

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	Καμπυλότητα (Curvature)
Όνοματεπώνυμο Φοιτητή	Γεωργάκης Ιωάννης
Πατρώνυμο	Χρήστος
Αριθμός Μητρώου	11052
Επιβλέπων	Ευγ. Φούντας

Περιεχόμενα

1	Διαφορίσιμες Καμπύλες.....	3
	Εισαγωγή.....	3
1.1	Διαφορίσιμες καμπύλες.....	3
1.2	Αναπαραμέτρηση καμπύλης.....	8
1.3	Καμπυλότητα και στρέψη.....	11
1.4	Καμπυλότητα και στρέψη τυχαίας κανονικής καμπύλης.....	22
1.5	Το τρίεδρο Frenet μιας τυχαίας καμπύλης.....	25
1.6	Κανονική μορφή καμπύλης.....	27
1.7	Ο εγγύτατος κύκλος.....	32
1.8	Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών.....	36
1.9	Επίπεδες καμπύλες.....	43
2	Κανονικές Επιφάνειες.....	52
	Εισαγωγή.....	52
2.1	Βασικοί Ορισμοί.....	53
2.2	Παραδείγματα.....	58
2.3	Βασικές ιδιότητες.....	59
2.4	Επιφάνειες εκ περιστροφής.....	64
3	Η καμπυλότητα Gauss.....	70
	Εισαγωγή.....	70
3.1	Κάθετα διανύσματα.....	70
3.2	Η πρώτη θεμελιώδης μορφή.....	74
3.3	Η απεικόνιση Gauss.....	80
3.4	Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή.....	85
3.5	Η καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών.....	89
4	Βιβλιογραφία.....	91

1 Διαφορίσιμες Καμπύλες

Εισαγωγή

Καμπύλες όπως ο κύκλος, οι κωνικές τομές, οι έλικες και οι σπείρες είχαν απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες. Με σχετικά προβλήματα είχαν ασχοληθεί ο Πλάτωνας, ο Μέναιχμος, ο Απολλώνιος, ο Αρχιμήδης, κ.α. Επίσης για την αντιμετώπιση των περίφημων άλυτων (με κανόνα και διαβήτη) προβλημάτων είχαν ανακαλυφθεί και μελετηθεί η κισσοειδής του Διοκλέους, η κογχοειδής του Νικομήδους και η τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτου.

Ενα σημαντικό πρόβλημα που απασχόλησε τους Μαθηματικούς από την εποχή της αρχαιότητας, ήταν και η χάραξη της εφαπτομένης σε ένα σημείο μίας καμπύλης. Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε φυσικά στο πλαίσιο της γνωστής τότε (συνθετικής) Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήσαν μόνον μερικές και αφορούσαν συγκεκριμένες καμπύλες. Μια καλλίτερη προσέγγιση έγινε δυνατή στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Παρά τις σημαντικές προόδους που σημειώθηκαν στην κατεύθυνση αυτή από τους R. Descartes, P. Fermat και C. Huygens, και πάλι η γενική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος σταματούσε όταν επρόκειτο να αντιμετωπιστούν εξισώσεις βαθμού ανωτέρου του 3.

Το πρόβλημα του προσδιορισμού της εφαπτομένης επιλύθηκε στη γενικότητά του με την χρήση του Διαφορικού Λογισμού, που μαζί με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό άσκησαν τεράστια επίδραση στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης.

Η χρήση του Διαφορικού Λογισμού στη μελέτη της Γεωμετρίας οδήγησε στην δημιουργία ενός νέου κλάδου, της Διαφορικής Γεωμετρίας. Στην ανάπτυξη της Διαφορικής Γεωμετρίας των καμπυλών είχαν θεμελιώδη συμβολή οι I. Newton, G. W. Leibniz, L. Euler, G. Monge, J. Bernoulli, A. C. Clairaut, F. Frenet, J. A. Serret, J. Bertrand, Ch. Dupin, και πολλοί άλλοι. Μερικά άλλα σημαντικά ονόματα θα αναφερθούν στη θεωρία των επιφανειών.

Η μελέτη των καμπυλών, εκτός από το καθ' αυτό μαθηματικό ενδιαφέρον της, έχει σημαντικές εφαρμογές στη μηχανική, στη ναυσιπλοΐα, στον προσδιορισμό των τροχιών ουρανίων σωμάτων ή συστημάτων δορυφόρων, κ.α.

Εδώ θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες και συμπεράσματα της λεγόμενης "τοπικής" θεωρίας των καμπυλών.

1.1 Διαφορίσιμες καμπύλες

Στην Αναλυτική Γεωμετρία λέγοντας καμπύλη εννοούμε ένα σύνολο X σημείων (του χώρου ή του επιπέδου) που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι ο γεωμετρικός τόπος σημείων που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη

ιδιότητα (κύκλος, έλλειψη, κλπ.), το *γράφημα* μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, η *τροχιά* ενός κινητού, κ.ο.κ. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού στην μελέτη του X , και για να γίνει αυτό θα πρέπει να δούμε τις καμπύλες ως *εικόνες κατάλληλων συναρτήσεων*. Έτσι, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

Μια **παραμετρημένη καμπύλη στο χώρο** (parametrized curve), ή απλώς **καμπύλη στο χώρο** (space curve) είναι μια συνεχής απεικόνιση $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα.

Ο όρος "παραμετρημένη" (που συνήθως θα παραλείπεται στη συνέχεια) σημαίνει ότι η καμπύλη περιγράφεται με την βοήθεια μιας μεταβλητής (παραμέτρου) $t \in I$.

Επειδή, για κάθε $t \in I$, είναι $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, η α είναι μία τριάδα της μορφής

$$(1.1.1) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Κάθε συνιστώσα (ή συντεταγμένη)

$$\alpha_i: = u_i \circ \alpha; \quad i = 1, 2, 3,$$

όπου η $u_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συμβολίζει την κανονική προβολή στην i -συντεταγμένη, είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Η συνέχεια της α ισοδυναμεί με την συνέχεια κάθε μιας από τις α_i .

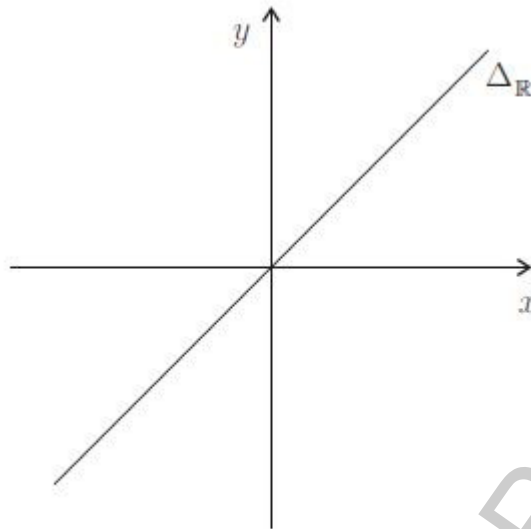
Αν η εικόνα $\alpha(I)$ μίας καμπύλης περιέχεται σε ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 , λέμε ότι η α είναι **επίπεδη καμπύλη** (plane curve). Σ' αυτήν την περίπτωση, με μια αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να θεωρούμε ότι $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$.

Ενδιαφερόμαστε όχι για την απεικόνιση α (παραμετρημένη καμπύλη), αλλά για τις γεωμετρικές ιδιότητες της εικόνας, δηλαδή του συνόλου $X = \alpha(I)$. Η απεικόνιση α είναι απλώς το εργαλείο για την μελέτη του $\alpha(I)$.

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι καμπύλες

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \\ \beta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, t) \\ \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t^3, t^3) \\ \delta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{cases} (t, t) & : t \leq 0 \\ (t^2, t^2) & : t > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

έχουν την ίδια εικόνα $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R}) = \delta(\mathbb{R}) = \Delta_{\mathbb{R}}$, δηλαδή την διαγώνιο του \mathbb{R}^2 (βλ. και το επόμενο σχήμα).



Σχήμα 1.1

Απ'αυτές,

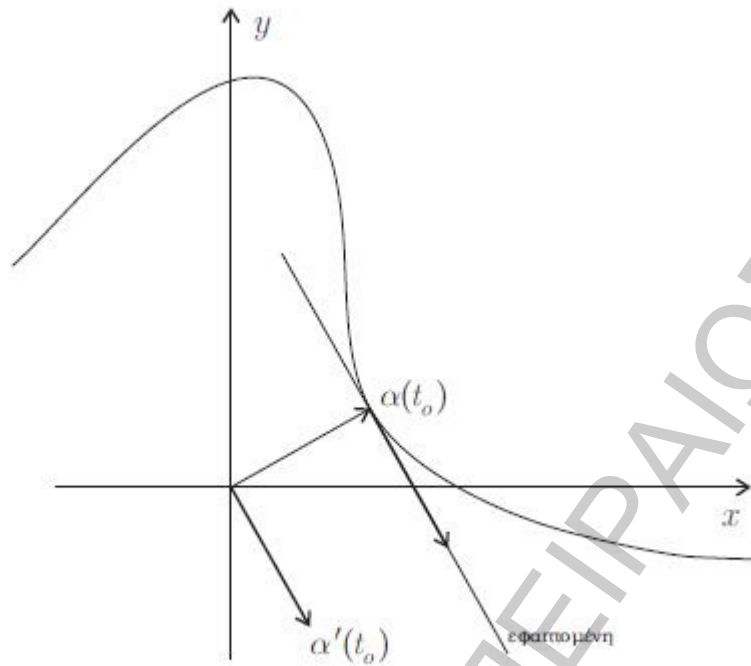
- η α είναι διαφορίσιμη, με $\|\alpha'(t)\| = 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,
- η β είναι διαφορίσιμη, με $\beta'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,
- η γ είναι διαφορίσιμη και υπάρχει ένα σημείο, το 0, όπου $\gamma'(0) = (0, 0)$,
- ενώ η δ δεν είναι διαφορίσιμη.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι : (1) η ίδια καμπύλη $\Delta_{\mathbb{R}}$ μπορεί να περιγραφεί ως εικόνα διαφορετικών (παραμετρημένων) καμπυλών και (2) η ανυπαρξία παραγώγου ή ο μηδενισμός της (για μια παραμέτρηση) δεν συνδέονται κατ' ανάγκην με κάποια ανωμαλία στο σχήμα της εικόνας $\Delta_{\mathbb{R}}$.

Δημιουργούν όμως τεχνικές δυσκολίες, γι' αυτό θα θεωρήσουμε καμπύλες που διαγράφουν την εικόνα με τον καλλίτερο δυνατό τρόπο, έτσι ώστε να δίνουν αμεσώτερα τα ητούμενα συμπεράσματα.

Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια διαφορίσιμη καμπύλη και έστω ότι σε ένα σημείο t_0 είναι $\alpha'(t_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει η εφαπτομένη ευθεία (tangent line) της α στο σημείο $\alpha(t_0)$, που δίνεται από την εξίσωση.

$$(1.1.2) \quad \varepsilon(s) = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 1.2

Η ανυπαρξία ή ο μηδενισμός της παραγώγου $\alpha'(t_0)$ στο σημείο t_0 δεν επιτρέπουν την προηγούμενη έκφραση της εφαπτομένης. Γι' αυτό στα επόμενα θεωρούμε μόνο διαφορίσιμες καμπύλες, των οποίων η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά. Μια καμπύλη μ' αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται **κανονική** ή **ομαλή** (regular), ενώ σε μια καμπύλη α που δεν είναι ομαλή, κάθε σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος λέγεται **σημείο ανωμαλίας** (της α).

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας έχουν τάξη διαφορισιμότητας αρκετά μεγάλη (συνήθως ≥ 3), ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη όσων παραγώγων χρειάζονται. Επίσης, θα υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας είναι και απλές, δηλαδή είναι απεικονίσεις $1 - 1$. Επομένως, για να αποφύγουμε τις περιττές επαναλήψεις, με τον όρο "κανονική καμπύλη" θα εννοούμε μια απλή κανονική καμπύλη, C^r -διαφορίσιμη, με $r \geq 3$.

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη α , η παράγωγος

$$(1.1.3)$$

ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** (tangent vector) ή **διάνυσμα ταχύτητας** (velocity) της α στο $\alpha(t)$, ενώ το μήκος του ανωτέρω διανύσματος

$$v(t) := \|\alpha'(t)\| = (\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2)^{1/2}$$

ονομάζεται **μέτρο της ταχύτητας** (speed) της α στο t .

Αν και η α' είναι διαφορίσιμη, τότε η δεύτερη παράγωγος

$$\alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t)) \quad (1.1.4)$$

ονομάζεται **επιτάχυνση** (acceleration) της α στο t .

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, ονομάζουμε **μήκος** (length) της α το ολοκλήρωμα

$$L(\alpha) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt. \quad (1.1.5)$$

Για δύο καμπύλες $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, συμβολίζουμε με $\langle \alpha, \beta \rangle$ την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\langle \alpha, \beta \rangle: I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$$

(1.1.6)

και με $\alpha \times \beta$ την διαφορίσιμη καμπύλη

$$(1.1.7) \quad \alpha \times \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \alpha(t) \times \beta(t).$$

Από την διγραμμικότητα του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου προκύπτουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle'(t) &= \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle, \\ (\alpha \times \beta)'(t) &= (\alpha'(t) \times \beta(t)) + (\alpha(t) \times \beta'(t)). \end{aligned} \quad (1.1.8) \quad (1.1.9)$$

Η απόδειξη των τύπων αυτών προκύπτει επίσης στοιχειωδώς : αν γράψουμε τις καμπύλες με τις συνιστώσες τους [βλ. σχέση (1.1.1)] και εφαρμόσουμε τον ορισμό του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, έχουμε τις αντίστοιχες σχέσεις

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle &= \alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \alpha_3(t)\beta_3(t), \\ \alpha(t) \times \beta(t) &= \\ &(\alpha_2(t)\beta_3(t) - \alpha_3(t)\beta_2(t), \alpha_3(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_3(t), \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)), \end{aligned}$$

οπότε παραγωγίζουμε τις τελευταίες με το συνήθη τρόπο.

Οι παράγωγοι και το μήκος της α μας δίνουν πολλές πληροφορίες για την $\alpha(I)$, όπως γίνεται φανερό από τα επόμενα

1.1.1 Παραδείγματα. (1) Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Αν $\alpha'(t_0) = \mathbf{0}$, για κάθε $t \in I$, η α είναι ευθεία.

Πράγματι,

$$\alpha''(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha'(t) = \lambda \Rightarrow \alpha(t) = \lambda t + \mu.$$

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

(2) Έστω α μια διαφορίσιμη καμπύλη που δεν περνά από το 0. Αν $\alpha(t_0)$ είναι το σημείο της εικόνας το πλησιέστερο στο 0 και $\alpha'(t_0) \neq \mathbf{0}$, τότε το $\alpha(t_0)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t_0)$.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση που σε κάθε $t \in I$ αντιστοιχεί το τετράγωνο της απόστασης του $\alpha(t)$ από το 0, δηλαδή την

$$\delta: I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \|\alpha(t)\|^2 = \alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle.$$

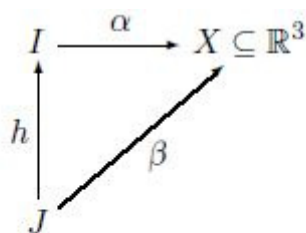
Αφού η δ παρουσιάζει ελάχιστο στο t_0 , θα είναι $\delta'(t_0) = 0$ άρα, βάσει της (1.1.8), έχουμε ότι

$$0 = \delta'(t_0) = \langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) \rangle = 2 \langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle,$$

Απ' όπου συνάγεται ότι $\alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$.

1.2 Αναπαραμέτρηση καμπύλης

Αν $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη, τότε μια καμπύλη $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται αναπαραμέτρηση (reparametrization) της α , αν υπάρχει μια αμφιδιαφόριση $h: J \rightarrow I$, με $\beta = \alpha \circ h$ (βλ. και το επόμενο σχετικό διάγραμμα).



Διάγραμμα 1.1

Υπενθυμίζουμε ότι η έκφραση "η h είναι αμφιδιαφόριση" σημαίνει ότι η h είναι διαφορίσιμη απεικόνιση $\mathbb{1} - \mathbb{1}$ και επί με διαφορίσιμη αντίστροφη. Κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης, η h είναι αμφιδιαφόριση τότε και μόνον τότε αν είναι $\mathbb{1} - \mathbb{1}$ και επί με $h'(s) \neq \mathbf{0}$, για κάθε $s \in J$.

Είναι φανερό ότι κάθε αναπαραμέτρηση της α έχει την ίδια εικόνα με την α . Είναι επίσης φανερό ότι αν η α είναι κανονική, τότε και κάθε αναπαραμέτρησή της είναι κανονική.

Θα αναζητήσουμε εκείνες τις ιδιότητες της εικόνας $X := \alpha(I) = \beta(J)$ που δεν εξαρτώνται από την καμπύλη με την οποία διατρέχουμε το X . Μια τέτοια ιδιότητα μας δίνει το επόμενο

1.2.1 Θεώρημα. Αν β είναι μια αναπαραμέτρηση της α , τότε $L(\beta) = L(\alpha)$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\beta: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^3$ αναπαραμέτρησή της α με $\beta = \alpha \circ h$, όπου $h: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ αμφιδιαφόριση. Είναι

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_{a'}^{b'} \|\beta'(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \|(\alpha \circ h)'(s)\| ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| ds. \end{aligned}$$

Για $h' > 0$, δηλαδή για h γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 L(\beta) &= \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds = \int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\
 &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).
 \end{aligned}$$

Για $h' < 0$, δηλαδή για h γνησίως φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 L(\beta) &= - \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds = - \int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\
 &= - \int_b^a \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha),
 \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η α'' μας δείχνει πώς αλλάζει η α' . Η αλλαγή αυτή μπορεί να αφορά σε αλλαγή του μέτρου της α' , ή σε αλλαγή της διεύθυνσης. Σταθεροποιώντας το μέτρο, παίρνουμε επιτάχυνση που δείχνει μόνο την αλλαγή της διεύθυνσης, άρα την καμπύλωση του χώρου $X = \alpha(I)$. Έτσι, ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες που έχουν την ίδια εικόνα, αυτή που μας δίνει ευκολότερα τα ητούμενα συμπεράσματα για την κοινή εικόνα είναι η καμπύλη που έχει ταχύτητα με σταθερό μέτρο, ίσο με 1.

Ισχύει το επόμενο βασικό

1.2.2 Θεώρημα. Κάθε κανονική καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ δέχεται αναπαραμέτρηση $\beta: J \rightarrow \mathbf{R}^2$ με $\|\beta'(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$.

Απόδειξη. Έστω $I := [a, b]$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$s: [a, b] \longrightarrow [0, L(\alpha)]: t \mapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα και διαφορίσιμη, με

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t) > 0,$$

άρα (βλ. Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης), έχει διαφορίσιμη αντίστροφη

$$h: [0, L(\alpha)] \longrightarrow [a, b]$$

της οποίας η παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$(1.2.1) \quad h'(s) = 1/s'(h(s)), \quad \forall s \in [0, L(\alpha)].$$

Θέτοντας $\beta := \alpha \circ h$, έχουμε ότι

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\|/|s'(h(s))| = 1,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Μια καμπύλη $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\|\beta'(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$, ονομάζεται **καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας**. Αν α είναι μια τυχαία κανονική καμπύλη, λέμε ότι η αναπαραμέτρηση β που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο θεώρημα, είναι η **αναπαραμέτρηση μέσω (του) μήκους τόξου** ή ότι έχει **παράμετρο το μήκος τόξου**. Επίσης το μήκος τόξου λέγεται και **φυσική παράμετρος**.

1.3 Καμπυλότητα και στρέψη

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε κάποια αριθμητικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σύνολο $X = \alpha(J)$, όπου α είναι μια κανονική καμπύλη. Όπως σημειώσαμε και νωρίτερα, τα ητούμενα συμπεράσματα για το X τα παίρνουμε ευκολότερα αν η καμπύλη έχει μοναδιαία ταχύτητα. Γι' αυτό, αν η αρχική α δεν έχει μοναδιαία ταχύτητα, θεωρούμε την αντίστοιχη αναπαραμέτρηση μέσω του μήκους τόξου.

Έστω λοιπόν $\beta(s), s \in J$, μια καμπύλη **μοναδιαίας ταχύτητας**. Θέτουμε

$$(1.3.1) \quad \boxed{T(s) := \beta'(s)} \quad \forall s \in J.$$

Επομένως, το $T(s)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας της β στο σημείο $\beta(s)$. Εφ' όσον $\|T(s)\| = 1$ για κάθε $s \in J$, τα εφαπτόμενα διανύσματα $T(s)$ είναι στοιχεία της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^3 .

Μεταβάλλοντας το s στο J παίρνουμε μία **διαφορίμη** συνάρτηση

$$(1.3.1') \quad T: J \ni s \longmapsto T(s) = \beta'(s) \in \mathbb{R}^3.$$

Ισχύει το επόμενο

1.3.1 Λήμμα. Αν $\beta(s)$, $s \in J$, είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε

$$T' \perp T,$$

Δηλαδή

$$T'(s) \perp T(s), \quad \forall s \in J.$$

Απόδειξη. Το μήκος του διανύσματος $T(s)$ είναι σταθερό, άρα και η συνάρτηση $\|T(s)\|^2 = \langle T(s), T(s) \rangle$ είναι σταθερή, δηλαδή έχει μηδενική παράγωγο

$$\langle T, T \rangle'(s) = 2 \langle T'(s), T(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in J,$$

Απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Επειδή το μήκος του $T(s) = \beta'(s)$ (ταχύτητα) είναι σταθερά 1, η παράγωγος $T'(s) = \beta''(s)$ (επιτάχυνση) δείχνει την αλλαγή της διεύθυνσης του διανύσματος $T(s)$.

Το μήκος του διανύσματος $T'(s)$ συμβολίζεται με

$$k(s) := \|T'(s)\|$$

(1.3.2)

και ονομάζεται **καμπυλότητα** της β στο $\beta(s)$. Η $k(s)$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Αν $k(s) = 0$, λέμε ότι το σημείο s είναι **ιδιάζον σημείο τάξης 1**. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση (καμπυλότητας)

$$(1.3.2') \quad k: J \ni s \mapsto k(s) \in [0, \infty).$$

Όπως θα δούμε στο Θεώρημα 1.3.4, η καμπυλότητα μετράει το κατά πόσον η καμπύλη διαφέρει από την ευθεία.

