ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μ.Π.Σ. ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

«ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΔΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΟΥΣ»

ΣΟΥΦΛΕΡΟΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ: ΜΧΑΝ1135

Επιβλέπων

Νικόλαος Εγγλέζος

Μέλη Επιτροπής

Χριστίνα Χρίστου

Μιχαήλ Ανθρωπέλος

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Καθημερινά επενδύονται σημαντικά χρηματικά ποσά τόσο σε περιουσιακά στοιχεία όσο και σε επιχειρηματικές δραστηριότητες των οποίων οι χρηματοροές, αν και δεν αποτελούν παράγωγα κάποιου διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου, εξαρτώνται από κάποια μεταβλητή η οποία συσχετίζεται με διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία. Μία χαρακτηριστική περίπτωση τέτοιων τίτλων αποτελούν τα πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης. Τα δύο ευρέως διαδεδομένα μοντέλα τιμολόγησης παραγώγων, δηλαδή αυτά των Cox - Ross - Rubinstein και των Black - Scholes, αδυνατούν να δώσουν λύση στην περίπτωση που καλούμαστε να τιμολογήσουμε μεταβλητές οι οποίες δεν διαπραγματεύονται σε κάποια οργανωμένη αγορά.

Η διπλωματική αυτή εργασία αναλύει μία επέκταση της μεθοδολογίας αποτίμησης παραγώγων εντός του διωνυμικού πλαισίου, βάσει της οποίας μπορούμε να τιμολογήσουμε τόσο τα μη διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία όσο και τα παράγωγά τους. Κρίσιμα σημεία της συγκεκριμένης μεθοδολογίας αποτελούν η χρησιμοποίηση του διωνυμικού πλαισίου και η προβολή των μη διαπραγματεύσιμων στοιχείων στο χώρο των διαπραγματεύσιμων. Επίσης, γίνεται αναφορά και σε ένα μοντέλο, το οποίο αποτελεί επέκταση αυτού των Black - Scholes, βάσει του οποίου μπορούμε να τιμολογήσουμε τόσο το μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο όσο και κάποιο παράγωγο αυτού σε συνεχή χρόνο. Τέλος, γίνεται διερεύνηση των αποκλίσεων των τιμών στις οποίες καταλήγουμε χρησιμοποιώντας το καθένα από τα προαναφερθέντα μοντέλα.

Λέξεις κλειδιά

Μη διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία, πραγματικά δικαιώματα, τιμολόγηση μέσω προβολής, arbitrage, αντιστάθμιση κινδύνου, μεθοδολογία των Cox - Ross - Rubinstein, μεθοδολογία των Black - Scholes.

Ειδική ευχαριστία θα ήθελα να δώσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Λέκτορα Ν. Εγγλέζο, για την καθοδήγησή και τα εποικοδομητικά σχόλιά του, καθώς και στη βοήθεια αλλά και υπομονή, τόσο της οικογένειάς μου όσο και των φιλικών προσώπων μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ABSTRACT

Daily substantial amounts are invested both in assets and in business operations whose cash flows, although they are not derivatives of some tradable asset, depend on a variable that is correlated with tradable assets. A typical case of such securities is the real options. The two widely used derivatives pricing models, namely those of Cox - Ross - Rubinstein and the Black - Scholes, cannot be used in the case where we want to price variables that are not traded in a regulated market.

This master's thesis analyzes an extension of the derivative valuation methodology within a binomial framework, under which we can price both the non-tradable assets and their derivatives. The critical points of this methodology are the use of the binomial framework and the projection of non-tradable assets to the space of tradables. Furthermore, we present a model, which is an extension of the Black - Scholes methodology, under which we can price both the non-tradable assets and their derivatives in continuous time. Finally, we explore the differences in the price, which are obtained using each of the above models.

Keywords

Non-tradable assets, real options, projection pricing, arbitrage, hedging, Cox-Ross-Rubinstein methodology, Black-Scholes methodology

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό ότι η πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδος τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων, αυτή των Black - Scholes (1973), βασίζεται στην υπόθεση ότι μπορούμε να αντιγράψουμε δυναμικά την αξία του παραγώγου χρησιμοποιώντας το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο του παραγώγου προϊόντος καθώς και το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου. Σε αντίθεση όμως με την τιμολόγηση κάποιου παραγώγου με υποκείμενο τίτλο κάποιο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο, η τιμολόγηση μεταβλητών ή παραγώγων τους όταν δεν υπάρχει κάποιο στενά συνδεδεμένο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα, καθώς γίνεται αδύνατη η αντιγραφή της αξίας του παραγώγου μέσω της μεθοδολογίας που αναφέραμε ήδη.

Ως ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης βασισμένο στα κέρδη της επόμενης περιόδου κάποιας εταιρίας. Τα κέρδη αν και μπορούν να θεωρηθούν μία υποκείμενη μεταβλητή δεν αποτελούν διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο και έτσι η φόρμουλα των Black - Scholes δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αντίστοιχο πρόβλημα προκύπτει και στην τιμολόγηση των πραγματικών δικαιωμάτων προαίρεσης που είναι συνδεδεμένα με πολυάριθμες επιχειρηματικές λειτουργίες. Για παράδειγμα, μπορούμε να σκεφτούμε μία επιχείρηση που σχεδιάζει την κυκλοφορία ενός νέου προϊόντος, η οποία υπόκειται στο ερευνητικό έργο που θα επιτευχθεί τα επόμενα χρόνια και θα επηρεάσει την τελική επιτυχία της κυκλοφορίας του προϊόντος.

Ας αναφερθούμε όμως στα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου τιμολόγησης των δυναμικών διωνυμικών μεταβλητών και των παραγώγων τους. Η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε από τον D. Luenberger (2011) βασίζεται στις δύο πιο αποδεκτές μεθόδους τιμολόγησης, δηλαδή αυτής της θεωρίας του Capital Asset Pricing Model (CAPM) και αυτή της δικτυωτής εκδοχής της μεθοδολογίας των Black - Scholes, χρησιμοποιώντας παράλληλα στοιχεία προερχόμενα από τις ιδιότητες του διωνυμικού πλέγματος. Σύμφωνα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

με αυτήν τη μέθοδο το μελλοντικό έσοδο του περιουσιακού στοιχείου που θέλουμε να τιμολογήσουμε προβάλλεται στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων σε κάθε κόμβο του πλέγματος ώστε να καταλήξουμε στην τιμολόγησή του.

Στην περίπτωση των χρηματοοικονομικών παραγώγων, τα μόνα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία που πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν είναι ο υποκείμενος τίτλος και το περιουσιακό στοιχειό μηδενικού κινδύνου. Αντίθετα, στην προσπάθεια τιμολόγησης των μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων και των παραγώγων τους δείχνουμε ότι θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τα χαρακτηριστικά του διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου με τη μέγιστη συσχέτιση μαζί του και φυσικά και το περιουσιακό στοιχειό μηδενικού κινδύνου. Έτσι, η τιμολόγησή τους γίνεται εξίσου εύκολη όπως και αυτή των χρηματοοικονομικών παράγωγων. Μάλιστα κάτω υπό συγκεκριμένες υποθέσεις που θα παρουσιάσουμε αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια η τιμή, τόσο της μη διαπραγματεύσιμης μεταβλητής όσο και του παραγώγου της, στην οποία καταλήγουμε αποτελεί μία παγκοσμίως αποδεκτή τιμή ορισμένη σε μηδενική βάση. Ως τέτοια ορίζεται η τιμή στην οποία όταν εισάγεται ένα περιουσιακό στοιχείο στην αγορά δεν δημιουργεί ευκαιρίες για arbitrage.

Τέλος, για λόγους πληρότητας αυτής της διπλωματικής εργασίας αλλά και για λόγους επιβεβαίωσης των αποτελεσμάτων στα οποία καταλήγουμε στις αριθμητικές εφαρμογές, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μία αντίστοιχη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε από τον D. Luenberger (2004) και μπορεί να εφαρμοστεί στην τιμολόγηση εσόδων, τα οποία μπορούν να παρατηρηθούν αλλά δεν διαπραγματεύονται σε κάποια οργανωμένη αγορά, και τα οποία αποτελούν συναρτήσεις στοχαστικών κυμαινόμενων μεταβλητών. Βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι ότι η φόρμουλα τιμολόγησης που προτείνεται αποτελεί μία επέκταση της γνωστής φόρμουλας τιμολόγησης των Black – Scholes, ότι το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε βασίζεται στην προβολή στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων, και ότι η τιμή στην οποία καταλήγουμε είναι παγκοσμίως αποδεκτή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σε μηδενική βάση κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις που παρουσιάζονται αναλυτικά στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

1.1 Πραγματικά Δικαιώματα Προαίρεσης

Η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων αποτελεί μια σύγχρονη μέθοδο αποτίμησης επενδυτικών σχεδίων. Υπό τη στενή έννοια τα πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν μία επέκταση των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων προαίρεσης τα οποία όμως εφαρμόζονται για πραγματικά (μη χρηματοοικονομικά) περιουσιακά στοιχεία. Τα πραγματικά δικαιώματα περιγράφουν το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση μιας επιχείρησης να αποκτήσει ένα πάγιο στοιχείο σε συγκεκριμένη τιμή σε προκαθορισμένη ημερομηνία. Ενώ τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν συνήθως τυποποιημένα συμβόλαια, τα πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης πρέπει να προσδιορίζονται και να καθορίζονται αναλυτικά κάθε φορά. Η μετάβαση από τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαίρεσης στα πραγματικά απαιτεί ένα τρόπο σκέψης που μεταδίδει την πειθαρχία των χρηματοοικονομικών αγορών στις εσωτερικές επενδυτικές αποφάσεις. Επιπρόσθετα, η χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων προαίρεσης κερδίζει συνεχώς έδαφος καθώς βοηθάει τα στελέχη των επιχειρήσεων στο σχεδιασμό και στον έλεγχο στρατηγικών επενδύσεων, μειώνοντας έτσι το χάσμα μεταξύ του στρατηγικού σχεδιασμού και των χρηματοοικονομικών εργαλείων.

Ας κάνουμε μία σύντομη αναδρομή στην ιστορία των πραγματικών δικαιωμάτων. Η πρώτη ίσως εφαρμογή πραγματικών δικαιωμάτων πραγματοποιήθηκε από τον Θαλή το Μιλήσιο (643 – 548 π.Χ.). Ο εν λόγω φιλόσοφος, προσπαθώντας να αποδείξει στους συμπολίτες του ότι οι φιλόσοφοι μπορούν να κερδίσουν χρήματα αν το επιθυμούν, χρησιμοποίησε τις γνώσεις του στη μετεωρολογία και προέβλεψε ότι μια συγκεκριμένη χρονιά οι καιρικές συνθήκες θα επέτρεπαν αυξημένη παραγωγή ελαιολάδου στην πόλη της Μιλήτου. Στηριζόμενος σε αυτήν την πρόβλεψη χρησιμοποίησε όλες του τις οικονομίες για να αποκτήσει το δικαίωμα ενοικίασης όλων των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ελαιοτριβείων της περιοχής σε προκαθορισμένη τιμή, και μάλιστα ίδια με αυτή της προηγούμενης χρονιάς, όταν θα ερχόταν η εποχή του μαζέματος της ελιάς. Οι προβλέψεις του Θαλή επαληθεύτηκαν και όταν έφτασε η εποχή όλοι οι παραγωγοί έψαχναν ελεύθερο ελαιοτριβείο για να βγάλουν το λάδι. Όμως όλα τα ελαιοτριβεία ήταν ενοικιασμένα από το φιλόσοφο, ο οποίος μπόρεσε και επέβαλε αυξημένη τιμή λόγω της αυξημένης ζήτησης και έτσι μπόρεσε να αποκομίσει υψηλό κέρδος. Αυτή η ιστορία περιγράφει με παραστατικό τρόπο πώς λειτουργούν τα πραγματικά δικαιώματα. Η λογική που τα διέπει είναι η ίδια, είτε αυτά εφαρμόζονται σε απλές επιχειρηματικές δραστηριότητες είτε εφαρμόζονται σε περίπλοκες επενδύσεις, όπως προγράμματα εξόρυξης πετρελαίου, ανάπτυξης βιομηχανικών μονάδων ή έρευνας σε νέες τεχνολογίες.

Στη γλώσσα των πραγματικών δικαιωμάτων η προκαταβολή που πλήρωσε ο Θαλής για την ενοικίαση των ελαιοτριβείων της περιοχής ονομάζεται «τιμή δικαιώματος». Η τιμή δικαιώματος δεν αποτελεί μέρος του προσυμφωνηθέντος ενοικίου αλλά αποτελεί ξεχωριστό αντίτιμο για την απόκτηση του δικαιώματος. Αντίστοιχα το προσυμφωνηθέν ενοίκιο ονομάζεται «τιμή εξάσκησης». Επίσης η συμφωνία των δύο μερών είχε ισχύ για μία συγκεκριμένη περίοδο η οποία ονομάζεται «διάρκεια ζωής» του πραγματικού δικαιώματος.

Παρ' όλο που ο Θαλής με την απόκτηση του πραγματικού δικαιώματος είχε δεσμεύσει τους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων σε ένα προκαθορισμένο ενοίκιο, το ενοίκιο κατά τη διάρκεια του μαζέματος της ελιάς θα καθοριζόταν από την προσφορά και τη ζήτηση για τη συγκεκριμένη υπηρεσία. Αυτό σημαίνει ότι το ενοίκιο που θα πλήρωναν οι ελαιοπαραγωγοί δεν μπορούσε να προβλεφθεί εξαρχής με ακρίβεια και θα μπορούσε να παρουσίαζε μικρές ή μεγάλες διακυμάνσεις. Στη γλώσσα των πραγματικών δικαιωμάτων το ενοίκιο που τελικά θα πλήρωναν οι ελαιοπαραγωγοί ονομάζεται «υποκείμενο αγαθό». Η αξία του υποκείμενου αγαθού κατά τη διάρκεια ζωής του πραγματικού δικαιώματος είναι αβέβαιη και για αυτόν τον λόγο χαρακτηρίζεται από τη λεγόμενη «μεταβλητότητα», η οποία υποδηλώνει το μέγεθος αλλά και τη συχνότητα των διακυμάνσεων στην τιμή του υποκείμενου αγαθού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ας έρθουμε για λίγο στη θέση του Θαλή και ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τι σκεπτόταν αυτήν την περίοδο. Προφανώς ήξερε ότι εφόσον οι προβλέψεις του ήταν σωστές και η σοδειά ήταν ιδιαίτερα υψηλή θα μπορούσε να υπενοικιάσει τα ελαιοτριβεία σε μεγαλύτερη τιμή από την τιμή άσκησης και να βγάλει κέρδος όπως και τελικά έγινε. Τι θα γινόταν όμως αν οι προβλέψεις του δεν επαληθευόταν; Το υποκείμενο αγαθό είχε υψηλό επίπεδο μεταβλητότητας και υπήρχε πιθανότητα λάθους. Αυτό το γνώριζε ο Θαλής και για αυτόν ακριβώς τον λόγο πλήρωσε την προκαταβολή για την απόκτηση του δικαιώματος και όχι της υποχρέωσης να νοικιάσει όλα τα ελαιοτριβεία της περιοχής. Αν η σοδειά ήταν χαμηλή τότε τα ενοίκια θα διαμορφωνόταν σε χαμηλότερα επίπεδα από αυτό που θα έπρεπε να πληρώσει ο Θαλής στους ιδιοκτήτες και έτσι δεν θα εξασκούσε το δικαίωμά του και απλώς θα έχανε την προκαταβολή. Σίγουρα όμως η ζημιά του θα ήταν πολύ χαμηλότερη από αυτήν που θα έπρεπε να απορροφήσει εάν ενοικίαζε εξαρχής όλα τα ελαιοτριβεία και πλήρωνε τα αντίστοιχα ποσά για την ενοικίασή τους.

Καλό θα ήταν να κάνουμε αναφορά σε τρία βασικά χαρακτηριστικά του τρόπου αντιμετώπισης των πραγματικών δικαιωμάτων προαίρεσης:

- Τα πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης είναι ενδεχόμενες αποφάσεις, δηλαδή ένα πραγματικό δικαίωμα προαίρεσης σου δίνει τη δυνατότητα να πάρεις μία απόφαση αφού δεις πώς εξελίσσεται μία κατάσταση.
- Η τιμολόγηση των πραγματικών δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ευθυγραμμισμένη με την τιμολόγηση των οργανωμένων χρηματαγορών, καθώς χρησιμοποιούνται τόσο σαν δεδομένα όσο και σαν τεχνικές στοιχεία από τις οργανωμένες αγορές.
- Τα πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση και τον χειρισμό στρατηγικών αποφάσεων προληπτικά, βοηθώντας τα στελέχη να μειώσουν την έκθεσή τους στην αβεβαιότητα ή να αυξήσουν τα έσοδα σε περίπτωση θετικών εξελίξεων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κλείνοντας τη συγκεκριμένη ενότητα καλό θα ήταν να αναφερθούμε στους παράγοντες που καθορίζουν την αξία των πραγματικών δικαιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα το πραγματικό δικαίωμα αγοράς ενός αγαθού ή πάγιου στοιχείου γίνεται πιο πολύτιμο για τον κάτοχό του όταν:

- Η τιμή άσκησης είναι χαμηλή σε σχέση με την παρούσα αξία του υποκείμενου αγαθού.
- Η παρούσα τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι υψηλή σε σχέση με την τιμή άσκησης του δικαιώματος.
- Η διάρκεια ζωής του πραγματικού δικαιώματος είναι μεγάλη. Όσο περισσότερο καιρό επιτρέψουμε στην αξία του υποκείμενου αγαθού να διακυμανθεί τόσο πιο πιθανό γίνεται να υπερβεί την τιμή άσκησης.
- Το επίπεδο μεταβλητότητας είναι υψηλό. Όσο μεγαλύτερο το μέγεθος και η συχνότητα των διακυμάνσεων της αξίας του υποκείμενου αγαθού τόσο μεγαλύτερες οι πιθανότητες να είναι υψηλότερη αλλά και χαμηλότερη από την τιμή άσκησης. Όταν η αξία του υποκείμενου αγαθού είναι πολύ υψηλή τα δυνητικά κέρδη αυξάνονται απεριόριστα ενώ σε μία αντίστοιχη καθοδική κίνηση οι ζημιές περιορίζονται στην αξία του δικαιώματος.
- Τα διαφυγόντα κέρδη και τα έξοδα διατήρησης της ευελιξίας κατά τη διάρκεια του πραγματικού δικαιώματος είναι μικρά. Παραδείγματα διαφυγόντων κερδών αποτελούν οι εισπράξεις από τη λειτουργία ενός εργοστασίου που η εταιρία καθυστερεί να κτίσει ή η μείωση της κερδοφορίας της επιχείρησης - κατόχου του πραγματικού δικαιώματος, λόγω της εισόδου ανταγωνιστών στην αγορά προτού η επιχείρηση ασκήσει το πραγματικό δικαίωμα και προβεί στην ανάλογη επένδυση. Αναλόγως λειτουργούν και τα έξοδα που συνδέονται με την ικανότητα της επιχείρησης να διατηρεί την ευελιξία που είναι απαραίτητη για τη διαχείριση των πραγματικών δικαιωμάτων, όπως το κόστος λήψης άδειας εκμετάλλευσης φυσικών πόρων και το κόστος διατήρησης ικανοτήτων και τεχνογνωσίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

1.2 Η Έννοια του Arbitrage

Ορίζουμε ως arbitrage τη δυνατότητα απόκτησης κέρδους χωρίς την ύπαρξη του ανάλογου κινδύνου. Το arbitrage χωρίζεται σε δύο τύπους: arbitrage τύπου A και arbitrage τύπου B. Μάλιστα, η γραμμική τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage τύπου A, το οποίο ορίζεται ως ακολούθως: arbitrage τύπου A πραγματοποιείται όταν μια επένδυση παράγει ένα άμεσο κέρδος χωρίς την ύπαρξη κάποιου μελλοντικού εσόδου ή εξόδου. Με άλλα λόγια όταν κάποιος επενδύει σε μία επένδυση τέτοιου τύπου αποκτά άμεσα κάποιο έσοδο χωρίς να χρειάζεται να πληρώσει ποτέ τίποτε.

Η άλλη εκδοχή του arbitrage είναι αυτή του τύπου B. Σε αυτήν την περίπτωση μια επένδυση έχει ένα μη αρνητικό κόστος, αλλά έχει θετική πιθανότητα δημιουργίας κέρδους και καμία πιθανότητα δημιουργίας ζημιάς μελλοντικά. Με άλλα λόγια το arbitrage τύπου B αποτελεί μία επένδυση στην οποία κάποιος δεν επενδύει τίποτα (ή έχει μία επενδυτική εισροή αρχικά) και έχει την πιθανότητα δημιουργίας κάποιου εσόδου μελλοντικά. Ως ένα πολύ απλό και κατανοητό παράδειγμα μπορούμε να σκεφτούμε ένα λαχνό για τον οποίο δεν πληρώνουμε κάτι για να τον αποκτήσουμε.

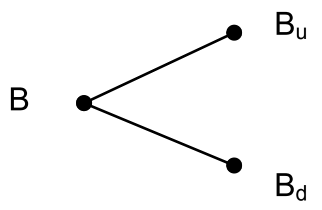
Στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας όταν αναφερόμαστε ότι δεν υπάρχει δυνατότητα για arbitrage, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει δυνατότητα για πραγματοποίηση κανενός από τους τύπους που προαναφέραμε.

1.3 Βασικές Ιδιότητες του Διωνυμικού Μοντέλου

Στη παρούσα ενότητα θα αναλύσουμε κάποιες από τις βασικές ιδιότητες του διωνυμικού μοντέλου καθώς θα μας φανούν αρκετά χρήσιμες στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια. Αρχικά για να ορίσουμε ένα διωνυμικό μοντέλο πρέπει να προσδιορίσουμε μια περίοδο αναφοράς. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο εάν η τιμή της διωνυμικής μεταβλητής είναι γνωστή στην αρχή της περιόδου, η τιμή της στο ξεκίνημα της επόμενης περιόδου μπορεί να επιλεχθεί ανάμεσα σε δύο μόνο πιθανές τιμές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αυτές οι δύο πιθανές τιμές προσδιορίζονται έτσι ώστε να είναι πολλαπλάσια της τιμής της προηγούμενης περιόδου. Συνήθως χρησιμοποιείται ένας πολλαπλασιαστής $u > 1$ για την ανοδική κίνηση και ένας πολλαπλασιαστής $d < 1$ για την καθοδική κίνηση. Έτσι, αν συμβολίσουμε την αρχική τιμή μίας διωνυμικής μεταβλητής με B, την επόμενη περίοδο η τιμή της θα είναι είτε uB (B_u) είτε dB (B_d) με πιθανότητα p και 1- p αντίστοιχα. Η γενική εικόνα ενός τέτοιου δικτυωτού πλέγματος μίας περιόδου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Το διωνυμικό μοντέλο.

Αυτή η μεταβλητή μπορεί ή όχι να αντιπροσωπεύει την αξία ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος, ενώ η αρχική αξία της δεν χρειάζεται να προσδιοριστεί στην παρούσα χρονική στιγμή. Κάποιες βασικές στατιστικές μεταβλητές σχετικές με τη μεταβλητή B παρουσιάζονται ακολούθως:

1. Αναμενόμενη τιμή

$$\overline{B} \triangleq E(B) = pB_u + (1-p)B_d.$$

2. Διακύμανση

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(B) \triangleq E(B-\overline{B})^2 = p(1-p)(B_u - B_d)^2.$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(B) &= E(B^2) - [E(B)]^2 = pB_u{}^2 + (1-p)B_d{}^2 - [pB_u + (1-p)B_d]^2 \\ &= pB_u{}^2 + (1-p)B_d{}^2 - p^2B_u{}^2 - (1-p)^2B_d{}^2 - 2p(1-p)B_uB_d \\ &= B_u{}^2p(1-p) + B_d{}^2(1-p)[1-(1-p)] - 2p(1-p)B_uB_d \\ &= B_u{}^2p(1-p) + B_d{}^2p(1-p) - 2p(1-p)B_uB_d \\ &= p(1-p)\left(B_u{}^2 + B_d{}^2 - 2B_uB_d\right) = p(1-p)(B_u - B_d)^2. \ \blacksquare\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

3. Αναμενόμενη λογαριθμική μέση τιμή

$$\overline{\ln \mathrm{B}} \triangleq \mathrm{E}(\ln \mathrm{B}) = \mathrm{p} \ln \mathrm{B_u} + (1 - \mathrm{p}) \ln \mathrm{B_d}.$$

4. Λογαριθμική διακύμανση

$$\mathrm{var}(\ln \mathrm{B}) \triangleq \mathrm{E}\left(\ln \mathrm{B} - \overline{\ln \mathrm{B}}\right)^2 = \mathrm{p}(1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_u} - \ln \mathrm{B_d})^2.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{B}) &= \mathrm{E}(\ln\mathrm{B})^2 - [\mathrm{E}(\ln\mathrm{B})]^2 \\
&= \mathrm{p}(\ln \mathrm{B_u})^2 + (1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_d})^2 - [\mathrm{p} \ln \mathrm{B_u} + (1-\mathrm{p}) \ln \mathrm{B_d}]^2 \\
&= \mathrm{p}(\ln \mathrm{B_u})^2 + (1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_d})^2 - \mathrm{p}^2(\ln \mathrm{B_u})^2 - (1-\mathrm{p})^2(\ln \mathrm{B_d})^2 \\
&\quad - 2\mathrm{p}(1-\mathrm{p}) \ln \mathrm{B_u} \ln \mathrm{B_d} \\
&= \mathrm{p}(1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_u})^2 + \mathrm{p}(1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_d})^2 - 2\mathrm{p}(1-\mathrm{p}) \ln \mathrm{B_u} \ln \mathrm{B_d} \\
&= \mathrm{p}(1-\mathrm{p})[(\ln \mathrm{B_u})^2 + (\ln \mathrm{B_d})^2 - 2 \ln \mathrm{B_u} \ln \mathrm{B_d}] \\
&= \mathrm{p}(1-\mathrm{p})(\ln \mathrm{B_u} - \ln \mathrm{B_d})^2. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Επίσης, ορίζουμε ότι ένα παράγωγο της μεταβλητής B αντιστοιχεί σε μία άλλη διωνυμική μεταβλητή, έστω τη C, η οποία μπορεί να πάρει τιμή C_u ή C_d. Η τιμή της C εξαρτάται από το αν θα συμβεί το διωνυμικό γεγονός u ή d. Οπότε η μεταβλητή C είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση της B.

Στην πράξη, όταν η διωνυμική μεταβλητή B αντιπροσωπεύει την αξία μίας δυναμικής μεταβλητής στο τέλος της περιόδου, ορίζουμε μια αρχική αξία B_0, ενώ τα B_u, B_d και το p επιλέγονται έτσι ώστε να ταιριάζουν είτε με εμπειρικά είτε με θεωρητικά δεδομένα για μία περίοδο. Επίσης, συνήθως ορίζουμε ότι $\mathrm{B_0} = 1$, ενώ σιωπηρά υποθέτουμε ότι $\mathrm{B_u} \neq \mathrm{B_d}$. Ας υποθέσουμε επίσης, ότι υπάρχει άλλη μία μεταβλητή A που μπορεί να είναι διωνυμική αλλά μπορεί και να μην είναι. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι μία άλλη τυχαία μεταβλητή ή η συνάρτηση εσόδων ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου, όπως θεωρούμε αρκετές φορές και στα επόμενα κεφάλαια. Έστω, ότι συμβολίζουμε τη δεσμευμένη αναμενόμενη απόδοση της A ως $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{u} = \mathrm{E}(\mathrm{A}|\mathrm{u})$ και $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{d} = \mathrm{E}(\mathrm{A}|\mathrm{d})$, όπου τα u και d αντιστοιχούν στις πιθανές καταστάσεις της μεταβλητής B.

Ισχύουν τα ακόλουθα αναλυτικά εργαλεία για τις μεταβλητές A, B και C.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Λήμμα 1.1

Ισχύει: $\mathrm{cov}(A, B) = p(1-p)(\overline{A}_u - \overline{A}_d)(B_u - B_d)$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(A, B) &= E(AB) - E(A)E(B) \\
&= p\overline{A}_u B_u + (1-p)\overline{A}_d B_d - [p\overline{A}_u + (1-p)\overline{A}_d][pB_u + (1-p)B_d] \\
&= p\overline{A}_u B_u + (1-p)\overline{A}_d B_d - p^2\overline{A}_u B_u - p(1-p)\overline{A}_u B_d - p(1-p)\overline{A}_d B_u \\
&\quad - (1-p)^2\overline{A}_d B_d \\
&= \overline{A}_u B_u p(1-p) + \overline{A}_d B_d p(1-p) - \overline{A}_u B_d p(1-p) - \overline{A}_d B_u p(1-p) \\
&= p(1-p)(\overline{A}_u B_u + \overline{A}_d B_d - \overline{A}_u B_d - \overline{A}_d B_u) \\
&= p(1-p)[\overline{A}_u(B_u - B_d) - \overline{A}_d(B_u - B_d)] \\
&= p(1-p)(\overline{A}_u - \overline{A}_d)(B_u - B_d). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Λήμμα 1.2 - Λήμμα συνάρτησης συσχέτισης

Υποθέτουμε ότι οι Α και Β είναι τυχαίες μεταβλητές και ότι η Β (αλλά όχι απαραίτητα και η Α) είναι διωνυμική. Επίσης, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή C είναι ένα παράγωγο της Β που μπορεί να πάρει τιμή C_u ή C_d. Τότε ισχύει:

$$\mathrm{cov}(A, C) = \frac{(C_u - C_d)}{(B_u - B_d)}\mathrm{cov}(A, B).$$

Απόδειξη:

Από το Λήμμα 1.1 έχουμε:

$$\mathrm{cov}(A, B) = p(1-p)(\overline{A}_u - \overline{A}_d)(B_u - B_d).$$

Ομοίως,

$$\mathrm{cov}(A, C) = p(1-p)(\overline{A}_u - \overline{A}_d)(C_u - C_d).$$

Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\frac{\mathrm{cov}(A,B)}{\mathrm{cov}(A,C)} = \frac{p(1-p)(\bar{A}_u - \bar{A}_d)(B_u - B_d)}{p(1-p)(\bar{A}_u - \bar{A}_d)(C_u - C_d)} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{cov}(A,C) = \frac{(C_u - C_d)}{(B_u - B_d)}\mathrm{cov}(A,B). \ \blacksquare$$

Στη συνέχεια γίνονται συχνές αναφορές σε ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο Α, το οποίο ανάμεσα σε όλα τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία παρουσιάζει τη μέγιστη συσχέτιση με το παράγωγο C που θέλουμε να τιμολογήσουμε. Σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα, στο διωνυμικό κόσμο οποιοδήποτε διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο έχει τη μέγιστη συσχέτιση με τη μεταβλητή Β, παρουσιάζει επίσης τη μέγιστη συσχέτιση με όλα τα παράγωγα της Β. Έτσι, το ίδιο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε παράγωγο της Β.

