



## **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΤΜΗΜΑ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΠΜΣ: ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

### **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

***Η ΠΡΟΒΛΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ  
ΜΕΤΟΧΙΚΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ***

**ΒΑΛΣΑΜΙΔΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ (ΜΑΕ10033)**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΒΡΟΝΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ**

## Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	3
1.Παλινδρόμηση.....	5
1.1 Εισαγωγή στην ανάλυση παλινδρόμησης .....	5
1.1.1 Προεπισκόπηση.....	5
1.1.2 Σχέση εναντίον αιτιότητας .....	6
1.1.3 Στατιστικά Μοντέλα – Ντετερμινιστικά Μοντέλα.....	8
1.2 Ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης .....	9
1.2.1.Προεπισκόπηση.....	9
1.2.2 Γενική στρατηγική.....	10
1.2.3 Προσδιορισμός της καλύτερης ευθείας γραμμής .....	11
1.3 Ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης.....	11
1.3.1 Προεπισκόπηση.....	11
1.3.2 Μοντέλα Πολλαπλής Παλινδρόμησης .....	12
1.3.3 Υποθέσεις Πολλαπλής Παλινδρόμησης.....	13
1.3.4 Εκτίμηση των παραμέτρων της πολλαπλής παλινδρόμησης.....	14
2. Συνδυασμός Προβλέψεων.....	15
2.1 Το Πρόβλημα του Συνδυασμού Προβλέψεων .....	18
2.1.1 Προσδιορισμός της Συνάρτησης Απώλειας .....	19
2.1.2 Κατασκευή ενός Σούπερ Μοντέλου – Συγκέντρωση Πληροφοριών .....	22
2.1.3 Γραμμικός Συνδυασμός Προβλέψεων με MSE.....	23
2.1.4 Βέλτιστο του Σχήματος Ίσων Βαρών – Γενική Υπόθεση .....	28
2.1.5 ENC .....	30
2.2 Μέθοδοι Συνδυασμού Προβλέψεων.....	34
2.2.1 Δείκτες Διάχυσης.....	38
2.2.2 Εκτίμηση Πρόβλεψης.....	41
3. Πηγές Δεδομένων και Εφαρμογή.....	46
4.Συμπεράσματα.....	57
Βιβλιογραφία.....	60
Πίνακες.....	65
Γραφήματα .....	70

## Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει ως σκοπό τη μελέτη των μεθόδων που έχουν θεωρηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία ως επιτυχείς για την πρόβλεψη των αποδόσεων των μετοχικών δεικτών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις μεθόδους εκείνες οι οποίες χρησιμοποιούν μακροοικονομικές και χρηματοοικονομικές μεταβλητές, καθώς επίσης και στους ελέγχους στατιστικής σημαντικότητας των προβλέψεων. Ο συνδυασμός προβλέψεων συχνά χρησιμοποιείται για να παράγει καλύτερα αποτελέσματα από τις μεμονωμένες προβλέψεις. Αναλύουμε τους παράγοντες που καθορίζουν τα πλεονεκτήματα από το συνδυασμό προβλέψεων όπως ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των σφαλμάτων πρόβλεψης και το μέγεθος της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης των επιμέρους μοντέλων. Ορισμένες μελέτες υποστηρίζουν ότι, παρά τις εκτεταμένες αποδείξεις εντός δείγματος για τη προβλεψιμότητα του equity premium, οι δημοφιλείς μεταβλητές αδυνατούν να ξεπεράσουν την απλή ιστορική μέση πρόβλεψη αναφοράς σε εκτός δείγματος προβλέψεις. Πρόσφατες μελέτες, ωστόσο, παρέχουν βελτιωμένες στρατηγικές προβλέψεις που είναι στατιστικά και οικονομικά σημαντικές σε εκτός δείγματος κέρδη σε σχέση με τον ιστορικό μέσο όρο. Αυτές οι στρατηγικές, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών μοντέλων με περιορισμούς, ο συνδυασμός προβλέψεων, και οι δείκτες διάχυσης βελτιώνουν την επίδοση της πρόβλεψης αντιμετωπίζοντας την αβεβαιότητα του μοντέλου και την αστάθεια των παραμέτρων. Η απόδειξη της προβλεψιμότητας των αποδόσεων των μετοχών έχει σε όλο τον κόσμο σημαντικές συνέπειες και για τα μοντέλα αποτίμησης και για τις στρατηγικές διαχείρισης επενδύσεων.

Όταν κάποιος χρειάζεται να λάβει σοβαρές αποφάσεις τότε οι πολλαπλές προβλέψεις της ίδιας μεταβλητής είναι συχνά χρήσιμες. Μπορεί τρέχοντας τις ίδιες μεταβλητές για πρόβλεψη να βγουν διαφορετικά αποτελέσματα και αυτό να οφείλεται είτε στις διαφορετικές πληροφορίες που έχει ο καθένας που κάνει πρόβλεψη ή στον διαφορετικό τρόπο προσέγγισης της πρόβλεψης όπως για παράδειγμα αν έχει επιλέξει συνεχείς ή διακριτές παραμέτρους, γραμμικά ή μη γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης κ.τ.λ..

Όταν λοιπόν χρησιμοποιούμε πολλαπλές προβλέψεις στην ίδια μεταβλητή, ένα ζήτημα που προκύπτει είναι πως θα εκμεταλλευθούμε με τον καλύτερο τρόπο αυτές τις πληροφορίες σε επιμέρους προβλέψεις. Από θεωρητικής άποψη, εκτός και αν μπορεί κανείς να προσδιορίσει εκ των προτέρων ένα συγκεκριμένο μοντέλο

πρόβλεψης που να παράγει τα μικρότερα δυνατόν σφάλματα σε σχέση με άλλα μοντέλα (και των οποίων τα σφάλματα πρόβλεψης δεν μπορούν να αντισταθμιστούν από σφάλματα πρόβλεψης άλλων μοντέλων), ο συνδυασμός προβλέψεων προσφέρει οφέλη τέτοια ώστε να καθίσταται ελκυστικό να συνδυάζουμε μεμονωμένες προβλέψεις αντί να στηριζόμαστε σε προβλέψεις από ένα ενιαίο μοντέλο. Ακόμη και αν το καλύτερο μοντέλο θα μπορούσε να προσδιοριστεί σε οποιοδήποτε σημείο του χρόνου, ο συνδυασμός προβλέψεων μπορεί ακόμη να είναι πιο ελκυστική στρατηγική, μολονότι η επιτυχία του θα εξαρτηθεί από το πόσο καλά μπορούν να προσδιοριστούν τα βάρη του.

Ο συνδυασμός προβλέψεων έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στο εμπορικό κόσμο σε διάφορους τομείς, όπως στην πρόβλεψη για το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν, στη μεταβλητότητα του συναλλάγματος, στο πληθωρισμό, στις τιμές των μετοχών, στα μετεωρολογικά δεδομένα, στο πληθυσμό των πόλεων, στα αποτελέσματα των αγώνων ποδοσφαίρου, στους πολιτικούς κινδύνους και πολλά άλλα όπως αναφέρει ο Clemen (1989). Από προσομοιώσεις και εμπειρικές ενδείξεις για συνδυασμούς προβλέψεων ο Clemen (1989, σελ. 559) αναφέρει ότι τα αποτελέσματα συνδυάζοντας πολλαπλές προβλέψεις οδηγούν σε αυξημένη ακρίβεια πρόβλεψης καθώς και ότι σε πολλές περιπτώσεις, μπορεί κανείς να κάνει σημαντικές βελτιώσεις στο σφάλμα πρόβλεψης υπολογίζοντας απλά το μέσο όρο των διαφορετικών προβλέψεων. Πιο πρόσφατα, οι Makridakis and Hibon (2000) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ακρίβεια του συνδυασμού διαφόρων μεθόδων ξεπερνά, κατά μέσο όρο, τις συγκεκριμένες μεθόδους που συνδυάζονται. Ομοίως, οι Stock and Watson (2001, 2004) πραγματοποίησαν μια εκτεταμένη μελέτη σε πολλές οικονομικές και χρηματοοικονομικές μεταβλητές με τη βοήθεια γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων πρόβλεψης και διαπίστωσαν ότι, κατά μέσο όρο, ο συνδυασμός προβλέψεων ξεπέρασε τις προβλέψεις ακόμη και από το καλύτερο απλό μοντέλο, επιβεβαιώνοντας έτσι το συμπέρασμα του Clemen. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Marcellino (2004).

Η ιδέα του συνδυασμού προβλέψεων προέκυψε από τους Bates and Granger (1969) υποθέτοντας ότι, ίσως λόγω της παρουσίας των ιδιωτικών πληροφοριών, οι βασικές πληροφορίες που χρειάζονται στις ατομικές προβλέψεις είναι συχνά δύσκολο να παρατηρηθούν από όποιον κάνει τη πρόβλεψη. Σε αυτήν την κατάσταση, δεν είναι

εφικτό να πάρουμε το βασικό σύνολο των πληροφοριών και να κατασκευάσουμε ένα πολύ καλό μοντέλο το οποίο να περιέχει κάθε ένα από τα βασικά μοντέλα πρόβλεψης. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να προβλέψουμε μια μεταβλητή  $y$ , και ότι οι μέσες τιμές δύο προβλέψεων είναι  $\hat{Y}_1$  και  $\hat{Y}_2$ . Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη πρόβλεψη βασίζεται στις μεταβλητές  $x_1, x_2$ , δηλαδή  $\hat{Y}_1 = g_1(x_1, x_2)$ , ενώ η δεύτερη πρόβλεψη βασίζεται στις μεταβλητές  $x_3, x_4$ , δηλαδή  $\hat{Y}_2 = g_2(x_3, x_4)$ . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβλητές εισέρχονται με μη μηδενικά βάρη στις προβλέψεις και ότι οι μεταβλητές  $X$  είναι ασυσχέτιστες. Αν οι  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  μπορούσαν να παρατηρηθούν, θα ήταν φυσικό να κατασκευαστεί ένα μοντέλο πρόβλεψης βασισμένο και στις τέσσερις μεταβλητές,  $\hat{Y}_3 = g_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Από την άλλη πλευρά, αν μόνο οι προβλέψεις,  $\hat{Y}_1$  και  $\hat{Y}_2$  έχουν παρατηρηθεί από αυτόν που κάνει την πρόβλεψη (ενώ οι βασικές μεταβλητές δεν έχουν παρατηρηθεί), τότε η μόνη επιλογή είναι να συνδυάσει αυτές τις προβλέψεις, δηλαδή να εξάγει ένα μοντέλο του τύπου  $\hat{Y} = g_c(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$ . Γενικότερα, το σύνολο πληροφοριών του χρήστη της πρόβλεψης,  $\mathcal{F}$ , μπορεί να περιλαμβάνει ατομικές προβλέψεις,  $\mathcal{F} = \{\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n\}$ , όπου  $\mathcal{F}$  δεν είναι συχνά η ένωση των πληροφοριών στις οποίες βασίζονται οι μεμονωμένες προβλέψεις,  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ , αλλά ένα πολύ μικρότερο υποσύνολο. Φυσικά, όσο υψηλότερος είναι ο βαθμός της επικάλυψης στο σύνολο των πληροφοριών που χρησιμοποιείται για τις προβλέψεις, τόσο λιγότερο χρήσιμος θα είναι ένας συνδυασμός προβλέψεων (Clemen (1987)).

## 1. Παλινδρόμηση

### 1.1 Εισαγωγή στην ανάλυση παλινδρόμησης

#### 1.1.1 Προεπισκόπηση

Η παλινδρόμηση αποτελεί ένα στατιστικό εργαλείο για την αξιολόγηση της σχέσης μιας ή περισσότερων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_k$  οι οποίες καλούνται ανεξάρτητες μεταβλητές σε σχέση με μία συνεχής μεταβλητή  $Y$  η οποία καλείται εξαρτημένη μεταβλητή. Η παλινδρόμηση χρησιμοποιείται συχνά όταν για παράδειγμα οι μεταβλητές που συλλέγουμε για μια έρευνα ενός συγκεκριμένου δείγματος ή για μελέτη κάποιων παρατηρήσεων είναι ανεξάρτητες και δεν μπορούν

να ελεγχθούν. Η παλινδρόμηση χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε αν οι παράγοντες  $X_1, X_2, \dots, X_k$  μπορούν να μας βοηθήσουν για να προβλέψουμε τη μεταβλητή  $Y$  όπως για παράδειγμα αν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν η σχέση θνησιμότητας ( $X_1$ ) σε σχέση με τις κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας ( $Y$ ) μιας ασφαλιστικής εταιρίας είναι διαφορετικές ανάλογα με το τόπο κατοικίας ( $X_2$ ) του ατόμου. Ειδικότερα, η σχέση μεταξύ θνησιμότητας και των κεφαλαιακών απαιτήσεων μπορεί να είναι αρκετά ισχυρή για κάποιους που μένουν σε μια σεισμογενή ή αρκετά τοξική περιοχή, αλλά αρκετά αδύναμη για αυτούς που μένουν σε ένα μη σεισμογενές και καθαρό περιβάλλον. Εάν ισχύει, πρέπει να πούμε ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της θνησιμότητας και των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Έτσι για να καταλήξουμε στο τελικό συμπέρασμα για την σχέση ανάμεσα στη θνησιμότητα και των κεφαλαιακών απαιτήσεων πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη το τόπο που κατοικεί ένα άτομο. Γενικότερα, αν τα  $X_1$  και  $X_2$  αλληλεπιδρούν στην κοινή επίδρασή τους στην  $Y$ , τότε η σχέση της μια μεταβλητής  $X$  με τη  $Y$  εξαρτάται από την τιμή της άλλης μεταβλητής  $X$ .

### 1.1.2 Σχέση εναντίον αιτιότητας

Στην παλινδρόμηση πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σχετικά με την ερμηνεία των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται, και γενικότερα από οποιαδήποτε μορφή ανάλυσης που έχει ως σκοπό να καταγράψει τη σύνδεση, μέσω του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Παρά το γεγονός ότι οι στατιστικοί υπολογισμοί που χρησιμοποιούνται για να παράγουν ένα μέτρο συσχέτισης μπορεί να είναι σωστοί, η ίδια η εκτίμηση μπορεί να είναι μεροληπτική. Αυτή η μεροληψία μπορεί να προέλθει από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για να επιλεγτούν τα αντικείμενα για τη μελέτη, από λάθη στα στοιχεία που χρησιμοποιούνται στις στατιστικές αναλύσεις, ή ακόμη και από άλλες μεταβλητές που δεν έχουν μετρηθεί ή θεωρούνται ακατάλληλες για την ανάλυση.

Για παράδειγμα, εάν οι κεφαλαιακές απαιτήσεις και η ηλικία των ατόμων μετρήθηκαν σε ένα συγκεκριμένο δείγμα ατόμων σε ένα συγκεκριμένο χρόνο, η παλινδρόμηση μπορεί να υποδηλώνει ότι, κατά μέσο όρο, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις αυξάνονται όσο αυξάνεται η ηλικία των ανθρώπων. Περαιτέρω, μια τέτοια ανάλυση μπορεί να παρέχει αποδείξεις (με βάση ένα διάστημα εμπιστοσύνης) ότι αυτή η σχέση

έχει μέτρια αντοχή και είναι στατιστικά σημαντική. Εάν όμως η μελέτη αφορούσε μόνο μεγάλους σε ηλικία ανθρώπους, δηλαδή πάνω από 60 χρονών, ή χρονική περίοδος δεν ήταν η καλύτερη διότι μπορεί να είχε συμβεί ένας σεισμός, ή και άλλοι παράγοντες όπως η φυλή, το φύλο, γενικά το βιοτικό επίπεδο κ.τ.λ. δεν συμπεριλήφθησαν υπόψη, τα παραπάνω συμπεράσματα μπορεί να καταστούν άκυρα ή τουλάχιστον αμφίβολα.

Η διαπίστωση μιας «στατιστικά σημαντικής» σχέσης σε μια συγκεκριμένη μελέτη δεν αποδεικνύει αιτιώδης σχέση. Για να αξιολογήσει τους ισχυρισμούς της αιτιότητας, ο ερευνητής πρέπει να εξετάσει τα κριτήρια που είναι έξω από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τα αποτελέσματα της κάθε μεμονωμένης μελέτης. Πιο αυστηροί ορισμοί της αιτιότητας απαιτούν ότι μια αλλαγή σε μια μεταβλητή (X) παράγει πάντα μια αλλαγή σε μια άλλη μεταβλητή (Y). Αυτό σημαίνει ότι, για να καταδείξει μια σχέση αιτίας-αποτελέσματος μεταξύ X και Y, απαιτείται μια πειραματική απόδειξη ότι μια αλλαγή στο Y αποτελέσματα οφείλεται στην αλλαγή X. Αν και είναι αναγκαίες οι πειραματικές αποδείξεις είναι συχνά αδύνατες ή ανέφικτες.

Ένας κατάλογος των γενικών κριτηρίων για την αξιολόγηση του βαθμού στον οποίο τα διαθέσιμα στοιχεία υποστηρίζουν μια αιτιώδης σχέση επισημοποιήθηκε από το Bradford Hill και αυτή η λίστα στη συνέχεια υιοθετήθηκε από πολλές επιδημιολογικούς ερευνητές. Η αντοχή του συνεταιρίζεσθαι είναι ένα κριτήριο το οποίο αναφέρει ότι όσο ισχυρότερη είναι μια συσχέτιση που παρατηρήθηκε σε μια σειρά από διαφορετικές μελέτες, τόσο λιγότερο πιθανό είναι αυτή η συσχέτιση να είναι πλαστή, λόγω της μεροληψίας. Επίσης υπάρχει η συνοχή των αποδεικτικών στοιχείων δηλαδή ότι τα ευρήματα δεν έρχονται σε σοβαρή σύγκρουση με αποδεκτά γεγονότα σχετικά με τα αποτελέσματα των μεταβλητών που μελετούνται. Ακόμη υπάρχει η ειδικότητα του συλλόγου όπου ο παράγοντας μελέτη σχετίζεται με μόνο ένα αποτέλεσμα. Πολλοί παράγοντες μελέτης έχουν πολλαπλές επιπτώσεις, όμως, και οι περισσότερες ασθένειες έχουν πολλαπλές αιτίες.

Ακόμα κι αν αυτά τα κριτήρια είναι όλα ικανοποιητικά, μια αιτιώδης σχέση δεν μπορεί να γίνει δεκτή με βεβαιότητα. Παρ' όλα αυτά, σε περίπτωση απουσίας των πειραματικών αποδείξεων, η χρήση αυτών των κριτηρίων μπορεί να είναι ένας λογικός και πρακτικός τρόπος για να αντιμετωπιστεί το ζήτημα της αιτιότητας.

### 1.1.3 Στατιστικά Μοντέλα - Ντετερμινιστικά Μοντέλα

Αν και η συσχέτιση δεν μπορεί πάντα να καθοριστεί με βεβαιότητα με στατιστική ανάλυση, οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών μπορεί να προσδιοριστούν στατιστικά επαρκώς. Με την κατάλληλη στατιστική ανάλυση και σχεδιασμό, ένας ερευνητής μπορεί να μοντελοποιήσει το βαθμό στον οποίο οι αλλαγές στις ανεξάρτητες μεταβλητές σχετίζονται με αλλαγές στις εξαρτημένες μεταβλητές. Ωστόσο, τα στατιστικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν με τη χρήση παλινδρόμησης ή άλλες μεθόδους με πολλαπλές μεταβλητές πρέπει να διαχωριστούν από τα ντετερμινιστικά μοντέλα.

Ο νόμος της πτώσης των σωμάτων στη φυσική, για παράδειγμα, είναι ένα ντετερμινιστικό μοντέλο που υποθέτει ένα ιδανικό σκηνικό: η εξαρτημένη μεταβλητή μεταβάλλεται με ένα πλήρως εξαρτημένο τρόπο σύμφωνα με μια τέλεια (χωρίς λάθη) μαθηματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών. Τα στατιστικά μοντέλα, από την άλλη μεριά, επιτρέπουν την πιθανότητα λάθους κατά την περιγραφή μιας σχέσης. Για παράδειγμα, σε μια μελέτη που συσχετίζει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις με την ηλικία, τα άτομα της ίδιας ηλικίας είναι πιθανό να χρειάζονται ακριβώς τις ίδιες κεφαλαιακές απαιτήσεις.

Παρ' όλα αυτά, με τις κατάλληλες στατιστικές μεθόδους, μπορεί να είμαστε σε θέση να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι, κατά μέσο όρο, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις αυξάνονται με την ηλικία. Επιπλέον, η κατάλληλη στατιστική μοντελοποίηση μπορεί να μας επιτρέψει να προβλέψουμε τις αναμενόμενες κεφαλαιακές απαιτήσεις για μια συγκεκριμένη ηλικία και να συνδέσει ένα μέτρο της μεταβλητότητας με το εν λόγω πρόβλημα. Μέσα από τη χρήση των πιθανοτήτων και της στατιστικής θεωρίας, υπάρχουν καταστάσεις που λαμβάνουν υπόψη την αβεβαιότητα του πραγματικού κόσμου μέσω του σφάλματος μέτρησης και ατομική μεταβλητότητα. Φυσικά, τέτοιες καταστάσεις είναι κατ' ανάγκη μη ντετερμινιστικές και απαιτούν προσεκτική ερμηνεία. Δυστυχώς, τέτοια ερμηνεία είναι συχνά αρκετά δύσκολο να γίνει.



## 1.2 Ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης

### 1.2.1. Προεπισκόπηση

Η απλούστερη μορφή του γενικού προβλήματος παλινδρόμησης ασχολείται με μία εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  και μία ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$ . Προηγουμένως έχει περιγραφεί γενικό πρόβλημα όσον αφορά τις μεταβλητές  $k$  ανεξάρτητων  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Σε αυτή τη παράγραφο θα δώσουμε την προσοχή μας στην ειδική περίπτωση όπου  $k = 1$ , αλλά αντί για  $X_1$  θα γράφουμε  $X$ . Για να διευκρινιστούν οι βασικές έννοιες και υποθέσεις της ανάλυσης παλινδρόμησης θα ήταν χρήσιμο να έχουμε μια ενιαία ανεξάρτητη μεταβλητή. Επιπλέον, μπορούμε να εξετάσουμε μια ανεξάρτητη μεταβλητή την κάθε φορά, ακόμη και όταν οι διάφορες ανεξάρτητες μεταβλητές θεωρούνται τελικά από κοινού, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Ξεκινάμε με τη περιγραφή του στατιστικού προβλήματος της εύρεσης της καμπύλης (ευθείας γραμμής, παραβολής, κλπ) που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα, τα οποία προσεγγίζουν την πραγματική (αλλά άγνωστη) σχέση μεταξύ  $X$  και  $Y$ . Λαμβάνοντας υπόψη ένα δείγμα από  $n$  ατομικές ή άλλες μονάδες μελέτης, όπως γεωγραφικές περιοχές, χρονικά σημεία, ή κομμάτια από φυσικό υλικό, παρατηρούμε για κάθε τιμή του  $X$  και τη τιμή του  $Y$ . Έχουμε έτσι  $n$  ζεύγη από παρατηρήσεις που μπορεί να συμβολίζονται με  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ , όπου οι δείκτες τώρα αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και όχι σε διαφορετικές μεταβλητές. Επειδή αυτά τα ζεύγη μπορούν να θεωρηθούν σημεία στο χώρο δύο διαστάσεων, μπορούμε να τα σχεδιάσουμε σε ένα γράφημα. Ένα τέτοιο γράφημα ονομάζεται διάγραμμα διασποράς.

Δύο βασικά ερωτήματα θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με οποιαδήποτε ανάλυση παλινδρόμησης:

1. Ποιο είναι το πιο κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για να χρησιμοποιήσουμε μια ευθεία γραμμή, ή κάποια άλλα;

2. Λαμβάνοντας υπόψη ένα συγκεκριμένο μοντέλο, τι εννοούμε με το πώς μπορούμε να καθορίσουμε το καλύτερο μοντέλο για τα δεδομένα; Με άλλα λόγια, αν το μοντέλο μας είναι μια ευθεία γραμμή, πώς μπορούμε να βρούμε το καλύτερο γραμμικό μοντέλο;

### 1.2.2 Γενική στρατηγική

Αρκετές γενικές στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών με τη βοήθεια της ανάλυσης παλινδρόμησης. Η πιο κοινή από αυτές λέγεται forwardmethod. Η στρατηγική αυτή αρχίζει με ένα απλά δομημένο μοντέλο, συνήθως μια ευθεία γραμμή, και προσθέτει περισσότερη πολυπλοκότητα στο μοντέλο σε διαδοχικά βήματα, εάν χρειάζεται. Μια άλλη στρατηγική, που ονομάζεται backwardmethod, αρχίζει με ένα πολύπλοκο μοντέλο, όπως με ένα υψηλού βαθμού πολωνύμου, και απλοποιείται διαδοχικά, εάν είναι δυνατόν, με την εξάλειψη των περιττών όρων. Μία τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιεί ένα μοντέλο προτεινόμενο από την εμπειρία ή τη θεωρία, το οποίο αναθεωρείται είτε προς ή μακριά από την πολυπλοκότητα, όπως υπαγορεύεται από τα δεδομένα.

Η στρατηγική που θα επιλεγεί εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος και τα δεδομένα. Η ποιότητα των αποτελεσμάτων συχνά εξαρτάται περισσότερο από την ικανότητα με την οποία μια στρατηγική εφαρμόζεται από την επιλεγείσα συγκεκριμένη στρατηγική. Συχνά είναι δελεαστικό να χρησιμοποιούμε πολλές στρατηγικές και στη συνέχεια να χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα που παρέχουν την πιο «λογική» ερμηνεία της σχέσης μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και της μεταβλητής πρόβλεψης. Αυτή η διερευνητική προσέγγιση απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή για να διασφαλιστεί η αξιοπιστία των συμπερασμάτων.

Συχνά προτιμάται η backwardmethod. Η forwardmethod, ωστόσο, ανταποκρίνεται πιο φυσικά στην συνήθη εξέλιξη της θεωρίας από το απλό στο σύνθετο. Σε ορισμένες απλές καταστάσεις, η forwardκαι η backwardmethodsοδηγούν στο ίδιο τελικό μοντέλο. Σε γενικές γραμμές, ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει πάντα.

Μαθηματικά, μια ευθεία γραμμή μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής  $Y = \alpha + \beta X$ . Τα σύμβολα  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν σταθερές τιμές για μια δεδομένη γραμμή και λέγονται παράμετροι της ευθείας παλινδρόμησης.  $\alpha$  ονομάζεται το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα  $XX'$ , και  $\beta$  καλείται η κλίση της ευθείας.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε θεωρήσει ένα γραμμικό μοντέλο ως το πρώτο βήμα για την forwardmethod για τον προσδιορισμό του καλύτερου μοντέλου για την περιγραφή της σχέσης μεταξύ  $X$  και  $Y$ . Επιθυμούμε να καθορίσουμε πια γραμμή «ταιριάζει καλύτερα». Σίγουρα δεν θα υπάρχει πρόβλημα να αποφασίσουμε ποια γραμμή «ταιριάζει καλύτερα» εάν τα δεδομένα μας επιτρέπουν να σχεδιάσουμε μια

ευθεία γραμμή η οποία θα διέρχεται μέσα από κάθε σημείο του διαγράμματος διασποράς. Δυστυχώς, αυτό δεν θα συμβεί ποτέ με πραγματικά δεδομένα.

Έτσι, η ευθεία γραμμή που επιδιώκουμε μπορεί μόνο να προσεγγίσει την πραγματική κατάσταση των υποθέσεων και δεν μπορεί να προβλέψει με ακρίβεια κάθε μεμονωμένη μεταβλητή  $Y$  για κάθε μεμονωμένη μεταβλητή  $X$ . Στην πραγματικότητα, αυτή η ανάγκη για προσέγγιση θα υπήρχε ακόμα και αν οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  έχουν μετρηθεί για το σύνολο του πληθυσμού αντί για μόλις ένα μικρό δείγμα δεδομένων. Επιπλέον, το γεγονός ότι η γραμμή πρέπει να καθορίζεται από τα δεδομένα του δείγματος και όχι από τον πληθυσμό μας υποχρεώνει να εξετάσουμε το πρόβλημα της εκτίμησης των άγνωστων παραμέτρων του πληθυσμού.

### **1.2.3 Προσδιορισμός της καλύτερης ευθείας γραμμής**

Υπάρχουν δύο μέθοδοι για την εξεύρεση των καλύτερων μοντέλων γραμμικής παλινδρόμησης: η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και η μέθοδος της ελάχιστης διακύμανσης.

Στη μέθοδο της ελάχιστης διακύμανσης μας ενδιαφέρει να βρούμε την καλύτερη «τοποθετημένη» επιφάνεια εκείνη δηλαδή που χρησιμοποιεί την ελάχιστη διακύμανση. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι λίγο πιο σύνθετη και προσδιορίζει την καλύτερη θέση μιας ευθείας γραμμής καθώς η γραμμή αυτή ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των κάθετων τμημάτων της γραμμής που χαράσσεται από τα δεδομένα που έχουν παρατηρηθεί στο διάγραμμα διασποράς της καλύτερης γραμμής. Η ιδέα εδώ είναι ότι όσο μικρότερες είναι οι αποκλίσεις των παρατηρούμενων τιμών από αυτή τη γραμμή, και κατά συνέπεια όσο μικρότερο είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων αυτών τόσο πιο κοντά θα είναι η καλύτερη ευθεία στα δεδομένα.

## **1.3 Ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης**

### **1.3.1 Προεπισκόπηση**

Η ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης αποτελεί επέκταση της απλής παλινδρόμησης που περιλαμβάνει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή στην κατάσταση όπου χρησιμοποιούνται περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές.

Η ενασχόληση με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές ταυτόχρονα σε μια ανάλυση παλινδρόμησης είναι πολύ πιο δύσκολη από την αντιμετώπιση με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, διότι:

1. Είναι πιο δύσκολο να επιλεγθεί το καλύτερο μοντέλο, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρχουν αρκετές υποψήφιες μεταβλητές.

2. Είναι πιο δύσκολο να απεικονίσουμε το διαμορφωμένο μοντέλο ειδικά αν υπάρχουν περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, δεδομένου ότι δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε τα δεδομένα απευθείας σε περισσότερες από τρεις διαστάσεις.

3. Οι υπολογισμοί είναι σχεδόν αδύνατοι χωρίς πρόσβαση σε ένα υπολογιστή με υψηλή ταχύτητα και με ένα αξιόπιστο πρόγραμμα.

4. Μερικές φορές είναι δύσκολο να ερμηνεύσουμε ποια είναι η καλύτερη «τοποθέτηση» του μοντέλου σε πραγματικές τιμές.

### 1.3.2 Μοντέλα Πολλαπλής Παλινδρόμησης

Ένα παράδειγμα μοντέλου πολλαπλής παλινδρόμησης δίνεται από οποιοδήποτε δεύτερης ή υψηλότερης τάξης πολυώνυμο. Προσθέτοντας όρους ανώτερης τάξης (π.χ.  $X^2$  ή  $X^3$  κ.τ.λ.) σε ένα μοντέλο, μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμο με την προσθήκη νέων ανεξάρτητων μεταβλητών. Έτσι, αν μετονομάσουμε το  $X$  ως  $X_1$  και το  $X^2$  ως  $X_2$  το δεύτερης τάξης μοντέλο

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon,$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Φυσικά, στην πολυωνυμική παλινδρόμηση έχουμε μόνο μία βασική ανεξάρτητη μεταβλητή, οι άλλες είναι απλές μαθηματικές συναρτήσεις της βασικής μεταβλητής. Σε πιο γενικά προβλήματα πολλαπλής παλινδρόμησης, ωστόσο, ο αριθμός των βασικών ανεξάρτητων μεταβλητών μπορεί να είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Η γενική μορφή ενός μοντέλου παλινδρόμησης για  $k$  ανεξάρτητες μεταβλητές δίδεται από το τύπο

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon,$$

όπου  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  είναι οι συντελεστές παλινδρόμησης που πρέπει να εκτιμηθούν. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_k$  μπορεί να είναι όλες ανεξάρτητες βασικές μεταβλητές ή μερικές μπορεί να είναι συναρτήσεις κάποιων βασικών μεταβλητών.

### 1.3.3 Υποθέσεις Πολλαπλής Παλινδρόμησης

Υπόθεση 1<sup>η</sup> : Ύπαρξη: Για κάθε συγκεκριμένο συνδυασμό των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , η  $Y$  είναι τυχαία μεταβλητή με μια συγκεκριμένη κατανομή που έχει πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση.

Υπόθεση 2<sup>η</sup> : Ανεξαρτησία: Οι παρατηρήσεις της  $Y$  είναι ανεξάρτητες η μία της άλλης. Οι μέθοδοι για την αντιμετώπιση των προβλημάτων των μοντέλων παλινδρόμησης συσχετισμένων δεδομένων περιλαμβάνουν για παράδειγμα τεχνικές με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, γενικευμένες εξισώσεις εκτίμησης κ.α..

