Πανεπιστήμιο Πειραιώς - Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Θεωρία Παιγνίων και Ειδικές εφαρμογές στην καθημερινότητα (Game theory Applications in Everyday)**
Ονοματεπώνυμο φοιτητή	**Ιωάννου Κωνσταντίνος**
Πατρώνυμο	**Αντώνης**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 11007**
Επιβλέπων	**Ευάγγελος Φούντας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Ωκτώβριος 2013**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα

Περίληψη

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της Θεωρίας Παιγνίων. Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στα παίγνια n ατόμων και αρχικά μελετάμε τα ισορροπημένα παίγνια τα οποία έχουν μη κενό πυρήνα (κεφάλαιο 2). Στη συνέχεια, η προσοχή μας στρέφεται στα παίγνια n ατόμων με τέλεια πληροφόρηση για τα οποία στο κεφάλαιο 3 θα δώσουμε ορισμούς και θεωρίες που γίνονται εύκολα κατανοητές μέσω αναλυτικών παραδειγμάτων. Ακολουθεί στο κεφάλαιο 4 μία λύση συνεργασίας για ένα παίγνιο γενικής τάξεως στο οποίο χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Aumann περιγράφουμε, στο πλαίσιο της κανονικής μορφής ενός παιγνίου n ατόμων, ένα απλό και γενικο σύνολο συνθηκών που είναι επαρκείς για να εγγυηθούν ένα γεμάτο πυρήνα.

Στο κεφάλαιο 5 αναφερόμαστε στους RAND NASH πειραματισμούς στη θεωρία παιγνίων n ατόμων. Εδώ πιο πολύ ασχολούμαστε με τα παίγνια συνεργασίας, τα περισσότερα εκ των οποίων είναι σαν των Neuman και Morgenastern και προσπαθούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του παιγίου με διάφορα θεωρητικά σενάρια που έχουν διατυπωθεί για τέτοια παίγνια. Στο τέλος, κεφάλαιο 6, παρουσιάζουμε μια διαμάχη n ατόμων σε φυλετικά παίγνια. Οι ιδιότητες του παιγνίου και οι συναρτήσεις των κερδών μοντελοποιούνται με την προυπόθεση ότι τα κέρδη των παικτών εξαρτώνται από το κατά πόσο τους αρέσουν οι επιλογές τους. Σκοπός μας θα είναι να εξετασουμε την ύπαρξη της ισορροπίας του

Abstract

Nash. The purpose of this work is the study of game theory . We focus on games n atoms initially we study balanced games which have nonempty core chapter 2. Then , our attention turns to the games n people with perfect information for that in Chapter 3 we give definitions and theories that can be easily understood through detailed examples. Here in Chapter 4 one collaboration solution for a general class game in which using the approach of Aumann described in the context of a normal form game n people , a si mple and general set of conditions that are sufficient to guarantee a full core. In Chapter 5 we refer to RAND NASH experimentation game theory n individuals. Here we deal with most gaming cooperation , most of which is like the Neuman and Morgenastern and try to compare the results of paigiou with different theoretical scenarios have been formulated for such games . Finally, chapter 6 , we present a controversy n people in tribal gaming . The properties of the game and profit functions are modeled with the condition that the players' winnings depend on how they like their choices . Our aim will be to examine the existence of equilibrium Nash.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περιεχόμενα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περίληψη Θεωρίας Παιγνίων

Η Θεωρία των παιγνίων εξετάζει τι συμβαίνει όταν άνθρωποι - γονίδια ή έθνη – αλληλεπιδρούν.Εδώ είναι μερικά παραδείγματα:Οι παίκτες του τένις αποφασίζουν αν θα κάνουν σερβίς στην αριστερή ή τη δεξιά πλευρά του γηπέδου, το μόνο αρτοποιείο στην πόλη που προσφέρει έκπτωση στην τιμή των γλυκών λίγο πριν κλείσει,οι εργαζόμενοι που αποφασίζουν πόσο σκληρά να εργαστούν όταν το αφεντικό είναι μακριά,ένας Αραβας πωλητής χαλιών που σκέφτεται πόσο γρήγορα να ρίξει την τιμή του όταν παζάρεύει με έναν τουρίστα, ανταγωνίστριες επιχειρήσεις φαρμάκων που επενδύουν σε ένα αγώνα δρόμου για να πατεντάρουν ένα νεο φάρμακο,μια εταιρεία ηλεκτρονικών δημοπρασιών που μαθαίνει ποιά στοιχεία να προσθέσει και ποιά να αφαιρέσει στην ιστοσελίδα της με δοκιμές και σφάλματα,κτηματομεσίτες που μαντεύουν πότε μια καταπιεσμένη αστική γειτονιά θα αναπηδήσει πίσω στη ζωή,οι οδηγοί στο Σαν Φρανσίσκο που αποφασίζουν ποια διαδρομή προς τη δουλειά τους θα είναι πιο γρήγορη όταν η γέφυρα Bay Bridge είναι κλειστή,οι άνδρες απο την Lamelara στην Ινδονησία που αποφασίζουν αν θα πάρουν μέρος στο ημερίσιο κυνήγι της φάλαινας και το πώς να μοιράσουν την φάλαινα, αν πιάσουν μια,οι εργαζόμενοι μιας αεροπορικής εταιρείας που πασχίζουν να προλάβουν ένα αεροπλάνο ενώ βρίσκονται μακριά απο πύλη, φοιτητές MBA αποφασίζουν πως θα φαίνεται στους ενδεχόμενους εργοδότες το πτυχίο τους (και το αν θα εγκαταλείψουν μετά το πρώτο έτος του διετούς προγράμματος τους για να ενταχθούν σε μια dot-com εκκίνηση και αν αυτό θα σημαίνει κότσια ή βλακεία),ένας άνθρωπος που κορνιζάρει μια εικόνα απ΄όταν πρωτογνώρισε την γυναίκα του, ως δώρο για το πρώτο επίσημο ραντεβού τους ένα χρόνο αργότερα (τώρα είναι παντρεμένοι),οι άνθρωποι που κάνουν πλειστηριασμούς για την τέχνη ή για το πετρέλαιο,ή για διακοσμητικά στο eBay.Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν αντίστοιχα παίγνια τελεσίγραφο (Φούρνος), ανταλλαγή δώρων (εργαζόμενοι), μεικτή ισορροπία(Τένις), παζαρια διαπραγμάτευσης (χαλί-πωλητής),τα διπλώματα ευρεσιτεχνίας αγωνιστικά παίγνια (διπλώματα ευρεσιτεχνίας), η μάθηση (e-commerce), παίγνια κυνηγιού (φαλαινοθήρες), παίγνια αδύναμου κρίκου(αεροπορικές εταιρείες), λογικό-στατιστικά παίγνια (προγραμματιστές), σηματοδότησης(MBAs), δημοπρασίες(υποβολή προσφορών).

1.2 Εισαγωγή

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, ένα πρόσωπο (ή εταιρεία) πρέπει να προβλέψει αυτό που οι άλλοι θα κάνουν και τι οι άλλοι θα υποστούν από τις πράξεις αυτού του ατόμου.Ένα παίγνιο είναι μια μαθηματική ακτινογραφία των κρίσιμων χαρακτηριστικών αυτών των καταστάσεων.Ένα παίγνιο αποτελείται από τις "στρατηγικές" που ο κάθε "παίκτης" έχει, με ακριβείς κανόνες για τη σειρά με την οποία οι παίκτες θα τις επιλέξουν, τις πληροφορίες που έχουν όταν επιλέγουν, και το πώς αξιολογείται η επιθυμία (ή «χρησιμότητα») των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.Ένα προσάρτημα σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφει τα βασικά μαθηματικά της θεωρίας των παιγνίων και δίνει κάποιες αναφορές για περαιτέρω ανάγνωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Η Θεωρία των Παιγνίων έχει με σαφήνεια έναν πατέρα. Πολλά από τα κύρια χαρακτηριστικά της θεσπίστηκαν απο τους vonNeumann και Morgenstern το 1944 (μετά από προηγούμενη έρευνα στη δεκαετία του 1920 από τους vonNeumann, Borel, και Zermelo). Λίγα χρόνια αργότερα, ο John Nash πρότεινε μια «λύση» στο πρόβλημα του «πώς» οι ορθολογιστες παίκτες θα παίξουν, που σήμερα ονομάζεται ισορροπία Nash.Η ιδέα του Nash, βασίζεται στην έννοια της ισορροπίας σε ένα φυσικό σύστημα, οι παίκτες θα προσαρμόσουν δηλαδή τις στρατηγικές τους μέχρι κανένας παίκτης να μη μπορεί να επωφεληθεί από την αλλαγή. Όλοι οι παίκτες, στη συνέχεια, θα επιλέξουν τις στρατηγικές που θα είναι οι καλύτερες (μεγιστοποιώντας τη χρησιμότητα) απαντήσεις στις στρατηγικές όλων των άλλων παικτών ». Σημαντικό βήμα στη δεκαετία του 1960 ήταν η συνειδητοποίηση ότι η συμπεριφορά σε επαναλαμβανόμενες αλληλουχίες σε «one-shot» παίγνια μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από τη συμπεριφορά σε απλά «one-shot» παίγνια.Το 1994,οι Nash, John Harsanyi, και Reinhard Selten (ένας δημιουργικός πειραματιστής) μοιράστηκαν το βραβείο Νόμπελ στην Οικονομική Επιστήμη για τις πρωτοποριακές εισφορές τους.

Κατά τα τελευταία πενήντα χρόνια, η θεωρία των παιγνίων έχει σταδιακά γίνει μια τυποποιημένη πλεον γλώσσα στην οικονομία και χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο σε άλλες κοινωνικές επιστήμες (και στη βιολογία). Στα οικονομικά, η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιείται για την ανάλυση της συμπεριφοράς των επιχειρήσεων που ανησυχούν για το «τι» οι ανταγωνιστές τους θα κάνουν.Η θεωρία παιγνίων είναι επίσης χρήσιμη για την κατανόηση της συμπεριφοράς των εργαζόμενων σε εταιρείες (όπως η αντίδραση των Διευθυνόντων Συμβούλων ή των πωλητων στα οικονομικά κίνητρα), η εξάπλωση των κοινωνικών θεσμών όπως η γλώσσα και η μόδα, και στο ποιά γονίδια ή πολιτισμικές πρακτικές θα εξαπλωθούν.

Η θεωρία των παιγνίων καλύπτει το εννοιολογικό κενό μεταξύ ενός μονοπωλίου, το οποίο δεν χρειάζεται να ανησυχεί για το τι οι άλλες επιχειρήσεις και οι καταναλωτές θα κάνουν, επειδή έχει μονοπωλιακή δύναμη, και τον "τέλειο ανταγωνισμό», στον οποίο καμία επιχείρηση δεν είναι αρκετά μεγάλη για τους ανταγωνιστές ώστε αυτοί να ανησυχούν.Η Θεωρία των Παιγνίων χρησιμοποιείται για να μελετήσει την ενδιάμεση περίπτωση, του «Ολιγοπωλίου», στο οποίο υπάρχουν αρκετές επιχειρήσεις για καθεμια απο τις οποίες η εταιρεία θα πρέπει να προβλέψει τι θα κάνει.Η δύναμη της θεωρίας των παιγνίων είναι η γενικότητα της και η μαθηματική ακρίβεια.Οι ίδιες βασικές ιδέες που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση *όλων* των παιγνιών,το τένις,τα παζάρια για τα χαλιά, το ειδύλλιο, το κυνήγι φαλαινών-που περιγράφεται στην πρώτη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.Η θεωρία του παιγνιού είναι επίσης συμαντικά ακριβής. Ας υποθέσουμε ότι ένας άραβας πωλητής χαλιών μπορεί πάντα να αγοράσει φτηνά χαλιά, ένας ενδιαφερόμενος τουριστας υπολογίζει τις τιμές των χαλιών κάπου μεταξύ $ 10 και $ 1000, και ο πωλητής έχει μια καλή ιδέα για το πόσο ανυπόμονος είναι ο τουρίστας, αλλά δεν είναι σίγουρος για το πόσο ο τουρίστας θέλει ένα συγκεκριμένο χαλί. Στη συνέχεια, η θεωρία των παιγνίων μας λέει ακριβώς απο τι τιμή ο πωλητής θα πρέπει να ξεκινήσει, και ακριβώς πόσο γρήγορα θα πρέπει να μειώσει την τιμή ανάλογα με το πως συμπεριφέρεται ο τουρίστας.Σε πειραματικές αναπαραστάσεις αυτού του είδους παζαριού χαλί-πώληση, η θεωρία είναι μισή σωστή και μισή λάθος: είναι λάθος για τις αρχικές τιμές που οι πωλητές δηλώνουν, αλλά ο ρυθμός με τον οποίο οι πειραματικοι πωλητές μειωνουν τις τιμές τους με την πάροδο του χρόνου είναι εκπληκτικά κοντά στο ρυθμό που προβλέπει η θεωρία παιγνίων.Είναι σημαντικό να γίνει διάκριση ανάμεσα στα παίγνια και τη θεωρία των παιγνίων. Τα παίγνια είναι μια ταξινόμηση στρατηγικών καταστάσεων, με μια τραχιά αναλογία, οτι για τις κοινωνικές επιστήμες είναι περιοδικός πίνακας των στοιχείων στη χημεία.Η αναλυτική θεωρία παιγνίων είναι ένα μαθηματικό παράγωγο του τι οι παίκτες με διαφορετικές γνωστικές ικανότητες είναι πιθανό να κάνουν στο παίγνιο.

Η θεωρία των παιγνίων είναι συχνά εξαιρετικά μαθηματική (η οποία έχει περιορισμένη εξάπλωση έξω από την οικονομία) και συνήθως βασίζεται στην ενδοσκόπηση και τις εικασίες και όχι στην προσεκτική παρατήρηση του πώς οι άνθρωποι παίζουν παίγνια στην πραγματικότητα.Το βιβλίο αυτό έχει ως στόχο να διορθώσει την ανισορροπία μεταξύ της θεωρίας και της πραγματικότητας περιγράφοντας εκατοντάδες πειράματα στα οποία οι άνθρωποι αλληλεπιδρούν στρατηγικά.Τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία της συμπεριφορικής θεωρίας των παιγνίων. Η συμπεριφορική θεωρία παιγνίων έχει να κάνει σχετικά με το τι *πραγματικά* κάνουν οι παίκτες. Επεκτείνει την αναλυτική θεωρία προσθέτοντας το συναίσθημα,τα λάθη,την περιορισμένη διορατικότητα,τις αμφιβολίες σχετικά με το πόσο έξυπνοι είναι οι άλλοι, και την μάθηση με την αναλυτική θεωρία των παιγνίων (ο Colman, στον Τύπο, δίνει μια πιο φιλοσοφική προοπτικη).Η συμπεριφορική θεωρία παιγνίων είναι ένας κλάδος της συμπεριφορικής οικονομίας,μια προσέγγιση στην οικονομία που χρησιμοποιεί την ψυχολογική κανονικότητα για να προτείνει τρόπους για την αποδυνάμωση λογικών υποθέσεων και την επέκταση της θεωρίας.Επειδή η γλώσσα της θεωρίας παιγνίων είναι τόσο πλούσια και ξεκάθαρη, θα μπορούσε να ενοποιηθεί με πολλά κομμάτια της κοινωνικής επιστήμης.Για παράδειγμα, η εμπιστοσύνη έχει μελετηθεί από τους κοινωνικούς-ψυχολόγους,κοινωνιολόγους,φιλοσόφους,οικονομολόγους που ενδιαφέρονται για την οικονομική ανάπτυξη, και άλλοι.

Για να είμαστε ακριβείς, αυτό το βιβλίο είναι μόνο για "non-cooperative" (ανταγωνιστική) θεωρία παιγνίων-δηλαδή, όταν οι παίκτες δεν μπορούν να κάνουν δεσμευτικές συμφωνίες για το τι πρέπει να κάνουν, έτσι πρέπει να μαντέψουν τι θα κάνουν άλλοι.Η συνεταιριστική θεωρία παιγνίων είναι ένας συμπληρωματικός κλάδος της θεωρίας των παιγνίων που ασχολείται με το πώς οι παίκτες χωρίζουν τα λάφυρα, αφού έχουν γίνει δεσμευτικές συμφωνίες που έχουν αποσαφινιστεί επακριβώς σε ένα παίγνιο: Θα δάνειζες χρήματα σε κάποιον που δεν είναι υποχρεωμένος να σου τα δώσει πίσω, αλλά μπορεί να αισθανθεί ηθικά υποχρεωμένος να το κάνει;Αν το έκανες, συμαίνει οτι τον εμπιστεύεσαι. Αν αυτός σε ξεπληρώσει,τότε είναι αξιόπιστος.Ο ορισμός αυτός μας δίνει έναν τρόπο για τη μέτρηση της εμπιστοσύνης, και έχει χρησιμοποιηθεί σε πειράματα σε πολλά μέρη (συμπεριλαμβανομένης της Βουλγαρίας,τη Νότια Αφρική, την Κένυα).Η εξάπλωση της θεωρίας παιγνίων εκτός των οικονομικών έχει υποφέρει, πιστεύω, από την εσφαλμένη αντίληψη ότι πρέπει να γνωρίζει κάποιος δύσκολα μαθηματικά να εφαρμόσει, και από το γεγονός ότι οι περισσότερες προβλέψεις της αναλυτικής θεωρίας των παιγνίων δεν είναι καλά θεμελιωμένες στην παρατήρηση.Η ανάγκη για εμπειρική συχνότητα στην ενημέρωση της Θεωρίας των Παιγνίων έχει αναγνωριστεί πολλές φορές. Στις πρώτες σελίδες του βιβλίου τους οι, vonNeumann και Morgenstern (1944) γράφουν:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Το εμπειρικό υπόβαθρο της οικονομικής επιστήμης είναι σίγουρα ανεπαρκές.Οι γνώσεις μας για τα πραγματικά κρίσιμα περιστατικά της οικονομίας είναι ασύγκριτα λιγότερες από οτι στη φυσική όταν επιτεύχθηκε η μαθηματικοποίηση της . . . . Θα ήταν παράλογο στη φυσική να περιμένουμε τον Κέπλερ και τον Νεύτωνα χωρίς Tycho-Brahe, και δεν υπάρχει λόγος να ελπίζουμε για μια ευκολότερη ανάπτυξη στην οικονομία.Το βιβλίο αυτό επικεντρώνεται σε πειράματα ως εμπειρικό φόντο.Η Θεωρία των Παιγνίων έχει επίσης δοκιμαστεί με τη χρήση των δεδομένων που εμφανίζονται φυσικά σε συγκεκριμένα πεδία(ιδιαίτερα σε καθαρά δομημένες καταστάσεις όπως οι πλειστηριασμοί). Αλλά ο πειραματικός έλεγχος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος επειδή οι προβλέψεις της θεωρίας των παιγνίων συχνά εξαρτώνται από τις επιλογές των παικτών, απο το πώς εκτιμούν τα αποτελέσματα.Όπως Crawford (. 1997, σ. 207), εξηγεί:

Η συμπεριφορά στα παίγνια είναι εμφανώς ευαίσθητη στις λεπτομέρειες του περιβάλλοντος, έτσι ώστε τα στρατηγικά μοντέλα να φέρουν ένα βαρύ φορτίο πληροφοριών,το οποίο συχνά επιδεινώνεται στο πεδίο από την αδυναμία να παρατηρηθούν όλες οι σχετικές μεταβλητές.Σημαντικές πρόοδοι στην πειραματική τεχνική κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες επιτρέπουν τον έλεγχο που συχνά δίνουν στα πειράματα αποφασιστικό πλεονέκτημα στον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ της συμπεριφοράς και του περιβάλλοντος. Για πολλά θέματα, [πειραματικά δεδομένα] η πιο σημαντική πηγή εμπειρικών πληροφοριών που έχουμε, είναι απίθανο να είναι λιγότερο αξιόπιστα από την απλή εμπειρία ή ενδοσκόπηση.Φυσικά, είναι σημαντικό να αναρωτηθούμε πόσο μπορούμε να γενικοποιήσουμε τα αποτελέσματα των πειραμάτων με (ως επί το πλείστον)φοιτητές που παίζουν μια-δυο ώρες για μια μέτρια χρηματική ανταμοιβή,στους εργαζομένους σε επιχειρήσεις που δημιουργούν εταιρικές στρατηγικές,στις διπλωματικές διαπραγματεύσεις και ούτω καθεξής. Αλλά αυτές οι αμφιβολίες σχετικά με γενίκευση ζητούν πιο περίτεχνα πειράματα και όχι την απόρριψη τις ίδιας της πειραματικής μεθόδου.Οι πειραματιστές έχουν μελετήσει μερικές διαστάσεις της γενίκευσης,ιδιαίτερα τις επιπτώσεις του παιγνιού όταν πρόκειται για περισσότερα χρήματα, οι οποίες είναι συνήθως μικρές.'Αλλα πιο φιλόδοξα πειράματα με ομάδες παικτών, σύνθετα περιβάλλοντα,επικοινωνία και την ανάμιξη γενεών θα χρίσουν περαιτέρω γενίκευσης και οι άνθρωποι θα πρεπει να κάνουν περισσότερα απο αυτά.

1.3 Σε τι είναι καλή η Θεωρία των Παιγνίων

Εχει η θεωρία των παιγνίων ως στόχο να προβλέψει τι κάνουν οι άνθρωποι, να τους δώσει συμβουλές, ή τι; Η απάντηση του θεωρητικού μέρους είναι ότι η θεωρία παιγνίων δεν είναι τίποτα από τα παραπάνω, είναι απλά «αναλυτική», ένα σύνολο απαντήσεων σε μαθηματικές ερωτήσεις σχετικά με το τι οι παίκτες με διάφορετικά επίπεδα λογικής θα κάνουν.Εάν τα άτομα δεν παίζουν με τον τρόπο που η θεωρία προυποθέτει,η συμπεριφορά τους αποδικνύει ότι τα μαθηματικά είναι λάθος,όπως όταν ο ταμίας κάνει λάθος τα ρέστα δεν σημαίνει οτι διαψεύδει την αριθμητική. Στην πράξη όμως, τα εργαλεία της αναλυτικής θεωρίας των παιγνίων χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη και επίσης την εξήγηση (ή "postdict") και την καταχώριση.Οι δημοπρασίες είναι ένα καλό παράδειγμα και για τις τρεις χρήσεις της θεωρίας των παιγνίων.Με βάση συγκεκριμένες υποθέσεις σχετικά με τους κανόνες της δημοπρασίας και τον τρόπο με τον οποίο οι προσφέροντες αξιολογούν ένα αντικείμενο,όπως η τιμή του πετρελαίου ή ένας πίνακας ζωγραφικής, η θεωρία της δημοπρασίας υπολογίζει πόσο οι λογικοί πλειοδότες θα πληρώσουν.Η θεωρία μπορεί να βοηθήσει,να εξηγήσει γιατί μερικοί τύποι δημοπρασιών είναι πιο κοινοί από ό, τι άλλοι.Για παράδειγμα, στις "second-price" (δεύτερη τιμή) ή τις δημοπρασίες Vickrey όπου ο μεγαλήτερος πλειοδότης αγοράζει το αντικείμενο που δημοπρατείται στη τιμή της δεύτερης υψηλότερης προσφοράς.Υπό ορισμένες συνθήκες αυτές οι δημοπρασίες θα πρέπει, θεωρητικά, να βγάζουν περισσότερο κέρδος για τους πωλητές απ' ότι στις παραδοσιακές δημοπρασίες με την πρώτη τιμή στις οποίες ο μεγαλύτερος πλειοδότης πληρώνει το ποσό που προσέφερε.Αλλά οι δημοπρασίες δεύτερης-τιμής είναι σπάνιες .Γιατί;Η Θεωρία των Παιγνίων προσφέρει μια εξήγηση: Από την στιγμή που σε μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

δημοπρασία δεύτερης τιμής ο μεγαλύτερος πλειοδότης πληρώνει ένα ποσό διαφορετικό απο αυτό που προσέφερε,αυτές οι δημοπρασίες είναι ευάλωτες στη χειραγώγηση από τον πωλητή (ο οποίος μπορεί να ξεγλιστρήσει με μια ψέυτικη προσφορά και να αναγκάσει το μεγαλύτερο πλειοδότη να πληρώσει περισσότερα).

Πόσο καλά προβλέπει η θεωρία της δημοπρασία;

Οι δοκιμές με δεδομένα πεδίου είναι προβληματικές:Επειδή οι προσφορές των πλειοδοτών συνήθως είναι κρυφές, είναι δύσκολο να πεί κανείς αν οι προσφορές είναι οι καλύτερες δυνατές, αν και μερικές προβλέψεις μπορούν να δοκιμαστούν. Ευτυχώς, υπάρχουν πολλά προσεκτικά πειράματα.Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων είναι ανάμικτα.Σε δημοπρασίες ιδιωτικών αξιών στις οποίες ο κάθε παίκτης δίνει τη δική του προσωπική αξία για το αντικείμενο (και δεν δίνει τόση σημασία στο πόσο θα το εκτιμήσουν οι άλλοι),οι πλειοδότες κάνουν προσφορές αξιοσημείωτα κοντά στην τιμή που έχει προβλεφθεί,ακόμη και όταν η λειτουργία χαρτογράφησης τιμών σε προσφορές είναι μη γραμμική και ασαφής.Στης κοινής αξίας δημοπρασίες η αξία του αντικειμένου είναι ουσιαστικά η ίδια για όλους,αλλά είναι αβέβαια.Η υποβολή προσφορών για μισθώσεις στις εκτάσεις του πετρελαίου είναι ένα παράδειγμα,διαφορετικές εταιρείες πετρελαίου θα εκτιμήσουν την αξία του πετρελαίου με τον ίδιο τρόπο αλλά δεν είναι σίγουρες για το πόσο πετρέλαιο υπάρχει. Σε αυτές τις δημοπρασίες οι πλειοδότες που είναι πιο αισιόδοξοι για την αξία του αντικειμένου τείνουν να προσφέρουν την υψηλότερη προσφορά και να κερδίζουν.

Σε ορισμένους τομείς των κοινωνικών επιστημών, αυτά τα είδη των παιγνιών που αναφέρουν για το πώς ένας θεσμός ή συμβάν εκτυλίχθηκε ονομάζονται "αναλυτικές αφηγήσεις» και αποδεικνύονται όλο και πιο δημοφιλής Το πρόβλημα είναι ότι,αν κερδίσετε, σημαίνει ότι είσασταν πολύ πιο αισιόδοξος από οποιονδήποτε άλλο πλειοδότη και είναι πιθανό να πληρώσετε περισσότερο από ό, τι αξίζει το αντικείμενο,μια πιθανότητα που ονομάζεται «κατάρα του νικητή."Η αναλυτική θεωρία παιγνίων υποθέτει οτι οι ορθολογικοί πλειοδότες θα αποφύγουν την κατάρα του νικητή κάνοντας πολύ συντηρητικές προσφορές.Τα πειράματα όμως δείχνουν ότι οι παίκτες δεν καταφέρνουν να αποφύγουν την κατάρα του νικητή,έτσι οι πλειοδότες που κερδίζουν γενικά πληρώνουν περισσότερο από ό, τι θα έπρεπε.

Ίσως η πιο σημαντική σύγχρονη χρήση της θεωρίας της δημοπρασίας είναι να προδιαγράψει το πώς θα υποβληθούν οι προσφορές σε μια δημοπρασία, ή το πώς να σχεδιάστεί μια δημοπρασία.Λαμπρός θρίαμβος της σύγχρονης θεωρίας της δημοπρασίας είναι οι πρόσφατες δημοπρασίες των ερτζιανών κυμάτων για εταιρείες τηλεπικοινωνιών.Σε αρκετές δημοπρασίες σε διάφορες χώρες,οι ρυθμιστικοί οργανισμοί αποφάσισαν να θέσουν το ερτζιανό πρίσμα συχνοτήτων σε δημοπρασία.

Μια δημοπρασία αυξάνει τα έσοδα της κυβέρνησης και ιδανικά, εξασφαλίζει ότι ένας δημόσιος πόρος καταλήγει στα χέρια των επιχειρήσεων που είναι σε καλύτερη θέση για να δημιουργήσουν αξία από αυτόν.Στις περισσότερες χώρες,οι δημοπρασίες έχουν σχεδιαστεί σε συνεργασίες μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών "testbedding" που βοήθησαν στον εντοπισμό απρόβλεπτων αδυναμιών στα προτεινόμενα σχέδια (όπως όταν χρησιμοποιούμε μια αεροδυναμική σήραγγα για να ελέγξουμε το σχεδιασμό του φτερού ενός αεροπλάνου, ή μια "δεξαμενή ρυμούλκησης" για να δούμε ποια κομμάτια του πλοίου θα βουλιάξουν και ποιά θα επιπλεύσουν).Τα σχέδια που προέκυψαν δεν ήταν ακριβώς αντιγραφή από τα βιβλία της θεωρίας της δημοπρασίας.Αντίθετα, οι θεωρητικοί πέρασαν πολύ χρόνο επισημαίνοντας πως οι πλειοδότες με κίνητρο θα μπορούσαν να εκμεταλλευτούν τα παραθυράκια των κανόνων που προτείνονται από δικηγόρους και ρυθμιστές,και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα απο το testbedding να βελτιώσουν τη μορφή της δημοπρασίας.Οι σχεδιαστές δημοπρασιών επέλεξαν μια μορφή που δίνει στους πλειοδότες την ευκαιρία να μάθουν από τα πιθανά λάθη τους και απο την παρακολούθηση των άλλων παικτών, αντί για μια απλή "sealed-bid" (σφραγισμένη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

προσφορά) μορφή στην οποία οι προσφέροντες απλά ταχυδρομούν τις προσφορές τους και η Ομοσπονδιακή Επιτροπή Επικοινωνιών ανοίγει τους φακέλους και ανακοινώνει την υψηλότερη προσφορά.Μια από τις πιο ισχυρές και εκπληκτικές ιδέες στη Θεωρία της Δημοπρασίας,είναι ότι μερικοί τύποι δημοπρασιών,θεωρητικά, θα μαζέψουν το ίδιο ποσό εσόδων με άλλες δημοπρασίες που είναι αρκετά διαφορετικές σε δομή. (Για παράδειγμα, σε "Αγγλική" δημοπρασία, στην οποία οι τιμές αυξάνονται αργά μέχρι να μείνει μόνο ένας πλειοδότης,τα έσοδα είναι ισοδύναμα με μια "Vickrey" δημοπρασία με σφραγισμένες προσφορές,όπου ο υψηλότερος πλειοδότης πληρώνει ό, τι ο δεύτερος υψηλότερος πρόσφερε).Αλλά όταν ήρθε η στιγμή για το σχεδιασμό μιας δημοπρασίας όπου πραγματικές εταιρείες θα συμμετάσχουν με δισεκατομμύρια δολάρια,οι σχεδιαστές δημοπρασιών δεν ήταν πρόθυμοι να στοιχηματίσουν ότι η *συμπεριφορά* θα ισοδυναμεί πραγματικά σε διαφορετικούς τύπους δημοπρασιών,παρά τα όσα η θεωρία προβλέπει.Οι σχεδιαστικές τους επιλογές αντανακλούν μια έμμεση θεωρία της πραγματικής συμπεριφοράς στο παίγνιο που πιθανόν να είναι πιο κοντά στις ιδέες αυτού του βιβλίου απ’ ό, τι η τυπική θεωρία που βασίζεται στον απεριόριστο αμοιβαίο ορθολογισμό.Παρατηρήστε ότι, σε αυτή τη διαδικασία του σχεδιασμού και των προδιαγραφών, το να μαντέψουμε με ακρίβεια το πώς οι παίκτες θα συμπεριφερθούν στην πραγματικότητα(η σωστή πρόβλεψη) είναι το πιο σημαντικό.

1.4 Τρια Παραδείγματα

Ακόμα και αν η θεωρία των παιγνίων δεν είναι πάντα ακριβής,μια περιγραφική αποτυχία είναι μια ευκαιρία για προδιαγραφές.Ακριβώς όπως οι ευαγγελιστές κηρύττουν,επειδή οι άνθρωποι συνήθως παραβιάζουν του ηθικούς κώδικες,το γεγονός ότι οι παίκτες παραβιάζουν τη θεωρία των παιγνίων μας παρέχει την ευκαιρία να πάρουμε χρήσιμες συμβουλές.Η απλή χαρτογράφηση κοινωνικών καταστάσεων σε είδη παιγνιών είναι εξαιρετικά χρήσιμη γιατί λέει στους ανθρώπους τι πρέπει να προσέξουν.Στο δημοφιλές τους βιβλίο για τους διευθυντές επιχειρήσεων, ***Συν-ανταγωνισμός***,οι Brandenburger και Nalebuff(1996) δίνουν την προσοχή στα γυμνά οστά του παιγνιού - τους παίκτες, τις πληροφορίες, τις δράσεις και τα αποτελέσματα. Και οι δύο είναι λαμπροί θεωρητικοί που θα μπορούσαν να έχουν γράψει ένα πιο θεωρητικό βιβλίο.Αποφάσισαν να μην το κάνουν γιατί διδάσκοντας MBAs και δουλεύοντας σε συνεργασία με manager πείστηκαν ότι η διδασκαλία των βασικών στοιχείων της Θεωρίας των Παιγνίων είναι πιο χρήσιμη.

Η Θεωρία των Παιγνίων συχνά χρησιμοποιείται για να προκαθορίσει με ένα λεπτότερο τρόπο.Μερικές φορές η Θεωρία των Παιγνίων χρησιμοποιείται για να καταλάβουμε τι είναι πιθανό να συμβεί σε μια στρατηγική αλληλεπίδραση έτσι ώστε ένα πρόσωπο ή εταιρεία να μπορεί στη συνέχεια να προσπαθήσει να αλλάξει το παίγνιο προς όφελός του.(Αυτό είναι ένα είδος μηχανικής προσέγγισης,δεδομένου ότι ζητά το πώς μπορεί να βελτιωθεί η υπάρχουσα κατάσταση.)