Λήμμα 1.3

Έστω ότι η μεταβλητή Β είναι μια διωνυμική μεταβλητή και υποθέτουμε ότι το Μ είναι ένα τυχαίο έσοδο ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου, το οποίο μεγιστοποιεί τη συσχέτιση με τη Β. Τότε το Μ είναι το περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση με οποιοδήποτε παράγωγο της Β.

Απόδειξη:

Το Μ που μεγιστοποιεί τη συσχέτιση με τη Β μεγιστοποιεί και τη συνδιακύμανση της Β με το Μ [$cov(M,B)$] σε σχέση με όλα τα Μ που έχουν την ίδια διακύμανση. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε εκείνα τα Μ με διακύμανση ίση με μία σταθερή τιμή.

Υποθέτουμε ότι το C είναι παράγωγο της μεταβλητής Β. Έχουμε δείξει ότι ισχύει:

$$\mathrm{cov}(M,C) = \frac{(C_u - C_d)}{(B_u - B_d)}\mathrm{cov}(M,B).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Από τη συγκεκριμένη σχέση είναι ξεκάθαρο ότι εφόσον το M μεγιστοποιεί τη συνδιακύμανση του M με τη B, θα μεγιστοποιεί και τη συνδιακύμανση του M με το C $[\mathrm{cov}(\mathrm{M}, \mathrm{C})]$. ■

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΔΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΟΥΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στο κλασικό διωνυμικό μοντέλο για μία μεταβλητή B. Στο παρών κεφάλαιο θα ενσωματώσουμε στο μοντέλο μας ένα πλαίσιο που θα περιλαμβάνει όλα τα περιουσιακά στοιχεία τα οποία διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά ώστε να είναι εφικτό να πάρουμε μία τιμή για τη μεταβλητή B αλλά και για οποιοδήποτε παράγωγό της. Η πιο γνωστή μέθοδος τιμολόγησης είναι η βασική μέθοδος τιμολόγησης του CAPM. Όμως, υπό τη στενή έννοια η εξίσωση του CAPM μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στα περιουσιακά στοιχεία τα οποία διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά. Παρόλα αυτά συχνά χρησιμοποιείται καταχρηστικά και στην τιμολόγηση μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων σε οργανωμένη αγορά.

Μία εναλλακτική μέθοδος τιμολόγησης στοιχείων μη διαπραγματεύσιμων σε οργανωμένες αγορές είναι αυτή της Correlation Pricing Formula (CPF). Έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση τιμολόγησης του CAPM και χρησιμοποιώντας την καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι εκφράζει την τιμή ενός μη διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου σε όρους ενός διαπραγματεύσιμου το οποίο έχει τη μέγιστη συσχέτιση μαζί του, αντί σε όρους του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου της αγοράς. Μάλιστα, αυτή η μέθοδος πλεονεκτεί καθώς μπορούν να υπολογιστούν με μεγαλύτερη ακρίβεια οι τιμές των όρων της εξίσωσης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αναφερθούμε τόσο στη μέθοδο τιμολόγησης του CAPM όσο και στη μέθοδο τιμολόγησης της CPF.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2.1 Το Βασικό CAPM

Το CAPM αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τον W. Sharpe (1964), τον J. Lintner (1965) και τον J. Mossin (1966). Αποτελεί δε μία προέκταση του υποδείγματος μέσου - διακύμανσης του H. Markowitz (1952). Στο υπόδειγμα του Markowitz καθορίζεται ένα σύνολο αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, στα οποία συνδέεται η αναμενόμενη απόδοση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο. Στο CAPM ενσωματώνεται επιπλέον η δυνατότητα του επενδυτή να προσαρμόσει τη στρατηγική του σύμφωνα με τις προβλέψεις του για την αγορά. Στη συνέχεια της ενότητας θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τις βασικές έννοιες του υποδείγματος.

Αρχικά, καλό είναι να αναφερθούμε στις υποθέσεις που στηρίζεται το βασικό CAPM. Βασικές υποθέσεις του είναι οι εξής:

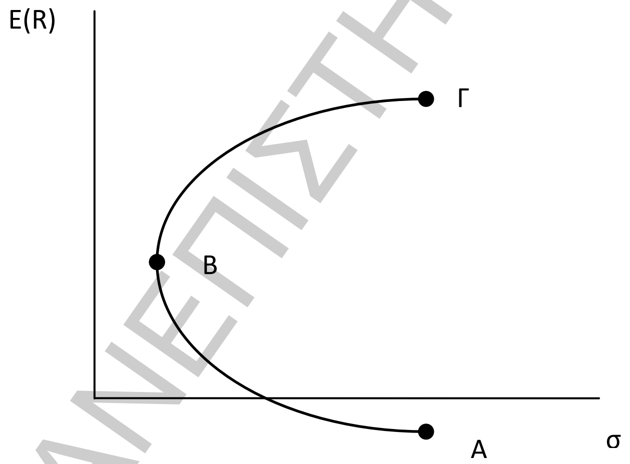
1. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών.
2. Τα περιουσιακά στοιχεία είναι πλήρως διαιρετά.
3. Μηδενική προσωπική φορολόγηση.
4. Οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων δίνονται εξωγενώς σε όλους και κανείς ατομικά ή σε ομάδες δεν μπορεί να τις επηρεάσει.
5. Όλοι οι επενδυτές αναμένεται να πάρουν αποφάσεις μόνο στη βάση των αναμενόμενων αποδόσεων και της διακύμανσης των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων τους.
6. Επιτρέπονται οι ανοιχτές πωλήσεις.
7. Κάθε επενδυτής μπορεί να δανειστεί ή να δανείσει κεφάλαια στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.
8. Οι επενδυτές υποτίθεται ότι ασχολούνται με την τιμολόγηση πάνω σε μία περίοδο και αυτή η περίοδος είναι κοινή για όλους.
9. Όλοι οι επενδυτές έχουν ταυτόσημες εκτιμήσεις για τις αναμενόμενες αποδόσεις, διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών.
10. Όλα τα περιουσιακά στοιχεία διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Καταγράφοντάς τες, πλέον γίνεται σαφές γιατί αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου ότι μόνο καταχρηστικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τιμολόγηση μη διαπραγματεύσιμων σε οργανωμένες αγορές περιουσιακών στοιχείων.

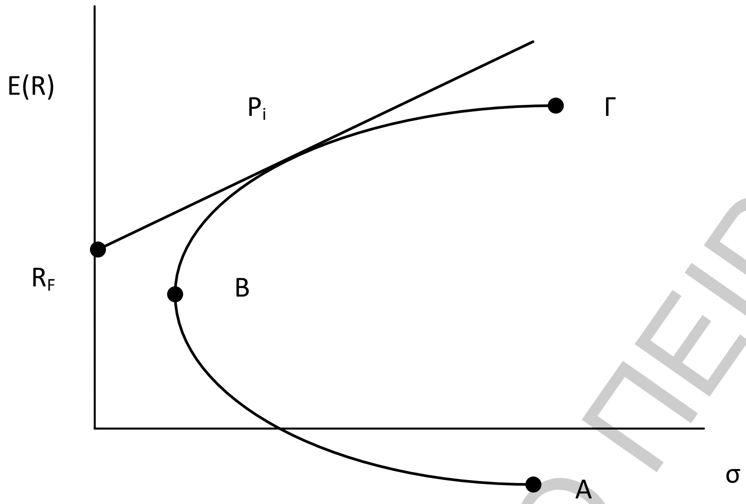
2.1.1 CAPM – Μια απλή προσέγγιση

Επιτρέποντας τις ανοιχτές πωλήσεις, αλλά χωρίς τη δυνατότητα απεριόριστου δανεισμού στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο κάθε επενδυτής αντιμετωπίζει ένα αποδοτικό σύνολο χαρτοφυλακίων όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 2. Το τόξο ΒΓ αντιπροσωπεύει το αποδοτικό σύνολο χαρτοφυλακίων με τη μέγιστη δυνατή αναμενόμενη απόδοση και ελάχιστη δυνατή διακύμανση, ενώ η καμπύλη ΑΒΓ αντιπροσωπεύει το σύνολο των χαρτοφυλακίων με την ελάχιστη διακύμανση, αλλά όχι απαραίτητα και τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση. Γενικά, το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο διαφέρει ανάμεσα στους επενδυτές λόγω των διαφορετικών προσδοκιών τους.



Σχήμα 2. Το αποδοτικό σύνολο χαρτοφυλακίων χωρίς δανεισμό.

Εισάγοντας την έννοια του απεριόριστου δανεισμού, το χαρτοφυλάκιο που όλοι οι επενδυτές θα ήθελαν να διακρατούν μπορεί να προσδιοριστεί ανεξάρτητα από τις ευαισθησίες του κάθε επενδυτή στον κίνδυνο. Έτσι, όλοι οι επενδυτές θα επέλεγαν συνδυασμούς δύο μόνο χαρτοφυλακίων: του χαρτοφυλακίου της αγοράς Μ και του χαρτοφυλακίου με μηδενικό κίνδυνο. Το Σχήμα 3 απεικονίζει το αποδοτικό σύνολο χαρτοφυλακίων υπό την υπόθεση της δυνατότητας του απεριόριστου δανεισμού στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο R_f.



Σχήμα 3. Το αποδοτικό σύνολο χαρτοφυλακίων με δανεισμό.

Η ευθεία γραμμή που απεικονίζεται στο σχήμα είναι γνωστή ως η γραμμή της κεφαλαιαγοράς (ΓΚ). Η εξίσωση της ΓΚ αποδεικνύεται ότι είναι η εξής:

$$\overline{R}_e = R_F + \frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_e,$$

όπου ο δείκτης e συμβολίζει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο. Να επισημάνουμε εδώ ότι αποτελεσματικά ονομάζονται εκείνα τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται πάνω στη γραμμή ΓΚ.

Ο όρος $\overline{R}_e$παριστάνει την αναμενόμενη απόδοση του e, ενώ ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους, R_F, συμβολίζει την αξία του χρόνου ή της απόδοσης που απαιτείται ώστε να καθυστερήσει ο επενδυτής την αγορά καταναλωτικών αγαθών. Ο όρος $\frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η αγοραία τιμή του κινδύνου για όλα τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια. Είναι δηλαδή η υπερβάλλουσα απόδοση που μπορεί να κερδηθεί αυξάνοντας το επίπεδο του κινδύνου (δηλαδή της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

τυπικής απόκλισης) σε ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο κατά μία μονάδα. Τέλος, ο όρος σ_e συμβολίζει την απαιτούμενη απόδοση εξαιτίας του κινδύνου. Έτσι, παραστατικά έχουμε:

$$\text{Αναμενόμενη απόδοση} = \text{Αξία του χρόνου} + (\text{Αξία του ρίσκου}) \times (\text{Ποσότητα του ρίσκου}).$$

Παρά τη σημαντικότητα της παραπάνω σχέσης, η ΓΚ αδυνατεί να περιγράψει τις αποδόσεις σε κατάσταση ισορροπίας για μη αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Οπότε θα συνεχίσουμε την ανάλυσή του υποδείγματος ώσπου να καταλήξουμε σε μία σχέση που θα ισχύει τόσο για τα αποτελεσματικά όσο και για τα μη αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πολύ καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο ο κίνδυνός του εκτιμάται υπολογίζοντας το συντελεστή βήτα, καθώς ο μη συστηματικός κίνδυνός του τείνει στο μηδέν. Σύμφωνα με το CAPM οι επενδυτές διακρατούν ένα πολύ καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο, οπότε ασχολούνται μόνο με τους όρους της αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου. Επομένως, οι μόνες παράμετροι που πρέπει να εξετάσουν είναι αυτές της αναμενόμενης απόδοσης και του συντελεστή βήτα. Όμως, ξέρουμε ότι όλες οι επενδύσεις αλλά και όλα τα χαρτοφυλάκια επενδύσεων πρέπει να βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή στο χώρο των αναμενόμενων αποδόσεων και του συντελεστή βήτα, καθώς εάν οποιαδήποτε επένδυση βρίσκεται είτε πάνω είτε κάτω από την ευθεία θα υπάρχει ευκαιρία για αντισταθμιστικό κέρδος χωρίς κίνδυνο το οποίο θα συνεχισθεί μέχρι να επανέλθουμε σε κάποιο σημείο της ευθείας.

Για να καταλήξουμε στη γραμμή των χρεογράφων δεν έχουμε παρά να ορίσουμε δύο σημεία της ευθείας γραμμής. Όπως προαναφέραμε, σύμφωνα με το CAPM όλοι οι επενδυτές διακρατούν το άριστο χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ, το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει συντελεστή βήτα ίσο με τη μονάδα ($\beta = 1$) και αναμενόμενη απόδοση R_M. Το δεύτερο σημείο που θα επιλέξουμε βρίσκεται στον άξονα της αναμενόμενης απόδοσης και συμβαίνει όταν το βήτα ισούται με το μηδέν, δηλαδή όταν ο συστηματικός κίνδυνος του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

περιουσιακού στοιχείου ισούται μηδέν. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση αναφερόμαστε στο περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου.

Πιο συγκεκριμένα η εξίσωση της ευθείας γραμμής είναι της μορφής:

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}} = \alpha + \mathrm{b}\beta_{\mathrm{i}}.$$

Το ένα σημείο της ευθείας ορίζεται όταν διακρατούμε το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου,

$$\mathrm{R}_{\mathrm{F}} = \alpha + \mathrm{b} * 0 \Leftrightarrow \mathrm{R}_{\mathrm{F}} = \alpha,$$

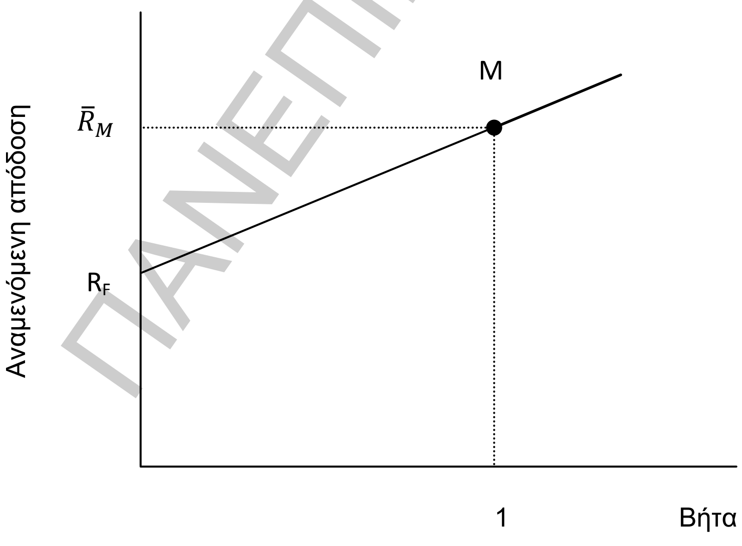
ενώ το άλλο σημείο ορίζεται όταν διακρατούμε το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς,

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}} = \alpha + \mathrm{b} * 1 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}} - \alpha = \mathrm{b}.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση της ευθείας έχουμε:

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}} = \mathrm{R}_{\mathrm{F}} + \beta_{\mathrm{i}}(\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}} - \mathrm{R}_{\mathrm{F}}).$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση καλείται γραμμή των χρεογράφων και περιγράφει την αναμενόμενη απόδοση όλων των περιουσιακών στοιχείων και όλων των χαρτοφυλακίων της αγοράς είτε αυτά είναι αποτελεσματικά είτε όχι. Μάλιστα μπορούμε να σχηματίσουμε το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 4. Η γραμμή των χρεογράφων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Γνωρίζουμε όμως, ότι ο συντελεστής βήτα ισούται με

$$\mathrm{\beta_i} = \frac{\sigma_{\mathrm{iM}}}{\sigma_{\mathrm{M}}^2},$$

και άρα μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση της γραμμής των χρεογράφων στην ακόλουθη μορφή:

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}} = \mathrm{R_F} + \left(\frac{\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}} - \mathrm{R_F}}{\sigma_{\mathrm{M}}}\right)\frac{\sigma_{\mathrm{iM}}}{\sigma_{\mathrm{M}}}, \qquad (1)$$

όπου, στην πραγματικότητα είναι η εξίσωση μίας ευθείας γραμμής κατασκευασμένη στο χώρο της αναμενόμενης απόδοσης και της συνδιακύμανσης διά της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου της αγοράς $\left(\frac{\sigma_{\mathrm{iM}}}{\sigma_{\mathrm{M}}}\right)$. Η γραμμή των χρεογράφων μας βοηθάει να απεικονίσουμε την αναμενόμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου ως άθροισμα του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο και της αγοραίας αξίας του κινδύνου επί την ποσότητα του κινδύνου του συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου.

2.1.2 Εξίσωση τιμολόγησης του CAPM

Ως τώρα ασχοληθήκαμε με την ισορροπία σε όρους αποδόσεων. Ας μετακινηθούμε τώρα από αυτήν στην ισορροπία εκφρασμένη σε όρους τιμών. Ορίζουμε ως:

- P_i την τρέχουσα τιμή του στοιχείου i.
- P_M την τρέχουσα τιμή του χαρτοφυλακίου της αγοράς.
- Y_i τη χρηματιστηριακή αξία του περιουσιακού στοιχείου μία περίοδο μετά, συμπεριλαμβανομένων των μερισμάτων.
- Y_M τη χρηματιστηριακή αξία του χαρτοφυλακίου της αγοράς μία περίοδο μετά, συμπεριλαμβανομένων των μερισμάτων και
- $\mathrm{R} = (1 + \mathrm{R_F})$, όπου το $\mathrm{R_F}$ αντιπροσωπεύει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Γνωρίζουμε ότι η απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου ορίζεται ως:

$$R_i = \frac{\text{Τελική τιμή} - \text{Αρχική τιμή}}{\text{Αρχική τιμή}} = \frac{Y_i - P_i}{P_i} = \frac{Y_i}{P_i} - 1.$$

Ομοίως,

$$R_M = \frac{Y_M - P_M}{P_M} = \frac{Y_M}{P_M} - 1.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$\frac{\overline{Y}_i}{P_i} - 1 = R_F + \left[\frac{\overline{Y}_M}{P_M} - 1 - R_F\right]\frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}. \quad (2)$$

Όμως,

$$\mathrm{cov}(R_i, R_M) = E\left[\left(\frac{Y_i - P_i}{P_i} - \frac{\overline{Y}_i - P_i}{P_i}\right)\left(\frac{Y_M - P_M}{P_M} - \frac{\overline{Y}_M - P_M}{P_M}\right)\right]$$

$$= E\left(\frac{Y_i - \overline{Y}_i}{P_i} * \frac{Y_M - \overline{Y}_M}{P_M}\right) = \frac{1}{P_i P_M} E[(Y_i - \overline{Y}_i)(Y_M - \overline{Y}_M)]$$

$$= \frac{1}{P_i P_M}\mathrm{cov}(Y_i, Y_M).$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{P_M^2}\mathrm{var}(Y_M).$$

Με αντικατάσταση αυτών στην εξίσωση (2), προσθέτοντας το 1 και στις δύο πλευρές της ισότητας και έχοντας στο μυαλό μας ότι

$$R = 1 + R_F \Leftrightarrow R_F = R - 1,$$

έχουμε:

$$\frac{\overline{Y}_i}{P_i} = R + \left[\frac{\overline{Y}_M}{P_M} - 1 - (R - 1)\right]\frac{\frac{1}{P_i P_M}\mathrm{cov}(Y_i, Y_M)}{\frac{1}{P_M^2}\mathrm{var}(Y_M)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$= \mathrm{R} + \left[\frac{\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{M}}{\mathrm{P}_\mathrm{M}} - \mathrm{R})\right] \frac{\frac{1}{\mathrm{P}_\mathrm{i}} \mathrm{cov}(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\frac{1}{\mathrm{P}_\mathrm{M}} \mathrm{var}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})}$$

$$\overset{*\mathrm{P}_\mathrm{i}}{\Leftrightarrow} \overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{i} = \mathrm{RP}_\mathrm{i} + \left(\frac{\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{M} - \mathrm{P}_\mathrm{M}\mathrm{R}}{\mathrm{P}_\mathrm{M}}\right) \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\frac{1}{\mathrm{P}_\mathrm{M}} \mathrm{var}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})}$$

$$= \mathrm{RP}_\mathrm{i} + \frac{\frac{(\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{M} - \mathrm{P}_\mathrm{M}\mathrm{R})\mathrm{cov}(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\mathrm{P}_\mathrm{M}}}{\frac{\mathrm{var}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\mathrm{P}_\mathrm{M}}}$$

$$= \mathrm{RP}_\mathrm{i} + (\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{M} - \mathrm{P}_\mathrm{M}\mathrm{R}) \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\mathrm{var}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})}.$$

Οπότε συγκεντρωτικά καταλήγουμε στην εξής σχέση,

$$\mathrm{P}_\mathrm{i} = \frac{1}{\mathrm{R}} \left[\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{i} - (\overline{\mathrm{Y}}_\mathrm{M} - \mathrm{P}_\mathrm{M}\mathrm{R}) \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{Y}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_\mathrm{M})}{\mathrm{var}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})}\right]. \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι η βασική εξίσωση τιμολόγησης διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων και βασίζεται στο αποδοτικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ. Βάσει της συγκεκριμένης εξίσωσης η τρέχουσα τιμή ενός στοιχείου i μπορεί να υπολογιστεί προεξοφλώντας στο σήμερα την καθαρή μελλοντική χρηματική ροή, η οποία αντιστοιχεί στην αναμενόμενη αξία του περιουσιακού στοιχείου μία περίοδο μετά αφαιρώντας όμως ένα ποσό ως αποζημίωση για την ανάληψη του ρίσκου.

2.2 Correlation Pricing Formula

Η θεωρία της CPF αναπτύχθηκε από τον D. Luenberger (2001, 2002). Εκφράζει την τιμή ενός μη διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου σε όρους ενός διαπραγματεύσιμου το οποίο έχει τη συσχέτιση μαζί του. Πριν αρχίσουμε την ανάλυση μας σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε αναφορά σε κάποια βασικά θεωρήματα στα οποία θα στηριχτούμε ώστε να καταλήξουμε στη συγκεκριμένη φόρμουλα τιμολόγησης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2.2.1 Θεωρήματα προβολής

Το κλασικό θεώρημα προβολής γενικεύει το γεγονός ότι σε ένα τρισδιάστατο χώρο η μικρότερη απόσταση μεταξύ ενός σημείου και ενός επιπέδου είναι εφικτό να βρεθεί χαράζοντας μία κάθετη γραμμή από το σημείο στο επίπεδο. Το γενικευμένο θεώρημα ορίζεται σε έναν αυθαίρετο χώρο Hilbert και σε αυτή τη βάση εφαρμόζεται προσεγγιστικά και αποτελεσματικά σε πολλούς εφαρμοσμένους τομείς. Σε αυτή τη παράγραφο θα παραθέσουμε ορισμένα από τα βασικά συμπεράσματα στο γενικευμένο χώρο Hilbert.

Ο χώρος Hilbert H είναι ένας διανυσματικός χώρος με ένα μετρήσιμο εσωτερικό γινόμενο, ορισμένο για δύο οποιαδήποτε στοιχεία του, ο οποίος είναι πλήρης ως προς τη νόρμα του, ενώ λέμε ότι είναι πλήρης εάν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα όριο στο χώρο. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x και y στο χώρο H ορίζεται ως $(\mathrm{x}|\mathrm{y})$. Επίσης, είναι γραμμικό σε κάθε όρισμα και ισχύει $(\mathrm{x},\mathrm{x}) > 0, \textit{εκτός και αν}\ \mathrm{x} = \theta$, όπου θ είναι το μηδενικό στοιχείο του H. Η νόρμα ενός στοιχείου $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$ ορίζεται ως $\|\mathrm{x}\| = \sqrt{(\mathrm{x}|\mathrm{x})}$. Επίσης, λέμε ότι το x είναι ορθογώνιο στο y εάν ισχύει $(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = 0$, και τότε γράφουμε $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$.

Ένα σημαντικό αναλυτικό εργαλείο στο οποίο θα πρέπει να αναφερθούμε είναι η ανισότητα των Cauchy-Schawarz.

Λήμμα 2.1 - Ανισότητα των Cauchy-Schawarz

Έστω Η είναι ένας χώρος Hilbert. Τότε

$$|(\mathrm{x},\mathrm{y})| \leq \|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\| \quad \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathrm{H}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο και μόνο όταν $\mathrm{x} = \alpha\mathrm{y}$ για κάποιο α ή $\mathrm{y} = \beta\mathrm{x}$ για κάποιο β.

Ένας υπόχωρος M του χώρου Hilbert ορίζεται ως $\mathrm{M} \leq \mathrm{H}$, και είναι και αυτός ένας γραμμικός χώρος. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα στα οποία αναφερόμαστε ακολούθως έχουν εφαρμογή μόνο σε κλειστούς υποχώρους, αλλά αυτό δεν μας προβληματίζει καθώς στις εφαρμογές μας τα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σχετικά υποσύνολα είναι πεπερασμένων διαστάσεων και γνωρίζουμε ότι όλα τα υποσύνολα με αυτά τα χαρακτηριστικά είναι κλειστά. Ας αναφερθούμε όμως στα θεωρήματα που θα στηριχτούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Θεώρημα 2.1 – Κλασικό θεώρημα προβολής

Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός και όχι κενός υπόχωρος του H. Έστω επίσης $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$. Τότε, υπάρχει κάποιο $\mathrm{m}_0 \in \mathrm{M}$ το οποίο να ελαχιστοποιεί την απόσταση του x από οποιοδήποτε άλλο σημείο $\mathrm{m} \in \mathrm{M}$, δηλαδή $\|\mathrm{x}-\mathrm{m}_0\| \leq \|\mathrm{x}-\mathrm{m}\| \;\; \forall \, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mathrm{x}-\mathrm{m}_0 \perp \mathrm{m} \;\; \forall \, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$ και το m_0 καλείται προβολή του x στο M. Αντιστρόφως, εάν το $\mathrm{m}_0 \in \mathrm{H}$ είναι ένα διάνυσμα για το οποίο ισχύει $\mathrm{x}-\mathrm{m}_0 \perp \mathrm{m} \;\; \forall \, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$, τότε ισχύει $\|\mathrm{x}-\mathrm{m}_0\| \leq \|\mathrm{x}-\mathrm{m}\| \; \forall \, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$.

Θεώρημα 2.2 – Θεώρημα διαχωριστικής προβολής

Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και M, N δύο κλειστοί και όχι κενοί υπόχωροι του H, που να είναι αμοιβαία ορθογώνιοι. Έστω επίσης $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$. Τότε, η ορθογώνια προβολή του x στο υποσύνολο $\mathrm{M}+\mathrm{N}$ είναι m_0+n_0, όπου τα m_0 και n_0 είναι οι προβολές του x στους υποχώρους M και N αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.3 – Θεώρημα φωλιασμένης προβολής

Έστω M και N δύο υπόχωροι του χώρου Hilbert H για τους οποίους ισχύει $\mathrm{N} \leq \mathrm{M}$. Έστω επίσης $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι x_M και x_N αντιστοιχούν στις προβολές του x στους υποχώρους M και N αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι $\mathrm{x}_\mathrm{N} = (\mathrm{x}_\mathrm{M})_\mathrm{N}$, όπου $(\mathrm{x}_\mathrm{M})_\mathrm{N}$ η προβολή του x_M στον υποχώρο N.