Υπόθεση 3<sup>η</sup> : Γραμμικότητα : Η μέση τιμή του  $Y$  για κάθε συγκεκριμένο συνδυασμό του  $X_1, X_2, \dots, X_k$  είναι μία γραμμική συνάρτηση του  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Αυτή είναι

$$E_{(Y|X_1, X_2, \dots, X_k)} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon,$$

όπου  $\varepsilon$  είναι το σφάλμα που αντικατοπτρίζει τη διαφορά μεταξύ μίας ατομική απόκρισης  $Y$  και τον αληθινό μέσο όρο  $E_{(Y|X_1, X_2, \dots, X_k)}$ .

Υπόθεση 4<sup>η</sup> : Homoscedasticity : Η διακύμανση ομοσκεδαστικότητας του  $Y$  είναι ίδια για κάθε σταθερό συνδυασμό του  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Αυτό είναι,

$$\text{Var}(Y|X_1, X_2, \dots, X_k) = \sigma^2.$$

Υπόθεση 5<sup>η</sup> : Κανονικότητα : Για οποιοδήποτε σταθερό συνδυασμό του  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , η μεταβλητή  $Y$  διανέμεται κανονικά. Με άλλα λόγια για τα σφάλματα  $\varepsilon$  ισχύει ότι

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

Αυτή η υπόθεση δεν είναι απαραίτητη για τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου παλινδρόμησης, αλλά είναι χρήσιμη γενικά για τη λήψη συμπερασμάτων. Οι έλεγχοι υποθέσεων και τα διαστήματα εμπιστοσύνης που χρησιμοποιούνται στην

ανάλυση παλινδρόμησης, θα δώσουν λανθασμένα αποτελέσματα απόδοσης στην περίπτωση μη κανονικότητας.

Οι παραδοχές για την ανάλυση της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης υπαγορεύουν ότι η τυχαία συνιστώσα σφάλματος ε έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $\sigma^2$ . Φυσικά, οι υποθέσεις της γραμμικότητας, της ύπαρξης και της ανεξαρτησίας πρέπει να διατηρηθούν.

Και πάλι, το  $Y$  θεωρείται τυχαία μεταβλητή, ενώ  $X_1, X_2, \dots, X_k$  είναι θεωρητικά δεδομένες. Οι σταθερές  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  είναι άγνωστες παράμετροι του πληθυσμού που πρέπει να εκτιμηθούν, και  $\varepsilon$  είναι μία μη παρατηρήσιμη τυχαία μεταβλητή του σφάλματος. Αν κάποιος εκτιμήσει τις παραμέτρους  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  χρησιμοποιώντας τις  $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k$ , τότε μια αποδεκτή εκτίμηση του  $\varepsilon_i$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 X_{1i} + \dots + \tilde{\beta}_k X_{ki}).$$

Το εκτιμώμενο σφάλμα  $\hat{\varepsilon}_i$  ονομάζεται συνήθως κατάλοιπο.

### 1.3.4 Εκτίμηση των παραμέτρων της πολλαπλής παλινδρόμησης

Όπως και με την απλή παλινδρόμηση, υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις για την εκτίμηση της πολλαπλής παλινδρόμησης: η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων και η προσέγγιση ελάχιστης διακύμανσης. Στο μοντέλο πολλαπλής παλινδρόμησης μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και άλλη στατιστική μέθοδο, αυτή της μέγιστης πιθανοφάνειας. Υπό την υπόθεση της κανονικής κατανομής, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οι εκτιμήσεις των συντελεστών παλινδρόμησης είναι πανομοιότυπες με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων: Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων επιλέγει το μοντέλο που ταιριάζει καλύτερα, εκείνο που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων μεταξύ των παρατηρούμενων αποκρίσεων και αυτών που προβλέπονται από αντίστοιχο μοντέλο. Όσο καλύτερη προσαρμογή έχει το μοντέλο, τόσο μικρότερες είναι οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν από τις προβλεπόμενες τιμές. Έτσι, εάν έχουμε ότι

$$\hat{Y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 X_1 + \dots + \tilde{\beta}_k X_k,$$

υποδηλώνει το αντίστοιχο μοντέλο παλινδρόμησης, το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρούμενων τιμών  $Y$  από τις αντίστοιχες προβλέψεις χρησιμοποιώντας το μοντέλο παλινδρόμησης που δίνεται από το τύπο

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2.$$

Η λύση των ελαχίστων τετραγώνων αποτελείται από τις τιμές  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  που ονομάζονται "εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων" για τις οποίες το  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  είναι το ελάχιστο.

Προσέγγιση της ελάχιστης διακύμανσης: Όπως και στην περίπτωση της ευθείας γραμμής, η προσέγγιση της ελάχιστης διακύμανσης για την εκτίμηση της πολλαπλής παλινδρόμησης ορίζεται ως την καλύτερη «τοποθετημένη» επιφάνεια εκείνη η οποία χρησιμοποιεί την ελάχιστη διακύμανση (γραμμική) με αμερόληπτους εκτιμητές  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  του  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , αντίστοιχα

## 2. Συνδυασμός Προβλέψεων

Ένας πρώτος λόγος για τη χρήση του συνδυασμού προβλέψεων στον οποίο αναφέρονται, μεταξύ άλλων, οι Figlewski and Urich (1983), Kang (1986), Diebold and Pauly (1987), Makridakis (1989), Sessions and Chatterjee (1989), Winkler (1989), Hendry and Clements (2002), Aiolfi and Timmermann (2004) και, επίσης, οι Bates and Granger (1969), είναι ότι οι ατομικές προβλέψεις μπορεί να επηρεαστούν από διαρθρωτικές αλλαγές που μπορεί να συμβούν, όπως για παράδειγμα, από θεσμικές αλλαγές ή από τεχνολογικές εξελίξεις. Ορισμένα μοντέλα μπορούν να προσαρμοστούν γρήγορα και να επηρεαστούν προσωρινά από τις διαρθρωτικές αλλαγές, ενώ άλλα έχουν παραμέτρους που μπορούν να προσαρμοστούν πολύ αργά σε αλλαγές των δεδομένων. Όσο περισσότερα δεδομένα είναι διαθέσιμα μετά από μια αλλαγή, τόσο καλύτερα θα μπορούσε κανείς να αναμένει να προσαρμοστεί ένα αργό και σταθερό μοντέλο σε σχέση με ένα μοντέλο που προσαρμόζεται γρήγορα αν οι παράμετροί του είναι πιο ακριβείς υπολογισμένες. Αντιστρόφως, εάν το δείγμα των δεδομένων μετά από μια πρόσφατη «αναταραχή» είναι μικρό, τα μοντέλα που

προσαρμόζονται ταχύτερα μπορεί να αποφέρουν καλύτερες προβλέψεις. Δεδομένου ότι είναι συνήθως δύσκολο να ανιχνευθούν διαρθρωτικές αλλαγές σε «πραγματικό χρόνο», είναι εύλογο ότι, κατά μέσο όρο, δηλαδή, σε περιόδους με ποικίλες βαθμούς σταθερότητας, οι συνδυασμοί των προβλέψεων από τα μοντέλα με διαφορετικούς βαθμούς προσαρμοστικότητας θα υπερτερούν των προβλέψεων των μεμονωμένων μοντέλων. Αυτή η διαίσθηση επιβεβαιώνεται από τους PesaranandTimmermann (2005).

Ένας δεύτερος λόγος που τονίστηκε ιδιαίτερα από τους Clemen (1989), Makridakis (1989), DieboldandLopez (1996), StockandWatson (2001 , 2004) για να γίνεται συνδυασμός προβλέψεων είναι ότι ακόμη και σε ένα στάσιμο κόσμο, η πραγματική διαδικασία παραγωγής δεδομένων είναι πιθανό να είναι πιο περίπλοκη και πολύ μεγαλύτερης διάστασης από ό,τι μπορεί να υποθέσει το πιο ευέλικτο και γενικό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος. Είναι απίθανο ότι ένα μοντέλο μπορεί να κυριαρχεί όλων των άλλων σε όλα τα χρονικά σημεία. Από την άλλη, ακόμη και το καλύτερο μοντέλο μπορεί να αλλάξει με την πάροδο του χρόνου, με τρόπους που μπορεί να είναι δύσκολο να εντοπιστούν με βάση τις προηγούμενες επιδόσεις της πρόβλεψης. Ο συνδυασμός των προβλέψεων διαφορετικών μοντέλων μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τρόπος για να κάνει την τελική πρόβλεψη να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια όσον αφορά την εν μέρει μεροληψία του κάθε μοντέλου και τα σφάλματα μέτρησης των δεδομένων που διέπουν τις επιμέρους προβλέψεις.

Ένα τρίτο επιχείρημα για το συνδυασμό των προβλέψεων είναι ότι οι βασικές προβλέψεις μπορεί να βασίζονται σε διαφορετικές συναρτήσεις ζημίας. Αυτό ισχύει ακόμα και αν αυτοί που κάνουν τις προβλέψεις έχουν παρατήσει το ίδιο σύνολο πληροφοριών. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, δύο άτομα που κάνουν πρόβλεψη. Έστω ο ένας να ονομάζεται A και ο άλλος B. Έστω ότι ο A δεν επιθυμεί μεγάλα αρνητικά σφάλματα στις προβλέψεις, ενώ ο B δεν επιθυμεί μεγάλα θετικά σφάλματα. Σε αυτή την περίπτωση, ο A είναι πιθανό να προβλέψει την μεταβλητή που τον ενδιαφέρει έτσι ώστε η κατανομή του σφάλματος της πρόβλεψης να έχει συνήθως θετική τιμή, ενώ αντίστοιχα ο B να προβλέψει έτσι ώστε να έχει συνήθως αρνητική τιμή. Εάν η απόκλιση είναι σταθερή στο χρόνο, δεν χρειάζεται να υπολογίζουμε το μέσο όρο μεταξύ των διαφόρων προβλέψεων από τη στιγμή που περιλαμβάνει μια σταθερά της εξίσωσης η οποία θα πάρει οποιαδήποτε ανεπιθύμητη απόκλιση. Ας



υποθέσουμε, ωστόσο, ότι η βέλτιστη ποσότητα της μεροληψίας είναι ανάλογη προς τη διακύμανση της μεταβλητής, όπως αναφέρουν οι Christoffersen and Diebold (1997) and Zellner (1986). Υπό την προϋπόθεση ότι ο A και ο B υιοθετούν ένα παρόμοιο μοντέλο μεταβλητότητας (πράγμα που δεν είναι απίθανο, δεδομένου ότι μοιράζονται το ίδιο σύνολο πληροφοριών), ένας από τους δύο θα μπορούσε, με μια πιο συμμετρική συνάρτηση απώλειας σε σχέση με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των σχετικών προβλέψεων, να βρει ένα συνδυασμό των δύο προβλέψεων καλύτερο από τις ατομικές.

Υπάρχουν επίσης πολλά επιχειρήματα κατά της χρήσης του συνδυασμού προβλέψεων. Τα σφάλματα εκτίμησης που επηρεάζουν τα βάρη του συνδυασμού είναι γνωστό ότι μπορεί να είναι ένα σοβαρό πρόβλημα για πολλές τεχνικές συνδυασμού, ιδίως όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό σε σχέση με τον αριθμό των προβλέψεων, όπως αναφέρουν οι Diebold and Pauly (1990), Elliott (2004) and Yang (2004). Αν και η έλλειψη σταθερότητας στα βασικά δεδομένα μπορεί να αποτελέσει επιχείρημα για τη χρήση του συνδυασμού, μπορεί επίσης να οδηγήσει σε μεγάλη μεταβλητότητα στα βάρη του συνδυασμού και να προκαλέσει προβλήματα σε βάρη του συνδυασμού που εκτελούνται καλά, όπως αναφέρουν οι Clemen and Winkler (1986), Diebold and Pauly (1987), Figlewski and Urich (1983), Kang (1986) and Palm and Zellner (1992). Σε περιπτώσεις όπου οι πληροφορίες που διέπουν τις ατομικές προβλέψεις δεν έχουν παρατηρηθεί, οι περισσότεροι θα συμφωνούσαν ότι ο συνδυασμός προβλέψεων θα έχει αξία. Ωστόσο, όταν χρησιμοποιείται το πλήρες σύνολο των μεταβλητών της πρόβλεψης για την κατασκευή των διαφόρων προβλέψεων, η χρήση μιας στρατηγικής συνδυασμού, αντί να προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ένα μοναδικό πάρα πολύ καλό μοντέλο μπορεί να αμφισβητηθεί, όπως αναφέρουν οι Chong and Hendry (1986) and Diebold (1989).

Αυτά τα επιχειρήματα κατά του συνδυασμού προβλέψεων είναι γνωστά στη βιβλιογραφία. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ του προβλήματος του συνδυασμού προβλέψεων και του τυποποιημένου προβλήματος της κατασκευής ενός ενιαίου οικονομετρικού προσδιορισμού. Και στις δύο περιπτώσεις, ένα υποσύνολο των προβλέψεων (ή μεμονωμένες προβλέψεις) πρέπει να επιλέγεται από ένα μεγαλύτερο σύνολο των πιθανών μεταβλητών πρόβλεψης και η επιλογή της αντιστοίχισης αυτών των πληροφοριών στην πρόβλεψη, καθώς και η επιλογή της

μεθόδου εκτίμησης πρέπει να είναι καθοριστικές. Είναι σαφές ότι υπάρχουν και σημαντικές διαφορές. Πρώτον, αν υποθέσουμε ότι οι ατομικές προβλέψεις είναι αμερόληπτες σε αυτή τη περίπτωση ο συνδυασμός προβλέψεων θα είναι επίσης αμερόληπτος υπό την προϋπόθεση ότι τα βάρη του είναι αναγκασμένα να αθροίζονται στην μονάδα και μια τομή να παραλείπεται. Υπό την προϋπόθεση ότι η υπόθεση αμεροληψίας ισχύει για κάθε πρόβλεψη, τέτοιες παράμετροι περιορισμού μπορεί να οδηγήσουν σε βελτίωση της αποδοτικότητας. Κάποιος μπορεί να μην επιθυμεί να επιβάλει αυτό το είδος του περιορισμού σχετικά με τους συντελεστές ενός τυπικού μοντέλου παλινδρόμησης από τη στιγμή που οι μεταβλητές της πρόβλεψης μπορεί να διαφέρουν σημαντικά σε μονάδες τους, σε ερμηνεία και σε κλιμάκωση. Δεύτερον, στις ατομικές προβλέψεις που προκύπτουν από τα ποσοτικά μοντέλα των οποίων οι παράμετροι υπολογίζονται αναδρομικά υπάρχει μια πιθανή παραγωγή ενός σφάλματος παλινδρόμησης το οποίο θα μπορούσε να εκτιμήσει λανθασμένα τα βάρη από τον συνδυασμό. Εν μέρει, αυτό εξηγεί γιατί η χρήση απλών μέσο όρων που βασίζονται σε ίσα βάρη παρέχει ένα φυσικό σημείο αναφοράς. Τέλος, οι προβλέψεις που συνδυάζονται δεν χρειάζεται να είναι σημεία πρόβλεψης αλλά μπορούν να πάρουν την μορφή εσωτερικής ή πυκνής πρόβλεψης.

## 2.1 Το Πρόβλημα του Συνδυασμού Προβλέψεων

Έστω το πρόβλημα της πρόβλεψης τη χρονική στιγμή  $t$  της μελλοντική τιμή μιας μεταβλητής  $y$ , μετά από  $h$  περιόδους,  $y_{t+h}$ , όπου υποθέτουμε ότι  $y_{t+h} \in \mathbf{R}$ . Ως  $t$  θα θεωρούμε τη στιγμή της πρόβλεψης και ως  $h$  τον χρονικό ορίζοντα των προβλέψεων. Οι πληροφορίες που είναι γνωστές στο χρόνο  $t$  θα συμβολίζονται με  $\mathcal{F}_t$  και υποθέτουμε ότι το  $\mathcal{F}_t$  περιλαμβάνει  $N$ -διάστασης διάνυσμα των προβλέψεων  $\mathcal{Y}_{t+h,t} = (y_{t+h,t,1}, y_{t+h,t,2}, \dots, y_{t+h,t,N})'$  καθώς και τις τιμές των συγκεκριμένων μεταβλητών, δηλαδή  $\mathcal{F}_t = \{y_{t+h,t}, y_t, \dots, y_t\}$ . Ένα σύνολο πρόσθετων μεταβλητών,  $\mathbf{x}_t$ , μπορεί εύκολα να συμπεριληφθεί στο πρόβλημα.

Ο συνδυασμός προβλέψεων στοχεύει στην απεικόνιση της πληροφορίας από ένα δυνητικά υψηλής διάστασης διάνυσμα των προβλέψεων,  $\mathcal{Y}_{t+h,t} \in \mathbf{R}^N$ , σε ένα χαμηλότερης διάστασης μέτρο,  $\mathbf{C}(\mathcal{Y}_{t+h,t}; \omega_c) \in \mathbf{R}^C \subset \mathbf{R}^N$ , όπου  $\omega_c$  είναι οι παράμετροι που σχετίζονται με το συνδυασμό. Αν εξετάσουμε την περίπτωση της

σημειακής πρόβλεψης, τότε ένα μονοδιάστατο σύνολο θα είναι αρκετό. Για παράδειγμα, κάποιος που ενδιαφέρεται να χρησιμοποιήσει τις προβλέψεις για να καθορίσει πόσο να επενδύσει σε ένα χρεόγραφο μπορεί να θέλει να χρησιμοποιήσει όχι μόνο τις πληροφορίες όσον αφορά τη διάμεση ή τη μέση πρόβλεψη, αλλά επίσης και να εξετάσει το βαθμό διασποράς των μεμονωμένων προβλέψεων ως έναν τρόπο για τη μέτρηση της αβεβαιότητας ή της διαφωνίας γύρω από την πρόβλεψη. Αν εξαιρέσουμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (MeanSquareError(MSE)), δεν σίγουρο ότι ένα μέτρο που συνοψίζει όλες τις σχετικές πληροφορίες μπορεί πάντα να βρεθεί.

Οι προβλέψεις δεν έχουν πάντα άμεση αξία σε κάποιον που πρέπει να πάρει μια απόφαση. Μάλλον, γίνονται πολύτιμες μόνον στο βαθμό που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της λήψης αποφάσεων οι οποίες έπειτα επηρεάζουν την απώλεια ή το κέρδος. Οι μεμονωμένες προβλέψεις παρέχουν γενικά ανεπαρκείς πληροφορίες για την λήψη αποφάσεων ή για κάποιον που ενδιαφέρεται για το βαθμό της αβεβαιότητας που περιβάλλει την πρόβλεψη. Παρ'όλα αυτά, η συντριπτική πλειοψηφία των μελετών σχετικά με τον συνδυασμό προβλέψεων εξετάζει τις μεμονωμένες προβλέψεις. Το  $\hat{y}_{t+h,t}^E = \mathcal{C}(\hat{y}_{t+h,t}; \omega_{t+h,t})$  θα είναι σημειακή πρόβλεψη που προκύπτει ως συνάρτηση των βασικότερων προβλέψεων  $\hat{y}_{t+h,t}$  και οι παράμετροι (βάρη) του συνδυασμού,  $\omega_{t+h,t} \in \mathcal{W}_t$  όπου  $\mathcal{W}_t$  υποσύνολο του  $\mathbf{R}^N$  και τα  $\omega_{t+h,t}$  είναι χρονικώς μεταβαλλόμενα, αλλά προσαρμοσμένα στο  $\mathcal{F}_t$ . Για παράδειγμα, ίσα βάρη θα δώσουν

$$g(\hat{y}_{t+h,t}; \omega_{t+h,t}) = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{y}_{t+h,t}^j.$$

### 2.1.1 Προσδιορισμός της Συνάρτησης Απώλειας

Για να απλοποιηθούν τα πράγματα θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση απώλειας εξαρτάται μόνο από το σφάλμα πρόβλεψης του συνδυασμού,  $e_{t+h,t}^E = y_{t+h} - g(\hat{y}_{t+h,t}; \omega_{t+h,t})$ , δηλαδή  $L = L(e_{t+h,t})$ . Η συντριπτική πλειοψηφία αυτών που εργάζονται στο συνδυασμό προβλέψεων υποθέτει αυτή τη συνάρτηση απώλειας, επειδή οι μεμονωμένες προβλέψεις τις χρησιμοποιούνται πιο συχνά. Ωστόσο, θα πρέπει επίσης να αναγνωριστεί ότι αυτή η συνάρτηση απώλειας ενσωματώνει μια σειρά από περιοριστικές υποθέσεις σχετικά με το πρόβλημα της

απόφασης, όπως αναφέρουν οι Granger and Machina (2004) Elliott and Timmermann (2004).

Οι παράμετροι του βέλτιστου συνδυασμού,  $\omega_{t+h,t}^* \in \mathcal{W}_t$ , υπολογίζονται από τη λύση του προβλήματος

$$\omega_{t+h,t}^* \arg \min_{\omega_{t+h,t} \in \mathcal{W}_t} E[(e_{t+h,t}^c(\omega_{t+h,t})) | \mathcal{F}_{t+h,t}].$$

Οι Elliott and Timmermann (2004) έδειξαν ότι, τα βάρη του συνδυασμού μπορούν να βρεθούν ως λύση της επέκτασης της ακόλουθης σειράς Taylor στο

$$\mu_{e_{t+h,t}} = E[e_{t+h,t} | \mathcal{F}_t],$$

$$\begin{aligned} \omega_1(t+h,t)^* \equiv \arg \min_{\omega_1(t+h,t) \in \mathcal{W}_1(t)} \{ & L(\mu_1(e_1(t+h,t))) + 1/2 [L''(\mu_1(e))] E[(e) \\ & + \\ & \sum_{i=3}^m \frac{L^{(i)}(\mu_1(e))}{i!} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} (m-l) E[e_1(t+h,t)^{(m-l)} \mu_1(e_1(t+h,t))^l | \mathcal{F}_t] \} \end{aligned}$$

όπου  $L_{\mu_e}^k \equiv \frac{\partial^k L(e_{t+h,t})}{\partial^k \omega |_{e_{t+h,t} = \mu_{e_{t+h,t}}}$ . Σε γενικές γραμμές, η ροπογεννήτρια της κατανομής του σφάλματος πρόβλεψης και όλες οι υψηλής τάξης παράγωγοι της συνάρτησης απώλειας θα επηρεάσουν τα βέλτιστα συνδυασμένα βάρη που αντικατοπτρίζουν τόσο το σχήμα της συνάρτησης απώλειας όσο και την κατανομή του σφάλματος πρόβλεψης.

Το ανάπτυγμα της

$$\begin{aligned} \omega_1(t+h,t)^* \equiv \arg \min_{\omega_1(t+h,t) \in \mathcal{W}_1(t)} \{ & L(\mu_1(e_1(t+h,t))) + 1/2 [L''(\mu_1(e))] E[(e) \\ & + \\ & \sum_{i=3}^m \frac{L^{(i)}(\mu_1(e))}{i!} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} (m-l) E[e_1(t+h,t)^{(m-l)} \mu_1(e_1(t+h,t))^l | \mathcal{F}_t] \} \end{aligned}$$

υποδεικνύει ότι η συλλογή των μεμονωμένων προβλέψεων  $\hat{y}_{t+h,t}$ , είναι χρήσιμη στο βαθμό που μπορεί να προβλέψει κάποιες από τις υποσυνθήκες ροπές της κατανομής του σφάλματος πρόβλεψης για τις οποίες ενδιαφερόμαστε. Εάν το διάλυμα των μεμονωμένων προβλέψεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει την μέση

τιμή, την διακύμανση, την λοξότητα και την κύρτωση, αλλά όχι άλλες στιγμές της κατανομής του σφάλματος πρόβλεψης, τότε το συνδυασμένο μέτρο θα μπορούσε να στηρίζεται σε αυτά τα μέτρα των  $\hat{y}_{t+h,t}$  που προβλέπουν από την πρώτη έως την τέταρτη ροπή.

Συχνά θεωρείται απλά ως δεδομένο ότι η αντικειμενική συνάρτηση που διέπει το πρόβλημα του συνδυασμού είναι η μέση τετραγωνική απώλεια σφάλματος (MSE)

$$L(y_{t+h}, \hat{y}_{t+h,t}) = \theta (y_{t+h} - \hat{y}_{t+h,t})^2, \quad \theta > 0.$$

Για την περίπτωση αυτή, η συνδυασμένη πρόγνωση επιδιώκει να επιλέξει ένα (πιθανώς χρονικά μεταβαλλόμενο)  $C(y_{t+h,t}; \omega_{t+h,t})$  από το N-διάστασης διάνυσμα των μεμονωμένων προβλέψεων  $\hat{y}_{t+h,t}$  που προσεγγίζει καλύτερα την  $E[y_{t+h} | \hat{y}_{t+h,t}]$ .

Δύο είδη επίπεδων εμπλέκονται στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος του συνδυασμού των προβλέψεων. Το πρώτο επίπεδο συνοψίζει την πληροφορία των ατομικών μοντέλων πρόβλεψης για να παράγει σημειακές προβλέψεις  $\hat{y}_{t+h,t}$ . Η μόνη διαφορά με το τυποποιημένο πρόβλημα πρόβλεψης είναι ότι οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι προβλέψεις από άλλα μοντέλα ή υποκειμενικές προβλέψεις. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει ένα παραγόμενο πρόβλημα παλινδρόμησης το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μεροληψία τα εκτιμώμενα βάρη του συνδυασμού. Αυτό θα μπορούσε εν μέρει να εξηγήσει γιατί οι συνδυασμοί με βάση το εκτιμώμενο βάρος συχνά δεν αποδίδουν καλά. Το δεύτερο στάδιο θεωρεί το διάνυσμα των μεμονωμένων προβλέψεων  $\hat{y}_{t+h,t}$  σε σχέση ως προς το μέτρο  $C(y_{t+h,t}; \omega_{t+h,t})$ . Η πληροφορία χάνεται και στα δύο στάδια. Αντίθετα, το δεύτερο βήμα είναι πιθανό να οδηγήσει σε πολύ απλούστερα και πιο φειδωλά μοντέλα πρόβλεψης σε σύγκριση με τις προβλέψεις που βασίζονται στο σύνολο των μεμονωμένων προβλέψεων ή ένα πάρα πολύ καλό μοντέλο βασισμένο τις μεταβλητές των μεμονωμένων προβλέψεων. Σε γενικές γραμμές, θα περιμέναμε ότι η συνάθροιση των πληροφοριών θα οδηγήσει στην αύξηση της μεροληψίας των προβλέψεων αλλά και στη μείωση διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης. Στο μέτρο του δυνατού, ο συνδυασμός θα πρέπει να ισορροπήσει αυτά τα δύο στοιχεία. Αυτό είναι ιδιαίτερα σαφές με το MSE, όπου

$$E[e_{t+h,t}^2] = E[e_{t+h,t}]^2 + Var(e_{t+h,t}).$$

### 2.1.2 Κατασκευή ενός Σούπερ Μοντέλου - Συγκέντρωση Πληροφοριών

$$\mathcal{F}_t^c = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_{it}$$

Ας υποθέσουμε ότι είναι η ένωση όλων των μεμονωμένων πληροφοριών που έχει κάποιος που κάνει την πρόβλεψη, ή το σύνολο όλων των πληροφοριών. Αν οι  $\mathcal{F}_t^c$  παρατηρήθηκαν, μια πιθανότητα θα ήταν να διαμορφώσουμε τον υποθετικό μέσο όρο των  $\hat{y}_{t+h}$  ως συνάρτηση όλων αυτών των μεταβλητών, δηλαδή

$$\hat{y}_{t+h,t} = C_s(\mathcal{F}_t^c; \theta_{t+h,s}).$$

Οι ατομικές προβλέψεις,  $i$ , αντί αυτού παίρνουν τη μορφή  $\hat{y}_{t+h,t,i} = C_i(\mathcal{F}_{it}; \theta_{t+h,i})$ . Εάν μόνο οι μεμονωμένες προβλέψεις  $\hat{y}_{t+h,t,i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) παρατηρήθηκαν, ενώ το βασικό σύνολο πληροφοριών  $\mathcal{F}_{it}$  είναι μη παρατηρήσιμο από αυτόν που κάνει τις προβλέψεις, ο συνδυασμός των προβλέψεων θα πρέπει να περιορίζεται ως ακολούθως:

$$\hat{y}_{t+h,t} = C_c(\hat{y}_{t+h,t,1}, \dots, \hat{y}_{t+h,t,N}; \theta_{t+h,c}).$$

Κανονικά θα ήταν καλύτερα να συγκεντρώσουμε όλες τις πληροφορίες από το να φιλτράρουμε πρώτα τα μεμονωμένα μοντέλα πρόβλεψης. Αυτό εισάγει τη συνήθη απώλεια της επάρκειας μέσω των δύο στάδιων εκτίμησης και επίσης αγνοεί τις συσχετίσεις μεταξύ των βασικών πηγών πληροφόρησης. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετά πιθανά προβλήματα με τη συγκέντρωση του συνόλου των πληροφοριών. Ένα πρόβλημα είναι, όπως προαναφέραμε και προηγουμένως, ότι τα μεμονωμένα σύνολα πληροφοριών δεν μπορούν να παρατηρηθούν ή είναι υπερβολικά δαπανηρό να συνδυαστούν. Οι Diebold and Pauly (1990) παρατήρησαν ότι ενώ η συγκέντρωση των προβλέψεων είναι υπέρβελτιστη σε σχέση με τη συγκέντρωση του συνόλου των πληροφοριών, πρέπει να γίνει δεκτό ότι σε πολλές περιπτώσεις πρόβλεψης, ιδιαίτερα σε πραγματικό χρόνο, η συγκέντρωση του συνόλου των πληροφοριών είναι είτε αδύνατη ή απαγορευτικά δαπανηρή. Επιπλέον, σε περιπτώσεις με πολλές συσχετισμένες ανεξάρτητες μεταβλητές, και σε μοντέλα με πολύπλοκες δυναμικές και μη γραμμικές επιδράσεις, κατασκευάζοντας ένα πάρα πολύ καλό μοντέλο χρησιμοποιώντας το συγκεντρωτικό σύνολο πληροφοριών,  $\mathcal{F}_t^c$ , είναι πιθανό να μην παρέχουν καλές προβλέψεις λόγω των γνωστών προβλημάτων που σχετίζονται με τις μεθόδους των υψηλών διαστάσεων παλινδρομήσεις πυρήνα, ή τη μέθοδο

παλινδρόμησης πλησιέστερων «γειτονικών» σημείων, ή άλλες μη-παραμετρικές μεθόδους.

### 2.1.3 Γραμμικός Συνδυασμός Προβλέψεων με MSE

Αν και σε γενικές γραμμές δεν υπάρχει κλειστή μορφή λύσης της

$$\omega_{t+h,t}^* \arg \min_{\omega_{t+h,t} \in \mathcal{W}_t} E[(e_{t+h,t}^c(\omega_{t+h,t})) | \hat{y}_{t+h,t}],$$

μπορεί κανείς να πάρει τα αναλυτικά αποτελέσματα με την επιβολή περιορισμών στην κατανομή των αποδόσεων ή με περιορισμούς στη συνάρτηση απώλειας. Η γενική κατηγορία των σχημάτων συνδυασμού της

$$\omega_{t+h,t}^* \arg \min_{\omega_{t+h,t} \in \mathcal{W}_t} E[(e_{t+h,t}^c(\omega_{t+h,t})) | \hat{y}_{t+h,t}],$$

περιλαμβάνει μη-γραμμικά σχήματα καθώς και σχήματα συνδυασμών χρονικά μεταβαλλόμενα.