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τα βασικά στοιχεία της συμπεριφορικής θεωρίας των παιγνίων και την πειραματική προσέγγιση με τρία παραδείγματα(τα οποία συζητούνται με περισσότερες λεπτομέρειες στα επόμενα κεφάλαια): διαπραγμάτευση τελεσίγραφο,«ηπειρωτικό-χάσμα»,συντονιστικά-παίγνια και επίσης παίγνια εικασίας όπως ένας «διαγωνισμός ομορφιάς».Τα πειράματα που χρησιμοποιούν αυτά τα παίγνια δείχνουν πώς η συμπεριφορική θεωρία των παιγνίων μπορεί να εξηγήσει τι κάνουν οι άνθρωποι με μεγαλύτερη ακρίβεια επεκτείνοντας την αναλυτική θεωρία των παιγνίων συμπεριλάμβάνοντας το πώς οι παίκτες αισθάνονται για τα κέρδη των άλλων παίκτων,με περιορισμένη στρατηγική σκέψη, και μάθηση.Τα τρία παίγνια χρησιμοποιούν μια συνταγή που διέπει τα περισσότερα από τα πειράματα που αναφέρονται σε αυτό το βιβλίο: διαλέξε ένα τυπικό παίγνιο για το οποίο η θεωρία των παιγνίων κάνει μια τολμηρή πρόβλεψη ή μια αόριστη πρόβλεψη που μπορεί να γίνει πιο ξεκάθαρη.Τα απλά παίγνια είναι ιδιαίτερα χρήσιμα επειδή έχουν μόνο μία ή δύο βασικές αρχές που απαιτούνται για να κάνουμε μια πρόβλεψη.Εάν η πρόβλεψη είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

λάθος,ξέρουμε ποιές είναι οι αρχές που φταίνε και τα αποτελέσματα δείχνουν συνήθως μια εναλλακτική αρχή που προβλέπει καλύτερα.Στα πειράματα, τα παίγνια συνήθως τίθονται κατά αφηρημένο τρόπο,επειδή η Θεωρία των Παιγνίων σπάνια καθορίζει το πώς η προσθήκη ρεαλιστικών λεπτομερειών θα επηρεάσει τη συμπεριφορά.Τα άτομα κάνουν μια απλή επιλογή και γνωρίζουν πώς οι επιλογές τους και οι επιλογές των άλλων υποκειμένων συνδυάζονται για να καθορίσουν το κέρδος σε χρήματα.Αυτές οι σχεδιαστικές επιλογές ποντάρουν σε μεγάλο βαθμό στη γνωστική προυπόθεση,ότι οι άνθρωποι χρησιμοποιούν γενικές αρχές στρατηγικής σκέψης που υπερβαίνουν ιδιοσυγγρατικές διαφορές στην λεκτική περιγραφή των παιγνιών.Αν οι επιλογές ανήκουν σε συγκεκριμένο τομέα,τότε το βασικό εγχείρημα αυτού του βιβλίου είναι ελλιπές,το να διαφοροποιήσει τα ονόματα των παιγνιών για να προκαλέσει αυτό το σκεπτικό είναι το επόμενο βήμα.Η μελέτη του Cooper (1999) για τις αλυσιδωτές επιπτώσεις σε παραγωγικά παίγνια που χρησιμοποιούν κινέζοι manager εργοστασίων,που αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα σε προγραμματισμένες οικονομίες, είναι ένα καλό παράδειγμα.

Οι παίκτες στην ουσία ανταμείβονται με βάση τις επιδόσεις τους, γιατί μας ενδιαφέρει η ανάκτηση των αποτελεσμάτων σε φυσικά παίγνια στα οποία οι παίκτες έχουν ουσιαστικά οικονομικά κίνητρα.Τα παίγνια συνήθως επαναλαμβάνονται γιατί ενδιαφέρονται για στην εξισορρόπηση και τη μάθηση με την πάροδο του χρόνου. Ένα προσάρτημα του παρόντος κεφαλαίου περιγράφει μερικές βασικές σχεδιαστικές επιλογές που κάνουν οι πειραματιστές και γιατί έχουν σημασία.

1.4.1 Παράδειγμα 1:Διαπραγμάτευση-Τελεσίγραφο

Πήγα μια φορά μια κρουαζιέρα με μερικούς φίλους και ένας φωτογράφος μας έβγαλε φωτογραφία χωρίς να το θέλουμε, καθώς επιβιβαζόμασταν στο πλοίο.Όταν αποβιβαστήκαμε ώρες αργότερα,ο φωτογράφος προσπάθησε να μας την πουλήσει για $ 5 και αρνήθηκε να διαπραγματευτεί. (Η άρνηση ήταν αξιόπιστη, διότι πολλές άλλες ομάδες τουριστών ήταν γύρω και αποφάσιζαν αν θα αγοράσουν τις φωτογραφίες τους, επίσης για $ 5.Αν ο φωτογράφος υπέκυπτε σε μείωση της τιμής του, αυτό θα ήταν εμφανές σε όλους τους άλλους και θα έχανε πολύ περισσότερα από την έκπτωση που θα έκανε μόνο για μας, δεδομένου ότι θα έπρεπε να προσφέροει την έκπτωση σε όλους).Μιας και εμείς είμασταν καλοί θεωρητικοί του παιγνιού,δεν δεχτήκαμε την τιμή και τονίσαμε ότι η φωτογραφία ήταν άχρηστη για αυτόν.Απέρριψε την προσβλητική μας προσφορά και αρνήθηκε να υποχωρήσει.

Το παίγνιο που παίξαμε με το φωτογράφο ήταν ένα "παίγνιο τελεσίγραφο" , το οποίο είναι το πιο απλό είδος διαπραγμάτευσης.Σε ένα παίγνιο τελεσίγραφο υπάρχει κάποιο κέρδος από την ανταλλαγή και ένας παίκτης κάνει μια take-it-or-leave-it(η παίρνεις ή αφήνεις)προσφορ.Η φωτογραφία μας δεν είχε προφανώς καμία αξία γι ‘αυτόν και ήταν πολύτιμη για μας(αξίας άνω των $ 5 σε συναισθηματική αξία).Η τιμή είναι απλά μια πρόταση για τον τρόπο με τον οποίο θα χωριστούν τα κέρδη από την ανταλλαγή μεταξύ τις δικής μας αναμενόμενης τιμής και του πραγματικού κόστους. Η προσφορά του φωτογράφου να πουλήσει για $ 5 ήταν μια προσφορά τελεσίγραφο επειδή δεν δέχεται να διαπραγματευτεί.

Στο εργαστήριο,στα παίγνια τελεσίγραφο σαν αυτό, δύο παίκτες, ένας *Προτείνοντας* και ένα *Δέκτης*, παζαρεύουν κάποιο ποσό, ας πούμε $ 10 (το ποσό που χρησιμοποιείται σε πολλά πειράματα).Τα 10 δολάρια αντιπροσωπεύουν την αξία του κέρδους για την ανταλλαγή(ή "Πλεόνασμα") που θα χαθεί εάν η συναλλαγή δεν γίνει. Ο *Προτείνων* προσφέρει x στον *Δέκτη*, κρατώντας για τον εαυτό του $10 – x.Ο *Δέκτης* μπορεί είτε να δεχτεί τη προσφορά και τότε ο Δέκτης παίρνει x και ο Προτείνων παίρνει $10 – x, ή είτε να την απορρίψει και τότε κανείς απο τους δύο δεν παίρνει τίποτα.Επειδή το παίγνιο τελεσίγραφο είναι τόσο απλό, δεν είναι ένα καλό μοντέλο της πιο φυσικής και παρατεταμένης διαδικασίας της διαπραγμάτευσης.Είναι το σωστό μοντέλο για το τι συνέβη σε μας μετά την κρουαζιέρα και του τι θα συμβεί στα τελευταία λεπτά πριν αρχίσει η απεργία, ή σχετικά με το τι συμβαίνει στο δικαστήριο πριν ο δικηγόρος πάει στη δίκη.Είναι ένα μοντέλο του τελευταίου βήματος μιας μεγάλης διαπραγμάτευσης και ως εκ τούτου είναι ένα δομικό στοιχείο για την μοντελοποίηση πιο περίπλοκων καταστάσεων .

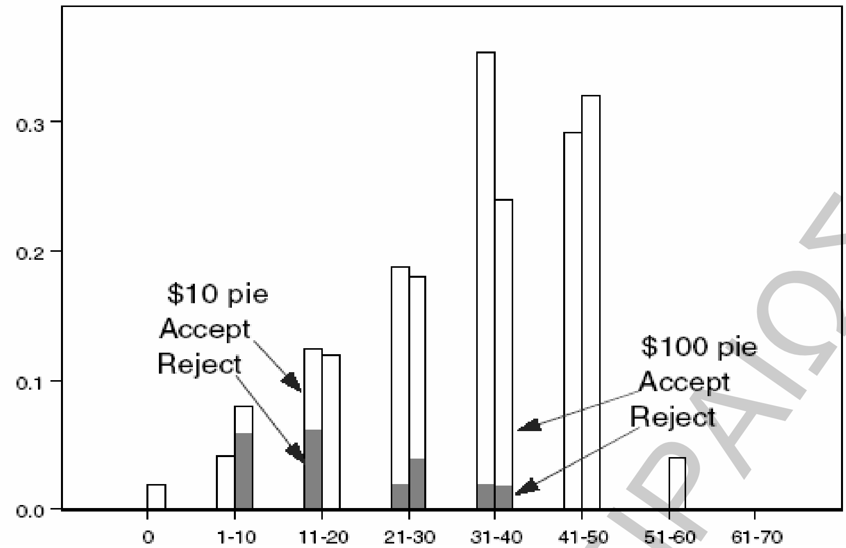
Απλά παίγνια δοκιμάζουν τις αρχές της θεωρίας των παιγνίων κατά το σαφέστερο δυνατό τρόπο.Τα παίγνια τελεσίγραφο και τα συναφή, είναι επίσης χρήσιμα για τη μέτρηση του πώς οι άνθρωποι αισθάνονται σχετικά με την κατανομή των χρημάτων μεταξύ των ίδιων και τους άλλους.Η αναλυτική προσέγγιση της θεωρίας των παιγνίων για διαπραγματεύσεις τελεσίγραφο είναι η εξής:Πρώτα υποθέτουμε οτι οι παίκτες είναι «ιδιοτελείς»,δηλαδή ενδιαφέρονται για την απόκτηση των περισσότερων χρημάτων για τον εαυτό τους.Αν οι παίκτες είναι ιδιοτελείς,ο *Δέκτης* θα δεχθεί το μικρότερο χρηματικό ποσό που του προσφέρεται,ας πούμε 0,25 δολάρια.Αν ο *Προτείνων* το προβλέψει αυτό, και θέλει να βγάλει οσο περισσότερο κέρδος μπορεί για τον εαυτό του,θα προσφέρει $ 0,25 και θα κρατήσει $ 9,75.Με επίσημους όρους,προσφέροντας $ 0,25 (και την αποδοχή οποιουσδήποτε θετικού ποσού) είναι η «τέλεια ισορροπία» του υπο-παίγνιου.Απο τη στιγμή που μιλάει πρώτος,ο *Προτείνων* έχει όλη τη δύναμη της διαπραγμάτευσης και θεωρητικά, μπορεί να την εκμεταλλεφθεί, επειδή ένας ιδιοτελής *Δέκτης* θα πάρει ό, τι μπορέσει.

Για πολλούς ανθρώπους,η μονόπλευρη κατανομή των 10 δολαρίων που προβλέπεται από αναλυτική Θεωρία Παιγνίων (με ιδιοτέλεια) φαίνεται άδικη.Επειδή η κατανομή θεωρείται άδικη,ο τρόπος με τον οποίο οι άνθρωποι παζαρεύουν στην πραγματικότητα δείχνει αν οι άνθρωποι είναι πρόθυμοι να αναλάβουν δαπανηρές ενέργειες που να εκφράζουν το ενδιαφέρον τους για δικαιοσύνη.Στο παράδειγμα της φωτογραφίας στη κρουαζιέρα, προσφέροντας $ 1 αντί των 5 δολαρίων που ήθελε ο φωτογράφος πρόσθεσε $ 4 έως πλεόνασμα για μας και αφαίρεσε $ 4 από τα δικά του. Αν πιστεύει ότι αυτό είναι άδικο για τον ίδιο, μπορεί να απορρίψει την προσφορά και να μη κερδίσει τίποτα (παρόλο που ο καθένας υποφέρει, αυτός δεν κερδίζει χρήματα και εμείς δεν έχουμε την φωτογραφία που θα θέλαμε να έχουμε).Τα εργαστηριακά πειράματα προσομοιώνουν αυτό το απλό παίγνιο.

Σε δεκάδες πειράματα που έγιναν σε διάφορες χώρες,οι προτείνοντες προσφέρουν $ 4 ή $ 5 από τα $ 10 κατά μέσο όρο και οι προσφορές δεν διαφέρουν πολύ.Οι προσφορές των $ 2 ή λιγότερο απορρίπτονται τις μισές περίπου φορές.Οι *Δέκτες* πιστεύουν ότι πολύ λιγότερο από το μισό είναι άδικο και είναι πρόθυμοι να απορρίψουν τέτοιες μικρές προσφορές για να τιμωρήσουν τον Προτείνοντα που συμπεριφέρθηκε άδικα.Οι περισσότερες προσφορές είναι κοντά στο μισό

Σημειώνεται, επίσης, ότι κάθε προσφορά είναι μια «ισορροπία Nash» ή αμοιβαία καλύτερη απάντηση,επειδή το x είναι η βέλτιστη προσφορά,εφόσον ο Προτείνων πιστεύει ότι ο Δέκτης θα απορρίψει οποιαδήποτε άλλη προσφορά. (Αυτή η πεποίθηση μπορεί να είναι λάθος, αλλά,αν ο Προτείνων το πιστεύει, ποτέ δεν θα κάνει κάτι που να εναντιώνεται στην πίστη της,έτσι ώστε η λανθασμένη πεποίθηση μπορεί να είναι μέρος μιας ισορροπίας Nash.)Υπάρχουν πολλές ερμηνείες για το τι προκαλεί τους *Δέκτες* να απορρίψουν ουσιαστικά ποσά.Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι κάποιοι παίκτες καθορίζουν μια δίκαιη μοιρασιά των $ 10 περίπου στο μισό και έχουν μια προτίμηση να αντιμετωπίζονται δίκαια.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Διαπραγμάτευση-Τελεσίγραφο

Σχήμα 1.1

Τέτοιες απορρίψεις αποτελούν απόδειξη της «αρνητικής αμοιβαιότητας»:Οι *Δέκτες* τείνουν να ανταποδίδουν μια άδικη συμπεριφορά βλάπτοντας το άτομο που τους αντιμετωπίζει άδικα, με σημαντικό κόστος για αυτούς (με την προϋπόθεση οτι ο *Προτείνων* θα έχει μεγαλύτερες επιπτώσεις από ό, τι εκείνοι).Η αρνητική αμοιβαιότητα είναι εμφανής και σε άλλους κοινωνικούς τομείς,ακόμη και όταν το χρηματικό διακύβευμα είναι υψηλό,απογοητευμένοι φίλοι που παρακολουθούν τις πρώην τους,με αποτέλεσμα άσχημα διαζύγια που τους κοστίζουν μεγάλα ποσά, παρορμητικα εγκλήματα του δρόμου που προκαλούνται από έναν ξένο δήθεν «προσβεβλημένο» άπο έναν επιτιθέμενο,την αποτυχία των δυο πλευρών σε δικαστικές "περιπτώσεις παρενόχλησης"για την επαναδιαπραγμάτευση μετά από δικαστική απόφαση,ακόμη και όταν και οι δύο πλευρές θα μπορούσαν να επωφεληθούν (Farnsworth, 1999), και ούτο καθ’ εξής.

Αυτή η εξήγηση για την απόρριψη του τελεσίγραφου θέτει το ερώτημα,απο πού ήρθε η προτίμηση για δικαιοσύνη.Ένα δημοφιλές επιχείρημα είναι ότι η ανθρώπινη εμπειρία στο παρελθόν των προγόνων μας προσάρμωσε εξελικτικά σε εγκεφαλικούς μηχανισμούς, ή στην αλληλεπίδραση των γνωστικών και συναισθηματικών συστημάτων, που προκαλούνστους ανθρώπους θυμό όταν κάποιος τους κοροιδεύει γιατί ο θυμός είχε αξία για την επιβίωση, απ’ όταν οι άνθρωποι αλληλεπιδρούν με τους ίδιους ανθρώπουςσε μια μικρή ομάδα.Ενα διαφορετικό επιχείρημα είναι ότι οι πολιτισμοί δημιουργούν διαφορετικά πρότυπα δικαιοσύνης,ίσως λόγω της εγγύτητας συγγενικών σχέσεων ή το βαθμό των ανώνυμων εμορικών συναλλαγών με αγνώστους (σε σύγκριση με την ανταλλαγή μεταξύ των συγγενών), και αυτά τα πολιτιστικά πρότυπαμεταδίδονται προφορικά μέσω των παραδόσεων και την κοινωνικοποίηση των παιδιών.

Αξιόλογα στοιχεία για την πολιτιστική προβολή προτύπων προέρχεται από μια μελέτη έντεκα ανθρωπολόγων που διεξήγαγαν παίγνια τελεσίγραφο σε πρωτόγονους πολιτισμούς στην Αφρική,στον Αμαζόνιο,την Παπούα Νέα Γουινέα,την Ινδονησία, και τη Μογγολία.Σε ορισμένους από αυτούς τους πολιτισμούς, οι άνθρωποι δεν πιστεύουν ότι η δίκαια ανταλλαγή είναι αναγκαία.Οι *Προτείνοντες* σε αυτούς τους πολιτισμούς προσέφεραν πολύ λίγο(το ισοδύναμο των $ 1,50 από τα $ 10) και οι *Δέκτες* (ανταποκρινόμενοι) αποδέχονταν σχεδόν σε κάθε προσφορά.Κατά ειρωνικό τρόπο, αυτές οι απλές κοινωνίες είναι οι μόνοι γνωστοί πληθυσμοί πουσυμπεριφέρονται ακριβώς όπως προβλέπει η θεωρία των παιγνίων!

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σημειώστε ότι απορρίψεις στα παίγνια τελεσίγραφο δεν απορρίπτουν κατ 'ανάγκη τις στρατηγικές αρχές που διέπουν τη θεωρία των παιγνίων.Ο *Δέκτης* αποφασίζει απλά αν θέλει κανένας απο τους δύο παίκτες να μην πάρει τίποτα,ή αν θέλει να πάρει ένα μικρό μερίδιο,όταν ο Προτείνων παίρνει πολύ περισσότερο.Το γεγονός ότι ένας *Δέκτης* απορρίπτει σημαίνει ότι δεν μεγιστοποιεί τα κερδη του,αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είναι σε θέση να σκεφτεί στρατηγικά.Πρόσφατες θεωρίες προσπαθούν να εξηγήσουν τις απορρίψεις με τη χρήση των κοινωνικών λειτουργιών προτίμησης που εξισορροπούν την επιθυμία ενός ατόμου να έχει περισσότερα χρήματα με την επιθυμία να ανταποδώσει σε εκείνους που έχουν δίκαιη μεταχείριση ή άδικη, ή την επίτευξη της ισότητας.Οι εν λόγω λειτουργίες έχουν μια μακρά ιστορία (ανιχνεύσιμα τουλάχιστον απο τον Edgeworth το 1890).Οι οικονομολόγοι τους έχουν αντισταθεί,επειδή φαίνεται να είναι πολύ εύκολο να εισαχθεί ένα νέο στοιχείο στη λειτουργία χρησιμότητας για κάθε παίγνιο.Αλλά οι νέες θεωρίες προσπαθούν να εξηγήσουν τα αποτελέσματα σε διαφορετικά παίγνια με μια ενιαία λειτουργία.

Η αδελφή μου η Jeannine μου είπε ότι στο AtlanticCity τα καζίνο έχουν μερικές φορές προβλήματα με τους πελάτες που κλέβουν πολυτελείς πετσέτες, μπουρνούζια, και άλλα στοιχεία από τα δωμάτια των ξενοδοχείων τους αφού έχασαν τα λεφτά τους στο παιγνιο. Στο μυαλό τους οι ηττημένοι παίρνουν απλά τα πράγματα για τα οποία έχουν πληρώσει.

Οι νέες θεωρίες κάνουν εκπληκτικές νέες προβλέψεις.Για παράδειγμα, όταν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι προτείνοντες,δεν υπάρχει τρόπος για οποιονδήποτε από αυτούς με τη μια να κερδίσουν περισσότερα χρήματα και να περιορίσουν την ανισότητα.Ως εκ τούτου κάποιες θεωρίες προβλέπουν ότι και οι δύο υποψήφιοι προσφέρουν σχεδόν τα πάντα στο *Δέκτη* ακόμη και αν ενδιαφέρονται για την ισότητα. (Αν υπήρχαν δύο φωτογράφοι σε αυτό το καταραμένο πλοίο, θα είχαμε πάρει την φωτογραφία μας για $ 1.)Οι νέες κοινωνικές θεωρίες προτίμησης θα πρέπει να αποδειχθούν χρήσιμες στην ανάλυση των διαπραγματεύσεων,της φορολογικής πολιτικής,της ισχυρής τάσης των αγροτών που μισθώνουν γη να μοιραστούν τα κέρδη των καλλιεργειών δίκαια με τους ιδιοκτήτες (Young και Burke, 2001) και των μισθών (ιδιαίτερα της απροθυμίας των επιχειρήσεων να μειώσουν τους μισθούς σε δύσκολους καιρούς, η οποία είναι αινιγματική για τους οικονομολόγους οι οποίοι υποθέτουν οτιοι αλλαγές στην τιμή της εργασίας εξαρτόνται απο την προσφορά και την ζήτηση, καθώς και απο άλλα φαινόμενα).

1.4.2 Παράδειγμα 2: Εξαρτημένος Συντονισμόςστα Παίγνια "Ηπειροτικού Χάσματος"

Στα παίγνια συντονισμού,οι παίκτες θέλουν να προσαρμόζονται με το τι κάνουν οι άλλοι(αν και μπορεί να έχουν διαφορετικές ιδέες για το ποιά προσαρμοσμένη σύμβαση είναι το καλύτερη).Για παράδειγμα, στην Καλιφόρνια υπάρχει ένας συνεχής αγώνας για το που να τοποθετηθούν οι επιχειρήσεις των «νέων μέσων»,όπως οι πάροχοι internet ή παραγωγών ταινιών φιλμ και ψυχαγωγίας.Νέοι άνθρωποι των μέσων ενημέρωσης θα μπορούσαν να κλίνουν προς την Silicon Valley,όπου συναθροίζονται οι webgeeks (φρικιά του ιντερνετ!),ή προς το Hollywood και την Νότιας Καλιφόρνιας,όπου παράγονται πολλές ταινίες και τηλεοπτικές εκπομπές.Ποια γεωγραφική περιοχή είναι η καλύτερη σε θέση εξαρτάται από το αν νομίζετε ότι η θέση των επιχειρήσεων διαδικτύου είναι κεντρική και οι «ευχαριστημένοι» παραγωγοί θα πρέπει να τους ακολουθήσουν,ή αν το Διαδίκτυο είναι απλώς ένα κανάλι διανομής και οι πάροχοι περιεχομένου είναι βασιλιάδες.Αυτή η οικονομική διελκιστίνδα μπορεί να μοντελοποιηθεί σε ένα παίγνιο στο οποίου οι παίκτες επιλέγουν μια θέση και τα κέρδη τους εξαρτώνται από τη θέση που θα επιλέξουν οι ίδιοι και την τοποθεσία που θα επιλέξουν οι περισσότεροι άλλοι παίκτες. Ένα τέτοιου είδους παίγνιο έχει μελετηθεί από τους VanHuyck,Battalio και Cook (1997). Ο πίνακας 1.1 δείχνει τις απολαβές (σε λεπτά). Σε αυτό το παίγνιο, οι παίκτες επιλέγουν αριθμούς από το 1 έως 14 (σκεφτείτε τους αριθμούς σαν να αντιστοιχουν σε φυσικούς χώρους-οι χαμηλοί αριθμοί είναι στο Χόλιγουντ και οι μεγάλοι αριθμοί είναι στην SiliconValley). Ο πίνακας στην Εικόνα 1.1 δείχνει το κέρδος του παίκτη της σειράς από την επιλογή ενός αριθμού, όταν η μέση τιμή

	Median choice													
Choice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	45	49	52	55	56	55	46	−59	−88	−105	−117	−127	−135	−142
2	48	53	58	62	65	66	61	−27	−52	−67	−77	−86	−92	−98
3	48	54	*60*	66	70	74	72	1	−20	−32	−41	−48	−53	−58
4	43	51	58	65	71	77	80	26	8	−2	−9	−14	−19	−22
5	35	44	52	60	69	77	83	46	32	25	19	15	12	10
6	23	33	42	52	62	72	82	62	53	47	43	41	39	38
7	7	18	28	40	51	64	78	75	69	66	64	63	62	62
8	−13	−1	11	23	37	51	69	83	81	80	80	80	81	82
9	−37	−24	−11	3	18	35	57	88	89	91	92	94	96	98
10	−65	−51	−37	−21	−4	15	40	89	94	98	101	104	107	110
11	−97	−82	−66	−49	−31	−9	20	85	94	100	105	110	114	119
12	−133	−117	−100	−82	−61	−37	−5	78	91	99	106	*112*	118	123
13	−173	−156	−137	−118	−96	−69	−33	67	83	94	103	110	117	123
14	−217	−198	−179	−158	−134	−105	−65	52	72	85	95	104	112	120

Σχήμα1. 2
Ένα τέτοιου είδους παίγνιο έχει μελετηθεί από τους VanHuyck,Battalio και Cook (1997)

των αριθμών μιας ομάδας είναιο αριθμόστων διαφόρων στηλών.Αν επιλέξετε 4, για παράδειγμα, και η διάμεση είναι 5, κερδίζετε ένα υγιές 7,αλλά αν η διάμεσος είναι 12 κερδίζετε-14 (Χρεοκοπία!).Η βασική δομή του κέρδους υποθέτει οτι θα πρέπει να επιλέξετε ένα χαμηλό αριθμό αν νομίζετε ότι οι περισσότεροι θα επιλέξουν χαμηλούς αριθμούς, ή να επιλέξετε έναν μεγάλο αριθμό, αν νομίζετε ότι οι περισσότεροι θα επιλέξουν μεγάλους αριθμούς.Αν δεν είστε βέβαιοι για το τι θα κάνουν άλλοι, επιλέξτε έναν αριθμό, όπως το 6, ο οποίος δίνει απολαβές που κυμαίνονται απο 23 μέχρι 82 (σιγουρεύετε το στοίχημά σας).

Στα πειράματα,οι παίκτες οργανώνονται σε ομάδες επτά ατόμων.Οι ομάδες παίζουν μαζί δεκαπέντε φορές.Μετά από κάθε δοκιμή μπορείτε να μάθετε ποιά είναι η μέση τιμή,να υπολογίστε τα κέρδη σας από την αυτή την δοκιμή (σύμφωνα με την δική σας επιλογή και τη μέση τιμή), και να παίξτε ξανά. Δεδομένου ότι το παίγνιο είναι περίπλοκο,σκεφτείτε για ένα λεπτό το τι πραγματικά θα κάνατε και τι θα μπορούσε να συμβεί κατά τη διάρκεια των δεκαπέντε γύρων του παίγνιου.Οι απολαβές έχουν την ιδιότητα ότι, αν ένας παίκτης μαντέψει ότι η μέση τιμή είναι λίγο κάτω από το 7,η καλύτερη απάντηση του στην εν λόγω εικασία είναι να επιλέξει έναν αριθμό μικρότερο από τον αριθμό που έχει σκεφτεί.Για παράδειγμα, αν νομίζετε ότι η μέση τιμή θα είναι 7,η καλύτερη απάντησή σας είναι 5,το οποίο κερδίζει 83 σεντς. Έτσι, αν οι μέσες τιμές είναι αρχικά χαμηλές, οι απαντήσεις σε χαμηλές διάμεσους θα οδηγήσουν τους αριθμούς χαμηλότερα μέχρι να φτάσουμε στο 3.Τρία είναι μια ισορροπία ή σημείο καλύτερης αμοιβαίας απάντησης, διότι, εάν ο καθένας επιλέξει 3, η μέση τιμή θα είναι 3 και η καλύτερη απάντηση σας στη μέση τιμή του 3 είναι να επιλέξετε 3.Αν οι παίκτες φτάσουν σε αυτό το σημείο, κανείς δεν θα μπορέσει να επωφεληθεί φεύγοντας. (Το αποτέλεσμα από αυτή την ισορροπία με πλάγιους χαρακτήρες στοΠίνακας 1.1.)

Αλλά υπάρχει και μια άλλη ισορροπία Nash.Αν οι παίκτες υποθέτουν ότι η μέση τιμή θα είναι 8 ή παραπάνω, θα πρέπει να επιλέξουν τους αριθμούς που είναι υψηλότεροι από ό, τι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

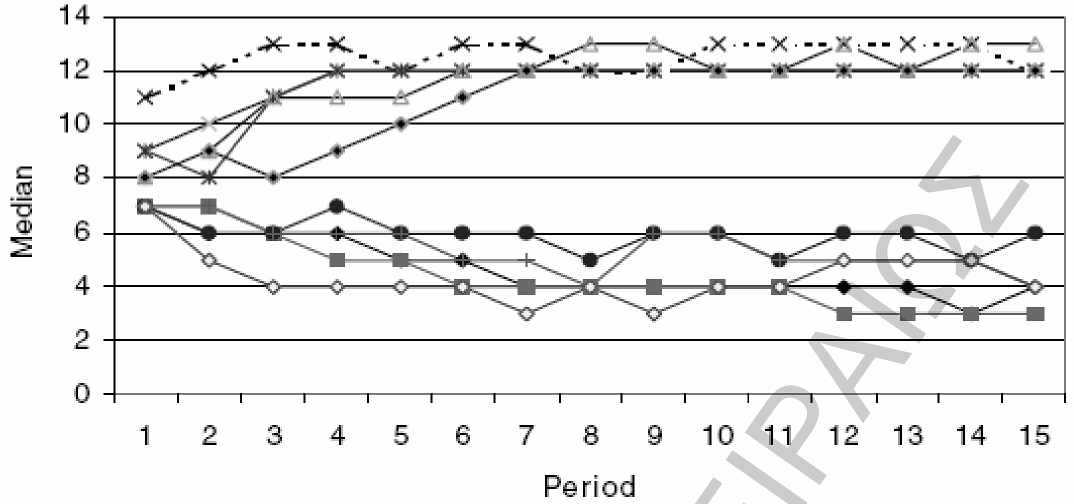
υποθέτουν, μέχρι να φτάσουν στο 12,το 12 είναι επίσης μια ισορροπία του Nash, διότι επιλέγοντας 12 δίνει το υψηλότερο κέρδος όταν η μέση τιμή είναι 12.Αυτό είναι ένα παίγνιο συντονισμού, διότι υπάρχουν δύο ισορροπίες Nash για τις οποίες ο καθένας επιλέγει την ίδια στρατηγική.Οι θεωρητικοί των παιγνίων έχουν αγωνιστεί για πολλές δεκαετίες να καταλάβουν ποια απ' όλες τις ισορροπίες θα είναι το αποτέλεσμα όταν υπάρχουν περισσότερες απο μια.

Το συγκεκριμένο παίγνιο παρουσιάζει διεργασίες στη φύση και τα κοινωνικά συστήματα στα οποία μικρά ιστορικά ατυχήματα έχουν μεγάλη επίδραση μακροπρόθεσμα.Ένας διάσημο παράδειγμα είναι αυτό που οι θεωρητικοί του χάους αποκαλούνε το «φαινόμενο Lorenz": Επειδή ο καιρός είναι ένα πολύπλοκο δυναμικό σύστημα,η κίνηση μιας πεταλούδας στην Κίνα μπορεί ναθέσει σε κίνηση μια περίπλοκη μετεωρολογική διαδικασία που δημιουργεί μια καταιγίδα στη Βολιβία.Αν η πεταλούδα είχε μείνει ακίνητη,οι Βολιβιανοί θα ήταν στεγνοί!Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό που οι κοινωνικοί θεωρητικοί ονομάζουν το "φαινόμενο του σπασμένου παράθυρου."Στοιχεία δείχνουν ότι,όταν υπάρχει έστω ένα και μόνο σπασμένο παράθυρο σε μια κοινότητα,οι γείτονες αισθάνονται λιγότερο την υποχρέωση να τηρούν τις αυλές τους καθαρές,να αντικαταστήσουν τα δικά τους σπασμένα παράθυρα και να βάψουν τα σπίτια τους.Δεδομένου ότι οι εγκληματίες θέλουν να διαπράττουν εγκλήματα σε γειτονιές όπου οι γείτονες δεν είναι προσεχτικοί και άλλοι εγκληματίες παραμονεύουν (έτσι οι αστυνομικοί είναι απασχολημένοι),ένα μόνο σπασμένο παράθυρο μπορεί να οδηγήσει σε μια σπειροειδή διαδικασία κοινωνικής κατάρρευσης.Οι πολιτικοί αγαπούν την θεωρία των σπασμένων παραθύρων γιατί προτείνει μια εύκολη λύση στα προβλήματα της αστικής φθοράς – επισκευάζοντας κάθε παράθυρο πριν η επίδραση των λίγων σπασμένωννα εξαπλωθεί σε όλη την κοινότητα όπως ένας ιός.Καλώ το παίγνιο στον πίνακα 1.1 παίγνιο «ηπειρωτικού χάσματος».Το ηπειρωτικό χάσμα είναι μια γεωγραφική γραμμή που χωρίζει τα τμήματα της Βόρειας Αμερικής σ' αυτά που το νερό ρέει προς μια κατεύθυνση από τα τμήματα στα οποία το νερό ρέει στην αντίθετη κατεύθυνση.Αν σταθεί κανείς στο ηπειρωτικό χάσμα στην Αλάσκα,και ρίξετε το νερό από μια καντίνα, όπως εγώ κάποτε, μερικές σταγόνες θα κυλίσουν βόρεια προς τον Αρκτικό Ωκεανό και άλλοι θα εισρεύσουν στον Ειρηνικό Ωκεανό.Δύο σταγόνες νερό που ξεκινούν απειρο ελάχιστα κοντά μεταξύ τους στην καντίνα ,καταλήγουν χιλιάδες μίλια μακριά.Το παίγνιο ονομάζεται παίγνιο ηπειρωτικού χάσματος επειδή οι μεσες τιμές κάτω του 7 είναι μια "δεξαμενή έλξης" (σε όρους της εξελικτικής θεωρίαστων παιγνίων) για τη σύγκλιση προς την ισορροπία στο 3.Οι μέσες τιμές πάνω από 8 είναι μια δεξαμενή έλξηςγια τη σύγκλιση προς το 12. Ο "διαχωρισμός" μεταξύ 7 και 8 διαιρεί τοπαίγνιο σε περιοχές όπου οι παίκτες θα "ρέουν" προς το 3 και σε περιοχές όπου οι παίκτες θα εισρεύσουνπρος το 12.

