] = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 + \lambda_1 p_{11} \hat{b}_1(s) & \lambda_1 p_{12} \hat{b}_2(s) \\ \lambda_2 p_{21} \hat{b}_1(s) & cs - \delta - \lambda_2 + \lambda_2 p_{22} \hat{b}_2(s) \end{pmatrix} = 0,$$

$$[cs - \delta - \lambda_1 + \lambda_1 p_{11} \hat{b}_1(s)][cs - \delta - \lambda_2 + \lambda_2 p_{22} \hat{b}_2(s)] - \lambda_2 p_{21} \hat{b}_1(s) \lambda_1 p_{12} \hat{b}_2(s) = 0.$$

Από την επίλυση της τελευταίας εξίσωσης θα προκύψουν οι ρίζες s_1, s_2 .

(2) Από την εξίσωση (2.2.3)

$$\mathbf{A}_\delta^\top(s_i) \vec{k}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2$$

βρίσκουμε μη τετριμένα (όχι μηδενικά) διανύσματα \vec{k}_i , ένα για κάθε πόλο s_i

Συγκεκριμένα, για τον πόλο s_1 είναι

$$\mathbf{A}_\delta^\top(s_1) \vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} cs_1 - \delta - \lambda_1 + \lambda_1 p_{11} \hat{b}_1(s_1) & \lambda_1 p_{12} \hat{b}_2(s_1) \\ \lambda_2 p_{21} \hat{b}_1(s_1) & cs_1 - \delta - \lambda_2 + \lambda_2 p_{22} \hat{b}_2(s_1) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ή

$$\begin{pmatrix} cs_1 - \delta - \lambda_1 + \lambda_1 p_{11} \hat{b}_1(s_1) & \lambda_2 p_{21} \hat{b}_1(s_1) \\ \lambda_1 p_{12} \hat{b}_2(s_1) & cs_1 - \delta - \lambda_2 + \lambda_2 p_{22} \hat{b}_2(s_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

και η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει το διάνυσμα $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \end{pmatrix}$.

Όμοια για τον πόλο s_2 , βρίσκουμε το διάνυσμα $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \end{pmatrix}$.

(3) Από την εξίσωση (2.2.1) για τους πόλους s_1 και s_2 βρίσκουμε αντίστοιχα:

για τον πόλο s_1

$$[c \bar{m}_\delta(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \hat{w}(s_1)]^\top \vec{k}_1 = 0,$$

ή

$$\left[c \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s_1) \\ \hat{w}_2(s_1) \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

ή

$$\begin{pmatrix} c m_{\delta,1}(0) - \lambda_1 p_{11} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_1 p_{12} \hat{w}_2(s_1) \\ c m_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_2 p_{22} \hat{w}_2(s_1) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

ή

$$[c m_{\delta,1}(0) - \lambda_1 p_{11} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_1 p_{12} \hat{w}_2(s_1), c m_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_2 p_{22} \hat{w}_2(s_1)] \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

ή

$$[cm_{\delta,1}(0) - \lambda_1 p_{11} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_1 p_{12} \hat{w}_2(s_1)]k_{11} + [cm_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_2 p_{22} \hat{w}_2(s_1)]k_{12} = 0,$$

ή

$$cm_{\delta,1}(0)k_{11} - \lambda_1 p_{11} k_{11} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_1 p_{12} k_{11} \hat{w}_2(s_1) + cm_{\delta,2}(0)k_{12} - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_1)k_{12} - \lambda_2 p_{22} k_{12} \hat{w}_2(s_1) = 0,$$

ή

$$cm_{\delta,1}(0)k_{11} + cm_{\delta,2}(0)k_{11} - \lambda_1 p_{11} k_{11} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_2 p_{21} k_{12} \hat{w}_1(s_1) - \lambda_1 p_{12} k_{11} \hat{w}_2(s_1) - \lambda_2 p_{22} k_{12} \hat{w}_2(s_1) = 0,$$

ή

$$cm_{\delta,1}(0)k_{11} + cm_{\delta,2}(0)k_{12} = [\lambda_1 p_{11} k_{11} + \lambda_2 p_{21} k_{12}] \hat{w}_1(s_1) + [\lambda_1 p_{12} k_{11} + \lambda_2 p_{22} k_{12}] \hat{w}_2(s_1).$$

Θέτοντας

$$d_1^{(1)} = \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{l,1} k_{1,l} = \lambda_1 p_{11} k_{11} + \lambda_2 p_{21} k_{12} \text{ και } d_2^{(1)} = \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{l,2} k_{1,l} = \lambda_1 p_{12} k_{11} + \lambda_2 p_{22} k_{12}$$

η τελευταία εξίσωση γράφεται,

$$ck_{11} m_{\delta,1}(0) + ck_{12} m_{\delta,2}(0) = d_1^{(1)} \hat{w}_1(s_1) + d_2^{(1)} \hat{w}_2(s_1)$$

ή

$$ck_{11} m_{\delta,1}(0) + ck_{12} m_{\delta,2}(0) = \sum_{j=1}^2 d_j^{(1)} \hat{w}_j(s_1) \quad (\epsilon.1)$$

Όμοια για τον πόλο s_2 ,

$$[c \vec{m}_{\delta}(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \vec{w}(s_2)]^T \vec{k}_2 = 0$$

ή

$$\left[c \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s_2) \\ \hat{w}_2(s_2) \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

ή

$$\begin{pmatrix} cm_{\delta,1}(0) - \lambda_1 p_{11} \hat{w}_1(s_2) - \lambda_1 p_{12} \hat{w}_2(s_2) \\ cm_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_2) - \lambda_2 p_{22} \hat{w}_2(s_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

ή

$$[cm_{\delta,1}(0) - \lambda_1 p_{11} \hat{w}_1(s_2) - \lambda_1 p_{12} \hat{w}_2(s_2)]k_{21} + [cm_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}_1(s_2) - \lambda_2 p_{22} \hat{w}_2(s_2)]k_{22} = 0,$$

ή

$$cm_{\delta,1}(0)k_{21} + cm_{\delta,2}(0)k_{22} = [\lambda_1 p_{11} k_{21} + \lambda_2 p_{21} k_{22}] \hat{w}_1(s_2) + [\lambda_1 p_{12} k_{21} + \lambda_2 p_{22} k_{22}] \hat{w}_2(s_2).$$

Θέτοντας

$$d_1^{(2)} = \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{l,1} k_{2,l} = \lambda_1 p_{11} k_{21} + \lambda_2 p_{21} k_{22} \text{ και } d_2^{(2)} = \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{l,2} k_{2,l} = \lambda_1 p_{12} k_{21} + \lambda_2 p_{22} k_{22},$$

η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$ck_{21}m_{\delta,1}(0) + ck_{22}m_{\delta,2}(0) = d_1^{(2)}\hat{w}_1(s_2) + d_2^{(2)}\hat{w}_2(s_2),$$

ή

$$ck_{21}m_{\delta,1}(0) + ck_{22}m_{\delta,2}(0) = \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2). \quad (\varepsilon.2)$$

Οι δύο γραμμικές εξισώσεις (ε.1) και (ε.2) για τα $m_{\delta,1}(0)$, $m_{\delta,2}(0)$ σε μορφή πινάκων γράφονται

$$\begin{pmatrix} ck_{11} & ck_{12} \\ ck_{21} & ck_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) \\ \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2) \end{pmatrix}, \quad (\Sigma)$$

ή

$$c\mathbf{K}\bar{m}_{\delta}(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) \\ \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2) \end{pmatrix}.$$

Για την επίλυση του συστήματος (Σ) εφαρμόζουμε τη μέθοδο Cramér, και έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{\delta,1}(0) &= \frac{\begin{vmatrix} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) & ck_{12} \\ \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2) & ck_{22} \end{vmatrix}}{\det \begin{pmatrix} ck_{11} & ck_{12} \\ ck_{21} & ck_{22} \end{pmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) & k_{12} \\ \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2) & k_{22} \end{vmatrix}}{c^2 \det \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}} \\ &= \frac{k_{22} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) - k_{12} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2)}{c \det \mathbf{K}}, \quad \text{όπου } \det \mathbf{K} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12} \\ &= \frac{k_{22}}{c \det \mathbf{K}} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)}\hat{w}_{j_1}(s_1) - \frac{k_{12}}{c \det \mathbf{K}} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)}\hat{w}_{j_1}(s_2) \\ &= \frac{k_{22}}{c \det \mathbf{K}} d_1^{(1)}\hat{w}_1(s_1) + \frac{k_{22}}{c \det \mathbf{K}} d_2^{(1)}\hat{w}_2(s_1) - \frac{k_{12}}{c \det \mathbf{K}} d_1^{(2)}\hat{w}_1(s_2) - \frac{k_{12}}{c \det \mathbf{K}} d_2^{(2)}\hat{w}_2(s_2) \\ &= \frac{k_{22}d_1^{(1)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_1(s_1) - \frac{k_{12}d_1^{(2)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_1(s_2) + \frac{k_{22}d_2^{(1)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_2(s_1) - \frac{k_{12}d_2^{(2)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_2(s_2) \\ &= C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_1) + C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_2) + C_{2,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_1) + C_{2,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_2) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 C_{j_1, j_2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_{j_1}(s_{j_2})$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
m_{\delta,2}(0) &= \frac{\begin{vmatrix} ck_{11} & \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\ ck_{21} & \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)} \hat{w}_{j_1}(s_2) \end{vmatrix}}{\det \begin{pmatrix} ck_{11} & ck_{12} \\ ck_{21} & ck_{22} \end{pmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} k_{11} & \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\ k_{21} & \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)} \hat{w}_{j_1}(s_2) \end{vmatrix}}{c^2 \det \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}} \\
&= \frac{k_{11} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_2) - k_{21} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)} \hat{w}_{j_1}(s_1)}{c \det \mathbf{K}} \\
&= \frac{k_{11}}{c \det \mathbf{K}} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(1)} \hat{w}_{j_1}(s_2) - \frac{k_{21}}{c \det \mathbf{K}} \sum_{j_1=1}^2 d_{j_1}^{(2)} \hat{w}_{j_1}(s_1) \\
&= \frac{k_{11}}{c \det \mathbf{K}} d_1^{(1)} \hat{w}_1(s_2) + \frac{k_{11}}{c \det \mathbf{K}} d_2^{(1)} \hat{w}_2(s_2) - \frac{k_{21}}{c \det \mathbf{K}} d_1^{(2)} \hat{w}_1(s_1) - \frac{k_{21}}{c \det \mathbf{K}} d_2^{(2)} \hat{w}_2(s_1) \\
&= -\frac{k_{21} d_1^{(2)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_1(s_1) + \frac{k_{11} d_1^{(1)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_1(s_2) - \frac{k_{21} d_2^{(2)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_2(s_1) + \frac{k_{11} d_2^{(1)}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}_2(s_2) \\
&= C_{1,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_1(s_1) + C_{1,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_1(s_2) + C_{2,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_2(s_1) + C_{2,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_2(s_2) \\
&= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 C_{j_1, j_2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_{j_1}(s_{j_2}).
\end{aligned}$$

2.3 Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ και οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις αυτών, όταν $u = 0$

Στην παράγραφο αυτή, εκμεταλλευόμενοι τις λύσεις $m_{\delta,i}(0)$ από την προηγούμενη παράγραφο, αναζητάμε τις εκφράσεις της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $U(T^-)$ και $|U(T)|$ καθώς και τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας αυτών όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδενικό.

Αρχικά ορίζονται οι συναρτήσεις πυκνότητας που μας ενδιαφέρουν.

Ορισμός 2.1

Η ελλειμματική (defective) από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, $U(T^-)$, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$, και του χρόνου χρεοκοπίας T , δοθέντος $Z_0 = i$, με αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$, ορίζεται ως

$$f_i(y_1, y_2, t | u).$$

Η εν λόγω συνάρτηση είναι ελλειμματική αφού

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{y_2=0}^{\infty} \int_{y_1=0}^{\infty} f_i(y_1, y_2, t | u) dy_1 dy_2 dt = P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u) < 1.$$

Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

$$m_{\delta,i}(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty | U(0) = u)]$$

εφαρμόζοντας τον ορισμό της μέσης τιμής ισχύει

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(u) &= \int_{y_2=0}^{\infty} \int_{y_1=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t} w(y_1, y_2) f_i(y_1, y_2, t | u) dt dy_1 dy_2 \\ &= \int_{y_2=0}^{\infty} \int_{y_1=0}^{\infty} w(y_1, y_2) \left(\int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t} f_i(y_1, y_2, t | u) dt \right) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δοθέντος $Z_0 = i$, ορίζεται ως

$$f_i(y_1, y_2 | u) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t} f_i(y_1, y_2, t | u) dt.$$

Πόρισμα 2.1

Για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δίνεται από τη σχέση

$$f_i(y_1, y_2 | 0) = \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} b_{j_1}(y_1 + y_2), \quad (i = 1, \dots, M). \quad (2.3.1)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $\delta = 0$, και $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2 = y_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Τότε από τη συνάρτηση Gerber-Shiu προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π.

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = y_1)I(|U(T)| = y_2)I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_1, y_2 | u).$$

Θα βρούμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty w(x, y-x) b_i(y) dy dx$. Παρατηρούμε

ότι η μορφή της συνάρτησης ποινης μπορεί να δοθεί σαν την Dirac δέλτα συνάρτηση δύο μεταβλητών στο σημείο (y_1, y_2) , δηλαδή $w(x_1, x_2) = \delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$. Τότε,

$w(x, y-x) = \delta(x - y_1, y - x - y_2)$, και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty \delta(x - y_1, y - x - y_2) b_i(y) dy dx = \int_0^\infty \int_x^\infty \delta(x - y_1, y - x - y_2) e^{-sx} b_i(y) dy dx \\ &= e^{-sy_1} b_i(y_1 + y_2), \end{aligned}$$

αφού για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac ισχύει $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta(x-a, y-a) f(x, y) dx dy = f(a, b)$.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $\hat{w}_i(s)$ στην (2.2.4) και προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Οι προεξοφλημένες περιθώριες πυκνότητες του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι $u = 0$, δίνονται παρακάτω.

Πόρισμα 2.2

Για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, η προεξοφλημένη περιθώρια πυκνότητα των τ.μ. $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$f_i(y_1 | 0) = \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} [1 - B_{j_1}(y_1)], \quad (2.3.2)$$

$$f_i(y_2 | 0) = \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{s_{j_2} y_2} \left(\hat{b}_{j_1}(s_{j_2}) - \int_0^{y_2} e^{-s_{j_2} z} b_{j_1}(z) dz \right). \quad (2.3.3)$$

Απόδειξη

Η προεξοφλημένη περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. $U(T^-)$ όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν είναι

$$\begin{aligned} f_i(y_1 | 0) &= \int_0^\infty f_i(y_1, y_2 | 0) dy_2 = \int_0^\infty \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} b_{j_1}(y_1 + y_2) dy_2 \\ &= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} \int_0^\infty b_{j_1}(y_1 + y_2) dy_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} [B_{j_1}(y_1 + y_2)]_{y_1=0}^{\infty} \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} [1 - B_{j_1}(y_1)].
\end{aligned}$$

Η προεξοφλημένη περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. $|U(T)|$ όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν είναι

$$\begin{aligned}
f_i(y_2 | 0) &= \int_0^{\infty} f_i(y_1, y_2 | 0) dy_1 = \int_0^{\infty} \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} b_{j_1}(y_1 + y_2) dy_1 \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) \int_0^{\infty} e^{-s_{j_2} y_1} b_{j_1}(y_1 + y_2) dy_1 \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) \int_{y_2}^{\infty} e^{-s_{j_2}(z-y_2)} b_{j_1}(z) dz \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{s_{j_2} y_2} \int_{y_2}^{\infty} e^{-s_{j_2} z} b_{j_1}(z) dz \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{s_{j_2} y_2} \left(\int_0^{\infty} e^{-s_{j_2} z} b_{j_1}(z) dz - \int_0^{y_2} e^{-s_{j_2} z} b_{j_1}(z) dz \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, \dots, s_M, \delta) e^{s_{j_2} y_2} \left(\hat{b}_{j_1}(s_{j_2}) - \int_0^{y_2} e^{-s_{j_2} z} b_{j_1}(z) dz \right).
\end{aligned}$$

□

2.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Ενδιαφερόμαστε τώρα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\bar{m}_{\delta}(u)$ καθώς το αρχικό κεφάλαιο u τείνει στο άπειρο. Έχουμε την παρακάτω σχετική πρόταση.

Πρόταση 2.5

Για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$\bar{m}_{\delta}(u) \sim \bar{C} e^{-R_{\delta} u} \quad \text{καθώς } u \rightarrow \infty,$$

δηλαδή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{m}_{\delta}(u)}{e^{-R_{\delta} u}} = \bar{C},$$

όπου το σταθερό διάνυσμα \bar{C} δίνεται από την σχέση,

$$\vec{C} = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_{\delta})[c\vec{m}_{\delta}(0) - \Lambda\mathbf{P}\vec{w}(-R_{\delta})]}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_{\delta}(s) \right|_{s=-R_{\delta}}}. \quad (2.4.1)$$

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζουμε με τον αντίστροφο του πίνακα $\mathbf{A}_{\delta}(s)$ από αριστερά και τα δύο μέλη της (2.1.8)

$$[\mathbf{A}_{\delta}(s)]^{-1} \mathbf{A}_{\delta}(s) \vec{m}_{\delta}(s) = [\mathbf{A}_{\delta}(s)]^{-1} [c\vec{m}_{\delta}(0) - \Lambda\mathbf{P}\vec{w}(s)],$$

και επειδή για τον αντίστροφο πίνακα \mathbf{A}^{-1} ενός πίνακα \mathbf{A} ισχύει $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, η παραπάνω γίνεται

$$\vec{m}_{\delta}(s) = [\mathbf{A}_{\delta}(s)]^{-1} [c\vec{m}_{\delta}(0) - \Lambda\mathbf{P}\vec{w}(s)].$$

Γνωρίζουμε ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα \mathbf{A} είναι ο $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$ όπου $\text{adj}(\mathbf{A})$ είναι ο προσαρτημένος (adjoint ή adjunct) πίνακας του \mathbf{A} . Έτσι στην περίπτωσή μας είναι $[\mathbf{A}_{\delta}(s)]^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)}{\det \mathbf{A}_{\delta}(s)}$, οπότε παίρνουμε

$$\vec{m}_{\delta}(s) = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)[c\vec{m}_{\delta}(0) - \Lambda\mathbf{P}\vec{w}(s)]}{\det \mathbf{A}_{\delta}(s)}. \quad (2.4.2)$$

Όμως από την ιδιότητα μετατόπισης του μετασχηματισμού Laplace, είναι

$$L\{e^{R_{\delta}u} m_{\delta,i}(u)\} = \hat{m}_{\delta,i}(s - R_{\delta}).$$

Έτσι, από το θεώρημα τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_{\delta}u} \vec{m}_{\delta}(u) = \lim_{s \rightarrow 0} s L\{e^{R_{\delta}u} \vec{m}_{\delta}(u)\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \vec{m}_{\delta}(s - R_{\delta}) = \vec{C}.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την τιμή του ορίου \vec{C} .

Από την (2.4.2) έχουμε

$$\vec{C} = \lim_{s \rightarrow 0} s \vec{m}_{\delta}(s - R_{\delta}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \mathbf{A}_{\delta,adj}(s - R_{\delta})[c\vec{m}_{\delta}(0) - \Lambda\mathbf{P}\vec{w}(s - R_{\delta})]}{\det \mathbf{A}_{\delta}(s - R_{\delta})}.$$

Το όριο του αριθμητή είναι μηδέν. Το όριο του παρονομαστή είναι $\det \mathbf{A}_{\delta}(-R_{\delta})$. Έστω $s = -R_{\delta}$ είναι απλός πόλος του $\hat{m}_{\delta,i}(s)$, οπότε $\det \mathbf{A}_{\delta}(-R_{\delta}) = 0$. Συνεπώς από το παραπάνω όριο προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital και έχουμε

$$\bar{C} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \{s \cdot \mathbf{A}_{\delta,adj}(s - R_\delta)[c \bar{m}_\delta(0) - \Lambda \mathbf{P} \bar{w}(s - R_\delta)]\}}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s - R_\delta)},$$

$$\bar{C} = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta)[c \bar{m}_\delta(0) - \Lambda \mathbf{P} \bar{w}(-R_\delta)]}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta}}.$$

Στην επόμενη παράγραφο θα αναπτύξουμε τις ροπές των τυχαίων μεταβλητών $T, U(T^-)$ και $|U(T)|$.

2.5 Ροπές των τριών τυχαίων μεταβλητών της συνάρτησης των Gerber – Shiu

2.5.1 Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, T

Θεωρούμε $w(x, y) = 1$ και $\delta > 0$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Gerber-Shiu, δοθέντος $Z_0 = i$ γίνεται,

$$m_{\delta,i}(u) = E[e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i].$$

Παίρνοντας διαδοχικά τις παραγώγους ως προς δ και θέτοντας $\delta = 0$ βρίσκουμε,

$$\left. \frac{\partial m_{\delta,i}(u)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = E[-T e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{\delta=0} = E[-T \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i],$$

$$\left. \frac{\partial^2 m_{\delta,i}(u)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} = E[T^2 e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{\delta=0} = E[T^2 \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]$$

και συνεχίζοντας όμοια, για την n -οστή παράγωγο έχουμε,

$$\left. \frac{\partial^n m_{\delta,i}(u)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = E[(-1)^n T^n e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{\delta=0}$$

$$= E[(-1)^n T^n \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i].$$

Ορίζουμε,

$$f_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0}. \quad (2.5.1)$$

Πρόταση 2.6

Για την n -οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας T , ισχύει η αναδρομική σχέση

$$\mathbf{A}_0(s) \vec{f}_n(s) = c \frac{\partial^n \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n \vec{f}_{n-1}(s), \quad n \geq 1, (n \in \mathbf{N}). \quad (2.5.2)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη σχέση (2.1.4)

$$(cs - \lambda_i) \hat{m}_{\delta,i}(s) - c m_{\delta,i}(0) - \delta \hat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \hat{m}_{\delta,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{w}_j(s) = 0.$$

Και παραγωγίζουμε διαδοχικά ως προς δ . Έτσι παίρνουμε,

1^η παράγωγος:

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta} - c \frac{\partial m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta} - \left[\hat{m}_{\delta,i}(s) + \delta \frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta} \right] + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta} = 0.$$

2^η παράγωγος:

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2} - c \frac{\partial^2 m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^2} - \left[\frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta} + \frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta} + \delta \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2} \right] + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^2} = 0$$

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2} - c \frac{\partial^2 m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^2} - \left[2 \frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta} + \delta \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2} \right] + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^2} = 0.$$

Όμοια η n -οστή παράγωγος είναι,

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n} - c \frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} - \left[n \frac{\partial^{n-1} \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^{n-1}} + \delta \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n} \right] + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^n} = 0.$$

Θέτοντας $\delta = 0$ προκύπτει ότι,

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} - c \frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} - n \frac{\partial^{n-1} \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^{n-1}} \Big|_{\delta=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} = 0,$$

από την οποία παίρνουμε ότι

$$(cs - \lambda_i) f_{n,i}(s) - c \frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} - n f_{n-1,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) f_{n,j}(s) = 0,$$

ή

$$(cs - \lambda_i) f_{n,i}(s) - n f_{n-1,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) f_{n,j}(s) = c \frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0},$$

ή

$$(cs - \lambda_i) f_{n,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) f_{n,j}(s) = c \frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n f_{n-1,i}(s). \quad (2.5.3)$$

Η τελευταία σχέση σε μορφή πινάκων γράφεται

$$[cs\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P}\hat{\mathbf{B}}(s)]\vec{f}_n(s) = c \frac{\partial^n \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n \vec{f}_{n-1}(s). \quad (2.5.4)$$

Από τη (2.1.7) με $\delta = 0$, η τελευταία σχέση δίνει,

$$\mathbf{A}_0(s)\vec{f}_n(s) = c \frac{\partial^n \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n \vec{f}_{n-1}(s).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\vec{f}_0(s) = \begin{pmatrix} f_{0,1}(s) \\ \vdots \\ f_{0,M}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{0,1}(s) \\ \vdots \\ \hat{m}_{0,M}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_M(s) \end{pmatrix},$$

όπου $\hat{\psi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} \psi_i(u) du$, ($i = 1, \dots, M$) ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας

χρεοκοπίας $\psi_i(u)$. Το διάνυσμα $\vec{\hat{\psi}}(s)$ προκύπτει από την (2.1.5) αν θέσουμε $\delta = 0$. Έτσι για να βρούμε την n -οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας T , αρχικά βρίσκουμε, με αριθμητικές μεθόδους, τα μηδενικά της εξίσωσης $\det(\mathbf{A}_0(s)) = 0$ στο θετικό ημιεπίπεδο. Στη συνέχεια με

βάση την αναδρομική σχέση (2.5.2) προσδιορίζουμε τις M σταθερές $\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0}$, όπου ($i =$

$1, \dots, M$). Βρίσκουμε το $\vec{f}_n(s)$ και παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

2.5.2 Ροπές του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, $U(T^-)$

Θεωρούμε $w(x, y) = e^{-ax}$ και $\delta = 0$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Gerber-Shiu, δοθέντος $Z_0 = i$ γίνεται

$$m_{0,i}(u) = E[e^{-aU(T^-)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i].$$

Παίρνοντας διαδοχικά τις παραγώγους ως προς a και θέτοντας $a = 0$ βρίσκουμε

$$\frac{\partial m_{0,i}(u)}{\partial a} \Big|_{a=0} = E[-U(T^-) e^{-aU(T^-)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0}$$

$$= E[-U(T^-) \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]$$

$$\frac{\partial^2 m_{0,i}(u)}{\partial a^2} \Big|_{a=0} = E[(U(T^-))^2 e^{-aU(T^-)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0}$$

$$= E[(U(T^-))^2 \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]$$

συνεχίζοντας όμοια, για την n -οστή παράγωγο είναι

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(u)}{\partial a^n} \right|_{a=0} &= E[(-1)^n (U(T^-))^n e^{-aU(T^-)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0} \\ &= E[(-1)^n (U(T^-))^n \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$g_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} \quad \text{και} \quad \xi_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0}. \quad (2.5.5)$$

Πρόταση 2.7

Για την n -οστή ροπή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, ισχύει η σχέση

$$\mathbf{A}_0(s) \bar{g}_n(s) = c \left. \frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\xi_{n,1}(s), \dots, \xi_{n,M}(s)). \quad (2.5.6)$$

Απόδειξη

Από την (βλέπε σχέση 2.1.4)

$$(cs - \lambda_i) \hat{m}_{\delta,i}(s) - cm_{\delta,i}(0) - \delta \hat{m}_{\delta,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \hat{m}_{\delta,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{w}_j(s) = 0,$$

θέτοντας $\delta = 0$, προκύπτει

$$(cs - \lambda_i) \hat{m}_{0,i}(s) - cm_{0,i}(0) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \hat{m}_{0,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{w}_j(s) = 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς a παίρνουμε

$$(cs - \lambda_i) \frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n} - c \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \frac{\partial^n \hat{m}_{0,j}(s)}{\partial a^n} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \frac{\partial^n \hat{w}_j(s)}{\partial a^n} = 0.$$

Θέτοντας $a = 0$ προκύπτει ότι

$$(cs - \lambda_i) \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - c \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,j}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \left. \frac{\partial^n \hat{w}_j(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} = 0,$$

η οποία με βάση τη σχέση (2.5.5) γίνεται

$$(cs - \lambda_i) g_{n,i}(s) - c \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) g_{n,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \xi_{n,j}(s) = 0,$$

ή

$$(cs - \lambda_i)g_{n,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s)g_{n,j}(s) = c \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \Big|_{a=0} - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \xi_{n,j}(s),$$

και σε μορφή πινάκων γράφεται

$$[cs \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P} \hat{\mathbf{B}}(s)] \bar{\mathbf{g}}_n(s) = c \frac{\partial^n \bar{\mathbf{m}}_0(0)}{\partial a^n} \Big|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\xi_{n,1}(s), \dots, \xi_{n,M}(s)).$$

Από τη (2.1.7) με $\delta = 0$, η σχέση γίνεται

$$\mathbf{A}_0(s) \bar{\mathbf{g}}_n(s) = c \frac{\partial^n \bar{\mathbf{m}}_0(0)}{\partial a^n} \Big|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\xi_{n,1}(s), \dots, \xi_{n,M}(s)).$$

□

Συνοψίζοντας, ο μετασχηματισμός Laplace της n -οστής ροπής της $U(T^-)$ επιτυγχάνεται αρχικά βρίσκοντας τα μηδενικά από τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg, στη συνέχεια υπολογίζοντας τις M σταθερές $\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \Big|_{a=0}$, και τέλος λύνοντας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (2.5.6). Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace προκύπτουν οι ροπές $(U(T^-))^n$.