Ας επικεντρωθούμε στην οικογένεια των γραμμικών συνδυασμών,  $\mathcal{W}_t^l \subset \mathcal{W}_t$ , οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά στη βιβλιογραφία. Επιλέγουμε τα βάρη,

$\omega_{t+h,t} = (\omega_{t+h,t,1}, \dots, \omega_{t+h,t,N})'$  για να παράγουμε μια συνδυασμένη πρόβλεψη της μορφής

$$\hat{y}_{t+h,t}^c = \omega_{t+h,t}' \hat{y}_{t+h,t}.$$

Σύμφωνα με τη συνάρτηση απώλειας του MSE, τα βάρη του συνδυασμού εξαρτώνται μόνο από τις δύο πρώτες ροπές της από κοινού κατανομής των  $y_{t+h}$  και  $\hat{y}_{t+h,t}$ .

$$\begin{pmatrix} y_{t+h} \\ \hat{y}_{t+h,t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mu_{y_{t+h,t}} \\ \mu_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{y_{t+h,t}}^2 & \sigma_{y_{t+h,t} \hat{y}_{t+h,t}} \\ \sigma_{y_{t+h,t} \hat{y}_{t+h,t}} & \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix}.$$

Ελαχιστοποιώντας το

$E[e_{\mathbf{1}(t+h,t)}^2] = E[(y_{\mathbf{1}(t+h)} - \omega_{\mathbf{1}(t+h,t)}' y_{\mathbf{1}(t+h,t)})^2]$ , έχουμε

$$\omega_{t+h,t}^* = \arg \min_{\omega_{t+h,t} \in \mathbb{W}_t^1} \left( [(\mu)_{y_{t+h,t}} - \omega'_{t+h,t} \mu_{\hat{y}_{t+h,t}}]^2 + \sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}^2 + \omega'_{t+h,t} \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}} \omega_{t+h,t} - 2\omega'_{t+h,t} \sigma_{y_{t+h,t}} \hat{y}_{t+h,t} \right)$$

και έχουμε τη συνθήκη 1<sup>ης</sup> τάξεως

$$\frac{\partial E[e_{t+h,t}^2]}{\partial \omega_{t+h,t}} = -(\mu_{y_{t+h,t}} - \omega'_{t+h,t} \mu_{\hat{y}_{t+h,t}}) \mu_{\hat{y}_{t+h,t}} + \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}} \omega_{t+h,t} - \sigma_{y_{t+h,t}} \hat{y}_{t+h,t} = 0$$

Υποθέτοντας ότι το  $\Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}$  είναι αντιστρέψιμο θα έχουμε τη λύση

$$\omega_{t+h,t}^* = (\mu_{\hat{y}_{t+h,t}} \mu_{\hat{y}_{t+h,t}}' + \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}})^{-1} (\mu_{y_{t+h,t}} \mu_{\hat{y}_{t+h,t}} + \sigma_{y_{t+h,t}} \hat{y}_{t+h,t})$$

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη σε πληθυσμό για τον οποίο ισχύει ότι οι  $y_{t+h}$  και  $\hat{y}_{t+h}$  είναι από κοινού κανονικές κατανομές διότι στην περίπτωση αυτή η υπό συνθήκη μέση τιμή  $E[y_{t+h} | \hat{y}_{t+h,t}]$  θα είναι γραμμική στο  $\hat{y}_{t+h,t}$ . Η σταθερά μπορεί εύκολα να συμπεριληφθεί στις προβλέψεις, έτσι ώστε το σχήμα συνδυασμών να επιτρέπει ένα σημείο τομής, μια στρατηγική που συνιστάται σε περίπτωση συνάρτηση απώλειας MSE από τους Granger and Ramanathan (1984) και για μια πιο γενική κλάση συναρτήσεων απώλειας από τους Elliott and Timmermann (2004). Υποθέτοντας ότι η σταθερά συμπεριλαμβάνεται, οι βέλτιστες τιμές της σταθεράς και τα βάρη του συνδυασμού,  $\omega_{\text{στ}+h,t}^*$  και  $\omega_{t+h,t}^*$ , απλουστεύονται ως εξής

$$\omega_{\text{στ}+h,t}^* = \mu_{y_{t+h,t}} - \omega'_{t+h,t} \mu_{\hat{y}_{t+h,t}},$$

$$\omega_{t+h,t}^* = \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}^{-1} \sigma_{y_{t+h,t}} \hat{y}_{t+h,t}.$$

Αυτά τα βάρη εξαρτώνται από τον πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των προβλέψεων,  $\Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}$ . Σε γενικές γραμμές τα βάρη τείνουν να είναι μεγαλύτερα για τις πιο ακριβείς προβλέψεις που είναι λιγότερο συσχετισμένες με άλλες προβλέψεις. Παρατηρούμε ότι η σταθερά,  $\omega_{\text{στ}+h,t}^*$ , διορθώνει τυχόν αποκλίσεις στις σταθμισμένες προβλέψεις  $\omega_{t+h,t}^* \hat{y}_{t+h,t}$ .



### 2.1.3.1 Κέρδη Διαφοροποίησης

Σύμφωνα με τη τετραγωνική συνάρτηση απώλειας είναι εύκολο να απεικονιστούν τα κέρδη από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των προβλέψεων. Όπως υποστηρίζει ο Winkler (1989) όσο καλύτερα καταλαβαίνουμε πιο σύνολο από τις βασικές παραδοχές συνδέεται με τους κανόνες του συνδυασμού των προβλέψεων, τόσο πιο αποτελεσματικό θα είναι να ταιριάξουμε αυτούς τους κανόνες με τις προβλέψεις. Θεωρούμε τώρα τον απλό συνδυασμό των δύο προβλέψεων που οδηγούν σε λάθη  $e_1 = y - \hat{y}_1$  και  $e_2 = y - \hat{y}_2$ . Υποθέτοντας ότι τα μεμονωμένα σφάλματα προβλέψεις είναι αμερόληπτα, έχουμε  $e_1 \sim (0, \sigma_1^2)$ ,  $e_2 \sim (0, \sigma_2^2)$ , όπου  $\sigma_1^2 = \text{var}(e_1)$ ,  $\sigma_2^2 = \text{var}(e_2)$ ,  $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$  είναι η συνδιακύμανση μεταξύ  $e_1$  και  $e_2$  και  $\rho_{12}$  η συσχέτισή τους. Ας υποθέσουμε ότι τα βάρη του συνδυασμού περιορίζονται σε ένα άθροισμα, με τα βάρη  $(\omega, 1-\omega)$  για την πρώτη και τη δεύτερη πρόβλεψη, αντίστοιχα. Το σφάλμα του συνδυασμού πρόβλεψης  $e^c = y - \omega\hat{y}_1 - (1 - \omega)\hat{y}_2$  παίρνει την μορφή

$$e^c = \omega e_1 + (1 - \omega)e_2.$$

Από κατασκευής αυτό έχει μέσο μηδέν και διακύμανση

$$\sigma_e^2(\omega) = \omega^2\sigma_1^2 + (1 - \omega)^2\sigma_2^2 + 2\omega(1 - \omega)\sigma_{12}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς το  $\omega$  και λύνοντας την συνθήκη 1<sup>ης</sup> τάξεως, έχουμε ότι

$$\omega^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}},$$

$$1 - \omega^* = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

Μεγαλύτερο βάρος αποδίδεται σε μοντέλα που παράγουν πιο ακριβείς προβλέψεις δηλαδή προβλέψεις με χαμηλότερο σφάλμα διακύμανσης της πρόβλεψης. Ένα αρνητικό βάρος σε μια πρόβλεψη σαφώς δεν σημαίνει ότι δεν έχει αξία. Στην πραγματικότητα, όταν  $\rho_{12} > \sigma_2/\sigma_1$  τα βάρη του συνδυασμού δεν είναι κυρτά και ένα βάρος θα υπερβαίνει την μονάδα ενώ, το άλλο θα είναι αρνητικό, όπως αναφέρει και ο Bunn (1985).

Εισάγοντας το  $\omega^*$  στην συνάρτηση

$$e^c = \omega e_1 + (1 - \omega)e_2,$$

παίρνουμε την αναμενόμενη τετραγωνική απώλεια με τα βέλτιστα βάρη:

$$\sigma_e^2(\omega^*) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι  $\sigma_e^2(\omega^*) \leq \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ . Στην πραγματικότητα, η διαφοροποίηση των κερδών θα είναι μηδενική στις ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις (i)  $\sigma_1$  ή  $\sigma_2$  ίσο με το μηδέν, (ii)  $\sigma_1 = \sigma_2$  και  $\rho_{12} = 1$ , ή (iii)  $\rho_{12} = \sigma_1/\sigma_2$ .

Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης από το βέλτιστο συνδυασμό

$$\sigma_e^2(\omega^*) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2},$$

με τη διακύμανση του συνδυασμού όπου τα βάρη των προβλέψεων που προσεγγίζουν αντιστρόφως το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) και ως εκ τούτου αγνοεί οποιαδήποτε συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων πρόβλεψης:

$$\omega_{\text{inu}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad 1 - \omega_{\text{inu}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Αυτά τα βάρη έχουν ως αποτέλεσμα την διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης

$$\sigma_{\text{inu}}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}.$$

Μετά από κάποιες πράξεις μπορούμε να βρούμε την αναλογία της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης σε σχέση με την αξία του σύμφωνα με τα βέλτιστα βάρη,  $\sigma_e^2(\omega^*)$  στην

$$\sigma_e^2(\omega^*) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2},$$

$$\frac{\sigma_{\text{inu}}^2}{\sigma_c^2(\omega^*)} = \left( \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \right).$$

Αν  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , αυτό υπερβαίνει την μονάδα, εκτός εάν  $\rho_{12} = 0$ . Όταν  $\sigma_1 = \sigma_2$ , η σχέση αυτή είναι πάντα μονάδα ανεξάρτητα από τη τιμή της  $\rho_{12}$  και σε αυτή την περίπτωση  $\omega_{\text{inu}} = \omega^* = 1/2$ . Τα ίσα βάρη είναι βέλτιστα όταν συνδυάζονται δύο προβλέψεις με την προϋπόθεση ότι η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι πανομοιότυπα, ανεξαρτήτως της συσχέτισης μεταξύ των δύο σφάλματα πρόβλεψης.

### 2.1.3.2 Επίδραση της Μεροληψίας σε επιμέρους Προβλέψεις

Τα προβλήματα μπορεί να προκύψουν στον συνδυασμό προβλέψεων όταν μία ή περισσότερες από τις μεμονωμένες προβλέψεις έχει μεροληψία και έτσι τα βάρη του συνδυασμού περιορίζονται στο να αθροίζονται στη μονάδα και η σταθερά να έχει παραλειφθεί από το συνδυαστικό σχήμα. Οι MinandZellner (1993) επεξηγούν το πώς η μεροληψία σε μία ή περισσότερες από τις προβλέψεις μαζί με ένα περιορισμό που τα βάρη προσθέτονται στη μονάδα μπορεί να οδηγήσει υποβέλτιστη απόφαση όσον αφορά τους συνδυασμούς. Αν  $y - \hat{y}_1 = \varepsilon_1 \sim (0, \sigma^2)$  και  $y - \hat{y}_2 = \varepsilon_2 \sim (\mu_2, \sigma^2)$ ,  $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma^2$ , έτσι ώστε η  $\hat{y}_1$  να είναι αμερόληπτη ενώ η  $\hat{y}_2$  έχει μεροληψία ίση με  $\mu_2$ . Τότε το MSE της  $\hat{y}_1$  είναι  $\sigma^2$ , ενώ το MSE της  $\hat{y}_2$  είναι  $\sigma^2 + \mu_2^2$ . Το MSE της συνδυασμένης πρόβλεψης  $\hat{y}_c = \omega\hat{y}_1 + (1 - \omega)\hat{y}_2$  σε σχέση με αυτό της καλύτερης πρόβλεψης ( $\hat{y}_1$ ) θα είναι

$$MSE(\hat{y}_c) - MSE(\hat{y}_1) = (1 - \omega)\sigma^2 \left( (1 - \omega) \left( \frac{\mu_2}{\sigma} \right)^2 - 2\omega(1 - \rho_{12}) \right),$$

έτσι ώστε  $MSE(\hat{y}_c) > MSE(\hat{y}_1)$  εάν

$$\left( \frac{\mu_2}{\sigma} \right)^2 > \frac{2\omega(1 - \rho_{12})}{1 - \omega}.$$

Η προϋπόθεση αυτή ισχύει αν  $\rho_{12} = 1$ . Επιπλέον, όσο μεγαλύτερη είναι η μεροληψία, τόσο πιο πιθανό είναι ότι ο συνδυασμός δεν θα είναι καλύτερος της πρώτης πρόβλεψης. Φυσικά, το πρόβλημα εδώ είναι ότι ο συνδυασμός βασίζεται σε

διακυμάνσεις και όχι στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης που θα λάμβανε υπόψη την μεροληψία.

#### 2.1.4 Βέλτιστο του Σχήματος Ίσων Βαρών - Γενική Υπόθεση

Τα συνδυαστικά σχήματα με ίσα βάρη κατέχουν μια ιδιαίτερη θέση στη βιβλιογραφία για τον συνδυασμό προβλέψεων. Δεδομένου του ιδιαίτερου ρόλου τους, αξίζει να αναφέρουμε τις γενικότερες συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι βέλτιστα. Έτσι τίθεται ένα σημείο αναφοράς που αποδεικνύεται χρήσιμο για την κατανόηση των καλών επιδόσεών τους σε προσομοιωμένα δεδομένα και σε εμπειρικές μελέτες με πραγματικά δεδομένα.

Ας υποθέσουμε  $\Sigma_e = E[ee']$  είναι ο πίνακας της συνδιακύμανσης των σφαλμάτων των μεμονωμένων προβλέψεων όπου  $e = y - \hat{y}$  και  $i$  είναι ένα  $N \times 1$  διάνυσμα. Από την

$$\begin{pmatrix} y_{t+h} \\ \hat{y}_{t+h,t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mu_{y_{t+h,t}} \\ \mu_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{y}_{t+h,t}}^2 & \sigma_{y\hat{y}_{t+h,t}} \\ \sigma_{y\hat{y}_{t+h,t}} & \Sigma_{\hat{y}_{t+h,t}} \end{pmatrix},$$

το διάνυσμα των σφαλμάτων πρόβλεψης έχει δεύτερη ροπή

$$\Sigma_i e = E[y^2 u^i + y \gamma \gamma^i - 2y \gamma \gamma^i] = (\sigma_y^2 + \mu_y \gamma^2) u^i + \mu_y \gamma - \mu_y \gamma^i + \Sigma_1(\gamma \gamma^i) - 2\sigma_1(\gamma \gamma^i) - 2\mu_y \mu_{\gamma^i}$$

Ελαχιστοποιώντας τη διακύμανση των αναμενόμενων σφαλμάτων πρόβλεψης με το περιορισμό ότι τα βάρη προσθέτονται μέχρι ένα:

$$\text{minimize } \Sigma_e \omega,$$

$$\text{έτσι ώστε } \omega^i = 1.$$

Ο περιορισμός εξασφαλίζει την αμεροληψία της συνδυασμένης πρόβλεψης με την προϋπόθεση ότι  $\mu = \mu_y^i$  έτσι ώστε

$$\mu_y^2 u^i + \mu_y \mu_{\gamma^i} - 2\mu_y \mu_{\gamma^i} = 0.$$

Η Lagrangian που σχετίζεται με την

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma_{\theta} \omega ,$$

είναι

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma_{\theta} \omega - \lambda(\omega' \mathbf{1} - 1),$$

το οποίο αποδίδει την συνθήκη πρώτης τάξεως

$$\Sigma_{\theta} \omega = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1} .$$

Υποθέτοντας ότι το  $\Sigma_{\theta}$  είναι αντιστρέψιμο, αφού πολλαπλασιαστεί επί  $\Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1}'$  και υπενθυμίζοντας ότι  $\mathbf{1}' \omega = 1$  παίρνουμε ότι  $\lambda/2 = (\mathbf{1}' \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1})'$ . Αντικαθιστώντας στην

$$\Sigma_{\theta} \omega = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1} ,$$

έχουμε για τα βέλτιστα βάρη:

$$\omega^* = (\mathbf{1}' \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1} .$$

Ας υποθέσουμε ότι τα σφάλματα πρόβλεψης έχουν την ίδια διακύμανση  $\sigma^2$ , και συσχέτιση  $\rho$ . Τότε, έχουμε

$$\Sigma_{\theta}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-\rho)} \left( I - \frac{\rho}{1+(N-1)\rho} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right)$$

Όπου  $I$  είναι  $N \times N$  πίνακας. Τοποθετώντας αυτό στην

$$\omega^* = (\mathbf{1}' \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1} ,$$

έχουμε

$$\Sigma_{\theta}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1+(N-1)\rho)} \quad \text{και} \quad (\mathbf{1}' \Sigma_{\theta}^{-1} \mathbf{1})' = \frac{\sigma^2(1+(N-1)\rho)}{N} ,$$

και συνεπώς

$$\omega^* = \left(\frac{1}{N}\right) \mathbf{1}.$$

Ως εκ τούτου, η επιλογή των ίσων βαρών είναι βέλτιστη σε καταστάσεις όπου τα μεμονωμένα σφάλματα των προβλέψεων έχουν την ίδια διακύμανση και ίδιες συσχετίσεις κατά ζεύγη. Σημειώστε ότι η ιδιότητα ότι τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα ακολουθεί μόνο ως αποτέλεσμα της χρήσης του περιορισμού  $\mathbf{1}'\omega = \mathbf{1}$  και δεν ισχύουν γενικότερα.

### 2.1.5 ENC

Από την επιρροή που είχε το έργο των Meese and Rogoff (1983, 1988), έχει γίνει σύνηθες να χρησιμοποιούνται συγκρίσεις των εκτός δείγματος προβλέψεων για να καθοριστεί αν μια μεταβλητή έχει προβλεπτική ικανότητα για μία άλλη. Τυπικά, αυτή η σύγκριση των εκτός δείγματος προβλέψεων γίνεται σε δύο στάδια. Πρώτον, οι προβλέψεις της ενδιαφερόμενης μεταβλητής κατασκευάζονται μια φορά χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο που περιλαμβάνει μία μεταβλητή με υποθετικό προγνωστικό περιεχόμενο και στη συνέχεια μια δεύτερη φορά εξαιρώντας την εν λόγω μεταβλητή. Δεύτερον, με δεδομένες τις δύο σειρές των σφαλμάτων πρόβλεψης, διεξάγονται δοκιμές για ίσης ακρίβεια πρόβλεψης ή σφαιρικής πρόβλεψης. Αυτή η εκτός δείγματος προσέγγιση προτάθηκε από τον Ashley et al. (1980), ο οποίος υποστήριξε ότι είναι περισσότερο το πνεύμα του ορισμού της αιτιότητας κατά Granger να χρησιμοποιεί post-sample δοκιμές πρόβλεψης από το να χρησιμοποιεί το πρότυπο πλήρους δείγματος τεστ αιτιότητας.

Αν και οι post-sample δοκιμές αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται όλο ένα και περισσότερο, λίγα πράγματα είναι γνωστά σχετικά με την αποτελεσματικότητά τους. Αντιθέτως έχουμε περισσότερα στοιχεία σχετικά με την ασυμπτωτική και την συμπεριφορά πεπερασμένου δείγματος των δοκιμών της ίσης ακρίβεια πρόβλεψης και περιλαμβάνει αναφορές στις προβλέψεις από μη-ένθετα μοντέλα. Ο Diebold και ο Mariano (1995), ο West (1996, 2001a, b), ο Harvey et al. (1997, 1998), ο West και ο McCracken (1998), ο Clark (1999), ο Corradi et al. (2001), και ο McCracken (2000) κάθε ένας από αυτούς παρουσιάζει αποτελέσματα για μη-ένθετες προβλέψεις.

Με nested μοντέλα, ωστόσο, οι ιδιότητες των δοκιμών είναι πιθανό να διαφέρουν επειδή, υπό το μηδέν, τα σφάλματα πρόβλεψης είναι ασυμπτωτικά το ίδιο και ως εκ τούτου συσχετίζονται απόλυτα. Μόνο δύο υπάρχουσες μελέτες επικεντρώνονται σε αποτελέσματα για nested μοντέλα. Ο McCracken (1999) αντλεί τις ασυμπτωτικές κατανομές από τις διάφορες δοκιμές της ίσης ακρίβειας πρόβλεψης μεταξύ δύο ένθετων μοντέλων. Ο Chaoetal. (2001) ανάπτυξε μία εκτός δείγματος δοκιμή της αιτιότητας που μοιάζει με μια δοκιμή που εφαρμόζεται σε προβλέψεις για nested μοντέλα.

Υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί που προκύπτουν από τα σφαιρικά τεστ στις προβλέψεις από τα ένθετα γραμμικά μοντέλα. Φυσικά τα σφαιρικά τεστ που χρησιμοποιούνται είναι εκείνα που προτείνονται από τον Ericsson (1992) και τον Harveyetal. (1998). ΌπωςέκανανκαιWest (1996, 2001a, b), οιWestandMcCracken (1998), οChaoetal. (2001), οCorradi et al. (2001), ο και McCracken(2000), οι περιοριστικές κατανομές λαμβάνονται ρητά υπόψη για την αβεβαιότητα που θεσπίστηκε από την εκτίμηση των παραμέτρων.

Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή αρχικών εκτιμήσεων των μοντέλων και ο αριθμός των παρατηρούμενων προβλέψεων αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό, οι περιορισμένες κατανομές των τεστ είναι μη-τυπικές. Ωστόσο, όταν ο αριθμός των προβλέψεων αυξάνεται με βραδύτερο ρυθμό από ό, τι ο αριθμό των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για τις αρχικές εκτιμήσεις του μοντέλου, τα στατιστικά του Ericsson (1992) και του Harveyetal. (1998) περιορίζονται στην τυπική κανονική.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιούμε προσομοιώσεις MonteCarlo για να εξετάσουμε το πεπερασμένο μέγεθος του δείγματος και το μέγεθος της προσαρμοσμένης δύναμης των σφαιρικών δοκιμών, καθώς και μια σειρά ελέγχων από μέσες τιμές ίσων τετραγωνικών σφαλμάτων (MSE). Χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις MonteCarlo θα δούμε ότι, τις περισσότερες φορές, κάθε ένας από τα post-sample ελέγχους έχουν αρκετά καλό μέγεθος όταν οι στατιστικές συγκρίνονται με τις ασυμπτωτικές κρίσιμες τιμές που προβλέπονται από τον McCracken (1999). Ωστόσο, συγκρίνοντας τις post-sample στατιστικές προβλέψεις έναντι τυπικών κανονικών κρίσιμων τιμών συνήθως κάνει τα τεστ να έχουν μικρότερο μέγεθος. Οι προσομοιώσεις MonteCarlo δείχνουν επίσης ότι οι δυνάμεις των τεστ επιτρέπουν

μερικές απλές ταξινομήσεις, όπως ότι η νέα σφαιρική στατιστική είναι το πιο ισχυρή σε μικρά δείγματα.

### 2.1.5.1. Τεστ και ασυμπτωτικές κατανομές

Θεωρούμε δύο τυπικές προβλέψεις ελέγχων, αυτές που προτείνονται από τον Ericsson (1992) και τον Harveyetal. (1998), καθώς και ένα νέο έλεγχο. Ο West και ο McCracken (1998) δείχνουν ότι ένα άλλο τυπικό τεστ, που προτάθηκε από τους ChongandHendry (1986), μπορεί να είναι ασυμπτωτικά κανονικό όταν εφαρμόζεται είτε σε ένθετες ή μη ένθετες προβλέψεις. Σε προσομοιώσεις MonteCarlo, ωστόσο, η δύναμη του ελέγχου των ChongandHendry κυριαρχείται από εκείνη των δοκιμών που περιγράφονται παρακάτω. Σε ένα σχετικό τεστ, η εκτός δείγματος στατιστική συνάφεια που αναπτύχθηκε από τον Chaoetal. (2001), είναι επίσης ασυμπτωτικά κανονική

Το ENC-T Τεστ:

Με βάση τη μεθοδολογία των DieboldandMariano (1995), ο Harveyet al.(1998) προτείνει μια σφαιρική δοκιμή που χρησιμοποιεί t-statistic για την συνδιακύμανση μεταξύ  $\hat{u}_{1,t+1}$  και  $\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1}$ . Έστω ότι  $\bar{c} = (P - 1)^{-1} \sum_t c_{t+1}$ . Το  $c_{t+1} = \hat{u}_{1,t+1}(\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1}) = \hat{u}_{1,t+1}^2 - \hat{u}_{1,t+1}\hat{u}_{2,t+1}$  και  $\bar{c} = (P - 1)^{-1} \sum_t c_{t+1}$ . Το σφαιρικό τους τεστ, συμβολίζετε ENC-T και ο τύπος του είναι

$$ENC-T = \frac{(P - 1)^{1/2} \bar{c}}{\sqrt{P^{-1} \sum_t (c_{t+1} - \bar{c})^2}} = \frac{(P - 1)^{1/2} P^{-1} \sum_t (\hat{u}_{1,t+1}^2 - \hat{u}_{1,t+1}\hat{u}_{2,t+1})}{\sqrt{P^{-1} \sum_t (\hat{u}_{1,t+1}^2 - \hat{u}_{1,t+1}\hat{u}_{2,t+1})^2 - \bar{c}^2}}$$

( $\hat{u}_{1,t+1} = y_{t+1} - \hat{x}_{1,t+1}\hat{\beta}_{1,t}$  και  $\hat{u}_{2,t+1} = y_{t+1} - \hat{x}_{2,t+1}\hat{\beta}_{2,t}$  είναι τα σφάλματα πρόβλεψης από δύο μοντέλα. Το P είναι ο αριθμός του ενός βήματος μπροστά για τις προβλέψεις.)

Ο όρος στην αρχή είναι  $(P - 1)^{1/2}$  αντί για  $P^{1/2}$ , επειδή έχει υπολογιστεί το τεστ με τη χρήση τυποποιημένων μεθόδων παλινδρόμησης. Σύμφωνα με την μηδενική υπόθεση ότι το 1<sup>ο</sup> περιλαμβάνει το 2<sup>ο</sup>, η συνδιακύμανση μεταξύ  $u_{1,t}$  και το  $u_{1,t} - u_{2,t}$  θα είναι μικρότερη ή ίση με 0. Σύμφωνα με την εναλλακτική λύση ότι το 2<sup>ο</sup> μοντέλο περιέχει πρόσθετες πληροφορίες, η συνδιακύμανση θα πρέπει να είναι



θετική. Ως εκ τούτου, ο ENC-T έλεγχος, και ο άλλος έλεγχος που περιγράφεται παρακάτω, είναι μονόπλευρα.

#### Ο ENC-REG Έλεγχος:

Αυτό ο έλεγχος πρόβλεψης προτείνεται από τον Ericsson (1992) και είναι μια παλινδρόμηση που βασίζεται σε μια παραλλαγή του ENC-T ελέγχου. Η στατιστική του ελέγχου, που συμβολίζεται ENC-REG, είναι η t-στατιστική που σχετίζεται με τον συντελεστή  $\alpha_1$  από την ελαχίστων τετραγώνων παλινδρόμηση

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1,t+1} &= \alpha_1(\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1}) + \text{ο όρος σφάλματος, που μπορεί να γραφτεί ως} \\ \text{ENC-REG} &= (P - 1)^{1/2} \frac{P^{-1} \sum_t \hat{u}_{1,t+1}^2 (\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1})}{\sqrt{P^{-1} \sum_t (\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1})^2 (P^{-1} \sum_t \hat{u}_{1,t+1}^2) - \bar{c}^2}} \end{aligned}$$

#### Ένα Νέο Σφαιρικό Τεστ:

Επειδή τα σφάλματα πρόβλεψης από το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> μοντέλο είναι ακριβώς τα ίδια με τη μηδενική (κάνοντας το  $\epsilon_{t+1} = 0$ ) το δείγμα των διακυμάνσεων των παρονομαστών του ENC-T και του ENC-REG είναι, επαγωγικά, 0. Αυτό το χαρακτηριστικό του ENC-T και του ENC-REG μπορεί να επηρεάσει δυσμενώς τις ιδιότητες ενός μικρού δείγματος σε ένα έλεγχο. Συνεπώς, μια παραλλαγή των ENC-T και ENC-REG στην οποία το  $\bar{c}$  (η συνδιακύμανση μεταξύ του  $\hat{u}_{1,t+1}$  και του  $\hat{u}_{1,t+1} - \hat{u}_{2,t+1}$ ) έχει προσαρμοστεί από την διακύμανση του ενός σφάλματος της πρόβλεψης και όχι από μια εκτίμηση της διακύμανσης του  $\bar{c}$ . Αυτό είναι το ENC-NEW και έχει την μορφή

$$\text{ENC-NEW} = P \frac{\bar{c}}{MSE_2} = P \frac{P^{-1} \sum_t (\hat{u}_{1,t+1}^2 - \hat{u}_{1,t+1} \hat{u}_{2,t+1})}{P^{-1} \sum_t \hat{u}_{2,t+1}^2}$$

#### **2.1.5.2. MonteCarlo**

Τις ιδιότητες των μικρών δειγμάτων των ελέγχων που περιγράφηκαν προηγουμένως, καθώς και κάποιοι έλεγχοι με ίσα MSE, αξιολογούνται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις των διδιάστατων δεδομένων διεργασιών παραγωγής. Τα ίσα MSE τεστ είναι εκείνα για τα οποία ο McCracken (1999) αντλεί τις ασυμπτωτικές κατανομές: ένα F-τύπου τεστ προτάθηκε από τον McCracken (MSE-F), ένα t τεστ προτάθηκε από τους Diebold and Mariano (1995) (MSE-T), και ο Granger and Newbold (1977) πρότειναν το t τεστ (MSE-REG).

Σε αυτές τις προσομοιώσεις, συγκρίνονται η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου AR (π.χ. για το 1<sup>ο</sup> μοντέλο) με αυτήν του μοντέλου VAR (π.χ. για το 2<sup>ο</sup> μοντέλο). Τα αποτελέσματα βασίζονται σε δεδομένα που παράγονται χρησιμοποιώντας τυπικές κανονικές διαταραχές. Τα αποτελέσματα είναι ουσιαστικά αμετάβλητα όταν οι διαταραχές προέρχονται από «βαριές ουρές»  $t(6)$  κατανομής σύμφωνα με τους Diebold and Mariano (1995), Harvey et al. (1997, 1998), και Clark (1999).

Έχουμε λοιπόν τις περιορισμένες κατανομές των δύο τυπικών ελέγχων και ενός νέου ελέγχου προβλέψεων που εφαρμόζεται σε ένα βήμα πρόβλεψης μπροστά σε σχέση με τα ένθετα γραμμικά μοντέλα. Οι έλεγχοι έχουν μη τυποποιημένες κατανομές, όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή αρχικών εκτιμήσεων των μοντέλων και ο αριθμός των παρατηρούμενων προβλέψεων αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό. Τότε πρέπει να δημιουργηθούν αριθμητικά κρίσιμες τιμές για αυτές τις κατανομές. Επίσης οι δύο τυποποιημένοι έλεγχοι περιορίζουν την τυπική κανονική όταν ο αριθμός των προβλέψεων αυξάνεται με ένα ρυθμό μικρότερο από τον αριθμό των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για τις αρχικές εκτιμήσεις του μοντέλου.

Τα Monte Carlo πειράματα χρησιμοποιούνται για να εξεταστεί το πεπερασμένο μέγεθος του δείγματος και το μέγεθος της προσαρμοσμένης δύναμης των ίδιων ακρίβειας και ελέγχων. Αυτά τα πειράματα αποδίδουν τρία βασικά αποτελέσματα. Πρώτον, οι post-sample έλεγχοι είναι, σε γενικές γραμμές, ικανοποιητικού μεγέθους όταν χρησιμοποιούνται οι κρίσιμες τιμές που προβλέπονται. Δεύτερον, όταν χρησιμοποιούνται οι τυπικές κανονικές κρίσιμες τιμές οι post-sample έλεγχοι είναι μικρότερου μεγέθους. Τρίτον, ο έλεγχος ENC-NEW στατιστικός είναι ο πιο ισχυρός.

## **2.2 Μέθοδοι Συνδυασμού Προβλέψεων**

Ο Rapach et al. (2010) θεώρησε μια άλλη προσέγγιση για τη βελτίωση των προβλέψεων του equity premium με βάση τον συνδυασμό προβλέψεων. Οι Bates and Granger (1969) με την εργασία τους, γνωστοποίησαν ότι ο συνδυασμός προβλέψεων σε όλα τα μοντέλα συχνά παράγει μια πρόβλεψη που αποδίδει καλύτερα από ό, τι το καλύτερο μεμονωμένο μοντέλο ξεχωριστά. Όπως τονίστηκε από τον Timmermann (2006), ο συνδυασμός προβλέψεων μπορεί να θεωρηθεί ως μια

στρατηγική διαφοροποίησης που βελτιώνει την απόδοση της πρόβλεψης με τον ίδιο τρόπο που η διαφοροποίηση των περιουσιακών στοιχείων βελτιώνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Διαισθητικά, από τη σκοπιά της πρόβλεψης του equity premium, συγκεκριμένα μοντέλα πρόβλεψης συλλέγουν διαφορετικές πτυχές των επιχειρηματικών συνθηκών. Επιπλέον, η προβλεπτική ικανότητα των μεμονωμένων μοντέλων μπορεί να μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε ένα συγκεκριμένο μοντέλο να παρέχει ενημερωτικές ενδείξεις κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων περιόδων, αλλά κυρίως ψευδείς ενδείξεις σε άλλες περιόδους. Αν οι μεμονωμένες προβλέψεις συσχετίζονται σχετικά ασθενώς, ένας συνδυασμός των μεμονωμένων προβλέψεων θα πρέπει να είναι λιγότερο ασταθής, με αποτέλεσμα τη σταθεροποίηση των μεμονωμένων προβλέψεων, μειώνοντας τον κίνδυνο πρόβλεψης, και βελτιώνοντας την απόδοση της πρόβλεψης σε περιβάλλοντα με σημαντικά μοντέλα αβεβαιότητας και αστάθειας των παραμέτρων όπως αναφέρουν οι Hendry and Clements (2004), οι Clements and Hendry, (2006) και ο Timmermann (2006).

