

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ LÉVY
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ
ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

ΣΦΑΚΙΑΝΑΚΗΣ Μ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ LÉVY
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ
ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

ΣΦΑΚΙΑΝΑΚΗΣ Μ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επίκουρος Καθηγητής, Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής, Ηλιόπουλος Γεώργιος
- Επίκουρος Καθηγήτρια, Πανοπούλου Αικατερίνη

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS



SIMULATION OF LÉVY PROCESSES
WITH APPLICATIONS IN
FINANCIAL DERIVATIVES PRICING

SFAKIANAKIS M. THEODOROS

MSc Dissertation

**submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus
in partial fulfillment of the requirements for
the degree of Master of Science in Applied
Statistics.**

PIRAEUS, GREECE

FEBRUARY 2013

This thesis was approved unanimously by the three-member committee appointed by the Department of Statistics and Actuarial Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Applied Statistics.

Committee members were:

- Assistant Professor, Boutsikas Michael (Supervisor)
- Associate Professor, Iliopoulos George
- Assistant Professor, Panopoulou Ekaterini

Approval of this Thesis from the Department of Statistics and Actuarial Science, University of Piraeus, does not imply any endorsement of the opinions of the author.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Στην οικογένεια μου,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα εκφράσω την ιδιαίτερη εκτίμηση και τις θερμές ευχαριστίες μου, στον δάσκαλο και καθηγητή μου κ. Μπούτσικα Μιχαήλ, τόσο για την εποικοδομητική συνεργασία και την ουσιαστική του συνεισφορά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, όσο για την πολύτιμη καθοδήγηση του.

Πρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κα. Πανοπούλου Αικατερίνη και κ. Ηλιόπουλο Γεώργιο, για το ενδιαφέρον και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις τους, καθώς επίσης και το σύνολο των καθηγητών με την προσπάθεια και τη συμβολή των οποίων έχω το προνόμιο να βρίσκομαι σήμερα στην παρούσα θέση.

Φυσικά, ένα μεγάλο ευχαριστώ αναλογεί στην οικογένεια μου για την ηθική και οικονομική υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια, καθώς επίσης και στους καλούς μου φίλους που είναι πάντα δίπλα μου στις δύσκολες στιγμές.

Τέλος, ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω την γιαγιά Τούλα για την καθημερινή φροντίδα και περιποίηση κατά τη διάρκεια των δύο αυτών ετών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη

Κατά την διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, η προσπάθεια της επιστημονικής κοινότητας των χρηματοοικονομικών μαθηματικών για την κατασκευή μοντέλων αγοράς είναι συνεχής και αδιάλειπτη. Στην προσπάθεια αυτή, ιδιαίτερα σημαντική κρίνεται η συνεισφορά της θεωρίας των ανελίξεων Lévy.

Υπό το πρίσμα αυτό, η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σαν στόχο την παρουσίαση των μεθόδων προσομοίωσης των ανελίξεων Lévy και τη χρήση τους στην αποτίμηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία αρχικά πραγματοποιείται μια συνοπτική ανασκόπηση στα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για την μελέτη των στοχαστικών ανελίξεων. Στην συνέχεια εισάγεται η οικογένεια των ανελίξεων Lévy και μελετώνται τα βασικά χαρακτηριστικά της. Έχοντας διαμορφώσει μια σφαιρική εικόνα γύρω από την θεωρία των ανελίξεων Lévy, προχωρούμε στην παρουσίαση των μεθόδων προσομοίωσης των ανελίξεων Lévy και την προσομοίωση γνωστών μελών της οικογένειας των ανελίξεων Lévy. Τέλος, αφού περιγράφονται οι βασικές αρχές τιμολόγησης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, εισαγάγουμε το εκθετικό Lévy μοντέλο αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας και προχωράμε στην αποτίμηση συμβολαίων δικαιώματος αγοράς τύπου LookBack, Barrier και Asian.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Abstract

During the last decades, the effort of financial mathematics scientific community on market models creation is continuous and uninterrupted. The contribution of Lévy processes theory is quite important in achieving this effort.

Under this point of view, the aim of this master thesis is to present various Lévy processes simulation methods and the use of them in option pricing.

Specifically, initially we conduct a comprehensive review of the necessary mathematical tools for the study of stochastic processes. We continue by introducing the family of Lévy processes and present its basic characteristics. After gaining an overall view of Lévy processes theory, we proceed to the presentation of Lévy processes simulation methods. In particular, we present and implement (via Mathematica software package) algorithms for simulating well-known members of Lévy processes family. Finally, we describe the basic principles of derivatives pricing, introduce the stochastic volatility exponential Lévy market model and (Monte Carlo) estimate call option prices of Lookback, Barrier and Asian type under specific assumptions.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	xiii
Κατάλογος Σχημάτων	xv
Κατάλογος Πινάκων.....	xvii

Κεφάλαιο 1^ο: Απαραίτητες Μαθηματικές Έννοιες

1.1 σ -Άλγεβρα	1
1.2 Μέτρο και Χώρος Μέτρου	2
1.3 Μετρήσιμη Συνάρτηση και Τυχαία Μεταβλητή	2
1.4 Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Μέση Τιμή	4
1.5 Χαρακτηριστική Συνάρτηση	5
1.6 Στοχαστική Ανέλιξη	6
1.7 Διήθηση, Φυσική Διήθηση και Προσαρμοσμένες Διαδικασίες	7

Κεφάλαιο 2^ο: Ανελιξεις Lévy

2.1 Κίνηση Brown, Poisson, Αντισταθμισμένες Poisson και Σύνθετες Poisson	
Ανελιξεις	9
2.2 Ανελιξεις Lévy και Απείρως Διαιρετές Κατανομές	12
2.3 Lévy-Khinchin Αναπαράσταση	13
2.4 Μέτρο Lévy	14
2.5 Διαχώριση Lévy-Itô	16
2.6 Subordinators	18
2.7 Στοιχηματικές (martingale) και μαρκοβιανές (Markov) Διαδικασίες	20

Κεφάλαιο 3^ο: Προσομοίωση Ανελιξεων Lévy

3.1 Προσομοίωση Ανελιξεων Lévy Πεπερασμένης Δραστηριότητας	23
– Κίνηση Brown με τάση	24
– Σύνθετη ανέλιξη Poisson με τάση	25
– Διαδικασίες Διάχυσης με άλματα	28
3.2 Προσομοίωση Ανελιξεων Lévy Άπειρης Δραστηριότητας	28
(α) Προσεγγιστική Μέθοδος Τυχαίου Περιπάτου	29
– Ανελιξεις Γάμμα	30

– Ανελίζεις Variance Gamma	32
– Ανελίζεις Inverse Gaussian	34
– Ανελίζεις Normal Inverse Gaussian	36
– Ανελίζεις α -Stable	38
(β) Μέθοδος Προσέγγισης Poisson και Gaussian	41
– Ανελίζεις Tempered α -Stable και Generalized Tempered α -Stable	43
(γ) Μέθοδος Προσέγγισης Υπό Μορφή Σειράς	48
– Ανελίζεις Γάμμα	52
– Ανελίζεις Symmetric α -Stable	54
– Ανελίζεις Symmetric Tempered α -Stable	56

Κεφάλαιο 4^ο: Αποτίμηση Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

4.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα και Δικαιώματα Προαίρεσης	61
4.2 Υποθέσεις Μοντελοποίησης	63
4.3 Βασικές Αρχές Τιμολόγησης Χρηματοοικονομικών Προϊόντων	66
4.4 Αποτίμηση Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης	69
– LookBack Options	72
– Barrier Options	72
– Asian Options	73
4.5 Κατασκευή Ισοδύναμου Μέτρου Martingale	74
4.6 Μοντελοποίηση Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος	75
4.7 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος	76
4.8 Μοντέλο Αγοράς Εκθετικών Lévy Ανελίζεων Στοχαστικής Μεταβλητότητας	79
4.9 Προσομοίωση Monte Carlo Μοντέλων Αγοράς	80
Παράρτημα	87
Βιβλιογραφία	131

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1^ο: Απαραίτητες Μαθηματικές Έννοιες

Σχήμα 1.1: Επαγόμενο μέτρο μετρήσιμης συνάρτησης ξ	3
--	---

Κεφάλαιο 2^ο: Ανελιξεις Lévy

Σχήμα 2.1 : Πολλαπλές Διαδικασίες Wiener	10
Σχήμα 2.2 : Διαδικασία Wiener [0.0, 1.0]	10
Σχήμα 2.3 : Διαδικασία Wiener [0.2, 0.8]	10
Σχήμα 2.4 : Διαδικασία Wiener [0.4, 0.6]	10
Σχήμα 2.5 : Πολλαπλές Διαδικασία Poisson	10
Σχήμα 2.6 : Διαδικασία Poisson	10
Σχήμα 2.7 : Αντ/σμένη Διαδικασία Poisson	10
Σχήμα 2.8 : Σύνθετη Διαδικασία Poisson	10
Σχήμα 2.9 : Η πυκνότητα του μέτρου Lévy της ανέλιξης Normal Inverse Gaussian ...	15
Σχήμα 2.10: Η πυκνότητα του μέτρου Lévy της ανέλιξης α -Stable	15
Σχήμα 2.11: Ανέλιξη Gamma	19
Σχήμα 2.12: Ανέλιξη Inverse Gaussian	19

Κεφάλαιο 3^ο: Προσομοίωση Ανελιξεων Lévy

Σχήμα 3.1 : Πολλαπλά μονοπάτια κίνησης Brown,	24
$X_t \sim N(1 \cdot t, 0.25 \cdot t)$	24
Σχήμα 3.2 : Μονοπάτι κίνησης Brown,	24
$X_t \sim N(1 \cdot t, 0.25 \cdot t)$	24
Σχήμα 3.3 : Μονοπάτι Σύνθετης Ανέλιξης Poisson,	26
$X_{CP}(t; \gamma = 3, \lambda = 10, N(0, 1))$	26
Σχήμα 3.4 : Μονοπάτι Διαδικασίας Διάχυσης με Άλματα,	26
$X_{JD}(t; \gamma = 0.2, \sigma = 5, \lambda = 10, N(0, 1))$	26
Σχήμα 3.5 : Μονοπάτι Ανέλιξης Γάμμα,	32
$X_G(t; \alpha = 30, \beta = 1)$	32
Σχήμα 3.6 : Μονοπάτι Ανέλιξης Variance Gamma,	32
$X_{VG}(t; \mu = 0, \sigma = 1, \mu_G = 0, \nu_G = 0.3)$	32
Σχήμα 3.7 : Μονοπάτι Ανέλιξης Inverse Gaussian,	36
$X_{IG}(t; \mu = 2, \lambda = 30)$	36
Σχήμα 3.8 : Μονοπάτι Ανέλιξης Normal Inverse Gaussian,	36
$X_{NIG}(t; \alpha = 40, \beta = -8, \delta = 1, \mu = 0)$	36

Σχήμα 3.9 : Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,	39
$X_{S\alpha}(t; \alpha=1.3, \sigma=2, \beta=0.3, \mu=1)$	
Σχήμα 3.10: Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,	39
$X_{S\alpha}(t; \alpha=2, \sigma=2, \beta=0.3, \mu=1)$	
Σχήμα 3.11: Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,	40
$X_{S\alpha}(t; \alpha=1, \sigma=2, \beta=0.3, \mu=1)$	
Σχήμα 3.12: Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,	40
$X_{S\alpha}(t; \alpha=1/2, \sigma=2, \beta=0.3, \mu=1)$	
Σχήμα 3.13: Μονοπάτι Tempered Stable Subordinator με τάση,	46
$X_{TS\alpha}(t; \alpha=0.3, \lambda=0.5, c=1.2, \gamma=1)$	
Σχήμα 3.14: Μονοπάτι Tempered Stable Subordinator με τάση,	46
$X_{TS\alpha}(t; \alpha=0.3, \lambda=1.5, c=1.2, \gamma=1)$	
Σχήμα 3.15: Μονοπάτι Ανέλιξης Γάμμα (Series Repr. Method),	53
$X_G(t; \alpha=30, \beta=1) - (\varepsilon=10^{-4}, n=10^4)$	
Σχήμα 3.16: Μονοπάτι Ανέλιξης Γάμμα (Ran. Walk Ap. Method),	53
$X_G(t; \alpha=30, \beta=1) - (\varepsilon=10^{-4}, n=10^4)$	
Σχήμα 3.17: Μονοπάτι Ανέλιξης Sym. α -Stable (Series Repr. Method),	55
$X_{S\alpha}(t; \alpha=1.3, \sigma=2, \beta=0, \mu=0) (\varepsilon=10^{-2}, n=10^4)$	
Σχήμα 3.18: Μονοπάτι Ανέλιξης Sym. α -Stable (Ran. Walk Ap. Method),	55
$X_{S\alpha}(t; \alpha=1.3, \sigma=2, \beta=0, \mu=0) (n=1300)$	
Σχήμα 3.19: Μονοπάτι Ανέλιξης Sym. Temp. α -Stable (Series Repr. Method),	57
$X_{TS\alpha}(t; \alpha=1.3, c=0.5, \lambda=1) (\varepsilon=5 \cdot 10^{-3}, n=10^4)$	
Σχήμα 3.20: Μονοπάτι Ανέλιξης Sym. Temp. α -Stable (Series Repr. Method),	57
$X_{TS\alpha}(t; \alpha=1.9, c=0.5, \lambda=1) (\varepsilon=5 \cdot 10^{-3}, n=10^4)$	

Κεφάλαιο 4^ο: Αποτίμηση Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Σχήμα 4.1 : Λογαριθμική απόδοση του Standard & Poor's 500	76
Σχήμα 4.2 : Μονοπάτι διαδικασίας CIR	77
Σχήμα 4.3 : Μονοπάτι αντίστοιχης ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR	77
Σχήμα 4.4 : Μονοπάτι διαδικασίας CIR στο $[0, T]$	85
Σχήμα 4.5 : Μονοπάτι ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR στο $[0, T]$	85
Σχήμα 4.6 : Μονοπάτι διαδικασίας VG στο $[0, Y_T]$	85
Σχήμα 4.7 : Μονοπάτι χρονικά μεταβληθείσης διαδικασίας VG στο $[0, T]$	85
Σχήμα 4.8 : Από κοινού τα μονοπάτια των VG & χρονικά μεταβληθείσης VG	85
Σχήμα 4.9 : Μονοπάτι Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος στο $[0, T]$	85

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 4^ο: Αποτίμηση Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Πίνακας 4.1: Επίδραση διαφόρων παραγόντων στην αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης	63
Πίνακας 4.2: Κέρδος επενδυτή συναρτήσει της επενδυτικής θέσης που κατέχει ως προς τα διαφορετικά είδη συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου	71
Πίνακας 4.3: Η παράμετρος m , της μεθόδου Mean-Correcting Martingale Measure, ... για διαφορετικά μοντέλα αγοράς	75
Πίνακας 4.4: Τιμές παραμέτρων VG εκθετικού Lévy μοντέλου αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q	83
Πίνακας 4.5: Εκτιμηθείσες τιμές συμβολαίων δικαιώματος αγοράς	83
Πίνακας 4.6: Εκτιμηθείσες τιμές συμβολαίων δικαιώματος αγοράς, Schoutens (2003).	84

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 1ο: Απαραίτητες Μαθηματικές Έννοιες

Στο παρόν κεφάλαιο θα υπενθυμίσουμε μια σειρά από βασικές μαθηματικές έννοιες, οι οποίες θα μας χρειαστούν στην ανάπτυξη του επόμενου κεφαλαίου, όπου θα παρουσιάσουμε τις ανεπίξεις Lévy και τις ιδιοτητές τους.

Η συγγραφή του παρόντος κεφαλαίου βασίσθηκε στα συγγράμματα των Applebaum (2009), Cont & Tankov (2004), Mikosch (1998), Sato (1999), Schoutens (2003) και στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις των Γιαννακόπουλου (2003), Μπούτσικα (2005).

1.1 σ-Άλγεβρα

Ορισμός 1.1.1 Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και \mathfrak{F} μια συλλογή υποσυνόλων του Ω . Η \mathfrak{F} καλείται σ-άλγεβρα επί του συνόλου Ω , εφόσον πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $\Omega \in \mathfrak{F}$.

(ii) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$.

(iii) Εάν $(A_n, n \in \mathbb{N})$ μια συλλογή υποσυνόλων της \mathfrak{F} , τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές διαφορετικές σ-άλγεβρες για κάθε Ω . Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τις $\mathfrak{F} = P(\Omega) = 2^{\Omega} = \text{“Το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του } \Omega\text{”}$ και $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, που εκφράζουν τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη δυνατή σ-άλγεβρα του Ω αντίστοιχα.

Ορισμός 1.1.2 Ελάχιστη σ-άλγεβρα, επί ενός συνόλου ενδεχομένων A , ορίζεται η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Ένα από τα γνωστότερα παραδείγματα ελάχιστης σ-άλγεβρας, είναι η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ που ορίζεται ως η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά σύνολα του \mathbb{R}^d . Τα στοιχεία της $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ καλούνται σύνολα Borel (*Borel Sets*).

Τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας \mathfrak{F} καλούνται \mathfrak{F} -μετρήσιμα σύνολα και το ζεύγος (Ω, \mathfrak{F}) καλείται \mathfrak{F} -μετρήσιμος χώρος. Πολλές φορές, δεδομένης μιας συγκεκριμένης σ-άλγεβρας \mathfrak{F} , θα καλούμε τα \mathfrak{F} -μετρήσιμα σύνολα και τον \mathfrak{F} -μετρήσιμο χώρο, απλά ως μετρήσιμα σύνολα και μετρήσιμο χώρο αντίστοιχα.

1.2 Μέτρο και Χώρος Μέτρου

Ορισμός 1.2.1 Έστω ένας μετρήσιμος χώρος (Ω, \mathfrak{F}) . Μέτρο καλείται κάθε απεικόνιση $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty)$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε συλλογή συνόλων $(A_n, n \in \mathbb{N})$ της \mathfrak{F} , που είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Ένα από τα γνωστότερα μέτρα, είναι το μέτρο Lebesgue που ορίζεται στα σύνολα Borel του \mathbb{R} και αντιστοιχίζει σε κάθε ανοιχτό διάστημα το μήκος του. (π.χ. $\mu((a, \beta)) = \beta - a$).

Η ποσότητα $\mu(\Omega)$ καλείται συνολική μάζα μέτρου. Σύμφωνα με τις διαφορετικές τιμές που λαμβάνει η συνολική μάζα μέτρου, έχουμε τους παρακάτω χαρακτηρισμούς:

(i) Αν $\mu(\Omega) < \infty$, τότε το μέτρο μ καλείται πεπερασμένο (finite).

(ii) Αν $\mu(\Omega) = 1$, τότε το μέτρο μ καλείται μέτρο πιθανότητας και θα το συμβολίζουμε με $P(\omega)$, όπου $\omega \in \Omega$.

Μια τριάδα $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου και μια τριάδα $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, όπου P ένα μέτρο πιθανότητας, καλείται χώρος μέτρου πιθανότητας ή χώρος πιθανότητας.

1.3 Μετρήσιμη Συνάρτηση και Τυχαία Μεταβλητή

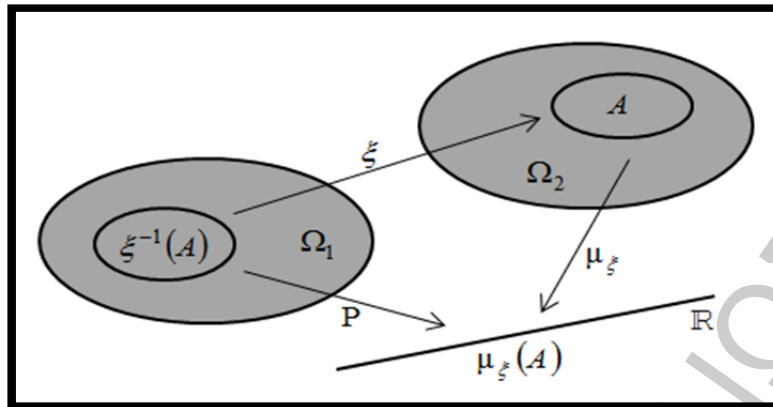
Προκειμένου να συνδέσουμε τα ενδεχόμενα διαφορετικών μετρήσιμων χώρων, θα χρειαστούμε την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης.

Ορισμός 1.3.1 Μια συνάρτηση ξ από ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ καλείται μετρήσιμη συνάρτηση αν $\xi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_1$ για κάθε $A \in \mathfrak{F}_2$.

Δηλαδή επιστρέφει τα σύνολα του \mathfrak{F}_2 σε σύνολα του \mathfrak{F}_1 . Το σύνολο $\xi^{-1}(A)$ συμβολίζεται με $[\xi \in A]$ και ουσιαστικά είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega_1 : \xi(\omega) \in A\}$.

Μάλιστα, χρησιμοποιώντας την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης, μπορούμε να προχωρήσουμε στην διατύπωση του ορισμού της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.3.2 Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και ξ μια μετρήσιμη συνάρτηση από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, τότε η ξ καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), και συνήθως συμβολίζεται με X, Y , κ.ο.κ.



Σχήμα 1.1: Επαγόμενο μέτρο μετρήσιμης συνάρτησης ξ .

Πέραν της σύνδεσης των ενδεχομένων δύο μετρήσιμων χώρων, μπορούμε να συνδέσουμε και τα μέτρα τους χρησιμοποιώντας την έννοια του επαγόμενου μέτρου πιθανότητας μέσω της τυχαίας μεταβλητής X .

Ορισμός 1.3.3 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και μια τυχαία μεταβλητή X από τον Ω στον \mathbb{R} . Η τυχαία μεταβλητή X “μεταφέρει” την πιθανότητα P του (Ω, \mathfrak{F}) στην P_X που ορίζεται στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, έτσι ώστε για κάθε $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι $P_X(A) = P(X \in A)$. Υπενθυμίζεται ότι $P(X \in A) = P([X \in A]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$. Το νέο μέτρο πιθανότητας P_X στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ καλείται επαγόμενο μέτρο πιθανότητας μέσω της X ή κατανομή της X .

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζουμε γραφικά την έννοια του επαγόμενου μέτρου (μ_ξ) μέσω μιας μετρήσιμης συνάρτησης $\xi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, του οποίου ειδική περίπτωση αποτελεί η έννοια του επαγόμενου μέτρου πιθανότητας.

Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα P_X μπορεί να περιγραφεί μονοσήμαντα από την συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 1.3.4 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Η συνάρτηση που περιγράφει την P_X στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ καλείται συνάρτηση κατανομής και ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]), x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $0 \leq F_X(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- (iii) Η F_X είναι αύξουσα συνάρτηση.
- (iv) Η F_X είναι δεξιά συνεχής συνάρτηση.

Συμπληρωματικά με την έννοια της συνάρτησης κατανομής χρησιμοποιείται, όποτε αυτό είναι δυνατό, η έννοια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, που όπως φαίνεται και από το όνομα της, εκφράζει την πυκνότητα με την οποία έχει κατανεμηθεί η συνολική πιθανότητα στον \mathbb{R} .

Ορισμός 1.3.5 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, και μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Εάν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

θα καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής της τ.μ. X .

1.4 Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ένα σύνηθες ερώτημα που τίθεται πριν την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης, αφορά την αναμενόμενη έκβασή του. Η μαθηματική έννοια που μας βοηθάει να δώσουμε απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα καλείται αναμενόμενη τιμή.

Ορισμός 1.4.1 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της X ,

$$E_P(X) = E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

καλείται μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X υπό το μέτρο P και συμβολίζεται με $E_P(X)$ ή $E(X)$.

Προφανώς, η απάντηση που δίδουμε όσον αφορά στην εκτιμησή μας για την έκβαση ενός πειράματος τύχης, βασίζεται στις γνώσεις και πληροφορίες που έχουμε στην διάθεση μας σε σχέση με το πείραμα.

Προκειμένου να εκφράσουμε μαθηματικά το γεγονός ότι στην εκτιμησή μας για την έκβαση ενός πειράματος τύχης έχουμε λάβει υπόψη κάποια συγκεκριμένη πληροφορία, χρησιμοποιούμε την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Ορισμός 1.4.2 Έστω μια τυχαία μεταβλητή $X: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$ με $E(|X|) < \infty$. Μια συνάρτηση $W: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης μιας σ -άλγεβρας $\mathfrak{D} (\subseteq \mathfrak{F})$ και την συμβολίζουμε με $W = E(X | \mathfrak{D})$ αν πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η $W = E(X | \mathfrak{D})$ είναι μια τυχαία μεταβλητή από τον $(\Omega, \mathfrak{D}, P)$ στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$, δηλαδή είναι \mathfrak{D} -μετρήσιμη και Lebesgue ολοκληρώσιμη.

(ii) Η $W = E(X | \mathcal{D})$ ικανοποιεί την σχέση,

$$\int_G E(X | \mathcal{D}) dP = \int_G X dP, \quad \forall G \in \mathcal{D} \Leftrightarrow E(E(X | \mathcal{D}) \cdot 1_G) = E(X \cdot 1_G), \quad \forall G \in \mathcal{D}$$

όπου η 1_G λαμβάνει τις τιμές 1 και 0, όταν $\omega \in G$ και $\omega \notin G$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον ορισμό, η έννοια της πληροφορίας εκφράζεται από τη δέσμευση ως προς τη σ-άλγεβρα \mathcal{D} . Το σκεπτικό που κρύβεται πίσω από την παραπάνω μαθηματική διατύπωση, αφορά το γεγονός ότι δεδομένης της σ-άλγεβρας \mathcal{D} μπορούμε να γνωρίζουμε ποια ενδεχόμενα της \mathcal{D} ($\subseteq \mathfrak{F}$) πραγματοποιήθηκαν και ποια όχι, συνεπώς η εκτιμησή μας για την έκβαση του πειράματος επηρεάζεται άμεσα αφού πλέον είμαστε στην θέση να αποκλείσουμε εκ των προτέρων ορισμένες από τις δυνατές εκβάσεις του πειράματος.

1.5 Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Ένας εναλλακτικός τρόπος μονοσήμαντης περιγραφής της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, είναι με τη χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Ορισμός 1.5.1 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Χαρακτηριστική συνάρτηση $(\Phi_X(z): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C})$ μιας τυχαίας μεταβλητής $X (\in \mathbb{R}^d)$ καλείται ο μετασχηματισμός Fourier - Stieltjes της συνάρτησης κατανομής (F_X) της τυχαίας μεταβλητής και ορίζεται ως:

$$\Phi_X(z) = E(e^{iz'X}) = \int_{\Omega} e^{iz'X(\omega)} P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz'x} dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz'x} f_X(x) dx, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Applebaum (2009, §1.1.6), Cont & Tankov (2004, §2.2.3) και Schoutens (2003, §2.3).

Σε αρκετές περιπτώσεις θα κάνουμε χρήση του λογαρίθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης που καλείται εκθέτης της χαρακτηριστικής συνάρτησης και συμβολίζεται με Ψ_X .

$$\Psi_X(z) = \log(\Phi_X(z)) \Leftrightarrow \Phi_X(z) = e^{\Psi_X(z)}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση κάθε τυχαίας μεταβλητής X , ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- (i) $\Phi_X(0) = 1$ και $|\Phi_X(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}$.
- (ii) Υπάρχει για κάθε τυχαία μεταβλητή και για κάθε z , και είναι συνεχής.
- (iii) Καθορίζει την συνάρτηση κατανομής με μοναδικό τρόπο. Συγκεκριμένα, αν δύο τυχαίες μεταβλητές διαθέτουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε θα ακολουθούν και την ίδια κατανομή (ισόνομες τυχαίες μεταβλητές).
- (iv) Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\Phi_X(z), \Phi_Y(z)$ αντίστοιχα. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $X+Y$ θα είναι η $\Phi_{X+Y}(z) = \Phi_X(z) \Phi_Y(z)$.

1.6 Στοχαστική Ανέλιξη

Δεδομένου ότι τα περισσότερα φυσικά προβλήματα που θα συζητήσουμε στην συνέχεια είναι αρκετά σύνθετα για να μπορούν να περιγραφούν από μια τυχαία μεταβλητή, άμεσα ανακύπτει η ανάγκη εισαγωγής της έννοιας της στοχαστικής διαδικασίας που αποτελεί επέκταση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.6.1 Στοχαστική ανέλιξη ή διαδικασία, καλείται κάθε από κοινού μετρήσιμο σύνολο τυχαίων μεταβλητών $X_t: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$ της μορφής

$$\{X_t, t \in T\} = \{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$$

όπου συνήθως το t συμβολίζει τον χρόνο.

Ανάλογα με το εάν ο χρόνος t λαμβάνει διακριτές ή συνεχείς τιμές, καλούμε την στοχαστική διαδικασία διακριτού ή συνεχούς χρόνου αντίστοιχα.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, μια στοχαστική διαδικασία είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου $t (\in [0, \infty))$ και του $\omega (\in \Omega)$. Συνεπώς μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε ως:

- Μια τυχαία μεταβλητή, διατηρώντας σταθερό το χρόνο t ,

$$X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

- Μια συνάρτηση του χρόνου, διατηρώντας σταθερό το ω ,

$$X_t(\omega), t \in T$$

Στην συνέχεια θα αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την X_t ως συνάρτηση του χρόνου και συγκεκριμένα ως μια cadlag συνάρτηση του χρόνου.

Ορισμός 1.6.2 Μια συνάρτηση $\xi: [0, s] \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται cadlag εάν είναι συνεχής από τα δεξιά, με όρια από τα αριστερά. Δηλαδή, για κάθε t στο διάστημα $[0, s]$, τα όρια $\xi(t^-) = \lim_{x \rightarrow t^-} \xi(x)$, $\xi(t^+) = \lim_{x \rightarrow t^+} \xi(x)$ υπάρχουν, και το $\xi(t) = \xi(t^+)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, όπως σημειώνουν οι Cont & Tankov (2004, §2.4.1), κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως cadlag συνάρτηση, όμως μια cadlag συνάρτηση μπορεί να διαθέτει και σημεία ασυνέχειας.

Μια έννοια που μπορεί να θεωρηθεί ότι επεκτείνει ασθενώς την συνέχεια συνάρτησης στις στοχαστικές διαδικασίες, είναι η έννοια της στοχαστικής συνέχειας.

Ορισμός 1.6.3 Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ στον \mathbb{R} , θα καλείται στοχαστικά συνεχής, εάν

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ και } \forall \varepsilon > 0.$$

Ουσιαστικά, η έννοια της στοχαστικής συνέχειας μιας ανέλιξης X_t , αφορά την τυχαιότητα των χρόνων εμφάνισης σημείων ασυνέχειας (αλμάτων) στις τροχιές της X_t και όχι αυτή καθαυτή την συνέχεια ή ασυνέχεια των τροχιών της X_t . Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Sato (1999, §1.1).

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη συγκεκριμένων προβλημάτων κατέχουν οι ιδιότητες των προσαυξήσεων των στοχαστικών ανελιξέων, γεγονός που έχει οδηγήσει στην μελέτη και ταξινόμηση των στοχαστικών ανελιξέων βάσει των ιδιοτήτων των προσαυξήσεων τους.

Ορισμός 1.6.4 Έστω μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, $X_t: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$. Θα λέμε ότι:

- Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, εάν η τυχαία μεταβλητή $X_{t+h} - X_t$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_u, u \in [0, t]$ για κάθε t και $h > 0$.
- Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ισόνομες προσαυξήσεις, εάν η κατανομή κάθε τυχαίας μεταβλητής $X_{t+h} - X_t$ δεν εξαρτάται από το t , για κάθε t, h .

Μάλιστα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι παραπάνω ιδιότητες αποτελούν θεμελιώδεις ιδιότητες της οικογένειας των ανελιξέων Lévy, μέλη της οποίας είναι η κίνηση Brown και η ανέλιξη Poisson.

1.7 Διήθηση, Φυσική Διήθηση και Προσαρμοσμένες Διαδικασίες

Ορισμός 1.7.1 Έστω ένας μετρήσιμος χώρος (Ω, \mathfrak{F}) και μια οικογένεια σ -αλγεβρών $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$. Εάν για κάθε $0 \leq s \leq t$ ισχύει $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$ τότε η οικογένεια σ -αλγεβρών $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ θα καλείται διήθηση ή φιλτράρισμα.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να υπενθυμίσουμε πως νωρίτερα, ορίζοντας την έννοια της δεσμευμένης μέση τιμής, σημειώσαμε το γεγονός ότι η δέσμευση ως προς μια σ -άλγεβρα κατείχε το ρόλο της (μελλοντικής) πληροφορίας.

Εάν θεωρήσουμε την παράμετρο t στον ορισμό της διήθησης ως παράμετρο χρόνου, αντιλαμβανόμαστε ότι υπό το πρίσμα της δέσμευσης οι \mathfrak{F}_s και \mathfrak{F}_t μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζουν την πληροφορία που θα έχουμε στην διάθεση μας τις χρονικές στιγμές s και t αντίστοιχα.

Συνεπώς, η δέσμευση ως προς μια διήθηση $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ μπορεί να έχει την έννοια της αυξανόμενης με τον χρόνο πληροφορίας που θα έχουμε στην διάθεση μας, μιας και για κάθε $0 \leq s \leq t$ ισχύει $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$.

Επεκτείνοντας το παραπάνω σκεπτικό και θεωρώντας πως οι τιμές μιας στοχαστικής διαδικασίας εκφράζουν την εξέλιξη ενός πειράματος στον χρόνο, αντιλαμβανόμαστε πως οι τιμές αυτές μπορεί να αποτελούν την πηγή της πληροφορίας που θα λάβουμε.

Άμεσα λοιπόν, ανακύπτει η ανάγκη σύνδεσης της έννοιας της διήθησης με τις τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης, μια σύνδεση που εκφράζεται μέσω της έννοιας της φυσικής διήθησης.

Ορισμός 1.7.2 Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$. Η διήθηση $\sigma(X_s, s \leq t)$, $s, t \geq 0$ θα καλείται φυσική διήθηση της $\{X_t, t \in T\}$ και θα συμβολίζεται με \mathfrak{F}_t^X , $t \geq 0$.

Άρα η φυσική διήθηση αποτελεί μια διήθηση που κάθε χρονική στιγμή t , εμπεριέχει όλη την πληροφορία που έχουμε στην διάθεση μας, δεδομένης μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t, t \in T\}$ μέχρι και τον χρόνο t .

Ορισμός 1.7.3 Έστω μια διήθηση \mathfrak{F}_t , $t \geq 0$ και μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$. Η $\{X_t, t \in T\}$ θα λέγεται προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ εάν για κάθε $t \geq 0$ η $\sigma(X_t) \subseteq \mathfrak{F}_t$, δηλαδή εάν η X_t είναι \mathfrak{F}_t μετρήσιμη.

Ουσιαστικά, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, αναφερόμενοι σε μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, προσαρμοσμένη σε μια διήθηση $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ θα αναφερόμαστε σε μια στοχαστική διαδικασία της οποίας η τιμή την χρονική στιγμή t , δοθείσης της \mathfrak{F}_t , είναι γνωστή.

Μάλιστα, αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι κάθε στοχαστική διαδικασία X_t είναι προσαρμοσμένη στην φυσική της διήθηση \mathfrak{F}_t^X , αφού εξ' ορισμού $\mathfrak{F}_t^X \equiv \sigma(X_t)$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες, σε σχέση με τις παραπάνω έννοιες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §2.4.2) και τις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα (2005, §3.10).

Κεφάλαιο 2^ο: Ανελίξεις Lévy

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισαγάγουμε την οικογένεια των ανελίξεων Lévy, θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της και θα παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες ιδιότητες της. Στόχος είναι να αποκτήσουμε, αφενός μια σφαιρική εικόνα γύρω από την θεωρία των ανελίξεων Lévy, αφετέρου όλα τα αναγκαία εφόδια που θα χρειαστούμε για την κατασκευή και προσομοίωση ανελίξεων Lévy.

Η συγγραφή του παρόντος κεφαλαίου βασίσθηκε στα συγγράμματα των Applebaum (2009), Cont & Tankov (2004), Mikosch (1998), Sato (1999), Schoutens (2003), στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις των Γιαννακόπουλου (2003), Μπούτσικα (2005), Paparantoleon (2005) και στην διπλωματική εργασία του Μίχα (2008).

2.1 Κίνηση Brown, Poisson, Αντισταθμισμένες Poisson και Σύνθετες Poisson Ανελίξεις

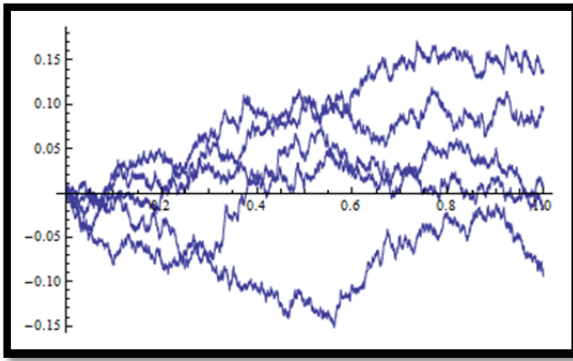
Η κίνηση Brown (*Brownian Motion*) αποτελεί μια από τις γνωστότερες και εκτενέστερα μελετημένες στοχαστικές διαδικασίες, γεγονός που οφείλεται στις σημαντικές ιδιότητες της.

Ορισμός 2.1.1 Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, $X_t: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$, θα καλείται κίνηση Brown και θα συμβολίζεται με $\{B_t, t \in T\}$, εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

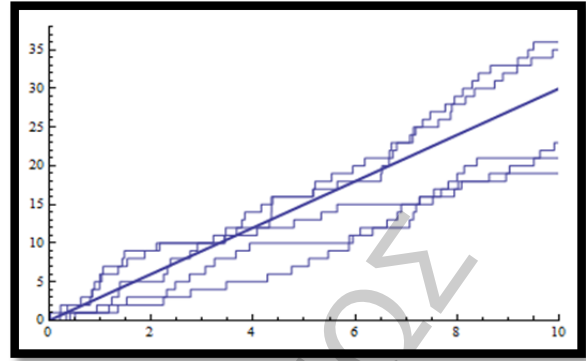
- (i) Η $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Η $\{X_t, t \in T\}$ είναι συνεχής σ.β.
- (iii) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ανεξάρτητες προσauξήσεις.
- (iv) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ισόνομες προσauξήσεις.
- (v) Η $X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$, όπου $\sigma > 0$ και $t \geq 0$.

Στην ειδική περίπτωση όπου η B_1 ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, δηλαδή $\mu = 0$ και $\sigma = 1$, η κίνηση Brown θα καλείται τυπική κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener και θα συμβολίζεται με $\{W_t, t \in T\}$.

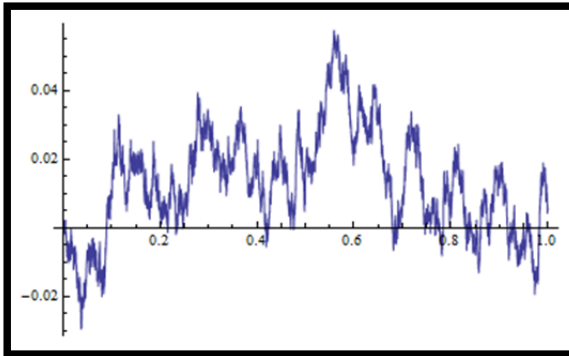
Μάλιστα, αποδεικνύεται πως η κίνηση Brown, είναι η μοναδική στοχαστική διαδικασία τις οποίας τα μονοπάτια είναι συνεχή και προκύπτουν από ανεξάρτητες και ισόνομες προσauξήσεις. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα συγγράμματα των Mikosch (1998, §1.3) και Schoutens (2003, §3.2).



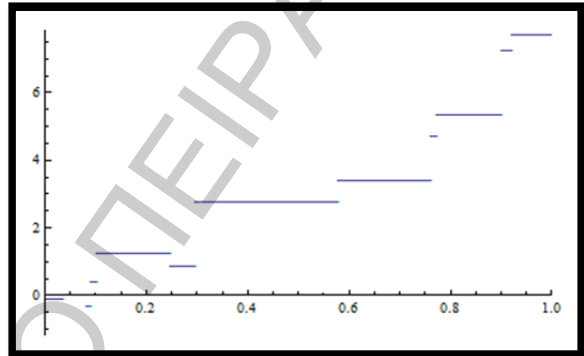
Σχήμα 2.1: Πολλαπλές Διαδικασίες Wiener



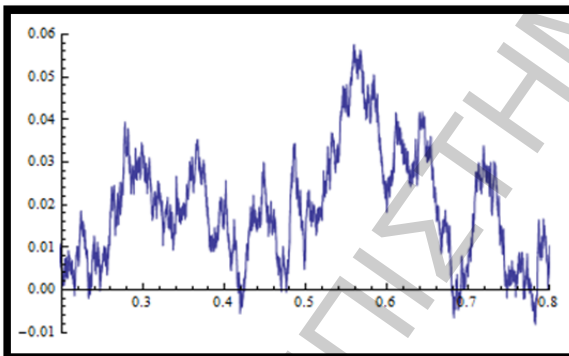
Σχήμα 2.5: Πολλαπλές Διαδικασίες Poisson



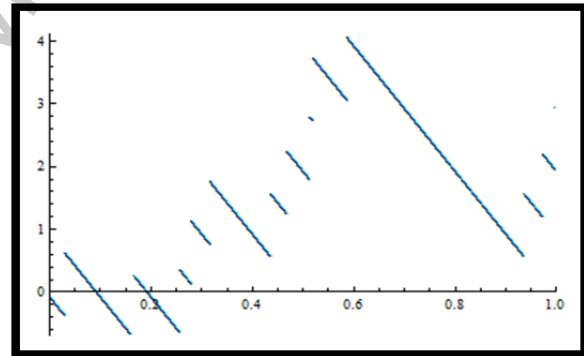
Σχήμα 2.2: Διαδικασία Wiener [0.0, 1.0]



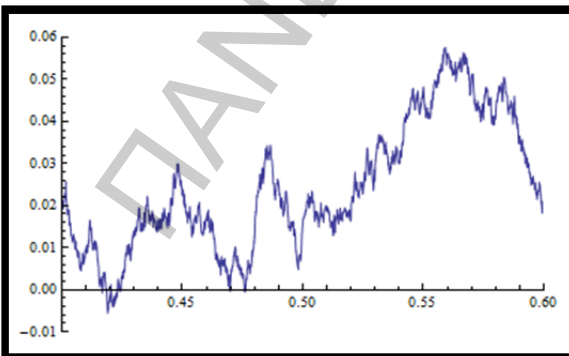
Σχήμα 2.6: Διαδικασία Poisson



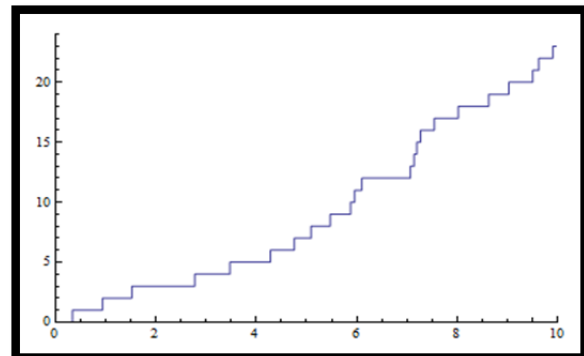
Σχήμα 2.3: Διαδικασία Wiener [0.2, 0.8]



Σχήμα 2.7: Αντ/σμένη Διαδικασία Poisson



Σχήμα 2.4: Διαδικασία Wiener [0.4, 0.6]



Σχήμα 2.8: Σύνθετη Διαδικασία Poisson

Ανάλογα με τα μονοπάτια της κίνησης Brown προκύπτουν και τα μονοπάτια των διαδικασιών Poisson, τα οποία όμως δεν είναι συνεχή, αλλά τμηματικά συνεχή με άλματα μεγέθους μιας μονάδας.