Για τα επόμενα χρειάζεται η β να μην έχει ιδιάζοντα σημεία τάξης 1, άρα έχει παντού μη μηδενική καμπυλότητα. Για $k(s) \neq 0$, το αντίστροφο της καμπυλότητας, δηλαδή ο αριθμός

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)}$$

(1.3.3)

καλείται **ακτίνα καμπυλότητας**. Μέσω της τελευταίας, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε το διάνυσμα

$$N(s) := \frac{1}{k(s)} T'(s)$$

(1.3.4)

που ονομάζεται **πρώτο κάθετο** ή **πρωτεύον κάθετο διάνυσμα** (normal vector) της β στο $\beta(s)$. Το διάνυσμα αυτό είναι ένα μοναδιαίο και (σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.1) κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα. Ορίζεται επίσης και η αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N: J \ni s \mapsto N(s) \in \mathbb{R}^3.$$

(1.3.4')

Τέλος, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε και το διάνυσμα

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

(1.3.5)

και την αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$B: J \ni s \mapsto B(s) \in \mathbb{R}^3.$$

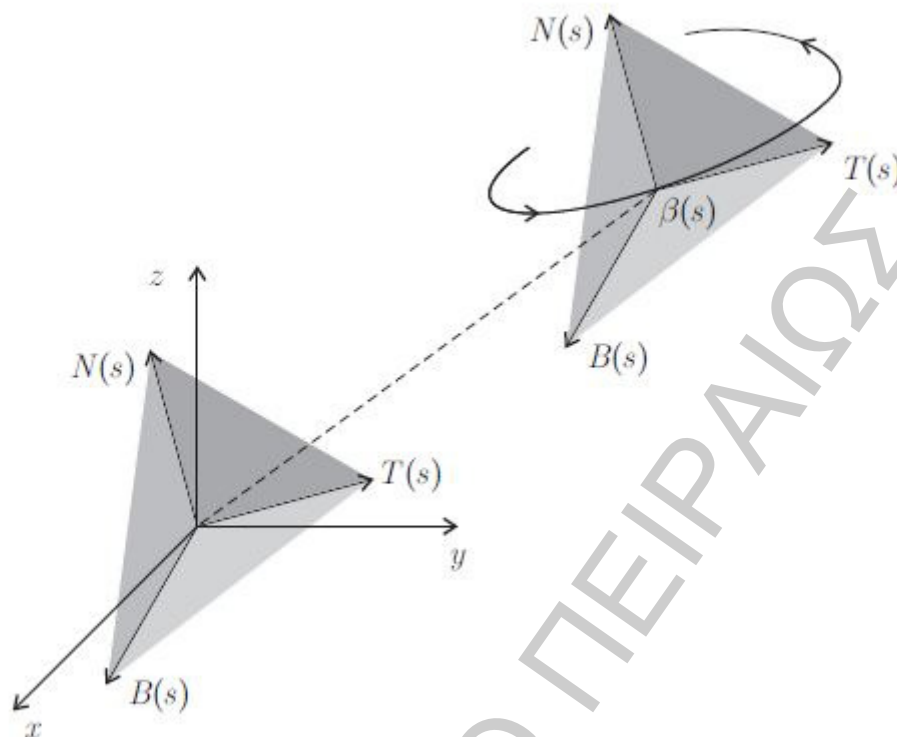
(1.3.5')

Το $B(s)$ καλείται **δεύτερο κάθετο διάνυσμα** (binormal vector) της β στο $\beta(s)$. Προφανώς είναι κάθετο στα $T(s), N(s)$ και μοναδιαίο.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι, για κάθε $s \in J$, η τριάδα

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 , και ονομάζεται **συνοδεύον τρίεδρο** (moving frame) ή **τρίεδρο Frenet** (Frenet frame) στο σημείο $\beta(s)$ της β .



Σχήμα 1.3

Αντιστοίχως, η τριάδα των συναρτήσεων

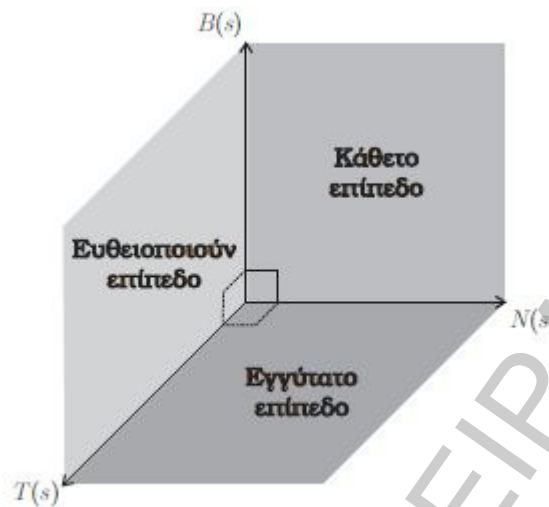
$$\{T, N, B\}$$

καλείται **συνοδεύον τρίεδρο** ή **τρίεδρο Frenet κατά μήκος της β** .

Πολλές φορές, για διευκόλυνση αλλά και για την παραστατικότερη απεικόνιση των πραγμάτων, θεωρούμε ότι τα τρία προηγούμενα διανύσματα έχουν μεταφερθεί παράλληλως κατά το διάνυσμα $\beta(s)$, οπότε έχουν ως αρχήν το σημείο $\beta(s)$ της καμπύλης. Έτσι σχηματίζεται η εικόνα ενός τριέδρου, που συνοδεύει τα σημεία της καμπύλης. Αυτό δικαιολογεί και την παραπάνω ορολογία. Σχετικώς παραθέτουμε το Σχήμα 1.3.

Μέσω των παραπάνω βασικών διανυσμάτων, ορίζουμε τρία χαρακτηριστικά επίπεδα, που επίσης συνοδεύουν την καμπύλη. Ακριβέστερα, για κάθε σημείο $s \in J$, τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $T(s)$ και $N(s)$ ορίζουν ένα επίπεδο E . Το (μοναδικό) επίπεδο που περνά από το σημείο $\beta(s)$ και είναι *παράλληλο* προς το E (άρα και προς τα διανύσματα $T(s), N(s)$) ονομάζεται **εγγύτατο επίπεδο** (osculating plane) της β στο $\beta(s)$. Το επίπεδο, που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $N(s)$ και $B(s)$ καλείται **κάθετο επίπεδο** (normal plane) της β στο σημείο, ενώ το επίπεδο που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι

παράλληλο προς το επίπεδο των $T(s)$ και $B(s)$ καλείται **ευθειοποιούν επίπεδο** (rectifying plane) της β στο σημείο.



Σχήμα 1.4

Προφανώς, το εγγύτατο επίπεδο (στο $\beta(s)$) είναι κάθετο στο διάνυσμα $B(s)$, το κάθετο επίπεδο είναι κάθετο στο $T(s)$ και το ευθειοποιούν επίπεδο είναι κάθετο στο $N(s)$. Οι τελευταίες ιδιότητες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των αντιστοίχων εξισώσεων των επιπέδων αυτών, όπως εξηγούμε στις ασκήσεις του παρόντος κεφαλαίου.

Στα Σχήματα 1.3 και 1.4 απεικονίζονται τα προηγούμενα επίπεδα. Σημειώνουμε ότι και στα δύο έχουμε μεταθέσει τα διανύσματα $\{T(s), N(s), B(s)\}$ στο σημείο $\beta(s)$, οπότε το εγγύτατο επίπεδο ταυτίζεται με το επίπεδο των $T(s), N(s)$ κ.ο.κ.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε και ένα άλλο βασικό, για την μελέτη μιας καμπύλης, μέγεθος. Επειδή $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$, για κάθε $s \in J$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $\langle N, B \rangle = 0$ [βλ. και τις ανάλογες σχέσεις (1.1.6), (1.1.8)] βρίσκουμε ότι

$$\langle N'(s), B(s) \rangle + \langle N(s), B'(s) \rangle = 0.$$

Τον πραγματικό αριθμό

$$\tau(s) := - \langle N(s), B'(s) \rangle = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

(1.3.6)

ονομάζουμε **στρέψη** (torsion) της καμπύλης β στο σημείο $\beta(s)$. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$(1.3.6') \quad \tau: J \ni s \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}.$$

Από την (1.3.6) προκύπτει ότι η στρέψη, αφού περιέχει την παράγωγο $B'(s)$, μετρά κατά κάποιον τρόπο την μεταβολή του δευτέρου καθέτου διανύσματος, άρα και τη μεταβολή του εγγυάτου επιπέδου. Η μεταβολή του τελευταίου ουσιαστικά καθορίζει τη θέση της καμπύλης στο χώρο, δηλαδή το κατά πόσον η καμπύλη απομακρίνεται από το επίπεδο, άρα διαφέρει από μια επίπεδη καμπύλη. Την ακριβή σημασία της στρέψης (όπως και της καμπυλότητας) θα δούμε στο Θεώρημα 1.3.5.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη των τύπων (εξισώσεων) FrenetSerret, οι οποίοι εκφράζουν τις παραγώγους $T'(s), N'(s), B'(s)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των βασικών διανυσμάτων με συντελεστές την καμπυλότητα και στρέψη. Αποδείχτηκαν (ανεξαρτήτα) από τους F. Frenet και J. Serret.

1.3.4 Θεώρημα. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με $k > 0$ και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο του Frenet κατά μήκος της β . Τότε ισχύουν οι σχέσεις (τύποι FrenetSerret):

$$\begin{aligned} (F. 1) \quad & T' = kN \\ (F. 2) \quad & N' = -kT + \tau B \\ (F. 3) \quad & B' = -\tau N. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η (F.1) προκύπτει από τον ορισμό του $N(s)$ [βλ. σχέση (1.3.4)]. Για την (F.2) προχωρούμε ως εξής: Επειδή, για κάθε $s \in J$, τα διανύσματα $T(s), N(s)$ και $B(s)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $a, b, c: J \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$(1.3.7) \quad N'(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις a, b, c θα σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της (1.3.7) διαδοχικά με τα διανύσματα $T(s), N(s), B(s)$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle N'(s), T(s) \rangle &= a(s) \langle T(s), T(s) \rangle + b(s) \langle N(s), T(s) \rangle \\ &\quad + c(s) \langle B(s), T(s) \rangle \\ &= a(s)1 + b(s)0 + c(s)0 = a(s). \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, η παραγωγή της σχέσης $\langle T, N \rangle = 0$ δίνει ότι

$$\langle T, N \rangle' = \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0,$$

άρα, μαζί με την (F.1),

$$\langle T, N' \rangle = -\langle T', N \rangle = -\langle kN, N \rangle = -k \cdot 1 = -k.$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$a(s) = -k(s),$$

οπότε η (1.3.7) παίρνει την μορφή

$$(1.3.8) \quad N'(s) = -k(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία "εσωτερικά" με $N(s)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle N'(s), N(s) \rangle &= -k(s)\langle T(s), N(s) \rangle + b(s)\langle N(s), N(s) \rangle \\ &\quad + c(s)\langle B(s), N(s) \rangle \\ &= -k(s)0 + b(s)1 + c(s)0 = b(s). \end{aligned}$$

Η σχέση $\langle N, N \rangle = 1$ οδηγεί στην

$$\langle N, N \rangle' = 2\langle N, N' \rangle = 0,$$

άρα

$$b(s) = 0,$$

μέσω της οποίας η (1.3.8) μετασχηματίζεται στην

$$(1.3.9) \quad N'(s) = -k(s)T(s) + 0N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Τέλος, από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \langle N'(s), B(s) \rangle &= -k(s) \langle T(s), B(s) \rangle + 0 \langle N(s), B(s) \rangle \\
 &\quad + c(s) \langle B(s), B(s) \rangle \\
 &= -k(s)0 + 0 + c(s)1 = c(s).
 \end{aligned}$$

Αλλά η $\langle B, N \rangle = 0$ δίνει ότι

$$\langle B, N \rangle' = \langle B', N \rangle + \langle B, N' \rangle = 0,$$

άρα, σύμφωνα με την (1.3.6),

$$\langle B(s), N'(s) \rangle = - \langle B'(s), N(s) \rangle = \tau(s),$$

Οπότε

$$c(s) = \tau(s),$$

και η (1.3.9) μετασχηματίζεται στην

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s); \quad \forall s \in J,$$

δηλαδή καταλήγουμε στην **(F.2)**.

Για την **(F.3)** αρκεί να παραγωγίσουμε την $B = T \times N$, λαμβάνοντας υπόψιν τις **(F.1)**, **(F.2)** και τις σχέσεις του Πορίσματος 1.3.3. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 B' &= T' \times N + T \times N' \\
 &= kN \times N + T \times (-kT + \tau B) \\
 &= k \cdot 0 + (-kT \times T + \tau T \times B) \\
 &= -k \cdot 0 + \tau T \times B \\
 &= -\tau N.
 \end{aligned}$$

Οι τύποι FrenetSerret συνοψίζονται και στην επόμενη μορφή:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

(1.3.10)

Απο εδώ φαίνεται και ο μνημονοτεχνικός κανόνας, μέσω του οποίου βρίσκουμε αμέσως τους συντελεστές των (F.1)-(F.3): εμφανίζονται μόνον η καμπυλότητα και η στρέψη (κατά σειράν), στην 2η γραμμή και την 2η στήλη, με την σημειούμενη εναλλαγή προσήμων.

Το επόμενο αποτελέσματα διαφωτίζουν το ρόλο της καμπυλότητας και της στρέψης μιας καμπύλης.

1.3.5 Θεώρημα. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε ισχύουν οι επόμενοι χαρακτηρισμοί :

- (i) $\kappa = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι ευθεία.
- (ii) Αν $\kappa > 0$, τότε $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι επίπεδη.

Απόδειξη. (i) $\kappa = 0 \Leftrightarrow T' = \beta'' = 0 \Leftrightarrow \beta'(s) = \lambda \Leftrightarrow \beta(s) = \lambda s + \mu$ [βλ. και Παράδειγμα 1.1.1(1)]. Προφανώς, για να είναι η καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, θα πρέπει $\|\lambda\| = 1$.

$$B' = -\tau N \quad \tau = -\langle N, B' \rangle$$

(ii) Από τις σχέσεις και συνάγεται ότι $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν $B' = 0$, που με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι η απεικόνιση $B = T \times N$ είναι σταθερή, δηλαδή για ένα $s_0 \in J$,

$$B(s) = B(s_0), \quad \forall s \in J.$$

Ετσι έχουμε

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\Rightarrow B(s) = B(s_0) \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow T(s) \perp B(s_0), \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle T(s), B(s_0) \rangle = \langle \beta'(s), B(s_0) \rangle = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle' = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle = \text{σταθερό}, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle = \langle \beta(s_0), B(s_0) \rangle, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s) - \beta(s_0), B(s_0) \rangle = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \beta(s) - \beta(s_0) \perp B(s_0), \quad \forall s \in J. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $\beta(s) - \beta(s_0)$ ανήκει στο επίπεδο E_{s_0} των $T(s_0)$ και $N(s_0)$, δηλαδή το $\beta(s)$ ανήκει στο εγγύτατο επίπεδο $E_{s_0} + \beta(s_0)$, για κάθε $s \in J$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\beta(s) \in E$, για κάποιο επίπεδο E , και έστω E_0 το επίπεδο (υπόχωρος του \mathbb{R}^2 , διάστασης 2) που είναι παράλληλο με το E και περιέχει το 0. Τότε,

$$E = \beta(s) + E_0, \quad \forall s \in J.$$

Σταθεροποιώντας ένα $s_0 \in J$, παίρνουμε ότι

$$\beta(s) \in \beta(s_0) + E_0, \quad \forall s \in J.$$

Αν το E_0 παράγεται από μία ορθοκανονική βάση $\{u, v\}$, τότε

$$(1.3.11) \quad \beta(s) = \beta(s_0) + \lambda(s)u + \mu(s)v; \quad \forall s \in J,$$

όπου $\lambda, \mu: J \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις. Πραγματικά, η διαφορισιμότητα της λ ελέγχεται ως εξής: Από την (1.3.11) έχουμε ότι

$$\beta(s) - \beta(s_0) = \lambda(s)u + \mu(s)v; \quad \forall s \in J,$$

οπότε, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της τελευταίας με το u βρίσκουμε την

$$\begin{aligned} \langle \beta(s) - \beta(s_0), u \rangle &= \langle \lambda(s)u, u \rangle + \langle \mu(s)v, u \rangle \\ &= \lambda(s)1 + \mu(s)0 = \lambda(s), \end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda = \langle \beta - \beta(s_0), u \rangle$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Παρόμοια αποδεικνύεται και η διαφορισιμότητα της μ .

Παραγωγίζοντας τώρα την σχέση (1.3.11) έχουμε ότι

$$T(s) = \beta'(s) = \lambda'(s)u + \mu'(s)v \in E_0; \quad \forall s \in J,$$

η παραγωγή της οποίας οδηγεί στην

$$N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s) = \frac{1}{k(s)}(\lambda''(s)u + \mu''(s)v) \in E_0, \quad \forall s \in J.$$

$$N(s)$$

Άρα, το επίπεδο των $T(s)$ και $N(s)$ είναι σταθερά το E_0 και το διάνυσμα $B(s)$ είναι σταθερά το ένα από τα δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο E_0 . Επομένως, λόγω της σταθερότητας του $B(s)$ και της (1.3.6), προκύπτει ότι $\tau = 0$.

1.3.6 Θεώρημα. Έστω μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η β είναι τμήμα κύκλου εάν και μόνον εάν έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$.

Απόδειξη. Αν η β είναι τμήμα κύκλου κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r , τότε δίνεται από τον τύπο

$$\beta(s) = r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) + (x_0, y_0); \quad s \in J \subseteq [0, 2\pi],$$

απ' όπου παίρνουμε τις σχέσεις

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right),$$

$$T'(s) = \beta''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$$

Και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{r}.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η β έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$ και μηδενική στρέψη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\gamma(s) := \beta(s) + \frac{1}{k}N(s).$$

Η γ είναι προφανώς διαφορίσιμη και

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \beta'(s) + \frac{1}{k}N'(s) \\ &= T(s) + \frac{1}{k}(-kT(s) + \tau B(s)) \\ &= T(s) - T(s) + 0 = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η γ είναι σταθερή. Αν c είναι η σταθερή τιμή της γ , τότε

$$\|\beta(s) - a\| = \frac{1}{k} \|N(s)\| = \frac{1}{k} = r,$$

δηλ. τα σημεία $\beta(s)$ ανήκουν στην σφαίρα με κέντρο a και ακτίνα r . Επειδή η β είναι επίπεδη, ολοκληρώνεται η απόδειξη.

1.3.7 Παρατηρήσεις. 1) Από την προηγούμενη απόδειξη φαίνεται ότι η ακτίνα του κύκλου είναι ακριβώς η ακτίνα καμπυλότητας της β [βλ. σχέση (1.3.3)], ενώ το κέντρο είναι το σημείο $\beta(s) + \frac{1}{k}N(s)$.

2) Από τα Θεωρήματα 1.3.5 και 1.3.6 συνάγεται ότι η καμπυλότητα μετρά το πόσο αποκλίνει η καμπύλη από το να είναι ευθεία, ενώ η στρέψη μετρά την απόκλιση από το να είναι η καμπύλη επίπεδη.

1.4 Καμπυλότητα και στρέψη τυχαίας κανονικής καμπύλης

Το τρίεδρο Frenet καθώς η καμπυλότητα και η στρέψη μιας καμπύλης β ορίστηκαν προηγουμένως με την προϋπόθεση ότι η β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια τυχαία κανονική καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^3$. Σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα παραπάνω μεγέθη αναφέρονται σε ιδιότητες του συνόλου $X = \alpha(I)$ και όχι της παραμέτρησης (απεικόνισης) α . Επομένως, ο επόμενος ορισμός είναι εντελώς φυσιολογικός.

1.4.1 Ορισμός. Έστω α μια τυχαία κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha}$ η παραμέτρησης της μέσω του μήκους τόξου (βλ. Θεώρημα 1.2.2). Αν $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \bar{k}, \bar{\tau}$ είναι το τρίεδρο Frenet, η καμπυλότητα και η στρέψη της $\bar{\alpha}$, τότε ορίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη T, N, B, k, τ της α μέσω των τύπων

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & T(t) := \bar{T}(s(t)), \\ \text{(ii)} \quad & N(t) := \bar{N}(s(t)), \\ \text{(iii)} \quad & B(t) := \bar{B}(s(t)), \\ \text{(iv)} \quad & k(t) := \bar{k}(s(t)), \\ \text{(v)} \quad & \tau(t) := \bar{\tau}(s(t)). \end{aligned}$$

1.4.2 Θεώρημα. Αν $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ είναι μια (τυχαία) κανονική καμπύλη, τότε

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

Απόδειξη. Έστω α μια κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αναπαραμέτρησή της μέσω του μήκους τόξου, όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε $\bar{\alpha} = \alpha \circ s$, οπότε, για κάθε $t \in I$, έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (\bar{\alpha} \circ s)'(t) = s'(t)\bar{\alpha}'(s(t)) = s'(t)\bar{T}(s(t)), \\ \alpha''(t) &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2(\bar{T}'(s(t))) \\ &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))\end{aligned}$$

(1.4.1), (1.4.2)

Οπότε

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = s'(t)\bar{T}(s(t)) \times [s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))],$$

ή

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= s'(t)s''(t)[\bar{T}(s(t)) \times \bar{T}(s(t))] + \\ &\quad + s'(t)^3\bar{k}(s(t))[\bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t))] \\ &= 0 + s'(t)^3\bar{k}(s(t))\bar{B}(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t)\|^3\bar{k}(s(t))\bar{B}(s(t)).\end{aligned}$$

(1.4.3)

Άρα

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3\bar{k}(s(t)),$$

Απ' όπου προκύπτει η

$$k(t) := \bar{k}(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

δηλαδή η ητούμενη σχέση.

1.4.3 Θεώρημα. Αν η α είναι μια κανονική καμπύλη με $k > 0$, τότε

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{[\alpha' \alpha'' \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

Απόδειξη. Όπως προηγουμένως, θεωρούμε την αναπαράμετρηση $\bar{\alpha}$ της α μέσω του μήκους τόξου. Από την σχέση (1.4.2) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= s'''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\bar{T}'(s(t)) + \\ &\quad + [s'(t)^2\bar{k}(s(t))]' \bar{N}(s(t)) + s'(t)^3\bar{k}(s(t))\bar{N}'(s(t)) \\ &= s'''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t)) + \\ &\quad + [s'(t)^2\bar{k}(s(t))]' \bar{N}(s(t)) - s'(t)^3\bar{k}(s(t))^2\bar{T}(s(t)) + \\ &\quad + s'(t)^3\bar{k}(s(t))\bar{\tau}(s(t))\bar{B}(s(t)) \\ &= X(t)\bar{T}(s(t)) + Y(t)\bar{N}(s(t)) + Z(t)\bar{B}(s(t)), \end{aligned}$$

όπου θέσαμε

$$\begin{aligned} X(t) &= s'''(t) - s'(t)^3\bar{k}(s(t))^2, \\ Y(t) &= s'(t)s''(t)\bar{k}(s(t)) + [s'(t)^2\bar{k}(s(t))]', \\ Z(t) &= s'(t)^3\bar{k}(s(t))\bar{\tau}(s(t)). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.4.3) και ότι το $\bar{B}(s(t))$ είναι κάθετο προς τα $\bar{T}(s(t))$ και $\bar{N}(s(t))$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= s'(t)^3\bar{k}(s(t)) \langle \bar{B}(s(t)), \alpha'''(t) \rangle \\ &= s'(t)^3\bar{k}(s(t))X(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{T}(s(t)) \rangle + \\ &\quad + s'(t)^3\bar{k}(s(t))Y(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{N}(s(t)) \rangle + \\ &\quad + s'(t)^3\bar{k}(s(t))Z(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{B}(s(t)) \rangle \\ &= 0 + 0 + s'(t)^6\bar{k}(s(t))^2\bar{\tau}(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2\bar{\tau}(s(t)), \end{aligned}$$

Απ' όπου παίρνουμε την

$$\tau(t) := \bar{\tau}(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2},$$

με την οποία ολοκληρώνεται η απόδειξη.

1.5 Το τρίεδρο Frenet μιας τυχαίας καμπύλης

Θα υπολογίσουμε τώρα τα διανύσματα $T(t), N(t)$ και $B(t)$ (βλ. Ορισμό 1.4.1), για μία τυχαία κανονική καμπύλη α , με μη μηδενική καμπυλότητα.

1.5.1 Θεώρημα. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T(t), N(t), B(t)\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet. Τότε

$$(1.5.1) \quad T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

$$(1.5.2) \quad N(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|},$$

$$(1.5.3) \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}.$$

Απόδειξη. Έστω $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αντίστοιχη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (βλ. Θεώρημα 1.2.2), όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε

$$\begin{aligned} T(t) &= \bar{T}(s(t)) = \bar{\alpha}'(s(t)) = (\alpha \circ h)'(s(t)) \\ &= \alpha'(h(s(t)))h'(s(t)) = \alpha'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \end{aligned}$$

Ανάλογα, από την σχέση $T = \bar{T} \circ s$, παίρνουμε την $\bar{T} = T \circ h$ επομένως

$$\begin{aligned} N(t) &= \bar{N}(s(t)) = \frac{\bar{T}'(s(t))}{\bar{k}(s(t))} = \frac{(T \circ h)'(s(t))}{k(t)} \\ &= \frac{T'(h(s(t)))h'(s(t))}{k(t)} = \frac{T'(t)}{k(t)s'(t)} \\ &= \frac{T'(t)}{s'(t)} \cdot \frac{\|\alpha'(t)\|^3}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ &= T'(t) \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ισότητα, έχουμε ότι $T'(t)$ και $N(t)$ είναι συγγραμμικά. Επειδή $T(t) \perp N(t)$, είναι και $T(t) \perp T'(t)$. Επίσης προφανώς $\|T(t)\| = 1$.

Άρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.2 για $u = T(t)$ και $v = T'(t)$, παίρνουμε

$$T'(t) = (T(t) \times T'(t)) \times T(t).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ [βλ. σχέση (1.5.1)] και

$$T'(t) = \frac{\alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t)s''(t)}{s'(t)^2},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \times \frac{\alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t)s''(t)}{s'(t)^2} \right) \times \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \\ &= \frac{1}{s'(t)^4} [(\alpha'(t) \times \alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t) \times \alpha'(t)s''(t)) \times \alpha'(t)] \\ &= \frac{1}{s'(t)^3} [(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)], \end{aligned}$$

Απ' όπου προκύπτει η

$$N(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|}.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} B(t) &= \bar{B}(s(t)) = \bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t)) = T(t) \times N(t) \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \times \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \times \left(\frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \times \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \\ &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \end{aligned}$$

1.5.2 Θεώρημα. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet (κατά μήκος της α). Τότε ισχύουν οι (γενικευμένοι) τύποι FrenetSerret:

$$\begin{aligned} (F'. 1) \quad & T' = kvN, \\ (F'. 2) \quad & N' = -kvT + \tau vB, \\ (F'. 3) \quad & B' = -\tau vN, \end{aligned}$$

όπου $w(t) := \|\alpha'(t)\|$ το μέτρο της ταχύτητας της α στο $t \in I$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ της α μέσω του μήκους τόξου και το τρίεδρο Frenet $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ κατά μήκος της $\bar{\alpha}$. Για κάθε $t \in I$, είναι

$$\begin{aligned} T'(t) &= (\bar{T} \circ s)'(t) = \bar{T}'(s(t))s'(t) = \bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) \\ &= k(t)v(t)N(t), \\ N'(t) &= (\bar{N} \circ s)'(t) = \bar{N}'(s(t))s'(t) \\ &= -\bar{k}(s(t))s'(t)\bar{T}(s(t)) + \bar{\tau}(s(t))s'(t)\bar{B}(s(t)) \\ &= -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t), \\ B'(t) &= (\bar{B} \circ s)'(t) = \bar{B}'(s(t))s'(t) = -\bar{\tau}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) \\ &= -\tau(t)v(t)N(t), \end{aligned}$$

οπότε η απόδειξη των τύπων είναι πλήρης.

1.6 Κανονική μορφή καμπύλης

Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $s_0 \in J$. Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, τέτοιο ώστε το $\alpha(s_0)$ να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, δηλαδή $\alpha(s_0) = \mathbf{0}$, και εφαρμόζουμε την στροφή που κάνει το $T(s_0)$ να συμπίπτει με το e_1 και το $N(s_0)$ να συμπίπτει με το e_2 . Τότε κατ' ανάγκη $B(s_0) = e_3$.

Γνωρίζουμε ότι, για ένα τυχαίο $s \in J$, είναι

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= T(s), \\ \alpha''(s) &= T'(s) = k(s)N(s), \\ \alpha'''(s) &= (k(s)N(s))' = k'(s)N(s) + k(s)N'(s) \\ &= -k(s)^2T(s) + k'(s)N(s) + k(s)\tau(s)B(s).\end{aligned}$$

Άρα, ιδιαίτερος για το σημείο s_0 , έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha(s_0) &= 0, \\ \alpha'(s_0) &= T(s_0) = e_1, \\ \alpha''(s_0) &= k(s_0)N(s_0) = k(s_0)e_2, \\ \alpha'''(s_0) &= -k(s_0)^2e_1 + k'(s_0)e_2 + k(s_0)\tau(s_0)e_3.\end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, λόγω του Θεωρήματος του Taylor, είναι

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha(s_0) + \frac{\alpha'(s_0)}{1!}(s - s_0) + \frac{\alpha''(s_0)}{2!}(s - s_0)^2 + \\ &\quad + \frac{\alpha'''(s_0)}{3!}(s - s_0)^3 + O(s^3).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω δεδομένα στο προηγούμενο αναπτύγμα, καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= 0 + (s - s_0)e_1 + \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2e_2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}[-k(s_0)^2e_1 + k'(s_0)e_2 + k(s_0)\tau(s_0)e_3](s - s_0)^3 + O(s^3) \\ &= [(s - s_0) - \frac{k(s_0)^2}{6}(s - s_0)^3]e_1 + \\ &\quad + [\frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \frac{k'(s_0)}{6}(s - s_0)^3]e_2 + \\ &\quad + [\frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3]e_3 + O(s^3).\end{aligned}$$

Η τελευταία καλείται **κανονική μορφή** ή **παράσταση** (canonical representation) της καμπύλης α στο $\alpha(s_0)$. Παραλείποντας σε κάθε συντεταγμένη τους όρους με την μεγαλύτερη δύναμη του $(s - s_0)$ (που συγκλίνουν ταχύτερα στο 0, καθώς $s \rightarrow s_0$), παίρνουμε την επόμενη **προσέγγιση** (approximation) της α (κοντά στο s_0):

$$(1.6.1) \quad \alpha(s) \cong (s - s_0)e_1 + \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2 e_2 + \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3 e_3.$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$(1.6.1') \quad \alpha(s) \cong \left(s - s_0, \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2, \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3 \right).$$

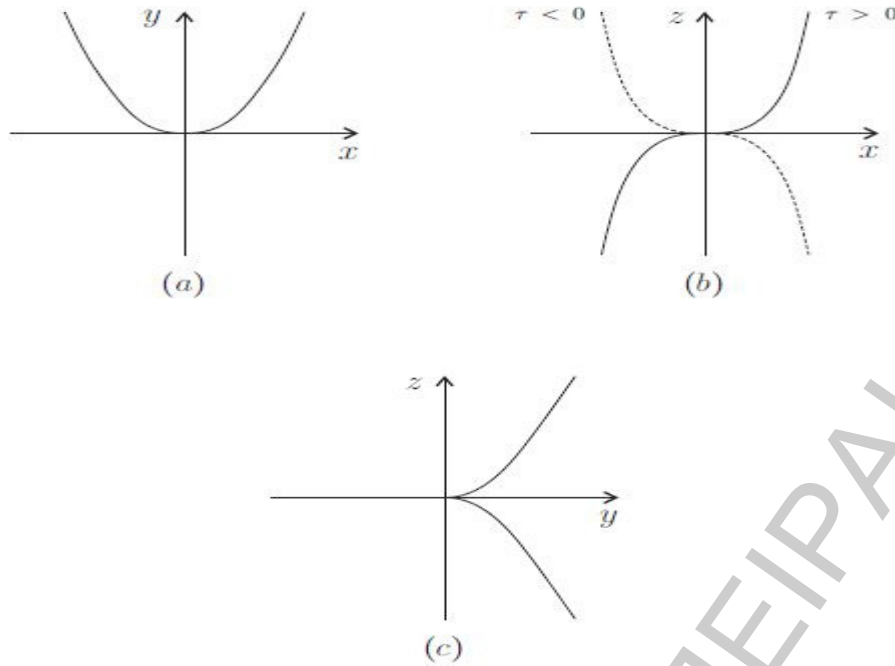
Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την μορφή που έχει η (τυχαία) καμπύλη α κοντά στο s_0 , «φωτογραφίζοντάς την από τρεις πλευρές», δηλαδή προβάλλοντάς

την στα επίπεδα που σχηματίζουν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Εδώ το επίπεδο των x, y (δηλαδή το επίπεδο των $e_1, e_2 = N(s_0)$) είναι το εγγύτατο επίπεδο· το επίπεδο των x, z (: των $e_1 = T(s_0), e_3 = B(s_0)$) είναι το ευθειοποιούν, ενώ αυτό των y, z (: των $e_2 = N(s_0), e_3 = B(s_0)$) είναι το κάθετο επίπεδο.

Έτσι, η προβολή της α στο επίπεδο των x, y (: εγγύτατο επίπεδο) είναι η $\left(s - s_0, \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2 \right)$, οπότε, για $x = s - s_0$ και $y = \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2$, καταλήγουμε στην

$$y = \frac{k(s_0)}{2}x^2,$$

που είναι σχέση δευτέρου βαθμού και παριστάνει μία παραβολή [βλ. Σχήμα 1.5(a)].



Σχήμα 1.5

Η προβολή της α στο επίπεδο των x, z (: ευθειοποιούν επίπεδο) είναι η $\left(s - s_0, \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3 \right)$. Θέτοντας $x = s - s_0$ και $z = \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3$ βρίσκουμε την σχέση τρίτου βαθμού (κυβική)

$$z = \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}x^3$$

για την οποία έχουμε την εικόνα του Σχήματος 1.5(b).

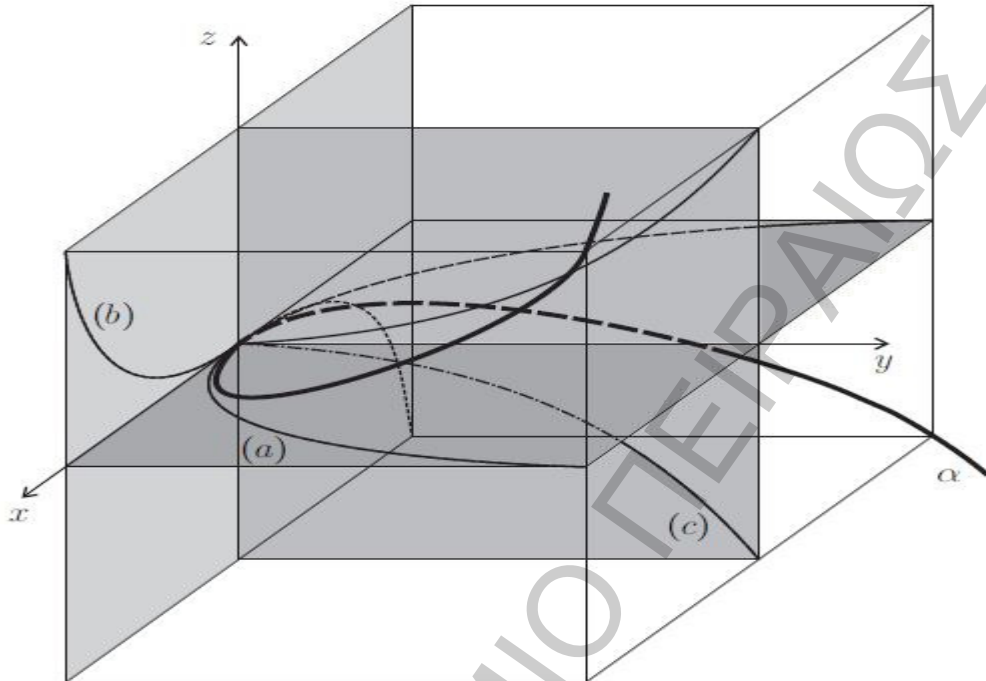
Τέλος, η προβολή της α στο επίπεδο των y, z (: κάθετο επίπεδο) είναι η $\left(\frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2, \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3 \right)$, η οποία, για $y = \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2$ και $z = \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3$, οδηγεί στην

$$z^2 = \frac{2}{9} \frac{\tau(s_0)^2}{k(s_0)} y^3.$$

Η προηγούμενη καμπύλη είναι γνωστή ως *παραβολή Neil* και την εικόνα της αποδίδει το Σχήμα 1.5(c). Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τελευταία εξίσωση έχει έννοια επειδή $k(s_0) > 0$ (διαφορετικά η α θα ήταν ευθεία, οπότε η ανάλυση κατά Taylor

είναι τετριμμένη και οι προβολές της καμπύλης στα τρία επίπεδα είναι ευθείες, άρα η προηγούμενη διαδικασία δεν δίνει καμιά ιδιαίτερη πληροφορία).

Μια συνολική εικόνα και των τριών προβολών μας δίνει το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.6

1.6.1 Εφαρμογή. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και σημείο $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε, σε μια περιοχή $I_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ του t_0 , η καμπύλη να μην έχει συνευθειακά σημεία. Θεωρούμε και τα σημεία $t_0 + t_1, t_0 + t_2 \in I_0$.

Επειδή τα $A := \alpha(t_0), B := \alpha(t_0 + t_1)$ και $\Gamma := \alpha(t_0 + t_2)$ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν ένα επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$. Ζητάμε να προσδιορίσουμε την οριακή θέση του $P(A, B, \Gamma)$, όταν τα B και Γ συγκλίνουν στο A .

Το επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$ περνά από το A και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $u = \overline{AB} = \alpha(t_0 + t_1) - \alpha(t_0)$ και $v = \overline{A\Gamma} = \alpha(t_0 + t_2) - \alpha(t_0)$.

Θεωρούμε την ανάλυση Taylor της α

$$\alpha(t_0 + t) = \alpha(t_0) + t\alpha'(t_0) + \frac{t^2}{2}\alpha''(t_0) + O(t^2),$$

διαδοχικά για $t = t_1, t_2$, οπότε

$$u = t_1 \alpha'(t_0) + \frac{t_1^2}{2} \alpha''(t_0) + O(t_1^2),$$

$$v = t_2 \alpha'(t_0) + \frac{t_2^2}{2} \alpha''(t_0) + O(t_2^2).$$

Θέτουμε

$$u_1 := \frac{u}{t_1} = \alpha'(t_0) + \frac{t_1}{2} \alpha''(t_0) + \frac{O(t_1^2)}{t_1},$$

$$v_1 := \frac{v}{t_2} = \alpha'(t_0) + \frac{t_2}{2} \alpha''(t_0) + \frac{O(t_2^2)}{t_2}.$$

Θεωρούμε και το διάνυσμα

$$w := 2 \frac{v_1 - u_1}{t_2 - t_1} = \alpha''(t_0) + \frac{2}{t_2 - t_1} \left(\frac{O(t_2^2)}{t_2} - \frac{O(t_1^2)}{t_1} \right).$$

Τα διανύσματα u_1, w είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u και v , άρα ορίζουν το ίδιο επίπεδο, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{B, \Gamma \rightarrow A} P(A, B, \Gamma) &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} P(u_1, w) = P\left(\lim_{t_1 \rightarrow 0} u_1, \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} w\right) \\ &= P(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)) = P(T(t_0), N(t_0)), \end{aligned}$$

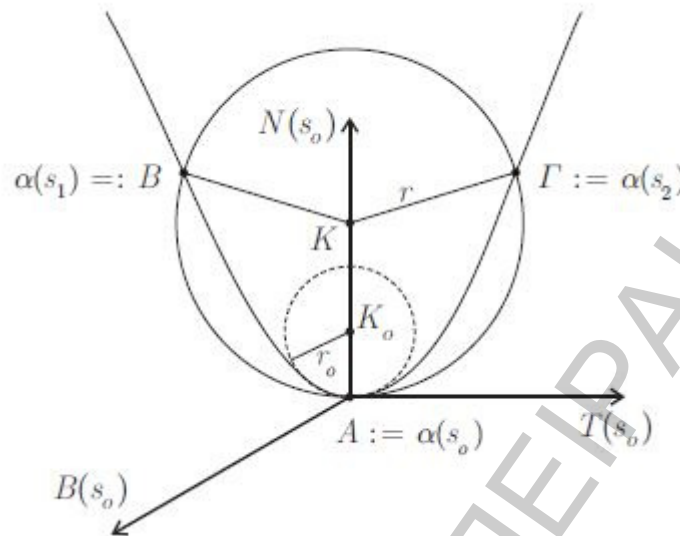
δηλαδή, στην οριακή του θέση το $P(A, B, \Gamma)$ συμπίπτει με το εγγύτατο επίπεδο.

1.7 Ο εγγύτατος κύκλος

Ο εγγύτατος κύκλος, που θα μελετηθεί στη συνέχεια, ορίστηκε από τον G. W. Leibniz, αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Jakob και Johann Bernoulli, και χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τον L. Euler για τον ορισμό της καμπυλότητας.

Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $s_0 \in J$ σημείο, τέτοιο ώστε η καμπύλη να μην έχει συνευθειακά σημεία σε μια περιοχή J_0 του s_0 . Θεωρούμε δύο σημεία $s_1, s_2 \in J_0$. Επειδή τα $A := \alpha(s_0), B := \alpha(s_1)$ και $\Gamma := \alpha(s_2)$ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν ένα κύκλο $C(K, r)$ [που _ρίσκεται πάνω στο επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$

(βλ. Εφαρμογή 1.6.1)]. Θα προσδιορίσουμε την οριακή θέση $\mathcal{C}(K_o, r_o)$ του ανωτέρω κύκλου, όταν τα s_1, s_2 συγκλίνουν στο s_o .



Σχήμα 1.7

Αρχικά σημειώνουμε ότι, αφού κάθε κύκλος $\mathcal{C}(K, r)$ ανήκει στο αντίστοιχο επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$, ο οριακός κύκλος $\mathcal{C}(K_o, r_o)$ θα ανήκει στο οριακό επίπεδο, δηλαδή στο εγγύτατο της α στο σημείο $\alpha(s_o)$.

Θεωρούμε την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\rho: J \longrightarrow \mathbb{R}: s \mapsto \rho(s) := \|\alpha(s) - K\|^2 = \langle \alpha(s) - K, \alpha(s) - K \rangle,$$

για την οποία είναι

$$(1.7.1) \quad \rho'(s) = 2 \langle \alpha'(s), \alpha(s) - K \rangle = 2 \langle T(s), \alpha(s) - K \rangle$$

Και

$$(1.7.2) \quad \begin{aligned} \rho''(s) &= 2 \langle T'(s), \alpha(s) - K \rangle + 2 \langle T(s), T(s) \rangle \\ &= 2 \langle k(s)N(s), \alpha(s) - K \rangle + 2. \end{aligned}$$

Εφ' όσον

$$\rho(s_o) = \rho(s_1) = \rho(s_2) = r^2,$$

από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι υπάρχει σημείο s_3 μεταξύ των s_0 και s_1 , καθώς και σημείο s_4 μεταξύ των s_0 και s_2 , έτσι ώστε

$$(1.7.3) \quad \rho'(s_3) = \rho'(s_4) = 0,$$

οπότε η (1.7.1) δίνει ότι

$$\langle T(s_3), \alpha(s_3) - K \rangle = 0 = \langle T(s_4), \alpha(s_4) - K \rangle.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες έχουμε ότι

$$(1.7.4) \quad \alpha(s_3) - K \perp T(s_3) \quad \text{και} \quad \alpha(s_4) - K \perp T(s_4).$$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του Rolle και τις (1.7.3), υπάρχει s_5 μεταξύ των s_3 και s_4 με $\rho''(s_5) = 0$, άρα η (1.7.2) συνεπάγεται ότι

$$(1.7.5) \quad \langle k(s_5)N(s_5), \alpha(s_5) - K \rangle = -1.$$

Παρατηρούμε ότι όταν $s_1, s_2 \rightarrow s_0$, οπότε $K \rightarrow K_0$ και $r \rightarrow r_0$, τότε και $s_3, s_4, s_5 \rightarrow s_0$. Επομένως η σχέση (1.7.4) δίνει οριακά την

$$\alpha(s_0) - K_0 \perp T(s_0),$$

Άρα το διάνυσμα $\alpha(s_0) - K_0$ ανήκει στο επίπεδο $P(N(s_0), B(s_0))$. Ομως, όπως παρατηρήσαμε στην αρχή, το $\alpha(s_0) - K_0$ ανήκει και στο εγγύτατο επίπεδο $P(T(s_0), N(s_0))$. Άρα ανήκει στην ευθεία (τομή των δύο προηγούμενων επιπέδων) που παράγεται από το $N(s_0)$. δηλαδή

$$(1.7.6) \quad \alpha(s_0) - K_0 = \lambda N(s_0),$$

Για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Επίσης η (1.7.5) δίνει οριακά

$$\langle k(s_0)N(s_0), \alpha(s_0) - K_0 \rangle = -1.$$

Συνδυάζοντας τις (1.7.6) και (1.7.7) παίρνουμε

$$\langle k(s_0)N(s_0), \lambda N(s_0) \rangle = \lambda k(s_0) = -1,$$

Απ' όπου

$$\lambda = -\frac{1}{k(s_0)}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (1.7.6) βρίσκουμε ότι

$$K_o = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) \quad (1.7.8)$$

Και

$$r_o = \|\alpha(s_0) - K_o\| = \|\lambda N(s_0)\| = |\lambda| = \frac{1}{k(s_0)}. \quad (1.7.9)$$

Ο κύκλος $C(K_o, r_o)$ λέγεται **εγγύτατος κύκλος** (osculating circle) της α στο $\alpha(s_0)$.

1.7.1 Παρατηρήσεις. 1) Από την (1.7.9) προκύπτει ότι η καμπυλότητα της καμπύλης α στο σημείο $\alpha(s_0)$ είναι το αντίστροφο του μήκους της ακτίνας του εγγύτατου κύκλου, άρα η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης συμπίπτει με το μήκος της ακτίνας του κύκλου αυτού.

2) Ερμηνεύοντας την εικόνα $\alpha(t)$ μίας καμπύλης α ως τροχιά ενός κινητού, από την σχέση

$$N(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}T'(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}\alpha''(s_0),$$

Προκύπτει ότι το $N(s_0)$ κατεύθунεται προς το κοίλο μέρος της καμπύλης, αφού η επιτάχυνση έχει μια τέτοια κατεύθυνση.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει "γεωμετρικά" μέσω του εγγύτατου κύκλου.

Πράγματι, από την (1.7.8) έχουμε ότι

$$N(s_0) = k(s_0)(K_o - \alpha(s_0)) = \frac{1}{r_o}(K_o - \alpha(s_0)),$$

άρα το $N(s_0)$ κατεύθунεται προς το κέντρο του εγγύτατου κύκλου, που βρίσκεται στο κοίλο μέρος της καμπύλης.

1.8 Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών

Τα δύο αριθμητικά μεγέθη, η καμπυλότητα και η στρέψη, που αντιστοιχίσαμε σε μια κανονική καμπύλη, καθορίζουν ουσιαστικά μονοσήμαντα την καμπύλη. Πιο συγκεκριμένα, δύο καμπύλες με την ίδια καμπυλότητα και την ίδια στρέψη διαφέρουν μόνο ως προς την θέση τους στο χώρο, και αντιστρόφως.

Υπενθυμίζουμε ότι **μεταφορά** (translation) κατά $c \in \mathbb{R}^3$ ονομάζεται η απεικόνιση

$$\mu_c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: u \mapsto \mu_c(u) := u + c,$$

και **στροφή** (rotation) ονομάζεται κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του \mathbb{R}^3 με θετική ορίζουσα, με άλλα λόγια κάθε γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle; \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,$$

και ο πίνακας της έχει θετική ορίζουσα (άρα διατηρεί τον προσανατολισμό των βάσεων). Επομένως, η f διατηρεί τις αποστάσεις, αντιστρέφεται (δηλαδή είναι γραμμικός ισομορφισμός) και διατηρεί τα εξωτερικά γινόμενα με την έννοιαν ότι ισχύει η σχέση

$$f(u \times v) = f(u) \times f(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταφορές και οι στροφές είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις. Επί πλέον είναι αντιστρέψιμες: η αντίστροφη της μ_c είναι η μ_{-c} , δηλαδή είναι επίσης μία μεταφορά, ενώ η αντίστροφη μιάς στροφής είναι και αυτή στροφή. Επομένως μεταφορές και στροφές είναι αμφιδιαφορίσιμες με αντίστροφες απεικονίσεις του ίδιου τύπου. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$f \circ \mu_c = \mu_{f(c)} \circ f.$$

Η σύνθεση μια μεταφοράς και μια στροφής ονομάζεται **στερεά κίνηση** (rigid motion).