Ένας συνδυασμός προβλέψεων παίρνει τη μορφή του σταθμισμένου μέσου όρου των μεμονωμένων προβλέψεων που δίνονται από την  $\hat{r}_{i,t+1} = \hat{\alpha}_{i,t} + \hat{\beta}_{i,t}x_{i,t}$ , για  $i = 1, \dots, K$ :

$$\hat{r}_{t+1}^{POOL} = \sum_{i=1}^K \omega_{i,t} \hat{r}_{i,t+1}. \quad (1)$$

όπου  $\{\omega_{i,t}\}_{i=1}^K$  είναι τα συνδυασμένα βάρη με βάση τις πληροφορίες που διατίθενται

μέσω  $t$  και  $\sum_{i=1}^K \omega_{i,t} = 1$ . Τα απλά συστήματα συνδυασμού συχνά έχουν καλή

προβλεπτική ικανότητα. Το απλούστερο σύστημα θέτει  $\omega_{i,t} = 1/K$  για όλα τα  $i$  για να δώσει την μέση τιμή του συνδυασμού πρόβλεψης. Αυτό είναι ανάλογο με έναν τρόπο κατασκευής του χαρτοφυλακίου που τοποθετεί τα ίσα βάρη για κάθε περιουσιακό στοιχείο. Το πλεονέκτημα των απλών κανόνων είναι ότι δεν απαιτούν την εκτίμηση των συνδυασμένων βαρών. Η κατάσταση αυτή που αναφέραμε προηγουμένως σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων, είναι τυπικά δύσκολο να εκτιμήσει με ακρίβεια βάρη για διεξοδικότερα σχήματα συνδυασμού.

Παρ' όλα αυτά, μπορεί να είναι επωφελής να «κλίνουν» τα συνδυασμένα βάρη προς συγκεκριμένες μεμονωμένες προβλέψεις, αν και είναι σκόπιμο να λαξεύουν με σχετικά κοντά σε ίσα βάρη. Σύμφωνα με αυτή την ιδέα, ο Rapachetal. (2010) υπολόγισε το προεξοφλημένο MSFE (DMSFE) πρόβλεψη συνδυασμό πρόβλεψης που υπολογίζει τα βάρη με βάση την πρόβλεψη των επιδόσεων των μεμονωμένων μοντέλων κατά τη διάρκεια μιας εκτός δείγματος περιόδου (Stock και Watson, 2004):

$$\omega_{i,t} = \frac{\varphi_{i,t}^{-1}}{\sum_{k=1}^K \varphi_{k,t}^{-1}}, \quad (2)$$

όπου

$$\varphi_{i,t} = \sum_{s=m}^{t-1} \theta^{t-1-s} (r_{s+1} - \hat{r}_{i,s+1})^2, \quad (3)$$

και το  $m+1$  οριοθετεί την έναρξη της εκτός δείγματος περιόδου, και το  $\theta$  είναι ένας εκπτώτικος παράγοντας. Η DMSFE πρόβλεψη αποδίδει έτσι μεγαλύτερο βάρος στις μεμονωμένες προγνωστικές παλινδρόμησης προβλέψεων με χαμηλότερο MSFE (καλύτερη επίδοση πρόβλεψης) κατά τη διάρκεια της εκτός δείγματος περιόδου. Όταν  $\theta = 1$ , δεν υπάρχει προεξόφληση, έτσι ώστε όλες οι παρατηρήσεις να τυγχάνουν ίσης μεταχείρισης κατά τον υπολογισμό του MSFE πάνω στην εκτός δείγματος περίοδο, ενώ όταν  $\theta < 1$  επιτρέπει μεγαλύτερη έμφαση στις πρόσφατες επιδόσεις της πρόβλεψης. Ο Rapachetal. (2010) έδειξε ότι ο απλός και DMSFE συνδυασμός προβλέψεων του τριμηνιαίου equitypremium των ΗΠΑ ξεπερνά σταθερά τον ιστορικό μέσο όρο.

Είναι περίεργο το γεγονός ότι ο απλός συνδυασμός πρόβλεψης αποδίδει πολύ καλύτερα από την kitchensink πρόβλεψη, αφού και οι δύο προσεγγίσεις περιλαμβάνουν την εκτίμηση των  $K$  συντελεστών κλίσης. Ο Rapachetal. (2010) έδειξε ότι ο απλός συνδυασμός πρόβλεψης μπορεί να ερμηνευθεί ως «συρρικνωμένη» πρόβλεψη που παρακάμπτει το εντός δείγματος πρόβλημα που πλήττει ιδιαίτερα τα παραμετροποιημένα μοντέλα πρόβλεψης. Σκεφτείτε το προγνωστικό μοντέλο πολλαπλής παλινδρόμησης βασισμένο στην kitchensink πρόβλεψη, η οποία εκφράζεται σε μορφή απόκλισης:

$$r_{t+1} - \bar{r} = \sum_{i=1}^K \beta_i^{KS} (x_{i,t} - \bar{x}_i) + \varepsilon_{t+1}, \quad (4)$$

όπου  $\bar{r}$  και  $\bar{x}_i$  είναι οι μέσοι του δείγματος βασιζόμενοι στις διαθέσιμες πληροφορίες κατά τη στιγμή του σχηματισμού των προβλέψεων για  $r_t$  και  $x_{i,t}$ , αντίστοιχα. Η kitchensink πρόβλεψη δίνεται από το

$$\hat{r}_{t+1} = \bar{r} + \sum_{i=1}^K \hat{\beta}_i^{KS} (x_{i,t} - \bar{x}_i), \quad (5)$$

όπου  $\hat{\beta}_i^{KS}$  είναι η OLS εκτίμηση του  $\beta_i^{KS}$  στη πολλαπλή παλινδρόμηση, (4), χρησιμοποιώντας δεδομένα που είναι διαθέσιμα την περίοδο του σχηματισμού της πρόβλεψης. Ο απλός συνδυασμός πρόβλεψης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{r}_{t+1} = \bar{r} + (1/K) \sum_{i=1}^K \hat{\beta}_i (x_{i,t} - \bar{x}_i), \quad (6)$$

όπου  $\hat{\beta}_i$  είναι ο OLS συντελεστής εκτίμησης της κλίσης για την διμεταβλητή παλινδρόμηση του  $r_{t+1}$  στο  $(x_{i,t} - \bar{x}_i)$  με βάση τα διαθέσιμα στοιχεία κατά τη στιγμή του σχηματισμού της πρόβλεψης. Συγκρίνοντας την (5) στην (6), βλέπουμε ότι ο απλός συνδυασμός πρόβλεψης αντικαθιστά το  $\hat{\beta}_i^{KS}$  στη (5) με  $(1/K)\hat{\beta}_i$ . Αυτό σταθεροποιεί την πρόβλεψη.

Στο ίδιο πνεύμα για τον συνδυασμό πρόβλεψης, ο Cremers (2002) χρησιμοποιεί το μοντέλο Bayesian κατά μέσο όρο για να ενσωματώνει πληροφορίες από μια πληθώρα πιθανών προβλεπτών σε ένα προβλεπόμενο πλαίσιο παλινδρόμησης. Στην ουσία, ο Bayesian μέσος όρος του μοντέλου παρέχει μια εναλλακτική διαδικασία για τη συρρίκνωση των συντελεστών κλίσης στη (5), όπου ο βαθμός συρρίκνωσης διέπεται πλέον από τις πιθανότητες ότι καθένας από τους προβλεπτές εμφανίζεται στο μοντέλο. Οι συντελεστές κλίσης για τις μεταβλητές με χαμηλές πιθανότητες ένταξης λαμβάνουν μεγαλύτερη συρρίκνωση προς το μηδέν, με αποτέλεσμα τη σταθεροποίηση στην πρόβλεψη. Για την περίοδο πρόβλεψης 1969-1998, ο Cremers (2002) βρίσκει ότι οι μηνιαίες προβλέψεις του equity premium των ΗΠΑ με βάση το Bayesian μοντέλο κατά μέσο όρο ξεπερνούν τον ιστορικό μέσο όρο αναφοράς, ενώ

ξεπερνούν και τις προβλέψεις που ουσιαστικά βασίζονται σε μοντέλα που επιλέγονται μέσω συμβατικών κριτηρίων πληροφοριών όπως το AIC και SIC.

Σύμφωνα με τους Pesaran and Timmermann (1995) και Bossaerts and Hillion

$2^K$

(1999), το SIC, είναι μια μέθοδος μεταξύ των δυνατών προδιαγραφών για τους  $K$  πιθανούς προβλεπτές, με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα τη στιγμή των προβλέψεων. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το SIC για να αποφύγουμε την υπερπροσαρμογή του εντός δείγματος, δεδομένου ότι η SIC τιμωρεί μοντέλα με περισσότερες παραμέτρους. Με άλλα λόγια, η SIC μέθοδος δημιουργεί  $2^K$  παλινδρομήσεις, και επιλέγει αυτή με το καλύτερο SIC

$$SIC = n \ln(\hat{\sigma}_e^2) + K \ln(n). \quad (7)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των δεδομένων και  $\hat{\sigma}_e^2$  το σφάλμα διακύμανσης με

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2$$

### 2.2.1 Δείκτες Διάχυσης

Οι Ludvigson and Ng (2007), οι Kelly and Pruitt (2012), και οι Neely et al. (2012) υιοθέτησαν μια προσέγγιση του δείκτη διάχυσης για να βελτιώσουν την πρόβλεψη του equity premium. Οι δείκτες διάχυσης παρέχουν ένα μέσο για τη κατάλληλη παρακολούθηση των από κοινού μετακινήσεων σε ένα μεγάλο αριθμό των πιθανών αποδόσεων των προβλεπτών. Η προσέγγιση του δείκτη διάχυσης προϋποθέτει ένα λανθάνον συντελεστή μοντέλου για τους πιθανούς προβλεπτές:

$$x_{i,t} = \lambda_i f_t + \epsilon_{i,t} \quad (i = 1, \dots, K), \quad (8)$$

όπου  $f_t$  είναι ένα  $q$  διάνυσμα από λανθάνον συντελεστές,  $\lambda_i$  είναι ένα  $q$  διάνυσμα παραγοντικών φορτίσεων, και  $\epsilon_{i,t}$  είναι ένα όρος διαταραχής με μηδενική μέση τιμή. Ένα αυστηρό παραγοντικό μοντέλο υποθέτει ότι οι όροι διαταραχής είναι ταυτόχρονα και διαδοχικά ασυσχέτιστοι, ενώ ένα κατά προσέγγιση παραγοντικό μοντέλο

επιτρέπει έναν περιορισμένο βαθμό ταυτόχρονων ή διαδοχικών συσχετίσεων στο  $\varepsilon_{i,t}$  (Bai, 2003). Κάτω από την (8), οι από κοινού μετακινήσεις στις μεταβλητές διέπονται κυρίως από τις διακυμάνσεις σε ένα σχετικά μικρό αριθμό παραγόντων ( $q \ll K$ ).

Για είτε στα αυστηρά είτε στα προσεγγιστικά παραγοντικά μοντέλα, οι λανθάνων παράγοντες μπορούν να εκτιμηθούν με συνέπεια από τις κύριες συνιστώσες (Bai, (2003), οι Stock and Watson, (2006)). Οι εκτιμήσεις των παραγόντων χρησιμεύουν ως παλινδρομήσεις στο ακόλουθο προγνωστικό μοντέλο παλινδρόμησης:

$$r_{t+1} = \alpha_{DI} + \beta'_{DI} f_t + \varepsilon_{t+1}, \quad (9)$$

όπου  $\beta'_{DI}$  είναι ένα  $q$  διάνυσμα συντελεστών κλίσης. Η βασική διαίσθηση πίσω από την (9) είναι η ακόλουθη. Όλοι οι  $K$  προβλεπτές,  $x_{it}$  ( $i = 1, \dots, K$ ), ενδεχομένως να περιέχουν σχετικές πληροφορίες για την πρόβλεψη  $r_{t+1}$ , ωστόσο, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μεμονωμένες μεταβλητές μπορούν επίσης να παρέχουν θορυβώδη σήματα. Αντί να χρησιμοποιούμε τις  $x_{it}$  μεταβλητές άμεσα σε μια προβλεπτική παλινδρόμηση, χρησιμοποιούμε τη παραγοντική δομή της (8) για να προσδιορίσουμε τις σημαντικές κοινές διακυμάνσεις στις δυνητικές μεταβλητές, όπως αντιπροσωπεύεται από την  $f_t$ , έτσι ώστε να φιλτράρει έξω το θόρυβο των μεμονωμένων μεταβλητών. Η παραγοντική δομή δημιουργεί έτσι ένα πιο αξιόπιστο σήμα από ένα μεγάλο αριθμό προβλεπτών ώστε να απασχολούνται σε μια προγνωστική παλινδρόμηση.

Μία equity premium πρόβλεψη βασισόμενη στην (9) δίνεται από τον τύπο

$$\hat{r}_{t+1}^{DI} = \hat{\alpha}_{DI,t} + \hat{\beta}'_{DI,t} \hat{f}_{t,t}, \quad (10)$$

όπου  $\hat{f}_{t,t}$  είναι η κύρια συνιστώσα της εκτίμησης  $f_t$  με βάση τα δεδομένα που διατίθενται μέσω  $t$  και  $\hat{\alpha}_{DI,t}$  και  $\hat{\beta}'_{DI,t}$  είναι OLS εκτιμήσεις του  $\alpha_{DI}$  και του  $\beta_{DI}$ , αντίστοιχα, στην (9) από την παλινδρόμηση  $\{r_s\}_{s=2}^t$  σε συνεχή και  $\{\hat{f}_{s,t}\}_{s=1}^{t-1}$ . Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής απαιτεί την προδιαγραφή του  $q$  και τον αριθμό των παραγόντων. Οι Bai and Ng (2002) and Onatski (2010) παρέχουν διαδικασίες για τη σταθερή επιλογή του  $q$ , και οι διαδικασίες αυτές μπορούν να εφαρμοστούν σε δεδομένα που διατίθενται μέσω  $t$  ως ένα πρώτο βήμα για τον υπολογισμό της πρόβλεψης του δείκτη διάχυσης, (10). Από την προοπτική της πρόβλεψης, είναι

σκόπιμο να διατηρηθεί το  $q$  σχετικά μικρό, και πάλι για να αποφευχθεί ένα υπέρ παραμετρικό μοντέλο πρόβλεψης.

Ο Ludvigson και ο Ng (2007) αναλύουν τα μοντέλα του δείκτη διάχυσης κατά μήκος των γραμμών της (8) για τα τριμηνιαία στοιχεία και τους παράγοντες που προέρχονται από 209 μακροοικονομικές και 172 οικονομικές μεταβλητές. Εκτός από την ανίχνευση σημαντικής εντός δείγματος προβλεπτική ικανότητα για τους εκτιμώμενους παράγοντες, ο Ludvigson και ο Ng (2007) βρήκαν ότι οι προβλέψεις του δείκτη διάχυσης του τριμηνιαίου equitypremium των ΗΠΑ ξεπερνούν σημαντικά την ιστορική μέση πρόβλεψη.

Ο Neely et al. (2012) χρησιμοποιεί μια προσέγγιση του δείκτη διάχυσης για να προβλέψει το μηνιαίο equitypremium των ΗΠΑ. Θα εξάγει παράγοντες από ένα σύνολο 14 οικονομικών μεταβλητών από τη βιβλιογραφία και 14 τεχνικούς δείκτες υπολογισμένους από κινούμενο μέσο όρο, ορμή, και βάση όγκου κανόνων. Η επιλογή του αριθμού των παραγόντων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ED του Onatski (2010), ο Neely et al. (2012) έδειξε ότι η πρόβλεψη του δείκτη διάχυση υπερτερεί σημαντικά του ιστορικού μέσου όρου, καθώς επίσης και των 28 προγνωστικών προβλέψεων παλινδρόμησης με βάση τις ατομικές οικονομικές μεταβλητές και τους τεχνικούς δείκτες. Επί του παρόντος, η προσέγγιση του δείκτη διάχυσης τους που βασίζεται και στις οικονομικές μεταβλητές και στους τεχνικούς δείκτες φαίνεται να παρέχει την καλύτερη μηνιαία πρόβλεψη του equitypremium των ΗΠΑ.

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση της προσέγγισης του δείκτη διάχυση στηρίζεται σε συγκεκριμένες μεταβλητές (Bai and Ng, 2008). Από την άποψη της πρόβλεψης, ένα πιθανό μειονέκτημα με το μοντέλο του δείκτης διάχυσης είναι ότι οι εκτιμώμενοι παράγοντες έχουν σχεδιαστεί για να εξηγήσουν την συνδιακύμανση μεταξύ των μεμονωμένων μεταβλητών μεταξύ τους, χωρίς να λαμβάνει ρητώς υπόψη τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών και τη συγκεκριμένη μεταβλητή που θέλουμε να προβλέψουμε. Οι Kelly and Pruitt (2011) αναπτύσσουν τριών ελέγχων φίλτρο παλινδρόμησης (3PRF) για την εκτίμηση των παραγόντων που έχουν τη μεγαλύτερη σημασία για την πρόβλεψη του στόχου. Σε μια εφαρμογή της 3PRF προσέγγισης, οι Kelly and Pruitt (2012) χρησιμοποιούν παράγοντες που προέρχονται από μια σειρά αναλυτικών δεικτών αποτίμησης για τη δημιουργία ενός εκτός δείγματος πρόβλεψης του equitypremium των ΗΠΑ που ξεπερνά σημαντικά την ιστορική μέση πρόβλεψη.



### 2.2.2 Εκτίμηση Πρόβλεψης

Η MSFE είναι η πιο δημοφιλής μέτρηση για την αξιολόγηση της ακρίβειας της πρόβλεψης, και δεν είναι έκπληξη το γεγονός ότι η MSFE συνήθως αναφέρεται σε μελέτες προβλεψιμότητας αποδόσεων μετοχών. Αυτό θέτει δύο σημαντικά ζητήματα. Το πρώτο σχετίζεται με τις στατιστικές δοκιμές της ίσης MSFE κατά τη σύγκριση των προβλέψεων από ένθετα μοντέλα, ενώ το δεύτερο αφορά την επάρκεια του MSFE ίδιου του κριτηρίου.

Για να διορθώσουμε τις ιδέες, ας υποθέσουμε ότι ένα δείγμα από  $T$  παρατηρήσεις για την  $r_t$  και την  $x_{i,t}$  είναι διαθέσιμο. Χωρίζουμε το σύνολο του δείγματος σε μια αρχική περίοδο εκτίμησης μέσα στο δείγμα που αποτελείται από τις πρώτες παρατηρήσεις  $n_1$  και μία εκτός δείγματος περίοδο που αποτελείται από τις τελευταίες  $n_2 = T - n_1$  παρατηρήσεις. Είναι ένα βήμα μπροστά προβλέψεις του equity premium που υπολογίζονται σε αυτές τις τελευταίες παρατηρήσεις  $n_2$  με την χρήση της  $\hat{r}_{i,t+1} = \hat{\alpha}_{i,t} + \hat{\beta}_{i,t} x_{i,t}$ . Η MSFE για την προγνωστική πρόβλεψη παλινδρόμησης για την περίοδο αξιολόγησης πρόβλεψης δίνεται από το τύπο

$$MSFE_t = (1/n_2) \sum_{s=1}^{n_2} (r_{i,t_1+s} - \hat{r}_{i,t_1+s})^2 \quad (11)$$

Για να αναλύσουμε την εκτός δείγματος προβλεψιμότητα των αποδόσεων των μετοχών, η ακρίβεια της προγνωστικής πρόβλεψης παλινδρόμησης σχετίζεται με τον ιστορικό μέσο όρο αναφοράς των προβλέψεων, όπου προϋποθέτει σταθερές αναμενόμενες περιπτώσεις αποδόσεις,

$$\bar{r}_{t+1} = (1/t) \sum_{s=1}^t r_t \quad (12)$$

και το MSFE του δίνεται από το τύπο

$$MSFE_0 = (1/n_2) \sum_{s=1}^{n_2} (r_{n_1+s} - \bar{r}_{n_1+s})^2 \quad (13)$$

Το εκτός δείγματος  $R^2$  (Campbell and Thompson (2008)) είναι ένα βολικό στατιστικό στοιχείο για τη σύγκριση των MSFE. Είναι ανάλογο με το συμβατικό εντός δείγματος  $R^2$  και μετρά την ανάλογη μείωση στο MSFE για την προγνωστική πρόβλεψη παλινδρόμηση σε σχέση με τον ιστορικό μέσο όρο:

$$R_{OS}^2 = 1 - \left( \frac{MSFE_i}{MSFE_0} \right). \quad (14)$$

Προφανώς, όταν  $R_{OS}^2 > 0$ , η προγνωστική πρόβλεψη παλινδρόμησης είναι πιο ακριβής από τον ιστορικό μέσο όρο όσον αφορά το MSFE ( $MSFE_i < MSFE_0$ ).

Ενώ το  $R_{OS}^2$  μετρά τη βελτίωση της MSFE για την προγνωστική πρόβλεψη παλινδρόμησης έναντι του ιστορικού μέσου όρου, ενδιαφερόμαστε επίσης για να καθορίσουμε αν η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική, δηλαδή, μας ενδιαφερόμαστε να δοκιμάσουμε  $H_0: MSFE_0 \leq MSFE_i$  κατά της  $H_A: MSFE_0 > MSFE_i$  που αντιστοιχεί σε  $H_0: R_{OS}^2 < 0$  κατά του  $H_A: R_{OS}^2 > 0$ . Ο γνωστός DieboldandMariano (1995) και ο West (1996) έλεγξαν τη μηδενική της ίσης MSFE (ή ίση προβλεπτική ικανότητα) που δίνεται από το τύπο

$$DMW_i = n_2^{0.5} \bar{d}_i \hat{S}_{d_i d_i}^{-0.5}, \quad (15)$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= (1/n_2) \sum_{s=1}^{n_2} \hat{d}_{i,n_1+s}, \\ \hat{d}_{i,n_1+s} &= \hat{u}_{0,n_1+s}^2 - \hat{u}_{i,n_1+s}^2, \\ \hat{u}_{0,n_1+s} &= r_{n_1+s} - \bar{r}_{n_1+s}, \\ \hat{u}_{i,n_1+s} &= r_{n_1+s} - \hat{r}_{i,n_1+s}, \\ \hat{S}_{d_i d_i} &= (1/n_2) \sum_{s=1}^{n_2} (\hat{d}_{i,n_1+s} - \bar{d}_i)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Το  $DMW_i$  στατιστικό είναι ισοδύναμο με την  $t$  στατιστική που αντιστοιχεί στην σταθερά για την παλινδρόμηση του  $\hat{d}_{i,n_1+s}$  σε σταθερά για  $s = 1, \dots, n_2$ . Κατά τη σύγκριση των προβλέψεων από μη ένθετα μοντέλα, οι DieboldandMariano (1995) και ο West (1996) δείχνουν ότι το  $DMW_i$  έχει μια τυπική κανονική ασυμπτωτική κατανομή, έτσι ώστε να είναι εύκολο να είναι εύκολο να δοκιμαστεί το  $H_0: MSFE_0 \leq MSFE_i$  κατά της  $H_A: MSFE_0 > MSFE_i$  συγκρίνοντας το δείγμα στατιστικής σε 1.282, 1.645, και 2.326 και για το 10%, 5%, και 1% επίπεδα σημαντικότητας, αντίστοιχα.

Οι Clark and McCracken (2001) and McCracken (2007), ωστόσο, δείχνουν ότι το  $DMW_t$  έχει μία μη συνήθης ασυμπτωτική κατανομή κατά τη σύγκριση των προβλέψεων από ένθετα μοντέλα. Στο πλαίσιο των προγνωστικών παλινδρομήσεων, τα εκτός δείγματος τεστ της προβλεψιμότητας των αποδόσεων των μετοχών συνεπάγονται μια σύγκριση των ένθετων προβλέψεων, δεδομένου ότι το προγνωστικό μοντέλο παλινδρόμησης,  $r_{t+1} = \alpha_t + \beta_t x_{i,t} + \varepsilon_{i,t+1}$ , μειώνει τη συνεχή αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση του μοντέλου όταν  $\beta_t = 0$ . Για ένθετες συγκρίσεις των προβλέψεων, η ασυμπτωτική κατανομή της  $DMW_t$  είναι μία συνάρτηση της κίνησης Brownian και εξαρτάται από δύο παραμέτρους: (1)  $\pi = n_2/n_1$ , (2) η διάσταση του συνόλου των προβλεπτών,  $x_t$  (η οποία είναι μία για μια διμεταβλητή προβλεπτική παλινδρόμηση). Οι Clark and McCracken (2001) και McCracken (2007) παρέχουν πίνακα με κρίσιμες τιμές για μια ποικιλία των τιμών των παραμέτρων που αφορούν την εφαρμοσμένη έρευνα. Ένα έντονο χαρακτηριστικό της ασυμπτωτικών κρίσιμων τιμών είναι ότι συχνά μετατοπίζονται αισθητά προς τα αριστερά σε σχέση με τις τυπικές κανονικές κρίσιμες τιμές. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα διμεταβλητό προγνωστικό μοντέλο παλινδρόμησης και  $\pi = 2$ , το οποίο ανταποκρίνεται στο να διατηρεί το πρώτο τρίτο του συνολικού δείγματος για την αρχικό εντός περιόδου δείγματος. Από τον πίνακα του Mc-Cracken (2007), οι 10%, 5% και 1% κρίσιμες τιμές είναι 0.281, 0.610 και 1.238, αντίστοιχα, οι οποίες είναι πολύ κάτω από τυπική κανονική τους ομολόγων τους. Το συμπέρασμα είναι ότι οι δοκιμές της ίσης προβλεπτικής ικανότητας με βάση τις συμβατικές κρίσιμες τιμές μπορεί συχνά να είναι αυστηρά μικρότερου μεγέθους, που οδηγούν σε δοκιμές με πολύ χαμηλή ενέργεια για την ανίχνευση της εκτός δείγματος απόδοσης προβλεψιμότητας. Με λίγα λόγια, είναι σημαντικό να χρησιμοποιούμε κατάλληλα τις κρίσιμες τιμές όταν γίνεται έλεγχος για την προβλεψιμότητα των αποδόσεων των μετοχών, διαφορετικά, στατιστικά σημαντική ένδειξη της προβλεψιμότητας της απόδοσης του εκτός δείγματος μπορεί εύκολα να χαθεί.

Οι Clark and West (2007) ρύθμισαν το  $DMW_t$  να παράγει ένα τροποποιημένο στατιστικό, προσαρμοσμένο MSFE, για τη σύγκριση των ένθετων μοντέλων προβλέψεων που έχουν μια ασυμπτωτική κατανομή που προσεγγίζεται καλά από την τυπική κανονική. Το προσαρμοσμένο MSFE στατιστικό εκτελείται επίσης καλά και σε πεπερασμένο δείγμα προσομοιώσεων. Οι Clark and West (2007) παρέχουν έτσι μια

πολύ βολική μέθοδο για την αξιολόγηση της στατιστικής σημαντικότητας όταν συγκρίνουμε ένθετες προβλέψεις που εξαλείφουν την ανάγκη για να αναζητήσουμε ένα νέο σύνολο των κρίσιμων τιμών για κάθε εφαρμογή. Το προσαρμοσμένο MSFE στατιστικό είναι εύκολο να υπολογιστεί αφού πρώτα ορίσουμε

$$\bar{d}_{in_1+s} = \hat{a}_{0,n_1+s}^2 - [\hat{a}_{1,n_1+s}^2 - (\bar{r}_{n_1+s} - \hat{r}_{in_1+s})^2], \quad (17)$$

και στη συνέχεια να παλινδρομείτε το  $\bar{d}_{in_1+s}$  σε σταθερά για  $s = 1, \dots, n_2$ , το προσαρμοσμένο MSFE είναι το  $t$  στατιστικό που αντιστοιχεί στη σταθερά. Πρόσφατες μελέτες της προβλεψιμότητας των αποδόσεων των μετοχών που απασχολούν το προσαρμοσμένο MSFE στατιστικό περιλαμβάνουν οι Rapachetal (2010), Kongetal. (2011), DanglandHalling (2012), andNeelyetal. (2012).

Ενώ το MSFE είναι συντριπτικά το πιο δημοφιλές μέτρο για την ακρίβεια της πρόβλεψης, δεν είναι απαραίτητα η πιο σχετική μέτρηση για την αξιολόγηση των προβλέψεων των αποδόσεων των μετοχών. Οι LeitchandTanner (1991) εξέτασανπολλές επιχειρήσειςοι οποίες ενδιαφέρονται για επαγγελματικές προβλέψεις οικονομικών και χρηματοοικονομικών μεταβλητών που συχνά αδυνατούν να έχουν υψηλές αποδόσεις στις προβλέψεις από τα απλά μοντέλα χρονοσειρών με την χρήση του MSFE. Υποστηρίζουν ότι η κερδοφορία της πρόβλεψη είναι μια πιο σχετική μέτρηση για την αξιολόγηση των προβλέψεων, βοηθώντας να εξηγήσει την αξία των επαγγελματικών προβλέψεων στις επιχειρήσεις. Συγκρίνοντας τα επαγγελματικά και των απλών χρονοσειρών μοντέλα προβλέψεων των επιτοκίων, για τα οποία η αποδοτικότητα μετράται εύκολα, οι LeitchandTanner (1991) βρίσκουν ότι οι επαγγελματίες προβλέψεις είναι συχνά πιο επικερδείς. Επιπλέον, υπάρχει μια αδύναμη σχέση μεταξύ του MSFE και της κερδοφορία των προβλέψεων. Μεταξύ των συμβατικών μέτρων σφάλματος πρόβλεψης που αναλύουν, μόνο ηdirection-of-changemetric εμφανίζεται σημαντικά συσχετισμένη με την κερδοφορία της πρόβλεψης. Οι HenriskssonandMerton (1981), CumbyandModest (1987), και PesaranandTimmermann (1992) παρέχουν στατιστικές δοκιμές της κατευθυνόμενης ικανότητας πρόβλεψης, και ακαδημαϊκοί ερευνητές χρησιμοποιούν συχνά αυτές τις δοκιμές κατά την ανάλυση των προβλέψεων των αποδόσεων των μετοχών (π.χ., οι Breenetal, (1989), PesaranandTimmermann (2002,2004), MarqueringandVerbeek (2004).