Ποια ισορροπία θα επιτευχθεί έχει σημαντικές οικονομικές συνέπειες.Η ισορροπία του 12 πληρώνει 1,12 δολάρια για κάθε παίκτη,αλλά η ισορροπία στο 3 πληρώνειμόνο $ 0,60.Σε αυτή τη βάση και μόνο,μπορείτε να μαντέψετε ότι οι παίκτες θα επιλέξουν υψηλότερους αριθμούς με ελπίδες για την επίτευξη της πιο κερδοφόρας ισορροπίας.Πριν να συνεχίσετε, αναρωτηθήτε και πάλι τι νομίζετε ότι θα συμβεί. Αν έχετε μελετήσει αρκετά την θεωρία των παιγνίων και ακόμα δεν είστε σίγουροι για το τι να περιμένετε,η περιέργεια σας για το τι πραγματικά κάνουν οι άλλοι θα πρέπει να σας πληγώνει!

Το επόμενο σχήμα δείχνει τι συνέβη σε δέκα πειραματικές ομάδες.Πέντε ομάδες άρχισαν με διάμεσο στο 7 ή παρακάτω,όλοι τους πήγαν προς την χαμηλού κέρδους ισορροπία στο 3.Οι άλλες πέντε ομάδες ξεκίνησαν με το 8 ή παραπάνω και έτειναν στην υψηλού κερδους ισορροπία.Το πείραμα έχει δύο σημαντικά ευρήματα. Πρώτον, οι άνθρωποι δεν είναι κλίνουν πάντα προς την υψηλού κέρδους ισορροπία, ακόμη και αν οι παίκτες που καταλήγουν σε χαμηλούς αριθμούς κερδίζουν μόνο το μισό.(Αν θα μπορούσαν να παίξουν πάλι, ή να συζητήσουν το παίγνιο εκ των προτέρων, είναι μια ενδιαφέρουσα ανοιχτή ερώτηση.)Δεύτερον, τα ρεύματα της ιστορίας είναι ισχυρά, δημιουργώντας «ακραία ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες». Οι παίκτες που βρίσκονται σε μια ομάδα με δύο ή τρεις άλλους που πιστεύουν οτι το 7 είναι ο τυχερός τους αριθμός, και τον επιλέγουν κατά την πρώτη περίοδο,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Σχήμα 1.3
Διάμεσες επιλογές ηπειρωτικού χάσματος Πηγη:Van Huyck,Battalio and Cook(1997)

καταλήγουν να παρασύρονται σε μια δίνη που οδηγεί στο μικρό κέρδος των $ 0,60. Οι παίκτες μιας ομάδας της οποίας η διάμεσος είναι 8 ή μεγαλύτερη καταλήγουν κερδίζοντας σχεδόν τα διπλάσια.Ένας ή δύο Κινέζοι που επιλέγουν 8 – ένας τυχερός αριθμός για τους Κινέζους-θα μπορούσαν να φέρουν καλή τύχη σε όλους, όπως ακριβώς και η πεταλούδα έφερε βροχή τους Βολιβιανούς.

Καμία έννοια στην αναλυτική θεωρία των παιγνίων δεν αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι ορισμένες ομάδες τείνουν στο 3 και κερδίζουν λιγότερα, ενώ άλλες τείνουν στο 12 και κερδίζουν περισσότερο.Πράγματι, το πρόβλημα να προβλέψουμε σε ποιά από τις πολλές ισορροπίες θα οδηγήσουν παίγνια όπως αυτά μπορεί να μένει άλυτο από την πλευρά της καθαρής και μόνο λογικής.Κοινωνικές συμβάσεις η επικοινωνία,οι αναλογίες που οι παίκτες κάνουν σύμφωνα με την εμπειρία τους και οι καθημερινέςιδέες για τυχερούς αριθμούς, όλα αυτά θα μπορούσαν να επηρεάσουν το ποιάι σορροπία θα επιτευχθεί.Οπως ο Schelling (1960) έγραψε, προβλέποντας τι θα κάνουν οι παίκτες σε αυτά τα παίγνια **μόνο με καθαρή θεωρία είναι σαν να προσπαθείς να αποδείξεις ότι είναι ένα ανέκδοτο είναι αστείο χωρίς να το πεις.**

1.4.3 Παράδειγμα 3 "Καλλιστεία" και επαναλαμβανόμενη Κυριαρχία

Στο περίφημο βιβλίο *Γενική Θεωρία της Απασχόλησης, του επιτοκίου, και των χρημάτων*, του Keynes γίνεται μια αναλογία μεταξύ της χρηματιστηριακής αγοράς και ενός διαγωνισμού εφημερίδας όπου οι άνθρωποι πρέπει να μάντεψουν ποιά πρόσωπα το κοινό θα διαλέξει ότι είναι τα πιο όμορφα: "Δεν είναι η περίπτωση της επιλογής εκείνων που,με την κρίση του ο καθένας διαλέγει ποιά είναι πραγματικά η ομορφότερη,ούτε εκείνης που κατά μέσο όρο είναι πραγματικά η ομορφότερη. Έχουμε φτάσει στον τρίτο βαθμό, όπου έχουμε αφιερώσει την νοημοσύνης μας στην πρόβλεψη για το ποιά θα είναι η μέση γνώμη που η κοινή γνώμη θα έχει.Υπάρχουν και μερικοί,πιστεύω, που φτάνουν στον τέταρτο,τον πέμπτο και υψηλότερους βαθμούς"(1936, σελ.. 156).Αυτό το απόσπασμα δεν είναι ίσως το καταλληλότερο από ό, τι στο έτος 2001 (όταν το πρωτοέγραψα),αμέσως μετά οι τιμές των μετοχών του αμερικανικού διαδικτύου αυξήθηκαν σε απίστευτα ύψη στη μεγαλύτερη κερδοσκοπική φούσκα της ιστορίας.(Σε ένα σημείο, η αποτίμηση της αγοράς του βιβλιοπώλείου Amazon, η οποία ποτέ δεν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

είχε αναφέρει κάποιο κέρδος,άξιζε περισσότερο από τον συνδυασμό όλων των άλλων αμερικανών βιβλιοπωλών.)

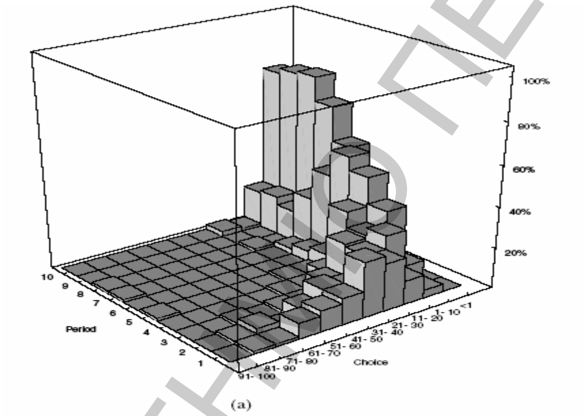
Ένα απλό παίγνιο που αιχμαλωτίζει το σκεπτικό που ο Keynes είχε στο μυαλό καλείται παίγνιο«διαγωνισμού ομορφιάς» (καλλιστεία) (βλέπε Nagel, 1995, και Ho, Camerer, andWeigelt, 1998). Σε ένα τυπικό παίγνιο καλλιστείων,ο καθένας απο τους N παίκτες ταυτόχρονα επιλέγει έναν αριθμό Xi στο διάστημα [0 - 100].Πάρτε το μέσο όρο των αριθμών και πολλαπλασιαστε με ενα πολλαπλάσιο p<1 (p = έστω 0,7).Ο παίκτης του οποίου ο αριθμός είναι πλησιέστεροςσε αυτό το στόχο (70 τοις εκατό του μέσου όρου) κερδίζει ένα έπαθλο.Προτού προχωρήσετε,σκεφτείτε τι αριθμό θα επιλέγατε.Το παίγνιο «διαγωνισμού ομορφιάς»μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δούμε αν οι άνθρωποι "Εξασκούν τους τέταρτο, πέμπτο, και υψηλότερους βαθμούς" της λογικής όπως ο Keynes αναρωτιώταν.Να και το πώς.Οι περισσότεροι παίκτες ξεκινούν με τη σκέψη,"Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος όρος είναι 50 ".Στη συνέχεια, θα πρέπει να επιλέξετε 35,που βρίσκεται πιο κοντά στο στόχο του 70 τοις εκατό του μέσου όρου και να νικήσετε.Αλλά αν νομίζετε ότι όλοι οι παίκτες θα σκεφτούν με αυτόν τον τρόπο ο μέσος όρος θα είναι 35, έτσι, ένας πονηρός παίκτης όπως εσύ (σκεπτόμενος ένα βήμα μπροστά) θα πρέπει να επιλέξει το 70 τοις εκατό του 35, περίπου 25.Αλλά αν νομίζετε ότι όλοι οι παίκτες σκέπτονται με αυτό τον τρόπο θα πρέπει να επιλέξετε το 70 τοις εκατό των 25, δηλαδή 18.

Στην αναλυτική θεωρία των παιγνίων,οι παίκτες δεν σταματούν αυτό το σκεπτικό και το επαναλαμβάνουν έως ότου επιτευχθεί το σημείο καλύτερης απόκρισης.Αλλά, δεδομένου ότι όλοι οι παίκτες θέλουν να επιλέξουν το 70 τοις εκατό του μέσου όρου,αν επιλέξουν όλοιτον ίδιο αριθμό πρέπει να είναι μηδέν.(Δηλαδή, αν έχετε την επίλυση της εξίσωσης x * = 0,7 x *, έχετε βρει τη μοναδική ισορροπία του Nash.)

Το παίγνιο του «διαγωνισμού ομορφιάς» παρέχει ένα πρόχειρο μέτρο του αριθμού των βημάτων της στρατηγικής σκέψης που τα άτομα ακολουθουν.Αυτό ονομάζεται «παίγνιο κυρίαρχης λύσης»,επειδή μπορεί να" λυθεί "-δηλαδή,μια ισορροπία μπορεί να υπολογιστεί - επαναλαμβάνοντας την εφαρμογή της δεσπόζουσας θέσης.Μια κυριαρχούμενη στρατηγική είναι αυτή που παράγει μια χαμηλότερη πληρωμή από μια άλλη (κυρίαρχη) στρατηγική,ανεξάρτητα του τι κάνουν οι άλλοι παίκτες.Η επιλογή ενός αριθμού πάνω από 70 είναι μια κυριαρχούμενη στρατηγική επειδή η υψηλότερη δυνατή τιμή είναι 70,έτσι θα είναι πάντα καλύτερη επιλογή ένας αριθμός μικρότερος από 70.Αλλά αν κανείς δεν παραβιάσει την κυριαρχία επιλέγοντας πάνω από 70,τότε η υψηλότερη τιμή που θα υπάρχει θα είναι το 70 τοις εκατό του 70, δηλαδή το 49.Η επαναλαμβανόμενη διαγραφή των κυριαρχούμενων στρατηγικών οδηγεί στο μηδέν.

Πολλά ενδιαφέροντα παίγνια είναι επιλύσιμα κυριαρχικά.Ένα γνωστό παράδειγμα στα οικονομικά είναι το δυοπώλιοτου Cournot.Δύο επιχειρήσεις επιλέγουν ποσότητες παρόμοιων προϊόντα να παράγουν.Δεδομένου ότι τα προϊόντα τους είναι η ίδια, η τιμή της αγοράς καθορίζεται από την συνολική ποσότητα που παράγουν (και από τη ζήτηση των καταναλωτών).Είναι εύκολο να δείξουμε ότι υπάρχουν τόσο μεγάλες ποσότητες προιόντων που οι επιχειρήσεις θα χάσουν χρήματα επειδή πλημμυρίζουν την αγορά με μεγάλη προσφορά που θα οδηγήσει τις τιμές σε πολύ χαμηλά επίπεδα για να καλύψουν τα πάγια έξοδα.Αν υποθέσουμε οτι ο αντίπαλος σας δεν θα παράγει τόσο πολύ, τότε η παραγωγή μικρότερων ποσοτήτων είναι κακή (κυριαρχούμενη) επιλογή για σας.Εφαρμόζοντας αυτή τη λογική επαναληπτικά οδηγούμαστε σε μια συγκεκριμένη λύση.Στην πράξη, είναι απίθανο οι άνθρωποι να εκτελέσουν περισσότερα από ένα-δυο των βήματων της επαναλαμβανόμενης σκέψης, λόγω των ορίων της μνήμης (Δηλαδή, τη ποσότητα των πληροφοριών που οι μπορούμε να κρατήσουμε στο μυαλό μας με τη μία).Σκεφτείτε περίπλοκες φράσεις όπως «ο σκύλος του Kevin δάγκωσε τον ταχυδρόμο του David του οποίου το αγόρι της αδελφής του,του έδωσε τον σκύλο.»Σε ποιόν αναφέρεται το «του» στο τέλος της πρότασης.Μέχρι να φτάσουν στο τέλος,πολλοί άνθρωποι έχουν ξεχάσει που ανήκει το σκυλί επειδή μνήμη τους δεν χωράει όλες τις πληροφορίες.Οι περιπλοκες προτάσεις είναι δύσκολο να κατανοηθούν.Παίγνια επιλύσιμα μέσω της κυριαρχίας είναι παρόμοια στην λογική τους πολυπλοκότητα.Η επαναλαμβανόμενη λογική απαιτεί,επίσης, να πιστεύεις ότι οι άλλοι σκέφτονται σκληρά, και σκέφτονται ότι σκέφτεστε σκληρά.Όταν έπαιξα αυτό το παίγνιο σε μια συνάντηση των έμπιστων του δοικιτικού συμβουλίου της Caltech,ένα πολύ έξυπνο μέλος του διοικητικού συμβουλίου (ένας γνωστός Ph.D. στα χρηματοοικονομικά)επέλεξε **18.1**.Αργότερα εξήγησε την επιλογή του: Ήξερα οτι η ισορροπία του Nash ήταν 0, αλλά κατάλαβα πως το μέσο μέλος του διοικητικού συμβουλίου της Caltech ήταν αρκετά έξυπνο για να κάνει ενα δύο βήματα με τον ίδιο συλλογισμό και να διαλέξει 25.Τότε γιατί να μην επιλέξει 17,5 (το οποίο είναι 70 τοις εκατό του 25);Πρόσθεσε 0,6 έτσι δεν θα ισοπαλούσε με αυτούς που διάλεξαν 17,5 ή 18, και επειδή ο ίδιος φανταζόταν ότι λίγα άτομα θα διαλέξουν υψηλούς αριθμούς, που θα ωθούσαν το μέσο όρο προς τα πάνω. Αυτή είναι καλή συμπεριφορική θεωρία παιγνίων! (Αυτός δεν κέρδισε, αλλά παραλίγο...)

Τι συμβαίνει στα παίγνια «διαγωνισμών ομορφιάς»; Το σχήμα 4 δείχνει τις επιλογές σε καλλιστεία με p = 0,7 όπου πληροφορίες σχετικά με το μέσο όρο να δίνονται στους παίκτες στο τέλος καθενός απο τους δέκα γύρους.

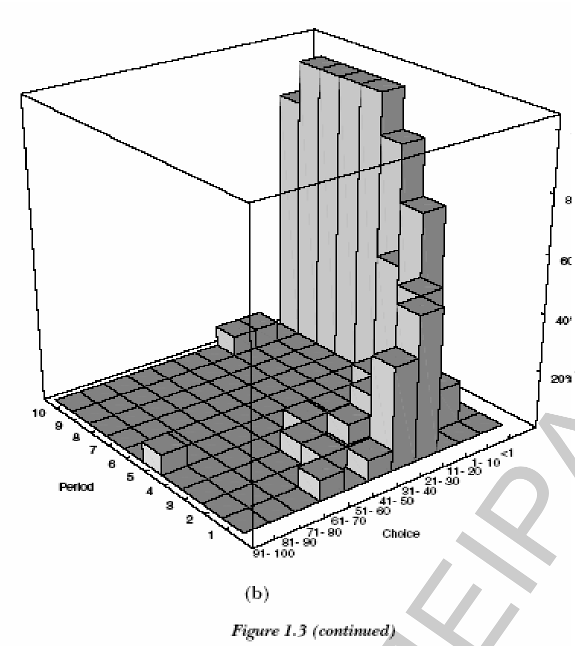


Σχήμα 1.4

(αδημοσίευτα στοιχεία από Ho, Camerer, και Weigelt).Οι στήλες δείχνουν τη σχετική συχνότητα των επιλογών σε διαφορετικά διαστήματα αριθμών (στο πλάι) σε δέκα γύρους (μπροστά). Το πρώτο ιστόγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα παιγνιών με χαμηλά κέρδη (ένα βραβείο $ 7 ανά περίοδο για ομάδες εφτά ατόμων) και το δεύτερο ιστόγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα από υψηλών ($ 28) κερδών.

Οι επιλογές απο τον πρώτο γύρο είναι περίπου 21-40. Μια προσεκτική στατιστική ανάλυση έδειξε ότι τομέσο υποκείμενο χρησιμοποιεί ένα ή δύο στάδια επαναλαμβανόμενης κυριαρχίας.Δηλαδή, τα περισσότερα άτομα με το ζόρι θα υποθέσουν ότι ο μέσος όρος θα είναι 50 και επιλέγουν 35, ή θα υποθέσουν ότι οι άλλοι θα επιλέξουν 35 και επιλέγουν 25.Πολύ λίγα άτομα επέλεξαν την μηδενική ισορροπία στον πρώτο γύρο.Στην ουσία, δεν θα πρέπει να επιλέξουν μηδέν. Ο στόχος είναι να είμαστε ένα βήμα μπροστά από το μέσο όρο,αλλά όχι παραπάνω και η επιλογή μηδέν είναι πάρα πολύ έξυπνη για να είναι καλή για σας!

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Σχήμα 1.5

Παρά το γεγονός ότι η θεωρητική ισορροπία του παιγνίου είναι μηδέν είναι μια κακή επιλογή για αρχή, οι παίκτες τείνουν αμείλικτα προς το μηδέν καθώς μαθαίνουν.Η Συμπεριφορική Θεωρία των Παιγνίων χρησιμοποιεί την έννοια της περιορισμένης επαναλαμβανόμενης συλλογιστικής κατανοήσης για την κατανόηση των αρχικών επιλογών και μια θεωρία της μάθησης για να εξηγήσει το πως κινούμαστε σε καθε γύρο Ο διαγωνισμός ομορφιάς έχει επαναληφθεί σε δεκάδες ομάδες υποκειμένων συμπεριλαμβανομένων των προπτυχιακών φοιτητών της Caltech,των διαχειριστών του διοικητικού συμβουλίου της Caltech,των οικονομικών Διδακτορικών και των θεωρητικών των παιγνίων, αναγνωστών των οικονομικών εφημερίδων (Financial Times στο Ηνωμένο Βασίλειο, Spektrum στη Γερμανία, και στην Expansion στην Ισπανία).

Τα αποτελέσματα σε όλες αυτές τις ομάδες είναι παρόμοια:Οι παίκτες χρησιμοποιούν 0-3 επίπεδα συλλογισμού, και μερικά άτομα επιλέγουν την ισορροπία του Nash στο μηδέν.Η περιορισμένη επαναλαμβανόμενη λογική που μετράμε σε αυτά τα παίγνια παρέχει μια εξήγηση για την επιμονή φαινομένων,όπως οι φούσκες στις τιμές των μετοχών που ο Keynes είχε στο μυαλό του.Ακόμα κι αν όλοι οι επενδυτές προβλέπουν ένα κραχ, που δεν "αναγάγουν" όλη τη διαδρομή μέχρι το παρόν. Υπολογίζουν ότι οι άλλοι θα πουλήσουν μερικά βήματα πριν από το κραχ, και το σχέδιο τους είναι να πουλήσουν οι ίδιοι λίγο πριν το μπαμ!.Αυτή η διαδικασία συλλογισμού δεν φτάνει εις βάθος (γιατί η αμφιβολία «αντηχεί»),το οποίο εξηγεί γιατί οι φούσκες μπορούν να παραμείνουν ακόμη και αν όλοι ξέρουν ότι τελικά θα σκάσουν. Οι Allen, Morris, και Shin (2002) κάνουν τους επιχείρημα τους σαφές και οι Camerer και Weigelt (1993) και Porter και Smith, (1994) δείχνουν ότι οι φούσκες μπορεί να συμβουν και στο εργαστήριο.

Οι φοιτητές της Caltech είναι μια χρήσιμη ομάδα υποκειμένων, επειδή έχουν εκπληκτικές αναλυτικές ικανότητες.Για πολλά χρόνια, οι εισερχόμενοι πρωτοετείς έχουν ένα μέσο όρο στα μαθηματικά κοντά στους 800 πόντους.Πρόσφατα, οι μέσες βαθμολογίες των εξεταζόμενων αιτούντων είναι υψηλότερες από το μέσο όρο των φοιτητών που έχουν γίνει δεκτοί στο Χάρβαρντ.Μελετώντας τον τρόπο με τον αυτοί οι μαθητές παίζουν απλά παίγνια καθορίζει κατά πόσο πολύ οι αναλυτικοί παίκτες μπορούν να βρουν λύση στα παίγνια.Σε γενικές γραμμές δεν παίζουν πολύ διαφορετικά από οτι οι μαθητές σε άλλες σχολές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

1.5. Πειραματική Κανονικότητα και Συμπεριφορική Θεωρία Παιγνίων

Το βιβλίο αυτό είναι μια μακροσκελής απάντηση στην ερώτηση που οι μαθητές της θεωρίας των παιγνίων κάνουν συχνά:"Αυτή η θεωρία είναι ενδιαφέρουσα. . . αλλά οι άνθρωποι παίζουν πραγματικά με αυτόν τον τρόπο;"Η απάντηση, δεν αποτελεί έκπληξη, είναι μεικτή.Δεν υπάρχουν ενδιαφέροντα παίγνια στα οποία τα υποκείμενα θα φτάσουν μια προβλεπόμενη ισορροπία αμέσως. Και δεν υπάρχουν παίγνια τόσο περίπλοκα που τα υποκείμενα δεν θα συγκλίνουν προς την κατεύθυνση της ισορροπίας με αρκετή εμπειρία στο εργαστήριο.Σκεφτείτε τα τρία παραπάνω παραδείγματα.Σε διαπραγματεύσεις τελεσίγραφο, οι παίκτες είναι μακριά από την τέλεια ισορροπία- προυποθέτοντας την ιδιοτέλεια,αλλά είναι περίπου σε ισορροπία όταν προτίμηση του *Δέκτη* να αντιμετωπιστεί σωστά λαμβάνεται υπόψη (διότι προσφέρει μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους απ' οτι παρατηρήθηκε απο τα ποσοστά απόρριψης).Η Συμπεριφορική Θεωρία των παιγνίων εξηγεί αυτά τα αποτελέσματα σε συνδυασμό με νέες θεωρίες κοινωνικής χρησιμότητας και με την αναλυτική θεωρία των παιγνίων.Στα παίγνια ηπειρωτικού χάσματος και στα καλλιστεία,οι παίκτες ξεκινούν μακριά από την ισορροπία και συγκλίνουν κοντά σε αυτήν σε δέκα περίπου γύρους. Η Συμπεριφορική Θεωρία των παιγνίων εξηγεί αυτά τα αποτελέσματα,χρησιμοποιώντας τις έννοιες της περιορισμένης συλλογιστικής ικανότητας μιας και οι παίκτες πρώτα σκέφτονται ένα παίγνιο και μετά εξακριβώνουν τις θεωρίες της μάθησης

Ο Σέρλοκ Χολμς, δήλωσε,**"Τα δεδομένα, τα δεδομένα! Δεν μπορώ να φτιάξω τούβλα χωρίς πηλό."**Τα πειραματικά αποτελέσματα είναι πηλός για τη συμπεριφορική θεωρία των παιγνίων.Ο στόχος είναι να μην "Διαψεύσουν" τη θεωρία των παιγνίων (μια κοινή αντίδραση των ψυχολόγων και των κοινωνιολόγων), αλλά να την βελτιώσουν με την καθιέρωση της κανονικότητας,η οποία εμπνέει νέα θεωρία. Χωρίς κάποια παρατήρηση,οι θεωρητικές υποθέσεις περιορίζονται σε τυχαίες ψευδο-εμπειρικές εργασίες,ανεπίσημες δημοσκοπήσεις σε σεμινάρια και συζητήσεις γραφείου και προσωπικές διαισθήσεις κάποιου (δημοσκόπηση ενός ερωτώμενου).Οι βιολόγοι δεν ρωτάνε απλά "Αν ήμουν ένας κοκκινολαίμης σε αναζήτηση τροφής, πώς θα μπορούσα να το κάνω; "Θα παρακολουθήσουν κοκκινολαίμηδες στην αναζήτηση τροφής,ή θα ρωτήσουν κάποιον που έχει δει.Ο θεωρητικός (και part-time πειραματιστής) EricVanDamme, μεταξύ άλλων, ανησυχεί σχετικά με τις επιπτώσεις του να έχουμε πολύ λίγα στοιχεία αυτού του είδους στην θεωρία των παιγνίων (1999, σελ. 204.):

Χωρίς να έχουμε μια ευρεία ομάδα γεγονότων στα οποία να θεωρητικολογίσουμε, υπάρχει ένας ορισμένος κίνδυνος να ξοδέψουμε πάρα πολύ χρόνο φτιάχνοντας κομψά μαθηματικά μοντέλα,παρόλα αυτά με ελάχιστη σχέση με την πραγματική συμπεριφορά.Στο παρόν η εμπειρική γνώση μας είναι ανεπαρκής [ακριβώς η ίδια λέξη που οι vonNeumann και Morgenstern χρησιμοποίησαν πενήντα χρόνια πριν!] και είναι μια ενδιαφέρουσα ερώτηση το γιατί οι θεωρητικοί των παιγνίων αναζητούν πιο συχνά σε ψυχολόγους τις πληροφορίες σχετικά με την εκμάθηση και πληροφορίες για τις διαδικασίες επεξεργασίας που χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο.

Τα δεδομένα (data) είναι ιδιαίτερα σημαντικά για τη θεωρία των παιγνίων, επειδή υπάρχουν συχνά περισσότερες από μία ισορροπίες και το πώς συμβαίνει η εξισορρόπηση δεν είναι απόλυτα κατανοητό. Τα καθαρά μαθηματικά από μόνα τους δεν μπορούν να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα.Για ποιό λόγο η εμπειρική παρατήρηση έπαιξε μικρό ρόλο στην θεωρία των παιγνίων μέχρι πρόσφατα; Μια πιθανότητα είναι ότι ο αρχικός πειραματισμός θεωρήθηκε οτι είχε «αποτύχει».Σε ένα συνέδριο της RAND 1952, πολλοί θεωρητικοί (συμπεριλαμβανομένου και του τελικά βραβευμένου με Νόμπελ Nash) συγκεντρώθηκαν για να σκεφτουν για τη θεωρία των παιγνίων.Εκαναν επίσης μερικά πειράματα, τα αποτελέσματα των οποίων δεν επιβεβαίωναν τη θεωρία και με αποτέλεσμα να αποθαρρυνθούν ο Nash και οι άλλοι (Nasar, 1998).Το ενδιαφέρον για τα δεδομένα υπέφερε από το γεγονός ότι παρα πολλά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ενδιαφέροντα μαθηματικά παζλ ήταν ανοικτά για λύση στη θεωρία των παιγνίων για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα.Από το 1970 περίπου και μετά, οι εξελίξεις στη θεωρία των επαναλαμβανόμενων παιγνιών,παίγνια με ελλιπείς πληροφορίες και εφαρμογές σε σημαντικούς τομείς όπως οι σχέσεις εντολέα-εντολοδόχου, πολιτικές επιστήμες οδήγησαν σε μια έκρηξη της θεωρίας.Νομίζω ότι αυτοί οι πρώτοι πειραματιστές έκαναν ένα λάθος από την υπερβολική συγκέντρωση στα παίγνια με ισορροπίες συνδιασμού στρατηγικών.Σε αυτά τα παίγνια,οι παίκτες έχουν χαμηλά χρηματικά κίνητρα και οι προβλέψεις τους εξαρτώνται από τις εικασίες τους για τον κίνδυνο, οι οποίες είναι δύσκολο να μετρηθούν ή ακόμη και να ελεγχθούν.Πολλές "σύγχρονες" ιδέες στη συμπεριφορική θεωρία των παιγνίων προτάθηκαν για πρώτη φορά πολύ νωρίς στην ιστορία της θεωρίας παιγνίων, και αγνοήθηκαν ή ξεχάστηκαν.Στην διατριβή του ο Nash (1950) περιέγραψε μια ερμηνεία «μαζικής δράσης» της ισορροπίας παρόμοια με την σύγχρονη εξελικτική θεωρία παιγνίων (Weibull, 1995).

Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι αυτή η επιδίωξη ήταν εξαιρετικά διορατική και αναγκαία, αλλά πραγματοποιήθηκε με ελάχιστη εμπειρική καθοδήγηση οποιουδήποτε είδους.Υπάρχει επίσης η αμφιβολία ότι είναι καιρός να αυξηθεί η αναλογία της παρατήρησης σε σχέση με τη θεωρία.Είναι επίσης ενθαρρυντικό το γεγονός ότι ορισμένοι θεωρητικοί έχουν στρέψει σοβαρά την προσοχή τους στην οριοθετημένη μοντελοποίηση ή τη διαδικαστική λογική επίσημα πια. (Π.χ., Rubinstein, 1998) .
Φυσικά, τα πειραματικά δεδομένα αποτελούν μία μόνο συνιστώσα της συμπεριφορικής Θεωρίας των Παιγνίων.Λεπτομερή στοιχεία σχετικά με τους γνωστικούς μηχανισμούς και τις δοκιμές πεδίου είναι επίσης σημαντικό αποτέλεσμα σε ελεγχόμενα πειράματα.

Τα πειραματικά στοιχεία δείχνουν ότι κανένα από τα κορυφαία θεωρητικά πλαίσια για την ανάλυση των παιγνιών στην παραδοσιακή μη συνεργατική Θεωρία παιγνιών δίνουν μια πλήρως αξιόπιστη άποψη της συμπεριφοράς από μόνα τους,αλλά οι περισσότερες συμπεριφορές μπορούν να γίνουν κατανοητές από την σύνθεση των ιδεών από τα πλαίσια, σε συνδυασμό με την εμπειρική γνώση σε αναλογίες που εξαρτώνται με προβλέψιμους τρόπους για το περιβάλλον.

Η ταχεία ανάπτυξη της συμπεριφορικής θεωρίας των παιγνίων θα εξαρτηθεί από το πώς οι επιστήμονες θα αντιδράσουν στα δεδομένα Οι αντιδράσεις ποικίλλουν. Αν μας επιρρεάσει με την κομψότητα της η αναλυτική θεωρία των παιγνίων ίσως λάβουμε τα δεδομένα, σαν να δείχνουν απλά το πόσο τα υποκείμενα εχουν καταλάβει το παίγνιο και τι κίνητρο είχαν.Εάν τα δεδομένα επιβεβαιώνουν τη θεωρία των παιγνίων, θα μπορούσε να πει κανείς, τα υποκείμενα πρέπει να έχουν καταλάβει το παίγνιο,αν τα δεδομένα δεν την επιβεβαιώνουν,τα υποκείμενα μάλλον δεν το έχουν καταλάβει.Αντισταθείτε σε αυτό το συμπέρασμα.Τα παίγνια είναι συνήθως απλά, και οι πειραματιστές ελέγχουν προσεκτικά την κατανόηση του παιγνιού χρησιμοποιώντας ένα κουίζ για να βεβαιωθούν οτι οι συμμετέχοντες γνωρίζουν πως οι επιλογές τους οδηγούν στις αντίσοιχες εξοφλήσεις.Επιπλέον, δίνοντας στο υποκείμενο να κατανοήσει τα δεδομένα, δεν υπάρχει κανένας τρόπος να διαψεύστει η θεωρία.Οι φυσικοί και οι βιολόγοι δεν θα έχουν την ίδια αντίδραση εάν μια θεωρία για σωματίδια ήταν να διαψευστεί ύστερα από προσεκτικό πειραματισμό («Τα σωματίδια είναι μπερδεμένα!") ή αν τα πουλιά δεν ψάξουν για τα τρόφιμα, όπως αναμενόταν.Οι θεωρητικοί των παιγνίων θα πρέπει να είναι σε ίδιο βαθμό ανοιχτό-μυαλοι σε οτι η συμπεριφέρα των ατόμων μπορεί να τους διδάξει για την ανθρώπινη συμπεριφορά.Στην πραγματικότητα, τα στοιχεία που αναφέρονται ως επιβεβαίωση της θεωρίας των παιγνίων υποστηρίζεται συχνά απο ένα βασικό στοιχείο της συμπεριφορικής θεωρίας των παιγνίων δηλαδή, ότι για να φτάσουμε στην εξισορρόπηση μπορεί να χρειαστεί ένα μεγάλο χρονικό διάστημα,ίσως χρόνια ή δεκαετίες (και η εξισορρόπηση είναι ένα ζωτικής σημασίας συστατικό για κάθε θεωρία).Στον πρόλογο του βιβλίου των Roth και Soto-mayor(1990) για τη θεωρία της αντιστοίχισης των αγορών, ο λαμπρός μαθηματικός Robert Aumann σημειώνει ότι ο αλγόριθμος Gale-Shaple είχε στην πραγματικότητα χρησιμοποιηθεί ήδη από το 1951 για την ανάθεση των ασκούμενων σε νοσοκομεία των Ηνωμένων Πολιτειών,είχε εξελιχθεί από μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

διαδικασία δοκιμής και λάθους που κράτησε περισσότερο από μισό αιώνα. . . . στον *πραγματικό* κόσμο,όταν οι μετοχές είναι χαμηλά,το κέρδος δεν είναι πέντε δολάρια, αλλά μια επιτυχημένη καριέρα και οι άνθρωποι έχουν το χρόνο για να κατανοήσουν την κατάσταση, οι προβλέψεις της θεωρίας των παιγνίων τα πάνε αρκετά καλά.