Θεώρημα 2.4 – Θεώρημα δυϊκής προβολής

Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός και όχι κενός υπόχωρός του. Έστω επίσης $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$. Τότε, υπάρχει ένα $\mathrm{m}' \in \mathrm{M}$ με $\|\mathrm{m}'\| = 1 \colon (\mathrm{x}|\mathrm{m}') \geq (\mathrm{x}|\mathrm{m}) \; \forall \, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$ με $\|\mathrm{m}\| = 1$. Επιπλέον, εάν η προβολή m_0 του x πάνω στο M είναι μη μηδενική, τότε το m΄ είναι μοναδικό και θετικό πολλαπλάσιο του m_0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2.2.2 Εξίσωση τιμολόγησης της CPF

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες που αναφερθήκαμε προηγουμένως στην προσπάθεια τιμολόγησης των μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων θα πρέπει να ορίσουμε το κατάλληλο χώρο Hilbert. Σε αυτόν τον χώρο τα διανύσματα είναι τυχαίες μεταβλητές. Ορίζουμε ως αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής y, την $\mathrm{E(y)}$ ή $\bar{\mathrm{y}}$. Επίσης, η διακύμανση της y ορίζεται ως $\sigma^2 = \mathrm{E}[(\mathrm{y}-\bar{\mathrm{y}})^2]$, ενώ η τυπική απόκλιση ως $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Θεωρούμε εκείνες τις τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $\mathrm{E}(\mathrm{y}^2) < \infty$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το εσωτερικό γινόμενο δύο στοιχείων y_1, y_2 που ανήκουν στο χώρο Hilbert ορίζεται ως:

$$(\mathrm{y}_1|\mathrm{y}_2) = \mathrm{E}(\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2),$$

ενώ η νόρμα ενός στοιχείου y στο χώρο Hilbert ορίζεται ως:

$$\|\mathrm{y}\| = \sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{y}^2)}.$$

Επίσης, θεωρούμε ότι ο H είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ανεξάρτητων διανυσμάτων (ή τυχαίων μεταβλητών) τα οποία δημιουργούν όλα τα άλλα με γραμμικό συνδυασμό. Επίσης, στην ανάλυση μας, αντιστοιχίζουμε τα περιουσιακά στοιχεία με τυχαίες μεταβλητές. Τα περιουσιακά στοιχεία αγοράζονται τη στιγμή 0 και πωλούνται τη στιγμή 1. Ακόμα, το ποσό πώλησης ενός περιουσιακού στοιχείου αντιστοιχεί στα έσοδα από το συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο και τα έσοδα αντιστοιχούν σε μία τυχαία μεταβλητή. Αρχικά, υποθέτουμε ότι υπάρχει διαθέσιμο ένα σύνολο από n περιουσιακά στοιχεία με έσοδα y_1, y_2, …, y_n αντίστοιχα, τα οποία ανήκουν στο χώρο Hilbert. Η τιμή καθενός από τα n περιουσιακά στοιχεία, η οποία αντιστοιχεί στο καθένα που αγοράζεται τη στιγμή 0, είναι P_1, P_2,…, P_n αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός αυτών των n εσόδων προσδιορίζει ένα περιουσιακό στοιχείο με την τιμή του να προσδιορίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των τιμών τους. Δηλαδή, το περιουσιακό στοιχείο $\mathrm{w}_1\mathrm{y}_1 + \mathrm{w}_2\mathrm{y}_2 + \cdots + \mathrm{w}_\mathrm{n}\mathrm{y}_\mathrm{n}$ έχει τιμή $\mathrm{w}_1\mathrm{P}_1 + \mathrm{w}_2\mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{w}_\mathrm{n}\mathrm{P}_\mathrm{n}$. Τα n αρχικά περιουσιακά στοιχεία και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους ορίζουν έναν υπόχωρο M του H ($M \leq \mathrm{H}$).

Υποθέτουμε πλέον ότι έχουμε $n+1$ περιουσιακά στοιχεία, από τα οποία τα πρώτα n είναι περιουσιακά στοιχεία τα οποία εμπεριέχουν κίνδυνο και το τελευταίο είναι το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι και αυτά τα περιουσιακά στοιχεία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ο υπόχωρος στον οποίο ανήκουν αυτά τα $n+1$ περιουσιακά στοιχεία είναι ο S, ενώ όπως έχουμε αναφέρει τα πρώτα n περιουσιακά στοιχεία παράγουν το χώρο M ($M \leq S$). Ας υποθέσουμε τώρα ένα νέο σύνολο εσόδων το οποίο ορίζεται ως:

$$y_i' = y_i - \bar{y}_i, \ \text{για} \ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

και το περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο R, τα οποία ανήκουν στον υπόχωρο S. Ορίζουμε τον υπόχωρο που παράγεται από τα πρώτα n μετασχηματισμένα αυτά έσοδα ως M΄ και το μονοδιάστατο υπόχωρο που παράγεται από το περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο ως N, δηλαδή $M', N \leq S$. Όμως, εφόσον ισχύει ότι $E(y_i' R) = 0, \ \forall \, i = 1, 2, \dots, n$ το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου είναι ορθογώνιο σε όλα τα άλλα περιουσιακά στοιχεία.

<u>Απόδειξη:</u>

$$E(y_i' R) = RE(y_i') = RE(y_i - \bar{y}_i) = R[E(y_i) - \bar{y}_i] = R[\bar{y}_i - \bar{y}_i] = 0. \ \blacksquare$$

Έτσι, το M΄ και το N είναι αμοιβαία ορθογώνια. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2, μπορούμε να ορίσουμε την προβολή ενός τυχαίου εσόδου x μέσα στον υπόχωρο S, βρίσκοντας ξεχωριστά τις προβολές του x στον υπόχωρο M΄ και στον υπόχωρο N και έπειτα να προσθέσουμε τα δύο αποτελέσματα.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4, η προβολή $x_{M'}$ του x στο χώρο M΄, ισούται με

$$x_{M'} = \beta_{x,m'} y_{m'}, \ \text{οπού} \ \ \beta_{x,m'} = \frac{\operatorname{cov}(y_{m'}, x)}{\sigma^2(y'_{m'})}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Βάσει του Θεωρήματος 2.4 η προβολή $x_{M'}$ του x στο χώρο M΄ ισούται με κάποιο πολλαπλάσιο του εσόδου $y'_{m'}$, το όποιο ανήκει στο M΄, τέτοιο ώστε η νόρμα του να ισούται με 1 και να μεγιστοποιεί το εσωτερικό γινόμενο του x με οποιοδήποτε άλλο τέτοιο $y' \in M'$. Δηλαδή,

$$y'_{m'} \in M': \|y'_{m'}\| = 1 \;\;\&\;\; \max_{\substack{y' \in M' \\ \|y'\|=1}} (y'|x) = (y'_{m'}|x) = E(y'_{m'}x)\,.$$

Αφού μπορούμε να δείξουμε, όπως φαίνεται και παρακάτω, ότι η αναμενόμενη τιμή οποιουδήποτε διανύσματος του Μ΄ ισούται με μηδέν αυτό σημαίνει ότι $E(y'x) = cov(y', x),\ \forall\ y' \in M'$.

Πράγματι, οποιοδήποτε διάνυσμα y' του Μ΄ έχει αναμενόμενη τιμή μηδέν:

$$E(y'_i) = E(y_i - \bar{y}_i) = E(y_i) - \bar{y}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_i = 0$$

άρα ισχύει ότι $E(y'_{m'}) = 0$, αφού το $y'_{m'}$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των εσόδων $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ που παράγουν τον Μ΄.

Όμως, επίσης ισχύει ότι:

$$cov(y'_{m'}, x) = E(y'_{m'}x) - E(y'_{m'})E(x) = E(y'_{m'}x).$$

Αναπροσαρμόζοντας την αναζήτησή μας, μπορούμε να πούμε ότι η προβολή $x_{M'}$ του x στο χώρο Μ΄ ισούται με το πολλαπλάσιο κάποιου $y'_{m'} \triangleq y'$ το οποίο ανήκει στο Μ΄, τέτοιο ώστε η νόρμα του να ισούται με 1 και η συνδιακύμανσή του με το x $[cov(y', x)]$ να μεγιστοποιείται. Δηλαδή,

$$y'_{m'} \triangleq y' \in M': \|y'\| = 1 \;\;\&\;\; cov(y', x) \text{ να μεγιστοποιείται.}$$

Ισχύει όμως ότι:

$$1 = \|y'\| = \|y'\|^2 = (y'|y') = E(y'y') = E(y'^2) = \sigma^2(y').$$

Οπότε, στην πραγματικότητα είναι σαν να αναζητάμε οποιοδήποτε $y' \in M'$ το οποίο να μεγιστοποιεί το συντελεστή συσχέτισης:

$$\rho(y', x) = \frac{cov(y', x)}{\sigma(y')\sigma(x)} = \frac{cov(y', x)}{\sigma(x)},$$

καθώς ο παρονομαστής μπορεί να θεωρηθεί ως μια σταθερά ως προς $y' \in M'$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Επομένως, πλέον μπορούμε να προχωρήσουμε ώστε να δείξουμε τη ζητούμενη σχέση. Αρχικά ορίζουμε,

$x_{M'} = \alpha y'_{m'}$: $y'_{m'}$ να μεγιστοποιεί το $\mathrm{cov}(y'_{m'}, x)$ υπό τον περιορισμό $\|y'_{m'}\| = 1$.

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha = \beta_{x,m'}$. Πράγματι:

Ισχύει ότι $x - x_{M'} \perp y',\ \forall\, y' \in M' \Leftrightarrow x - \alpha y'_{m'} \perp y',\ \forall\, y' \in M'$

$$\Leftrightarrow E[(x - \alpha y'_{m'})y'_{m'}] = E(xy'_{m'}) - \alpha E[(y'_{m'})^2] = E(xy'_{m'}) - \alpha\sigma^2(y'_{m'}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{E(xy'_{m'})}{\sigma^2(y'_{m'})} = \frac{\mathrm{cov}(y'_{m'}, x)}{\sigma^2(y'_{m'})} = \beta_{x,m'}. \quad \blacksquare$$

Επίσης, η προβολή x_N του x στο χώρο N ισούται με $\bar{x}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Γνωρίζουμε ότι:

$$x - x_N \perp n \ \ \forall\, n \in N \Leftrightarrow x - x_N \perp R \text{ αφού } N = \{R\}.$$

Επομένως,

$$E[(x - x_N)R] = 0 \Leftrightarrow R[E(x) - E(x_N)] = 0 \Leftrightarrow E(x) = E(x_N) \Leftrightarrow x_N = \bar{x}. \quad \blacksquare$$

Τελικά, καταλήγουμε στο ότι η προβολή του x στο S ισούται με:

$$x_S = \bar{x} + \beta_{x,m'} y'_{m'},\ \text{ όπου } \beta_{x,m'} = \frac{\mathrm{cov}(y'_{m'}, x)}{\sigma^2(y'_{m'})}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $y'_{m'}$ είναι μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. Δηλαδή ισχύει:

$$y'_{m'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i{}' \ ,\ \text{ για μοναδική επιλογή των } \alpha_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Ορίζουμε το στοιχείο του M:

$$y_m \triangleq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \ ,\ \text{ για αυτή τη μοναδική επιλογή των } \alpha_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε:

$$y_m - y'_{m'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i{}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i - y_i{}')$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(y_i) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) = E(y_m)$$

$$\Leftrightarrow y_m = y'_{m'} + \bar{y}_m.$$

Επιπρόσθετα, αφού το $y'_{m'}$ μεγιστοποιεί το $\frac{\text{cov}(y',x)}{\sigma(y')}$ στον υπόχωρο M΄ τότε και το y_m θα μεγιστοποιεί το $\frac{\text{cov}(y,x)}{\sigma(y)}$ στον υπόχωρο M, καθώς η πρόσθεση οποιασδήποτε σταθεράς στο $y'_{m'}$ δεν αλλάζει τη συνδιακύμανση ή τη διακύμανση. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την προβολή του x στο χώρο S ως:

$$x_S = \bar{x} + \beta_{x,m}(y_m - \bar{y}_m), \text{όπου } \beta_{x,m} = \frac{\text{cov}(y_m, x)}{\sigma^2(y_m)} \quad (4)$$

Αφού όμως μπορούμε να γράψουμε ότι η τιμή του εσόδου y_i ισούται με P_i και ότι η τιμή του εσόδου $y_i - \bar{y}_i$ ισούται με $P_i - \frac{\bar{y}_i}{R}$, αυτό σημαίνει ότι η τιμή του εσόδου $y_m - \bar{y}_m$ ισούται με $P_m - \frac{\bar{y}_m}{R}$ και η τιμή της προβολής του x θα ισούται με:

$$P_x = \frac{1}{R}\left[\bar{x} - \beta_{x,m}(\bar{y}_m - P_m R)\right].$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε από την εξίσωση (4) ότι:

$$x_S = \bar{x} + \beta_{x,m}(y_m - \bar{y}_m)$$

$$\Leftrightarrow P_x = \frac{\bar{x}}{R} + \beta_{x,m}\left(P_m - \frac{\bar{y}_m}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_x = \frac{1}{R}\left[\bar{x} - \beta_{x,m}(\bar{y}_m - P_m R)\right]. \quad \blacksquare$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Θέλοντας να συγκεντρώσουμε όλα τα στοιχεία που αναφέραμε ως εδώ στη συγκεκριμένη ενότητα παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.5 – CPF

Η τιμή ενός εσόδου της μη διαπραγματεύσιμης μεταβλητής Β στην οποία καταλήγουμε με τη μέθοδο της προβολής ισούται με :

$$P_B = \frac{1}{R}\left[\bar{B} - \beta_{B,M}(\bar{M} - P_M R)\right], \qquad (5)$$

όπου Μ είναι το έσοδο ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου το οποίο έχει τη μέγιστη συσχέτιση με τη Β, με P_M συμβολίζουμε την τιμή του Μ και τέλος ο συντελεστής $\beta_{B,M}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\beta_{B,M} = \frac{\mathrm{cov}(B, M)}{\sigma^2(M)}. \qquad (6)$$

Η εξίσωση (5) είναι παρόμοια σε δομή με την εξίσωση (3) του CAPM, με τη διαφορά ότι το έσοδο του Μ με τη μέγιστη συσχέτιση ως προς τη Β αντικαθιστά το έσοδο του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου της αγοράς. Έτσι, προκύπτει η εξής σημαντική διαφορά. Ενώ στο CAPM το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς δεν εξαρτάται από τη Β, στην CPF το Μ εξαρτάται από τη Β. Βασικό πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι το περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση μπορεί να υπολογιστεί πολύ πιο αξιόπιστα από ότι το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να αναλύσουμε μία νέα επένδυση στον κλάδο των ακινήτων τότε η σύγκριση με παρόμοια επιχειρηματικά πλάνα στην ίδια περιοχή θα μας δώσει σίγουρα ένα πιο αξιόπιστο αποτελέσματα από ότι αν χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο σύγκρισης ένα γενικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Η CPF αποτελεί μία γενίκευση της συνηθισμένης πρακτικής τιμολόγησης εταιριών μέσω συγκριτικής τους ανάλυσης με άλλες παρόμοιες εταιρίες.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5 μπορούμε να εκφράσουμε την τιμής μιας μεταβλητής σε όρους της συνδιακύμανσής της με το περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση. Παραθέτοντας όμως ακολούθως το Θεώρημα 2.6

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

δείχνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή ενός παραγώγου C της μεταβλητής B σε όρους της συνδιακύμανσης της B με το M αντί του C με το M.

Θεώρημα 2.6

Έστω ότι η B είναι μια διωνυμική μεταβλητή και το C είναι ένα παράγωγο της B. Επίσης, έστω ότι το M είναι το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με τη θεωρία του Markowitz ή το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη συσχέτιση με τη μεταβλητή B. Τότε η τιμή του C στην οποία καταλήγουμε με τη μέθοδο της προβολής ισούται με:

$$P_c = \frac{1}{R}[qC_u + (1-q)C_d], \quad (7)$$

όπου

$$q = p - \frac{\beta_{B,M}(\overline{M} - P_M R)}{B_u - B_d} \quad (8)$$

ή αντίστοιχα

$$q = p - \delta[\overline{M} - P_M R]. \quad (9)$$

Επίσης,

$$\delta = \rho_{B,M}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sigma_M}, \quad (10)$$

όπου το $\rho_{B,M}$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του B και του M και ορίζεται ως

$$\rho_{B,M} = \frac{\mathrm{Cov}(B,M)}{\sigma_B \sigma_M}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Απόδειξη:

Εάν το M έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να μεγιστοποιεί τη συσχέτιση με τη μεταβλητή B, θα μεγιστοποιεί επίσης και τη συσχέτιση με τη μεταβλητή C. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.2 ισχύει ότι:

$$\mathrm{cov}(C,M) = \frac{(C_u - C_d)}{(B_u - B_d)}\mathrm{cov}(B,M).$$

Οπότε από την εξίσωση (5) έχουμε:

$$P_c = \frac{1}{R}\left[\bar{C} - \beta_{C,M}(\bar{M} - P_M R)\right] = \frac{1}{R}\left[pC_u + (1-p)C_d - \frac{\mathrm{Cov}(C,M)}{\mathrm{Var}(M)}(\bar{M} - P_M R)\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[pC_u + (1-p)C_d - \frac{\mathrm{Cov}(B,M)}{\mathrm{Var}(M)}(\bar{M} - P_M R)\frac{(C_u - C_d)}{(B_u - B_d)}\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[p - \frac{\mathrm{Cov}(B,M)(\bar{M} - P_M R)}{\mathrm{Var}(M)(B_u - B_d)}\right]C_u + \frac{1}{R}\left[(1-p) + \frac{\mathrm{Cov}(B,M)(\bar{M} - P_M R)}{\mathrm{Var}(M)(B_u - B_d)}\right]C_d$$

$$= \frac{1}{R}\left[p - \frac{\beta_{B,M}(\bar{M} - P_M R)}{(B_u - B_d)}\right]C_u + \frac{1}{R}\left[(1-p) + \frac{\beta_{B,M}(\bar{M} - P_M R)}{(B_u - B_d)}\right]C_d.$$

Όμως εκφράζοντας αυτήν τη σχέση σε μορφή ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο καταλήγουμε στην εξίσωση (7), όπου το q ορίζεται από την (8).

Επίσης ξέρουμε ότι:

$$\rho_{B,M} = \frac{\mathrm{Cov}(B,M)}{\sigma_M \sigma_B}$$

άρα

$$q = p - \frac{\beta_{B,M}(\bar{M} - P_M R)}{B_u - B_d} = p - \frac{\mathrm{Cov}(B,M)(\bar{M} - P_M R)}{\sigma_M^2 (B_u - B_d)}$$

$$= p - \frac{\mathrm{Cov}(B,M)}{\sigma_B \sigma_M}\frac{\sigma_B}{\sigma_M}\frac{(\bar{M} - P_M R)}{(B_u - B_d)} = p - \rho_{B,M}\frac{\sigma_B}{\sigma_M}\frac{(\bar{M} - P_M R)}{(B_u - B_d)}$$

$$= p - \rho_{B,M}\sqrt{p(1-p)}\frac{(\bar{M} - P_M R)}{\sigma_M} = p - \delta(\bar{M} - P_M R),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (10) καθώς και τη γνωστή σχέση

$$\sigma_B^2 = p(1-p)(B_u - B_d)^2$$

από την Ενότητα 1.2. ■

Παράδειγμα 2.1 – Εφαρμογή του Θεωρήματος 2.6 στην περίπτωση που το B αντιστοιχεί σε μια διαπραγματεύσιμη διωνυμική μεταβλητή

Έστω ότι η διωνυμική μεταβλητή B, με P_B=1 κάτω από κατάλληλη κανονικοποίηση, αντιπροσωπεύει κάποιο περιουσιακό στοιχείο διαπραγματεύσιμο σε οργανωμένη αγορά. Επομένως, το διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση με τη B είναι ο ίδιος της ο εαυτός. Έτσι, μπορούμε να θέσουμε $M = B$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\beta_{B,M}$=1. Από την εξίσωση (8) έχουμε:

$$q = p - \frac{(\overline{B} - R)}{B_u - B_d} = p - \frac{pB_u + (1-p)B_d - R}{B_u - B_d}$$

$$= \frac{p(B_u - B_d) - pB_u + (1-p)B_d - R}{B_u - B_d} =$$

$$= \frac{R - B_d}{B_u - B_d},$$

η οποία όπως γνωρίζουμε είναι η πιθανότητα που παίρνουμε από το διωνυμικό μοντέλο για την ανοδική κίνηση ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου, στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

2.3 Τιμολόγηση Ελεύθερη από Arbitrage

Όπως παρατηρούμε από την εξίσωση (8) οι ποσότητες q ή $1-q$ μπορεί να είναι αρνητικές. Εάν όμως συμβεί αυτό, εισάγοντας το παράγωγο C στην αγορά στην τιμή που υποδεικνύεται από την εξίσωση (7) θα δημιουργηθούν ευκαιρίες για arbitrage. Στη συγκεκριμένη ενότητα θα δείξουμε τα πλαίσια μέσα στα οποία το q διατηρεί τα χαρακτηριστικά των ψευδοπιθανοτήτων και άρα η τιμολόγησή μας είναι ελεύθερη από ευκαιρίες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

για arbitrage. Η σχέση $q+(1-q)=1$ υποκρύπτει ότι τόσο το q όσο και το $(1-q)$ δεν μπορεί να είναι αρνητικά. Στη συνέχεια της ενότητας δείχνουμε ότι τα τελευταία έχουν χαρακτηριστικά ψευδοπιθανοτήτων είτε αναφερόμαστε στην πλειοψηφία των πραγματικών περιπτώσεων της αγοράς είτε όταν υπάρχει κάποιο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο A, το οποίο ακολουθεί και αυτό διωνυμική κατανομή και είναι μέγιστα συσχετισμένο με το C.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (9) και (10) βρίσκουμε ότι:

$$q = p - \rho_{B,M}\sqrt{p(1-p)}\frac{(\bar{M} - P_M R)}{\sigma_M}.$$

Όμως, υποθέτοντας ότι το M αντιπροσωπεύει το χαρτοφυλάκιο του Markowitz η ποσότητα $\frac{(\bar{M}-P_M R)}{\sigma_M}$ αντιπροσωπεύει την εφαπτομένη της γωνίας α της υπερβάλλουσας απόδοσης του M διαιρούμενη με την τυπική απόκλισή του. Ορίζουμε έτσι,

$$\tan\alpha = \frac{(\bar{M} - P_M R)}{\sigma_M}.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του CAPM αυτό το κλάσμα αποτελεί το δείκτη του Sharpe και ισούται με τη γωνία της γραμμής της κεφαλαιαγοράς. Οπότε αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε ότι:

$$q = p - \rho_{B,M}\sqrt{p(1-p)}\tan\alpha. \quad (11)$$

Τέλος, υποθέτοντας ότι $\tan\alpha \geq 0$, ώστε οι επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο να επενδύουν στο M, καταλήγουμε ότι:

$$q\begin{cases} \leq p \leq 1, \text{εάν } \rho \geq 0, \\ \geq p \geq 0, \text{εάν } \rho \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

2.3.1 Επιβεβαίωση της υπόθεσης βάσει στοιχείων της αγοράς

Η επαλήθευση της υπόθεσής, δηλαδή ότι το q διατηρεί τα χαρακτηριστικά των ψευδοπιθανοτήτων, μπορεί να γίνει στηριζόμενη σε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στοιχεία πολλών ερευνών του παρελθόντος. Ενδεικτικά αναφέροντας μία από αυτές, σύμφωνα με την έρευνα του J. Wilmot (2009) η μέση αθροιστική πραγματική υπερβάλλουσα απόδοση των μετοχών της Αμερικής για την περίοδο 1850 – 2008 ισούται με 6,2% ενώ η τυπική απόκλιση ισούται με 33,8%. Οπότε, σύμφωνα με αυτήν την έρευνα καταλήγουμε ότι ο συντελεστής του Sharpe ισούται με $6{,}2\%/33{,}8\% = 0{,}18$. Ελαστικοποιώντας λίγο τα κριτήρια μας, θέλοντας να αποδείξουμε την ισχύ της υπόθεσής μας σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, θεωρούμε ότι ο μέγιστος συντελεστής του Sharpe είναι το 1/3. Για να εξετάσουμε την ισχύ της σχέσης $0 \leq \mathrm{q} \leq 1$ σε όλες τις περιπτώσεις θα ελέγξουμε παρακάτω κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Α. Έστω ότι $\rho \geq 0$ άρα από την εξίσωση (12) $\mathrm{q} \leq 1$. Οπότε για να ελέγξουμε εάν $\mathrm{q} \geq 0$, θα θεωρήσουμε το ακραίο σενάριο, έστω δηλαδή ότι $\rho = 1$. Τότε η (11) γίνεται:

$$\mathrm{q} = \mathrm{p} - \sqrt{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}\frac{1}{3}.$$

Δεν έχουμε παρά να ελέγξουμε για ποια p ισχύει ότι $\mathrm{q} \geq 0$. Έτσι,

$$\mathrm{p} - \sqrt{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}\frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}(10\mathrm{p}-1) \geq 0.$$

Λύνοντας τη συγκεκριμένη ανισότητα παρατηρούμε ότι επαληθεύεται για όλα τα $\mathrm{p} \geq 0{,}1$.

Β. Έστω τώρα ότι $\rho \leq 0$ άρα $\mathrm{q} \geq 0$ από την εξίσωση (12). Οπότε για να εξετάσουμε εάν $\mathrm{q} \leq 1$, θα θεωρήσουμε το ακραίο σενάριο, έστω δηλαδή ότι $\rho = -1$. Τότε η (11) γίνεται:

$$\mathrm{q} = \mathrm{p} + \sqrt{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}\frac{1}{3}.$$

Όμως λύνοντας την παρακάτω ανισότητα

$$\mathrm{p} + \sqrt{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})}\frac{1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 10\mathrm{p}^2 - 19\mathrm{p} + 9 \geq 0,$$

βρίσκουμε ότι $\mathrm{q} \leq 1$ για κάθε $\mathrm{p} \leq 0{,}9$.

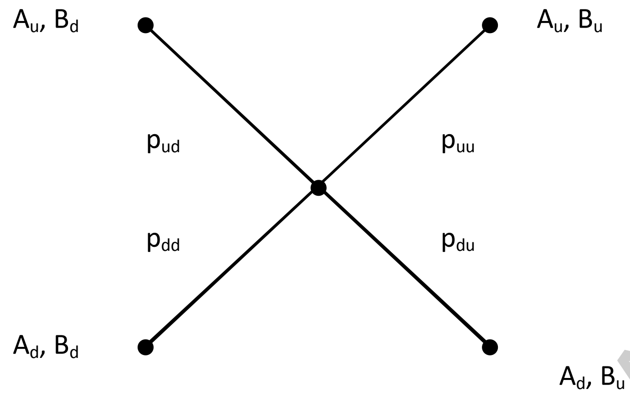
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι για ένα μεγάλο εύρος τιμών της πιθανότητας p για το οποίο το q διατηρεί τα χαρακτηριστικά των ψευδοπιθανοτήτων, πόσο δε μάλλον έχοντας στο μυαλό μας ότι τα περισσότερα διωνυμικά δέντρα κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας την πιθανότητα $\mathrm{p} = 0{,}5$ για το λόγο που θα δείξουμε στην επόμενη υποενότητα.

2.3.2 Επιβεβαίωση της υπόθεσης στο διπλό διωνυμικό δέντρο

Μία ειδική περίπτωση, χρήσιμη στην ανάλυση μας, είναι όταν το αντιπροσωπευτικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς, δηλαδή το περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση ή το χαρτοφυλάκιο του Markowitz, ακολουθεί και το ίδιο διωνυμική κατανομή. Έστω ότι το εν λόγω χαρτοφυλάκιο είναι το A. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathrm{P_A} = 1$ και ότι μπορεί να πάρει δύο δυνατές τιμές, την A_u και την A_d σε μία ανοδική ή καθοδική κίνηση, αντίστοιχα. Επίσης, υποθέτουμε ότι $\mathrm{A_d} \leq \mathrm{R} \leq \mathrm{A_u}$, έτσι ώστε να μην υπάρχουν ευκαιρίες για αντισταθμιστικό κέρδος. Επιπλέον, ορίζουμε την πιθανότητα μίας ανοδικής κίνησης του A ως p_A. Ακόμα, ισχύει ότι $\overline{\mathrm{A}} \geq \mathrm{R}$ ώστε η μέση απόδοση του A να υπερβαίνει αυτή του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, ενώ οι ανοδικές και καθοδικές κινήσεις του περιουσιακού στοιχείου A δεν συμπίπτουν απαραίτητα με αυτές του περιουσιακού στοιχείου B. Οι δύο μαζί μπορούν να απεικονισθούν σε ένα διπλό διωνυμικό πλέγμα όπως αυτό του Σχήματος 5 που ακολουθεί:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Σχήμα 5. Διπλό διωνυμικό μοντέλο.

Οι κόμβοι αντιστοιχούν στις καταστάσεις uu, ud, du και dd με το πρώτο γράμμα να αντιστοιχεί στην κίνηση της μεταβλητής A και το δεύτερο στην κίνηση της μεταβλητή B. O κεντρικός κόμβος αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση. Πριν προχωρήσουμε στην επιβεβαίωση της αρχική μας υπόθεσης καλό θα ήταν να αναφερθούμε στο πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διπλό διωνυμικό δέντρο αλλά και να το επιλύσουμε.

<u>Α) Κατασκευή του πλέγματος με αντιστοίχησή του στους κοινούς μέσους, διακυμάνσεις και συνδιακύμανση</u>

Σε αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι οι τυπικοί μέσοι, οι διακυμάνσεις και η συνδιακύμανση αντιστοιχούν στο δικτυωτό πλέγμα. Χρησιμοποιώντας τους μέσους και τις διακυμάνσεις ορίζουμε τα p_A, p_B, A_u, A_d, B_u και B_d. Η συνδιακύμανση χρησιμοποιείται για να ορίσουμε ένα πλήρες σύνολο πιθανοτήτων του πλέγματος που απεικονίζεται στο Σχήμα 5. Έτσι, οι πιθανότητες επιλέγονται ώστε να ικανοποιούν τις εξής εξισώσεις:

$$p_{uu} + p_{ud} = p_A,$$

$$p_{uu} + p_{du} = p_B,$$

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1,$$

$$A_u B_u p_{uu} + A_u B_d p_{ud} + A_d B_u p_{du} + A_d B_d p_{dd} = c + E_A E_B, \quad (13)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

όπου τα E_A και E_B συμβολίζουν τις αναμενόμενες τιμές των περιουσιακών στοιχείων A και B, ενώ το c ισούται με τη συνδιακύμανση τους και βρίσκεται χρησιμοποιώντας τον τύπο $\mathrm{cov}(A, B) = E(AB) - E(A)E(B)$.