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα των LeitchandTanner (1991), ακαδημαϊκοί ερευνητές επίσης αναλύουν συχνά τις προβλέψεις αποδόσεων των μετοχών με κέρδος ή χρησιμότητα βασιζόμενοι σε μετρήσεις, οι οποίες παρέχουν πιο άμεσα μέτρα από την αξία των προβλέψεων στους οικονομικούς παράγοντες. Σε αυτές τις μετρήσεις, οι προβλέψεις αποδόσεων των μετοχών χρησιμεύουν ως εισροές για τους adhoc κανόνες των συναλλαγών ή για αποφάσεις κατανομής περιουσιακών στοιχείων που προέρχονται από τα αναμενόμενα προβλήματα μεγιστοποίηση της χρησιμότητας. Ένα κορυφαίο σε χρησιμότητα που βασίζεται σε μέτρηση για την ανάλυση των προβλέψεων του equitypremium των ΗΠΑ είναι το μέσο κέρδος χρησιμότητας για μια μέση διακύμανση των επενδυτών. Σκεφτείτε έναν επενδυτή με συνάρτηση ωφέλειας μέσω διακύμανσης με σχετική αποστροφή κινδύνου  $\gamma$  που διαθέτει το χαρτοφυλάκιο του μεταξύ μετοχών και ακίνδυνων λογαριασμών με βάση την προγνωστική πρόβλεψη παλινδρόμησης,  $\hat{r}_{i,t+1} = \hat{\alpha}_{i,t} + \hat{\beta}_{i,t}x_{i,t}$ , των equitypremium. Στο τέλος του  $t$ , ο επενδυτής διαθέτει το ακόλουθο μερίδιο του χαρτοφυλακίου του σε μετοχές κατά τη διάρκεια  $t + 1$ :

$$a_{i,t} = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{\hat{r}_{i,t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}^2}\right), \quad (18)$$

όπου  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$  είναι η πρόβλεψη της διακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών. Κατά την περίοδο αξιολόγησης της πρόβλεψης, ο επενδυτής αντιλαμβάνεται τη μέση ωφέλεια,

$$v_t = \hat{\mu}_t - 0.5\gamma\hat{\sigma}_t^2, \quad (19)$$

όπου  $\hat{\mu}_t(\hat{\sigma}_t^2)$  είναι η μέση τιμή του δείγματος (διακύμανση) του χαρτοφυλακίου που σχηματίζεται με βάση  $\hat{r}_{i,t+1}$  και  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$  για την περίοδο αξιολόγησης των προβλέψεων. Αν ο επενδυτής, αντίθετα, στηρίζεται στην ιστορική μέση πρόβλεψη των equitypremium (χρησιμοποιώντας την ίδια πρόβλεψη διακύμανσης), που κατανέμει το μερίδιο του χαρτοφυλακίου,

$$a_{0,t} = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{\hat{r}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{t+1}^2}\right), \quad (20)$$

στα ίδια κεφάλαια κατά τη διάρκεια  $t + 1$  και, κατά την περίοδο αξιολόγησης της πρόβλεψης, αντιλαμβάνεται τη μέση ωφέλεια,

$$\hat{v}_0 = \hat{\mu}_0 - 0.5\gamma\hat{\sigma}_0^2, \quad (21)$$

όπου  $\hat{\mu}_0(\hat{\sigma}_0^2)$  είναι η μέση τιμή του δείγματος (διακύμανση) του χαρτοφυλακίου που σχηματίζεται με βάση  $\hat{r}_{t+1}$  και  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$  για την περίοδο αξιολόγησης των προβλέψεων. Η διαφορά μεταξύ των (19) και (21) αντιπροσωπεύει το κέρδος στην ωφέλεια που προκύπτει από τη χρήση της προβλεπτικής πρόβλεψης παλινδρόμησης των equitypremium στη θέση της ιστορικής μέσης πρόβλεψης για το assetallocationdecision. Αυτό το κέρδος χρησιμότητας, ή δίκαιη απόδοση ισοδύναμα, μπορεί να ερμηνευθεί ως η αμοιβή διαχείρισης του χαρτοφυλακίου που ένας επενδυτής θα ήταν πρόθυμος να πληρώσει για να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες της προβλεπτικής πρόβλεψης παλινδρόμησης σε σχέση με τις πληροφορίες μόνο της ιστορικής μέσης πρόβλεψη. Οι Marquering and Verbeek (2004), Campbell and Thompson (2008), Cooper and Priestly (2009), Rapach et al. (2010), Φερίρα and Santa-Clara (2011), Dangl and Halling (2012), and Neely et al. (2012) όλοι εντόπισαν αρκετά μεγάλα κέρδη ωφελιμότητας χρησιμότητας για μέσης διακύμανσης επενδυτές που στηρίζονται σε προβλέψεις equitypremium με βάση τις οικονομικές μεταβλητές σε σχέση με την ιστορική μέση πρόβλεψη.

Οι KandelandStambaugh (1996), GuidolinandTimmermann (2007), PettenuzzoandTimmermann (2011), και CenesizogluandTimmermann (2011) μέτρησαν την χρησιμότητα των κερδών για τους επενδυτές με τη χρησιμότητα ισχύος που ορίζεται πάνω από τον πλούτο ο οποίος κατανέμετε βέλτιστα μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων, και επίσης βρήκαν σημαντικά οικονομικά οφέλη που προκύπτουν από τις προβλέψεις του equitypremium με βάση τις οικονομικές μεταβλητές. Ομοίως οι LeitchandTanner (1991), CenesizogluandTimmermann (2011) βρίσκουν μια αδύναμη σχέση μεταξύ MSFE και την χρησιμότητα των κερδών.

### 3. Πηγές Δεδομένων και Εφαρμογή

Η εξαρτημένη μεταβλητή που χρησιμοποιούμε είναι το equitypremium το οποίο είναι η λογαριθμική απόδοση του S&P 500 (με τα κέρδη) μείον την λογαριθμική απόδοση του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου.

**Απόδοση Μετοχής:** Χρησιμοποιούμε τις μηνιαίες αποδόσεις του S&P 500 για τη περίοδο 1926-2011. Τα δεδομένα είναι από το Center for Research in Security Press (CRSP). Φυσικά, οι αποδόσεις που χρησιμοποιούμε περιέχουν και τα κέρδη.

**Επιτόκιο Μηδενικού Κινδύνου (Risk-Free Rate):** Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου το οποίο χρησιμοποιείται για τη περίοδο 1926-2011 είναι το Treasury-bill επιτόκιο. Το επιτόκιο των Εμπορικών Χρεογράφων (Commercial Paper Rates) για την πόλη της Νέας Υόρκης είναι από την μακροιστορική βάση δεδομένων του National Bureau of Economic Research (NBER). Αυτά είναι διαθέσιμα από το 1871 έως το 1970. Υπολογίζουμε μια παλινδρόμηση από το 1920 έως το 1971, η οποία αποδίδει:

$Treasury\text{-}bill\text{rate} = -0.004 + 0.886 \times \text{Επιτόκιο Εμπορικού Χρεογράφου}$

με  $R^2$  95,7%. Η συσχέτιση για τη περίοδο 1920-1971 μεταξύ του equity premium που υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας το πραγματικό επιτόκιο Treasury-bill και αυτό που υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας το προβλεπόμενο Treasury-bill επιτόκιο (χρησιμοποιώντας το επιτόκιο εμπορικού χρεογράφου) είναι 99,8%.

**Cross-Sectional Premium (CSP):** Το cross-sectional premium μετράει τη σχετική αποτίμηση των υψηλών και χαμηλών μετοχών και προτείνεται από τους Polk, Thompson και Vuolteenaho (2006). Τα CSP δεδομένα είναι από τον Samuel Thompson από το Μάιο του 1937 έως το Δεκέμβριο του 2002.

**Λογιστική Αξία (Book Value):** Τα δεδομένα για τη περίοδο 1920-2011 προέρχονται από την βάση δεδομένων του ValueLine, και πιο συγκεκριμένα από το διάγραμμα μακροπρόθεσμης προοπτικής χρησιμοποιώντας το δείκτη Dow Jones Industrial Average. Το Book-to-Market Ratio (b/m) είναι ο λόγος της λογιστικής αξίας προς το δείκτη Dow Jones Industrial Average. Για τους μήνες από το Μάρτιο έως το Δεκέμβριο, υπολογίζεται διαιρώντας τη λογιστική αξία στο τέλος του προηγούμενου έτους με την τιμή στο τέλος του τρέχοντος μήνα. Για τους μήνες Ιανουάριο και Φεβρουάριο, υπολογίζεται διαιρώντας τη λογιστική αξία στο τέλος του έτους πριν από δύο χρόνια με την τιμή στο τέλος του τρέχοντος μήνα.

**Εταιρικής Δραστηριότητας Ζητήματα (Corporate Issuing Activity):** Έχουμε δύο εταιρικής δραστηριότητας ζητήματα. Η καθαρή αύξηση μετοχικού κεφαλαίου (ntis) είναι ο λόγος των κινούμενων ποσών των καθαρών θεμάτων των εισηγμένων

μετοχών από το NYSE διά της συνολικής στο τέλος του χρόνου αγορά κεφαλαιοποίησης των μετοχών του NYSE. Αυτό το ποσό σε δολάρια της καθαρής equityissuingactivity για της εισηγμένες μετοχές NYSE υπολογίζεται από τα CRSP δεδομένα:

$$\text{Καθαρά Θέματα}_t = \text{Mcap}_t - \text{Mcap}_{t-1} \times (1 + \text{vwret}_t)$$

Όπου  $\text{Mcap}$  είναι η ολική αγορά κεφαλαιοποίησης,  $\text{vwret}_t$  είναι η τιμή της σταθμισμένης απόδοσης (εξαιρουμένων των μερισμάτων) στο ευρετήριο NYSE. Αυτά τα δεδομένα είναι διαθέσιμα για τη περίοδο 1926-2011. Το  $\text{vwret}_t$  συνδέεται στενά, αλλά όχι πανομοιότυπα, με μια μεταβλητή που προτείνουν οι Boudoukh, Michaely, Richardson and Roberts (2007). Το δεύτερο μέτρο,  $\text{PercentEquityIssuing}$  ( $\text{eqis}$ ), είναι ο λόγος του  $\text{equityissuingactivity}$  ως κλάσμα των συνολικών δραστηριότητας ζητημάτων. Αυτή η μεταβλητή προτείνεται από του Barker και Wunder. Οι τιμές που έχουμε για αυτήν είναι μέχρι το 2005. Το πρώτο  $\text{equityissuing}$  μέτρο είναι σχετικό με το συνολική κεφαλαιακή αγορά, ενώ το δεύτερο είναι σχετικό με τη συνολική εταιρική απόδοση.

**TreasuryBill (tbl):** Οι τιμές του TreasuryBill για τη περίοδο 1920-1933 είναι οι αποδόσεις των Short-TermUnitedStatesSecurities, Three-SixMonthTreasuryNotesandCertificates, ThreeMonthTreasuryseriesτα οποία προέρχονται από τη βάση δεδομένων της NBER. Οι τιμές του TreasuryBill για τη περίοδο 1934-2011 είναι τα τρίμηνα TreasuryBill: SecondMarketRate από τη βάση δεδομένων της FRED.

**Δείκτη Απόδοσης Μακροχρόνιων Κρατικών Ομολόγων (lty) (LongTermYield):** Τα δεδομένα για το Δείκτη Απόδοσης Μακροχρόνιων Κρατικών Ομολόγων για τη περίοδο 1919-1925 είναι η U.S. YieldOnLong-TermUnitedStatesBondseries από τα δεδομένα της NBER. Οι αποδόσεις για τη περίοδο 1926-2011 είναι από τις Ibbotson's Stocks, Bonds, Bills and Inflation Yearbook, η ίδια πηγή που παρέχει τις LongTermRateofReturns (ltr). Το TermSpread (tms) είναι η διαφορά μεταξύ της απόδοσης των μακροχρόνιων κυβερνητικών ομολόγων και το Treasury-Bill.

**Αποδόσεις Εταιρικών Ομολόγων (CorporateBondReturns):** Οι αποδόσεις του μακροχρόνιου κρατικού ομολόγου για τη περίοδο 1926-2011 είναι πάλι από τις



Ibbotson's Stocks, Bonds, Bills and Inflation Yearbook. Οι αποδόσεις των εταιρικών ομολόγων AAA και BAA βαθμολογίας για τη περίοδο 1919-2011 είναι από τη βάση δεδομένων της FRED. Το Default Yield Spread (dfy) είναι η διαφορά μεταξύ της απόδοσης των BAA και AAA εταιρικών ομολόγων.

**Πληθωρισμός (infl) (Inflation):** Ο πληθωρισμός είναι ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή (All Urban Consumers) για τη περίοδο 1919-2011 από το Bureau of Labor Statistics. Επειδή η πληροφορία άσπρον αφορά το πληθωρισμού γίνεται γνωστή τον επόμενο κάθε φορά μήνα, πρέπει να περιμένουμε ένα μήνα πριν τον χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση.

**Δείκτης Επένδυσης Κεφαλαιοποίησης (i/k) (Investment to Capital Ratio):** Ο Δείκτης Επένδυσης προς Κεφαλαιοποίηση είναι ο λόγος της συνολικής επένδυσης προς τη συνολική κεφαλαιοποίηση για όλη την οικονομία. Αυτή η μεταβλητή προτάθηκε από τον Cochrane (1991).

**Μερίσματα (Dividends):** Τα Μερίσματα (Dividends) είναι το 12μηνο rolling άθροισμα των μερισμάτων που καταβάλλονται για τον S&P 500 Index. Τα στοιχεία για τη περίοδο 1871-1987 είναι από την ιστοσελίδα του Robert Shiller. Τα μερίσματα για τη περίοδο 1988-2011 είναι από τη S&P Corporation. Ο Λόγος Μερισμάτων προς τη Τιμή (d/p) (Dividends Price Ratio) είναι η διαφορά μεταξύ των λογαριθμικών μερισμάτων και λογαριθμικών τιμών. Η Απόδοση των Μερισμάτων (d/y) (Dividends Yield) είναι η διαφορά μεταξύ των λογαριθμικών μερισμάτων και των λογαριθμικών τιμών με μια υστέρηση.

**Κέρδη (Earnings):** Τα Κέρδη (Earnings) είναι 12μηνο rolling άθροισμα των κερδών για τον S&P 500 Index. Τα στοιχεία για τη περίοδο 1871-1987 είναι πάλι από την ιστοσελίδα του Robert Shiller. Τα Κέρδη για τη περίοδο 1988-2011 είναι πάλι από την S&P Corporation. Ο Λόγος Τιμής των Κερδών (e/p) (Earnings Price Ratio) είναι η διαφορά μεταξύ των λογαριθμικών κερδών και των λογαριθμικών τιμών. Ο Λόγος των Μερισματικών Πληρωμών (d/e) (Dividend Payout Ratio) είναι η διαφορά μεταξύ των λογαριθμικών μερισμάτων και των λογαριθμικών κερδών.

**Διακύμανση Μετοχής (svar) (Stock Variance):** Η Διακύμανση Μετοχής (Stock Variance) υπολογίζεται ως το άθροισμα των τετραγώνων των ημερήσιων

αποδόσεων του S&P 500. Ο G. William Schwert παρέχει ημερήσιες αποδόσεις για τη περίοδο 1871-1926 και για τη περίοδο 1926-2011 είναι από το CRSP.

Υπολογίζουμε πρώτα τη πρόβλεψη για το equity premium σύμφωνα με το τύπο  $\hat{r}_{i,t+1} = \hat{\alpha}_{i,t} + \hat{\beta}_{i,t} x_{i,t}$  με κάθε ένα από τους παραπάνω παράγοντες. Χρησιμοποιούμε τα μηνιαία δεδομένα και ως αρχική περίοδο εκτίμησης τη περίοδο 1926-1956, έτσι ώστε να υπολογίζουμε τις εκτός δείγματος προβλέψεις για την περίοδο 1957-2011 (660 παρατηρήσεις). Για τις προβλέψεις χρησιμοποιούμε Rolling μέθοδο. Οι Pesaran and Timmermann (2007) και Clark and McCracken (2009) έδειξαν ότι το βέλτιστο μέγεθος του παραθύρου που χρησιμοποιούμε στη Rolling μέθοδο είναι μια πολύπλοκη συνάρτηση του χρόνου και του μεγέθους των διαμερισμάτων. Δεδομένου ότι αυτές οι παράμετροι είναι δύσκολο να εκτιμηθούν με ακρίβεια, τα αναδρομικά παράθυρα εκτίμησης συχνά έχουν καλύτερες επιδόσεις χρησιμοποιώντας MSFE από ότι τα Rolling Windows.

Η περίοδος αξιολόγησης της πρόβλεψης 1957-2011 καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος της μεταπολεμικής εποχής, συμπεριλαμβανομένων των πετρελαϊκών κρίσεων της δεκαετίας του 1970, τη βαθιά ύφεση που συνδέεται με την μείωση του πληθωρισμού στις αρχές του της δεκαετίας του 1980 τις μεγάλες ανακάμψεις της δεκαετίας του 1960, του 1980, του 1990 καθώς και τη πρόσφατη παγκόσμια οικονομική κρίση και τη συνακόλουθη Μεγάλη Ύφεση. Η επιλογή της περιόδου αξιολόγησης της πρόβλεψης είναι πάντα κάπως αυθαίρετη.

Ο Πίνακας 1 και ο Πίνακας 3 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για την εκτός δείγματος πρόβλεψη έναντι του ιστορικού μέσου όρου. Στο Πίνακα 1 έχουμε πρόβλεψη χωρίς περιορισμούς ενώ στο πίνακα 3 εφαρμόζοντας τους περιορισμούς των Campbell and Thompson (2008).

Στη πρώτη στήλη του κάθε πίνακα έχουμε όλες τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε για να προβλέψουμε το equity premium. Το  $R_{OS}^2$  στη δεύτερη στήλη δείχνει αυτό που είχαν αναφέρει οι Goyal and Welch (2008) ότι οι ατομικές προβλέψεις συχνά αποτυγχάνουν να ξεπεράσουν τον ιστορικό μέσο όρο με τη χρήση MSFE. Πράγματι, 11 από τα 14  $R_{OS}^2$  στο πίνακα 1 και 8 από τα 14  $R_{OS}^2$  στο πίνακα 3 είναι αρνητικά υποδεικνύοντας ότι η πρόβλεψη έχει μεγαλύτερο MSFE από τον ιστορικό μέσο όρο. Για τις τρεις προβλέψεις στο πίνακα 1 με θετικό  $R_{OS}^2$  (SVAR,

TMS, DFR) οι p-value τιμές είναι άνω του 0,10, άρα αυτές οι οικονομικές μεταβλητές δεν είναι στατιστικά σημαντικές εκτός δείγματος προβλέψεις. Το ίδιο συμβαίνει και για τις τρεις προβλέψεις στο πίνακα 3 με θετικό  $R_{0s}^2$  (TBL, LTR, TMS) ενώ αντίθετα για τις log(DP) και log(DY) όπου το p-value είναι κάτω του 0,10 καταλαβαίνουμε ότι είναι στατιστικά σημαντικές εκτός δείγματος προβλέψεις.

Όπως βλέπουμε και από τις γραφικές παραστάσεις στα Γραφήματα 1 είναι ξεκάθαρη η γενικά κακή απόδοση των προβλέψεων με αυτές τις οικονομικές μεταβλητές. Όλες απέχουν πολύ από το ιδανικό. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι καμπύλες είναι αρκετά απότομες και με θετική κλίση γύρω από NBER-ημερομηνίες υφέσεις υποδεικνύοντας ότι η εκτός δείγματος προβλεψιμότητα των αποδόσεων των μετοχών είναι σε μεγάλο βαθμό ένα φαινόμενο ύφεσης. Αυτό φαίνεται στη τέταρτη και στη έβδομη στήλη του Πίνακα 1, όπου έχουν υπολογιστεί ξεχωριστά τα  $R_{0s}^2$  κατά τη διάρκεια ανάπτυξης και ύφεσης, αντίστοιχα. Για δέκα από τους παράγοντες, το  $R_{0s}^2$  είναι αρνητικό και συνήθως κάτω του -1% κατά τη διάρκεια ανάπτυξης και στο 1% ή παραπάνω κατά τη διάρκεια των υφέσεων. Επιπλέον, δύο από αυτά τα  $R_{0s}^2$  είναι στατιστικά σημαντικά κατά τη διάρκεια της ύφεσης, σύμφωνα με τις p-value τιμές των ClarkandWest (2007) παρά τη μείωση του αριθμού των διαθέσιμων παρατηρήσεων. Η διαφορά σχετικά με την εκτός δείγματος πρόβλεψη σε ολόκληρη την χρονική περίοδο είναι ιδιαίτερα εμφανής για το log (DP) και log (DY), όπου το  $R_{0s}^2$  πάει από -1,1825 και -2,1927 κατά τη διάρκεια ανάπτυξης σε 2,4140 και 3,5558 αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια των υφέσεων.

Έχουμε αναλύσει τη πρόβλεψη του equitypremium από την άποψη της MSFE ωστόσο, το MSFE δεν είναι απαραίτητα η πιο σχετική μέτρηση για την αξιολόγηση των προβλέψεων των αποδόσεων των μετοχών. Η τρίτη στήλη του Πίνακα 1, δείχνει τα κατά μέσο όρο κέρδη ωφελιμότητας (σε ετησιοποιημένη απόδοση επί τοις εκατό) για ένα μέσο επενδυτή με ένα μέτριο συντελεστή κινδύνου. Βλέπουμε ότι 10 από τις 14 οικονομικές μεταβλητές προσφέρουν θετικά κέρδη ωφελιμότητας. Το ετήσιο κέρδος είναι πάνω από 0,5% για επτά από τις οικονομικές μεταβλητές, πράγμα που σημαίνει ότι ο επενδυτής θα ήταν πρόθυμος να πληρώσει περισσότερο για να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες για τον υπολογισμό των προβλέψεων σε σχέση με την ιστορική μέση πρόβλεψη. Επίσης από την έκτη και ένατη στήλη παρατηρούμε ότι τα κέρδη ωφελιμότητας είναι περισσότερα κατά την διάρκεια των υφέσεων. Αυτό

συμβαίνει σε 12 από τις 14 προβλέψεις και οι διαφορές είναι ιδιαίτερα μεγάλες για το  $\log(DP)$  και  $\log(DY)$ , όπου από -1,4227 και -1,9217 κατά τη διάρκεια ανάπτυξης σε 11,8691 και 16,1680 αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια των υφέσεων.

Στο Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα  $R_{OS}^i$  στατιστικά στοιχεία και τα κέρδη ωφελιμότητας για τις προβλέψεις με τους περιορισμούς των Campbell and Thompson (2008). Συγκρίνοντας το Πίνακα 3 με το Πίνακα 1, βλέπουμε ότι οι περιορισμοί βελτιώνουν τις προβλέψεις όσον αφορά το MSFE. Δώδεκα από τα δεκατέσσερα  $R_{OS}^i$  στο Πίνακα 3 είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του Πίνακα 1, και τα αρνητικά  $R_{OS}^i$  του Πίνακα 1 γίνονται θετικά στο Πίνακα 3 για τα  $\log(DP)$ ,  $\log(DY)$ , TBL, και LTR. Τα  $R_{OS}^i$  στην τέταρτη και την έβδομη στήλη του Πίνακα 3 δείχνουν τη συνολική αύξηση στην ακρίβεια της πρόβλεψης όταν χρησιμοποιούμε τους περιορισμούς των Campbell and Thompson (2008). Όπως παρατηρούμε τα  $R_{OS}^i$  στην έβδομη στήλη των Πινάκων 1 και 3 είναι αρκετά παρόμοια. Υπάρχει μια μικρή τάση για με τους περιορισμούς στη μείωση του  $R_{OS}^i$  σε περιόδους ύφεσης. Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει κατά την διάρκεια ανάπτυξης όπου τα  $R_{OS}^i$  γίνονται ουσιαστικά όλο και λιγότερο αρνητικά, ιδιαίτερα για τα  $\log(DP)$  και  $\log(DY)$ .

Ο Πίνακας 2 εκθέτει  $R_{OS}^i$  και τα κέρδη ωφελιμότητας για τις μηνιαίες προβλέψεις του equity premium που βασίζονται σε πολλαπλές οικονομικές μεταβλητές, χωρίς περιορισμούς. Τις γραφικές παραστάσεις αυτών τις βλέπουμε στα Γραφήματα 2.

Η πρώτη πρόβλεψη στον Πίνακα 2, ονομάζεται KitchenSink και είναι ένα πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης που περιλαμβάνει και τις 14 οικονομικές μεταβλητές. Επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα των Goyal and Welch (2008) and Rapach et al. (2010), η KitchenSink πρόβλεψη δεν αποδίδει καλά σύμφωνα με την MSFE μετρική, με το  $R_{OS}^i$  να είναι -8,38239. Στα Γραφήματα 2 φαίνεται ξεκάθαρα ότι η kitchen sink πρόβλεψη είναι εξαιρετικά ασταθής, πολύ περισσότερο από οποιοδήποτε επιμέρους πρόβλεψη που είδαμε πιο πριν. Η μηνιαία kitchen sink πρόβλεψη φτάνει μέγιστο σχεδόν το 4%, που σημαίνει ότι το ετήσιο αναμενόμενο equity premium φτάνει περίπου στο 48%, και ελάχιστο στο -4%, που σημαίνει ότι το ετήσιο αναμενόμενο equity premium φτάνει περίπου στο -50%. Αυτές οι ακραίες τιμές είναι άκρως απίθανο να συμβούν, γεγονός που καταδεικνύει ότι το εντός δείγματος πρόβλημα υπερπροσαρμογής οδηγεί τα παραμετροποιημένα μοντέλα να

παράγουν μεγάλα σφάλματα πρόβλεψης. Τέτοια λάθη δεν επιτρέπονται από το MSFE κριτήριο. Παρά την πολύ κακή απόδοση της kitchensink πρόβλεψης όσον αφορά το MSFE, φέρνει ένα θετικό συνολικό κέρδος, αν και είναι μικρότερο από 25 μονάδες βάσης σε ετήσια βάση. Αυτό δείχνει και πάλι πόσο τα διαφορετικά κριτήρια αξιολόγησης μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικά συμπεράσματα όσον αφορά την πρόβλεψη των αποδόσεων των μετοχών.

Σύμφωνα με τους Pesaran and Timmermann (1995) και Bossaerts and Hillion (1999), η επόμενη πρόβλεψη στο Πίνακα 2 χρησιμοποιεί το SIC. Ενώ το  $R_{OS}^i$  αυξάνεται για το σύνολο της περιόδου αξιολόγησης της πρόβλεψη με την SIC σε σχέση με την kitchensink πρόβλεψη, εξακολουθεί να είναι αρκετά κάτω από το μηδέν -5,4869. Στα Γραφήματα 2 βλέπουμε ότι, ενώ η SIC πρόβλεψη είναι λιγότερο ασταθής από την kitchensink πρόβλεψη, κάτι που ήταν αναμενόμενο, εξακολουθεί να είναι αρκετά ασταθής, έτσι ώστε η SIC πρόβλεψη να εξακολουθεί να έχει το πρόβλημα της υπερπροσαρμογής. Η πρόβλεψη SIC επίσης αποτυγχάνει να ξεπεράσει τον ιστορικό μέσο όρο όσον αφορά τα κέρδη ωφελιμότητας.

Οι τέσσερις τελευταίες προβλέψεις, με την μία να έχει τρεις παραλλαγές, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 χρησιμοποιούν τρεις πρόσφατες προτεινόμενες προσεγγίσεις για τη βελτίωση του equity premium. Οι δύο πρώτες από αυτές τις προβλέψεις είναι οι προβλέψεις που βασίζονται στο

$$\hat{r}_{t+1}^{POOL} = \sum_{i=1}^K \omega_{i,t} \hat{r}_{i,t+1},$$

το οποίο το υλοποιούμε με δύο τρόπους: (1) με ένα απλό σχήμα συνδυασμού,  $\omega_{i,t} = 1/K$  για  $i = 1, \dots, K$  (POOL-AVG), (2) συνδυάζοντας τα βάρη που εξαρτώνται από την πρόσφατη απόδοση της πρόβλεψης

$$\omega_{i,t} = \frac{\varphi_{i,t}^{-1}}{\sum_{k=1}^K \varphi_{k,t}^{-1}},$$

όπου

$$\varphi_{i,t} = \sum_{s=m}^{t-1} \theta^{t-1-s} (r_{s+1} - \hat{r}_{i,s+1})^2,$$

για τρία διαφορετικά  $\theta$ ,  $\theta = 0.60, 0.75, 0.90$ , (POOL-DMSFE). Η επόμενη πρόβλεψη είναι η πρόβλεψη του δείκτη διάχυσης που δίνεται από το τύπο

$$\hat{r}_{t+1}^{DI} = \hat{\alpha}_{DI,t} + \hat{\beta}_{DI,t} \hat{f}_{t,t},$$

όπου χρησιμοποιούμε την πρώτη κύριο συνιστώσα που εξάγεται από τις 14 οικονομικές μεταβλητές. Η τελική πρόβλεψη είναι η sum-of-the-parts

$$\hat{r}_{t+1}^{SOP} = \overline{g} e_t^{2\theta} + dp_t - r_{f,t+1},$$

όπου  $r_{f,t+1}$  είναι ο λογάριθμος της απόδοσης του Επιτοκίου Μηδενικού Κινδύνου, που είναι γνωστό στο τέλος του χρόνου  $t$ .

Τα αποτελέσματα στον Πίνακα 2, αποδεικνύουν την χρησιμότητα αυτών των προβλέψεων. Οι POOL-AVG, POOL-DMSFE, Diffusionindex, και sum-of-the-parts όλες έχουν θετικά  $R_{OS}^2$  για την περίοδο πρόβλεψης 1957-2011, και κάθε μία από τις αντίστοιχες ClarkandWest (2007) p-values υποδεικνύει σημαντικότητα στο 5%. Το  $R_{OS}^2$  για αυτές τις τέσσερις προβλέψεις κυμαίνεται από το 0,4420 (POOL-AVG) στο 0,8828 (sum-of-the-parts), τα οποία είναι μεγαλύτερα από οποιαδήποτε  $R_{OS}^2$  των ατομικών προβλέψεων του Πίνακα 1 εκτός της πρόβλεψης με την μεταβλητή DFR. Η sum-of-the-parts πρόβλεψη έχει το υψηλότερο  $R_{OS}^2$  για όλη την περίοδο αξιολόγησης από όλους τους συνδυασμούς προβλέψεων, ενώ παρέχει και τα λιγότερα (περισσότερα) σταθερά κέρδηωφελιμότητας από τις υπόλοιπες προβλέψεις. Οι POOL-AVG, POOL-DMSFE, Diffusionindex, και sum-of-the-parts προβλέψεις παράγουν επίσης αρκετά μεγάλο μέσο όρο κερδών για την περίοδο 1957-2011 αξιολόγησης προβλέψεων, που κυμαίνονται από 125-247 μονάδες βάσης σε ετήσια βάση. Αυτές οι τέσσερις προβλέψεις έχουν και καλές επιδόσεις σύμφωνα με το MSFE και άμεση χρησιμότητα με βάση τα κριτήρια.

Τα Γραφήματα 2 παρέχουν πληροφορίες για την επιτυχία των POOL-AVG, POOL-DMSFE, Diffusionindex, και sum-of-the-parts προβλέψεων. Σε σχέση με πολλές από τις επιμέρους προβλέψεις με τους προβλεπτές στα Γραφήματα 1 και την kitchensink και SIC προβλέψεις, οι τέσσερις αυτές προβλέψεις τείνουν να είναι σημαντικά πιο σταθερές. Η σταθεροποίηση επιτυγχάνεται με συρρίκνωση για τις συνδυασμένες προβλέψεις, με το φιλτράρισμα του θορύβου από τους προβλεπτές για την πρόβλεψη του δείκτη διάχυσης, και με τη μείωση του σφάλματος εκτίμησης για

την sum-of-the-parts πρόβλεψη. Η σταθεροποίηση αυτή είναι αναγκαία λόγω της σημαντικής αβεβαιότητας του μοντέλου και της αστάθειας των παραμέτρων που χρειάζονται για την πρόβλεψη της απόδοσης της μετοχής. Οι επιτυχημένες στρατηγικές πρόβλεψης των αποδόσεων των μετοχών ενσωματώνουν πληροφορίες από πολλαπλές οικονομικές μεταβλητές, πληροφορίες που αγνοούνται από τον ιστορικό μέσο όρο των προβλέψεων, αλλά με έναν τρόπο που μπορεί να ικανοποιήσει την αβεβαιότητα του μοντέλου και την αστάθεια των παραμέτρων, παράγοντας έτσι προβλέψεις που είναι οικονομικά πιθανές.

Η οικονομική αξιοπιστία των POOL-AVG, POOL-DMSFE, Diffusionindex, και sum-of-the-parts προβλέψεων, φαίνεται με το ότι συνδέονται με μεταβολές του οικονομικού κύκλου όπως φαίνεται και από τα Γραφήματα 2. Ειδικότερα, κατά τη διάρκεια των υφέσεων της δεκαετίας του 1970 και την περίοδο 1990-1991, και ιδιαίτερα η σοβαρή ύφεση στις αρχές της δεκαετίας του 1980, οι προβλέψεις κατεβαίνουν σε διαφορετικά τοπικά ελάχιστα και στη συνέχεια να αυξάνονται απότομα κατά τη διάρκεια της ύφεσης, φθάνοντας σε ξεχωριστά τοπικά μέγιστα.

Οι έξι τελευταίες στήλες του Πίνακα 2 δείχνουν τα εκτός δείγματος κέρδηωφελιμότητα, όσον αφορά το  $R_{Os}^2$  και τη μέση αύξηση της χρησιμότητας, κατά τη διάρκεια της ύφεσης για τις POOL-AVG, POOL-DMSFE, Diffusionindex, και sum-of-the-parts προβλέψεις. Το  $R_{Os}^2$  είναι θετικό για τις τρεις από τις τέσσερις αυτές προβλέψεις κατά τη διάρκεια ανάπτυξης (η εξαίρεση είναι ο δείκτης διάχυσης), αλλά κανένα από αυτά δεν είναι στατιστικά σημαντικά. Το  $R_{Os}^2$  κυμαίνεται από 1,1015% (POOL-AVG) σε 4,1465% (δείκτης διάχυσης) κατά τη διάρκεια της ύφεσης, και όλα αυτά τα στατιστικά σημαντικές στο 1%, παρά τη μείωση του αριθμού των διαθέσιμων παρατηρήσεων. Τα κέρδηωφελιμότητα κατά τη διάρκεια της ύφεσης είναι αρκετά ικανοποιητικά 16,4226% για το δείκτη διάχυσης.