1.8.1 Πρόταση. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, και β η καμπύλη που προκύπτει από μια στροφή f της α και μια μεταφορά μ_c , δηλ.

$$\beta(s) = f(\alpha(s)) + c, \quad \forall s \in J.$$

Τότε η β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, έχει ίδια καμπυλότητα και στρέψη με την α , και το τριέδρο Frenet της β είναι εικόνα του αντίστοιχου τριέδρου της α μέσω της στροφής f .

$$k_\beta, \tau_\beta, \mathbf{B}_\beta$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $k_\beta, \tau_\beta, \mathbf{B}_\beta$

και $k_\alpha, \tau_\alpha, \mathbf{B}_\alpha$ (αντιστ.

$$\mathbf{B}_\beta$$

και τ_β) την καμπυλότητα, την στρέψη και το τριέδρο Frenet της α (αντιστ. της β). Τότε, λόγω της γραμμικότητας της f , της διατήρησης εσωτερικών / εξωτερικών γινομένων και αποστάσεων, βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= \beta'(s) = (f \circ \alpha)'(s) = f(\alpha'(s)) = f(T_\alpha(s)), \\ \|T_\beta(s)\| &= \|f(T_\alpha(s))\| = \|T_\alpha(s)\| = 1, \\ T'_\beta(s) &= (f \circ T'_\alpha)'(s) = f(T'_\alpha(s)), \\ k_\beta(s) &= \|T'_\beta(s)\| = \|f(T'_\alpha(s))\| = \|T'_\alpha(s)\| = k_\alpha(s), \\ N_\beta(s) &= \frac{T'_\beta(s)}{k_\beta(s)} = \frac{f(T'_\alpha(s))}{k_\alpha(s)} = f\left(\frac{T'_\alpha(s)}{k_\alpha(s)}\right) = f(N_\alpha(s)), \\ B_\beta(s) &= T_\beta(s) \times N_\beta(s) = f(T_\alpha(s)) \times f(N_\alpha(s)) \\ &= f(T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)) = f(B_\alpha(s)), \\ B'_\beta(s) &= (f \circ B'_\alpha)'(s) = f(B'_\alpha(s)), \\ \tau_\beta(s) &= -\langle N_\beta(s), B'_\beta(s) \rangle = -\langle f(N_\alpha(s)), f(B'_\alpha(s)) \rangle \\ &= -\langle N_\alpha(s), B'_\alpha(s) \rangle = \tau_\alpha(s), \end{aligned}$$

Οπότε αποδεικνύονται οι ισχυρισμοί της πρότασης.

1.8.2 Παρατήρηση. Ας εξηγήσουμε την σχέση $(f \circ \alpha)'(s) = f(\alpha'(s))$ (και τις άλλες ανάλογες), που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη.

Α' τρόπος: Σύμφωνα με όσα αναφέρουμε στο Παράρτημα Β', έχουμε :

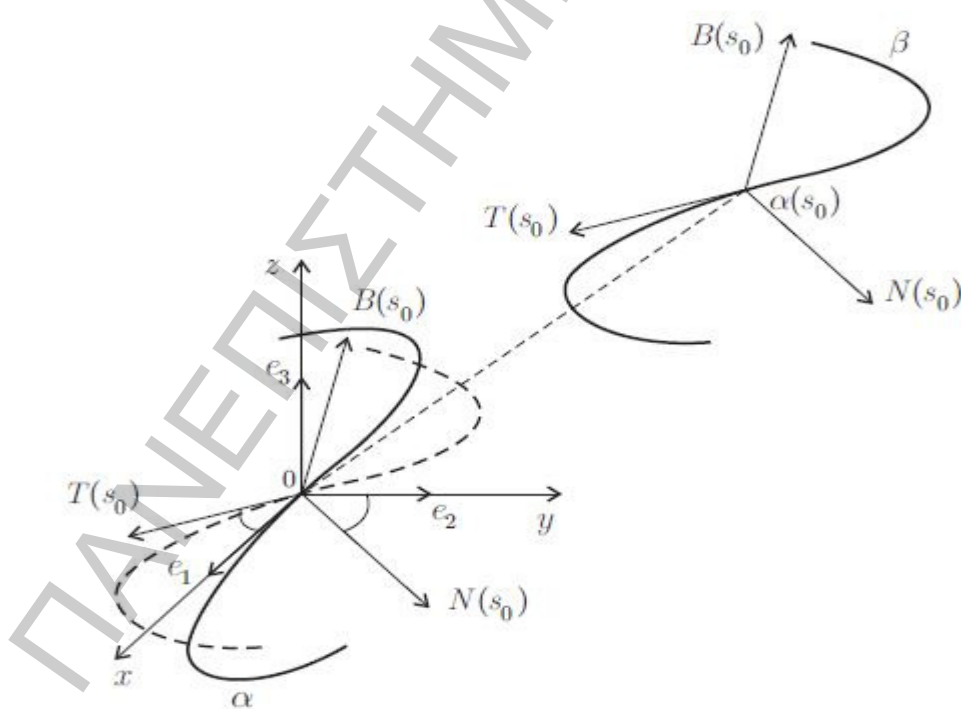
$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(s) &= [D(f \circ \alpha)(s)](1) = [Df(\alpha(s)) \circ Da(s)](1) \\ &= [f \circ Da(s)](1) = f([Da(s)](1)) = f(\alpha'(s)).\end{aligned}$$

Β' τρόπος: Αν M είναι ο πίνακας της f (ως προς την φυσική βάση του \mathbf{R}^3), θα είναι $f(\alpha(s)) = M \cdot (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))^\mathbf{t}$, όπου ο εκθέτης \mathbf{t} συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα. Επομένως, η διγραμμικότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, δίνει ότι *

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(s) &= M' \cdot (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))^\mathbf{t} + M \cdot (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))^\mathbf{t} \\ &= M \cdot (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))^\mathbf{t} = f(\alpha'(s)).\end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του **Θεμελιώδους Θεωρήματος των Καμπυλών**

1.8.3 Θεώρημα. Έστω $k(s) > 0$ και $\tau(s)$, $s \in J = [0, a]$, δύο διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μια καμπύλη $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και στρέψη τ . Επιπλέον, η β είναι μια άλλη κανονική καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, εάν και μόνον εάν η β διαφέρει από την α κατά μία στερεά κίνηση.



Σχήμα 1.8

*Φυσικά, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και στοιχειωδώς : Αν $M = (b_{ij})_{i,j=1,2,3}$, αρκεί να παραγωγίσουμε τον πίνακα $M \cdot (a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s))^t = \left(\sum_{j=1}^3 b_{ij} \cdot a_j(s) \right)_{i=1,2,3}$.

Απόδειξη. (1) Υπαρξη: Θεωρούμε το σύστημα των εννέα διαφορικών εξισώσεων

$$T'_i = k \cdot N_i, N'_i = -k \cdot T_i + \tau \cdot B_i, B'_i = -\tau N_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} T_1(0) = N_2(0) = B_3(0) &= 1, \\ T_2(0) = T_3(0) = N_1(0) = N_3(0) = B_1(0) = B_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα γραμμικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων με διαφορίσιμους συντελεστές, και η γενική θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης

$$(T_1, T_2, T_3, N_1, N_2, N_3, B_1, B_2, B_3),$$

μοναδικής για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες. Θέτουμε

$$T := \sum_{i=1}^3 T_i e_i, \quad N := \sum_{i=1}^3 N_i e_i, \quad B := \sum_{i=1}^3 B_i e_i.$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η τριάδα (T, N, B) ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} T' &= kN \\ N' &= -kT + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

και τις συνθήκες

$$(T(0), N(0), B(0)) = (e_1, e_2, e_3).$$

Θα αποδείξουμε ότι $(T(s), N(s), B(s))$ είναι μια θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^3 , για κάθε $s \in J$. Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
 x' &= 2ky, \\
 y' &= kw - kx + \tau z, \\
 z' &= kp - \tau y, \\
 w' &= -2ky + 2\tau p, \\
 p' &= -kz + \tau q - \tau w, \\
 q' &= -2\tau p,
 \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = w(0) = q(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = p(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η εξάδα των σταθερών συναρτήσεων

$$x = w = q = 1, \quad y = z = p = 0$$

είναι λύση του ανωτέρω συστήματος, αλλά το ίδιο συμβαίνει και με την εξάδα

$$\begin{aligned}
 x &= \langle T, T \rangle, \\
 y &= \langle T, N \rangle, \\
 z &= \langle T, B \rangle, \\
 w &= \langle N, N \rangle, \\
 p &= \langle N, B \rangle, \\
 q &= \langle B, B \rangle.
 \end{aligned}$$

Από το μονοσήμαντο των λύσεων συνάγεται ότι

$$\begin{aligned}
 \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1, \\
 \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

επομένως η τριάδα $(T(s), N(s), B(s))$ είναι ορθοκανονική Βάση του \mathbb{R}^3 , για κάθε $s \in J$. Η βάση αυτή είναι θετικά προσανατολισμένη: Πράγματι, η απεικόνιση

$$d: J \rightarrow \mathbb{R}: s \mapsto \begin{vmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ B_1(s) & B_2(s) & B_3(s) \end{vmatrix}$$

είναι συνεχής, παντού διάφορη του μηδενός και $d(0) > 0$. Άρα είναι παντού γνήσια θετική.

Ορίζουμε τώρα την καμπύλη

$$\alpha(s) := \int_0^s T(u) du := \left(\int_0^s T_1(u) du, \int_0^s T_2(u) du, \int_0^s T_3(u) du \right)$$

Προφανώς η α είναι τάξης C^2 . Επίσης, $\|\alpha'\| = \|T\| = \mathbf{1}$, δηλ. η καμπύλη α είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Επειδή $T' = kN$, με $\|N\| = \mathbf{1}$, η k είναι η καμπυλότητα της α . Επίσης, το B είναι μοναδιαίο, κάθετο στα T και N , και (T, N, B) είναι θετικά προσανατολισμένη βάση, άρα $B = T \times N$, ενώ

$$B' = (T' \times N) + (T \times N') = k(N \times N) + (-k(T \times T) + \tau(T \times B)) = -\tau N,$$

άρα η τ είναι η στρέψη της α . Παρατηρούμε ότι για την α , που κατασκευάστηκε προηγουμένως, είναι $\alpha(0) = (0, 0, 0)$.

(2) Μονοσήμαντο: Αν $\beta: J = [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με την ίδια καμπυλότητα k και στρέψη τ , θα δείξουμε ότι οι α και β διαφέρουν μόνο κατά την θέση στο χώρο. Πράγματι: Συμβολίζουμε με $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ και $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ τα τριέδρα Frenet των α και β , αντιστοίχως, και θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: xT_\alpha(0) + yN_\alpha(0) + zB_\alpha(0) \mapsto xT_\beta(0) + yN_\beta(0) + zB_\beta(0).$$

Η f είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός που στέλνει την ορθοκανονική βάση $(T_\alpha(0), N_\alpha(0), B_\alpha(0))$ στην ορθοκανονική βάση $(T_\beta(0), N_\beta(0), B_\beta(0))$, δηλ. είναι μια στροφή. Θέτουμε $c := \beta(0)$. Τότε η στερεά κίνηση $g := f + c$ στέλνει το $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ στο $\beta(0)$, ταυτίζοντας συγχρόνως τα τριέδρα Frenet των δύοκαμπυλών $(f \circ \alpha) + c$ και β στο 0. Συμβολίζουμε με $\{T_g, N_g, B_g\}$ το τριέδρο Frenet της $g \circ \alpha = (f \circ \alpha) + c$ και θεωρούμε τις παραγώγους (βλ. Προηγούμενη Πρόταση 1.8.1)

$$\begin{aligned}
\langle T_g, T_\beta \rangle' &= \langle T_g', T_\beta \rangle + \langle T_g, T_\beta' \rangle = \\
&= k(\langle N_g, T_\beta \rangle + \langle T_g, N_\beta \rangle) \\
\langle N_g, N_\beta \rangle' &= \langle N_g', N_\beta \rangle + \langle N_g, N_\beta' \rangle \\
&= \langle -kT_g + \tau B_g, N_\beta \rangle + \langle N_g, -kT_\beta + \tau B_\beta \rangle \\
&= -k(\langle T_g, N_\beta \rangle + \langle N_g, T_\beta \rangle) + \\
&\quad + \tau(\langle B_g, N_\beta \rangle + \langle N_g, B_\beta \rangle) \\
\langle B_g, B_\beta \rangle' &= \langle B_g', B_\beta \rangle + \langle B_g, B_\beta' \rangle \\
&= -\tau(\langle N_g, B_\beta \rangle + \langle B_g, N_\beta \rangle).
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$(\langle T_g, T_\beta \rangle + \langle N_g, N_\beta \rangle + \langle B_g, B_\beta \rangle)' = 0,$$

Απ' την οποία προκύπτει η

$$\langle T_g, T_\beta \rangle + \langle N_g, N_\beta \rangle + \langle B_g, B_\beta \rangle = \text{σταθερά.}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
T_g(0) &= f(T_\alpha(0)) = T_\beta(0), \\
N_g(0) &= f(N_\alpha(0)) = N_\beta(0), \\
B_g(0) &= f(B_\alpha(0)) = B_\beta(0),
\end{aligned}$$

θα είναι

$$(\langle T_g, T_\beta \rangle + \langle N_g, N_\beta \rangle + \langle B_g, B_\beta \rangle)(0) = 3,$$

άρα και

$$(\langle T_g, T_\beta \rangle + \langle N_g, N_\beta \rangle + \langle B_g, B_\beta \rangle)(s) = 3, \quad \forall s \in J.$$

Ομως, για οποιαδήποτε $u, v \in \mathbb{R}^3$, είναι $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Στην σχέση (1.8.1) όλα τα διανύσματα έχουν μήκος 1, άρα κάθε εσωτερικό γινόμενο πρέπει να παίρνει την μέγιστη τιμή του 1, πράγμα που συμβαίνει όταν $\cos \theta = 1$, οπότε $T_g(s) = T_\beta(s), N_g(s) = N_\beta(s)$ και $B_g(s) = B_\beta(s)$, για κάθε $s \in J$. Η ταύτιση των παραπάνω τριέδρων Frenet συνεπάγεται και την ταύτιση των καμπυλών $g \circ \alpha$ και β , αφού $(g \circ \alpha)(0) = \beta(0) = c$ και

$$\beta(s) = \int_0^s T_\beta(u) du + c = \int_0^s T_g(u) du + c = (g \circ \alpha)(s)$$

για κάθε $s \in J$.

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις $k = k(s) > 0$ και $\tau = \tau(s)$ καλούνται **φυσικές** ή **εσωτερικές εξισώσεις** (natural or intrinsic equations) μιάς καμπύλης στον χώρο, επειδή προσδιορίζουν πλήρως την καμπύλη (εκτός από την θέση της).

1.9 Επίπεδες καμπύλες

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις ιδιαίτερες ιδιότητες που έχουν οι επίπεδες καμπύλες. Ήδη γνωρίζουμε ότι μια καμπύλη είναι επίπεδη εάν και μόνον εάν η στρέψη της είναι μηδέν. Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων ώστε η καμπύλη να παίρνει τιμές στο επίπεδο των x και y .

Έστω λοιπόν μια επίπεδη καμπύλη $\beta: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, οπότε

$$T(s) := (T_1(s), T_2(s)) = (\beta'_1(s), \beta'_2(s))$$

Και

$$\|T(s)\| = (T_1(s)^2 + T_2(s)^2)^{1/2} = 1.$$

Απ' το άλλο μέρος, το κάθετο διάνυσμα $N(s)$ (όπως το γνωρίζουμε από την προηγούμενη γενική θεωρία) θα βρίσκεται και αυτό στο επίπεδο της καμπύλης, αφού

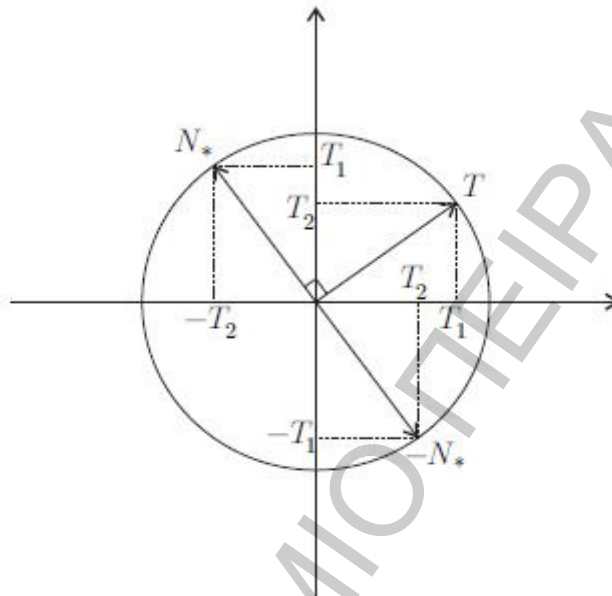
$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) = \frac{1}{k(s)} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{T(s + \Delta s) - T(s)}{\Delta s}$$

και τα $T(s), T(s + \Delta s)$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Έτσι, ενώ στον χώρο υπάρχουν άπειρα μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο $T(s)$, στο επίπεδο υπάρχουν μόνο δύο: το $(-T_2(s), T_1(s))$ και το αντίθετό του $(T_2(s), -T_1(s))$. Αυτές είναι και οι μόνες δυνατές τιμές του πρώτου κάθετου διανύσματος $N(s)$ (βλ. Σχήμα 1.9). Παρατηρούμε ότι αν $N(s) = (-T_2(s), T_1(s))$, το εύρος $(T(s), N(s))$ είναι θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbf{R}^2 , ενώ για $N(s) = (T_2(s), -T_1(s))$, είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Θέτουμε

$$N_* := (-T_2, T_1),$$

εξασφαλίζοντας με αυτόν τον τρόπο τον θετικό προσανατολισμό κάθε εύχους $(T(\mathbf{s}), N_*(\mathbf{s}))$. Τότε

$$N_* = \pm N = \pm \frac{T'}{k} = \frac{T'}{\pm k}.$$



Σχήμα 1.9

Προσαρτώντας το πρόσημο στην καμπυλότητα k , παίρνουμε την **προσημασμένη** ή **επίπεδη καμπυλότητα** k_* , δηλαδή

$$k = |k_*|.$$

οπότε

Επομένως,

$$N_* = \frac{T'}{k_*},$$

Απ' όπου προκύπτει η ανάλογη της **(F.1)** [βλ. Θεώρημα 1.3.4].

$$(1.9.1) \quad T' = k_* N_*.$$

Για να βρούμε την ανάλογη της (F.2), εργαζόμαστε όπως και στο Θεώρημα 1.3.4. Συνοπτικά έχουμε : Αφού $(T(s), N_*(s))$ είναι (ορθοκανονική) βάση του \mathbb{R}^2 , για το $N_*'(s)$ θα υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $a(s), b(s) \in \mathbb{R}$, ώστε $N_*'(s) = a(s)T(s) + b(s)N_*(s)$, για κάθε $s \in I$, άρα $N_*' = aT + bN_*$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \langle N_*, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N_*', T \rangle + \langle N_*, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle aT + bN_*, T \rangle + \langle N_*, k_*N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow a + k_* = 0 \\ &\Rightarrow a = -k_*, \end{aligned}$$

και ανάλογα

$$\begin{aligned} \langle N_*, N_* \rangle = 1 &\Rightarrow \langle N_*', N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle aT + bN_*, N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow b = 0, \end{aligned}$$

άρα καταληγουμε στην

$$(1.9.2) \quad N_*' = -k_*T.$$

Οι σχέσεις (1.9.1) και (1.9.2) αποτελούν το ανάλογο των τύπων Frenet-Serret μιας επίπεδης καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας.

$$\langle T', N_* \rangle = \langle k_*N_*, N_* \rangle = k_*$$

Από την (1.9.1) προκύπτει ότι $\langle T', N_* \rangle = k_*$, δηλαδή

$$(1.9.2') \quad k_* = \langle T', N_* \rangle.$$

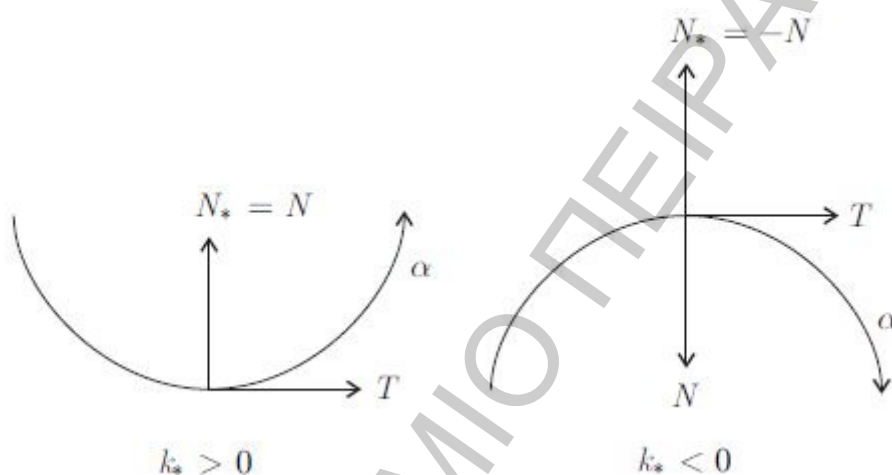
Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τα $T' = (\beta''_1, \beta''_2)$ και $N_* = (-\beta'_2, \beta'_1)$, βρίσκουμε την επόμενη έκφραση της προσημασμένης καμπυλότητας μέσω των συντεταγμένων της καμπύλης (μοναδιαίας ταχύτητας) β :

$$(1.9.3) \quad \boxed{k_* = \beta'_1\beta''_2 - \beta''_1\beta'_2.}$$

Θα δούμε τώρα την γεωμετρική σημασία της προσημασμένης καμπυλότητας : Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $k_* > 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι $k_* = k$ και

$$N_* = \frac{T'}{k_*} = \frac{T'}{k} = N.$$

Επομένως, όταν διατρέχουμε την καμπύλη κατά την φορά που αντιστοιχεί στην αύξηση της παραμέτρου (χρόνου), το κοίλον μέρος της καμπύλης βρίσκεται προς το "αριστερό" μέρος του εφαπτομένου διανύσματος, όπως φαίνεται και στο πρώτο από τα Σχήματα 1.10.



Σχήματα 1.10

Αν υποθέσουμε ότι $k_* < 0$, τότε $k_* = -k$ και $N_* = -N$. Επομένως, διατρέχοντας την καμπύλη με τον ίδιο τρόπο, όπως πριν, το κοίλον μέρος της καμπύλης βρίσκεται προς το "δεξιό" μέρος του εφαπτομένου διανύσματος (βλ. το δεύτερο από τα Σχήματα 1.10).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα, το πρώτο κάθετο διάνυσμα και την καμπυλότητα μίας τυχούσας επίπεδης καμπύλης, μέσω των συντεταγμένων της. Ακριβέστερα έχουμε την

1.9.1 Πρόταση. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια τυχαία επίπεδη κανονική καμπύλη (όχι κατ' ανάγκην μοναδιαίας ταχύτητας). Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$T(t) = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

$$N_*(t) = \left(-\frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

$$k_*(t) = \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha''_1(t)\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

(1.9.4), (1.9.5), (1.9.6)

Απόδειξη. Έστω $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ η αναπαραμέτρησή της α μέσω του μήκους τόξου. Σύμφωνα με την (1.5.1), έχουμε ότι

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

Δηλαδή παίρνουμε την (1.9.4).

Η (1.9.5) είναι συνέπεια της (1.9.4) και του ορισμού του $N_*(t)$ [ισχύει ό,τι και για το $N_*(s)$].