Ορισμός 2.1.2 Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, $X_t: (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$, θα καλείται διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda (> 0)$ και θα συμβολίζεται με $\{N_t, t \in T\}$, εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Η $\{X_t, t \in T\}$ είναι cadlag σ.β.
- (iii) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- (iv) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ισόνομες προσαυξήσεις.
- (v) Η $X_t \sim \text{Pois}(t\lambda)$, $t \geq 0$.

Δεδομένου ότι η N_t ακολουθεί κατανομή Poisson, μπορούμε να αντιληφθούμε πως οι διαδικασίες Poisson αποτελούν απαριθμήτριες διαδικασίες, δηλαδή διαδικασίες που μας περιγράφουν τον αριθμό των συμβάντων εντός συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων $[t_1, t_2]$ όπου $t_1, t_2 \in T$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Sato (1999, §1.3).

Άμεσα συνδεδεμένες με την οικογένεια των ανελιξεων Poisson είναι τόσο η οικογένεια των αντισταθμισμένων διαδικασιών Poisson (*Compensated Poisson Process*), όσο και η οικογένεια των σύνθετων Poisson διαδικασιών (*Compound Poisson Process*).

Ορισμός 2.1.3 Έστω $\{N_t, t \in T\}$ μια διαδικασία Poisson με $N_t \sim \text{Pois}(t\lambda)$. Ως αντισταθμισμένη διαδικασία Poisson της N_t ορίζουμε την

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t, \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Η \tilde{N}_t ακολουθεί μια κεντραρισμένη εκδοχή της κατανομής Poisson που ακολουθεί η N_t .

Αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι οι αντισταθμισμένες διαδικασίες Poisson δεν λαμβάνουν ακέραιες τιμές και δεν αποτελούν απαριθμήτριες διαδικασίες όπως οι διαδικασίες Poisson. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §2.5.4).

Ορισμός 2.1.4 Σύνθετη διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda (> 0)$ και συνάρτηση κατανομής μεγέθους των αλμάτων $F(x)$, θα καλείται κάθε στοχαστική διαδικασία

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N_t}, \quad \forall t \geq 0$$

όπου η $\{N_t, t \in T\}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ , ανεξάρτητη από τα $(Y_i)_{i \geq 1}$, και Y_i τα μεγέθη των αλμάτων, τα οποία είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, με συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Στην περίπτωση που ορίσουμε $Y_i = 1 \quad \forall i$, καταλήγουμε στην ειδική περίπτωση όπου η σύνθετη Poisson διαδικασία ταυτίζεται με την διαδικασία Poisson. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Cont & Tankov (2004, §3.2).

2.2 Ανελιξίες Lévy και Απείρως Διαιρετές Κατανομές

Ορισμός 2.2.1 Μια cadlag στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ με τιμές στον \mathbb{R}^d θα καλείται ανέλιξη Lévy εάν πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- (i) Η $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- (iii) Η $\{X_t, t \in T\}$ διαθέτει ισόνομες προσαυξήσεις.
- (iv) Η $\{X_t, t \in T\}$ είναι στοχαστικά συνεχής.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η κίνηση Brown, οι διαδικασίες Poisson, αλλά και οι σύνθετες διαδικασίες Poisson, που ορίσαμε στη προηγούμενη παράγραφο, ανήκουν στην οικογένεια των ανελιξεων Lévy.

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα των ανελιξεων Lévy αφορά στην σύνδεση τους με τις απείρως διαιρετές κατανομές (*Infinite Divisible Distributions*).

Ορισμός 2.2.2 Μια συνάρτηση κατανομής F στον \mathbb{R}^d , θα καλείται απείρως διαιρετή, εάν για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, υπάρχουν n το πλήθος ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2, \dots, Y_n τέτοιες ώστε η τυχαία μεταβλητή $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ να ακολουθεί την κατανομή F .

Εάν αναλογιστούμε ότι κάθε ανέλιξη Lévy $\{X_t, t \in T\}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων προσαυξήσεων:

$$X_t = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$$

εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε και διαισθητικά την σύνδεση που αναφέραμε νωρίτερα.

Συγκεκριμένα, η ύπαρξη αμφίδρομης σχέσης μεταξύ των ανελιξων Lévy και των απείρως διαιρετών κατανομών έχει αποδειχθεί και συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.1 Αν $\{X_t, t \in T\}$ μια ανελιξη Lévy, τότε για κάθε t η X_t διαθέτει μια απείρως διαιρετή κατανομή. Αντίστροφα, εάν F είναι μια απείρως διαιρετή κατανομή, τότε υπάρχει μια ανελιξη Lévy $\{X_t, t \in T\}$ τέτοια ώστε η κατανομή της X_1 να δίνεται από την F .

Η συγκεκριμένη ιδιότητα των ανελιξων Lévy θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην συνέχεια όπου θα κληθούμε να προσομοιώσουμε μέλη της οικογένειας Lévy καθώς θα μας επιτρέψει να εκφράσουμε κάθε διαδικασία Lévy απλά ως ένα άθροισμα ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, των προσανξησεών της.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τις ανελιξεις Lévy, τις απείρως διαιρετές κατανομές και την συνδεσή τους, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §3.1).

2.3 Λévy-Khinchin Αναπαράσταση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετώντας την έννοια του επαγόμενου μέτρου πιθανότητας (P_X) μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής (X), από ένα χώρο μέτρου πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, αναφερθήκαμε στο γεγονός ότι η P_X μπορεί να περιγραφεί μονοσήμαντα από την χαρακτηριστική συνάρτηση της X .

Αποδεικνύεται πως το σύνολο των απείρως διαιρετών κατανομών μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Η εν λόγω αναπαράσταση καλείται Lévy-Khinchin αναπαράσταση ή τύπος Lévy-Khinchin.

Θεώρημα 2.3.1 Έστω μια τυχαία μεταβλητή X στον \mathbb{R}^d . Εάν η συνάρτηση κατανομής της X είναι απείρως διαιρετή, τότε

$$(i) \quad \Phi_X(z) = E(e^{iz'X}) = e^{\Psi_X(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{με } \Psi_X(z) = i\gamma'z - \frac{1}{2}z'Az + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz'x} - 1 - iz'x1_{|x| \leq \varepsilon}) \nu(dx), \quad \varepsilon \in (0,1] \quad (2.1)$$

όπου: ➤ γ , ένα σταθερό διάνυσμα που ανήκει στον \mathbb{R}^d .

➤ A , ένας συμμετρικός μη αρνητικά ορισμένος πίνακας διάστασης $d \times d$.

$$[A]_{d \times d} : x'Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

➤ ν , ένα μέτρο στον \mathbb{R}^d που ικανοποιεί τις:

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty \quad (2.2)$$

(ii) Η αναπαράσταση της $\Phi_X(z)$ στο (i) από τα γ, A, ν είναι μοναδική.

(iii) Αντίστροφα, εάν $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A ένας συμμετρικός μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας διάστασης $d \times d$, και ν ένα μέτρο στον \mathbb{R}^d που ικανοποιεί τις (2.2), τότε υπάρχει μια απείρως διαιρετή κατανομή F_X η οποία έχει χαρακτηριστική συνάρτηση τη (2.1).

Η τριπλέτα (γ, A, ν) καλείται χαρακτηριστική τριπλέτα ή τριπλέτα Lévy της συνάρτησης κατανομής F_X . Αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι για διαφορετικές τιμές του ε , λαμβάνουμε διαφορετικά γ .

Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Applebaum (2009, §1.2.4), Sato (1999, §8) και στην διπλωματική εργασία του Μίχα (2008, §4.2).

Συνδυάζοντας το Θεώρημα (2.3.1), την Πρόταση (2.2.1) και την ιδιότητα (iv) των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως εάν η $\{X_t, t \in T\}$ είναι μια ανέλιξη Lévy στον \mathbb{R}^d , η οποία κάθε χρονική στιγμή t διαθέτει μια απείρως διαιρετή κατανομή, τότε η σχέση 2.1 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Phi_{X_t}(z) = E(e^{iz'X_t}) = e^{t \cdot \Psi_{X_1}(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{με } \Psi_{X_1}(z) = i\gamma'z - \frac{1}{2}z'Az + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz'x} - 1 - iz'x1_{|x| \leq \varepsilon}) \nu(dx), \quad \varepsilon \in (0,1]$$

όπου η (γ, A, ν) καλείται χαρακτηριστική τριπλέτα της $\{X_t, t \in T\}$.

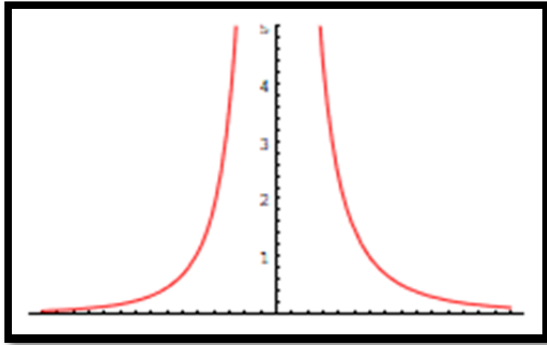
Επομένως από μια συγκεκριμένη τριπλέτα προκύπτει μια μοναδική χαρακτηριστική συνάρτηση, που αντιστοιχεί σε μια μοναδική ανέλιξη Lévy.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πόρισμα που αναφέρει ο Sato (1999, §8), με το οποίο συνδέει την έννοια της χαρακτηριστικής τριπλέτας με την έννοια της συνάρτησης κατανομής και μας προσφέρει ένα χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη των ανελιξεων Lévy.

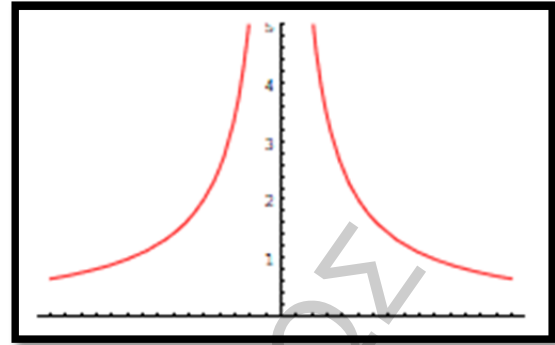
Πόρισμα 2.3.1 Εάν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X προκύπτει από την τριπλέτα (γ, A, ν) , τότε η συνάρτηση κατανομής F_X^t , της συνέλιξης t το πλήθος αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής F_X , θα προκύπτει από την χαρακτηριστική τριπλέτα $(t\gamma, tA, t\nu)$.

2.4 Μέτρο Lévy

Το μέτρο ν , που χρησιμοποιήσαμε στην διατύπωση του θεωρήματος της Lévy-Khinchin αναπαράστασης, καλείται μέτρο Lévy και κατέχει ιδιαίτερα σημαντική θέση στην θεωρία των ανελιξεων Lévy, καθώς καθορίζει την ένταση των αλμάτων κάθε ανέλιξης Lévy.



Σχήμα 2.9: Η πυκνότητα του μέτρου Lévy της ανέλιξης Normal Inverse Gaussian (Papapantoleon, 2005).



Σχήμα 2.10: Η πυκνότητα του μέτρου Lévy της ανέλιξης α -Stable (Papapantoleon, 2005).

Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας ανέλιξης Lévy $X_t (\in \mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$ και ενός συνόλου $A (\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, το μέτρο Lévy $\nu(A)$ της X_t , αποδεικνύεται ότι εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό αλμάτων, στην μονάδα του χρόνου, των οποίων το μέγεθος ανήκει στο A . Μάλιστα, εάν:

- $\nu(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx) < \infty$, τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της X_t , θα διαθέτουν πεπερασμένο πλήθος αλμάτων σε κάθε συμπαγές διάστημα και η X_t θα καλείται ανέλιξη Lévy πεπερασμένης δραστηριότητας (*Finite Activity Lévy Process*).
- $\nu(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx) = \infty$, τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της X_t , θα διαθέτουν άπειρο πλήθος αλμάτων σε κάθε συμπαγές διάστημα και η X_t θα καλείται ανέλιξη Lévy άπειρης δραστηριότητας (*Infinite Activity Lévy Process*).

Αναλογιζόμενοι την παραπάνω ερμηνεία του μέτρου Lévy, εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε πως ο περιορισμός $\nu(\{0\}) = 0$ που ικανοποιεί το μέτρο Lévy έχει σαν στόχο να διασφαλίσει το αυτονόητο, δηλαδή ότι δεν έχει νόημα η ύπαρξη αλμάτων μεγέθους μηδέν.

Αντίστοιχα, εάν μελετήσουμε τον δεύτερο περιορισμό που ικανοποιεί το μέτρο Lévy, θα διαπιστώσουμε πως έχει σαν στόχο να διασφαλίσει το ότι ορίζεται το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην σχέση του χαρακτηριστικού εκθετικού.

Συγκεκριμένα, αναλύοντας τον δεύτερο περιορισμό στον \mathbb{R} (για λόγους απλότητας), καταλήγουμε στην σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty \Leftrightarrow \int_{|x| < \varepsilon} x^2 \nu(dx) + \varepsilon \int_{|x| \geq \varepsilon} \nu(dx) < \infty, \text{ όπου } 0 < \varepsilon \leq 1$$

από την οποία συμπεραίνουμε πως λόγω του ότι το άθροισμα δεξιά της ισοδυναμίας είναι φραγμένο, θα είναι φραγμένος και κάθε όρος του αθροίσματος.

Συνεπώς, μέσω του περιορισμού εκφράζεται - διασφαλίζεται το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός αλμάτων μεγέθους μεγαλύτερου του ε είναι πεπερασμένος, ενώ για τα άλματα μεγέθους μικρότερου του ε , όπου ε θυμίζουμε ένας αριθμός πολύ κοντά στο μηδέν, εκφράζεται αποκλειστικά το γεγονός ότι διαθέτουν πεπερασμένη κύμανση.

Πρόσθετα, αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέτρο Lévy σε συνδυασμό με τον συμμετρικό μη αρνητικά ορισμένο πίνακα A της χαρακτηριστικής τριπλέτας καθορίζουν εάν μια ανέλιξη Lévy διαθέτει πεπερασμένη κύμανση ή όχι. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 2.4.1 Έστω $\{X_t, t \in T\}$ μια ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα (γ, A, ν) .

- Εάν $A = 0$ και $\int_{|x| \leq \varepsilon} |x| \nu(dx) < \infty$, τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της $\{X_t, t \in T\}$ έχουν πεπερασμένη κύμανση.
- Εάν $A \neq 0$ ή $\int_{|x| \leq \varepsilon} |x| \nu(dx) = \infty$, τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της $\{X_t, t \in T\}$ έχουν άπειρη κύμανση.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με το μέτρο Lévy, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο σύγγραμμα του Sato (1999, §21) και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Paparantoleon (2005, §7).

2.5 Διαχώριση Lévy-Itô

Εξ' ορισμού, οι ανέλιξεις Lévy διαθέτουν την cadlag ιδιότητα. Το συγκεκριμένο στοιχείο, αποτελεί το μοναδικό χαρακτηριστικό των μονοπατιών των ανελιξεων Lévy που έχουμε αναφέρει έως αυτό το σημείο.

Η Lévy-Itô διαχώριση, όπως μας προϋδεάζει και το όνομα της, μας προσφέρει μια ολοκληρωμένη εικόνα όσο αφορά τα χαρακτηριστικά των μονοπατιών των ανελιξεων Lévy μέσω της διαχώρισης των κύριων συστατικών τους.

Θεώρημα 2.5.1 Έστω $\{X_t, t \in T\}$ μια ανέλιξη Lévy στον \mathbb{R}^d με χαρακτηριστική τριπλέτα (γ, A, ν) , όπου:

- γ , ένα σταθερό διάνυσμα που ανήκει στον \mathbb{R}^d .
- A , ένας συμμετρικός μη αρνητικά ορισμένος πίνακας διάστασης $d \times d$.

$$[A]_{d \times d} : x'Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

- ν , ένα μέτρο στον \mathbb{R}^d που ικανοποιεί τις:

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

Τότε υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , στον οποίο υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητες ανελίξεις Lévy $(\{X_t^{(i)}, t \in T\}, i \in \{1,2,3,4\})$, όπου:

- Η $\{X_t^{(1)}, t \in T\}$ είναι μια συνεχής τάση, $X_t^{(1)} = \gamma t$.
- Η $\{X_t^{(2)}, t \in T\}$ είναι μια κίνηση Brown, $X_t^{(2)} = AW_t$.
- Η $\{X_t^{(3)}, t \in T\}$ είναι μια σύνθετη Poisson ανελίξη, $X_t^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$.
- Η $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale⁽¹⁾ που κινείται αποκλειστικά με άλματα (*Pure Jump Martingale*). Η $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ διαθέτει, ένα σχεδόν βεβαίως, ένα αριθμήσιμο πλήθος αλμάτων μεγέθους μικρότερου του $\varepsilon \in (0, 1]$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Θεωρώντας την $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)} + X_t^{(4)}$, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας, στον οποίο ορίζεται μια ανελίξη Lévy (X_t) με χαρακτηριστικό εκθετικό:

$$\Psi_{X_1}(z) = i\gamma'z - \frac{1}{2}z'Az + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz'x} - 1 - iz'x1_{|x| \leq \varepsilon}) \nu(dx), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon \in (0, 1]$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα παραπάνω, παραπέμπουμε στις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Paparantoleon (2005, §6).

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις λίθους της θεωρίας των ανελίξεων Lévy. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο, θα αφιερώσουμε λίγο χρόνο για μια σύντομη μελέτη των συμπερασμάτων στα οποία καταλήγει.

Σύμφωνα λοιπόν με την διαχώριση Lévy-Itô, κάθε ανελίξη Lévy αποτελεί ένα συνδυασμό τεσσάρων συνιστωσών, των ανελίξεων $\{X_t^{(i)}, t \in T\}, i \in \{1,2,3,4\}$.

Οι τέσσερις διαφορετικές συνιστώσες θα μπορούσαν να αντιμετωπισθούν ως δύο συνιστώσες, εάν θεωρήσουμε την $X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$ ως μια κίνηση Brown με τάση και την $X_t^{(3)} + X_t^{(4)}$ ως άθροισμα, ενδεχομένως άπειρου αριθμού, σύνθετων ανελίξεων Poisson.

Οι παραπάνω απλοποιήσεις μπορούν να γίνουν εύκολα, καθώς:

- Εάν σε μια κίνηση Brown προστεθεί ένας σταθερός όρος, αυτή παραμένει κίνηση Brown, αλλά διαφοροποιείται η τάση της, δηλαδή αλλάζει ο μέσος μ της κανονικής κατανομής των προσαυξησεών της.

π.χ. Έστω μια διαδικασία Wiener στον \mathbb{R} ($W_t \sim N(0, 1)$), και μια σταθερά $\gamma \in \mathbb{R}$.

Τότε $W_t + t\gamma = B_t \sim N(t\gamma, 1)$.

⁽¹⁾ Οι διαδικασίες Martingale ορίζονται στην Ενότητα 2.7.

- Η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale με ασυνεχή μονοπάτια, είναι μια (άπειρη) σύνθεση αντισταθμισμένων διαδικασιών Poisson. Συνεπώς, το άθροισμα των $X_t^{(3)}$ και $X_t^{(4)}$, εκφράζει το άθροισμα δύο διαφορετικών σύνθετων ανελιξιών Poisson, συγκεκριμένα των:

$$X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\Delta X_s \geq \varepsilon} \Delta X_s \quad \text{και} \quad X_t^{(4)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\Delta X_s < \varepsilon} \Delta \tilde{X}_s = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\Delta X_s < \varepsilon} \Delta X_s - t \int_{|\Delta X_s| < \varepsilon} x \nu(dx)$$

Μάλιστα, αντιμετωπίζοντας τις ανελιξεις Lévy ως σύνθεση των δύο συνιστωσών $(X_t^{(1)} + X_t^{(2)})$, $(X_t^{(3)} + X_t^{(4)})$, εύκολα αντιλαμβανόμαστε πως η πρώτη συνιστώσα εκφράζει το συνεχές τμήμα των μονοπατιών των ανελιξιών Lévy, ενώ η δεύτερη συνιστώσα εκφράζει το ασυνεχές τμήμα.

Πρόσθετα, αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι η $X_t^{(4)}$, που αποτελεί μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale με ασυνεχή μονοπάτια για κάθε t και μπορεί να εκφρασθεί μέσω μιας σύνθεσης αντισταθμισμένων διαδικασιών Poisson, έχει ως σκοπό να μοντελοποιήσει τα άλματα τάξης μεγέθους μικρότερης του ε , για τα οποία όπως είδαμε παρουσιάζει πρόβλημα το μέτρο Lévy, λόγω της ιδιόμορφης συμπεριφοράς του κοντά στο μηδέν.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε πως κάθε ανέλιξη Lévy μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά μέσω μιας κίνησης Brown με τάση και μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson. Το εν λόγω συμπέρασμα, προφανώς και έχει ιδιαίτερη σημασία στην θεωρία των ανελιξιών Lévy αλλά, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, θα αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο στην προσπάθειά μας να κατασκευάσουμε και να προσομοιώσουμε συγκεκριμένα μέλη της οικογένειας Lévy.

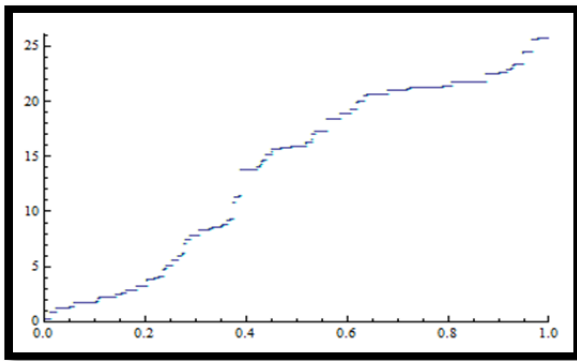
2.6 Subordinators

Μια οικογένεια ανελιξιών Lévy, ευρέως γνωστή από την χρήση της στην προσομοίωση των ανελιξιών Lévy, είναι η οικογένεια των Subordinators.

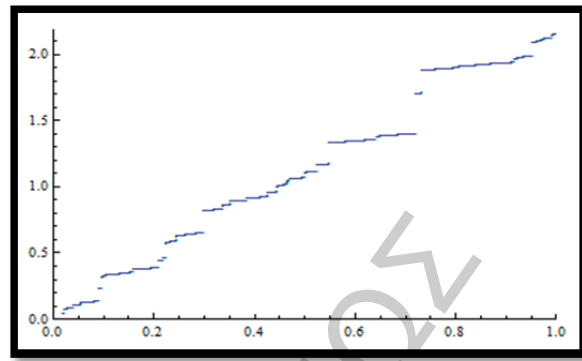
Ορισμός 2.6.1 Ως Subordinator ορίζεται κάθε μονοδιάστατη ανέλιξη Lévy (S_t) , η οποία είναι σχεδόν βεβαίως μη φθίνουσα.

Συνεπώς, κάθε μέλος της οικογένειας των Subordinators ικανοποιεί εξ' ορισμού τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $S_t \geq 0$ σ.β. για κάθε $t > 0$.
- $S_t \leq S_s$ σ.β. για κάθε $t \leq s$.



Σχήμα 2.11: Ανελίξη Γάμμα



Σχήμα 2.12: Ανελίξη Inverse Gaussian

Αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός πως για τη χαρακτηριστική τριπλέτα κάθε Subordinator ισχύουν τα εξής:

$$(i) \gamma \geq 0 \quad (ii) A = 0 \quad (iii) \nu((-\infty, 0]) = 0 \quad (iv) \int_0^\infty (s \wedge \varepsilon) \nu(ds) < \infty$$

δηλαδή κάθε Subordinator αποτελείται μονάχα από ένα συνδυασμό θετικών αλμάτων πεπερασμένης διακύμανσης και θετικής τάσης. Συνεπώς, το χαρακτηριστικό τους εκθετικό διαμορφώνεται ως εξής:

$$\Psi_{S_t}(z) = i\gamma z + \int_0^\infty (e^{izs} - 1) \nu(ds)$$

Επιπλέον, λόγω του ότι κάθε Subordinator ουσιαστικά αποτελεί μια θετική τυχαία μεταβλητή για όλα τα t , θα μπορούσαμε εναλλακτικά να την περιγράψουμε και μέσω του μετασχηματισμού Laplace ως εξής:

$$L_{S_t}(z) = E(e^{-zS_t}) = e^{t l(z)} \quad \forall z \leq 0, \quad \text{με } l(z) = -\Psi_{S_t}(iz) = \gamma z + \int_0^\infty (e^{-zs} - 1) \nu(ds)$$

όπου $(\gamma, 0, \nu)$ η χαρακτηριστική τριπλέτα της Subordinator διαδικασίας. Το $l(z)$ καλείται Laplace εκθετικό της X_t .

Δεδομένων των παραπάνω ιδιοτήτων, αλλά και των ιδιοτήτων της έννοιας του χρόνου, δεν είναι δύσκολο πλέον να αντιληφθούμε την σύνδεση μεταξύ της οικογένειας των Subordinator και της έννοιας του χρόνου.

Στην πράξη, οι Subordinators χρησιμοποιούνται ως δείκτες χρονικής μεταβολής γνωστών ανελιξεων Lévy, προκειμένου να κατασκευάσουμε νέες ανελιξεις Lévy.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ανελιξεων Lévy που ανήκουν στην οικογένεια των Subordinators, αποτελούν οι ανελιξεις Γάμμα και οι ανελιξεις Inverse Gaussian.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την οικογένεια των Subordinators, παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Applebaum (2009, §1.3.2) και Cont & Tankov (2005, §3.5).

2.7 Στοιχηματικές (martingale) και μαρκοβιανές (Markov) Διαδικασίες

Ολοκληρώνοντας το παρόν κεφάλαιο, θεωρήσαμε σημαντικό να αναφερθούμε σε δύο ακόμα οικογένειες στοχαστικών διαδικασιών που συνδέονται με τις ανεξίτητες Lévy, τις Στοιχηματικές (martingale) και τις μαρκοβιανές (Markov) διαδικασίες.

Η οικογένεια των διαδικασιών martingale διαθέτει σημαντικές ιδιότητες, και όπως θα δούμε αργότερα, σπουδαίες εφαρμογές στη αποτίμηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Ορισμός 2.7.1 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$ θα καλείται martingale ως προς μια διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- (i) Η $\{X_t, t \in T\}$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.
- (ii) $E(|X_t|) < \infty$, για κάθε $t \geq 0$.
- (iii) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ σ.β., για κάθε $0 \leq s < t < \infty$.

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε, την χρονική στιγμή s , για την τιμή που θα λάβει μια martingale τη χρονική στιγμή t , είναι ίση με την τιμή της την χρονική στιγμή s .

Θεώρημα 2.7.1 Έστω μια στοχαστική διαδικασία $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X), t \geq 0$. Αν η $\{X_t, t \in T\}$ είναι Martingale τότε:

$$E(X_t) = E(X_0), \quad \forall t \geq 0.$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ανεξίτητων Lévy που ανήκουν στην οικογένεια των διαδικασιών martingale, αποτελούν η τυπική κίνηση Brown και οι αντισταθμισμένες διαδικασίες Poisson.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τις διαδικασίες martingale, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Applebaum (2009, §2.1.2) και τις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Γιαννακόπουλου (2003, §2.1).

Με τον όρο μαρκοβιανή διαδικασία, χαρακτηρίζουμε κάθε στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί την μαρκοβιανή ιδιότητα.

Ορισμός 2.7.2 Έστω ένας χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , μια διήθηση $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, και μια στοχαστική διαδικασία $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), t \geq 0$ προσαρμοσμένη στην \mathcal{F}_t . Εάν

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) | X_s)$$

για κάθε φραγμένη συνάρτηση f και $0 \leq s < t < \infty$, τότε θα λέμε πως η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$ ικανοποιεί την μαρκοβιανή ιδιότητα και θα την καλούμε μαρκοβιανή διαδικασία.

Συνεπώς, η μελλοντική συμπεριφορά κάθε στοχαστικής διαδικασίας που ικανοποιεί την μαρκοβιανή ιδιότητα, εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα τιμή της.

Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειώσουμε πως αποδεικνύεται το γεγονός ότι η οικογένεια των ανελίξεων Lévy ανήκει στην οικογένεια των μαρκοβιανών διαδικασιών.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τις διαδικασίες Markov, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Applebaum (2009, §3.1.1).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 3^ο: Προσομοίωση Ανελιξίων Lévy

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια σειρά από μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση ανελιξίων Lévy. Στόχος είναι να αναπτύξουμε, αφενός μια σφαιρική εικόνα γύρω από τη θεωρία και το σκεπτικό που κρύβεται πίσω από τις μεθόδους προσομοίωσης των ανελιξίων Lévy, αφετέρου την δεξιότητα εφαρμογής των μεθόδων, προκειμένου να μπορέσουμε να ανταπεξέλθουμε στο πρόβλημα της «αποτίμησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με την χρήση ανελιξίων Lévy», που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Η συγγραφή του παρόντος κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα των Asmussen & Glynn (2007), Cont & Tankov (2004), Devroye (1986), Fu et al. (2007), Korn et al. (2010), Rosinski (2007), Schoutens (2003), στα επιστημονικά άρθρα των Ahrens & Dieter (1974), Poirrot & Tankov (2006), Rydberg T. (1997), στην τεχνική αναφορά των Olivares & Seco (2003) και στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα (2004).

3.1 Προσομοίωση Ανελιξίων Lévy Πεπερασμένης Δραστηριότητας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με την διαχώριση Lévy-Ιτό είδαμε πως κάθε ανέλιξη Lévy μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τεσσάρων ανεξάρτητων ανελιξίων Lévy:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)} + X_t^{(4)},$$
$$X_t^{(1)} = \gamma t, \quad X_t^{(2)} = \mathbf{A}W_t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\|\Delta X_s\| \geq \varepsilon} \Delta X_s, \quad X_t^{(4)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\|\Delta X_s\| < \varepsilon} \Delta \tilde{X}_s = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\|\Delta X_s\| < \varepsilon} \Delta X_s - t \int_{\|\Delta X_s\| < \varepsilon} x \nu(dx)$$

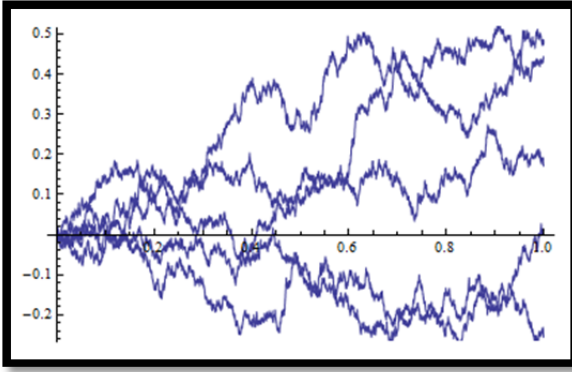
όπου:

$$\gamma \in \mathbb{R}^d, \quad [\mathbf{A}]_{d \times d} : x' \mathbf{A} x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nu(\{0\}) = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

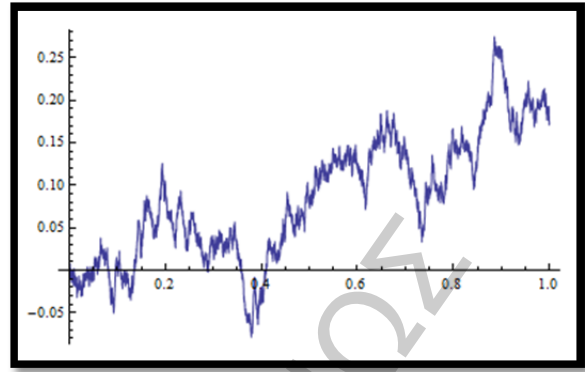
Παράλληλα, ορίσαμε τις ανελιξεις Lévy πεπερασμένης δραστηριότητας ως ανελιξεις οι οποίες διαθέτουν πεπερασμένο πλήθος αλμάτων σε κάθε συμπαγές διάστημα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε πως η διαχώριση Lévy-Ιτό για τις ανελιξεις Lévy πεπερασμένης δραστηριότητας λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)},$$
$$X_t^{(1)} = \gamma^* t = \left(\gamma - \int_{\|\Delta X_s\| < \varepsilon} x \nu(dx) \right) t, \quad X_t^{(2)} = \mathbf{A}W_t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\Delta X_s \neq 0} \Delta X_s$$



Σχήμα 3.1: Πολλαπλά μονοπάτια κίνησης Brown, $X_t \sim N(1 \cdot t, 0.25 \cdot t)$.



Σχήμα 3.2: Μονοπάτι κίνησης Brown, $X_t \sim N(1 \cdot t, 0.25 \cdot t)$.

καθώς τόσο ο συνολικός αριθμός αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$, όσο και το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale της διαχώρισης Λένυ-Ιτό είναι πεπερασμένα.

Οι ανελιξίες που διαθέτουν την παραπάνω μορφή, δηλαδή οι ανελιξίες που αποτελούνται από την σύνθεση μιας κίνησης Brown με τάση και μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson, συναντώνται στην βιβλιογραφία με το όνομα διαδικασίες διάχυσης με άλματα.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω, αποτελεί το γεγονός ότι η προσομοίωση ανελιξεων Λένυ πεπερασμένης δραστηριότητας ανάγεται στο πρόβλημα προσομοίωσης των διαδικασιών διάχυσης με άλματα (*Jump Diffusion Processes*) και συγκεκριμένα των συνιστωσών τους.

Αλγόριθμος 3.1.1 (Κίνηση Brown με τάση) Προκειμένου να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown (B_t), με τάση γ και διακύμανση σ^2 , στο διάστημα $[0, T]$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς (τ.α.) Z_j που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$.
- **Βήμα 3^ο:** Μετατρέπουμε τους τ.α. Z_j που παρήχθησαν, σε τ.α. από την κανονική κατανομή με μέση τιμή γdt και διακύμανση $\sigma^2 dt$:

$$G_j = \gamma dt + (\sigma(dt)^{1/2})Z_j \sim N(\gamma dt, \sigma^2 dt),$$

που θα εκφράζουν τις προσανξήσεις της κίνησης Brown.

- **Βήμα 4^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της κίνησης Brown που παρήχθη είναι το εξής:

$$B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + G_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad B_{t_0} = 0.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.2).

Για $T=1$, θα έχουμε $B_1 = B_{t_n} = B_{t_0} + G_1 + G_2 + \dots + G_n$, $B_{t_0} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, όπου οι ανεξάρτητες τ.μ. $G_j \sim N(\gamma dt, \sigma^2 dt)$. Όμως από τις ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχει χαρακτηριστική συνάρτηση ίση με το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών. Οπότε στην περίπτωση μας θα ισχύει:

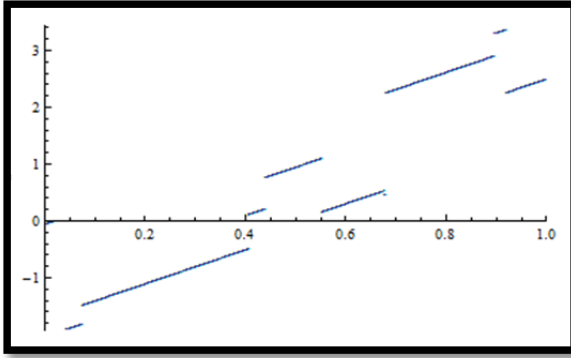
$$\begin{aligned} \Phi_{G_1+G_2+\dots+G_n}(x; \gamma dt, \sigma^2 dt) &= \Phi_{G_1}(x; \gamma dt, \sigma^2 dt) \Phi_{G_2}(x; \gamma dt, \sigma^2 dt) \dots \Phi_{G_n}(x; \gamma dt, \sigma^2 dt) = \\ &= e^{i(\gamma dt)x - \frac{1}{2}(\sigma^2 dt)x} \dots e^{i(\gamma dt)x - \frac{1}{2}(\sigma^2 dt)x} = e^{n \left(i(\gamma dt)x - \frac{1}{2}(\sigma^2 dt)x \right)} = e^{i(\gamma ndt)x - \frac{1}{2}(\sigma^2 ndt)x} = e^{i\gamma x - \frac{1}{2}\sigma^2 x} \end{aligned}$$

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί την χαρακτηριστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής με μέση τιμή γ και διακύμανση σ^2 , δηλαδή καταλήξαμε στο γεγονός ότι η $B_1 \sim N(\gamma, \sigma^2)$.

Τόσο από τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε για την προσομοίωση της μονοδιάστατης κίνησης Brown με τάση, όσο και από την συζήτηση που ακολούθησε για την περίπτωση $T=1$, πρέπει να έχει γίνει σαφές πως αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι προσυζητήσεις των ανελίξεων Lévy είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, αναγάγαμε το πρόβλημα προσομοίωσης της κίνησης Brown με τάση, στο πρόβλημα δειγματοληψίας από την κανονική κατανομή με μέση τιμή γdt και διακύμανση $\sigma^2 dt$. Ανάλογο σκεπτικό θα ακολουθήσουμε και στους αλγόριθμους που ακολουθούν και στοχεύουν στην προσομοίωση της μονοδιάστατης σύνθετης ανελίξης Poisson με τάση.

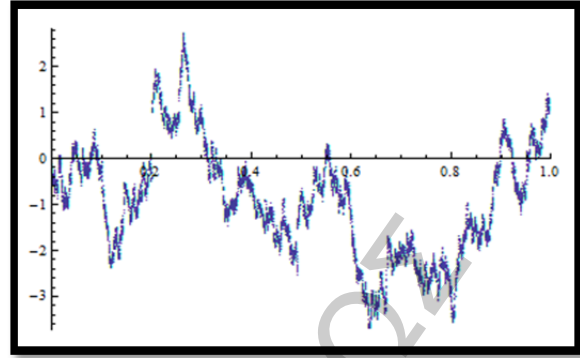
Αλγόριθμος 3.1.2 (Σύνθετη Ανέλιξη Poisson με τάση) Προκειμένου να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι μιας μονοδιάστατης σύνθετης ανελίξης Poisson (X_t) με τάση γ , με $\nu(\mathbb{R}) = \lambda$ και συνάρτηση κατανομής μεγέθους των αλμάτων $F(dx) = \nu(dx) / \lambda$ στο διάστημα $[0, T]$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή δύο μετρητών $JN=0$ και $JT_{JN}=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. y από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$, που θα εκφράζει τον χρόνο που χρειάστηκε μέχρι την εμφάνιση ενός άλματος.
- **Βήμα 3^ο:** Αυξάνουμε την τιμή του μετρητή JN , που θα εκφράζει το συνολικό αριθμό αλμάτων της σύνθετης ανελίξης Poisson, κατά μια μονάδα $JN = JN + 1$.
- **Βήμα 4^ο:** Προσθέτουμε τον τ.α. y στον μετρητή $JT_{JN} = JT_{JN} + y$, που θα εκφράζει τους διαδοχικούς χρόνους αλμάτων της σύνθετης ανελίξης Poisson.



Σχήμα 3.3: Μονοπάτι

Σύνθετης Ανέλιξης Poisson με τάση,
 $X_{CP}(t; \gamma=3, \lambda=10, N(0, 1))$.



Σχήμα 3.4: Μονοπάτι

Διαδικασίας Διάχυσης με άλματα,
 $X_{JD}(t; \gamma=0.2, \sigma=5, \lambda=10, N(0, 1))$.

- **Βήμα 5^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. JS_{JN} από την κατανομή $F(dx)$, που θα εκφράζει το μέγεθος του άλματος της σύνθετης ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 6^ο:** Ελέγχουμε εάν η τιμή του μετρητή JT_{JN} έγινε μεγαλύτερη ή ίση από την T . Εάν η απάντηση του ελέγχου είναι καταφατική, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά επιστρέφουμε στο 2^ο Βήμα.
- **Βήμα 7^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 8^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση που παρήχθη είναι το εξής:

$$X_{t_j} = \gamma t_j + \sum_{j=1}^{JN(t_j)} JS_j \quad \text{όπου} \quad JN(t_j) = \sup \left\{ l : \sum_{k=1}^l JT_k \leq t_j \right\}$$

Ο αλγόριθμος που μόλις περιγράψαμε, για την προσομοίωση της σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση, στηρίζεται στο γεγονός ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αλμάτων είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

Μια εναλλακτική μέθοδος για την προσομοίωση της σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση στηρίζεται στο ότι: (α) ο συνολικός αριθμός αλμάτων μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson στο διάστημα $[0, T]$ είναι ένας τ.α. JN που ακολουθεί την κατανομή Poisson $\text{Pois}(\lambda T)$, (β) οι μη διατεταγμένοι χρόνοι εμφάνισης των αλμάτων στο διάστημα $[0, T]$ είναι ανεξάρτητοι τ.α. U_i που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, T]$.

Αλγόριθμος 3.1.3 (Σύνθετη Ανέλιξη Poisson με τάση) Προκειμένου να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι μιας μονοδιάστατης σύνθετης ανέλιξης Poisson (X_t) με τάση γ , με ένταση λT και συνάρτηση κατανομής μεγέθους των αλμάτων $F(dx)$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. (JN) από την κατανομή Poisson(λT), που θα εκφράζει τον τ.α. αλμάτων που θα εμφανιστούν στο μονοπάτι της σύνθετης ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε JN το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. U_j από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, T]$, που θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων της σύνθετης ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 4^ο:** Διατάσσουμε τους χρόνους U_j κατά αύξουσα σειρά.
- **Βήμα 5^ο:** Παράγουμε JN το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. JS_j από την κατανομή $F(dx)$, που θα εκφράζουν τα μεγέθη των αλμάτων της σύνθετης ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 6^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της σύνθετης Poisson ανέλιξης με τάση που παρήχθη είναι το εξής:

$$X_{t_j} = \gamma t_j + \sum_{k=1}^{JN} JS_k 1_{U_k < t_j}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τους αλγόριθμους 3.1.2 και 3.1.3, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.1).

Αξίζει να σημειώσουμε πως στην περίπτωση που μελετούμε μεμονωμένα την προσομοίωση των σύνθετων ανελιξεων Poisson με τάση, δεν είναι απαραίτητη η διακριτοποίηση του χρόνου καθώς τα ζεύγη

(χρόνος εμφάνισης άλματος, τιμή ανέλιξης)

αρκούν για την περιγραφή του μονοπατιού της ανέλιξης. Παρόλα αυτά, τόσο στους αλγόριθμους που προηγήθηκαν, όσο και στους αλγόριθμους που ακολουθούν, διακριτοποιούμε τον χρόνο αφού σε αρκετές περιπτώσεις, θα χρειαστεί να τους συνδυάσουμε με αλγόριθμους που απαιτούν διακριτοποίηση του χρόνου (π.χ. κίνηση Brown). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο αμέσως επόμενος αλγόριθμος.