Σημειώστε ότι ο "χρόνος για να κατανοήσουν την κατάσταση" στον οποίο αναφέρεται ο Aumann είναι πενήνταχρόνια!Σε ένα τέτοιο χρονικό,μια θεωρία μάθησης ή εξισορρόπησης είναι απαραίτητη.Μια άλλη αντίδραση που μπορεί να έχετε είναι να επικρίνετε τις λεπτομέρειες του πειραματικού σχεδιασμού. Aumann, πάλι, γράφει (1990, σελ. xi.):

Μερικές φορές υποστηρίζεται ότι η θεωρία παιγνίων δεν είναι «περιγραφική» του «πραγματικού κόσμου, " οι άνθρωποι δεν συμπεριφέρονται πραγματικά σύμφωνα με τις προδιαγραφές της θεωρίας των παιγνίων.Για να υποστηρίξουμε τους εν λόγω ισχυρισμούς,κάποιοι εργαζόμενοι έχουν διεξάγει πειράματα που χρησιμοποιούν υποκείμενα με μικρό κίνητρο, υποκείμενα που δεν καταλαβαίνουν περί τίνος πρόκειται και που αποπληρώνονται με ψίχουλα,σαν να είναι αυτά τα πειράματα που αντιπροσωπεύουν τον πραγματικό κόσμο.

Ο Aumann αναφέρεται σε μια προηγούμενη γενιά πειραμάτων στη δεκαετία του 1960 και του 1970 τα οποία δεν ήταν ευαίσθητα στο θέμα της κατανόησης και των κινήτρων.Σύγχρονα πειράματα που περιγράφονται σε αυτό το βιβλίο-ως επί το πλείστον από τα τελευταία δέκα χρόνια – σέβονται πλήρως τις ανησυχίες του Aumann έχουν σχεδιαστεί με αυτές στο μυαλό.Τα άτομα είναι συνήθως φοιτητές κολεγίου με αναλυτικές ικανότητες οι οποίοι τεστάρονται και έχουν υψηλό κίνητρο.Μια άλλη αντίδραση που είναι πιθανό να έχετε, όταν η συμπεριφορά δεν συμβαδίζει με την αναλυτική θεωρία των παιγνίων είναι ότι τα άτομα έπαιζαν ένα διαφορετικό παίγνιο από αυτό που δημιούργησε ο πειραματιστής.Τέτοιες εξηγήσεις είναι χρήσιμες αν μπορούν να ελεγχθούν και να απορριφθούν.Ωστόσο,αυτές οι εξηγήσεις κάνουν τους πειραματιστές να ανατριχιάζουν όταν γίνονται εν αγνοία τους ενώ έχουν δώσει εξαιρετική προσοχή στο να εξασφαλίσουν,την κατανόηση απο το υποκείμενο,τον έλεγχο για την ανωνυμία,στην προσπάθεια να δημιουργήσουν one-shot παίγνια και τις διαφορές στα μερίδια και την ομάδα υποκειμένων για να ελέγξουν πόσο δυνατά είναι τα αποτελέσματα. Ένα παρόμοιο θέμα θίγουν οι Dixit και Skeath (1999). Ο Stephen Jay Gould (1985) υποστήριζε ότι ο μέσος όρος των χτυπημάτων στο μπέιζμπολ συνέκλιναν τον 20ο αιώνα,λόγω των δυναμικών προσαρμογών στο γήπεδο, τη ρίψη, και τα χτυπήματα.Οι Dixit και Skeath το περιγράφουν ως "μια ενθαρρυντική ιστορία, που προέρχετε από την πραγματική ζωή, του πώς οι παίκτες μαθαίνουν να παίζουν στρατηγικές ισορροπίας. "Αλλά η μάθηση ήταν της τάξης των δεκαετιών, πράγμα που σημαίνει οτι μια συμπεριφορική θεωρία της μάθησης είναι εξίσου σημαντική (ή περισσότερο) από ό, τι μια έννοια ισορροπίας.

Για παράδειγμα, μια κοινή ερμηνεία του γεγονότος ότι οι Δέκτες (ανταποκρινόμενοι) απορρίπτουν τις προσφορές στα παίγνια τελεσίγραφο είναι ότι νομίζουν ότι το παίγνιο μπορεί να επαναληφθεί, διότι θα συναντήσουν και πάλι τους προτείνοντες. Αλλά οι πειραματιστές προσπαθούν να εξασφαλίσουν ότι τα άτομα δεν θα συναντηθούν.Για παράδειγμα,ορισμένοι πειραματιστές πληρώνουν τα υποκείμενα, ένα την φορά,με μια μικρή καθυστέρηση μεταξύ κάθε πληρωμής και στέκονται στην αίθουσα για να βεβαιωθούν οτι τα υποκείμενα δεν περιμένουν τους άλλους να φύγουν για να ξαναμιλήσουν.Υπό αυτές τις συνθήκες,η επεξήγηση των αποτελεσμάτων του λανθασμένα-επαναλαμβανόμενου-παίγνιου τελεσίγραφο είναι απλά λάθος.Άλλοι (όπως ο περίφημα προσεκτικός Ray Battalio) είναι γνωστοί για τον άμεσο τερματισμό ενός πειράματος αν ένα υποκείμενο πει φωναχτά κάτι που οι άλλοι θα ακούσουν, ξεφεύγοντας απο τον έλεγχο του πειραματιστή.Η αντίδραση ότι τα άτομα παίζουν ένα διαφορετικό παίγνιο απο αυτό που τους προορίζεται από τον ερευνητή θα πρέπει να εξαφανιστούν όσο περισσότερο θεωρητικοί μαθένουν το τι πραγματικά συμβαίνει στα εργαστήρια και να πιστέψουν στη ποιότητα των δεδομένων που παράγετε εκεί .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Άλλη μια αντίδραση που μπορεί να έχετε είναι ότι η συμπεριφορά η οποία δεν είναι ορθολογική δεν μπορεί να αλλάξει.Για παράδειγμα, πριν από αρκετά χρόνια οι Matsushima και Abreu,δήλωσαν οτι τα πειραματικά αποτελέσματα είναι συχνά ελλειπήτης "παραμικρής λογικής εξήγησης."Διαφωνώ: Σχεδόν όλα τα αποτελέσματα που αναφέρονται σε αυτό το βιβλίο μπορούν να βολευτούν συμπεριλαμβάνοντας συμπεριφορικά στοιχεία,κοινωνική χρησιμότητα, επαναλαμβανόμενη περιορισμένη λογική, και μάθηση – στην αναλυτική θεωρία.Αυτοί συνεχίζουν ρωτόντας, "Θα πρέπει τότε να εγκαταλείψουμε το παράδειγμα της λογικής; "Φυσικά και όχι. Είναι πολύ χρήσιμο ως πηγή ξεκάθαρουν προβλέψεων, και είναι συχνά μια καλή πρόβλεψη τουπεριορισμού της συμπεριφοράς. Η Συμπεριφορική Θεωρία των Παιγνίων επεκτείνει τη λογική,δεν την εγκαταλείπει. Το τελευταίο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου μας δείχνει το πως.

1.6 Θεωρία Παιγνίων Ν Ατόμων

Σε έναν κόσμο με πολλαπλά ενδιαφέροντα, άλλες φορές σε διαμάχη και άλλες σε συνεργασία μεταξύ τους, όλα τα γεγονότα και οι ποσότητες από μόνα τους δεν οδηγούν απαραίτητα με σαφήνεια σε μια «σωστή» απόφαση ή σε μία «δίκαιη» κατανομή πόρων. Πράγματι, το ουσιαστικό νόημα των λέξεων «σωστό» και «δίκαιο» είναι θέμα κρίσης σε έναν πολυμορφικό κόσμο. Η ισχύς αυτού γίνεται ξεκάθαρη από τη θεωρία παιγνίων n-ατόμων. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μερικά από τα βασικά σενάρια μιας θεωρίας παιγνίων n-ατόμων, με επεξηγήσεις από την οικονομική θεωρία.

Με αυτή τη σύντομη παρουσίαση ελπίζω να δώσω μόνο μία ιδέα για τις τρέχουσες τάσεις της έρευνας σε ό,τι αφορά τη θεωρία παιγνίων n ατόμων και όχι μία ολοκληρωμένη έρευνα. Θα προσπαθήσω να ορίσω δύο ή τρία από τα βασικά σενάρια της θεωρίας και μετά να τα εφαρμόσω σε απίστευτα απλά μαθηματικά μοντέλα συναγωνιστικών καταστάσεων. Θα ήθελα να τονίσω ότι σκοπός μου θα είναι να επεξηγήσω την ίδια τη θεωρία και όχι να παρουσιάσω εφαρμογές.

Αρχικά, μερικές γενικές παρατηρήσεις για τον όρο «n-άτομα»: Ένα παιχνίδι 0 ατόμων, αν θέλετε, είναι ένα μηχανικό μοντέλο ή μοντέλο συμπεριφοράς αν εμπλέκονται ανθρώπινοι πράκτορες. Ένα παιχνίδι ενός ατόμου είναι το συνηθισμένο πρόβλημα απόφασης, με ίσως «το Φυσικό» (έναν μη παίκτη) να προσωποποιεί το στοιχείο της αβεβαιότητας που αντιμετωπίζει ο λήπτης αποφάσεων. Με δύο ή περισσότερους παίκτες, εμφανίζεται ένα διαφορετικό είδος αοριστίας, εξαιτίας της άσκησης της ελεύθερης επιλογής των ανεξάρτητων πρακτόρων. Με τρείς ή περισσότερους πράκτορες, ο συνασπισμός που σχηματίζεται, γίνεται μία σημαντική και μερικές φορές αποφασιστική πιθανότητα και σ΄ αυτό το σημείο εισάγουμε τον χαρακτηριστικό τομέα της θεωρίας παιγνίων n-ατόμων.

- Ψυχρός πόλεμος
- Διεθνές εμπόριο
- Πολιτικές εκλογές
- Αγορές
- Συλογική ιδιοκτησία
- Γραφειοκρατία
- Διεθνείς στόχοι

Τυπικά, τα διάφορα ενδιαφέροντα σε ένα παίγνιο n ατόμων έχουν αντίθετους σκοπούς. Παράλληλα ενδιαφέροντα (όπως η θεωρία ομάδων) ή εντελώς αντίθετα ενδιαφέροντα (όπως στη θεωρία του μηδενικού αθροίσματος, παιχνίδια δύο ατόμων) τείνουν να εξαλείφουν το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

πρόβλημα του συνασπισμού και ως εκ τούτου επιτρέπουν να χρησιμοποιηθούν πιο σαφείς μέθοδοι σύντομης βελτιστοποίησης και minimax εργαλεία που δεν αποτελούν μεγάλη βοήθεια για τις δυσκολίες του γενικού «παιγνίου n-ατόμων».

Η θεωρία n ατόμων ασχολείται με στοιχεία όπως η συνεργασία, ο συνασπισμός, η οργανωτική δομή, η δέσμευση, η εμπιστοσύνη, ο συμβιβασμός, η απειλή και γενικά όλο το νομικό, κοινωνικό, πολιτισμικό περιβάλλον. Υποβαθμίζει τα προβλήματα των τακτικών βελτιστοποίησης, τη λεπτομερή τήρηση των κανόνων και τον αριθμητικό υπολογισμό των αποτελεσμάτων και των πληρωμών. Άσχετα με αυτό, η θεωρία παραμένει ελαφρώς μαθηματική.

Ο γωνιόλιθος της θεωρίας είναι η ιδέα της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός παιγνίου, μία θεμελιώδης ιδέα χάρη στον μαθηματικό John Von Neumann. Η χαρακτηριστική συνάρτηση θέτει μία αριθμητική τιμή σε κάθε δυνατό συνασπισμό παιχτών. Είναι αξιοσημείωτη όχι γι'αυτά που λέει για το παιχνίδι για το οποίο υπολογίζεται, αλλά γι' αυτά που δε λέει. Όταν αναγάγουμε ένα παιχνίδι στη χαρακτηριστική του συνάρτηση, εικονικά όλες οι λεπτομέρειες των κινήσεων, των πληροφοριών, του χρόνου και των πληρωμών καταστέλλονται. Ακόμη, όπως είδε ο Neumann, η καρδιά των προβλημάτων των n-ατόμων παραμένει, ξεγυμνωμένη από όλους τους στρατηγικούς περισπασμούς.

Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** δεν είναι επαρκής για όλα τα παιχνίδια, πάραυτα υπάρχουν *δύο σημαντικές συνθήκες για τη χρήση της*:

1) Πρέπει να υπάρχουν χρήματα ή κάτι που να δρά σαν αυτά. Αλλιώς το ενδεχόμενο ενός συνασπισμού μπορεί να μη καταλήξει σε μονό αριθμό, αναπαριστώντας μία επιχείριση που μοιράζεται ελεύθερα στα μέλη της.

2) Ο φόβος της ακριβής διεκπεραίωσης δε θα πρέπει να αποτελεί ένα καθοριστικό παράγοντα στις αλληλεπιδράσεις του συνασπισμού. Η χαρακτηριστική συνάρτηση υποθέτει απαισιόδοξα ότι κάθε συνασπισμός θα βιώσει τις πιο καταστροφικές αντενέργειες από τους υπόλοιπους παίκτες. Ακόμα, οι δαπανηρές απειλές είναι πάντα υπό διαπραγμάτευση.

Έχουν αναπτυχθεί γενικεύσεις και προσθήκες για την ιδέα της χαρακτηριστικής συνάρτησης, οι οποίες παρακάμπτουν αυτούς τους περιορισμούς. Ευτυχώς υπάρχουν ενδιαφέρουσες κλάσεις χαρακτηριστικών συναρτήσεων παιχνιδιών, με χρήματα και χωρίς απειλές, ιδιαίτερα στον οικονομικό τομέα. Πράγματι, η χρήση χρημάτων είναι σχεδόν ο ορισμός μιας οικονομικής δραστηριότητας, καθώς η «χειρότερη απειλή» σε πολλές οικονομικές καταστάσεις είναι απλώς να απαλαγείς να πάς το συνάλλαγμα κάποιου κάπου αλλού ή να δραστηριοποιηθείς μόνος σου
.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι βέβαια απλά η αρχή. Είναι ένα περιγραφικό εργαλείο, ένα εργαλείο ταξινόμησης, μια «προ-λύση». Στις δύο τελευταίες δεκαετίες, έχουν επινοηθεί πολλές απόψεις για τη λύση ενός παιχνιδιού, οι περισσότερες από τις οποίες βασίζονται στη χαρακτηριστική συνάρτηση και μισή δωδεκάδα συνεχίζει να τραβάει την προσοχή μαθηματικών, οικονομολόγων και πολιτικών επιστημόνων. Μια πλειοψηφής θεωρία έχει αναπτυχθεί: κάθε διαδικασία λύσης, με το δικό της τρόπο, απευθύνεται σε κάποια πλευρά του ΄προβλήματος n ατόμων.

Η Ομάδα παρέτο (Pareto set), μία παρόμοια ιδέα από την οικονομική θεωρία που απλώς αναγνωρίζει τα αποτελέσματα που δεν υπόκεινται σε ταυτόχρονη βελτίωση για όλα τα μέρη.

Ο πυρήνας (core), επεκτείνει αυτή την αρχή σε όλα τα υποσύνολα των παιχτών: κανένας συνασπισμός, όσο και αν προσπαθήσει, δεν μπορεί να βελτιώσει το πλήθος όλων των μελών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

του, αν η κατάσταση είναι «in the core». Ωστόσο πολλά παιχνίδια δεν έχουν πυρήνες και γι΄αυτό είναι κληρονομικά ασταθή. Γενικός κανόνας είναι ότι τα οικονομικά παιχνίδια έχουν πυρήνες, ενώ αυτά που βασίζονται σε πολιτικά μοντέλα δεν έχουν.

Η τιμή (value) δεν προσφέρει σταθερότητα αλλά «παζαρεύει» τη θέση. Παρέχει μία εκ των προτέρων διατίμηση της αξίας όταν εμπλέκεται σε ένα παιχνίδι. Θα πώ περισσότερα για την τιμή.

Στα πολιτικά παίγνια, όπου ο έλεγχος και όχι τα χρήματα είναι το κέρδος, η αξία έχει ερμηνευτεί σαν μέτρο δύναμης (power index) και χρησιμοποιείται ευρέως σαν τεστ για τη "δικαιότητα" των ηλεκτρονικών και των νομοθετικών συστημάτων. Άλλοι δημοφιλείς μέθοδοι λύσης, όπως τα διαπραγματευτικά αποτελέσματα και τα σταθερά αποτελέσματα των Neumann και Morgenstern ψάχνουν να αναγνωρίσουν κατανομές ή σχηματισμούς που είναι σταθεροί ή «λογικοί» με βάση διάφορα κριτήρια. Επίσης η συναγωνιστική ισορροπία των κλασικών οικονομικών, παρότι μια κατασκευή συμπεριφοράς, συχνά κάνει μια ενδιαφέρουσα σύγκριση με μία ή περισσότερες θεωρητικές λύσεις του παιχνιδιού, σε μοντέλα όπου και τα δύο μπορούν να προσδιοριστούν.

Έχω διαλέξει ένα σύνολο από οικονομικά παραδείγματα , όσο αφορά το το θέμα της κυριότητας ενός παραγωγικού πόρου σε ένα πολυπληθές αλληλεπιδραστικό πλαίσιο. Πρόσφατα, ο Martin Shubik (ένας οικονομολόγος του Yale και σύμβουλος του Rand) και εγώ κάναμε έρευνα σε καμιά δωδεκαριά περίπου τέτοια μοντέλα σκεπτόμενοι /αντανακλώντας διαφορετικές σχετικές φόρμες κυριότητας. Όλα ξεκίνησαν με την ίδια τεχνολογία, μία απλή συνάρτηση παραγωγής, που όταν αναλύεται σαν παιχνίδια n-ατόμων οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι είναι αρκετά διαφορετικές.

Υπάρχουν δύο είσοδοι ,ας πούμε land(γή) και labor (εργάτης), και μία έξοδος, ας πούμε corn (καλαμπόκι). Ας υποθέσουμε αρχικά ότι σε κάποιον ανήκει όλη η γή έτσι ώστε η έξοδος να είναι μόνο μία συνάρτηση f(x) του αριθμού των εργατών που δουλεύουν στο χωράφι. Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι εύκολο να βρεθεί. Ένας συνασπισμός που δεν περιέχει τον ιδιοκτήτη γής δεν μπορεί να παράγει τίποτα, ενώ ένας συνασπισμός που τον περιλαμβάνει παράγει f(s-1) , όπου s το μέγεθος του συνασπισμού. Για να δείξουμε πως μπορούμε να λύσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση, ας υπολογίσουμε την τιμή της λύσης. Η τιμή σε κάθε παίκτη ορίζεται ως το μέσο ποσό που συνεισφέρει στην αξία ενός συνασπισμού. Ένας εύκολος τρόπος για να φτάσουμε σε αυτό το μέσο είναι να φανταστούμε τους παίκτες να μετακινούνται σε τυχαία σειρά, όπως μία τράπουλα με χαρτιά, και μετά να φτιάξουμε ένα συνασπισμό με ένα παίκτη κάθε φορά μέχρι να μπούν όλοι.

Αφήνουμε τον κάθε παίκτη να πληρωθεί το ποσό που το συμπλήρωμά του προσθέτει στην αξία του αυξανόμενου συνασπισμού. Μετά ποιές είναι οι αναμενόμενες πληρωμές λαμβάνοντας υπ΄όψη την τυχαία ανάμιξη; Παρά την τεχνικότητα αυτού του σχήματος, η αναμενόμενη πληρωμή του κάθε παίκτη είναι ίση με την τιμή του παιχνιδιού γι΄αυτόν.

Στο παρόν παράδειγμα, οι τιμές είναι εύκολο να προκύψουν. Ξεκινήστε με τον ιδιοκτήτη γής. Στην τυχαία ανάμιξη, θα εμφανιστεί σε οποιαδήποτε θέση από 1 έως n+1 με ίσες πιθανότητες. Στην θέση s , θα είναι s-1 αγρότες που θα προηγούνται από αυτόν, και η είσοδός του στον συνασπισμό θα ωθήσει την παραγωγή από το μηδέν στο f(s-1), το ύψος της καμπύλης, εκείνη τη στιγμή. Υπολογίζοντας το μέσο όρο στο s, παρατηρούμε ότι η τιμή του είναι ουσιαστικά η περιοχή κάτω από την καμπύλη παραγωγής. Εδώ όλο το ορθογώνιο αναπαριστά την τελική τιμή του παιχνιδιού. Οι τιμές των αγροτών, επομένως, διαιρούν την υπολοιπόμενη περιοχή. Παρατηρείστε πως αυτή η λύση εξαρτάται από ολόκληρη την καμπύλη παραγωγής. Αυτή είναι σε σημειωμένη αντίθεση με την κλασική συναγωνιστική ισορροπία. Με αυτή την προσέγγιση, ο εργάτης θεωρείται σαν ένα εμπόρευμα για πώληση ,και η τιμή εξισώνεται με την

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

οριακή παραγωγή, πχ το προστιθέμενο ποσό του προϊόντος που οφείλεται στον n-οστό εργάτη. Ο συνολικός λογαριασμός μισθού βρίσκεται σχεδιάζοντας μία εφαπτόμενη γραμμή στο y όπως φαίνεται. Επειδή η οριακή παραγωγή είναι μικρότερη από τη μέση παραγωγή στο παράδειγμά μας, ο ιδιοκτήτης βγάζει κέρδος, το οποίο μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από την τιμή του παιχνιδιού του. Για παράδειγμα, μία μικρή περιοχή κάτω από την καμπύλη σημαίνει ότι ο ιδιοκτήτης μπορεί να "εκβιαστεί" από μετρίου μεγέθους συνασπισμούς αγροτών , και αυτή η χαμηλή τιμή θα έχει επίδραση σε αυτή την ευάλωτη θέση αγοράς. Η κλασική λύση, είναι ευαίσθητη μόνο στην κλίση της καμπύλης στη γειτονική του μεγάλου παραγωγικού σημείου.

Στο δεύτερο μοντέλο, καταργούμε τον ιδιοκτήτη γής, και δίνουμε τη γή στους αγρότες. Αφού η συμμετρική υπόθεση δεν είναι και τόσο ενδιαφέρουσα από μόνη της, υποθέτουμε ότι τα οικόπεδα έχουν διαφορετικό μέγεθος, και για μεγαλύτερη ποικιλία, επιτρέπουμε στους παίκτες να έχουν διάφορες εκτάσεις γής για να συνεισφέρουν. Η παραγωγή τώρα εκφράζεται σαν μία συνάρτηση δύο μεταβλητών : F(c,l). Μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι υπάρχει "κλιμακωτή οικονομία" στη συνάρτηση F, έτσι ώστε όταν ένας συνασπισμός σχηματίζεται, κάνουν καλύτερη συγχώνευση της γή τους αλλά και της εργασία τους. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$v(s) = F\left(\sum_s ci, \sum_s li\right)$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα μίας τάξης παιχνιδιών που έχει μελετηθεί ενδελεχώς από μαθηματικούς, κάνοντας χρήση των μεθόδων της μετρικής θεωρίας. Σε ένα τόσο "μετρικό παιχνίδι", η αξία ενός συνασπισμού εξαρτάται μόνο από τα μέτρα μιάς ή περισσότερων πηγών συγχωνεύσεων που προέρχονται από τα μέλη. Η τιμή της λύσης ενός παιχνιδιού μέτρησης είναι ανάλογη με ένα μέσο των μέτρων – που σε αυτή την περίπτωση είναι οι κατανομές της γής και των εργασιών.

Τα μέτρα που προκύπτουν από αυτό το παράδειγμα μπορούν να αποδειχτούν αρκετά εύκολα αν υποθέσουμε ότι αν η F(c,l) είναι της μορφής c/C f(l) , με το f ίδιο όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα (και L=n). Το μέτρο που δίνεται στην είσοδο land είναι η περιοχή A1,κάτω από την καμπύλη παραγωγής και αυτό που δίνεται στην είσοδο labor είναι η περιοχή A2,πάνω και αριστερά από την καμπύλη.

Αυτό είναι ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα αν η περιοχή A1 είναι μεγάλη, τότε η εργασία είναι απίθανο να έχει μικρή προμήθεια, ακόμα και αν ένας υποσυνασπισμός δραστηριοποιηθεί μόνος του, και η αξία ενός ανθρώπου εξαρτάται κυρίως από τη γή που παρέχει. Αλλά εάν το A1 είναι μικρό, τότε η εργασία είναι πιθανό να είναι αποφασιστικής σημασίας και η λύση δίνει μικρό βάρος στην κατανομή της διανομής της γής.

Πολλές άλλες μορφές ιδιοκτησίας μπορούν παρομοίως να μοντελοποιηθούν σαν παιχνίδια. Το μοντέλο της ενσωματωμένης ιδιοκτησίας, συγκεκριμένα, παρουσιάζει πολλές διακρίσεις ελέγχου στρατηγικής, αντικειμενικής ενσωμάτωσης και δικαιωμάτων της μειοψηφίας των ιδιοκτητών που μοιράζονται. Δεν υπάρχει χρόνος για λεπτομέρειες αλλά ένα αποτέλεσμα το οποίο βρήκα εγώ και ο Shubik ίσως και να σας ενδιαφέρει. Στο μοντέλο είναι σημαντικό να διευκρινίσουμε εάν η ενσωμάτωση , κατά την πρόσληψη εργατών, επιτρέπει να γίνονται διακρίσεις στα μέλη του συνασπισμού που έχει τον έλεγχο. Η επίδραση στη χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μικρή, αλλά δεν παύει να είναι σημαντική: διαπιστώσαμε επανελλημένα ότι επιτρέποντας διακρίσεις εξαλείφεται ο πυρήνας του παιχνιδιού. Αυτό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σημαίνει ότι αν ξαναρχίσουμε, μπορούμε να παίξουμε τις αμερόληπτες εκδοχές με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε συνασπισμός να παίρνει τουλάχιστον τη χαρακτηριστική του τιμή. Αλλά τα μεροληπτικά παιχνίδια μπορεί να μην είναι τόσο σταθερά. Κάποιος ανεπηρέαστος συνασπισμός μπορεί να αποδειχθεί ότι έχει τη δύναμη να επηρεάσει το μερίδιό του.

Αυτά τα μοντέλα που παρουσίασα είναι υπεραπλουστευμένα και μη ρεαλιστικά. Η θεωρία παιγνίων φυσικά μπορεί να γίνει ακόμα πιο περίπλοκη. Πιστεύω όμως ότι ο ρόλος της τώρα δεν περιορίζεται στο να δείξουμε μεγαλύτερα και πιο περίτεχνα μοντέλα, τα οποία θα αποσκοπούσαν στο να δώσουν συγκεκριμένες συμβουλές σε συγκεκριμένους λήπτες αποφάσεων που θέλουν να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα. Όπως και οποιαδήποτε άλλη επιστημονική θεωρία, ο σκοπός της θα πρέπει να είναι να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τα φαινόμενά της.

Προς το παρόν τουλάχιστον, η θεωρία παιγνίων n ατόμων προορίζεται στο να υπηρετεί πιο αποτελεσματικά σαν κριτής, τόσο εποικοδομητικά όσο και καταστροφικά, προβάλλοντας τα άγνωστα συμπεράσματα και τα 'τυφλά σημεία' της πιο παραδοσιακής θεωρίας ενός ατόμου ή ακόμη και απλές προσεγγίσεις συμπεριφοράς σε πιο σύνθετους λήπτες αποφάσεων.

1.7 Συμπέρασμα

Αυτό το κεφάλαιο περιέγράψε τρία παραδείγματα που δείχνουν την πειραματική κανονικότητα και άφησε να εννοηθεί πως η κανονικότητα έχει επισημοποιηθεί στη Συμπεριφορική Θεωρία των Παιγνίων. Στο παίγνιο τελεσίγραφο,οι προτείνοντες προσφέρουν συνήθως κοντά στο μισό του ποσού και οι ανταποκρινόμενοι απορρίπτουν τις προσφορές που είναι πάρα πολύ χαμηλές, επειδή αντιπαθούν την αδικία.Το παίγνιο είναι τόσο απλό που είναι αδύνατο να το πιστέψει κανείς,οι Δέκτες αφού απορριψουν τη συναλλαγή βρίσκονται σε σύγχυση και το ίδιο αποτέλεσμα έχει αναπαραχθείγια πολύ υψηλά στοιχήματα (έως και $ 400 στην Αμερική, και συγκρίσιμα ποσά σε ξένες χώρες).Σύμφωνα με τη Συμπεριφορική Θεωρία των Παιγνίων,ανταποκρινόμενοι απορρίπτουν τις χαμηλές προσφορές, επειδή τους αρέσει μεν να κερδίζουν χρήματα, αλλά αντιπαθούν δε την άδικη μεταχείριση).

Στα παίγνια ηπειρωτικού χάσματος, οι παίκτες κλίνουν προς κάποια ισορροπία με την πάροδο του χρόνου και συχνά καταλήγουν σε αναποτελεσματικές ψευδοσορροπίες που θα μπορούσαν να έχουν αποφευχθεί.Η Συμπεριφορική θεωρία του παιγνίου το εξηγεί αυτό με την παραδοχή του ότι οι παίκτες δεν είναι σίγουροι για το τι να κάνουν (στην αρχή του παιγνίου) και επιλέγουν τους αριθμούς στη μέση,ύστερα ανταποκρινονται στο ιστορικό σύμφωνα με απλούς κανόνες στατιστικών γνώσεων.Στα παίγνια καλλιστείων,οι παίκτες φαίνεται να κάνουν ένα ή δύο συλλογιστικά βήματα του για το τι σκέφτονται οι άλλοι και μετά σταματάνε.(Η Αναλυτική θεωρία των παιγνίων υποθέτει ότι συνεχίζουν μέχρι να καταλήξουν στην καλύτερη αμοιβαία απάντηση-ισορροπίας.)Και να μαθαίνουν με την πάροδο του χρόνου.Τα επόμενα κεφάλαια επεκτείνονται σε αυτά τα αποτελέσματα καθώς και σε άλλες κατηγορίες παιγνίωνν(μικτές ισορροπίες, διαπραγματεύσεις,σηματοδότηση, και δημοπρασίες). Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε με την παρουσίαση βασικών εισαγωγικών στοιχείων πάνω στην θεωρία παιγνίων Ν ατόμων με ταυτόχρονη παρουσίαση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 2

2. Το δίλημμα του ταξιδιώτη : Παράδοξα της λογικής στην θεωρία παιγνίων

Εισαγωγή

Αυτή η εργασία παρουσιάζει μια παραβολή που αναδεικνύει τη σύγκρουση μεταξύ αντίληψης και λογικής της θεωρίας των παιγνίων.Ένα από τα βασικά συστατικά της ανάλυσης στη θεωρία παιγνίων είναι η"προς τα πίσω επαγωγή". Αλλά η προς τα πίσω επαγωγή είναι επίσης πηγή μερικών μεγάλων παραδόξων (βλ. π.χ., Ken Binmore, 1987, Philip Pettit και Robert Sugden, 1989).Ονομαστά παίγνια όπως το υπερ επαναλαμβανόμενο "δίλημμα του φυλακισμένου», η «αλυσίδα καταστημάτων" (1978) του Reinhart Selten,η "σαρανταποδαρούσα" του Robert Rosenthal (1981) και το "take-it-orl-eave-it"του Phil Reny (1993) υπογραμμίζουν αυτή τη σύγκρουση μεταξύ της προς τα πίσω επαγωγικής λογικής και άλλων ειδών λογικής.