Για τον υπολογισμό της καμπυλότητας προχωρούμε ως εξής : Αν συμβολίσουμε με k_*^β την προσημασμένη καμπυλότητα της β , τότε, σύμφωνα με την (1.9.3) και την σχέση (iv) του Ορισμού 1.4.1 (για $\bar{\kappa} = k_*^\beta$), έχουμε ότι

$$k_*(t) := k_*^\beta(s(t)) = \beta'_1(s(t))\beta''_2(s(t)) - \beta''_1(s(t))\beta'_2(s(t)),$$

όπου s η συνάρτηση μήκους τόξου. Επειδή $\beta_i = \alpha_i \circ h$ ($i = 1, 2$), θα είναι

$$\beta'_i(s(t)) = (\alpha_i \circ h)'(s(t)) = \alpha'_i(h(s(t))) \cdot h'(s(t)) = \frac{\alpha'_i(t)}{s'(t)},$$

(1.9.7)

για κάθε $t \in I$ (βλ. σχετικά και το Θεώρημα 1.2.2). Από την προηγούμενη προκύπτει ότι

$$\beta'_i \circ s = \frac{\alpha'_i}{s'} \quad \text{ή} \quad \beta'_i = \frac{\alpha'_i}{s'} \circ h.$$

(1.9.8)

Η παραγώγιση της τελευταίας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\beta_i''(s(t)) &= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \circ h \right)'(s(t)) \\
&= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \right)'(h(s(t))) \cdot h'(s(t)) \\
&= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \right)'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} \\
&= \frac{\alpha_i''(t) \cdot s'(t) - \alpha_i'(t) \cdot s''(t)}{s'(t)^2} \cdot \frac{1}{s'(t)} \\
&= \frac{\alpha_i''(t) \cdot s'(t) - \alpha_i'(t) \cdot s''(t)}{s'(t)^3}.
\end{aligned}$$

(1.9.9)

Αντικαθιστώντας τις (1.9.8) και (1.9.9) στην (1.9.7) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
k_*(t) &= \frac{1}{s'(t)^4} \cdot (\alpha_1'(t)\alpha_2''(t)s'(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)s'(t)) \\
&= \frac{1}{s'(t)^3} \cdot (\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)) \\
&= \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3},
\end{aligned}$$

όπως ακριβώς αναφέρεται στην εκφώνηση της πρότασης.

Ας δούμε τώρα πώς επηρεάζει η φορά διαγραφής της καμπύλης τα μεγέθη που σχετίζονται με αυτήν.

1.9.2 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ είναι μια επίπεδη καμπύλη και $\beta := \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbf{R}^2$ μια αναπαραμέτρηση της α αντίθετου προσανατολισμού. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα, το (πρώτο) κάθετο διάνυσμα, και η καμπυλότητα αντιστρέφονται, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
T^\beta(t) &= -T^\alpha(h(t)), \\
N_*^\beta(t) &= -N_*^\alpha(h(t)), \\
k_*^\beta(t) &= -k_*^\alpha(h(t)).
\end{aligned}$$

(1.9.10), (1.9.11), (1.9.12)

Απόδειξη. Αφού η h αλλάζει τον προσανατολισμό, είναι $h' < 0$. Επομένως

$$\begin{aligned}
 T^\beta(t) &= \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|} = \\
 &= \frac{\alpha'(h(t))h'(t)}{\|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|} = -\frac{\alpha'(h(t))}{\|\alpha'(h(t))\|} = -T^\alpha(h(t)).
 \end{aligned}$$

Αναλόγως,

$$N_*^\beta(t) = (-T_2^\beta(t), T_1^\beta(t)) = (T_2^\alpha(h(t)), -T_1^\alpha(h(t))) = -N_*^\alpha(h(t)).$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $(\alpha \circ h)'(t) = (\alpha_i \circ h)'(t)$, για κάθε $t \in I$ και $i = 1, 2$, έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
 (\alpha \circ h)'_i(t) &= \alpha'_i(h(t)) \cdot h'(t), \quad \forall t \in I, \\
 (\alpha \circ h)'_i &= (\alpha'_i \circ h) \cdot h', \\
 (\alpha \circ h)''_i(t) &= \alpha''_i(h(t)) \cdot h'(t)^2 + \alpha'_i(h(t)) \cdot h''(t), \quad \forall t \in I.
 \end{aligned}$$

Επομένως, βάσει της (1.9.6),

$$\begin{aligned}
 k_*^\beta(t) &= \frac{\beta'_1(t)\beta''_2(t) - \beta''_1(t)\beta'_2(t)}{\|\beta'(t)\|^3} \\
 &= \frac{(\alpha \circ h)'_1(t)(\alpha \circ h)''_2(t) - (\alpha \circ h)''_1(t)(\alpha \circ h)'_2(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|^3} \\
 &= \frac{h'(t)^3}{\|h'(t)\|^3} \cdot \frac{\alpha'_1(h(t))\alpha''_2(h(t)) - \alpha''_1(h(t))\alpha'_2(h(t))}{\|\alpha'(h(t))\|^3} \\
 &= -k_*^\alpha(h(t)),
 \end{aligned}$$

με την οποία και κλείνει η απόδειξη.

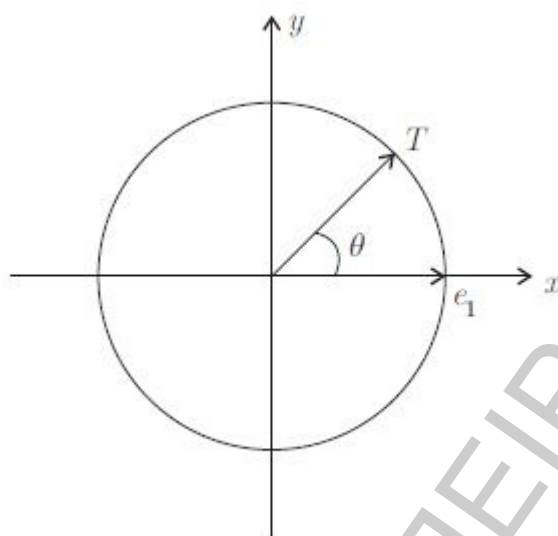
Η ακόλουθη πρόταση μας προσφέρει μια γεωμετρική ερμηνεία της επίπεδης καμπυλότητας.

1.9.3 Πρόταση. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}^2$ μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε ισχύει η σχέση

$$(1.9.13) \quad k_* = \theta',$$

όπου $\theta(s)$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $T(s)$ και e_1 .

Σχετικώς παραθέτουμε το επόμενο σχήμα:



Σχήμα 1.11

Απόδειξη. Επειδή, για κάθε $s \in J$, το διάνυσμα $T(s)$ είναι στοιχείο του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι $T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, όπου $\theta: J \rightarrow \mathbf{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε

$$\begin{aligned} T'(s) &= (-\sin\theta(s) \cdot \theta'(s), \cos\theta(s) \cdot \theta'(s)), \\ N_*(s) &= (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)), \end{aligned}$$

οπότε η (1.9.2') συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} k_*(s) &= \langle T'(s), N_*(s) \rangle = \\ &= \langle (-\theta'(s) \sin\theta(s), \theta'(s) \cos\theta(s)), (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) \rangle = \\ &= \theta'(s) \sin^2\theta(s) + \theta'(s) \cos^2\theta(s) = \theta'(s), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ητούμενο.

Δεδομένης της μηδενικής στρέψης μιας επίπεδης καμπύλης, αρκεί η καμπυλότητά της για να την χαρακτηρίσει. Επομένως, το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών παίρνει την επόμενη ειδική μορφή, με την οποία κλείνουμε την παράγραφο αυτή

1.9.4 Θεώρημα. Έστω $k_*: J = [0, a] \rightarrow \mathbf{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}^2$, της οποίας η επίπεδη

καμπυλότητα είναι η k_* . Επίσης, αν $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, τότε υπάρχει στερεά κίνηση \mathcal{G} του επιπέδου, τέτοια ώστε $\mathcal{G} \circ \alpha = \beta$.

Απόδειξη. Θέτουμε.

$$\phi(s) := \int_0^s k_*(t) dt$$

Και

$$\alpha(s) := (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \left(\int_0^s \cos \phi(u) du, \int_0^s \sin \phi(u) du \right).$$

Επαληθεύεται αμέσως ότι η α είναι διαφορίσιμη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και, βάσει της (1.9.3), ότι η επίπεδη καμπυλότητά της είναι ακριβώς η δοθείσα k_* .

Έστω τώρα β μια άλλη καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες. Αν T_β είναι η ταχύτητα της β και θ είναι η γωνία που σχηματίζει η T_β με το e_1 , από την σχέση (1.9.13) έχουμε

$$\theta(s) = \int_0^s k_*(t) dt + \theta_0 = \phi(s) + \theta_0, \quad (1.9.14)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) &= (\cos(\phi(s) + \theta_0), \sin(\phi(s) + \theta_0)) \\ &= (\cos \theta_0 \cos \phi(s) - \sin \theta_0 \sin \phi(s), \\ &\quad \cos \theta_0 \sin \phi(s) + \sin \theta_0 \cos \phi(s)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(s) \\ \sin \phi(s) \end{pmatrix} \\ &= f(\cos \phi(s), \sin \phi(s)), \end{aligned} \quad (1.9.15)$$

όπου με f συμβολίζουμε την γραμμική απεικόνιση, που αντιστοιχεί στον αμέσως προηγούμενο 2×2 πίνακα, και ορίζει την στροφή του επιπέδου κατά την γωνία θ_0 , δηλαδή

$$f(x, y) = (x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Στη συνέχεια, η σχέση

$$\beta'(s) = (\beta_1'(s), \beta_2'(s)) = T_\beta(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

δίνει ότι

$$\beta(s) = \left(\int_0^s \cos \theta(u) du + x_o, \int_0^s \sin \theta(u) du + y_o \right),$$

όπου x_o, y_o σταθερές. Άρα, χρησιμοποιώντας τις πρώτες ισότητες από τις (1.9.15), η παραπάνω σχέση για το $\beta(s)$ μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left(\int_0^s [\cos \theta_o \cos \phi(u) - \sin \theta_o \sin \phi(u)] du, \right. \\ &\quad \left. \int_0^s [\cos \theta_o \sin \phi(u) + \sin \theta_o \cos \phi(u)] du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= \left(\cos \theta_o \int_0^s \cos \phi(u) du - \sin \theta_o \int_0^s \sin \phi(u) du, \right. \\ &\quad \left. \cos \theta_o \int_0^s \sin \phi(u) du + \sin \theta_o \int_0^s \cos \phi(u) du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= f \left(\int_0^s \cos \phi(u) du, \int_0^s \sin \phi(u) du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= f(\alpha(s)) + (x_o, y_o), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ητούμενο.

2 Κανονικές Επιφάνειες

Εισαγωγή

Οι επιφάνειες είναι αντικείμενα του χώρου \mathbf{R}^3 (όπως η σφαίρα, ο κύλινδρος κ.α.), τα οποία τοπικά "μοιάζουν" με το \mathbf{R}^2 , όπως θα ορίσουμε αυστηρά πιά κάτω. Οι επιφάνειες είχαν απασχολήσει και τους αρχαίους μαθηματικούς. Κατά τον Ευκλείδη

«επιφάνεια [δέ] είναι ό,τι έχει μόνον μήκος και πλάτος», πράγμα που υποδηλώνει

τον διδιάστατο χαρακτήρα αυτών των αντικειμένων.

Ένα βασικό γεωμετρικό πρόβλημα είναι η απεικόνιση της σφαίρας επί ενός επιπέδου. Η πρώτη απάντηση δόθηκε από τον Ίππαρχο μέσω της στερεογραφικής

προβολής. Την μέθοδο αυτή ακολούθησε και ο Πτολεμαίος για να κατασκευάσει χάρτες του ουρανού θόλου. Σε πολύ νεώτερους χρόνους, οι μεγάλες εξερευνήσεις και οι συνακόλουθες ανάγκες της ναυσιπλοΐας έκαναν επιτακτική την κατασκευή (ακριβών) χαρτών, οπότε χρησιμοποιήθηκαν κι άλλες προβολές, όπως αυτές του Mercator, του Lambert, η αζιμουθιακή κ.α. Προφανώς, η κατασκευή χαρτών ανάγεται στο γενικότερο πρόβλημα της απεικόνισης μιας επιφάνειας σε μίαν άλλη. Για περισσότερες λεπτομέρειες, σχετικές με τα μαθηματικά προβλήματα της χαρτογραφίας (και των απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών) παραπέμπουμε στα βιβλία [8, σελ. 116–130] και [9, σελ. 124–159]. Στο τελευταίο (βλ. σελ. 536–542) περιέχονται και αρκετά ιστορικά στοιχεία, αναφερόμενα στην εξέλιξη της Θεωρίας των Επιφανειών.

Με τον όρο Θεωρία των Επιφανειών εννοούμε εδώ την μελέτη των επιφανειών με την βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού (όπως έγινε στο Κεφάλαιο 1 για τις καμπύλες). Στη διαμόρφωση και ανάπτυξη του σημαντικότερου αυτού κλάδου της γεωμετρίας συνέβαλαν αποφασιστικά ο L. Euler, ο G. Monge, και ιδιαίτερα ο C. F. Gauss. Ο τελευταίος, το 1827 παρουσίασε στη Βασιλική Επιστημονική Εταιρεία του Göttingen το θεμελιώδες έργο του *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* ("Γενικές Έρευνες επί των Καμπυλωμένων Επιφανειών"), στην οποία η μελέτη των επιφανειών παίρνει την μορφή που γνωρίζουμε σήμερα. Μεταξύ των πολλών άλλων γεωμετρών, που επίσης συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Επιφανειών, αναφέρουμε κυρίως τους O. Bonnet, E. B. Christoffel, D. Codazzi, G. Darboux, Ch. Dupin, T. LeviCivita, J. B. Meusnier, F. Mindig, A. F. Möbius, J. Plücker, O. Rodrigues, H. Poincaré, J. Weingarten.

Παρά το γεγονός ότι, όπως και ο Gauss, ξεκινάμε την μελέτη των επιφανειών χρησιμοποιώντας συστηματικά την υπόθεση ότι αυτές είναι διδιάστατα αντικείμενα εμβαπτισμένα στον τριδιάστατο χώρο, το περίφημο Θεώρημα Egregium ("Εξοχο Θεώρημα") του ίδιου έδειξε ότι οι επιφάνειες διαθέτουν μια "εσωτερική γεωμετρία", ανεξάρτητη από τον περιβάλλοντα χώρο \mathbb{R}^3 . Αυτό σημαίνει ότι αν στη γήινη σφαίρα κατοικούσαν διδιάστατα ευφυή όντα με ανεπτυγμένες μαθηματικές γνώσεις, θα μπορούσαν να αντιληφθούν τη γεωμετρία της σφαίρας χωρίς να έχουν την αίσθηση της τρίτης διάστασης (του ύψους). Η προηγούμενη ανακάλυψη οδήγησε τον B. Riemann στη θεώρηση της αντίστοιχης μη ευκλείδειας γεωμετρίας που φέρει το όνομά του, και στην έννοια της διαφορικής πολλαπλότητας (η οποία μελετάται σε άλλο εξάμηνο σπουδών).

2.1 Βασικοί Ορισμοί

2.1.1 Ορισμός. Μια παραμέτρηση επιφάνειας (surface parametrization) ή 2-διάστατο σύστημα συντεταγμένων (coordinate system) ή 2-διάστατος χάρτης (chart or patch), ή και παραμετρημένη επιφάνεια (parametrized surface) είναι μια τριάδα (U, r, W) , όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $W = r(U)$, με τις ιδιότητες :

(1) $Hr: U \rightarrow W = r(U)$ είναι ομοιομορφισμός·

(2) Για κάθε $q = (u, v) \in U$, το διαφορικό $Dr(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι

Στην επόμενη σελίδα παραθέτουμε το σχετικό Σχήμα 2.1.

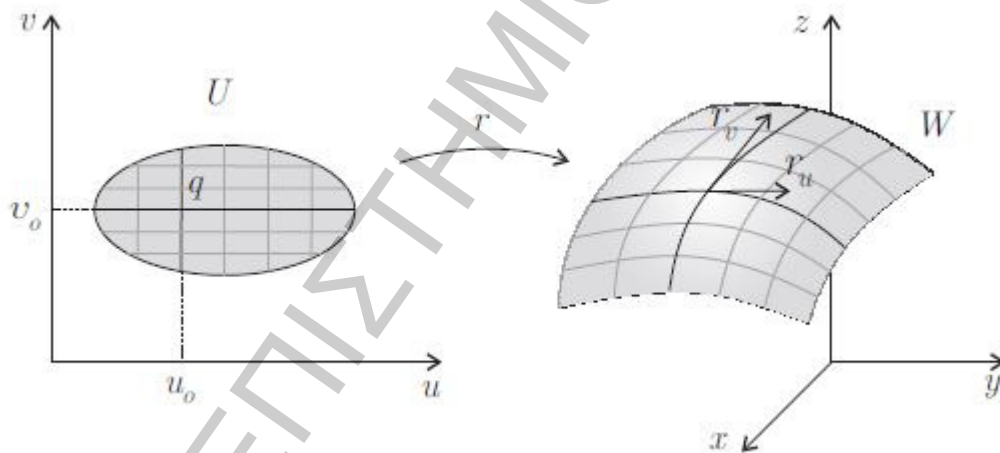
2.1.2 Παρατηρήσεις. 1) Στην συνθήκη (1), το W θεωρείται εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία που έχει ως υποσύνολο του \mathbb{R}^3 .

2) Επειδή $r: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$r = (x, y, z)$$

όπου $x := p_{x_1} \circ r$, $y := p_{x_2} \circ r$, $z := p_{x_3} \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συντεταγμένες της r . Άρα

$$r(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v))), \quad \forall (u, v) \in U.$$



Σχήμα 2.1

Εφ' όσον η r είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι, όλων των τάξεων. Επομένως, για κάθε $q = (u_0, v_0) \in U$, ορίζεται ο αντίστοιχος πίνακας Jacobi (βλ. Παράρτημα, §Α'.15)

$$J_q r = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}.$$

(2.1.1)

Συνεπώς, η συνθήκη (2) του Ορισμού 2.1.1 ισοδυναμεί με το ότι η τάξη του $J_q r$ είναι 2, που με την σειρά του ισοδυναμεί με το ότι μία από τις υποορίζουσες

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_q &:= \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}, & \left. \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|_q &:= \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}, \\ \left. \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_q &:= \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δεν μηδενίζεται, ή ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix} \neq 0.$$

(2.1.2)

3) Ας παρατηρήσουμε ακόμη ότι η τελευταία σχέση σημαίνει ότι τα διανύσματα

$$r_u(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q \end{pmatrix}$$

(2.1.3)

Και

$$r_v(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}$$

(2.1.4)

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα ορίζουν ένα διδιάστατο υπόχωρο (επίπεδο) μέσα στο \mathbf{R}^3 , που αν μεταφερθεί κατά $r(q)$ ορίζει το εφαπτόμενο επίπεδο του χώρου $r(U)$ στο $r(q)$. Θα μελετήσουμε το εφαπτόμενο επίπεδο λεπτομερέστερα στην Παράγραφο 2.6.

4) Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης παρατήρησης, η (2.1.2) ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$(2.1.2') \quad \|r_u(q) \times r_v(q)\| \neq 0.$$

Πολλές φορές, ο έλεγχος της τελευταίας είναι πρακτικά πιά εύκολος απ' αυτόν των άλλων ισοδύναμων συνθηκών.

5) Συχνά, λέμε και γράφουμε απλά << η παραμέτρηση r >>, παραλείποντας το πεδίο ορισμού U και το πεδίο τιμών W του χάρτη. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως τους όρους παραμέτρηση (επιφανείας), σύστημα συντεταγμένων, χάρτης, και παραμετρημένη επιφάνεια.

2.1.3 Πρόταση. Έστω (U, r, W) μια παραμέτρηση επιφανείας. Τότε ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

- (1) Η r δεν είναι σταθερά.
- (2) Η r δεν είναι ανεξάρτητη του u ή του v .

Επομένως, η εικόνα $r(U)$ μιας παραμέτρησης επιφανείας δεν είναι ούτε σημείο, ούτε καμπύλη.

Απόδειξη. (1) Αν $r = c$, τότε $Dr(q) = 0$, για κάθε $q \in U$, άτοπο

(2) Αν η r είναι ανεξάρτητη του u , τότε $r_u(q) = 0$, οπότε και $r_u(q) \times r_v(q) = 0$, επίσης άτοπο. Ανάλογα για το v .

Ας πάρουμε και πάλι μια παραμέτρηση επιφανείας (U, r, W) . Θα ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τα διανύσματα $r_u(q)$ και $r_v(q)$, για τυχόν $q \in U$.

Θεωρούμε ένα σημείο $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ και την απεικόνιση

$$(2.1.5) \quad \alpha: u \rightarrow \alpha(u) := r(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Η α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη με τιμές στο $W = r(U)$, για την οποία

$$(2.1.6) \quad \alpha'(u_0) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{q_0} = r_u(q_0).$$

Δηλαδή

Το $r_u(q_0) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{q_0}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, στο σημείο u_0 , της διαφορίσιμης καμπύλης $u \mapsto \alpha(u) := r(u, v_0)$. Ανάλογα, το

$r_{1v}(q_1 \mathbf{0}) = \theta_{1r}/\theta_{1u} |_{q_1 \mathbf{0}}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, στο σημείο v_0 , της διαφορίσιμης καμπύλης $u \mapsto \beta(u) := r(u_0, v)$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλα τα $q = (u, v) \in U$, λέπουμε ότι η εικόνα $W = r(U)$ σαρώνεται από καμπύλες της μορφής

$$\alpha: u \longrightarrow r(u, v) \quad \text{και} \quad \beta: v \longrightarrow r(u, v),$$

των οποία τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα είναι τα

$$r_u(q) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q \quad \text{και} \quad r_v(q) = \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q,$$

Για κάθε $q = (u, v) \in U$ (βλ. επίσης και το Σχήμα 2.1).

Οι καμπύλες α και β , που ορίστηκαν προηγουμένως (μέσω της παραμέτρησης) καλούνται **καμπύλες συντεταγμένων** (coordinate curves) ή **παραμετρικές καμπύλες** (parameter curves) της (U, r, W) .

2.1.4 Ορισμός. Μια **κανονική επιφάνεια** (regular surface) είναι ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 για το οποίο υπάρχει μια οικογένεια $\{(U_i, r_i, W_i)\}_{i \in I}$ 2-διάστατων χαρτών (παραμετρήσεων), έτσι ώστε $W_i \subseteq S$ ανοιχτό (στο S με την σχετική τοπολογία) και

$$S = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $p \in S$, υπάρχει 2-διάστατος χάρτης (U_p, r_p, W_p) , με $p \in W_p$ και $W_p \subseteq S$ ανοιχτό. Το σύνολο των 2-διάστατων χαρτών του S λέμε ότι αποτελεί έναν (2-διάστατο) **άτλαντα**.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι (σύμφωνα με την σχετική τοπολογία του S , ως υποχώρου του \mathbb{R}^3) ένα $W \subseteq S$ είναι ανοιχτό στο S , εάν $W = A \cap S$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι αν (U, r, W) είναι παραμέτρηση επιφανείας, τότε το $S = W$ είναι μία κανονική επιφάνεια, που καλύπτεται ολόκληρη από τον δοσμένο χάρτη. Προφανώς το W είναι ανοιχτό στον εαυτό του, αφού

$$W = W \cap \mathbb{R}^3.$$

2.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Τα ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 .

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό. Παρατηρούμε ότι η κανονική εμφύτευση

$$i: U \longrightarrow S = U \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (u, v, 0)$$

Είναι απεικόνιση 1-1 και επί, συνεχής με συνεχή αντίστροφη την

$$i^{-1}: U \times \{0\} \longrightarrow U: (u, v, 0) \mapsto (u, v)$$

(άρα ομοιομορφισμός) και ο πίνακας

$$J_q i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι τάξης 2, σε κάθε $(u, v) \in U$. Επομένως η τριάδα $(U, i, U \times \{0\})$ είναι 2-διάστατη παραμέτρηση και το $S = U \times \{0\}$ κανονική επιφάνεια, που καλύπτεται όλη από μία παραμέτρηση. Ταυτίζοντας τώρα το U με το $U \times \{0\}$ (μέσω της i) μπορούμε να θεωρήσουμε και το U κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 2. Τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 .