Δεδομένων των μεθόδων προσομοίωσης της κίνησης Brown και της σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση, μπορούμε εύκολα να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διαδικασίας διάχυσης με άλματα ως σύνθεση των δυο προηγούμενων.

Αλγόριθμος 3.1.4 (Διαδικασίες Διάχυσης με άλματα) Προκειμένου να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι μιας μονοδιάστατης διαδικασίας διάχυσης με άλματα (X_t) , με τάση $\gamma \in \mathbb{R}$, μεταβλητότητα $\sigma > 0$, ένταση εμφάνισης αλμάτων $\nu(\mathbb{R}) = \lambda$ και συνάρτηση κατανομής μεγέθους των αλμάτων $F(dx) = \nu(dx) / \lambda$ στο διάστημα $[0, T]$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Προσομοιώνουμε το τμήμα της διαδικασίας διάχυσης με άλματα που περιγράφεται από την κίνηση Brown (B_t) με τάση γ και διακύμανση σ^2 , όπως παρουσιάσαμε στον Αλγόριθμο (3.1.1).
- **Βήμα 3^ο:** Προσομοιώνουμε το τμήμα της διαδικασίας διάχυσης με άλματα που περιγράφεται από την σύνθετη ανέλιξη Poisson, με μηδενική τάση, ένταση εμφάνισης αλμάτων $\nu(\mathbb{R}) = \lambda$ και συνάρτηση κατανομής μεγέθους των αλμάτων $F(dx) = \nu(dx) / \lambda$, όπως παρουσιάσαμε στον Αλγόριθμο (3.1.3).
- **Βήμα 4^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της διαδικασίας διάχυσης με άλματα που παρήχθη είναι το εξής:

$$X_{t_j} = \gamma t_j + \sum_{l=1}^j G_l + \sum_{k=1}^{JN} JS_k 1_{U_k < t_j}$$

3.2 Προσομοίωση Ανελίξεων Lévy Άπειρης Δραστηριότητας

Στην προηγούμενη ενότητα, μέσα από την προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος προσομοίωσης των διαδικασιών διάχυσης με άλματα, επιτύχαμε την αντιμετώπιση του προβλήματος προσομοίωσης των ανελίξεων $\{X_t^{(i)}, t \in T\}, i \in \{1, 2, 3\}$ που εμφανίζονται στο θεώρημα της διαχώρισης Lévy-Itô.

Παράλληλα, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι ανελίξεις Lévy πεπερασμένης δραστηριότητας διαθέτουν πεπερασμένο πλήθος αλμάτων σε κάθε συμπαγές διάστημα, καταφέραμε να τις εκφράσουμε υπό την μορφή των διαδικασιών διάχυσης με άλματα και να αποφύγουμε σιωπηρά την απευθείας προσομοίωση της ανέλιξης $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$.

Στην παρούσα παράγραφο, δεδομένου ότι οι ανελίξεις Lévy άπειρης δραστηριότητας διαθέτουν άπειρο αριθμό αλμάτων σε κάθε συμπαγές διάστημα, δεν μπορούμε να αποφύγουμε την προσομοίωση της ανελίξης $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ με τρόπο ανάλογο με αυτόν που ακολουθήσαμε στην περίπτωση των ανελίξεων Lévy πεπερασμένης δραστηριότητας. Στις ενότητες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε μεθόδους προσομοίωσης ανελίξεων Lévy που στηρίζονται, είτε στην αποφυγή της απευθείας προσομοίωσης της ανελίξης $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$, είτε στην εκτίμηση της τιμής της μέσω προσεγγιστικών μεθόδων.

Μάλιστα, για λόγους απλότητας θα υποθέσουμε πως οι ανελίξεις Lévy $\{X_t, t \in T\}$ που θα προσομοιώσουμε στην συνέχεια, θα αποτελούν μια σύνθεση (ενδεχομένως άπειρου αριθμού) σύνθετων ανελίξεων Poisson με τάση $(X_t^{(1)} + X_t^{(3)} + X_t^{(4)})$, γεγονός που συνεπάγεται πως θα έχουν χαρακτηριστική τριπλέτα της μορφής $(\gamma, 0, \nu)$.

(α) Προσεγγιστική Μέθοδος Τυχαίου Περιπάτου

Η προσεγγιστική μέθοδος Τυχαίου Περιπάτου (*Random Walk Approximation Method*), ουσιαστικά αποτελεί την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για την προσομοίωση της κίνησης Brown και της σύνθετης ανελίξης Poisson. Βασίζεται στο ότι οι προσαυξήσεις κάθε ανελίξης Lévy είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, γεγονός το οποίο δεδομένης της κατανομής προσαυξήσεων μιας ανελίξης, μας οδηγεί στην προσομοιωσή της ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών από την κατανομή προσαυξήσεων.

Αλγόριθμος 3.2.1 (Προσεγγιστική Μέθοδος Τυχαίου Περιπάτου) Προκειμένου να προσομοιώσουμε στο $[0, T]$ μια μονοδιάστατη ανελίξη Lévy $\{X_t, t \in T\}$ με χαρακτηριστική τριπλέτα $(\gamma, 0, \nu)$ και κατανομή προσαυξήσεων $F(dx)$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. Y_j από την κατανομή προσαυξήσεων $F(dx)$.
- **Βήμα 3^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της ανελίξης Lévy είναι το εξής:

$$X_{t_j} = X_{t_{j-1}} + Y_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad X_{t_0} = 0.$$

Το μονοπάτι που παράγεται, καλείται προσέγγιση τυχαίου περιπάτου της $\{X_t, t \in T\}$ στο $[0, T]$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την παραπάνω μέθοδο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.1) και Rosinski (2007).

Η ουσιαστική δυσκολία εφαρμογής της μεθόδου, εάν παραβλέψουμε το γεγονός ότι η κατανομή προσauξήσεων μιας ανέλιξης Lévy δεν είναι πάντοτε γνωστή, εντοπίζεται στην παραγωγή ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών από την κατανομή προσauξήσεων. Γι' αυτό τον λόγο, στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια σειρά από αλγόριθμους για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από κατανομές προσauξήσεων γνωστών ανελίξεων Lévy.

Ανελίξεις Γάμμα

Οι ανελίξεις Γάμμα ανήκουν στην οικογένεια των Subordinator ανελίξεων Lévy και κατά συνέπεια διαθέτουν αποκλειστικά θετικές προσauξήσεις. Μάλιστα, σύμφωνα με τους Cont & Tankov (2004, §4.4.2), η χαρακτηριστική συνάρτηση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η χαρακτηριστική τριπλέτα μιας ανέλιξης Γάμμα με παράμετρο σχήματος α και αντίστροφη παράμετρο κλίμακας β , δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_G(z; \alpha, \beta) = (1 - iz/\beta)^{-\alpha t}, \quad f_G(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t - 1} e^{-\beta x} \quad \forall x > 0,$$

$$\text{και } (\gamma_G, A_G, \nu_G) = (\alpha(1 - e^{-\beta})/\beta, 0, \alpha x^{-1} e^{-\beta x} 1_{x>0})$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τις προσauξήσεις μιας ανέλιξης Γάμμα, αρκεί να μπορούμε να παράγουμε τ.α. από την κατανομή γάμμα. Υπενθυμίζουμε πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής γάμμα μπορεί να γραφεί ως:

$$f_\Gamma(x; \kappa, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)\theta^\kappa} x^{\kappa-1} e^{-x/\theta} \quad \text{ή} \quad f_\Gamma(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \forall x > 0$$

όπου $\kappa (= \alpha)$ η παράμετρος σχήματος και $\theta (= 1/\beta)$ η παράμετρος κλίμακας. Στην συνέχεια, θα κάνουμε χρήση του συμβολισμού $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Πριν προχωρήσουμε όμως στην ανάπτυξη του αλγορίθμου παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κατανομή γάμμα, αξίζει να αναφερθούμε σε δύο σημαντικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή γάμμα. Συγκεκριμένα:

- ✓ Δοθείσης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, η τυχαία μεταβλητή $cX \sim \Gamma(\alpha, \beta/c)$ για κάθε $c > 0$.
- ✓ Δοθεισών δύο τυχαίων μεταβλητών $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ και $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$, η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί, κάνει χρήση της πρώτης ιδιότητας καθώς παράγει τ.α. από την κατανομή $\Gamma(\alpha, 1)$, και στην συνέχεια τους μετατρέπει σε τ.α. από την κατανομή $\Gamma(\alpha, \beta)$, διαιρώντας τους με την παράμετρο β .

Αλγόριθμος 3.2.2 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής Γάμμα) Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος α και αντίστροφη παράμετρο κλίμακας β , θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

Για $\alpha = 1$:

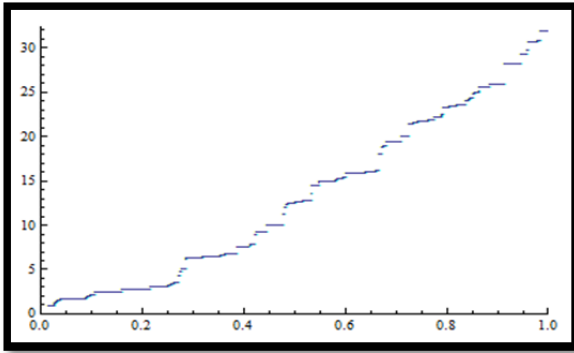
- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. y από την κατανομή $\Gamma(1, \beta)$ ως: $y = -\text{Log}(U) / \beta$.

Για $0 < \alpha < 1$:

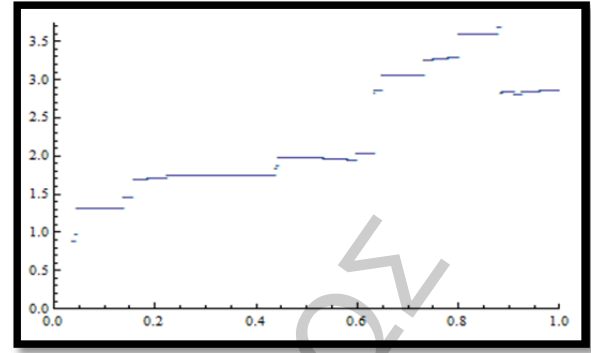
- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε ανεξάρτητους τ.α. U_1, U_2 από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$.
- **Βήμα 2^ο:** Ορίζουμε ως v_1 και v_2 αντίστοιχα τις $v_1 = (e + \alpha) / e$ και $v_2 = v_1 U_1$.
- **Βήμα 3^ο:** Ελέγχουμε εάν η v_2 είναι μικρότερη ή ίση της μονάδας. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 6^ο Βήμα.
- **Βήμα 4^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή $y = v_2^{1/\alpha}$.
- **Βήμα 5^ο:** Ελέγχουμε εάν ο τ.α. U_2 είναι μεγαλύτερος από $U_2 > e^{-y}$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 1^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 8^ο Βήμα.
- **Βήμα 6^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή $y = -\text{Log}((v_1 - v_2) / \alpha)$.
- **Βήμα 7^ο:** Ελέγχουμε εάν ο τ.α. U_2 είναι μεγαλύτερος από $U_2 > y^{\alpha-1}$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 1^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 8^ο Βήμα.
- **Βήμα 8^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. y από την κατανομή $\Gamma(\alpha, \beta)$ ως: $y = y / \beta$.

Για $\alpha > 1$:

- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε ανεξάρτητους τ.α. U_1, U_2 από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$.
- **Βήμα 2^ο:** Ελέγχουμε εάν ο τ.α. U_2 είναι μεγαλύτερος από $U_2 > (-e U_1 \ln U_1)^{\alpha-1}$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 1^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. y από την κατανομή $\Gamma(\alpha, \beta)$ ως: $y = -(\alpha / \beta) \ln U_1$.



Σχήμα 3.5: Μονοπάτι Ανέλιξης
Γάμμα,
 $X_G(t; \alpha = 30, \beta = 1)$.



Σχήμα 3.6: Μονοπάτι Ανέλιξης
Variance Gamma,
 $X_{VG}(t; \mu = 0, \sigma = 1, \mu_G = 0, \nu_G = 0.3)$.

Συνεπώς, δεδομένου του παραπάνω αλγόριθμου, προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη $X_G(t; \alpha, \beta)$, αρκεί να διακριτοποιήσουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα μεγέθους $dt = T/n$, και να παράγουμε τις προσαυξήσεις της ανέλιξης ως ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς από την κατανομή $\Gamma(\alpha dt, \beta)$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Devroye (1986, §IX.3), στο άρθρο των Ahrens & Dieter (1974) και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα (2004, §3.2).

Πριν ολοκληρώσουμε την αναφορά μας στις ανελίξεις Γάμμα, αξίζει να σημειώσουμε πως σε πολλές περιπτώσεις οι ανελίξεις Γάμμα προσδιορίζονται βάσει της μέσης τιμής και της διακυμανσής τους:

$$E(X_t) = \alpha / \beta \quad \text{και} \quad \text{Var}(X_t) = \alpha / \beta^2,$$

όπου X_t μια ανέλιξη Γάμμα με παραμέτρους α, β . Συνεπώς, εάν αναφερθούμε στην ανέλιξη Γάμμα με μέση τιμή μ_G και διακύμανση σ_G^2 , ουσιαστικά θα αναφερόμαστε στην:

$$X_G(t; \mu_G, \sigma_G^2) = X_G(t; \alpha, \beta) \quad \text{με} \quad \alpha = \mu_G^2 / \sigma_G^2 \quad \text{και} \quad \beta = \mu_G / \sigma_G^2.$$

Ανελίξεις Variance Gamma

Οι ανελίξεις Variance Gamma ανήκουν στην κατηγορία των ανελίξεων που κινούνται αποκλειστικά με άλματα. Συγκεκριμένα, αποτελούν ανελίξεις άπειρης δραστηριότητας με πεπερασμένη κύμανση. Μάλιστα, όπως αναφέρουν οι Ribeiro & Webber (2004), η χαρακτηριστική συνάρτηση, το μέτρο Lévy και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας ανέλιξης Variance Gamma με παραμέτρους μ, σ, σ_G^2 , δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_{VG}(z; \mu, \sigma, \sigma_G^2) = \left(1 + \left(z^2 \sigma^2 \sigma_G^2 / 2\right) - iz\mu\sigma_G^2\right)^{-t/\sigma_G^2},$$

$$v_{VG}(x; \mu, \sigma, \sigma_G^2) = \frac{\exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}\right)}{\sigma_G^2 |x|} \exp\left(-\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\sigma_G^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}} |x|\right),$$

$$f_{VG}(x; \mu, \sigma, \sigma_G^2) = \frac{2 \exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}\right)}{\sigma_G^{2t/v} \sqrt{2\pi} \sigma \Gamma\left(\frac{t}{\sigma_G^2}\right)} \left(\frac{x^2}{\frac{2\sigma^2}{\sigma_G^2} + \mu^2}\right)^{\frac{t}{2\sigma_G^2} - \frac{1}{4}} K_{\frac{t}{\sigma_G^2} - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\sigma_G^2} + \mu^2\right)}\right)$$

και $K_{\cdot}(\cdot)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερης τάξης.

Οι ανελίξεις Variance Gamma προκύπτουν ως αποτέλεσμα της χρονικής μεταβολής μιας κίνησης Brown μέσω μιας Subordinator ανελίξης Lévy, συγκεκριμένα μιας ανελίξης Γάμμα.

Έστω λοιπόν $B_t(t; \mu, \sigma^2) = \mu t + \sigma W_t$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown με τάση μ και μεταβλητότητα σ^2 . Έστω επίσης $S_t(t; 1, \sigma_G^2)$ (ή $S_t(t; \sigma_G^2)$) μια ανελίξη Γάμμα με μέση τιμή $\mu_G = 1$ και διακύμανση σ_G^2 . Τότε η ανελίξη $X_t = X_{VG}(t; \mu, \sigma^2, \sigma_G^2) = B(S(t; \sigma_G^2); \mu, \sigma^2)$ αποτελεί μια ανελίξη Variance Gamma με παραμέτρους $\mu, \sigma^2, \sigma_G^2$.

Αλγόριθμος 3.2.3 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής Variance Gamma)

Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την κατανομή Variance Gamma με παραμέτρους $\mu, \sigma^2, \sigma_G^2$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. S_j από την κατανομή προσauξήσεων $\Gamma(dt/\sigma_G^2, 1)$.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. N_j από την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$.
- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. X_j από την κατανομή Variance Gamma με παραμέτρους μ, σ, σ_G^2 , ως $X_j = \sigma N_j \sqrt{S_j} + \mu S_j, j \in \{1, \dots, n\}$.

Μια εναλλακτική μέθοδος, βασίζεται στην κατασκευή των προσauξήσεων μιας ανελίξης Variance Gamma ως διαφορά δυο ανελίξεων Γάμμα. Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας ανελίξης Variance Gamma $X(t; \mu, \sigma, \sigma_G^2)$, τότε:

$$X_j(\mu, \sigma^2, \sigma_G^2) = S_j(\mu_{G,+}, \sigma_{G,+}^2) - S_j(\mu_{G,-}, \sigma_{G,-}^2)$$

όπου $\mu_{G,\pm} = \left(\sqrt{\mu^2 + (2\sigma^2/\sigma_G^2)} \pm \mu\right)/2$ και $\sigma_{G,\pm}^2 = \mu_{G,\pm}^2 \sigma_G^2$

Αλγόριθμος 3.2.4 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής Variance Gamma)

Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την κατανομή Variance Gamma με παραμέτρους μ , σ , σ_s , θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 2^ο:** Υπολογίζουμε τις τιμές των $\mu_{G,\pm}$ και $\sigma_{G,\pm}^2$ σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς $S_j(\mu_{G,+}, \sigma_{G,+}^2)$, $S_j(\mu_{G,-}, \sigma_{G,-}^2)$, από τις κατανομές $\Gamma(dt(\mu_{G,+}^2 / \sigma_{G,+}^2), \sigma_{G,+}^2 / \mu_{G,+})$ και $\Gamma(dt(\mu_{G,-}^2 / \sigma_{G,-}^2), \sigma_{G,-}^2 / \mu_{G,-})$ αντίστοιχα.
- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς X_j από την κατανομή Variance Gamma με παραμέτρους μ , σ^2 , σ_s^2 , ως:

$$X_j(\mu, \sigma^2, \sigma_s^2) = S_j(\mu_{G,+}, \sigma_{G,+}^2) - S_j(\mu_{G,-}, \sigma_{G,-}^2), \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

Συνεπώς, δεδομένων των παραπάνω αλγορίθμων, προκειμένου να προσομοιώσουμε το διακριτοποιημένο μονοπάτι μιας ανέλιξη Variance Gamma $X_{VG}(t; \mu, \sigma^2, \sigma_s^2)$, αρκεί να υπολογίζουμε για κάθε χρονική στιγμή t_k την τιμή της ανέλιξης ως:

$$X_{VG}(t_k) = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k \in \{0, \dots, n\} \quad \text{και} \quad X(t_0) = 0.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με τους παραπάνω αλγόριθμους, παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Fu et al. (2007, Part I, §2.1), Korn et al. (2010, §7.3.3) και Schoutens (2003, §8.4.2).

Ανελίξεις Inverse Gaussian

Οι ανελίξεις Inverse Gaussian, όπως και οι ανελίξεις Γάμμα, ανήκουν στην οικογένεια των Subordinator ανελίξεων Lévy και κατά συνέπεια είναι σχεδόν βέβαια μη φθίνουσες, ενώ κινούνται αποκλειστικά με άλματα που ακολουθούν την Inverse Gaussian κατανομή. Η χαρακτηριστική συνάρτηση και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Inverse Gaussian κατανομής, με μέση τιμή μ και παράμετρο σχήματος λ , ορίζονται ως:

$$\Phi_{IG}(z; \mu, \lambda) = e^{\frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2iz\mu^2}{\lambda}} \right)} \quad \text{και} \quad f_{IG}(x; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2x\mu^2}} \quad \forall x > 0.$$

Παρόλα αυτά, στην βιβλιογραφία των ανελιξεων Lévy, η Inverse Gaussian κατανομή συναντάται συνήθως υπό την παραμετροποίηση Barndorff-Nielsen, όπου $\mu = \delta/\gamma$ και $\lambda = \delta^2$. Σύμφωνα με τον Schoutens (2003, §5.3.4), η χαρακτηριστική συνάρτηση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η χαρακτηριστική τριπλέτα μιας ανελιξης Inverse Gaussian με μέση τιμή μ και παράμετρο σχήματος λ , υπό την παραμετροποίηση Barndorff-Nielsen, δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_{IG}(z; \delta, \gamma) = e^{-\delta t(\sqrt{\gamma^2 - 2iz - \gamma})}, \quad f_{IG}(x; \delta, \gamma) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-x\gamma t} e^{-(\delta^2 t^2 x^{-1} + \gamma^2 x)/2} \quad \forall x > 0,$$

$$\text{και } (\gamma_{IG}, \mathbf{A}_{IG}, \mathbf{v}_{IG}) = \left(\frac{\delta}{\gamma} (2N(\gamma) - 1), 0, \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-x\gamma^2/2} \mathbf{1}_{x>0} \right),$$

όπου $N(*)$ η τιμή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Προτού προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του αλγορίθμου παραγωγής τυχαίων αριθμών από την Inverse Gaussian κατανομή, αξίζει να αναφερθούμε σε δύο σημαντικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Inverse Gaussian κατανομή. Συγκεκριμένα:

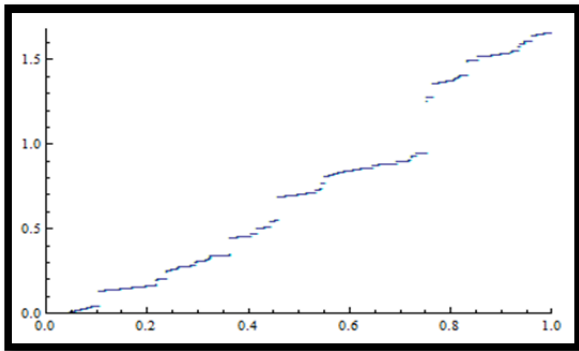
- ✓ Δοθείσης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim IG(\mu, \lambda)$, η τυχαία μεταβλητή $cX \sim IG(c\mu, c\lambda) \quad \forall c > 0$. Ανάλογα, υπό την παραμετροποίηση Barndorff-Nielsen, εφόσον η $X \sim IG(\delta, \gamma)$, τότε η $cX \sim IG(\delta c^{1/2}, \gamma c^{-1/2}) \quad \forall c > 0$.
- ✓ Δοθειςών n το πλήθος τυχαίων μεταβλητών $X_i \sim IG(\mu, \lambda)$, το άθροισμα αυτών $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim IG(n\mu, n\lambda)$. Ανάλογα, υπό την παραμετροποίηση Barndorff-Nielsen, εφόσον οι $X_i \sim IG(\delta, \gamma)$, τότε το άθροισμα $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim IG(n\delta, \gamma)$.

Αλγόριθμος 3.2.5 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής Inverse Gaussian)

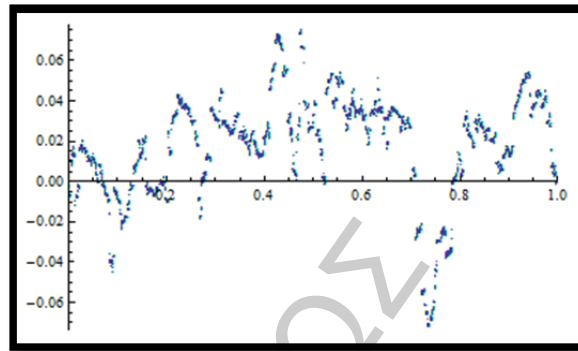
Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την Inverse Gaussian κατανομή με μέση τιμή μ και παράμετρο κλίμακας λ , θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. N από την τυπική κανονική κατανομή $N[0,1]$.
- **Βήμα 2^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή: $y = \mu + (\mu^2 N^2 / 2\lambda) - (\mu / 2\lambda) (4\mu\lambda N^2 + \mu^2 N^4)^{1/2}$.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$.
- **Βήμα 4^ο:** Ελέγχουμε εάν ο U είναι μικρότερος ή ίσος από $U \leq \mu / (y + \mu)$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, ο παραχθέντας τ.α από την Inverse Gaussian κατανομή είναι ο y , διαφορετικά είναι ο μ^2 / y .

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.2).



Σχήμα 3.7: Μονοπάτι Ανέλιξης
Inverse Gaussian,
 $X_{IG}(t; \mu=2, \lambda=30)$.



Σχήμα 3.8: Μονοπάτι Ανέλιξης
Normal Inverse Gaussian,
 $X_{NIG}(t; \alpha=40, \beta=-8, \delta=1, \mu=0)$.

Δεδομένου του παραπάνω αλγόριθμου, προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη $X_{IG}(t; \mu, \lambda)$, αρκεί να διακριτοποιήσουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα μεγέθους $dt = T/n$ και να παράγουμε τις προσαυξήσεις της ανέλιξης ως ανεξάρτητους τ.α. από την κατανομή $IG(\mu dt, \lambda dt^2)$, ή εναλλακτικά την $IG(\delta dt, \gamma)$.

Ανελίξεις Normal Inverse Gaussian

Σύμφωνα με τον Rydberg (1997) και τους Asmussen & Glynn (2007, §XII.1α), η χαρακτηριστική συνάρτηση και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Normal Inverse Gaussian κατανομής, με παραμέτρους $\alpha, \beta, \delta, \mu$, ορίζονται ως:

$$\Phi_{NIG}(z; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \exp\left(iz\mu - \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iz)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\right)$$

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\delta\alpha}{\pi} \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right)$$

όπου $\alpha, \delta > 0, \beta \in (-\alpha, \alpha), \mu \in \mathbb{R}$ και $K_1(\cdot)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2^{ης} τάξης. Η μ αποτελεί την παράμετρο θέσης, η δ την παράμετρο κλίμακας, η β την παράμετρο συμμετρίας και η α την παράμετρο που ελέγχει την μορφή των ουρών της κατανομής.

Σύμφωνα με τον Schoutens (2003, §5.3.8), η χαρακτηριστική τριπλέτα μιας ανέλιξης Normal Inverse Gaussian, με παραμέτρους α, β, δ , ορίζεται ως:

$$(\gamma_{NIG}, \mathbf{A}_{NIG}, \mathbf{v}_{NIG}) = \left((2\alpha\delta/\pi) \int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\alpha|x|) dx, 0, (K_1(\alpha|x|)e^{\beta x} \alpha \delta) / (\pi|x|) \right)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Inverse Gaussian ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- ✓ Δοθείσης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $cX \sim \text{NIG}(\alpha c^{-1}, \beta c^{-1}, \delta c, \mu c) \quad \forall c > 0$.
- ✓ Δοθειςών δύο τυχαίων μεταβλητών $X_1 \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1)$, $X_2 \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X_1 * X_2 \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$.

Οι ανεπίξεις Normal Inverse Gaussian αποτελούν ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα ανεπίξεων Lévy που προκύπτουν μέσω της Subordination μεθόδου. Χρησιμοποιώντας ως Subordinator, την ανέλιξη Inverse Gaussian, μπορούμε να παράγουμε τ.α. από την Normal Inverse Gaussian κατανομή.

Συγκεκριμένα, έστω W_t μια μονοδιάστατη ανέλιξη Wiener. Έστω επίσης $S_{IG}(t; \delta_{IG}, \gamma_{IG})$ μια ανέλιξη Inverse Gaussian, υπό την παραμετροποίηση Barndorff-Nielsen, όπου $\delta_{IG} = 1$ και $\gamma_{IG} = \delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$. Τότε η ανέλιξη $X_t = X_{\text{NIG}}(t; \alpha, \beta, \delta) = \beta \delta^2 S_{IG} + \delta W(S_{IG})$, αποτελεί μια ανέλιξη Normal Inverse Gaussian με παραμέτρους α, β , και δ .

Αλγόριθμος 3.2.6 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής Normal Inverse Gaussian)

Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την κατανομή Normal Inverse Gaussian με παραμέτρους α, β, δ , θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t = 0$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. S_j από την κατανομή προσανξήσεων $\text{IG}(\delta_{IG} dt, \gamma_{IG}) = \text{IG}(dt, \delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})$.
- **Βήμα 3^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. W_j από την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$.
- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε n το πλήθος ανεξάρτητους τ.α. X_j από την κατανομή Normal Inverse Gaussian με παραμέτρους α, β, δ , ως:

$$X_j = \beta \delta^2 S_j + \delta S_j^{1/2} W_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Με τον αλγόριθμο που μόλις παρουσιάσαμε, ουσιαστικά προσομοιώσαμε τ.α. από την $X_{\text{NIG}}(t; \alpha, \beta, \delta, \mu)$, έχοντας αναθέσει σιωπηρά στην μ την τιμή μηδέν. Η εν λόγω πρακτική, είναι συνήθης στην βιβλιογραφία των ανεπίξεων Lévy με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά καθώς η τιμή της μ δεν επηρεάζει την εκτίμηση της αξίας των παραγώγων χρηματιστηριακών προϊόντων.

Πρόσθετα, αξίζει να παρατηρήσουμε το γεγονός ότι η Inverse Gaussian ανέλιξη που θα έπρεπε να προσομοιάσουμε για την κατασκευή της $X_{NIG}(t; \alpha, \beta, \delta)$, βάσει της παραμετροποίησης μέσω των μ, λ , θα ήταν η $IG(\mu_{IG} dt, \lambda_{IG} dt^2) = IG(dt / (\delta (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}), dt^2)$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Schoutens (2003, §5.3.8).

Ανελίξεις α -Stable

Οι ανελίξεις α -Stable κατέχουν σημαντική θέση στην θεωρία των ανελίξεων Lévy, τόσο λόγω των ιδιοτήτων που εμφανίζουν, όσο και λόγω του πλήθους των εφαρμογών τους.

Ορισμός 3.2.1 Έστω $n (\geq 2)$ ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $X_i \forall i \in [1, n]$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ισόνομες με την τυχαία μεταβλητή X . Εάν:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = n^{1/\alpha} X + \mu(n - n^{1/\alpha}), \text{ για } \alpha \neq 1$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = n^{1/\alpha} X + \frac{2}{\pi} \sigma \beta n \log(n), \text{ για } \alpha = 1$$

τότε η X καλείται α -Stable τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί την α -Stable κατανομή με παραμέτρους σ, β, μ .

Σύμφωνα με τους Poirot & Tankov (2006), η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας ανέλιξης α -Stable (S_α) με παράμετρο σταθερότητας $\alpha (\in (0, 2])$, παράμετρο κλίμακας $\sigma (\geq 0)$, παράμετρο ασυμμετρίας $\beta (\in [-1, 1])$ και παράμετρο θέσης $\mu (\in \mathbb{R})$, ορίζεται ως:

$$\Phi_{S_\alpha}(z; \sigma, \beta, \mu) = \exp\left(iz\mu t - t\sigma^\alpha |z|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(z) \tan(\pi\alpha/2))\right), \text{ για } \alpha \neq 1$$

$$\Phi_{S_\alpha}(z; \sigma, \beta, \mu) = \exp\left(iz\mu t - t\sigma |z| \left(1 - i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(z) \log(|z|)\right)\right), \text{ για } \alpha = 1$$

ενώ έχει μέτρο Lévy της μορφής:

$$v_{S_\alpha}(x; A, B) = \frac{A}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{B}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}$$

Στην περίπτωση που η $\alpha < 2$, η παραμετροποίηση μέσω των A, B , συνδέεται με την παραμετροποίηση μέσω των σ, β, μ , ως εξής:

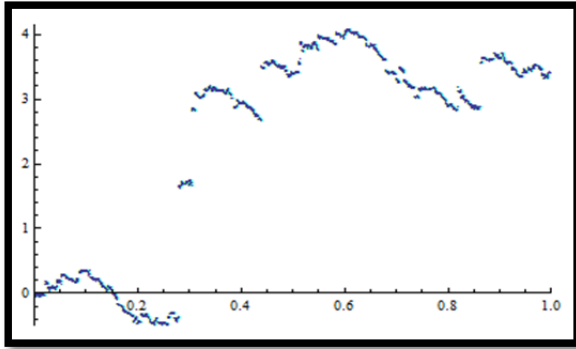
$$s = [-(A+B)\Gamma(-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)]^{1/\alpha}, \text{ για } \alpha \neq 1$$

$$\sigma = \pi(A+B)/2, \text{ για } \alpha = 1$$

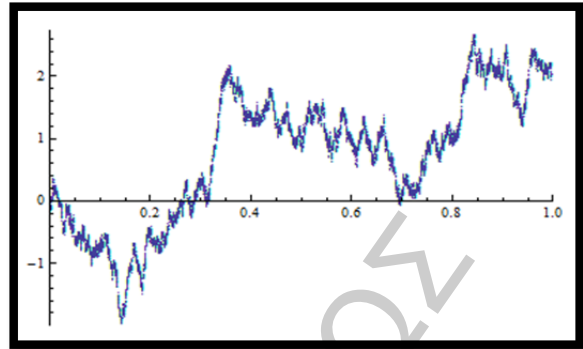
$$\text{και } \beta = (A-B)/(A+B)$$

Ενώ επιπροσθέτως, όταν η $\alpha \neq 1$ και η γ εκφράζει το πρώτο στοιχείο της χαρακτηριστικής τριπλέτας, υπό την συνήθη συνάρτηση αποκοπής $h(x) = x1_{|x|\leq 1}$, τότε:

$$\mu = \gamma + ((B-A)/(1-\alpha))$$



Σχήμα 3.9: Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 1.3, \sigma = 2, \beta = 0.3, \mu = 1)$.



Σχήμα 3.10: Μονοπάτι Ανέλιξης α -Stable,
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 2, \sigma = 2, \beta = 0.3, \mu = 1)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της α -Stable κατανομής δεν είναι εν γένει γνωστή. Παρόλα αυτά, έχουμε στην διάθεση μας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τριών συγκεκριμένων κατανομών α -Stable:

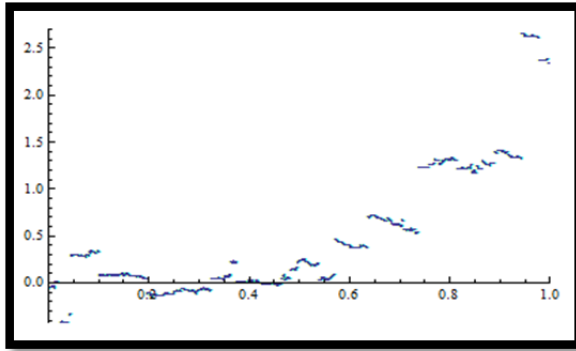
- ✓ Η σ.π.π. της $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$, ταυτίζεται με την σ.π.π. της κατανομής Lévy με παράμετρο κλίμακας σ και παράμετρο θέσης μ .
- ✓ Η σ.π.π. της $S_1(\sigma, 0, \mu)$, ταυτίζεται με την σ.π.π. της κατανομής Cauchy με παράμετρο κλίμακας σ και παράμετρο θέσης μ .
- ✓ Η σ.π.π. της $S_2(\sigma, \beta, \mu)$, ταυτίζεται με την σ.π.π. της κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ και διακύμανση $2\sigma^2$. Η παράμετρος ασυμμετρίας β δεν έχει κάποια επίδραση και συνήθως λαμβάνεται αυθαίρετα ίση με το μηδέν.

Ορισμένες από τις ιδιότητες που διαθέτουν οι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την α -Stable κατανομή, είναι οι εξής:

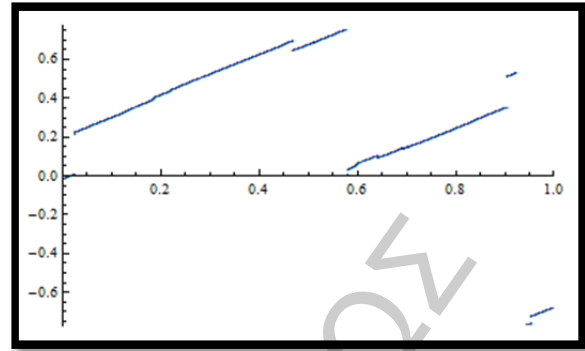
- ✓ Δοθείσης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ και ενός πραγματικού αριθμού c , τότε η τυχαία μεταβλητή $X + c \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + c)$.
- ✓ Δοθείσης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ και ενός πραγματικού αριθμού c , τότε η τυχαία μεταβλητή

$$cX \sim S_\alpha(|c|\sigma, \text{sgn}(c)\beta, c\mu) \text{ για } \alpha \neq 1$$

$$cX \sim S_\alpha\left(|c|\sigma, \text{sgn}(c)\beta, c\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta c \log(c)\right) \text{ για } \alpha = 1$$



Σχήμα 3.11: Μονοπάτι Ανέλιξης
 α -Stable,
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 1, \sigma = 2, \beta = 0.3, \mu = 1)$.



Σχήμα 3.12: Μονοπάτι Ανέλιξης
 α -Stable,
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 1/2, \sigma = 2, \beta = 0.3, \mu = 1)$.

- ✓ Δοθειςών δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2 , τέτοιων ώστε $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Τότε η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ με:

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Συνεπώς, προκειμένου να προσομοιώσουμε μια τυχαία μεταβλητή από την $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, αρκεί να μπορούμε να προσομοιώσουμε μια τυχαία μεταβλητή X από την $S_\alpha(1, \beta, 0)$, καθώς:

$$\sigma X + \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \quad \text{για } \alpha \neq 1$$

$$\sigma X + (2/\pi)\beta\sigma \log(\sigma) + \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \quad \text{για } \alpha = 1$$

Αλγόριθμος 3.2.7 (Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής α -Stable) Προκειμένου να παράγουμε τ.α. από την κατανομή α -Stable με παραμέτρους $\alpha, \sigma, \beta, \mu$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

Για $\alpha \neq 1$:

- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. E από την κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U από την ομοιόμορφη κατανομή $U[-\pi/2, \pi/2]$.
- **Βήμα 3^ο:** Αναθέτουμε στην F_1 την τιμή: $F_1 = \arctan(\beta \tan(\pi\alpha / 2)) / \alpha$.
- **Βήμα 4^ο:** Αναθέτουμε στην F_2 την τιμή:

$$F_2 = (1 + \beta^2 (\tan(\pi\alpha / 2))^2)^{1/2\alpha}, \quad \text{και προχωράμε στο επόμενο βήμα.}$$

- **Βήμα 5^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή:

$$y = F_2 \frac{\sin(\alpha(U + F_1))}{\cos(U)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(U - \alpha(U + F_1))}{E} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad \text{και προχωράμε στο επόμενο βήμα.}$$

- **Βήμα 6^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. X από την $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ως: $X = \sigma y + \mu$.

Για $\alpha = 1$:

- **Βήμα 1^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. E από την κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 2^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U από την ομοιόμορφη κατανομή $U[-\pi/2, \pi/2]$.
- **Βήμα 3^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή:

$$y = \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \beta U \right) \tan(U) \right) - \left(\beta \log \left(\frac{(\pi/2)E \cos(U)}{(\pi/2) + \beta U} \right) \right), \text{ και προχωράμε στο 4^ο Βήμα.}$$

- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. X από την $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ως:

$$X = \sigma y + (2/\pi) \beta \sigma \text{Log}(\sigma) + \mu.$$

Συνεπώς, δεδομένου του παραπάνω αλγόριθμου, προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη $X_{S_\alpha}(t; \sigma, \beta, \mu)$, αρκεί να διακριτοποιήσουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα μεγέθους $dt = T/n$ και να παράγουμε τις προσαυξήσεις της ανέλιξης ως ανεξάρτητους τ.α. από την κατανομή $S_\alpha(\sigma(dt)^{1/\alpha}, \beta, \mu dt)$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, παραπέμπουμε στη τεχνική αναφορά των Olivares & Seco (2003).

(β) Μέθοδος Προσέγγισης Poisson και Gaussian

Όπως αναφέραμε στο ξεκίνημα της παρούσας παραγράφου, οι ανελιξίες Lévy άπειρης δραστηριότητας με τις οποίες θα ασχοληθούμε, είναι της μορφής:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(3)} + X_t^{(4)},$$
$$X_t^{(1)} = \gamma t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s, \quad X_t^{(4)} = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta \tilde{X}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s - t \int_{|x| < \varepsilon} x \nu(dx)$$

$$\text{όπου } \gamma \in \mathbb{R}^d, \quad \nu(\{0\}) = 0 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

Δεδομένου ότι η σύνθεση των ανελιξεων $\{X_t^{(1)}, t \in T\}$ και $\{X_t^{(3)}, t \in T\}$ αποτελεί μια σύνθετη ανέλιξη Poisson με τάση γ και μέτρο Levy $\nu^\varepsilon(dx)$, το οποίο εκφράζει τον περιορισμό του μέτρου $\nu(dx)$ στα $|x| > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), μπορεί εύκολα να προσομοιωθεί μέσω των Αλγορίθμων 3.1.2 και 3.1.3. Συνεπώς, το πρόβλημα προσομοίωσης της $\{X_t, t \in T\}$ ανάγεται στο πρόβλημα διαχείρισης της ανέλιξης $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$, που εκφράζει την συνολική συνεισφορά των αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$.

Μια απλή μέθοδος βασίζεται στο σκεπτικό επιλογής $\varepsilon (> 0)$ τόσο μικρού ώστε η συνεισφορά της $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ να θεωρείται αμελητέα, και να μπορεί να παραληφθεί στην

προσπάθεια προσέγγισης της $\{X_t, t \in T\}$. Ουσιαστικά, σύμφωνα με την μέθοδο αυτή θεωρούμε πως η $\{X_t, t \in T\}$:

$$X_t \approx X_t^{(1)} + X_t^{(3)}$$

και κατά συνέπεια μπορούμε να την προσεγγίσουμε μέσω μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση. Η συγκεκριμένη μέθοδος αποτυγχάνει στην περίπτωση όπου το πλήθος των αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$ είναι «μεγάλο», καθώς θα μας οδηγούσε στον υπολογισμό ενός πολύ μεγάλου αριθμού αλμάτων για την λήψη μιας ικανοποιητικής εκτίμησης της $\{X_t, t \in T\}$.

Μια εναλλακτική μέθοδος, η οποία βρίσκει εφαρμογή στην ειδική περίπτωση των ανελιξεων Lévy άπειρης δραστηριότητας με πεπερασμένη κύμανση:

$$\int_{|x| < \varepsilon} |x| \nu(dx) < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

δηλαδή στην περίπτωση όπου η $\{X_t, t \in T\}$ λαμβάνει την μορφή:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(3)} + X_t^{(4)},$$

$$X_t^{(1)} = \gamma^* t = \left(\gamma - \int_{|\Delta X_s| < \varepsilon} x \nu(dx) \right) t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\substack{|\Delta X_s| \geq \varepsilon \\ 0 \leq s \leq t}} \Delta X_s, \quad X_t^{(4)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\substack{|\Delta X_s| < \varepsilon \\ 0 \leq s \leq t}} \Delta X_s$$

$$\text{όπου } \gamma \in \mathbb{R}^d, \quad \nu(\{0\}) = 0 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

βασίζεται στην αντικατάσταση της $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ με την αναμενόμενη τιμή της.