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4 για τις προβλέψεις που βασίζονται σε πολλαπλές οικονομικές μεταβλητές με μη αρνητικούς περιορισμούς, όπου θέσαμε την πρόβλεψη στο μηδέν αν μια δεδομένη μέθοδος παράγει μια αρνητική πρόβλεψη. Με τη σταθεροποίηση των σχετικά ασταθών μεθόδων KitchenSink και SIC, οι μη αρνητικοί περιορισμοί αυξάνουν σημαντικά το  $R_{Os}^2$  των προβλέψεων αυτών, παρόλο που παραμένει πολύ κάτω από το μηδέν. Οι μη αρνητικοί περιορισμοί ποτέ δεν είναι δεσμευτικοί για την POOL-AVG και POOL-DMSFE προβλέψεις όπως φαίνεται και



από τα Γραφήματα 2, έτσι ώστε το  $R_{Os}^2$  να είναι ίδιο για αυτές τις προβλέψεις στους Πίνακες 2 και 4. Για το δείκτη διάχυσης και για τη sum-of-the-parts πρόβλεψη, οι μη αρνητικοί περιορισμοί οδηγούν σε μικρές αυξήσεις του  $R_{Os}^2$ . Συνολικά, οι μη αρνητικοί περιορισμοί έχουν περιορισμένο αντίκτυπο στην απόδοση των POOL-AVG, POOL-DMSFE, δείκτη διάχυσης, και sum-of-the-parts προβλέψεων, προφανώς λόγω της σταθεροποίησης της φύσης αυτών των στρατηγικών. Επίσης τα  $R_{Os}^2$  για τις POOL-AVG, POOL-DMSFE, δείκτη διάχυσης, και sum-of-the-parts προβλέψεις είναι κάτω από 1%, , καθιστώντας τα οικονομικά σχετικά.

Αλλάζοντας την εκτός δείγματος περίοδο από 1956-2011 σε 1966-2011 και 1976-2011 παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν μεγάλες αλλαγές στις προβλέψεις και ότι σε αυτές τις περιπτώσεις οι ατομικές προβλέψεις συχνά αποτυγχάνουν να ξεπεράσουν τον ιστορικό μέσο όρο με τη χρήση MSFE. Πράγματι, 10 από τα 14  $R_{Os}^2$  στο πίνακα 5 της πρώτης στήλης και 12 από τα 14  $R_{Os}^2$  της 4 στήλης είναι αρνητικά υποδεικνύοντας ότι η πρόβλεψη έχει μεγαλύτερο MSFE από τον ιστορικό μέσο όρο. Για τις τέσσερις προβλέψεις της πρώτης στήλης με θετικό  $R_{Os}^2$  (log(DP), SVAR, TMS, DFR) οι p-value τιμές είναι άνω του 0,10, άρα αυτές οι οικονομικές μεταβλητές δεν είναι στατιστικά σημαντικές εκτός δείγματος προβλέψεις. Το ίδιο συμβαίνει και για τις 2 προβλέψεις της τέταρτης στήλης με θετικό  $R_{Os}^2$  (SVAR, DFR). Στο Πίνακα 7 παρουσιάζονται για τις ίδιες περιόδους τα  $R_{Os}^2$  στατιστικά στοιχειώτους περιορισμούς των CampbellandThompson(2008). Συγκρίνοντας τη πρώτη στήλη του Πίνακα 7 με του Πίνακα 5, βλέπουμε ότι οι περιορισμοί βελτιώνουν τις προβλέψεις όσον αφορά το MSFE. Δέκα από τα δεκατέσσερα  $R_{Os}^2$  στο Πίνακα 7 είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του Πίνακα 5, και τα αρνητικά  $R_{Os}^2$  του Πίνακα 5 γίνονται θετικά στο Πίνακα 7 για τα log (DY), TBL, LTY και LTR. Τα  $R_{Os}^2$  στην τέταρτη στήλη κάποια βελτιώνονται αλλά παραμένουν αρνητικά.

Τα ίδια παρατηρούμε και στους πίνακες 6 και 8 όπου έχουν γίνει προβλέψεις για τις ίδιες εκτός δείγματος περιόδου με συνδυασμό προβλέψεων. Στο πίνακα 6 παρατηρούμε ότι το  $R_{Os}^2$  είναι ελάχιστα καλύτερα, όπως φαίνεται και στην πρώτη στήλη ενώ αντίθετα στην τέταρτη στήλη βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα είναι χειρότερα. Πάντως σε όλες τις περιόδους η καλύτερη πρόβλεψη παραμένει η sum-of-the-parts. Τέλος στο πίνακα 8 όπου είναι ο συνδυασμός προβλέψεων αλλά με τους



περιορισμούς των CampbellandThompson(2008) στη πρώτη στήλη βλέπουμε ότι έχουν ελαφρώς βελτιωθεί τα αποτελέσματα ενώ στην 4 στήλη διαπιστώνουμε ότι τα αποτελέσματα είναι χειρότερα. Άρα σαν συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν μικρύνουμε αρκετά την εκτός δείγματος περίοδο θα έχουμε και χειρότερα αποτελέσματα.

Αξίζει επίσης να κάνουμε μια μικρή αναφορά σε δύο πράγματα. Πρώτον το Πίνακα 9 ο οποίος έχει όλες μαζί τις μεταβλητές αλλά και τις συνδυασμένες προβλέψεις στη μια στήλη και στην άλλη έχει το ποσοστό που κατάφερε η κάθε μέθοδος να προβλέψει ότι τη τιμή του equitypremiumαλλά μόνο αν θα ανέβει η θα κατέβει δηλαδή την κατεύθυνση. Αν και δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι μπορεί να προβλέψει μια μέθοδος για παράδειγμα ότι θα ανέβει το equitypremium αλλά να ανέβει τόσο πολύ που μικρή σημασία θα έχει ότι απλά μάντεψε σωστά, παρατηρούμε ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχία με 57% της κατεύθυνσης το έχουν οι μεταβλητές NTIS, LTR, log(DE) ενώ το μικρότερο ποσοστό με 46% το έχει η μεταβλητή INFL. Άρα δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα, αν ο συνδυασμός ή όχι των προβλέψεων θα έχει καλύτερο ποσοστό στην πρόβλεψη της κατεύθυνσης του equitypremium. Δεύτερονόσον αφορά την παράμετρο  $b$  και τις τιμές που παίρνει όταν πολλαπλασιάζεται με έναν από τους προβλεπτές στην εξίσωση της παλινδρόμησης. Όπως βλέπουμε και από τα Γραφήματα 3 σε όλες τις περιπτώσεις, οι τιμές το  $b$  μειώνονται συνεχώς, ανεξαρτήτου προβλεπτή. Άλλες φορές με μεγαλύτερο ρυθμό όπως με τις μεταβλητές TBL και LTY και άλλες με μικρότερο ρυθμό όπως με τους SVAR και NTIS. Άλλες φορές η απόκλιση από την αρχή της περιόδου έως το τέλος είναι αρκετά μικρή όπως με το SVAR και άλλες αρκετά πιο μεγάλη όπως με τους TBL και LTR. Το τελικό συμπέρασμα όμως είναι ότι σε όλες τις περιπτώσεις, όσο περνάει ο χρόνος, η παράμετρος  $b$  επηρεάζει όλο και λιγότερο την εξίσωση της παλινδρόμησης.

#### 4.Συμπεράσματα

Τα βασικά συμπεράσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

1.) Η θεωρία μας λέει ότι το προβλέψιμο μέρος των αποδόσεων της μετοχής θα είναι μικρή και ότι τα μηνιαία  $R_{0s}^a$  κάτω από το 1% μπορεί να είναι οικονομικά

σημαντικά. Τα μοντέλα πρόβλεψης που προσπαθούν να εξηγήσουν ένα μεγάλο μέρος των διακυμάνσεων της απόδοσης της μετοχής συνεπάγονται σημαντικό προσαρμοσμένο κίνδυνο μη φυσιολογικών αποδόσεων και είναι απλά πάρα πολύ καλό για να είναι αληθινό.

2.) Όπως αποδεικνύουν οι GoyalandWelch (2008), οι συμβατικές προβλέψεις αποδόσεων της μετοχής αδυνατούν να ξεπεράσουν την απλή ιστορική μέση πρόβλεψη όσον αφορά το MSFE. Η αβεβαιότητα του μοντέλου και η αστάθεια των παραμέτρων καθιστούν τις συμβατικές προβλέψεις αναξιόπιστες.

3.) Οι στρατηγικές που βελτιώνουν σημαντικά τα συμβατικά μοντέλα πρόβλεψης και βελτιώνουν την απόδοση της πρόβλεψης από την αβεβαιότητα του μοντέλου και την αστάθεια των παραμέτρων, περιλαμβάνουν οικονομικούς περιορισμούς, συνδυασμό προβλέψεων, και δείκτες διάχυσης.

4.) Συμπεράσματα σχετικά με την εκτός δείγματος προβλεψιμότητα της απόδοσης της μετοχής συνήθως περιλαμβάνουν συγκρίσεις των ένθετων προβλέψεων. Εκτός και αν χρησιμοποιούνται στατιστικές δοκιμές σχεδιασμένες για ένθετα μοντέλα, εύκολα μπορεί να χαθούν σημαντικές ενδείξεις για την προβλεψιμότητα της απόδοσης της μετοχής.

5.) Είναι σημαντικό να συμπληρώνονται τις συμβατικά στατιστικά κριτήρια της ακρίβειας της πρόβλεψης, με άμεσο κέρδος ή με τη χρησιμότητα που βασίζονται τα κριτήρια, δεδομένου ότι οι δύο τύποι των μέτρων συνδέονται άμεσα κατ' ανάγκη. Ειδικότερα, η χρησιμότητα στην οποία βασίζονται τα μέτρα μπορεί να υποδεικνύει σαφή οικονομική σημασία, ακόμη και αν τα συμβατικά στατιστικά μέτρα αδυνατούν να αντιληφθούν τα εκτός δείγματος κέρδηωφελιμότητας.

6.) Η προβλεψιμότητα της απόδοσης της μετοχής συνδέεται στενά με μεταβολές του οικονομικού κύκλου, με σημαντικά εμφανές μεγαλύτερο βαθμό προβλεψιμότητας κατά τη διάρκεια της ύφεσης έναντι της ανάπτυξης.

Στις πρώτες δοκιμές για συνδυασμό προβλέψεων το σύνολο των προβλέψεων ήταν συχνά δεδομένο, αλλά πρόσφατες δοκιμές που έκαναν οι StockandWatson (2001, 2004) και Marcellino (2004) επιτρέπουν σε όποιον κάνει συνδυασμό να ελέγχει τόσο τον αριθμό των μοντέλων πρόβλεψης, καθώς και τα είδη των προβλέψεων που συνδυάζονται. Αυτό ανοίγει ένα εντελώς νέο κεφάλαιο για τον συνδυασμό

προβλέψεων. Είναι καλύτερο να συνδυάζεις προβλέψεις από γραμμικά μοντέλα με διαφορετικούς παλινδρομητές ή είναι καλύτερο να συνδυάζεις τις προβλέψεις που παράγονται από διαφορετικές οικογένειες μοντέλων, π.χ. γραμμικών και μη γραμμικών, ή ίσως το ίδιο μοντέλο χρησιμοποιώντας εκτιμητές με ποικίλους βαθμούς ευρωστίας. Η απάντηση σε αυτό εξαρτάται φυσικά κατά πόσο μπορεί το συνδυασμένο μοντέλο να αντισταθμιστεί στην ατέλεια ή στην αστάθεια. Δυστυχώς, αυτό είναι συνήθως άγνωστο άρα δεν μπορούμε να δώσουμε εύκολα απαντήσεις.

Οι μέθοδοι συνδυασμού έχουν κερδίσει με τα χρόνια ακόμη περισσότερο έδαφος κυρίως λόγω της δύναμης των εμπειρικών στοιχείων που δείχνουν ότι αυτές οι μέθοδοι έχουν συστηματικά καλύτερες επιδόσεις από τα απλά ατομικά μοντέλα. Τα σταθερά, ίσα βάρη είναι μέχρι στιγμής η κινητήριος δύναμη του συνδυασμού και έχουν δημιουργήσει ένα σημείο αναφοράς το οποίο έχει αποδειχθεί εκπληκτικά δύσκολο να νικηθεί. Αυτό αποτελεί έκπληξη δεδομένου ότι σε θεωρητικό επίπεδο κανείς δεν θα περίμενε οποιοσδήποτε συνδυασμό να κατέχει δεσπόζουσα θέση, δεδομένου ότι οι διάφορες μέθοδοι περιλαμβάνουν περιορισμούς σχετικά με τη συνδιακύμανση που έχει σχεδιαστεί για να ανταλλάξει τη προκατάληψη με το μειωμένο σφάλμα εκτίμησης. Το σίγουρο είναι ότι οι προβλέψεις εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος, τον αριθμό των εμπλεκόμενων μοντέλων πρόβλεψης, το λόγο της διακύμανσης των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεμονωμένων μοντέλων, καθώς και τους συσχετισμούς και το βαθμό της αστάθειας των δεδομένων.

Στην έρευνα για τον συνδυασμό προβλέψεων, ο Clemen (1989), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο συνδυασμός είναι πρακτικός, οικονομικός και χρήσιμος και εμείς μπορούμε να προσθέσουμε ότι αποδίδει σίγουρα και καλύτερα αποτελέσματα.

## Βιβλιογραφία

- Aiolfi M. and Timmermann A. (2004). "Persistence of forecasting performance and combination strategies", forthcoming in *Journal of Econometrics*.
- Ashley R., Granger C.W.J. and Schmalensee R. (1980). "Advertising and aggregate consumption: an analysis of causality", *Econometrica* 48, p. 1149–1167.
- Bai J. (2003). "Inferential theory for factor models of large dimensions", *Econometrica* 71, p. 135–171.
- Bai J. and Ng S. (2002). "Determining the number of factors in approximate factor models", *Econometrica* 70, p. 191–221.
- Bai J. and Ng, S. (2008). "Forecasting economic time series using targeted predictors", *Journal of Econometrics* 146, p. 304–317.
- Bai J. and Perron P. (2003). "Computation and analysis of multiple structural change models", *Journal of Applied Econometrics* 18, p. 1–22.
- Baker M. and Wurgler J. (2000). "The equity share in new issues and aggregate stock returns", *Journal of Finance*, p. 55(5), p. 2219–57.
- Bates J.M. and Granger C.W.J. (1969). "The combination of forecasts", *Operational Research Quarterly* 20, p. 451–468.
- Bossaerts P. and Hillion P. (1999). "Implementing statistical criteria to select return forecasting models: what do we learn?", *Review of Financial Studies* 12, p. 405–428.
- Boudoukh J., Michaely R., Richardson M. P. and Roberts M. R. (2007). "On the importance of measuring payout yield: implications for empirical asset pricing", *Journal of Finance*, p. 62(2), p. 877–915.
- Breen W., Glosten L.R. and Jagannathan, R. (1989). "Economic significance of predictable variation in stock index returns", *Journal of Finance* 44, p. 1177–1189.
- Bunn D.W. (1985). "Statistical efficiency in the linear combination of forecasts", *International Journal of Forecasting* 1, p. 151–163.
- Campbell J.Y. and Thompson S.B. (2008). "Predicting excess stock returns out of sample: can anything beat the historical average?", *Review of Financial Studies* 21, p. 1509–1531.
- Cenesizoglu T. and Timmermann A. (2011). "Do return prediction models add economic value?" Manuscript, HEC Montreal and University of California at San Diego.

- Chao J., Corradi V. and Swanson N.(2001).“An out of sample test for Granger causality”, *Macroeconomic Dynamics*, forthcoming.
- Chong Y.Y. and Hendry D.F.(1986).“Econometric evaluation of linear macroeconomic models”, *Review of Economic Studies* 53, p. 671–690.
- Christoffersen P. and Diebold F.X. (1997), “Optimal prediction under asymmetrical loss”, *Econometric Theory* 13, p. 806-817.
- Clark T.E.(1999).“Finite-sample properties of tests for equal forecast accuracy”, *Journal of Forecasting* 18, p. 489–504.
- Clark T.E. and McCracken M.W. (2001).“Test of equal forecast accuracy and encompassing for nested models”, *Journal of Econometrics* 105, p. 85–110.
- Clark T.E. and McCracken M.W. (2009). “Improving forecast accuracy by combining recursive and rolling forecasts”, *International Economic Review* 50, p. 363–395.
- Clark T.E. and West K.D. (2007).“Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models”, *Journal of Econometrics* 138, p. 291–311.
- Clemen R.T. (1987).“Combining overlapping information”, *Management Science* 33, p. 373-380.
- Clemen R.T. (1989).“Combining forecasts: A review and annotated bibliography”, *International Journal of Forecasting* 5, p. 559-581.
- Clements M.P. and Hendry D.F. (2006). “Forecasting with breaks.” In: Elliott, G., Granger C.W.J., Timmermann A. (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, vol. 1. Elsevier, Amsterdam.
- Clemen R.T. and Winkler R.L. (1986).“Combining economic forecasts”, *Journal of Business and Economic Statistics* 4, p. 39-46.
- Cochrane J. H.(1991). “Production-based asset pricing and the link between stock returns and economic fluctuations”, *Journal of Finance*, 46(1), p. 209–237.
- Cooper I. and Priestly R. (2009). “Time-varying risk premiums and the output gap.” *Review of Financial Studies* 22, p. 2801–2833.
- Corradi V., Swanson N.R. and Olivetti C.(2001).“Predictive ability with cointegrated variables”, *Journal of Econometrics*, forthcoming.
- Cremers K.J.M. (2002). “Stock return predictability: a Bayesian model selection perspective.” *Review of Financial Studies* 15, p. 1223–1249.
- Cumby R.E. and Modest D.M. (1987).“Testing for market timing ability: a framework for forecast evaluation”, *Journal of Financial Economics* 19, p. 169–189.
- Dangl T. and Halling M. (2012). “Predictive regressions with time-varying coefficients.” *Journal of Financial Economics*, forthcoming.
- Diebold F.X. (1989). “Forecast combination and encompassing: Reconciling two divergent literatures”, *International Journal of Forecasting* 5, p. 589-592.
- Diebold F. X. and Lopez J. A. (1996). “Forecast evaluation and combination”, in Maddala and Rao, eds., *Handbook of Statistics* (Elsevier, Amsterdam).
- Diebold F.X. and Mariano R.S. (1995). “Comparing predictive accuracy.” *Journal of Business and Economic Statistics* 13, p. 253–263.

- Diebold F.X. and Pauly P. (1987). "Structural change and the combination of forecasts", *Journal of Forecasting* 6, p. 21-40.
- Diebold F.X. and Pauly P. (1990). "The use of prior information in forecast combination", *International Journal of Forecasting* 6, p. 503-508.
- Elliott G. and Timmermann A. (2004). "Optimal forecast combinations under general loss functions and forecast error distributions", *Journal of Econometrics* 122, p. 47-79.
- Ericsson N.R. (1992). "Parameter constancy, mean square forecast errors, and measuring forecast performance: an exposition, extensions and illustration", *Journal of Policy Modeling* 14, p. 465-495.
- Ferreira M.I. and Santa-Clara P. (2011). "Forecasting stock market returns: the sum of the parts is more than the whole." *Journal of Financial Economics* 100, p. 514-537.
- Figlewski S. and Urich T. (1983). "Optimal aggregation of money supply forecasts: Accuracy, profitability and market efficiency", *Journal of Finance* 28, p. 695-210.
- Goyal A. and Welch I. (2003). "Predicting the equity premium with dividend ratios." *Management Science* 49, p. 639-654.
- Granger C.W.J. and Machina M. (2004). "Forecasting and Decision Theory", in this handbook.
- Granger C.W.J. and Newbold P. (1977). "Forecasting Economic Time Series", Academic Press, Orlando, FL.
- Granger C.W.J. and Ramanathan R. (1984). "Improved methods of combining forecasts", *Journal of Forecasting* 3, p. 197-204.
- Guidolin M. and Timmermann A. (2007). "Asset allocation under multivariate regime switching." *Journal of Economic Dynamics and Control* 31, p. 3503-3544.
- Harvey D.I., Leybourne S.J. and Newbold P. (1997). "Testing the equality of prediction mean squared errors." *International Journal of Forecasting* 13, p. 281-291.
- Harvey D.I., Leybourne S.J. and Newbold P. (1998). "Tests for forecast encompassing." *Journal of Business and Economic Statistics* 16, p. 254-259.
- Hendry D.F. and Clements M.P. (2004). "Pooling of forecasts." *Econometrics Journal* 7, p. 1-31.
- Henriksson R.D. and Merton R.C. (1981). "On market timing and investment performance, II: statistical procedures for evaluating forecasting skills." *Journal of Business* 54, p. 513-533.
- Hong H., Torous W. and Valkanov R. (2007). "Do industries lead stock markets?" *Journal of Financial Economics* 83, p. 367-396.
- Kandel S. and Stambaugh R.F. (1996). "On the predictability of stock returns: an asset allocation perspective." *Journal of Finance* 51, p. 385-424.
- Kang H. (1986). "Unstable weights in the combination of forecasts", *Management Science* 32:683-695.
- Kelly B. and Pruitt S. (2011). "The three-pass regression filter: a new approach to forecasting using many predictors." University of Chicago Booth School of Business Working Paper No. 11-19.
- Kelly B. and Pruitt S. (2012). "Market expectations in the cross section of present values." University of Chicago Booth School of Business Working Paper No. 11-08.
- Kleinbaum, Kupper, Muller and Ziman (1998). "Applied Regression Analysis and Multivariable Methods" 3<sup>rd</sup> Edition.

- Kong A., Rapach D.E., Strauss J.K. and Zhou G. (2011). "Predicting market components out of sample: asset allocation implications." *Journal of Portfolio Management* 37, p. 29–41.
- Leitch G. and Tanner J.E. (1991). "Economic forecast evaluation: profit versus the conventional error measures." *American Economic Review* 81, p. 580–590.
- Ludvigson S.C. and Ng S. (2007). "The empirical risk-return relation: a factor analysis approach." *Journal of Financial Economics* 83, p. 171–222.
- Makridakis S. (1989). "Why combining works?", *International Journal of Forecasting* 5:601-603.
- Makridakis S. and Hibon M. (2000). "The M3-competition: results, conclusions and implications", *International Journal of Forecasting* 16, p. 451-476.
- Marcellino M. (2004). "Forecast pooling for short time series of macroeconomic variables", *Oxford Bulletin of Economic and Statistics* 66, p. 91-112.
- Marquering W. and Verbeek M. (2004). "The economic value of predicting stock index returns and volatility." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 39, p. 407–429.
- McCracken M.W.(1999). "Asymptotics for out-of-sample tests of causality." Manuscript, Louisiana State University.
- McCracken M.W.(2000). "Robust out of sample inference.", *Journal of Econometrics* 99, p. 195–223.
- McCracken M.W. (2007). "Asymptotics for out of sample tests of Granger causality." *Journal of Econometrics* 140, p. 719–752.
- Meese R.A. and Rogoff K.(1983). "Empirical exchange rate models of the seventies: do they fit out of sample?", *Journal of International Economics* 14, p. 3–24.
- Meese R.A. and Rogoff K.(1988). "Was it real? The exchange rate-interest differential relation over the modern floating-rate period." *Journal of Finance* 43, p. 933–948.
- Min C.K. and A. Zellner (1993). "Bayesian and non-Bayesian methods for combining models and forecasts with applications to forecasting international growth rates", *Journal of Econometrics* 56, p. 89-118.
- Neely C.J., Rapach, D.E., Tu J. and Zhou G. (2012). "Forecasting the equity risk premium: the role of technical indicators." Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper 2010-008E.
- Newbold P. and Granger C.W.J. (1974). "Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts", *Journal of Royal Statistical Society A* 137, p. 131- 146.
- Onatski A. (2010). "Determining the number of factors from empirical distributions of eigenvalues." *Review of Economics and Statistics* 92, p. 1004–1016.
- Palm F. C. and Zellner A. (1992). "To combine or not to combine? Issues of combining forecasts", *Journal of Forecasting* 11, p. 687-701.
- Pesaran M.H. and Timmermann A. (1992). "A simple nonparametric test of predictive performance." *Journal of Business and Economic Statistics* 10, p. 461–465.
- Pesaran M.H. and Timmermann A. (1995). "Predictability of stock returns: robustness and economic significance." *Journal of Finance* 50, p. 1201–1228.
- Pesaran M.H. and Timmermann, A. (2002). "Market timing and return prediction under model instability." *Journal of Empirical Finance* 9, p. 495–510.

- Pesaran M.H. and Timmermann A. (2004). "How costly is it to ignore breaks when forecasting the direction of a time series?" *International Journal of Forecasting* 20, p. 411–425.
- Pesaran M.H. and Timmermann A. (2005). "Selection of estimation window in the presence of breaks", mimeo Cambridge University and Department of Economics, University of California, San Diego.
- Pesaran M.H. and Timmermann A. (2007). "Selection of estimation window in the presence of breaks." *Journal of Econometrics* 137, p. 134–161.
- Pettenuzzo D. and Timmermann A. (2011). "Predictability of stock returns and asset allocation under structural breaks." *Journal of Econometrics* 164, p. 60–78.
- Rapach D.E., Strauss J.K. and Zhou G. (2010). "Out-of-sample equity premium prediction: combination forecasts and links to the real economy." *Review of Financial Studies* 23, p. 821–862.
- Rapach D.E., Strauss J.K. and Zhou G. (2012). "Forecasting stock returns: Forthcoming in the handbook of economic forecasting, volume 2", p. 1-68.
- Sessions D.N. and Chatterjee S. (1989). "The combining of forecasts using recursive techniques with nonstationary weights", *Journal of Forecasting* 8, p. 239-251.
- Stock J.H. and Watson M. (2001). "A comparison of linear and nonlinear univariate models for forecasting macroeconomic time series", in R.F. Engle and H. White, eds., *Festschrift in Honour of Clive Granger* (Cambridge University Press, Cambridge), p. 1-44.
- Stock J.H. and Watson M.W. (2004). "Combination forecasts of output growth in a seven-country data set." *Journal of Forecasting* 23, p. 405–430.
- Stock J.H. and Watson M.W. (2006). "Forecasting with many predictors." In: Elliott G., Granger C.W.J., Timmermann, A. (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, vol. 1. Elsevier, Amsterdam.
- Timmermann A. (2006). "Forecast combinations." In: Elliott G., Granger C.W.J., Timmermann, A. (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, vol. 1. Elsevier, Amsterdam.
- Timmermann A. (2008). "Elusive return predictability." *International Journal of Forecasting* 24, p. 1–18.
- Welch I. and Goyal A. (2008). "A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction", p. 1456-1508.
- West K.D. (1996). "Asymptotic inference about predictive ability." *Econometrica* 64, p. 1067–1084.
- West K.D. (2001). "Tests for forecast encompassing when forecasts depend on estimated regression parameters." *Journal of Business and Economic Statistics* 19, p. 29–33.
- West K.D. (2001). "Encompassing tests when no model is encompassing." *Journal of Econometrics* 105.
- West K.D. and McCracken M.W. (1998). "Regression-based tests of predictive ability", *International Economic Review* 39, p. 817–840.
- Winkler R.L. (1989). "Combining forecasts: A philosophical basis and some current issues", *International Journal of Forecasting* 5, p. 605-609.
- Yang Y. (2004). "Combining forecasts procedures: Some theoretical results", *Econometric Theory* 20, p. 176-190.
- Zellner A. (1986). "Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions", *Journal of the American Statistical Association* 81, p. 446-451.



Πίνακες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

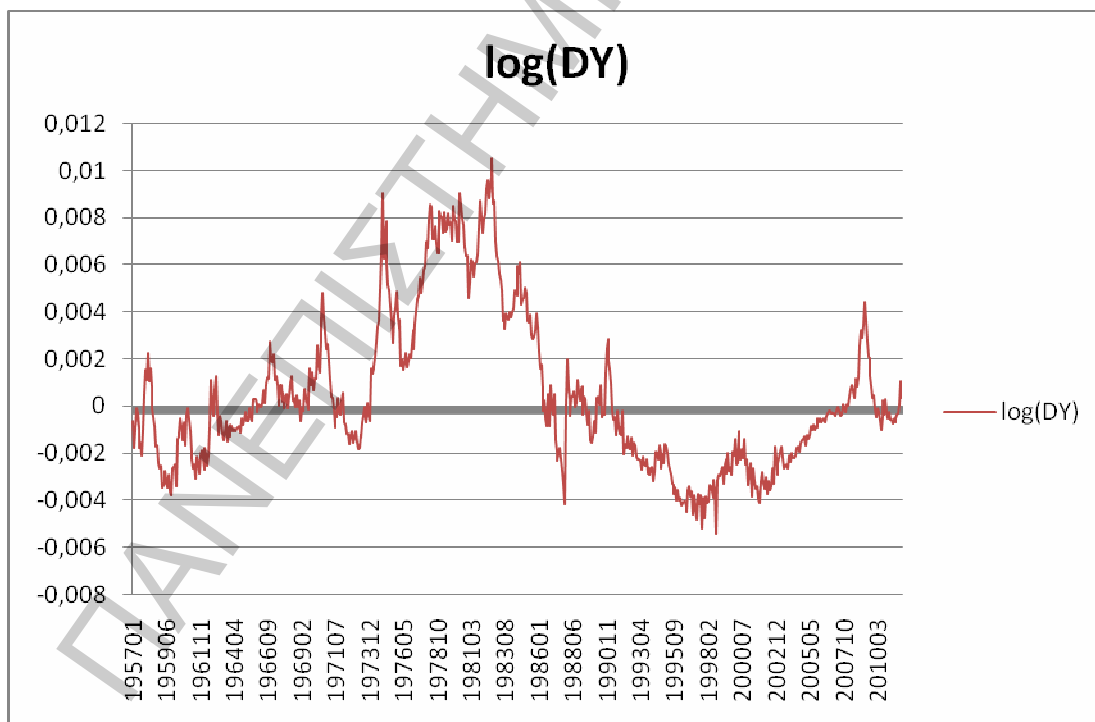
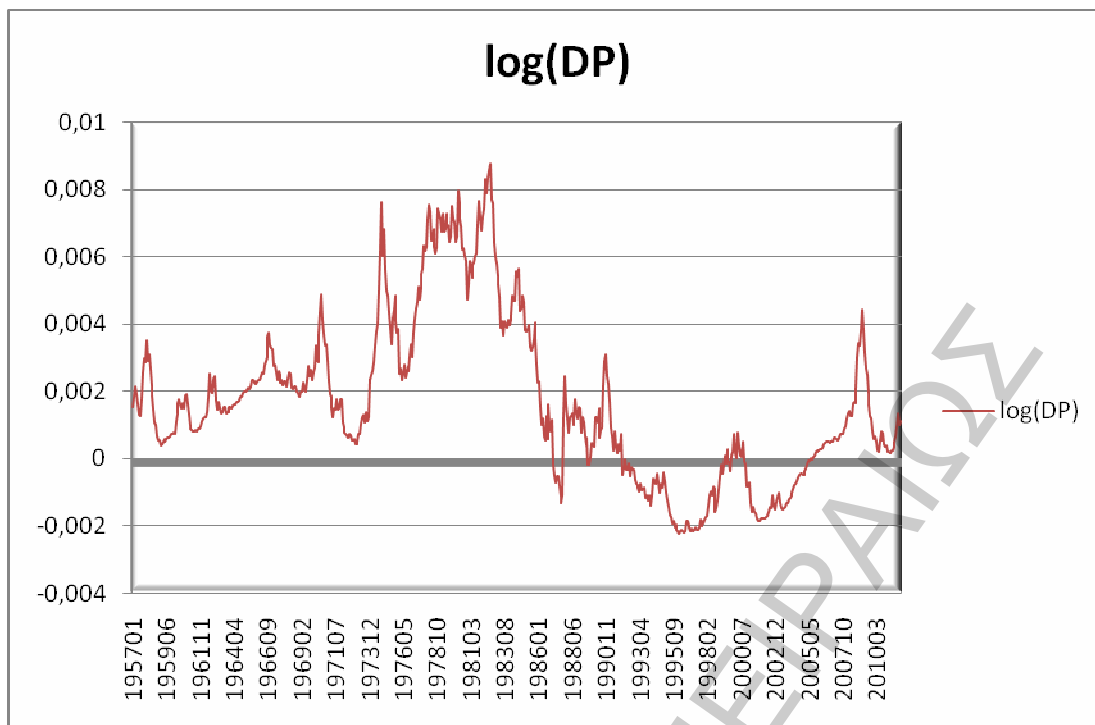
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