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο

$$\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}.$$

Το Π είναι εικόνα ενός 2-διάστατου χάρτη: Επειδή για να ορίζεται επίπεδο πρέπει να είναι $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $C \neq 0$, και να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto \left(u, v, \frac{-D - Au - Bv}{C} \right).$$

Προφανώς η r είναι , επί του Π και συνεχής. Επομένως υπάρχει η αντίστροφη

$$r^{-1}: \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

Η r^{-1} είναι συνεχής, ως περιορισμός της συνεχούς απεικόνισης

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

στο Π , άρα η $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η r είναι διαφορίσιμη και μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$r = (x, y, z),$$

Όπου

$$\begin{aligned} x(u, v) &= pr_1(u, v) = u, \\ y(u, v) &= pr_2(u, v) = v, \\ z(u, v) &= \frac{-D - Au - Bv}{C}. \end{aligned}$$

Οπότε

$$J_{(u,v)}r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{A}{C} & -\frac{B}{C} \end{pmatrix}$$

που είναι πίνακας τάξης 2. Άρα ισχύουν οι συνθήκες του Ορισμού 2.1.1. Επιπλέον, το Π είναι κανονική επιφάνεια που καλύπτεται από μία παραμέτρηση.

2.3 Βασικές ιδιότητες

Θα αποδείξουμε την τοπική ύπαρξη παραμετρήσεων (τύπου) Monge σε μια κανονική επιφάνεια. Ακριβέστερα έχουμε την

2.3.1 Πρόταση. Έστω S κανονική επιφάνεια. Τότε για τυχόν $p_0 \in S$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή W_0 του p_0 στην S , έτσι ώστε το W_0 να είναι το γράφημα κατάλληλης διαφορίσιμης συνάρτησης $f: V_0 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας, υπάρχει παραμέτρηση (τύπου) Monge που περιέχει το σημείο.

Απόδειξη. Επειδή η S είναι κανονική επιφάνεια, υπάρχει παραμέτρηση $(U, r, r(U))$ με $p_0 \in r(U)$ και $r(U) \subseteq S$ ανοιχτό. Για την παραμέτρηση αυτή, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.1.2, τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_q, \left. \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|_q, \left. \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_q$$

είναι μη μηδενική, για κάθε $q \in U$. Θέτουμε $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $q_0 := r^{-1}(p_0)$ και υποθέτουμε ότι, χωρίς βλαβη της γενικότητας,

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{q_0} \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση (προβολή στον 1^ο και 2^ο παράγοντα)

$$\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (a, b, c) \mapsto (a, b)$$

και την σύνθεση $\pi \circ r$, που έχει την μορφή

$$\pi \circ r: U \longrightarrow \mathbb{R}^2: (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \supseteq U & \xrightarrow{r} & S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \pi \circ r & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.1

Ο πίνακας Jacobi της $\pi \circ r$ στο q_0 έχει ορίζουσα

$$\det(J_{q_0}(\pi \circ r)) = \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{q_0} & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{q_0} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{q_0} & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{q_0} \end{vmatrix} = \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{q_0} \neq 0,$$

(που σημαίνει ότι, ισοδύναμα, το διαφορικό $D(\pi \circ r)(q_0)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός). Επομένως, από το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης, η $\pi \circ r$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο q_0 , δηλαδή υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $U_0 \subseteq U$ του q_0 και $V_0 \subseteq (\pi \circ r)(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(\pi \circ r)(q_0) = (x_0, y_0)$, έτσι ώστε η

$$\pi \circ r|_{U_0}: U_0 \longrightarrow V_0$$

να είναι αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $W_0 := r(U_0)$. Το W_0 είναι ανοιχτό υποσύνολο του S , αφού η r είναι ομοιομορφισμός και U_0 ανοιχτό.

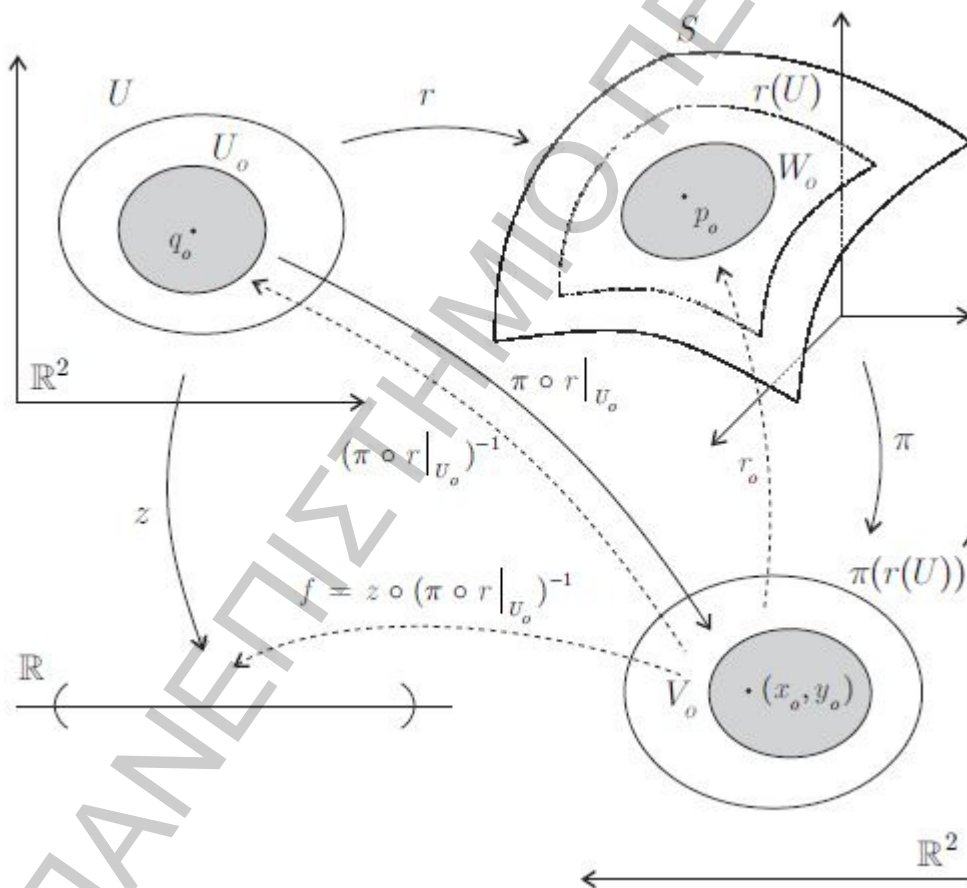
Θα δείξουμε ότι $W_o = \Gamma_f$, για κατάλληλη f . Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την απεικόνιση (βλ. και Σχήμα 2.6)

$$f := z \circ (\pi \circ r|_{U_o})^{-1} : V_o \longrightarrow \mathbb{R}$$

(θυμίζουμε ότι $z = pr_a \circ r$). Ισχυριζόμαστε ότι $W_o = \Gamma_f$. Πράγματι,

$$p \in W_o = r(U_o) \Leftrightarrow p = r(u, v), \text{ για κάποιο } (u, v) \in U_o.$$

Επειδή σε κάθε $(u, v) \in U_o$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα $(a, b) \in V_o$ τέτοιο ώστε $(a, b) = (\pi \circ r|_{U_o})(u, v) = (\pi \circ r)(u, v)$, έχουμε ότι



Σχήμα 2.6

Επομένως (βλ. Παράδειγμα 4 της Παραγράφου 2.2), η τριάδα (V_o, r_o, W_o) , όπου $r_o(a, b) = (a, b, f(a, b)), \forall (a, b) \in V_o$, ορίζει μία παραμέτρηση Monge με $p_o \in W_o$. Σημειώνουμε ότι η αντίστροφη της r_o είναι η $r_o^{-1}(-1) = \pi|_{W_o}$.

2.3.2 Πρόταση. Έστω S κανονική επιφάνεια. Υποθέτουμε ότι $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση, τέτοια ώστε $r(U) \subseteq S$ ανοιχτό και $Dr(q) \neq 0$, για κάθε $q \in U$. Τότε η $r^{-1}: r(U) \rightarrow U$ είναι επίσης συνεχής, άρα η r είναι ομοιομορφισμός και η τριάδα $(U, r, r(U))$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων της S .

Απόδειξη. Έστω τυχόν $q_0 \in U$ και $p_0 = r(q_0) \in r(U)$. Υποθέτουμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\theta_1(x, y)/\theta_1(u, v)|_{q_0} \neq 0$. Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης, κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\pi \circ r|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$, η οποία, ως αμφιδιαφόριση, είναι ομοιομορφισμός. Θυμίζουμε ότι $q_0 \in U_0, U_0 \subseteq U$ ανοιχτό και $W_0 = r(U_0)$, ενώ από την κατασκευή της παραμέτρησης Monge (V_0, r_0, W_0) έχουμε ότι $\pi|_{W_1} = r_0^{-1} \circ r$ (όπου, φυσικά, η r_0 είναι ομοιομορφισμός). Επειδή

$$r|_{U_0} = (r_0 \circ \pi|_{W_0}) \circ r|_{U_0} = r_0 \circ (\pi \circ r|_{U_0}),$$

συνάγεται ότι η $r|_{U_1}$ είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. Επομένως δείξαμε ότι η r είναι ομοιομορφισμός σε μια περιοχή του q_0 , δηλαδή τοπικός ομοιομορφισμός στο q_0 . Παρόμοια, δείχνουμε ότι η r είναι τοπικός ομοιομορφισμός παντού, άρα και ομοιομορφισμός, οπότε έχουμε το συμπέρασμα.

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αν είναι γνωστόν ότι S είναι κανονική επιφάνεια, για να διαπιστωθεί ότι το (U, r, W) είναι σύστημα συντεταγμένων της S , δεν χρειάζεται να ελεγχθεί αν η r είναι ομοιομορφισμός· αρκεί μόνον ο έλεγχος της συνεχειάς της.

2.3.3 Θεώρημα. Έστω S μια κανονική επιφάνεια και $(U_i, r_i, r_i(U_i)), i = 1, 2$, δύο συστήματα συντεταγμένων της S . Αν $W := r_1(U_1) \cap r_2(U_2) \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων (change of coordinates) ή απεικόνιση μεταφοράς (χαρτών) (transition map)

$$U_1 \supseteq r_1^{-1}(W) \xrightarrow{h := r_2^{-1} \circ r_1} r_2^{-1}(W) \subseteq U_2$$

είναι αμφιδιαφόριση (βλ. και Σχήμα 2.7).

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $q_1 \in r_1^{-1}(W)$ και θέτουμε $q_2 := h(q_1) \in r_2^{-1}(W)$.

Θα δείξουμε ότι η h είναι διαφορίσιμη στο q_1 .

Επειδή $(U_2, r_2, r_2(U_2))$ είναι σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε,

χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\frac{\theta_2(x_2, y_2)}{\theta_2(u, v)}|_{q_2} \neq 0$.

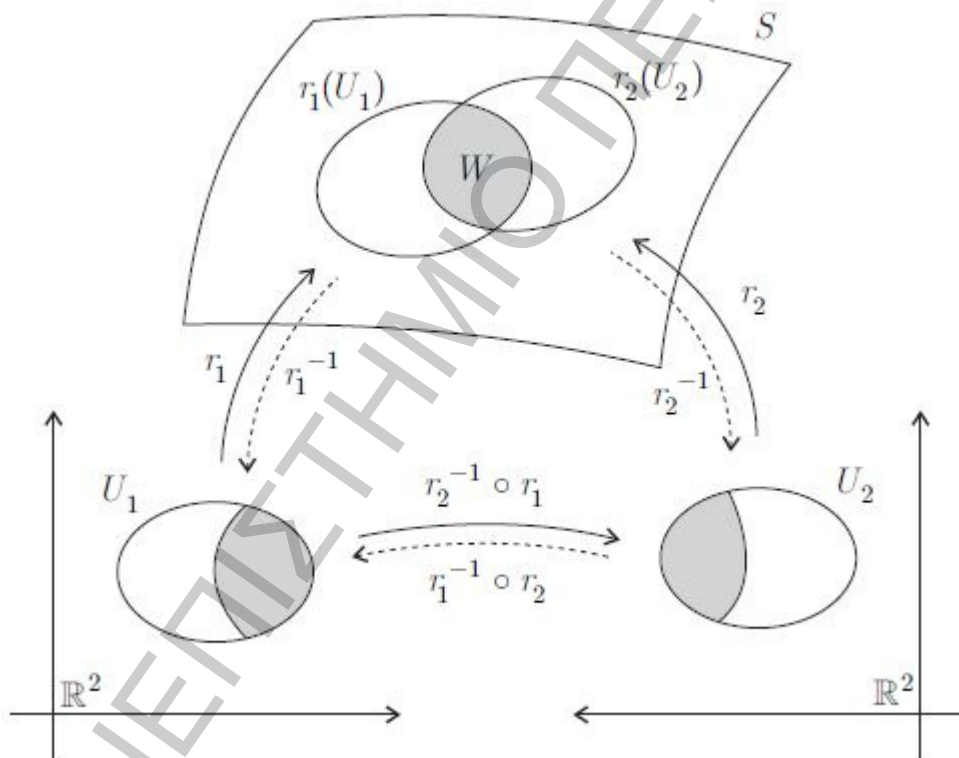
Θεωρούμε την παραμέτρηση Monge (V_o, r_o, W_o) που κατασκευάζεται στην Απόδειξη της Πρότασης 2.3.1 με $r_1(q_1) \in W_o$. Τότε $W_o = \Gamma_f$, για μια διαφορίσιμη $f: V_o \rightarrow \mathbb{R}$ και

$$r_o^{-1} = \pi|_{W_o}: W_o \longrightarrow V_o : (x, y, z) \longmapsto (x, y).$$

Επίσης, για κάποιο ανοιχτό $U_o \subseteq U_2$ με $q_2 \in U_o$ η απεικόνιση

$$\pi \circ r_2|_{U_o}: U_o \longrightarrow V_o$$

είναι αμφιδιαφόριση.



Σχήμα 2.7

Τώρα περιορίζοντας την απεικόνιση $r_2^{-1} \circ r_1$ στο σύνολο $r_1^{-1}(W \cap W_o)$, έχουμε

$$\begin{aligned} (r_2^{-1} \circ r_1)|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} &= r_2^{-1} \circ r_o \circ r_o^{-1} \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \\ &= r_2^{-1} \circ (\pi|_{\Gamma_f})^{-1} \circ \pi|_{\Gamma_f} \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \\ &= (\pi \circ r_2|_{U_o})^{-1} \circ \pi \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \end{aligned}$$

που είναι σύνθεση διαφορίσιμων.

2.4 Επιφάνειες εκ περιστροφής

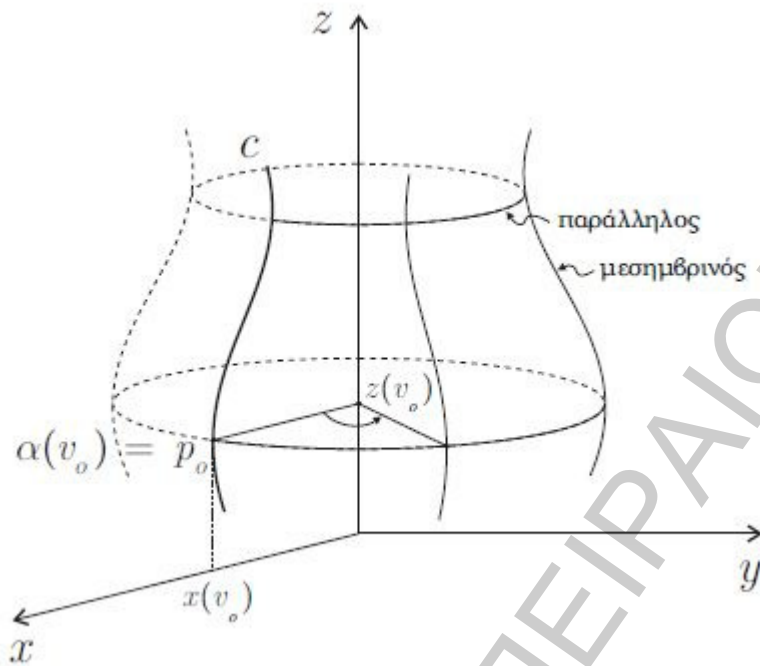
Δίνεται ένα επίπεδο $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ και μία παραμετρημένη επίπεδη απλή καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \Pi$ ($I \subseteq \mathbf{R}$ ανοιχτό), της οποίας η εικόνα $C = \alpha(I)$ περιέχεται στο επίπεδο Π . Υποθέτουμε ακόμη ότι δίνεται και μία ευθεία \mathcal{E} του Π , η οποία δεν τέμνει την C .

Αν περιστρέψουμε το Π περί την \mathcal{E} , τότε η καμπύλη C παράγει ένα υποσύνολο S του \mathbf{R}^3 που καλείται **επιφάνεια εκ περιστροφής** (surface of revolution). Η C καλείται **καμπύλη κατατομής** (profile curve) ή **γενέτειρα** (generating curve) και η ευθεία \mathcal{E} **άξονας περιστροφής** (axis) της S .

Τα σημεία της C , κατά την περιστροφή της, διαγράφουν κύκλους, τους οποίους καλούμε **παραλλήλους** της S (parallels of S), ενώ η C και οι νέες θέσεις της (κατά την ίδια περιστροφή) αποτελούν τους **μεσημβρινούς** (meridians) της S .

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι Π είναι το επίπεδο xOz και \mathcal{E} ο άξονας $z'Oz$. Επίσης, αφού η C δεν τέμνει τον $z'Oz$, υποθέτουμε ότι βρίσκεται όλη σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, π.χ. σε αυτό με $x > 0$. Θέτουμε $\alpha(v) = (x(v), z(v))$, $v \in I$. Σχετικώς παραθέτουμε το παρακάτω Σχήμα 2.8.

Έστω $v_0 \in I$ και $p_0 = \alpha(v_0) = (x(v_0), z(v_0)) \equiv (x(v_0), 0, z(v_0))$. Όπως αναφέραμε παραπάνω, καθώς το επίπεδο xOz περιστρέφεται περί τον άξονα των z , το p_0 διαγράφει ένα κύκλο ακτίνας $x(v_0)$ που βρίσκεται σε ένα επίπεδο παράλληλο με το επίπεδο xOy , σε ύψος $z(v_0)$. Τα σημεία αυτού του κύκλου είναι οι τριάδες $(x(v_0)\cos u, x(v_0)\sin u, z(v_0))$, όπου $u \in [0, 2\pi]$.



Σχήμα 2.8

Άρα η επιφάνεια εκ περιστροφής S είναι το σημειοσύνολο

$$S = \{(x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v)) : (u, v) \in [0, 2\pi) \times I\}.$$

Θα κατασκευάσουμε κατάλληλες παραμετρήσεις από τέτοιες τριάδες. Πριν απ' αυτό χρειαζόμαστε το εξής βοηθητικό συμπέρασμα [που ισχύει για κάθε κανονική (απλή) καμπύλη αλλά, για την οικονομία της έκθεσης, θα περιοριστούμε στην δοσμένη α]:

Για κάθε v_0 υπάρχει ανοιχτό $I_0 \subseteq I$, έτσι ώστε $v_0 \in I_0$ και η $\alpha(I_0)$ να είναι γράφημα κατάλληλης συνάρτησης $g: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή $\alpha(I_0) = \Gamma_g$.

Πράγματι, εφ' όσον η α είναι κανονική, $\alpha'(v_0) = (x'(v_0), z'(v_0)) \neq \mathbf{0}$, οπότε τουλάχιστον μία από τις δύο συντεταγμένες δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε ότι $x'(v_0) \neq 0$. Τότε, κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης, υπάρχει ανοιχτό

$I_0 \subseteq I$ και ανοιχτό $J_0 \subseteq \mathbb{R}$, έτσι ώστε $v_0 \in I_0$ και η $x|_{I_0}: I_0 \rightarrow J_0$ να είναι αμφιδιαφόριση. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$g := z \circ (x|_{I_0})^{-1}: J_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αν τώρα $p = (x(v), z(v))$ είναι τυχόν σημείο της $\alpha(I_0)$, οπότε $v \in I_0$, θα υπάρξει μοναδικό $t \in J_0$ με $x(v) = t$. Επομένως,

$$\alpha(I_0) \ni p = (x(v), z(v)) = (t, (z \circ x|_{I_0})(t)) = (t, g(t)) \in \Gamma_g$$

με την οποίαν αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα, τοπικά θα είναι

$$z(v) = g(t) = g(x(v)), \quad \text{δηλ.} \quad z = g(x).$$

Τότε όμως

$$z = g(x) \Leftrightarrow f(x, z) = c \text{ (σταθερά) με } Df(x, z) \neq 0.$$

Πράγματι, αν $z = g(x)$ και θέσουμε $f(x, z) := g(x) - z$, θα έχουμε ότι $f(x, z) = 0$ και $Df(x, z) \equiv J_{(x,z)}f = (g'(x), -1) \neq 0$ (βλ. και τη σχετική συζήτηση πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1). Και αντιστρόφως: Αν υποθέσουμε ότι $f(x, z) = c$ με $Df(x, z) \neq 0$, τότε $(f_x, f_z) \neq 0$. Αν, για παράδειγμα, $f_z \neq 0$, τότε, κατά το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης, $z = g(x)$ κατά τρόπο μοναδικό.

Για διευκόλυνση, στη συνέχεια θα υποθέσουμε (όπως συμβαίνει στα περισσότερα παραδείγματα) ότι η καμπύλη C δίνεται από την ισότητα $f(x, z) = c$, με $Df(x, z) \neq 0$, για κάθε $(x, z) \in C$. Αυτό δεν αποτελεί ιδιαίτερο περιορισμό της γενικότητας γιατί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι παραμετρήσεις κατασκευάζονται με τον ίδιο τρόπο, απλώς αντί το v να μεταβάλλεται στο I , θα μεταβάλλεται σε μικρότερα διαστήματα, όπως το I_0 , και οι παραμετρήσεις θα καλύπτουν μικρότερα τμήματα της επιφάνειας. Έτσι,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in S &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x(v)^2 \text{ και } z = z(v), \forall v \in I \\ &\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = c. \end{aligned}$$

Θεωρούμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Είναι προφανές ότι

$$S = h^{-1}(c).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.1, θα δείξουμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια: Για κάθε $p = (x, y, z) \in h^{-1}(c)$, το διαφορικό $Dh(p)$ είναι επί (ισοδύναμα $Dh(p) \neq 0$), αφού $Df(x, z) \neq 0$.

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε ότι $h = f \circ \varphi$, όπου $\varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Επομένως, θέτοντας $(a, b) = \varphi(p)$, έχουμε για τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi,

$$\begin{aligned} Dh(p) &\equiv J_p h = (J_{(a,b)} f) \cdot (J_p \varphi) \\ &= (g'(a), 1) \cdot \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (g'(a)x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, g'(a)y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, 1) \neq 0. \end{aligned}$$

Αφού εξασφαλίσουμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια, ας κατασκευάσουμε μερικές εύχρηστες παραμετρήσεις. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την τριάδα (U, r, W) , όπου $U = (0, 2\pi) \times I, r$ είναι η απεικόνιση

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v))$$

και $W = r(U)$. Προφανώς το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και η r είναι διαφορίσιμη (άρα και συνεχής).

Η r είναι και 1-1: αν $r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2)$, τότε προκύπτει αμέσως ότι $z(v_1) = z(v_2)$ και $x(v_1)^2 = x(v_2)^2$. Λόγω της υπόθεσης ότι $x > 0$, είναι $x(v_1) = x(v_2)$, άρα

$$\alpha(v_1) = (x(v_1), z(v_1)) = (x(v_2), z(v_2)) = \alpha(v_2).$$

Επειδή η C είναι απλή, δηλαδή η α είναι 1-1, παίρνουμε $v_1 = v_2 = v$, οπότε, από την ισότητα $r(u_1, v) = r(u_2, v)$, προκύπτει ότι τα τόξα $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$ έχουν ίσα \sin και \cos , άρα $u_1 = u_2$.