Ακολουθώντας αυτή την εναλλακτική μέθοδο, ουσιαστικά καταλήγουμε εκ νέου στην προσέγγιση της $\{X_t, t \in T\}$ μέσω μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση. Δυστυχώς και αυτή η μέθοδος, αν και προσφέρει πολύ ικανοποιητικές εκτιμήσεις της $\{X_t, t \in T\}$, αποτυγχάνει στην περίπτωση ύπαρξης «πολύ μεγάλου» πλήθους αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$.

Μια μέθοδος που μας δίνει λύση στην διαχείριση της ανέλιξης $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ όταν το πλήθος των αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$ είναι «πολύ μεγάλο», και θα μπορούσε να λειτουργήσει συμπληρωματικά στην προηγούμενη μέθοδο, βασίζεται στο γεγονός πως:

$$\left\{ \left(X_t^{(4)} - \mu_\varepsilon t \right) / \sigma_\varepsilon \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{B(t)\}_{t \geq 0}$$

$$\text{εφόσον } \frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0$$

όπου μ_ε η μέση τιμή του αθροίσματος των αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$ και σ_ε η μεταβλητότητα τους.

Ουσιαστικά, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη μέθοδο, στην προσέγγιση της $\{X_t, t \in T\}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ανέλιξη $\{X_t^{(4)}, t \in T\}$ με μια κίνηση Brown. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που η ανέλιξη Lévy είναι:

- Πεπερασμένης κύμανσης, η κίνηση Brown έχει τάση μ_ε , μεταβλητότητα σ_ε και η προσέγγιση της $\{X_t, t \in T\}$ έχει την μορφή:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(3)} + \mu_\varepsilon t + \sigma_\varepsilon W_t,$$

$$X_t^{(1)} = \gamma t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{| \Delta X_s | \geq \varepsilon} \Delta X_s$$

$$\text{όπου } \gamma \in \mathbb{R}^d, \nu(\{0\}) = 0 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

- Άπειρης κύμανσης, η κίνηση Brown έχει τάση $\mu_\varepsilon = 0$, μεταβλητότητα σ_ε και η προσέγγιση της $\{X_t, t \in T\}$ έχει την μορφή:

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(3)} + \sigma_\varepsilon W_t,$$

$$X_t^{(1)} = \gamma t, \quad X_t^{(3)} = \sum_{0 \leq s \leq t}^{| \Delta X_s | \geq \varepsilon} \Delta X_s$$

$$\text{όπου } \gamma \in \mathbb{R}^d, \nu(\{0\}) = 0 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge \varepsilon) \nu(dx) < \infty$$

Το γεγονός ότι η τελευταία μέθοδος επιχειρεί την προσέγγιση της $\{X_t, t \in T\}$ μέσω της σύνθεσης μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson με τάση και μιας κίνησης Brown, την καθιστά πιο περίπλοκη των προηγούμενων και κατά συνέπεια αναμένουμε να έχει και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την συγκεκριμένη μέθοδο, παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Asmussen & Glynn (2007, §XII.2), Cont & Tankov (2004, §6.3 & §6.4) και Rosinski (2007).

Στην συνέχεια, παραθέτουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου που αφορά την προσομοίωση μιας Tempered Stable Subordinator ανέλιξης.

Ανελίξεις Tempered Stable και Generalized Tempered Stable

Οι Tempered Stable ανελίξεις, συνδέονται άμεσα με τις α -Stable ανελίξεις που μελετήσαμε νωρίτερα. Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας μονοδιάστατης ανέλιξης α -Stable, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μονοδιάστατη Tempered Stable ανέλιξη, πολλαπλασιάζοντας το μέτρο Lévy της α -Stable ανέλιξης με ένα εκθετικό το οποίο φθίνει σε καθένα από τους δύο ημιάξονες των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Cont & Tankov (2004, §4.5) το μέτρο Lévy των ανελίξεων Tempered Stable θα είναι της μορφής:

$$\nu_{TS_\alpha}(x; c_+, \lambda_+, c_-, \lambda_-) = \frac{c_+ e^{-\lambda_+ x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{c_- e^{-\lambda_- x}}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}, \quad \text{με } c_\pm > 0, \lambda_\pm > 0 \text{ και } \alpha < 2.$$

Άμεσα παρατηρούμε το γεγονός ότι οι Tempered Stable ανελίξεις, σε αντίθεση με τις ανελίξεις α -Stable, δεν περιορίζονται για $\alpha > 0$. Μάλιστα, εάν επιτρέψουμε η ανελίξη να λαμβάνει διαφορετικές τιμές α_+ , α_- στις δύο πλευρές του άξονα των πραγματικών αριθμών, οδηγούμαστε στις λεγόμενες Generalized Tempered Stable ανελίξεις, οι οποίες διαθέτουν μέτρο Lévy της μορφής:

$$\nu_{GTS}(x; \alpha_+, c_+, \lambda_+, \alpha_-, c_-, \lambda_-) = \frac{c_+ e^{-\lambda_+ x}}{x^{\alpha_+ + 1}} 1_{x > 0} + \frac{c_- e^{-\lambda_- x}}{|x|^{\alpha_- + 1}} 1_{x < 0}, \quad \text{με } c_{\pm} > 0, \lambda_{\pm} > 0 \text{ και } \alpha_{\pm} < 2.$$

και χαρακτηριστικό εκθετικό:

➤ Για $\alpha_{\pm} \neq 0, \alpha_{\pm} \neq 1$:

$$\Psi_{GTS}(z; \alpha_{\pm}, c_{\pm}, \lambda_{\pm}) = \Gamma(-\alpha_+) \lambda_+^{\alpha_+} c_+ \left\{ \left(1 - (iz/\lambda_+)\right)^{\alpha_+} - 1 + (iz\alpha_+/\lambda_+)\right\} \\ + \Gamma(-\alpha_-) \lambda_-^{\alpha_-} c_- \left\{ \left(1 - (iz/\lambda_-)\right)^{\alpha_-} - 1 + (iz\alpha_-/\lambda_-)\right\}.$$

➤ Για $\alpha_+ = \alpha_- = 1$:

$$\Psi_{GTS}(z; \alpha_{\pm}, c_{\pm}, \lambda_{\pm}) = iz(\gamma_c + c_+ + c_-) + c_+(\lambda_+ - iz) \log\left(1 - \frac{iz}{\lambda_+}\right) + c_-(\lambda_- - iz) \log\left(1 - \frac{iz}{\lambda_-}\right).$$

➤ Για $\alpha_+ = \alpha_- = 0$:

$$\Psi_{GTS}(z; \alpha_{\pm}, c_{\pm}, \lambda_{\pm}) = iz\gamma_c - c_+ \left(\frac{iz}{\lambda_+} + \log\left(1 - \frac{iz}{\lambda_+}\right) \right) - c_- \left(\frac{iz}{\lambda_-} + \log\left(1 - \frac{iz}{\lambda_-}\right) \right).$$

Παρατηρούμε ότι οι Generalized Tempered Stable ανελίξεις διαθέτουν συνολικά έξι παραμέτρους, οι οποίες μάλιστα έχουν καθοριστική σημασία για την συμπεριφορά της εκάστοτε ανελίξης. Αξίζει λοιπόν να σταθούμε τόσο στην ερμηνεία τους, όσο και σε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Συγκεκριμένα, οι παράμετροι λ_{\pm} εκφράζουν τον ρυθμό με τον οποίο φθίνουν οι ουρές της κατανομής, οι παράμετροι α_{\pm} περιγράφουν την συμπεριφορά του μέτρου Lévy κοντά στο μηδέν για τα θετικά και τα αρνητικά άλματα, και οι παράμετροι c_{\pm} καθορίζουν τον ρυθμό αφίξεων αλμάτων συγκεκριμένου μεγέθους.

Στην περίπτωση που τα $\alpha_+ < 1, \alpha_- < 1$ και τουλάχιστον ένα εκ των δυο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μηδέν, η Generalized Tempered Stable ανελίξη είναι άπειρης δραστηριότητας αλλά πεπερασμένης κύμανσης, ενώ στην περίπτωση όπου τουλάχιστον ένα εκ των δύο είναι μεγαλύτερο ή ίσο της μονάδας, η ανελίξη μετατρέπεται σε ανελίξη άπειρης κύμανσης.

Οι Generalized Tempered Stable ανελίξεις, για τις οποίες ισχύουν οι $c_+ = c_-$ και $\alpha_+ = \alpha_-$, συναντώνται στην βιβλιογραφία με την ονομασία ανελίξεις CGMY. Σύμφωνα με τον

Schoutens (2003, §5.3.9), η χαρακτηριστική συνάρτηση και η χαρακτηριστική τριπλέτα των ανελιξων CGMY δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_{CGMY}(z; C, G, M, Y) = \exp\left(Ct\Gamma(-Y)\left((M-iz)^Y - M^Y + (G+iz)^Y - G^Y\right)\right),$$

$$(\gamma, A, \nu)_{CGMY} = \left(C\left(\int_0^1 e^{-Mx} x^{-Y} dx - \int_{-1}^0 e^{Gx} |x|^{-Y} dx\right), 0, C\left(\frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} 1_{x>0} + \frac{e^{-Gx}}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0}\right)\right)$$

με $C > 0, G > 0, M > 0, Y < 2$.

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα κατηγορία Generalized Tempered Stable ανελιξων, είναι αυτή των Tempered Stable Subordinators. Όπως κάθε μέλος της οικογένειας των Subordinator ανελιξων Lévy, έτσι και οι Tempered Stable Subordinators ανελιξεις διαθέτουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\gamma \geq 0, \quad A = 0, \quad \nu((-\infty, 0]) = 0, \quad \int_0^\infty (s \wedge \varepsilon) \nu(ds) < \infty,$$

ενώ επιπροσθέτως η παράμετρος $c_- = 0$, καθώς η ανέλιξη διαθέτει αποκλειστικά θετικά άλματα, και η παράμετρος $\alpha_+ \in (0, 1)$. Συνεπώς, το μέτρο Lévy των Tempered Stable Subordinators ανελιξων δίδεται από την

$$\nu(x; \alpha, c, \lambda) = (ce^{-\lambda x} / x^{\alpha+1}) 1_{x>0}.$$

Δεδομένου ότι οι Tempered Stable Subordinators ανελιξεις αποτελούν ανελιξεις άπειρης δραστηριότητας με πεπερασμένη κύμανση, για την προσομοίωσή τους θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που στηρίζεται στην αντικατάσταση των μικρών αλμάτων με την αναμενόμενη τιμή τους.

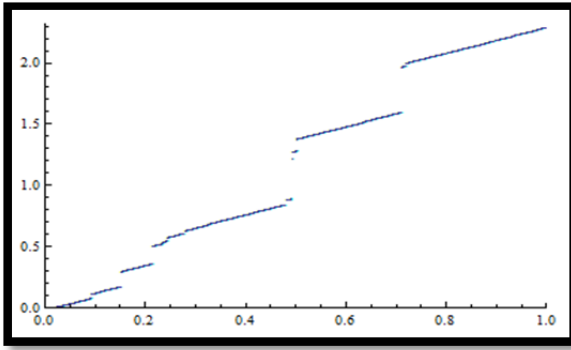
Συγκεκριμένα, στον αλγόριθμο που ακολουθεί θα προσεγγίσουμε την Tempered Stable Subordinator ανέλιξη X_t , μέσω της:

$$X_t \approx X_t^\varepsilon = \gamma^* t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\Delta X_s \geq \varepsilon} + E\left(\sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\Delta X_s < \varepsilon}\right),$$

$$\text{όπου } E\left(\sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\Delta X_s < \varepsilon}\right) = \int_0^\varepsilon x \frac{ce^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} dx.$$

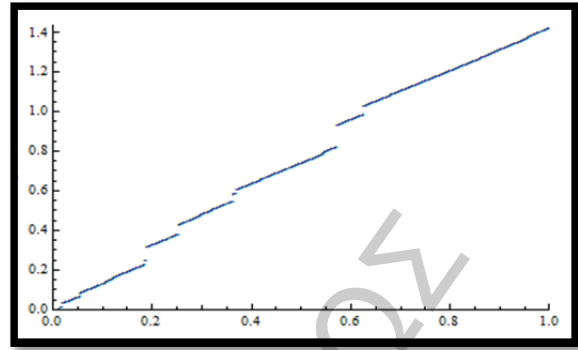
Η χαρακτηριστική τριπλέτα της σύνθετης ανέλιξης Poisson με την οποία θα προσεγγίσουμε την X_t , ορίζεται ως:

$$(\gamma^*, A, \nu)_{X_t^\varepsilon} = \left(\gamma + c \int_0^\varepsilon \frac{e^{-\lambda x}}{x^\alpha} dx, 0, \frac{ce^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x \geq \varepsilon}\right)$$



Σχήμα 3.13: Μονοπάτι

Tempered Stable Subordinator με τάση,
 $X_{TS\alpha}(t; \alpha=0.3, \lambda=0.5, c=1.2, \gamma=1)$.



Σχήμα 3.14: Μονοπάτι

Tempered Stable Subordinator με τάση,
 $X_{TS\alpha}(t; \alpha=0.3, \lambda=1.5, c=1.2, \gamma=1)$.

Επομένως, θα πρέπει να προσομοιώσουμε μιας σύνθετη ανέλιξη Poisson με ένταση $U(\varepsilon)$ και συνάρτηση κατανομής μεγέθους αλμάτων $p(x)$, που δίδονται από τις σχέσεις:

$$U(\varepsilon) = c \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} dx, \quad p(x) = \nu_{X_t^{\varepsilon}}(x) / U(\varepsilon).$$

Συνεπώς, η δυσκολία προσομοίωσης της X_t , ισοδυναμεί πλέον με την δυσκολία παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κατανομή $p(x)$. Προκειμένου να κατασκευάσουμε τ.α. από την $p(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο απόρριψης και το γεγονός ότι:

$$p(x) \leq f(x) \frac{\varepsilon^{-\alpha} e^{-\lambda \varepsilon}}{\alpha U(\varepsilon)}, \quad \text{όπου η σ.π.π. } f(x) = \frac{\alpha \varepsilon^{-\alpha}}{x^{\alpha+1}} 1_{x \geq \varepsilon}.$$

Αλγόριθμος 3.2.8 (Tempered Stable Subordinator Ανέλιξη) Προκειμένου να προσομοιώσουμε μια Tempered Stable Subordinator ανέλιξη με παραμέτρους $\alpha, c, \lambda, \gamma$, θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Ορίζουμε το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας ε .
- **Βήμα 2^ο:** Υπολογίζουμε τη μέση τιμή M_{ε} των αλμάτων τάξης $|\Delta X_s| < \varepsilon$, και τη τάση γ^* .
- **Βήμα 3^ο:** Ορίζουμε τις συναρτήσεις $U(\varepsilon)$, $\nu(x)$ και $f(x)$.
- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. N από την κατανομή $\text{Pois}(tU(\varepsilon))$, που θα εκφράζει τον συνολικό αριθμό αλμάτων της ανέλιξης.
- **Βήμα 5^ο:** Παράγουμε N το πλήθος τ.α. JT_i από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$, που θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων.
- **Βήμα 6^ο:** Διατάσσουμε τους JT_i σε αύξουσα σειρά.
- **Βήμα 7^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $i = 0$.

- **Βήμα 8^ο:** Αυξάνουμε την τιμή του μετρητή i κατά μια μονάδα, $i = i + 1$.
- **Βήμα 9^ο:** Αρχικοποιούμε τις τιμές των μεταβλητών $V = 0, Z = 0$.
- **Βήμα 10^ο:** Παράγουμε τ.α. W, V από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$.
- **Βήμα 11^ο:** Αναθέτουμε στην X την τιμή $X = \varepsilon W^{-1/\alpha}$.
- **Βήμα 12^ο:** Ελέγχουμε εάν η τιμή της $X < 1$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά αναθέτουμε στην Z την τιμή $Z = (f(X) \varepsilon^{-\alpha} e^{-\lambda \varepsilon}) / (v(X) \alpha)$ και προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 13^ο:** Ελέγχουμε εάν το γινόμενο $VZ \leq 1$. Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 10^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 14^ο:** Αναθέτουμε στην JS_i την τιμή $JS_i = X$, που αποτελεί ένα τ.α. από την κατανομή μεγέθους αλμάτων.
- **Βήμα 15^ο:** Ελέγχουμε εάν η τιμή του μετρητή i είναι μικρότερη ή ίση του N . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 8^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 16^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $i = 1$ και της μεταβλητής $sum = 0$.
- **Βήμα 17^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t = 0$.
- **Βήμα 18^ο:** Αυξάνουμε την τιμή της t κατά $dt, t = t + dt$.
- **Βήμα 19^ο:** Ελέγχουμε εάν η τιμή του i είναι μικρότερη ή ίση του N , και εάν η τιμή της t είναι μεγαλύτερη ή ίση της JT_i . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, δηλαδή και οι δύο εκφράσεις είναι αληθείς, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 22^ο Βήμα.
- **Βήμα 20^ο:** Αναθέτουμε στην sum την τιμή $sum = sum + JS_i$.
- **Βήμα 21^ο:** Αυξάνουμε την τιμή του μετρητή i κατά μια μονάδα, $i = i + 1$.
- **Βήμα 22^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή $y = \gamma t + sum + M_\varepsilon$.
- **Βήμα 23^ο:** Αποθηκεύουμε το ζεύγος τιμών (t, y) , που θα εκφράζει την θέση της ανέλιξης X_t την χρονική στιγμή t .
- **Βήμα 24^ο:** Ελέγχουμε εάν η τιμή της t είναι μικρότερη ή ίση της T . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 18^ο Βήμα, διαφορετικά το πρόγραμμα τερματίζει.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως το ολοκλήρωμα της μέσης τιμής των αλμάτων τάξης $|ΔX_s| < \varepsilon$, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την μη πλήρη συνάρτηση Γάμμα, αν και το υπολογιστικό πακέτο Mathematica πραγματοποιεί τον υπολογισμό άμεσα.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον παραπάνω αλγόριθμο, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.3).

(γ) Μέθοδος Προσέγγισης Υπό Μορφή Σειράς

Μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδος προσομοίωσης ανελίξεων Lévy άπειρης δραστηριότητας, βασίζεται στην αναπαράσταση των ανελίξεων Lévy υπό τη μορφή σειρών. Προτού παρουσιάσουμε το θεώρημα στο οποίο στηρίχθηκε η ανάπτυξη της συγκεκριμένης μεθόδου, θα εισαγάγουμε το σκεπτικό της μεθόδου μέσω ενός απλού παραδείγματος, και συγκεκριμένα της έκφρασης μιας Subordinator ανελίξης Lévy υπό τη μορφή σειράς.

Η βασική ιδέα της μεθόδου προέρχεται από μια μέθοδο προσομοίωσης της μη ομογενούς ανελίξης Poisson με ρυθμό $\beta(t)$. Συγκεκριμένα, δεδομένης της ύπαρξης σε κλειστή μορφή των συναρτήσεων:

$$B(t) = \int_0^t \beta(s) ds \quad \forall t < \infty \quad \text{και} \quad B^{-1}(x) = \inf\{t > 0 : B(t) < x\}, \quad x > 0$$

ή τουλάχιστον μιας μεθόδου αρκετά γρήγορης για τον υπολογισμό τους, και των χρόνων $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ πραγματοποίησης των αλμάτων μιας ομογενούς ανελίξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, μπορούμε να παράγουμε τους χρόνους πραγματοποίησης των αλμάτων της μη ομογενούς ανελίξης Poisson ως $B^{-1}(\Gamma_1), B^{-1}(\Gamma_2), \dots$. Μάλιστα, εάν υποθέσουμε πως η συνεισφορά κάθε άλματος στην μη ομογενή ανελίξη Poisson είναι $r(t)$, τότε η συνολική συνεισφορά των αλμάτων θα ορίζεται ως:

$$\sum_{i=1}^{\infty} r(B^{-1}(\Gamma_i))$$

Η σύνδεση της παραπάνω μεθόδου με την προσπάθεια έκφρασης μιας Subordinator ανελίξης Lévy $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$, με πυκνότητα Lévy $n(x) = dn / dx$ ($x > 0$) και μηδενική τάση υπό μορφή σειράς, έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να δούμε την συνολική συνεισφορά των αλμάτων της $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$, δηλαδή την S_1 , ως την συνολική συνεισφορά μιας μη ομογενούς ανελίξης Poisson στο $[0, \infty)$, με ρυθμό $n(x)$ και συνάρτηση συνεισφοράς $r(x) = x$. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της Subordinator ανελίξης Lévy θα έχουμε ότι:

- ✓ Η $n(x)$ θα εκφράζει το ρυθμό εμφάνισης αλμάτων μεγέθους x .
- ✓ Η $B(x)$ θα εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό αλμάτων τάξης μεγέθους μεταξύ $[0, x]$.
- ✓ Η $B^{-1}(x)$ θα εκφράζει την εμφάνιση άλματος μεγέθους x .
- ✓ Η $r(B^{-1}(x))$ θα εκφράζει τη συνεισφορά του άλματος μεγέθους x .

Συνεπώς, δεδομένων των χρόνων $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ ($\Gamma_i < \Gamma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$) πραγματοποίησης των αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τους $B^{-1}(\Gamma_1), B^{-1}(\Gamma_2), \dots$ που θα εξέφραζαν το μικρότερο άλμα, το δεύτερο μικρότερο άλμα, και ούτω καθεξής, της Subordinator ανέλιξης Lévy.

Όμως η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, όπως τουλάχιστον περιγράφηκε έως αυτό το σημείο, δεν είναι εφικτή καθώς οι ανελίξεις Lévy διαθέτουν άπειρο πλήθος αλμάτων μεγέθους ε ($0 < \varepsilon \leq 1$) με άμεση συνέπεια να απειρίζεται το ολοκλήρωμα:

$$B(x) = \int_0^x n(s) ds.$$

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, θα αντιστρέψουμε την ροή του χρόνου έτσι ώστε να κυλάει από το ∞ προς το 0. Με τον τρόπο αυτό, ουσιαστικά οδηγούμαστε στον οπισθοδρομικό αλγόριθμο της παραπάνω μεθόδου. Συγκεκριμένα, ορίζοντας ως:

$$\bar{v}(x) = \int_x^\infty n(s) ds \quad \text{και} \quad \bar{v}^{-1}(\Gamma) = \inf\{x > 0 : \bar{v}(x) < \Gamma\}, \quad \Gamma > 0$$

και δεδομένων των χρόνων $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ ($\Gamma_i < \Gamma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$) πραγματοποίησης των αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεγαλύτερο άλμα της Subordinator ανέλιξης Lévy ως $\bar{v}^{-1}(\Gamma_1)$, το δεύτερο μεγαλύτερο άλμα ως $\bar{v}^{-1}(\Gamma_2)$, και ούτω καθεξής.

Θεώρημα 3.2.1 Έστω $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$ μια Subordinator ανέλιξη Lévy με πυκνότητα Lévy $n(x) = dv / dx$ ($x > 0$) και μηδενική τάση και $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ οι χρόνοι πραγματοποίησης αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό. Τότε:

$$S_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}^{-1}(\Gamma_i)$$

Επιπλέον, εάν οι U_1, U_2, \dots ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$ και είναι ανεξάρτητοι των $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, τότε:

$$\{S_t\}_{t \in [0,1]} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}^{-1}(\Gamma_i) 1_{U_i \leq t} \right\}_{t \in [0,1]}$$

Το παραπάνω θεώρημα που παρουσιάζουν στο σύγγραμμα τους οι Asmussen & Glynn (2007, §XII.4), συνοψίζει το σκεπτικό που θα ακολουθήσουμε για την προσομοίωση υπό μορφή σειράς μιας Subordinator ανέλιξης Lévy, ενώ επιπλέον μας προσφέρει αναλυτική εποπτεία της εξέλιξης του μονοπατιού της ανέλιξης σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,1]$.

Πλέον, προκειμένου να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε μέσω ενός αλγορίθμου τη μέθοδο που περιγράψαμε, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το άπειρο άθροισμα όρων με ένα πεπερασμένο. Αν και θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε εύκολα σε ένα πεπερασμένο άθροισμα περιορίζοντάς το αυθαίρετα στους n πρώτους όρους, η ορθή μέθοδος είναι να επιλέξουμε αυθαίρετα έναν αριθμό τ έτσι ώστε να περιορίσουμε το άθροισμα σε έναν τυχαίο αριθμό $N(\tau)$ όρων με $N(\tau) = \inf\{i: T_i < \tau\}$, κάτι που ισοδυναμεί με την αυθαίρετη επιλογή ενός αριθμού ε τέτοιου ώστε $N(\varepsilon) = \inf\{i: \bar{v}^{-1}(T_i) < \varepsilon\}$.

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μέθοδο περιορισμού του αθροίσματος, ουσιαστικά καταλήγουμε στην προσομοίωση της Subordinator ανέλιξης Lévy αποκόπτοντας τα άλματα τάξης μεγέθους μικρότερης του ε , δηλαδή καταλήγουμε σε μια προσέγγιση ανάλογη της προσέγγισης μέσω μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson.

Αλγόριθμος 3.2.9 (Προσομοίωση Subordinator ανέλιξης) Προκειμένου να προσομοιώσουμε μια Subordinator ανέλιξη Lévy $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναπαράστασης σε σειρά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Ορίζουμε έναν αριθμό τ , που θα εκφράζει το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας, προκειμένου να καθορίσουμε το συνολικό αριθμό όρων της σειράς.
- **Βήμα 2^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή των μετρητών k και sum , που θα εκφράζουν τον συνολικό αριθμό όρων της σειράς που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσέγγιση της $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$, και τον τελευταίο χρόνο εμφάνισης άλματος της ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 3^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή k κατά μια μονάδα, $k = k + 1$.
- **Βήμα 4^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. y από την τυπική εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 5^ο:** Αυξάνουμε την τιμή του μετρητή sum κατά y , $sum = sum + y$.
- **Βήμα 6^ο:** Αναθέτουμε την τιμή του μετρητή sum στο διάνυσμα Γ_k , που θα εκφράζει τους διαδοχικούς χρόνους εμφάνισης αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson.
- **Βήμα 7^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. y από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$ και τον αναθέτουμε στο διάνυσμα U_k .

- **Βήμα 8^ο:** Ελέγχουμε εάν ο μετρητής sum είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού τ . Εάν η απάντηση είναι καταφατική συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά επιστρέφουμε στο 3^ο Βήμα.
- **Βήμα 9^ο:** Το διακριτοποιημένο μονοπάτι της Subordinator ανέλιξης Lévy $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$ που παράγεται είναι το εξής:

$$S(t) = \sum_{j=1}^k \bar{v}^{-1}(\Gamma_j) 1_{U_j \leq t}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον αλγόριθμο, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004, §6.5).

Προκειμένου να βελτιώσουμε την ακρίβεια προσέγγισης της μεθόδου αναπαράστασης των ανελιξεων Lévy υπό μορφή σειρών, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τα άλματα τάξης μεγέθους μικρότερης του ε με μια κίνηση Brown, ανάλογα με την διαδικασία που είχαμε ακολουθήσει και στην μέθοδο προσέγγισης μέσω μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson.

Έχοντας σκιαγραφήσει, μέσα από την προσομοίωση της Subordinator ανέλιξης Lévy, την μέθοδο αναπαράστασης σε σειρά για την προσομοίωση ανελιξεων Lévy, θα παρουσιάσουμε το βασικό θεώρημα, που όπως αναφέρουν οι Cont & Tankov (2004, §6.5) μας επιτρέπει την κατασκευή σειρών που αναπαριστούν ανελιξεις Lévy και αποδεικνύει την σύγκλιση τους.

Θεώρημα 3.2.2 Έστω $\{V_i\}_{i \geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων αριθμών σε ένα μετρήσιμο χώρο S . Υποθέτουμε ότι η $\{V_i\}_{i \geq 1}$ είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ των χρόνων εμφάνισης αλμάτων μιας τυπικής ανέλιξης Poisson. Έστω $\{U_i\}_{i \geq 1}$ μια ακολουθία τυχαίων αριθμών, ομοιόμορφα κατανεμημένων στο $[0,1]$ και ανεξάρτητων από τις $\{V_i\}_{i \geq 1}$ και $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$. Έστω $H: (0, \infty) \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τα ακόλουθα μέτρα στον \mathbb{R}^d :

$$\sigma(r, B) = P(H(r, V_i) \in B), \quad r > 0, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$\nu(B) = \int_0^\infty \sigma(r, B) dr$$

Τέλος, έστω:

$$A(s) = \int_0^s \int_{|x| \leq 1} x \sigma(r, dx) dr, \quad s \geq 0$$

- (i) Εάν το μέτρο ν είναι ένα μέτρο Lévy στον \mathbb{R}^d τέτοιο ώστε:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$$

και το όριο $\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ υπάρχει στον \mathbb{R}^d , τότε η σειρά

$$\sum_{i=1}^\infty H(\Gamma_i, V_i) 1_{U_i \leq t}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σχεδόν βεβαίως στο $t \in [0,1]$ σε μια ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα $(\gamma, 0, \nu)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\Phi_t(u) = \exp\left(t \left(iu\gamma + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \right)\right)$$

(ii) Εάν το μέτρο ν είναι ένα μέτρο Lévy στον \mathbb{R}^d και για κάθε $v \in \mathbb{S}$ η συνάρτηση $r \mapsto |H(r, \nu)|$ είναι φθίνουσα, τότε η σειρά:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (H(\Gamma_i, V_i) 1_{U_i \leq t} - tc_i)$$

συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και ομοιόμορφα στο $t \in [0,1]$ σε μια ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα $(0, 0, \nu)$. Τα c_i είναι σταθερές, που ορίζονται ως $c_i = A(i) - A(i-1)$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την συγκεκριμένη μέθοδο, παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Asmussen & Glynn (2007, §XII.4), Cont & Tankov (2004, §6.5) και Rosinski (2007).

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τρία παραδείγματα προσομοίωσης ανελίξεων Lévy μέσω της αναπαράστασης υπό μορφή σειράς. Συγκεκριμένα προσομοιώνουμε μονοπάτια των ανελίξεων Gamma, Symmetric α -Stable και Symmetric Tempered Stable.

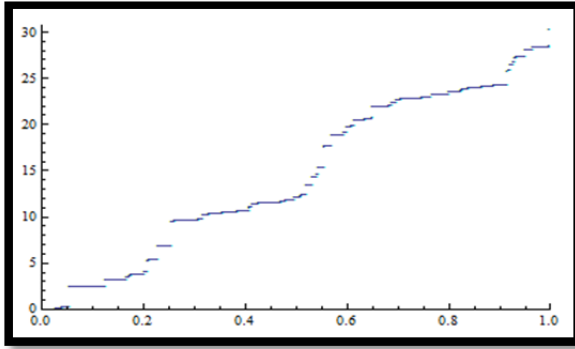
Ανελίξεις Γάμμα

Οι ανελίξεις Γάμμα με παράμετρο σχήματος α και αντίστροφη παράμετρο κλίμακας β , όπως αναφέρουν οι Cont & Tankov (2004, §6.5), μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή σειράς ως:

$$X(t; \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-1} e^{-\Gamma_i/\alpha} V_i 1_{U_i \leq t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

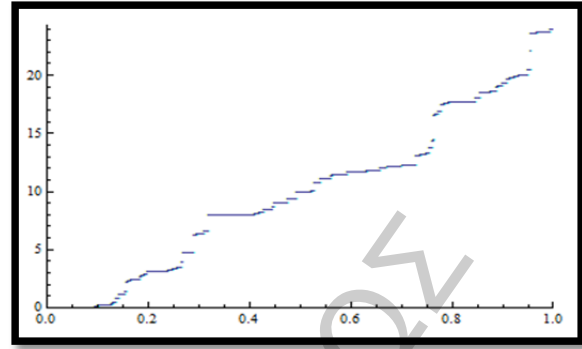
όπου Γ_i οι χρόνοι εμφάνισης αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, U_i ανεξάρτητοι τ.α. από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$ και V_i ανεξάρτητοι τ.α. από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.

Δεδομένης της έκφρασης των ανελίξεων Γάμμα υπό μορφή σειράς, το μόνο που απομένει για να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της ανέλιξης, είναι ο προσδιορισμός του αριθμού τ που θα καθορίσει το πλήθος $N(\tau)$ των όρων που θα συμπεριλάβουμε στην προσέγγισή μας.



Σχήμα 3.15: Μονοπάτι

Ανέλιξης Γάμμα (Series Repr. Method),
 $X_G(t; \alpha = 30, \beta = 1) - (\varepsilon = 10^{-4}, n = 10^4)$.



Σχήμα 3.16: Μονοπάτι

Ανέλιξης Γάμμα (Ran. Walk Ap. Method),
 $X_G(t; \alpha = 30, \beta = 1) - (\varepsilon = 10^{-4}, n = 10^4)$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τ , θα πρέπει να ορίσουμε το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας ε . Δοθέντος λοιπόν του ε , δηλαδή του ελάχιστου μεγέθους των αλμάτων που θα συμπεριληφθούν στην σειρά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή του τ ως εξής:

$$\beta^{-1} e^{-\Gamma_i/\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\Gamma_i/\alpha} < \beta\varepsilon \Leftrightarrow -\Gamma_i/\alpha < \log(\beta\varepsilon) \Leftrightarrow \Gamma_i < -\alpha \log(\beta\varepsilon)$$

$$\tau = -\alpha \log(\beta\varepsilon)$$

Αλγόριθμος 3.2.10 (Ανελιξεις Γάμμα) Προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη Γάμμα $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$, με παράμετρο σχήματος α και αντίστροφη παράμετρο κλίμακας β , χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναπαράστασης σε σειρά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Ορίζουμε το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας ε .
- **Βήμα 2^ο:** Υπολογίζουμε την τιμή της $\tau(\varepsilon)$ ως: $\tau(\varepsilon) = -\alpha \text{Log}(\beta \cdot \varepsilon)$.
- **Βήμα 3^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $k=0$ και της $sum=0$.
- **Βήμα 4^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή k κατά μια μονάδα, $k=k+1$.
- **Βήμα 5^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. E από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 6^ο:** Προσαυξάνουμε την sum κατά E , $sum = sum + E$.
- **Βήμα 7^ο:** Αναθέτουμε στην Γ_k την τιμή sum , $\Gamma_k = sum$.
- **Βήμα 8^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U_k από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$.
- **Βήμα 9^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. V_k από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 10^ο:** Ελέγχουμε εάν η sum είναι μικρότερη της τ . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 4^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 11^ο βήμα.

- **Βήμα 11^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $z=0$.
- **Βήμα 12^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 13^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή z κατά μια μονάδα, $z = z + 1$.
- **Βήμα 14^ο:** Προσαυξάνουμε την t κατά dt , $t = t + dt$.
- **Βήμα 15^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $i=0$ και της $y=0$.
- **Βήμα 16^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή i κατά μια μονάδα, $i = i + 1$.
- **Βήμα 17^ο:** Ελέγχουμε εάν η U_i είναι μεγαλύτερη της t . Εάν η πρόταση είναι αληθής, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά αναθέτουμε στην y την τιμή $y = y + (\beta^{-1} e^{-\Gamma_i/\alpha} V_i)$, και προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 18^ο:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης i είναι μικρότερος ή ίσος του μετρητή k . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 16^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 19^ο:** Αποθηκεύουμε το ζεύγος τιμών (t, y) , που θα εκφράζει την θέση της ανέλιξης X_t την χρονική στιγμή t .
- **Βήμα 20^ο:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης z είναι μικρότερος ή ίσος της n . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 13^ο Βήμα, διαφορετικά το πρόγραμμα τερματίζει.

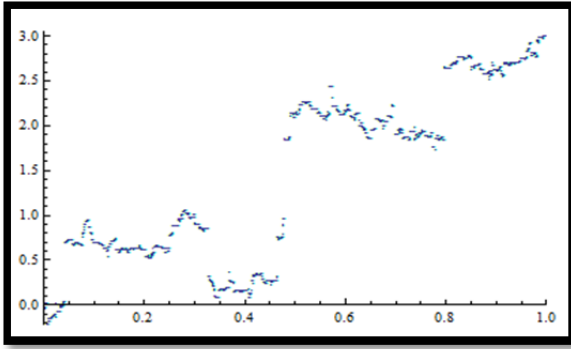
Ανελίξεις Symmetric α -Stable

Οι ανελίξεις Symmetric α -Stable με παράμετρο σταθερότητας $\alpha (\in (0, 2))$, παράμετρο κλίμακας $\sigma (\geq 0)$, παράμετρο ασυμμετρίας $\beta (= 0)$ και παράμετρο θέσης $\mu (= 0)$, όπως αναφέρει ο Rosinski (2007), μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή σειράς ως:

$$S_\alpha(t; \sigma, 0, 0) = \sigma T^{1/\alpha} c_\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^{-1/\alpha} V_i 1_{U_i \leq t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

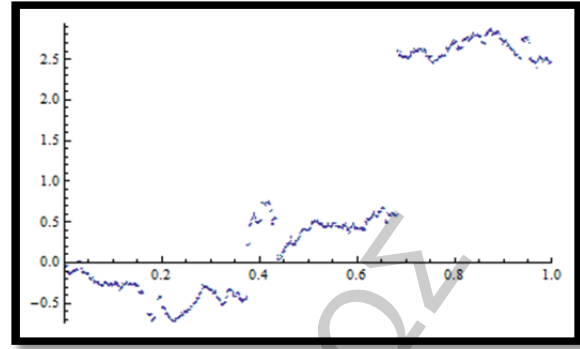
$$\text{με } c_\alpha = |\Gamma(1-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)|^{-1/\alpha} \text{ για } \alpha \neq 1, \text{ και } c_\alpha = \pi/2 \text{ για } \alpha = 1.$$

όπου Γ_i οι χρόνοι εμφάνισης αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, U_i ανεξάρτητοι τ.α. από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$ και V_i ανεξάρτητοι τ.α. από μια κατανομή τέτοια ώστε $P(V_j = 1) = P(V_j = -1) = 1/2$.



Σχήμα 3.17: Μονοπάτι

Sym. α -Stable (Series Repr. Method),
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 1.3, \sigma = 2, \beta = 0, \mu = 0)$
 $(\varepsilon = 10^{-2}, n = 10^4)$.



Σχήμα 3.18: Μονοπάτι

Sym. α -Stable (Ran. Walk Ap. Method),
 $X_{S\alpha}(t; \alpha = 1.3, \sigma = 2, \beta = 0, \mu = 0)$
 $(n = 1300)$.

Δεδομένης της έκφρασης των ανελιξεων Symmetric α -Stable υπό μορφή σειράς, το μόνο που απομένει για να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της ανέλιξης, είναι ο προσδιορισμός του αριθμού τ που θα καθορίσει το πλήθος $N(\tau)$ των όρων που θα συμπεριλάβουμε στην προσεγγισή μας.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τ , θα πρέπει να ορίσουμε το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας ε . Δοθέντος λοιπόν του ε , δηλαδή του ελάχιστου μεγέθους των αλμάτων που θα συμπεριληφθούν στην σειρά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή του τ ως εξής:

$$\Gamma_i^{-1/\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\Gamma_i}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[\alpha]{\Gamma_i} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \Gamma_i > \varepsilon^{-\alpha}$$

$$\tau = \varepsilon^{-\alpha}$$

Αλγόριθμος 3.2.11 (Ανελιξεις Symmetric α -Stable) Προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη Symmetric α -Stable $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$, με παράμετρο σταθερότητας $\alpha (\in (0, 2))$ και παράμετρο κλίμακας $\sigma (\geq 0)$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναπαράστασης σε σειρά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

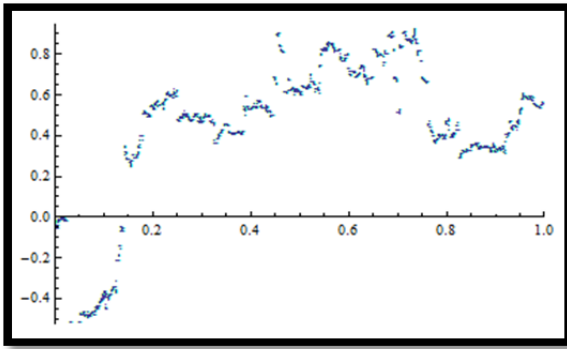
- **Βήμα 1^ο:** Ορίζουμε το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας ε .
- **Βήμα 2^ο:** Υπολογίζουμε την τιμή της $\tau(\varepsilon)$ ως: $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^{-\alpha}$.
- **Βήμα 3^ο:** Υπολογίζουμε την τιμή της c_α .
- **Βήμα 4^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $k=0$ και της $sum=0$.
- **Βήμα 5^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή k κατά μια μονάδα, $k=k+1$.
- **Βήμα 6^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. E από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 7^ο:** Προσαυξάνουμε την sum κατά E , $sum = sum + E$.
- **Βήμα 8^ο:** Αναθέτουμε στην Γ_k την τιμή sum , $\Gamma_k = sum$.

- **Βήμα 9^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U_k από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$.
- **Βήμα 10^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. V_k από μια κατανομή τέτοια ώστε $P(V_j = \pm 1) = 1/2$.
- **Βήμα 11^ο:** Ελέγχουμε εάν η sum είναι μικρότερη της τ . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 5^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 12^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $z=0$.
- **Βήμα 13^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 14^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή z κατά μια μονάδα, $z = z + 1$.
- **Βήμα 15^ο:** Προσαυξάνουμε την t κατά dt , $t = t + dt$.
- **Βήμα 16^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $i=0$ και της $y=0$.
- **Βήμα 17^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή i κατά μια μονάδα, $i = i + 1$.
- **Βήμα 18^ο:** Ελέγχουμε εάν η U_i είναι μεγαλύτερη της t . Εάν η πρόταση είναι αληθής, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά αναθέτουμε στην y την τιμή: $y = y + (V_i \Gamma_i^{-1/\alpha})$, και προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 19^ο:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης i είναι μικρότερος ή ίσος του μετρητή k . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 17^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 20^ο:** Αναθέτουμε στην y την τιμή $y = \sigma T^{1/\alpha} c y$.
- **Βήμα 21^ο:** Αποθηκεύουμε το ζεύγος τιμών (t, y) , που θα εκφράζει την θέση της ανέλιξης X_t την χρονική στιγμή t .
- **Βήμα 22^ο:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης z είναι μικρότερος ή ίσος της n . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 14^ο Βήμα, διαφορετικά το πρόγραμμα τερματίζει.