Πρόταση 2.8

Για τις ποσότητες $\xi_{n,i}(s)$ όταν $w(x, y) = e^{-ax}$, ισχύει

$$\xi_{n,i}(s) := \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \Big|_{a=0} = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} \left(1 - \hat{b}_i(s) - \sum_{j=1}^n \frac{(-s)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(s)}{\partial a^j} \right), \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbf{N}. \quad (2.5.7)$$

Απόδειξη

Αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{w}_i(s)$. Από την $w(x, y) = e^{-ax}$ είναι $w(x, y-x) = e^{-ax}$. Οπότε

$$\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty w(x, y-x) b_i(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty e^{-ax} b_i(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{-ax} \int_x^\infty b_i(y) dy dx.$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι η δεξιά ουρά $\bar{B}_i(x)$ του ύψους της απαίτησης, άρα

$$\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-(s+a)x} \bar{B}_i(x) dx.$$

Αλλά για το μετασχηματισμό Laplace της δεξιάς ουράς μιας τ.μ. ισχύει $\hat{F}(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s}$ και

από ιδιότητα μετατόπισης του είναι $L\{e^{ax} f(x)\} = \hat{f}(s - a)$. Οπότε για το $\hat{w}_i(s)$ έχουμε

$$\hat{w}_i(s) = \frac{1 - \hat{b}_i(s + a)}{s + a}.$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση διαδοχικά ως προς a έπεται ότι

$$\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} = \frac{(-1)^n n!}{(s + a)^{n+1}} \left(1 - \hat{b}_i(s + a) - \sum_{j=1}^n \frac{[-(s + a)]^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(s + a)}{\partial a^j} \right).$$

Θέτοντας $a = 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \xi_{n,i}(s) &:= \left. \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} = \frac{(-1)^n n!}{(s + a)^{n+1}} \left(1 - \hat{b}_i(s + a) - \sum_{j=1}^n \frac{[-(s + a)]^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(s + a)}{\partial a^j} \right) \Big|_{a=0} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} \left(1 - \hat{b}_i(s) - \sum_{j=1}^n \frac{(-s)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(s)}{\partial a^j} \right). \end{aligned}$$

□

2.5.3 Ροπές του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$

Θεωρούμε $w(x, y) = e^{-ay}$ και $\delta = 0$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Gerber-Shiu, δοθέντος $Z_0 = i$ γίνεται

$$m_{0,i}(u) = E[e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i].$$

Παίρνοντας διαδοχικά τις παραγώγους ως προς a και θέτοντας $a = 0$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial m_{0,i}(u)}{\partial a} \right|_{a=0} &= E[-|U(T)| e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0} \\ &= E[-|U(T)| \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i], \\ \left. \frac{\partial^2 m_{0,i}(u)}{\partial a^2} \right|_{a=0} &= E[|U(T)|^2 e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0} \\ &= E[|U(T)|^2 \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]. \end{aligned}$$

και συνεχίζοντας όμοια, για την n -οστή παράγωγο είναι

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(u)}{\partial a^n} \right|_{a=0} &= E[(-1)^n |U(T)|^n e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] \Big|_{a=0} \\ &= E[(-1)^n |U(T)|^n \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$k_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} \quad \text{και} \quad \eta_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0}. \quad (2.5.8)$$

Πρόταση 2.9

Για την n -οστή ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, ισχύει η σχέση

$$\mathbf{A}_0(s) \bar{k}_n(s) = c \left. \frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\eta_{n,1}(s), \dots, \eta_{n,M}(s)). \quad (2.5.9)$$

Απόδειξη

Προχωρούμε όπως στην απόδειξη της (2.5.6). Θεωρούμε τη σχέση (2.1.4), θέτουμε $\delta = 0$, παραγωγίζουμε ως προς a και θέτουμε $a = 0$. Τελικά προκύπτει ότι

$$(cs - \lambda_i) \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - c \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) \left. \frac{\partial^n \hat{m}_{0,j}(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \left. \frac{\partial^n \hat{w}_j(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} = 0.$$

Με τη βοήθεια της (2.5.8), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$(cs - \lambda_i) k_{n,i}(s) - c \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) k_{n,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \eta_{n,j}(s) = 0,$$

ή

$$(cs - \lambda_i) k_{n,i}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \hat{b}_j(s) k_{n,j}(s) = c \left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - \lambda_i \sum_{j=1}^M p_{ij} \eta_{n,j}(s),$$

η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται

$$[cs \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P} \hat{\mathbf{B}}(s)] \bar{k}_n(s) = c \left. \frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\eta_{n,1}(s), \dots, \eta_{n,M}(s)).$$

Από την (2.1.7) για $\delta = 0$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{A}_0(s) \bar{k}_n(s) = c \left. \frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0} - \mathbf{\Lambda P} \text{diag}(\eta_{n,1}(s), \dots, \eta_{n,M}(s)).$$

□

Συνοψίζοντας, ο μετασχηματισμός Laplace της n -οστής ροπής της $|U(T)|$ επιτυγχάνεται αρχικά βρίσκοντας τα μηδενικά στο θετικό ημιπίεδο από τη γενικευμένη εξίσωση

Lundberg, στη συνέχεια υπολογίζοντας τις M σταθερές $\left. \frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n} \right|_{a=0}$, και τέλος λύνοντας το

σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (2.5.9). Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace προκύπτουν οι ροπές $|U(T)|^n$.

Πρόταση 2.10

Για τις ποσότητες $\eta_{n,i}(s)$ όταν $w(x, y) = e^{-ay}$ ισχύει

$$\eta_{n,i}(s) := \left. \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} = -\frac{n!}{s^{n+1}} \left(\hat{b}_i(s) - \sum_{j=0}^n \frac{(-s)^j}{j!} E(B_i^j) \right), \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \quad (2.5.9)$$

Απόδειξη

Αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{w}_i(s)$. Από την $w(x, y) = e^{-ay}$ είναι $w(x, y-x) = e^{-a(y-x)}$. Οπότε

$$\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty w(x, y-x) b_i(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_x^\infty e^{-a(y-x)} b_i(y) dy \right) dx.$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι ο τελεστής Dickson-Hipp (βλέπε στο παράρτημα) $T_a b_i(x)$, άρα

$$\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_a b_i(x) dx,$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή Dickson-Hipp, οπότε τελικά

$$\hat{w}_i(s) = \frac{\hat{b}_i(s) - \hat{b}_i(a)}{a-s}.$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε διαδοχικά την προηγούμενη σχέση ως προς a και βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} = -\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \left(\hat{b}_i(s) - \sum_{j=0}^n \frac{(s-a)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(a)}{\partial a^j} \right).$$

Θέτοντας $a = 0$ προκύπτει ότι

$$\eta_{n,i}(s) = \left. \frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} \right|_{a=0} = -\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \left(\hat{b}_i(s) - \sum_{j=0}^n \frac{(s-a)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}_i(a)}{\partial a^j} \right) \Bigg|_{a=0} = -\frac{n!}{s^{n+1}} \left(\hat{b}_i(s) - \sum_{j=0}^n \frac{(-s)^j}{j!} E(X_i^j) \right).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σαν ειδική περίπτωση του γενικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα αυτό προκύπτει θέτοντας στο γενικό ημι - Μαρκοβιανό μοντέλο $M = 1$.

Στο κλασικό μοντέλο δεχόμαστε ότι:

1. Το σύνολο των υψών των ζημιών $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ αποτελεί ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Η κατανομή του ύψους των ζημιών $B(x)$ είναι γενική.
2. Οι ακολουθίες $\{T_i, i = 0, 1, \dots\}$ και $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
3. Οι χρονικές στιγμές των ζημιών $\{T_i, i = 0, 1, \dots\}$ σχηματίζουν ομογενή διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $T_0 = 0$.

Απόδειξη

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων W_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανεμημένες με $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, οπότε ο χρόνος μέχρι και την άφιξη του n -οστού κινδύνου $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ακολουθεί την Erlang κατανομή ή γάμμα

$G(n, \lambda)$ με συνάρτηση κατανομής $F_W(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P[N(t) = k] &= P[N(t) \leq k] - P[N(t) \leq k-1] \\ &= 1 - P[N(t) > k] - (1 - P[N(t) > k-1]) \\ &= -P[N(t) \geq k+1] + P[N(t) \geq k] \end{aligned}$$

και από τη σχέση $P[N(t) \geq n] = P(W_1 + W_2 + \dots + W_n \leq t)$ γίνεται

$$\begin{aligned} P[N(t) = k] &= P(W_1 + W_2 + \dots + W_k \leq t) - P(W_1 + W_2 + \dots + W_{k+1} \leq t) \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^k w^{k-1} e^{-\lambda w}}{(k-1)!} dw - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1} w^k e^{-\lambda w}}{k!} dw \\ &= \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Δηλαδή $N(t) \sim P(\lambda t)$

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στην γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

Πρόταση 3.1

Στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, ως γενικευμένη εξίσωση Lundberg καλείται η εξίσωση που δίνεται από τη σχέση

$$(\delta + \lambda) - cs = \lambda \hat{b}(s). \quad (3.1)$$

Για $\delta = 0$, προκύπτει η εξίσωση Lundberg.

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.1.5) θέτοντας $M = 1$ προκύπτει ότι,

$$[(cs - \delta) - \lambda] \hat{m}_\delta(s) + \lambda \hat{b}(s) \hat{m}_\delta(s) = c \hat{m}_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s),$$

ή

$$[cs - \delta - \lambda + \lambda \hat{b}(s)] \hat{m}_\delta(s) = c \hat{m}_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s).$$

Αν ο συντελεστής του $\hat{m}_\delta(s)$ είναι μηδέν, προκύπτει η εξίσωση,

$$\det(\mathbf{A}_\delta(s)) = 0,$$

ή

$$cs - \delta - \lambda + \lambda \hat{b}(s) = 0,$$

ή

$$(\delta + \lambda) - cs = \lambda \hat{b}(s).$$

Στην περίπτωση που $\delta = 0$, η παραπάνω γίνεται

$$\lambda - cs = \lambda \hat{b}(s).$$

Από τη σχέση που συνδέει τον μετασχηματισμό Laplace και την ροπογεννήτρια

$$M_X(-s) = E(e^{-sX}) = \hat{b}(s),$$

προκύπτει η εξίσωση Lundberg

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r).$$

□

Οι Gerber και Shiu (1998) έδειξαν ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg $(\delta + \lambda) - cs = \lambda \hat{b}(s)$, έχει μία ρίζα θετική, $s_1 > 0$, και μια αρνητική που συμβολίζεται $-R_\delta$. Αν $\delta = 0$, τότε $s_1 = 0$ και η άλλη ρίζα είναι ο συντελεστής προσαρμογής R .

Ο μετασχηματισμός Laplace της $m_\delta(u)$ μπορεί να δοθεί με διάφορες εκφράσεις όπως δείχνει η πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 3.2

Στο κλασικό μοντέλο ο μετασχηματισμός Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής δίνεται από τη σχέση

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s)}{cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)} = \frac{\lambda \hat{w}(s_1) - \lambda \hat{w}(s)}{cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)}. \quad (3.2)$$

Απόδειξη

Από την (2.1.3) για $M = 1$ προκύπτει ότι,

$$[(cs - \delta) - \lambda] \hat{m}_\delta(s) + \lambda \hat{b}(s) \hat{m}_\delta(s) = c \hat{m}_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s),$$

ή

$$[cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)] \hat{m}_\delta(s) = c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s), \quad (3.3)$$

ή

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s)}{cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)}.$$

Σύμφωνα με την (2.1.5) ο πίνακας $\mathbf{A}_\delta(s)$ είναι ο συντελεστής του $\hat{m}_\delta(s)$, δηλαδή

$$\mathbf{A}_\delta(s) = cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s).$$

Πρόκειται για πίνακα 1×1 , οπότε η ορίζουσά του είναι το ίδιο το στοιχείο, δηλαδή

$$\det \mathbf{A}_\delta(s) = cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s).$$

Με βάση την πρόταση (2.2) για $\delta > 0$, υπάρχει s_1 με $Re(s_1) > 0$ τέτοιο ώστε $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$,

δηλαδή $cs_1 - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s_1) = 0$. Από την (3.3) αντικαθιστώντας το s με s_1 έχουμε

$$[cs_1 - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s_1)] \hat{m}_\delta(s_1) = c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s_1),$$

$$0 \cdot \hat{m}_\delta(s_1) = c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s_1),$$

$$c m_\delta(0) = \lambda \hat{w}(s_1). \quad (3.4)$$

Οπότε

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(s)}{cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)} = \frac{\lambda \hat{w}(s_1) - \lambda \hat{w}(s)}{cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)}.$$

□

Σημειώνεται ότι η σχέση (3.2) έχει δειχτεί από τον Dickson (1998).

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $m_\delta(u)$ στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.3

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = \frac{\lambda \hat{w}(s_1) - \lambda \hat{w}(-R_\delta)}{c + \lambda \hat{b}'(-R_\delta)}. \quad (3.5)$$

Απόδειξη

Εάν ο μετασχηματισμός Laplace του μεγέθους των απαιτήσεων B υπάρχει σε μια περιοχή του μηδενός και υπάρχει το όριο $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u)$, τότε από τη σχέση (2.4.1) παίρνουμε,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = C = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta)[c m_\delta(0) - \lambda \hat{w}(-R_\delta)]}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta}}. \quad (3.6)$$

Από την σχέση $\mathbf{A}_\delta(s) = cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)$ βρίσκουμε ότι $\text{adjoint } \mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta) = 1$ και

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta} = \left. \frac{\partial [cs - (\delta + \lambda) + \lambda \hat{b}(s)]}{\partial s} \right|_{s=-R_\delta} = [c + \lambda \hat{b}'(s)] \Big|_{s=-R_\delta} = c + \lambda \hat{b}'(-R_\delta).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν από την (3.4) ότι $c m_\delta(0) = \lambda \hat{w}(s_1)$ και αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.6) προκύπτει το ζητούμενο. □

Στην περίπτωση που $\delta = 0$, σχετικά με την ασυμπτωτική κατανομή, παίρνουμε την επόμενη πρόταση.

Πόρισμα 3.1

Αν $\delta = 0$ και η συνάρτηση ποινής είναι $w(x_1, x_2) = 1$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στο κλασικό πρότυπο ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_0 u} \psi(u) = \frac{\lambda \mu - c}{c + \lambda \hat{b}'(-R_0)}. \quad (3.7)$$

Απόδειξη

Στην περίπτωση που $\delta = 0$, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, υπάρχει ένας μηδενικός πόλος, δηλαδή, $s_1 = 0$. Τότε η σχέση (3.5) γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_0 u} m_0(u) = \frac{\lambda \hat{w}(0) - \lambda \hat{w}(-R_0)}{c + \lambda \hat{b}'(-R_0)}. \quad (3.8)$$

Για $w(x, y) = 1$, ο μετασχηματισμός Laplace της $w(\bullet)$ είναι,

$$\hat{w}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_x^{\infty} b(y) dy dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{B}(x) dx = \frac{1 - \hat{b}(s)}{s},$$

οπότε στο σημείο $-R_0$ είναι $\hat{w}(-R_0) = \frac{1 - \hat{b}(-R_0)}{-R_0}$.

Επίσης,

$$\hat{w}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{w}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \hat{b}(s)}{s} = \frac{1 - \hat{b}(0)}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}, \text{ δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία.}$$

Με εφαρμογή του κανόνα L' Hospital, προκύπτει ότι

$$\hat{w}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{w}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - \hat{b}(s))'}{s'} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\hat{b}'(s)}{1} = -\hat{b}'(0) = \mu.$$

Η $-R_\delta$ είναι η αρνητική ρίζα που ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση Lundberg (3.1).

Δηλαδή, $c(-R_\delta) - \delta - \lambda + \lambda \hat{b}(-R_\delta) = 0$, οπότε για $\delta = 0$ παίρνουμε ότι

$$c(-R_0) - \lambda + \lambda \hat{b}(-R_0) = 0 \Rightarrow \lambda [1 - \hat{b}(-R_0)] = -cR_0.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.8) τελικά προκύπτει ότι,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_0 u} \psi(u) = \frac{\lambda \mu - \lambda \frac{[1 - \hat{b}(-R_0)]}{-R_0}}{c + \lambda \hat{b}'(-R_0)} = \frac{\lambda \mu - \frac{-cR_0}{-R_0}}{c + \lambda \hat{b}'(-R_0)} = \frac{\lambda \mu - c}{c + \lambda \hat{b}'(-R_0)},$$

που είναι ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg.

□

Στη συνέχεια δίνουμε κάποια αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)) \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)],$$

για $w(x, y) = 1$ γράφεται,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)].$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς δ προκύπτει

$$\frac{\partial m_\delta(u)}{\partial \delta} = -E[T e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)],$$

$$\frac{\partial^2 m_\delta(u)}{\partial \delta^2} = (-1)^2 E[T^2 e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)],$$

⋮

$$\frac{\partial^n m_\delta(u)}{\partial \delta^n} = (-1)^n E[T^n e^{-\delta T} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)].$$

Θέτοντας $\delta = 0$ από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας T ,

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(u)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = (-1)^n E[T^n \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)]. \quad (3.9)$$

Ορίζουμε

$$\psi_n(u) := E[T^n \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)], \quad n \in \mathbf{N}, \quad (3.10)$$

όπου για $n = 0$ γίνεται

$$\psi_0(u) := \psi(u) = E[\mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] = P(T < \infty | U(0) = u), \quad (3.11)$$

δηλαδή είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Από την (3.10) βρίσκουμε ότι

$$\psi_n(u) = E[T^n \mathbf{I}(T < \infty) | U(0) = u] = E(T^n | T < \infty, U(0) = u) P(T < \infty | U(0) = u)$$

$$E(T^n | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\psi_n(u)}{P(T < \infty | U(0) = u)}$$

και από την (3.11) έπεται ότι

$$E(T^n | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\psi_n(u)}{\psi(u)}. \quad (3.12)$$

Από τις σχέσεις (3.9) και (3.10) προκύπτει ότι

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(u)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = (-1)^n \psi_n(u). \quad (3.13)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $m_\delta(u)$ είναι

$$\hat{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} m_\delta(u) du. \quad (3.14)$$

Από την (3.1.4) έπεται προφανώς ότι,

$$\frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial \delta^n} = \int_0^\infty e^{-su} \frac{\partial^n m_\delta(u)}{\partial \delta^n} du. \quad (3.15)$$

Από την (2.5.1) είναι $f_n(s) = \frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0}$ η οποία με τη βοήθεια των (3.15) και (3.13),

γίνεται

$$f_n(s) := \frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} = \int_0^\infty e^{-su} \frac{\partial^n m_\delta(u)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} du = \int_0^\infty e^{-su} (-1)^n \psi_n(u) du = (-1)^n \int_0^\infty e^{-su} \psi_n(u) du,$$

και επειδή το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace του $\psi_n(u)$, έπεται ότι

$$f_n(s) = (-1)^n \hat{\psi}_n(s). \quad (3.16)$$

Η εξίσωση (2.5.2) για $M = 1$ γίνεται

$$(cs - \lambda) f_n(s) + \lambda \hat{b}(s) f_n(s) = c \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n f_{n-1}(s),$$

ή

$$[cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)] f_n(s) = c \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n f_{n-1}(s),$$

ή

$$f_n(s) = \frac{c \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n f_{n-1}(s)}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)}. \quad (3.17)$$

Πρόταση 3.4

Για το κλασικό μοντέλο κινδύνου όταν $w(x_1, x_2) = 1$, ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} = (-1)^n \frac{n}{c} \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du, \quad n \geq 1 \quad (n \in \mathbf{N}). \quad (3.18)$$

Απόδειξη

Η (3.17) είναι αναλυτική συνάρτηση για $Re(s) \geq 0$. Ο παρονομαστής του κλάσματος γίνεται μηδέν όταν $s = 0$, αφού $\hat{b}(0) = 1$. Από την (3.17) έχουμε

$$\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} = \frac{f_n(s)}{c} [cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)] - \frac{n}{c} f_{n-1}(s).$$

Οπότε παίρνοντας και στα δύο μέλη το όριο καθώς το s τείνει στο μηδέν, έχουμε

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{f_n(s)}{c} [cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)] - \frac{n}{c} f_{n-1}(s) \right).$$

Το αριστερό μέλος είναι ανεξάρτητο του s οπότε το όριο είναι η ίδια ποσότητα, οπότε

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \lim_{s \rightarrow 0} f_{n-1}(s).$$

Αντικαθιστούμε το $f_{n-1}(s)$ από τη σχέση $f_n(s) = \left. \frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0}$ και βρίσκουμε ότι

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^{n-1} \hat{m}_\delta(s)}{\partial \delta^{n-1}} \right]_{\delta=0},$$

οπότε αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό Laplace του $\hat{m}_\delta(s)$ από (3.14), παίρνουμε

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \delta^{n-1}} \int_0^\infty e^{-su} m_\delta(u) du \right]_{\delta=0},$$

ή

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \int_0^\infty \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \delta^{n-1}} e^{-su} m_\delta(u) \Big|_{\delta=0} du,$$

ή

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \int_0^\infty \left. \frac{\partial^{n-1} m_\delta(u)}{\partial \delta^{n-1}} \right|_{\delta=0} du.$$

Από την (3.13) αντικαθιστούμε το κλάσμα στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = -\frac{n}{c} \int_0^\infty (-1)^{n-1} \psi_{n-1}(u) du,$$

$$\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = \frac{(-1)^n n}{c} \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

Από την (3.13) για $u = 0$ είναι $\left. \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0} = (-1)^n \psi_n(0)$, οπότε η σχέση (3.18) γίνεται

$$(-1)^n \psi_n(0) = \frac{(-1)^n n}{c} \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \quad \text{ή} \quad \psi_n(0) = \frac{n}{c} \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du.$$

Η σχέση Pollaczek-Khintchine εφαρμοζόμενη στη θεωρία κινδύνου έχει την ακόλουθη μορφή σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.5

Ο τύπος Pollaczek-Khintchine στο κλασικό μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}. \quad (3.19)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.1.3) για $M = 1$, $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$ προκύπτει ότι

$$c \frac{dm_0(u)}{du} - \lambda m_0(u) + \lambda \int_0^u m_0(u-y)b(y)dy + \lambda \int_u^\infty b(y)dy = 0,$$

και επειδή $m_0(u) = \psi(u)$, παίρνουμε ότι

$$c\psi'(u) - \lambda\psi(u) + \lambda \int_0^u \psi(u-y)b(y)dy + \lambda \bar{B}(u) = 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$L\left\{c\psi'(u) - \lambda\psi(u) + \lambda \int_0^u \psi(u-y)b(y)dy + \lambda \bar{B}(u)\right\} = L\{0\},$$

ή

$$cL\{\psi'(u)\} - \lambda L\{\psi(u)\} + \lambda L\left\{\int_0^u \psi(u-y)b(y)dy\right\} + \lambda L\{\bar{B}(u)\} = 1,$$

ή

$$c[s\hat{\psi}(s) - \psi(0)] - \lambda\hat{\psi}(s) + \lambda\hat{\psi}(s)\hat{b}(s) + \lambda \frac{1 - \hat{b}(s)}{s} = 0,$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται,

$$\hat{\psi}(s)[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)] = c\psi(0) - \frac{\lambda[1 - \hat{b}(s)]}{s}.$$

Όμως για την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο ισχύει $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda\mu}{c}$,

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε,

$$\hat{\psi}(s)[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)] = \lambda\mu - \frac{\lambda[1 - \hat{b}(s)]}{s},$$

ή

$$\hat{\psi}(s) = \frac{s\lambda\mu - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}{s[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)]}. \quad (3.20)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το $c\lambda$ στον αριθμητή της (3.20) βρίσκουμε ότι

$$\hat{\psi}(s) = \frac{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s) + s\lambda\mu - cs}{s[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)]},$$

ή

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}. \quad \square$$

Στη συνέχεια δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\psi}_n(s)$ και η συνάρτηση $\psi_n(u)$.

Πρόταση 3.6

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_n(u)$ δίνεται από την σχέση

$$\hat{\psi}_n(s) = n \left(\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(u) du - \hat{\psi}_{n-1}(s) \right) \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{c - \lambda \mu}$$

και αντιστρέφοντας προκύπτει

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda \mu} \left(\int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx + \int_u^{\infty} \psi_{n-1}(x) dx - \psi(u) \int_0^{\infty} \psi_{n-1}(x) dx \right). \quad (3.21)$$

Απόδειξη

Από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) έχουμε ότι

$$(-1)^n \hat{\psi}_n(s) = f_n(s) = \frac{c \frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} + n f_{n-1}(s)}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)},$$

η οποία με την βοήθεια της (3.18) γίνεται,

$$(-1)^n \hat{\psi}_n(s) = \frac{c \frac{(-1)^n n}{c} \int_0^{\infty} \psi_{n-1}(u) du + n (-1)^{n-1} \hat{\psi}_{n-1}(s)}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)} = \frac{(-1)^n n \left(\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(u) du - \hat{\psi}_{n-1}(s) \right)}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)}. \quad (3.22)$$

Ο τύπος Pollaczek-Khintchine (3.19) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{c - \lambda \mu}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)} = \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s),$$

ή

$$\frac{1}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)} = \frac{\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s)}{c - \lambda \mu}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (3.22) παίρνουμε ότι

$$(-1)^n \hat{\psi}_n(s) = (-1)^n n \left(\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(u) du - \hat{\psi}_{n-1}(s) \right) \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{c - \lambda \mu},$$

ή

$$\hat{\psi}_n(s) = n \left(\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(u) du - \hat{\psi}_{n-1}(s) \right) \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{c - \lambda \mu}.$$

Για να βρούμε την $\psi_n(u)$ προχωράμε ως εξής.