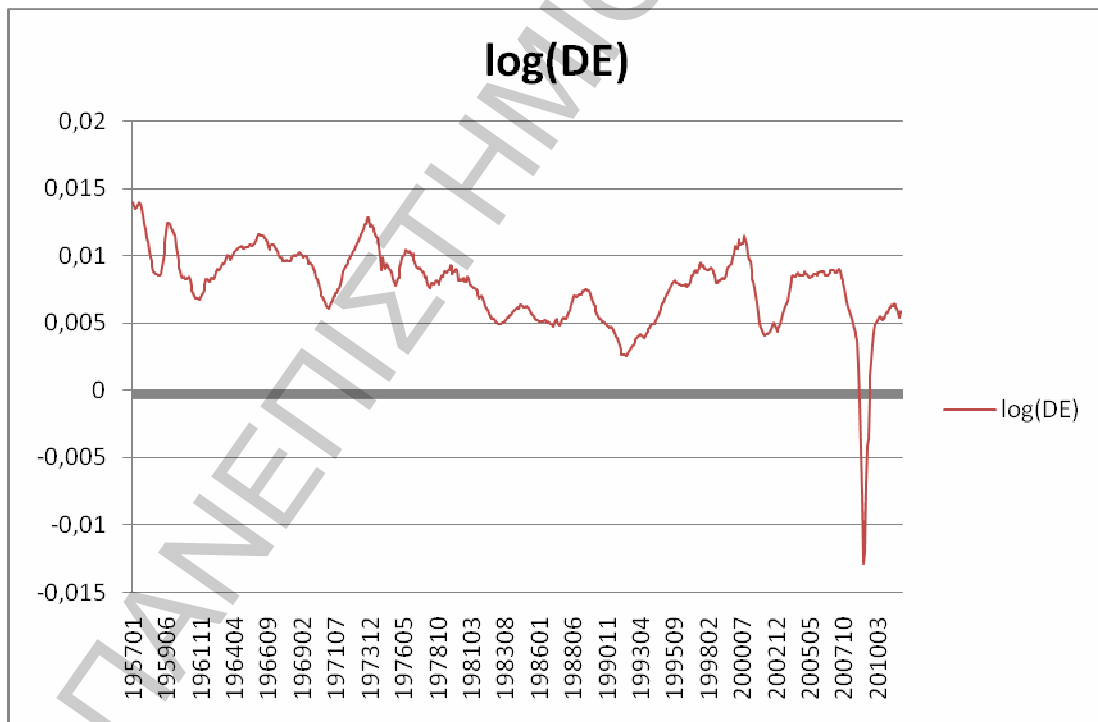
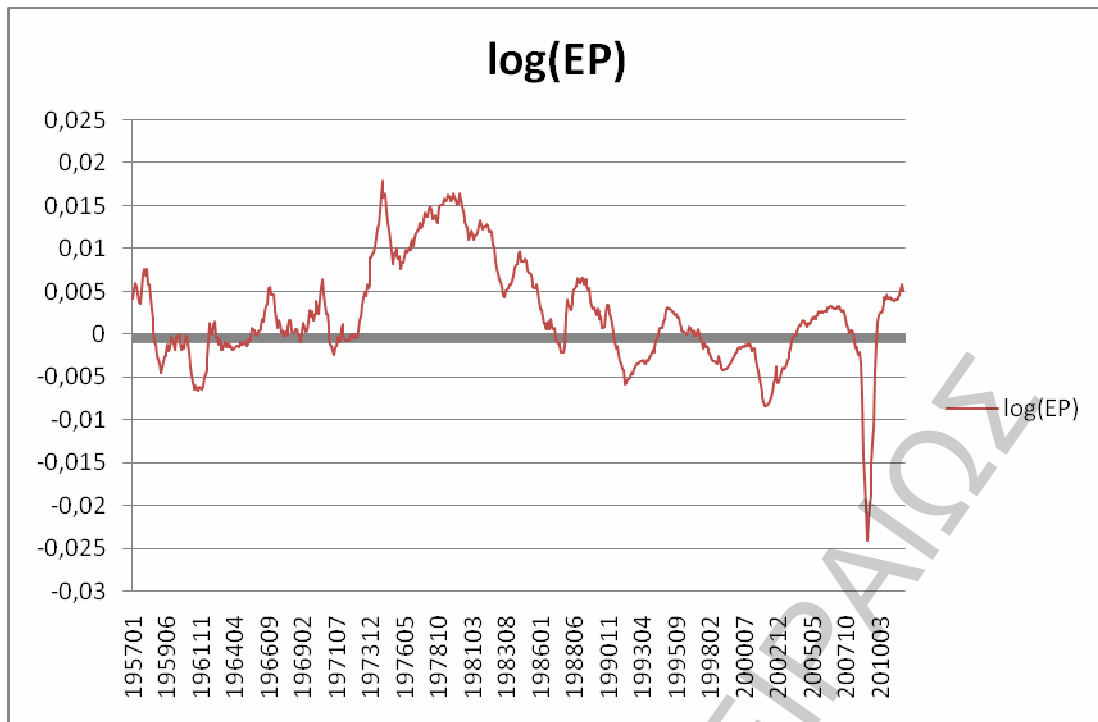
Πίνακας 9

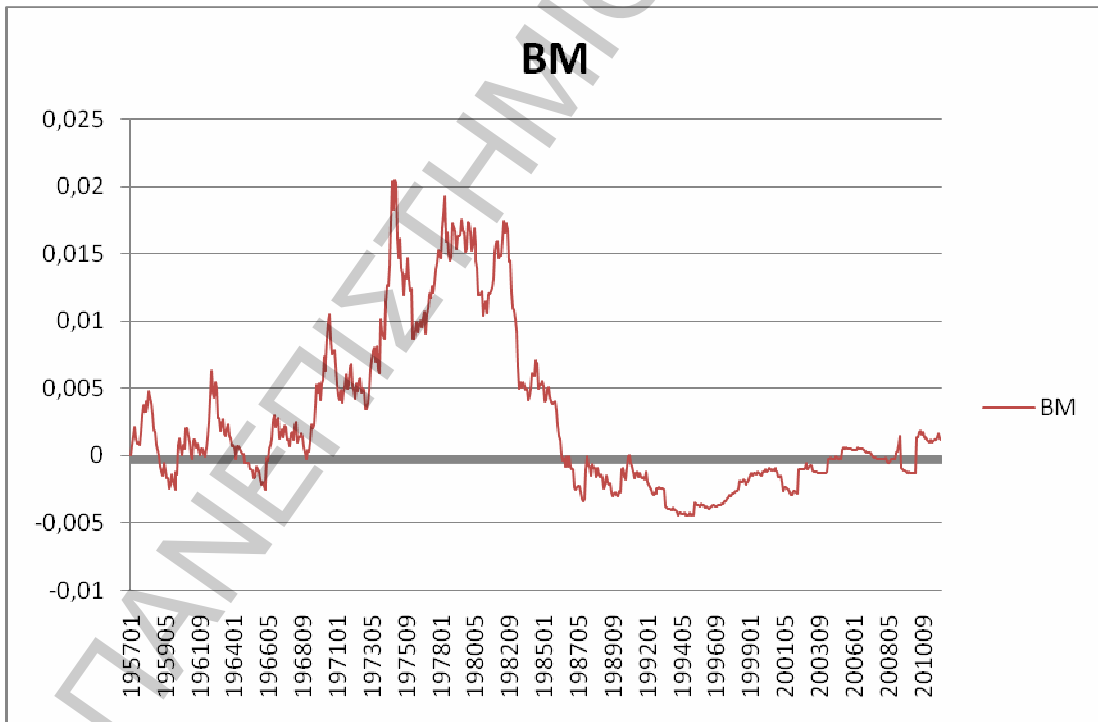
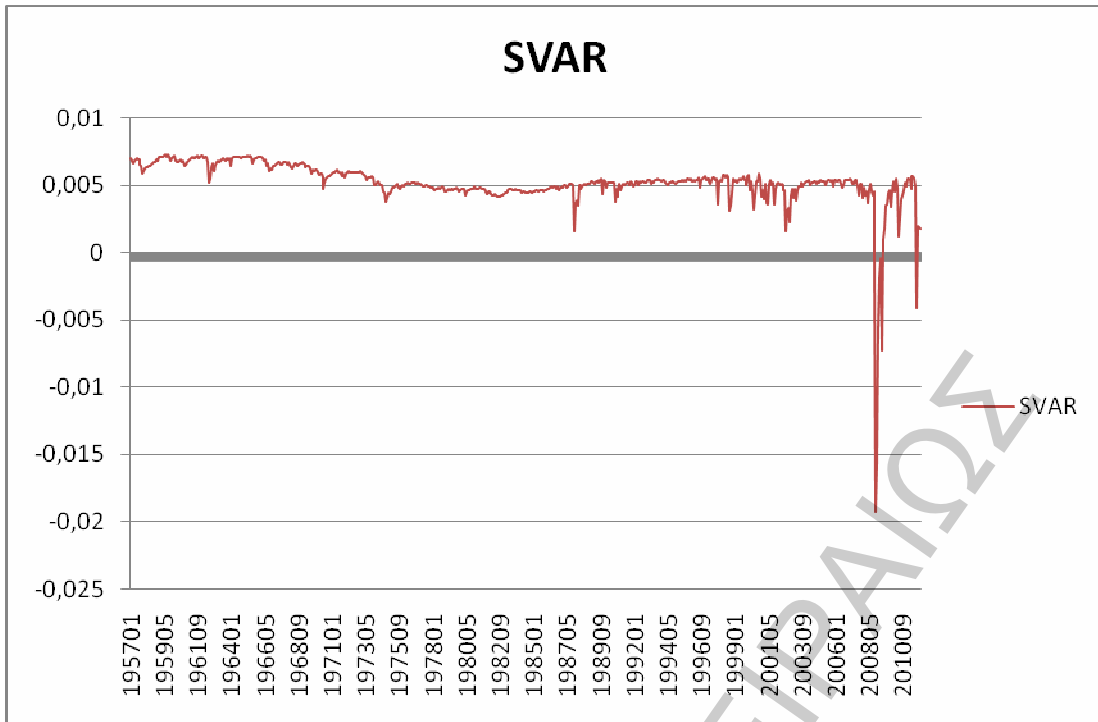
ΜΕΘΟΔΟΣ	ΠΟΣΟΣΤΟ
INFL	0,462121212
SVAR	0,471212121
log(DY)	0,496969697
KitchenSink	0,506060606
log(DP)	0,507575758
SIC	0,524242424
TBL	0,560606061
LTY	0,560606061
log(EP)	0,568181818
BM	0,56969697
Diffusionindex	0,56969697
DFR	0,571212121
Sum-of-the-parts	0,571212121
TMS	0,575757576
DFY	0,575757576
POOL-AVG	0,575757576
POOL-DMSFE	0,575757576
NTIS	0,577272727
LTR	0,577272727
log(DE)	0,578787879

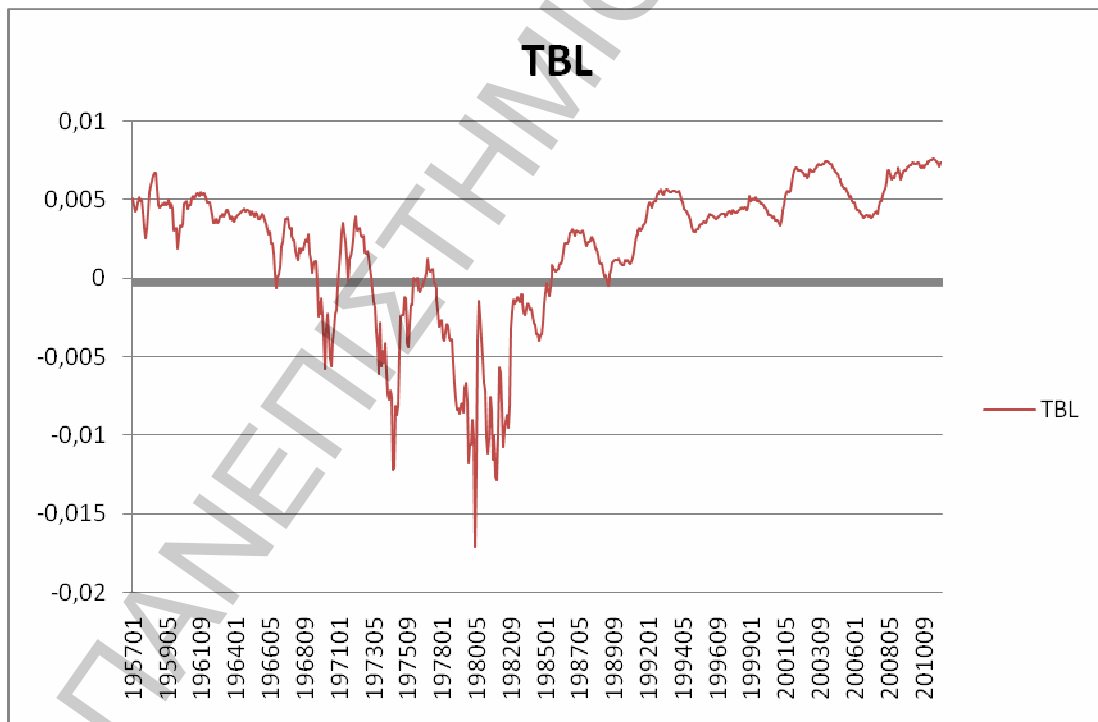
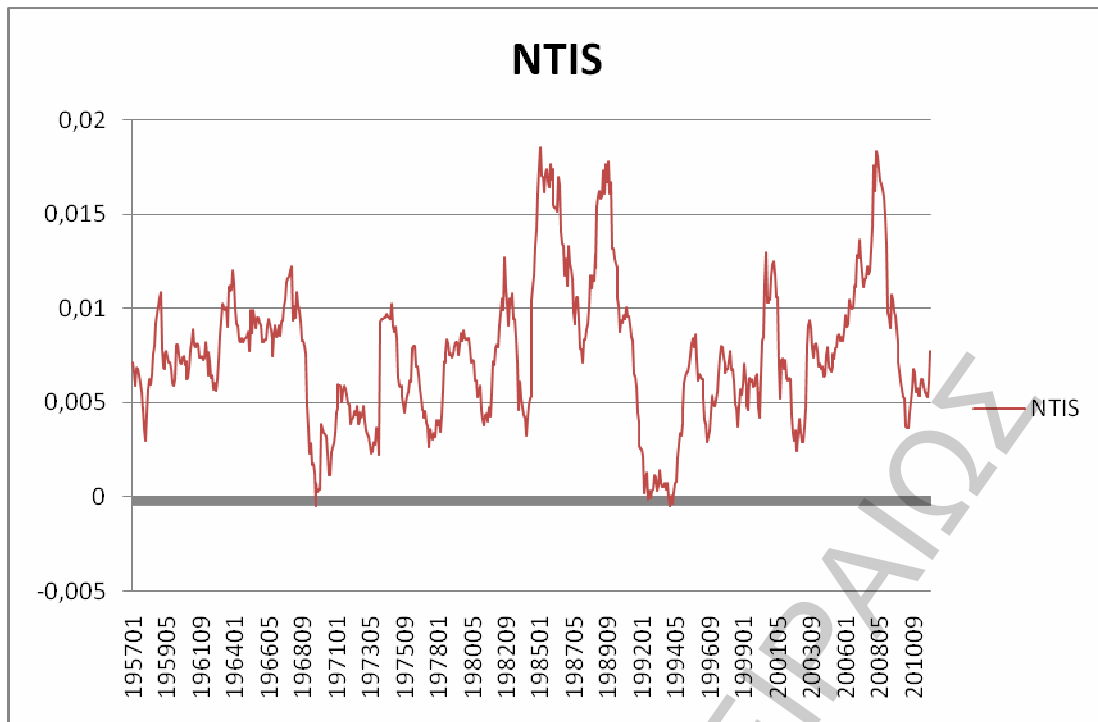
# Γραφήματα 1

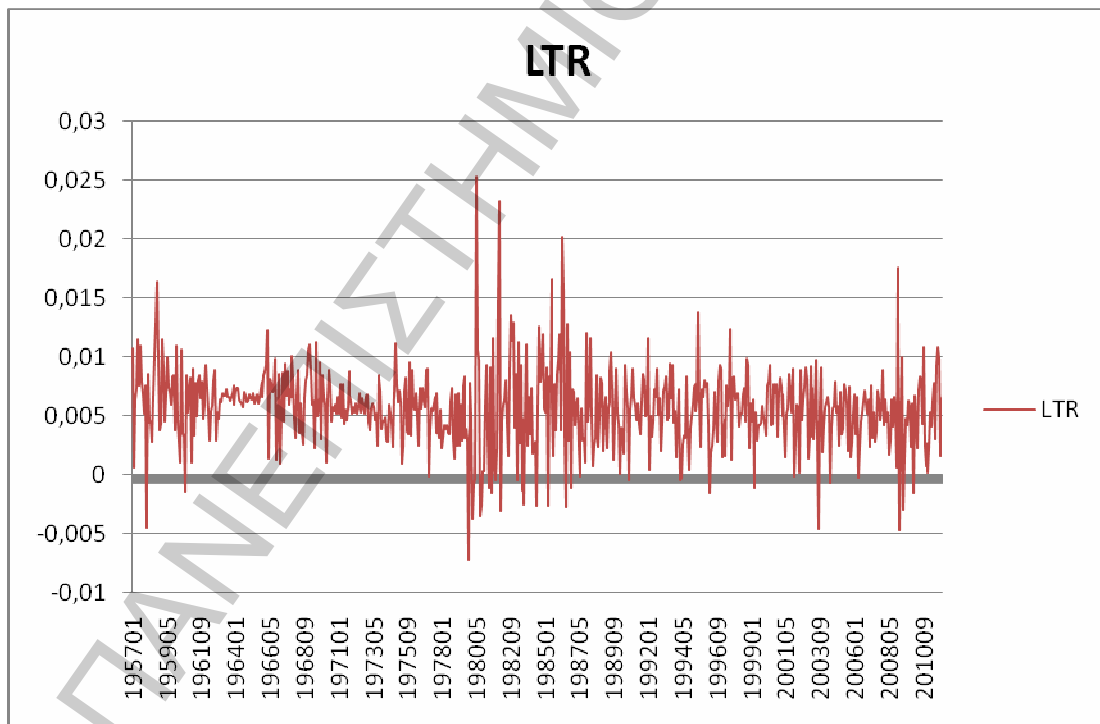
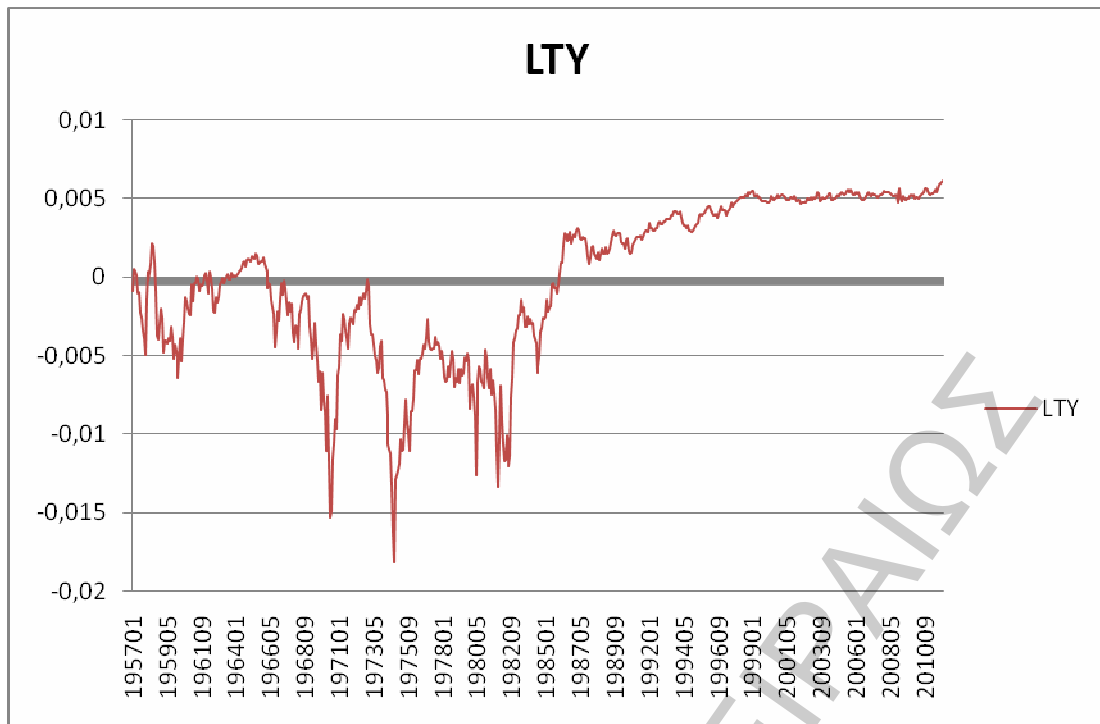


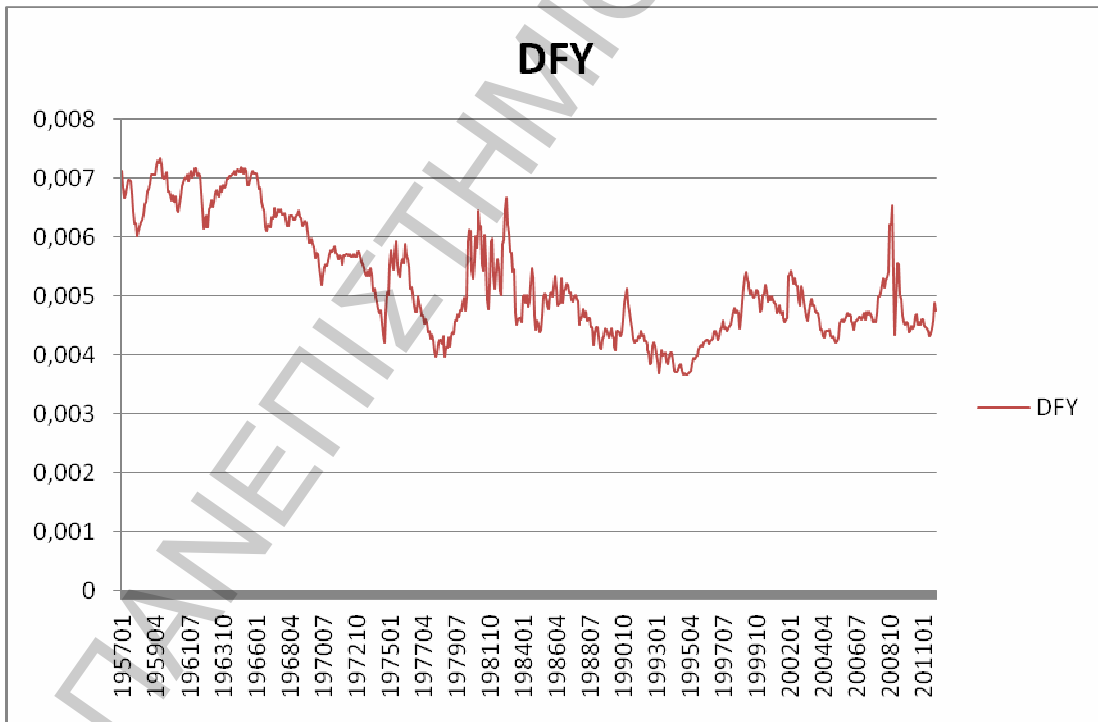
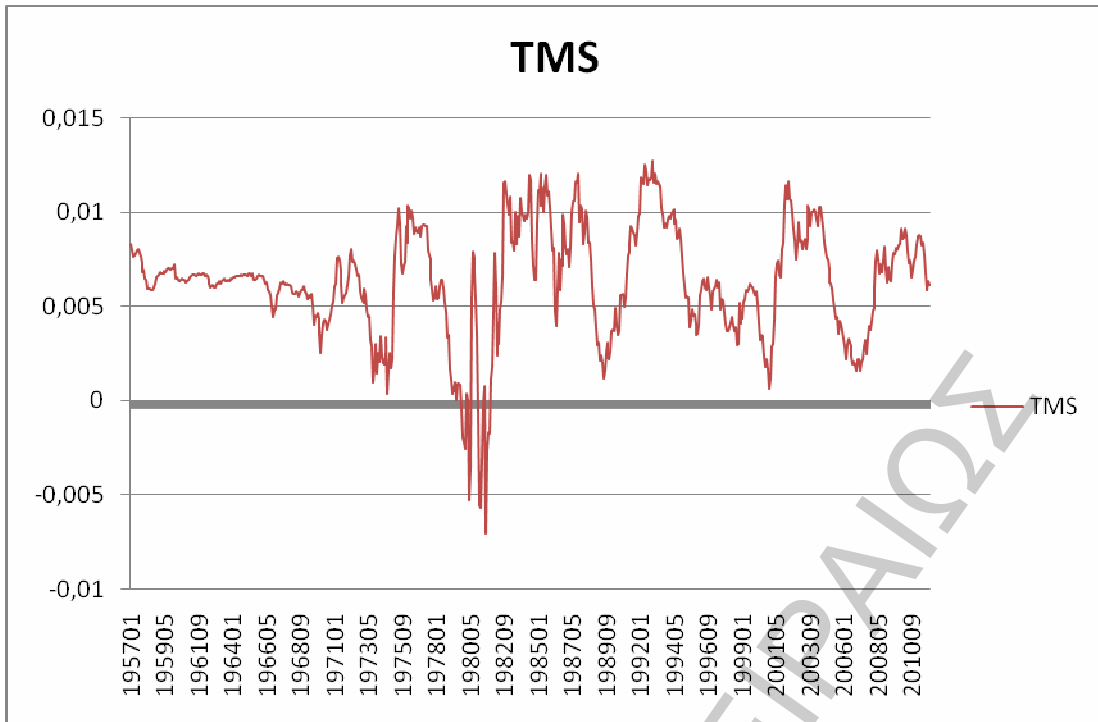


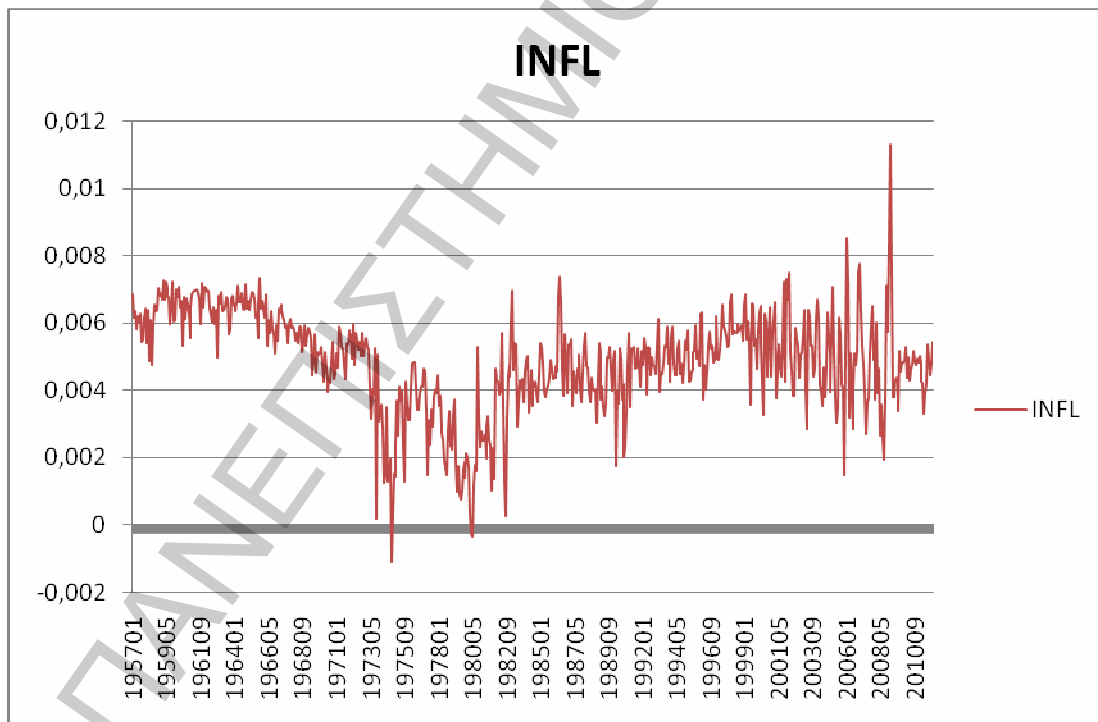
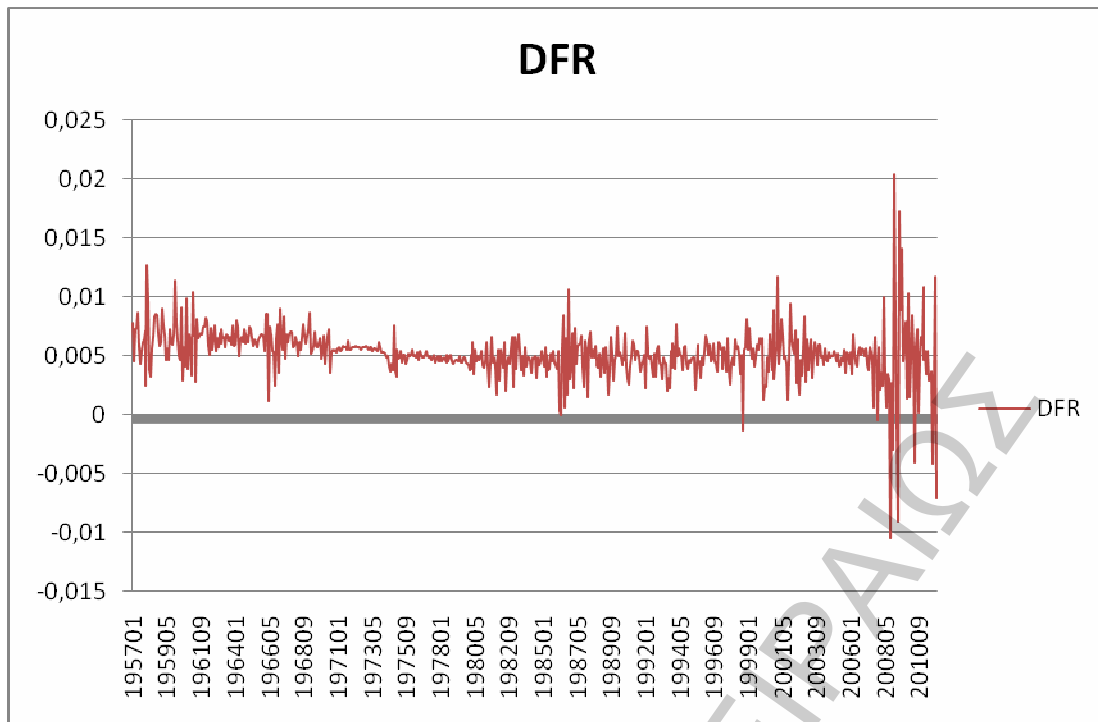




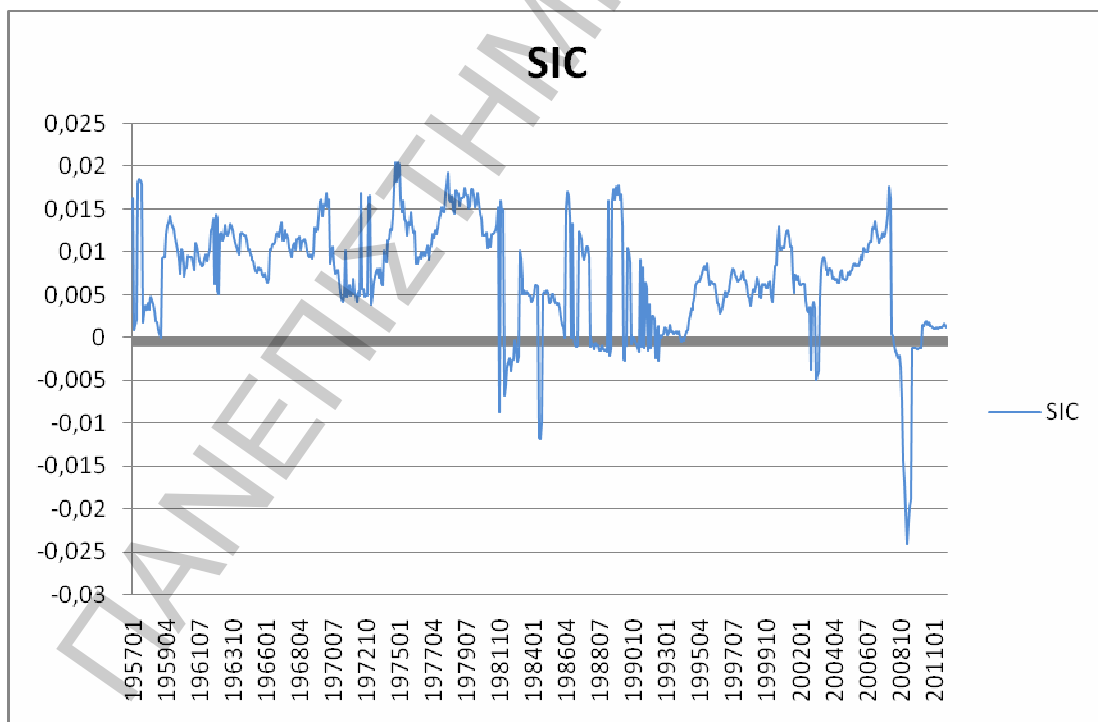
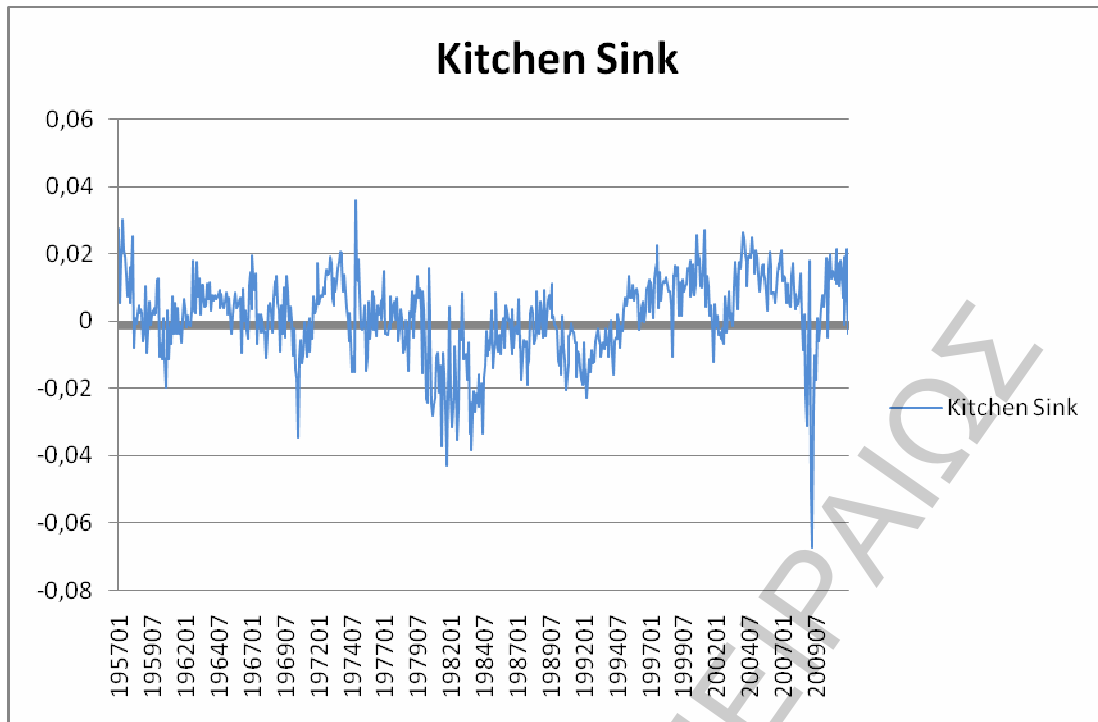