Ανελιξεις Symmetric Tempered α -Stable

Στην προηγούμενη ενότητα, προσπαθώντας να προσομοιώσουμε μιας Tempered Stable Subordinator ανέλιξη, αναφερθήκαμε συνοπτικά στις Tempered Stable ανελιξεις και είδαμε πως διαθέτουν μέτρο Lévy της μορφής:

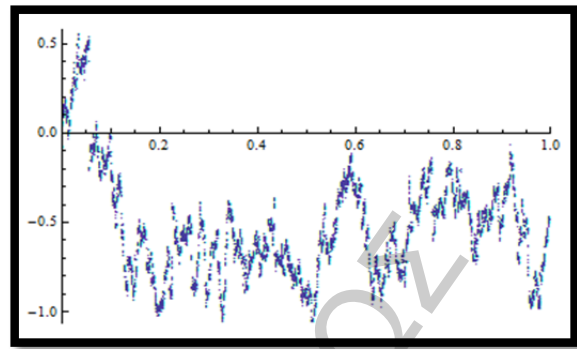
$$\nu_{GTS}(x; c_+, \lambda_+, c_-, \lambda_-) = \frac{c_+ e^{-\lambda_+ x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{c_- e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}, \quad \text{με } c_{\pm} > 0, \lambda_{\pm} > 0 \text{ και } \alpha < 2.$$



Σχήμα 3.19: Μονοπάτι

Sym. Temp. α -Stable (Series Repr. Method),

$$X_{TSA}(t; \alpha = 1.3, c = 0.5, \lambda = 1) \\ (\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}, n = 10^4).$$



Σχήμα 3.20: Μονοπάτι

Sym. Temp. α -Stable (Series Repr. Method),

$$X_{TSA}(t; \alpha = 1.9, c = 0.5, \lambda = 1) \\ (\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}, n = 10^4).$$

Δεδομένης της συμμετρίας που παρουσιάζουν οι Symmetric Tempered Stable ανελίξεις, ισχύουν οι $c_+ = c_- = c$, $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$, και κατά συνέπεια το μέτρο Lévy τους λαμβάνει την μορφή:

$$\nu_{STS}(x; \alpha, c, \lambda) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{ce^{-\lambda|x|}}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}, \text{ με } c > 0, \lambda > 0 \text{ και } \alpha < 2.$$

Οι Symmetric Tempered Stable ανελίξεις, όπως αναφέρει ο Rosinski (2007), μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή σειράς μέσω της:

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \left(\left(\frac{\alpha \Gamma_i}{2cT} \right)^{-1/\alpha} \wedge \eta_i \xi_i^{1/\alpha} \right) 1_{U_i \leq t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

όπου Γ_i οι χρόνοι εμφάνισης αλμάτων μιας ανέλιξης Poisson με μοναδιαίο ρυθμό, U_i ανεξάρτητοι τ.α. από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$, δ_i ανεξάρτητοι τ.α. από μια κατανομή τέτοια ώστε $P(V_j = 1) = P(V_j = -1) = 1/2$, η_i ανεξάρτητοι τ.α. από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$ και ξ_i ανεξάρτητοι τ.α. από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$. Όλες οι παραπάνω ακολουθίες τ.α. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Δεδομένης της έκφρασης των ανελίξεων Symmetric Tempered α -Stable υπό μορφή σειράς, το μόνο που απομένει για να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της ανέλιξης, είναι ο προσδιορισμός του αριθμού τ που θα καθορίσει το πλήθος $N(\tau)$ των όρων που θα συμπεριλάβουμε στην προσεγγισή μας.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τ , θα πρέπει να ορίσουμε το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας ε . Δοθέντος λοιπόν του ε , δηλαδή του ελάχιστου μεγέθους των αλμάτων που θα συμπεριληφθούν στην σειρά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή του τ ως εξής:

$$\left(\frac{\alpha\Gamma_i}{2cT}\right)^{-1/\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\alpha\Gamma_i}{2cT} > \varepsilon^{-\alpha} \Leftrightarrow \Gamma_i > \frac{2cT}{\alpha} \varepsilon^{-\alpha}$$

$$\tau = \frac{2cT}{\alpha} \varepsilon^{-\alpha}$$

Αλγόριθμος 3.2.12 (Ανελιξίσεις Symmetric Tempered α -Stable) Προκειμένου να προσομοιώσουμε μια ανέλιξη Symmetric Tempered α -Stable $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$, με παραμέτρους $\alpha (< 2)$, $c (\geq 0)$ και $\lambda (\geq 0)$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναπαράστασης σε σειρά, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

- **Βήμα 1^ο:** Ορίζουμε το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας ε .
- **Βήμα 2^ο:** Υπολογίζουμε την τιμή της $\tau(\varepsilon)$ ως: $\tau(\varepsilon) = (2cT\varepsilon^{-\alpha})/\alpha$.
- **Βήμα 3^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $k=0$ και της $sum=0$.
- **Βήμα 4^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή k κατά μια μονάδα, $k=k+1$.
- **Βήμα 5^ο:** Παράγουμε ένα τ.α. E από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(1)$.
- **Βήμα 6^ο:** Προσαυξάνουμε την sum κατά E , $sum=sum+E$.
- **Βήμα 7^ο:** Αναθέτουμε στην Γ_k την τιμή sum , $\Gamma_k=sum$.
- **Βήμα 8^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. U_k από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$.
- **Βήμα 9^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. δ_k από μια κατανομή τέτοια ώστε $P(V_j = \pm 1) = 1/2$.
- **Βήμα 10^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. η_k από την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$.
- **Βήμα 11^ο:** Παράγουμε έναν τ.α. ζ_k από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$.
- **Βήμα 12^ο:** Ελέγχουμε εάν η sum είναι μικρότερη της τ . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 4^ο Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο 12^ο βήμα.
- **Βήμα 13^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $z=0$.
- **Βήμα 14^ο:** Διακριτοποιούμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε n ισομήκη διαστήματα μεγέθους: $dt = t_j - t_{j-1} = T/n$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ και αρχικοποιούμε τον χρόνο $t=0$.
- **Βήμα 15^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή z κατά μια μονάδα, $z=z+1$.
- **Βήμα 16^ο:** Προσαυξάνουμε την t κατά dt , $t=t+dt$.
- **Βήμα 17^ο:** Αρχικοποιούμε την τιμή του μετρητή $i=0$ και της $y=0$.
- **Βήμα 18^ο:** Αυξάνουμε τον μετρητή i κατά μια μονάδα, $i=i+1$.
- **Βήμα 19^ο:** Ελέγχουμε εάν η U_i είναι μεγαλύτερη της t . Εάν η πρόταση είναι αληθής, προχωράμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά αναθέτουμε στην y την τιμή: $y = y + \delta_i \left((\alpha\Gamma_i/2cT)^{-1/\alpha} \wedge \eta_i \xi_i^{1/\alpha} \right)$, και προχωράμε στο επόμενο βήμα.

- **Βήμα 20°:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης i είναι μικρότερος ή ίσος του μετρητή k . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 18° Βήμα, διαφορετικά προχωράμε στο επόμενο βήμα.
- **Βήμα 21°:** Αποθηκεύουμε το ζεύγος τιμών (t, y) , που θα εκφράζει την θέση της ανέλιξης X_t την χρονική στιγμή t .
- **Βήμα 22°:** Ελέγχουμε εάν ο δείκτης z είναι μικρότερος ή ίσος της n . Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επιστρέφουμε στο 15° Βήμα, διαφορετικά το πρόγραμμα τερματίζει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 4^ο: Αποτίμηση Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την αποτίμηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Συγκεκριμένα, με την Monte Carlo εκτίμηση της αξίας LookBack, Barrier και Asian συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης, μέσω του Variance Gamma εκθετικού Lévy μοντέλου αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας.

Η συγγραφή του παρόντος κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα των Cont & Tankov (2004), Schoutens (2003), στα επιστημονικά άρθρα των Carr et al. (2002 & 2003), Cox et al. (1985), Madan et al. (1998), Madan & Seneta (1990), Schoutens & Symens (2003) και στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις των Γκλεζάκου (2011), Μπούτσικα (2005).

4.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα και Δικαιώματα Προαίρεσης

Παράγωγο προϊόν (*derivative*) θεωρείται κάθε χρηματοοικονομικό προϊόν που παράγεται (*derive*) από κάποιο άλλο υποκείμενο προϊόν (*underlying asset*) πιο απλής μορφής και συνήθως αναφέρεται σε μια μελλοντική συναλλαγή επί του υποκείμενου προϊόντος.

Ως υποκείμενο προϊόν για την κατασκευή ενός παραγώγου προϊόντος μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάθε προϊόν που διαπραγματεύεται σε οργανωμένες δευτερογενείς αγορές π.χ. εμπορεύσιμες μετοχές, ομόλογα, αγροτικά προϊόντα, μέταλλα, κ.α. ακόμα και κάποιο προϊόν που δεν διαπραγματεύεται σε οργανωμένες αγορές.

Ορισμένα από τα πλέον γνωστά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια (*forward contracts*), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (*future contracts*) και τα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης (*option contracts*). Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης.

Κάθε συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης, αποτελεί ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων σύμφωνα με το οποίο: «Ο ένας αντισυμβαλλόμενος (*αγοραστής - holder*) αγοράζει (*long position*) το δικαίωμα, είτε να αγοράσει (*call option*), είτε να πωλήσει (*put option*) ένα υποκείμενο προϊόν σε μια προκαθορισμένη τιμή (*τιμή εξάσκησης* ή *exercise price* ή *strike price*), είτε κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου $[0, T]$ (*American option*), είτε σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή T στο μέλλον (*European option*), καταβάλλοντας στον δεύτερο αντισυμβαλλόμενο (*πωλητή - writer*), που πουλάει το δικαίωμα (*short position*), την αξία του δικαιώματος (*option price* ή *option premium*) χωρίς καμμία άλλη υποχρέωση.»

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα επενδυτής που συμμετέχει στην αγορά των συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης, μπορεί να λάβει τις ακόλουθες θέσεις:

- Long Call: Αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν.
- Long Put: Αγοράζει το δικαίωμα να πωλήσει το υποκείμενο προϊόν.
- Short Call: Πουλάει το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν.
- Short Put: Πουλάει το δικαίωμα να πωλήσει το υποκείμενο προϊόν.

Τα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης κατηγοριοποιούνται βάσει των όρων εξασκήσής τους. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τα ακόλουθα:

- ✓ European options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή στην λήξη τους.
- ✓ American options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη τους.
- ✓ Bermudan options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή μονάχα σε συγκεκριμένες ημερομηνίες πριν ή κατά την λήξη τους.
- ✓ LookBack Options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή μονάχα στην λήξη τους, αλλά η τιμή εξάσκησης του call (put) option εξαρτάται από την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή, που έλαβε το υποκείμενο προϊόν στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου.
- ✓ Barrier Options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή στην λήξη τους, μονάχα εάν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο στο χρόνο ζωής του συμβολαίου.
- ✓ Asian Options: Μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή μονάχα στην λήξη τους, αλλά η τιμή εξάσκησης τους εξαρτάται από τη συνολική πορεία της τιμής του υποκείμενου προϊόντος στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου.

Η αξία των συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης επηρεάζεται από τους παράγοντες που τους επιτρέπουν να διαφέρουν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα:

- ✓ Το ακίνδυνο επιτόκιο της αγοράς.
- ✓ Την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.
- ✓ Την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.
- ✓ Την παρούσα αξία του υποκείμενου προϊόντος.
- ✓ Την μεταβλητότητα της αξίας του υποκείμενου προϊόντος.
- ✓ Τα αναμενόμενα μερίσματα (εάν υπάρχουν) του υποκείμενου προϊόντος, κατά την διάρκεια ζωής του συμβολαίου.

Παράγοντας	Call Option	Put Option
Ακίνδυνο Επιτόκιο Αγοράς	+	-
Τιμή Εξάσκησης Δικαιώματος	-	+
Ημερομηνία Λήξης Δικαιώματος*	+	+
Παρούσα Αξία Υποκείμενου Προϊόντος	+	-
Μεταβλητότητα Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος	+	+
Αναμενόμενα Μερίσματα Υποκείμενου Προϊόντος	-	+

(*) Η αξία των European put και call options, επί μετοχών που καταβάλουν μέρισμα, δεν αυξάνεται απαραίτητα με την αύξηση του χρόνου ζωής του δικαιώματος.

Πίνακας 4.1: Επίδραση διαφόρων παραγόντων στην αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Μάλιστα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1, η επίδραση των παραπάνω παραγόντων στην αξία των συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης, διαφέρει ανάλογα με το είδος του δικαιώματος προαίρεσης.

Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι η αγορά των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, αν και δημιουργήθηκε με στόχο την διασφάλιση των επενδυτών από τον κίνδυνο και την αβεβαιότητα της αγοράς, στην πράξη χρησιμοποιείται στις σύγχρονες χρηματαγορές για τους παρακάτω λόγους:

- ✓ Την κερδοσκοπία (speculation).
- ✓ Την εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage).
- ✓ Την αντιστάθμιση και κάλυψη κινδύνου και αβεβαιότητας (hedging).

Η διαφορά μεταξύ της κερδοσκοπίας και της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, αφορά στο γεγονός ότι ενώ στην κερδοσκοπία ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να αναλάβει κίνδυνο με σκοπό την μεγιστοποίηση της απόδοσης των επενδύσεων του, στην εξισορροπητική κερδοσκοπία ο επενδυτής ενδιαφέρεται να αποκομίσει κέρδος, μέσω της εκμετάλλευσης στιγμιαίων ανισορροπιών της αγοράς, χωρίς να αναλάβει κίνδυνο.

Όπως θα δούμε στην συνέχεια, η έννοια της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας κατέχει ιδιαίτερα σημαντική θέση στο χώρο της αποτίμησης παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων καθώς η απουσία της αποτελεί θεμέλιο λίθο όλων των μοντέλων αγοράς.

4.2 Υποθέσεις Μοντελοποίησης

Όπως σε κάθε προσπάθεια κατασκευής ενός μοντέλου που περιγράφει τον πραγματικό κόσμο πραγματοποιούνται μια σειρά από παραδοχές έτσι ώστε το πρόβλημα να είναι

διαχειρίσιμο, ανάλογα θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε μια σειρά από παραδοχές σε σχέση με το μοντέλο αγοράς στο οποίο θα εργασθούμε.

Επιτόκιο αγοράς

Στην συνέχεια, θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός σταθερού, συνεχώς ανατοκίζόμενου ονομαστικού επιτοκίου r (≥ 0), έτσι ώστε οποιοσδήποτε επενδυτής επιθυμεί να δανειστεί ή να δανείσει, να μπορεί να το πράξει χωρίς ρίσκο, οποιαδήποτε χρονική στιγμή με επιτόκιο r (*risk-free interest rate*).

Άμεση συνέπεια της ύπαρξης ενός σταθερού επιτοκίου r , αποτελεί το γεγονός ότι μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τις ακόλουθες αναφορές ως προς την αξία ενός προϊόντος:

- ✓ Δεδομένου ότι η παρούσα (προεξοφλημένη) αξία ενός προϊόντος είναι ίση με \hat{S}_t , μπορούμε να πούμε πως η αξία του ίδιου προϊόντος μετά από την παρέλευση t μονάδων χρόνου, θα είναι ίση με $S_t = \hat{S}_t e^{rt}$.
- ✓ Δεδομένου ότι η αξία ενός προϊόντος μετά την παρέλευση t μονάδων χρόνου θα είναι ίση με S_t , μπορούμε να πούμε πως η παρούσα αξία του ίδιου προϊόντος είναι ίση με $\hat{S}_t = S_t e^{-rt}$.

Ουσιαστικά, με τις παραπάνω αναφορές συνδέουμε την έννοια της αξίας ενός προϊόντος με την έννοια του χρόνου. Το σκεπτικό που συνδέει τις δύο έννοιες, βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε επενδυτής που έχει στην κατοχή του ένα χρηματοοικονομικό προϊόν S αξίας x , μπορεί να το πωλήσει και να επενδύσει το ποσό x σε ένα κρατικό ομόλογο (ακίνδυνο προϊόν) με σταθερό επιτόκιο r , το οποίο μετά από t μονάδες χρόνου θα έχει αξία $x \cdot e^{rt}$.

Arbitrage-free και Πλήρης Αγορά

Νωρίτερα αναφερθήκαμε στην εξισορροπητική κερδοσκοπία (*arbitrage*), ως την επενδυτική στρατηγική σύμφωνα με την οποία: «Ο επενδυτής στοχεύει στην αποκομιδή κέρδους, μέσω της εκμετάλλευσης στιγμιαίων ανισορροπιών της αγοράς δίχως την ανάληψη επενδυτικού κινδύνου». Ουσιαστικά πρόκειται για μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική η οποία οδηγεί σε κέρδος με πιθανότητα ένα, ενώ παράλληλα η πιθανότητα ύπαρξης απώλειας είναι μηδενική.

Στην πραγματικότητα, η ύπαρξη δυνατότητας εξισορροπητικής κερδοσκοπίας είναι από σπάνια έως ανύπαρκτη. Στο συγκεκριμένο γεγονός συμβάλλουν, αφενός οι περιορισμοί των αγορών π.χ. κόστη συναλλαγής, χρόνοι πραγματοποίησης συναλλαγών κ.α., αφετέρου το ότι

στην περίπτωση εμφάνισης ευκαιρίας αποκομιδής ακίνδυνου βέβαιου κέρδους, το σύνολο των επενδυτών στρέφεται σε αυτήν με άμεσο αποτέλεσμα την εξάλειψη της.

Παρόλα αυτά, η υπόθεση ότι το μοντέλο μας περιγράφει μια αγορά στην οποία απουσιάζει η δυνατότητα εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (*arbitrage-free market model*), θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική καθώς διασφαλίζει αφενός τη σωστή μοντελοποίηση της συμπεριφοράς της πραγματικής αγοράς (ως προς αυτό το χαρακτηριστικό) αφετέρου ότι η τιμή κάθε χρηματοοικονομικού προϊόντος είναι μοναδική κάθε χρονική στιγμή.

Μια επιπλέον υπόθεση την οποία πραγματοποιούν αρκετά μοντέλα, με γνωστότερο αυτό των Black & Scholes, αφορά την πληρότητα της αγοράς. Ως πλήρη αγορά θεωρούμε κάθε αγορά στην οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε για κάθε χρηματοοικονομικό προϊόν ένα ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (*hedging portfolio - replicating portfolio*), δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο κάθε χρονική στιγμή διαθέτει αξία ίση με αυτήν του χρηματοοικονομικού προϊόντος.

Παρά το γεγονός ότι το μοντέλο της πλήρους αγοράς φαίνεται αρκετά ελκυστικό, καθώς σύμφωνα με αυτό κάθε επενδυτής θα μπορούσε να εξασφαλισθεί πλήρως από το κίνδυνο στον οποίο εκτίθεται μέσω των περιουσιακών στοιχείων που διαθέτει στο χαρτοφυλακίο του, η πραγματική αγορά δεν είναι πλήρης.

Στο μοντέλο που θα εργασθούμε, όπως θα δούμε στην συνέχεια, πρόκειται να μοντελοποιήσουμε την αξία του υποκείμενου προϊόντος μέσω μιας εκθετικής διαδικασίας Lévy. Με την επιλογή μας αυτή, όπως σημειώνουν στα συγγραμμάτα τους οι Cont & Tankov (2004, §9.2) και Schoutens (2003, §6.2.1), στην πράξη οδηγούμαστε άμεσα στο μοντέλο μη πλήρους αγοράς (*incomplete market model*). Εξαίρεση στον παραπάνω κανόνα αποτελεί το μοντέλο των Black & Scholes που περιγράφει πλήρεις αγορές.

Πρόσθετες υποθέσεις

Πέραν των παραπάνω υποθέσεων, θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε επιπρόσθετα μια σειρά από υποθέσεις οι οποίες θα προσδώσουν στο μοντέλο αγοράς που θα εργασθούμε μια ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι:

- ✓ Δεν υπάρχουν προβλήματα ρευστότητας της αγοράς.
- ✓ Οι επενδυτές διαθέτουν τέλεια πληροφόρηση χωρίς κόστος.
- ✓ Οι επενδυτές πάντα προτιμούν τα μεγαλύτερα κέρδη από τα μικρότερα.

- ✓ Οι επενδυτές λειτουργούν ως παραλήπτες των τιμών της αγοράς και όχι ως διαμορφωτές αυτών.
- ✓ Δεν υπάρχουν καθυστερήσεις συναλλαγών (*transaction delays*) και οι εντολές αγοραπωλησιών πραγματοποιούνται στιγμιαία.
- ✓ Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής (*transaction costs*) επί των αγοραπωλησιών σε χρηματοοικονομικούς τίτλους.
- ✓ Δεν υπάρχει φορολόγηση επί των χρηματοοικονομικών τίτλων και των ενδεχόμενων μερισμάτων αυτών.
- ✓ Δεν απαιτείται οι επενδυτές να διαθέτουν λογαριασμό περιθωρίου (*margin account*) για την πραγματοποίηση συναλλαγών.
- ✓ Δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς την ανοιχτή πώληση (*short selling*) μετοχών από τους επενδυτές.

Με το σύνολο των παραπάνω υποθέσεων, επιδιώκουμε το μοντέλο μας να προσεγγίσει όσο το δυνατόν περισσότερο το μοντέλο της «τέλειας αγοράς», καθώς σύμφωνα με τη θεωρία της τυχαίας διαμόρφωσης τιμών (*random-walk theory*), οι τιμές των μετοχών στις τέλειες αγορές διαμορφώνονται με τυχαίο τρόπο και γι' αυτό τον λόγο είναι αδύνατη η οποιαδήποτε πρόβλεψη για την μελλοντική εξέλιξή τους.

4.3 Βασικές Αρχές Τιμολόγησης Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Έστω μια αγορά και ένας μετρήσιμος χώρος (Ω, \mathcal{F}) που μπορεί να περιγράψει όλες τις καταστάσεις στις οποίες δύναται να βρεθεί η αγορά στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Ως $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$ ορίζουμε τη διήθηση που εμπεριέχει την πληροφορία της εξέλιξης της τιμής κάθε προϊόντος της αγοράς. Επομένως, η \mathcal{F}_0 δεν εμπεριέχει καμία επιπλέον πληροφορία πέραν της τιμής των προϊόντων της αγοράς την χρονική στιγμή $t=0$, ενώ η $\mathcal{F}_T (= \mathcal{F})$ εμπεριέχει ολόκληρη την ιστορία της εξέλιξης της τιμής κάθε προϊόντος που διαπραγματεύεται στην αγορά για το χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Δεδομένων των παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η αξία κάθε χρηματοοικονομικού προϊόντος δύναται να περιγραφεί από μια στοχαστική ανέλιξη

$$S_t: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad ((t, \omega) \rightarrow S_t(\omega))$$

προσαρμοσμένη στην διήθηση \mathcal{F}_t , με την $S_t(\omega)$ να εκφράζει την τιμή του προϊόντος S , την χρονική στιγμή t , δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε στην αγορά το σενάριο ω .

Πρόσθετα, υπενθυμίζουμε πως η παρούσα (προεξοφλημένη) αξία κάθε προϊόντος που διαπραγματεύεται στην αγορά, δεδομένου του σταθερού, συνεχώς ανατοκίζόμενου, επιτοκίου r , είναι ίση με $\hat{S}_t = S_t e^{-rt}$, $t \in [0, T]$.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη, που όπως σημειώνουν οι Cont & Tankov (2004 §9.1.1) διασφαλίζει τον arbitrage-free χαρακτήρα του μοντέλου αγοράς στο οποίο εργαζόμαστε, ορίζεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3.1 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα αποτίμησης προϊόντων) Το μοντέλο αγοράς που ορίζεται από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ και η τιμή $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ κάθε προϊόντος S , μπορούν να θεωρηθούν ως arbitrage-free αν και μόνον αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q , ισοδύναμο του P , τέτοιο ώστε η προεξοφλημένη τιμή $\{\hat{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ κάθε προϊόντος S να είναι martingale ως προς το μέτρο πιθανότητας Q .

Συνεπώς, δεδομένου ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο Q με τις παραπάνω ιδιότητες, αυτομάτως μπορούμε να διασφαλίσουμε τον arbitrage-free χαρακτήρα του μοντέλου αγοράς που εργαζόμαστε. Αξίζει λοιπόν να σταθούμε για λίγο στις ιδιότητες που κάνουν το μέτρο Q τόσο ξεχωριστό.

Αναλογιζόμενοι το γεγονός ότι δύο μέτρα πιθανότητας λέγονται ισοδύναμα αν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα, δηλαδή

$$P \sim Q: P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0, A \in \mathfrak{F}$$

εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η ιδιότητα της ισοδυναμίας του μέτρου Q ως προς το μέτρο P , έχει σαν στόχο να διασφαλίσει πως είτε εργαζόμαστε υπό το μέτρο P , είτε εργαζόμαστε υπό το μέτρο Q , ουσιαστικά εργαζόμαστε επί του ίδιου συνόλου δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί η αγορά.

Πρόσθετα, η ιδιότητα martingale του μέτρου Q ως προς την προεξοφλημένη τιμή $\{\hat{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ κάθε προϊόντος S , συνεπάγεται ότι

- (i) η $\{\hat{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$,
- (ii) $E(\hat{S}_t) < \infty$, για κάθε $t \geq 0$,
- (iii) $E(\hat{S}_t | \mathfrak{F}_s) = \hat{S}_s$ σ.β., για κάθε $0 \leq s < t \leq T$,

και διασφαλίζει το γεγονός ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την εξέλιξή της, δηλαδή ότι οι τιμές των προϊόντων στο μοντέλο αγοράς που εργαζόμαστε διαμορφώνονται τυχαία.

Μάλιστα, αξίζει να σημειώσουμε πως στην περίπτωση όπου το ισοδύναμο μέτρο martingale Q είναι μοναδικό, όπως αναφέρουν οι Cont & Tankov (2004 §9.2), αποδεικνύεται πως το μοντέλο αγοράς περιγράφει μια πλήρη arbitrage-free αγορά.

Πρόταση 4.3.2 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα αποτίμησης προϊόντων) Μια αγορά, της οποίας κάθε προϊόν S μπορεί να περιγραφεί ως μια στοχαστική διαδικασία στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, είναι πλήρης αν και μόνον αν υπάρχει μοναδικό μέτρο martingale Q ισοδύναμο του P .

Βέβαια, όπως αναφέραμε και νωρίτερα, το μοντέλο αγοράς στο οποίο θα εργασθούμε δεν περιγράφει μια πλήρη αγορά. Επομένως, έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε περισσότερα του ενός ισοδύναμα μέτρα martingale Q για το μοντέλο μας.

Πλέον, έχοντας αποκτήσει μια εικόνα για τις ιδιότητες του μέτρου Q , είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, το οποίο ουσιαστικά θα αποτελέσει «την αρχή του τέλους» της προσπάθειάς μας για την τιμολόγηση συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης.

Πρόταση 4.3.3 (Τιμολόγηση ουδέτερου ρίσκου) Σε κάθε αγορά που μπορεί να περιγραφεί από ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, η no-arbitrage αξία κάθε προϊόντος S μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$S_t(\omega) = e^{-r(T-t)} E_Q(S_T(\omega) | \mathcal{F}_t)$$

όπου Q ένα μέτρο martingale, ισοδύναμο του P .

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την συγκεκριμένη πρόταση παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Cont & Tankov (2004 §9.1.1).

Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 4.3.3, η no-arbitrage αξία κάθε χρηματοοικονομικού προϊόντος που διαπραγματεύεται σε μια αγορά, μπορεί να εκφρασθεί ως η παρούσα (προεξοφλημένη) τιμή της αναμενόμενης υπό το μέτρο Q αξίας του.

Στην περίπτωση που κάποιος αναφερόταν στην αναμενόμενη αξία του προϊόντος υπό το μέτρο P της πραγματικής αγοράς, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως αναφέρεται είτε στην «αντικειμενική» αναμενόμενη αξία του προϊόντος, όπως αυτή ορίζεται υπό το μέτρο P , είτε στην «υποκειμενική» αναμενόμενη αξία του προϊόντος, όπως αυτή εκτιμάται από έναν επενδυτή της αγοράς.

Δυστυχώς, για την περίπτωση όπου η αναμενόμενη αξία του προϊόντος λαμβάνεται υπό το μέτρο Q , όπως ορίζει το Πρόσχημα 4.3.3, δεν προκύπτει άμεσα κάποια ανάλογη ερμηνεία. Ας συζητήσουμε για λίγο λοιπόν, ποια απάντηση θα μπορούσαμε να δώσουμε.

Έστω μια αγορά και ένας μετρήσιμος χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Q)$ που μπορεί να περιγράψει όλες τις καταστάσεις στις οποίες δύναται να βρεθεί η αγορά στο χρονικό

διάστημα $[0, T]$. Έστω επίσης ότι βρισκόμαστε στην χρονική στιγμή $t = 0$ και επιθυμούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της αξίας του προϊόντος S την χρονική στιγμή $t = T$.

Κάνοντας χρήση της σχέσης που συνδέει την αξία ενός προϊόντος με την προεξοφλημένη αξία του, αλλά και του γεγονότος ότι η προεξοφλημένη αξία κάθε προϊόντος υπό το μέτρο Q είναι μια martingale, λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$E_Q(S_T | \mathfrak{F}_0) = E_Q(\hat{S}_T e^{rT} | \mathfrak{F}_0) = E_Q(\hat{S}_T | \mathfrak{F}_0) e^{rT} = \hat{S}_0 e^{rT} = S_0 e^{rT}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η αναμενόμενη αξία, υπό το μέτρο Q , ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος S (*risky asset*) είναι ίση με την απόδοση ενός ομολόγου (*riskless asset*) με σταθερό συνεχώς ανατοκίζόμενο επιτόκιο r .

Δεδομένου ότι κάθε επενδυτής που συμμετέχει στην πραγματική αγορά ενδιαφέρεται να αναλάβει μεγαλύτερο κίνδυνο αν και μόνον αν προσδοκά μεγαλύτερη απόδοση του χαρτοφυλακίου του, αντιλαμβανόμαστε πως το παραπάνω συμπέρασμα δεν έχει καμμία λογική υπόσταση στην πραγματική αγορά.

Παρόλα αυτά, για την αγορά που περιγράφεται από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, Q)$, το εν λόγω συμπέρασμα θα μπορούσε να έχει μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ερμηνεία. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι κάθε επενδυτής είναι διατεθειμένος να συμπεριλάβει στο χαρτοφυλάκιο του τόσο περιουσιακά στοιχεία που δεν εμπεριέχουν κίνδυνο, όσο και περιουσιακά στοιχεία που εμπεριέχουν κίνδυνο, παρά το γεγονός ότι διαθέτουν την ίδια απόδοση, θα μπορούσε να σημαίνει μονάχα ότι είναι ουδέτερος (*neutral*) ως προς το ρίσκο που αναλαμβάνει.

Υπό το πρίσμα αυτό, θα καλούμε στην συνέχεια το μέτρο Q ως μέτρο πιθανότητας σε ένα χώρο ουδέτερου ρίσκου (*risk neutral probability measure*).

4.4 Αποτίμηση Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης

Όπως είδαμε νωρίτερα, κάθε επενδυτής που συμμετέχει στην αγορά συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να λάβει τις ακόλουθες θέσεις: (α) long call, (β) long put, (γ) short call και (δ) short put.

Η ύπαρξη αντίθετων θέσεων, δεδομένου ότι κάθε επενδυτής λαμβάνοντας μια θέση προσδοκά το κέρδος, αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι το σύνολο των επενδυτών δεν διαθέτει μια κοινή εκτίμηση για την εξέλιξη της αγοράς.

Κατά συνέπεια, η «υποκειμενική» αξία κάθε συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης, εξαρτάται από την εκτίμηση του επενδυτή για την εξέλιξη της αγοράς και εκφράζεται μέσω της θέσης που λαμβάνει.

Μη λαμβάνοντας υπόψη την χρονική αξία του χρήματος, θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το σκεπτικό ενός επενδυτή που λαμβάνει μια long θέση, σε ένα call option Ευρωπαϊκού τύπου επί μιας μετοχής S , με ημερομηνία λήξης T , τιμή εξάσκησης K και αξία C .

Ουσιαστικά, μέσω του παραπάνω συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης, τόσο ο αγοραστής, όσο και ο πωλητής του δικαιώματος αποκτούν, για την χρονική στιγμή T , πρόσβαση σε δύο παράλληλες αγορές ως προς το υποκείμενο προϊόν, τη μετοχή S .

Προκειμένου να μην υπάρξει ευκαιρία για arbitrage στην αγορά, την χρονική στιγμή T , η αξία της μετοχής στην αγορά (S_T) θα πρέπει να ισούται με την αξία της μετοχής στο συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης ($K + C$).

Φυσικά, το παραπάνω σενάριο αποτελεί το ιδεατό σενάριο στο οποίο η εκτίμηση που πραγματοποιήθηκε την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου για την αξία της μετοχής S την χρονική στιγμή T , ήταν απόλυτα ακριβής. Στις πραγματικές αγορές συναντώνται συνήθως τα ακόλουθα δύο σενάρια:

- Η αξία της μετοχής στην αγορά, την χρονική στιγμή T , είναι μεγαλύτερη από την αξία της μετοχής στο συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης, με αποτέλεσμα ο επενδυτής να εξασκεί το δικαίωμα που έχει στην κατοχή του και να αποκομίζει άμεσα κέρδος ίσο με $S_T - (K + C)$.
- Η αξία της μετοχής στην αγορά, την χρονική στιγμή T , είναι μικρότερη από την αξία της μετοχής στο συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης, με αποτέλεσμα ο επενδυτής να μην εξασκεί το δικαίωμα που έχει στην κατοχή του και να αποκομίζει άμεσα ζημία ίση με C .

Υπό το πρίσμα αυτό, θα μπορούσαμε να δούμε κάθε συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης ως ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος, μεταξύ αγοραστή και πωλητή, στο οποίο ο αγοραστής αφού καταβάλει ως συμμετοχή το ποσό C , αναμένει να έχει κέρδος:

$$X = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0) = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε πως στις αγορές το παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος αναφέρεται στην έννοια ότι το κέρδος του ενός επενδυτή ισούται με την ζημία του άλλου.

Θέση Επενδυτή	Κέρδος Επενδυτή	
	Παιχνίδι Μηδενικού Αθροίσματος	Χρήση Δικαιώματος
Long Call - Αγορά Δικαιώματος Αγοράς	$(S_T - K)_+$	$(S_T - K)_+ - C$
Short Call - Πώληση Δικαιώματος Αγοράς	$-(S_T - K)_+$	$C - (S_T - K)_+$
Long Put - Αγορά Δικαιώματος Πώλησης	$(K - S_T)_+$	$(K - S_T)_+ - C$
Short Put - Πώληση Δικαιώματος Πώλησης	$-(K - S_T)_+$	$C - (K - S_T)_+$

Πίνακας 4.2: Κέρδος επενδυτή συναρτήσει της επενδυτικής θέσης που κατέχει ως προς τα διαφορετικά είδη συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου.

Αναλογιζόμενοι τα παραπάνω, σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.3.3, καταλήγουμε εύκολα στο γεγονός ότι η no-arbitrage αξία ενός συμβολαίου δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου επί ενός προϊόντος S , με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K , ορίζεται ως:

$$C = e^{-r(T-t)} E_Q \left((S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (4.1)$$

Σύμφωνα με την σχέση (4.1), η αξία που θα πρέπει να καταβάλει ο επενδυτής για την απόκτηση του παραπάνω συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης σε μια arbitrage-free αγορά, θα πρέπει να ισούται με την παρούσα (προεξοφλημένη) αξία του αναμενόμενου υπό το μέτρο Q κέρδους που θα αποκομίσει, την χρονική στιγμή T , από την εξάσκηση του δικαιώματος που θα έχει στην κατοχή του.

Ανάλογα, η αξία κάθε συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να εκτιμηθεί αντικαθιστώντας στην σχέση (4.1) την συνάρτηση $(S_T - K)_+$, με την κατάλληλη συνάρτηση κέρδους. Χαρακτηριστικά, στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις κέρδους που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την αποτίμηση συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου.

Ας δούμε όμως πως διαμορφώνεται η συνάρτηση κέρδους πολυπλοκότερων συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης και συγκεκριμένα συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης τύπου LookBack, Barrier και Asian, την αξία των οποίων θα κληθούμε εκτιμήσουμε στην Ενότητα 4.8. Δεδομένου ότι η αξία των εν λόγω τύπων συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης εξαρτάται από το μονοπάτι της αξίας του υποκείμενου προϊόντος (*path dependent options*), προκειμένου να ορίσουμε τις συναρτήσεις κέρδους τους χρειάζεται πρώτα να πραγματοποιήσουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

Έστω $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$, η ανέλιξη που περιγράφει την αξία του υποκείμενου προϊόντος S στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Έστω επίσης:

$$M_t^S = \sup(S_x : 0 \leq x \leq t) \text{ και } m_t^S = \inf(S_x : 0 \leq x \leq t) \text{ με } t \in [0, T]$$

η μέγιστη και η ελάχιστη αξία αντίστοιχα του υποκείμενου προϊόντος S στο διάστημα $[0, T]$.

LookBack Options

Τα LookBack Options μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή μονάχα στην λήξη τους, αλλά η τιμή εξασκήσής τους εξαρτάται είτε από την μέγιστη είτε από την ελάχιστη τιμή που έλαβε το υποκείμενο προϊόν στο χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη του συμβολαίου.

Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους των συμβολαίων δικαιώματος αγοράς και πώλησης τύπου LookBack, ορίζεται ως εξής:

- ✓ Δικαίωμα Αγοράς (LC): Δικαίωμα του οποίου η τιμή εξάσκησης ορίζεται ως η ελάχιστη τιμή που έλαβε το υποκείμενο προϊόν στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(S_T - m_T^S)_+ .$$

- ✓ Δικαίωμα Πώλησης (PC): Δικαίωμα του οποίου η τιμή εξάσκησης ορίζεται ως η μέγιστη τιμή που έλαβε το υποκείμενο προϊόν στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(M_T^S - S_T)_+ .$$

Barrier Options

Τα Barrier Options μπορούν να εξασκηθούν από τον αγοραστή στην λήξη τους, μονάχα εάν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο στο χρόνο ζωής του συμβολαίου.

Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους καθεμιάς εκ των τεσσάρων κατηγοριών συμβολαίων δικαιώματος αγοράς τύπου Barrier που υπάρχουν, ορίζεται ως εξής:

- ✓ Up and In (UIBC): Δικαιώματα που θεωρούνται ισχύοντα και μπορούν να εξασκηθούν αν και μόνον αν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος (S_t) περάσει πάνω από ένα καθορισμένο φράγμα S^* μέχρι τον χρόνο εξάσκησης T . Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(S_T - K)_+ 1_{M_T^S \geq S^*} .$$

- ✓ Up and Out (UOBC): Δικαιώματα που δεν θεωρούνται ισχύοντα και δεν μπορούν να εξασκηθούν αν και μόνον αν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος (S_t) περάσει πάνω από ένα καθορισμένο φράγμα S^* μέχρι τον χρόνο εξάσκησης T . Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(S_T - K)_+ 1_{M_T^S < S^*} .$$

- ✓ Down and In (DIBC): Δικαιώματα που θεωρούνται ισχύοντα και μπορούν να εξασκηθούν αν και μόνον αν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος (S_t) περάσει κάτω από ένα καθορισμένο φράγμα S^* μέχρι τον χρόνο εξάσκησης T . Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(S_T - K)_+ 1_{m_T^S \leq S^*} .$$

- ✓ Down and Out (DOBC): Δικαιώματα που δεν θεωρούνται ισχύοντα και δεν μπορούν να εξασκηθούν αν και μόνον αν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος (S_t) περάσει κάτω από ένα καθορισμένο φράγμα S^* μέχρι τον χρόνο εξάσκησης T . Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους τους ορίζεται ως:

$$(S_T - K)_+ 1_{m_T^S > S^*} .$$

Οι συναρτήσεις κέρδους συμβολαίων δικαιώματος πώλησης τύπου Barrier, για τις παραπάνω τέσσερις κατηγορίες, μπορούν να υπολογιστούν απλά αντικαθιστώντας την $(S_T - K)_+$ στις παραπάνω σχέσεις με την $(K - S_T)_+$.

Asian Options

Τα Asian Options δύναται να εξασκηθούν από τον αγοραστή στην λήξη τους, αλλά η τιμή εξασκήσής τους εξαρτάται από τη συνολική πορεία της τιμής του υποκείμενου προϊόντος στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Συνήθως, η τιμή εξάσκησης ορίζεται είτε ως ο αριθμητικός είτε ως ο γεωμετρικός μέσος της αξίας του υποκείμενου προϊόντος στο χρονικό διάστημα ζωής του συμβολαίου.

Συνεπώς, η συνάρτηση κέρδους καθεμίας εκ των δύο παραπάνω κατηγοριών συμβολαίων δικαιώματος αγοράς τύπου Asian, ορίζεται ως εξής:

- ✓ Αριθμητικός Μέσος: Οι συναρτήσεις κέρδους του δικαιώματος αγοράς και του δικαιώματος πώλησης ορίζονται αντίστοιχα ως:

$$\left(S_T - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{iT/n} \right)_+ , \quad \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{iT/n} - S_T \right)_+ .$$

- ✓ Γεωμετρικός Μέσος: Οι συναρτήσεις κέρδους του δικαιώματος αγοράς και του δικαιώματος πώλησης ορίζονται αντίστοιχα ως:

$$\left(S_T - \left(\prod_{i=0}^n S_{iT/n} \right)^{1/n+1} \right)_+, \quad \left(\left(\prod_{i=0}^n S_{iT/n} \right)^{1/n+1} - S_T \right)_+.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τις συναρτήσεις κέρδους που παρουσιάστηκαν, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Schoutens (2003, §9.1) και τις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα (2005, §6.5).

4.5 Κατασκευή Ισοδύναμου Μέτρου Martingale

Σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στην παράγραφο (4.3), προκειμένου να διασφαλίσουμε το γεγονός ότι το μοντέλο αγοράς που εργαζόμαστε περιγράφει μια arbitrage-free αγορά, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα μέτρο martingale Q , ισοδύναμο του μέτρου P της πραγματικής αγοράς. Στη παρούσα παράγραφο λοιπόν, αναπτύσσουμε συνοπτικά την μέθοδο Mean-Correcting Martingale Measure που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του απαιτούμενου μέτρου Q .