Η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\hat{\psi}_n(s) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \cdot \left(\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right) - \hat{\psi}_{n-1}(s) \frac{1}{s} + \hat{\psi}_{n-1}(s) \hat{\psi}(s) \right],$$

από την οποία παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη έχουμε,

$$L^{-1}\{\hat{\psi}_n(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \cdot \left(\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right) - \hat{\psi}_{n-1}(s) \frac{1}{s} + \hat{\psi}_{n-1}(s) \hat{\psi}(s) \right] \right\},$$

ή

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \cdot L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right\} - L^{-1}\left\{ \hat{\psi}_{n-1}(s) \frac{1}{s} \right\} + L^{-1}\{\hat{\psi}_{n-1}(s) \hat{\psi}(s)\} \right]. \quad (3.23)$$

Για τους επιμέρους μετασχηματισμούς Laplace εφαρμόζοντας κατάλληλες ιδιότητες του,

έχουμε: Από την ιδιότητα της γραμμικότητας είναι $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1}\{\hat{\psi}(s)\} = 1 -$

$\psi(u)$. Από την ιδιότητα ολοκλήρωσης, είναι $L^{-1}\left\{ \hat{\psi}_{n-1}(s) \frac{1}{s} \right\} = \int_0^u \psi_{n-1}(x) dx$. Τέλος από την

ιδιότητα συνέλιξης είναι $L^{-1}\{\hat{\psi}_{n-1}(s) \hat{\psi}(s)\} = \int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx$. Αντικαθιστώντας τα

προηγούμενα στην (3.23) προκύπτει ότι,

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \cdot [1 - \psi(u)] - \int_0^u \psi_{n-1}(x) dx + \int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx \right],$$

ή

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx + \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du - \int_0^u \psi_{n-1}(x) dx \right],$$

ή

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left[\int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx + \int_0^u \psi_{n-1}(x) dx + \int_u^\infty \psi_{n-1}(x) dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du - \int_0^u \psi_{n-1}(x) dx \right],$$

και τελικά

$$\psi_n(u) = \frac{n}{c - \lambda\mu} \left(\int_0^u \psi(u-x) \psi_{n-1}(x) dx + \int_u^\infty \psi_{n-1}(x) dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{n-1}(u) du \right).$$

□

Η σχέση (3.21) είναι ο τύπος (6.29) στην εργασία των Lin και Willmot (2000), ο οποίος προέκυψε με χρήση ουράς σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Στη συνέχεια αναφέρουμε μια σχέση για το ολοκλήρωμα της πιθανότητας χρεοκοπίας που προκύπτει από τύπο Pollaczek-Khintchine, και θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Πόρισμα 3.2

Από τον τύπο Pollaczek-Khintchine για $\mu^{(2)} < \infty$ το ολοκλήρωμα της πιθανότητας χρεοκοπίας ισούται με

$$\int_0^{\infty} \psi(u) du = \frac{\lambda \mu^{(2)}}{2(c - \lambda \mu)}. \quad (3.24)$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι

$$\hat{\psi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \psi(u) du,$$

όπου για $s = 0$ γίνεται

$$\int_0^{\infty} \psi(u) du = \hat{\psi}(0).$$

Από την (3.20) έχουμε ότι

$$\hat{\psi}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\lambda\mu - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}{s[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)]}.$$

Είναι $\hat{b}(0) = 1$, οπότε οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital και παίρνουμε:

$$\hat{\psi}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda\mu + \lambda\hat{b}'(s)}{[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)] + s[c + \lambda\hat{b}'(s)]}.$$

Όμως, $\hat{b}'(0) = (-1)^1 E(X) = -\mu$, οπότε το παραπάνω όριο οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε για δεύτερη φορά τον κανόνα L' Hospital και βρισκουμε ότι,

$$\hat{\psi}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda\hat{b}''(s)}{[c + \lambda\hat{b}'(s)] + [c + \lambda\hat{b}'(s)] + s\lambda\hat{b}''(s)}. \quad (3.25)$$

Επειδή, $\hat{b}''(0) = (-1)^2 E(X^2) = \mu^{(2)}$, αν θεωρήσουμε ότι η δεύτερη ροπή είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\mu^{(2)} < \infty, \forall x$, από την (3.25) προκύπτει ότι,

$$\hat{\psi}(0) = \frac{\lambda\mu^{(2)}}{c - \lambda\mu + c - \lambda\mu} = \frac{\lambda\mu^{(2)}}{2(c - \lambda\mu)}.$$

□

Η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας T , δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.7

Η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας δοθέντος ότι αυτή θα συμβεί είναι ίση με

$$E[T \cdot \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \frac{\lambda\mu^{(2)}}{2(c-\lambda\mu)}\psi(u)}{(c-\lambda\mu)\psi(u)}. \quad (3.26)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (3.12), για $n = 1$ παίρνουμε

$$P(T | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την $\psi_1(u)$, από την (3.21) για $n = 1$, παίρνουμε ότι

$$P(T | T < \infty, U(0) = u) = \frac{1}{c - \lambda\mu} \frac{\left(\int_0^u \psi(u-x)\psi_{1-1}(x)dx + \int_u^\infty \psi_{1-1}(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{1-1}(u)du \right)}{\psi(u)},$$

και επειδή $\psi_0(x) := \psi(x)$, έπεται ότι

$$P(T | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi(u)du}{(c - \lambda\mu)\psi(u)},$$

έτσι, με την βοήθεια της (3.24), τελικά βρίσκουμε ότι

$$P(T | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \frac{\lambda\mu^{(2)}}{2(c-\lambda\mu)}\psi(u)}{(c - \lambda\mu)\psi(u)}.$$

□

Η σχέση (3.26) είναι η εξίσωση (6.23) στην εργασία των Lin και Willmot (2000).

Στη συνέχεια δίνεται η έκφραση της $m_\delta(u)$ όταν $\delta = 0$.

Πρόταση 3.8

Αν $\delta = 0$, η $m_\delta(u)$ δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[w(U(T^-), |U(T)|)I(T < \infty | U(0) = u)] \\ &= \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\hat{w}(0)[1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $\delta = 0$. Τότε σύμφωνα με την πρόταση (2.2), η εξίσωση $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$ έχει μία μηδενική ρίζα, δηλαδή $s_1 = 0$. Τότε από την (3.2) για $\delta = 0$ προκύπτει

$$\hat{m}_0(s) = \frac{\lambda(\hat{w}(0) - \hat{w}(s))}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}, \text{ και με βάση την τύπο των Pollaczek-Khintchine η παραπάνω σχέση}$$

γίνεται

$$\hat{m}_0(s) = \lambda[\hat{w}(0) - \hat{w}(s)] \frac{\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s)}{c - \lambda\mu} = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\hat{w}(0) \left(\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right) - \hat{w}(s) \frac{1}{s} + \hat{w}(s)\hat{\psi}(s) \right).$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της τελευταίας έχουμε

$$\begin{aligned} L^{-1}\{\hat{m}_0(s)\} &= L^{-1}\left\{ \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\hat{w}(0) \left(\frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right) - \hat{w}(s) \frac{1}{s} + \hat{w}(s)\hat{\psi}(s) \right) \right\}, \\ m_0(u) &= \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left[\hat{w}(0) L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right\} - L^{-1}\left\{ \hat{w}(s) \frac{1}{s} \right\} + L^{-1}\{ \hat{w}(s)\hat{\psi}(s) \} \right]. \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα γραμμικότητας, $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s) \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1}\{ \hat{\psi}(s) \} = 1 - \psi(u)$, από την

ιδιότητα ολοκλήρωσης, $L^{-1}\left\{ \hat{w}(s) \frac{1}{s} \right\} = \int_0^u \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx$, και από την ιδιότητα

συνέλιξης $L^{-1}\{ \hat{w}(s)\hat{\psi}(s) \} = \int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx$. Οπότε η $m_0(u)$ γίνεται

$$\begin{aligned} m_0(u) &= \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left[\hat{w}(0)[1 - \psi(u)] - \int_0^u \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx + \int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx \right] \\ m_0(u) &= \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\hat{w}(0)[1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty w(x, y-x)b(y)dydx \right). \quad \square \end{aligned}$$

Από την σχέση (3.27) μπορούν να προκύψουν οι πυκνότητες των τυχαίων μεταβλητών $U(T^-)$ και $|U(T)|$ καθώς και οι ροπές τους.

Πρόταση 3.9

Η ελλειμματική πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, $U(T^-)$, δίνεται από τη σχέση

$$f(y_1 | u) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} (\bar{B}(y_1)[1 - \psi(u)] - \bar{B}(y_1)[1 - \psi(u - y_1)]I(y_1 < u)). \quad (3.28)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $w(x, y) = e^{-ax}$. Από την πρόταση (2.8) ο μετασχηματισμός Laplace για $i = 1$ είναι

$$\hat{w}(s) = \frac{1 - \hat{b}(s+a)}{s+a}, \text{ όπου για } s = 0 \text{ γίνεται } \hat{w}(0) = \frac{1 - \hat{b}(a)}{a}. \text{ Τότε από την (3.27) παίρνουμε}$$

$$E[e^{-aU(T^-)}I(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{1 - \hat{b}(a)}{a} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty e^{-ax} b(y) dy dx \right).$$

Όμως $\int_x^\infty e^{-ax} b(y) dy = e^{-ax} \int_x^\infty b(y) dy = e^{-ax} \bar{B}(x)$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει ότι,

$$E[e^{-aU(T^-)}I(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{1 - \hat{b}(a)}{a} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] e^{-ax} \bar{B}(x) dx \right). \quad (3.29)$$

Το αριστερό μέλος της (3.29) είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $U(T^-)$ με μιγαδική μεταβλητή a . Στη συνέχεια παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της, έχουμε ότι

$$L^{-1}\{E[e^{-aU(T^-)}I(T < \infty | U(0) = u)]\} = L^{-1}\left\{ \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{1 - \hat{b}(a)}{a} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] e^{-ax} \bar{B}(x) dx \right) \right\}.$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας, ισχύει ότι

$$f(y_1 | u) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left([1 - \psi(u)] L^{-1}\left\{ \frac{1 - \hat{b}(a)}{a} \right\} - L^{-1}\left\{ \int_0^u e^{-ax} [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right\} \right),$$

και επιπλέον

$L^{-1}\left\{\frac{1-\hat{b}(a)}{a}\right\} = \bar{B}(y_1)$, αφού είναι ο μετασχηματισμός Laplace της δεξιάς ουράς της $B(x)$

$L^{-1}\left\{\int_0^u e^{-ax}[1-\psi(u-x)]\bar{B}(x)dx\right\} = \bar{B}(y_1)[1-\psi(u-y_1)]$, με $y_1 < u$, αφού το ολοκλήρωμα

εκφράζει μετασχηματισμό Laplace. Έτσι τελικά παίρνουμε ότι,

$$f(y_1 | u) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} (\bar{B}(y_1)[1 - \psi(u)] - \bar{B}(y_1)[1 - \psi(u - y_1)]I(y_1 < u)).$$

□

Πρόταση 3.10

Οι ροπές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία δίνονται από τη σχέση

$$E[(U(T^-))^n | T < \infty, U(0) = u] = \frac{\lambda}{(c - \lambda\mu)\psi(u)} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u x^n [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right), \quad (3.30)$$

όπου $\mu^{(k)} = E(X^k) = \int_0^\infty x^k b(x) dx$ η ροπή k -τάξης περί την αρχή του ύψους της απαίτησης.

Απόδειξη

Οι ροπές της τυχαίας μεταβλητής $U(T^-)$ προκύπτουν παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3.29) ως προς a και στη συνέχεια θέτοντας $a = 0$. Η n -οστή παράγωγος της (3.29) είναι

$$E[(-1)^n (U(T^-))^n e^{-aU(T^-)} I(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\underbrace{\frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} \left(1 - \hat{b}(a) - \sum_{j=1}^n \frac{(-a)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}(a)}{\partial a^j} \right)}_{(*)} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] (-x)^n e^{-ax} \bar{B}(x) dx \right).$$

Θέτοντας $a = 0$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital στην (*) παίρνουμε ότι

$$E[(-1)^n (U(T^-))^n I(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(-\frac{1}{n+1} \frac{\partial^{n+1} \hat{b}(a)}{\partial a^{n+1}} \Big|_{a=0} [1 - \psi(u)] - \int_0^u (-1)^n x^n [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right).$$

$$\text{Αλλά } \mu^{(j)} = (-1)^j \frac{\partial^j \hat{b}(a)}{\partial a^j} \Big|_{a=0},$$

οπότε $(-1)^n E[(U(T^-))^n I(T < \infty | U(0) = u)] =$

$$= \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(-\frac{(-1)^{n+1} \mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u (-1)^n x^n [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right),$$

ή

$$E[(U(T^-))^n | T < \infty, U(0) = u] P(T < \infty | U(0) = u) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u x^n [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right).$$

Όμως $P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u)$, οπότε από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι,

$$E[(U(T^-))^n | T < \infty, U(0) = u] = \frac{\lambda}{(c - \lambda\mu)\psi(u)} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u x^n [1 - \psi(u-x)] \bar{B}(x) dx \right).$$

□

Η (3.30) συμφωνεί με την εξίσωση (4.5) στην εργασία των Lin and Willmot (2000).

Η επόμενη πρόταση αφορά στις ροπές της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$.

Πρόταση 3.11

Οι ροπές του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο δίνονται από τη σχέση

$$E[|U(T)|^n | T < \infty, U(0) = u] = \frac{\lambda}{(c - \lambda\mu)\psi(u)} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (y-x)^n b(y) dy dx \right). \quad (3.32)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $w(x, y) = e^{-ay}$. Από την πρόταση (2.10) ο μετασχηματισμός Laplace για $i = 1$

$$\text{είναι, } \hat{w}(s) = \frac{\hat{b}(a) - \hat{b}(s)}{s - a} \text{ και για } s = 0 \text{ γίνεται } \hat{w}(0) = \frac{\hat{b}(a) - \hat{b}(0)}{-a} = \frac{\hat{b}(a) - 1}{-a} = \frac{1 - \hat{b}(a)}{a}.$$

Τότε από την (3.27) παίρνουμε

$$E[e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{1 - \hat{b}(a)}{a} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty e^{-a(y-x)} b(y) dy dx \right). \quad (3.33)$$

Οι ροπές της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$ προκύπτουν παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3.33) ως προς a και στη συνέχεια θέτοντας $a = 0$. Η n -οστή παράγωγος είναι

$$E[(-1)^n |U(T)|^n e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] =$$

$$\frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\underbrace{\frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} \left(1 - \hat{b}(a) - \sum_{j=1}^n \frac{(-a)^j}{j!} \frac{\partial^j \hat{b}(a)}{\partial a^j} \right)}_{(*)} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (-1)^n (y-x)^n e^{-a(y-x)} b(y) dy dx \right).$$

Θέτοντας $a = 0$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital στην (*) παίρνουμε

$$E[(-1)^n |U(T)|^n e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] =$$

$$\frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(-\frac{1}{n+1} \frac{\partial^{n+1} \hat{b}(a)}{\partial a^{n+1}} \Big|_{a=0} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (-1)^n (y-x)^n b(y) dy dx \right).$$

$$\text{Αλλά } \mu^{(j)} = (-1)^j \frac{\partial^j \hat{b}(a)}{\partial a^j} \Big|_{a=0},$$

οπότε

$$(-1)^n E[|U(T)|^n e^{-a|U(T)|} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] =$$

$$\frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(-\frac{(-1)^{n+1} \mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (-1)^n (y-x)^n b(y) dy dx \right),$$

ή

$$E[|U(T^-)|^n | T < \infty, U(0) = u] P(T < \infty | U(0) = u) =$$

$$\frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (y-x)^n b(y) dy dx \right).$$

Όμως, $P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u)$ οπότε από την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι,

$$E[|U(T^-)|^n | T < \infty, U(0) = u] =$$

$$= \frac{\lambda}{(c - \lambda\mu)\psi(u)} \left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} [1 - \psi(u)] - \int_0^u [1 - \psi(u-x)] \int_x^\infty (y-x)^n b(y) dy dx \right).$$

□

Η εξίσωση (3.32) είναι η αντίστοιχη (4.5) στην εργασία των Lin and Willmot (2000).

Βλέπουμε ότι οι (3.29) και (3.33) για $u = 0$ συμπίπτουν, δηλαδή

$$E[e^{-aU(T^-)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \left(\frac{1 - \hat{b}(a)}{a} (1 - \psi(0)) \right) = E[e^{-aU(T)} \mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u)].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥΣ ERLANG (2) ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ

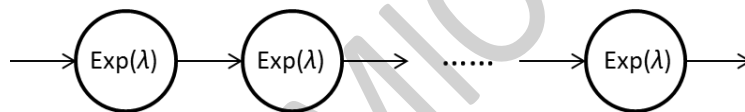
Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen με ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων να ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή δύο φάσεων ή βαθμίδων.

4.1 Η Γενικευμένη Erlang κατανομή

Στην παράγραφο αυτή δίνεται η κατανομή Erlang και η γενικευμένη μορφή της καθώς και ιδιότητες αυτής.

Κατανομή Erlang n βαθμίδων

Θεωρούμε μια διαδικασία η οποία διέρχεται από n βαθμίδες. Στην i βαθμίδα παραμένει χρόνο που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Σχηματικά έχουμε



Σχήμα 4.1: Erlang- n σαν σειριακό σύστημα n ισόνομων εκθετικών βαθμίδων

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και κατανομής της Erlang είναι αντίστοιχα

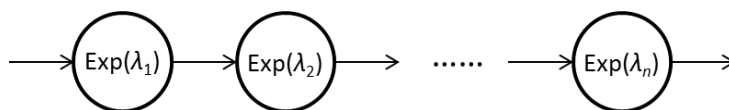
$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x > 0, \lambda > 0, r = 1, 2, \dots,$$

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0, r = 1, 2, \dots$$

Η Erlang- n είναι περίπτωση της Gamma κατανομής $G(\alpha, \beta)$ με α θετικό ακέραιο, και $\beta = \lambda$.

Γενικευμένη Erlang n βαθμίδων (υποεκθετική κατανομή – hypoexponential distribution)

Η κατανομή αυτή αποτελεί γενίκευση της προηγούμενης. Θεωρούμε μια διαδικασία η οποία διέρχεται από n βαθμίδες. Στην βαθμίδα i παραμένει χρόνο που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i . Σχηματικά είναι,



Σχήμα 4.2: Γενικευμένη Erlang- n σαν σειριακό σύστημα εκθετικών βαθμίδων

Ορισμός 4.1

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$) αντίστοιχα, τότε

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{HYPO}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Ιδιότητες

α) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x > 0 \text{ όπου } a_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

β) μέση τιμή

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i},$$

γ) διασπορά

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{V}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}, \text{ λόγω ανεξαρτησίας των } X_i.$$

δ) συντελεστής μεταβλητότητας

$$CV_X = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\right)^2}} \leq 1 \quad \text{αφού} \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \text{ για } a_i > 0$$

Επειδή η τιμή του $CV_X \leq 1$ η κατανομή μπορεί να μοντελοποιήσει τυχαίες μεταβλητές με μεταβλητότητα μικρότερη ή ίση από αυτή μιας εκθετικής κατανομής.

ε) μετασχηματισμός Laplace

$$L_X(s) = \hat{x}(s) = L\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n L\{X_i\} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$$

στ) Εάν $X_1 \sim \text{HYPO}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, και $X_2 \sim \text{HYPO}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r)$ όπου X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$X_1 + X_2 \sim \text{HYPO}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r)$$

Γενικευμένη Erlang 2 βαθμίδων

Στην περίπτωση $n = 2$ έχουμε συγκεκριμένα

$$X \sim \text{HYPO}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$f(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}), x > 0$$

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x}, x \geq 0$$

$$\hat{x}(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

4.2 Το γενικό μοντέλο στην περίπτωση της γενικευμένης Erlang(2) κατανομής

Στη παράγραφο αυτή προσαρμόζουμε το γενικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2 για να περιγράψει την περίπτωση όπου οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ζημιών ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή δύο φάσεων. Θεωρούμε λοιπόν $M = n = 2$. Έστω ότι σύστημα ξεκινά από την κατάσταση 1. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε ότι συμβαίνει μία μόνο απαίτηση και συγκεκριμένα στην κατάσταση 1 με συνάρτηση κατανομής $B_1(x) = B(x)$ και αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace $\hat{b}_1(s) = \hat{b}(s)$. Η κατανομή του μεγέθους της απαίτησης στην κατάσταση 2 είναι η εκφυλισμένη στο 0. Δηλαδή, για το μέγεθος της απαίτησης X_2 ισχύει $P(X_2 = 0) = 1$ με συνάρτηση κατανομής $B_2(x) = I(x \geq 0)$ και για τον μετασχηματισμό Laplace της είναι $\hat{b}_2(s) = 1$. Επίσης είναι $\hat{w}_1(s) = \hat{w}(s)$ και $\hat{w}_2(s) = 0$. Έτσι, οι σχετικοί πίνακες του μοντέλου διαμορφώνονται ως εξής:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \mathbf{\hat{B}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{\hat{w}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο ορίζεται ως

$$m_\delta(u) := m_{\delta,1}(u).$$

Πρόταση 4.1

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ είναι η λύση της ολοκληρω-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{\delta - cD}{\lambda_j} \right) m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)b(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b(y)dy, \quad (4.2.1)$$

όπου D είναι ο τελεστής παραγώγισης ως προς u .

Απόδειξη

Από την εξίσωση (2.1.1) για $i = 1$ και $i = 2$ προκύπτει αντίστοιχα

$$c \frac{dm_{\delta,1}(u)}{du} - (\lambda_1 + \delta)m_{\delta,1}(u) + \lambda_1 \left(p_{11} \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + p_{12} \int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy \right) + \lambda_1 \left(p_{11} \int_u^\infty w(u, y-u)b_1(y)dy + p_{12} \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy \right) = 0,$$

και

$$c \frac{dm_{\delta,2}(u)}{du} - (\lambda_2 + \delta)m_{\delta,2}(u) + \lambda_2 \left(p_{21} \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + p_{22} \int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy \right) + \lambda_2 \left(p_{21} \int_u^\infty w(u, y-u)b_1(y)dy + p_{22} \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy \right) = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες μετάβασης από τον πίνακα \mathbf{P} βρίσκουμε ότι,

$$c \frac{dm_{\delta,1}(u)}{du} - (\lambda_1 + \delta)m_{\delta,1}(u) + \lambda_1 \int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy + \lambda_1 \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy = 0,$$

$$c \frac{dm_{\delta,2}(u)}{du} - (\lambda_2 + \delta)m_{\delta,2}(u) + \lambda_2 \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + \lambda_2 \int_u^\infty w(u, y-u)b_1(y)dy = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{1}{\lambda_1} \left((\lambda_1 + \delta)m_{\delta,1}(u) - c \frac{dm_{\delta,1}(u)}{du} \right) = \int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy,$$

$$\frac{1}{\lambda_2} \left((\lambda_2 + \delta)m_{\delta,2}(u) - c \frac{dm_{\delta,2}(u)}{du} \right) = \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-x)b_1(y)dy.$$

Αν D είναι ο τελεστής παραγωγίσης ως προς u , οι παραπάνω γράφονται

$$\frac{\lambda_1 + \delta - cD}{\lambda_1} m_{\delta,1}(u) = \int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy,$$

$$\frac{\lambda_2 + \delta - cD}{\lambda_2} m_{\delta,2}(u) = \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b_1(y)dy.$$

Αλλά για το μέγεθος της απαίτησης στην κατάσταση 2 έχουμε την εκφυλισμένη κατανομή στο $y = 0$. Οπότε για το δεξί μέλος της πρώτης από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, ισχύει

$$\int_0^u m_{\delta,2}(u-y)b_2(y)dy = m_{\delta,2}(u) \text{ και } \int_u^\infty w(u, y-u)b_2(y)dy = 0, \text{ αφού η συνάρτηση ποινής}$$

$w(x, y)$ ορίζεται για $x, y > 0$. Έτσι το σύστημα των δύο εξισώσεων για τις $m_{\delta,1}(u)$ και

$m_{\delta,2}(u)$ γίνεται,

$$\frac{\lambda_1 + \delta - cD}{\lambda_1} m_{\delta,1}(u) = m_{\delta,2}(u),$$

$$\frac{\lambda_2 + \delta - cD}{\lambda_2} m_{\delta,2}(u) = \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b_1(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b_1(y)dy.$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\left(1 + \frac{\delta - cD}{\lambda_1}\right) \left(1 + \frac{\delta - cD}{\lambda_2}\right) m_{\delta,1}(u) = \int_0^u m_{\delta,1}(u-y)b(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b(y)dy,$$

και επειδή $m_\delta(\cdot) := m_{\delta,1}(\cdot)$, τελικά παίρνουμε ότι,

$$\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{\delta - cD}{\lambda_j}\right) m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)b(y)dy + \int_u^\infty w(u, y-u)b(y)dy.$$

□

Στην συνέχεια υπολογίζεται ο πίνακας \mathbf{K} .

Πρόταση 4.2

Στο ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen όταν οι ενδιαμέσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή δύο φάσεων, ο πίνακας \mathbf{K} είναι

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} & 1 \\ \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Απόδειξη

Ο πίνακας \mathbf{K} είναι

$$\mathbf{K} = (\vec{k}_1, \vec{k}_2)^T = \begin{pmatrix} \vec{k}_1^T \\ \vec{k}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Αρχικά από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta^T(s_i)\vec{k}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2,$$

βρίσκουμε μη μηδενικά διανύσματα \vec{k}_1 και \vec{k}_2 .

Ο πίνακας $\mathbf{A}_\delta(s)$ γίνεται

$$\mathbf{A}_\delta(s) = (cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{B}}(s)$$

$$\begin{aligned}
&= (cs - \delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & 0 \\ 0 & cs - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & 0 \\ 0 & cs - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 \hat{b}(s) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

Για το διάνυσμα $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}$, έχουμε

$$\mathbf{A}_\delta^T(s_1) \vec{k}_1 = \vec{0},$$

ή

$$\begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ή

$$\begin{pmatrix} cs_1 - \delta - \lambda_1 & \lambda_2 \hat{b}(s_1) \\ \lambda_1 & cs_1 - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

οπότε προκύπτει το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} (cs_1 - \delta - \lambda_1)k_{11} + \lambda_2 \hat{b}(s_1)k_{12} = 0, \\ \lambda_1 k_{11} + (cs_1 - \delta - \lambda_2)k_{12} = 0. \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς k_{11} και k_{12} είναι ομογενές. Αν η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική.