Μεγάλη προσπάθεια έχει γίνει για να λυθεί το πρόβλημα.Σχεδόν όλες αυτές οι προσπάθειες εκμεταλλεύονται την εκτεταμένη δομή των ανωτέρω παιγνίων ή το γεγονός ότι παίζονται στην πάροδο του χρόνου.Οι Thus Binmore και Branden berger Adam (1990) παρατηρούν ότι αυτά τα παράδοξα οφείλονται στο γεγονός ότι οι παίκτες των παραπάνω παιγνίων μπορούν να "κάνουν εκπλήξεις" ο ένας στον άλλο, παρεκκλίνοντας από την πορεία που προτείνεται από την επαγωγή προς τα πίσω.Αν όλες οι κινήσεις όλων των παικτών που συμβαίνουν σε μια χρονική στιγμή,"ρίξουν εκπλήξεις" θα είναι ασήμαντο,διότι δεν θα επηρεαστεί η συμπεριφορά κανενός.Ο Reny (1993) εντοπίζει, επίσης, το παράδοξο στον «σειριακό» χαρακτήρα αυτών των παιγνίων,με το επιχείρημα ότι το πρόβλημα οφείλεται στο γεγονός ότι "κατά τη διάρκεια" ορισμένων παιγνίων,η λογική του Bayesian δεν μπορεί να είναι γνωστή απ' όλους.Το παρόν έγγραφο δείχνει ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι βαθύτερο, επειδή μπορεί να προκύψει και μέσα σε ένα μόνο παίγνιο. Αυτό γίνεται με την κατασκευή ενός παράδοξου παιγνίου «το δίλημμα του ταξιδιώτη.»Η προς τα πίσω επαγωγή στο δίλημμα του ταξιδιώτη συμβαίνει σε ένα εσωστρεφές επίπεδο.Οι τυπικές προτάσεις ενάντια στο παράδοξο της προς τα πίσω επαγωγής, όπως για παράδειγμα,στο δίλημμα του φυλακισμένου(Cristina Bicchieri, 1989) δεν φαίνεται να πιάνουν τόπο εδώ.Ως εκ τούτου, αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με την απόδοση ασυνήθιστων δομών γνώσης σε απρόσιτους κόμβους.Όλη η αντίληψη φαίνεται να αντιστρατεύεται κάθε επίσημης αιτιολογίας στο δίλημμα του ταξιδιώτη.Ως εκ τούτου,το δίλημμα του ταξιδιώτη φαίνεται να είναι μια από τις πιο αγνές μορφές παράδοξου του ορθολογισμού στην θεωρία παιγνίων,διότι αποφεύγει όλα τα περιττά στοιχεία, όπως το παίγνιο στην πάροδο του χρόνου ή η μη αυστηρότητα της ισορροπίας.

2.1 Η Παραβολή

Δύο ταξιδιώτες που επιστρέφουν σπίτι από ένα μακρινό νησί, απο το οποίο αγόρασαν ίδιες αντίκες (ή, μάλλον, κάτι που ο τοπικός φύλαρχος πνίγοντας το γέλιο του περιγράφει σαν «αντίκες»),ανακαλύπτουν ότι η αεροπορική εταιρεία κατάφερε να τις σπάσει,όπως συμβαίνει συχνά με τις αεροπορικές εταιρίες.Ο manager της αεροπορικής εταιρείας που περιγράφεται από τους νεώτερους του ως «θαύμα της εταιρείας»,με το οποίο εννοούν «άνθρωπος χωρίς πονηριά»,διαβεβαιώνει τους δυο επιβάτες του οτι θα έχουν τη σωστή αποζημίωση.Αλλά επειδή δεν γνωρίζει το κόστος των αντικειμένων, τους κάνει την ακόλουθη πρόταση.Κάθε ένας από

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

τους δύο ταξιδιώτες θα πρέπει να γράψει σε ένα κομμάτι χαρτί το κόστος της αντίκας.Αυτό μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 2 μονάδων χρήματος και 100 μονάδων. Συμβολίζουμε τον αριθμό που επέλεξε ο ταξιδιώτης i σαν Ni.Αν και οι δύο γράψουν τον ίδιο αριθμό, δηλαδή, N1 = N2,τότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι λένε την αλήθεια(έτσι σκέφτεται ο manager) και έτσι στον καθένα από αυτούς τους ταξιδιώτες θα πρέπει να καταβληθεί N1 (ή N2) μονάδες χρήματα.

Αν ο ταξιδιώτης i γράψει ένα μεγαλύτερο αριθμό από ό, τι το άλλο(δηλαδή, Ni> Nj),τότε είναι λογικό να υποθέσει κανείς (έτσι φαίνεται στον manager) ότι ο j είναι ειλικρινής και ο i λέει ψέματα.Σε αυτή την περίπτωση ο διαχειριστής θα αντιμετωπίσει τον μικρότερο αριθμό,δηλαδή Nj ως το πραγματικό κόστος και θα πληρώσει τον ταξιδιώτη i το ποσό Nj-2 και θα πληρώσει τον j το ποσό των Nj +2. =Ο ταξιδιώτης i πληρώνεται 2 μονάδες λιγότερο ως ποινή για το ψέμα και ο j πληρώνεται 2 μονάδες περισσότερο ως ανταμοιβή για την ειλικρίνειά του σε σχέση με τον άλλο ταξιδιώτη.Δεδομένου ότι κάθε ταξιδιώτης ή παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει πληρωμή του (ή το κέρδος) τι αποτέλεσμα θα πρέπει κάποιος να περιμένει να δει στο παραπάνω παίγνιο;Με άλλα λόγια, ποιό ζευγάρι στρατηγικών, (N1, N2), θα επιλεγεί από τους παίκτες;

Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό είναι χρήσιμο πρώτα να εκφράσουμε αυτό το παίγνιο ως ένα πίνακα πληρωμών (pay-off matrix).Παρατηρήστε ότι το παραπάνω παίγνιο θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει τουλάχιστον δύο εκδοχές,ανάλογα με το αν οι παίκτες μπορούν να επιλέξουν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ή να επιλέξουν μόνο έναν ακέραιο.Για την περισσότερη ώρα θα υποθέσουμε πως συμβαίνει το τελευταίο,δεδομένου ότι εκεί βρίσκεται το κύριο πρόβλημα.Όταν υποθέσουμε οτι συμβαίνει το πρώτο,θα αναφερθούμε στο παίγνιο,σαν την "διαρκή εκδοχή του διλήμματος του ταξιδιώτη."

2.1.1 Το παράδοξο

Εκ πρώτης όψεως, οι δύο παίκτες αισθάνονται ικανοποιημένοι που μπορούν να πάρουν 100 χρηματικές μονάδες ο καθένας.Για να τις πάρουν,κάθε παίκτης πρέπει απλά να γράψει 100 στο χαρτί.Σύντομα όμως ο κάθε παίκτης συνειδητοποιεί ότι, αν ο άλλος παίκτης ακολουθήσει αυτό το σχέδιο τότε μπορεί να πάρει 101 χρηματικές μονάδες γράφοντας 99.Αλλά, φυσικά και οι δύο παίκτες θα σκεφτούν το ίδιο, πράγμα που σημαίνει ότι κάθε παίκτης θα πάρει στην πραγματικότητα 99 μονάδες. Αν όμως και οι δύο σχεδιάζουν να γράψουν 99, τότε ο κάθε παίκτης θα σκεφθεί πως μπορεί να κάνει καλύτερα γράφοντας 98 και ούτω καθεξής.Η λογική είναι αμείλικτη και δεν υπάρχει καμία παύση ώσπου να φτάσουμε στο στρατηγικό ζευγάρι (2,2), όπου ο κάθε παίκτης επιλέγει να γράψει 2.Ως εκ τούτου,θα καταλήξουν παίρνοντας δύο χρηματικές μονάδες ο καθένας.Αυτό μας δείχνει πως η προς τα πίσω επαγωγή,στο επίπεδο της ενδοσκόπησης, λειτουργεί ακόμα και σε ένα παίγνιο one-shot.

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι όλοι οι τυποποιημένοι τρόποι λύσης προβλέπουν αποτέλεσμα (2,2).Εκεί βρίσκεται η μοναδική αυστηρή ισορροπία του παίγνιου,η μόνη ισορροπία του Nash και στην ουσία, η μόνη ορθολογική ισορροπία.Ωστόσο, φαίνεται να είναι απίθανο οποιαδήποτε δύο άτομα,ανεξάρτητα από το πόσο λογικά σκέφτονται και το πόσο σίγουροι είναι για τη λογική σκέψη ο ένας του άλλου,ανεξάρτητα απο τη γνώση του άλλου της λογικής του πρώτου και ούτω καθεξής,να παίξουν (2,2).Το πιθανό είναι ο καθένας να παίξει ένα μεγάλο αριθμό με την πεποίθηση ότι έτσι θα κάνει και ο άλλος, και με αυτόν τον τρόπο να έχουν μεγάλες απολαβές.Σε κάποιο επίπεδο το δίλημμα του ταξιδιώτη έχει μερικές ομοιότητες με τον δυοπώλιο του Bertrand,ιδιαίτερα εκείνο στο οποίο οι επιχειρήσεις επιλέγουν τιμές από ένα πίνακα,για παράδειγμα, το σύνολο των ακεραίων αρχίζοντας από έναν ακέραιο πάνω από το οριακό κόστος μέχρι τη μονοπωλιακή τιμή.Η δομή της καλύτερης λύσης ενός τέτοιου δυοπωλίου είναι παρόμοια με την δομή καλύτερης λύσης στο δίλημμα του ταξιδιώτη.Ωστόσο, εκεί αυτή η αναλογία τελειώνει.Στο δυοπώλιο του Bertrand, αν μια επιχείρηση επιλέξει μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

τιμή, ακόμη και ελαφρώς πάνω από την τιμή του άλλου, έχει κέρδος μηδέν.Η ποινή δεν είναι τόσο σοβαρή για την επιλογή μεγαλύτερου αριθμού στο δίλημμα του ταξιδιώτη.Αυτό ακριβώς είναι αυτό που καθιστά πιθανό το ότι οι παίκτες θα επιλέξουν μεγάλους αριθμούς στο δίλημμα του ταξιδιώτη. Μπορεί να είναι δυνατό, ωστόσο, να κατασκευάσθει ένα μοντέλο δυοπωλίου διαφοροποιημένων προϊόντων που είναι ακριβώς ανάλογο με το δίλημμα του ταξιδιώτη.Στο επαναλαμβανόμενο δίλημμα του κρατουμένου, έχει αποδειχθεί ότι η συνεργασία στις αρχές των παιγνίων είναι δυνατή, αν κάποιος χρησιμοποιεί το (single-shot) κριτήριο ορθολογισμού.Σε αυτό το παίγνιο το (2,2) είναι το μοναδικόλογικό αποτέλεσμα.Παρατηρήστε επίσης ότι, σε αντίθεση με αυτό το παίγνιο, στην “σαρανταποδαρούσα” ή τοπαίγνιο“take-it-or-leave-it”η "ανεπιθύμητη" ισορροπία δεν είναι αυστηρή.Ως εκ τούτου, όσον αφορά την επίσημη ανάλυση φαίνεται να μην υπάρχει διαφυγή από το (2 , 2).

Αλλά ακόμα και γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω, υπάρχει κάτι πολύ λογικό στην απόρριψη του (2,2) και στο να περιμένει ο καθένας τον αντίπαλό του να κάνει το ίδιο.Αυτή είναι η ουσία του διλήμματος του ταξιδιώτη. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι οδοί διαφυγής που δημιουργούνται, επιτρέποντας για παραλογισμό ή την προσδοκία του παράλογισμού δεν είναι σημαντικοί εδώ και ας έχουν σημασία εμπειρικά.Δεν είναι ένα σημείο εμπειρικό αυτό που εξετάζουμε εδώ.Ο στόχος είναι να εξηγήσουμε γιατί,παρά τη λογική που είναι κοινή γνώμη,οι παίκτες θα απορρίψουν το (2,2), όπως φανταζόμαστε οτι θα γίνει σε αυτή τη περίπτωση.

2.1.2 Οι δυνατότητες

Παρόλο που δεν είμαι σε θέση να επιλύσω το παραδοξο, ότι ακολουθεί παρακάτω είναι μερικές πιθανές αντιμετωπίσεις.Η δυνατότητα 1,προτείνει μια αυστηρή λύση του προβλήματος για μια ειδική περίπτωση,δηλαδή, τη διαρκή εκδοχή, οι Δυνατότητες 2 και 3 θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως υποθετικές και όχι ως τυπικές.

Δυνατότητα 1. Η διαρκής εκδοχή του διλήμματος του ταξιδιώτη έχει μια ενδιαφέρουσα διέξοδο χρησιμοποιόντας μια προσαρμογή των συνόλων CURB, που αναπτύχθηκε απο τους Basu και JorgenWeibull (1991)-όπου CURB είναι ένα ακρονύμιο για "closed un derrational behavior"(σύνολο λογικής συμπεριφοράς).

Στην διαρκή αυτή εκδοχή, το σύνολο i των στρατηγικών του κάθε παίκτη δίνεται από Si = [2.100].Έστω Ti είναι ένα υποσύνολο του Si, i = 1, 2.Το ζεύγος (TI, T2) ορίζεται ως CURB (στην πραγματικότητα «στενό CURB», Basu και Weibull [1991]),εάν Ti είναι το σύνολο όλων των καλύτερων απαντήσεων του παίκτη i στις στρατηγικές του j στο Tj,τότε i = 1, 2.Με άλλα λόγια, η στρατηγική s1, ανήκει στον T1, αν και μόνο αν υπάρχει μια στρατηγική s2 σε T2 έτσι ώστε ο παίκτης 1 να μην νέχει καλύτερη επιλογή από το να αποκλίνει μονομερώς από το (Sl, S2) .Μια άμεση εφαρμογή του συνόλου curb στην διαρκή έκδοση του διλήμματος του ταξιδιώτη δεν είναι δυνατή, διότι δεν υπάρχουν καλύτερες επιλογές σε αυτό το παίγνιο.Ωστόσο, εδώ είναι μια τροποποιημένη έκδοση του curb,την οποία θα την ονομάσουμε M-curb η οποία χρησιμοποιεί την “ιδέα”της curb.Εστω (T1, T2) *curb,αν T1 και T2 δεν είναι κενά, και, για όλα τα s2 στο T2 και όλα τα s1, στο S1, υπάρχει έστω ένα r1 στο T1, τέτοιο ώστε ο παίκτης 1 να απαντήσει εξίσου καλά στο s2 με r1, αντί του s1,ίδιο συμβαίνει και όταν οι παίκτες 1 και 2 εναλλάσσονται.

Το (T1, T2) είναι ένα M-curb αν είναι *curb και αν είναι απο μόνο του ελάχιστο, δηλαδή, δεν υφίσταται M1 το οποίο να είναι ένα κανονικό υποσύνολο του T1, ή M2 το οποίο να είναι ένα κανονικό υποσύνολο του T2 τέτοιο ώστε (M1, T2) είναι *-curb ή (T1, M2) είναι *-curb.Είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

εύκολο να δει κανείς ότι αν (T1, T2) είναι M-curb τότε το μέγιστο [Tj] είναι είτε 2 είτε δεν υπάρχει,για j = 1 ή 2.Εδώ είναι ένα παράδειγμα ενός συνόλου M-curb:[(90, 100), (90, 100)].Ως εκ τούτου, εάν ο κάθε παίκτης δεσμεύεται να παίξει στο ανοικτό διάστημα (90.100), τότε κανένας παίκτης δεν έχει το κίνητρο να αποκλίνει. Ενώ αυτό είναι μια λύση για την διαρκή εκδοχή, αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως λύση του παραδόξου, επειδή η καρδιά του παραδόξου δεν έγκειται στο τεχνικό ζήτημα του κατά πόσον οι παίκτες επιτρέπεται να χρησιμοποιούν όλους τους πραγματικούς αριθμούς ή όχι. Θα στραφώ τώρα στην εκδοχήτων ακέραιων.

Δυνατότητα 2. Αν και το δίλημμα του ταξιδιώτη έχει μια κανονική μορφή παιγνίου,εντούτοις μπορεί να θεωρηθεί σαν να έχει το «πρόβλημα του άφταστου κόμβου». Για να το δούμε αυτό, αρχίζουμε πρώτα με (α) τον καθορισμό ορθολογικού παιγνίου με το συνήθη τρόπο και, στη συνέχεια (β) υποθέτουν ότι λογική είναι κοινή γνώση.Δεδομένου ότι, (2,2) είναι το μόνο λογικό αποτέλεσμα, ακολουθεί ότι αυτό είναι που θα πρέπει να περιμένουμε μιας και η λογική εξήγιση είναι η συνέπεια των (α) και (β).Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης 1 θέλει να αποφασίσει τι θα κάνει αν απορρίψει να παίξει 2 και δοκιμάσει με ένα μεγαλύτερο αριθμό.Δεν είναι καν σαφές αν αυτό το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί. Αν είναι αλήθεια ότι τα (α) και (β) υπαινίσσουν ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει τη στρατηγική 2,τότε, ένας κόσμος όπου (α) και (β) είναι αληθή και όπου ο παίκτης επιλέγει κάποια άλλη στρατηγική είναι δύσκολο να τον διανοηθούμε,με αυτό το τρόπο τέτοια εσωστρεφή πειράματα μπορεί να μην είναι δυνατά.Μια πιθανή γραμμή της επίθεσης που αυτό προτείνει είναι να υποστηριχθεί ότι οι έμμεσες παραδοχές, (α) και (β), οι οποίες αποτελούν τη βάση της θεωρίας των παιγνίων, μπορούν από μόνες τους να μην έχουν νόημα.Στον Basu (1990) έδειξα ότι, στο πλαίσιο παιγνίων όπως την σαρανταποδαρούσα, το πρόβλημα προήλθε από την παραδοχή ότι η λογική είναι κοινή γνώση και ότι κάθε παίγνιο πρέπει να έχει μια λύση.Η μέθοδος ήταν να γράψω κάποιες απο τις ιδιότητες της λύσης,δεδομένου ότι η λογική είναι κοινή γνώση και να αποδείξω ότι αυτές οι ιδιότητες δεν μπορεί να είναι ικανοποιούνται συγχρόνως.Ωστόσο, εκεί έκανα χρήση κρίσιμης σημασίας της εκτεταμένης δομής του παιγνίου.Το δίλημμα του ταξιδιώτη μας προκαλεί να κατασκευάσουμε παρόμοια θεωρήματα χωρίς να προσφύγουμε στη σειρά του παίγνιου.

καινοτόμα γραμμή της επίθεσης.Παρατηρήστε ότι στο δίλημμα του ταξιδιώτη δεν μπορεί να υπάρξει ένα καλά καθορισμένο σύνολο στρατηγικών, Ti, εκτός από την ειδική περίπτωση Ti = {2}, τέτοιο ώστε:

i. ένας λογικός παίκτης μπορεί να παίξει οποιαδήποτε στρατηγική σε Ti και ποτέ δεν θα παίξει έξω απο αυτό το σύνολο, και
ii. ένα τέτοιο Ti μπορούμε να το συμπεράνουμε από την εξέταση του παίγνιου.

Για να το δούμε αυτό ας υποθέσουμε ότι τα T1 και T2 είναι τέτοια σύνολα.Από τη στιγμή που ο παίκτης 2 είναι απόλυτα λογικός, μπορεί να συμπεράνει οτι και ένας θεωρητικός του παιγνίου μπορεί να συμπεράνει.Ως εκ τούτου, από την (ii), μπορεί να συμπεράνει το T1.Ας είναι t ο μεγαλύτερος αριθμός σε T1.Μιας και ο παίκτης 1 δεν θα παίξει ποτέ κανένα αριθμό πάνω από t,τότε ποτέ δεν συμφέρει τον παίκτη 2 για να παίξει t.Συνεπώς T1 και T2 δεν είναι ταυτόσημα.Αλλά επειδή αυτό το παίγνιο είναι συμμετρικό και T1 και T2 συμπεραίνονται αποκλειστικά εξετάζοντας το παίγνιο,το T1 πρέπει να είναι το ίδιο με T2.Αυτή η αντίφαση ορίζει ότι δεν υπάρχει τέτοιο ζεύγος (T1, T2).

Σημειώστε ότι όλη αυτή η άσκηση ήταν για καθορισμένα (το συνηθισμένο είδος) σύνολα.Βέβαια, μπορεί να υπάρχουν ασαφή σύνολα στα οποία να μπορεί να λειτουργήσει.Φαίνεται να υπάρχει κάποιος εκ των προτέρων λόγος που να πιστεύει ότι μπορεί να υπάρξει μια οδός διαφυγής εδώ.Γυρνώντας σε μια ιδέα που έθιξα νωρίτερα,ας υποθέσουμε ότι παίκτης 1 πιστεύει ότι ο παίκτης 2 θα παίξει ένα μεγάλο αριθμό.Τότε, αν ο παίκτης 1 ήταν να αποφασίσει αν ο ίδιος θα πρέπει να διαλέξει έναν μεγάλο αριθμό ή όχι, αυτό που θα τον συμφέρει θα είναι να παίξει ένα μεγάλο αριθμό.Έτσι (μεγάλος αριθμός, μεγάλος αριθμός), φαίνεται να είναι ένα είδος ισορροπίας του Nash σε ασαφώς καθορισμένες κατηγορίες.Η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ασάφεια είναι σημαντική εδώ, διότι αν το σύνολο των μεγάλων αριθμών ήταν ένα καλά καθορισμένο σύνολο,γνωρίζουμε από την προηγούμενη παράγραφο ότι το επιχείρημα αυτό θα καταρρεύσει.

Χρησιμοποιώ εδώ για την λέξη "μεγάλος", με την έννοια της καθημερινής γλώσσας,η οποία είναι διαφορετική από την καθαρά θεωρητική ερμηνεία των συνόλων.Το τελευταίο συνεπάγεται ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών που σίγουρα δεν είναι μεγάλοι θαείναιένα καλά καθορισμένο και ξεκάθαρο σύνολο. Η καθημερινή χρήση της λέξης "μεγάλο" προφανώς δεν συμφωνεί με αυτό. Όταν αυτό λαμβάνεται σοβαρά υπόψη, πολλές αντιρρήσεις σχετικά με την ιδέα της ισορροπίας του Nash σε ασαφής κατηγορίες,που αμέσως έρχονται στο μυαλό, παύουν να ισχύουν.Η χρήση ανακριβών κατηγοριών δεν σημαίνει την παραίτηση του ορθολογισμού.Αυτό που υποστηρίξαμε σ΄αυτό το υπο-τμήμα ήταν ότι ένας τρόπος να περιμένουμε την υπόθεση ορθολογισμού όταν ειμαστε αντιμέτωποι με παράδοξα παίγνια όπως το δίλημμα του ταξιδιώτη όπου μπορεί να επιτρέπετε στους παίκτες να χρησιμοποιούν ασαφής κατηγορίες στον τρόπο σκέψης τους για το πώς να επιλέξουν σε θεωρητικές καταστάσεις παιγνίων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 3

3. Δέκα Μικροί Θησαυροί της Θεωρίας των Παιγνίων και Δέκα Αντιφάσεις της Αντίληψης

Εισαγωγή

Το έγγραφο αυτό αναφέρει εργαστηριακά δεδομένα για παίγνια που παίζονται μόνο μια φορά.Αυτά τα παίγνια εκτείνονται στις συνήθεις κατηγορίες:στατικά και δυναμικά παίγνια με πλήρεις και ελλιπείς πληροφορίες.Για κάθε παίγνιο,ο θησαυρός είναι μια επεξεργασία κατά την οποία η συμπεριφορά συμμορφώνεται ωραία με τις προβλέψεις της ισορροπίας του Nash ή με τη σχετική βελτίωση.Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο,μια αλλαγή στην δομή της πληρωμής παράγει μια μεγάλη ασυνέπεια μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και παρατηρούμενης συμπεριφοράς.Αυτές οι αντιφάσεις είναι γενικά συνεπείς με την απλή αντίληψη βασίσμένες στην αλληλεπίδραση των ασυμμετριών στην εξόφληση και θορυβώδη περισυλλογή σχετικά με τις αποφάσεις των άλλων.

3.1 Στατικά παίγνια με πλήρη στοιχεία

Η ισορροπία του Nash υπήρξε το επίκεντρο της θεωρίας των παιγνίων από την εισαγωγή της πριν από πενήντα χρόνια.Μαζί με την προσφορά και τη ζήτηση,η ισορροπία του Nash είναι μία από τις πιο χρησιμοποιημένες θεωρητικές κατασκευές για τα οικονομικά και εφαρμόζεται σε όλο και περισσότερες κοινωνικές επιστήμες. Πράγματι,η θεωρία των παιγνίων έχει κερδίσει τελικά τον κεντρικό ρόλο που οραματίστηκαν οι John von Neumann και Oscar Morgenstern ακόμα και σε ορισμένους τομείς της οικονομίας(π.χ., βιομηχανική οργάνωση)σχεδόν όλες οι πρόσφατες θεωρητικές εξελίξεις είναι εφαρμογές της θεωρίας των παιγνίων.Η εντύπωση που παίρνει κάποιος από τις πρόσφατες έρευνες και τα βιβλία της θεωρίας των παιγνίων είναι ότι το πεδίο έχει φτάσει σε μια ωριμότητα,με ξεκάθαρες ταξινομήσεις των παιγνίωνν και διαδοχικά ισχυρότερες(πιο «εκλεπτυσμένες») εκδοχές της βασικής προσέγγισης για να είναι κατάλληλη για πιο σύνθετες κατηγορίες παιγνίν: η ισορροπία του Nash για τα στατικά παίγνια με πλήρεις πληροφορίες, Bayesian Nash για στατικά παίγνια με ελλιπείς πληροφορίες, τελειότητα των υπο-παιγνίων για δυναμικά παίγνια με πλήρεις πληροφορίες και κάποια βελτίωση της διαδοχικής ισορροπίας του Nash για δυναμικά παίγνια με ελλιπείς πληροφορίες(Π.χ. Robert Gibbons, 1997).Οι παραδοχές του ορθολογισμού που αποτελούν τη βάση αυτής της ανάλυσης προηγούνται συχνά από πειστικά επίθετα,όπως «τέλεια», «έξυπνη» και «θεία».Αν οποιοδήποτε θόρυβος γίνεται δεκτός στη λήψη αποφάσεων,αποβάλλεται σε μια διαδικασία«καθαρισμού».Είναι δύσκολο να μην παρατηρήσετε παραλληλισμούς με τη θεολογία και η ιδιαίτερη μαθηματική φύση των εξελίξεων κάνει αυτό το έργο απρόσιτο για τους οικονομολόγους όπως οι θεολογικές πραγματείες για το ευρύ κοινό το μεσαίωνα.Η παραφωνία σε αυτή την άποψη της θεωρίας των παιγνίων έχει προέλθει κυρίως από τα εργαστηριακά πειράματα,αλλά η επικρατούσα άποψη μεταξύ των θεωρητικών των παιγνίων φαίνεται να είναι ότι η συμπεριφορά τελικά θα συγκλίνει στις προβλέψεις του Nash με τις σωστές προυποθέσεις.

Αυτή η εργασία παρουσιάζει μια πιο γενική προοπτική της τρέχουσας κατάστασης της θεωρίας των παιγνίων.Σε κάθε ένα από τους κύριους τύπους των παιγνίων,παρουσιάζουμε ένα ή περισσότερα παραδείγματα τα οποία η σχετική εκδοχή της ισορροπίας του Nash τα προβλέπει εξαιρετικά καλά.Οι "θησαυροί" παρατηρούνται σε παίγνια που παίζονται μόνο μία φορά από άτομα με οικονομικά κίνητρα που είχαν προηγούμενη εμπειρία σε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

άλλες,παρόμοιες,στρατηγικές καταστάσεις.Σε καθένα από αυτά τα παίγνια,ωστόσο,φαίνεται ότι η αλλαγή στην δομή της πληρωμής μπορεί να παράγει μεγάλη ανακολουθία μεταξύ της θεωρητικής πρόβλεψης και της ανθρώπινης συμπεριφοράς.Για παράδειγμα,μια αλλαγή στην πληρωμή που δεν θα μεταβάλλει την μοναδική ισορροπία Nash μπορεί να μετακινήσει τα δεδομένα στην αντίθετη πλευρά της σειράς των εφικτών αποφάσεων. Εναλλακτικά, μια αλλαγή στην πληρωμή μπορεί να προκαλέσει μια σημαντική αλλαγή στις προβλέψεις της θεωρίας των παιγνίων χωρίς να έχουν αισθητές επιπτώσεις στην πραγματική συμπεριφορά.Η παρατηρούμενες αντιφάσεις είναι συνήθως κάπως διαισθητικές,ακόμα κι αν δεν εξηγούνται από τη τυπική Θεωρία των Παιγνίων.Σε ένα παίγνιο,ταυτόχρονα,'προσπάθειας' και 'επιλογής' συντονισμού,για παράδειγμα,μια αύξηση του κόστους της "προσπάθειας"για τις αποφάσεις των παικτών φαίνεται να προκαλεί μια δραματική μείωση στην προσπάθεια,παρά το γεγονός ότι οποιαδήποτε κοινή *προσπάθεια (effort)* είναι μια ισορροπία του Nash για μια σειρά από δαπάνες προσπάθειας.Σε μερικά από αυτά τα παίγνια, φαίνεται σαν η ισορροπία του Nash να λειτουργεί μόνο από σύμπτωση,π.χ. σε συμμετρικές περιπτώσεις όπου εξισορροπούνται οι δαπάνες των σφαλμάτων και στις δυο κατευθύνσεις.Σε άλλες περιπτώσεις,η ισορροπία του Nash έχει σημαντική περιγραφική δύναμη,αλλά οικονομικά έχει σημαντικές αποκλίσεις που παραμένουν ανεξήγητες.

Η ιδέα ότι η θεωρία των παιγνίων θα πρέπει να ελέγχεται με εργαστηριακά πειράματα είναι τόσο παλιά όσο και η έννοια της ισορροπίας του Nash, και μάλιστα, το κλασικό παράδειγμα του διλήμματος του φυλακισμένου εμπνεύστηκε από ένα πείραμα που πραγματοποιήθηκε στη RAND Corporation το 1950.Μερικοί από τους στρατηγικούς αναλυτές του RAND ήταν δυσαρεστημένοι με την θεωρία του συνεταιρισμού και του μηδενικού αθροίσματος για τα παίγνια που τους είχε δωθεί απο τους von Neumann και Morgenstern (1944) στο *Θεωρία των Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά*.Ειδικότερα, η πυρηνική σύγκρουση δεν θεωρήθηκε ως ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, διότι και τα δύο μέρη θα μπορούσαν να χάσουν.Η Sylvia Nasar (1998) περιγράφει με ενδιαφέρον στο RAND όταν εξαπλωθηκε φήμη ότι ένας μεταπτυχιακός φοιτητής του Princeton,ο JohnNash,είχε γενικεύσει την απόδειξη ύπαρξηςτου vonNeumann για μηδενικού αθροίσματος παίγνια για όλα τα παίγνια με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών.Δύο μαθηματικοί, οι Melvin Dresher και Merrill Flood,εξήγαγαν κάποια πειράματα σε παίγνια με τους συναδέλφους τους, και ήταν δύσπιστοι ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά θα συμφωνούσε με την ιδέα του Nash για ισορροπία.Στην πραγματικότητα, σχεδίασαν ένα πείραμα που διεξήχθη την ίδια ημέρα που άκουσαν σχετικά με την απόδειξη του Nash.Κάθε παίκτης σε αυτό το παίγνιο είχε μια κυρίαρχη στρατηγική να αποστατήσει,αλλά και οι δύο θα κερδιζαν περισσότερο εάν χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική συνεργασίας.Το παίγνιο επαναλήφθηκε 100 φορές με τους ίδιους δύο παίκτες, και παρατηρήθηκε μια καλή δόση συνεργασίας.Ένας από τους καθηγητές του Nash,ο Al.W.Tucker,είδε τις πληρωμές (payoffs) για αυτό το παίγνιο γραμμένες σε ένα μαυροπίνακα και εφηύρε την ιστορία του διλήμματος του φυλακισμένου που χρησιμοποιήθηκε αργότερα σε μια διάλεξη για τη θεωρία των παιγνίων που έδωσε στο Τμήμα Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου του Στάνφορντ (Tucker, 1950).

Είναι ενδιαφέρουσα, η απάντηση του Nash στους Dresher και Flood για το επαναλαμβανόμενο πείραμα του διλήμματος του φυλακισμένου που περιέχεται σε σημείωμα προς τους συγγραφείς και δόθηκε στη δημοσιότητα ως υποσημείωση στην έρευνα τους:"Το ελάττωμα στο πείραμα ως δοκιμή της θεωρίας του σημείου ισορροπίας είναι ότι το πείραμα συγκεντρώνει τους παίκτες να παίξουν ένα μεγάλο παίγνιο με πολλές κινήσεις.Κάποιος ίσως δεν θα μπορεί να σκεφτεί το πράγμα ως μια ακολουθία ανεξάρτητων παιγνίων όπως μπορεί κανείς στις μηδενικού αθροίσματος περιπτώσεις.Υπάρχει απλά πάρα πολύ αλληλεπίδραση ... »(αποσπάσματα από Nasar, 1998).Σε αντίθετη περίπτωση,τα πειράματα που εκθέτουμε σε αυτή την έρευνα περιλαμβάνουν παίγνια που παίχτηκαν *μόνο μία φορά*,αν και σχετικά αποτελέσματα για επαναλαμβανόμενα παίγνια με τυχαία αντιστοίχιση θα αναφερθούν οπου χρειάζετε.Όπως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σημειώνει ο Nash,το πλεονέκτημα των παιγνίων που παίζονται μια μόνο φορά είναι ότι απομονώνουν την συμπεριφορά από τα κίνητρα για συνεργασία και την αμοιβαιότητα που υπάρχει στα επαναλαμβανόμενα παίγνια.Ένα πιθανό μειονέκτημα των παιγνίων που παίζονται μονο μια φορα είναι ότι,χωρίς την δυνατότητα μάθησης και προσαρμογής,τα άτομα μπορεί να είναι ιδιαίτερα επιρρεπή στις επιδράσεις της σύγχυσης.Τα παίγνια που χρησιμοποιούνται στο παρόν έγγραφο, εντούτοις,είναι αρκετά απλά στην δομή για να διασφαλιστεί η παρατήρηση της συμπεριφοράς σαν του Nash στη διαδικασία του "θησαυρού".Επιπλέον, η μελέτη των παιγνίων που παίζονται μόνο μια φορά είναι ανεξάρτητα του ενδιαφέροντος λόγω των διαδεδομένων εφαρμογών της θεωρίας του παιγνίου για τα μοντέλα«με τη μια» (*one-shot*) αλληλεπιδράσεων στα οικονομικά και άλλες κοινωνικές επιστήμες, π.χ. τις δημοπρασίες, τις εκλογές, τις στρατιωτικές εκστρατείες, καθώς και τις νομικές διαφορές.