Επίσης το $Dr(q)$ είναι 1-1, για κάθε $q = (u, v) \in U$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} r_u(q) &= (-x(v) \sin u, x(v) \cos u, 0), \\ r_v(q) &= (x'(v) \cos u, x'(v) \sin u, z'(v)), \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
r_u(q) \times r_v(q) &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -x(v) \sin u & x(v) \cos u & 0 \\ x'(v) \cos u & x'(v) \sin u & z'(v) \end{pmatrix} \\
&= (x(v)z'(v) \cos u, x(v)z'(v) \sin u, -x(v)x'(v)) \\
&= x(v)(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -x'(v)),
\end{aligned}$$

Απ' όπου προκύπτει ότι

$$\|r_u(q) \times r_v(q)\| = x(v) \cdot (x'(v)^2 + z'(v)^2)^{1/2}$$

Επειδή από την υπόθεση $x(v) > 0$, η ισότητα $\|r_u(q) \times r_v(q)\| = 0$ δίνει $\|a'(v)\| = (x'(v)^2 + z'(v)^2)^{1/2} = 0$, για κάθε v , πράγμα που είναι άτοπο, γιατί τότε η α θα ήταν σταθερή και η εικόνα \mathcal{C} ένα σημείο. Άρα $\|r_u(q) \times r_v(q)\| \neq 0$ και $D\mathbf{r}(q)1-1$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η εικόνα $W = r(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S , αφού το W καλύπτει όλο το S πλην των σημείων της αρχικής καμπύλης. Άρα η τριάδα (U, r, W) ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.3.2, οπότε είναι παραμέτρηση της S . Σημειώνουμε ότι για u σταθερά, οι αντίστοιχες παραμετρικές καμπύλες αποτελούν τους μεσημβρινούς, ενώ για v σταθερά παίρνουμε τους παράλληλους (κύκλους).

Με αλλαγή του διαστήματος που περιέχει το τόξο u , π.χ. παίρνοντας $\bar{U} = (-\pi, \pi) \times I$ και $\bar{r}(u, v) = (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v))$, κατασκευάζουμε μια δεύτερη παραμέτρηση της S , έτσι ώστε οι δύο παραμετρήσεις να καλύπτουν όλη την S .

Κλείνοντας θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν επιφάνειες, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή κλειστής καμπύλης (όπως η σπείρα στο επόμενο παράδειγμα), ή από καμπύλες που έχουν κοινά σημεία με τον άξονα των z (όπως η σφαίρα, η οποία προκύπτει από περιστροφή ενός ημικυκλίου με διάμετρο τον ίδιο τον άξονα περιστροφής), καθώς επίσης και από καμπύλες συμμετρικές ως προς τον άξονα. Τέτοιες επιφάνειες, επειδή δεν εμπίπτουν στον αρχικό ορισμό της επιφάνειας εκ περιστροφής, καλούνται γενικευμένες επιφάνειες εκ περιστροφής. Η μελέτη αυτών των επιφανειών γίνεται με παρόμοιους μεθόδους, αν και υπάρχουν συχνά κάποια λεπτά προβλήματα. Δεν θα προχωρήσουμε περισσότερο στην κατεύθυνση αυτή και θα περιοριστούμε σε μερικά παραδείγματα, εδώ και στις ασκήσεις.

Παράδειγμα: Η σπείρα-τόρος (σαμπρέλα - torus) T .

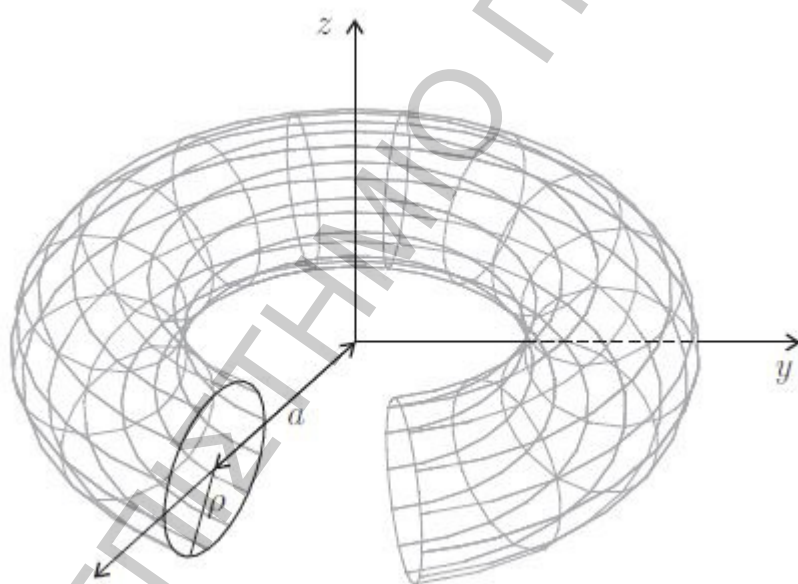
Είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής που προκύπτει εάν περιστρέψουμε περί τον άξονα των z έναν κύκλο (που βρίσκεται στο επίπεδο xOz) με κέντρο $(a, 0, 0)$ και ακτίνα ρ , με $0 < \rho < a$.

Η καμπύλη που περιγράφει τον κύκλο είναι η

$$\alpha(v) = (x(v), z(v)) = (a + \rho \cos v, \rho \sin v) \equiv (a + \rho \cos v, 0, \rho \sin v).$$

Άρα η σπείρα είναι το σημειοσύνολο

$$T = \{((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v) \mid (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)\}.$$



Σχήμα 2.9

Μια παραμέτρηση δίνεται από την απεικόνιση

$$r(u, v) = ((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v), \\ (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi),$$

η οποία βέβαια δεν καλύπτει όλο το T , αλλά αφήνει έξω ένα "κατακόρυφο" κύκλο (μεσημβρινό) και ένα "οριζόντιο" (παράλληλο). Για να καλυφθεί το T πλήρως, αρκεί να πάρουμε παρόμοιες παραμετρήσεις αλλάζοντας τα άκρα των διαστημάτων, για παράδειγμα, σε $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.

3 Η καμπυλότητα Gauss

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία από τις σημαντικότερες γεωμετρικές έννοιες, αυτήν της καμπυλότητας, η οποία περιγράφει κατά κάποιον τρόπο το «σχήμα» μιας επιφάνειας, δηλαδή το πόσο «καμπυλώνεται» η επιφάνεια στον χώρο.

Μια πρώτη συστηματική προσέγγιση της καμπυλότητας οφείλεται στον L. Euler και βασίζεται στον υπολογισμό της καμπυλότητας διαφόρων καμπυλών επί μιας επιφάνειας.

Όμως, όπως σε μια καμπύλη, η καμπυλότητα υπολογίζεται μέσω της μεταβολής του πρώτου καθέτου διανύσματος, έτσι και στην περίπτωση μιας επιφάνειας, μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητά της μέσω της μεταβολής του αντιστοίχου του καθέτου διανύσματος, δηλαδή του μοναδικού διανύσματος του χώρου, το οποίο είναι κάθετο στον επαπτόμενο χώρο ενός σημείου της επιφάνειας. Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον C. F. Gauss και εκτίθεται στο θεμελιώδες έργο του *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, στο οποίο αναφερθήκαμε πολύ σύντομα στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 2.

Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη. Πρώτα θα μελετήσουμε την καμπυλότητα με την (μεταγενέστερη) μέθοδο του Gauss, αλλά με πιά σύγχρονο τρόπο, και κατόπιν, για την πληρότητα, θα δούμε και την προσέγγιση του Euler.

3.1 Κάθετα διανύσματα

Υποθέτουμε ότι δίνεται μια κανονική επιφάνεια S και παραμέτρηση (U, r, W) της S στο σημείο p , δηλαδή $p \in W$. Θέτουμε $q = r^{-1}(p)$.

Αν θεωρήσουμε τον επαπτόμενο χώρο $T_p S$, γνωρίζουμε ότι το

$$r_u(q) \times r_v(q)$$

είναι διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , κάθετο προς το επίπεδο των $r_u(q)$ και $r_v(q)$, δηλαδή κάθετο προς τον εφαπτόμενο χώρο T_pS καθώς και στο κάθετο επίπεδο E_p . Υπενθυμίζουμε ότι η φορά του $r_u(q) \times r_v(q)$ είναι τέτοια, ώστε η τριάδα

$$\{r_u(q), r_v(q), r_u(q) \times r_v(q)\}$$

να αποτελεί θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^3 .

3.1.1 Ορισμός. Το διάνυσμα

$$N(p) := \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(r^{-1}(p))$$

καλείται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο p** (unit normal vector at p). Η ευθεία που διέρχεται από το p και είναι κάθετη στο επίπεδο E_p λέγεται **κάθετη ευθεία στο p** .

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, επί του συνόλου $W = r(U)$ ορίζεται μια απεικόνιση

$$N: W \longrightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) := \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(r^{-1}(p)),$$

η οποία, επιπλέον, είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

3.1.2 Ορισμός. Κάθε απεικόνιση της μορφής $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται **διανυσματικό πεδίο επί της S** (vector field).

Από τον τελευταίο ορισμό συνάγεται ότι η απεικόνιση N είναι ένα **διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο επί του W** .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της επιφάνειας S και την απεικόνιση **συμμετρίας** (symmetry)

$$\rho: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (u, v) \mapsto \rho(u, v) := (v, u)$$

Η ρ είναι γραμμικός ισομορφισμός, επομένως ομοιομορφισμός και αμφιδιαφόριση του επιπέδου στον εαυτό του, με $\rho^{-1} = \rho$, άρα το σύνολο

$$\bar{U} := \rho(U)$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ορίζουμε και την απεικόνιση

$$\bar{r} := r \circ \rho|_{\bar{U}}: \bar{U} \longrightarrow W = r(U),$$

που είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση τέτοιων, και διαφορίσιμη με σημειακό διαφορικό τάξης 2, σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα η \bar{r} ορίζει μία (2-διάστατη) παραμέτρηση της ίδιας επιφάνειας S . Έστω $p \in W$ και $q = r^{-1}(p)$. Θέτουμε $\bar{q} := \rho(q) = r^{-1}(p)$. Για την νέα παραμέτρηση είναι

$$\begin{aligned} \bar{r}_u(\bar{q}) &= [D(r \circ \rho)(\bar{q})](e_1) = [D(r(q)) \circ D(\rho)(\bar{q})](e_1) \\ &= D(r(q))(\rho(e_1)) = D(r(q))(\rho(e_2)) = r_u(q), \end{aligned}$$

και ανάλογα,

$$\begin{aligned} \bar{r}_v(\bar{q}) &= r_v(q), \\ \bar{N}(p) &= r_v(q) \times r_u(q) = -N(p), \end{aligned}$$

άρα το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο p , που ορίζει η παραμέτρηση $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ είναι αντίθετο του αρχικού $N(p)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι κάθε παραμέτρηση (U, r, W) ορίζει πάντοτε στην εικόνα $W = r(U)$ ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο.

Περιφραστικά, ένα τέτοιο πεδίο καθορίζει ποιά πλευρά της επιφάνειας είναι η "πάνω" και ποιά η "κάτω".

Ένα βασικό ερώτημα είναι αν εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός τέτοιου πεδίου ολικά, δηλαδή σε ολόκληρη την επιφάνεια S . Αυτό άλλοτε είναι δυνατόν, όπως στην περίπτωση της σφαίρας, και άλλοτε όχι, όπως στην **ταινία του Mobius** (Möbius band), που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 της επόμενης σελίδας. Ας δούμε τι συμβαίνει σ' αυτήν την επιφάνεια: αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο p της ταινίας και την διατρέξουμε κινούμενοι κυκλικά, διαισθητικά βλέπουμε ότι, επανερχόμενοι στο p , το αρχικό κάθετο διάνυσμα $N(p)$ θα έχει αλλάξει φορά και θα έχει γίνει $-N(p)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ολικό διαφορίσιμο πεδίο N , αφού η συνέχειά του (λόγω διαφορισιμότητας) δεν επιτρέπει αλλαγή του προσήμου. Περιφραστικά, θα λέγαμε ότι σ' αυτήν την επιφάνεια δεν μπορούμε να επιλέξουμε την "πάνω" ή "κάτω" πλευρά της επιφάνειας.

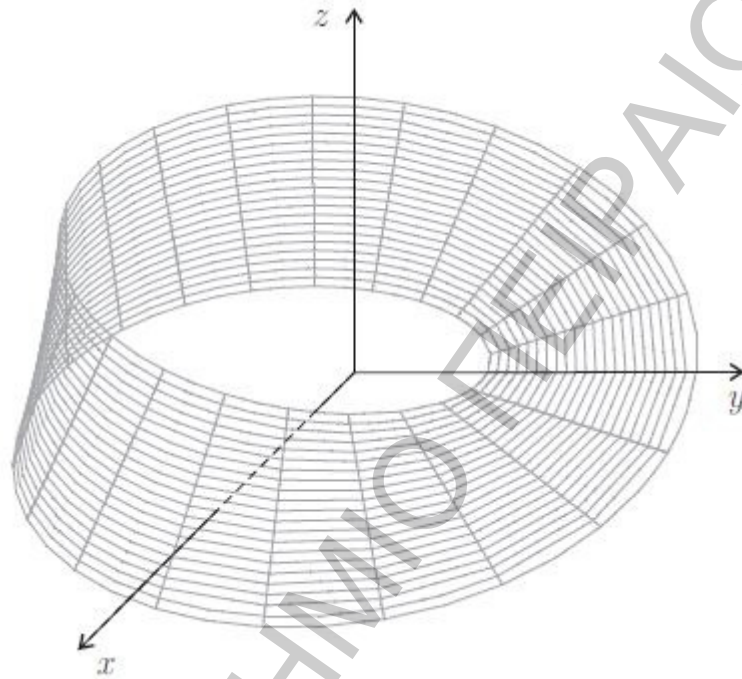
Αν υπάρχει ένα ολικό μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο

$$N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

λέμε ότι η επιφάνεια S είναι **προσανατολίσιμη** (orientable), και το ολικό πεδίο N είναι ένας **προσανατολισμός** (orientation). Αξίζει να σημειωθεί ότι αν υπάρχει ένας προσανατολισμός όπως ο ανωτέρω, τότε και η αντίθετη απεικόνιση

$$-N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι επίσης προσανατολισμός της S .



Σχήμα 3.1

3.1.3 Παραδειγμα. Στη μοναδιαία σφαίρα S^2 θεωρούμε την παραμέτρηση $(D(0,1), r_z^+, S_z^+)$.

Για κάθε $q = (u, v) \in D(0,1)$ και $p = r_z^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$, είναι

$$(r_z^+)_u(q) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right),$$

$$(r_z^+)_v(q) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right),$$

Οπότε

$$N(p) = p, \quad p \in S_z^+.$$

Ο προηγούμενος τοπικός προσανατολισμός επεκτείνεται σε μια ολική διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) = p,$$

άρα η S^2 είναι προσανατολίσιμη. Συχνά, για τεχνικούς λόγους, επιλέγουμε τον προσανατολισμό $-N$ της σφαίρας.

3.2 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή

Είδαμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S$ της S στο $p \in S$ είναι ένας γραμμικός χώρος, υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , διάστασης 2. Επομένως, ο περιορισμός του συνήθους εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του \mathbb{R}^3 επί του $T_p S$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του $T_p S$, που θα συμβολίζουμε με $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Επομένως,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p := \langle w_1, w_2 \rangle, \quad \forall w_1, w_2 \in T_p S.$$

Από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

κατασκευάζεται η τετραγωνική μορφή

$$I_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R}: w \mapsto I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2.$$

3.2.1 Ορισμός. Η τετραγωνική μορφή I_p λέγεται **πρώτη θεμελιώδης (τετραγωνική) μορφή** της S στο p (first fundamental form).

Ας θεωρήσουμε τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$ και $q = r^{-1}(p)$. Ήδη γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα

$$r_u(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q, \quad r_v(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q$$

αποτελούν βάση του $T_p S$. Αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε εφαπτόμενα διανύσματα

$$w_i = \lambda_i r_u(q) + \mu_i r_v(q); \quad i = 1, 2,$$

τότε θα είναι

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \langle \lambda_1 r_u(q) + \mu_1 r_v(q), \lambda_2 r_u(q) + \mu_2 r_v(q) \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle r_u(q), r_u(q) \rangle + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \langle r_u(q), r_v(q) \rangle \\ &\quad + \mu_1 \mu_2 \langle r_v(q), r_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Ιδιαίτέρως, αν $w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \\ &= \lambda^2 \langle r_u(q), r_u(q) \rangle + 2\lambda\mu \langle r_u(q), r_v(q) \rangle + \mu^2 \langle r_v(q), r_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$\begin{aligned} E(q) &:= \langle r_u(q), r_u(q) \rangle = \ r_u(q)\ ^2, \\ F(q) &:= \langle r_u(q), r_v(q) \rangle, \\ G(q) &:= \langle r_v(q), r_v(q) \rangle = \ r_v(q)\ ^2, \end{aligned}$
--

παίρνουμε τις εκφράσεις

$$(3.2.1) \quad I_p(w) = \lambda^2 E(q) + 2\lambda\mu F(q) + \mu^2 G(q),$$

$$(3.2.2) \quad \langle w_1, w_2 \rangle_p = \lambda_1 \lambda_2 E(q) + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) F(q) + \mu_1 \mu_2 G(q).$$

Επομένως, η πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ καθορίζονται πλήρως από τις ποσότητες $E(q), F(q)$ και $G(q)$.

3.2.2 Ορισμός. Καλούμε **θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης της S στο p** (first fundamental coefficients) τις ποσότητες $E(q), F(q)$ και $G(q)$.

Παρατηρούμε ότι η 1η θεμελιώδης μορφή είναι ανεξάρτητη της θεωρούμενης παραμέτρησης, ενώ τα θεμελιώδη μεγέθη εξαρτώνται από την (U, r, W) . Επιπλέον, αν αφήσουμε το $q = (u, v) \in U$ να μεταβάλλεται μέσα στο U , τα θεμελιώδη μεγέθη $E(u, v), F(u, v)$ και $G(u, v)$ ορίζουν διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$E, F, G: U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Θα δούμε τώρα μια άλλη έκφραση του I_p , η οποία είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις. Γνωρίζουμε ότι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$w = [Dr(q)](h) = \alpha'(0),$$

για κάποιο $h \in \mathbb{R}^2$ και με $\alpha = r \circ \beta$, όπου $\beta(t) = th + q, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, για ε κατάλληλα μικρό έτσι ώστε $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. Επομένως,

$$w = [Dr(q)](h) = [Dr(q)](\beta'(0)).$$

Επειδή η β παίρνει τιμές στο U , μπορούμε να γράψουμε ότι $\beta(t) = (u(t), v(t))$, άρα $\beta'(t) = (u'(t), v'(t))$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} w &= [Dr(q)](h) = [Dr(q)](\beta'(0)) \\ &= [Dr(q)](u'(0), v'(0)) = [Dr(q)](u'(0)e_1 + v'(0)e_2) \\ &= u'(0)[Dr(q)](e_1) + v'(0)[Dr(q)](e_2) \\ &= u'(0) \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q + v'(0) \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q \\ &= u'(0)r_u(q) + v'(0)r_v(q) \\ &= \left. \frac{du}{dt} \right|_0 r_u(q) + \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 r_v(q), \end{aligned}$$

οπότε ο τύπος (3.2.1) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} I_p(w) &\equiv I_p \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0, \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right) = \\ &= \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0 \right)^2 E(q) + 2 \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0 \right) \left(\left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right) F(q) + \left(\left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right)^2 G(q). \end{aligned}$$

(3.2.3)

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε την συμβολική έκφραση

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

που σχετίζεται με το στοιχειώδες μήκος (βλ. πιο κάτω την έννοια του μήκους). Θα αποφύγουμε όμως την χρήση της γιατί μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις ή λάθη.

3.2.3 Πρόταση. Ισχύουν οι σχέσεις :

- (i) $\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG - F^2},$
- (ii) $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0.$

Απόδειξη. Η (i) είναι αποτέλεσμα της γνωστής σχέσης

$$\|r_u \times r_v\|^2 = \|r_u\|^2 \cdot \|r_v\|^2 - \langle r_u, r_v \rangle^2$$

και του ορισμού των μεγεθών E, F, G .

Επειδή r_u, r_v και $r_u \times r_v$ είναι διάφορα του 0 , προκύπτουν οι γνήσιες ανισότητες της (ii).

Μέσω των θεμελιωδών μεγεθών μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη, γωνίες και εμβαδά πάνω σε επιφάνειες.

Έστω ότι $\alpha: [a, b] \rightarrow W$ είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη. Θα εκφράσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματά της ως στοιχεία αντιστοίχων εφαπτομένων χώρων της επιφάνειας. Έτσι, επειδή $\alpha = r \circ \beta = r \circ (u, v)$, όπου

$$\beta \equiv (u, v) := r^{-1} \circ \alpha: [a, b] \rightarrow U$$

είναι διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη, έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= [D\alpha(t)](1) = [D(r \circ \beta)(t)](1) \\ &= [Dr(\beta(t)) \circ D\beta(t)](1) \\ &= [Dr(\beta(t))](\beta'(t)) \\ &= [Dr(\beta(t))](u'(t), v'(t)) \\ &= u'(t)r_u(\beta(t)) + v'(t)r_v(\beta(t)), \end{aligned}$$

δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\alpha'(t) = u'(t)r_u(\beta(t)) + v'(t)r_v(\beta(t))$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$(3.2.4) \quad \alpha'(t) \in T_{r(\beta(t))}S = T_{\alpha(t)}S,$$

άρα [βάσει της (3.2.3)]

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \\ &= u'(t)^2 E(\beta(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\beta(t)) + v'(t)^2 G(\beta(t)). \end{aligned}$$

Βάσει των ανωτέρω, το μήκος (τόξου) μιας διαφορίσιμης (κανονικής) καμπύλης $\alpha: [a, b] \rightarrow W$ δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \\
 &= \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 E(\beta(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\beta(t)) + v'(t)^2 G(\beta(t))} dt.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.6}$$

Για δύο διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$, η γωνία θ που σχηματίζουν υπολογίζεται, ως συνήθως, από την σχέση

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1) \cdot I_p(w_2)}}.
 \tag{3.2.7}$$

Αν έχουμε δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha: I \rightarrow S$ και $\gamma: J \rightarrow S$ που τέμνονται στο $p \in S$, δηλαδή υπάρχουν $t_0 \in I$ και $s_0 \in J$ τέτοια ώστε $\alpha(t_0) = \gamma(s_0) = p$, τότε ορίζεται η **γωνία** θ των καμπυλών αυτών, στο εν λόγω σημείο, μέσω της γωνίας των ταχυτήτων τους, δηλαδή μέσω της σχέσης

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(s_0) \rangle_p}{\|\alpha'(t_0)\| \|\gamma'(s_0)\|} = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(s_0) \rangle_p}{\sqrt{I_p(\alpha'(t_0)) \cdot I_p(\gamma'(s_0))}}.
 \tag{3.2.8}$$

Ιδιαίτερως, αν οι α και γ είναι οι καμπύλες συντεταγμένων της δοσμένης παραμέτρησης r , τότε

$$\cos \theta = \frac{\langle r_u(q), r_v(q) \rangle}{\|r_u(q)\| \|r_v(q)\|} = \frac{F(q)}{\sqrt{E(q)G(q)}}.
 \tag{3.2.9}$$

Παρατηρούμε ότι

$$r_u \perp r_v \Leftrightarrow \langle r_u, r_v \rangle = 0 \Leftrightarrow F = 0.$$

Μιά παραμέτρηση με $F = 0$ καλείται **ορθογώνια** (orthogonal parametrization).