Αν η ορίζουσα είναι μηδέν, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις συμπεριλαμβανομένης της μηδενικής. Θέλουμε μη μηδενικές λύσεις. Έστω $k_{12} = 1$. Τότε από τη δεύτερη εξίσωση

παίρνουμε $k_{11} = \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1}$. Έτσι βρίσκουμε το διάνυσμα

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.4}$$

Όμοια για το διάνυσμα $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix}$ είναι

$$\mathbf{A}_\delta^\top(s_2)\vec{k}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} cs_2 - \delta - \lambda_1 & \lambda_2 \hat{b}(s_2) \\ \lambda_1 & cs_2 - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (cs_2 - \delta - \lambda_1)k_{21} + \lambda_2 \hat{b}(s_2)k_{22} = 0, \\ \lambda_1 k_{21} + (cs_2 - \delta - \lambda_2)k_{22} = 0. \end{cases}$$

Έστω $k_{22} = 1$. Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $k_{21} = \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1}$,

Οπότε βρίσκουμε το διάνυσμα

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Από τις (4.2.4) και (4.2.5) έπεται ότι ο πίνακας \mathbf{K} γίνεται

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} & 1 \\ \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Για τις ποσότητες $m_{\delta,i}(0)$, $i = 1, 2$, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3

Οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν, είναι

$$m_\delta(0) := m_{\delta,1}(0) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_1) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_2), \quad (4.2.6)$$

$$m_{\delta,2}(0) = -\frac{(\lambda_2 + \delta - cs_2)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_1) + \frac{(\lambda_2 + \delta - cs_1)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_2). \quad (4.2.7)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.2.4) της πρότασης 2.4 είναι

$$m_{\delta,i}(0) = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_{j_1}(s_{j_2}), \quad i = 1, 2.$$

Για $i = 1$ και $i = 2$ προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$m_{\delta,1}(0) = \sum_{j_2=1}^2 C_{1, j_2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_1(s_{j_2}) + \sum_{j_2=1}^2 C_{2, j_2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_2(s_{j_2}),$$

και

$$m_{\delta,2}(0) = \sum_{j_2=1}^2 C_{1,j_2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_1(s_{j_2}) + \sum_{j_2=1}^2 C_{2,j_2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}_2(s_{j_2}).$$

Αλλά $\hat{w}_1(s) = \hat{w}(s)$ και $\hat{w}_2(s_{j_2}) = 0$ οπότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$m_{\delta,1}(0) = \sum_{j_2=1}^2 C_{1,j_2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_{j_2}), \quad (4.2.8)$$

και

$$m_{\delta,2}(0) = \sum_{j_2=1}^2 C_{1,j_2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_{j_2}). \quad (4.2.9)$$

Για τους συντελεστές των $\hat{w}(s_{j_2})$ χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.2.5). Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $p_{11} = 0$, παίρνουμε ότι

$$C_{1,j_2}^{(1)} = \frac{(-1)^{1+j_2} \cdot \det K_{j_2,1} \cdot \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{1l} k_{j_2,l}}{c \det K} = \frac{(-1)^{1+j_2} \cdot \det K_{j_2,1} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{j_2,2}}{c \det K},$$

$$C_{1,j_2}^{(2)} = \frac{(-1)^{2+j_2} \cdot \det K_{j_2,2} \cdot \sum_{l=1}^2 \lambda_l p_{1l} k_{j_2,l}}{c \det K} = \frac{(-1)^{2+j_2} \cdot \det K_{j_2,2} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{j_2,2}}{c \det K}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{K} είναι

$$\det \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \lambda_2 + \delta - cs_1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 + \delta - cs_2 \\ \lambda_2 + \delta - cs_2 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} \cdot 1 - \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} \cdot 1 = \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1},$$

οπότε οι προηγούμενοι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

Για τα $C_{1,j_2}^{(1)}$ με $j_2 = 1, 2$

$$C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det K_{1,1} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{12}}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \lambda_2 \cdot 1 \cdot 1}{c \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2 (s_2 - s_1)},$$

$$C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det K_{2,1} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{22}}{c \det \mathbf{K}} = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot \lambda_2 \cdot 1 \cdot 1}{c \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2 (s_2 - s_1)}.$$

Συνεπώς από την (4.2.8) η $m_{\delta,1}(0)$ γράφεται

$$m_{\delta}(0) := m_{\delta,1}(0) = C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_1) + C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_2),$$

ή

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_1) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_2).$$

Όμοια για τα $C_{1,j_2}^{(2)}$ με $j_2 = 1, 2$ είναι

$$C_{1,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det K_{1,2} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{1,2}}{c \det \mathbf{K}} = \frac{(-1) \cdot \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} \cdot \lambda_2 \cdot 1 \cdot 1}{c \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} = -\frac{(\lambda_2 + \delta - cs_2)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)},$$

$$C_{1,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det K_{2,2} \cdot \lambda_2 p_{21} k_{2,2}}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} \cdot \lambda_2 \cdot 1 \cdot 1}{c \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} = \frac{(\lambda_2 + \delta - cs_1)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)},$$

και από την (4.2.9), η $m_{\delta,2}(0)$ γράφεται,

$$m_{\delta,2}(0) = C_{1,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_1) + C_{1,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_2),$$

ή

$$m_{\delta,2}(0) = -\frac{(\lambda_2 + \delta - cs_2)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_1) + \frac{(\lambda_2 + \delta - cs_1)\lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} \hat{w}(s_2).$$

□

Πρόταση 4.4

Για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δίνεται από τη σχέση

$$f(y_1, y_2 | 0) := f_1(y_1, y_2 | 0) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} b_1(y_1 + y_2) (e^{-s_1 y_1} - e^{-s_2 y_1}). \quad (4.2.10)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.3.1) για $i = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2 | 0) &:= f_1(y_1, y_2 | 0) = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 C_{j_1, j_2}^{(i)}(s_1, s_2, \delta) e^{-s_{j_2} y_1} b_{j_1}(y_1 + y_2) \\ &= C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) e^{-s_1 y_1} b_1(y_1 + y_2) + C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) e^{-s_2 y_1} b_1(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές $C_{1,1}^{(1)}$ και $C_{1,2}^{(1)}$ από τη πρόταση 4.3, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2 | 0) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} e^{-s_1 y_1} b_1(y_1 + y_2) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} e^{-s_2 y_1} b_1(y_1 + y_2) \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2(s_2 - s_1)} b_1(y_1 + y_2) (e^{-s_1 y_1} - e^{-s_2 y_1}). \end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα βρούμε μια γενική έκφραση για το $\vec{m}_\delta(s)$. Αρχικά αποδεικνύουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1

Εστω $\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)$ ο προσαρτημένος πίνακας του $\mathbf{A}_\delta(s)$. Η πρώτη γραμμή του διανύσματος $\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)\vec{m}_\delta(0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\left(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)\vec{m}_\delta(0)\right)_1 = \frac{-\lambda_1\lambda_2}{c} \left(\hat{w}(s_1) \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right). \quad (4.2.11)$$

Απόδειξη

Από την (4.2.3) ο πίνακας $\mathbf{A}_\delta(s)$ είναι 0

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας $\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)$ είναι

$$\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) = \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 & -\lambda_2 \hat{b}(s) \\ -\lambda_1 & cs - \delta - \lambda_1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\delta,adj}(s)\vec{m}_\delta(0) &= \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\delta,1}(0) \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (cs - \delta - \lambda_2)m_{\delta,1}(0) - \lambda_1 m_{\delta,2}(0) \\ -\lambda_2 \hat{b}(s)m_{\delta,1}(0) + (cs - \delta - \lambda_1)m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η πρώτη γραμμή του παραπάνω διανύσματος είναι

$$\left(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s)\vec{m}_\delta(0)\right)_1 = (cs - \delta - \lambda_2)m_{\delta,1}(0) - \lambda_1 m_{\delta,2}(0).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} m_{\delta,1}(0) &= \sum_{j_2=1}^2 C_{1,j_2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_{j_2}) \\ &= C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_1) + C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_2) \\ &= \frac{\lambda_2 \det K_{1,1}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}(s_1) - \frac{\lambda_2 \det K_{2,1}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}(s_2) \\ &= \frac{\lambda_2}{c \det \mathbf{K}} [\det K_{1,1} \hat{w}(s_1) - \det K_{2,1} \hat{w}(s_2)], \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
m_{\delta,2}(0) &= \sum_{j_2=1}^2 C_{1,j_2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_{j_2}) \\
&= C_{1,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_1) + C_{1,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta) \hat{w}(s_2) \\
&= \frac{-\lambda_2 \det K_{1,2}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}(s_1) + \frac{\lambda_2 \det K_{2,2}}{c \det \mathbf{K}} \hat{w}(s_2) \\
&= \frac{-\lambda_2}{c \det \mathbf{K}} [\det K_{1,2} \hat{w}(s_1) - \det K_{2,2} \hat{w}(s_2)],
\end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_{\delta}(0))_1 \\
&= (cs - \delta - \lambda_2) \frac{\lambda_2}{c \det \mathbf{K}} [\det K_{1,1} \hat{w}(s_1) - \det K_{2,1} \hat{w}(s_2)] + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c \det \mathbf{K}} [\det K_{1,2} \hat{w}(s_1) - \det K_{2,2} \hat{w}(s_2)] \\
&= \frac{\lambda_2}{c \det \mathbf{K}} \left([(cs - \delta - \lambda_2) \det K_{1,1} + \lambda_1 \det K_{1,2}] \hat{w}(s_1) + [-(cs - \delta - \lambda_2) \det K_{2,1} - \lambda_1 \det K_{2,2}] \hat{w}(s_2) \right) \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c \det \mathbf{K}} \left[\left(\frac{cs - \delta - \lambda_2}{\lambda_1} \det K_{1,1} + \det K_{1,2} \right) \hat{w}(s_1) + \left(\frac{-(cs - \delta - \lambda_2)}{\lambda_1} \det K_{2,1} - \det K_{2,2} \right) \hat{w}(s_2) \right] \\
&= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c \det \mathbf{K}} \left[\left(\frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \det K_{1,1} - \det K_{1,2} \right) \hat{w}(s_1) + \left(-\frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \det K_{2,1} + \det K_{2,2} \right) \hat{w}(s_2) \right].
\end{aligned}$$

Ορίζουμε τον πίνακα \mathbf{K}_j^* ο οποίος έχει s στη θέση του s_j . Συγκεκριμένα έχουμε τους πίνακες:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} & 1 \\ \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1^* = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} & 1 \\ \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2^* = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} & 1 \\ \frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι αντίστοιχες ορίζουσες των παραπάνω πινάκων είναι

$$\det \mathbf{K} = \frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}, \quad \det \mathbf{K}_1^* = \frac{c(s_2 - s)}{\lambda_1}, \quad \det \mathbf{K}_2^* = \frac{c(s - s_1)}{\lambda_1}.$$

Με τη βοήθεια των πινάκων και οριζουσών, οι συντελεστές των $\hat{w}(s_1)$ και $\hat{w}(s_2)$ στις παρενθέσεις της παράστασης $(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_{\delta}(0))_1$, διαμορφώνονται ως εξής, αντίστοιχα:

συντελεστής του $\hat{w}(s_1)$:

$$\frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \det K_{1,1} - \det K_{1,2} = \frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \cdot 1 - \frac{\lambda_2 + \delta - cs_2}{\lambda_1} = \det \mathbf{K}_1^* = \frac{c(s_2 - s)}{\lambda_1}$$

συντελεστής του $\hat{w}(s_2)$:

$$-\frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \det K_{2,1} + \det K_{2,2} = -\frac{\lambda_2 + \delta - cs}{\lambda_1} \cdot 1 + \frac{\lambda_2 + \delta - cs_1}{\lambda_1} = \det \mathbf{K}_2^* = \frac{c(s - s_1)}{\lambda_1}.$$

Έτσι η πρώτη γραμμή του διανύσματος $\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_\delta(0)$ γίνεται

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_\delta(0))_1 &= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c} \left(\frac{\det \mathbf{K}_1^*}{\det \mathbf{K}} \hat{w}(s_1) + \frac{\det \mathbf{K}_2^*}{\det \mathbf{K}} \hat{w}(s_2) \right) \\ &= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c} \left(\frac{\frac{c(s_2 - s)}{\lambda_1}}{\frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} \hat{w}(s_1) + \frac{\frac{c(s - s_1)}{\lambda_1}}{\frac{c(s_2 - s_1)}{\lambda_1}} \hat{w}(s_2) \right) \\ &= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c} \left(\frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} \hat{w}(s_1) + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \hat{w}(s_2) \right). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.5

Ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποιής είναι

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{w}(s) - \left(\hat{w}(s_1) \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \right)}{\left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_1} \right) \left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_2} \right) - \hat{b}(s)}. \quad (4.2.12)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.4.2) είναι

$$\vec{\hat{m}}_\delta(s) = \begin{pmatrix} \hat{m}_{\delta,1}(s) \\ \hat{m}_{\delta,2}(s) \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) [c \vec{m}_\delta(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s)]}{\det \mathbf{A}_\delta(s)},$$

από την οποία παίρνουμε ότι

$$\hat{m}_{\delta,1}(s) := \hat{m}_\delta(s) = \frac{(c \mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_\delta(0) - \mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \mathbf{A} \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s))_1}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}. \quad (4.2.13)$$

Από την (4.2.11) έχει υπολογιστεί το στοιχείο $(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \vec{m}_\delta(0))_1$.

Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \mathbf{A} \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s) &= \begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (cs - \delta - \lambda_2) \lambda_1 & -\lambda_1 \lambda_2 \\ -\lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s) & (cs - \delta - \lambda_1) \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 & (cs - \delta - \lambda_2)\lambda_1 \\ (cs - \delta - \lambda_1)\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2\hat{b}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2\hat{w}(s) \\ (cs - \delta - \lambda_1)\lambda_2\hat{w}(s) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

οπότε

$$\left(\mathbf{A}_{\delta,adj}(s) \Lambda \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s)\right)_1 = -\lambda_1\lambda_2 \hat{w}(s), \quad (4.2.14)$$

και από την (4.2.3) είναι

$$\det(\mathbf{A}_{\delta}(s)) = \begin{vmatrix} cs - \delta - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2\hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 \end{vmatrix} = (cs - \delta - \lambda_1)(cs - \delta - \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2\hat{b}(s). \quad (4.2.15)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2.13) παίρνουμε διαδοχικά

$$\hat{m}_{\delta}(s) = \frac{c \frac{-\lambda_1\lambda_2}{c} \left(\hat{w}(s_1) \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right) + \lambda_1\lambda_2 \hat{w}(s)}{(cs - \delta - \lambda_1)(cs - \delta - \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2\hat{b}(s)},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta}(s) = \frac{\hat{w}(s) - \left(\hat{w}(s_1) \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{\frac{cs - \delta - \lambda_1}{\lambda_1} \frac{cs - \delta - \lambda_2}{\lambda_2} - \hat{b}(s)},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta}(s) = \frac{\hat{w}(s) - \left(\hat{w}(s_1) \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{\left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_1}\right) \left(1 + \frac{\delta - cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s)}.$$

□

Η εξίσωση (4.2.12) είναι η αντίστοιχη (7.3) των Gerber και Shiu (2005).

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $m_{\delta}(u)$ δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.6

Εάν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής της απαίτησης σε μια περιοχή γύρω από την αρχή και υπάρχει το όριο $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_{\delta}u} m_{\delta}(u)$, τότε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $m_{\delta}(u)$ ισχύει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = \frac{\hat{w}(s_1) \frac{-R_\delta - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{-R_\delta - s_1}{s_2 - s_1} - \hat{w}(-R_\delta)}{\frac{c}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_2}\right) + \frac{c}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_1}\right) + \hat{b}'(-R_\delta)}, \quad (4.2.16)$$

όπου $-R_\delta$ είναι η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $\det(\mathbf{A}_\delta) = 0$.

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.4.1) είναι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} \bar{m}_\delta(u) = \frac{\mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta)[c \bar{m}_\delta(0) - \Lambda \mathbf{P} \bar{\hat{w}}(-R_\delta)]}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta}}.$$

Από την οποία για $m_\delta(u) = m_{\delta,1}(u)$ έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = \frac{\left(c \mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta) \bar{m}_\delta(0) - \mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta) \Lambda \mathbf{P} \bar{\hat{w}}(-R_\delta) \right)_1}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta}}. \quad (4.2.17)$$

Από τις σχέσεις (4.2.11) και (4.2.14) είναι

$$\begin{aligned} & \left(c \mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta) \bar{m}_\delta(0) - \mathbf{A}_{\delta,adj}(-R_\delta) \Lambda \mathbf{P} \bar{\hat{w}}(-R_\delta) \right)_1 \\ &= c \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c} \left(\hat{w}(s_1) \frac{-R_\delta - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{-R_\delta - s_1}{s_2 - s_1} \right) + \lambda_1 \lambda_2 \hat{w}(-R_\delta). \end{aligned}$$

Από την (4.2.15), έχουμε ότι

$$\det(\mathbf{A}_\delta(s)) = (cs - \delta - \lambda_1)(cs - \delta - \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s),$$

οπότε η παράγωγος της ορίζουσας ως προς s είναι,

$$\frac{\partial}{\partial s} \det(\mathbf{A}_\delta(s)) = c(cs - \delta - \lambda_2) + (cs - \delta - \lambda_1)c - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}'(s),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s) \right|_{s=-R_\delta} &= c(-cR_\delta - \delta - \lambda_2) + (-cR_\delta - \delta - \lambda_1)c - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}'(-R_\delta) \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{c}{\lambda_1} \left(\frac{cR_\delta + \delta + \lambda_2}{\lambda_2} \right) + \frac{c}{\lambda_2} \left(\frac{cR_\delta + \delta + \lambda_1}{\lambda_1} \right) + \hat{b}'(-R_\delta) \right] \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{c}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_2} \right) + \frac{c}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_1} \right) + \hat{b}'(-R_\delta) \right]. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (4.2.17) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) &= \frac{c \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{c} \left(\hat{w}(s_1) \frac{-R_\delta - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{-R_\delta - s_1}{s_2 - s_1} \right) + \lambda_1 \lambda_2 \hat{w}(-R_\delta)}{-\lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{c}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_2} \right) + \frac{c}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_1} \right) + \hat{b}'(-R_\delta) \right]} \\ &= \frac{\hat{w}(s_1) \frac{-R_\delta - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{-R_\delta - s_1}{s_2 - s_1} - \hat{w}(-R_\delta)}{\frac{c}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_2} \right) + \frac{c}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\delta + cR_\delta}{\lambda_1} \right) + \hat{b}'(-R_\delta)}. \end{aligned}$$

□

Ο τύπος (4.29.1) γενικεύει την εξίσωση (4.10) των Gerber και Shiu (1998).

Πρόταση 4.7

Η από κοινού (ελλειμματική) συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο Sparre Andersen με χρόνους μεταξύ αφίξεων απαιτήσεων να ακολουθούν γενικευμένη Erlang(2) κατανομή, δίνεται από τη σχέση

$$f(y_1, y_2 | u) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 b(y_1 + y_2)}{c^2 \phi(0)} \left(\frac{1}{s_2 - s_1} e^{-s_1(y_1 - u)} \int_{\max\{0, u - y_1\}}^u e^{-s_1 z} d\phi(z) + \frac{1}{s_1 - s_2} e^{-s_2(y_1 - u)} \int_{\max\{0, u - y_1\}}^u e^{-s_2 z} d\phi(z) \right), \quad (4.2.18)$$

όπου $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης με αρχικό κεφάλαιο u .

Απόδειξη

Θέτοντας $w(x_1, x_2) = 1$ και $\delta = 0$ στην αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Δηλαδή,

$$m_0(u) = E[I(T < \infty | U(0) = u)] = P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u).$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{w}(s)$ είναι

$$\hat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty w(x, y - x) dB(y) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_x^\infty b(y) dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \bar{B}(x) dx = \frac{1 - \hat{b}(s)}{s}.$$

Από τη σχέση (4.2.12) για $\delta = 0$, έχουμε

$$\hat{m}_0(s) = \hat{\psi}(s) = \frac{\hat{w}(s) - \left(\hat{w}(s_1) \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} + \hat{w}(s_2) \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \right)}{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2} \right) - \hat{b}(s)}$$

και αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμό Laplace $\hat{w}(s)$ προκύπτει ότι

$$\hat{\psi}(s) = \frac{\frac{1-\hat{b}(s)}{s} - \left(\frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{1-\hat{b}(s_2)}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s)}.$$

Επίσης για το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας είναι

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \Rightarrow L\{\phi(u)\} = L\{1 - \psi(u)\} \Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s).$$

Οπότε έχουμε ότι,

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1-\hat{b}(s)}{s} - \left(\frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{1-\hat{b}(s_2)}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s)},$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s) \quad [1 - \hat{b}(s)] - s \left(\frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{1-\hat{b}(s_2)}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{s \left[\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s) \right]},$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - 1 + s \left(\frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} + \frac{1-\hat{b}(s_2)}{s_2} \frac{s-s_1}{s_2-s_1} \right)}{s \left[\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s) \right]}.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής στο παραπάνω κλάσμα είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς s .

Η συνάρτηση $\hat{\phi}(s)$ είναι αναλυτική για $Re(s) > 0$ και έχει έναν απλό πόλο (ρίζα παρονομαστή) στο $s = 0$. Συνεπώς, ο αριθμητής πρέπει να έχει δύο ρίζες s_1, s_2 . Αφού για $\delta = 0$ είναι $s_1 = 0$, η τιμή 0 είναι πολλαπλότητας 2. Με παραγοντοποίηση του πολυωνύμου έχουμε:

$$\beta(s - s_1)(s - s_2),$$

όπου $\beta \in \mathbf{R}$ σταθερά. Οπότε η $\hat{\phi}(s)$ γράφεται

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\beta(s - s_1)(s - s_2)}{s \left[\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s) \right]} = \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 (s - s_1)(s - s_2)}{s [(\lambda_1 - cs)(\lambda_2 - cs) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s)]}. \quad (4.2.19)$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\phi}(s)$. Οπότε

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\phi}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 (s - s_1)(s - s_2)}{s[(\lambda_1 - cs)(\lambda_2 - cs) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s)]} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 (s - s_1)(s - s_2)}{(\lambda_1 - cs)(\lambda_2 - cs) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s)}.\end{aligned}$$

Το όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και εφαρμόζουμε κανόνα L'Hospital. Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{[\beta \lambda_1 \lambda_2 (s - s_1)(s - s_2)]'}{[(\lambda_1 - cs)(\lambda_2 - cs) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}(s)]'} \\ \phi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 [(s - s_2) + (s - s_1)]}{-c(\lambda_2 - cs) - (\lambda_1 - cs)c - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}'(s)}.\end{aligned}$$

Προκύπτει πάλι απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και εφαρμόζουμε για δεύτερη φορά τον κανόνα L'Hospital. Τότε,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\{\beta \lambda_1 \lambda_2 [(s - s_2) + (s - s_1)]\}'}{[-c(\lambda_2 - cs) - (\lambda_1 - cs)c - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}'(s)]'} \\ \phi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 (1+1)}{c^2 + c^2 - \lambda_1 \lambda_2 \hat{b}''(s)} = \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2 2}{2c^2 - 0} = \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2}{c^2}\end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς β προκύπτει

$$\beta = \frac{c^2 \phi(0)}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Αντικαθιστώντας το β στην (4.2.19) προκύπτει η σχέση

$$\hat{\phi}(s) = \frac{c^2 \phi(0)(s - s_1)(s - s_2)}{\lambda_1 \lambda_2 s \left[\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2}\right) - \hat{b}(s) \right]}. \quad (4.2.20)$$

Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2 = y_2)$ και $\delta = 0$ παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή την $f(y_1, y_2 | u)$. Για τη συγκεκριμένη μορφή της $w(\cdot)$ ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\hat{w}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_x^{\infty} w(x, y - x) dB(y) dx = e^{-sy_1} b(y_1 + y_2)$$

και από την (4.2.12) έχουμε

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = \frac{e^{-sy_1} b(y_1 + y_2) - \left(e^{-s_1 y_1} b(y_1 + y_2) \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} + e^{-s_2 y_1} b(y_1 + y_2) \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \right)}{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2} \right) - \hat{b}(s)},$$

ή

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{e^{-sy_1} - e^{-s_1 y_1} \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} - e^{-s_2 y_1} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}}{\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2} \right) - \hat{b}(s)}. \quad (4.2.21)$$

Η (4.2.20) γράφεται

$$\left(1 - \frac{cs}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{cs}{\lambda_2} \right) - \hat{b}(s) = \frac{c^2 \phi(0)(s - s_1)(s - s_2)}{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)},$$

και αντικαθιστώντας στην (4.2.21) παίρνουμε

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{e^{-sy_1} - e^{-s_1 y_1} \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} - e^{-s_2 y_1} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}}{\frac{c^2 \phi(0)(s - s_1)(s - s_2)}{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)}},$$

ή

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)}{c^2 \phi(0)} \frac{e^{-sy_1} - e^{-s_1 y_1} \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} - e^{-s_2 y_1} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

ή

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)}{c^2 \phi(0)} \left(\frac{e^{-sy_1}}{(s - s_1)(s - s_2)} - \frac{e^{-s_1 y_1}}{(s - s_1)(s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 y_1}}{(s - s_2)(s_2 - s_1)} \right). \quad (4.2.22)$$

Σχετικά με τον πρώτο όρο της παρένθεσης, αναλύοντας σε απλά κλάσματα βρίσκουμε

$$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2},$$

από την οποία έπεται ότι $A = \frac{1}{s_1 - s_2}$ και $B = -A$.

Τότε,

$$\frac{e^{-sy_1}}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{e^{-sy_1}}{(s_1 - s_2)(s - s_1)} + \frac{e^{-sy_1}}{(s_2 - s_1)(s - s_2)},$$

και η (4.2.22) γίνεται

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)}{c^2 \phi(0)} \left(\frac{e^{-s y_1}}{(s_1 - s_2)(s - s_1)} + \frac{e^{-s y_1}}{(s_2 - s_1)(s - s_2)} - \frac{e^{-s_1 y_1}}{(s - s_1)(s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 y_1}}{(s - s_2)(s_2 - s_1)} \right),$$

ή

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2 s \hat{\phi}(s)}{c^2 \phi(0)} \left(\frac{e^{-s y_1} - e^{-s_1 y_1}}{(s_1 - s_2)(s - s_1)} + \frac{e^{-s y_1} - e^{-s_2 y_1}}{(s_2 - s_1)(s - s_2)} \right),$$

ή

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = b(y_1 + y_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c^2 \phi(0)} \left(s \hat{\phi}(s) \frac{e^{-s_1 y_1} - e^{-s y_1}}{(s - s_1)(s_2 - s_1)} + s \hat{\phi}(s) \frac{e^{-s_2 y_1} - e^{-s y_1}}{(s - s_2)(s_1 - s_2)} \right). \quad (4.2.23)$$

Αντιστρέφοντας, τώρα, την (4.2.23) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση (4.2.18)

□

Η σχέση (4.2.18) είναι η ταυτότητα (3.4) των Dickson και Drekić (2004).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται το ανανεωτικό ή Sparre Andersen μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων να ακολουθούν τη συνεχή κατανομή τύπου φάσεων (phase-type distribution) και τα ύψη των κινδύνων μια αυθαίρετη κατανομή.

5.1 Phase-type κατανομές

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τον ορισμό και τα χαρακτηριστικά των συνεχών phase-type κατανομών καθώς και παραδείγματα αυτών. Οι phase-type κατανομές εισήχθησαν από τον Neuts (1975 και 1981) και έκτοτε έχουν αποτελέσει σημαντικό κομμάτι της εφαρμοσμένης θεωρίας πιθανοτήτων. Εφαρμογές αυτών συναντώνται στη θεωρία ουρών αναμονής, στα δίκτυα επικοινωνίας, στη θεωρία κινδύνου, στη θεωρία αξιοπιστίας, στη βιοστατιστική και αλλού.

Οι συνεχείς phase-type κατανομές περιγράφουν τον χρόνο απορρόφησης σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, η οποία αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος μεταβατικών καταστάσεων, που καλούνται *φάσεις* ή *στάδια*, και μια απορροφητική κατάσταση.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με τιμές σε διακριτό χώρο καταστάσεων S καλείται *Μαρκοβιανή* αλυσίδα συνεχούς χρόνου εάν για όλα τα $s, t \geq 0$ με $i, j \in S$, με πιθανότητες μετάβασης

$$P[X(s+t) = j \mid X(s) = i, \{X(u) : 0 \leq u \leq s\}] = P[X(s+t) = j \mid X(s) = i] = p_{ij}(t).$$

$p_{ij}(t)$ είναι η πιθανότητα μετάβασης, δηλαδή, δοθέντος ότι τώρα η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i , να βρεθεί στην κατάσταση j , t χρονικές μονάδες από τώρα.

Η Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι *χρονικά ομογενής* αν

$$P[X(t+s) = j \mid X(s) = i] = P[X(t) = j \mid X(0) = i],$$

δηλαδή το σύστημα μεταβαίνει από μία κατάσταση i σε μια κατάσταση j , με πιθανότητα μετάβασης ανεξάρτητη του χρόνου που γίνεται η μετάβαση.

Μια κατάσταση λέγεται *μεταβατική* (transient) αν υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να μην επιστρέψει ποτέ στην κατάσταση από όπου ξεκίνησε η αλυσίδα.

Μια κατάσταση λέγεται *απορροφητική* (absorbing) αν είναι αδύνατον η αλυσίδα να μεταπηδήσει έξω από αυτήν ξανά.

Phase type (PH) κατανομή

Θεωρούμε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots, p\}$ όπου η κατάσταση 0 είναι απορροφητική και οι υπόλοιπες μεταβατικές.

Έστω, η κατανομή πιθανότητας αρχικής κατάστασης $(\alpha_0, \vec{\alpha}) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, με $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$,

$\vec{t} = (t_{10}, t_{20}, \dots, t_{p0})^T$ ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα με τους ρυθμούς απορρόφησης t_{i0} , δηλαδή με τους ρυθμούς μετάβασης από την μεταβατική κατάσταση i , $i = 1, \dots, p$, στην απορροφητική κατάσταση 0, όπου τουλάχιστον ένα από τα t_{i0} είναι θετικό, και \mathbf{T} ένας $(p \times p)$ πίνακας με τους ρυθμούς μετάβασης t_{ij} μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων i, j ($i, j = 1, \dots, p$ και $i \neq j$), όπου $t_{ij} \geq 0$ και $t_{ii} = -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^p t_{ij}$. Ισχύει $\vec{t} = -\mathbf{T}\vec{1}$ όπου $\vec{1} = (1, \dots, 1)^T$ ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα με μονάδες.