Στην περίπτωση ανεξαρτησίας των δύο περιουσιακών στοιχείων, δηλαδή $c = 0$, μπορούμε να βρούμε την εξής λύση στο παραπάνω σύστημα με αντικατάσταση:

$$p_{uu} = p_A p_B,$$

$$p_{ud} = p_A(1 - p_B),$$

$$p_{du} = (1 - p_A)p_B,$$

$$p_{dd} = (1 - p_A)(1 - p_B).$$

Στην περίπτωση που $c \neq 0$, η γραμμικότητα του συστήματος (13) υποδεικνύει ότι κάθε πιθανή λύση μπορεί να βρεθεί με την πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου του c. Έστω $\alpha_{uu}c$, $\alpha_{ud}c$, $\alpha_{du}c$, $\alpha_{dd}c$ οι όροι που πρέπει να προστεθούν στις αντίστοιχες πιθανότητες. Δηλαδή η λύση θα ικανοποιεί το σύστημα:

$$p_{uu} + \alpha_{uu}c + p_{ud} + \alpha_{ud}c = p_A,$$

$$p_{uu} + \alpha_{uu}c + p_{du} + \alpha_{du}c = p_B,$$

$$p_{uu} + \alpha_{uu}c + p_{ud} + \alpha_{ud}c + p_{du} + \alpha_{du}c + p_{dd} + \alpha_{dd}c = 1.$$

Από την πρώτη σχέση των παραπάνω συστημάτων βρίσκουμε ότι $\alpha_{ud} = -\alpha_{uu}$. Ομοίως, εκμεταλλευόμενοι τη δεύτερη σχέση του συστήματος (13) βρίσκουμε ότι $\alpha_{du} = -\alpha_{uu}$. Σε συνδυασμό με την τρίτη σχέση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει κάποιο $\bar{c}$ τέτοιο ώστε:

$$\alpha_{uu}c = \bar{c},$$

$$\alpha_{ud}c = -\bar{c},$$

$$\alpha_{du}c = -\bar{c},$$

$$\alpha_{dd}c = \bar{c}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Χρησιμοποιώντας τώρα την τέταρτη εξίσωση του συστήματος (13), μπορούμε να βρούμε το $\bar{c}$. Πράγματι,

$$(A_u B_u - A_u B_d - A_d B_u + A_d B_d)\bar{c} = c \Leftrightarrow \bar{c} = \frac{c}{(A_u - A_d)(B_u - B_d)}. \quad (14)$$

Όμως, ξέρουμε ότι

$$c = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B,$$

όπου

$$\sigma_A = \sqrt{p_A(1 - p_{A)}}(A_u - A_d)$$

και

$$\sigma_B = \sqrt{p_B(1 - p_{B)}}(B_u - B_d).$$

Οπότε, από τη σχέση (14) έχουμε:

$$\bar{c} = \frac{\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{(A_u - A_d)(B_u - B_d)} = \frac{\rho_{A,B}\sqrt{p_A(1 - p_{A)}}(A_u - A_d)\sqrt{p_B(1 - p_{B)}}(B_u - B_d)}{(A_u - A_d)(B_u - B_d)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{c} = \rho_{A,B}\sqrt{p_A(1 - p_{A)}p_B(1 - p_{B)}}, \quad (15)$$

και η ολοκληρωμένη λύση του συστήματος (13) αποδεικνύεται ότι είναι η εξής:

$$p_{uu} = p_A p_B + \bar{c},$$

$$p_{ud} = p_A(1 - p_B) - \bar{c},$$

$$p_{du} = (1 - p_A)p_B - \bar{c},$$

$$p_{dd} = (1 - p_A)(1 - p_B) + \bar{c}. \quad (16)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

<u>Β) Κατασκευή του πλέγματος με αντιστοίχησή του στους λογαριθμικούς μέσους, διακυμάνσεις και συνδιακύμανση</u>

Σε αυτήν την περίπτωση θα κατασκευάσουμε το πλέγμα με σκοπό την αντιστοίχησή του με τους λογαριθμικούς μέσους, τις λογαριθμικές διακυμάνσεις και τη λογαριθμική συνδιακύμανση. Οι βασικοί άγνωστοι που αναζητούμε αυτή τη φορά είναι το $\alpha_u = \ln(A_u)$, το $\alpha_d = \ln(A_d)$ και το p_A. Οπότε, οι εξισώσεις που θα πρέπει να ταιριάξουν στο Α πλέον είναι οι εξής:

$\overline{\alpha} \triangleq \overline{\ln A} = p_A\alpha_u + (1 - p_A)\alpha_d$ και

$\sigma_\alpha^2 \triangleq \mathrm{var}(\ln A) = p_A(1 - p_A)(\alpha_u - \alpha_d)^2$.

Έτσι, το σύστημα (13) μπορεί να λυθεί αντικαθιστώντας το A_u με το α_u, κτλ., και το c με το $\mathrm{cov}(\ln A, \ln B)$. Έπειτα, και αφού βρούμε τις πιθανότητες, το α_u αντικαθίσταται από το A_u, κτλ., στην τελευταία εξίσωση του συστήματος και λύνοντας ως προς c βρίσκουμε την κοινή διακύμανση. Γενικά ισχύει,

$$c = \mathrm{cov}(A, B) = \rho\sigma_A\sigma_B = \rho\sqrt{p_A(1 - p_{A)}p_B(1 - p_{B)}}(A_u - A_d)(B_u - B_d), \quad (17)$$

όπου το ρ είναι ο τυπικός συντελεστής συσχέτισης. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ξεχωριστά δικτυωτά πλέγματα για τις μεταβλητές Α και Β δεν μπορούν πάντα να συνδυαστούν ώστε να ταιριάξουν με ένα συγκεκριμένο συντελεστή συσχέτισης.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (14), (16) και (17), η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε $p_{uu} \geq 0$ είναι η ακόλουθη:

$$p_{uu} \geq 0 \Leftrightarrow p_A p_B + \frac{\rho\sqrt{p_A(1 - p_{A)}p_B(1 - p_{B)}}(A_u - A_d)(B_u - B_d)}{(A_u - A_d)(B_u - B_d)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho \geq -\left[\frac{p_A p_B}{(1 - p_A)(1 - p_B)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Ομοίως,

$$p_{dd} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq -\left[\frac{p_A p_B}{(1 - p_A)(1 - p_B)}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$p_{ud} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq \left[\frac{p_A(1-p_B)}{p_B(1-p_A)}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (20)$$

$$p_{du} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq \left[\frac{p_A(1-p_B)}{p_B(1-p_A)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (21)$$

Στην περίπτωση όμως που θέλουμε οι πιθανότητες στο διπλό διωνυμικό πλέγμα να είναι μη αρνητικές θα πρέπει να ικανοποιούνται πάντα οι σχέσεις (18) έως (21). Αποδεικνύεται ότι η μόνη πιθανή λύση με τον περιορισμό ότι $\rho \in [-1, 1]$ είναι η $p_A = p_B = \frac{1}{2}$. Μάλιστα, αυτός είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους τα περισσότερα διωνυμικά μοντέλα υποστηρίζουν την χρήση ίσων πιθανοτήτων.

Αφού περιγράψαμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε αλλά και να λύσουμε ένα διπλό διωνυμικό δικτυωτό πλέγμα πλέον μπορούμε να συνεχίσουμε στην επιβεβαίωση της αρχικής μας υπόθεσης. Όταν το A είναι το αντιπροσωπευτικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς που χρησιμοποιείται στην εξίσωση CAPM, μπορούμε να θέσουμε $M = A$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον δείκτη του Sharpe έχουμε:

$$\tan\alpha = \frac{[\bar{M} - P_M R]}{\sigma_M} = \frac{[\bar{A} - P_A R]}{\sigma_A} = \frac{\bar{A} - R}{\sigma_A} = \frac{p_A A_u + (1-p_A)A_d - R}{\sigma_A}$$

$$= \frac{p_A A_u + A_d - p_A A_d - R}{\sigma_A} = \frac{p_A(A_u - A_d) + (A_d - R)}{\sigma_A}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $A_d \leq R$ και άρα $A_d - R \leq 0$. Επομένως μπορούμε να συνεχίσουμε την παραπάνω ισότητα ως εξής:

$$\tan\alpha \leq \frac{p_A(A_u - A_d)}{\sigma_A} = \frac{p_A(A_u - A_d)}{\sqrt{p_A(1-p_A)}(A_u - A_d)} = \frac{p_A}{\sqrt{p_A(1-p_A)}}. \quad (22)$$

Ομοίως με την Υποενότητα 2.3.1 θα εξακριβώσουμε εάν το q διατηρεί τα χαρακτηριστικά των ψευδοπιθανοτήτων εξετάζοντας κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Α. Έστω ότι $\rho \geq 0$, άρα $q \leq 1$. Θέλουμε να βρούμε πότε επαληθεύεται ότι $q \geq 0$. Ισχύει από τη σχέση (11) ότι:

$$q = p - \rho\sqrt{p(1-p)}\tan\alpha \overset{(22)}{\Longleftrightarrow} q \geq p - \rho\sqrt{p(1-p)}\frac{p_A}{\sqrt{p_A(1-p_A)}}$$

$$\Leftrightarrow q \geq p - \rho\sqrt{\frac{p(1-p)}{p_A(1-p_A)}}p_A.$$

Αναδιατάσσοντας τη σχέση (21) ως εξής:

$$\rho \leq \left[\frac{p_A(1-p)}{p(1-p_A)}\right]^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \rho \leq \sqrt{\frac{p(1-p_A)}{p_A(1-p)}},$$

και αντικαθιστώντας την στην παραπάνω ανισότητα έχουμε:

$$q \geq p - \sqrt{\frac{p(1-p_A)}{p_A(1-p)}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{p_A(1-p_A)}}p_A$$

$$\Leftrightarrow q \geq p - p \Leftrightarrow q \geq 0.$$

Β. Έστω ότι $\rho \leq 1$ άρα $q \geq 0$. Ομοίως, θα εξετάσουμε πότε επαληθεύεται ότι $q \leq 1$ ή ισοδύναμα $1 - q \geq 0$. Ισχύει από την εξίσωση (11) ότι:

$$q = p - \rho\sqrt{p(1-p)}\tan\alpha \Leftrightarrow 1 - q = 1 - p + \rho\sqrt{p(1-p)}\tan\alpha.$$

Αναδιατάσσοντας τη σχέση (19) ως εξής:

$$\rho \geq -\left[\frac{pp_A}{(1-p)(1-p_A)}\right]^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \rho \geq -\sqrt{\frac{(1-p)(1-p_A)}{pp_A}},$$

και εφαρμόζοντάς την στην παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$1 - q \geq 1 - p - \sqrt{\frac{(1-p)(1-p_A)p(1-p)}{pp_A}}\tan\alpha$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\overset{(22)}{\Longleftrightarrow} 1-\mathrm{q} \geq 1-\mathrm{p}-\sqrt{\frac{(1-\mathrm{p})^2(1-\mathrm{p_A})}{\mathrm{p_A}\mathrm{p_A}(1-\mathrm{p_A})}}\mathrm{p_A}$$

$$\Leftrightarrow 1-\mathrm{q} \geq 1-\mathrm{p}-\sqrt{\frac{(1-\mathrm{p})^2}{\mathrm{p_A}^2}}\mathrm{p_A}$$

$$\Leftrightarrow 1-\mathrm{q} \geq 1-\mathrm{p}-\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p_A}}\mathrm{p_A}$$

$$\Leftrightarrow 1-\mathrm{q} \geq 1-\mathrm{p}-1+\mathrm{p} \qquad \Leftrightarrow 1-\mathrm{q} \geq 0.$$

Επομένως, το q διατηρεί τα χαρακτηριστικά των ψευδοπιθανοτήτων κάτω από τους περιορισμούς που θέσαμε νωρίτερα στις σχέσεις (18) έως (21).

2.4 Τιμολόγηση σε Μηδενική Βάση

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι όλοι οι επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο θα κατέληγαν στην ίδια τιμή για το παράγωγο C.

Υποθέτουμε έναν επενδυτή ο οποίος σχεδιάζει ένα χαρτοφυλάκιο από τα υπάρχοντα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία θέλοντας να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητας του πλούτου του U, όπου η συνάρτηση U είναι συνεχώς διαφορίσιμη, αύξουσα και κυρτή. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο συγκεκριμένος επενδυτής έχει στη διάθεσή του μετρητά αξίας W με $W > 0$, τα οποία επενδύονται ιδανικά σε $n+1$ περιουσιακά στοιχεία με έσοδα y_1, y_2,…, y_n, R που βρίσκονται στον υπόχωρο S ($\mathrm{S} \leq \mathrm{H}$). Για ευκολία θέτουμε το $y_{n+1} = R_f$. Οπότε το χαρτοφυλάκιο έχει συνάρτηση εσόδων y της μορφής:

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1}\mathrm{R},$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\alpha_1 \mathrm{P}_1 + \alpha_2 \mathrm{P}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{P}_n + \alpha_{n+1}\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{W}, \ \text{με}\ \mathrm{P}_{n+1} = 1,$$

οπού τα α_i αποτελούν τα σταθμά βάσει των οποίων κατανέμουμε τα διαθέσιμα μετρητά στα περιουσιακά στοιχεία.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα όταν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage στην αγορά και όταν όλα τα διαπραγματεύσιμα αξιόγραφα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Πράγματι έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{y \in S} E[U(y)],$$

το οποίο υπόκειται στους περιορισμούς:

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} R \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i,$$

$$y \geq 0,$$

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1} \leq W \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P_i \leq W.$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων μας δείχνει ότι ο επενδυτής πρέπει να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο με κόστος μικρότερο ή ίσο από τον πλούτο του, ότι ο τελικός πλούτος του επενδυτή προσδιορίζεται από την επιλογή χαρτοφυλακίου που έχει κάνει, και ότι ο τελικός πλούτος πρέπει να είναι μη αρνητικός σε κάθε περίπτωση.

Θέλοντας να προχωρήσουμε ένα βήμα περεταίρω, αφού υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage έχουμε ότι υπάρχει κάποιο άριστο χαρτοφυλάκιο το οποίο ορίζεται από τα $\alpha_i^*, i = 1,2,\dots,n+1$. Επίσης, υποθέτουμε ότι το αντίστοιχο έσοδο $y^* = \alpha_1{}^* y_1 + \alpha_2{}^* y_2 + \cdots + \alpha_n{}^* y_n + \alpha_{n+1}{}^* R$ ικανοποιεί τη σχέση $y^* > 0$, οπότε η ανισότητα $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1} \leq W$ μπορεί να μετατραπεί σε ισότητα, καθώς όταν δεν ισχύει η ισότητα θα υπάρχει πάντα κάποιο θετικό ποσοστό α_i^* του χαρτοφυλακίου το οποίο θα μπορεί να προστεθεί για να βελτιωθεί το αποτέλεσμα. Οπότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης που πρέπει να λύσουμε είναι το εξής:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\max_{y \in S} E[U(y)],$$

το οποίο υπόκειται στους περιορισμούς:

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} R \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i,$$

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1} = W \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P_i = W.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του πολλαπλασιαστή Lagrange για να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας δεν έχουμε παρά να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L = E[U(y)] - \lambda[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1} - W].$$

Για να τη βελτιστοποιήσουμε πρέπει να πάρουμε τις εξής συνθήκες πρώτης τάξης:

1. $\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \Leftrightarrow E\left[U'(y)\frac{\partial y}{\partial \alpha_i}\right] - \lambda P_i = 0 \Leftrightarrow E[U'(y)y_i] = \lambda P_i.$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $y^* = \alpha_1{}^* y_1 + \alpha_2{}^* y_2 + \cdots + \alpha_n{}^* y_n + \alpha_{n+1}{}^* R$, ως τη συνάρτηση εσόδων του άριστου χαρτοφυλακίου, καταλήγουμε στη σχέση:

$$E[U'(y^*)y_i] = \lambda P_i \quad \forall\, i = 1,2, \ldots, n+1. \qquad (23)$$

2. $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1} = W.$

Όμως για $i = n + 1$, εφαρμόζοντας δηλαδή την εξίσωση για το περιουσιακό στοιχείο δίχως κίνδυνο έχουμε:

$$E[U'(y^*)y_{n+1}] = \lambda P_{n+1} \Leftrightarrow E[U'(y^*)R] = \lambda * 1 \Leftrightarrow E[U'(y^*)R] = \lambda$$

$$\Leftrightarrow R E[U'(y^*)] = \lambda. \qquad (24)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (23) το αποτέλεσμα που μόλις βρήκαμε καταλήγουμε στην εξής τιμή για το περιουσιακό στοιχείο i:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$E[U'(y^*)y_i] = \lambda P_i \Leftrightarrow P_i = \frac{E[U'(y^*)y_i]}{RE[U'(y^*)]}. \quad (25)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα νέο μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με έσοδο $y_{n+2} = x$ εισάγεται στην αγορά. Έστω ότι $\bar{S} < H$, όπου ο $\bar{S}$ περιέχει τα $n+2$ έσοδα. Θέλουμε να βρούμε μία τιμή P_x για το περιουσιακό στοιχείο x. Η τιμή του x ορισμένη σε μηδενική βάση είναι αυτή ώστε το x να περιληφθεί στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο όταν αυτό κατασκευαστεί σε μηδενική βάση. Με άλλα λόγια το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο δεν θα αλλάξει από την εισαγωγή του x στη συγκεκριμένη τιμή. Απαραίτητη συνθήκη ώστε η τιμή του περιουσιακού στοιχείου x να είναι ορισμένη σε μηδενική βάση είναι αυτή να ισούται με:

$$P_x = \frac{E[U'(y^*)x]}{RE[U'(y^*)]}. \quad (26)$$

Η σχέση (26) ισχύει τόσο για όλα τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία όσο και για το x όταν η τιμή του είναι ορισμένη σε μηδενική βάση, κάτι το οποίο δείχνει ξεκάθαρα τη γραμμικότητα μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων. Πράγματι, εάν υποθέσουμε ότι $x = ax_1 + \beta x_2$, όπου x_1 και x_2 αποτελούν δύο διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία και α, β αποτελούν τα σταθμά επένδυσης σε αυτά ώστε να πάρουμε το περιουσιακό στοιχείο x, αντικαθιστώντας στη σχέση (26) έχουμε:

$$P_{ax_1+\beta x_2} = \frac{E[U'(y^*)(ax_1 + \beta x_2)]}{RE[U'(y^*)]} = \alpha \frac{E[U'(y^*)x_1]}{RE[U'(y^*)]} + \beta \frac{E[U'(y^*)x_2]}{RE[U'(y^*)]} = \alpha P_{x_1} + \beta P_{x_2}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το Β είναι μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο και έστω ότι η τιμή του ορισμένη σε μηδενική βάση είναι P_B. Επίσης, υποθέτουμε ότι το C είναι κάποιο χρηματοοικονομικό παράγωγο του Β. Γενικά δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των τιμών P_B και P_C, αλλά όπως δείχνουμε παραθέτοντας το παρακάτω θεώρημα στο διωνυμικό κόσμο υπάρχει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

<u>Θεώρημα 2.7</u>

Έστω ότι η B είναι μία διωνυμική μεταβλητή για την οποία ισχύει $\mathrm{B_d} \leq \mathrm{R} \leq \mathrm{B_u}$, με την τιμή της να έχει οριστεί σε μηδενική βάση για κάποιον επενδυτή όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Επίσης, έστω η μεταβλητή C αντιπροσωπεύει κάποιο παράγωγο της B. Τότε η τιμή της C ορισμένη σε μηδενική βάση για τον συγκεκριμένο επενδυτή ισούται με:

$$\mathrm{P_c} = \frac{1}{\mathrm{R}}[\mathrm{qC_u} + (1-\mathrm{q})\mathrm{C_d}],$$

όπου

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{RP_B} - \mathrm{B_d}}{\mathrm{B_u} - \mathrm{B_d}} \quad (27)$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του C. Επιπλέον, ισχύει $0 \leq \mathrm{q} \leq 1$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύει ότι $\mathrm{B_u} \geq \mathrm{B}$. Επίσης, αφού ισχύει ότι $\mathrm{U'} > 0$ μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mathrm{P_B} = \frac{\mathrm{E[U'}(y^*)\mathrm{B]}}{\mathrm{RE[U'}(y^*)]} \leq \frac{\mathrm{E[U'}(y^*)\mathrm{B_u]}}{\mathrm{RE[U'}(y^*)]} \leq \frac{\mathrm{E[U'}(y^*)]\mathrm{B_u}}{\mathrm{RE[U'}(y^*)]} \leq \frac{\mathrm{B_u}}{\mathrm{R}},$$

δηλαδή ότι η τιμή της $\mathrm{B_u}$ θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από την τιμή της B, δηλαδή ισχύει ότι $\frac{\mathrm{B_u}}{\mathrm{R}} \geq \mathrm{P_B}$. Ομοίως, καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\frac{\mathrm{B_d}}{\mathrm{R}} \leq \mathrm{P_B} \leq \frac{\mathrm{B_u}}{\mathrm{R}}.$$

Έτσι, αφού η τιμή της μεταβλητής B ($\mathrm{P_B}$) βρίσκεται ανάμεσα στα δύο αυτά όρια μπορεί να απεικονισθεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο. Οπότε

$$\mathrm{P_B} = \frac{1}{\mathrm{R}}[\mathrm{qB_u} + (1-\mathrm{q})\mathrm{B_d}], \text{για κάποιο } 0 \leq \mathrm{q} \leq 1. \quad (28)$$

Λύνοντας τη συγκεκριμένη σχέση ως προς q βρίσκουμε την εξίσωση (27).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Πράγματι,

$$P_B = \frac{1}{R}[qB_u + (1-q)B_d] \Leftrightarrow P_B R = qB_u + B_d - qB_d \Leftrightarrow q(B_u - B_d) = P_B R - B_d$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{RP_B - B_d}{B_u - B_d}.$$

Γνωρίζουμε ότι η φόρμουλα τιμολόγησης σε μηδενική βάση P_c είναι γραμμική ανάμεσα στο C_u και στο C_d. Οι δύο συντελεστές αυτής της γραμμικής έκφρασης καθορίζονται μοναδικά από την τιμή της Β και την τιμή του R. Έτσι, η φόρμουλα (28) ισχύει και για οποιοδήποτε παράγωγο της μεταβλητής Β. Οπότε, η τιμή του παράγωγου C ορισμένη σε μηδενική βάση δίνεται από την εξής σχέση:

$$P_c = \frac{1}{R}[qC_u + (1-q)C_d], \text{ όπου } 0 \leq q \leq 1. \ \blacksquare$$

Η τιμή του q που βρίσκουμε με τη βοήθεια της εξίσωσης (27) μπορεί να διαφέρει ανάμεσα στους επενδυτές καθώς ο κάθε επενδυτής μπορεί να υπολογίζει διαφορετική τιμή P_B σε μηδενική βάση για τη Β, αφού η Β δεν αποτελεί διαπραγματεύσιμη μεταβλητή. Όμως, στην περίπτωση που η Β είναι ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο τότε όλοι θα συμφωνούνε στην τιμή P_B, οπότε και στην τιμή P_C.

Αν και γενικά η τιμή του q στην οποία καταλήγουμε από τη σχέση (27) διαφέρει από αυτήν της εξίσωσης (8) θα δείξουμε στην ενότητα που ακολουθεί ότι κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις η τιμή του q συμπίπτει και με τις δύο μεθόδους, καθώς επίσης και ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου που υπολογίζουμε με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία συμπίπτει με αυτή που καταλήγουμε με τη μέθοδο της CPF.

2.5 Παγκόσμια Αποδεκτές Τιμές

Η τιμολόγηση ενός περιουσιακού στοιχείου, έστω Β, σε μηδενική βάση μας παρέχει μία τιμή για το Β ελεύθερη από ευκαιρίες για arbitrage, αλλά έχει το μειονέκτημα ότι βασίζεται στη συνάρτηση χρησιμότητας και στον πλούτο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

του κάθε επενδυτή. Αυτό αν και δεν αποτελεί μειονέκτημα για το κάθε επενδυτή ξεχωριστά, ο οποίος θέλει να καταλήξει στην ανώτερη τιμή που θα προσέφερε για να αγοράσει το συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο, παρόλα αυτά δεν συνδέεται στενά με κάποια θεωρία τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων.

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα περιγράψουμε ορισμένες περιπτώσεις όπου η τιμή ορισμένη σε μηδενική βάση είναι ανεξάρτητη της συνάρτησης χρησιμότητας του επενδυτή και του πλούτου του. Σε αυτή την περίπτωση όπου η τιμολόγηση σε μηδενική βάση είναι ανεξάρτητη αυτών των δύο παραμέτρων λέμε ότι η συγκεκριμένη τιμή είναι παγκοσμίως αποδεκτή σε μηδενική βάση.

Η απλούστερη περίπτωση όπου η τιμή του Β είναι παγκοσμίως αποδεκτή σε μηδενική βάση ισχύει όταν το Β είναι στατιστικά ανεξάρτητο από την αγορά. Σε αυτήν την περίπτωση από τη σχέση (26) έχουμε:

$$P_B = \frac{E[U'(y^*)B]}{RE[U'(y^*)]} = \frac{E[U'(y^*)]E(B)}{RE[U'(y^*)]} = \frac{E(B)}{R},$$

η οποία μας δείχνει ξεκάθαρα ότι η τιμή του Β είναι ανεξάρτητη τόσο από τη συνάρτηση χρησιμότητας του κάθε επενδυτή όσο και από τον αρχικό πλούτο του.

Ένα κλασσικό παράδειγμα βασισμένο σε αυτή την περίπτωση είναι το παιχνίδι «κορόνα ή γράμματα». Το αποτέλεσμα μίας στροφής του νομίσματος είναι ανεξάρτητο με όλα τα περιουσιακά στοιχεία και του αρχικού πλούτου του επενδυτή. Επομένως, η παγκοσμίως αποδεκτή τιμή σε μηδενική βάση βρίσκεται προεξοφλώντας την αναμενόμενη αξία με το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο.

Μάλιστα, αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου που υπόκειται σε αβεβαιότητα για τον κάθε επενδυτή ξεχωριστά, δηλαδή την αβεβαιότητα η οποία είναι ανεξάρτητη από οποιοδήποτε διαπραγματεύσιμο περιουσιακό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στοιχείο. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν και τα σχέδια επενδύσεων τα οποία υπόκεινται σε τεχνικές αβεβαιότητες.

Ας αναφερθούμε και σε ένα πιο χρήσιμο παράδειγμα. Έστω ότι ο χώρος X είναι ο χώρος στον οποίο ανήκουν τόσο τα έσοδα των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων όσο και των μη διαπραγματεύσιμων. Τα έσοδα των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων ανήκουν σε έναν υπόχωρο, έστω Y, για τον οποίο ισχύει $\mathrm{Y} \leq \mathrm{X}$. Η αγορά λέμε ότι είναι μερικώς πλήρης εάν για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση τιμολόγησης f και για οποιοδήποτε διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο $\mathrm{M} \in \mathrm{Y}$, η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{f(M)}$ ανήκει επίσης στο Y.

<u>Εφαρμογή στη διωνυμική αγορά</u>

Ας θεωρήσουμε ένα διπλό διωνυμικό μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία R και M και τη μη διαπραγματεύσιμη διωνυμική μεταβλητή B. Υπάρχουν τέσσερις πιθανές καταστάσεις. Οι (R, u, u), (R, u, d), (R, d, u) και (R, d, d), όπου τα τρία στοιχεία αντιστοιχούν στις τιμές του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου, του περιουσιακού στοιχειού της αγοράς M και της μεταβλητής B. Θεωρώντας μόνο τις μεταβλητές R και M σχηματίζονται δύο μόνο κόμβοι οι οποίοι αντιστοιχούν στις καταστάσεις (R, u) και (R, d). Αφού υπάρχουν δύο ανεξάρτητες διαπραγματεύσιμες μεταβλητές, αυτό συνεπάγεται ότι οποιαδήποτε συνάρτηση των διαπραγματεύσιμων μεταβλητών μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων και οπότε η αγορά θεωρείται μερικώς ολοκληρωμένη.

Γενικεύοντας την παραπάνω εφαρμογή στη διωνυμική αγορά σε κάθε περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας περαιτέρω εργαλεία από τη μέθοδο της προβολής ότι ισχύει, όχι μόνο στο διωνυμικό κόσμο, το εξής θεώρημα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

<u>Θεώρημα 2.8</u>

Έστω ο χώρος X στον οποίο ανήκουν τα έσοδα τόσο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων όσο και των μη διαπραγματεύσιμων. Επίσης, υποθέτουμε ότι η αγορά είναι μερικώς πλήρης και ότι όλοι οι επενδυτές βασίζονται στην εξίσωση (26), αλλά με διαφορετικούς περιορισμούς όσον αφορά τη συνάρτηση χρησιμότητας και τον πλούτο του κάθε επενδυτή. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή B είναι κάποιο στοιχείο του X. Τότε η τιμή της B ορισμένη σε μηδενική βάση για οποιοδήποτε επενδυτή συμπίπτει τόσο με την παγκόσμια αποδεκτή τιμή της B όσο και με την τιμή που καταλήγουμε με τη μέθοδο της CPF.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΔΙΩΝΥΜΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στο παρών κεφάλαιο αρχικά θα αναφερθούμε σε ορισμένα από τα πλεονεκτήματα του αντιπροσωπευτικού διπλού διωνυμικού πλέγματος, στην αναδρομική λύση του, καθώς και στη δυναμική αντιγραφή της αξίας του παραγώγου προϊόντος της διωνυμικής μεταβλητής. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης ενότητας θα αναφερθούμε τόσο στη δυναμική αντιγραφή της αξίας του παραγώγου της διωνυμικής μεταβλητής όσο και στον τρόπο αντιστάθμισης του κινδύνου από τη διακράτηση του συγκεκριμένου παραγώγου προϊόντος, καθώς και στον υπολογισμό της συνολικής διακύμανσης του σφάλματος της αντιγραφής. Ας αρχίσουμε όμως να αναφερόμαστε στο καθένα από τα προανεφερθέντα θέματα αναλυτικότερα.