Εστω $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ μια ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα (γ, A, ν) . Εάν προσθέσουμε στην $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ μια επιπλέον παράμετρο τάσης $m \in \mathbb{R}$, ουσιαστικά κατασκευάζουμε μια νέα ανέλιξη Lévy με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$Y_t = X_t + mt \quad (4.2)$$

$$\Phi_Y(z) = \Phi_X(z) e^{izm} \quad \text{και} \quad f_Y(x) = f_X(x - m)$$

$$(\gamma_Y, A_Y, \nu_Y) = (\gamma + m, A, \nu)$$

Η κατασκευή του μέτρου Q , μέσω της μεθόδου Mean-Correcting Martingale Measure, στηρίζεται στην αντικατάσταση της ανέλιξης $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, που εκφράζει την δυναμική της εξέλιξης της αξίας του υποκείμενου προϊόντος στην πραγματική αγορά, από μια νέα ανέλιξη $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$, η οποία προκύπτει μέσω της σχέσης (4.2) κάνοντας χρήση μιας κατάλληλα επιλεγμένης παραμέτρου m , τέτοιας ώστε η προεξοφλημένη τιμή $\{\hat{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ κάθε προϊόντος S να είναι martingale. Συγκεκριμένα, η παράμετρος m ορίζεται ως:

$$m = r - q - \log \Phi_{X_1}(-i)$$

Μοντέλο Αγοράς	Παράμετρος m
VG	$r - q + v^{-1} \log(1 - \theta \sigma_G^2 - (\sigma^2 \sigma_G^2 / 2))$
NIG	$r - q + \delta (\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$
CGMY	$r - q - C \Gamma(-Y) ((M-1)^Y - M^Y + (G+1)^Y - G^Y)$
Meixner	$r - q - 2\delta (\log(\cos(\beta/2)) - \log(\cos((\alpha + \beta)/2)))$

Πίνακας 4.3: Η παράμετρος m , της μεθόδου Mean-Correcting Martingale Measure, για διαφορετικά μοντέλα αγοράς.

όπου $\Phi_X(\cdot)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της ανέλιξης $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, r το σταθερό συνεχώς ανατοκίζόμενο επιτόκιο της αγοράς και q η σταθερή μερισματική απόδοση (*continuous compound dividend yield*) του υποκείμενου προϊόντος (εάν υπάρχει).

Η συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου m , προκύπτει εάν αναλογιστούμε το γεγονός ότι στην περίπτωση που η $\{\hat{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ είναι martingale ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} E(\hat{S}_1) = \hat{S}_0 &\Leftrightarrow E(e^{-(r-q) \cdot 1} S_1) = e^{-(r-q) \cdot 0} S_0 \Leftrightarrow E(S_0 e^{(X_1 + m \cdot 1)}) e^{-(r-q)} = S_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(e^{i(-i)X_1}) = e^{(r-q) \cdot m} \Leftrightarrow \Phi_{X_1}(-i) = e^{(r-q) \cdot m} \Leftrightarrow m = r - q - \log \Phi_{X_1}(-i) \end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά, στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζουμε την παράμετρο m της μεθόδου Mean-Correcting Martingale Measure, όπως αυτή διαμορφώνεται για τέσσερα συγκεκριμένα μοντέλα αγοράς.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την μέθοδο Mean-Correcting Martingale Measure, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Schoutens (2003, §6.2.2).

4.6 Μοντελοποίηση Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος

Η μέθοδος μοντελοποίησης της αξίας των προϊόντων της αγοράς, θεωρείται ως μια εκ των κρισιμότερων επιλογών για την κατασκευή κάθε μοντέλου αγοράς. Στο μοντέλο μας, θεωρούμε πως η αξία κάθε προϊόντος S , υπό το μέτρο P , ορίζεται ως:

$$S_t = S_0 \exp(X_t) \quad (4.3)$$

όπου $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ μια ανέλιξη Lévy και S_0 η αξία του προϊόντος την χρονική στιγμή $t = 0$. Στην βιβλιογραφία, κάθε μοντέλο που ακολουθεί την παραπάνω μέθοδο, καλείται εκθετικό Lévy μοντέλο αγοράς (*exponential Lévy market model*).

Η $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ εκφράζει την δυναμική της εξέλιξης της αξίας κάθε προϊόντος και στην θέση της μπορούμε να τοποθετήσουμε τις περισσότερες από τις ανελίξεις Lévy που μελετήσαμε νωρίτερα, έχοντας πάντα υπόψη μας ότι κάθε ανελίξη Lévy παρουσιάζει διαφορετική προσαρμογή στα χαρακτηριστικά της εκάστοτε αγοράς.

Δεδομένου ότι οι επενδυτές της αγοράς δεν ενδιαφέρονται τόσο για την αξία, όσο για την απόδοση και συγκεκριμένα την λογαριθμική απόδοση του εκάστοτε προϊόντος, μπορούμε δούμε την σχέση (4.3) ως:

$$\log\left(\frac{S_{t+s}}{S_t}\right) = X_s$$

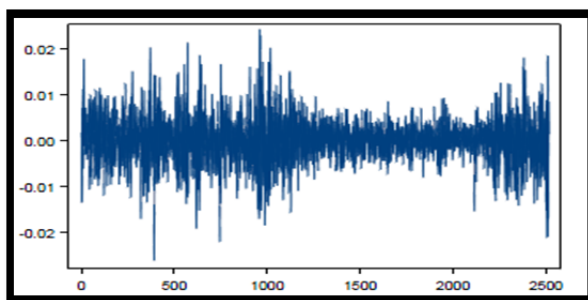
γεγονός που θα πρέπει να ερμηνευθεί ως ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις ενός προϊόντος περιγράφονται από την κατανομή των προσαυξήσεων, τάξης s , της ανελίξης Lévy $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$.

Πρόσθετα, αναλογιζόμενοι όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, αντιλαμβανόμαστε πως θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ως προς το μέτρο υπό το οποίο εργαζόμαστε, καθώς υπό το μέτρο Q του χώρου ουδέτερου ρίσκου, η $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ στην σχέση (4.3), θα πρέπει να αντικατασταθεί από την κατάλληλη $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$.

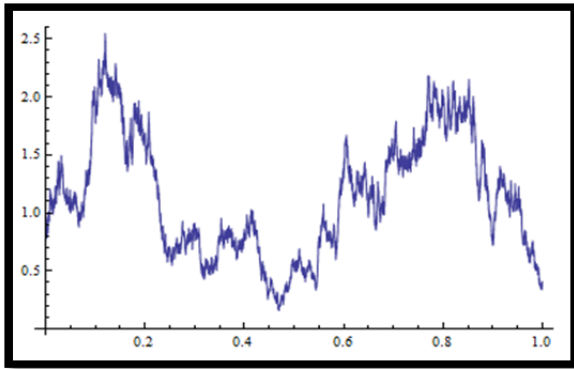
4.7 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος

Το Exponential Lévy μοντέλο αγοράς, παρά το γεγονός ότι μοντελοποιεί ικανοποιητικά αρκετά χαρακτηριστικά της πραγματικής αγοράς, δεν δύναται να περιγράψει τη συμπεριφορά της πτητικότητας (μεταβλητότητα - *volatility*) της αξίας των προϊόντων.

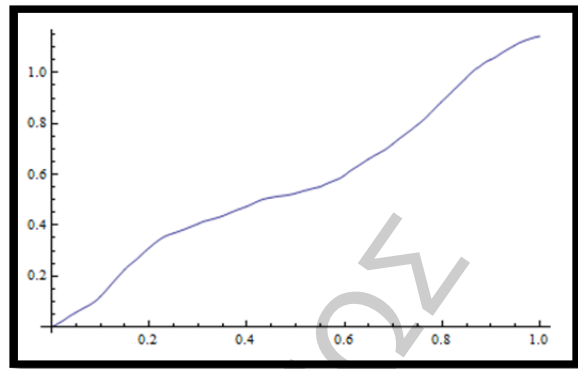
Συγκεκριμένα, όπως καταδεικνύει πληθώρα μελετών, η πτητικότητα της αξίας των προϊόντων τείνει να μεταβάλλεται με τον χρόνο, ενώ παράλληλα εμφανίζει φαινόμενα ομαδοποίησης (*clustering effects*), δηλαδή μεγάλες μεταβολές στην αξία των προϊόντων τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες μεταβολές και αντίστοιχα, μικρές μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές μεταβολές.



Σχήμα 4.1: Λογαριθμική απόδοση του Standard & Poor's 500 (Μίχας, 2008)



Σχήμα 4.2: Μονοπάτι διαδικασίας CIR.



Σχήμα 4.3: Μονοπάτι αντίστοιχης ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR.

Για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της στοχαστικής αλλαγής του χρόνου (*stochastic time change method*). Ουσιαστικά, η εν λόγω μέθοδος μετατρέπει το Exponential Lévy μοντέλο αγοράς, από ένα μοντέλο σταθερής μεταβλητότητας, σε ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας (*stochastic volatility*), μέσω της στοχαστικής αλλαγής του χρόνου της ανέλιξης Lévy ($\{X_t\}_{t \in [0, T]}$) που περιγράφει την δυναμική της εξέλιξης της αξίας (S_t) των προϊόντων, με μια κατάλληλη στοχαστική διαδικασία (Y_t).

Δεδομένου ότι επιθυμούμε να περιγράψουμε τις μεταβολές της πτητικότητας μέσω της στοχαστικής αλλαγής του χρόνου, η στοχαστική διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να είναι θετική και αύξουσα.

Στο μοντέλο μας θα εργασθούμε με την ολοκληρωμένη διαδικασία CIR (*Integrated CIR Process*), η οποία ορίζεται ως:

$$Y(t) = \int_0^t y_s ds$$

όπου y_t η θετική διαδικασία, με τάση αναστροφής στον μέσο (*mean-reverting*), που επιλύει την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dy_t = \kappa(\eta - y_t) dt + \lambda y_t^{1/2} dW_t.$$

Σύμφωνα με τους Cox, Ingersoll και Ross (1985), στην περίπτωση που οι παράμετροι κ , η , λ ικανοποιούν την σχέση:

- $2\kappa\eta < \lambda^2$, η CIR διαδικασία δύναται να αγγίξει το μηδέν.
- $2\kappa\eta \geq \lambda^2$, η θετική τάση είναι αρκετά μεγάλη με άμεση συνέπεια η CIR διαδικασία να είναι αδύνατο να αγγίξει το μηδέν.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\{Y_t\}_{t \in [0, \eta]}$, δεδομένης της αρχικής τιμής y_0 , είναι γνωστή ως:

$$\Phi_{Y_t}(z, t, y_0; \kappa, \eta, \lambda) = E(\exp(izY_t) | y_0) = A(t, z) \exp(B(t, z)y_0)$$

$$\text{με } A(t, z) = \exp(\kappa^2 \eta t / \lambda^2) (\cosh(\gamma t / 2) + (\kappa / \gamma) \sinh(\gamma t / 2))^{-2\kappa \eta / \lambda^2},$$

$$B(t, z) = 2iz(\kappa + \gamma \coth(\gamma t / 2))^{-1}, \quad \gamma = \sqrt{\kappa^2 - 2iz\lambda^2},$$

όπου η ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός μεταβολής του χρόνου (*long run mean rate of time change*), κ ο ρυθμός αναστροφής στο μέσο (*mean-reversion rate*) και λ η παράμετρος που ελέγχει την μεταβλητότητα της χρονικής μεταβολής.

Η CIR διαδικασία, σύμφωνα με τον Schoutens (2003), μπορεί να προσομοιωθεί εύκολα μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$y_t = y_{t-1} + \kappa(\eta - y_{t-1})\Delta t + \lambda \sqrt{\Delta t y_{t-1}} u_n$$

όπου y_0 η εκτιμηθείσα μεταβλητότητα της πραγματικής αγοράς και $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$ ανεξάρτητοι τυχαίοι αριθμοί από την τυπική κανονική κατανομή.

Το γεγονός ότι σύμφωνα με το παραπάνω αλγόριθμο η y_t κατανέμεται κανονικά, δύναται να μας οδηγήσει, ανεξάρτητα από το εάν η παράμετροι κ, η, λ ικανοποιούν ή δεν ικανοποιούν την $2\kappa\eta < \lambda^2$, στην προσομοίωση μιας διαδικασίας CIR η οποία θα λαμβάνει αρνητικές τιμές.

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, στους αλγόριθμους που ακολουθούν προσομοιώσουμε την CIR διαδικασία μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$y_t = y_{t-1} + \kappa(\eta - y_{t-1}^+) \Delta t + \lambda \sqrt{\Delta t y_{t-1}^+} u_n, \quad \text{με } y_{t-1}^+ = \max(y_{t-1}, 0),$$

που αναφέρουν οι Andersen et al. (2010), η οποία συνεχίζει να επιτρέπει στην y_t να λάβει αρνητικές τιμές, αλλά μόλις αυτό συμβεί, στο αμέσως επόμενο βήμα ο αλγόριθμος περιορίζει την επίδραση του όρου της διάχυσης και επιτρέπει στην τάση να οδηγήσει την y_t στις θετικές τιμές.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τη μέθοδο στοχαστικής αλλαγής του χρόνου μέσω της ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Schoutens (2003, §7.2.1 & §8.4.8).

4.8 Μοντέλο Αγοράς Εκθετικών Lévy Ανελιξιών Στοχαστικής Μεταβλητότητας

Το μοντέλο αγοράς που προκύπτει από την στοχαστική αλλαγή του χρόνου ενός μοντέλου Exponential Lévy, καλείται εκθετικό Lévy μοντέλο αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας (*Stochastic Volatility Exponential Lévy Market Model*).

Η αξία κάθε προϊόντος στο stochastic volatility exponential Lévy μοντέλο αγοράς, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q , όπως αναφέρει ο Schoutens (2003, §7.3) δίδεται από μια ανέλιξη της μορφής:

$$S_t = S_0 \frac{\exp((r-q)t)}{E(\exp(X_{Y_t} | y_0))} \exp(X_{Y_t}) \quad (4.4)$$

$\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ μια ανέλιξη Levy με $\Phi_{X_t}(z) = E(\exp(izX_t)) = \exp(t\Psi_{X_1}(z))$,

$\{X_{Y_t}\}_{t \in [0, T]}$ μια ανέλιξη Levy με $\Phi_{X_{Y_t}}(z) = E(\exp(Y(t)\Psi_{X_1}(z))) = \Phi_Y(-i\Psi_{X_1}(z), t, y_0; \kappa, \eta, \lambda)$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση του λογαρίθμου της αξίας κάθε προϊόντος, δοθεισών των αρχικών τιμών S_0 και y_0 ορίζεται ως:

$$\Phi_{\log(S_t)}(z) = E(\exp(iz \log(S_t)) | S_0, y_0) = \exp(iz((r-q)t + \log(S_0))) \frac{\Phi_Y(-i\Psi_{X_1}(z); t, y_0)}{\Phi_Y(-i\Psi_{X_1}(-i); t, y_0)^{iz}}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το κλάσμα της σχέσης (4.4), το οποίο μάλιστα μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\frac{\exp((r-q)t)}{E(\exp(X_{Y_t} | y_0))} = \frac{\exp((r-q)t)}{\exp(-\omega t)} = \exp((r-q)t + \omega t)$$

όπου το ω ορίζεται ως:

$$\omega = -\log \Phi_{X_1}(-i).$$

Δεδομένης της παραπάνω ανάλυσης αλλά και του γεγονότος ότι το κατάλληλο m της μεθόδου Mean-Correcting Martingale Measure ορίζεται ως:

$$m = r - q - \log \Phi_{X_1}(-i)$$

εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο κλασματικός όρος στην σχέση (4.4), ουσιαστικά εκφράζει την απαραίτητη διόρθωση της X_t , ώστε να μεταφερθούμε στον χώρο ουδέτερου ρίσκου.

Μάλιστα, σύμφωνα με τους Cont και Tankov (2004, §15.5), εκδοχές μοντέλων martingale στοχαστικής μεταβλητότητας, μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στοχαστικής αλλαγής του χρόνου σε εκδοχές martingale ανελιξιών Lévy.

Λήμμα 4.8.1 Έστω $\{M_t\}_{t>0}$ ένα θετικό martingale και $\{v_t\}_{t>0}$ μια ανεξάρτητη (αύξουσα) διαδικασία χρονικής μεταβολής. Τότε η χρονικά μεταβληθείσα διαδικασία $M(v_t)$ είναι martingale (ως προς την διήθηση που παρήχθη από τις $M(v_t)$ και v_t).

4.9 Προσομοίωση Monte Carlo Μοντέλων Αγοράς

Στην παρούσα παράγραφο, μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo του Variance Gamma εκθετικού Lévy μοντέλου αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας, θα εκτιμήσουμε την αξία συμβολαίων δικαιώματος αγοράς τύπου Barrier, LookBack και Asian.

Ουσιαστικά, προκειμένου να επιτύχουμε τον στόχο μας θα έπρεπε να παρουσιάσουμε συνολικά τρεις διαφορετικούς αλγόριθμους. Όμως, δεδομένου ότι η μοναδική διαφοροποίηση μεταξύ των τριών αυτών αλγόριθμων αφορά στη συνάρτηση κέρδους, στην συνέχεια παρουσιάζουμε το σύνολο των αλγορίθμων μέσα από έναν ενιαίο αλγόριθμο, στον οποίο σημειώνουμε την απαιτούμενη διαφοροποίηση μεταξύ των διαφορετικών τύπων συμβολαίων δικαιώματος αγοράς. Συγκεκριμένα:

➤ **Βήμα 1^ο: Προσομοίωση διαδικασίας CIR στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.**

Προκειμένου να προσομοιώσουμε την διαδικασία CIR, θα χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 4.7, συγκεκριμένα:

$$y_{t_i} = y_{t_{i-1}} + \kappa(\eta - y_{t_{i-1}}^+)dt + \lambda\sqrt{dt y_{t_{i-1}}^+} u_n, \quad y_{t_{i-1}}^+ = \max(y_{t_{i-1}}, 0), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

όπου κ, η, λ , δεδομένες παράμετροι, y_{t_0} η μεταβλητότητα τη αξίας του υποκείμενου προϊόντος στην αγορά την χρονική στιγμή t_0 και dt η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών t_i, t_{i-1} όπως προκύπτει από την διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα.

➤ **Βήμα 2^ο: Υπολογισμός ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.**

Προκειμένου να υπολογίσουμε την ολοκληρωμένη διαδικασία CIR, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i-1}} + \frac{1}{2}(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})dt, \quad Y_{t_0} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

όπου dt η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών t_i, t_{i-1} όπως προκύπτει από την διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα.

➤ **Βήμα 3^ο: Προσομοίωση ανέλιξης Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ στο χρονικό διάστημα $[0, Y_T]$.**

Προκειμένου να προσομοιώσουμε την διαδικασία Variance Gamma $\{X_t\}_{t \geq 0}$, που περιγράφει την δυναμική της εξέλιξης της αξίας της μετοχής, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον Αλγόριθμο 3.2.3 ή τον Αλγόριθμο 3.2.4.

Οι παράμετροι που απαιτούνται για την υλοποίηση των παραπάνω αλγορίθμων, θεωρείται πως έχουν εκτιμηθεί από τα ιστορικά δεδομένα της μετοχής.

Επιπροσθέτως, τονίζουμε το γεγονός ότι θα πρέπει να προσομοιώσουμε την ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ στο χρονικό διάστημα $[0, Y_T]$ και όχι στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Μάλιστα, για τον λόγο αυτό, η απόσταση dt μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών t_i, t_{i-1} ($\forall i=1, \dots, n$) προκύπτει από την διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος $[0, Y_T]$ σε n το πλήθος ισομήκη διαστήματα.

➤ **Βήμα 4^ο: Προσομοίωση ανέλιξης Lévy $\{X_{Y_t}\}_{t \geq 0}$ στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.**

Προκειμένου να προσομοιώσουμε την ανέλιξη Lévy $\{X_{Y_t}\}_{t \geq 0}$, που εκφράζει την χρονικά μεταβληθείσα ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ μέσω της ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\left(X(Y_{t_i}) \right)_{i=1}^n = \left(\sum_{j=1}^i \left(X(Y_{t_j}) - X(Y_{t_{j-1}}) \right) \right)_{i=1}^n$$

Σημειώνουμε το γεγονός ότι ενώ η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ αναφερόταν στο χρονικό διάστημα $[0, Y_T]$, η ανέλιξη $\{X_{Y_t}\}_{t \geq 0}$ αναφέρεται στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

➤ **Βήμα 5^ο: Προσομοίωση αξίας υποκείμενου προϊόντος στο χρονικό διάστημα $[0, T]$, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q .**

Προκειμένου να προσομοιώσουμε την ανέλιξη $\{S_t\}_{t \geq 0}$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση που προκύπτει από την σχέση (4.4). Συγκεκριμένα:

$$S_{t_i} = S_{t_0} \frac{\exp((r-q)t_i)}{E(\exp(X(Y_{t_i})|y_0))} \exp(X(Y_{t_i})), \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Δεδομένου ότι,

$$E(\exp(X(Y_t)|y_0)) = \Phi_{Y_t}(-i \Psi_{X_1}(-i), t, y_0; \kappa, \eta, \lambda),$$

απαιτείται επιπλέον ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης:

$$\Phi_{Y_t}(z, t, y_0; \kappa, \eta, \lambda) = A(t, z) \exp(B(t, z)y_0)$$

για $z = -i \Psi_{X_1}(-i)$, όπου:

$$A(t, z) = \exp(\kappa^2 \eta t / \lambda^2) (\cosh(\gamma t / 2) + (\kappa / \gamma) \sinh(\gamma t / 2))^{-2\kappa \eta / \lambda^2},$$

$$B(t, z) = 2iz(\kappa + \gamma \coth(\gamma t / 2))^{-1}, \quad \gamma = \sqrt{\kappa^2 - 2iz\lambda^2},$$

καθώς επίσης και ο υπολογισμός του χαρακτηριστικού εκθετικού της Variance Gamma διαδικασίας, με $z = -i$:

$$\Psi_{VG}(z; \mu, \sigma, \sigma_G^2) = -\frac{1}{\sigma_G^2} \log\left(1 + \left(z^2 \sigma^2 \sigma_G^2 / 2\right) - iz\mu\sigma_G^2\right).$$

➤ **Βήμα 6^ο: Υπολογισμός Κέρδους, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q.**

Προκειμένου να υπολογίσουμε το κέρδος (g) που αποδίδει καθένα από τα τρία διαφορετικά είδη συμβολαίων δικαιώματος αγοράς, υπό το μέτρο Q, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη συνάρτηση κέρδους. Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε:

- ✓ Την $(S_T - m_T^S)_+$, για το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς τύπου LookBack.
- ✓ Την $(S_T - K)_+ 1_{m_T^S \leq S^*}$, για το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς τύπου Barrier (DIBC).
- ✓ Την $\left(S_T - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{iT/n}\right)_+$, για το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς τύπου Asian.

➤ **Βήμα 7^ο: Υπολογισμός Αναμενόμενου Κέρδους, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q.**

Προκειμένου να υπολογίσουμε το αναμενόμενο κέρδος (\hat{g}) του συμβολαίου δικαιώματος αγοράς, υπό το μέτρο Q, αρκεί να επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα N το πλήθος φορές και να υπολογίσουμε την μέση απόδοση.

$$\hat{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i$$

➤ **Βήμα 8^ο: Εκτίμηση Αξίας Συμβολαίου Δικαιώματος Αγοράς, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q.**

Προκειμένου να εκτιμήσουμε την αξία του συμβολαίου δικαιώματος αγοράς, υπό το μέτρο Q, θα πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα (προεξοφλημένη) αξία του αναμενόμενου κέρδους που θα αποκομίσει ο επενδυτής, την χρονική στιγμή T , από την εξάσκηση του δικαιώματος που θα έχει στην κατοχή του, δηλαδή την σχέση:

$$C = e^{-rT} \hat{g}.$$

Variance Gamma Stochastic Volatility Μοντέλο Αγοράς			
$\theta = -0,126365$	$\sigma = 0,161564$	$\sigma_G^2 = 0,0834056$	
$\kappa = 0,602$	$\eta = 1,556$	$\lambda = 1,9992$	$\gamma_0 = 1$

Πίνακας 4.4: Τιμές παραμέτρων Variance Gamma εκθετικού Lévy μοντέλου αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q.

	Αριθμός Επαναλήψεων Μεθόδου Monte Carlo						
	10^1	$5 \cdot 10^1$	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4
LookBack_(VG)	111,924	151,776	133,076	127,447	126,113	127,955	129,156
DI-Barrier_(VG)	0,00000	25,2123	20,0202	22,6907	26,3560	28,3206	26,2749
AA-Asian_(VG)	64,9470	49,2035	46,2024	48,7463	49,8018	47,6097	47,3696

Πίνακας 4.5: Εκτιμηθείσες τιμές συμβολαίων δικαιώματος αγοράς.

Δεδομένων των αλγορίθμων, προχωρήσαμε στην εκτίμηση της αξίας των συμβολαίων δικαιώματος αγοράς, θεωρώντας ως υποκείμενο προϊόν την τιμή του δείκτη Standard & Poor's 500 με:

- ✓ Αρχική τιμή, $S_0 = 1.124,47$.
- ✓ Τιμή εξάσκησης, $K = S_0 = 1.124,47$.
- ✓ Τιμή Barrier, $S_{DIBC}^* = 0,95 \cdot S_0 = 1.068,2465$.

Οι τιμές των παραμέτρων του Variance Gamma εκθετικού Lévy μοντέλου αγοράς στοχαστικής μεταβλητότητας, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q, παρουσιάζονται στον Πίνακα (4.4). Επιπροσθέτως, το σταθερό άνευ κινδύνου συνεχώς ανατοκιζόμενο ονομαστικό επιτόκιο r και η σταθερή μερισματική απόδοση q λαμβάνουν αντίστοιχα τις τιμές $r = 1,9\%$ και $q = 1,2\%$. Τέλος, το σύνολο των εκτιμήσεων πραγματοποιήθηκε για συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς με χρόνο ζωής ενός έτους ($T = 1$), έχοντας διακριτοποιήσει τον χρόνο σε $n = 250$ ισομήκη διαστήματα, που εκφράζουν τις ημέρες συναλλαγών. Το σύνολο των τιμών που χρησιμοποιήθηκαν, προέρχονται από το σύγγραμμα του Schoutens (2003).

Οι τιμές των διαφορετικών τύπων συμβολαίων δικαιώματος αγοράς, όπως προέκυψαν από διαφορετικό πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5.

Εκτιμήσεις Schoutens (2003)			
	VG-CIR-EWI	VG-CIR-IILB	Black-Scholes (σ_{lse})
LookBack _(VG)	135,270	134,770	155,120
DI-Barrier _(VG)	17,7100	17,4200	32,8800
AA-Asian _(VG)	×	×	×

Πίνακας 4.6: Εκτιμηθείσες τιμές συμβολαίων δικαιώματος αγοράς, Schoutens (2003).

Με μια πρώτη ματιά στα αποτελέσματα, θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε από επουσιώδεις έως ιδιαίτερα σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των εκτιμησεών μας και των εκτιμήσεων του Schoutens (2003, §7.3), που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.6.

Βέβαια, σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε το γεγονός ότι αν και χρησιμοποιήσαμε το Stochastic Volatility Exponential Lévy μοντέλο αγοράς με την παραμετροποίηση που αναφέρει ο Schoutens (2003), οι αλγοριθμοί μας διαφέρουν σημαντικά καθώς ο Schoutens χρησιμοποιεί στα μοντέλα του:

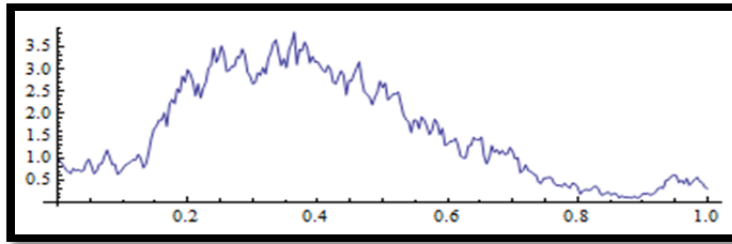
- ✓ Διαφορετική μέθοδο για την προσομοίωση της διαδικασίας CIR.
- ✓ Μέθοδο μείωσης της διακύμανσης (*Variance Reduction Method*).
- ✓ Ισοβαρή διαστήματα (*Equally Weighted Intervals – EWIs*) και διαστήματα με αντίστροφα γραμμικά όρια (*Intervals with Inverse Linear Boundaries – IILB*)

Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εμφάνιση διαφοροποιήσεων μεταξύ των εκτιμήσεων μας και των εκτιμήσεων του Schoutens, ήταν αναμενόμενη.

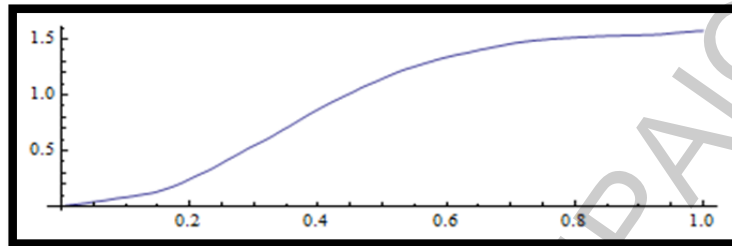
Στα Σχήματα 4.4 έως 4.9 παρουσιάζονται οι ανελίξεις που προκύπτουν από μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράλληλη μελέτη των διαγραμμάτων 4.4, 4.5 και 4.6, 4.7.

Στο παρόν κεφάλαιο λοιπόν, είδαμε πως οι ανελίξεις Lévy μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση της αξίας συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης. Μάλιστα, με μια αρκετά απλή εφαρμογή, επιτύχαμε να λάβουμε ικανοποιητικές εκτιμήσεις για την αξία συγκεκριμένων Exotic Options.

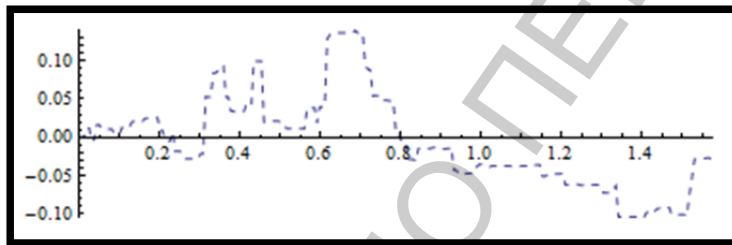
Φυσικά, η οικογένεια των ανελίξεων Lévy δεν απαρτίζεται αποκλειστικά από τις ανελίξεις που παρουσιάσαμε αλλά αντιθέτως διαθέτει πολλά περισσότερα μέλη, τα οποία μάλιστα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή συνθετότερων Stochastic Volatility Exponential Lévy μοντέλων αγοράς (π.χ. Generalized Hyperbolic, CGMY, κ.α.), με στόχο πάντα την πραγματοποίηση ακριβέστερων εκτιμήσεων.



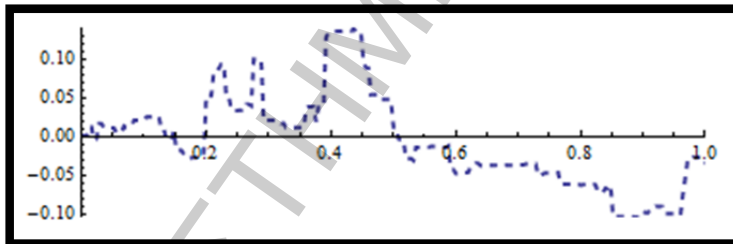
Σχήμα 4.4: Μονοπάτι διαδικασίας CIR στο $[0, T]$.



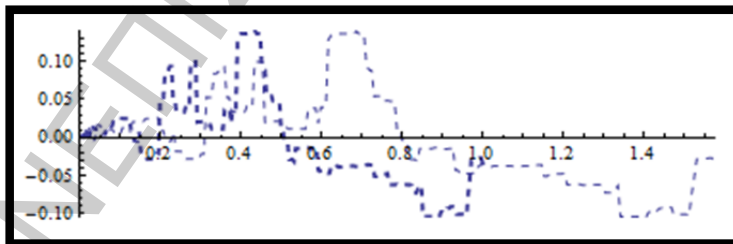
Σχήμα 4.5: Μονοπάτι ολοκληρωμένης διαδικασίας CIR στο $[0, T]$.



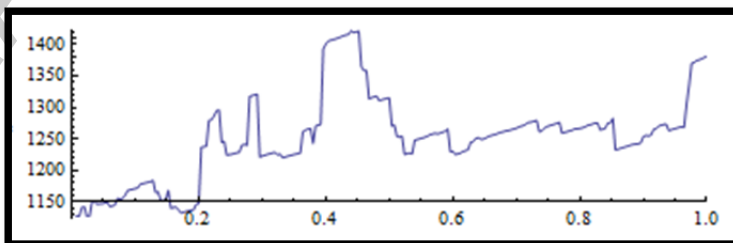
Σχήμα 4.6: Μονοπάτι VG διαδικασίας στο $[0, Y_T]$.



Σχήμα 4.7: Μονοπάτι χρονικά μεταβληθείσης VG διαδικασίας στο $[0, T]$.



Σχήμα 4.8: Από κοινού τα μονοπάτια των VG & χρονικά μεταβληθείσης VG.



Σχήμα 4.9: Μονοπάτι Αξίας Υποκείμενου Προϊόντος στο $[0, T]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Παράρτημα

```
(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών από την Ομοιόμορφη Κατανομή = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικά. *)

n = 10000; α = 0; β = 10;
RandomNumbers = {}; UnifRN1 = 0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
 παραγωγή περισσότερων του ενός τυχαίου αριθμού. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

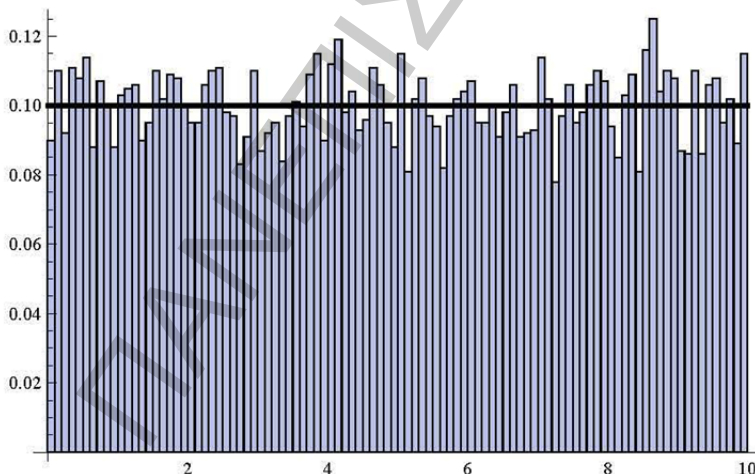
  (* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Ομοιόμορφη Κατανομή U(α,β). *)

  UnifRN1 = α + ((β - α) * Random[]);
  AppendTo[RandomNumbers, UnifRN1];

];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της U(α,β) *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

<< Histograms` ;
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale → 1];
p = Plot[1 / (β - α), {x, α, β}, PlotStyle → {Black, Thick}];
Show[h, p]
```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Μεταβλητών από την Εκθετική Κατανομή = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδিকা. *)

n = 10 000; λ = 1;
RandomNumbers = {}; UnifRN1 = 0; ExprN1 = 0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
 παραγωγή περισσότερων του ενός τυχαίου αριθμού. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

  (* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Ομοιόμορφη Κατανομή U(0,1). *)

  UnifRN1 = Random[];

  (* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Εκθετική Κατανομή Exp(λ). *)

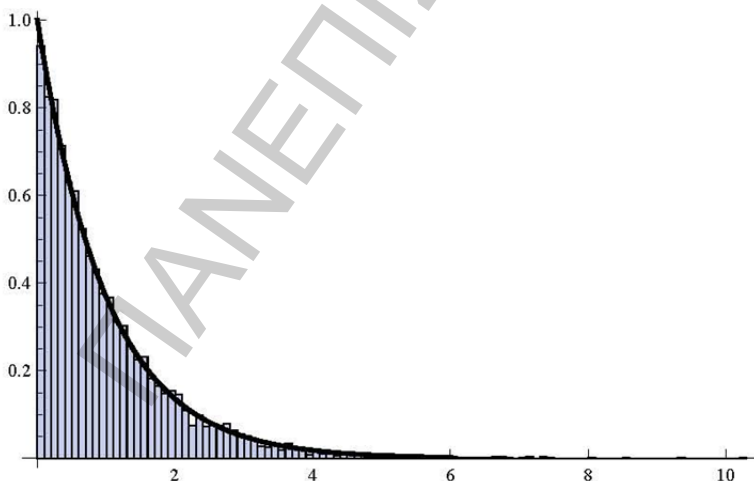
  ExprN1 = -  $\frac{1}{\lambda}$  * Log[UnifRN1];
  AppendTo[RandomNumbers, ExprN1];

];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Exp(λ) *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

<<Histograms` ;
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale → 1];
p = Plot[λ * Exp[-λ * x], {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Thick}];
Show[h, p]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Μεταβλητών από την Κατανομή Poisson = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικά. *)

n = 10000; λ = 4;
RandomNumbers = {}; UnifRN1 = 0; PoisRN1 = 0; v1 = 0; v2 = 0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
 παραγωγή περισσότερων του ενός τυχαίου αριθμού. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

  (* Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από την Ομοιόμορφη Κατανομή U(0,1]. *)

  UnifRN1 = Random[];

  (* Αρχικοποίηση τιμής των v1, v2 και PoisRN1. *)

  v1 = Exp[-λ]; v2 = v1; PoisRN1 = 0;

  (* Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Poisson P(λ). *)

  While[ UnifRN1 > v2,
    v1 = (v1 * λ) / (PoisRN1 + 1); v2 = v2 + v1;
    PoisRN1 = PoisRN1 + 1;
  ];

  AppendTo[RandomNumbers, PoisRN1];

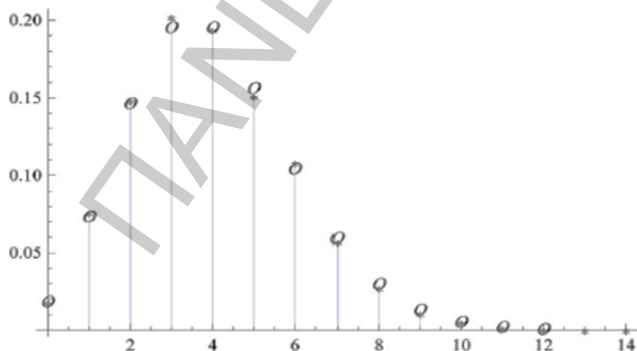
];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της P(λ) *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

Test = Tally[RandomNumbers];
Do[Test[[i, 2]] = Test[[i, 2]] / n, {i, 1, Length[Test]}];

h = ListPlot[Test, Filling → Axis, PlotStyle → Black, PlotMarkers → "*"];
p =
  ListPlot[Table[{x,  $\frac{\lambda^x}{x!} \cdot \text{Exp}[-\lambda]$ }, {x, 0, 3 * λ}], PlotStyle → Black, PlotMarkers → "o"];
Show[h, p]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών από την Κανονική Κατανομή = *)
(* = (Box-Muller Method) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 5000; μ = 0; σ = 1;
RandomNumbers = {}; UnifRN1 = 0; UnifRN2 = 0; NormRN1 = 0; NormRN2 = 0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για
την παραγωγή περισσότερων των δυο τυχαίων αριθμών. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή δύο ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών από την Ομοιόμορφη Κατανομή U(0,1). *)

UnifRN1 = Random[]; UnifRN2 = Random[];

(* Παραγωγή δύο ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών από την Κανονική Κατανομή N(μ,σ²). *)

NormRN1 = μ + σ * Sqrt[-2 * Log[UnifRN1]] * Sin[2 * Pi * UnifRN2];
AppendTo[RandomNumbers, NormRN1];

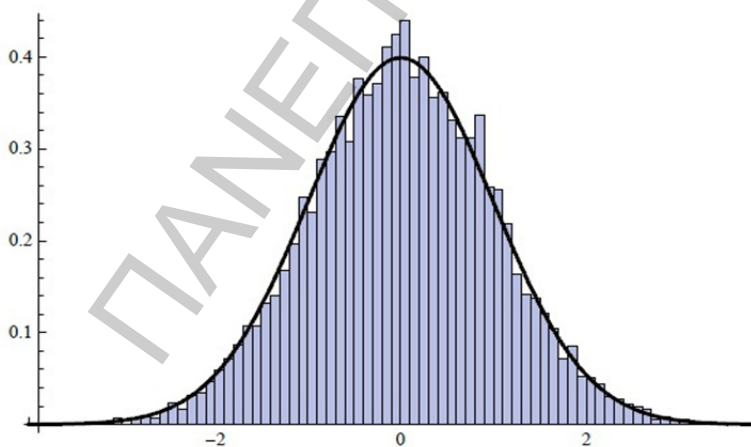
NormRN2 = μ + σ * Sqrt[-2 * Log[UnifRN1]] * Cos[2 * Pi * UnifRN2];
AppendTo[RandomNumbers, NormRN2];

];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της N(μ,σ²) *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα
των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

<< Histograms`;
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale → 1];
p = Plot[Exp[-(x - μ)² / (2 * σ²)] / (2 * Pi * σ²)⁰.⁵,
{x, μ - (4 * σ), μ + (4 * σ)}, PlotStyle → {Black, Thick}];
Show[h, p]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών από την Inverse Gaussian Κατανομή = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικά. *)

n = 10 000; μ = 1; λ = 20;
UnifRN1 = 0; NormRN1 = 0; InvGausRN1 = 0;
RandomNumbers = {};

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
 παραγωγή περισσότερων του ενός τυχαίου αριθμού. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

  (* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κανονική Κατανομή N(0,1). *)

  NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

  (* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Inverse Gaussian Κατανομή IG(μ,λ). *)

  InvGausRN1 = μ +  $\frac{\mu^2 * \text{NormRN1}^2}{2 * \lambda} - \frac{\mu}{2 * \lambda} * \text{Sqrt}[4 * \mu * \lambda * \text{NormRN1}^2 + \mu^2 * \text{NormRN1}^4]$ ;

  UnifRN1 = Random[];

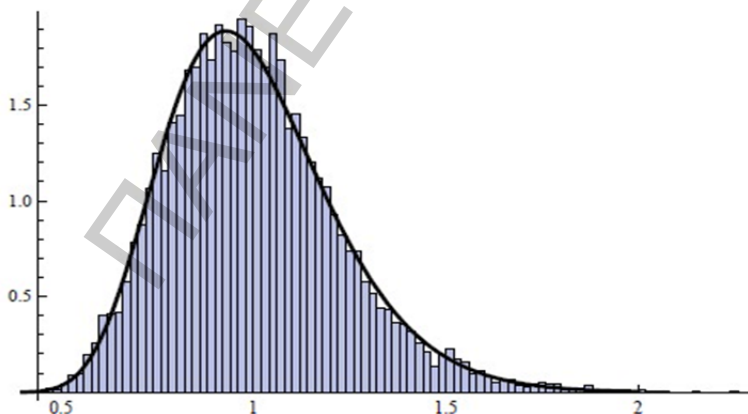
  If[ UnifRN1 ≤  $\frac{\mu}{\text{InvGausRN1} + \mu}$ ,
    AppendTo[RandomNumbers, InvGausRN1],
    AppendTo[RandomNumbers,  $\frac{\mu^2}{\text{InvGausRN1}}$ 
  ];

];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της IG(μ,λ) *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