Η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως ο χρόνος απορρόφησης, λέγεται ότι έχει τη συνεχή PH κατανομή τάξης p και αναπαριστάται ως $(\vec{\alpha}, \mathbf{T})$. Ο πίνακας \mathbf{T} αναφέρεται ως PH γεννήτορας (generator). Το α_0 προσδιορίζεται πλήρως από το $\vec{\alpha}$ και συνεπώς δεν χρειάζεται να εμφανιστεί στην έκφραση της αναπαράστασης.

Σχετικά με την PH κατανομή είναι:

$$\text{Συνάρτηση κατανομής: } F(x) = \begin{cases} \alpha_0, & x = 0, \\ 1 - \vec{\alpha} e^{\mathbf{T}x} \vec{1}, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\vec{\alpha} e^{\mathbf{T}x} \mathbf{T} \vec{1}, \quad x > 0,$$

$$\text{όπου ο εκθετικός πίνακας } e^{\mathbf{T}x} = \mathbf{I} + \mathbf{T}x + \frac{1}{2!} \mathbf{T}^2 x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \mathbf{T}^n x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{T}^k x^k.$$

$$\text{Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes: } \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = -\vec{\alpha} (s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T} \vec{1} + \alpha_0$$

Ροπές k -τάξης: Παραγωγίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace k φορές ως προς s και παίρνοντας $s \rightarrow 0$ προκύπτει $m_k = (-1)^k k! \vec{\alpha} \mathbf{T}^{-k} \vec{1}$.

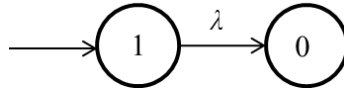
Στην συνέχεια δίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα phase-type κατανομών. Σε κάθε ένα, αναφέρονται το διάγραμμα φάσεων και τα μεγέθη $\vec{\alpha}$, \mathbf{T} , \vec{t} .

Παραδείγματα phase-type κατανομών

α) Εκθετική κατανομή

Με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Διάγραμμα φάσεων:



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα φάσεων στην εκθετική κατανομή

Τη χρονική στιγμή 0 το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση 1. Παραμένει στην κατάσταση αυτή για ένα τυχαίο χρόνο εκθετικά κατανομημένο με παράμετρο λ και στη συνέχεια μεταπηδά στην απορροφητική κατάσταση 0.

Μεγέθη:

$$\vec{\alpha} = (1), \mathbf{T} = (-\lambda), \vec{t} = (\lambda).$$

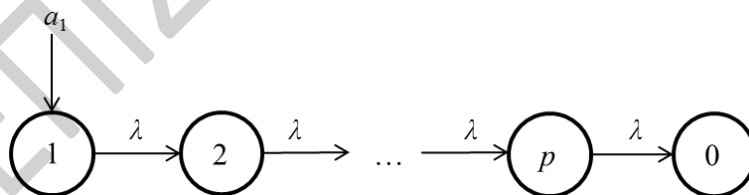
β) Erlang κατανομή με p φάσεις

Ορίζεται σαν γάμμα κατανομή $G(p, \lambda)$ με ακέραια παράμετρο p , και πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{p!}, x > 0.$$

Ο παραπάνω τύπος αντιστοιχεί σε συνέλιξη p εκθετικών κατανομών με τον ίδιο ρυθμό λ .

Διάγραμμα φάσεων:



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα φάσεων στην Erlang(p) κατανομή

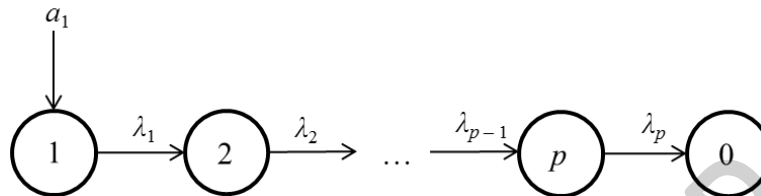
Μεγέθη:

$$\vec{\alpha} = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

γ) Γενικευμένη Erlang (υποεκθετική) με p φάσεις

Αποτελεί γενίκευση της Erlang όπου οι ρυθμοί των εκθετικών κατανομών είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$. Η συνάρτηση πυκνότητας και τα χαρακτηριστικά της δόθηκαν στο 4^ο κεφάλαιο.

Διάγραμμα φάσεων:



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα φάσεων στην γενικευμένη Erlang (p) κατανομή

Μεγέθη:

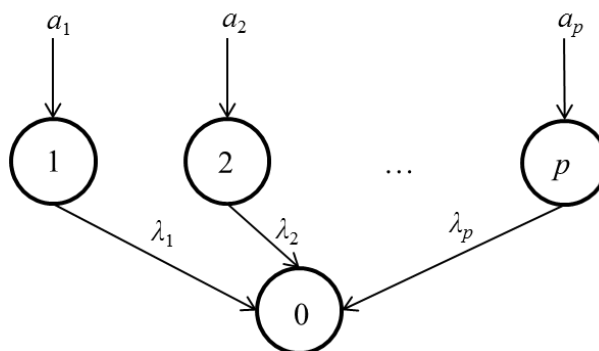
$$\bar{\alpha} = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_p \end{pmatrix}, \bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

δ) Υπερεκθετική κατανομή

Αποτελείται από p καταστάσεις παράλληλες μεταξύ τους και ορίζεται σαν μίξη p εκθετικών κατανομών με ρυθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της είναι $f(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, x > 0$.

Διάγραμμα φάσεων:



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα φάσεων στην υπερεκθετική κατανομή

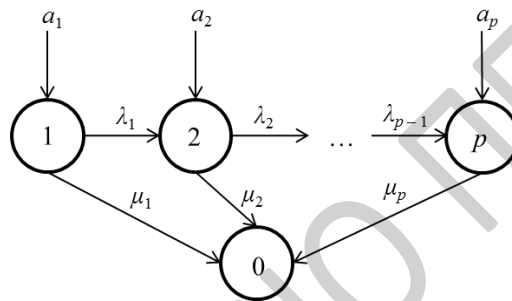
Μεγέθη:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_p \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

ε) *Coxian κατανομή*

Η κλάση των Coxian κατανομών συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία των εφαρμοσμένων επιστημών.

Διάγραμμα φάσεων:



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα φάσεων στην Coxian κατανομή

Μεγέθη:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p),$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda_{p-1} + \mu_{p-1}) & \lambda_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_p \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}.$$

5.2 Το γενικό μοντέλο με phase-type κατανομές

Στο γενικό μοντέλο των M καταστάσεων θεωρούμε ότι οι $\{2, \dots, M\}$ είναι μεταβατικές και η κατάσταση $\{1\}$ είναι η απορροφητική. Θεωρούμε ότι συμβαίνει μία μόνο απαίτηση και συγκεκριμένα στην κατάσταση 1 με συνάρτηση κατανομής $B_1(x) = B(x)$ και αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace $\hat{b}_1(s) = \hat{b}(s)$. Η κατανομή του μεγέθους της απαίτησης στις άλλες καταστάσεις είναι η εκφυλισμένη στο 0. Δηλαδή, για το μέγεθος της απαίτησης $X_i, i = 2, \dots, M$

ισχύει $P(X_i = 0) = 1$ με συνάρτηση κατανομής $B_i(x) = I(x \geq 0)$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{b}_i(s) = 1$. Επίσης είναι $\hat{w}_1(s) = \hat{w}(s)$ και $\hat{w}_i(s) = 0$, $i = 2, \dots, M$. Εάν η κατάσταση της διαδικασίας είναι η 1 και συμβεί μία απαίτηση, τότε η διαδικασία μεταπηδά αμέσως σε μία από τις άλλες καταστάσεις με πιθανότητα $\alpha_j = p_{1j}$, $j = 2, \dots, M$. Οι σχετικοί πίνακες και διανύσματα του μοντέλου διαμορφώνονται ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{B}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda}^{Ph} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{pmatrix},$$

$$\vec{\hat{w}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s) \\ \hat{w}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{w}_M(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_M) = (p_{12}, \dots, p_{1M}).$$

Ο πίνακας \mathbf{P} ενσωματώνει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων p_{ij} ($i, j = 2, \dots, M$), τις πιθανότητες απορρόφησης p_{i1} ($i = 2, \dots, M$) από την μεταβατική κατάσταση i στην απορροφητική κατάσταση 1, και τις πιθανότητες αρχικής κατάστασης α_j , ($j = 2, \dots, M$). Ισχύει $\sum_{j=2}^M \alpha_j = 1$, με $\alpha_j \geq 0$ και $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1$ με $i = 2, \dots, M$. Ο διαγώνιος πίνακας

$\mathbf{\Lambda}^{Ph}$, διαστάσεων $(M \times M)$, περιέχει τις παραμέτρους λ_i των κατανομών των χρόνων παραμονής της διαδικασίας στην κατάσταση i πριν γίνει μετάβαση. Η τιμή $\lambda_1 = 1$ δηλώνει την άμεση μεταπήδηση από την κατάσταση 1 σε μια από τις μεταβατικές καταστάσεις. Ο σχετικός πίνακας με τους ρυθμούς μετάβασης από μία κατάσταση i σε μία κατάσταση j είναι

$$\mathbf{\Lambda}^{Ph} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \\ \lambda_2 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_2 p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_M p_{M1} & \lambda_M p_{M2} & \cdots & \lambda_M p_{MM} \end{pmatrix}$$

ο οποίος μπορεί να δοθεί και με τη μορφή ενός block-πίνακα, ως

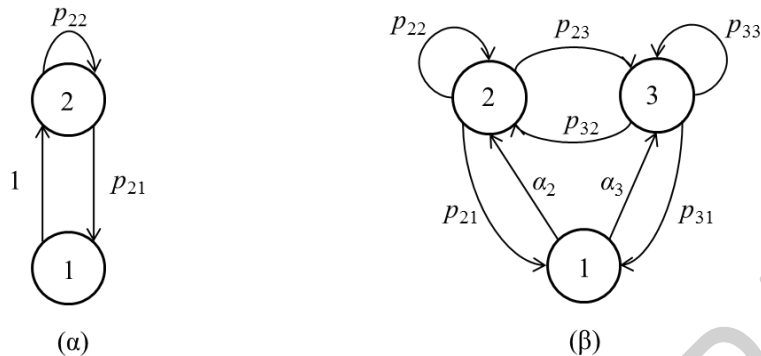
$$\mathbf{\Lambda}^{Ph} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\alpha} \\ \vec{t} & \mathbf{T} \end{pmatrix},$$

όπου

$$\vec{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_M), \vec{t} = \begin{pmatrix} \lambda_2 p_{21} \\ \vdots \\ \lambda_M p_{M1} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_2 p_{2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_M p_{M2} & \cdots & \lambda_M p_{MM} \end{pmatrix},$$

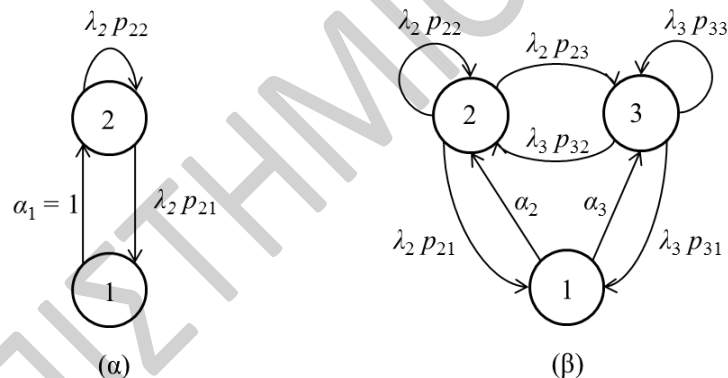
είναι τα μεγέθη της phase type κατανομής.

Ενδεικτικά, τα διαγράμματα κατάστασης-πιθανοτήτων μετάβασης στις περιπτώσεις $M = 2$ και $M = 3$ φαίνονται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα κατάστασης-πιθανοτήτων μετάβασης. (α) $M = 2$, (β) $M = 3$

Ενσωματώνοντας τους ρυθμούς λ_i με τους οποίους η διαδικασία κάνει μετάβαση όταν βρίσκεται στην κατάσταση i , τα αντίστοιχα διαγράμματα κατάστασης-ρυθμών μετάβασης φαίνονται στο σχήμα 5.7.



Σχήμα 5.7: Διάγραμμα κατάστασης-ρυθμών μετάβασης. (α) $M = 2$, (β) $M = 3$

Με κατάλληλη επιλογή των πιθανοτήτων p_{ij} , η περίπτωση $M = 2$, δηλαδή phase-type 2 φάσεων, αντιστοιχεί στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου που μελετήθηκε στο κεφάλαιο 3, ενώ η περίπτωση $M = 3$, δηλαδή phase-type 3 φάσεων αντιστοιχεί στην περίπτωση της γενικευμένης Erlang 2 σταδίων που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4.

Στη συνέχεια η ανάλυση εστιάζεται στην περίπτωση phase-type κατανομής 2 φάσεων. Έχουμε $M = 2$ καταστάσεις, εκ των οποίων η 1 είναι η απορροφητική και η 2 είναι η μεταβατική.

Οι σχετικοί πίνακες και τα διανύσματα, είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{B}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{Ph} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \vec{\hat{w}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = (1).$$

Η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ αντιστοιχεί σε ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν phase-type κατανομή, εάν θεωρήσουμε $\lambda_1 \rightarrow \infty$.

Από την (2.1.4) για $i = 1$ έχουμε ότι,

$$cs \hat{m}_{\delta,1}(s) - c m_{\delta,1}(0) - \lambda_1 \hat{m}_{\delta,1}(s) - \delta \hat{m}_{\delta,1}(s) + \lambda_1 \hat{m}_{\delta,2}(s) = 0,$$

ή

$$\frac{cs \hat{m}_{\delta,1}(s) - c m_{\delta,1}(0)}{\lambda_1} - \hat{m}_{\delta,1}(s) - \frac{\delta \hat{m}_{\delta,1}(s)}{\lambda_1} + \hat{m}_{\delta,2}(s) = 0,$$

απ' όπου παίρνοντας το όριο καθώς το $\lambda_1 \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$\hat{m}_{\delta}(s) := \hat{m}_{\delta,1}(s) = \hat{m}_{\delta,2}(s).$$

Αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής είναι

$$m_{\delta}(u) := m_{\delta,1}(u) = m_{\delta,2}(u). \quad (5.2.1)$$

Πρόταση 5.1

Ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής δίνεται από τη σχέση

$$\hat{m}_{\delta}(s) = \frac{-c m_{\delta,2}(0) + \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_{\delta}^{Ph}(s))}. \quad (5.2.2)$$

Απόδειξη

Από την (2.1.4) για $i = 1, 2$, καθώς $\lambda_1 \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -\hat{m}_{\delta,1}(s) + \hat{m}_{\delta,2}(s) = 0 \\ [[(cs - \delta) - \lambda_2] \hat{m}_{\delta,2}(s) + \lambda_2 [p_{21} \hat{b}(s) \hat{m}_{\delta,1}(s) + p_{22} \hat{m}_{\delta,2}(s)]] = c m_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s) \end{cases}$$

που σε διανυσματική μορφή γράφεται,

$$\mathbf{A}_{\delta}^{Ph}(s) \vec{\hat{m}}_{\delta}(s) = c \begin{pmatrix} 0 \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} - \mathbf{A}^{Ph} \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s), \quad (5.2.3)$$

με

$$\mathbf{A}_{\delta}^{Ph}(s) = [(cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{A}^{Ph} + \mathbf{A}^{Ph} \mathbf{P} \hat{\mathbf{B}}(s)] - (cs - \delta) \mathbf{I} \vec{e}_1 \vec{e}_1^T,$$

$$\text{όπου } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\delta^{Ph}(s) &= \left((cs - \delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - (cs - \delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cs - \delta - 1 & 1 \\ \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cs - \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s) & cs - \delta - \lambda_2 p_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Από την (5.2.3) είναι

$$\vec{\hat{m}}_\delta(s) = (\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))^{-1} \left(c \begin{pmatrix} 0 \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} - \mathbf{A}^{Ph} \mathbf{P} \vec{\hat{w}}(s) \right). \quad (5.2.4)$$

Για τον αντίστροφο πίνακα $\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s)$ έχουμε ότι

$$(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} = \frac{\begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 p_{22} & -1 \\ -\lambda_2 p_{21} \hat{b}(s) & -1 \end{pmatrix}}{-cs + \delta + \lambda_2 p_{22} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)},$$

οπότε η (5.2.4) γίνεται

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{m}_{\delta,1}(s) \\ \hat{m}_{\delta,2}(s) \end{pmatrix} &= \frac{\begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 p_{22} & -1 \\ -\lambda_2 p_{21} \hat{b}(s) & -1 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \left(c \begin{pmatrix} 0 \\ m_{\delta,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} cs - \delta - \lambda_2 p_{22} & -1 \\ -\lambda_2 p_{21} \hat{b}(s) & -1 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \begin{pmatrix} 0 \\ c m_{\delta,2}(0) - \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \begin{pmatrix} -c m_{\delta,2}(0) + \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s) \\ -c m_{\delta,2}(0) + \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Στην περίπτωση μηδενικού αρχικού κεφαλαίου, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση πονής δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποιότητος για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο δίνεται από την

$$m_\delta(0) = -\frac{1}{c} g_\delta(s_1) \hat{w}(s_1). \quad (5.2.5)$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Laplace από την (5.2.2) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \hat{m}_\delta(s) &= \frac{-c m_{\delta,2}(0) + \lambda_2 p_{21} \hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \\ &= \frac{q_\delta(s) - g_\delta(s) \hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

όπου, $q_\delta(s)$ και $g_\delta(s)$ είναι πολυώνυμα μηδενικού βαθμού ως προς s (στη γενική περίπτωση είναι βαθμού $M-2$). Οι συντελεστές του $q_\delta(s)$ περιέχουν την άγνωστη ποσότητα $m_{\delta,2}(0)$.

Συγκεκριμένα το πολυώνυμο $g_\delta(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$g_\delta(s) = \det((cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{A}^{Ph} + \mathbf{A}^{Ph} \mathbf{P} - (cs - \delta)\mathbf{I} \vec{e}_1 \vec{e}_1^T) + {}^{(1,1)}\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s),$$

όπου ${}^{(1,1)}\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s)$ είναι η ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s)$ που προκύπτει αν διαγράψουμε την 1η γραμμή και την 1η στήλη του. Πράγματι,

$$\begin{aligned} g_\delta(s) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \lambda_2 p_{21} & cs - \delta - \lambda_2 p_{21} \end{pmatrix} + (cs - \delta - \lambda_2 p_{21}) \\ &= -(cs - \delta - \lambda_2 p_{21}) - \lambda_2 p_{21} + (cs - \delta - \lambda_2 p_{21}) \\ &= -\lambda_2 p_{21}. \end{aligned}$$

Αφού $\hat{m}_\delta(s)$ είναι αναλυτική στο θετικό ημιεπίπεδο, το μηδενικό s_1 της $\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s)) = 0$ πρέπει επίσης να είναι μηδενικό (ρίζα) του αριθμητή. Οπότε από (5.2.6) ισχύει ότι

$$q_\delta(s_1) - g_\delta(s_1) \hat{w}(s_1) = 0,$$

ή

$$q_\delta(s_1) = g_\delta(s_1) \hat{w}(s_1). \quad (5.2.7)$$

Άρα

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{g_\delta(s_1) \hat{w}(s_1) - g_\delta(s) \hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))}. \quad (5.2.8)$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής είναι

$$\lim_{u \rightarrow 0} m_\delta(u) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{m}_\delta(s).$$

Από την (5.2.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
m_\delta(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{g_\delta(s_1)\hat{w}(s_1) - g_\delta(s)\hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{g_\delta(s_1)\hat{w}(s_1) + \lambda_2 p_{21}\hat{w}(s)}{-cs + \delta + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21}\hat{b}(s)} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_\delta(s_1)\hat{w}(s_1) + \lambda_2 p_{21}\hat{w}(s)}{-c + \frac{\delta + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21}\hat{b}(s)}{s}},
\end{aligned}$$

αλλά καθώς $s \rightarrow \infty$ τότε $\hat{b}(s) \rightarrow 0$, $\hat{w}(s) \rightarrow 0$, οπότε

$$m_\delta(0) = -\frac{1}{c} g_\delta(s_1)\hat{w}(s_1).$$

□

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $f(y_1, y_2 | u)$, για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, $u = 0$, προκύπτει από την (5.2.5) αν θεωρήσουμε ως συνάρτηση ποινής την $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2 = y_2)$. Από το πόρισμα 2.1 έχουμε ότι $\hat{w}(s) = e^{-s y_1} b(y_1 + y_2)$. Τότε από την (5.2.5), προκύπτει

$$f(y_1, y_2 | 0) = -\frac{1}{c} b(y_1 + y_2) g_\delta(s_1) e^{-s_1 y_1}.$$

Η τελευταία σχέση γενικεύει τον τύπο (4.6) των Dickson και Drekić (2004).

Εναλλακτικά, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(y_1, y_2 | u)$ για αρχικό κεφάλαιο u , προκύπτει αν πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (5.2.6) αφού αντικαταστήσουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό $\hat{w}(s)$. Για την παραπάνω συνάρτηση ποινής ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{m}_\delta(s)$ είναι

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{g_\delta(s_1)\hat{w}(s_1) - g_\delta(s)\hat{w}(s)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y_1, y_2 | s) &= \frac{g_\delta(s_1)e^{-s_1 y_1} b(y_1 + y_2) - g_\delta(s)e^{-s y_1} b(y_1 + y_2)}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))} \\
&= b(y_1 + y_2) \frac{g_\delta(s_1)e^{-s_1 y_1} - g_\delta(s)e^{-s y_1}}{\det(\mathbf{A}_\delta^{Ph}(s))}. \tag{5.2.9}
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής B του ύψους της απαίτησης είναι ρητή συνάρτηση, η (5.2.9) αντιστρέφεται εύκολα.

Για οποιαδήποτε κατανομή B και όταν $\delta = 0$, η $f(y_1, y_2 | u)$ δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.3

Η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο Sparre Andersen μοντέλο όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια phase-type κατανομή δύο φάσεων, είναι

$$f(y_1, y_2 | u) = -\frac{b(y_1 + y_2)}{c\phi(0)} g_0(s_1) e^{-s_1(y_1 - u)} \int_{\max\{0, u - y_1\}}^u e^{s_1 z} \phi(z) dz, \quad (5.2.10)$$

όπου $\phi(\cdot)$ είναι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας, $\hat{\psi}(s)$, προκύπτει από την (5.2.8)

αν θεωρήσουμε $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$. Από το πόρισμα (3.1) είναι $\hat{w}(s) = \frac{1 - \hat{b}(s)}{s}$, οπότε η

(5.2.8) γίνεται

$$\hat{\psi}(s) = \frac{g_0(s_1) \frac{1 - \hat{b}(s_1)}{s_1} - g_0(s) \frac{1 - \hat{b}(s)}{s}}{\det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s))}.$$

Για το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας είναι

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \Rightarrow L\{\phi(u)\} = L\{1 - \psi(u)\} \Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{1}{s} - \hat{\psi}(s),$$

Οπότε,

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{g_0(s_1) \frac{1 - \hat{b}(s_1)}{s_1} - g_0(s) \frac{1 - \hat{b}(s)}{s}}{\det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s))},$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s)) - s g_0(s_1) \frac{1 - \hat{b}(s_1)}{s_1} + g_0(s) [1 - \hat{b}(s)]}{s \det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s))}. \quad (5.2.11)$$

Το πολυώνυμο $g_0(s)$ γράφεται επίσης και ως

$$g_0(s) = \frac{\det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s)) + {}^{(1,1)}\mathbf{A}_0^{Ph}(s)}{\hat{b}(s)}$$

από το οποίο προκύπτει

$$\det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s)) = -^{(1,1)}\mathbf{A}_0^{Ph}(s) + g_0(s)\hat{b}(s).$$

Αντικαθιστώντας στον αριθμητή της (5.2.11) έχουμε

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-^{(1,1)}\mathbf{A}_0^{Ph}(s) - s g_0(s_1) \frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} + g_0(s)[1-\hat{b}(s)] + g_0(s)\hat{b}(s)}{s \det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s))}$$

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-^{(1,1)}\mathbf{A}_0^{Ph}(s) - s g_0(s_1) \frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} + g_0(s)}{s \det(\mathbf{A}_0^{Ph}(s))}.$$

Αντικαθιστώντας τις εμπλεκόμενες ποσότητες παίρνουμε

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-(cs - \lambda_2 p_{21}) - s(-\lambda_2 p_{21}) \frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1} - \lambda_2 p_{21}}{s[-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)]},$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-cs + s \lambda_2 p_{21} \frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1}}{s[-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)]},$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{-c + \lambda_2 p_{21} \frac{1-\hat{b}(s_1)}{s_1}}{-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)}.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής στο παραπάνω κλάσμα είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού ως προς s .

Η συνάρτηση $\hat{\phi}(s)$ είναι αναλυτική για $Re(s) > 0$ και έχει έναν απλό πόλο (ρίζα παρονομαστή) στο $s = 0$. Συνεπώς, ο αριθμητής πρέπει να έχει μία ρίζα s_1 και είναι της μορφής

$$\beta(s - s_1)$$

όπου $\beta \in \mathbf{R}$ σταθερά. Οπότε η $\hat{\phi}(s)$ γράφεται

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\beta(s - s_1)}{s[-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)]}. \quad (5.2.12)$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\phi}(s)$. Οπότε

$$\phi(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\phi}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\beta(s - s_1)}{s[-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)]}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta(s - s_1)}{-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)}.$$

όμως για $s \rightarrow \infty$, $\hat{b}(s) \rightarrow 0$, οπότε

$$\phi(0) = \frac{\beta}{-c}.$$

Λύνοντας ως προς β προκύπτει

$$\beta = -c\phi(0)$$

και αντικαθιστώντας στην (5.2.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s) &= \frac{\beta(s - s_1)}{s[-cs + \lambda_2 p_{21} - \lambda_2 p_{21} \hat{b}(s)]} \\ &= \frac{-c\phi(0)(s - s_1)}{s \det(\mathbf{A}_0^{ph}(s))}. \end{aligned}$$

Η τελευταία γράφεται

$$\det(\mathbf{A}_0^{ph}(s)) = \frac{-c\phi(0)(s - s_1)}{s\hat{\phi}(s)}$$

και αντικαθιστώντας την στην σχέση (5.2.9), για $\delta = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_1, y_2 | s) &= b(y_1 + y_2) \frac{g_0(s_1)e^{-s_1 y_1} - g_0(s)e^{-s y_1}}{\frac{-c\phi(0)(s - s_1)}{s\hat{\phi}(s)}} \\ &= \frac{b(y_1 + y_2)}{c\phi(0)} s\hat{\phi}(s) \frac{g_0(s)e^{-s y_1} - g_0(s_1)e^{-s_1 y_1}}{s - s_1}. \end{aligned}$$

Αλλά $g_\delta(s) = -\lambda_2 p_{21}$, δηλαδή ανεξάρτητο του s , οπότε $g_0(s) = g_0(s_1)$. Έτσι η προηγούμενη σχέση διαμορφώνεται ως

$$\hat{f}(y_1, y_2 | s) = \frac{b(y_1 + y_2)}{c\phi(0)} g_0(s) s\hat{\phi}(s) \frac{e^{-s y_1} - e^{-s_1 y_1}}{s - s_1} \quad (5.2.13)$$

Αντιστρέφοντας τώρα την (5.2.13) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση (5.2.10)

□

Το επόμενο πόρισμα αναφέρεται στη σχέση (2.4) των Dickson και Drekić (2004).