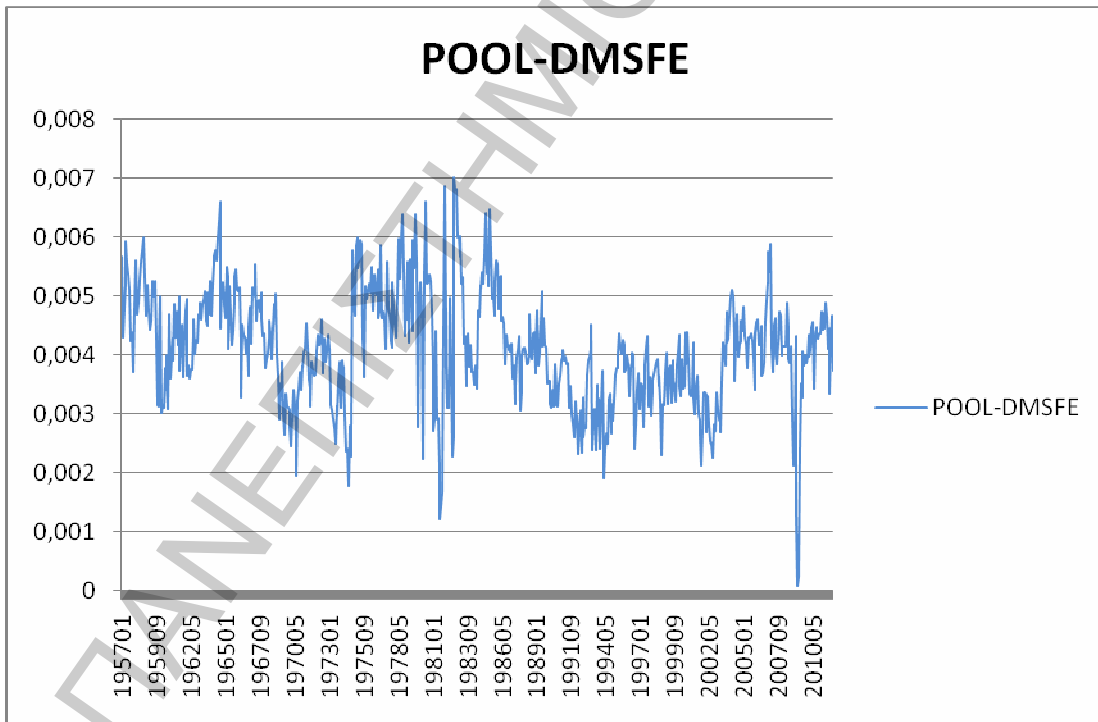
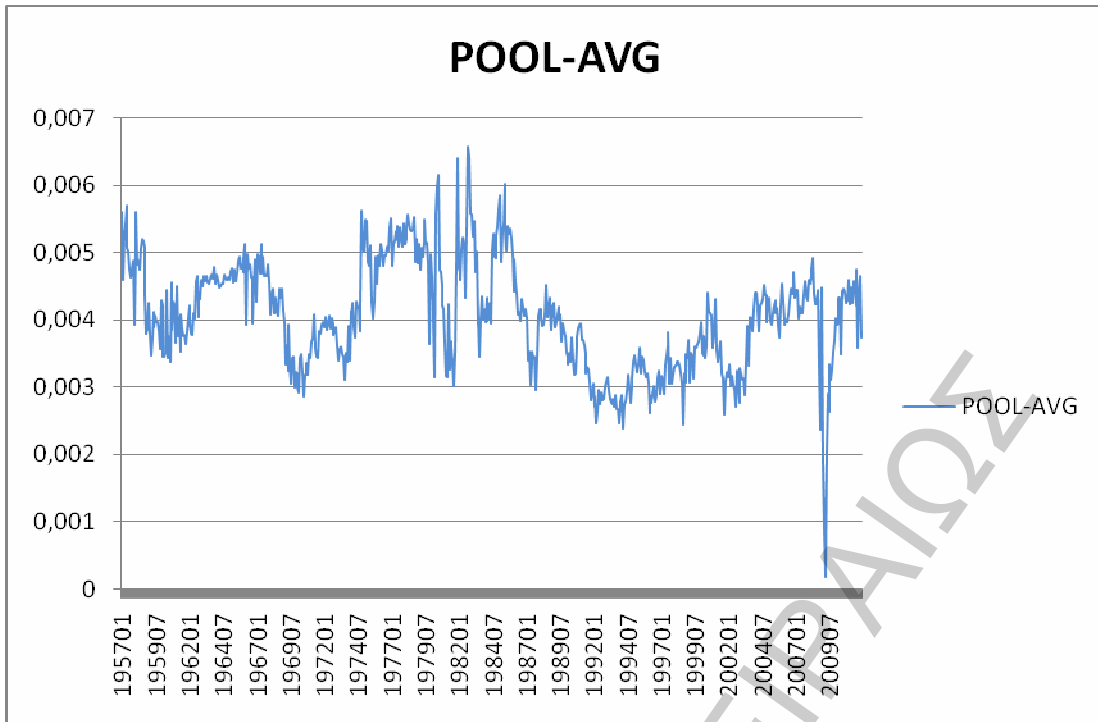




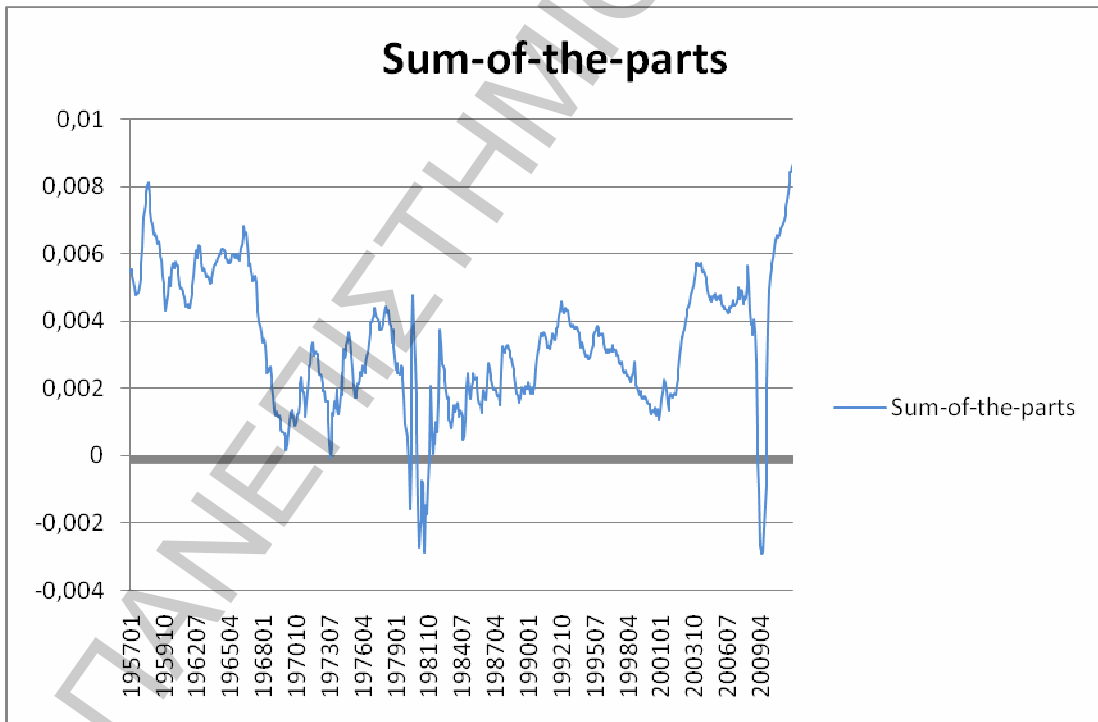
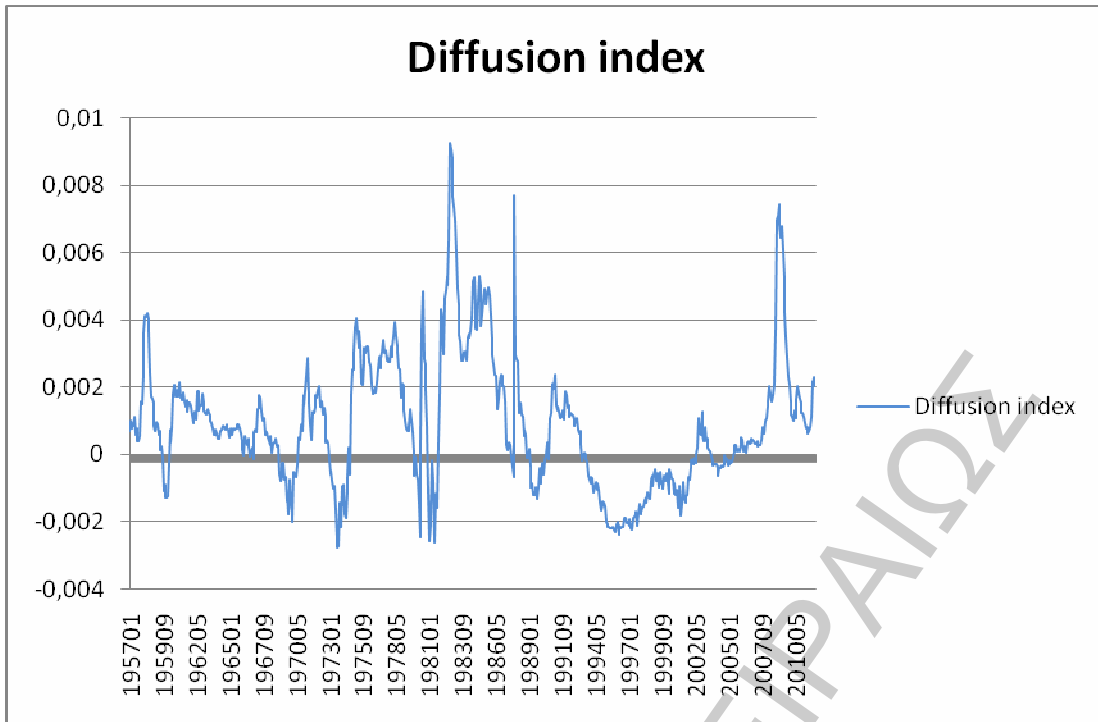


## Γραφήματα 2

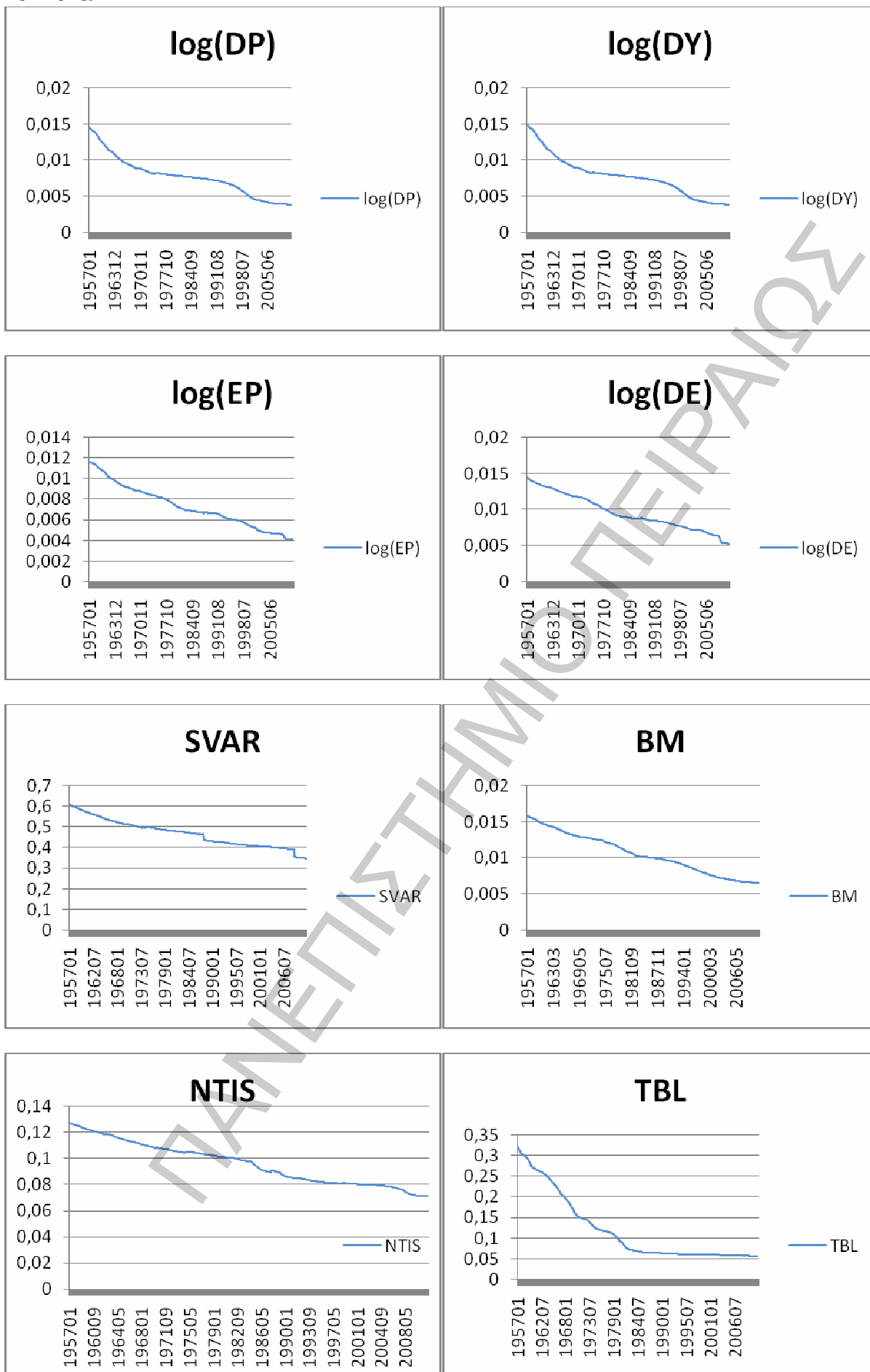


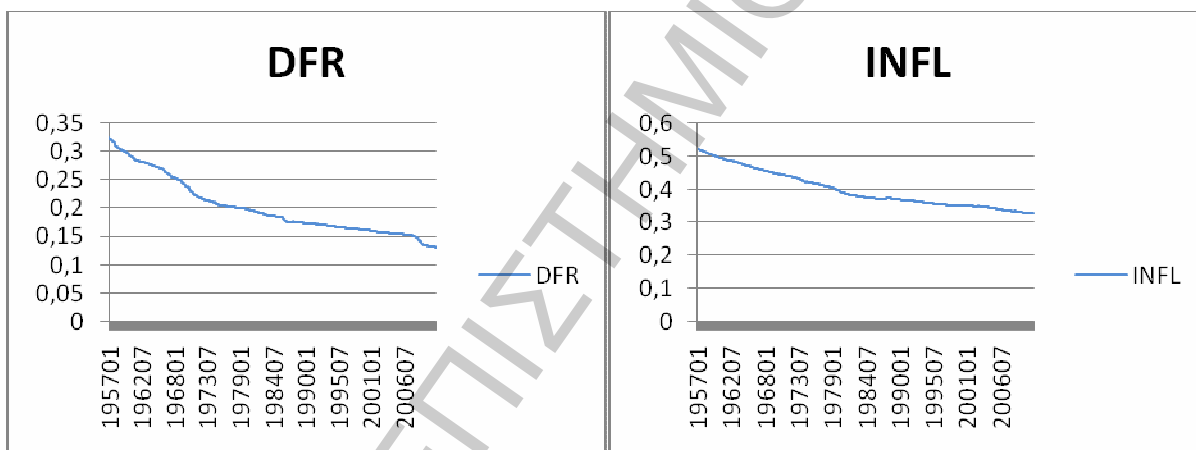
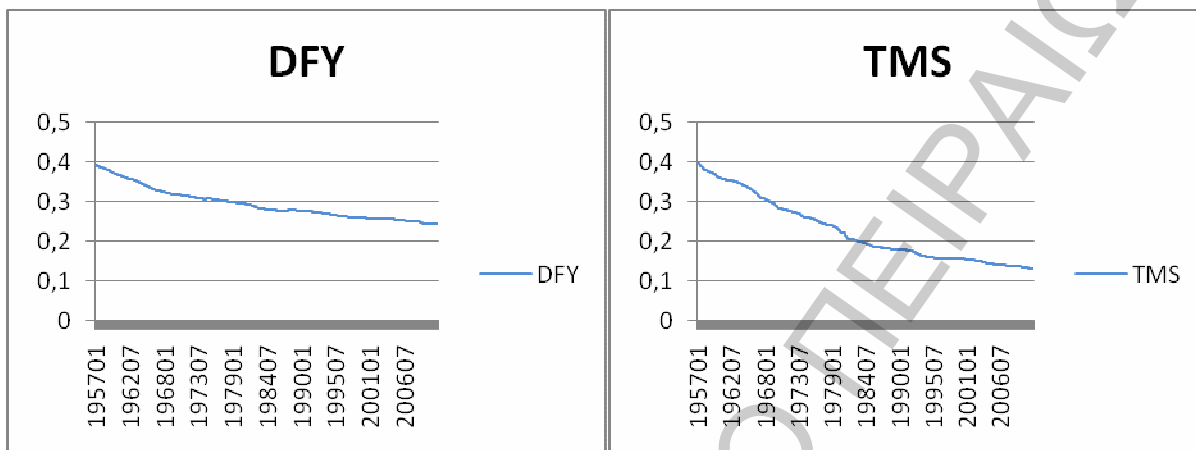
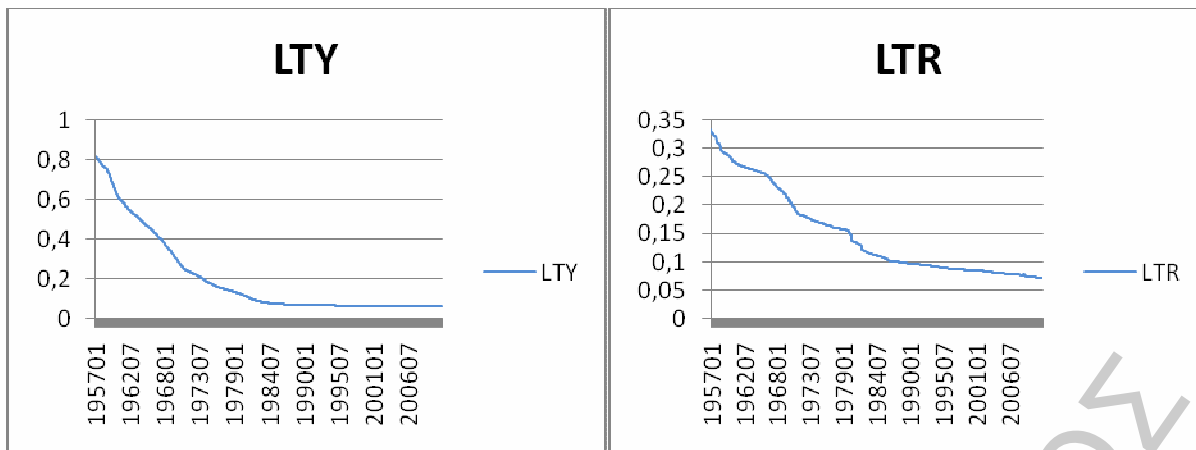






### Γραφήματα 3





Πίνακας 1

Unrestricted Predictive Regression Forecast									
Econ. Variab.	Overall (1956-2011)			Expansion(1956-2011)			Recession(1956-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
log(DP)	-0,03152	0,090029	0,86509169	-1,18258	0,407762	-1,422727	2,414093	0,003586	11,869139
log(DY)	-0,35297	0,064006	1,16594704	-2,1927	0,390094	-1,921791	3,555849	0,000998	16,168013
log(EP)	-1,83336	0,281019	0,57016117	-2,13221	0,302883	-0,391473	-1,19841	0,379107	4,9927079
log(DE)	-2,02052	0,975007	-0,4365979	-1,24612	0,808203	0,053443	-3,66588	0,966698	-2,732087
SVAR	0,369272	0,140947	-0,0862451	0,066273	0,336438	-0,327731	1,013045	0,15967	1,0824825
BM	-1,68881	0,301338	-0,6980223	-2,4656	0,429494	-1,95303	-0,03838	0,279205	5,1216984
NTIS	-0,90848	0,417119	-0,2129656	0,463649	0,035509	0,691062	-3,82381	0,936929	-4,70962
TBL	-0,03862	0,093507	1,48326727	-0,86106	0,311993	0,213669	1,708781	0,101222	7,5770865
LTY	-1,15202	0,120095	1,26381091	-2,31577	0,384439	-0,210707	1,320585	0,105731	8,3828757
LTR	-0,15569	0,236681	0,45387475	-0,94558	0,675979	-0,472456	1,522568	0,046696	4,73683
TMS	0,01742	0,169803	1,10898151	-0,44639	0,361413	-0,018546	1,002859	0,094776	6,4900668
DFY	-0,03304	0,564185	0,31058037	-0,04624	0,604555	0,028128	-0,005	0,484477	1,4823781
DFR	0,055964	0,326444	0,4399511	0,213702	0,176478	0,220547	-0,27918	0,483541	1,5325971
INFL	-0,09276	0,501247	0,33072905	0,087674	0,225278	0,172729	-0,47613	0,661318	1,1649219

Πίνακας 2

Unrestricted Predictive Regression Forecast									
Method	Overall (1956-2011)			Expansion(1956-2011)			Recession(1956-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
Kitchensink	-8,38239	0,421419	0,22129117	-9,32373	0,681138	-1,577252	-6,38237	0,279403	8,9353614
SIC	-5,48697	0,989764	-1,7256957	-5,61881	0,996937	-3,14756	-5,20684	0,787896	4,9989532
POOL-AVG	0,442038	0,023673	1,22868802	0,131649	0,197532	0,407053	1,101511	0,010908	5,139106
POOL $\theta=0.60$	0,517881	0,019515	1,55332263	0,074904	0,258132	0,38981	1,459061	0,007412	7,142213
POOL $\theta=0.75$	0,505655	0,019802	1,49661796	0,090366	0,242516	0,401045	1,388007	0,008571	6,7601091
POOL $\theta=0.90$	0,474039	0,022066	1,40459627	0,103414	0,225174	0,390075	1,261494	0,011059	6,2748453
Diffus. index	0,682209	0,010958	1,63658576	-0,94832	0,263079	-1,407167	4,146536	0,000281	16,422603
Sum-of-parts	0,882894	0,009482	2,3817313	0,243126	0,142825	0,2174	2,242189	0,006642	12,872884

Πίνακας 3

Predictive Regression Forecast Cam.-Thom.									
Econ. Variab.	Overall (1956-2011)			Expansion(1956-2011)			Recession(1956-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
log(DP)	0,163039	0,063389	0,865092	-0,8689	0,361149	-1,4227269	2,355576	0,002645	11,869139
log(DY)	0,177497	0,040858	1,165947	-1,27403	0,383646	-1,9217911	3,261508	0,000672	16,168013
log(EP)	-0,79038	0,239815	0,570161	-1,13557	0,295328	-0,3914733	-0,05696	0,322731	4,9927079
log(DE)	-1,72524	0,977352	0,005852	-1,18076	0,785194	0,0076967	-2,88208	0,984941	-0,002393
SVAR	0		-0,25664	0		-0,3494447	0		0,1801628
BM	-1,13433	0,284799	-0,69802	-1,60576	0,390519	-1,9530304	-0,13269	0,300647	5,1216984
NTIS	-0,90444	0,415962	-0,21297	0,46959	0,035094	0,69106227	-3,82381	0,936929	-4,709619
TBL	0,181062	0,106894	1,483267	-0,2795	0,290205	0,2136692	1,159604	0,09973	7,5770865
LTY	-0,01463	0,092235	1,263811	-0,66037	0,288564	-0,2107066	1,357352	0,066125	8,3828757
LTR	0,131755	0,153495	0,513886	-0,58002	0,57777	-0,4864783	1,644037	0,027248	5,1471528
TMS	0,072014	0,160533	1,108982	-0,4721	0,394796	-0,018546	1,228076	0,056528	6,4900668
DFY	-0,00732	0,466766	0,31058	-0,01775	0,503958	0,02812822	0,014838	0,449175	1,4823781
DFR	-0,12703	0,448312	0,605686	0,133866	0,228665	0,21626009	-0,68135	0,66359	2,5145664
INFL	-0,06276	0,46349	0,330729	0,087674	0,225278	0,17272867	-0,38239	0,627331	1,1649219

Πίνακας 4

Predictive Regression Forecast Cam.-Thom.									
Method	Overall (1956-2011)			Expansion(1956-2011)			Recession(1956-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
Kitchensink	-2,63774	0,591493	0,221291	-3,46186	0,641967	-1,5772523	-0,88676	0,448819	8,9353614
SIC	-4,3741	0,991201	-1,7257	-4,58262	0,99101	-3,1475598	-3,93105	0,845855	4,9989532
POOL-AVG	0,442038	0,023673	1,228688	0,131649	0,197532	0,40705292	1,101511	0,010908	5,139106
POOL $\theta=0.60$	0,517881	0,019515	1,553323	0,074904	0,258132	0,38980972	1,459061	0,007412	7,142213
POOL $\theta=0.75$	0,505655	0,019802	1,496618	0,090366	0,242516	0,40104473	1,388007	0,008571	6,7601091
POOL $\theta=0.90$	0,475974	0,02162	1,404596	0,103414	0,225174	0,3900749			
Diffus. index	0,706157	0,010518	1,636586	-0,64184	0,228256	-1,4071671	3,57021	0,000433	16,422603
Sum-of-parts	0,948875	0,005763	2,381731	0,26593	0,137158	0,21739977	2,399905	0,002459	12,872884

Πίνακας 5

Unrestricted Predictive Regression Forecast						
Econ. Variab.	Overall (1966-2011)			Overall (1976-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
log(DP)	0,035731	0,114598	1,112699	-0,54387	0,305235	-0,14154
log(DY)	-0,15324	0,093906	1,592232	-0,94241	0,282873	0,152275
log(EP)	-1,57541	0,307503	0,942247	-2,0358	0,377668	1,227372
log(DE)	-1,71694	0,941598	-0,70509	-1,02727	0,757122	-0,21113
SVAR	0,420659	0,138667	-0,05128	0,5701	0,130574	-0,05267
BM	-1,98507	0,425492	-1,12951	-2,54326	0,510766	-0,92332
NTIS	-1,10936	0,4708	-0,62049	-1,39185	0,497976	-0,62096
TBL	-0,18728	0,12269	1,317508	-0,90534	0,318445	-0,37689
LTY	-1,02292	0,16178	1,293688	-1,02515	0,35644	-0,12773
LTR	-0,06557	0,218239	0,550179	-0,06336	0,221341	0,342081
TMS	0,077614	0,149894	1,194937	-0,36911	0,325377	-0,16495
DFY	-0,0094	0,470906	0,2512	-0,08422	0,671372	-0,51488
DFR	0,087286	0,327651	0,50487	0,311865	0,256281	0,92389
INFL	-0,10777	0,508037	0,339337	-0,39262	0,800717	-0,64908

Πίνακας 6

Unrestricted Predictive Regression Forecast						
Method	Overall (1966-2011)			Overall (1976-2011)		
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)
Kitchensink	-8,23948	0,377594	0,790844	-8,75318	0,330943	0,189251
SIC	-5,28623	0,975613	-2,38555	-5,74294	0,977406	-2,53707
POOL-AVG	0,438874	0,033567	1,275219	0,213324	0,181078	0,378638
POOL $\theta=0.60$	0,498417	0,032719	1,556376	0,199691	0,205014	0,50571
POOL $\theta=0.75$	0,482541	0,032512	1,501292	0,196243	0,202977	0,458878
POOL $\theta=0.90$	0,471553	0,031373	1,467009	0,215485	0,183656	0,477561
Diffus. index	0,684601	0,022514	1,766711	-0,17039	0,184986	-0,1425

Sum-of-parts	0,821453	0,019757	2,540403	0,331603	0,149036	1,045274
--------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Πίνακας 7

Predictive Regression Forecast Cam.-Thom.							
Econ. Variab.	Overall (1966-2011)			Overall (1976-2011)			
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	
log(DP)	0,254171	0,08057	1,112699	-0,2606	0,263906	-0,14154	
log(DY)	0,365932	0,052621	1,592232	-0,2504	0,238474	0,152275	
log(EP)	-0,62485	0,25914	0,942247	-0,78682	0,325397	1,227372	
log(DE)	-1,38542	0,939416	0,007221	-0,59736	0,666736	0,009163	
SVAR	0		-0,2595	0		-0,32078	
BM	-1,33688	0,39365	-1,12951	-1,70058	0,48216	-0,92332	
NTIS	-1,10482	0,469629	-0,62049	-1,39037	0,49795	-0,62096	
TBL	0,054293	0,17209	1,317508	-0,44323	0,514066	-0,37689	
LTY	0,128252	0,126245	1,293688	-0,22992	0,413472	-0,12773	
LTR	0,147924	0,153452	0,626199	-0,03167	0,228099	0,342081	
TMS	0,071516	0,164166	1,194937	-0,37702	0,355428	-0,16495	
DFY	-0,00822	0,466766	0,2512	-0,08422	0,671372	-0,51488	
DFR	-0,11816	0,452111	0,70728	0,022563	0,341491	0,941555	
INFL	-0,07408	0,470283	0,339337	-0,38748	0,797443	-0,64908	

Πίνακας 8

Predictive Regression Forecast Cam.-Thom.							
Method	Overall (1966-2011)			Overall (1976-2011)			
	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	$R_{OS}^2$ (%)	p-value	$\Delta$ (ann %)	
Kitchensink	-2,31683	0,536749	0,790844	-2,00803	0,435459	0,189251	
SIC	-4,03708	0,974641	-2,38555	-4,12303	0,985001	-2,53707	
POOL-AVG	0,438874	0,033567	1,275219	0,213324	0,181078	0,378638	
POOL $\theta=0.60$	0,498417	0,032719	1,556376	0,199691	0,205014	0,50571	
POOL $\theta=0.75$	0,482541	0,032512	1,501292	0,196243	0,202977	0,458878	

<b>POOL <math>\theta=0.90</math></b>	0,473727	0,030713	1,467009	0,218303	0,181035	0,477561
<b>Diffus. index</b>	0,718047	0,021754	1,766711	0,053419	0,158347	-0,1425
<b>Sum-of-parts</b>	0,89553	0,01298	2,540403	0,427145	0,116935	1,045274

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