3.1 Πλεονεκτήματα του Αντιπροσωπευτικού Διπλού Διωνυμικού Πλέγματος

Υποθέτουμε ότι η αγορά αποτελείται από το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου R και κάποιο διωνυμικό διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο M. Αρχικά, υποθέτουμε ότι η διωνυμική μεταβλητή B βρίσκεται εκτός του χώρου που παράγεται από τα περιουσιακά στοιχεία R και M. Στην πράξη, βολεύει να σκεφτούμε κάποιο περιουσιακό στοιχείο M που μεγιστοποιεί τη συσχέτισή του με το B και έπειτα να θεωρήσουμε ότι η αγορά αποτελείται μόνο από αυτά τα περιουσιακά στοιχεία.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2 γνωρίζουμε ότι η τιμή της B (P_B) που έχει βρεθεί με τη μέθοδο της CPF δεν θα δημιουργήσει ευκαιρίες για arbitrage και μάλιστα θα αποτελεί την παγκόσμια αποδεκτή τιμή της B ορισμένη σε μηδενική βάση. Ο ορισμός αυτού του συστήματος ρητά στο συγκεκριμένο σημείο θα μας φανεί αρκετά χρήσιμος στην ανάλυση τόσο της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στρατηγικής αντιγραφής αλλά και αντιστάθμισης που παρουσιάζουμε στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου.

Ένα επιπλέον πλεονεκτήματα του διπλού διωνυμικού μοντέλου είναι ότι με τη βοήθειά του μπορούμε να βρούμε τις ακριβείς τιμές των πιθανοτήτων και στους τέσσερις κόμβους του, όπως ήδη έχουμε δείξει στην Υποενότητα 2.3.2. Τέλος, εφόσον το διπλό διωνυμικό πλέγμα είναι μερικώς πλήρες η τιμή που υπολογίζουμε με τη μέθοδο της CPF είναι παγκοσμίως αποδεκτή σε μηδενική βάση για το διπλό διωνυμικό σύστημα. Οπότε αξίζει να δώσουμε προσοχή στο διπλό διωνυμικό πλέγμα.

3.2 Αναδρομική Λύση του Πλέγματος

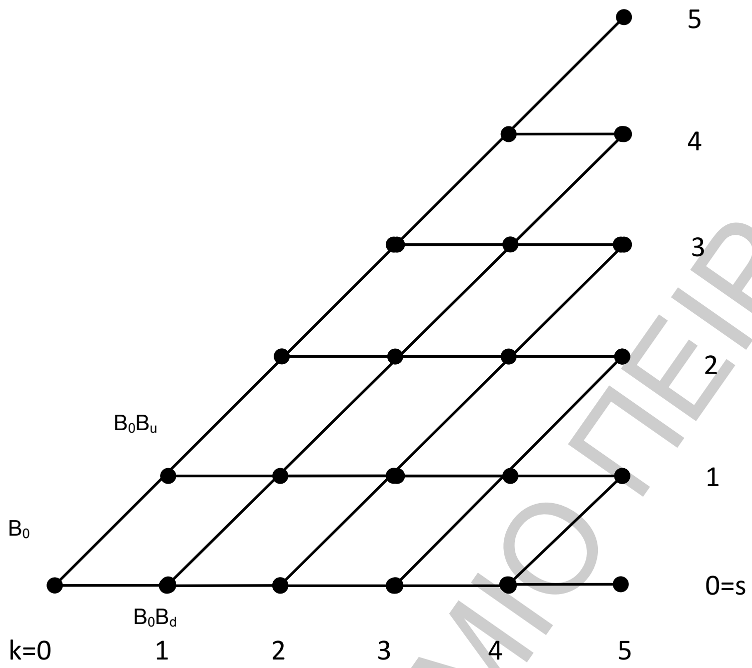
Πλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πλέγμα πολλών περιόδων συνδυάζοντας πολλές μονές περιόδους μαζί, έτσι ώστε να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε δυναμικά την εξέλιξη της υποκείμενης μεταβλητής Β. Σιωπηρά υποθέτουμε ότι και στην περίπτωση των διαδοχικών υποπεριόδων η υποκείμενη μεταβλητή Β είναι η μόνη μη διαπραγματεύσιμη μεταβλητή που μπορεί να μας δώσει πληροφορίες σχετικά με το τελικό έσοδο του παράγωγου προϊόντος.

Κάθε κόμβος του πλέγματος είναι συντεταγμένος ως (k,s). Το k είναι ο δείκτης του χρόνου και παίρνει τιμές από k=0 έως k=T. Μία περίοδος ορίζεται ως το πέρασμα του χρόνου από το k ως το k+1. Έτσι, υπάρχουν T περίοδοι αλλά T+1 χρονικά σημεία. Συγκεκριμένα, η τελευταία περίοδος ξεκινάει τη στιγμή T-1 και τελειώνει τη στιγμή T. Ο ακέραιος s δηλώνει ένα συγκεκριμένο επίπεδο της Β την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Το χαμηλότερο δυνατό επίπεδο της Β είναι το μηδέν (s=0), το οποίο είναι και το αρχικό επίπεδό της. Η τιμή του s μεγαλώνει κατά ένα σε κάθε υψηλότερο επίπεδο.

Η αναπαράσταση της δομής του δικτυωτού πλέγματος φαίνεται στο Σχήμα 6. Σε κάθε κόμβο υπάρχουν δύο πιθανοί διαδοχικοί κόμβοι που αντιστοιχούν στην ανοδική ή καθοδική κίνηση της μεταβλητής Β. Αν στον αρχικό κόμβο η μεταβλητή Β έχει αξία B_0 οι διαδοχικές αξίες στους επόμενους

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

κόμβους είναι B_0B_u και B_0B_d, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο αντίστοιχο σχήμα. Να επισημάνουμε ότι τα B_u και B_d αποτελούν τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες σε όλη τη διαδικασία.



Σχήμα 6. Διωνυμικό πλέγμα 5 περιόδων.

Η εκτίμηση της αξίας ενός παραγώγου της μεταβλητής B μπορεί να επιτευχθεί αναδρομικά ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή T και πηγαίνοντας βήμα βήμα πίσω στο χρόνο. Η συνάρτηση εσόδων ενός παράγωγου ισούται με F(T,s), οριζόμενη σε κάθε κόμβο s τη χρονική στιγμή T. Ξεκινώντας την αναδρομική λύση από τον τελικό κόμβο όπου:

$$V_T(s) = F(T, s) \quad \text{για } 0 \leq s \leq T,$$

έπειτα αφού το $V_k(s)$ είναι γνωστό $\forall$ s, όπου $0 \leq s \leq k$,

μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το $V_{k-1}(s)$ $\forall$ s, όπου $0 \leq s \leq k-1$, ισούται με:

$$V_{k-1}(s) = \frac{1}{R}[q_B V_k(s+1) + (1 - q_B) V_k(s)]\,. \quad (29)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί μία επέκταση της μεθόδου αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης που παρουσίασαν οι Cox - Ross - Rubinstein (1979).

Φυσικά είναι δυνατόν να θεωρήσουμε πλέγματα όπου οι πιθανότητες μετάβασης από τον ένα κόμβο στον άλλο διαφέρουν από στιγμή σε στιγμή, οπότε αντίστοιχα να διαφέρει και η τιμή q_B από κόμβο σε κόμβο. Στηριζόμενοι στο Λήμμα 1.2 και συγκεκριμένα στη σχέση (8), μπορούμε να δείξουμε ότι οι ουδέτερες στον κίνδυνο πιθανότητες q_B είναι σταθερές από κόμβο σε κόμβο καθώς δεν εξαρτώνται από την αξία του παραγώγου $[V_k(s+1)$ ή $V_k(s)]$ αλλά από την πορεία της διωνυμικής μεταβλητής Β.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων η δομή όλων των πιθανοτήτων μετάβασης είναι ίσες. Σε αυτές τις περιπτώσεις το q_B παραμένει αμετάβλητο σε κάθε κόμβο του πλέγματος, οπότε η μέθοδος της αναδρομικής λύσης είναι παρόμοια με τη μέθοδο που ακολουθείται στην περίπτωση των κλασικών παραγώγων προϊόντων.

3.3 Δυναμική Αντιγραφή και Αντιστάθμιση Κινδύνου

Ως τώρα θεωρήσαμε τη διαδικασία σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $k-1$ και στο αντίστοιχο επίπεδο s της μεταβλητής Β του πλέγματος. Υπό αυτό το πρίσμα της ανάλυσής μας η αξία $V_{k-1}(s)$ θεωρείται γνωστή. Για ευκολία από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στον όρο V_{k-1} παραλείποντας το επίπεδο s. Η αξία του V_k είναι μία τυχαία μεταβλητή με πιθανές αξίες τις V_k^u και V_k^d που αντιστοιχούν σε μία ανοδική (u) ή καθοδική (d) κίνηση από τη χρονική στιγμή $k-1$ στην k. Ορίζουμε $\{V_k|Y\}$ την προβολή του V_k στο χώρο των διαπραγματεύσιμων εσόδων Y τη χρονική στιγμή $k-1$. Επίσης, ορίζουμε το M ως το διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση με τη μεταβλητή Β (κανονικοποιώντας το τη χρονική στιγμή k-1, με $P_M = 1$). Επιπρόσθετα, για λόγους ευκολίας θεωρούμε ότι τα στατιστικά στοιχεία του M παραμένουν σταθερά σε κάθε κόμβο οπότε ισχύει $M = M_k$. Τότε το $\{V_k|Y\}$ είναι η προβολή του V_k στο χώρο που δημιουργείται από το M και το R.

Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις μας από την Υποενότητα 2.2.2, και συγκεκριμένα εφαρμόζοντας την εξίσωση (4), καταλήγουμε ότι η προβολή του $\mathrm{V_k}$ ισούται με:

$$\{\mathrm{V_k}|\mathrm{Y}\} = \overline{\mathrm{V}}_\mathrm{k} + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}}),$$

ενώ το $\mathrm{V_k}$ ισούται με την προβολή του στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων συν κάποιο σφάλμα ε_k. Δηλαδή,

$$\mathrm{V_k} = \overline{\mathrm{V}}_\mathrm{k} + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}}) + \varepsilon_\mathrm{k}, \qquad (30)$$

όπου το σφάλμα ε_k είναι ορθογώνιο στην αγορά. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση τιμολόγησης (5) έχουμε:

$$\mathrm{V_{k-1}} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\overline{\mathrm{V}}_\mathrm{k} + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{P_M R} - \overline{\mathrm{M}})\right] \xRightarrow{\mathrm{P_M}=1} \mathrm{RV_{k-1}} = \overline{\mathrm{V}}_\mathrm{k} + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}})$$

$$\Rightarrow \overline{\mathrm{V}}_\mathrm{k} = \mathrm{RV_{k-1}} - \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}}).$$

Οπότε μπορούμε να απεικονίσουμε την εξίσωση (30) ως εξής:

$$\mathrm{V_k} = \mathrm{RV_{k-1}} - \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}}) + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V_k},\mathrm{M})}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}}) + \varepsilon_\mathrm{k}$$

$$= \mathrm{RV_{k-1}} - \frac{\mathrm{cov}\left(\frac{\mathrm{V_k}}{\mathrm{V_{k-1}}},\mathrm{M}\right)}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}})\mathrm{V_{k-1}} + \frac{\mathrm{cov}\left(\frac{\mathrm{V_k}}{\mathrm{V_{k-1}}},\mathrm{M}\right)}{\sigma_\mathrm{M}^2}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}})\mathrm{V_{k-1}} + \varepsilon_\mathrm{k}.$$

Θέτουμε όμως

$$\gamma_\mathrm{k} = \frac{\mathrm{cov}\left(\frac{\mathrm{V_k}}{\mathrm{V_{k-1}}},\mathrm{M}\right)}{\sigma_\mathrm{M}^2},$$

επομένως

$$\mathrm{V_k} = \mathrm{RV_{k-1}} - \gamma_\mathrm{k}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}})\mathrm{V_{k-1}} + \gamma_\mathrm{k}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}})\mathrm{V_{k-1}} + \varepsilon_\mathrm{k}$$

$$= [\mathrm{R} - \gamma_\mathrm{k}(\mathrm{R} - \overline{\mathrm{M}}) + \gamma_\mathrm{k}(\mathrm{M} - \overline{\mathrm{M}})]\mathrm{V_{k-1}} + \varepsilon_\mathrm{k}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$= [\mathrm{R} - \gamma_k \mathrm{R} + \gamma_k \overline{\mathrm{M}} + \gamma_k \mathrm{M} - \gamma_k \overline{\mathrm{M}}] \mathrm{V}_{k-1} + \varepsilon_k$$

$$= [(1 - \gamma_k)\mathrm{R} + \gamma_k \mathrm{M}] \mathrm{V}_{k-1} + \varepsilon_k \qquad (31)$$

ή $\quad \mathrm{V}_k = (\mathrm{V}_{k-1} - \gamma_k \mathrm{V}_{k-1})\mathrm{R} + \gamma_k \mathrm{V}_{k-1}\mathrm{M} + \varepsilon_k.$

Η τελευταία εξίσωση μας ωθεί να ορίσουμε ένα στενά αναπαραγόμενο χαρτοφυλάκιο ορίζοντας $\mathrm{G}_0 = \mathrm{V}_0$. Τότε τη στιγμή $k-1$ όπου το υπόλοιπο ισούται με G_{k-1}, μπορούμε να κατανείμουμε την ποσότητα $\mathrm{G}_{k-1} - \gamma_k \mathrm{V}_{k-1}$ στο περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου R και την ποσότητα $\gamma_k \mathrm{V}_{k-1}$ στο περιουσιακό στοιχείο M, που παρουσιάζει τη μέγιστη συσχέτιση με τη B. Έτσι, η νέα αξία τη χρονική στιγμή k ισούται με:

$$\mathrm{G}_k = (\mathrm{G}_{k-1} - \gamma_k \mathrm{V}_{k-1})\mathrm{R} + \gamma_k \mathrm{V}_{k-1}\mathrm{M}. \qquad (32)$$

Η σταθερά γ_k μπορεί να γραφεί ως εξής χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.2:

$$\gamma_k = \frac{\mathrm{cov}\left(\frac{\mathrm{V}_k}{\mathrm{V}_{k-1}}, \mathrm{M}\right)}{\sigma_{\mathrm{M}}^2} = \frac{\frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V}_k, \mathrm{M})}{\mathrm{V}_{k-1}}}{\sigma_{\mathrm{M}}^2} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{V}_k, \mathrm{M})}{\sigma_{\mathrm{M}}^2 \mathrm{V}_{k-1}} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{B}, \mathrm{M})}{\sigma_{\mathrm{M}}^2(\mathrm{B}_u - \mathrm{B}_d)} * \frac{\mathrm{V}_k^u - \mathrm{V}_k^d}{\mathrm{V}_{k-1}}.$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\rho_{\mathrm{B,M}} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{B}, \mathrm{M})}{\sigma_{\mathrm{M}}\sigma_{\mathrm{B}}} \Leftrightarrow \mathrm{cov}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) = \rho_{\mathrm{B,M}}\sigma_{\mathrm{M}}\sigma_{\mathrm{B}}$$

και

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sqrt{p_{\mathrm{B}}(1 - p_{\mathrm{B}})}(\mathrm{B}_u - \mathrm{B}_d).$$

Αντικαθιστώντας το συντελεστή συσχέτισης και την τυπική απόκλιση συνεχίζουμε γράφοντας:

$$\gamma_k = \frac{\rho_{\mathrm{B,M}}\sigma_{\mathrm{M}}\sigma_{\mathrm{B}}}{\sigma_{\mathrm{M}}^2(\mathrm{B}_u - \mathrm{B}_d)} * \frac{\mathrm{V}_k^u - \mathrm{V}_k^d}{\mathrm{V}_{k-1}} = \frac{\rho_{\mathrm{B,M}}\sqrt{p_{\mathrm{B}}(1 - p_{\mathrm{B}})}(\mathrm{B}_u - \mathrm{B}_d)}{\sigma_{\mathrm{M}}(\mathrm{B}_u - \mathrm{B}_d)} * \frac{\mathrm{V}_k^u - \mathrm{V}_k^d}{\mathrm{V}_{k-1}}$$

$$= \frac{\rho_{\mathrm{B,M}}\sqrt{p_{\mathrm{B}}(1 - p_{\mathrm{B}})}}{\sigma_{\mathrm{M}}} * \frac{\mathrm{V}_k^u - \mathrm{V}_k^d}{\mathrm{V}_{k-1}} = \delta \frac{\mathrm{V}_k^u - \mathrm{V}_k^d}{\mathrm{V}_{k-1}}, \qquad (33)$$

όπου το δ το έχουμε ορίσει στη σχέση (10).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Επομένως, το συνολικό ποσό που πρέπει να επενδύσουμε στο περιουσιακό στοιχείο Μ ώστε να αντισταθμίσουμε τον κίνδυνο από την κατοχή του παράγωγου προϊόντος της μεταβλητής Β ισούται με:

$$\gamma_k V_{k-1} = \delta\left(V_k^u - V_k^d\right). \qquad (34)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας στην εξίσωση (32) την εξίσωση (34) βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} G_k &= RG_{k-1} - \gamma_k V_{k-1} R + \gamma_k V_{k-1} M \\ &= RG_{k-1} - \delta\left(V_k^u - V_k^d\right)R + \delta\left(V_k^u - V_k^d\right)M \\ &= RG_{k-1} + \delta\left(V_k^u - V_k^d\right)(M - R). \qquad (35) \end{aligned}$$

Να σημειώσουμε ότι στη χρονικά αμετάβλητη περίπτωση η παραπάνω εξίσωση δεν περιέχει σταθερές που να εξαρτούνται από τον παράγοντα του χρόνου k, εκτός αυτών που υποδεικνύονται ρητά με τους δείκτες.

3.3.1 Σφάλμα αντιγραφής και η διάδοσή του

Ορίζουμε ως σφάλμα αντιγραφής την ποσότητα $D_k \triangleq V_k - G_k$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (31) και (32) βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} D_k = V_k - G_k &= (1-\gamma_k)RV_{k-1} + \gamma_k M V_{k-1} + \varepsilon_k - G_{k-1}R + \gamma_k V_{k-1}R - \gamma_k V_{k-1}M \\ &= RV_{k-1} - \gamma_k RV_{k-1} + \varepsilon_k - G_{k-1}R + \gamma_k V_{k-1}R = R(V_{k-1} - G_{k-1}) + \varepsilon_k \\ &\Leftrightarrow D_k = RD_{k-1} + \varepsilon_k, \quad (36) \end{aligned}$$

όπου το σφάλμα ε_k είναι ορθογώνιο στην αγορά. Στην περίπτωση όπου $G_0 = V_0$, όπως έχουμε αναφέρει ήδη, αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει και $E(G_k) = E(V_k)\ \forall\, k$, όπως ρητά φαίνεται και στην απόδειξη που ακολουθεί. Επομένως η διαδικασία αντιγραφής που ακολουθείται μέσω του G_k ταιριάζει με αυτή του V_k, τουλάχιστον όσον αφορά την αναμενόμενη αξία τους τη χρονική στιγμή μηδέν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αντίθετα, δεν ισχύει το ίδιο οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή j. Είναι σαφές ότι το G_j μπορεί να διαφέρει από το V_j οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή, καθώς η τιμή του G_j εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε τόσο η μεταβλητή B όσο και το M για να φτάσουν μέχρι αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η ποσότητα G_{k-1} είναι μεγαλύτερη από αυτή της V_{k-1} πρέπει να επενδυθεί στο λογαριασμό αντιγραφής ένα ποσό V_{k-1}, ώστε να ταιριάξει με το V_k όσο πιο στενά γίνεται. Η διαφορά $G_{k-1} - V_{k-1}$ θα επενδυθεί στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο σύμφωνα με τη σχέση (36) και όπως γίνεται αντιληπτό θα κερδίζει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Οπότε, οδηγούμαστε στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1

Κατά τη διαδικασία αντιγραφής με $G_0 = V_0$ ισχύει $\forall$ k ότι:

$$E_0(V_k - G_k) = 0.$$

Ενώ για $j \leq k$,

$$E_j(V_k - G_k) = R^{k-j}(V_j - G_j),$$

όπου ο τελεστής E_j δηλώνει τις προσδοκίες την χρονική στιγμή j.

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας τη σχέση (36) k φορές βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
V_k - G_k = D_k &= RD_{k-1}+\varepsilon_k = R(RD_{k-2}+\varepsilon_{k-1})+\varepsilon_k = R^2D_{k-2} + R^1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k \\
&= R^2(RD_{k-3}+\varepsilon_{k-2}) + R^1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k \\
&= R^3D_{k-3} + R^2\varepsilon_{k-2} + R^1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k = \cdots = \\
&= R^kD_{k-k} + R^{k-1}\varepsilon_{k-(k-1)} + R^{k-2}\varepsilon_{k-(k-2)} + \cdots + R^1\varepsilon_{k-1} + R^0\varepsilon_k \\
&= R^kD_0 + R^{k-1}\varepsilon_1 + R^{k-2}\varepsilon_2 + \cdots + R^1\varepsilon_{k-1} + R^0\varepsilon_k \\
&= R^kD_0 + \sum_{j=0}^{k-1} R^j\varepsilon_{k-j}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $E_0(V_k - G_k) = E_0\left(R^kD_0 + \sum_{j=0}^{k-1} R^j\varepsilon_{k-j}\right) = 0.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αντίστοιχα εφαρμόζοντας τη σχέση $\mathrm{k}-\mathrm{j}$ φορές:

$$\mathrm{V_k - G_k = D_k = \cdots = R^{k-j}D_{k-(k-j)} + \sum_{j=0}^{k-j-1} R^j \varepsilon_{k-j} = R^{k-j}D_j + \sum_{j=0}^{k-j-1} R^j \varepsilon_{k-j}}\,.$$

Επομένως, $\mathrm{E_j(V_k - G_k) = E_j\left(R^{k-j}D_j + \sum_{j=0}^{k-j-1} R^j \varepsilon_{k-j}\right) = R^{k-j}\left(V_j - G_j\right)}$. ■

Ας αναφερθούμε όμως και στη διακύμανση του σφάλματος αντιγραφής. Για να υπολογίσουμε τη διακύμανση του σφάλματος στηριζόμενοι στη σχέση (30) έχουμε:

$$\mathrm{\varepsilon_k = V_k - \overline{V}_k - \frac{cov(V_k, M)}{\sigma_M^2}(M - \overline{M}) \Leftrightarrow V_k = \varepsilon_k + \frac{cov(V_k, M)}{\sigma_M^2}(M - \overline{M}) + \overline{V}_k}. \quad (37)$$

Αφού η αναμενόμενη τιμή του σφάλματος ισούται με μηδέν και το σφάλμα είναι ορθογώνιο στο M μπορούμε να γράψουμε για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό w:

$$\begin{aligned}\mathrm{E\{[\varepsilon_k + w(M - \overline{M})]^2\}} &= \mathrm{E\{\varepsilon_k{}^2 + w^2(M - \overline{M})^2 + 2\varepsilon_k w(M - \overline{M})\}} \\ &= \mathrm{E(\varepsilon_k{}^2) - E^2(\varepsilon_k) + w^2E\{(M - \overline{M})^2\}} \\ &\quad \mathrm{+2wE\{\varepsilon_k w(M - \overline{M})\}} \\ &= \mathrm{var(\varepsilon_k) + w^2\sigma_M^2}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας όμως το $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{cov(V_k,M)}}{\sigma_\mathrm{M}^2}$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (37) συνεχίζουμε ως εξής:

$$\mathrm{var(V_k) = var(\varepsilon_k) + \frac{cov(V_k, M)^2}{\sigma_M^2}},$$

αφού $\mathrm{var(\overline{V}_k) = 0}$.

Επομένως,

$$\mathrm{var(\varepsilon_k) = var(V_k) - \frac{cov(V_k, M)^2}{\sigma_M^2}}.$$

Λαμβάνοντας υπ’ όψιν το Λήμμα 1.2 μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει:

$$\mathrm{cov}(V_k, M) = \frac{\left(V_k^u - V_k^d\right)}{(B_u - B_d)}\mathrm{cov}(B, M),$$

ενώ στην Ενότητα 1.2 δείξαμε ότι:

$$\mathrm{var}(V_k) = p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο σχέσεις στο τύπο της διακύμανσης του σφάλματος ε_k που έχουμε υπολογίσει ως τώρα,

$$\mathrm{var}(\varepsilon_k) = p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 - \frac{\left(V_k^u - V_k^d\right)^2}{(B_u - B_d)^2\sigma_M^2}\mathrm{cov}(B, M)^2.$$

$$= p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 - \rho_{B,M}^2\frac{\left(V_k^u - V_k^d\right)^2}{(B_u - B_d)^2\sigma_M^2}\sigma_M^2{\sigma_B}^2$$

$$= p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 - \rho_{B,M}^2\frac{\left(V_k^u - V_k^d\right)^2}{(B_u - B_d)^2}{\sigma_B}^2.$$

Τέλος, επίσης από την Ενότητα 1.2 γνωρίζουμε ότι:

$${\sigma_B}^2 = p_B(1 - p_B)(B_u - B_d)^2.$$

Επομένως, η διακύμανση του σφάλματος τελικά ισούται με:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_k) = p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 - \rho_{B,M}^2\frac{\left(V_k^u - V_k^d\right)^2}{(B_u - B_d)^2}p_B(1 - p_B)(B_u - B_d)^2$$

$$= p_B(1 - p_B)\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 - \rho_{B,M}^2\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 p_B(1 - p_B)$$

$$= \left[p_B(1 - p_B) - \rho_{B,M}^2 p_B(1 - p_B)\right]\left(V_k^u - V_k^d\right)^2$$

$$= \left[p_B(1 - p_B)(1 - \rho_{B,M}^2)\right]\left(V_k^u - V_k^d\right)^2 = \theta\left(V_k^u - V_k^d\right)^2, \quad (38)$$

όπου $\theta = p_B(1 - p_B)\left(1 - \rho_{B,M}^2\right)$. (39)

Στην περίπτωση που το B είναι ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση όπου $M = B$, κάτι το οποίο θα μας δώσει $\theta = 0$ καθώς το $\rho_{M,M} = 1$. Επίσης, εάν οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

δυναμικές μεταβλητές M και B είναι στάσιμες, το θ είναι σταθερό και έτσι το σφάλμα της διακύμανσης ισούται με την τετραγωνική διαφορά δύο διαδοχικών V_k επί μία σταθερά.

Να επισημάνουμε εδώ ότι αφού $E_0(V_k - G_k) = 0$ συμπεραίνουμε ότι το G_k αποτελεί την προβολή του V_k στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων, όπως τουλάχιστον φαίνεται τη χρονική στιγμή μηδέν. Μάλιστα, από τη στιγμή που η αναμενόμενη τιμή του σφάλματος ισούται με μηδέν και το σφάλμα κάθε βήματος είναι αμοιβαία ασυσχέτιστο με τα υπόλοιπα, μπορούμε να θεωρήσουμε υπό αυτό το πρίσμα ότι η συγκεκριμένη στρατηγική αντιστάθμισης αποτελεί τη βέλτιστη στρατηγική που θα μπορούσαμε να επιλέξουμε.

3.3.2 Συνολική διακύμανση του σφάλματος

Η συνολική διακύμανση του σφάλματος μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας μια απλή αναδρομική διαδικασία. Κάθε κόμβος του δικτυωτού πλέγματος (από τη χρονική στιγμή $k - 1 = 0$ έως την $k - 1 = T - 1$) συνδέεται με ένα τυχαίο σφάλμα ε_k, τα οποία όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι αμοιβαία ασυσχέτιστα μεταξύ τους (αφού η μετάβαση από το έναν κόμβο στον άλλο δεν εξαρτάται από το που βρισκόμασταν πριν) και η αναμενόμενη τιμή του σφάλματος ισούται με μηδέν, αφού όλα είναι ορθογώνια στο περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου R. Ένα σφάλμα ε_k θα πολλαπλασιαστεί επανειλημμένα με το περιουσιακό στοιχείο R σε κάθε βήμα πέρα από τον κόμβο k, με συνέπεια η τελική του συνεισφορά στο συνολικό σφάλμα να ισούται με $R^{T-k}\varepsilon_k$ επί την πιθανότητα να βρεθούμε στον αντίστοιχο κόμβο. Οπότε η συνεισφορά του τυχαίου σφάλματος στη συνολική διακύμανση ισούται με $\mathrm{var}(\varepsilon_k)R^{2(T-k)}$ επί την πιθανότητα του κόμβου.