Πόρισμα 5.1

Για $\delta = 0$ είναι

$$f(y_1, y_2 | u) = -\frac{b(y_1 + y_2)}{\phi(0)} \int_{\max\{0, u-y_1\}}^u \frac{f(y_1 - u + z | 0)}{1 - B(y_1 - u + z | 0)} \phi(z) dz. \quad (5.2.14)$$

Απόδειξη

Η πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία προκύπτει από την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ αν θεωρήσουμε $\delta = 0$ και ως συνάρτηση ποινής τη συνάρτηση δέλτα Dirac στο σημείο y_1 . Δηλαδή, $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1) = \delta(x_1 - y_1)$. Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\begin{aligned} \hat{w}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty w(x, y-x) b(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty \delta(x - y_1) b(y) dy dx \\ &= \int_0^\infty \delta(x - y_1) e^{-sx} \int_x^\infty b(y) dy dx = \int_0^\infty \delta(x - y_1) e^{-sx} [1 - B(x)] dx = e^{-sy_1} [1 - B(y_1)], \end{aligned}$$

αφού για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac ισχύει $\int_{-\infty}^\infty \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$.

Από την (5.2.5) για $\delta = 0$ και τον παραπάνω μετασχηματισμό $\hat{w}(s)$ προκύπτει

$$f(y_1 | 0) = -\frac{1 - B(y_1)}{c} g_0(s_1) e^{-s_1 y_1}.$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση

$$\frac{f(y_1 - u | 0)}{1 - B(y_1 - u)} I(y_1 \geq u),$$

που με βάση την προηγούμενη σχέση γίνεται

$$-\frac{1}{c} g_0(s_1) e^{-s_1(y_1 - u)} I(y_1 \geq u).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τελευταίας ως προς τη μεταβλητή u είναι

$$-\frac{1}{c} g_0(s_1) e^{-s_1 y_1} \frac{1 - e^{-(s-s_1)y_1}}{s - s_1},$$

ή

$$\frac{1}{c} g_0(s_1) \frac{e^{-s_1 y_1} - e^{-s y_1}}{s - s_1}.$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την (5.2.13) προκύπτει η ζητούμενη σχέση (5.2.14). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΖΗΜΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΤΟΥΣ

Στο κλασικό μοντέλο Cramer-Lundberg για να περιγράψουμε τη διαδικασία πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου βασιζόμαστε στην υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των απαιτήσεων, και ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων αυτών. Στην πραγματικότητα, οι υποθέσεις αυτές μας περιορίζουν και έτσι εμφανίζεται η ανάγκη πιο γενικών μοντέλων, στα οποία η ανεξαρτησία δεν είναι τόσο αυστηρή.

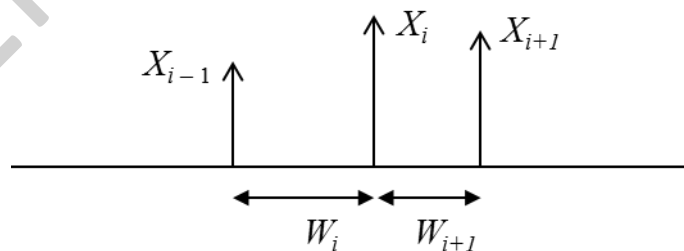
Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε ένα μοντέλο κινδύνου με μια ορισμένη Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών και των χρόνων εμφάνισης των ζημιών όπως αναπτύχθηκε στους Albrecher και Boxma (2004).

6.1 Το μοντέλο

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

όπου, u το αρχικό κεφάλαιο, c η ένταση ασφαλιστρού, X_i το μέγεθος της i απαίτησης και $N(t)$ ο αριθμός απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t . Θεωρούμε ότι $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση κατανομής $B(\cdot)$, συνάρτηση πυκνότητας $b(\cdot)$, μέση τιμή β , και μετασχηματισμό Laplace $\hat{b}(\cdot)$. Για τη διαδικασία άφιξης απαιτήσεων σχηματικά έχουμε



Σχήμα 6.1: Μεγέθη απαιτήσεων και χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης απαιτήσεων $W_i, i = 1, 2, \dots$, είναι εκθετικά κατανομημένοι, αλλά δεν είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η παράμετρος της κατανομής εξαρτάται από το μέγεθος του κινδύνου της προηγούμενης άφιξης και διαμορφώνεται μέσω

ενός κατώφλιου K_i . Τα κατώφλια θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας $k(\cdot)$ και συνάρτηση κατανομής $K(\cdot)$. Επίσης θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i και K_i παίρνουν μόνο θετικές τιμές, δηλαδή $P(X_i > 0) = P(K_i > 0) = 1$. Συγκεκριμένα, εάν η απαίτηση X_i ξεπεράσει ένα κατώφλι K_i , τότε ο χρόνος W_{i+1} που μεσολαβεί από την άφιξη της απαίτησης X_i μέχρι την άφιξη της απαίτησης X_{i+1} είναι εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό λ_1 . Σε αντίθετη περίπτωση, ο χρόνος είναι εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό λ_2 . Δηλαδή, για την κατανομή του χρόνου W_{i+1} είναι

$$W_{i+1} \sim \begin{cases} \text{Exp}(\lambda_1), & \text{εάν } X_i > K_i, \\ \text{Exp}(\lambda_2), & \text{εάν } X_i \leq K_i. \end{cases}$$

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα επιβίωσης (μη χρεοκοπίας)

$$\phi(u) = P[U(t) \geq 0 \mid u(0) = u] \quad \forall t > 0$$

για τις καταστάσεις που θεωρούμε. Στην ανάλυση που ακολουθεί, δίνεται η συνθήκη καθαρού κέρδους, οι ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$, οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών, και οι αρχικές συνθήκες $\phi_i(0+)$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους (net profit condition):

$$\text{αναμενόμενα έσοδα} > \text{αναμενόμενα έξοδα},$$

ή

$$c \frac{1}{\lambda_1} P(X > K) + c \frac{1}{\lambda_2} P(X \leq K) > \beta,$$

ή

$$\beta < c \left[\frac{P(X > K)}{\lambda_1} + \frac{P(X \leq K)}{\lambda_2} \right], \quad (6.1.1)$$

η οποία εξασφαλίζει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μικρότερη της μονάδας.

Έστω $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$, συμβολίζει την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο u δοθέντος ότι η πρώτη απαίτηση συμβαίνει σύμφωνα με μια εκθετική κατανομή με ρυθμό λ_i .

Πρόταση 6.1

Οι $\phi_i(u)$, ($i = 1, 2$) ικανοποιούν αντίστοιχα τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις

$$c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1 \phi_1(u) + \lambda_1 \int_0^u P(K \leq y) \phi_1(u-y) b(y) dy + \lambda_1 \int_0^u P(K > y) \phi_2(u-y) b(y) dy = 0, \quad (6.1.2)$$

$$c \frac{d\phi_2(u)}{du} - \lambda_2 \phi_2(u) + \lambda_2 \int_0^u P(K \leq y) \phi_1(x-y) b(y) dy + \lambda_2 \int_0^u P(K > y) \phi_2(u-y) b(y) dy = 0. \quad (6.1.3)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (2.1.1) για $i = 1$ παίρνουμε

$$c \frac{d m_{\delta,1}(u)}{du} - (\lambda_1 + \delta) m_{\delta,1}(u) + \lambda_1 \left(p_{11} \int_0^u m_{\delta,1}(u-y) b_1(y) dy + p_{12} \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) b_2(y) dy \right) + \lambda_1 \left(p_{11} \int_u^\infty w(u, y-u) b_1(y) dy + p_{12} \int_u^\infty w(u, y-u) b_2(y) dy \right) = 0.$$

Θεωρούμε $\delta = 0$, $w(x, y) = 1$. Τότε $m_{0,i}(u) = E[\mathbf{I}(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i] = \psi_i(u) = 1 - \phi_i(u)$.

Ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X > K) & P(X \leq K) \\ P(X > K) & P(X \leq K) \end{pmatrix}.$$

Είναι

$$p_{11} b_1(y) dy = P(X > K) \frac{1}{P(X > K)} K(y) b(y) dy = K(y) b(y) dy = P(K \leq y) b(y) dy,$$

$$p_{12} b_2(y) dy = P(X \leq K) \frac{1}{P(X \leq K)} [1 - K(y)] b(y) dy = [1 - K(y)] b(y) dy = P(K > y) b(y) dy.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ολοκληροδιαφορική εξίσωση προκύπτει

$$-c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1 (1 - \phi_1(u)) + \lambda_1 \left(\int_0^u [1 - \phi_1(u-y)] P(K \leq y) b(y) dy + \int_0^u [1 - \phi_2(u-y)] P(K > y) b(y) dy \right) + \lambda_1 \left(\int_u^\infty P(K \leq y) b(y) dy + \int_u^\infty P(K > y) b(y) dy \right) = 0,$$

από όπου

$$-c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1 + \lambda_1 \phi_1(u) - \lambda_1 \int_0^u \phi_1(u-y) P(K \leq y) b(y) dy - \lambda_1 \int_0^u \phi_2(u-y) P(K > y) b(y) dy + \lambda_1 \int_0^u P(K \leq y) b(y) dy + \lambda_1 \int_0^u P(K > y) b(y) dy + \lambda_1 \int_u^\infty b(y) dy = 0,$$

ή

$$-c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1 + \lambda_1 \phi_1(u) - \lambda_1 \int_0^u \phi_1(u-y)P(K \leq y)b(y)dy - \lambda_1 \int_0^u \phi_2(u-y)P(K > y)b(y)dy$$

$$\lambda_1 \int_0^u b(y)dy + \lambda_1 \int_u^\infty b(y)dy = 0,$$

και τελικά

$$c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1 \phi_1(u) + \lambda_1 \int_0^u P(K \leq y)\phi_1(u-y)b(y)dy + \lambda_1 \int_0^u P(K > y)\phi_2(u-y)b(y)dy = 0.$$

Δουλεύοντας όμοια από τη σχέση (2.1.1) για $i = 2$, παίρνουμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση για τη $\phi_2(u)$,

$$c \frac{d\phi_2(u)}{du} - \lambda_2 \phi_2(u) + \lambda_2 \int_0^u P(K \leq y)\phi_1(x-y)b(y)dy + \lambda_2 \int_0^u P(K > y)\phi_2(u-y)b(y)dy = 0.$$

□

Για $Re(s) > 0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\chi_1(s) := E[e^{-sX} I(X > K)] = \int_0^\infty e^{-sx} P(K \leq x)b(x)dx, \quad (6.1.4)$$

$$\chi_2(s) := E[e^{-sX} I(X \leq K)] = \int_0^\infty e^{-sx} P(K > x)b(x)dx. \quad (6.1.5)$$

Για τις προηγούμενες συναρτήσεις ισχύουν τα εξής:

$$\chi_1(s) + \chi_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} P(K \leq x)b(x)dx + \int_0^\infty e^{-sx} P(K > x)b(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} b(x)dx = \hat{b}(s), \quad (6.1.6)$$

$$\chi_1(0) = E[I(X > K)] = P(X > K), \quad (6.1.7)$$

$$\chi_2(0) = E[I(X \leq K)] = P(X \leq K), \quad (6.1.8)$$

$$\chi_1(0) + \chi_2(0) = P(X > K) + P(X \leq K) = 1, \quad (6.1.9)$$

$$\left. \frac{d\chi_1(s)}{ds} \right|_{s=0} = E[-Xe^{-sX} I(X > K)] \Big|_{s=0} \Rightarrow -\chi_1'(0) = E[X I(X > K)], \quad (6.1.10)$$

$$\left. \frac{d\chi_2(s)}{ds} \right|_{s=0} = E[-Xe^{-sX} I(X \leq K)] \Big|_{s=0} \Rightarrow -\chi_2'(0) = E[X I(X \leq K)], \quad (6.1.11)$$

$$-\chi_1'(0) - \chi_2'(0) = E[X I(X > K)] + E[X I(X \leq K)] = E(X) = \beta. \quad (6.1.12)$$

Επίσης για $Re(s) > 0$ ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$,

$$\hat{\phi}_i(s) := \int_0^{\infty} e^{-su} \phi_i(u) du. \quad (6.1.13)$$

Η παρακάτω πρόταση δίνει τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{\phi}_i(s)$, $i = 1, 2$.

Πρόταση 6.2

Οι μετασχηματισμοί Laplace των πιθανοτήτων μη χρεοκοπίας $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$ είναι αντίστοιχα

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \quad (6.1.14)$$

και

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] - c\lambda_2\chi_1(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \quad (6.1.15)$$

Απόδειξη

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (6.1.2), για $Re(s) > 0$ έχουμε

$$L\left\{c \frac{d\phi_1(u)}{du} - \lambda_1\phi_1(u) + \lambda_1 \int_0^u P(K \leq y)\phi_1(u-y)b(y)dy + \lambda_1 \int_0^u P(K > y)\phi_2(u-y)b(y)dy\right\} = L\{0\},$$

ή

$$cL\left\{\frac{d\phi_1(u)}{du}\right\} - \lambda_1 L\{\phi_1(u)\} + \lambda_1 L\left\{\int_0^u P(K \leq y)\phi_1(u-y)b(y)dy\right\} + \lambda_1 L\left\{\int_0^u P(K > y)\phi_2(u-y)b(y)dy\right\} = 0,$$

ή

$$c[s\hat{\phi}_1(s) - \phi_1(0+)] - \lambda_1\hat{\phi}_1(s) + \lambda_1\hat{\phi}_1(s)\chi_1(s) + \lambda_1\hat{\phi}_2(s)\chi_2(s) = 0,$$

ή

$$[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)]\hat{\phi}_1(s) + \lambda_1\chi_2(s)\hat{\phi}_2(s) = c\phi_1(0+). \quad (6.1.16)$$

Όμοια από την (6.1.3) προκύπτει ότι

$$\lambda_2\chi_1(s)\hat{\phi}_1(s) + [cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)]\hat{\phi}_2(s) = c\phi_2(0+). \quad (6.1.17)$$

Οι σχέσεις (6.1.16) και (6.1.17) αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων ως προς $\hat{\phi}_1(s)$ και $\hat{\phi}_2(s)$.

Για την επίλυσή του εφαρμόζουμε τη μέθοδο Cramér (οριζουσών) και προκύπτει ότι

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} c\phi_1(0+) & \lambda_1\chi_2(s) \\ c\phi_2(0+) & cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s) & \lambda_1\chi_2(s) \\ \lambda_2\chi_1(s) & cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s) \end{vmatrix}},$$

και

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s) & c\phi_1(0+) \\ \lambda_2 \chi_1(s) & c\phi_2(0+) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s) & \lambda_1 \chi_2(s) \\ \lambda_2 \chi_1(s) & cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s) \end{vmatrix}}.$$

Αναπτύσσοντας τις επιμέρους ορίζουσες, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται αντίστοιχα

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - c\lambda_1 \chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s)\chi_2(s)},$$

και

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] - c\lambda_2 \chi_1(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s)\chi_2(s)}.$$

□

Πόρισμα 6.1

Στην περίπτωση που $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, τότε

$$\hat{\phi}_1(s) = \hat{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_1(0+)}{cs - \lambda + \lambda \hat{b}(s)}, \quad (6.1.18)$$

δηλαδή προκύπτει ο τύπος *Pollaczek-Khintchine* που ισχύει στην περίπτωση που δεν υπάρχει εξάρτηση.

Απόδειξη

Θεωρώντας $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ είναι $\phi_1(0+) = \phi_2(0+)$. Τότε η (6.1.14) γράφεται,

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda + \lambda \chi_2(s)] - c\lambda \chi_2(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda + \lambda \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda + \lambda \chi_2(s)] - \lambda \lambda \chi_1(s)\chi_2(s)}.$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)(cs - \lambda c) + \lambda c\phi_1(0+)\chi_2(s) - c\lambda \chi_2(s)\phi_1(0+)}{(cs - \lambda)^2 + cs\lambda \chi_2(s) - \lambda^2 \chi_2(s) + cs\lambda \chi_1(s) - \lambda^2 \chi_1(s) + \lambda^2 \chi_1(s)\chi_2(s) - \lambda \lambda \chi_1(s)\chi_2(s)},$$

η οποία γράφεται

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)(cs - \lambda)}{(cs - \lambda)^2 + cs\lambda[\chi_1(s) + \chi_2(s)] - \lambda^2[\chi_1(s) + \chi_2(s)]}.$$

Η τελευταία με τη βοήθεια της (6.1.6) γίνεται

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)(cs - \lambda)}{(cs - \lambda)^2 + cs\lambda \hat{b}(s) - \lambda^2 \hat{b}(s)},$$

ή

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)(cs - \lambda)}{(cs - \lambda)^2 + \lambda\hat{b}(s)(cs - \lambda)},$$
$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}. \quad (6.1.19)$$

Σημειώνουμε ότι στην ίδια σχέση θα καταλήγαμε για την $\hat{\phi}_2(s)$ αν είχαμε αντίστοιχα ξεκινήσει από την (6.1.15). Η τελευταία σχέση είναι ο τύπος Pollaczek-Khintchine στην περίπτωση που δεν θεωρήσουμε εξάρτηση. Πράγματι, αφού

$$\phi_1(u) = 1 - \psi_1(u),$$

τότε είναι

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{1}{s} - \hat{\psi}_1(s),$$

οπότε από (6.1.19) έχουμε

$$\frac{1}{s} - \hat{\psi}_1(s) = \frac{c[1 - \psi_1(0+)]}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)}.$$

Όμως στο κλασσικό μοντέλο, ισχύει ότι $\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$ με $\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1$, άρα $\psi(0) = \frac{\lambda\beta}{c}$,

οπότε

$$\frac{1}{s} - \hat{\psi}_1(s) = \frac{c\left(1 - \frac{\lambda\beta}{c}\right)}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)},$$

από την οποία βρίσκουμε ότι

$$\hat{\psi}_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\beta}{cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)},$$

που είναι η σχέση (3.19), δηλαδή ο τύπος Pollaczek-Khintchine. □

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$ έτσι ώστε, παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των $\hat{\phi}_1(s)$ και $\hat{\phi}_2(s)$ της πρότασης 6.1, να προκύψουν πλήρεις λύσεις των $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$. Εφ' όσον έχουμε δύο άγνωστες ποσότητες, θα χρειαστούμε δύο εξισώσεις, τις οποίες δίνουν οι προτάσεις (6.1.3) και (6.1.4).

Πρόταση 6.3

Οι πιθανότητες επιβίωσης με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$ συνδέονται με την σχέση

$$\lambda_2 P(X > K)[1 - \phi_1(0+)] + \lambda_1 P(X \leq K)[1 - \phi_2(0+)] = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} \beta. \quad (6.1.20)$$

Απόδειξη

Είναι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi_i(u) = 1, \quad i = 1, 2,$$

αφού με άπειρο αρχικό κεφάλαιο η πιθανότητα επιβίωσης είναι 1.

Από το θεώρημα τελικής τιμής ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi_i(u) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\phi}_i(s) = 1, \quad i = 1, 2. \quad (6.1.21)$$

Θεωρώντας την (6.1.14) (η εξίσωση (6.1.15) θα οδηγούσε στο ίδιο αποτέλεσμα), με τη βοήθεια της (6.1.21), προκύπτει ότι

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\phi}_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{c \phi_1(0+) [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - c \lambda_1 \chi_2(s) \phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s)}$$

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c \phi_1(0+) [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - c \lambda_1 \chi_2(s) \phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s)}. \quad (6.1.22)$$

Το όριο του αριθμητή γίνεται

$$c \phi_1(0+) [-\lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(0)] - c \lambda_1 \chi_2(0) \phi_2(0+) = -\lambda_2 c \phi_1(0+) [1 - \chi_2(0)] - c \lambda_1 \chi_2(0) \phi_2(0+),$$

και από την (6.1.9) έπεται ότι

$$-\lambda_2 c \phi_1(0+) \chi_1(0) - c \lambda_1 \chi_2(0) \phi_2(0+). \quad (6.1.23)$$

Για το όριο του παρονομαστή είναι

$$\frac{[-\lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(0)] \cdot [-\lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(0)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(0) \chi_2(0)}{0}$$

$$\frac{-\lambda_1 [1 - \chi_1(0)] \cdot (-\lambda_2) [1 - \chi_2(0)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(0) \chi_2(0)}{0}$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2 \chi_2(0) \chi_1(0) - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(0) \chi_2(0)}{0} = \frac{0}{0},$$

δηλαδή προκύπτει απροσδιοριστία. Εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital, παίρνουμε ότι το όριο του παρονομαστή, είναι

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s)\}'}{s'}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{[c + \lambda_1 \chi_1'(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] + [cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [c + \lambda_2 \chi_2'(s)] - \lambda_1 \lambda_2 [\chi_1'(s) \chi_2(s) + \chi_1(s) \chi_2'(s)]}{1}$$

ή

$$[c + \lambda_1 \chi_1'(0)] \cdot [-\lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(0)] + [-\lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(0)] \cdot [c + \lambda_2 \chi_2'(0)] - \lambda_1 \lambda_2 [\chi_1'(0) \chi_2(0) + \chi_1(0) \chi_2'(0)],$$

ή

$$-c\lambda_1[1 - \chi_1(0)] - c\lambda_2[1 - \chi_2(0)] - \lambda_1 \lambda_2 [\chi_1'(0) + \chi_2'(0)].$$

Τότε, από τις (6.1.9) και (6.1.12) η παραπάνω σχέση είναι ίση με

$$-c\lambda_1 \chi_2(0) - c\lambda_2 \chi_1(0) + \lambda_1 \lambda_2 \beta. \quad (6.1.24)$$

Έτσι, η (6.1.22) με τη βοήθεια των (6.1.23) και (6.1.24) γίνεται,

$$1 = \frac{-\lambda_2 c \phi_1(0+) \chi_1(0) - c \lambda_1 \chi_2(0) \phi_2(0+)}{-c \lambda_1 \chi_2(0) - c \lambda_2 \chi_1(0) + \lambda_1 \lambda_2 \beta}.$$

Από την οποία παίρνουμε ότι

$$-c\lambda_1 \chi_2(0) - c\lambda_2 \chi_1(0) + \lambda_1 \lambda_2 \beta = -c\lambda_2 \phi_1(0+) \chi_1(0) - c\lambda_1 \phi_2(0+) \chi_2(0),$$

ή

$$c\lambda_2 \chi_1(0)[1 - \phi_1(0+)] + c\lambda_1 \chi_2(0)[1 - \phi_2(0+)] = \lambda_1 \lambda_2 \beta.$$

Επομένως, από τις (6.1.7) και (6.1.8) έπεται τελικά ότι

$$\lambda_2 P(X > K)[1 - \phi_1(0+)] + \lambda_1 P(X \leq K)[1 - \phi_2(0+)] = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} \beta.$$

□

Πόρισμα 6.2

Στην περίπτωση $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, ισχύει ότι

$$\phi_1(0+) = \phi_2(0+) = \frac{c - \lambda \beta}{c}, \quad (6.1.25)$$

που είναι η πιθανότητα επιβίωσης στο κλασικό μοντέλο με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, χωρίς εξάρτηση.

Απόδειξη

Στην περίπτωση που $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, είναι $\phi_1(0+) = \phi_2(0+)$. Τότε από την σχέση (6.1.20) προκύπτει διαδοχικά

$$\lambda P(X > K)[1 - \phi_1(0+)] + \lambda P(X \leq K)[1 - \phi_1(0+)] = \frac{\lambda \lambda}{c} \beta,$$

ή

$$[1 - \phi_1(0+)] [P(X > K) + P(X \leq K)] = \frac{\lambda}{c} \beta,$$

ή

$$1 - \phi_1(0+) = \frac{\lambda\beta}{c},$$

$$\phi_1(0+) = 1 - \frac{\lambda\beta}{c},$$

δηλαδή

$$\phi_1(0+) = \phi_2(0+) = \frac{c - \lambda\beta}{c}.$$

□

Η (6.1.20) είναι μια εξίσωση που συνδέει τα $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$. Χρειαζόμαστε μια δεύτερη σχέση, που δίνεται από την πρόταση 6.4. Αρχικά θεωρούμε το παρακάτω λήμμα (χωρίς απόδειξη).

Λήμμα 6.1

Ο παρονομαστής των (6.1.14) και (6.1.15) έχει ακριβώς μια ρίζα σ με $Re(\sigma) > 0$.

Πρόταση 6.4

Οι πιθανότητες επιβίωσης με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$ συνδέονται με την σχέση

$$\phi_2(0+) = \frac{c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(\sigma)}{\lambda_1\chi_2(\sigma)} \phi_1(0+) = \frac{\lambda_2\chi_1(\sigma)}{c\sigma - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(\sigma)} \phi_1(0+), \quad (6.1.26)$$

όπου $\sigma \in \left(0, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right)$ είναι πραγματική ρίζα του παρονομαστή των (6.1.14) και (6.1.15).

Απόδειξη

Ο παρονομαστής των (6.1.14) και (6.1.15), είναι

$$[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s),$$

ή

$$c^2s^2 - cs\lambda_2 + cs\lambda_2\chi_2(s) - cs\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\chi_2(s) + cs\lambda_1\chi_1(s) - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s) \\ + \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s) - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s),$$

ή

$$cs \left(cs - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\chi_1(s) + \lambda_2\chi_2(s) + \frac{\lambda_1\lambda_2[1 - \chi_1(s) - \chi_2(s)]}{cs} \right),$$

και από την (6.1.6) η τελευταία σχέση γράφεται

$$cs \left(cs - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 [1 - \hat{b}(s)]}{cs} \right),$$

ή

$$cs \left(cs - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{1 - \hat{b}(s)}{s\beta} \right).$$

Ορίζοντας τις συναρτήσεις

$$h_1(s) := cs - \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$h_2(s) := \lambda_1 \chi_1(s) + \lambda_2 \chi_2(s) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \frac{1 - \hat{b}(s)}{s\beta},$$

ο παρονομαστής των (6.1.14) και (6.1.15) γράφεται ως

$$cs[h_1(s) + h_2(s)]. \quad (6.1.27)$$

Είναι

$$h_1(0) + h_2(0) = -\lambda_1 - \lambda_2 + h_2(0),$$

με

$$h_2(0) = \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} \frac{1 - \hat{b}(0)}{0},$$

δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία αφού $\hat{b}(0) = 1$, οπότε και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital παίρνουμε,

$$h_2(0) = \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - \hat{b}(s))'}{(s\beta)'},$$

ή

$$h_2(0) = \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\hat{b}'(s)}{\beta}.$$

Όμως, $-\hat{b}'(0) = E(X) = \beta$, οπότε

$$h_2(0) = \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} h_1(0) + h_2(0) &= -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \\ &= -\lambda_1 [1 - \chi_1(0)] - \lambda_2 [1 - \chi_2(0)] + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} \end{aligned}$$

$$= -\lambda_1 \chi_2(0) - \lambda_2 \chi_1(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c}.$$

Από (6.1.1), (6.1.7), (6.1.8) είναι

$$\beta < c \left[\frac{\chi_1(0)}{\lambda_1} + \frac{\chi_2(0)}{\lambda_2} \right] \Rightarrow \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} < \lambda_2 \chi_1(0) + \lambda_1 \chi_2(0) \Rightarrow -\lambda_2 \chi_1(0) - \lambda_1 \chi_2(0) < -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c}.$$

Επομένως,

$$h_1(0) + h_2(0) < -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} = 0.$$

Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι

$$h_1\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) + h_2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right) > 0.$$

Σύμφωνα με το λήμμα 6.1, ο πραγματικός αριθμός σ είναι ρίζα του παρονομαστή των (6.1.14) και (6.1.15). Από τα παραπάνω δείξαμε ότι $h_1(s) + h_2(s)$ γίνεται αρνητικό όταν $s = 0$ και θετικό για $s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}$. Οπότε $\sigma \in \left(0, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c}\right)$. Αφού $\hat{\phi}_i(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\text{Re}(s) \geq 0$, το σ πρέπει επίσης να είναι ρίζα του αριθμητή στις (6.1.14) και (6.1.15). Έτσι θέτοντας σ όπου s στους αριθμητές των (6.1.14) και (6.1.15) και μηδενίζοντας τους, προκύπτει η ζητούμενη σχέση (6.1.26). □

Συνοψίζοντας, οι σχέσεις (6.1.14), (6.1.15), (6.1.20) και (6.1.26) προσδιορίζουν πλήρως τους μετασχηματισμούς Laplace των πιθανοτήτων επιβίωσης $\hat{\phi}_i(s)$, $i = 1, 2$.