Έστω τώρα $K \subseteq W$ ένας φραγμένος τόπος υποσύνολο της S . Το **εμβαδόν** του K (area) δίνεται από τον τύπο

$$A(K) = \iint_{r^{-1}(K)} \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| du dv.$$

Λόγω της σχέσης (3.2.9) της Πρότασης 3.2.3, τελικά το εμβαδόν του K δίνεται από τον τύπο

$$(3.2.10) \quad A(K) = \iint_{r^{-1}(K)} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} du dv.$$

3.2.4 Παρατηρήσεις. 1) Αν η εικόνα W μιας παραμέτρησης (U, r, W) καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια S πλην ενός συνόλου μηδενικού εμβαδού (π.χ. πλην μιας γραμμής ή μεμονωμένων σημείων), τότε το εμβαδόν του W συμπίπτει με το εμβαδόν όλης της S .

2) Αν το σύνολο K δεν περιέχεται ολόκληρο σε ένα σύστημα συντεταγμένων, το διαμερίζουμε σε υποσύνολα που έχουν αυτή την ιδιότητα, και υπολογίζουμε τα επιμέρους εμβαδά.

3.2.5 Παραδείγματα. (1) Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια του **κατακόρυφου (ή ορθού) κυλίνδρου** (cylinder) ακτίνας 1

$$K = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Μια παραμέτρηση του K δίνεται από την τριάδα (U, r, W) με

$$U = \{(u, v) \mid u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$r: U \rightarrow K : (u, v) \mapsto r(u, v) := (\cos u, \sin u, v),$$

που τον καλύπτει ολόκληρο, εκτός από μία γενέτειρα. Αμέσως βλέπουμε ότι

$$r_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{και} \quad r_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Επομένως, για κάθε $q = (u, v) \in U$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle r_u(q), r_u(q) \rangle_p \\ &= \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u + 0 = 1, \\ F(q) &= \langle r_u(q), r_v(q) \rangle_p \\ &= \langle (-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ G(q) &= \langle r_v(q), r_v(q) \rangle_p = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές προκύπτουν για κάθε $q \in U$, άρα

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

(σταθερώς), άρα η παραπάνω παραμέτρηση του κυλίνδρου είναι ορθογώνια.

2) Ας πάρουμε το επίπεδο Π του Παραδείγματος 2, §2.2. Παραγωγίζοντας μερικώς την παραμέτρηση του, έχουμε ότι

$$r_u(q) = \left(1, 0, -\frac{A}{C}\right), \quad r_v(q) = \left(0, 1, -\frac{B}{C}\right).$$

Οπότε

$$E(q) = 1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2, \quad F(q) = \frac{AB}{C^2}, \quad G(q) = 1 + \left(\frac{B}{C}\right)^2,$$

και τελικά

$$E = 1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2, \quad F = \frac{AB}{C^2}, \quad G = 1 + \left(\frac{B}{C}\right)^2.$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση του επιπέδου $z = 0$, είναι $A = B = D = 0$ και $C = 1$, άρα

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

δηλαδή το επίπεδο αυτό έχει τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη με τον κύλινδρο. Αυτό μας οδηγεί στην επόμενη βασική παρατήρηση:

Τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης δεν προσδιορίζουν, από μόνα τους, την επιφάνεια.

3.3 Η απεικόνιση Gauss

Θεωρούμε μια προσανατολισμένη επιφάνεια S και τον προσανατολισμό της $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Επειδή κάθε $N(p)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η N είναι απεικόνιση της μορφής

$$(3.3.1) \quad N: S \longrightarrow S^2.$$

3.3.1 Ορισμός. Η απεικόνιση (3.3.1) καλείται **απεικόνιση Gauss** (Gauss map) της S .

3.3.2 Πρόταση. Η απεικόνιση Gauss είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε παραμέτρηση (U, r, W) της S , η τοπική παράσταση

$$N \circ r: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, για κάθε $q \in U$, είναι

$$(N \circ r)(q) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|},$$

η οποία είναι προφανώς διαφορίσιμη απεικόνιση.

Εφ' όσον η N είναι διαφορίσιμη, ορίζεται και το διαφορικό της

$$(3.3.2) \quad d_p N: T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2,$$

σε κάθε σημείο $p \in S$. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S$ είναι ο (μοναδικός) 2-διάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , που είναι κάθετος στο διάνυσμα $N(p)$. Από το άλλο μέρος, από κατασκευή, και ο εφαπτόμενος χώρος $T_{N(p)} S^2$ είναι 2-διάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , και είναι κάθετος στο διάνυσμα θέσης (ακτίνα) του σημείου $N(p) \in S^2$. Επομένως οι χώροι $T_p S$ και $T_{N(p)} S^2$ είναι δύο επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους (ως κάθετα προς το $N(p)$) και έχουν κοινό σημείο το 0, άρα συμπίπτουν, δηλαδή

$$(3.3.3) \quad T_{N(p)} S^2 = T_p S,$$

Οπότε η (3.3.2) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι απεικόνιση της μορφής

$$(3.3.4) \quad d_p N: T_p S \longrightarrow T_p S.$$

Το προηγούμενο διαφορικό ουσιαστικά εκφράζει τον τρόπο μεταβολής του N , επομένως, κατά κάποιον τρόπο, περιγράφει το "σχήμα" της επιφάνειας.

3.3.3 Ορισμός. Η αντίθετη της απεικόνισης (3.3.4), δηλαδή ο τελεστής

$$-d_p N: T_p S \longrightarrow T_p S$$

καλείται **τελεστής σχήματος της S στο p** (shape operator).

Έστω τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$. Για να υπολογίσουμε τις εικόνες των $w \in T_p S$ μέσω της $d_p N$, αρκεί να βρούμε τις εικόνες των βασικών διανυσμάτων, όπου $q := r^{-1}(p)$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις καμπύλες $\alpha = r \circ \bar{\alpha}$ και $\beta = r \circ \bar{\beta}$, όπου

$$\bar{\alpha}(t) := (u_0 + t, v_0) \quad \text{και} \quad \bar{\beta}(t) := (u_0, v_0 + t),$$

αντιστοίχως, με $(u_0, v_0) := q$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$d_p N(r_v(q)) = \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q.$$

Συμβολικά θέτουμε

$$(3.3.5) \quad \boxed{N_u(q) := \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u} \right|_q, \quad N_v(q) := \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q,}$$

οπότε, τελικά,

$$(3.3.6) \quad \boxed{d_p N(r_u(q)) = N_u(q), \quad d_p N(r_v(q)) = N_v(q).}$$

3.3.4 Θεώρημα. Ο τελεστής σχήματος είναι **αυτοσυζυγής** (ή **συμμετρικός**) (selfadjoint), δηλαδή, για οποιαδήποτε διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$, ισχύει η σχέση

$$\langle -d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, -d_p N(w_2) \rangle.$$

Απόδειξη. Προφανώς, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p N(w_2) \rangle,$$

δηλαδή ότι ο αντίθετός του $-d_p N$ είναι αυτοσυζυγής. Επίσης, αρκεί να αποδειχθεί η ανωτέρω σχέση για τυχούσα βάση $\{w_1, w_2\}$ του $T_p S$. Επομένως, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\langle d_p N(r_u(q)), r_v(q) \rangle = \langle r_u(q), d_p N(r_v(q)) \rangle,$$

ή, σύμφωνα με την (3.3.6),

$$(3.3.7) \quad \langle N_u(q), r_v(q) \rangle = \langle r_u(q), N_v(q) \rangle .$$

Επειδή

$$(3.3.8) \quad N(r(q)) \perp r_u(q), r_v(q); \quad \forall q \in U,$$

για τις συναρτήσεις $N \circ r, r_u$ και r_v ισχύει ότι

$$\langle N \circ r, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_v \rangle = 0.$$

Παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς v , έχουμε :

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_q (\langle N \circ r, r_u \rangle) = \\ &= \left\langle \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q, r_u(q) \right\rangle + \left\langle (N \circ r)(q), \left. \frac{\partial r_u}{\partial v} \right|_q \right\rangle . \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$(3.3.9) \quad \boxed{r_{vu}(q) := \left. \frac{\partial r_u}{\partial v} \right|_q = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_q \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right) = \left. \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} \right|_q ,}$$

και χρησιμοποιώντας τις (3.3.5), η σχέση πριν την (3.3.9) δίνει την

$$(3.3.10) \quad \langle N_v(q), r_u(q) \rangle + \langle (N \circ r)(q), r_{vu}(q) \rangle = 0.$$

Ανάλογα, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_v \rangle = 0$ ως προς u , βρίσκουμε ότι

$$(3.3.11) \quad \langle N_u(q), r_v(q) \rangle + \langle (N \circ r)(q), r_{uv}(q) \rangle = 0.$$

Επειδή

$$r_{uv}(q) = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \Big|_q = \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} \Big|_q = r_{vu}(q), \quad \forall q \in U,$$

(3.3.11)

οι (3.3.10) και (3.3.11) οδηγούν στην

$$\langle N_u(q), r_v(q) \rangle = \langle N_v(q), r_u(q) \rangle = \langle r_u(q), N_v(q) \rangle,$$

που είναι η ζητούμενη.

Σύμφωνα με την γενική θεωρία των αυτοσυζυγών τελεστών, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ του $T_p S$, τέτοια ώστε

$$-d_p N(w_1) = k_1 w_1, \quad -d_p N(w_2) = k_2 w_2,$$

(3.3.13)

με $k_1 \geq k_2$. Προφανώς τα w_1, w_2 είναι ιδιοδιανύσματα του $-d_p N$ και k_1, k_2 οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Επομένως, ο πίνακας του $-d_p N$, ως προς την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

(3.3.14)

3.3.5 Ορισμός. Οι ιδιοτιμές k_1, k_2 καλούνται **κύριες καμπυλότητες της S στο p** (principal curvatures), ενώ οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα w_1, w_2 καλούνται **κύριες κατευθύνσεις της S στο p** (principal directions). Ιδιαίτερος, καλείται **καμπυλότητα Gauss της S στο p** (Gaussian curvature) η ποσότητα

$$K(p) := k_1 k_2 = \det(-d_p N) = \det(d_p N)$$

και **μέση καμπυλότητα της S στο p** (mean curvature) η ποσότητα

$$H(p) := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(-d_p N).$$

3.3.6 Παρατήρηση. Αν αντί του προσανατολισμού N πάρουμε τον $-N$, τότε ο τελεστής σχήματος είναι ο $d_p N$ με ιδιοτιμές $-k_1$ και $-k_2$. Συνεπώς η καμπυλότητα του Gauss θα μείνει ίδια, αλλά η μέση καμπυλότητα θα αλλάξει σημείο.

3.3.7 Ορισμός. Ένα σημείο $p \in S$ λέγεται

–ελλειπτικό, αν $K(p) > 0$

–υπερβολικό, αν $K(p) < 0$

$$d_p N \neq 0$$

–παραβολικό, αν $K(p) = 0$ με

–επιπεδικό, αν $K(p) = 0$.

Η μελέτη των σημείων των προηγούμενων μορφών έχει ιδιαίτερη σημασία για την μελέτη της επιφάνειας, ξεφεύγει όμως από τους σκοπούς του παρόντος.

3.4 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

3.4.1 Ορισμός. Έστω S μία προσανατολίσιμη κανονική επιφάνεια και N ένας προσανατολισμός της. Ονομάζουμε **δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S στο p** (second fundamental form) την τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον αυτοσυζυγή τελεστή $-d_p N: T_p S \rightarrow T_p S$, δηλαδή την τετραγωνική μορφή

$$(3.4.1) \quad \Pi_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R}: w \mapsto \Pi_p(w) := \langle -d_p N(w), w \rangle = -\langle d_p N(w), w \rangle.$$

Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ και τις ιδιοτιμές k_1, k_2 του αυτοσυζυγούς τελεστή $-d_p N$. Τότε, αν πάρουμε τυχόν διάνυσμα $w \in T_p S$ με $\|w\| = 1$, μπορούμε να το εκφράσουμε με την μορφή

$$w = w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta.$$

Επομένως, υπολογίζοντας την Π_p στο w , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Pi_p(w) &= - \langle d_p N(w), w \rangle \\
&= \langle -d_p N(w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta), w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta \rangle \\
&= \langle k_1 \cdot \cos \theta \cdot w_1 + k_2 \cdot \sin \theta \cdot w_2, w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta \rangle \\
&= k_1 \cdot \cos^2 \theta \cdot \langle w_1, w_1 \rangle + k_2 \cdot \sin \theta \cos \theta \langle w_2, w_1 \rangle \\
&\quad + k_1 \cdot \cos \theta \sin \theta \langle w_1, w_2 \rangle + k_2 \sin^2 \theta \langle w_2, w_2 \rangle \\
&= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην

$$(3.4.2) \quad \Pi_p(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Η σχέση (3.4.2) είναι γνωστή ως **τύπος του Euler** (Euler's formula) και προσδιορίζει την τιμή της Π_p επί του μοναδιαίου κύκλου. Από την μορφή αυτή είναι φανερόν ότι οι k_1 και k_2 είναι οι ακρότατες τιμές της Π_p στα μοναδιαία διανύσματα.

Μιά άλλη έκφραση του Π_p προκύπτει με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω τυχόν $w \in T_p S$. Επειδή $w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Pi_p(w) &= - \langle d_p N(w), w \rangle \\
&= - \langle \lambda d_p N(r_u(q)) + \mu d_p N(r_v(q)), \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \rangle \\
&= - \langle \lambda N_u(q) + \mu N_v(q), \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \rangle \\
&= -\lambda^2 \langle N_u(q), r_u(q) \rangle - \lambda \mu \langle N_u(q), r_v(q) \rangle - \\
&\quad - \lambda \mu \langle N_v(q), r_u(q) \rangle - \mu^2 \langle N_v(q), r_v(q) \rangle.
\end{aligned}$$

Λόγω της (3.3.8), η προηγούμενη μετασχηματίζεται στην

$$(3.4.3) \quad \Pi_p(w) = -\lambda^2 \langle N_u(q), r_u(q) \rangle - 2\lambda\mu \langle N_u(q), r_v(q) \rangle - \mu^2 \langle N_v(q), r_v(q) \rangle.$$

Θέτοντας τώρα

$$\begin{aligned}
e(q) &:= - \langle N_u(q), r_u(q) \rangle = - \langle d_p N(r_u(q)), r_u(q) \rangle, \\
f(q) &:= - \langle N_u(q), r_v(q) \rangle = - \langle d_p N(r_u(q)), r_v(q) \rangle \\
&:= - \langle N_v(q), r_u(q) \rangle = - \langle d_p N(r_v(q)), r_u(q) \rangle, \\
g(q) &:= - \langle N_v(q), r_v(q) \rangle = - \langle d_p N(r_v(q)), r_v(q) \rangle,
\end{aligned}$$

(3.4.4)

η (3.4.3) παίρνει την τελική μορφή

$$(3.4.5) \quad \Pi_p(w) = \lambda^2 e(q) + 2\lambda\mu f(q) + \mu^2 g(q).$$

Οι διαφορίσιμες απεικονίσεις $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ καλούνται **θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης της S** (second fundamental coefficients) και εξαρτώνται από την παραμέτρηση (U, r, W) .

Για την πληρότητα θα αναφέρουμε και κάποιες άλλες εκφράσεις των e, f και g , που είναι πολλές φορές πιο εύχρηστες από αυτές των (3.4.4). Για τον σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς u , οπότε παίρνουμε την

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u}, r_u \right\rangle + \left\langle N \circ r, \frac{\partial r_u}{\partial u} \right\rangle = 0.$$

Θέτοντας

$$r_{uu} := \frac{\partial r_u}{\partial u},$$

έχουμε ότι

$$(3.4.6) \quad e = - \langle N_u, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_{uu} \rangle.$$

Παρόμοια, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς v , παίρνουμε

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v}, r_u \right\rangle + \left\langle N \circ r, \frac{\partial r_u}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.3.12) βρίσκουμε την

$$(3.4.7) \quad f = - \langle N_v, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_{uv} \rangle = \langle N \circ r, r_{vu} \rangle .$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_v \rangle = 0$ ως προς v , παίρνουμε

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v}, r_v \right\rangle + \left\langle N \circ r, \frac{\partial r_v}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Θέτοντας

$$r_{vv} := \frac{\partial r_v}{\partial v}$$

βρίσκουμε ότι

$$(3.4.8) \quad g := - \langle N_v, r_v \rangle = \langle N \circ r, r_{vv} \rangle .$$

Επειδή το $N(\mathbf{p})$ είναι το (κανονικοποιημένο) εξωτερικό γινόμενο των $r_u(\mathbf{q})$ και $r_v(\mathbf{q})$, τα εσωτερικά γινόμενα τα οποία εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους (3.4.6)–(3.4.8) είναι μικτά γινόμενα, άρα καταλήγουμε στην επόμενη μορφή των θεμελιωδών μεγεθών 2ης τάξης (όπου παραλείπουμε την μεταβλητή \mathbf{q}):

$$(3.4.9) \quad \begin{aligned} e = \langle N \circ r, r_{uu} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{uu}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f = \langle N \circ r, r_{uv} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{uv}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g = \langle N \circ r, r_{vv} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{vv}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Η διαφορά των τύπων (3.4.4) από τους (3.4.9) είναι προφανής : οι πρώτοι εμφανίζουν τις μερικές παραγώγους (1ης τάξης) του N και της r , ενώ οι τελευταίοι εμφανίζουν τις μερικές παραγώγους (1ης και 2ης τάξης) μόνο της r . Η προτίμηση για την χρήση της μιας ή της άλλης ομάδας εξαρτάται από το πόσο πολύπλοκη είναι η μορφή του N και των r_u, r_v (οπότε και ο υπολογισμός των αντιστοίχων παραγώγων τους είναι επίσης πολύπλοκος). Επομένως, θα επιλέξουμε τους τύπους εκείνους που προκύπτουν με την ευκολότερη δυνατή παραγωγή.

Οι θεμελιώδεις μορφές ουσιαστικά προσδιορίζουν τοπικά την επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα (χωρίς να προχωρήσουμε σε λεπτομέρειες), ισχύει το **Θεμελιώδες Θεώρημα των Επιφανειών**, σύμφωνα με το οποίο αν δίνονται τρεις συναρτήσεις E, F, G τάξης τουλάχιστον C^2 και τρεις συναρτήσεις e, f, g τάξης τουλάχιστον C^1 , με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε

$$i) \quad EG - F^2 > 0, \quad E > 0, \quad G > 0,$$

ii) τα $E, F, G; e, f, g$ ικανοποιούν κατάλληλες σχέσεις συμβιβαστότητας (τις λεγόμενες εξισώσεις Gauss και MainardiCodazzi),

τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων (U, r, W) , με r τάξης τουλάχιστον C^3 , τέτοιο ώστε τα $(E, F, G), (e, f, g)$ να είναι τα θεμελιώδη μεγέθη της 1ης και 2ης τάξης, αντιστοίχως, που ορίζονται από την r . Η εικόνα W είναι μονοσήμαντα ορισμένη, εκτός από την θέση της στον χώρο.

Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.

3.5 Η καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών

Σκοπός μας στα επόμενα είναι να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών. Είδαμε προηγουμένως ότι αν θεωρήσουμε τον πίνακα του αυτοσυζυγούς τελεστή $-d_p N: T_p S \rightarrow T_p S$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ των ιδιοδιανυσμάτων του, τότε έχει την διαγώνια μορφή (3.3.14), ενώ η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα παίρνουν αντιστίχως τη μορφή

$$K(p) = k_1 k_2 = \det(-d_p N), \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(-d_p N).$$

Αν αλλάξουμε την βάση του $T_p S$, αλλάζει η μορφή του πίνακα (3.3.14) αλλά δεν επηρεάζεται η ορίζουσα $\det(-d_p N) = \det(d_p N)$, ούτε το ίχνος $\text{tr}(-d_p N) = -\text{tr}(d_p N)$. Θεωρούμε λοιπόν τον πίνακα $A(p)$ του $d_p N$ ως προς την βάση $\{r_u(q), r_v(q)\}$, που εισάγεται από μια παραμέτρηση (U, r, W) . Έστω

$$(3.5.1) \quad A(p) = \begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) \end{pmatrix}.$$

Οι συντεταγμένες του πίνακα ορίζονται από τις ισότητες [βλ. σχέσεις (3.3.6)]

$$\begin{aligned} N_u(q) &= d_p N(r_u(q)) = a_{11}(q)r_u(q) + a_{21}(q)r_v(q), \\ N_v(q) &= d_p N(r_v(q)) = a_{12}(q)r_u(q) + a_{22}(q)r_v(q). \end{aligned}$$

Αφήνοντας το \mathbf{q} να μεταβάλλεται μέσα στο \mathbf{U} , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, r_u \rangle = \langle a_{11}r_u + a_{21}r_v, r_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_u, r_v \rangle = \langle a_{11}r_u + a_{21}r_v, r_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, r_u \rangle = \langle a_{12}r_u + a_{22}r_v, r_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -g &= \langle N_v, r_v \rangle = \langle a_{12}r_u + a_{22}r_v, r_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες ισότητες αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερεις αγνώστους, που έχει ακριβώς μία λύση [βλ. και Πρόταση 3.2.3(ii)]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Ένας απλός υπολογισμός αποδεικνύει ότι

$$A = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

Από την μορφή (3.5.2) του A προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} K &= \det(-A) = \det A \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right) \det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε την επόμενη εκφραση της καμπυλότητας Gauss

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (3.5.3)$$

Παρόμοια,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(A) \\
 &= -\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},
 \end{aligned}$$

δηλαδή η μέση καμπυλότητα παίρνει τη μορφή

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}} \quad (3.5.4)$$

Αφού είναι γνωστή η μορφή των a_{ij} , μπορεί κανείς να επανέλθει στις εξισώσεις του ορισμού τους, και να πάρει τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 N_u &= a_{11}r_u + a_{21}r_v = \frac{fF - eG}{EG - F^2}r_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}r_v, \\
 N_v &= a_{12}r_u + a_{22}r_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2}r_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}r_v.
 \end{aligned}$$

(3.5.5), (3.5.6)

Οι τελευταίες είναι γνωστές ως **εξισώσεις Weingarten**.

Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, αν είναι γνωστές οι \mathbf{K} και \mathbf{H} , οι κύριες καμπυλότητες μπορούν να υπολογιστούν ως ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, βλέπουμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα Gauss $\mathbf{K}(\varphi)$ και την μέση καμπυλότητα $\mathbf{H}(\varphi)$, χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.5.3) και (3.5.4), που εκφράζουν τα \mathbf{K} και \mathbf{H} μέσω των θεμελιωδών μεγεθών.

4 Βιβλιογραφία

1. M. P. Do CARMO: Differential geometry of Curves and Surfaces, PrenticeHall, Englewood Cliffs, New Jersey , 1976.
2. P. DOMBROWSKI: 150 Years after Gauss' "disquisitiones generales circa superficies curvas", Astérisque 62, Soc. Math. de France, Paris, 1979.
3. C. C. HSIUNG: A First Course in Differential Geometry, John Wiley, New York, 1981.
4. W. KLINGENBERG: A Course in Differential Geometry, Springer, New York, 1978.
5. Δ. ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗ: Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, Leader Books, Αθήνα, 2006.
6. W. KUHNEL: Differential Geometry, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 2006.
7. M. LIPSCHUTZ: Differential Geometry, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New York, 1974. Ελληνική μετάφραση: Διαφορική Γεωμετρία, ΕΣΠΙ, Ε. Περισίδης, Αθήνα, 1981.
8. J. McCLEARY: Geometry from a Differential Point of View, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994 .
9. Μ. ΜΠΡΙΚΑ : Μαθήματα Θεωρίας Επιφανειών, Αθήνα, 1958.
10. Β. Ο' NEIL: Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1997. Ελληνική μετάφραση: Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.
11. J. OPREA: Differential Geometry and its Applications, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

12. Β. ΠΑΠΑΝΤΩΝΙΟΥ : Διαφορική Γεωμετρία Ι: Θεωρία Καμπυλών, Πάτρα, 1996.

13. A.PRESSLEY: Elementary Differential Geometry, Springer, London, 2001.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