Ορίζουμε:

$$U_k \triangleq R^{T-k}D_k$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τη συνεισφορά του σφάλματος στη συνολική διακύμανση με την εξής αναδρομική σχέση:

$$U_k = U_{k-1} + R^{T-k}\varepsilon_k.$$

Εάν συμβολίσουμε με S_k τη διακύμανση του U_T όπως αυτή φαίνεται τη στιγμή k τότε:

$$S_{k-1} = E(S_k) + R^{2(T-k)}\mathrm{var}(\varepsilon_k)$$

$$= p_B S_k^u + (1-p_B)S_k^d + R^{2(T-k)}\theta\left(V_k^u - V_k^d\right)^2, (40)$$

με τελικές συνθήκες $S_T = 0$ και $\theta = p_B(1-p_B)(1-\rho^2)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση θα βασιστούμε στη στρατηγική μείωσης της συνολικής διακύμανσης μέσω της δέσμευσης. Βάσει της συγκεκριμένης στρατηγικής ισχύει ότι $\mathrm{var}(X) = E\{\mathrm{var}(X|Y)\} + \mathrm{var}[E(X|Y)]$. Γίνεται σαφές ότι χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη στρατηγική μπορούμε να μειώσουμε τη συνολική διακύμανση, αφού όλες οι ποσότητες που εμπλέκονται στον παραπάνω τύπο είναι μη-αρνητικές. Αφού η διακύμανση της U_T συμβολίζεται με S_k έχουμε:

$$S_k = \mathrm{var}(U_T|F_k) = E(U_T^2|F_k) - E^2(U_T|F_k).$$

Άρα η αναμενόμενη τιμή της διακύμανσης της U_T, δηλαδή η $E(S_k)$ ισούται με:

$$E(S_k) = E(U_T^2) - E\{E^2(U_T|F_k)\}.$$

Οπότε έχουμε,

$$S_{k-1} = \mathrm{var}(U_T|F_{k-1}) = E(U_T^2|F_{k-1}) - E^2(U_T|F_{k-1})$$

$$= E\{E(U_T^2|F_k)|F_{k-1}\} - E^2(U_T|F_{k-1})$$

$$= E\{S_k + E^2(U_T|F_k)|F_{k-1}\} - E^2(U_T|F_{k-1})$$

$$= E(S_k|F_{k-1}) + E\{E^2(U_T|F_k)|F_{k-1}\} - E^2(U_T|F_{k-1})$$

$$= E(S_k) + E\{E^2(U_T|F_k)|F_{k-1}\} - E^2(U_T|F_{k-1}), \qquad (41)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

αφού λόγω ανεξαρτησίας $E(S_k|F_{k-1}) = E(S_k)$.

Όμως,

$$U_T = U_{T-1} + R^{T-T}\varepsilon_T = U_{T-2} + R^{T-(T-1)}\varepsilon_{T-1} + \varepsilon_T$$

$$= U_{T-2} + R\varepsilon_{T-1} + \varepsilon_T$$

$$= U_{T-(T-k)} + R^{T-k-1}\varepsilon_{T-(T-k-1)} + \cdots + \varepsilon_T$$

$$= U_k + R^{T-k-1}\varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_T.$$

Οπότε,

$$E^2(U_T|F_k) = (U_k + 0 + 0 + \cdots + 0)^2 = {U_k}^2.$$

Επομένως,

$$E\{E^2[(U_T|F_k)|F_{k-1}]\} = E\left(U_k^2|F_{k-1}\right)$$

$$= E\left\{\left(U_{k-1} + R^{T-k}\varepsilon_k\right)^2|F_{k-1}\right\}$$

$$= E\left(U_{k-1}^2|F_{k-1}\right) + 2E\left(U_{k-1}R^{T-k}\varepsilon_k|F_{k-1}\right) + R^{2(T-k)}E({\varepsilon_k}^2)$$

$$= E\left(U_{k-1}^2|F_{k-1}\right) + 2U_{k-1}R^{T-k}E(\varepsilon_k|F_{k-1}) + R^{2(T-k)}E({\varepsilon_k}^2)$$

$$= U_{k-1}^2 + 0 + R^{2(T-k)}E({\varepsilon_k}^2)$$

$$= U_{k-1}^2 + R^{2(T-k)}\mathrm{var}(\varepsilon_k). \quad (42)$$

Αφού, $E(\varepsilon_k|F_{k-1}) = E(\varepsilon_k) = 0$ και $\mathrm{var}(\varepsilon_k) = E({\varepsilon_k}^2) - E^2(\varepsilon_k) = E({\varepsilon_k}^2)$.

Επίσης,

$$E^2(U_T|F_{k-1}) = E^2\left(U_k + R^{T-k-1}\varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_T|F_{k-1}\right)$$

$$= E^2\left(U_{k-1} + R^{T-k}\varepsilon_k + R^{T-k-1}\varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_T|F_{k-1}\right)$$

$$= U_{k-1}^2. \quad (43)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (42) και (43) στη σχέση (41) έχουμε ότι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$S_{k-1} = E(S_k) + E\{E^2(U_T|F_k)|F_{k-1}\} - E^2(U_T|F_{k-1})$$

$$= E(S_k) + U_{k-1}^2 + R^{2(T-k)}\mathrm{var}(\varepsilon_k) - U_{k-1}^2$$

$$= E(S_k) + R^{2(T-k)}\mathrm{var}(\varepsilon_k).$$

Τέλος, με απλή αντικατάσταση των όρων της παραπάνω εξίσωσης καταλήγουμε στη σχέση (40). ■

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΜΗ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΙΜΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία επέκταση του μοντέλου που έχουν παρουσιάσει οι Black-Scholes (1973). Μία από τις αδυναμίες του μοντέλου τους, αποτελεί ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη τιμολόγηση παραγώγων όπου ο υποκείμενος τίτλος δεν διαπραγματεύεται σε κάποια οργανωμένη αγορά. Αντίθετα, η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε από τον D. Luenberger (2004) μπορεί να εφαρμοστεί σε έσοδα που αποτελούν συναρτήσεις στοχαστικών κυμαινόμενων μεταβλητών που μπορούν να παρατηρηθούν αλλά δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές. Η τιμή στην οποία καταλήγουμε χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο μοντέλο βασίζεται σε παρόμοια μεθοδολογία με αυτή που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2, αλλά εφαρμόζεται αυτή τη φορά στη στιγμιαία προβολή των μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων στο χώρο των διαπραγματεύσιμων.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις βασικές ιδιότητες του μοντέλου τιμολόγησης ως εξής:

1. Καταλήγει στην τιμολόγηση σύμφωνα με τη γραμμική μέθοδο.
2. Οι τιμές ανταποκρίνονται στη στιγμιαία προβολή των μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων στα διαπραγματεύσιμα.
3. Η τιμή είναι όμοια με αυτή που θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε τη μέθοδο της προβολής για το τελικό έσοδο στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων.
4. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage εάν η διαπραγμάτευση του μη διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου γίνεται στην τιμή που υποδεικνύεται από το συγκεκριμένο μοντέλο.
5. Η τιμή όπως ορίζεται από το μοντέλο αποτελεί μια παγκοσμίως αποδεκτή τιμή ορισμένη σε μηδενική βάση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

6. Σε περίπτωση που το περιουσιακό στοιχείο είναι κάποιο παράγωγο προϊόν η τιμή που καταλήγουμε είναι όμοια με αυτή που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα τιμολόγησης των Black-Scholes.
7. Η συνάρτηση τιμολόγησης περιγράφει πως μπορεί να αναπαραχθεί καλύτερα η συνάρτηση εσόδων, στη βάση ότι η αναμενόμενη τιμή του σφάλματος είναι μηδέν και ότι είναι ασυσχέτιστο με όλα τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία.

4.1 Ορισμός των Μεταβλητών του Μοντέλου Τιμολόγησης

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία όπου οι τιμές τους x_i, $i = 1,2,\dots,n$ ακολουθούν στο διάστημα $[0,T]$ τη Γεωμετρική Κίνηση Brown. Δηλαδή,

$$dx_i = \mu_i x_i dt + \sigma_i x_i dz_i \,, i = 1,2,\dots n. \quad (44)$$

Επίσης, κάθε z_i ακολουθεί την τυπική διαδικασία Wiener ενώ το μ_i συμβολίζει την αναμενόμενη απόδοση του περιουσιακού τίτλου και το σ_i την τυπική απόκλισή του. Τέλος, τόσο το μ_i όσο και το σ_i θεωρούνται ότι παραμένουν σταθερά στο συγκεκριμένο μοντέλο. Η διαδικασία που ακολουθεί το z_i συσχετίζεται ως εξής:

$$\mathrm{cov}\left(dz_i, dz_j\right) = \rho_{ij} dt,$$

όπου $\rho_{ii} = 1$.

Στο σύστημα που μόλις ορίσαμε υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει και το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου με ετήσια απόδοση ίση με r. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι στο συγκεκριμένο σύστημα δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

Τέλος, θεωρούμε ότι υπάρχει μία μη διαπραγματεύσιμη μεταβλητή e, η τιμή της οποίας ακολουθεί και αυτή τη Γεωμετρική Κίνηση Brown. Δηλαδή,

$$dx_e = \mu_e x_e dt + \sigma_e x_e dz_e \quad (45)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

και η οποία συσχετίζεται με τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία με στιγμιαίους συντελεστές συσχέτισης,

$$\mathrm{cov}(\mathrm{dz_e}, \mathrm{dz_i}) = \rho_{\mathrm{ei}}\mathrm{dt}.$$

Οι παράμετροι μ_e και σ_e εξαρτώνται από το x_e και το t και έτσι η διαδικασία που ακολουθεί το x_e εμφανίζει τα χαρακτηριστικά μιας μη διαπραγματεύσιμης μεταβλητής. Τέλος, ορίζουμε το έσοδο τη χρονική στιγμή T μέσω της συνάρτησης $F(x_e(T))$.

4.2 Βασικά Εργαλεία του Μοντέλου

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που θα μας βοηθήσει να καταλήξουμε στη φόρμουλα τιμολόγησης είναι αυτό του τελεστή τιμολόγησης P. Ο συγκεκριμένος τελεστής μας βοηθάει να τιμολογούμε τη στιγμή t, τα έσοδα που προκύπτουν τη στιγμή $t + dt$. Τέσσερις βασικές ιδιότητες του τελεστή P έχουν ως εξής:

i) Τιμολόγηση σταθεράς

Έστω ότι C είναι κάποιο σταθερό ποσό. Τότε, $P\{C\} = C(1 - rdt)$.

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$P\{C\} = Ce^{-rdt} = C\left(1 - rdt + \frac{(rdt)^2}{2} + \cdots\right) = C(1 - rdt). \quad \blacksquare$$

Δηλαδή, η συγκεκριμένη ιδιότητα μας δείχνει ότι εάν γνωρίζουμε σήμερα ότι τη χρονική στιγμή $t + dt$ θα εισπράξουμε ένα συγκεκριμένο ποσό, θα πρέπει να το προεξοφλήσουμε ώστε να βρούμε την πραγματική του αξία τη χρονική στιγμή t.

ii) Τιμολόγηση ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου

Έστω ότι συμβολίζουμε με x την τιμή μιας εξελισσόμενης στο χρόνο διαπραγματεύσιμης μεταβλητής που όμως δεν πληρώνει μερίσματα ούτε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

απαιτεί κόστη διακράτησης. Τότε $\mathrm{P}\{x + dx\} = x$. Δηλαδή, η τιμή $x(t + dt) \triangleq x + dx$ ισούται με την τρέχουσα τιμή $x(t)$. Επίσης, να επισημάνουμε ότι η ποσότητα x είναι σταθερή τη στιγμή t, ενώ ο όρος dx είναι στοχαστικός.

iii) <u>$\mathrm{P}\{dt\} = dt$</u>

Από τη συγκεκριμένη ιδιότητα αντιλαμβανόμαστε ότι η συνάρτησή μας είναι διαφοροποιήσιμη και ότι δεν απαιτείται προεξόφληση της τάξης πέρα του dt.

iv) <u>Ο τελεστής P είναι γραμμικός</u>

Η συγκεκριμένη ιδιότητα αποτελεί τη βασική γραμμική ιδιότητα τιμολόγησης.

<u>Εφαρμογή των ιδιοτήτων</u>

Έστω μία μετοχή που πληρώνει μερίσματα με επιτόκιο c. Γνωρίζουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής λαμβάνει υπόψη τόσο την πληρωμή μερισμάτων όσο και τη μελλοντική αξία της μετοχής. Έτσι έχουμε,

$$x = \mathrm{P}\{x + cdt + dx\} = \mathrm{P}\{cdt\} + \mathrm{P}\{x + dx\} \overset{(iii),(iv)}{\Longleftrightarrow}$$

$$x - cdt = \mathrm{P}\{x + dx\}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συγκεκριμένη μετοχή δεν πληρώνει κάποιο μέρισμα οπότε η τιμή της θα ισούται με:

$$x = \mathrm{P}\{x + dx\}.$$

Όμως, αφού η τιμή x μπορεί να θεωρηθεί ως μια σταθερά, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) βρίσκουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

$$x = x(1 - rdx) + \mathrm{P}\{dx\} \Leftrightarrow$$

$$rxdt = \mathrm{P}\{dx\}.$$

Αφού όμως η παραπάνω σχέση μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε από τα n περιουσιακά στοιχεία αυτό σημαίνει πώς μπορεί να εφαρμοστεί και

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό αυτών. Ένα γενικό περιουσιακό στοιχείο αυτής της μορφής έχει αξία η οποία είναι εξαρτώμενη από τα υπόλοιπα περιουσιακά στοιχεία καθώς και το πέρασμα του χρόνου και έτσι η αξία του μπορεί να εκφραστεί ως $V(x,t)$. Κάθε τέτοια συνάρτηση τιμής πρέπει να ικανοποιεί τη θεμελιώδη σχέση τιμών που φαίνεται στο Θεώρημα 4.1.

Θεώρημα 4.1 - Θεμελιώδης εξίσωση τιμολόγησης

Η αξία ενός διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$rV(x,t)dt = P\{dV(x,t)\}.$$

4.2.1 Στιγμιαία προβολή

Η τιμολόγηση με τη μέθοδο της στιγμιαίας προβολής μπορεί να εκφραστεί σε όρους του τελεστή τιμολόγησης P. Για να τιμολογήσουμε τη στιγμή t μια ποσότητα y τη χρονική στιγμή $t + dt$ που βρίσκεται εκτός του χώρου M (ο οποίος αποτελεί το χώρο που δημιουργείται από τις στιγμιαίες αποδόσεις των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων τη στιγμή t), προβάλουμε το y στο χώρο M και μετά εφαρμόζουμε τον τελεστή P. Δηλαδή,

$$p_y = P\{y|M\} = P\{y\}.$$

Έχουν γίνει αρκετές αναφορές σε διάφορα άρθρα για τη συγκεκριμένη μεθοδολογία. Ανάμεσα στις έρευνες που έχουν διεξαχθεί ξεχωρίζουμε αυτή του D. Luenberger (2001).

4.3 Εξίσωση Τιμολόγησης στο Συνεχή Χρόνο

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τελεστή τιμολόγησης P, στις ιδιότητες του οποίου αναφερθήκαμε στην Υποενότητα 4.2.1, για να τιμολογήσουμε ένα μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο e με συνάρτηση εσόδων $F(x_e(T))$. Όπως γνωρίζουμε οι τιμές των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ικανοποιούν τη σχέση (44) και των μη διαπραγματεύσιμων τη σχέση (45). Αναζητούμε μία συνάρτηση τιμολόγησης $V(x_e, t)$ στο διάστημα $[0, T]$ με τελική αξία $V(x_e, T) = F(x_e)$. Χρησιμοποιώντας τη στιγμιαία προβολή η συνάρτηση τιμολόγησης, εκφρασμένη σε όρους του τελεστή P, ικανοποιεί τη σχέση

$$V(x_e, t) = P\{V(x_e, t) + dV(x_e, t)|M\}, \quad \text{όπου } 0 \leq t < T. \quad (46)$$

Όμως, αφού ο όρος $V(x_e, t)$ βρίσκεται στο M και αποτελεί μία σταθερά, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) του τελεστή P μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$V(x_e, t) = V(x_e, t)(1 - rdt) + P\{dV(x_e, t)|M\} \Leftrightarrow$$

$$rV(x_e, t)dt = P\{dV(x_e, t)|M\}. \quad (47)$$

Από το Λήμμα του Ito βρίσκουμε ότι,

$$dV(x_e, t) = V_t(x_e, t)dt + V_{x_e}(x_e, t)dx_e + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e, t)(dx_e)^2.$$

Όμως $(dx_e)^2 = (\mu_e x_e dt + \sigma_e x_e dz_e)^2 = {\sigma_e}^2 {x_e}^2 dt$. Επομένως,

$$dV(x_e, t) = \left[V_t(x_e, t) + V_{x_e}(x_e, t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e, t){\sigma_e}^2 {x_e}^2\right]dt$$

$$+V_{x_e}(x_e, t)\sigma_e x_e dz_e. \quad (48)$$

Ο μόνος όρος στην παραπάνω εξίσωση που πρέπει να προβληθεί στο M είναι το dz_e, η προβολή του οποίου αποτελεί κάποιο γραμμικό συνδυασμό της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου rdt και της απόδοσης κάποιου διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου με τη μέγιστη συσχέτιση με το dx_e. Έστω ότι το διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο που αναζητούμε είναι το x_c, με στιγμιαία απόδοση $\frac{dx_c}{x_c}$ μέγιστα συσχετισμένη με την απόδοση του x_e, $\frac{dx_e}{x_e}$, και ακολουθεί και αυτό τη Γεωμετρική Κίνηση Brown, οπότε ικανοποιεί τη σχέση:

$$dx_c = \mu_c x_c dt + \sigma_c x_c dz_c,$$

όπου το dz_c ακολουθεί την τυπική διαδικασία Weiner.

Η προβολή του dz_e στο M θα είναι της μορφής $adt + bdz_c$. Όμως, αφού το σφάλμα στην προβολή πρέπει να είναι ορθογώνιο τόσο στο dt όσο και στο dz_c αυτό σημαίνει ότι:

$$E\{[dz_e - adt + bdz_c]dt\} = 0 \text{ και}$$

$$E\{[dz_e - adt + bdz_c]dz_c\} = 0.$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση παρατηρούμε ότι επαληθεύεται για κάθε α και b ενώ λύνοντας τη δεύτερη βρίσκουμε ότι:

$$E\{dz_e dz_c - adtdz_c + b(dz_c)^2\} = 0 \Leftrightarrow E\{dz_e dz_c + b(dz_c)^2\}.$$

Όμως,

$$\mathrm{cov}(dz_e dz_c) = E(dz_e dz_c) - E(dz_e)E(dz_c) = E(dz_e dz_c)$$

και

$$\mathrm{var}(dz_c) = E(dz_c)^2 - E^2(dz_c) = E(dz_c)^2.$$

Οπότε μπορούμε να ορίσουμε ότι α = 0, ενώ δείξαμε ότι $b = \frac{\mathrm{cov}(dz_e dz_c)}{\mathrm{var}(dz_c)} \triangleq \rho_{ec}$.

Επομένως,

$$dz_e = adt + bdz_c = \rho_{ec} dz_c.$$

Αντικαθιστώντας το dz_e στην εξίσωση (48) ώστε να βρούμε την προβολή του $dV(x_e, t)$ στο M έχουμε:

$$\{dV(x_e,t)|M\} = \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2{x_e}^2\right]dt$$
$$+V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \rho_{ec} dz_c$$
$$= \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2{x_e}^2\right]dt$$
$$+V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \frac{\sigma_{ec}}{\sigma_e \sigma_c} dz_c$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$= \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2} V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2 {x_e}^2 \right] dt$$

$$+V_{x_e}(x_e,t)x_e \frac{\sigma_{ec}}{\sigma_c} dz_c. \quad (49)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1 μπορούμε να δείξουμε ότι

$$rx_c dt = P\{dx_c\} = P\{\mu_c x_c dt + \sigma_c x_c dz_c\}$$

$$=\mu_c x_c dt + P\{\sigma_c x_c dz_c\}$$

$$=\mu_c x_c dt + \sigma_c x_c P\{dz_c\}.$$

Δηλαδή,

$$P\{dz_c\} = \left(\frac{r - \mu_c}{\sigma_c} \right) dt. \ (50)$$

Οπότε με αντικατάσταση των εξισώσεων (49) και (50) στην εξίσωση (47) βρίσκουμε ότι,

$$rV(x_e,t)dt = \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2} V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2 {x_e}^2 \right] dt$$
$$+ V_{x_e}(x_e,t)P\{\sigma_e x_e \rho_{ec} dz_c\}$$

$$= \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2} V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2 {x_e}^2 \right] dt$$
$$+ V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \rho_{ec} \left(\frac{r - \mu_c}{\sigma_c} \right) dt$$

$$= [V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + V_{x_e}(x_e,t)x_e \beta_{ec}(r - \mu_c)$$

$$+ \frac{1}{2} V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2 {x_e}^2]dt$$

$$= \left[V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)x_e[\mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r)] + \frac{1}{2} V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2 {x_e}^2 \right] dt.$$

Όπου

$$\beta_{ec} \triangleq \frac{\sigma_{ec}}{\sigma_c^2} = \rho_{ec} \frac{\sigma_e}{\sigma_c}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ακυρώνοντας τον όρο dt καταλήγουμε στη φόρμουλα τιμολόγησης μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων σε συνεχή χρόνο μέσω της προβολής. Λόγω της σπουδαιότητας του συμπεράσματος παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2 – Φόρμουλα τιμολόγησης μη διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων

Η τιμή ενός παραγώγου της μεταβλητής x_e $V(x_e, T) = F(x_e)$ με τη μέθοδο της προβολής ικανοποιεί την εξίσωση:

$$rV(x_e, t) = V_t(x_e, t) + V_{x_e}(x_e, t)x_e[\mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r)] + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e, t)\sigma_e{}^2 x_e{}^2, \quad (51)$$

με οριακές συνθήκες $V(x_e, T) = F(x_e)$ και $V(0, t) = e^{-r(T-t)}F(0)$.

Εάν η συγκεκριμένη φόρμουλα λυθεί χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες η αξία $V(x_e(0), 0)$ είναι η αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή μηδέν.

Παράδειγμα 4.1 - Εφαρμογή του Θεωρήματος 4.2 στην περίπτωση που η μεταβλητή x_e αντιστοιχεί σε κάποιο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο

Στην περίπτωση που η μεταβλητή x_e αντιστοιχεί σε κάποιο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_c = x_e$ και έτσι η σχέση (51) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$rV(x_e, t) = V_t(x_e, t) + V_{x_e}(x_e, t)x_e r + \frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e, t)\sigma_e{}^2 x_e{}^2,$$

αφού $\beta_{ec} = 1$ και $\mu_c = \mu_e$.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι καταλήγουμε στη γνωστή εξίσωση τιμολόγησης των Black-Scholes.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.4 Παγκόσμια Αποδεκτή Τιμή

Στη συγκεκριμένη ενότητα ακολουθώντας όμοια πρακτική με αυτή των Ενοτήτων 2.4 και 2.5 θέλουμε να δείξουμε ότι εφαρμόζοντας τη συγκεκριμένη φόρμουλα τιμολόγησης καταλήγουμε σε μια παγκοσμίως αποδεκτή τιμή ορισμένη σε μηδενική βάση, την έννοια της οποίας έχουμε ήδη ορίσει στην Ενότητα 2.5.

Υποθέτουμε έναν επενδυτή ο οποίος σχεδιάζει ένα χαρτοφυλάκιο από τα υπάρχοντα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία θέλοντας να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητας του πλούτου του U, όπου η συνάρτηση U είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμη, αύξουσα και κυρτή. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο συγκεκριμένος επενδυτής έχει στη διάθεσή του μετρητά αξίας W με $W_0 > 0$. Ακόμα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση τιμολόγησης $V(x_e, t)$ επιβάλλεται εξωγενώς και είναι όμοια με αυτή που περιγράφεται στο Θεώρημα 4.1. Ορίζουμε τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία με x και το χαρτοφυλάκιο που δημιουργείται από αυτά με $\alpha_x^{'}x$, όπου με α_x συμβολίζουμε τα σταθμά βάσει των οποίων έχουμε κατανείμει τα χρήματα μας στα διαθέσιμα περιουσιακά στοιχεία. Ομοίως, με α_e συμβολίζουμε τα χρήματα που έχουμε επενδύσει στο μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο e. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης που έχουμε να λύσουμε είναι της μορφής

$$\max_{\alpha_x, a_e} E[U(W(T))],$$

η οποία υπόκειται στους περιορισμούς

$$dW(t) = \alpha_x^{'}dx + \alpha_e dV(x_e, t),$$

$$W(0) = W_0 \quad \text{και}$$

$$\alpha_x^{'}x + \alpha_e V(x_e, t) = W(t).$$

Ο τελευταίος περιορισμός σχετίζεται με το περιορισμό σχετικά με το διαθέσιμο χρηματικό ποσό προς επένδυση και επισημαίνει ότι ο επενδυτής πρέπει να κατανείμει το σύνολο του διαθέσιμου πλούτου του W στα διαθέσιμα περιουσιακά στοιχεία. Επίσης, ο τελικός πλούτος καθορίζεται από τη διαφορική εξίσωση που περιγράφεται στον πρώτο περιορισμό. Αντικειμενικός σκοπός αποτελεί τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του διαθέσιμου πλούτου όπως φαίνεται τη χρονική στιγμή μηδέν.

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης με παρόμοια μεθοδολογία με αυτή που ακολουθήσαμε στην Ενότητα 2.4, αλλά χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά και ανώτερα μαθηματικά εργαλεία λόγω της στιγμιαίας προβολής, μπορεί να αποδειχθεί ότι η τιμή που ορίζεται από τη φόρμουλα τιμολόγησης του Θεωρήματος 4.2 αποτελεί παγκοσμίως αποδεκτή τιμή ορισμένη σε μηδενική βάση.

4.5 Βέλτιστη Αντιγραφή

Είναι δυνατόν να αντιγράψουμε στενά το τελικό έσοδο με διαπραγμάτευση στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε δεν είναι τέλεια αλλά το σφάλμα έχει αναμενόμενη τιμή ίση με μηδέν και είναι ασυσχέτιστο με όλα τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία. Υπό αυτό το πρίσμα η στρατηγική που ακολουθούμε αποτελεί τη βέλτιστη στρατηγική. Η συνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε για τη βέλτιστη αντιγραφή θα προέλθει από τη συνάρτηση τιμολόγησης.

Αναδιατάσσοντας τους όρους της εξίσωσης (51) έχουμε:

$$\frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e{}^2 x_e{}^2 = rV(x_e,t) - V_t(x_e,t) - V_{x_e}(x_e,t)x_e[\mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r)]. \quad (52)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (49) βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\{dV(x_e,t)|M\} &= \{V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e \ + \ rV(x_e,t) - V_t(x_e,t) \\ &\quad -V_{x_e}(x_e,t)x_e[\mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r)]\}dt + V_{x_e}(x_e,t)x_e\frac{\sigma_{ec}}{\sigma_c}dz_c \\ &= \{V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e \ + \ rV(x_e,t) - V_{x_e}(x_e,t)x_e\mu_e \\ &\quad +V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}(\mu_c - r)\} + V_{x_e}(x_e,t)x_e\frac{\sigma_{ec}}{\sigma_c}dz_c\end{aligned}$$

$$=\{rV(x_e,t)+V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}\mu_c-V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}r\}dt$$

$$+V_{x_e}(x_e,t)x_e\frac{\sigma_{ec}}{\sigma_c}dz_c$$

$$=\{(V(x_e,t)-\varphi)r+\varphi\mu_c\}dt+\varphi\mu_c dz_c, \qquad (53)$$

όπου $\varphi(x_e,t)=V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}$.

Συνεχίζοντας περαιτέρω το συλλογισμό μας,

$$\{dV(x_e,t)|M\}=\{[V(x_e,t)-V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}]r+V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}\mu_c\}dt$$

$$+V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}\mu_c dz_c$$

$$=\left\{\left[1-\frac{V_{x_e}(x_e,t)}{V(x_e,t)}x_e\beta_{ec}\right]r+\frac{V_{x_e}(x_e,t)}{V(x_e,t)}x_e\beta_{ec}\mu_c\right\}V(x_e,t)dt$$

$$+V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}\mu_c dz_c$$

$$=\{(1-\gamma)r+\gamma\mu_c\}V(x_e,t)dt+\gamma\sigma_c V(x_e,t)dz_c, \quad (54)$$

όπου

$$\gamma=\frac{V_{x_e}(x_e,t)}{V(x_e,t)}x_e\beta_{ec}.$$

Με άλλα λόγια σύμφωνα με την εξίσωση (54) η στιγμιαία προβαλλόμενη απόδοση είναι γραμμικός συνδυασμός της απόδοσης του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο και της απόδοσης του διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου με τη μέγιστη συσχέτιση. Τα βάρη κατανομής ισούνται με $1-\gamma$ και γ αντίστοιχα.

Όμως, όπως και στην εξίσωση (48) η συνάρτηση τιμολόγησης ακολουθεί τη διαδικασία του Ito. Οπότε,

$$dV(x_e,t)=\left[V_t(x_e,t)+V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e+\frac{1}{2}V_{x_e x_e}(x_e,t){\sigma_e}^2{x_e}^2\right]dt$$

$$+V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e dz_e. \quad (55)$$

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε ότι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$dz_e = \rho_{ec} dz_c + \sqrt{1-\rho_{ec}{}^2} dz_p,$$

όπου το dz_p ακολουθεί την τυπική διαδικασία Wiener και είναι ασυσχέτιστο με όλα τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία.