Στην περίπτωση που οι $\chi_i(s)$, $i = 1, 2$ είναι ρητές συναρτήσεις, αυτό συμβαίνει για παράδειγμα όταν οι αντίστοιχες κατανομές είναι phase-type, τότε ο μετασχηματισμός Laplace των (6.1.14) και (6.1.15) μπορεί να αντιστραφεί και να προκύψουν ακριβείς εκφράσεις για τα $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$. Το σύνολο των phase-type κατανομών είναι πυκνό (dense) στο σύνολο των κατανομών στο θετικό ημιπίεδο, με την έννοια ότι οποιαδήποτε κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια phase type κατανομή. Επομένως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω ακριβείς λύσεις. Σχετικοί αλγόριθμοι για προσαρμογή phase type κατανομών αναφέρονται στο Asmussen (2000).

Παράδειγμα 6.1

Θεωρούμε εκθετικές κατανομές για τα κατώφλια και τα ύψη των απαιτήσεων, δηλαδή,

$$K \sim \text{Exp}(\mu) \text{ και } X \sim \text{Exp}(\nu) \text{ με } \nu = 1/\beta.$$

Είναι $k(x) = \mu e^{-\mu x}$, $K(x) = 1 - \mu e^{-\mu x}$ οπότε

$$\chi_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} P(K > x) b(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-\mu x} b(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)x} b(x) dx = \hat{b}(s + \mu).$$

$$\text{Από } \chi_1(s) + \chi_2(s) = \hat{b}(s) \Rightarrow \chi_1(s) = \hat{b}(s) - \hat{b}(s + \mu).$$

$$\text{Επίσης } \hat{b}(s) = \frac{\nu}{\nu + s} \text{ οπότε } \chi_2(s) = \hat{b}(s + \mu) = \frac{\nu}{\nu + s + \mu} \text{ και } \chi_1(s) = \frac{\nu}{\nu + s} - \frac{\nu}{\nu + s + \mu}.$$

Το σ είναι η μοναδική λύση s με $\text{Re}(s) > 0$ του παρονομαστή της (6.1.14), δηλαδή

$$[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s) = 0$$

$$\left[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \left(\frac{\nu}{\nu + s} - \frac{\nu}{\nu + s + \mu} \right) \right] \left[cs - \lambda_2 + \lambda_2 \frac{\nu}{\nu + s + \mu} \right] - \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\nu}{\nu + s} - \frac{\nu}{\nu + s + \mu} \right) \frac{\nu}{\nu + s + \mu} = 0$$

$$\left(cs + \frac{\lambda_1 \mu \nu}{(\nu + s)(\nu + s + \mu)} - \lambda_1 \right) \left(cs + \frac{\lambda_2 \nu}{\nu + s + \mu} - \lambda_2 \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu \nu^2}{(\nu + s)(\nu + s + \mu)^2} = 0.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το σ στην (6.1.26). Αφού οι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes είναι ρητές συναρτήσεις, μπορούν να αντιστραφούν για κάθε τιμή των παραμέτρων μ και ν και να προκύψουν οι πιθανότητες $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$.

Παράδειγμα 6.2

Έστω ότι τα κατώφλια είναι $K_i = K^*$, για κάθε $i \geq 1$ και για κάποια σταθερά $K^* > 0$, και τα ύψη των ζημιών είναι εκθετικά κατανομημένα με $X_i \sim \text{Exp}(\nu)$.

$$\text{Έχουμε } P(K = K^*) = 1 \text{ και } K(x) = \begin{cases} 0, & x < K^*, \\ 1, & x \geq K^*. \end{cases}$$

$$\text{Τότε, } \chi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} P(K \leq x) b(x) dx = \int_{K^*}^{\infty} e^{-sx} \cdot 1 \cdot \nu e^{-\nu x} dx = \nu \left[\frac{e^{-(\nu+s)x}}{-(\nu+s)} \right]_{K^*}^{\infty} = \frac{\nu}{\nu+s} e^{-(\nu+s)K^*}.$$

Από την $\chi_1(s) + \chi_2(s) = \hat{b}(s)$ προκύπτει

$$\chi_2(s) = \hat{b}(s) - \chi_1(s) = \frac{\nu}{\nu+s} - \frac{\nu}{\nu+s} e^{-(\nu+s)K^*} = \frac{\nu}{\nu+s} \left(1 - e^{-(\nu+s)K^*} \right).$$

6.1.1 Σύγκριση με το μοντέλο χωρίς εξάρτηση

Στις περιπτώσεις που είναι διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις για τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας, $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σφάλμα που δημιουργείται αν θεωρήσουμε το μοντέλο χωρίς την εξάρτηση.

Εάν υποθέσουμε ανεξαρτησία, ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει εξάρτηση όπως αναπτύχθηκε στο μοντέλο, μια εκτίμηση της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων των απαιτήσεων είναι η

$$f_{w_i}(x) = P(X > K_i) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + P(X \leq K_i) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x},$$

δηλαδή, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με μια υπερεκθετική κατανομή ενδιάμεσων χρόνων.

Σε ένα τέτοιο μοντέλο, ο συντελεστής Lundberg R , εάν υπάρχει, μπορεί να προσδιοριστεί ως η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης $\hat{b}(-R)\hat{w}(cR) = 1$, όπου $\hat{w}(\cdot)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f_{w_i}(x)$ (Asmussen (2000b)).

6.2 Αριθμητική εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή δίνεται μια αριθμητική εφαρμογή η οποία αναφέρεται στο μοντέλο της παραγράφου 6.1. Αρχικά το πρόβλημα επιλύεται με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 6.1. και στη συνέχεια επιλύεται με τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 2. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε το *Mathematica*.

Θεωρούμε

$$X \sim \text{Exp}(1), K \sim \text{Exp}(2), c = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για την εύρεση των $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$ είναι τα εξής:

α) Αρχικά βρίσκουμε τις σχετικές ποσότητες: $P(X > K)$, $P(X \leq K)$, $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$.

β) Στη συνέχεια βρίσκουμε τις συναρτήσεις μη χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2 με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$, από τις σχέσεις (6.1.20) και (6.1.26).

γ) Υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{\phi}_1(s)$ και $\hat{\phi}_2(s)$ από τις σχέσεις (6.1.14), (6.1.15).

δ) Παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, των ποσοτήτων από το (γ), ώστε να προκύψουν οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$.

Είναι

$$\text{για } x > 0, X \sim b(x) = e^{-x}, B(x) = 1 - e^{-x}, \beta = E(X) = 1,$$

$$\text{για } x > 0, K \sim k(x) = 2e^{-2x}, K(x) = 1 - e^{-2x}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα ισχύει για εκθετικές κατανομές, και θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση παρακάτω.

Λήμμα 6.2

Έστω $X \sim \text{Exp}(\mu_1)$ και $Y \sim \text{Exp}(\mu_2)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε η πιθανότητα

$$P(X > Y) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 x} \mu_2 e^{-\mu_2 y} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \mu_2 e^{-\mu_2 y} \int_y^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 x} dx dy = \int_0^{\infty} \mu_2 e^{-\mu_2 y} [1 - F_X(y)] dy \\ &= \int_0^{\infty} \mu_2 e^{-\mu_2 y} e^{-\mu_1 y} dy = \mu_2 \int_0^{\infty} e^{-(\mu_1 + \mu_2)y} dy = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

□

Άρα,

$$P(X > K) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad P(X \leq K) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Η συνθήκη (6.1.1) ισχύει αφού

$$1 < 2 \left(\frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right),$$

$$1 < \frac{10}{9}.$$

Επίσης είναι

$$\chi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} P(K \leq x) b(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} (1 - e^{-2x}) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)x} dx - \int_0^{\infty} e^{-(s+3)x} dx = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

και

$$\chi_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} P(K > x) b(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-2x} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)x} dx = \frac{1}{s+3}.$$

Βρίσκουμε τώρα τα $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$. Από τη σχέση (6.1.20) παίρνουμε

$$1 \cdot \frac{2}{3} [1 - \phi_1(0+)] + 3 \cdot \frac{1}{3} [1 - \phi_2(0+)] = \frac{3 \cdot 1}{2} \cdot 1,$$

ή

$$4\phi_1(0+) + 6\phi_2(0+) = 1. \quad (6.2.1)$$

Από την (6.1.26) θα προκύψει μια δεύτερη σχέση για τα $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$. Αρχικά βρίσκουμε το σ . Σύμφωνα με το λήμμα 6.1, το σ είναι ρίζα του κοινού παρονομαστή των $\hat{\phi}_1(s)$ και $\hat{\phi}_2(s)$. Από την (6.1.14) έχουμε

$$\begin{aligned} & [cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] \cdot [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s) = 0 \\ & \left[2s - 3 + 3 \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) \right] \left[2s - 1 + 1 \cdot \frac{1}{s+3} \right] - 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) \frac{1}{s+3} = 0 \\ & \frac{(2s-3)(s+1)(s+3) + 6}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{(2s-1)(s+3) + 1}{s+3} - \frac{6}{(s+1)(s+3)^2} = 0 \\ & \frac{[(2s-3)(s+1)(s+3) + 6][(2s-1)(s+3) + 1] - 6}{(s+1)(s+3)^2} = 0 \\ & \frac{s(s+3)(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)}{(s+1)(s+3)^2} = 0 \\ & \frac{s(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)}{(s+1)(s+3)} = 0. \end{aligned}$$

Απαιτούμε ρίζα σ με $Re(\sigma) > 0$, όπου $0 < \sigma < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} = \frac{3+1}{2} = 2$. Οι ρίζες του αριθμητή είναι οι -3.16123 , -0.06452 , 0 , 1.22575 , από τις οποίες έχουμε $\sigma = 1.22575$, οπότε από την (6.1.26) έχουμε διαδοχικά

$$\phi_2(0+) = \frac{2 \cdot 1.22575 - 1 + 1 \cdot \frac{1}{1.22575 + 3}}{3 \cdot \frac{1}{1.22575 + 3}} \phi_1(0+) = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{1.22575 + 1} - \frac{1}{1.22575 + 3} \right)}{2 \cdot 1.22575 - 3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{1.22575 + 1} - \frac{1}{1.22575 + 3} \right)} \phi_1(0+)$$

ή

$$\phi_2(0+) = 2.37789 \phi_1(0+) = 2.37783 \phi_1(0+).$$

Έστω

$$\phi_2(0+) = 2.378 \phi_1(0+). \quad (6.2.2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (6.2.1) και (6.2.2) βρίσκουμε

$$\phi_1(0+) = 0.0547, \quad \phi_2(0+) = 0.1302.$$

Από τις (6.1.14) και (6.1.15) έχουμε (τον παρονομαστή τον έχουμε υπολογίσει παραπάνω) για τους μετασχηματισμούς Laplace των $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$ αντίστοιχα

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{2 \cdot 0.0547 \left(2s - 1 + 1 \cdot \frac{1}{s+3} \right) - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{s+3} \cdot 0.1302}{s(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)},$$

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{2 \cdot 0.1302 \cdot \left(2s - 3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) \right) - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) \cdot 0.0547}{s(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)}.$$

Κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{0.0547 s^3 + 0.19145 s^2 - 0.11325 s - 0.25}{s^4 + 2s^3 - 3.75 s^2 - 0.25 s},$$

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{0.1302 s^3 + 0.3255 s^2 - 0.3906 s - 0.25}{s^4 + 2s^3 - 3.75 s^2 - 0.25 s}.$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.0000623396}{s - 1.22575} - \frac{0.938411}{s + 0.0645182} - \frac{0.00682703}{s + 3.16123},$$

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{7.85245 \times 10^{-6}}{s - 1.22575} - \frac{0.866911}{s + 0.0645182} - \frac{0.00289724}{s + 3.16123}.$$

Με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

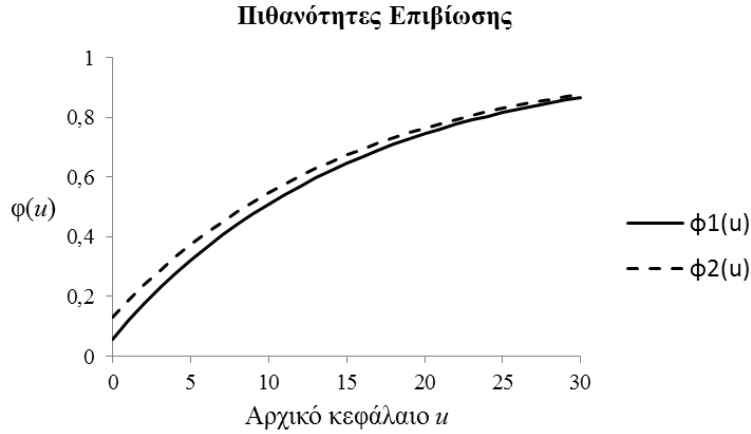
$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.938}{s + 0.065} - \frac{0.007}{s + 3.161},$$

$$\hat{\phi}_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.867}{s + 0.065} - \frac{0.003}{s + 3.161}.$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, οι πιθανότητες επιβίωσης είναι

$$\begin{aligned} \phi_1(u) &= 1 - 0.007 e^{-3.161u} - 0.938 e^{-0.065u}, \\ \phi_2(u) &= 1 - 0.003 e^{-3.161u} - 0.867 e^{-0.065u}. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Το σχήμα 6.2 απεικονίζει τις δύο παραπάνω πιθανότητες για διάφορες τιμές του u .



Σχήμα 6.2: Πιθανότητες μη χρεοκοπίας των δύο καταστάσεων

Στη συνέχεια προχωράμε σε σύγκριση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας, αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση όπως παραπάνω. Σύμφωνα με την παράγραφο 6.1.1, η πυκνότητα του χρόνου μεταξύ αφίξεων δίνεται από τη σχέση

$$f_{W_i}(x) = P(X > K_i) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + P(X \leq K_i) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x},$$

$$f_{W_i}(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{-x}.$$

Δηλαδή πρόκειται για μίξη δύο εκθετικών κατανομών. Παρ' όλα αυτά δεν είμαστε στο κλασικό μοντέλο όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Στο κλασικό μοντέλο, εφ' όσον τα μεγέθη των κινδύνων ακολουθούν εκθετική κατανομή, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνονταν από τη σχέση

$$\psi_{ind}(u) = \psi(0) e^{-Ru} = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru},$$

όπου $\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1$ το περιθώριο ασφαλείας, λ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής των

ενδιάμεσων χρόνων άφιξης, και R ο συντελεστής προσαρμογής.

Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης κινδύνων W_i είναι ανεξάρτητοι των μεγεθών των κινδύνων X_i και ακολουθούν μια γενική κατανομή (μοντέλο Sparre Andersen), ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης (Gerber και Shiu, 2005)

$$M_X(r) M_W(-rc) = 1,$$

όπου $M_X(\cdot)$ και $M_W(\cdot)$ η ροπογεννήτρια της X και W αντίστοιχα.

Είναι $M_X(r) = \frac{1}{1-r}$ και $M_W(r) = \frac{2}{3} \frac{3}{3-r} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-r}$, άρα

$$\frac{1}{1-r} \left(\frac{2}{3+cr} + \frac{1}{3+3cr} \right) = 1,$$

$$\frac{1}{1-r} \left(\frac{2}{3+2r} + \frac{1}{3+6r} \right) = 1.$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι 0, -1.07735, 0.07735. Άρα $R_{ind} = 0.077$ (με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων).

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{ind}(u) = 0.923e^{-Ru} = 0.923e^{-0.077u},$$

οπότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι

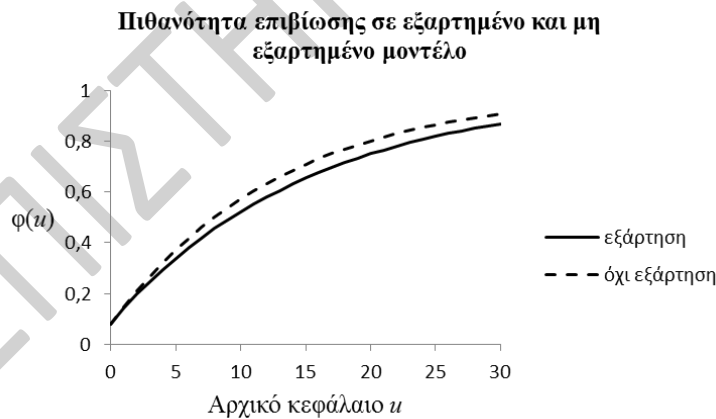
$$\phi_{ind}(u) = 1 - \psi_{ind}(u) = 1 - 0.923e^{-0.077u}.$$

Στην περίπτωση της εξάρτησης από (5.4.3) είναι

$$\begin{aligned} \phi_{dep}(u) &= P(X > K)\phi_1(u) + P(X \leq K)\phi_2(u). \\ &= 1 - 0.006e^{-3.16u} - 0.914e^{-0.065u}. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής Lundberg στην περίπτωση της εξάρτησης είναι $R_{dep} = 0.065$ και είναι μικρότερος από τον $R_{ind} = 0.077$.

Στο σχήμα 6.3 απεικονίζονται οι $\phi_{dep}(u)$ και $\phi_{ind}(u)$ για διάφορες τιμές του u .



Σχήμα 6.3: Πιθανότητες μη χρεοκοπίας $\phi_{dep}(u)$, $\phi_{ind}(u)$

Λύση με το γενικό μοντέλο του κεφαλαίου 2

Εξετάζουμε περίπτωση $M = 2$ καταστάσεων. Για τα δεδομένα

$$X \sim \text{Exp}(1), K \sim \text{Exp}(2), c = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

οι σχετικοί πίνακες είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X > K) & P(X \leq K) \\ P(X > K) & P(X \leq K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι

$$b_1(y) = \frac{1}{P(X > K)} K(y)b(y) = \frac{1}{\frac{2}{3}} (1 - e^{-2y})e^{-y} = \frac{3}{2} (e^{-y} - e^{-3y})$$

και

$$b_2(y) = \frac{1}{P(X \leq K)} [1 - K(y)]b(y) = \frac{1}{\frac{1}{3}} e^{-2y} e^{-y} = 3e^{-3y},$$

με αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace

$$\hat{b}_1(s) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{3+s} \right), \hat{b}_2(s) = \frac{3}{3+s}.$$

Από την (2.1.7) ο πίνακας,

$$\mathbf{A}_\delta(s) = (cs - \delta)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s),$$

για $\delta = 0$ γίνεται,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(s) &= cs\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P \hat{B}}(s) \\ &= 2s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1(s) & 0 \\ 0 & \hat{b}_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2s-3 & 0 \\ 0 & 2s-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1(s) & 0 \\ 0 & \hat{b}_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-3 & 0 \\ 0 & 2s-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\hat{b}_1(s) & \hat{b}_2(s) \\ \frac{2}{3}\hat{b}_1(s) & \frac{1}{3}\hat{b}_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2s-3+2\hat{b}_1(s) & \hat{b}_2(s) \\ \frac{2}{3}\hat{b}_1(s) & 2s-1+\frac{1}{3}\hat{b}_2(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}_0(s)$ είναι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_0(s)) &= [2s-3+2\hat{b}_1(s)] \cdot [2s-1+\frac{1}{3}\hat{b}_2(s)] - \frac{2}{3}\hat{b}_1(s)\hat{b}_2(s) \\ &= 4s^2 - 8s + 3 + 2(2s-1)\hat{b}_1(s) + \left(\frac{2}{3}s-1\right)\hat{b}_2(s) \\ &= 4s^2 - 8s + 3 + \frac{6s-3}{1+s} - \frac{4s}{3+s} = \frac{s(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)}{(1+s)(3+s)}. \end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $\det(\mathbf{A}_0(s)) = 0$ υπολογίζονται αριθμητικά και είναι

$$s = 0, s = 1.226, s = -0.065, s = -3.161.$$

Για τον πίνακα \mathbf{K} , βρίσκουμε μη μηδενικά διανύσματα \vec{k}_1 και \vec{k}_2 που αντιστοιχούν στις ρίζες s με $Re(s) \geq 0$. Συγκεκριμένα, για $s = 0$ και $s = 1.226$.

Για $s = 0$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^T(0)\vec{k}_1 = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 + 2\hat{b}_1(0) & \hat{b}_2(0) \\ \frac{2}{3}\hat{b}_1(0) & 2 \cdot 0 - 1 + \frac{1}{3}\hat{b}_2(0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 + 2 \cdot 1 & 1 \\ \frac{2}{3} \cdot 1 & -1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -k_{11} + \frac{2}{3}k_{12} = 0 \\ k_{11} - \frac{2}{3}k_{12} = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του παραπάνω συστήματος είναι $\begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$, οπότε το σύστημα έχει

άπειρες λύσεις. Θέτοντας στη δεύτερη εξίσωση $k_{12} = 1$ προκύπτει $k_{11} = 2/3$. Οπότε το

$$\text{διάνυσμα } \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Για $s = 1.226$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^T(1.226)\vec{k}_2 = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 1.226 - 3 + 2\hat{b}_1(1.226) & \hat{b}_2(1.226) \\ \frac{2}{3}\hat{b}_1(1.226) & 2 \cdot 1.226 - 1 + \frac{1}{3}\hat{b}_2(1.226) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.090 & 0.710 \\ 0.213 & 1.689 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.090 & 0.213 \\ 0.710 & 1.689 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0.090k_{21} + 0.213k_{22} = 0, \\ 0.710k_{21} + 1.689k_{22} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι 0. Έστω η λύση

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.922 \\ 0.388 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας \mathbf{K} γίνεται

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \vec{k}_1^T \\ \vec{k}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ -0.922 & 0.388 \end{pmatrix}.$$

Για κάποια αυθαίρετη συνάρτηση ποινής $w(\cdot)$, από την πρόταση 2.4 παίρνουμε

$$m_{\delta,1}(0) = C_{1,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_1) + C_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_2) + C_{2,1}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_1) + C_{2,2}^{(1)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_2),$$

$$m_{\delta,2}(0) = C_{1,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_1) + C_{1,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_1(s_2) + C_{2,1}^{(2)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_1) + C_{2,2}^{(2)}(s_1, s_2, \delta)\hat{w}_2(s_2),$$

όπου

$$\det \mathbf{K} = \frac{2}{3} \cdot 0.388 - (-0.922) \cdot 1 = 1.181,$$

οπότε για τους συντελεστές βρίσκουμε

$$C_{1,1}^{(1)} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det K_{1,1} \cdot (\lambda_1 p_{11} k_{11} + \lambda_2 p_{21} k_{12})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot 0.388 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right)}{2 \cdot 1.181} = 0.329,$$

$$C_{1,2}^{(1)} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det K_{2,1} \cdot (\lambda_1 p_{11} k_{21} + \lambda_2 p_{21} k_{22})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot \left(3 \cdot (-0.922) \cdot 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.388\right)}{2 \cdot 1.181} = -0.671,$$

$$C_{2,1}^{(1)} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det K_{1,1} \cdot (\lambda_1 p_{12} k_{11} + \lambda_2 p_{22} k_{12})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot 0.388 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right)}{2 \cdot 1.181} = 0.164,$$

$$C_{2,2}^{(1)} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det K_{2,1} \cdot (\lambda_1 p_{12} k_{21} + \lambda_2 p_{22} k_{22})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{-1 \cdot 1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-0.922) + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.388\right)}{2 \cdot 1.181} = 0.336,$$

$$C_{1,1}^{(2)} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det K_{1,2} \cdot (\lambda_1 p_{11} k_{11} + \lambda_2 p_{21} k_{12})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{-1 \cdot (-0.922) \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right)}{2 \cdot 1.181} = 0.781,$$

$$C_{1,2}^{(2)} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det K_{2,2} \cdot (\lambda_1 p_{11} k_{21} + \lambda_2 p_{21} k_{22})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-0.922) + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.388\right)}{2 \cdot 1.181} = -0.447,$$

$$C_{2,1}^{(2)} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det K_{1,2} \cdot (\lambda_1 p_{12} k_{11} + \lambda_2 p_{22} k_{12})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{-1 \cdot (-0.922) \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right)}{2 \cdot 1.181} = 0.39,$$

$$C_{2,2}^{(2)} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det K_{2,2} \cdot (\lambda_1 p_{12} k_{21} + \lambda_2 p_{22} k_{22})}{c \det \mathbf{K}} = \frac{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-0.922) + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.388\right)}{2 \cdot 1.181} = -0.224,$$

οπότε

$$\vec{m}_0(0) = \begin{pmatrix} m_{0,1}(0) \\ m_{0,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.781 \end{pmatrix} \hat{w}_1(0) + \begin{pmatrix} 0.672 \\ -0.448 \end{pmatrix} \hat{w}_1(1.226) + \begin{pmatrix} 0.164 \\ 0.391 \end{pmatrix} \hat{w}_2(0) + \begin{pmatrix} 0.336 \\ -0.224 \end{pmatrix} \hat{w}_2(1.226)$$

(6.2.5)

Η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της $\det(\mathbf{A}_0(s)) = 0$ είναι $\eta - R_0 = -0.065$. Συνεπώς, από τη σχέση (2.4.1) για $\delta = 0$ είναι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{R_0 u} \bar{m}_0(x) = C = \frac{\mathbf{A}_{0,adj}(-R_0)[c \bar{m}_0(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \tilde{w}(-R_0)]}{\left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_0(s) \right|_{s=-R_0}}.$$

Έχουμε

από (5.4.4)

$$\mathbf{A}_{0,adj}(s) = \begin{pmatrix} 2s - 1 + \frac{1}{3} \hat{b}_2(s) & -\hat{b}_2(s) \\ -\frac{2}{3} \hat{b}_1(s) & 2s - 3 + 2\hat{b}_1(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,adj}(-R_0) = \mathbf{A}_{0,adj}(-0.065) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-0.065) - 1 + \frac{1}{3} \hat{b}_2(-0.065) & -\hat{b}_2(-0.065) \\ -\frac{2}{3} \hat{b}_1(-0.065) & 2(-0.065) - 3 + 2\hat{b}_1(-0.065) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.789 & -1.022 \\ -0.729 & -0.944 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \bar{m}_0(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \tilde{w}(-R_0) &= c \begin{pmatrix} m_{0,1}(0) \\ m_{0,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(-R_0) \\ \hat{w}_2(-R_0) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} m_{0,1}(0) \\ m_{0,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(-0.065) \\ \hat{w}_2(-0.065) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m_{0,1}(0) - 2\hat{w}_1(-0.065) - \hat{w}_2(-0.065) \\ 2m_{0,2}(0) - \frac{2}{3}\hat{w}_1(-0.065) - \frac{1}{3}\hat{w}_2(-0.065) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_0(s) \right|_{s=-R_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(4s^2 - 8s + 3 + \frac{6s-3}{1+s} - \frac{4s}{3+s} \right) \right|_{s=-0.065} \\ &= \left(8s - 8 + \frac{9}{(1+s)^2} - \frac{12}{(3+s)^2} \right) \Big|_{s=-0.065} = 0.381788, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{1}{0.382} \begin{pmatrix} -0.789 & -1.022 \\ -0.729 & -0.944 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m_{0,1}(0) - 2\hat{w}_1(-0.065) - \hat{w}_2(-0.065) \\ 2m_{0,2}(0) - \frac{2}{3}\hat{w}_1(-0.065) - \frac{1}{3}\hat{w}_2(-0.065) \end{pmatrix}, \\ \bar{C} &= \frac{1}{0.382} \begin{pmatrix} -1.578m_{0,1}(0) - 2.044m_{0,2}(0) + 2.259\hat{w}_1(-0.065) + 1.13\hat{w}_2(-0.065) \\ -1.458m_{0,1}(0) - 1.888m_{0,2}(0) + 2.087\hat{w}_1(-0.065) + 1.044\hat{w}_2(-0.065) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας την (5.4.5) προκύπτει