Οι κατηγορίες των παιγνίων που θα μελετήσουμε βασίζονται στις συνήθεις διακρίσεις:στατική εναντίον δυναμικής και τέλειας εναντίον ατελούς πληροφορίας. Το τμήμα I περιγράφει τα πειράματα που βασίζονται στα στατικα παίγνια με πλήρεις πληροφορίες:κοινωνικό δίλημμα,ταιριαγμα των cents, και τα παίγνια συντονισμού . Το τμήμα II περιλαμβάνει τα αποτελέσματα από δυναμικά παίγνια με πλήρη στοιχεία: παίγνια διαπραγματεύσεων και παίγνια με αναξιόπιστες απειλές.Τα παίγνια που αναφέρονται στα τμήματα III και IV έχουν ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με τις πληρωμές των άλλων παικτών:με στατικές ρυθμίσεις (δημοπρασίες) και ρυθμίσεις σε δυο στάδια (παίγνια σηματοδότησης).

Είναι γνωστό ότι οι αποφάσεις μπορούν να επηρεαστούν από ψυχολογικούς παράγοντες,όπως τα επίπεδα φιλοδοξίας,την κοινωνική απόσταση και το heuristics (τεχνικές επιλυσης προβλημάτων βασισμένες στην εμπειρία) (π.χ., Daniel Kahneman, Paul Slovic, και Amos Tversky, 1982, Catherine Eckel και Rick Wilson, 1999).Σε αυτή την εργασία θα προσπαθήσουμε να κρατήσουμε τους ψυχολογικούς παράγοντες σταθερούς εστιάζοντας στις αλλαγές των πληρωμών που είναι κυρίως οικονομικής φύσεως.Όπως αναφέρεται παρακάτω,οι οικονομικές θεωρίες χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν τις ανωμαλίες που προκύπτουν.Για παράδειγμα, η υπόθεση λογικής επιλογής στην οποία βασίζεται η έννοια της ισορροπίας του Nash εξαλείφει όλα τα σφάλματα,αλλά αν το κόστος της "υπέρβασης" μιας βέλτιστης απόφασης είναι πολύ χαμηλότερο από ό, τι το κόστος της «υστέρησης»,θα περίμενε κανείς μια ανοδική τάση στις αποφάσεις.Σε ένα παίγνιο, οι ενδογενείς επιπτώσεις αυτών των τάσεων μπορεί να ενισχυθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργήσουν ένα φαινόμενο "χιονοστιβάδας" που απομακρίνει τις αποφάσεις από μια πρόβλεψη του Nash. Μοντέλα που εισάγουν (ενδεχομένως μικρά) ποσά θορύβου στη διαδικασία λήψης αποφάσεων μπορεί να παράγουν προβλέψεις που είναι αρκετά μακριά από οποιαδήποτε ισορροπία του Nash.

Ένα δεύτερο είδος υπόθεσης λογικής που είναι ενσωματωμένη στην ισορροπίας του Nash είναι ότι πεποιθήσεις είναι συνεπείς με τις πραγματικές αποφάσεις.Οι πεποιθήσεις δεν είναι πιθανό να επιβεβαιωθούν από την ισορροπία, και αυτό που θα συμβεί κατά πάσα πιθανότητα σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η μάθηση. Υπάρχει μια μεγάλη πρόσφατη βιβλιογραφία για την ενσωμάτωση της μάθησης στα μοντέλα της προσαρμογής σε παίγνια που παίζονται επανειλημμένα με διαφορετικούς συμπαίκτες.Τα μοντέλα αυτά περιλαμβάνουν την αφελή Bayesian μάθηση (π.χ. David J. Cooper,Susan Garvin και John H.Kagel,Dilip Mookherjee και Barry Sopher, 1997), την ενίσχυση ή μάθηση σαν απάντηση στο ερέθισμα (π.χ. Ido Erev και Alvin E. Roth, 1998), και υβριδικά μοντέλα με στοιχεία των δύο (Colin Camerer και Teck-HuaHo, 1999).Η μάθηση μέσω της εμπειρίας δεν είναι δυνατή στα παίγνια που παίζονται μόνο μία φορά, και οι πεποιθήσεις θα πρέπει να σχηματίζονται από της διαδικασία της εσωστρεφούς σκέψης,η οποία μπορεί να υπόκειται σε σημαντικό θόρυβο.Χωρίς θόρυβο,οι επαναλαμβανόμενες καλύτερες απαντήσεις θα συγκλίνουν προς μια ισορροπία του Nash, αν συγκλίνουν καθόλου.Μερικές πολλά υποσχόμενες προσεγγίσεις για την εξηγήση των αποκλίσεων από τις προβλέψεις του Nash βασίζονται σε μοντέλα που περιορίζουν τις ικανότητες των παικτών για ενδοσκόπηση,είτε μειώνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων (π.χ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Dale O. Stahl και PaulW. Wilson, 1995 Rosemarie Nagel, 1995)είτε προσθέτοντας αυξανόμενες ποσότητες θορύβου στα υψηλότερα επίπεδα των επαναλαμβανόμενων πεποιθήσεων (Goeree και Holt, 1999,Dorothea Kübler και Georg Weizsäcker, 2000).Οι προβλέψεις που προέρχονται από αυτές τις προσεγγίσεις, συζητιούνται στο τμήμα V και γενικά συμμορφώνονται με τις προβλέψεις του Nash για την επεξεργασία (*treatment*) του θησαυρού και με τις συστηματικές, αποκλίσεις στην αντίληψη στην επεξεργασία της αντίφασης. Μερικά συμπεράσματα προσφέρονται στο τμήμα VI.

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε μια σειρά από παίγνια δύο παικτών που παίζονται με ταυτόχρονες κινήσεις,για τα οποία η ισορροπία του Nash δείχνει μια αυξανόμενη πολυπλοκότητα.Το πρώτο παίγνιο είναι ένα «κοινωνικό δίλημμα» στο οποίο η καθαρή-στρατηγική για την ισορροπία του Nash συμπίπτει με την μοναδική (ορθο)λογική έκβαση.Στη συνέχεια,λαμβάνουμε υπ΄όψην ένα παίγνιο ταιριάγματος cents (κερμάτων) με μια μοναδική ισορροπία Nash με μικτές στρατηγικές.Τέλος, θα συζητήσουμε τα παίγνια συντονισμού που έχουν πολλαπλές ισορροπίες του Nash, κάποιες από τις οποίες είναι καλύτερες για όλους τους παίκτες.

Σε όλα τα παίγνια που αναφέρονται εδώ και στις επόμενες ενότητες, χρησιμοποιήσαμε ομάδες φοιτητών,άτομα που προσλαμβάνονται από τα προπτυχιακά τμήματα οικονομικών του Πανεπιστημίου της Βιρτζίνια.Κάθε ομάδα αποτελείται από 10 φοιτητές που πληρώθηκαν 6 δολάρια για να φτάσουν στην ώρα τους,καθώς και τα χρήματα που κέρδισαν στα παίγνια που έπαιξαν.Αυτά τα παίγνια που παίζονται με τη μια ακολούθουν ένα αρχικό "μέρος Α" στο οποίο τα υποκείμενα παίζουν το ίδιο παίγνιο δύο ατόμων για 10 περιόδους με νέα τυχαία ζευγάρια σε κάθε περίοδο. Τα κέρδη απο τις δίωρες συνεδρίες κυμαίνονται από $ 15 έως $ 60,με μέσο όρο περίπου $ 35.Κάθε παίγνιο«με τη μια» (*oneshot*) ξεκίνησε με τη διανομή και την ανάγνωση των οδηγιών που παιγνίου.Αυτές οι οδηγίες περιήχαν διαβεβαιώσεις ότι όλα τα χρήματα που θα κέρδιζαν οι παίκτες θα τους καταβάλλονταν και ότι το παίγνιο θα ακολουθηθεί από "ένα άλλο, εντελώς διαφορετικό πείραμα λήψης αποφάσεων."Μιας και οι one-shot επεξεργασίες ζευγαρώθηκαν,αλλάξαμε τη σειρά των συνθηκών του θησαυρού και της αντίφασης σε όλες τις επόμενη συνεδρία.Τέλος, τα ζευγαρωμένες επεξεργασίες ήταν πάντα διαχωρίσμένες απο άλλα one-shot παίγνια διαφορετικού τύπου.

3.2 Το δίλημμα του ταξιδιώτη, Παίγνιο One-Shot

Η έννοια της ισορροπίας του Nash βασίζεται στις δίδυμες υποθέσεις της τέλειας και χωρίς λάθη λήψης αποφάσεων και τη συνοχή των δράσεων και των πεποιθήσεων.Η τελευταία αυτή προϋπόθεση μπορεί να φαίνεται ιδιαίτερα ισχυρή για την παρουσία πολλαπλών ισορροπιών,όταν δεν υπάρχει προφανής τρόπος για τους παίκτες να συντονιστούν.Πιο πειστικά επιχειρήματα μπορούν να δοθούν για την ισορροπία Nash,όταν προβλέπει το παίξιμο της μοναδικής δικαιολογημένης ή ορθολογικής δράσης (B. Bernheim, DavidG. Pierce).Η ορθολογικότητα (*rationalizability*) βασίζεται στην ιδέα ότι οι παίκτες θα εξαλείψουν τις στρατηγικές που δεν είναι ποτέ μια καλή απάντηση για οποιεσδήποτε πεποιθήσεις και να συνειδητοποιήσουν ότι οι άλλοι (λογικοί) παίκτες θα κάνουν το ίδιο.

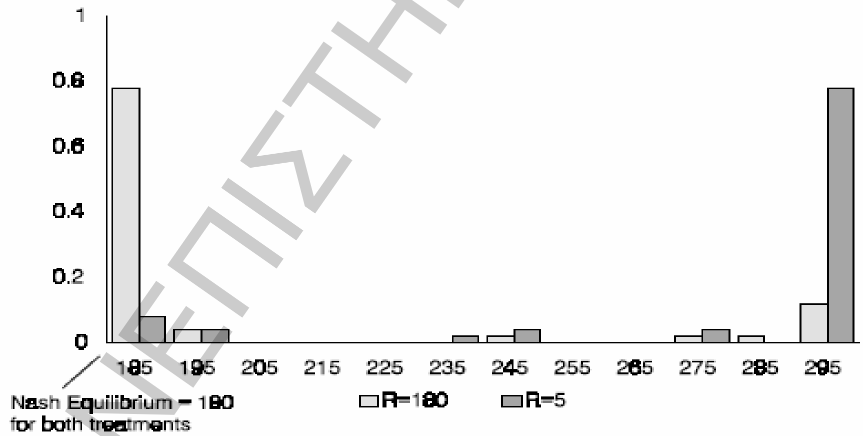
Για να φανεί αυτή τη διαδικασία, υποθέστε ένα παίγνιο στο οποίο δύο παίκτες ανεξάρτητα και ταυτόχρονα επιλέγουν ακέραιους αριθμούς μεταξύ (και συμπεριλαμβανομένων) του 180 και του 300.Και οι δύο παίκτες θα πληρωθούν το μικρότερο από τους δύο αριθμούς και, επιπλέον, ένα ποσό $R > 1$ μεταφέρεται από τον παίκτη με το μεγαλύτερο αριθμό στον παίκτη με το μικρότερο αριθμό.Για παράδειγμα,εάν ένα άτομο επιλέξει 210 και το άλλο επιλέξει 250, λαμβάνουν απολαβές 210 + R και 210 - R αντίστοιχα. Αφού $R > 1$, η καλύτερη απάντηση θα ήταν να χαμηλόσουμε την απόφαση του άλλου κατά 1 (αν η απόφαση ήταν γνωστή) και ως εκ τούτου,το ανώτατο όριο των 300 δεν είναι ποτέ μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

καλύτερη απάντηση σε οποιοδήποτε πιθανή πεποίθηση θα μπορούσε να έχει κανείς.Ως εκ τούτου, ένα λογικό άτομο πρέπει να εκχωρήσειτην πιθανότητα μηδέν στην επιλογή των 300,έτσι το 299 δεν μπορεί να είναι μια καλύτερη απάντηση σε κάθε πιθανή πεποιθήση που αποκλείει την επιλογή του 300, κλπ.Μόνο το κατώτατο όριο του 180 επιβιώνει σε αυτήν την επαναλαμβανόμενη διαδικασία διαγραφής και είναι ως εκ τούτου η μοναδική ορθολογική κίνηση και λοιπόν η μοναδική ισορροποία του Nash.Αυτό το παίγνιο εισήχθη από τον Kaushik Basu (1994) ο οποίος το ονόμασε το «δίλημμα του ταξιδιώτη».

Αν και η ισορροπία του Nash για αυτό το παίγνιο μπορεί να υποκινείται από τη διαδοχική ακύρωση των στρατηγικών που δεν είναι ποτέ η καλύτερη απάντηση(σε οποιαδήποτε πεποιθήση σχετικά με τις στρατηγικές που δεν έχουν ακόμη εξαλειφθεί από την εξέταση),αυτή η διαδικασία διαγραφής μπορεί να είναι πολύ χρονοβόρα για ανθρώπινα υποκείμενα με περιορισμένες γνωστικές ικανότητες.Όταν το κόστος για να έχεις τον μεγαλύτερο αριθμό είναι μικρό,για παράδειγμα για μικρές τιμές του R, θα περίμενε κανείς περισσότερα σφάλματα στην κατεύθυνση των υψηλών αιτήσεων, αρκετά μακριά από τη μοναδική ισορροπία στους 180 και πράγματι αυτή είναι η διαίσθηση πίσω από το δίλημμα. Σε αντίθεση, με μια μεγάλη ποινή για το να έχεις το υψηλότερο από τα δύο αιτήματα,οι παίκτες είναι πιθανό να καταλήξουν με αιτήματα που θα είναι κοντά στη μοναδική πρόβλεψη του Nash, το 180.

Για να δοκιμάσουμε αυτές τις υποθέσεις ζητήσαμε απο 50 άτομα (25 ζεύγη) να κάνουν επιλογές στη διαδικασία με R = 180 και πάλι σε μια αντιστοιχη διαδικασία με R = 5.Όλα τα υποκείμενα πήραν αποφάσεις σε κάθε διαδικασία και τα δύο παίγνια διαχωρίστηκαν από έναν αριθμό άλλων one-shot παιγνίων.Η σειρά των δύο διαδικασιών εναλλάσσονταν.Οι οδηγίες ζητούσαν από τους συμμετέχοντες να διαμορφώσουν τα δικά τους αριθμητικά παραδείγματα για να είναι σίγουρο ότι έχουν κατανοήσει την δομή των πληρωμών.



Σχήμα 3.1

. Συχνότητες αιτημάτων στο δίλημμα του ταξιδιώτη για R = 180 (ανοιχτόχρωμες στήλες) και R = 5 (σκοτεινές μπάρες)

Το Σχήμα 3.1 δείχνει τις συχνότητες για κάθε κατηγορία 10 λεπτών επικεντρωμένη στον άξονα ανάλογα με το αίτημα πληρωμής επί του οριζοντίου άξονα.Οι ανοιχτόχρωμες στήλες αφορούν την διαδικασία υψηλού -R "θησαυρών",όπου σχεδόν το 80 τοις εκατό όλων των υποκειμένων επέλεξε τη στρατηγική ισορροπία του Nash, με μέση απαίτηση το 201.Ωστόσο, περίπου το ίδιο κλάσμα επέλεξε το υψηλότερο δυνατό αίτημα στη διαδικασία χαμηλού – R, για την οποία ο μέσος όρος ήταν 280, όπως φαίνεται από τις σκουρόχρωμες ράβδους.Παρατηρήστε ότι τα δεδομένα στη διαδικασία της αντίφασης είναι συγκεντρωμένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

στο αντίθετο άκρο του συνόλου των εφικτών αποφάσεων από τη μοναδική (ορθολογική) ισορροποία του Nash.Επιπλέον, το «ανώμαλο» αποτέλεσμα για τη διαδικασία του χαμηλού-R δεν εξαφανίζεται ούτε μειώνεται με το χρόνο,όταν τα υποκείμενα παίζουν το παίγνιο επανειλημμένα και έχουν την δυνατότητα να μάθουν.Επειδή η αλλαγή της διαδικασίας δεν μεταβάλλει τη μοναδική (και λογική) πρόβλεψη του Nash,η κλασική θεωρία των παιγνίων απλώς δεν μπορεί να εξηγήσει το πιο εξέχον χαρακτηριστικό των δεδομένων,δηλαδή την επίδραση της παραμέτρου της ποινής / ανταμοιβής στο μέσο όρο των αιτημάτων.

3.2.1 Ενα Παίγνιο Ταιριάγματος Κερμάτων

Σκεφτείτε ένα συμμετρικό παίγνιο ταιριάγματος κερμάτων στο οποίο ο παίκτης της σειράς επιλέγει ή πάνω ή κάτω και ο παίκτης της στήλης ταυτόχρονα επιλέγει αριστερά ήδεξιά, όπως φαίνεται, στο επάνω μέρος του Πίνακα παρακάτω.Η πληρωμή για τον παίκτη της γραμμής είναι 0,80 δολάρια,όταν το αποτέλεσμα είναι (πάνω, αριστερά) ή (κάτω, δεξιά) αλλιώς 0,40 δολάρια.Τα κίνητρα για τους δύο παίκτες είναι ακριβώς αντίθετα:ο παίκτης της στήλης κερδίζει 0,80 δολάρια, όταν ο παίκτης της σειράς κερδίζει 0,40 δολάρια, και αντίστροφα.Δεδομένου ότι οι παίκτες έχουν αντίθετα συμφέροντα δεν υπάρχει ισορροπία για καθαρή στρατηγική. Επιπλέον,προκειμένου να μην εκμεταλευτεί από τον αντίπαλο,κανένας παίκτης δεν θα πρέπει να ευνοήσει μια από τις στρατηγικές και η μεικτή στρατηγική της ισορροπίας του Nash περιλαμβάνει την τυχαία επιλογή των δύο εναλλακτικών λύσεων με ίσες πιθανότητες.Όπως και πριν, μας έδωσαν αποφάσεις 50 άτομα σε μια έκδοση one-shot αυτού του παιγνίου (5 ομάδες από 10 άτομα, τα οποία επιλέχθηκαν τυχαία σε ζευγάρια και τους έχουν ανατεθεί οι ρόλοι ή σειρά ή στήλη).Τα ποσοστά των επιλογών παρουσιάζονται σε παρενθέσεις δίπλα στις ετικέτες απόφασης στο πάνω μέρος του Πίνακα.Προσέξτε ότι τα ποσοστά επιλογής είναι ουσιαστικά «50-50», ή όσο το δυνατόν πλησιέστερα,δεδομένου ότι υπήρχε ένας ζυγός αριθμός παικτών για κάθε ρόλο.Τώρα σκεφτείτε τι θα συμβεί αν η πληρωμή των 0,80 δολαρίων του παίκτη της σειράς στο (Επάνω, Αριστερά) αυξηθεί στα 3,20 δολάρια, όπως φαίνεται στο ασύμμετρο παίγνιο ταιριάγματος των κερμάτων στο μεσαίο τμήμα του Πίνακα.Σε μια μεικτή στρατηγική ισορροπίας,οι πιθανότητες για την απόφαση του κάθε παίκτη θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο να είναι αδιάφορος ο άλλος παίκτης σε σχέση με τις δύο εναλλακτικές λύσεις.Δεδομένου ότι η πληρωμή του παίκτη της στήλης παραμένει αμετάβλητη,η μεικτή στρατηγική ισορροπίας του Nash προβλέπει ότι δεν αλλάζουν ούτε οι πιθανότητες απόφασης του παίκτη της σειράς.Με άλλα λόγια, ο παίκτης της σειράς θα πρέπει να αγνοήσει την ασυνήθιστα υψηλή πληρωμή των 3,20 δολαρίων και να εξακολουθήσει να επιλέγει *πάνω* ή *κάτω* με τις πιθανότητες μισό-μισό.(αφού οι πληρωμές της στήλης είναι είτε 40 ή 80 αν παίξουμε αριστερά και είτε 80 είτε 40 αν παίξουμε δεξιά,οι πιθανότητες της απόφασης της σειράς πρέπει να ισούνται με 1/2 για να μείνει η στήλη αδιάφορη μεταξύ αριστερά και δεξιά)Αυτή η αντι-διαισθητική πρόβλεψη απορρίπτεται δραματικά από τα δεδομένα,με το 96 τοις εκατό των παικτών της σειράς να επιλέγει το *πάνω* για απόφαση που δίνει την ευκαιρία μιας υψηλής πληρωμής των 3,20 δολαρίων.

		Left (48%)	*Right* (52%)
Symmetric Matching Pennies	*Top* **(48%)**	80, 40	40, 80
	Bottom **(52%)**	40, 80	80, 40

		Left (16%)	*Right* (84%)
Asymmetric Matching Pennies	*Top* **(96%)**	320, 40	40, 80
	Bottom **(4%)**	40, 80	80, 40

		Left (80%)	*Right* (20%)
Reversed Asymmetry	*Top* **(8%)**	44, 40	40, 80
	Bottom **(92%)**	40, 80	80, 40

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχήμα 3.2

Ανάλυση με Ποσοστιαία Επιλογή του Παιχνιδιού 'τέριασμα νομισμάτων

Είναι ενδιαφέρον,το οτι οι παίκτες της στήλης φαίνεται να το είχαν προβλέψει και το 84 τοις εκατό έπαιξαν *δεξιά*,η οποία είναι πολύ κοντά στην ισορροπία της μεικτής στρατηγικής στα7/8.Στη συνέχεια, μειώσαμε τις πληρωμές (*πάνω*, *αριστερά*) του παίκτη της σειράς στα $ 0,44,το οποίο και πάλι θα έπρεπε να αφήσει ανεπηρέαστες τις πιθανότητες επιλογής των παικτών της σειράς στη μεικτή στρατηγική ισορροπίας του Nash.Πάλι η επίδραση είναι δραματική,με το 92 τοις εκατό των επιλογών είναι *κάτω*,όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του Πίνακα.Όπως και πριν,οι παίκτες της στήλης φαινεται να το είχαν προβλέψει,παίζοντας αριστερά το 80 τοις εκατό των φορών.

Συνοψίζοντας,η μοναδική πρόβλεψη του Nash είναι για τη σειρά των επιλογών με τα έντονα γράμματα είναι όταν τα ποσοστά είναι αμετάβλητα στο 50 τοις εκατό και για στις τρεις διαδικασίες.Αυτή η πρόβλεψη έχει παραβιαστεί με ένα διαισθητικό τρόπο, με τις επιλογές παικτών της σειράς να ανταποκρίνονται στις πληρωμές τους.Σε αυτό το πλαίσιο, η πρόβλεψη μεικτής στρατηγικής τυο Nash φαίνεται να λειτουργεί μόνο κατά σύμπτωση, όταν οι πληρωμές είναι συμμετρικές.

3.2.2 Ένα παίγνιο Συντονισμού με επιλογή ασφαλούς εξόδου.

Παίγνια με πολλαπλές ισορροπίες του Nash θέτουν ενδιαφέροντα νέα προβλήματα στην πρόβλεψη της συμπεριφοράςειδικά όταν κάποιες ισορροπίες παράγουν υψηλότερες πληρωμές για όλους τους παίκτες.Το πρόβλημα του συντονισμού για την ισορροπία υψηλής πληρωμής μπορεί να περιπλεχθεί από τα πιθανά κέρδη και απώλειες σχετικές με τις πληρωμές που δεν αποτελούν μέρος κανενός αποτελέσματος ισορροπίας.Σκεφτείτε ένα παίγνιο συντονισμού στο οποίο οι παίκτες λαμβάνουν $ 1,80 αν συντονιστούν στην ισορροπία της υψηλής πληρωμής (H, H),0,90 δολάρια εάν συντονιστούν στην ισορροπία χαμηλής πληρωμής (L, L), και δεν λαμβάνουν τίποτα αν δεν συντονιστούν (δηλαδή όταν ένας παίκτης επιλέγει H και ο άλλος L).Ας υποθέσουμε ότι, επιπλέον, ο παίκτης της στήλης έχει μια ασφαλή επιλογή S που αποδίδει $ 0.40 για τη στήλη και μηδενική πληρωμή για τον παίκτη γραμμής.Αυτό το παίγνιο δίδεται στον σχήμα 8, όταν x = 0.Για να αναλυθούν οι ισορροπίες του Nash αυτού του παιγνίου,παρατηρούμε ότι για τον παίκτη της στήλης ένας συνδυασμός 50-50 των L και H υπερτερεί του S,και ένας λογικός παίκτης της στήλης θα πρέπει συνεπώς να αποφείγει την ασφαλή επιλογή.Εξάλειφοντας το S μετατρέπεται το παίγνιο σε ένα κανονικό παίγνιο με συντονισμό δύο-με-δύο που έχει τρεις ισορροπίες τουNash:δύο παίκτες επιλέγουν L,δύο παίκτες επιλέγουν H, και μια μεικτή στρατηγική ισορροπίας στην οποία και οι δύο παίκτες επιλέγουν L με πιθανότητα 2/3.

	L	*H*	*S*
L	90, 90	0, 0	*x*, 40
H	0, 0	180, 180	0, 40

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχήμα 3.3
Ενα εκτεταμένο συντονισμένο παιχνίδι

Οι ισορροπίες του Nash είναι ανεξάρτητες του x, το οποίο είναι η πληρωμή του παίκτη της γραμμής, όταν το αποτέλεσμα είναι(L, S),δεδομένου ότι το επιχείρημα της εξάλειψης του S βασίζεται αποκλειστικά στις πληρωμές της στήλης.Ωστόσο, το μέγεθος του x μπορεί να επηρεάσει τη διαδικασία του συντονισμού:για x = 0, η σειρά είναι αδιάφορη μεταξύ L και H όταν η στήλη επιλέγει S, και η σειρά και είναι πιθανό να προτιμίσει το H όταν η στήλη δενεπιλέγει S (έκτοτε L και H έχουν τον ίδιο αριθμό μηδενικών πληρωμών για τη σειρά, αλλά το H έχει μια δυνατότητα υψηλότερης πληρωμής).Η σειρά είναι συνεπώς πιο πιθανό να επιλέξει H, η οποία είναι επίσης η βέλτιστη επιλογή και για τον παίκτη της στήλης.Ωστόσο, όταν το x είναι μεγάλο, έστω 400,ο παίκτης της στήλης μπορεί να υποθέσει ότι η σειρά θα επιλέξει Lκαι σε αυτήν τη περίπτωση η στήλη θα πρέπει να αποφύγει το H.Αυτή η διαίσθηση επιβεβαιώνεται από τα πειραματικά δεδομένα:στη διαδικασία του θησαυρού με x = 0, το 96 τοις εκατό των παικτών της σειράς και το 84 τοις εκατό των παικτών της στήλης επέλεξαν την κίνηση της υψηλής εξόφλησης H,ενώ στην διαδικασία της αντίφασης με x = 400 μόνο το 64 τοις εκατό των παικτών της σειράς και το 76 τοις εκατό των παικτών της στήλης επέλεξε H.Τα ποσοστά των αποτελεσμάτων αυτών που συντονίστηκαν στην ισορροπία υψηλής πληρωμής ήταν 80 για τη διαδικασία του θησαυρού έναντι 32 για την διαδικασία της αντίφασης.Στην τελευταία διαδικασία, ένα επιπλέον 16 τοις εκατό των εκβάσεων συντονίζεται στηνισορροπία χαμηλής πληρωμής, αλλά περισσότερα από τα μισά αποτελέσμάτα ήταν ασυντόνιστα, μη-Nash αποτελέσματα.

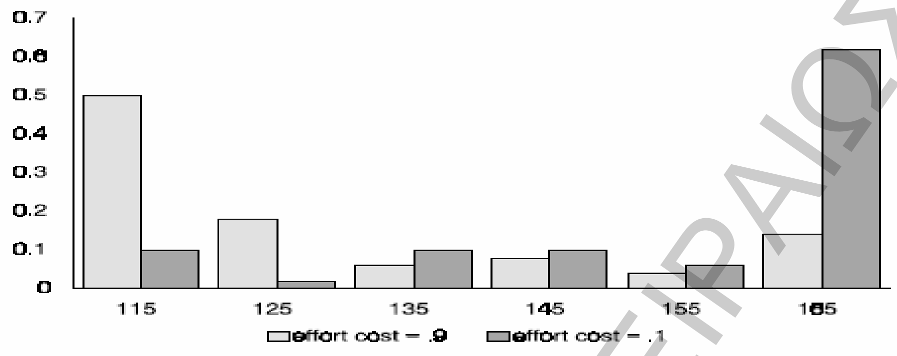
3.2.3 Ένα Παίγνιο Συντονισμού Ελάχιστης-Προσπάθειας.

Το επόμενο παίγνιο που θα λάβουμε υπ' όψην μας, είναι επίσης ένα παίγνιο συντονισμού με πολλαπλές ισορροπίες,αλλά σε αυτή την περίπτωση η έμφαση δίνεται στην επίδραση των ασυμμετριών πληρωμής που καθορίζουν τους κινδύνους απόκλισης σε ανοδική ή σε καθοδική κατεύθυνση.Οι δύο παίκτες σε αυτό το παίγνιο επιλέγουν επίπεδα "προσπάθειας"ταυτόχρονα και το κόστος της προσπάθειας καθορίζει τον κίνδυνο της απόκλισης.Το κοινό προϊόν είναι η ποικιλία σταθερών-συντελεστών έτσι ώστε η πληρωμή του κάθε ατόμου να είναι το ελάχιστο των δύο προσπαθειών μείον το προϊόν της προσωπικής προσπάθειας του παίκτη και ενός σταθερού παράγοντα κόστους, *c*.Στο πείραμα,οι προσπάθειες είναι οποιοσδήποτε ακέραιος από 110 έως 170.Αν c<1, κάθε κοινή προσπάθεια σε αυτό το εύρος είναι μια ισορροπία του Nash,επειδή μια μονομερής αύξηση της προσπάθειας κατά μία μονάδα πάνω από ένα κοινό σημείο εκκίνησης δεν θα αλλάξει το ελάχιστο, αλλά θα μειώσει την πληρωμή του ενός κατά c.Ομοίως, η μείωση κατα μια μονάδα της προσπάθειας θα μειώσει την πληρωμή κατά 1 - c, δηλαδή η μείωση στο ελάχιστο είναι περισσότερο από την εξοικονόμηση του κόστους της προσπάθεια όταν c<1. Προφανώς,ένα υψηλότερο κόστος προσπάθειας αυξάνει τον κίνδυνο της αυξησης της προσπάθειας και μειώνει τον κίνδυνο της μείωσης της προσπάθειας.Έτσι η απλή διαίσθηση υποδεικνύει ότι τα επίπεδα προσπάθειας θα είναι αντιστρόφως ανάλογα με το κόστος της προσπάθειας, παρά το γεγονός ότι κάθε κοινόεπίπεδο προσπάθειας είναι μια ισορροπία του Nash.

Εμείς κάναμε μια διαδικασία με ένα χαμηλό κόστος προσπάθειας 0,1, και τα δεδομένα για 50 τυχαία ζευγαρομένα υποκείμενα σε αυτή τη διαδικασία φαίνονται από τις σκούρες ράβδους στο Σχήμα 9.Παρατηρήστε ότι η συμπεριφορά είναι αρκετά συγκεντρομένη στο υψηλότερο επίπεδο προσπάθειας 170,τα υποκείμενα συντονίζονται στο κυρίαρχο αποτέλεσμα.Η διαδικασία υψηλού κόστους προσπάθειας (c = 0.9), ωστόσο, παρήγαγε μια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

υπεροχή προσπαθειών στο χαμηλότερο δυνατό επίπεδο, όπως φαίνεται από τις ανοιχτόχρωμες ράβδους στο σχήμα.Σαφώς, η έκταση αυτής της "αποτυχίας συντονισμού" επηρεάζεται από την οικονομική μεταβλητή κλειδί σε αυτού του μοντέλου, ακόμα και αν η θεωρία του Nash είναι σιωπιλή.



Σχήμα 3.4
Προσπάθεια επιλογής συχνότητας για το μικρότερο συντονισμένο παιχνίδι.Μεγάλη προσπάθεια κόστους(ανοιχτόχρωμες μπάρες)και χαμηλή(σκουρόχρωμες μπάρες)

3.2.4Το παίγνιο Kreps.