Χρησιμοποιώντας αύτη την εξίσωση καθώς και την εξίσωση (52), με αντικατάσταση στη σχέση (55) βρίσκουμε ότι,

$$dV(x_e,t) = \big\{V_t(x_e,t) + V_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e \ + \ rV(x_e,t) - V_t(x_e,t)$$

$$-V_{x_e}(x_e,t)x_e[\mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r)]\big\}dt + V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e dz_e$$

$$=\{(V(x_e,t) - \varphi)r + \varphi\mu_c\}dt + \varphi\mu_c dz_c + \delta dz_p, \quad (56)$$

αφού

$$V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e dz_e = V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \rho_{ec} dz_c + V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \sqrt{1-\rho_{ec}{}^2} dz_p$$

$$=V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \left(\frac{\beta_{ec}\sigma_c}{\sigma_e}\right) dz_c + V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \sqrt{1-\rho_{ec}{}^2} dz_p$$

$$=V_{x_e}(x_e,t)x_e\beta_{ec}\sigma_c dz_c + V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \sqrt{1-\rho_{ec}{}^2} dz_p$$

$$=\varphi\sigma_c dz_c + \delta dz_p,$$

όπου $\delta(x_e,t) = V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e \sqrt{1-\rho_{ec}{}^2}$. (57)

Παρακινούμενοι από την εξίσωση (56) θεωρούμε τη διαδικασία G την οποία ορίζουμε ως ακολούθως:

$$dG(x_e,t) = \{(G(x_e,t) - \varphi)r + \varphi\mu_c\}dt + \varphi\mu_c dz_c, \qquad (58)$$

με αρχική συνθήκη $G(x_e,0) = V(x_e,0)$.

Από την παραπάνω εξίσωση γίνεται σαφές ότι το $dG(x_e,t)$ ανήκει στο M την περίοδο (x_e,t) και ότι παράγεται από γραμμικούς συνδυασμούς των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων. Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (56) και (58) βρίσκουμε ότι,

$$d(V-G) = r(V-G)dt + \delta dz_p. \quad (59)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Επίσης, εφόσον $V-G=0$ η αναμενόμενη τιμή της διαφοράς τους θα ισούται επίσης με το μηδέν. Δηλαδή,

$$E\{(V(x_e,t)-G(x_e,t)\}=0 \ \ \forall \quad t, \quad 0\le t\le T.$$

Απόδειξη:

Από την εξίσωση (59) έχουμε:

$$V(x_e,t)-G(x_e,t)=V(x_e,0)-G(x_e,0)+r\int_0^t[V(x_e,s)-G(x_e,s)]\,ds+\int_0^t \delta dz_p ds$$

$$=r\int_0^t[V(x_e,s)-G(x_e,s)]\,ds+\int_0^t \delta dz_p ds.$$

Οπότε,

$$E[V(x_e,t)-G(x_e,t)]=r\int_0^t E[V(x_e,s)-G(x_e,s)]\,ds+\int_0^t \delta dz_p ds$$

$$=r\int_0^t E[V(x_e,s)-G(x_e,s)]\,ds,$$

αφού γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα της Γεωμετρικής Κίνησης Brown ως προς τη μέση τιμή ισούται με μηδέν.

Θέτοντας $y(t)=E[V(x_e,t)-G(x_e,t)]$ έχουμε:

$$y(t)=r\int_0^t y(s)\,ds \Leftrightarrow y(t)dt=ry(t).$$

Οπότε η λύση θα είναι της μορφής $y(t)=ke^{rt}$. Επομένως, $y(0)=k$.

Όμως, ξέρουμε ότι $y(0)=E[V(x_e,0)-G(x_e,0)]=0$.

Άρα, $y(t)=E[V(x_e,t)-G(x_e,t)]=0.$ ■

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημάνουμε ότι εφόσον το $V-G$ είναι γραμμικό ολοκλήρωμα του dz_p, είναι ορθογώνιο σε όλες τις αποδόσεις της αγοράς. Οπότε η τυχαία μεταβλητή $G(x_e,t)$, όπως φαίνεται τη χρονική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στιγμή μηδέν, αποτελεί την προβολή του $V(x_e, t)$ στο χώρο των διαπραγματεύσιμων περιουσιακών στοιχείων για την περίοδο $0 \leq t \leq T$.

Οπότε, η βέλτιστη αντιγραφή μπορεί να επιτευχθεί απλώς ακολουθώντας τη διαδικασία της G, όπως αυτή φαίνεται τη σχέση (58). Μάλιστα, το μόνο που απαιτείται για την αντιγραφή είναι μία αρχική χρηματική επένδυση $V(x_e, 0)$ και καμία επιπλέον κίνηση δεν απαιτείται από τη χρονική στιγμή 0 στη T. Σε κάθε χρονική στιγμή ένα ποσό G-φ επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου και ένα πόσο ίσο με φ στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση.

4.6 Σφάλμα Προβολής

Η διακύμανση του εναπομείναντος σφάλματος της διαδικασίας αντιγραφής τη χρονική στιγμή T μπορεί να βρεθεί με τη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης προσαρμοσμένης στη γενική παγκόσμια συνάρτηση τιμολόγησης.

Ορίζουμε ως $D \triangleq V - G$,

και επίσης θέτουμε $U = e^{r(T-t)}D$.

Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (59) έχουμε,

$$dU = -re^{r(T-t)}Ddt + e^{r(T-t)}dD$$

$$= \left[-re^{r(T-t)}Ddt + e^{r(T-t)}rD\right]dt + e^{r(T-t)}\delta(x_e, t)dz_p$$

$$= \delta^*(x_e, t)dz_p, \qquad (60)$$

όπου $\delta^*(x_e, t) = e^{r(T-t)}\delta(x_e, t)$

Επίσης, ορίζουμε τη διακύμανση της $U(T)$ με $S(x_e, t)$, ενώ η αρχική συνθήκη της εξίσωσης (60) ισούται με $U = 0$ τη στιγμή (x_e, t).

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (60) τη χρονική στιγμή $[0, T]$ ισούται με

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$U(x_e, T) - U(x_e, t) = \int_t^T \delta^*(x_e, t) dz_p.$$

Οπότε η διακύμανση ισούται με,

$$S(x_e, t) = \operatorname{var}(U(x_e, T)|F_t)$$

$$= \operatorname{var}\left(\int_t^T \delta^*(x_e, t) dz_p \,|F_t\right) = E\left(\left(\int_t^T \delta^*(x_e, t) dz_p\right)^2 |F_t\right)$$

$$= E\left(\int_t^T \delta^{*2}(x_e, s) ds \,|F_t\right)$$

$$= E_t\left(\int_t^T \delta^{*2}(x_e, s) ds\right), \qquad (61)$$

αφού $E\left(\int_t^T \delta^*(x_e, t) dz_p \,|F_t\right) = 0$ ενώ το E δηλώνει την αναμενόμενη τιμή τη χρονική στιγμή t.

Μπορούμε να γράψουμε όμως την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$S(x_e, t) = E_t\left\{\int_t^T \delta^{*2}(x_e, s) ds\right\} = E_t\left\{\int_t^{t+dt} \delta^{*2}(x_e, s) ds\right\} + E_t\left\{\int_{t+dt}^T \delta^{*2}(x_e, s) ds\right\}$$

$$= \delta^{*2}(x_e, t)(t + dt - t) + E_t\left\{\int_{t+dt}^T \delta^{*2}(x_e, s) ds\right\}$$

$$= \delta^{*2}(x_e, t) dt + E_t\left\{E_{t+dt}\left(\int_{t+dt}^T \delta^{*2}(x_e, s) ds\right)\right\}$$

$$= \delta^{*2}(x_e, t) dt + E_t\{S(x_e, t + dt)\}$$

$$= \delta^{*2}(x_e, t) dt + E_t\{S(x_e, t) + dS(x_e, t)\}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) του τελεστή P που έχουμε ήδη περιγράψει.

Όμως $E_t\{S(x_e, t)\} = S(x_e, t)$. Οπότε,

$$E_t\{dS(x_e, t)\} + \delta^{*2}(x_e, t) dt = 0. \quad (62)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Ito η σχέση (62) μπορεί να απεικονισθεί ως εξής:

$$E_t\left\{S_t(x_e,t)dt + S_{x_e}(x_e,t)dx_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)(dx_e)^2\right\} + \delta^{*2}(x_e,t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow E_t\{S_t(x_e,t)dt + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e dt + S_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e dz_e$$

$$+\frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)(\mu_e x_e dt + \sigma_e x_e dz_e)^2\Big\} + \delta^{*2}(x_e,t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow E_t\left\{\left[S_t(x_e,t) + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e^2 x_e^2\right]dt + S_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e dz_e\right\}$$

$$+\delta^{*2}(x_e,t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[S_t(x_e,t) + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e^2 x_e^2\right]dt + \delta^{*2}(x_e,t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow S_t(x_e,t) + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e^2 x_e^2 + \delta^{*2}(x_e,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_t(x_e,t) + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e^2 x_e^2 + e^{2r(T-t)}\delta(x_e,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_t(x_e,t) + S_{x_e}(x_e,t)\mu_e x_e + \frac{1}{2}S_{x_e x_e}(x_e,t)\sigma_e^2 x_e^2$$

$$+e^{2r(T-t)}\left(V_{x_e}(x_e,t)\sigma_e x_e\right)^2(1-\rho_{ec}{}^2) = 0$$

με συνοριακή συνθήκη $S(x_e,T) = 0$.

Η αξία $S(x_e,0)$ απεικονίζει τη διακύμανση του σφάλματος κατά τη διαδικασία αντιγραφής τη στιγμή Τα, έτσι όπως αυτή φαίνεται τη χρονική στιγμή μηδέν $(t = 0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές στα μοντέλα που έχουμε ήδη αναλύσει. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση τόσο των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων όσο και των Αμερικάνικων στην περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος ισούται με μία μη διαπραγματεύσιμη διωνυμική μεταβλητή. Στη συνέχεια και για σκοπούς σύγκρισης των αποτελεσμάτων θα προχωρήσουμε στην τιμολόγηση παραγώγων των οποίων τα έσοδα αποτελούν συναρτήσεις στοχαστικών μεταβλητών και άρα περιγράφονται από τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4.

5.1 Μεθοδολογία Τιμολόγησης Βάσει του Διωνυμικού Πλαισίου

Στις εφαρμογές που ακολουθούν, χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στα πρώτα τρία κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας, ενώ τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε έχουν ως εξής:

- Αρχική αξία της υποκείμενης διωνυμικής μεταβλητής, $B_0 = 60$.
- Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, $K = 65$.
- Πιθανότητα ανοδικής κίνησης της B, $p_B = 0{,}5$.
- Πολλαπλασιαστής ανοδικής κίνησης $u = 1{,}3$ και καθοδικής $d = 0{,}7$.
- Περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση το A με $P_A = 1$.
- Αναμενόμενη τιμή του περιουσιακού στοιχείου A, $\bar{A} = 1{,}2$.
- Τυπική απόκλιση του περιουσιακού στοιχείου A, $\sigma_A = 0{,}4$.
- Συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του A και του B, $\rho_{AB} = 0{,}7$.
- Ορίζουμε το περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου R, με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου να ισούται με $r = 0{,}05$.
- Χρονική περίοδος μέχρι τη λήξη, $T = 3$.

Εφαρμογή 1 – Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς τριών περιόδων της διωνυμικής μεταβλητής B. Αρχικά στηριζόμενοι στο Θεώρημα 2.6 θα πρέπει να υπολογίσουμε τις βοηθητικές παραμέτρους δ, q και θ που θα αποτελέσουν μεταβλητές εισόδου στην αναδρομική λύση του πλέγματος που θα δημιουργήσουμε. Έπειτα, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε στην Ενότητα 3.2 μπορούμε να βρούμε την αξία του παραγώγου της μεταβλητής B. Πιο συγκεκριμένα αρχικά υπολογίζουμε την αξία του παραγώγου την τελική χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας τη σχέση $\max = (0, \mathrm{B} - \mathrm{K})$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ουδέτερη στον κίνδυνο πιθανότητα q βρίσκουμε την αξία του στους προηγούμενους κόμβους.

Επίσης, η συνολική διακύμανση του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης που μπορούμε να δημιουργήσουμε βρίσκεται χρησιμοποιώντας τη σχέση (40) που καταλήξαμε στην Υποενότητα 3.3.2. Τέλος, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό ποσό που θα πρέπει να επενδύσουμε στο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (34).

Εφαρμογή 2 – Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης

Χρησιμοποιώντας τα ίδια δεδομένα με αυτά της Εφαρμογής 1, αλλά και αντίστοιχη μεθοδολογία, μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Μόνη διαφορά σε σχέση με τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε προηγουμένως αποτελεί το γεγονός ότι η φόρμουλα που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την αξία του παραγώγου την τελική χρονική στιγμή δίνεται από την εξίσωση $\max = (0, \mathrm{K} - \mathrm{B})$.

Εφαρμογή 3 – Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς

Στην περίπτωση των κλασικών χρηματοοικονομικών παραγώγων είναι γνωστό πώς η αξία ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς ισούται με αυτή του Αμερικάνικου, καθώς δεν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκησή του στη περίπτωση που ο τίτλος δεν δίνει μέρισμα. Παρόλα αυτά, δεν ισχύει το ίδιο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στην περίπτωση που δεν υπάρχει κάποιος στενά συνδεδεμένος υποκείμενος τίτλος. Η μόνη αλλαγή που πρέπει να κάνουμε ώστε να υπολογίσουμε την αξία ενός Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς είναι ότι πρέπει να κατασκευάσουμε την αναδρομική λύση, έτσι ώστε σε κάθε κόμβο να παίρνουμε τη μεγαλύτερη αξία ανάμεσα στην εσωτερική αξία του παραγώγου και την αξία από την άμεση εξάσκησή του.

Επίσης, για τον υπολογισμό της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι σε περίπτωση πρόωρης εξάσκησης του δικαιώματος οι επόμενοι κόμβοι θα πρέπει να συμπληρωθούν με μηδέν καθώς δεν δημιουργείται από εκεί και πέρα επιπρόσθετη διακύμανση.

Εφαρμογή 4 – Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Συνδυάζοντας τα χαρακτηριστικά του πλέγματος που δημιουργήσαμε στην Εφαρμογή 2 με αυτά που αναφέραμε στην Εφαρμογή 3, μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο πλέγμα για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης.

5.1.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Ας εξετάσουμε έναν έναν τους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή, την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, και την ποσότητα των χρημάτων που πρέπει να επενδύουμε σε κάθε περίπτωση στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των Πινάκων 1 και 5 μπορούμε να προχωρήσουμε στα ακόλουθα σχόλια:

Α) Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Η αύξηση του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο οδηγεί στην άνοδο της αξίας του δικαιώματος αγοράς (για το δεδομένο συντελεστή συσχέτισης του παραδείγματός μας). Κάτι τέτοιο φαίνεται ξεκάθαρα παρατηρώντας τον Πίνακα 1. Γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με τις γνώσεις μας από τα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

χρηματοοικονομικά παράγωγα. Μάλιστα η αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και επίσης προκαλεί και αύξηση στο απαιτούμενο ποσό που πρέπει να επενδύσουμε στο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση.

Η αύξηση της τυπικής απόκλισης του στοιχείου Α μπορεί να επηρεάσει και θετικά και αρνητικά την αξία του δικαιώματος αγοράς. Σε κάθε περίπτωση όπως φαίνεται από τη σχέση (10) οδηγεί σε μείωση του συντελεστή δ και από εκεί και πέρα μπορεί να επηρεάσει με δύο τρόπους την αξία του παραγώγου. Είτε θετικά σε περίπτωση που η αναμενόμενη απόδοση του Α είναι υψηλότερη από αυτή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο καθώς τότε οδηγούμαστε σε αύξηση της ψευδοπιθανότητας q, είτε αρνητικά στην αντίθετη περίπτωση. Δεδομένου όμως ότι η αναμενόμενη απόδοση του Α θα είναι πάντα υψηλότερη από αυτή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο ώστε να μην υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage η επιρροή θα είναι θετική. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 στη περίπτωση που εξετάζουμε επιβεβαιώνουν την προηγούμενη ανάλυσή μας. Όσον αφορά την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου η σχέση είναι ανάλογη με την αξία του παραγώγου, ενώ η σχέση με το ποσό επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση είναι αρνητική, όπως και περιμέναμε.

Η αύξηση της αναμενόμενης απόδοσης του Α επηρεάζει αρνητικά την αξία του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Αλγεβρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη σχετική μεταβολή μελετώντας τη σχέση (9) που όπως φαίνεται οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας q. Λόγω της σημαντικής μείωσης της αξίας του δικαιώματος προκαλείται και μείωση στην τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, αλλά και μείωση του απαραίτητου ποσού επένδυσης στο Α. Τα παραπάνω συμπεράσματα προέρχονται από τη μελέτη του Πίνακα 3.

Η θετική μεταβολή του συντελεστή συσχέτισης του Α με το Β μπορεί να επηρεάσει κυρίως αρνητικά την αξία του δικαιώματος αγοράς, όπως εξηγούμε και στη συνέχεια. Όπως φαίνεται από τη σχέση (10) οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή δ και από εκεί και πέρα μπορεί να επηρεάσει με δύο τρόπους την αξία του παραγώγου. Είτε αρνητικά σε περίπτωση που η αναμενόμενη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

απόδοση του Α είναι υψηλότερη από αυτή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο καθώς τότε οδηγούμαστε σε μείωση της ψευδοπιθανότητας q, είτε θετικά στην αντίθετη περίπτωση. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4 στη περίπτωση που εξετάζουμε επιβεβαιώνουν την προηγούμενη ανάλυσή μας. Επίσης, μελετώντας τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου πίνακα παρατηρούμε ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ του συντελεστή συσχέτισης και της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, ενώ θετική είναι η σχέση με το απαιτούμενο ποσό επένδυσης στο Α, όπως και περιμέναμε.

Τελειώνοντας, μπορούμε να ελέγξουμε την αξιοπιστία του μοντέλου μας θεωρώντας ότι το στοιχείο Β είναι ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο. Εξισώνοντας τα στατιστικά στοιχεία του Α με αυτά του Β βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος να ισούται με 13,73. Η αντίστοιχη θεωρητική τιμή, βάσει του τύπου των Black-Scholes (εντολή “blsprice” στη Matlab) με τα αντίστοιχα δεδομένα ισούται με 14,01. Η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική αν αναλογιστούμε ότι προσπαθούμε να τιμολογήσουμε μη διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία (Πίνακας 5).

Β) Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα καταλήγουμε και από τη μελέτη των αποτελεσμάτων του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς. Προχωρώντας ένα βήμα περεταίρω, και συγκεκριμένα συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της περίπτωσης τιμολόγησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς η πρώτη σημαντική διαφορά που πρέπει να επισημάνουμε είναι το γεγονός ότι, στην περίπτωση των πραγματικών δικαιωμάτων, κάποιες φορές αποτελεί βέλτιστη πρακτική η πρόωρη εξάσκησή του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς. Γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις γνώσεις από την αποτίμηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Μάλιστα γίνεται περισσότερη πιθανή η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος στη περίπτωση υψηλού επιτοκίου χωρίς κίνδυνο όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα 1. Το γεγονός αυτό οδηγεί και στη σημαντική μείωση της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης καθώς από τη στιγμή που το δικαίωμα εξασκείται δεν υπάρχει περαιτέρω συνεισφορά στην τυπική απόκλιση. Τα σχετικά αποτελέσματα φαίνονται στους Πίνακες 1 - 4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Γ) Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

Η αύξηση του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο οδηγεί στη μείωση της αξίας του δικαιώματος πώλησης. Κάτι τέτοιο φαίνεται ξεκάθαρα παρατηρώντας τον Πίνακα 1 (για το δεδομένο συντελεστή συσχέτισης του παραδείγματος μας). Γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με τις γνώσεις μας από τα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Μάλιστα η αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε αντίστοιχη μείωση της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και επίσης προκαλεί και μείωση στο απαιτούμενο ποσό που πρέπει να επενδύσουμε στο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση.

Η αύξηση της τυπικής απόκλισης του στοιχείου Α μπορεί να επηρεάσει και θετικά και αρνητικά την αξία του δικαιώματος πώλησης ακολουθώντας ανάλογο σκεπτικό με αυτό της περίπτωσης του δικαιώματος αγοράς. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων όμως, όπου η αναμενόμενη απόδοση του Α είναι υψηλότερη από αυτή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, τότε οδηγούμαστε σε αύξηση της ψευδοπιθανότητας q και άρα στη μείωση της αξίας του δικαιώματος πώλησης. Στον Πίνακα 2 απεικονίζονται τα σχετικά αποτελέσματα στην περίπτωση που εξετάζουμε και επιβεβαιώνουν την προηγούμενη ανάλυσή μας. Όσον αφορά την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου η σχέση είναι ανάλογη με την αξία του παραγώγου, ενώ η σχέση με το ποσό επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση είναι αρνητική, όπως και περιμέναμε.

Η αύξηση της αναμενόμενης απόδοσης του Α επηρεάζει θετικά την αξία του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Αλγεβρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη σχετική μεταβολή μελετώντας τη σχέση (9) που όπως φαίνεται οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας q. Λόγω της σημαντικής αύξησης της αξίας του δικαιώματος προκαλείται και μία σχετική αύξηση στην τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, αλλά και μία μικρή αύξηση του απαραίτητου ποσού επένδυσης στο Α. Τα παραπάνω συμπεράσματα προέρχονται από τη μελέτη του Πίνακα 3.

Η μεταβολή του συντελεστή συσχέτισης του Α με το Β επηρεάζει κυρίως θετικά την αξία του δικαιώματος πώλησης. Ακολουθώντας όμοια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

προσέγγιση με αυτή της περίπτωσης του δικαιώματος αγοράς, σε κάθε περίπτωση όπως φαίνεται από τη σχέση (10) οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή δ και από εκεί και πέρα μπορεί να επηρεάσει με δύο τρόπους την αξία του παραγώγου. Είτε θετικά σε περίπτωση που η αναμενόμενη απόδοση του Α είναι υψηλότερη από αυτή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο καθώς τότε οδηγούμαστε σε μείωση της ψευδοπιθανότητας q, είτε αρνητικά στην αντίθετη περίπτωση. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4 στη περίπτωση που εξετάζουμε επιβεβαιώνουν την προηγούμενη ανάλυσή μας. Επίσης, μελετώντας τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου πίνακα παρατηρούμε ότι υπάρχει ελαφρώς θετική συσχέτιση μεταξύ του συντελεστή συσχέτισης και της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, καθώς μεταξύ της επιρροής της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου από την άνοδο της τιμής του παραγώγου και την αύξηση του συντελεστή συσχέτισης υπερτερεί ελαφρώς η πρώτη, ενώ θετική είναι η σχέση με το απαιτούμενο ποσό επένδυσης στο Α, όπως και περιμέναμε.

Τελειώνοντας, μπορούμε να ελέγξουμε την αξιοπιστία του μοντέλου μας θεωρώντας ότι το στοιχείο Β είναι ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο. Εξισώνοντας τα στατιστικά στοιχεία του Α με αυτά του Β, βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος να ισούται με 9,68. Η αντίστοιχη θεωρητική τιμή, βάσει του τύπου των Black-Scholes (εντολή “blsprice” στη Matlab) με τα αντίστοιχα δεδομένα ισούται με 9,96. Η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική αν αναλογιστούμε ότι προσπαθούμε να τιμολογήσουμε μη διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία (Πίνακας 5).

<u>Δ) Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης</u>

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα καταλήγουμε και από τη μελέτη των αποτελεσμάτων του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης. Προχωρώντας ένα βήμα περεταίρω, και συγκεκριμένα συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της περίπτωσης τιμολόγησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος παρατηρούμε ότι η τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτή του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού, κάτι το οποίο περιμέναμε καθώς το ίδιο συμβαίνει και στα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Επίσης, σημαντική παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης γίνεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

περισσότερο πιθανό να εξασκηθεί πρόωρα όσο αυξάνει το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σε αντιστοιχία με τα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Το γεγονός αυτό οδηγεί και στη μείωση της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης στην περίπτωση που αποτελεί βέλτιστη πρακτική η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος, καθώς από τη στιγμή που το δικαίωμα εξασκείται δεν υπάρχει περαιτέρω συνεισφορά στην τυπική απόκλιση. Τα σχετικά αποτελέσματα φαίνονται στους Πίνακες 1 - 4.

5.2 Μεθοδολογία Τιμολόγησης Βάσει των Στοχαστικών Μεταβλητών

Στις εφαρμογές που ακολουθούν, εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 4. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε για σκοπούς σύγκρισης των αποτελεσμάτων με την περίπτωση που η μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή είναι αντίστοιχα και έχουν ως εξής:

- Αρχική αξία του μη διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου, $\mathrm{S_e} = 60$.
- Αναμενόμενη ετήσια απόδοσή του, $\mathrm{r_e} = 0$.
- Τυπική απόκλισή του, $\mathrm{sigma_e} = 0{,}3$.
- Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, $\mathrm{K} = 65$.
- Αναμενόμενη ετήσια απόδοση του περιουσιακού στοιχείου με τη μέγιστη συσχέτιση, $\mathrm{r_c} = 0{,}2$.
- Τυπική απόκλισή του, $\mathrm{sigma_c} = 0{,}4$.
- Συντελεστής συσχέτισης, $\rho_{\mathrm{ec}} = 0{,}7$.
- Χρονική περίοδος μέχρι τη λήξη, $\mathrm{T} = 3$.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων θα ήταν χρήσιμο να αναφερθούμε τόσο στους τύπους με τους οποίους υπολογίσαμε τις θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων όσο και στη μεθοδολογία της έμμεσης μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

Λύνοντας την εξίσωση (51) μπορεί να βρεθεί η εξής λύση για ένα δικαίωμα αγοράς:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$V(x_e,t) = x_e e^{(\omega-r)(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

όπου

$$\omega = \mu_e - \beta_{ec}(\mu_c - r),$$

$$d_1 = \frac{[\log(^{x_e}/_K) + (\omega + (^1/_2)\sigma_e{}^2(T-t)]}{\sigma_e\sqrt{T-t}}$$

και

$$d_2 = \frac{[\log(^{x_e}/_K) + (\omega - (^1/_2)\sigma_e{}^2(T-t)]}{\sigma_e\sqrt{T-t}}.$$

Αντίστοιχα η θεωρητική τιμή ενός δικαιώματος πώλησης ισούται με:

$$V(x_e,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - x_e e^{(\omega-r)(T-t)}N(-d_1).$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή των δικαιωμάτων με την έμμεση μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιούμε τη σχέση (51) και κάνουμε χρήση της προδρομικής διαφοράς για την προσέγγιση των μερικών παραγώγων ως προς το χρόνο και της κεντρικής διαφοράς για την προσέγγιση ως προς το χώρο. Έχουμε χαρακτηριστικά,

$$rV_{i,j} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta t} + \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} i\delta S\omega + \frac{1}{2}\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\delta S}\sigma_e{}^2 i^2\delta S^2$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $V_{i,j+1}$ καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$V_{i,j+1} = \alpha_i V_{i-1,j} + b_i V_{i,j} + c_i V_{i+1,j}, \text{όπου } j = 0,1,\dots,N-1 \text{ και } i = 1,2,\dots,M-1,$$

ενώ επίσης,

$$\alpha_i = \frac{1}{2} i\delta t(\omega - i\sigma_e{}^2),$$

$$b_i = r\delta t + i^2\delta t\sigma_e{}^2 + 1$$

και

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$c_i = -\frac{1}{2} i\delta t(\omega - i\sigma_e{}^2).$$

Ολοκληρώνοντας, να επισημάνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή ενός δικαιώματος πώλησης χρησιμοποιώντας και μία επέκταση του γνωστού Put-Call Parity. Συγκεκριμένα η σχέση που ισχύει είναι η ακόλουθη:

$$C - P + Ke^{-rT} = x_e e^{(\omega - r)T}.$$

5.2.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των Πινάκων 6 - 10, καταλήγουμε σε δύο βασικά συμπεράσματα. Πρώτον, το μοντέλο τιμολόγησης που βασιστήκαμε και θεωρεί ότι η μη διαπραγματεύσιμη μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σχετικά με την τιμή των δικαιωμάτων. Επίσης, αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα από τη μεταβολή των συντελεστών συσχέτισης των δύο περιουσιακών στοιχείων, της τυπικής απόκλισης του διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου με τη μέγιστη συσχέτιση αλλά και της αναμενόμενης απόδοσής του. Φυσικά το συγκεκριμένο μοντέλο δύναται να παρέχει αποτελέσματα υψηλότερης ακρίβειας λόγω του ότι εφαρμόσαμε την έμμεση μέθοδο πεπερασμένων διαφορών η οποία μας επιτρέπει να χωρίσουμε το χρονικό διάστημα τιμολόγησης σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα και άρα να προσεγγίσουμε πολύ κοντά τη θεωρητική τιμή την οποία παρουσιάζει ο D. Luenberger (2004).

Θέλοντας να προχωρήσουμε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων και από τις δύο μεθόδους καταλήγουμε στα εξής βασικά συμπεράσματα. Στα θετικά του διωνυμικού μοντέλου συγκαταλέγονται η σχετική σύγκλιση των αποτελεσμάτων, η μη ύπαρξη ανάγκης συνεχής παρακολούθησης της πορείας του διαπραγματεύσιμου περιουσιακού στοιχείου, και τέλος η σχετική απλότητα του μοντέλου που το καθιστά χρήσιμο εργαλείο. Αντίστοιχα στα θετικά του μοντέλου τιμολόγησης σε συνεχή χρόνο συγκαταλέγεται η δυνατότητα για ακριβέστερα αποτελέσματα. Τέλος, αρνητικό στοιχείο και των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

δύο μοντέλων αποτελούν τα μη ικανοποιητικά αποτελέσματα από τις στρατηγικές αντιστάθμισης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα

Black, F. and Scholes M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate liabilities", Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-654.

Cox, J. Ross, S. and Rubinstein, M. (1979) "Options Pricing in a Simplified Approach", Journal of Financial Economics, Vol. 7, pp. 229-263.

Lintner, J. (1965) "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", The Review of Economics and Statistics, Vol. 47, No.1, pp. 13-37.