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \begin{pmatrix} 6.014 \\ 5.555 \end{pmatrix} \hat{w}_1(-0.065) + \begin{pmatrix} 5.631 \\ 5.202 \end{pmatrix} \hat{w}_1(0) - \begin{pmatrix} 0.383 \\ 0.354 \end{pmatrix} \hat{w}_1(1.226) \\ &+ \begin{pmatrix} 3.007 \\ 2.778 \end{pmatrix} \hat{w}_2(-0.065) - \begin{pmatrix} 2.815 \\ 2.601 \end{pmatrix} \hat{w}_2(0) - \begin{pmatrix} 0.191 \\ 0.177 \end{pmatrix} \hat{w}_2(1.226). \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας δοθέντος ότι $Z_0 = i$, δηλαδή τις $\psi_i(u)$. Αυτές είναι οι $m_{0,i}(u)$ στην περίπτωση που $w(x, y) = 1$. Υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace

$$\begin{aligned}\hat{w}_1(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty b_1(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty \frac{3}{2} (e^{-y} - e^{-3y}) dy dx = \frac{3}{2} \int_0^\infty e^{-sx} \left[-e^{-y} - \frac{e^{-3y}}{-3} \right]_x^\infty dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^\infty e^{-sx} \left(e^{-x} - \frac{e^{-3x}}{3} \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^\infty \left(e^{-(s+1)x} - \frac{1}{3} e^{-(s+3)x} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+3} \right) = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\end{aligned}$$

και

$$\hat{w}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty b_2(y) dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty 3e^{-3y} dy dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{-3x} dx = \int_0^\infty e^{-(s+3)x} dx = \frac{1}{s+3}.$$

Για μηδενικό κεφάλαιο, $u = 0$, οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_i(0)$ προκύπτουν από την (6.2.5). Βρίσκουμε

$$\hat{w}_1(0) = \frac{4}{3}, \quad \hat{w}_1(1.226) = 0.556, \quad \hat{w}_2(0) = \frac{1}{3}, \quad \hat{w}_2(1.226) = 0.237,$$

οπότε

$$\begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{0,1}(0) \\ m_{0,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.781 \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{3} + \begin{pmatrix} 0.672 \\ -0.448 \end{pmatrix} \cdot 0.556 + \begin{pmatrix} 0.164 \\ 0.391 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} + \begin{pmatrix} 0.336 \\ -0.224 \end{pmatrix} \cdot 0.237 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ 0.870 \end{pmatrix}.$$

Για τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_i(u)$, από την (2.1.8) για $\delta = 0$ είναι

$$\mathbf{A}_0(s) \bar{\tilde{m}}_0(s) = c \bar{m}_0(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \bar{\tilde{w}}(s)$$

$$\bar{\tilde{m}}_0(s) = [\mathbf{A}_0(s)]^{-1} [c \bar{m}_0(0) - \mathbf{A} \mathbf{P} \bar{\tilde{w}}(s)]. \quad (6.2.7)$$

Αλλά

$$[\mathbf{A}_0(s)]^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{0,adj}(s)}{\det \mathbf{A}_0(s)} = \frac{(1+s)(3+s)}{s(4s^3 + 8s^2 - 15s - 1)} \begin{pmatrix} 2s - 1 + \frac{1}{3} \hat{b}_2(s) & -\hat{b}_2(s) \\ -\frac{2}{3} \hat{b}_1(s) & 2s - 3 + 2\hat{b}_1(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+s)(3+s)}{s(4s^3+8s^2-15s-1)} \begin{pmatrix} \frac{2s^2+5s-2}{3+s} & -\frac{3}{3+s} \\ -\frac{2}{(1+s)(3+s)} & \frac{2s^3+5s^2-6s-3}{(1+s)(3+s)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1+s}{s(4s^3+8s^2-15s-1)} \begin{pmatrix} 2s^2+5s-2 & -3 \\ -\frac{2}{1+s} & \frac{2s^3+5s^2-6s-3}{1+s} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
c\vec{m}_0(0) - \mathbf{LP}\vec{w}(s) &= c \begin{pmatrix} m_{0,1}(0) \\ m_{0,2}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1(s) \\ \hat{w}_2(s) \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 0.945 \\ 0.875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4+s}{(1+s)(3+s)} \\ \frac{1}{3+s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1.89s^2+4.56s-3.33}{(1+s)(3+s)} \\ \frac{1.75s^2+6s+2.25}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{m}_{0,1}(s) \\ \hat{m}_{0,2}(s) \end{pmatrix} &= \frac{1+s}{s(4s^3+8s^2-15s-1)} \begin{pmatrix} 2s^2+5s-2 & -3 \\ -\frac{2}{1+s} & \frac{2s^3+5s^2-6s-3}{1+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1.89s^2+4.56s-3.33}{(1+s)(3+s)} \\ \frac{1.75s^2+6s+2.25}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s(4s^3+8s^2-15s-1)(s+3)} \begin{pmatrix} 3.78s^4+18.57s^3+7.11s^2-43.77s-0.09 \\ 3.5s^5+20.75s^4+24s^3-33.78s^2-40.62s-0.09 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1}.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει,

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= 0.007e^{-3.161u} + 0.938e^{-0.065u}, \\
\psi_2(u) &= 0.003e^{-3.161u} + 0.867e^{-0.065u}.
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Τα αποτελέσματα συμπίπτουν με αυτά της σχέσης (6.2.3).

Στην περίπτωση που $w(x, y) = 1$ είναι επίσης

$$\hat{w}_1(-0.065) = 1.433, \quad \hat{w}_2(-0.065) = 0.341$$

οπότε από (6.2.6) προκύπτει

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 0.938 \\ 0.867 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών $U(T^-)$ και $|U(T)|$.

Θεωρούμε $\delta = 0$ και συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1, x_2 = y_2)$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{w}_i(s) = e^{-sy_1} b_i(y_1 + y_2)$. Τότε η $m_{0,i}(u)$ είναι η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι η κατάσταση της στοχαστικής διαδικασίας είναι $Z_0 = i$, δηλαδή η $f_i(y_1, y_2 | u)$. Αντικαθιστώντας στην (6.2.7) και το $\bar{m}_0(0)$ από (6.2.5), αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace προκύπτει

$$\bar{f}(y_1, y_2 | u) = e^{-y_2} \bar{f}(y_1 | u)$$

όπου για τη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

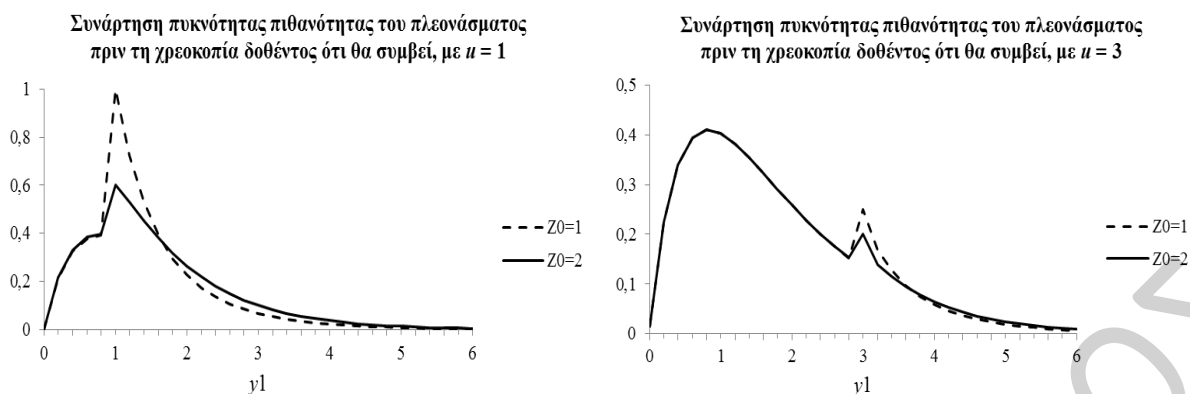
$$\begin{aligned} \bar{f}(y_1 | u) = \begin{pmatrix} f_1(y_1 | u) \\ f_2(y_1 | u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} e^{-y_1} I(u \leq y_1) + e^{-3.161u} \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.045 \end{pmatrix} e^{-2.226y_1} - \begin{pmatrix} 0.061 \\ 0.026 \end{pmatrix} e^{-y_1} \\ + e^{-0.065u} \begin{pmatrix} -0.574 \\ -0.531 \end{pmatrix} e^{-2.226y_1} - \begin{pmatrix} 8.446 \\ 7.802 \end{pmatrix} e^{-y_1} + e^{1.226u - 2.226y_1} \begin{pmatrix} 1.476 \\ -0.186 \end{pmatrix} I(u \leq y_1) \\ + \begin{pmatrix} 9.020 \\ 8.333 \end{pmatrix} e^{-0.0645u - 0.935y_1} - \begin{pmatrix} 0.045 \\ 0.019 \end{pmatrix} e^{-3.161u + 2.161y_1} I(u \geq y_1). \end{pmatrix} \quad (6.2.9)$$

Λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, και η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι εκθετική και ανεξάρτητη του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.

Εναλλακτικά, η $\bar{f}(y_1 | u)$ μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε $w(x, y) = e^{-ax}$. Στην περίπτωση αυτή είναι $\hat{w}_i(s) = \frac{1 - \hat{b}_i(s+a)}{s+a}$ και η $m_0(u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του

πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία. Στη συνέχεια από την (6.2.7) με το $\bar{m}_0(0)$ από (6.2.5) αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό Laplace διαδοχικά πρώτα ως προς s και μετά ως προς a .

Στο σχήμα 6.4 φαίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή η $\frac{f_i(y_1 | u)}{\psi_i(u)}$, $i = 1, 2$, για δύο τιμές του αρχικού κεφαλαίου, συγκεκριμένα $u = 1$ και $u = 3$.



Σχήμα 6.4: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία

Οι ροπές του ελλείμματος πριν τη χρεοκοπία, $E[(U(T^-))^n I(T < \infty | U(0) = u)]$, μπορούν να προσδιοριστούν είτε από την (6.2.9), ή εναλλακτικά από τον Laplace μετασχηματισμό της με παραγωγή. Ενδεικτικά, οι δύο πρώτες ροπές είναι

$$\begin{pmatrix} E[U(T^-) I(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = 1] \\ E[U(T^-) I(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.746 \\ 1.613 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 0.050 \\ 0.021 \end{pmatrix} e^{-3.161u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0.556 \end{pmatrix} e^{-u}$$

και

$$\begin{pmatrix} E[(U(T^-))^2 I(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = 1] \\ E[(U(T^-))^2 I(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.041 \\ 4.657 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 0.095 \\ 0.040 \end{pmatrix} e^{-3.161u} - \begin{pmatrix} 2u + 3.778 \\ 1.111u + 2.395 \end{pmatrix} e^{-u}.$$

Η μέση τιμή όταν η διαδικασία ξεκινήσει από την κατάσταση i είναι

$$E[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = i] = \frac{E[U(T^-) I(T < \infty | U(0) = u) | Z_0 = i]}{E[T < \infty | U(0) = u, Z_0 = i]}$$

όπου

$$\psi_i(u) = E[T < \infty | U(0) = u, Z_0 = i]$$

και η τυπική απόκλιση

$$SD_{U(T^-)} = \sqrt{E[(U(T^-))^2 | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = i] - E^2[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = i]}.$$

Σχετικά με τη συμπεριφορά της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης για πολύ μεγάλο αρχικό κεφάλαιο, $u \rightarrow \infty$, έχουμε αντίστοιχα τα παρακάτω αποτελέσματα. Έστω $Z_0 = 1$.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} E[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = 1] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1.746e^{-0.065u} - 0.05e^{-3.161u} - e^{-u}}{0.007e^{-3.161u} + 0.938e^{-0.065u}}$$

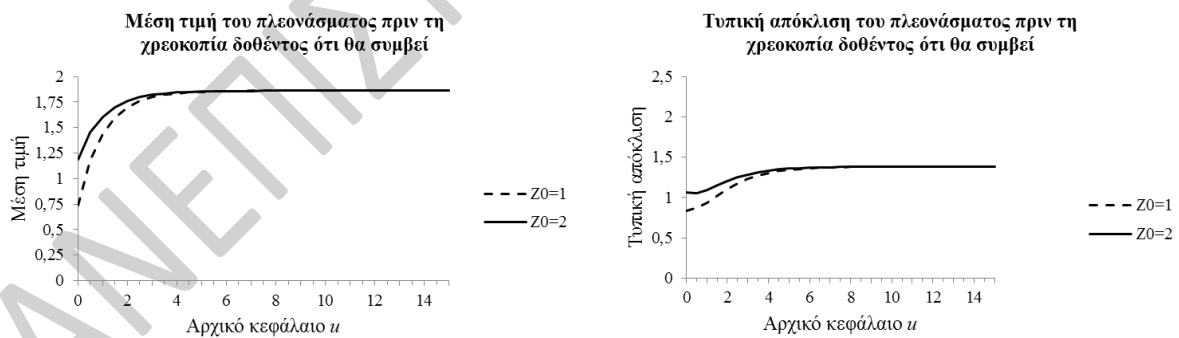
$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-0.065u} (1.746 - 0.05e^{-(3.161-0.065)u} - e^{-(1-0.065)u})}{e^{-0.065u} (0.938 + 0.007e^{-(3.161-0.065)u})} = \frac{1.746}{0.938} = 1.86$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} SD_{U(T^-)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{E[(U(T^-))^2 | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = 1] - E^2[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = 1]} \\ &= \sqrt{\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[(U(T^-))^2 \mathbf{1}(T < \infty, U(0) = u) | Z_0 = 1]}{E[T < \infty | U(0) = u, Z_0 = 1]} - \left(\lim_{u \rightarrow \infty} E^2[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = 1] \right)^2} \\ &= \sqrt{\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[(U(T^-))^2 \mathbf{1}(T < \infty, U(0) = u) | Z_0 = 1]}{\psi_1(u)} - (1.86)^2} \\ &= \sqrt{\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{5.041e^{-0.065u} - 0.095e^{-3.161u} - (2u + 3.778)e^{-u}}{0.007e^{-3.161u} + 0.938e^{-0.065u}} - (1.86)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5.041}{0.938} - (1.86)^2} = 1.38. \end{aligned}$$

Τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν αν $Z_0 = 2$.

Στο σχήμα 6.5 απεικονίζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $U(T^-)$ δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή η $E[U(T^-) | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = i]$ και αντίστοιχα η τυπική απόκλιση, σαν συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου u , ανάλογα την αρχική κατάσταση της διαδικασίας.



Σχήμα 6.5: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της $U(T^-)$ δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία

Για να βρούμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, ακολουθούμε τα βήματα της παραγράφου (2.5.1). Ενδεικτικά υπολογίζουμε τις δύο πρώτες ροπές. Από την (2.5.2) για $n = 1$ είναι

$$\mathbf{A}_0(s) \vec{f}_1(s) = c \left. \frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \vec{f}_0(s) \quad (6.2.10)$$

με $\vec{f}_0(s) = \vec{\psi}(s)$.

Αρχικά βρίσκουμε τις ποσότητες $\left. \frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0}$. Η $\vec{f}_1(s)$ είναι αναλυτική στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Προκύπτει $\left. \frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \begin{pmatrix} -7.949 \\ -17.841 \end{pmatrix}$. Στη συνέχεια από την (6.2.10) λύνουμε ως προς $\vec{f}_1(s)$

$$\vec{f}_1(s) := \left. \frac{\partial \vec{m}_\delta(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \frac{\mathbf{A}_{0,adj}(s)}{\det \mathbf{A}_0(s)} \left(c \left. \frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \vec{f}_0(s) \right)$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει

$$E[T \mathbf{I}(T < \infty, U(0) = u)] = \begin{pmatrix} 4.330u + 4.431 \\ 4u + 9.114 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 0.457 \\ 0.193 \end{pmatrix} e^{-3.161u}.$$

Για τη δεύτερη ροπή της T , από την (2.5.2) για $n = 2$ είναι

$$\mathbf{A}_0(s) \vec{f}_2(s) = c \left. \frac{\partial^2 \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} + 2 \vec{f}_1(s)$$

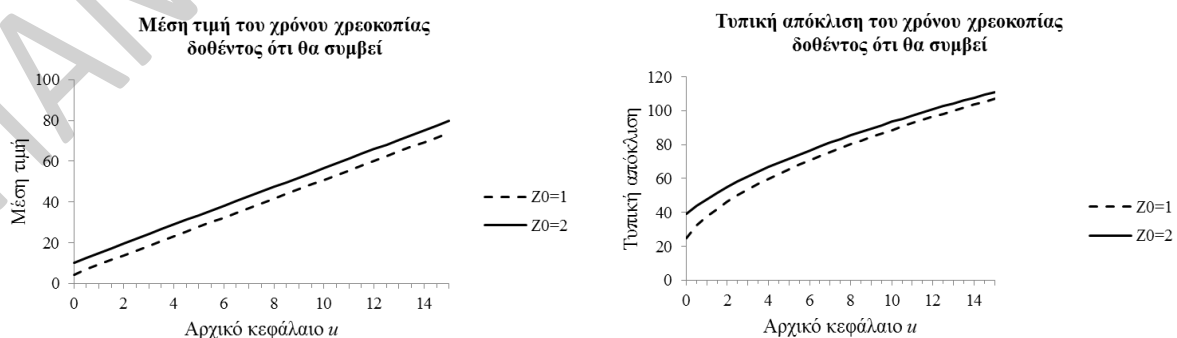
από την οποία

$$\vec{f}_2(s) := \left. \frac{\partial^2 \vec{m}_\delta(s)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} = \frac{\mathbf{A}_{0,adj}(s)}{\det \mathbf{A}_0(s)} \left(c \left. \frac{\partial^2 \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} + 2 \vec{f}_1(s) \right).$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει

$$\begin{pmatrix} E[T^2 \mathbf{I}(T < \infty, U(0) = u) | Z_0 = 1] \\ E[T^2 \mathbf{I}(T < \infty, U(0) = u) | Z_0 = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.980u^2 + 711.096u + 681.816 \\ 18.458u^2 + 703.242u + 1469.25 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 75.458 \\ 32.806 \end{pmatrix} e^{-3.161u}.$$

Στο σχήμα 6.6 απεικονίζεται η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας T , δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή η $E[T | T < \infty, U(0) = u, Z_0 = i]$, και αντίστοιχα η τυπική απόκλιση, σαν συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου u , ανάλογα την αρχική κατάσταση της διαδικασίας.



Σχήμα 6.6: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της T δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι η τυπική απόκλιση είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή. Αυτό δηλώνει ότι, στο συγκεκριμένο μοντέλο εξάρτησης που εξετάστηκε, είναι επικίνδυνο κάποιος να θεωρήσει ως δείκτη κινδύνου την πρώτη ροπή στη διαχείριση του χαρτοφυλακίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε ένα ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο για την περιγραφή της διαδικασίας πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου. Η μεθοδολογία βασίζεται σε θεωρία πινάκων και τα αποτελέσματα δίνονται σε διανυσματική μορφή. Οι περιπτώσεις που αναπτύχθηκαν και ενοποιήθηκαν από το εν λόγω μοντέλο είναι το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, το ανανεωτικό Sparre Andersen μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης κινδύνων να ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή δύο σταδίων, και την phase-type κατανομή δύο φάσεων, καθώς και μια ειδική εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών των ζημιών, X_i και των χρόνων εμφάνισης αυτών, W_i .

Το μοντέλο απαιτεί την επίλυση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg $\det(\mathbf{A}_\delta(s)) = 0$ όταν προκύπτουν διακεκριμένες (distinct) ρίζες. Μια επέκταση της εργασίας θα είναι προς την κατεύθυνση ριζών με πολλαπλότητα διαφορετική του 1. Επίσης μπορούν να εξεταστούν διαφορετικά μοντέλα εξάρτησης μεταξύ των ποσοτήτων X_i και W_i . Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής διερευνήθηκε στην περίπτωση που τα μεγέθη των κινδύνων ακολουθούν κατανομές με ελαφριά ουρά. Σχετικά με τους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων απαιτήσεων, διαφορετικές κατανομές από αυτές που αναφέρθηκαν χρειάζεται να μελετηθούν.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A. Μετασχηματισμός Laplace

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$, ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως

$$\hat{f}(s) = L\{f(x)\} := \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, s \in \mathbf{C}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής ο οποίος μετασχηματίζει μια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, σε μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s .

Ιδιότητες

1. Γραμμικότητα

$$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\} \text{ με } c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

2. Μετατόπιση στο πεδίο της μιγαδικής μεταβλητής

$$L\{e^{ax} f(x)\} = \hat{f}(s - a).$$

3. Μετατόπιση στο πεδίο της πραγματικής μεταβλητής

$$L\{f(x - a) I(x \geq a)\} = e^{-as} \hat{f}(s).$$

4. Πολλαπλασιασμός με σταθερά (αλλαγή κλίμακας)

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \text{ με } a > 0.$$

5. Παραγωγήιση

$$L\{f'(x)\} = s \hat{f}(s) - f(0),$$

$$L\{f''(x)\} = s^2 \hat{f}(s) - s f(0) - f'(0),$$

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

όταν οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(n)}$ / $[0, +\infty)$ είναι συνεχείς.

6. Ολοκλήρωση

$$L\left\{\int_0^x f(u) du\right\} = \frac{\hat{f}(s)}{s}.$$

7. Πολλαπλασιασμός συνάρτησης επί x^n

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n}.$$

8. Διαίρεση συνάρτησης δια x

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^{\infty} \hat{f}(t) dt.$$

9. Συνέλιξη

$$L\{f(x) * g(x)\} = \hat{f}(s)\hat{g}(s),$$

όπου

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

10. Θεώρημα αρχικής τιμής

(αναφέρεται στην συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s).$$

11. Θεώρημα τελικής τιμής

(αναφέρεται στην συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s).$$

Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής επιτρέπουν τον προσδιορισμό της αρχικής και τελικής τιμής της συνάρτησης $f(x)$, χωρίς να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\hat{f}(s)$. Τα θεωρήματα ισχύουν όταν, γράφοντας την $s \hat{f}(s)$ σαν λόγο δύο πολυωνύμων $N(s)/D(s)$, όλες οι ρίζες της εξίσωσης $D(s) = 0$ είναι οι ρίζες της $s \hat{f}(s)$ και αυτές ικανοποιούν την συνθήκη $Re(s) < 0$.

Συνάρτηση δέλτα (Dirac)

$$\delta(x) = 0, x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$\delta(x - c) = 0, x \neq c, \text{ με } c \geq 0$$

Ιδιότητες

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a-x)\delta(x)dx = f(a)$$

$$L\{\delta(x-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\delta(x-c)dx = e^{-cx}$$

Πίνακας κάποιων μετασχηματισμών Laplace

$f(x)$	$\hat{f}(s)$
c	$\frac{c}{s}, s > 0$
x	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
$x^n, (n \geq 1, n \in \mathbf{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, s > a$

B. Μετασχηματισμός Laplace και πιθανότητες

Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$. Ο μετασχηματισμός Laplace (Laplace-Stieltjes) ορίζεται ως

$$F^*(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), s \geq 0.$$

Έστω ότι η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = F'(x)$. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

που είναι ο συνήθης μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s) = L\{f(x)\}$ της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ όταν αυτή υπάρχει.

Ιδιότητες

1. $\hat{f}(s) = E(e^{-sX})$

2. $\hat{f}(0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ (αφού f είναι σ.π.π.)

3. $0 \leq \hat{f}(s) \leq 1$ όλα τα $s \geq 0$

4. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κατανομής

Αν $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt$ η συνάρτηση κατανομής και

τότε

$$L\{F(x)\} = \hat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_x^{\infty} f(t) dt \right) dx = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

(από την ιδιότητα μετασχηματισμού ολοκληρώματος)

5. Μετασχηματισμός Laplace της ουράς της κατανομής

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t) dt = 1 - F(x) \text{ η δεξιά ουρά της τ.μ. } X$$

τότε

$$L\{\bar{F}(x)\} = \hat{\bar{F}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dx = L\{1 - F(x)\} = L\{1\} - L\{F(x)\} = \frac{1}{s} - \hat{F}(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s}$$

6. Σχέση μετασχηματισμού Laplace και ροπογεννήτριας συνάρτησης

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$M_X(-s) = E(e^{-sX}) = \hat{f}(s)$$

7. Υπολογισμός ροπών με τη βοήθεια μετασχηματισμού Laplace

$$E(X^n) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s) \Big|_{s=0}$$

Γ. Τελεστής Dickson-Hipp

Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ο τελεστής Dickson-Hipp ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y) dy, \quad r \in \mathbf{C}, \quad x \geq 0.$$

Ιδιότητες

$$1. \quad T_r f(x) = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y+x) dy$$

απόδειξη

από το πρώτο ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής

$$t = y - x \Rightarrow dt = dy; \quad \text{όρια: } y = x \Rightarrow t = 0, \quad y = \infty \Rightarrow t = \infty$$

$$\text{οπότε } T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-rt} f(t+x) dt$$

2. Για $x = 0$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f

$$T_r f(0) = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) dy = \hat{f}(r)$$

3. Για $r = 0$, αν θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, είναι η ουρά της κατανομής

$$T_0 f(x) = \int_x^{\infty} f(y) dy = \bar{F}(y)$$

4. Μετασχηματισμός Laplace του $T_r f(x)$

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}$$

απόδειξη

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} T_r f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y) dy \right) dx$$

με αλλαγή ορίων και σειράς ολοκλήρωσης παίρνουμε $\begin{cases} 0 \leq x < \infty \\ x \leq y < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y < \infty \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$

οπότε

$$\begin{aligned} T_r \hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y) dx \right) dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-ry} e^{rx} f(y) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) \left(\int_0^y e^{(r-s)x} dx \right) dy = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) \frac{e^{(r-s)y} - 1}{r - s} dy \\ &= \frac{1}{r - s} \left(\int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy - \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) dy \right) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s} \end{aligned}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Α. Σ. Κυριαζής, *Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Interbooks, 2006.
- [2] Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2012), *Θεωρία Κινδύνων II*, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [3] H. Albrecher, O. J. Boxma (2004), A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(2), 245-254.
- [4] H. Albrecher, O. J. Boxma (2005), On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(3), 650-672.
- [5] S. Asmussen (2000), Matrix-analytic models and their analysis, *Scand. J. Statist.*, 27(2), 193-226.
- [6] S. Asmussen (2000b), *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore.
- [7] D. Dickson and C. Hipp (2001), On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics & Economics* 29, 333-344.
- [8] H. U. Gerber, E. S. W. Shiu (1998), On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48-78.
- [9] H. U. Gerber, E. S. W. Shiu (2005), The time value of ruin in a Sparre Andersen model, *North American Actuarial Journal*, 9(2), 49-65.
- [10] X. S. Lin, G. E. Willmot (2000), The moments of the time of ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 19-44.
- [11] M. F. Neuts (1975), Probability distributions of phase-type, In *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, Department of Mathematics, University of Louvain, Belgium, 173-206.
- [12] M. F. Neuts (1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, The John Hopkins University Press: Baltimore.
- [13] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 7th Ed., Academic Press, (2000).
- [14] M. R. Spiegel (1965), *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*. New York: Schaum.