<< Histograms`;
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale → 1];
p = Plot[PDF[InverseGaussianDistribution[μ, λ], x],
  {x, 0, 2}, PlotStyle → {Black, Thick}];
Show[h, p]

```



(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών από την Γάμμα = *)
(* ===== *)

(* PDF ==  $\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$  ==  $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$  =>  $\alpha=k$  &&  $\beta=(\frac{1}{\theta})$  *)

(* X~Gamma(k,θ) => cX~Gamma(k,cθ) *)
(* X~Gamma(α,β) => cX~Gamma(α,β/c) *)

(* ===== *)
(* Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την σ.π.π. της κατανομής *)
(* Γάμμα με παράμετρο σχήματος α και αντίστροφη παράμετρο *)
(* κλίμακας (παράμετρος ρυθμού) β. *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)

n = 10 000; α = 9; β = 0.5; c = 1;
sum = 0; v1 = 0; v2 = 0; v3 = 0; λ = 0; z = 0;
RandomNumbers = {}; UnifRN1 = 0; UnifRN2 = 0; NormRN = 0; GammaRN = 0;

(* Για k=1, η κατανομή Γ(1,cθ) ταυτίζεται με την κατανομή Exp(1/cθ). *)
(* Συνεπώς, μιας και εμείς χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της Κατανομής *)
(* Γάμμα με (1,β), αρκεί να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την Exp(1)/β. *)

If[α == 1,
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
    GammaRN = -Log[Random[]];
    AppendTo[RandomNumbers, GammaRN / β];
  ];
];

(* Για 0 < k < 1, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο GS (Μέθοδος Απόρριψης) *)
(* των Ahrens και Dieter (1974) για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από *)
(* την κατανομή Γ(k,cθ). *)

If[α > 0 && α < 1,
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
    Label[RestartLoop1];
    UnifRN1 = Random[]; UnifRN2 = Random[];
    v1 = (E + α) / E; v2 = v1 * UnifRN1;

    If[v2 ≤ 1,
      GammaRN = v21/α;
      If[UnifRN2 > E-GammaRN, Goto[RestartLoop1]];
    ];

    If[v2 > 1,
      GammaRN = -Log[(v1 - v2) / α];
      If[UnifRN2 > GammaRNα-1, Goto[RestartLoop1]];
    ];

    AppendTo[RandomNumbers, GammaRN / β];
  ];
];

```



```

(* Για  $\alpha > 1$ , θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της απόρριψης για *)
(* την παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κατανομή  $\Gamma(k, c\theta)$ . *)

If[ $\alpha > 1$ ,

  For[ $i = 1, i \leq n, i++$ ,

    Label[RestartLoop2];
    UnifRN1 = Random[]; UnifRN2 = Random[];

     $v1 = (-E * UnifRN1 * \text{Log}[UnifRN1])^{\alpha - 1}$ ;

    If[UnifRN2  $\leq v1$ ,
      GammaRN =  $-\frac{\alpha}{\beta} * \text{Log}[UnifRN1]$ ;
      AppendTo[RandomNumbers, GammaRN];
    ];

    If[UnifRN2  $> v1$ , Goto[RestartLoop2];];

  ];

];

(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της  $G(k, \theta)$  *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

<<Histograms`];

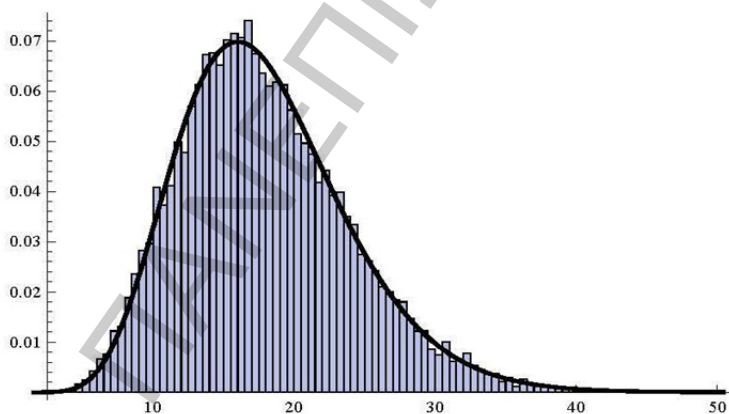
 $k = \alpha; \theta = \frac{1}{c * \beta}$ ;

h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale  $\rightarrow 1$ ];

w = Plot[ $\frac{(c * \theta)^{-k} * x^{k-1}}{\text{Gamma}[k]} * \text{Exp}[-x / (c * \theta)]$ ,
  {x, 0, Max[RandomNumbers]}, PlotStyle  $\rightarrow \{\text{Black}, \text{Thick}\}$ ];

Show[h, w]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

(* Πηγή: Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson and Binomial Distributions [J.H.Ahrens, U.Dieter] *)

```

(* ===== *)
(* = Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών από την Stable Κατανομή = *)
(* =  $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$  = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 10000;  $\alpha = 1.4$ ;  $\beta = 0.3$ ;  $\sigma = 1$ ;  $\mu = 0$ ;
UnifRN1 = 0; ExprN1 = 0; aStabRN1 = 0; F1 = 0; F2 = 0;
RandomNumbers = {};

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή περισσότερων *)
(* του ενός τυχαίου αριθμού από την  $\alpha$ -Stable Κατανομή  $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ . *)

For[i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Εκθετική Κατανομή Exp(1). *)
ExprN1 = -Log[Random[]];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Ομοιόμορφη Κατανομή  $U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . *)
UnifRN1 =  $-\frac{\text{Pi}}{2} + (\text{Pi} * \text{Random}[])$ ;

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την  $\alpha$ -Stable Κατανομή  $S_{\alpha}(1, \beta, 0)$ ,
στην περίπτωση όπου  $\alpha \neq 1$ . *)
If[ $\alpha \neq 1$ ,


$$F1 = \frac{\text{ArcTan}[\beta * \text{Tan}[\text{Pi} * \frac{\alpha}{2}]]}{\alpha};$$



$$F2 = \left(1 + \beta^2 * \left(\text{Tan}[\text{Pi} * \frac{\alpha}{2}]\right)^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}};$$



$$aStabRN1 = F2 * \frac{\text{Sin}[\alpha * (\text{UnifRN1} + F1)]}{\text{Cos}[\text{UnifRN1}]^{1/\alpha}} * \left(\frac{\text{Cos}[\text{UnifRN1} - \alpha * (\text{UnifRN1} + F1)]}{\text{ExprN1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}};$$


];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την  $\alpha$ -Stable Κατανομή  $S_{\alpha}(1, \beta, 0)$ ,
στην περίπτωση όπου  $\alpha = 1$ . *)
If[ $\alpha = 1$ ,


$$aStabRN1 = \left(\frac{2}{\text{Pi}} * \left(\frac{\text{Pi}}{2} + \beta * \text{UnifRN1}\right) * \text{Tan}[\text{UnifRN1}]\right) - \left(\beta * \text{Log}\left[\frac{\frac{\text{Pi}}{2} * \text{ExprN1} * \text{Cos}[\text{UnifRN1}]}{\frac{\text{Pi}}{2} + \beta * \text{UnifRN1}}\right]\right);$$


];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την  $\alpha$ -Stable Κατανομή  $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ . *)
If[ $\alpha \neq 1$ ,
aStabRN1 =  $\sigma * aStabRN1 + \mu$ ,
aStabRN1 =  $\sigma * aStabRN1 + \frac{2}{\text{Pi}} * \beta * \sigma * \text{Log}[\sigma] + \mu$ 
];

AppendTo[RandomNumbers, aStabRN1];

];

(* Πηγή: Stable Distributions -
University of Toronto Risk Lab Technical Report (2003) [Olivares, P., Seco, L.] *)

```

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Poisson Process N(t;λ) = *)
(* = (Exponential Times Method) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκα. *)
λ = 10; T = 1;
Traj = {{0, 0}}; JumpTimes = {}; t = 0;

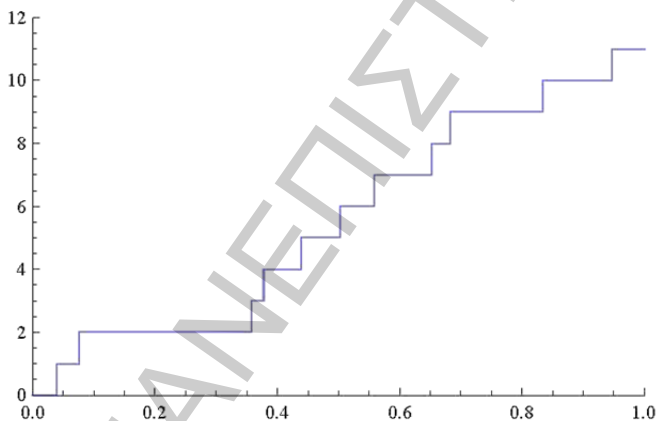
(* Προσομοίωση τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την Exp(λ), έως ότου το άθροισμα *)
(* τους γίνει ίσο ή ξεπεράσει τον χρόνο T. Τα διαδοχικά αθροίσματα της t θα *)
(* εκφράζουν τους διαδοχικούς χρόνους εμφάνισης αλμάτων, στο διάστημα [0,T]. *)
t = 0;
While[t ≤ T,
  t = t + Random[ExponentialDistribution[λ]];
  AppendTo[JumpTimes, t];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεως της ανέλιξης,
όπως αυτό διαμορφώνεται στο διάστημα [0,T]. *)
For[i = 1, i ≤ Length[JumpTimes], i++,
  AppendTo[Traj, {JumpTimes[[i]], i - 1}];
  AppendTo[Traj, {JumpTimes[[i]], i}];
];

(* Παρουσίαση της Ανέλιξης Poisson N(t;λ) που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotJoined → True,
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσικας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Poisson Process N(t;λ) = *)
(* = (Uniformly distributed Jump Times) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικό. *)
n = 1000; λ = 10; T = 1;
JumpTimes = {}; Traj = {{0, 0}}; PoisRN1 = 0;

(* Προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής από την κατανομή Pois(λT), *)
(* που θα εκφράζει τον αριθμό των αλμάτων της ανέλιξης στο [0,T]. *)
PoisRN1 = Random[PoissonDistribution[λ * T]];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την U[0,T], που θα *)
(* εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων της ανέλιξης. *)
For[i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpTimes, Random[UniformDistribution[{0, T}]]];
];

(* Διάταξη κατά αύξοντα αριθμό των χρόνων
εμφάνισης των αλμάτων (JumpTimes) στο διάστημα [0,T]. *)
JumpTimes = Sort[JumpTimes];

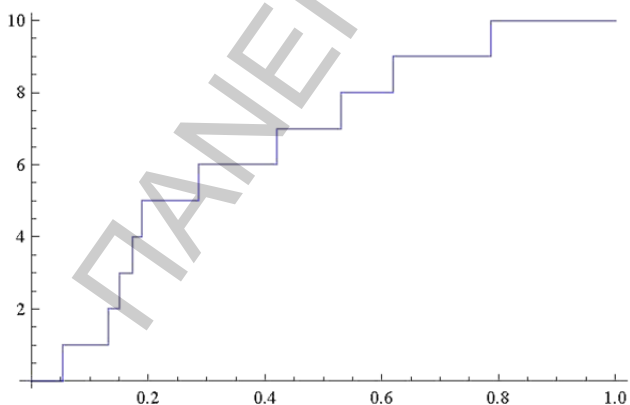
(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεως της ανέλιξης,
όπως αυτό διαμορφώνεται στο διάστημα [0,T]. *)
For[i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[Traj, {JumpTimes[[i]], i - 1}];
  AppendTo[Traj, {JumpTimes[[i]], i}];
];

If[JumpTimes[[PoisRN1]] < T, AppendTo[Traj, {T, PoisRN1}]];

AppendTo[Test, PoisRN1];

(* Παρουσίαση της Compound Poisson Process με τάση  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  που παρήχθη. *)
ListPlot[Traj, PlotJoined → True]

```



(* Πηγή: Σημειώσεις Παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Τεχνικές, Μπούτσινας, Μ. (2004) *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Compensated Poisson Process = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)
n = 10000; T = 1; λ = 10;
PoisRN1 = 0; sum = 0; t = 0; y = 0; i = 0;
JumpTimes = {}; JumpSizes = {}; Traj = {};

(* Προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής από την κατανομή Pois(λT), *)
(* που θα εκφράζει τον αριθμό των αλμάτων της ανέλιξης στο [0,T]. *)
PoisRN1 = Random[PoissonDistribution[λ*T]];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την U[0,T], *)
(* που θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων της ανέλιξης. *)
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpTimes, Random[UniformDistribution[{0, T}]]];
];

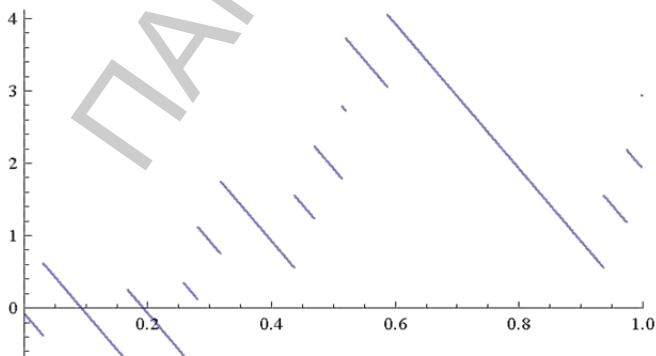
(* Διάταξη κατά αύξοντα αριθμό των χρόνων εμφάνισης των αλμάτων. *)
JumpTimes = Sort[JumpTimes];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την συνάρτηση *)
(* κατανομής των αλμάτων, που θα εκφράζουν το μέγεθος των αλμάτων της ανέλιξης. *)
(* Στον παρόν αλγόριθμο θεωρήσαμε πως το μέγεθος όλων των αλμάτων ισούται με 1. *)
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpSizes, 1];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεως της ανέλιξης, όπως αυτό διαμορφώνεται στο *)
(* διάστημα [0,T]. *)
dt = T/n; sum = 0; i = 1;
For[ t = 0, t ≤ T, t = t + dt,
  If[ i ≤ PoisRN1 && t ≥ JumpTimes[[i]],
    sum = sum + JumpSizes[[i]];
    i++;
  ];
  y = sum - (λ*t);
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];

(* Παρουσίαση της Compound Poisson Process με τάση  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  που παρήχθη. *)
ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Compound Poisson Process με τάση  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  = *)
(* = (Exponential Times Method) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκι. *)
n = 10000; T = 1;  $\gamma$  = 3;  $\lambda$  = 10;
JumpTimes = {}; JumpSizes = {}; Traj = {};
UnifRN1 = 0; ExprN1 = 0; PoisRN1 = 0; JumpDistRN1 = 0;
sum = 0; dt = 0; t = 0;  $\gamma$  = 0; i = 0;

(* Προσομοίωση τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την  $\text{Exp}(\lambda)$ , έως ότου το άθροισμα *)
(* τους γίνει ίσο ή ξεπεράσει τον χρόνο T. Τα διαδοχικά αθροίσματα της t θα *)
(* εκφράζουν τους διαδοχικούς χρόνους εμφάνισης αλμάτων, ενώ το ο μετρητής *)
(* PoisRN1 τον συνολικό αριθμό αλμάτων της ανέλιξης, στο διάστημα [0,T]. *)
t = 0;
While[ t ≤ T,
  t = t + Random[ExponentialDistribution[ $\lambda$ ]];
  AppendTo[JumpTimes, t];
  PoisRN1 = PoisRN1 + 1;
];

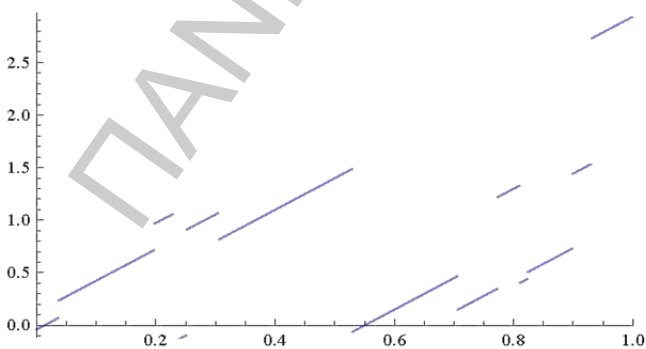
(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την συνάρτηση *)
(* κατανομής των αλμάτων, που θα εκφράζουν το μέγεθος των αλμάτων της ανέλιξης. *)
(* Στον παρόν αλγόριθμο θεωρήσαμε πως τα άλματα ακολουθούν την  $N[0,1]$ . *)
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpSizes, Random[NormalDistribution[0, 1]]];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεων της ανέλιξης, όπως αυτό διαμορφώνεται από *)
(* το συνδιασμό της τάσης και των αλμάτων στο διάστημα [0,T]. *)
dt = T/n; sum = 0; i = 1;
For[ t = 0, t ≤ T, t = t + dt,
  If[ i ≤ PoisRN1 && t ≥ JumpTimes[[i]],
    sum = sum + JumpSizes[[i]];
    i++;
  ];
   $\gamma$  = ( $\gamma$ *t) + sum;
  AppendTo[Traj, {t,  $\gamma$ };
];

(* Παρουσίαση της Compound Poisson Process  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}]}

```



(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R., Tankov,P.] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Compound Poisson Process με τάση  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  = *)
(* = (Uniformly distributed Jump Times) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικά. *)
n = 10000; T = 1;  $\gamma$  = 3;  $\lambda$  = 10;
PoisRN1 = 0; sum = 0; t = 0; y = 0; i = 0;
JumpTimes = {}; JumpSizes = {}; Traj = {};

(* Προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής από την κατανομή Pois( $\lambda T$ ), *)
(* που θα εκφράζει τον αριθμό των αλμάτων της ανέλιξης στο  $[0, T]$ . *)
PoisRN1 = Random[PoissonDistribution[ $\lambda * T$ ]];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την  $U[0, T]$ , που *)
(* θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων της ανέλιξης. *)
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpTimes, Random[UniformDistribution[{0, T}]]];
];

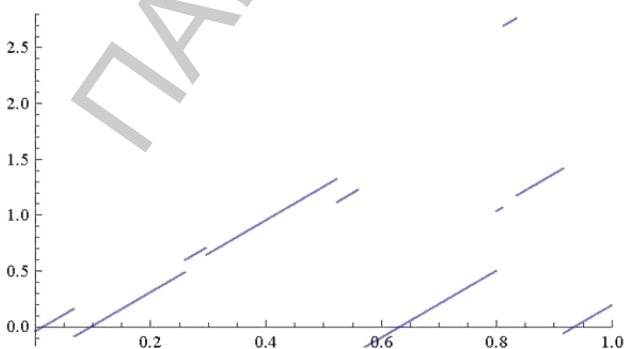
(* Διάταξη κατά αύξοντα αριθμό των χρόνων εμφάνισης των αλμάτων στο διάστημα  $[0, T]$ . *)
JumpTimes = Sort[JumpTimes];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από την συνάρτηση *)
(* κατανομής των αλμάτων, που θα εκφράζουν το μέγεθος των αλμάτων της ανέλιξης. *)
(* Στον παρόν αλγόριθμο θεωρήσαμε πως τα άλματα ακολουθούν την  $N[0, 1]$ . *)
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpSizes, Random[NormalDistribution[0, 1]]];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεων της ανέλιξης, όπως αυτό διαμορφώνεται από *)
(* το συνδιασμό της τάσης και των αλμάτων στο διάστημα  $[0, T]$ . *)
dt = T / n; sum = 0; i = 1;
For[ t = 0, t ≤ T, t = t + dt,
  If[ i ≤ PoisRN1 && t ≥ JumpTimes[[i]],
    sum = sum + JumpSizes[[i]];
    i++;
  ];
  y = ( $\gamma * t$ ) + sum;
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];

(* Παρουσίαση της Compound Poisson Process με τάση  $X_{CP}(t; \gamma, \lambda, F(dx))$  που παρήχθη. *)
ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Κίνησης Brown με τάση = *)
(* = B(t;μ,σ²) = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της κανονικής *)
(* κατανομής μέσω των μ, σ, όπου μ η μέση τιμή και σ η τυπική *)
(* απόκλιση της κατανομής. *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδικά. *)

n = 10000; μ = 0.1; σ = 0.3; T = 1;
Traj = {{0, 0}}; NormRN1 = 0; dt = 0; y = 0; t = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής dt. *)

dt = T / n;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για
την παραγωγή των προσομοιώσεων της Κίνησης Brown. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την τυπική κανονική κατανομή N(0,1). *)

NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

(* Προσομοίωση προσαύξησης Κίνησης Brown: X(x+dt)-X(x)~N(μ*dt,σ²*dt). *)

NormRN1 = μ * dt + σ * Sqrt[dt] * NormRN1;

(* Προσθήκη προσαύξησης στην Κίνηση Brown με τάση. *)

y = y + NormRN1;
t = t + dt;

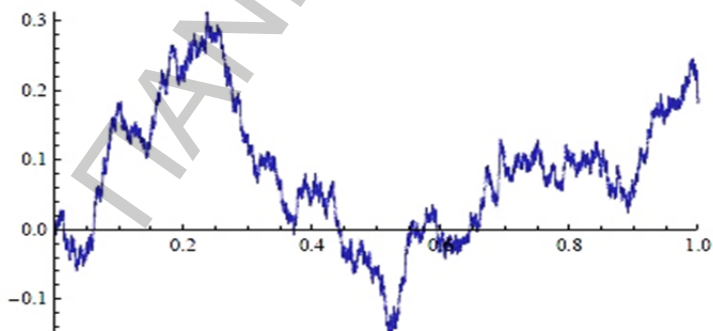
AppendTo[Traj, {t, y}];

];

(* Παρουσίαση της Κίνησης Brown με τάση B(t;μ,σ²) που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotJoined → True,
PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



```

(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)

```



```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown με τάση = *)
(* = GBM(t;μ,σ²) = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της κανονικής *)
(* κατανομής μέσω των μ, σ, όπου μ η μέση τιμή και σ η τυπική *)
(* απόκλιση της κατανομής. *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 10000; μ = 0.1; σ = 0.3; T = 1;
Traj = {{0, 1}}; NormRN1 = 0; LogNormRN1 = 0; dt = 0; y = 0; t = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt, y. *)

dt = T/n; y = 1;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
 παραγωγή των προσομοιώσεων της Γεωμετρικής Κίνησης Brown. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την τυπική κανονική κατανομή N(0,1). *)

NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

(* Προσομοίωση προσαύξησης Κίνησης Brown:  $\ln \frac{X(x+dt)}{X(x)} \sim N(dt\mu, dt\sigma^2)$ . *)

LogNormRN1 = Exp[(μ * dt) + (σ * Sqrt[dt] * NormRN1)];

(* Προσθήκη προσαύξησης στην Γεωμετρική Κίνηση Brown. *)

y = y * LogNormRN1;
t = t + dt;

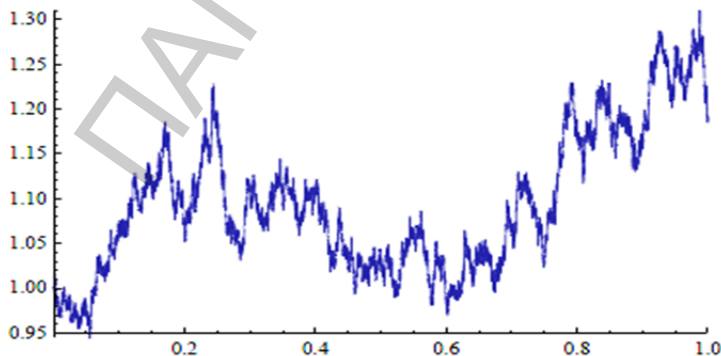
AppendTo[Traj, {t, y}];

];

(* Παρουσίαση της Γεωμετρικής Κίνησης Brown GBM(t;μ,σ²) που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotJoined → True,
PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Jump Diffusion Process = *)
(* =          J(t;γ,σ,λ)          = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 10000; T = 1; γ = 0; σ = 5; λ = 10;
NormRN1 = 0; PoisRN1 = 0; sum = 0; dt = 0; t = 0; y = 0; i = 0;
GausPart = {}; CompPoisPart = {}; JumpTimes = {}; JumpSizes = {}; Traj = {};

(* Αρχικοποίηση τιμής dt. *)

dt = T / n;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων της *)
(* Κεντραρισμένης Κίνησης Brown N(0,σ). *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την τυπική κανονική κατανομή N(0,1). *)

NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

(* Προσομοίωση προσαύξησης
Κεντραρισμένης Κίνησης Brown: X(x+dt)-X(x)-N(0, dt*σ²). *)

NormRN1 = σ * Sqrt[dt] * NormRN1;

(* Δημιουργία διανύσματος προσομοιώσεων της Κίνησης Brown. *)

y = y + NormRN1;
AppendTo[GausPart, y];

];

(* Προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής από την κατανομή Pois(λT), *)
(* που θα εκφράζει τον αριθμό των αλμάτων της ανέλιξης στο [0,T]. *)

PoisRN1 = Random[PoissonDistribution[λ * T]];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από *)
(* την U[0,T], που θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων *)
(* της ανέλιξης. *)

For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
AppendTo[JumpTimes, Random[UniformDistribution[{0, T}]]];
];

(* Διάταξη κατά αύξοντα αριθμό των χρόνων εμφάνισης των αλμάτων *)
(* (JumpTimes) στο διάστημα [0,T]. *)

JumpTimes = Sort[JumpTimes];

```

```

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από *)
(* την συνάρτηση κατανομής των αλμάτων, που θα εκφράζουν το μέγεθος *)
(* των αλμάτων της ανέλιξης. Στον παρόν αλγόριθμο θεωρήσαμε πως τα *)
(* άλματα ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή N[0,0.5]. *)

For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpSizes, Random[NormalDistribution[0, 0.5]]];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος προσανξήσεων της Εύνθετης Ανέλιξης *)
(* Poisson, όπως αυτό διαμορφώνεται από το συνδιασμό της τάσης και *)
(* των αλμάτων, στο διάστημα [0,T]. *)

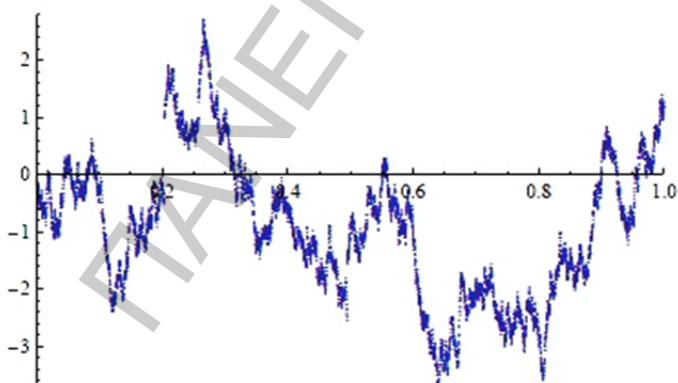
sum = 0; i = 1;
For[ t = 0, t ≤ T, t = t + dt,
  If[ i ≤ PoisRN1 && t ≥ JumpTimes[[i]],
    sum = sum + JumpSizes[[i]];
    i++;
  ];
  y = (γ * t) + sum;
  AppendTo[CompPoisPart, y];
];

(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεων της Jump Diffusion Process, όπως αυτό *)
(* συνδιαμορφώνεται από το συνεχές μονοπάτι της Κεντραρισμένης Κίνησης Brown *)
(* και ασυνεχές μονοπάτι της Εύνθετης Ανέλιξης Poisson στο διάστημα [0,T]. *)

t = 0; i = 2;
For[ i = 2, i ≤ n + 1, i++,
  t = t + dt;
  y = GausPart[[i]] + CompPoisPart[[i]];
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];

(* Παρουσίαση της Jump Diffusion Process J(t;γ,σ,λ) που παρήχθη. *)

```



(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Gamma Process = *)
(* =  $X_G(t; \alpha, \beta)$  = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της Γαμμα κατανομής *)
(* μέσω των  $\kappa$  και  $\theta$ . Συνεπώς θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα ορίσματα της *)
(* γεννήτριας τυχαίων αριθμών. *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδিকা. *)

n = 10000;  $\alpha = 30$ ;  $\beta = 1$ ;  $T = 1$ ;
Traj = {{0, 0}}; GammaRN1 = 0; dt = 0; t = 0; y = 0;  $\kappa = 0$ ;  $\theta = 0$ ;

(* Αρχικοποίηση τιμής της των dt,  $\kappa$ ,  $\theta$ . *)

dt = T / n;
 $\kappa = \alpha$ ;  $\theta = 1 / \beta$ ;

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων *)
(* της Gamma Process. *)

For[i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Γάμμα  $\Gamma(dt * \kappa, \theta)$ , *)
(* που θα εκφράζει μια τυχαία προσάυξηση της Gamma Process. *)

GammaRN1 = Random[GammaDistribution[dt *  $\kappa$ ,  $\theta$ ]];

(* Προσθήκη προσάυξησης στην Gamma Process. *)

y = y + GammaRN1;
t = t + dt;

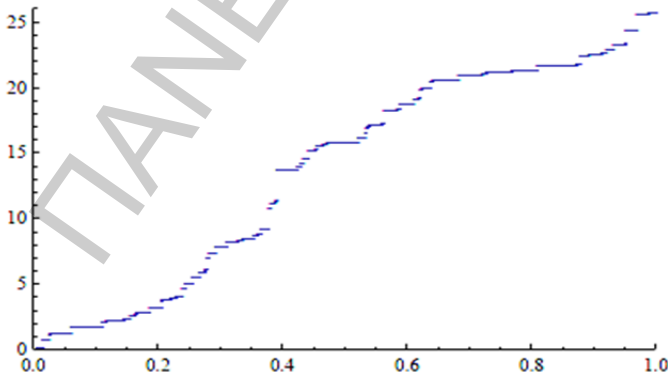
AppendTo[Traj, {t, y}];

];

(* Παρουσίαση της Gamma Process  $X_G(t; \alpha, \beta)$  που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}]}

```



(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Variance Gamma Process  $X_{VG}(t; \mu, \sigma, \sigma_G^2)$  = *)
(* = (Brownian Subordination Method) = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της Γαμμα κατανομής *)
(* μέσω των  $\kappa$  και  $\theta$ . Συνεπώς θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα ορίσματα της *)
(* γεννήτριας τυχαίων αριθμών. *)

(* Υπενθυμίζουμε ότι η Μέση τιμή της  $X_G(t; \kappa, \theta)$  ισούται με  $E[X_t] = \mu_G^2 / \sigma_G^2$ , *)
(* ενώ η Διακύμανση της ισούται με  $\text{Var}[X_t] = \sigma_G^2 / \mu_G$ . *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)
n = 10000;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ ;  $v = 0.3$ ;  $m = 1$ ;  $T = 1$ ;
dt = 0; t = 0; y = 0;  $\kappa = 0$ ;  $\theta = 0$ ;
Traj = {{0, 0}}; NormRN1 = 0; GammaRN1 = 0; VarGammaRN1 = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt,  $\kappa$ ,  $\theta$ . *)
dt = T/n;  $\kappa = \frac{m^2}{v}$ ;  $\theta = \frac{v}{m}$ ;

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων *)
(* της Variance Gamma Process. *)
For[i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Γάμμα  $\Gamma(\kappa dt, \theta)$ , που *)
(* θα εκφράζει μια τυχαία προσομύηση της Gamma Process. *)
GammaRN1 = Random[GammaDistribution[ $\kappa * dt$ ,  $\theta$ ]];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την τυπική κανονική κατανομή  $N(0,1)$ . *)
NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

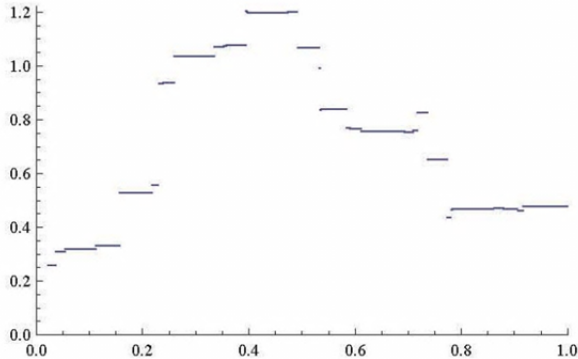
(* Προσομοίωση προσομύησης της Variance Gamma Process μέσω της Brownian *)
(* Subordination, με χρήση της Gamma Process ως Subordinator. *)
VarGammaRN1 = ( $\mu * GammaRN1$ ) + ( $\sigma * Sqrt[GammaRN1] * NormRN1$ );

(* Προσθήκη προσομύησης στην Variance Gamma Process. *)
y = y + VarGammaRN1;
t = t + dt;
AppendTo[Traj, {t, y}];
];

```

(* Παρουσίαση της Variance Gamma Process $X_{VG}(t; \mu, \sigma, \sigma_0^2)$ που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας *)
 (* της $VG(\mu, \sigma, \sigma_0^2)$ και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών *)
 (* που παρήχθησαν. *)

```
Needs["Histograms`"]
```

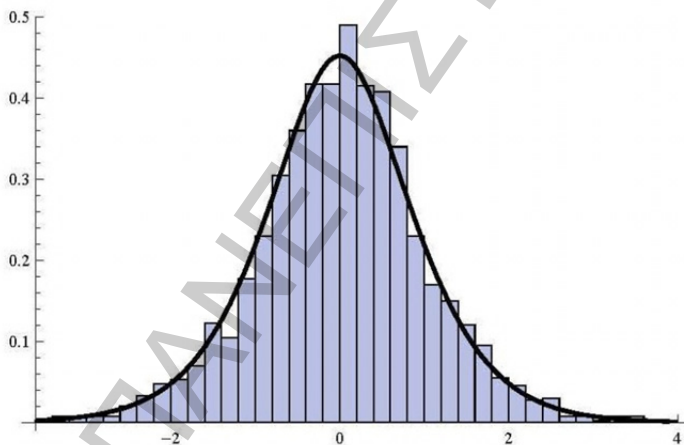
```
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale -> 1];
```

```
w = Plot[
```

$$\frac{2 * \text{Exp}\left[\frac{\mu * x}{\sigma^2}\right]}{v * \sqrt{2 * \text{Pi}} * \sigma * \text{Gamma}\left[1 / v\right]} * \left(\frac{x^2}{\frac{2 * \sigma^2}{v} + \mu^2}\right)^{\frac{1}{2} * \frac{1}{v} - \frac{1}{4}} * \text{BesselK}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sigma^2} * \sqrt{x^2 * \left(\frac{2 * \sigma^2}{v} + \mu^2\right)}\right],$$

```
{x, Min[RandomNumbers], Max[RandomNumbers]}, PlotStyle -> {Black, Thick}];
```

```
Show[h, w]
```



(* Γράφημα που παρήχθει με παραμέτρους: MC=2000; n=1000; $\mu=0$; $\sigma=1$; $v=0.3$; $m=1$; $T=1$; *)

(* Πηγή: Advances in Mathematical Finance[Fu, M., Jarrow, R., Yen, Ju-Yi] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Variance Gamma Process = *)
(* =  $X_{VG}(t; \mu, \sigma, \sigma_G^2)$  = *)
(* ===== *)
(* = (Difference of Gammas Method) = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της Γαμμα κατανομής *)
(* μέσω των κ και θ. Συνεπώς θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα ορίσματα της *)
(* γεννήτριας τυχαίων αριθμών. *)

(* Υπενθυμίζουμε ότι η Μέση τιμή της  $X_G(t; \kappa, \theta)$  ισούται με  $E[X_t] = \mu_G^2 / \sigma_G^2$ , *)
(* ενώ η Διακύμανση της ισούται με  $Var[X_t] = \sigma_G^2 / \mu_G$ . *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)

n = 10000;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ ;  $v = 0.3$ ;  $m = 1$ ;  $T = 1$ ;
dt = 0;  $t = 0$ ;  $y = 0$ ;  $m1 = 0$ ;  $m2 = 0$ ;  $v1 = 0$ ;  $v2 = 0$ ;  $\kappa1 = 0$ ;  $\kappa2 = 0$ ;  $\theta1 = 0$ ;  $\theta2 = 0$ ;
Traj = {{0, 0}}; GammaRN1 = 0; GammaRN2 = 0; VarGammaRN1 = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής της dt. *)

dt = T / n;

(* Υπολογισμός των τιμών m1, m2, v1, v2. *)

 $m1 = (\text{Sqrt}[\mu^2 + (2 * \sigma^2 / v)] + \mu) / 2$ ;
 $m2 = (\text{Sqrt}[\mu^2 + (2 * \sigma^2 / v)] - \mu) / 2$ ;
 $v1 = m1^2 * v$ ;
 $v2 = m2^2 * v$ ;

(* Υπολογισμός των τιμών κ1, κ2, θ1, θ2. *)

 $\kappa1 = m1^2 / v1$ ;  $\kappa2 = m2^2 / v2$ ;
 $\theta1 = v1 / m1$ ;  $\theta2 = v2 / m2$ ;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων *)
(* της Variance Gamma Process. *)

For[ $i = 1$ ,  $i \leq n$ ,  $i++$ ,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Γάμμα  $\Gamma(\kappa1 * dt, \theta1)$ . *)

GammaRN1 = Random[GammaDistribution[ $\kappa1 * dt$ ,  $\theta1$ ]];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Γάμμα  $\Gamma(\kappa2 * dt, \theta2)$ . *)

GammaRN2 = Random[GammaDistribution[ $\kappa2 * dt$ ,  $\theta2$ ]];

(* Προσομοίωση προσομύησης της Variance Gamma Process μέσω της *)
(* της διαφοράς δύο ανεξάρτητων Gamma Process. *)

VarGammaRN1 = GammaRN1 - GammaRN2;

(* Προσθήκη προσομύησης στην Variance Gamma Process. *)

 $y = y + \text{VarGammaRN1}$ ;
 $t = t + dt$ ;

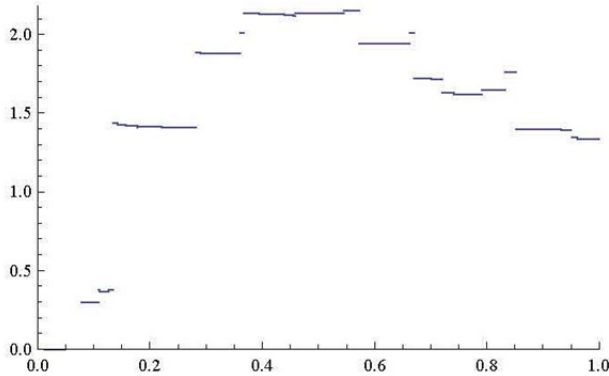
AppendTo[Traj, {t, y}];

];

```

(* Παρουσίαση της Variance Gamma Process $X_{VG}(t; \mu, \sigma, \sigma_v^2)$ που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας *)
 (* της $VG(\mu, \sigma, \sigma_v^2)$ και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών *)
 (* που παρήχθησαν. *)

```
Needs["Histograms`"]
```

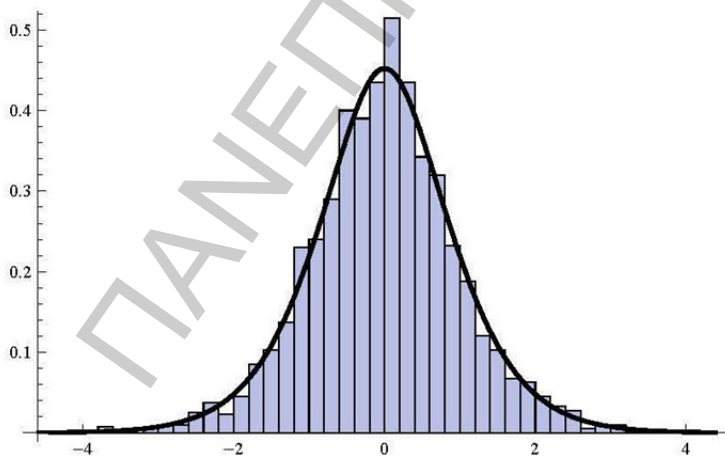
```
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale -> 1];
```

```
w = Plot[
```

$$\frac{2 * \text{Exp}\left[\frac{\mu * x}{\sigma^2}\right]}{v * v * \sqrt{2 * \text{Pi}} * \sigma * \text{Gamma}[1 / v]} * \left(\frac{x^2}{2 * \sigma^2 + v}\right)^{\frac{1}{2} * \frac{1}{v} - \frac{1}{4}} * \text{BesselK}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sigma^2} * \sqrt{x^2 * \left(\frac{2 * \sigma^2}{v} + \mu^2\right)}\right],$$

```
{x, Min[RandomNumbers], Max[RandomNumbers]}, PlotStyle -> {Black, Thick}];
```

```
Show[h, w]
```



(* Γράφημα που παρήχθει με παραμέτρους: MC=2000; n=1000; $\mu=0$; $\sigma=1$; $v=0.3$; $m=1$; $T=1$; *)

(* Πηγή: Advances in Mathematical Finance[Fu, M., Jarrow, R., Yen, Ju-Yi] *)


```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Inverse Gaussian Process = *)
(* =  $X_{NIG}(t; \mu, \lambda)$  = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της IG κατανομής *)
(* μέσω των  $\mu$  και  $\lambda$ . Συνεπώς θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα ορίσματα *)
(* της γεννήτριας τυχαίων αριθμών. *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 10000;  $\mu$  = 2;  $\lambda$  = 30; T = 1;
Traj = {{0, 0}}; InvGausRN1 = 0; dt = 0; t = 0; y = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής της dt. *)

dt = T / n;

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων *)
(* της Inverse Gaussian Process. *)

For[ i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Inverse Gaussian Κατανομή  $IG(\mu * dt, \lambda * dt^2)$ , *)
(* που θα εκφράζει μια τυχαία προσομοίωση της Inverse Gaussian Process. *)

InvGausRN1 = Random[InverseGaussianDistribution[ $\mu * dt, \lambda * dt^2$ ]];

(* Προσθήκη προσομοίωσης στην Inverse Gaussian Process. *)

y = y + InvGausRN1;
t = t + dt;

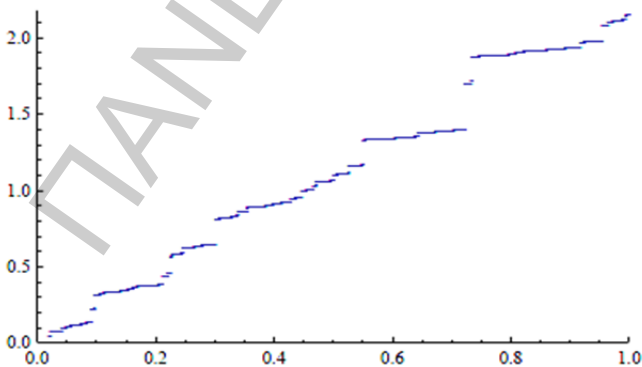
AppendTo[Traj, {t, y}];

];

(* Παρουσίαση της Inverse Gaussian Process  $X_{NIG}(t; \mu, \lambda)$  που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Normal Inverse Gaussian Process  $X_{NIG}(t; \alpha, \beta, \delta, \mu)$  = *)
(* = (Brownian Subordination Method) = *)
(* ===== *)

(* Το Mathematica κάνει χρήση της παραμετροποίησης της IG κατανομής *)
(* μέσω των  $\mu$  και  $\lambda$ . Συνεπώς θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα ορίσματα *)
(* της γεννήτριας τυχαίων αριθμών. *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδिका. *)
n = 3000;  $\alpha = 40$ ;  $\beta = -8$ ;  $\delta = 1$ ;  $T = 1$ ;
dt = 0; t = 0; y = 0;  $\mu = 0$ ;  $\lambda = 0$ ;
Traj = {{0, 0}}; NormRN1 = 0; InvGausRN1 = 0; NormInvGausRN1 = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt,  $\mu$ ,  $\lambda$ . *)
dt = T/n;  $\mu = 1 / (\delta * \text{Sqrt}[\alpha^2 - \beta^2])$ ;  $\lambda = 1$ ;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή των προσομοιώσεων *)
(* της Normal Inverse Gaussian Process. *)
For[i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Κατανομή Γάμμα  $\Gamma(\mu * dt, \lambda * dt^2)$ , *)
(* που θα εκφράζει μια τυχαία προσομοίωση της Gamma Process. *)
InvGausRN1 = Random[InverseGaussianDistribution[ $\mu * dt, \lambda * dt^2$ ]];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την τυπική κανονική κατανομή  $N(0,1)$ . *)
NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];

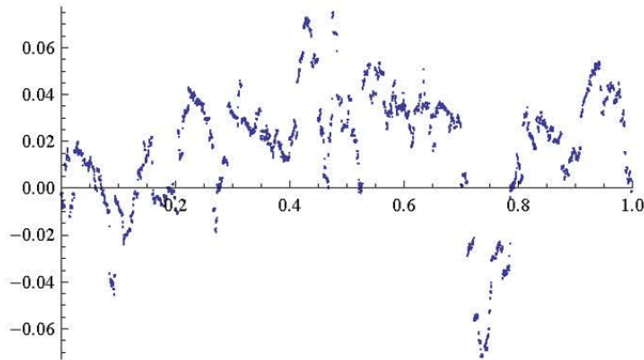
(* Προσομοίωση προσομοίωσης της Normal Inverse Gaussian Process μέσω της *)
(* Brownian Subordination, με χρήση της Inverse Gaussian Process ως *)
(* Subordinator. *)
NormInvGausRN1 = ( $\beta * \delta^2 * \text{InvGausRN1}$ ) + ( $\delta * \text{Sqrt}[\text{InvGausRN1}] * \text{NormRN1}$ );

(* Προσθήκη προσομοίωσης στην Normal Inverse Gaussian Process. *)
y = y + NormInvGausRN1;
t = t + dt;
AppendTo[Traj, {t, y}];
];