Luenberger, D. (1998) "Products of trees for investment analysis", Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 22, pp. 1403-1417.

Luenberger, D. (2001) "Projection Pricing", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 109, No 1, pp.1-25.

Luenberger, D. (2002) "A Correlation Pricing Formula", Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 26, pp. 1113-1126.

Luenberger, D. (2002) "Arbitrage and Universal Pricing", Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 26, pp.1613-1628.

Luenberger, D. (2004) "Pricing a Nontradeable Asset and Its Derivatives", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 121, pp.465-487.

Luenberger, D. (2011) "Pricing Dynamic Binary Variables and their Derivatives", Quantitave Finance, Vol. 12, No. 3, pp. 451-464.

Markowitz, H. (1952) "Portfolio Selection", Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Merton, R. (1998) "Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later", The American Economic Review, Vol. 88, No.3, pp. 323-349.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Mossin, J. (1966) “Equilibrium in a Capital Asset Market”, Econometrica, Vol. 34, No.4, pp. 768-783.

Sharpe, W. (1964) “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”, Journal of Finance, Vol. 19, No 3, pp. 425-442.

Wilmot, J. (2009) “Possible Futures”, In credit Suisse Global Investment Returns Yearbook, p.23.

Ζάρκος, Σ. (2004) “Τα Πραγματικά Δικαιώματα στην Επιχειρηματική Στρατηγική”, Οικονομικός Ταχυδρόμος, pp. 60-65.

Βιβλία

Edwin, E. Martin, G. Stephen, B. and William G. (2011) Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 8th Edition, John Wiley & Sons, Inc.

Hull, J. (2009) Options, Futures, and Other Derivatives, 7th Edition, Prentice Hall.

Kodukula, P. and Papudesu, C. (2006) Project Valuation Using Real Options: a practitioner’s guide, J. Ross.

Luenberger, D. (1998) Investment Science, Oxford University Press, New York Oxford.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΙΝΑΚΕΣ

1.

Πίνακας 1									
Μεταβολή στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, r									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, K=65, p(B)=0,5, Bu=1,3, Bd=0,7									
Στατιστικά στοιχεία του B υπολογισμένα από τα δεδομένα: E(B)=1, σ(B)=0,3									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*Ε(Α)*
3,9700	13,2135	8,4465	5,1153	10,3292	11,3831	0,03	0,7	0,40	1,20
4,2410	13,4212	8,7963	5,3930	10,6201	11,6614	0,05	0,7	0,40	1,20
4,6559	13,7583	9,3178	5,8071	11,0717	12,0604	0,08	0,7	0,40	1,20
4,9375	14,0006	9,6629	6,0811	11,3830	12,3147	0,10	0,7	0,40	1,20
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*Ε(Α)*
21,9880	12,3112	16,1730	21,9880	12,3112	16,1730	0,03	0,7	0,40	1,20
19,7217	12,2488	15,4287	19,7217	12,2488	15,4287	0,05	0,7	0,40	1,20
16,7442	12,1392	14,3360	17,0761	12,0050	14,8584	0,08	0,7	0,40	1,20
14,9553	12,0558	13,6231	15,5294	12,1852	14,5755	0,10	0,7	0,40	1,20

2.

Πίνακας 2									
Μεταβολή στην Τυπική Απόκλιση στου ΔΠΣ, Α									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, K=65, p(B)=0,5, Bu=1,3, Bd=0,7									
Στατιστικά στοιχεία του B υπολογισμένα από τα δεδομένα: E(B)=1, σ(B)=0,3									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*Ε(Α)*
1,4670	12,1557	8,9880	3,1893	5,1209	22,2058	0,05	0,7	0,20	1,20
3,1100	12,9363	9,6221	4,4068	5,0300	14,4938	0,05	0,7	0,30	1,20
4,2410	13,4212	8,7963	5,3930	10,6201	11,6614	0,05	0,7	0,40	1,20
5,0305	13,7444	7,8513	6,1367	10,7536	9,9075	0,05	0,7	0,50	1,20
5,6058	13,9737	7,0145	6,6559	10,8455	8,5729	0,05	0,7	0,60	1,20
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*Ε(Α)*
26,3832	12,5520	31,6027	26,3832	12,5520	31,6027	0,05	0,7	0,20	1,20
21,9221	12,3701	20,8800	21,9221	12,3701	20,8800	0,05	0,7	0,30	1,20
19,7217	12,2488	15,4287	19,7217	12,2488	15,4287	0,05	0,7	0,40	1,20
18,4198	12,1667	12,1909	18,4198	12,1667	12,1909	0,05	0,7	0,50	1,20
17,5616	12,1081	10,0603	17,6489	11,7617	10,1516	0,05	0,7	0,60	1,20

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

3.

Πίνακας 3									
Μεταβολή στην Αναμενόμενη Απόδοση του ΔΠΣ, Α									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, K=65, p(B)=0,5, Bu=1,3, Bd=0,7									
Στατιστικά στοιχεία του Β υπολογισμένα από τα δεδομένα: E(B)=1, σ(B)=0,3									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*E(A)*
11,3894	16,0896	16,6484	11,3894	16,0896	16,6484	0,05	0,7	0,40	1,00
7,2550	14,6079	12,4261	8,0580	11,0883	14,0412	0,05	0,7	0,40	1,10
4,2410	13,4212	8,7963	5,3930	10,6201	11,6614	0,05	0,7	0,40	1,20
2,1782	12,5091	5,7592	3,7862	5,0796	10,9975	0,05	0,7	0,40	1,30
0,8976	11,8427	3,3147	2,5670	5,1571	11,1952	0,05	0,7	0,40	1,40
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*E(A)*
11,4094	11,5768	13,4091	12,5592	9,0781	15,7329	0,05	0,7	0,40	1,00
15,4215	11,9462	14,6366	15,6934	11,7737	15,0977	0,05	0,7	0,40	1,10
19,7217	12,2488	15,4287	19,7217	12,2488	15,4287	0,05	0,7	0,40	1,20
24,1858	12,4727	15,7854	24,1858	12,4727	15,7854	0,05	0,7	0,40	1,30
28,6895	12,6145	15,7065	28,6895	12,6145	15,7065	0,05	0,7	0,40	1,40

4.

Πίνακας 4									
Μεταβολή στο Συντελεστή Συσχέτισης, ρ(ΑΒ)									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, K=65, p(B)=0,5, Bu=1,3, Bd=0,7									
Στατιστικά στοιχεία του Β υπολογισμένα από τα δεδομένα: E(B)=1, σ(B)=0,3									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*E(A)*
9,1192	21,4133	0,0000	9,5208	15,8694	0,0000	0,05	0,00	0,40	1,20
7,4783	20,1566	3,6206	8,2394	15,2554	4,0528	0,05	0,20	0,40	1,20
5,3947	16,8448	7,3331	6,4684	13,1120	9,0645	0,05	0,50	0,40	1,20
3,7288	11,0947	9,2588	4,8880	8,8456	12,7281	0,05	0,80	0,40	1,20
2,8269	0,0000	9,7028	4,2323	0,0000	15,5828	0,05	1,00	0,40	1,20
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*E(A)*
13,4227	16,4861	0,0000	13,8204	12,4259	0,0000	0,05	0,00	0,40	1,20
15,1616	16,3609	4,1637	15,4520	16,1528	4,3058	0,05	0,20	0,40	1,20
17,8671	14,7090	10,8181	17,9232	14,2584	10,8803	0,05	0,50	0,40	1,20
20,6607	10,3368	17,7611	20,6607	10,3368	17,7611	0,05	0,80	0,40	1,20
22,5560	0,0000	22,4377	22,5560	0,0000	22,4377	0,05	1,00	0,40	1,20

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

5.

Πίνακας 5									
Απόλυτη Σύγκλιση του ΜΔΠΣ, Β, με το ΔΠΣ, Α									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, K=65, p(B)=0,5, Bu=1,3, Bd=0,7									
Στατιστικά στοιχεία του Β υπολογισμένα από τα δεδομένα: E(B)=1, σ(B)=0,3									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(AB)*	*σ(A)*	*E(A)*
4,2410	13,4212	8,7963	5,3930	10,6201	11,6614	0,05	0,7	0,40	1,20
6,6048	10,5937	16,2296	7,5191	8,1111	18,8771	0,05	0,85	0,35	1,10
13,7348	0,0000	35,8252	13,7348	0,0000	35,8252	0,05	1	0,30	1,00
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης			*Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*Τιμή*	*Τυπική απόκλιση χ/φ*	*Πόσο επένδυσης στο ΔΠΣ*	*r*	*ρ(AB)*	*σ(A)*	*E(A)*
19,7217	12,2488	15,4287	19,7217	12,2488	15,4287	0,05	0,7	0,40	1,20
16,2157	8,8584	20,5661	16,4260	8,6839	21,0462	0,05	0,85	0,35	1,10
9,6808	0,0000	24,1748	11,3886	0,0000	31,3930	0,05	1	0,30	1,00
Black & Scholes									
Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς			*Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης*			*Δεδομένα*			
Τιμή			*Τιμή*			*r*		*E(B)*	*σ(B)*
14,0158			9,9619			0,05		0,00	0,30

6.

Πίνακας 6									
Μεταβολή στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, r									
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, Bmax=2500, K=65, σ(B)=0,3, μ(B)=0									
Θεωρητική τιμή	*Έμμεση μέθοδος*	*Θεωρητική τιμή*	*Έμμεση μέθοδος*	*Δεδομένα*					
Call		*Put*							
Τιμή	*Τιμή*	*Τιμή*	*Τιμή*	*dS*	*dt*	*r*	*ρ(AB)*	*σ(A)*	*μ(A)*
4,6179	4,6155	14,7992	14,7948	1	0,003	0,10	0,7	0,40	0,20
4,3908	4,3884	16,4520	16,4473	1	0,003	0,08	0,7	0,40	0,20
4,0527	4,0504	19,2227	19,2177	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,20
3,8302	3,8280	21,2809	21,2759	1	0,003	0,03	0,7	0,40	0,20

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

7.

Πίνακας 7									
Μεταβολή στην Τυπική Απόκλιση στου ΔΠΣ, Α									
Κοινά Δεδομένα: Τ=3, Ν=3, Β0=60, Bmax=2500, K=65, σ(Β)=0,3, μ(Β)=0									
Θεωρητική τιμή	*Έμμεση μέθοδος*	*Θεωρητική τιμή*	*Έμμεση μέθοδος*	*Δεδομένα*					
Call		*Put*							
Τιμή	*Τιμή*	*Τιμή*	*Τιμή*	*dS*	*dt*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*μ(Α)*
1,5910	1,5899	25,3410	25,3336	1	0,003	0,05	0,7	0,20	0,20
3,0150	3,0131	21,2729	21,2672	1	0,003	0,05	0,7	0,30	0,20
4,0527	4,0504	19,2227	19,2177	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,20
4,8043	4,8017	18,0014	17,9968	1	0,003	0,05	0,7	0,50	0,20
5,3652	5,3625	17,1943	17,1899	1	0,003	0,05	0,7	0,60	0,20

8.

Πίνακας 8									
Μεταβολή στην Αναμενόμενη Απόδοση του ΔΠΣ, Α									
Κοινά Δεδομένα: Τ=3, Ν=3, Β0=60, Bmax=2500, K=65, σ(Β)=0,3, μ(Β)=0									
Θεωρητική τιμή	*Έμμεση μέθοδος*	*Θεωρητική τιμή*	*Έμμεση μέθοδος*	*Δεδομένα*					
Call		*Put*							
Τιμή	*Τιμή*	*Τιμή*	*Τιμή*	*dS*	*dt*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*μ(Α)*
11,4247	11,4211	11,4970	11,4939	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,00
6,9993	6,9961	15,2136	15,2098	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,10
4,0527	4,0504	19,2227	19,2177	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,20
2,2080	2,2066	23,3200	23,3135	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,30
1,1275	1,1267	27,3156	27,3074	1	0,003	0,05	0,7	0,40	0,40

9.

Πίνακας 9									
Μεταβολή στο Συντελεστή Συσχέτισης, ρ(ΑΒ)									
Κοινά Δεδομένα: Τ=3, Ν=3, Β0=60, Bmax=2500, K=65, σ(Β)=0,3, μ(Β)=0									
Θεωρητική τιμή	*Έμμεση μέθοδος*	*Θεωρητική τιμή*	*Έμμεση μέθοδος*	*Δεδομένα*					
Call		*Put*							
Τιμή	*Τιμή*	*Τιμή*	*Τιμή*	*dS*	*dt*	*r*	*ρ(ΑΒ)*	*σ(Α)*	*μ(Α)*
9,0030	8,9995	13,3065	13,3031	1	0,003	0,05	0,00	0,40	0,20
7,2618	7,2585	14,9361	14,9323	1	0,003	0,05	0,20	0,40	0,20
5,1591	5,1565	17,4817	17,4773	1	0,003	0,05	0,50	0,40	0,20
3,5770	3,5749	20,1002	20,0949	1	0,003	0,05	0,80	0,40	0,20
2,7627	2,7610	21,8592	21,8533	1	0,003	0,05	1,00	0,40	0,20

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

10.

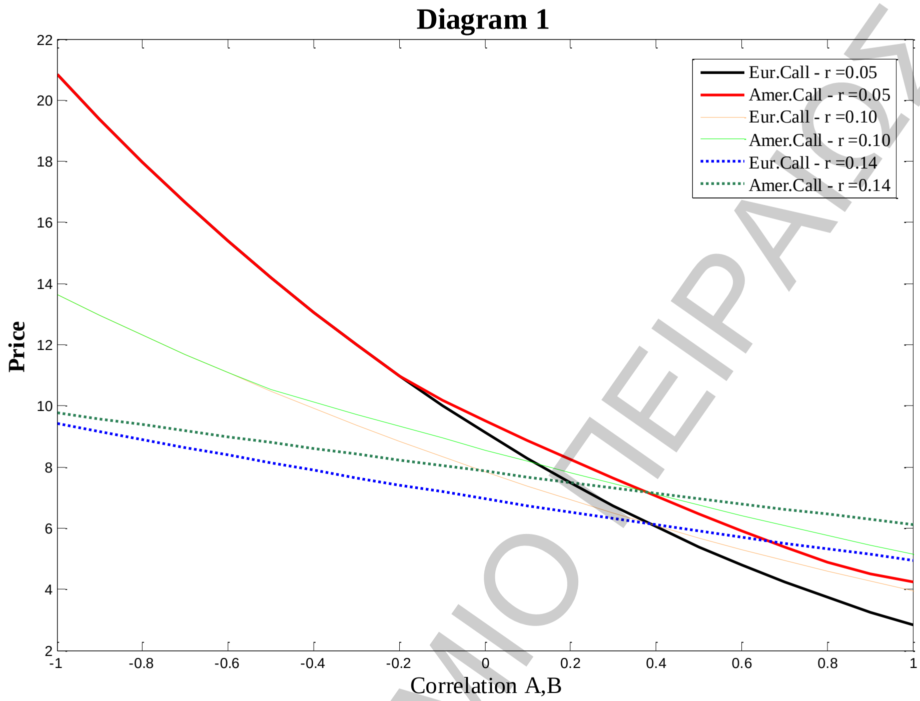
Πίνακας 10											
Προσέγγιση της Θεωρητικής τιμής καθώς κάνουμε πιο πυκνό το πλέγμα											
Κοινά Δεδομένα: T=3, N=3, B0=60, Bmax=2500, K=65, σ(B)=0,3, μ(B)=0											
Θεωρητική τιμή	***Έμμεση μέθοδος***	***Θεωρητική τιμή***	***Έμμεση μέθοδος***	***Put-Call Parity (Θεωρητική)***	***Put-Call Parity (Έμμεση μέθοδος)***	***Δεδομένα***					
Call		***Put***									
Τιμή	***Τιμή***	***Τιμή***	***Τιμή***	***Τιμή***	***Τιμή***	***dS***	***dt***	***r***	***ρ(AB)***	***σ(A)***	***μ(A)***
4,0527	3,7080	19,2227	18,1361	19,2227	18,8779	*1*	*1,000*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
4,0527	4,0481	19,2227	19,2100	19,2227	19,2180	*1*	*0,010*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
4,0527	4,0504	19,2227	19,2177	19,2227	19,2204	*1*	*0,003*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
4,0527	4,0509	19,2227	19,2192	19,2227	19,2208	*1*	*0,002*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
4,0527	4,0521	19,2227	19,2212	19,2227	19,2200	*0,5*	*0,001*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
Απόλυτη Σύγκλιση του ΜΔΠΣ, Β, με το ΔΠΣ, Α											
Θεωρητική τιμή	***Έμμεση μέθοδος***	***Θεωρητική τιμή***	***Έμμεση μέθοδος***	***Put-Call Parity (Θεωρητική)***	***Put-Call Parity (Έμμεση μέθοδος)***	***Δεδομένα***					
Call		***Put***									
Price	***Price***	***Price***	***Price***	***Price***	***Price***	***dS***	***dt***	***r***	***ρ(AB)***	***σ(A)***	***μ(A)***
4,0527	4,0504	19,2227	19,2177	19,2227	19,2204	*1*	*0,003*	*0,05*	*0,7*	*0,40*	*0,20*
14,0158	14,0123	9,9619	9,9590	9,9619	9,9583	*1*	*0,003*	*0,05*	*1*	*0,30*	*0,00*
Black & Scholes											
Call		***Put***				***Δεδομένα***					
Τιμή		**Τιμή**				***r***		***μ(B)***		***σ(B)***	
14,0158		9,9619				*0,05*		*0*		*0,30*	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

1.



Μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων αγοράς για διαφορετικά επιτόκια r και συντελεστές συσχέτισης ρ_{AB}.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΛΙΣΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1. Υπολογισμός της τιμής, της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και του ποσού επένδυσης στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς βάσει του διωνυμικού πλαισίου.

```
function
[Price,PriceVarianceLattice,PriceHedgeLattice]=EurCall(B0,K,u,d,pb,r,
MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB,T,N)

R=1+r;
deltaT=T/N;
delta=rhoAB*(sqrt(pb*(1-pb)))/sigmaA;
qb=pb-delta*(MeanA-Pa*exp(r*deltaT));
theta=pb*(1-pb)*(1-rhoAB^2);

lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    lattice(i+1,N+1)=max(0,B0*(u^(N-i))*(d^i)-K);
end
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        lattice(i+1,j+1)=(qb*lattice(i+1,j+2)+(1-
qb)*lattice(i+2,j+2))*exp(-r*deltaT);
    end
end
Price=lattice(1,1);

VarianceLattice = zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        VarianceLattice(i+1,j+1)=pb*VarianceLattice(i+2,j+2)+(1-
pb)*VarianceLattice(i+1,j+2)+(R^(2*(T-j-1)))*theta*(lattice(i+1,j+2)-
lattice(i+2,j+2))^2;
    end
end
PriceVarianceLattice=VarianceLattice(1,1);

HedgeLattice=zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        HedgeLattice(i+1,j+1)=delta*(lattice(i+1,j+2)-
lattice(i+2,j+2));
    end
end
PriceHedgeLattice=HedgeLattice(1,1);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2. Υπολογισμός της τιμής, της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και του ποσού επένδυσης στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης βάσει του διωνυμικού πλαισίου.

```
function
[Price,PriceVarianceLattice,PriceHedgeLattice]=EurPut(B0,K,u,d,pb,r,
MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB,T,N)

R=1+r;
deltaT=T/N;
delta=rhoAB*(sqrt(pb*(1-pb)))/sigmaA;
qb=pb-delta*(MeanA-Pa*exp(r*deltaT));
theta=pb*(1-pb)*(1-rhoAB^2);

lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    lattice(i+1,N+1)=max(0,K-B0*(u^i)*(d^(N-i)));
end
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
         lattice(i+1,j+1)=(qb*lattice(i+2,j+2)+(1-
qb)*lattice(i+1,j+2))*exp(-r*deltaT);
    end
end
Price=lattice(1,1);

VarianceLattice = zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        VarianceLattice(i+1,j+1)=pb*VarianceLattice(i+2,j+2)+(1-
pb)*VarianceLattice(i+1,j+2)+(R^(2*(T-j-1)))*theta*(lattice(i+2,j+2)-
lattice(i+1,j+2))^2;
    end
end
PriceVarianceLattice=VarianceLattice(1,1);

HedgeLattice=zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        HedgeLattice(i+1,j+1)=-delta*(lattice(i+2,j+2)-
lattice(i+1,j+2));
    end
end
PriceHedgeLattice=HedgeLattice(1,1);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

3. Υπολογισμός της τιμής, της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και του ποσού επένδυσης στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση ενός Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς βάσει του διωνυμικού πλαισίου.

```
function
[Price,PriceVarianceLattice,PriceHedgeLattice]=AmerCall(B0,K,u,d,pb,r
,MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB,T,N)

R=1+r;
deltaT=T/N;
delta=rhoAB*(sqrt(pb*(1-pb)))/sigmaA;
qb=pb-delta*(MeanA-Pa*exp(r*deltaT));
theta=pb*(1-pb)*(1-rhoAB^2);

lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    lattice(i+1,N+1)=max(0,B0*(u^(N-i))*(d^i)-K);
end
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        lattice(i+1,j+1)=max((B0*(u^(j-i))*(d^i)-K),exp(-
r*deltaT)*(qb*lattice(i+1,j+2)+(1-qb)*lattice(i+2,j+2)));
    end
end
Price=lattice(1,1);

VarianceLattice = zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        if (B0*(u^(j-i))*(d^i)-K)>exp(-
r*deltaT)*(qb*lattice(i+1,j+2)+(1-qb)*lattice(i+2,j+2))
            VarianceLattice(i+1,j+1)=0;
        else
            VarianceLattice(i+1,j+1)=pb*VarianceLattice(i+2,j+2)+(1-
pb)*VarianceLattice(i+1,j+2)+(R^(2*(T-j-1)))*theta*(lattice(i+1,j+2)-
lattice(i+2,j+2))^2;
        end
    end
end
PriceVarianceLattice=VarianceLattice(1,1);

HedgeLattice=zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        HedgeLattice(i+1,j+1)=delta*(lattice(i+1,j+2)-
lattice(i+2,j+2));
    end
end
PriceHedgeLattice=HedgeLattice(1,1);
end
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4. Υπολογισμός της τιμής, της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης και του ποσού επένδυσης στο διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο με τη μέγιστη συσχέτιση ενός Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης βάσει του διωνυμικού πλαισίου.

```
function
[Price,PriceVarianceLattice,PriceHedgeLattice]=AmerPut(B0,K,u,d,pb,r,
MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB,T,N)

R=1+r;
deltaT=T/N;
delta=rhoAB*(sqrt(pb*(1-pb)))/sigmaA;
qb=pb-delta*(MeanA-Pa*exp(r*deltaT));
theta=pb*(1-pb)*(1-rhoAB^2);

lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    lattice(i+1,N+1)=max(0,K-B0*(u^i)*(d^(N-i)));
end
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        lattice(i+1,j+1)=max((K-B0*(u^i)*(d^(j-
i))),(qb*lattice(i+2,j+2)+(1-qb)*lattice(i+1,j+2))*exp(-r*deltaT));
    end
end
Price=lattice(1,1);

VarianceLattice = zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        if (K-B0*(u^i)*(d^(j-i)))>=exp(-
r*deltaT)*(qb*lattice(i+2,j+2)+(1-qb)*lattice(i+1,j+2))
            VarianceLattice(i+1,j+1)=0;
        else
            VarianceLattice(i+1,j+1)=pb*VarianceLattice(i+2,j+2)+(1-
pb)*VarianceLattice(i+1,j+2)+(R^(2*(T-j-1)))*theta*(lattice(i+2,j+2)-
lattice(i+1,j+2))^2;
        end
    end
end
PriceVarianceLattice=VarianceLattice(1,1);

HedgeLattice=zeros(N+1,N+1);
for j=N-1:-1:0
    for i=0:j
        HedgeLattice(i+1,j+1)=-delta*(lattice(i+2,j+2)-
lattice(i+1,j+2));
    end
end
PriceHedgeLattice=HedgeLattice(1,1);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

5. Παραγωγή του Διαγράμματος 1.

```
rhoAB=-1:0.1:1;
n=size(rhoAB)
price=zeros(1,n(2));
for i=1:n(2)
price(i)=EurCall(B0,K,u,d,pb,r,MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB(i),T,N);
end
plot(rhoAB,price)
hold on
rhoAB=-1:0.1:1;
n=size(rhoAB)
price=zeros(1,n(2));
for i=1:n(2)
price(i)=AmerCall(B0,K,u,d,pb,r,MeanA,sigmaA,Pa,rhoAB(i),T,N);
end
plot(rhoAB,price)
```

6. Υπολογισμός της θεωρητικής τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function [CallPrice]=Callprice(Se,K,T,re,rc,r,sigmae,sigmac,rho)
deltaT=(T);
betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);
d1=(log(Se/K)+(omega+0.5*sigmae^2)*deltaT)/(sigmae*sqrt(deltaT));
d2=(log(Se/K)+(omega-0.5*sigmae^2)*deltaT)/(sigmae*sqrt(deltaT));
CallPrice=Se*exp((omega-r)*deltaT)*normcdf(d1)-K*exp(-
r*deltaT)*normcdf(d2);
end
```

7. Υπολογισμός της θεωρητικής τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function [PutPrice]=Putprice(Se,K,T,re,rc,r,sigmae,sigmac,rho)
deltaT=(T);
betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);
d1=(log(Se/K)+(omega+0.5*sigmae^2)*deltaT)/(sigmae*sqrt(deltaT));
d2=(log(Se/K)+(omega-0.5*sigmae^2)*deltaT)/(sigmae*sqrt(deltaT));
PutPrice=K*exp(-r*deltaT)*normcdf(-d2)-Se*exp((omega-
r)*deltaT)*normcdf(-d1);
end
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

8. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με την έμμεση μέθοδο στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function
[CallPrice]=EuCallImpl(Se,K,re,rc,r,T,sigmae,sigmac,Smax,dS,dt,rho)
%συσταση πλέγματος και προσαρμογή βημάτων αν είναι απαραίτητο

betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);
M=round(Smax/dS);
dS=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1);
veti=0:M;
vetj=0:N;
%οριακές συνθήκες
matval(:,N+1)=max(vetS-K,0);
matval(1,:)=0;
matval(M+1,:)=M*dS-K*exp(-r*dt*(N-vetj));
%τριδιαγώνιοι συντελεστές του πίνακα
a=0.5*(omega*dt*veti-sigmae^2*dt*(veti.^2));
b=1+sigmae^2*dt*(veti.^2)+r*dt;
c=-0.5*(omega*dt*veti+sigmae^2*dt*(veti.^2));
coeff=diag(a(3:M),-1)+diag(b(2:M))+diag(c(2:M-1),1);
[L,U]=lu(coeff);
%λύση της ακολουθίας των γραμμικών συστημάτων
aux=zeros(M-1,1);
for j=N:-1:1
    aux(M-1)=-c(M)*matval(M+1,j);
        matval(2:M,j)=U\(L\(matval(2:M,j+1)+aux));
end
%παίρνουμε την τιμή πιθανόν με γραμμική παρεμβολή έξω από το πλέγμα
CallPrice=interp1(vetS,matval(:,1),Se);
```

9. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με την έμμεση μέθοδο στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function
[PutPrice]=EuPutImpl(Se,K,re,rc,r,T,sigmae,sigmac,Smax,dS,dt,rho)
%συσταση πλέγματος και προσαρμογή βημάτων αν είναι απαραίτητο

betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);
M=round(Smax/dS);
dS=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1);
veti=0:M;
vetj=0:N;
%οριακές συνθήκες
matval(:,N+1)=max(K-vetS,0);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

```
matval(1,:)=K*exp(-r*dt*(N-vetj));
matval(M+1,:)=0;
%τριδιαγώνιοι συντελεστές του πίνακα
a=0.5*(omega*dt*veti-sigmae^2*dt*(veti.^2));
b=1+sigmae^2*dt*(veti.^2)+r*dt;
c=-0.5*(omega*dt*veti+sigmae^2*dt*(veti.^2));
coeff=diag(a(3:M),-1)+diag(b(2:M))+diag(c(2:M-1),1);
[L,U]=lu(coeff);
%λύση της ακολουθίας των γραμμικών συστημάτων
aux=zeros(M-1,1);
for j=N:-1:1
    aux(1)=-a(2)*matval(1,j);
        matval(2:M,j)=U\(L\(matval(2:M,j+1)+aux));
end
%παίρνουμε την τιμή πιθανόν με γραμμική παρεμβολή έξω από το πλέγμα
PutPrice=interp1(vetS,matval(:,1),Se);
```

10. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης χρησιμοποιώντας το Put - Call Parity και τη θεωρητική τιμή του δικαιώματος αγοράς στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function
[PutPrice]=PutpriceCallParityTh(Se,K,T,re,rc,r,sigmae,sigmac,rho)

CallPrice=Callprice(Se,K,T,re,rc,r,sigmae,sigmac,rho);
deltaT=(T);
betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);

PutPrice=CallPrice+K*exp(-r*(deltaT))-Se*exp((omega-r)*deltaT);
end
```

11. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης χρησιμοποιώντας το Put - Call Parity και την τιμή του δικαιώματος αγοράς με την έμμεση μέθοδο στην περίπτωση των στοχαστικών μεταβλητών.

```
function
[PutPrice]=PutpriceCallParityImpl(Se,K,T,Smax,dS,dt,re,rc,r,sigmae,si
gmac,rho)

CallPrice=EuCallImpl(Se,K,re,rc,r,T,sigmae,sigmac,Smax,dS,dt,rho);
deltaT=(T);
betaec=rho*sigmae/sigmac;
omega=re-betaec*(rc-r);

PutPrice=CallPrice+K*exp(-r*(deltaT))-Se*exp((omega-r)*deltaT);
end
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