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν πώς η ψυχρή λογική της θεωρίας των παιγνίων μπορεί να έρχεται σε αντίθεση με τις αντιλήψεις για την ανθρώπινη συμπεριφορά.Η ένταση αυτή δεν έχει περάσει απαρατήρητη από μερικούς θεωρητικούς του παίγνιου.Για παράδειγμα, ο David M.Kreps (1995) συζητά μια παραλλαγή του παιγνίου (όπου έχουμε μειώσει τις πληρωμές σε επίπεδα που είναι κατάλληλα για το εργαστήριο).Το αποτέλεσμα της ισορροπία της καθαρής-στρατηγικής αυτού του παιγνίου είναι (Επάνω, Αριστερά) και (Κάτω, Δεξιά). Επιπλέον,υπάρχει μια ισορροπία μεικτής στρατηγικής στην οποία η σειρά παίζει τυχαία *πάνω* ή *κάτω* και η στήλη παίζει τυχαία *αριστερά* ή *μέση*.Η μόνη στρατηγική της στήλης που δεν αποτελεί μέρος καμίας ισορροπίας του Nash λέγονται μη-Nash.O Kreps υποστηρίζει ότι οι παίκτες της στήλης θα έχουν την τάση να επιλέγουν μη-Nash,διότι οι άλλες επιλογές αποδίδουν στην καλύτερη περίπτωση μια ελαφρώς υψηλότερη πληρωμή (δηλ. 10, 15, ή 20 σεντς περισσότερο), αλλά θα μπορούσε να οδηγήσει σε σημαντικές απώλειες $ 1 ή $ 2,50.Παρατηρήστε ότι αυτή η διαίσθηση βασίζεται σε μεγέθη πληρωμών εκτός ισορροπίας, σε αντίθεση με τους υπολογισμούς του Nash, βασισμένους μόνο στα σημάδια διαφορών στις πληρωμές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

		Left (26%)	*Middle* (8%)	*Non-Nash* (68%)	*Right* (0%)
Basic Game	*Top* (68%)	200, 50	0, 45	10, 30	20, -250
	Bottom (32%)	0, -250	10, -100	30, 30	50, 40

		Left (24%)	*Middle* (12%)	*Non-Nash* (64%)	*Right* (0%)
Positive Payoff Frame	*Top* (84%)	500, 350	300, 345	310, 330	320, 50
	Bottom (16%)	300, 50	310, 200	330, 330	350, 340

Σχήμα 3.5
Δύο τύποι απο το KREPS παιχνίδι(με επιλογή ποσοστού)

Ο Kreps δοκίμασε την εκδοχή της υψηλής-υποθετικής-πληρωμής αυτού του παιγνίου σε αρκετούς μεταπτυχιακούς φοιτητές,αλλά ας εξετάσουμε τι συμβαίνει με υποκείμενα με οικονομικά κίνητρα σε μια ανώνυμη εργαστηριακή κατάσταση.Όπως και πριν,ζευγαρώσαμε τυχαία 50 άτομα και τους αφήσαμε να κάνουν μια μοναδική επιλογή.Στα υποκείμενα ειπώθηκε ότι οι απώλειες θα αφαιρεθούν από προηγούμενα κέρδη,τα οποία ήταν αρκετά σημαντικά στο το εν λόγω σημείο.Όπως φαίνεται από τα ποσοστά στις παρενθέσεις στο πάνω μέρος του πίνακα,οι μη-Nash αποφάσεις επιλέγονται από περίπου τα δύο τρίτα των παικτών της στήλης.Φυσικά, είναι δυνατόν το αποτέλεσμα αυτό να είναι απλά μια συνέπεια της "απώλειας-αποστροφής," δηλαδή η μη χρησιμότητα να χάσει κάποιο χρηματικό ποσό είναι μεγαλύτερη από τη χρησιμότητα σχετικά με τη νίκη του ίδιου ποσού (Daniel Kahneman, Jack L. Knetsch, και Richard ThalerH), αφού όλες οι άλλες στήλες περιέχουν αρνητικές αποδόσεις,τα υποκείμενα που έχουν απώλεια απέχθειας θα έχουν επομένως μια φυσική τάση να επιλέγουν μη-Nash.Ως εκ τούτου, χρησιμοποιήσαμε άλλα 50 άτομα μέσα στο ίδιο το παίγνιο,αλλά με 300 σεντ να προστίθενται στιςπληρωμές για την αποφυγή απωλειών..

Τέλος, πήραμε 50 νέα άτομα για την αρχική έκδοση στο πάνω μέρος του πίνακα, με τις (*κάτω*, *δεξιά*) πληρωμές για (50, 40) να έχουν αντικατασταθεί με (350, 400), που (και πάλι) δεν μεταβάλλουν τη δομή της ισορροπίας του παίγνιου.Με αυτήν την ομολογουμένως έντονη βελτίωση της ισορροπίας σε αυτό το κομμάτι, παρατηρήσαμε το 96 τοις εκατό της *κάτω* επιλογής και το 84 τοις εκατό της επιλογής *δεξιά*, με το 16 τοις εκατό να εμμένει σεμη-Nashσε αυτή, τη διαδικασία "θησαυρού".

3.3 Δυναμικά Παίγνια με Πλήρη Στοιχεία

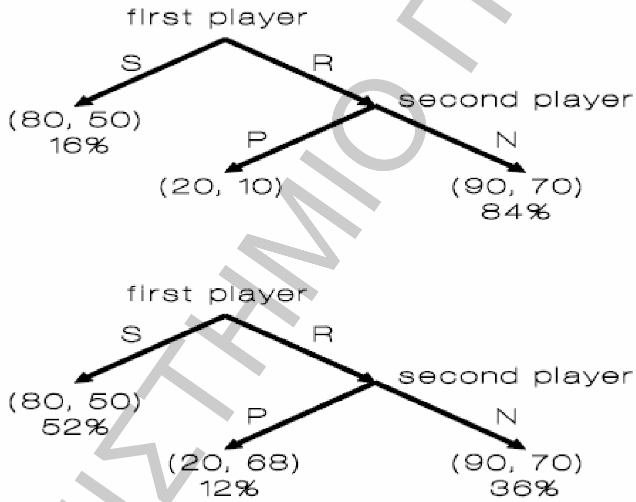
Καθώς η θεωρία των παιγνίων άρχισε να χρησιμοποιείτε ευρέως σε τομείς όπως η βιομηχανική οργάνωση,η πολυπλοκότητα των εφαρμογών αυξήθηκε για να φιλοξενήσει τη δυναμική και ασύμμετρη πληροφόρηση.Μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις που προέρχονται από αυτές τις εφαρμογές ήταν η χρήση της προς τα πίσω επαγωγή (*backward sinduction*) για την εξάλειψη των ισορροπιών με απειλές που δεν είναι "αξιόπιστες" (Reinhard Selten,).Η προς τα πίσω επαγωγή χρησιμοποιήθηκε επίσης για την εξεύρεση λύσεων στα παίγνια διαπραγματεύσεων με εναλλασσόμενες προσφορές (Ariel Rubinstein, 1982), που ήταν η πρώτη σημαντική πρόοδος σε αυτό το ιστορικά περίπλοκο θέμα από την αξιωματική προσέγγιση του Nash (1950).Ωστόσο, υπήρξαν επίμονες αμφιβολίες για το αν οι άνθρωποι είναι σε θέση να καταλάβουν περίπλοκα πολλαπλών σταδίων επιχειρήματα με την προς τα πίσω επαγωγή.Ο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

RobertW. Rosenthal (1981) πρότεινε ένα παίγνιο, που αργότερα ονομάστηκε το «παίγνιο σαραντα-ποδαρούσα",στο οποίο η προς τα πίσω επαγωγή επί ενός μεγάλου αριθμού σταδίων (π.χ. 100 στάδια) θεωρήθηκε ότι είναι ιδιαίτερα προβληματική (π.χ. McKelvey και Palfrey, 1992). Πολλά από τα παίγνια σε αυτή την ενότητα είναι εμπνευσμένα από αμφιβολίες του (1981) Rosenthal και τα πειραματικά αποτελέσματα των Randolph T. Beard και (1994) Beil.Πράγματι, οι ανωμαλίες σε αυτό το τμήμα είναι πιο γνωστές από ό, τι εκείνες στα άλλα τμήματα, αλλά θα επικεντρωθούμε σε πολύ απλά παίγνια με δύο ή τρία στάδια, χρησιμοποιόντας παράλληλες διαδικασίες και τα υποκείμενα που έχουν προηγουμένως κάνει μια σειρά στρατηγικών αποφάσεων σε διάφορα one-shot παίγνια.

3.3.1 Πρέπει να εμπιστευτούμε τη λογικότητα των άλλων;

Η δύναμη της προς τα πίσω επαγωγής απεικονίζεται στο πάνω παίγνιο.Ο πρώτος παίκτης αρχίζει επιλέγοντας μεταξύ μιας ασφαλούς απόφασης, S και μιας επικίνδυνης απόφασης, R.Εάν επιλεγείτο R,ο δεύτερος παίκτης θα πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε μια απόφαση P που τιμωρεί και τους δύο και μια απόφαση N που οδηγεί σε μια ισορροπία Nash, που είναι επίσης μια κοινή πληρωμή κατά το ανώτατο όριο. Υπάρχει, ωστόσο, μια δεύτερη ισορροπία του Nash όπου ο πρώτος παίκτης επιλέγει S και ο δεύτερος επιλέγει P.



Σχήμα 3.6
Πρέπει να πιστευεις αλλους στη λογική?

Ο δεύτερος παίκτης δεν έχει κανένα κίνητρο να αποκλίνει από αυτή την ισορροπία, επειδή η αυτοπροκληθείσα τιμωρία συμβαίνει εκτός της διαδρομής προς την ισορροπία.Οι κανόνες των τέλειων υπο-παιγνίων εξηγούν αυτή την ισορροπία, απαιτώντας συμπεριφορά ισορροπίας σε κάθε υπο-παίγνιο, δηλαδή ότι ο δεύτερος παίκτης θα συμπεριφερθεί βέλτιστα στην περίπτωση επίτευξης του δεύτερου σταδίου του υπο-παίγνιου.

Και πάλι,πήραμε 50 τυχαία ζεύγη ατόμων που έπαιξαν αυτό το παίγνιο μόνο μία φορά.Τα δεδομένα για αυτή τη διαδικασία του θησαυρού είναι αρκετά συνεπής με την τέλεια ισορροπία των υπο-παιγνίων,μια υπεροχή των πρώτων παικτών που εμπιστεύονται τη λογική του άλλου ώστε να επιλέξουν R, και δεν υπάρχουν παράλογες αποφάσεις P που να ακολουθούν.Η αλλαγή αυτή δεν μεταβάλλει το γεγονός ότι υπάρχουν δύο ισορροπίες του Nash,μία εκτων οποίων αποκλείεται από το τέλειο υπο-παίγνιο.Τα ποσοστά επιλογής για τα 50 άτομα δείχνουν ότι η πλειοψηφία των πρώτων παικτών δεν εμπιστεύονται οτι οι άλλοι θα είναι απολύτως λογικοί, όταν το κόστος του παραλογισμού είναι τόσο μικρό.Μόνο περίπου το ένα τρίτο των αποτελεσμάτων ταίριαξε με την τέλεια ισορροπία του υπο-παίγνιου σε αυτό το

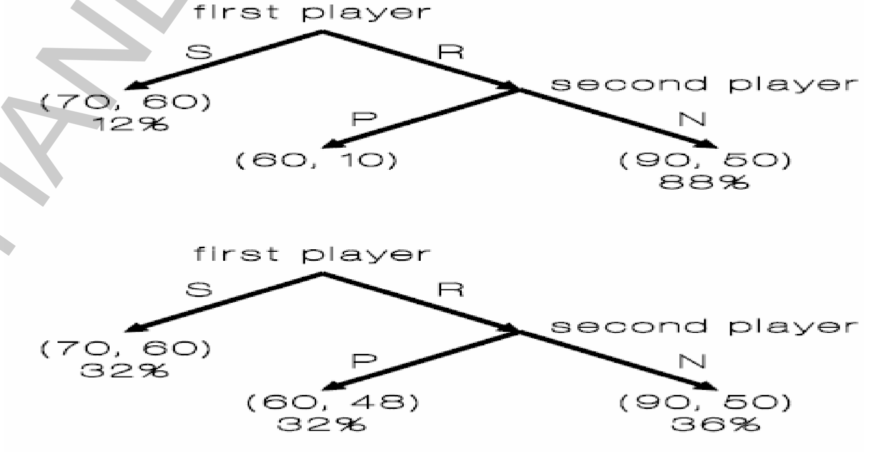
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

παίγνιο.Κάναμε μια τρίτη διαδικασία στην οποία πολλαπλασιάσαμε όλεςτις απολαβές με συντελεστή 5, εκτός του ότι η απόφαση P οδηγούσε στο (100, 348) αντί του (100, 340).Αυτή η μεγάλη αύξηση στις απολαβές παρήγαγε ένα ακόμη πιο δραματικό αποτέλεσμα,μόνο το 16 τοις εκατό των αποτελεσμάτων ήταν sub-game τέλεια, και το 80 τοις εκατό των αποτελεσμάτων ήταν σε ισορροπία Nash που δεν ήταν subgame τέλεια.

3.3.2 Θα πρέπει να πιστέψουμε μια απειλή που δεν είναι αξιόπιστη;

Το παίγνιο που μόλις είδαμε είναι λίγο ασυνήθιστο το ότι, απουσιάζοντας τα αποτελέσματα σχετικής πληρωμών,ο δεύτερος παίκτης δεν έχει κανένα λόγο να τιμωρήσει,αφού με την απόφαση R του πρώτου παίκτη,οφελείται και ο δεύτερος παίκτης. Όπως και πριν, υπάρχουν δύο ισορροπίες του Nash, με τη (R, P) ισορροπία να αποκλείεται από την τελειότητα του υπο-παίγνιου.Πέραν του ότι δεν είναι αξιόπιστη,η απειλή να παίξει P είναι μια σχετικά δαπανηρή τιμωρία για τον δεύτερο παίκτη να διαχειριστεί (40 σεντ).Η απειλή να παιχτεί P στο πάνω μέρος του σχήματος 12 είναι προφανώς μη πιστευτή, και 88 τοις εκατό των πρώτων παικτών επιλέγουν τη στρατηγική R,με ατιμωρησία.Η απειλή είναι φθηνή (2 σεντ) για το παίγνιο στο κάτω μέρος του σχήματος και τα αποτελέσματα για τα 25 ζεύγη υποκειμένων είναι ομοιόμορφα μοιρασμένα σε αποτελέσματα του ατελούς υπο-παίγνιου,της απίστευτης απειλής, και του τέλειου υπο-παίγνιου.Φτηνές απειλές είναι συχνά (και προφανώς θα πρέπει να είναι) πιστευτές. Και πάλι βλέπουμε ότι τα μεγέθη των πληρωμών και το ρίσκο της εκτός της ισορροπίας διαδρομής έχουν σημασία.

Επειδή οι αποφάσεις P στα παίγνια στο κάτω μέρος των σχημάτων 3 και 4 μειώνουν μόνο κατά 2 τη πληρωμή του δεύτερου παίκτη δεύτερη,η συμπεριφορά μπορεί να επηρεαστεί από μικρές διακυμάνσεις στις προτιμήσεις πληρωμής ή τα συναισθήματα, π.χ. απέχθεια ή αντιπαλότητα.Όπως προτείνεται από τους GaryE. Bolton, Axel Ockenfels,Ernst Fehr και Klaus Schmidt,οι παίκτες μπορεί να είναι πρόθυμοι να θυσιάσουν τα κέρδη τους προκειμένου να μειωθούν οι ανισότητες στις πληρωμές,που θα μπορούσε να εξηγήσει τις επιλογές P στις διαδικασίες συστολής.Εναλλακτικά, η εμφάνιση του υψηλού κλάσματος P αποφάσεων στον κάτω παίγνιο του Σχήματος 12 μπορεί να οφείλεται σε αρνητικά συναισθήματα που ακολουθούν την απόφαση Rτου πρώτου παίκτη, η οποία μειώνει τα κέρδη του δεύτερου παίκτη (Matthew Rabin). Σημειώστε ότι αυτή η μείωση στα κέρδη δεν θα συμβεί όταν ο πρώτος παίκτης επιλέξει R για το παίγνιο στο κάτω μέρος του σχήματος, το οποίο θα μπορούσενα εξηγήσει το χαμηλότερο ποσοστό τιμωριών σ’ αυτό το παίγνιο.



Σχήμα 3.7

Πρέπει να πιστεύεις μια αναξιόπιστη απειλή?

Τα ανώμαλα αποτελέσματα των διαδικασιών αντίφασης δεν είναι έκπληξη για τον Selten, το δημιουργό της έννοιας της τελειότητας του υπο-παίγνιου.Η στάση του ως προς τη θεωρία των παιγνίων ήταν ότι υπάρχει μια έντονη αντίθεση μεταξύ της τυπικής θεωρίας και της συμπεριφοράς.Για μεγάλο χρονικό διάστημα ουσιαστικά φορούσε διαφορετικά καπέλα, όταν μελετούσε τη θεωρία και έκανε πειράματα, αν και βραβείο Νόμπελ του το 1995 του δόθηκε σαφώς για τη συμβολή του στη θεωρία. Αυτή η σχιζοφρενική στάση μπορεί να φαίνεταια συνεπής, αλλά μπορεί να προλάβει το περιττό άγχος και ένα μέρος της πρόσφατης θεωρητικής εργασίας του Selten βασίζεται σε μοντέλα οριοθετιμένης ορθολογικής (κατευθυνόμενης) μάθησης (Selten και Joachim Buchta).O John Nash είχε φένεται να αποθαρρυνόταν από τις αποτυχίες πρόβλεψης της θεωρίαστων παιγνίων και εγκατέλειψε τον πειραματισμό και τη θεωρία των παιγνίων .

3.3.3 Παίγνια Διαπραγματεύσεων σε Δύο Στάδια.

Οι διαπραγματεύσεις έχουν από καιρό θεωρηθεί ένα κεντρικό μέρος της οικονομικής ανάλυσης, και στο ίδιοδιάστημα, ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα για την οικονομική θεωρία.Μια πολλά υποσχόμενη προσέγγιση είναι η κατασκευή μοντέλων αδόμητων καταστάσεων μοντέλο διαπραγμάτευσης «σαν» τα μέρη να αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να υποβάλλουν τις προσφορές τους,με το κόστος της καθυστερημένης συμφωνίας να αντανακλάται σε μια συρρίκνωση του μεγέθους της πίτας που θα διαιρεθεί.Αυτό το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα εύκολο να αναλυθεί, όταν ο αριθμός των εναλλασσόμενων προσφορών είναι σταθερός και μικρός.

Σκεφτείτε ένα παίγνιο διαπραγματεύσεων στο οποίο κάθε παίκτης μπορεί να κάνει μια μοναδική πρόταση για το πώς να χωρίσει μια πίτα,αλλά το ποσό των χρημάτων που πρέπει να διαιρεθεί πέφτει από τα 5 δολάρια του πρώτου σταδίου στα 2 δολάρια στο δεύτερο στάδιο.Ο πρώτος παίκτης προτείνει το μοίρασμα των $ 5 που είναι είτε αποδεκτό (και εφαρμόζεται) ή απορρίπτεται,στην οποία περίπτωση ο δεύτερος παίκτης προτείνει ένα μοίρασμα των $ 2 που είναι είτε γίνεται αποδεκτό ή απορρίπτεται από τον πρώτο παίκτη.Αυτή η τελική απόρριψη έχει σαν αποτέλεσμα απολαβές μηδέν για τους δύο παίκτες, οπότε ο δεύτερος παίκτης μπορεί (θεωρητικά) να απαιτήσει επιτυχώς 1,99 δολάρια στο δεύτερο στάδιο,εάν ο πρώτος παίκτης προτιμά ένα *cen t*αντι του τίποτα.Γνωρίζοντάς το,ο πρώτος παίκτης θα έπρεπε να απαιτήσει $ 3 και να προσφέρει $ 2 στον άλλο στο πρώτο στάδιο.Σε μια ισορροπία του τέλειου υπο-παίγνιου,ο πρώτος παίκτης

που λαμβάνει το ποσό κατά το οποίο συρρικνώνεται η πίτα,οπότε ένα μεγαλύτερο κόστος της καθυστέρησης προσδίδει μεγάλο πλεονέκτημα στον πουκάνει το αρχικό αιτημα, το οποίο φαίνεται λογικό. Για παράδειγμα,ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι αν η πίτα συρρικνώνεται κατά $ 4,50, από τα $ 5 στα $ 0,50 δολάρια, τότε ο πρώτος παίκτης πρέπει να ζητήσει το ποσό των 4,50 δολαρίων.Χρησιμοποιήσαμε 60 άτομα (6 ομάδες των 10 ατόμων το καθένα),τα οποία χωρίστηκαν τυχαία σε ζευγάρια για τη καθεμια από τις δύο διαδικασίες που περιγράφονται παραπάνω (με εναλλασσόμενη σειρά και διαχωρίσμένα από άλλα one-shot παίγνια).Το μέσο αίτημα για τον πρώτο παίκτη ήταν $ 2.83 για τη διαδικασία του $ 5 / $ 2, με μια στανταρ απόκλιση των 0,29 δολαρίων. Αυτό είναι αρκετά κοντά στο προβλεπόμενο αίτημα των $ 3,00, και 14 από τα 30 αρχικάαιτήματα ήταν ακριβώς ίσα με 3,00 δολάρια σε αυτή τη διαδικασία του θησαυρού. Όμως, η μέση ζήτηση αυξήθηκε μόνο στα 3,38 δολάρια για την άλλη διαδικασία με πρόβλεψη $ 4.50, και 28 από τα 30 αιτήματα ήταν κάτω από την πρόβλεψη των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4,50 δολαρίων. Οι απορρίψεις ήταν αρκετά συνηθισμένες σε αυτή την διαδικασία αντίφασης με υψηλότερα αιτήματα και αντίστοιχα χαμηλότερες προσφορές στον δεύτερο παίκτη, το οποίο είναι δεν προκαλεί έκπληξη δεδομένου του μικρότερου κόστους της απόρριψης "τσιγκούνικων" προσφορων.

Τα αποτελέσματα αυτά εντάσσονται σε ένα μεγαλύτερο σχέδιο που μελετήθηκε απο τους Douglas D. Davis και Holt και Roth (1995),τα αρχικά αιτήματα στα παίγνια διαπραγμάτευσης δύο σταδίων τείνουν να είναι "πολύ χαμηλά" σε σχέση με τις θεωρητικές προβλέψεις όταν η το αίτημα της ισορροπίας είναι υψηλό,δηλαδή περισσότερο από το 80 τοις εκατό της πίτας,όπως στη διαδικασία $ 5,00 / $ 0,50, και τα αρχικά αιτήματα τείνουν να είναι κοντά στις προβλέψεις όταν το αίτημα της ισορροπίας είναι 50-75 τοις εκατό της πίτας (όπως στη διαδικασία $ 5,00 / $ 2,00). Είναι ενδιαφέρον ότι τα αρχικά αιτήματα είναι "πολύ υψηλά", όταν το αίτημα της ισορροπίας είναι μικρότερο από τη μισή πίτα.Εδώ είναι ένα παράδειγμα του γιατί οι θεωρητικές εξηγήσεις της συμπεριφοράς δεν πρέπει να βασίζονται σε πειράματα ενός μόνο μέρους του πεδίου των παραμέτρων και γιατί οι θεωρητικοί πρέπει να έχουν περισσότερο από ό,τι απλά μια περιστασιακή, από δεύτερο χέρι γνώση της οικονομικής πειραματικής λογοτεχνίας.Πολλές από τις διαφορετικές θεωρητικές εξηγήσεις για την ανώμαλη συμπεριφορά στα παίγνια διαπραγματεύσεων εξαρτάται από τα μοντέλα προτιμήσεων στα οποία η χρησιμότητα ενός ατόμου εξαρτάται από τις απολαβές και των δύο παικτών,δηλαδή θέματα διανομής.(Bolton, 1998 Bolton και Ockenfels, 2000 Fehr και Schmidt, 1999).Ο ρόλος της δικαιοσύνης απεικονίζεται εντυπωσιακά στο πείραμα που αναφέρεται στο Goeree και Holt (2000),οι οποίοι βρήκαν ακόμη μεγαλύτερες αποκλίσεις από τις προβλέψεις του τέλειου υπο-παίγνιου του Nash από αυτές που αναφέρονται εδώδίνοντας στα υποκείμενα ασύμμετρα ποσά χρημάτων που καταβάλονται ανεξάρτητα από την έκβαση της διαπραγμάτευσης. Αυτά τα ποσά επιλέχθηκαν για να τονίσουν τις ανισότητες στις πληρωμές που έχουν ως αποτέλεσμα την ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου του Nash, και ως εκ τούτου η επίδρασή τους ήταν η υπερβολή στα θέματα δικαιοσύνης χωρίς να μεταβάλλεται η πρόβλεψη της ισορροπίας.Το αποτέλεσμα (σε επτά διαφορετικές one-shot παίγνια διαπραγματευσεων)ήταν οτι τα αιτήματα πρέπει να σχετίζονται αντίστροφα με τις προβλέψεις τέλειου υποπαιγνίου του Nash.

3.4 Στατικά Παίγναι με Ελλιπή Στοιχεία

Τα μοντέλα δημοπρασιών με ελλιπείς πληροφορίες του William Vickrey (1961) αποτελούν μια από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες εφαρμογές της θεωρίας των παιγνίων.Εάν οι ιδιωτικές αξίες προέρχονται από μια ενιαία διανομή,η Bayesian ισορροπία του Nash προβλέπει ότι οι προσφορές θα είναι ανάλογες με την αξία,το οποίο είναι γενικά συνεπές με τα στοιχεία εργαστηρίου.Η κύρια απόκλιση από τις θεωρητικές προβλέψεις είναι η τάση των ανθρώπινων υποκειμένων να κάνουν προσφορές πάνω απο την κανονική αξία(σχετικά με το Nash),το οποίο εξηγήται όσον αφορά την αποφυγή του κινδύνου,μια εξήγηση που έχει οδηγήσει σε κάποια διαμάχη. Ο Glen Harrison (1989), για παράδειγμα, υποστηρίζει ότι οι αποκλίσεις από την ισορροπία του Nash μπορεί κάλλιστα να προκαλούνται από την έλλειψη νομισματικών κινήτρων δεδομένου ότι το κόστος αυτών των αποκλίσεων είναι μάλλον μικρό:η "επίπεδη κριτική κατ 'ανώτατο όριο."*("flat maximum critique")* Η προσέγγισή μας εδώ είναι να καθορίσουμε δύο παίγνια δημοπρασίας με την ίδια ισορροπία του Nash, αλλά με διαφορετικό κίνητρα να μην γίνονται προσφορές πάνω απο την αξία.Κατ 'αρχάς,υποθέστε ένα παίγνιο στο οποίο ο καθένας από τους δύο πλειοδότες λαμβάνει μια προσωπική τιμή για ένα βραβείο που θα δημοπρατηθεί σε μια πρώτη τιμή, σε δημοπρασία με σφραγισμένες προσφορές.Με άλλα λόγια,το βραβείο πηγαίνει στον υψηλότερο πλειοδότη για μια τιμή ίση με τη προσφορά του.Η αξία του βραβείου του κάθε υποψήφιου είναι το ίδιο πιθανό να είναι $ 0, $ 2, ή $ 5. Οι προσφορές είναι υποχρεωμένες να είναι ακέραια ποσά σε δολάρια, με τις ισοπαλίες να αποφασίζονται με το γύρισμα ενός κέρματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

	bid = 0	bid = 1	bid = 2	bid = 3	bid = 4	bid = 5
value = \$0	0*	-.5	-1.66	- 3	- 4	- 5
value = \$2	.33	.5*	0	-1	-2	- 3
value = \$5	.83	2	2.5*	2	1	0

Σχήμα 3.8
Ισορροπία όπως αναμένεται η πληρωμή για την(0,2,5) περιποίηση(βελτιστες προσφορές *)

Η σχετική ισορροπία του Nash σε αυτό το παίγνιο με ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με τις προτιμήσεις των άλλων είναι η Bayesian ισορροπία του Nash,η οποία καθορίζει μια ισορροπία προσφοράς για κάθε πιθανή πραγματοποίηση της αξίας ενός πλειοδότη.Είναι απλό,αλλά κουραστικό να επαληθεύσουμε ότι οι προσφορές της ισορροπίας του Nash είναι \$ 0, \$ 1, \$ 2 και για την αξία των \$ 0, \$ 2, \$ 5 αντίστοιχα. Για παράδειγμα, σκεφτείτε μια προσφορά με μια προσωπική αξία των \$ 5 (στην κάτω σειρά),ο οποίος αντιμετωπίζει έναν αντίπαλο που κάνει προσφορές σύμφωνα με την προτεινόμενη λύση του Nash.Μια προσφορά 0 έχει 1/2 πιθανότητα να κερδίσει (γύρισμα κέρματος) αν η αξία του αντιπάλου, και ως εκ τούτου, η προσφορά του αντιπάλου,είναι μηδενική, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα 1/3.Συνεπώς, η αναμενόμενη απόδοση της πληρωμής μηδενικής προσφοράς με μια αξία ίση με \$ 5 ισούται με 1/2 * 1/3 * (\$ 5 - \$ 0) = \$ 5/6 = 0.83.Εάν η προσφορά αυξηθεί σε \$ 1, η πιθανότητα της νίκης γίνεται 1/2 (1/3, όταν η αξία του αντιπάλου είναι \$ 0 συν 1/6, όταν η αξία του αντιπάλου είναι \$ 2).Ως εκ τούτου,η αναμενόμενη πληρωμή μιας προσφοράς \$ 1 είναι 1/2 * (\$ 5 - \$ 1) = \$ 2.Οι άλλοι αριθμοί στο σχήμα 13 με φαίνονται με παρόμοιο τρόπο.Η μέγιστη αναμενόμενη πληρωμή σε κάθε σειρά συμπίπτει με την προσφορά της ισορροπίας,όπως υποδεικνύεται από έναν αστερίσκο (*).Σημειώστε ότι η ισορροπία περιλαμβάνει την υποβολή προσφορών στο μισό τηςαξίας.
Το σχήμα 14 δείχνει τους ανάλογους υπολογισμούς για τη δεύτερη διαδικασία, με εξίσου πιθανές προσωπικές αξίες των \$ 0, \$ 3 ή \$ 6.Είναι ενδιαφέρον οτι αυτή η αύξηση των αξιών δεν μεταβάλλει την ισορροπία των προσφορών στην μοναδική Μπεϋζιανή ισορροπία του Nash,όπως υποδεικνύεται από τη θέση των βέλτιστων προσφορών για κάθε αξία.

	bid = 0	bid = 1	bid = 2	bid = 3	bid = 4	bid = 5
value = \$0	0*	-.5	-1.66	- 3	- 4	- 5
value = \$3	.5	1*	.83	0	-1	- 2
value = \$6	1	2.5	3.33*	3	2	1

Σχήμα 3.9
Ισορροπία όπως είναι αναμενόμενη η πληρωμή για (0,3,6) την περιποίηση(βέλτιστες προσφορές*)

Παρόλο που οι ισορροπίες είναι οι ίδιες,περιμέναμε μια ανοδική τάση στις προσφορες στη δεύτερη (0, 3, 6) διαδικασία.Η διαίσθηση μπορεί να φανεί κοιτάζοντας τις απώλειες στις πληρωμές που σχετίζονται με αποκλίσεις της ισορροπίας του Nash.Στη (0, 3,6) διαδικασία, το κόστος της προσφοράς του \$ 1 πάνω από την προσφορά της ισορροπίας είναι \$ 1 - \$ 0.83 = \$ 0,17, το οποίο είναι λιγότερο από το κόστος της προσφοράς \$ 1 κάτω από την προσφορά της ισορροπίας: \$ 1 - \$ 0.50 = \$ 0.50.Ένα παρόμοιο επιχείρημα ισχύει και για τους υψηλής-αξιας πλειοδότες,ενώ τα κόστη απόκλισης είναι τα ίδια και στις δύο διαδικασίες για την προσφορά χαμηλής αξίας.Συνεπώς περιμέναμε περισσότερεςπροσφορές πάνω απο την αξία για τη (0, 3, 6) διαδικασία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αυτή η διαίσθηση επιβεβαιώνεται από τα δεδομένα προσφορών για τα 50 άτομα που συμμετείχαν σε μια και μόνο δημοπρασία κάτω από κάθε συνθήκη (πάλι εναλλάσσοντας τη σειρά των δύο διαδικασιών και διαχωρίζοντας τιςδύο δημοπρασίες με άλλα one-shot παίγνια).Το ογδόντα τοις εκατό των προσφορών στη (0, 2, 5) διαδικασία ταίριαζε με την ισορροπία:ο μέσος όρος των προσφορών για χαμηλής, μέσης και υψηλής αξίας πλειοδότες ήταν $ 0,$ 1,06, και 2,64 δολάρια αντίστοιχα. Αντίθετα, οι μέσες προσφορές για τη (0, 3, 6) διαδικασία ήταν $ 0,$ 1,82, και $ 3,40 για τα τρία επίπεδα αξίας, και μόνο το 50 τοις εκατό όλων των προσφορών ήταν προσφορές Nash.Οι συχνότητες των προσφορών για κάθε τιμή φαίνονται στο σχήμα 15. Όπως και στα προηγούμενα παίγνια,οι αποκλίσεις από τη συμπεριφορά του Nash σε αυτές τις ιδιωτικές δημοπρασίες,η αξία φαίνεται να είναι ευαίσθητη στο κόστος της απόκλισης.Φυσικά, αυτό δεν αποκλείει την πιθανότητα ότι η αποστροφή του κινδύνου ή κάποιος άλλος παράγοντας μπορεί επίσης να παίζει κάποιο ρόλο στην εξήγηση της υπερπροσφοράς που παρατηρείται εδώ, ειδικά στη μικρή υπερπροσφορά για της υψηλές αξίες στη (0, 2, 5) διαδικασία.