```

(* Παρουσίαση της Normal Inverse Gaussian Process $X_{NIG}(t; \alpha, \beta, \delta)$ που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας *)
 (* της NIG($\alpha, \beta, \delta, \mu$) και σύγκριση της με το ιστογράμμα των Τυχαίων Αριθμών *)
 (* που παρήχθησαν. *)

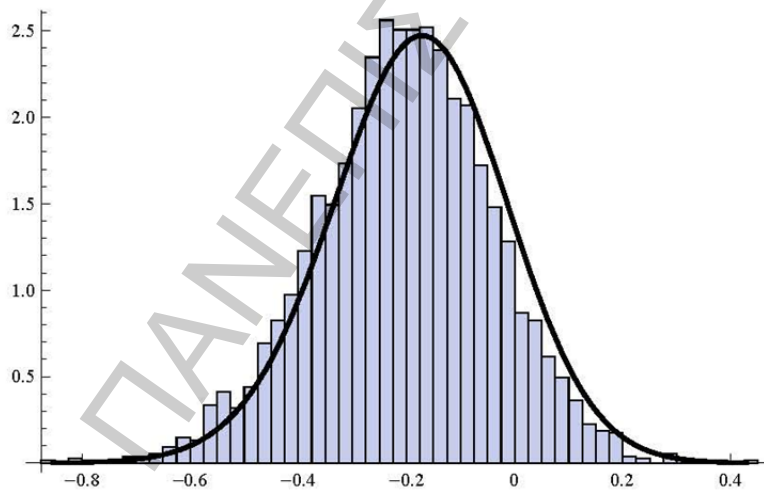
```
Needs["Histograms`"]
```

```
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale -> 1];
```

$$w = \text{Plot} \left[\frac{\delta * \alpha}{\text{Pi}} * \frac{\text{BesselK} \left[1, \alpha * \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right]}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} * \text{Exp} \left[\delta * \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta * (x - \mu) \right], \right.$$

```
{x, Min[RandomNumbers], Max[RandomNumbers]}, PlotStyle -> {Black, Thick}];
```

```
Show[h, w]
```



(* Γράφημα που παρήχθει με παραμέτρους: MC=3000; n=3000; $\alpha=40$; $\beta=-8$; $\delta=1$; T=1; *)

(* Πηγή: Levy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives [W. Schoutens]. *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση α-Stable Process = *)
(* = Sα(t;σ,β,μ) = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδিকা. *)

n = 10000; α = 1.3; σ = 2; β = 0.3; μ = 1; T = 1;
UnifRN1 = 0; ExprN1 = 0; aStabRN1 = 0; F1 = 0; F2 = 0; dt = 0; t = 0; y = 0;
Traj = {};

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt, σ, μ. *)
dt = T/n; σ = σ*dt1/α; μ = μ*dt;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή περισσότερων *)
(* του ενός τυχαίου αριθμού από την α-Stable Κατανομή Sα(σ,β,μ). *)

For[i = 1, i ≤ n, i++,

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Εκθετική Κατανομή Exp(1). *)
ExprN1 = -Log[Random[]];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την Ομοιόμορφη Κατανομή U(-π/2, π/2). *)
UnifRN1 = -Pi/2 + (Pi * Random[]);

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την α-Stable Κατανομή Sα(1,β,0),
στην περίπτωση όπου α≠1. *)
If[α ≠ 1,

F1 =  $\frac{\text{ArcTan}[\beta * \text{Tan}[\text{Pi} * \frac{\alpha}{2}]]}{\alpha}$ ;

F2 =  $\left(1 + \beta^2 * \left(\text{Tan}[\text{Pi} * \frac{\alpha}{2}]\right)^2\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}$ ;

aStabRN1 = F2 *  $\frac{\text{Sin}[\alpha * (\text{UnifRN1} + \text{F1})]}{\text{Cos}[\text{UnifRN1}]^{1/\alpha}}$  *  $\left(\frac{\text{Cos}[\text{UnifRN1} - \alpha * (\text{UnifRN1} + \text{F1})]}{\text{ExprN1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ ;

];

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την α-Stable Κατανομή Sα(1,β,0),
στην περίπτωση όπου α=1. *)
If[α = 1,

aStabRN1 =  $\left(\frac{2}{\text{Pi}} * \left(\frac{\text{Pi}}{2} + \beta * \text{UnifRN1}\right) * \text{Tan}[\text{UnifRN1}]\right) - \left(\beta * \text{Log}\left[\frac{\frac{\text{Pi}}{2} * \text{ExprN1} * \text{Cos}[\text{UnifRN1}]}{\frac{\text{Pi}}{2} + \beta * \text{UnifRN1}}\right]\right)$ ;

];

```

```

(* Παραγωγή τυχαίου αριθμού από την α-Stable Κατανομή  $S_\alpha(\sigma * dt^{1/\alpha}, \beta, \mu * dt)$ . *)
If[  $\alpha \neq 1$ ,
  aStabRN1 =  $\sigma * aStabRN1 + \mu$ ,
  aStabRN1 =  $\sigma * aStabRN1 + \frac{2}{\text{Pi}} * \beta * \sigma * \text{Log}[\sigma] + \mu$ 
];

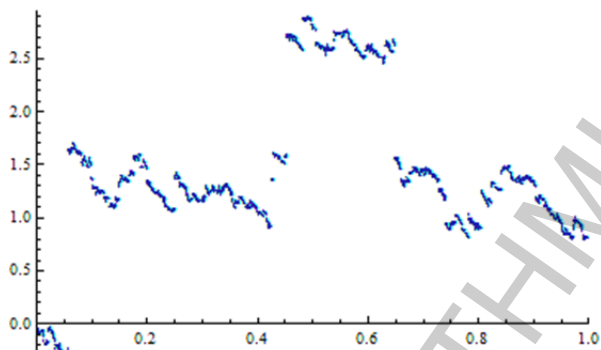
(* Δημιουργία διανύσματος θέσεως της α-Stable Process. *)
y = y + aStabRN1;
t = t + dt;
AppendTo[Traj, {t, y}];
];

```

```

(* Παρουσίαση της α-Stable Process  $S_\alpha(t; \sigma, \beta, \mu)$  που παρήχθη. *)
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}]

```



```

(* Πηγή: Stable Distributions -
University of Toronto Risk Lab Technical Report (2003) [Olivares,P.,Seco,L.] *)

```

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Tempered Stable Subordinator Process = *)
(* =  $X_{TSA}(t; \alpha, c, \lambda)$ , όπου  $\alpha \in (0,1)$ ,  $c > 0$ ,  $\lambda > 0$  = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδিকা. *)

n = 10000; ε = 0.0001; α = 0.3; λ = 0.5; c = 1.2; γ = 1; T = 1;
PoisRN1 = 0; W = 0; V = 0; X = 0; Z = 0; M = 0; dt = 0; t = 0; sum = 0;
Traj = {{0, 0}}; JumpTimes = {}; JumpSizes = {};

(* Υπολογισμός μέσης τιμής  $M_\varepsilon$  των αλμάτων τάξης  $|\Delta X_\varepsilon| < \varepsilon$ , και τάσης  $\gamma^*$ . *)


$$M = c * \int_0^\varepsilon x * \frac{E^{-\lambda * x}}{x^{\alpha+1}} dx; \quad \gamma = \gamma + M;$$


(* Δήλωση συναρτήσεων  $U(\varepsilon)$ ,  $v(x)$ ,  $f(x)$ . *)


$$\text{Dens}[x\_] := c * \int_x^\infty \frac{E^{-\lambda * z}}{z^{\alpha+1}} dz;$$


$$\text{Meas}[x\_] := \text{If}[x \geq \varepsilon, \frac{c * E^{-\lambda * x}}{x^{\alpha+1}}, 0];$$


$$\text{UpBound}[x\_] := \text{If}[x \geq \varepsilon, \frac{\alpha * \varepsilon^{-\alpha}}{x^{\alpha+1}}, 0];$$


(* Προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής από την κατανομή  $\text{Pois}(U(\varepsilon) * T)$ , *)
(* που θα εκφράζει τον αριθμό των αλμάτων της ανέλιξης στο  $[0, T]$ . *)

PoisRN1 = Random[PoissonDistribution[Dens[ε] * T]];

(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από *)
(* την  $U[0, T]$ , που θα εκφράζουν τους χρόνους εμφάνισης των αλμάτων *)
(* της ανέλιξης. *)

For[i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  AppendTo[JumpTimes, Random[UniformDistribution[{0, T}]]];
];

(* Διάταξη κατά αύξοντα αριθμό των χρόνων εμφάνισης των αλμάτων *)
(* (JumpTimes) στο διάστημα  $[0, T]$ . *)

JumpTimes = Sort[JumpTimes];

```

```
(* Προσομοίωση PoisRN1 το πλήθος τυχαίων ανεξάρτητων αριθμών από *)
(* την συνάρτηση κατανομής των αλμάτων, που θα εκφράζουν το μέγεθος *)
(* των αλμάτων της ανέλιξης. (Μέθοδος Απόρριψης) *)
```

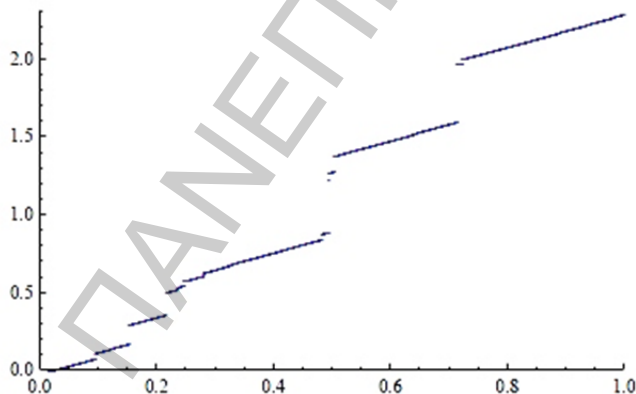
```
For[ i = 1, i ≤ PoisRN1, i++,
  V = 2; Z = 2;
  While[ V * Z > 1,
    W = Random[]; V = Random[]; X = ε * W-1/α;
    Z =  $\frac{\text{UpBound}[X] * e^{-\alpha} * E^{-\lambda * \varepsilon}}{\text{Meas}[X] * \alpha}$ ;
  ];
  AppendTo[JumpSizes, X];
];
```

```
(* Δημιουργία του διανύσματος θέσεων της ανέλιξης, όπως αυτό *)
(* διαμορφώνεται από το συνδιασμό της τάσης, των αλμάτων και *)
(* της μέσης τιμής των αλμάτων τάξης  $|\Delta X_s| < \varepsilon$  στο διάστημα [0, T]. *)
```

```
dt = T / n; sum = 0; i = 1;
For[ t = 0, t ≤ T, t = t + dt,
  If[ i ≤ PoisRN1 && t ≥ JumpTimes[[i]],
    sum = sum + JumpSizes[[i]];
    i++;
  ];
  y = (γ * t) + sum + M;
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];
```

```
(* Παρουσίαση της Tempered Stable Subordinator Process  $X_{TSA}(t; \alpha, c, \lambda)$  που παρήχθη. *)
```

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers → {"."},
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}
```



```
(* Πηγή: Financial Modelling With Jump Processes [Cont,R.,Tankov,P.] *)
```

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Gamma Process = *)
(* =  $X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \beta^{-1} e^{\Gamma_i / \alpha} V_i 1_{U_i \leq t} \right) = *$  *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)
n = 1000; ε = 10-4; α = 30; β = 1; T = 1;
τ = 0; k = 0; dt = 0; t = 0; y = 0; sum = 0;
Traj = {{0, 0}}; SumExpRN = {}; ExpRN = {}; UnifRN = {};

(* Αρχικοποίηση τιμών των τ και dt. *)
τ = -α * Log[β * ε]; dt = T / n;

(* Παραγωγή των απαραίτητων τυχαίων αριθμών Γi, Ui,
Vi, για τον υπολογισμό των τιμών της σειράς. *)
While[sum < τ,
  k = k + 1;
  sum = sum + Random[ExponentialDistribution[1]];
  AppendTo[SumExpRN, sum];
  AppendTo[UnifRN, Random[]];
  AppendTo[ExpRN, Random[ExponentialDistribution[1]]];
];

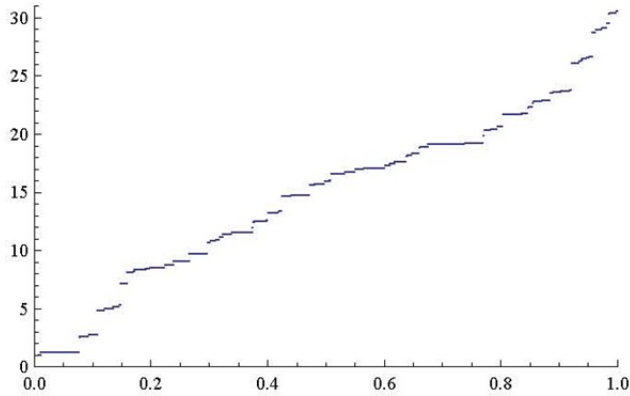
(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για
την κατασκευή του μονοπατιού της Gamma Process. *)
For[z = 1, z ≤ n, z++,
  t = t + dt;

  (* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας
για τον υπολογισμό της τιμής της Gamma Process *)
  (* την χρονική στιγμή t. *)
  y = 0;
  For[i = 1, i ≤ k, i++,
    If[UnifRN[[i]] ≤ t, y = y + (β-1 * Exp[-SumExpRN[[i]] / α] * ExpRN[[i]])];
  ];
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];

```


(* Παρουσίαση της Gamma Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj][[All, 2]], Max[Traj][[All, 2]]}}
```



(* Δημιουργία Γραφικής Παράστασης της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της $G(\kappa, \theta)$ *)
(* και σύγκριση της με το ιστόγραμμα των Τυχαίων Αριθμών που παρήχθησαν. *)

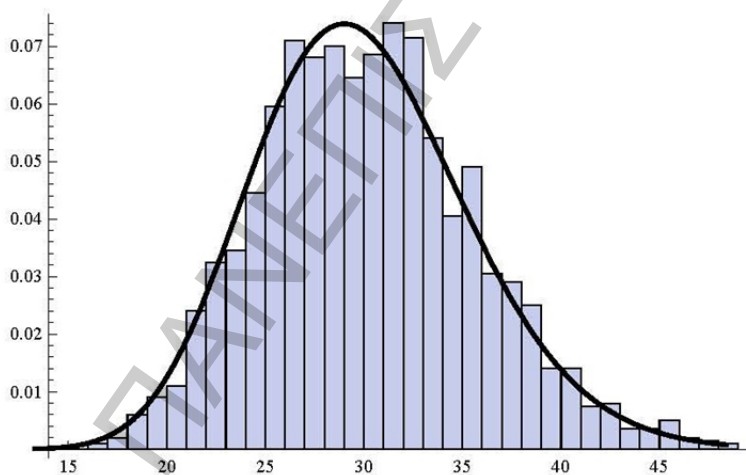
```
Needs["Histograms`"]
```

```
 $\kappa = \alpha; \theta = \frac{1}{\beta};$ 
```

```
h = Histogram[RandomNumbers, HistogramScale -> 1];  
w =
```

```
Plot[ $\frac{\theta^{-\kappa} * x^{\kappa - 1}}{\Gamma(\kappa)} * \text{Exp}[-x / \theta]$ , {x, 0, Max[RandomNumbers]}, PlotStyle -> {Black, Thick}];
```

```
Show[h, w]
```



(* Γράφημα που παρήχθη με παραμέτρους: MC=2000; n=1000; $\epsilon=10^{-4}$; $\alpha=30$; $\beta=1$; T=1; *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Symmetric α-Stable Process = *)
(* = (α∈(0,2), σ≥0, β=0, μ=0) = *)
(* ===== *)
(* =  $X(t) = \sigma \cdot T^{1/\alpha} c_\alpha \sum_{i=1}^n (\Gamma_i^{-1/\alpha} V_i 1_{U_i \leq t})$  = *)
(* =  $c_\alpha = \pi/2$ , για α=1 = *)
(* =  $c_\alpha = |\Gamma(1-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)|^{-1/\alpha}$ , για α≠1 = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κώδικα. *)

n = 10000; ε = 0.02; α = 1.9; σ = 1; T = 1;
τ = 0; k = 0; dt = 0; t = 0; c = 0; y = 0; sum = 0;
Traj = {{0, 0}}; SumExpRN = {}; UnifRN = {}; RN = {};

(* Αρχικοποίηση τιμών των τ, dt και cα. *)

τ = ε^-α; dt = T / n;
If[α ≠ 1, c = (Abs[Gamma[1 - α] * Cos[Pi * α / 2]])^-1/α, c = Pi / 2];

(* Παραγωγή των απαραίτητων τυχαίων αριθμών Γi,
Ui, Vi, για τον υπολογισμό των τιμών της σειράς. *)

While[ sum < τ,
  k = k + 1;
  sum = sum + Random[ExponentialDistribution[1]]];
AppendTo[SumExpRN, sum];
AppendTo[UnifRN, Random[]];
If[Random[] > 0.5, x = 1., x = -1.];
AppendTo[RN, x];
];

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την
κατασκευή του μονοπατιού της Tempered α-Stable Process. *)

For[z = 1, z ≤ n, z++,
  t = t + dt;

  (* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για τον υπολογισμό της τιμής της Tempered α-
  Stable Process την χρονική στιγμή t. *)

  y = 0;
  For[i = 1, i ≤ k, i++,
    If[UnifRN[[i]] ≤ t, y = y + (RN[[i]] * SumExpRN[[i]]^-1/α)];
  ];

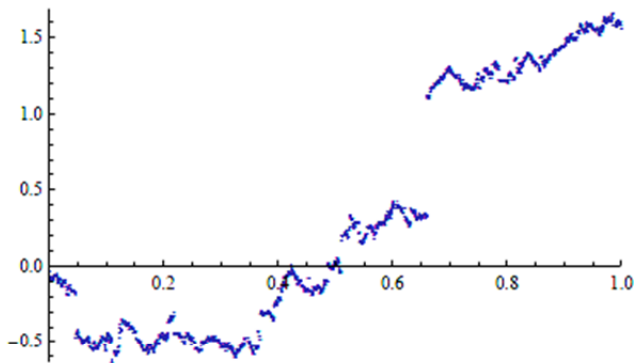
```

```
y =  $\sigma * T^{1/\alpha} * c * y$ ;  
AppendTo[Traj, {t, y}];
```

```
];
```

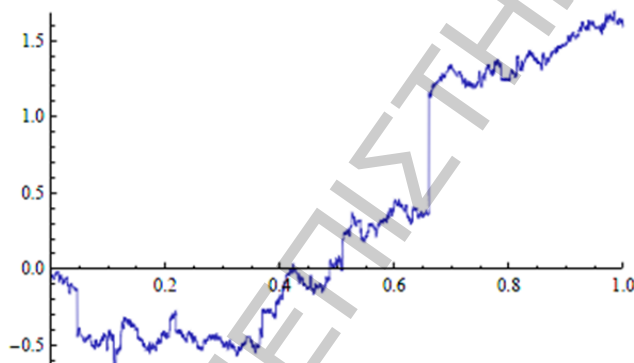
(* Παρουσίαση της Symmetric α -Stable Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Παρουσίαση της Symmetric α -Stable Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, Joined -> True,  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Πηγή: Simulation of Levy Processes [Jan Rosinski] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση Symmetric Tempered α-Stable Process = *)
(* =  $X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \left( \left( \frac{\alpha \Gamma_i}{2cT} \right)^{-1/\alpha} \wedge \eta_i \xi_i^{1/\alpha} \right) 1_{\sigma_i \leq t}$  = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)

n = 10000; ε = 0.005; α = 1.3; c = 0.5; λ = 1; T = 1;
τ = 0; κ = 0; dt = 0; t = 0; y = 0; sum = 0;
Traj = {{0, 0}}; SumExpRN = {}; ExpRN = {}; UnifRN1 = {}; UnifRN2 = {}; RN = {};

(* Αρχικοποίηση τιμών των τ και dt. *)

τ =  $\frac{2 * c * T}{\alpha} * e^{-\alpha}$ ; dt = T / n;

(* Παραγωγή των απαραίτητων τυχαίων αριθμών Γi, Ui, δi,
ηi, ξi, για τον υπολογισμό των τιμών της σειράς. *)

While[ sum < τ,
  κ = κ + 1;
  sum = sum + Random[ExponentialDistribution[1]];
  AppendTo[SumExpRN, sum];
  AppendTo[UnifRN1, Random[]];
  If[Random[] > 0.5, x = 1., x = -1.]; AppendTo[RN, x];
  AppendTo[ExpRN, Random[ExponentialDistribution[λ]]];
  AppendTo[UnifRN2, Random[]];
];

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την κατασκευή του μονοπατιού της *)
(* Tempered α-Stable Process. *)

For[ z = 1, z ≤ n, z++,
  t = t + dt;

  (* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για τον υπολογισμό της τιμής της *)
  (* Tempered α-Stable Process την χρονική στιγμή t. *)

  y = 0;
  For[ i = 1, i ≤ κ, i++,
    If[UnifRN1[[i]] ≤ t,
      y = y +  $\left( RN[[i]] * \text{Min} \left[ \left( \frac{\alpha * \text{SumExpRN}[[i]]}{2 * c * T} \right)^{-1/\alpha}, \text{ExpRN}[[i]] * \text{UnifRN2}[[i]]^{1/\alpha} \right] \right)$ ;
    ];

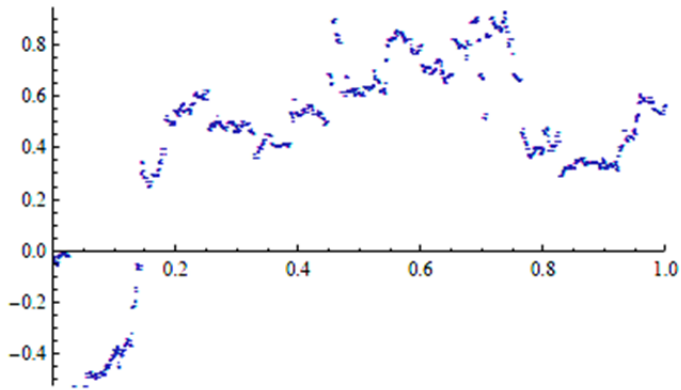
  AppendTo[Traj, {t, y}];

];

```

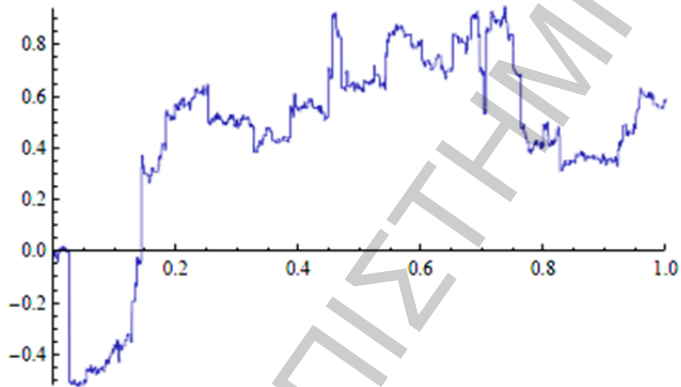
(* Παρουσίαση της Tempered α -Stable Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, PlotMarkers -> {"."},  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Παρουσίαση της Tempered α -Stable Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[Traj, Joined -> True,  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}
```



(* Πηγή: Simulation of Levy Processes [Jan Rosinski] *)

```

(* ===== *)
(* = Προσομοίωση CIR Process = *)
(* =  $y(t; \eta, \kappa, \lambda, \sigma)$  = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)

n = 10000; T = 1;
η = 1; κ = 5; λ = 2; σ = 1.25;
Traj = {{0, σ}}; dt = 0; t = 0; y = 0; z = 0;

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt, y και z. *)

dt = T/n; y = σ; z = σ;

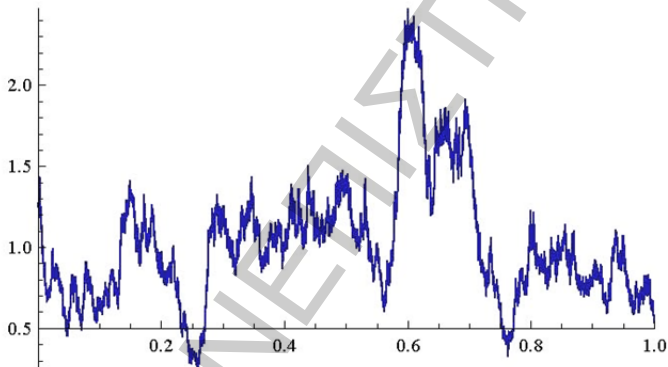
(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή του μονοπατιού της *)
(* CIR Process  $y(t; \eta, \kappa, \lambda, \sigma)$ . *)

For[i = 1, i ≤ n, i++,
  If[Sign[y] == -1, z = 0, z = y];
  y = y + κ * (η - z) * dt + λ * z1/2 * dt1/2 * Random[NormalDistribution[0, 1]];
  t = t + dt;
  AppendTo[Traj, {t, y}];
];

(* Παρουσίαση της CIR Process  $y(t; \eta, \kappa, \lambda, \sigma)$  που παρήχθη. *)

ListPlot[Traj, PlotJoined → True,
  PlotRange → {{0, T}, {Min[Traj[[All, 2]]], Max[Traj[[All, 2]]]}}]

```



```

(* Πηγή: Levy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives [Schoutens, W.] *)
(* (Τροποποιημένος Αλγόριθμος) *)

```

```

(* ===== *)
(* = Αποτίμηση Συμβολαίων Δικαιώματος Αγοράς = *)
(* = Τύπου LookBack, Barrier, Asian = *)
(* = μέσω του μοντέλου αγοράς = *)
(* = Variance Gamma = *)
(* = Stochastic Volatility Exponential Levy = *)
(* ===== *)

(* Δήλωση Παραμέτρων που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)
MC = 1; TD = 250; T = 1;
S0 = 1124.47; r = 0.019; q = 0.012;

(* Δήλωση Παραμέτρων που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για το VG Μοντέλο. *)
η = 1.556; κ = 0.602; λ = 1.9992; γ0 = 1;
μ = -0.126365; σ = 0.161564; ν = 0.0834056; m = 1;

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)
PayOff = {}; OptionPrice = 0;

For[iter = 1, iter ≤ MC, iter++,

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη. *)
NormRN1 = 0; dt = 0; t = 0; y = 0; z = 0; g = 0; a = 0; b = 0;
CIR = {y0}; IntCIR = {0}; X = {0}; TCX = {0}; AsPri = {S0};
CIRTraj = {{0, y0}}; IntCIRTraj = {{0, 0}};
XTraj = {{0, 0}}; TCXTraj = {{0, 0}}; AsPriTraj = {{0, S0}};

(* Δήλωση Μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στον κωδίκη για το VG μοντέλο. *)
GammaRN1 = 0; VarGammaRN1 = 0; ShPar = 0; ScPar = 0;

(* ===== *)
(* = CIR Process = *)
(* ===== *)

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt, y και z. *)
dt = T / TD; y = y0; z = y0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή του μονοπατιού της CIR *)
(* Process  $Y(t; \eta, \kappa, \lambda, y_0)$ , για το χρονικό διάστημα  $[0, T]$ . *)
For[i = 1, i ≤ TD, i++,
  If[Sign[y] == -1, z = 0, z = y];
  NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];
  y = y + κ * (η - z) * dt + λ * z1/2 * dt1/2 * NormRN1;
  AppendTo[CIR, y];
  t = t + dt;
  AppendTo[CIRTraj, {t, y}];
];

```

```

(* ===== *)
(* =                               Integrated CIR Process                               = *)
(* ===== *)

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt και y. *)
dt = T / TD; y = 0;
t = 0;

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας
για την παραγωγή του μονοπατιού της Integrated *)
(* CIR Process Y(t; y0), για το χρονικό διάστημα [0,T]. *)
For [i = 2, i ≤ TD + 1, i++,
    y = y + (1/2 * (CIR[[i]] + CIR[[i - 1]]) * dt);
    AppendTo[IntCIR, y];
    t = t + dt;
    AppendTo[IntCIRTraj, {t, y}];
];

(* ===== *)
(* =                               Παραγωγή της Xt για το VG Model                               = *)
(* ===== *)

(* Αρχικοποίηση τιμής των Shape Parameter, Scale Parameter, dt και y. *)
dt = IntCIR[[TD + 1]] / TD; y = 0;
ShPar = (m^2 / v) * dt; ScPar = (v / m);
t = 0;

(* Εναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή του μονοπατιού της Variance *)
(* Gamma Process Xvg(t; μ, σ, σv^2), για το χρονικό διάστημα [0, Yt]. *)
For [i = 1, i ≤ TD, i++,
    NormRN1 = Random[NormalDistribution[0, 1]];
    GammaRN1 = Random[GammaDistribution[ShPar, ScPar]];
    VarGammaRN1 = (μ * GammaRN1) + (σ * Sqrt[GammaRN1] * NormRN1);
    y = y + VarGammaRN1;
    AppendTo[X, y];
    t = t + dt;
    AppendTo[XTraj, {t, y}];
];

```



```

(* ===== *)
(* =                      Παραγωγή της Time Changed Xt Process                      = *)
(* ===== *)

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt και γ. *)
dt = T / TD; γ = 0;
t = 0;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή του μονοπατιού της Time *)
(* Changed Process Xt, για το χρονικό διάστημα [0,T]. *)
For[i = 2, i ≤ TD + 1, i++,
  γ = γ + (X[[i]] - X[[i - 1]]);
  AppendTo[TCX, γ];
  t = t + dt;
  AppendTo[TCXTraj, {t, γ}];
];

(* ===== *)
(* =                      Παραγωγή της Asset Price Process (under Q)                      = *)
(* ===== *)

(* Αρχικοποίηση τιμής των dt, t, z και g. *)
dt = T / TD; t = 0;

(* z = LogVG(-i), που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για το VG μοντέλο. *)
z = - $\frac{1}{v}$  * Log[1 + ((-I)2 * σ2 * v / 2) - (I * (-I) * μ * v)];

g =  $\sqrt{k^2 - 2 * \lambda^2 * I * (-I * z)}$ ;

(* Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για την παραγωγή του μονοπατιού της Asset *)
(* Price Process St(ω), για το χρονικό διάστημα [0,T]. *)
For[i = 2, i ≤ TD + 1, i++,
  t = t + dt;

  a =  $\frac{\text{Exp}[k^2 * \eta * t / \lambda^2]}{(\text{Cosh}[g * t / 2] + (k / g) * \text{Sinh}[g * t / 2])^{2 * k * \eta / \lambda^2}}$ ;

  b =  $\frac{2 * I * (-I * z)}{k + g * \text{Coth}[g * t / 2]}$ ;

  y = a * Exp[b * γ0];

  y = S0 *  $\frac{\text{Exp}[(r - q) * t]}{Y}$  * Exp[TCX[[i]]];

  AppendTo[AsPri, y];
  AppendTo[AsPriTraj, {t, y}];
];

```

```

(* ===== *)
(* =                Payoff Calculation (under Q)                = *)
(* ===== *)

(* Payoff function που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τα options τύπου LookBack. *)
y = AsPri[[TD+1]] - Min[AsPri];
If[Sign[y] == -1, y = 0];
AppendTo[PayOff, y];

(* Payoff function που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τα options τύπου Barrier. *)
If[SBar < Min[AsPri], y = 0,
  y = AsPri[[TD+1]] - ExePri;
  If[Sign[y] == -1, y = 0];
  AppendTo[PayOff, y];
];

(* Payoff function που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τα options τύπου LookBack. *)
y = AsPri[[TD+1]] - (Sum[AsPri[[i]], {i, TD+1}] / (TD+1));
If[Sign[y] == -1, y = 0];
AppendTo[PayOff, y];

];

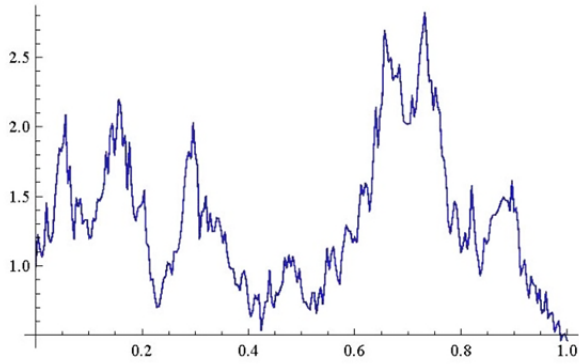
(* ===== *)
(* =                Option Price Calculation (under Q)                = *)
(* ===== *)

OptionPrice = Exp[-r * T] * Mean[PayOff];
Print["Option Price is ", OptionPrice];

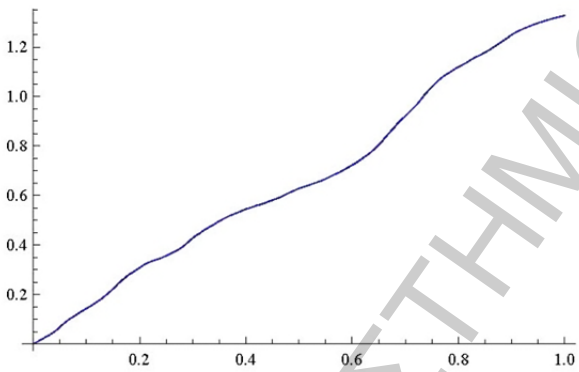
```

```
(* ===== *)  
(* =          Γραφήματα Διαδικασιών που παρήχθησαν          = *)  
(* ===== *)
```

```
(* Παρουσίαση της CIR Process που παρήχθη. *)  
ListPlot[CIRTraj, PlotJoined → True]
```



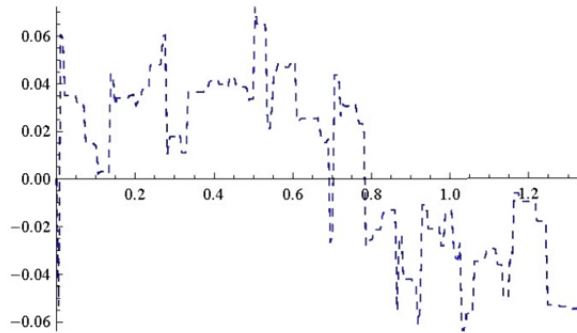
```
(* Παρουσίαση της Integrated CIR Process που παρήχθη. *)  
ListPlot[IntCIRTraj, PlotJoined → True]
```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

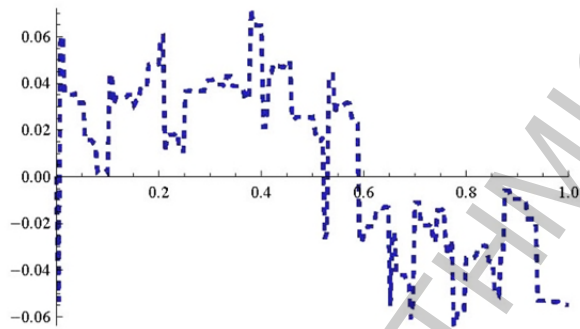
(* Παρουσίαση της X_t Process που παρήχθη. *)

```
Plot1 = ListPlot[XTraj, PlotJoined → True,  
PlotRange → {{0, IntCIR[TD + 1]}, {Min[XTraj[[All, 2]], Max[XTraj[[All, 2]]]}},  
PlotStyle → {Dashed}]
```

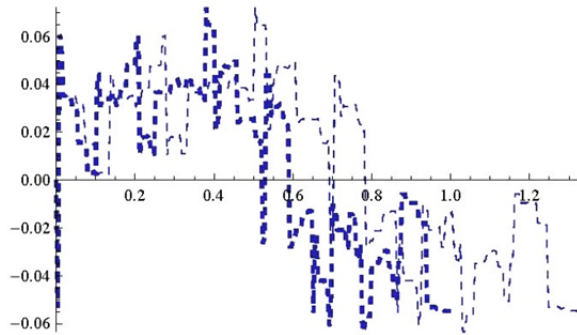


(* Παρουσίαση της Time Changed X_t Process που παρήχθη. *)

```
Plot2 = ListPlot[TCXTraj, PlotJoined → True,  
PlotRange → {{0, T}, {Min[TCXTraj[[All, 2]], Max[TCXTraj[[All, 2]]]}},  
PlotStyle → {Dashed, Thick}]
```

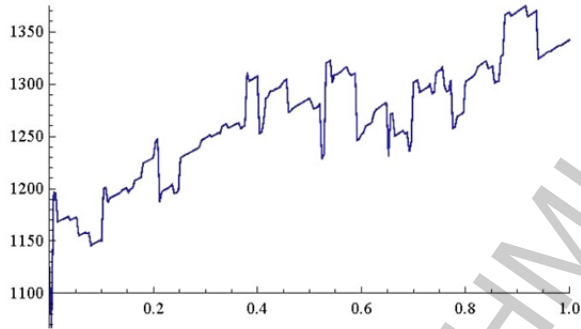


(* Παρουσίαση απο κοινού των X_t και Time Changed X_t Process που παρήχθησαν. *)
Show[Plot1, Plot2]



(* Παρουσίαση της Asset Price Process που παρήχθη. *)

```
ListPlot[AsPriTraj, PlotJoined -> True,  
PlotRange -> {{0, T}, {Min[AsPriTraj[[All, 2]], Max[AsPriTraj[[All, 2]]]}}
```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Βιβλιογραφία

Ελληνική:

1. Γιαννακόπουλος Α. (2003), *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική - Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
2. Γκλεζάκος Μ. (2011), *Διαχείριση Χαρτοφυλακίου Επενδύσεων*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
3. Μίχας Ι. (2008), *Ανελιξείς Lévy: Θεωρία και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική εργασία για το ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
4. Μπούτσικας Μ. (2004), *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
5. Μπούτσικας Μ. (2005), *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα - Εισαγωγή στην Στοχαστική Χρηματοοικονομική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη:

1. Ahrens J., Dieter U. (1974), Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson and Binomial Distributions, *Computing*, Vol. 12, Is. 3, pp. 223-246.
2. Andersen, L. B.G., Jäckel, P., Kahl, C. (2010), Simulation of Square-Root Processes, *Encyclopedia of Quantitative Finance*.
3. Applebaum B. (2009), *Lévy Processes and Stochastic Calculus (2nd Edition)*, Cambridge University Press.
4. Asmussen S., Glynn P. (2007), *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*, Springer.
5. Carr P., Geman H., Madan D., Yor M. (2002), The Fine Structure of Asset Returns - An empirical investigation, *Journal of Business*, Vol. 75, No. 2, pp. 305-332.
6. Carr P., Geman H., Madan D., Yor M. (2003), Stochastic Volatility for Levy Processes, *Mathematical Finance*, Vol. 13, No. 3, pp. 345-382.
7. Cont R., Tankov P. (2004), *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC.
8. Cox J., Ingersoll J., Ross Jr., Ross S. (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-407.
9. Devroye L. (1986), *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag New York Inc.

10. Fu M., Jarrow R., Yen Ju-Yi, Elliott R. (2007), *Advances in Mathematical Finance*, Birkhäuser Boston.
11. Korn R., Korn E., Kroisandt G. (2010), *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*, Chapman & Hall/CRC.
12. Leccardi M. (2005), Comparison of Three Algorithms for Lévy Noise Generation, in: *ENOC'05* (Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Mini Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications).
13. Madan D., Carr P., Chang E. (1998), The Variance Gamma Process and Option Pricing, *European Finance Review*, Vol. 2, pp. 79-105.
14. Madan D., Seneta E. (1990), The Variance Gamma Model for Share Market Returns, *The Journal of Business*, Vol. 63, No. 4, pp. 551-524.
15. Mikosch T. (1998), *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing.
16. Olivares P., Seco L. (2003), Stable Distributions: a Survey on Simulation and Calibration Methodologies, *Risk Lab Technical Report*, University of Toronto.
17. Papapantoleon A. (2005), *An introduction to Lévy Processes with Applications in Finance*, Lecture notes prepared for mini-courses taught at the Universities of Piraeus, the University of Leipzig and at the Technological University of Athens.
18. Particle Data Group (2010), *Review of Particle Physics*, California University Press.
19. Poirot, J., Tankov, P. (2006), Monte Carlo Option Pricing for Tempered Stable (CGMY) Processes, *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 13, No. 4, pp. 327-344.
20. Ribeiro C., Webber N. (2004), Valuing Path-Dependent Options in the Variance-Gamma Model by Monte Carlo with a Gamma Bridge, *Journal of Computational Finance*, Vol: 7, No: 2, pp. 81-100.
21. Rosinski J. (2007), Simulation of Lévy Processes, *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability: Computationally Intensive Methods and Simulation*, Wiley.
22. Rydberg T. (1997), The Normal Inverse Gaussian Lévy Process: Simulation and Approximation, *Communications in Statistics, Stochastic Models*, Vol: 13, No: 4, pp. 887-910.
23. Sato Ken-iti (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.
24. Schoutens W. (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley.
25. Schoutens W., Symens S. (2003), The Pricing of Exotic Options by Monte-Carlo Simulation in a Lévy Market with Stochastic Volatility, *International Journal for Theoretical and Applied Finance*, Vol. 6, No. 8, pp. 839-864.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