	(0, 2, 5) treatment			(0, 3, 6) treatment	
	bid	frequency		bid	frequency
value = 0	0*	20	value = 0	0*	17
value = 2	1*	15	value = 3	1*	5
	2	1		2	11
	3	0		3	2
value = 5	1	1	value = 6	1	0
	2*	5		2*	3
	3	6		3	4
	4	2		4	6
	5	0		5	1
	6	0		6	1

Σχήμα 3.10
Προσφορά συχνότητας (Ισορροπία προσφοράς *)

3.5 Δυναμικά Παίγνια με Ελλιπή Στοιχεία – Σηματοδότηση

Τα παίγνια σηματοδοσίας είναι σύνθετα και ενδιαφέροντα επειδή η δομή τους σε δύο στάδια δίνει μια ευκαιρία στους παίκτες να εξάγουν συμπεράσματα και να αλλάξουν τα συμπεράσματα των άλλων για τις«ιδιωτικές πληροφορίες».Αυτή η πολυπλοκότητα δημιουργεί συχνά πολλαπλές ισορροπίες που, με τη σειρά τους, έχουν διεγείρει μια σειρά όλο και πιο σύνθετων βελτιώσεων της κατάστασης της ισορροπίας του Nash.Μολονότι είναι απίθανο η ενδοσκοπική σκέψη σχετικά με το παίγνιο να παράγει συμπεριφορά ισορροπίας σε ένα μονό γύρο ενός τόσο περίπλοκου παίγνιου (εκτός από σύμπτωση), το one-shot παίγνιο αποκαλύπτει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τις γνωστικές διαδικασίες των υποκειμένων.
Πεδίο 7:Σηματοδότηση με μη διαχωριστική ισορροπία(πληρωμή αποστολέα,πληρωμή πομπού)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

	response to Left signal				response to Right signal		
	C	D	E		C	D	E
type A sends Left	300, 300	0, 0	500, 300	type A sends Right	450, 900	150, 150	1000, 300
type B sends Left	500, 500	300, 450	300, 0	type B sends Right	450, 0	0, 300	0, 150

Σχήμα 3.11

Στο πείραμα, τα μισά υποκείμενα ορίστηκαν ως «αποστολείς» και τα άλλα μισά «δέκτες».Αφού διαβάσαμε τις οδηγίες,αρχίσαμε με τη ρίψη ενός ζαριού για κάθε αποστολέα που καθόριζε αν θα είναι τύπου A ή τύπου B. Όλοι ήξεραν ότι η εκ των προτέρων πιθανότητα ενός αποστολέα να είναι τύπου A ήταν 1/2.Ο αποστολέας, γνωρίζοντας τον τύπο του θα επιλέξει ένα σήμα, *Αριστερά* ή *Δεξιά*. Αυτό το σήμα καθορίζει αν θα χρησιμοποιηθούν οι απολαβές της δεξιάς ή της αριστερής πλευράς του πίνακα.(Οι οδηγίες που χρησιμοποιήθηκαν είχαν γράμματα για τον προσδιορισμό των σημάτων, αλλά εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις λέξεις για να διευκολύνουμε τις εξηγήσεις.)Αυτό το σήμα θα πρέπει να κοινοποιηθεί στον δέκτη που είναι ζευγάρι με τον συγκεκριμένο αποστολέα.Ο δέκτης θα δεί το σήμα του αποστολέα,*Αριστερά* ή *Δεξιά*,αλλά δεν θα δει τον τύπο του αποστολέα, και στη συνέχεια θα επιλέξει μια απάντηση, C, D ή E.

Κατ 'αρχάς, να εξετάζουμε το πρόβλημα να αντιμετωπίσουμε έναν τύπου A αποστολέα,για τον οποίο οι πιθανές πληρωμές από μια αριστερή σηματοδότηση είναι (300, 0, 500)φαίνεται με κάποιο τρόπο,λιγότερο ελκυστική από ό, τι εκείνες μιας δεξιάς σηματοδότησης(450, 150, 1000).Για παράδειγμα, εάν η κάθε απάντηση (αντίδραση) πιστεύεται ότι είναι εξίσου πιθανή (η «αρχή της ανεπαρκούς αιτίας»), τότε το δεξί σήμα έχει μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος. Ως εκ τούτου, η δεξιά σειρά έχει σκιστεί στο πάνω δεξιά μέρος στο σχήμα 16.Εφαρμόζοντας πάλι την αρχή της «ανεπαρκούς αιτίας»,ένας αποστολέας τύπου B κοιτάζοντας τις πληρωμές στην κάτω σειρά του πίνακα θα μπορούσε τον προσελκύσει περισσότερο τοαριστερο σήμα, με απολαβές (500, 300, 300),σε σύγκριση με το (450, 0, 0). Επομένως, οι πληρωμές για τον τύπο B που έχει σήμα αριστεράέχουν σκιαστεί.Στην πραγματικότητα, όλα τα υποκείμενα τύπου B απόστειλαν το αριστερό σήμα και 7 απο τα 10 τύπου A υποκείμενα έστειλαν σήμα δεξιά.Όλες οι απαντήσεις σε αυτό το παίγνιο ήταν C, έτσι ώστε όλα τα αποτελέσματα εκτός απο τρία ήταν στα δύο κουτιά που έχουν παχιά περιγράμματα.Παρατηρήστε ότι αυτή είναι μια ισορροπία,δεδομένου οτι κανένας τύπος αποστολέα δεν θα επωφεληθεί από την αποστολή του άλλου σήματος, και ο δέκτης δεν μπορεί να τα πάει καλύτερα από το να πάρει τη μέγιστη πληρωμή που βρίσκει στα κουτιά.Αυτή είναι μία διαχωριστική ισορροπία του Nash, το σήμα αποκαλύπτει τον τύπο του αποστολέα.

Η δομή των πληρωμών για αυτό το παίγνιο γίνεται λίγο πιο σαφής αν σκεφτούμε τις αντιδράσεις ως μία από τις τρεις απαντήσεις στα αιτήματα: Παραχώρησης, Αρνησης, ή Διαφυγής.Με κάποια αβεβαιότητα σχετικά με τον τύπο του αποστολέα,η Διαφυγή είναι αρκετά μη ελκυστική για τους ερωτηθέντες που δεν την επιλέγουν ποτέ.Εξετάστε τις άλλες δύο απαντήσεις και σημειώστε ότι ο αποστολέας προτιμά πάντα τον δέκτη να επιλέξει Παραχώρηση αντί για Αρνηση. Στην διαχωριστική ισορροπία, τα σήματα αποκαλύπτουν τους τύπους του αποστολέα, οι δέκτες Παραχωρούν πάντα και όλοι οι παίκτες είναι ικανοποιημένοι.Υπάρχει, ωστόσο,μια δεύτερη ισορροπία για το παίγνιο στο σχήμα 16,στην οποία ο δέκτης Παραχωρεί στα αριστερά και Αρνείται στα δεξιά, και ως εκ τούτου και οι δύο τύποι αποστολέα δίνουν σήμα αριστερά ώστε να μην τους Αρνηθούν.Η λογική της προς τα πίσω επαγωγής (της

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

διαδοχικής ισορροπίας του Nash)δεν αποκλείει αυτές τις πεποιθήσεις, δεδομένου ότιδεν εμφανίζεται κάποια απόκλιση στην ισορροπία, και ο δέκτης κάνει την καλύτερη απάντηση σύμφωνα με αυτές τις πεποιθήσεις.Αυτό που είναι μη-διαισθητικό για αυτές τις πεποιθήσεις (ότι ένα αποκλίνον Δεξιά σήμα προέρχεται από ένα τύπο Β), είναι ότι ο τύπος Β κερδίζει 500 σε αυτό το (Αριστερά, Παραχώρηση) αποτέλεσμα ισορροπίας, και δεν υπάρχει απόκλιση θα μπορούσε θεωρητικά να αυξήσει την πληρωμή. Αντίθετα, ο τύπος Α κερδίζει 300 στην συγκεντρωτική ισορροπία τηςαριστερής πλευράς, και αυτό το είδος θα μπορούσε να κερδίσει ενδεχομένως περισσότερο (450 ή ακόμη και 1000), ανάλογα με την απόκριση σε μια απόκλιση. Το *διαισθητικό κριτήριο*των In-KooCho και Kreps (1987) αποκλείει αυτές τις πεποιθήσεις, και επιλέγει τη διαχωριστική ισορροπία που παρατηρείται στη διαδικασία του θησαυρού.

	response to Left signal				response to Right signal		
	C	D	E		C	D	E
type A sends Left	300, 300	0, 0	500, 300	type A sends Right	450, 900	150, 150	1000, 300
type B sends Left	300, 300	300, 450	300, 0	type B sends Right	450, 0	0, 300	0, 150

Σχήμα 3.12
Σηματοδότηση χωρίς διαχωριστική ισορροπία(πληρωμή αποστολέα,πληρωμή πομπού)

Το παίγνιο στο σχήμα 17 είναι μια μικρή παραλλαγή στο προηγούμενο παίγνιο, με μόνη αλλαγή ότι το (500, 500) στο κάτω αριστερό μέρος του σχήματος 16 αντικαθίσταται από μια πληρωμή(300, 300).Όπως και πριν,θεωρήστε τις αναμενόμενες πληρωμές του αποστολέα όταν κάθε απόκριση θεωρείται ότι είναι εξίσου πιθανή,η οποία μας οδηγεί να αναμένουμε ότι οι αποστολείς τύπου Α θα επιλέξουν *δεξιά* και ότι οι αποστολείς τύπου Β θα επιλέξουν *αριστερά*, όπως υποδεικνύεται από τη σκίαση.Στο πείραμα, 10 απο τους 13τύπου Α αποστολείς έκαναν την επιλογή *δεξιά*, και 9 από τους 11 αποστολείς τύπου Β επέλεξαν *αριστερά*. Αλλά ο διαχωρισμός που παρατηρήθηκε σε αυτή τη διαδικασία αντίφασης δεν είναι μια ισορροπία του Nash.Διαφορετικά απο της διαδικασίες σε ζευγάρια που είδαμε πιο πριν η αλλάγη στις πληρωμές σε αυτά τα παίγνια σηματοδότησης αλλάζουν το σύνολο των ισορροπιών του Nash.Όλες οι ισορροπίες για αυτήν την διαδικασία αντίφασης περιλαμβάνει «συγκέντρωση»(*pooling*), με τους δύο τύπους να στέλνουντο ίδιο σήμα.Οι δέκτες θα προτημούσαν να Παραχωρίσουν σε ένα δεξί σήμα και να Αρνηθούν ένα αριστερό.Οι αποστολείς τύπου Β θα έχουν τότε κίνητρο να αποκλίνουν απο την διαχωριστική ισορροπία και να δώσουν σήμα *δεξιά*. Στο πείραμα τα μισά απο τα αριστερά σήματα βρήκαν Αρνηση ενώ μόνο 2 απο τα 12 δεξιά βρήκαν Αρνηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

3.6 Ερμηνεύοντας την Ανώμαλη Συμπεριφορά σε Παίγνια One Shot

Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματα για τις διαδικασίες αντίφασης φαίνεται να αποκλείουν μια -παιγνιοθεωρητική εξήγηση,πολλές από τις ανώμαλες μορφές δεδομένων σχετίζονται με τη φύση των κινήτρων.Αυτό δείχνει ότι μπορεί να είναι δυνατό να αναπτυχθούν επισημα μοντέλα που να εξηγούν τη διαδικασία του θησαυρού και τη διαδικασία της αντίφασης.Παρακάτω θα συζητήσουμε αρκετές πρόσφατες προσεγγίσεις που χαλαρώνουν τις κοινές υποθέσεις του τέλειου εγωισμού, της τέλειας λήψης αποφάσεων (χωρίς σφάλμα), και της τέλειας πρόβλεψης (χωρίς εκπλήξεις).Η αποστροφή της ανισότητας φαίνεται επίσης πιθανή,όταν οι παίκτες παζαρεύουν τη διαίρεση ενός σταθερού χρηματικού ποσού (Goeree και Holt, 2000). Ωστόσο, αυτό δεν μπορεί να εξηγήσει την παρατηρούμενη συμπεριφορά στην διαδικασία αντίφασηςτου ταιριάγματος των κερμάτων.Υποθέστε, για παράδειγμα, την εκδοχή «320» του παίγνιου ταιριάγματος κερμάτων.Δεδομένου ότι η στήλη είναι αντίθετη με το αποτέλεσμα (320, 40), η στήλη θα είναι πρόθυμη να διαλέξει τυχαία μεταξύ *Αριστερά* και *Δεξιά*, αν η ελκυστικότητα του δεξιά έχει αυξηθεί με τη σειρά να παίζει πιο συχνά από την πιθανότητα του 0,5 που θα έκανε έναν καθαρά εγωιστικό παίκτη στήλης αδιάφορο.Αυτή η πρόβλεψη, ότι η σειρά θα πρέπει να παίξει *Κάτω* πιο συχνά, αντικρούεται έντονα από τα δεδομένατου μεσαίου τμήματος του Πίνακα 1.

Μια άλλη πιθανότητα είναι ότι η συμπεριφορά σε one-shot παίγνια συμμορφώνεται με μια απλή ευρετική (heuristic).Πράγματι, ορισμένοι πειραματικοί οικονομολόγοι πρότείναν ότι υποκείμενα στην αρχική περίοδο ενός επαναλαμβανόμενου παίγνιου επιλέγουν την απόφαση που μεγιστοποιεί το επίπεδο ασφαλείας τους, δηλαδή τη "maximin"απόφαση.Για παράδειγμα, στο παίγνιο του Kreps.Η συχνά παρατηρούμενη Μη-Nash απόφαση μεγιστοποιεί την ασφάλεια της στήλης.Τα ισχυρά αποτελέσματα της διαδικασίας στα παίγνια ταιριάγματοςκερμάτων δεν μπορούν να να εξηγηθούν με αυτόν τον τρόπο, ωστόσο, δεδομένου ότι και στις τρεις διαδικασίεςη ελάχιστη πληρωμή ελάχιστο κάθε παίκτη είναι η ίδια και για τις δύο αποφάσεις.Επιπλέον, οι επιλογές μεγιστοποίησης-ασφάλειας στο δίλημμα του ταξιδιώτη και το παίγνιο συντονισμού ελάχιστης προσπάθειας είναι η χαμηλότερη δυνατή απόφαση,η οποία έρχεται σε αντίθεση με την υψηλή απαίτηση και τις επιλογές προσπάθεια στις διαδικασίες αντίφασης.Τα άτομα μπορεί να είναι απρόθυμοι να αναλάβουν κινδύνους σε άγνωστες καταστάσεις,αλλά η ακραία αποστροφή του κινδύνου που συνεπάγεται της μέγιστης ασφάλειας γενικά δεν παρατηρείται.Επιπλέον, η ευρετική (heuristics) βασισμένη στην αμοιβαιότητα ή την τaση προς ενα status-quo δεν εφαρμόζετε σε one-shot παίγνια ενός σταδίου,όπου δεν υπάρχει ούτε προηγούμενο ούτε ευκαιρία να ανταπόδωσης.Ούτε μπορεί η αποστροφή της απώλειας να είναι η πρωταρχική αιτία,δεδομένου ότι δεν υπάρχουν απώλειες στα περισσότερα από τα παίγνια που αναφέρθηκαν εδώ, και η πιθανότητα απώλειας δεν είχε καμία επίδραση στο παίγνιο του Kreps.

Ως εναλλακτική λύση στην απλή ευρετική heuristics,θα μπορούσε κανείς να προσπαθήσει να διαμορφώσει τις εσωτερικές διαδικασίες σκέψης των παικτών. Προηγούμενα μοντέλα έχουν προσδιορίσει κάποια διαδικασία σχηματισμού πεποιθήσεων, υποθέτοντας ότι οι παίκτες ανταποκρίνονται καλύτερα σύμφωνα με τις πεποιθήσεις τους τη δεδομένη στιγμή.25 Τα πειράματα που αναφέρθηκαν παραπάνω υποδεικνύουν ότι τα μεγέθη (όχι μόνο τα σήματα), στηνδιαφοράτων πληρωμών παιζει ρόλο, και κατά συνέπεια είναι φυσικό να υποθέσουμε έναν κανόνα για τις αποφάσεις για τον οποίο οι πιθανότητες επιλογής σχετίζονται θετικά, αλλά με ατελώς με τις πληρωμές. Ο λογικός κανόνας, για παράδειγμα,ορίζει ότι πιθανότητες επιλογής, p_i, για τις επιλογές i = 1, ..., m,είναι ανάλογες με εκθετικέςσυναρτήσεις των σχετικών αναμενόμενωνπληρωμών, π_i^e.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\mathbf{p_i} = \exp_{\dots m} \quad , \qquad \mathbf{i} = 1, \dots, \mathbf{m}, \qquad (1)$$

όπου το άθροισμα στον παρονομαστή εξασφαλίζει ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι ένα και η "παράμετρος σφάλματος"μ,καθορίζει πόσο ευαίσθητες είναι οι πιθανότητες επιλογής στις διαφορές πληρωμών.Οσο το μ πλησιάζει το μηδέν,οι διαφορές στις πληρωμές εκτινάσσονται και η πιθανότητα της βέλτιστης επιλογής τείνει στο 1.Στο άλλο άκρο όσο το μ τείνει στο άπειρο,οι πιθανότητες επιλογής συγκλείνουν στο 1/m ανεξάρτητα απο τις αναμενόμενες πληρωμές.

Για να χρησιμοποιηθεί η " καλύτερη λογική απάντηση" στην (1), πρέπει να μοντελοποιήσουμε τη διαδικασία σχηματισμού των πεποιθήσεων, αφού οι πιθανότητες των πεποίθησεων χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των αναμενόμενων πληρωμών στη δεξιά πλευρά της (1).Με την αρχή της ανεπαρκούς αιτίας θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι κάθε μία από τις δράσεις των άλλων είναι εξίσου πιθανή. Αυτό αντιστοιχεί στην έννοια των Stahl και Wilson (1995) της λογικής "επιπέδου 1", η οποία πιάνει πολλές από αποφάσεις της πρώτης περιόδου στο «παίγνιο μαντέματος" που αναφέρθετε από τον Nagel (1995).Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η επίπεδου-ένα λογική παρέχει επίσης καλές προβλέψεις τόσο για τη διαδικασία του θησαυρού οσο για τη διαδικασία της αντίφασης στο δίλημμα του ταξιδιώτη,στο παίγνιο συντονισμού ελάχιστης προσπάθειας και στο παίγνιο του Kreps.Υπάρχουν,ενδείξεις,εντούτοις,ότι τουλάχιστον μερικά υποκείμενα δημιουργούν πιο ακριβείς πεποιθήσεις σχετικά με τις ενέργειες των άλλων, πιθανώς, μέσω υψηλότερων επιπέδων διορατικότητας.Στο παίγνιο ταιριάγματος των κερμάτων, για παράδειγμα,μία επίπεδη προηγούμενη καθιστά τη στήλη αδιάφορη μεταξύ *αριστεράς* και *δεξιάς* και όμως οι περισσότεροι παίκτες στήλης φαίνεται να προβλέπουν οτι η γραμμή θα επιλέξει *Πάνω* στην εκδοχή «320» και *Κάτω* στην εκδοχή«44» αυτού του παίγνιου.

Φυσικά, το τι θα κάνει ο άλλος παίκτης εξαρτάται από το τι νομίζει ότι θα κάνετε,έτσι ώστε το επόμενο λογικό βήμα είναι να υποθέσουμε ότι οι άλλοι απαντούν σε ένα επίπεδο προηγούμενο, και μετά εμείς θα ανταποκριθούμε σ' αυτήν αναμενόμενη ανταπόκριση (Selten).Αυτό είναι το "επίπεδο δύο" του ορθολογισμού των Stahl και Wilson (1995).Δεν υπάρχει, ωστόσο, κανένας προφανής λόγος να περιορίσουμε τα επίπεδα της επαναλαμβανόμενης σκέψης.Η έννοια της ορθολογικότητας που αναφέρθηκε παραπάνω,για παράδειγμα, περιλαμβάνει απείρως πολλά επίπεδα επαναλαμβανόμενης σκέψης,με τις "ποτέ-καλύτερες" απαντήσεις να εξαλείφονται διαδοχικά.Αλλά η ορθολογικότητα φαίνεται να προϋποθέτει πολύ λογική, δεδομένου ότι προβλέπει ότι όλοι οι ισχυρισμοί στο δίλημμα του ταξιδιώτη θα είναι ίσοι με το ελάχιστο αίτημα,ανεξάρτητα από την παράμετρο ποινής ανταμοιβής.Ένας τρόπος να περιοριστεί η ακρίβεια της διαδικασίας της σκέψης, χωρίς να κάνουμε μια αυθαίρετη υπόθεση σχετικά με τον αριθμό των επαναλήψεων, είναι να εισάγουμε αυξανόμενες ποσότητες θορύβου σε υψηλότερα επίπεδα επαναλαμβανόμενης σκέψης (Goeree και Holt, 2000, Kübler και Weizsäcker, 2000). Ας χαρακτηρίζει το Φ_μ το χάρτη της καλύτερης λογικής απάντησης (για ποσοστό σφάλματοςμ) στη δεξιά πλευρά του (1). Ακριβώς όπως μια ενιαία λογική απάντηση για τις πεποιθήσεις, p_0, μπορεί να παρασταθεί ως p=Φ_μ(p0), μια σειρά τέτοιων αποκρίσεων μπορεί να παρασταθεί ως:

$$(2) \qquad p = \lim_{n \to \infty} \Phi_{\mu 1}(\Phi_{\mu 2}(\dots \Phi_{\mu n}(p_0))),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

όπου $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ...$, με μ_∞ συγκλίνει στοάπειρο.Αυτή η υπόθεση μας δίνει την ιδέα ότι γίνεται όλο και πιο περίπλοκο το να κάνεις νόλο και περισσότερες επαναλήψεις.Με το Φ_μ για $\mu = \infty$ χαρτογραφείται το σύνολο της πιθανότητας σε ένα μόνο σημείο,η δεξιά πλευρά του (2), είναι ανεξάρτητη από το αρχικό διάνυσμα της πεποίθησης p_0. Επιπλέον, η διεργασία στο (2) αποδίδει ένα μοναδικό αποτέλεσμα ακόμη και σε παίγνια μεπολλαπλές ισορροπίες του Nash.Προσέξτε ότι οι πιθανότητες επιλογής στην αριστερή πλευρά του (2) γενικά δεν ταιριάζουν με τις πιθανότητες των πεποιθήσεων σε κανένα στάδιο της επαναληπτικής διαδικασίας στα δεξιά.Με άλλα λόγια,η ενδοσκοπική διαδικασία επιτρέπει εκπλήξεις, οι οποίες είναι πιθανό να συμβούν σε έναone-shot παίγνιο.

Για τα παίγνια με πολύ διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας,όπως αυτά που αναφέρονται εδώ, οι παραμέτροι σφάλματος που παρέχουν την καλύτερη προσαρμογή είναι πιθανό να είναι διαφορετικά.Σε αυτή την περίπτωση,οι εκτιμήσεις δείχνουν το βαθμό πολυπλοκότητας,δηλαδή χρησιμεύουν ως μια συσκευή μέτρησης. Για τα παίγνια παρόμοιων πολυπλοκοτήτων,το μοντέλο στο (2) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει τη συμπεριφορά στα παίγνια.Για παράδειγμα, το χρησιμοποιήσαμε για να εξηγήσουμε τα πρότυπα των δεδομένων σε μια σειρά 37 απλών παιγνίων πίνακα (*matrix*),χρησιμοποιώντας μια απλή παραμετροποίηση δυο παραμέτρων $\mu_n = \mu^{t^n}$, όπου το t καθορίζει τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ο θόρυβος όσο αυξάνονται οιεπαναλήψεις (Goeree και Holt, 2000).Η εκτιμώμενη τιμή (t = 4,1) υποθέτει ότι υπάρχειπερισσότερος θόρυβος για τα υψηλότερα επίπεδα ενδοσκόπησης (introspection), ένα αποτέλεσμα που είναι με το ζόρι σύμφωνο με τις εκτιμήσεις των Kübler και Weizsäcker (2000) για τα δεδομένα από πειράματα καταρρακτοδών πληροφοριών.

Η ανάλυση της ενδοσκόπησης δεν έχει μελετηθεί σε βάθος σαν θέμα στη θεωρία των παιγνίων, συγκρινόμενο, για παράδειγμα με τις βελτιώσεις της ισορροπίας και τη μάθηση.Αρκετά από τα μοντέλα που προαναφέρθηκαν κάνει μια αρκετά καλή δουλειά στην οργάνωση των ποιοτικών προτύπων συμμόρφωσης καιαπόκλισης από τις προβλέψεις της στάνταρ θεωρίας, αλλά υπάρχουν προφανείς διαφορές. Ελπίζουμε ότι αυτήηέρευνα θα τονώσει περαιτέρω τη θεωρητική εργασία για τα μοντέλα συμπεριφοράς σε one-shot παίγνια.Μια δυνητικά χρήσιμη προσέγγιση μπορεί να είναι να συγκεντρωθούν οι πεποιθήσεις άμεσα καθώς παίζονται τα παίγνια (AndrewSchotterκαιYawNarkov, 1998,TheoOfferman, 1997).

3.7 Συμπεράσματα

Τα πειράματα στα one-shot παίγνια είναι ενδιαφέροντα γιατί πολλά παίγνια στην πραγματικότητα παίζονται μόνο μια φορά, το ενιαίο παίγνιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές της θεωρίας των παιγνίων και σε άλλους τομείς, π.χ.διεθνής συγκρούσεις,προεκλογικές εκστρατείες και νομικές διαφορές.Οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων σε αυτά τα περιβάλλοντα,όπως τα υποκείμενα στα πειράματά μας, συνήθως έχουν εμπειρία σε παρόμοια παίγνια με άλλους ανθρώπους.Τα one-shot παίγνια είναι επίσης ελκυστικά επειδή μας επιτρέπουν να αφαιρεθούμε από τα θέματα της μάθησης και της προσπάθειας χειραγώγησης των πεποιθήσεων των άλλων,τη συμπεριφορά ή τις προτιμήσεις (π.χ.αμοιβαιότητα, συνεργατικότητα).Το έγγραφο αυτό αναφέρει τα αποτελέσματα δέκα ζευγαριών παιγνίων που παίζονται μόνο μία φορά από άτομα που έχουν εμπειρία σε άλλα one-shot και επαναλαμβανόμενα παίγνια.Η ισοροπία του Nash (ή σχετική βελτίωση) παρέχει ακριβείς προβλέψεις για τις βασικές εκδοχές των εν λόγω παιγνίων.Σε κάθε περίπτωση,ωστόσο, υπάρχει ένα αντιστοιχισμένο παίγνιο για το οποίο η πρόβλεψη του Nash σαφώς αποτυγχάνει, έστω και αν αποτυγχάνει με τρόπο που να συνάδει με την απλή (μη-παιχνίδο-θεωρητική) διαίσθηση.Τα αποτελέσματα για αυτά τα έμπειρα υποκείμενα δείχνουν οτι :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Η συμπεριφορά μπορεί να αποκλίνει σημαντικά από τη μοναδική ορθολογική (του Nash) ισορροπία στο κοινωνικό δίλημμα(του ταξιδιώτη).Σε αυτά τα παίγνια, η ισορροπία του Nash βρίσκεται στη μία πλευρά του εύρους των εφικτών αποφάσεων, ενώ τα δεδομένα για τη διαδικασία της αντίφασης έχουν θέση στην απέναντι πλευρά αυτού του εύρους.Το πιο εξέχον χαρακτηριστικό των δεδομένων είναι η ακραία ευαισθησία σε μια παράμετρο που δεν έχει καμία επίδραση στην έκβαση του Nash.

Οι φοιτητές που υπέφεραν στα μαθήματα της θεωρίας των παιγνίων μπορεί να έχουν καλούς λόγους να έχουν πρόβλημα στην κατανόηση του γιατί μια αλλαγή στις πληρωμές ενός παίκτη επηρεάζει μόνο τις πιθανότητες απόφασης του άλλου παίκτη μέσω μιας ισορροπίας μεικτής στρατηγικής του Nash.Τα δεδομένα από τα πειράματα με ταίριασμα των κερμάτων δείχνουν ισχυρή "προσωπική πληρωμή" αποτέλεσμα που δεν προβλέπεται από τη μοναδική (μεικτής στρατηγικής)ισορροπία του Nash.Η ανάλυση του Nash φαίνεται να λειτουργεί μόνο κατά σύμπτωση,όταν η δομή των πληρωμών είναι συμμετρική και οι κίνδυνοι απόκλισης είναι ισορροπημένοι.

Οι επιλογές της προσπάθειας επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το κόστος της προσπάθειας σε παίγνια συντονισμού, ένα διαισθητικό αποτέλεσμα που δεν εξηγείται από την καθιερωμένη θεωρία,δεδομένου ότι οποιαδήποτε κοινή προσπάθεια είναι μια ισορροπία του Nash σε τέτοια παίγνια.Εξάλλου, όπως υπέθεσε ο Kreps, είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε παίγνια συντονισμού όπου η πλειοψηφία των αποφάσεων ενός παίκτη αντιστοιχούν στη μόνη δράση που δεν είναι μέρος οποιασδήποτε ισορροπίας του Nash.

Τα υποκείμενα συχνά δεν εμπιστεύονται οτι οι άλλοι θα να είναι λογικοί όταν ο παραλογισμός είναι σχετικά ανέξοδος.Επιπλέον, «απειλές» που *δεν* είναι αξιόπιστες από τεχνική άποψη μπορούν,ωστόσο,να αλλάξουν τη συμπεριφορά σε απλά παίγνια δύο σταδίων όταν αυτές οι απειλές δεν είναι δαπανηρές.

Οι αποκλίσεις από τις προβλέψεις του Nash στα παίγνια διαπραγματεύσεων εναλλασσόμενων-προσφορων και σε δημοπρασίες ιδιωτικής αξίας είναι αντιστρόφως ανάλογες με το κόστος αυτών των αποκλίσεων.Οι επιπτώσεις αυτών των τάσεων μπορεί να είναι αρκετά μεγάλεςστα εξεταζόμενα παίγνια.

Είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα απλό παίγνιο σηματοδότησης στο οποίο οι αποφάσεις αποκαλύπτουν τον τύπο σηματοδότη (διαχωρισμός), ακόμη και αν η ισορροπία περιλαμβάνει την συγκέντρωση (*pooling*).

Λοιπόν, τι πρέπει να γίνει;Ο Reinhard Selten, ένας από τους τρεις θεωρητικούς του παίγνιου που μοιράστηκαν το Βραβείο Νόμπελ το 1995, δήλωσε: "Η θεωρία του παίγνιου είναι για την απόδειξη θεωρημάτων,όχι για να παίζουμε παίγνια." Πράγματι, η εσωτερική κομψότητα της παραδοσιακής θεωρίας των παιγνίων είναι ελκυστική, και έχει υπερασπιστεί ως μια θεωρία που καθορίζει το πως απολύτως λογικοί άνθρωποι θα πρέπει να παίζουν τα παίγνια μεταξύ τους, παρά ως μια θετική θεωρία που προλέγει την πραγματική συμπεριφορά (Rubinstein).Είναι φυσικό να διαχωρίζονται οι κανονιστικές και οι θετικές μελέτες της ατομικής λήψης αποφάσεων,το οποίο επιτρέπει σε κάποιον να συγκρίνει την πραγματική και τη βέλτιστη απόφαση.Αυτή, η βασισμένη σε κανόνες άμυνα δεν είναι πειστική για τα παίγνια,ωστόσο, δεδομένου ότι ο καλύτερος τρόπος για κάποιον να παίξει ένα παίγνιο εξαρτάται από το πώς θα παίξουν στην ουσία οι άλλοι και όχι σύμφωνα με το πώς κάποια θεωρία υπαγορεύει ότι οι λογικοί άνθρωποι πρέπει παίζουν.Ο John Nash, ένας άλλος από τους παραλήπτες του Νόμπελ,δεν βρήκε τρόπο να αποφύγει αυτό το δίλημμα και όταν τα πειράματά του δεν ήταν πια σε θέση να παρέχουν υποστήριξη στη θεωρία,έχασε την εμπιστοσύνη που είχε στην καταλληλότητα της θεωρίας των παιγνίων και επικεντρώθηκε σε πιο καθαρά μαθηματικά θέματα στην μεταγενέστερη έρευνα του .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ο Nash φαίνεται να υποτίμησε τη σημασία της διορατικότητάς του και εμείς θα είμαστε οι πρώτοι που θα παραδεχτούμε ότι έχουμε αρχίσει την ανάλυση ενός νέου στρατηγικού προβλήματος με την εξέταση των ισορροπιών που προέρχονται από την τυπική θεωρία των παιγνίων, πριν λάβουμε υπ’ όψην τις επιπτώσεις των πληρωμών και τους κίνδυνουςασθμμετρίας στα κίνητρα της απόκλησης.Αλλά σε ένα διαδραστικό,στρατηγικό πλαίσιο,οι τάσεις μπορούν να έχουν επιπτώσεις ενίσχυσης που οδηγούν τη συμπεριφορά μακριά από τις προβλέψεις του Nash και οι οικονομολόγοι έχουν αρχίσει να εξηγουν αυτές τις αποκλίσεις χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις σε ηλεκτρονικό υπολογιστή και θεωρητικές αναλύσεις της μάθησης και τις διεργασίες των λάθος αποφάσεων.Υπήρξε σχετικά μικρή θεωρητική ανάλυση για τα one-shot παίγνια όπου η μάθηση είναι αδύνατη.Τα μοντέλα της επαναλαμβανόμενης ενδοσκόπησης που συζητήθηκαν εδώ προσφέρουν μια υπόσχεση επεξήγησης των ποιοτικών χαρακτηριστικών των αποκλίσεων από τις προβλέψεις του Nash που απαριθμούνται ανωτέρω.Βαζοντας τες μαζί, αυτές οι νέες προσεγγίσεις σε μια στοχαστική θεωρία των παιγνίων ενισχύουν τη σημασία της συμπεριφοράς στην τυπική θεωρία των παιγνίων.Κοιτάζοντας εργαστηριακά δεδομένα είναι πολύ λιγότερο αγχωτικό από ό, τι ήταν πριν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 4

4. Παίζοντας παίγνια με τους Αλγόριθμους: Συνδυαστική Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Τα συνδυαστικά παίγνια οδηγούν σε διάφορα ενδιαφέροντα,καθαρά προβλήματα σε αλγορίθμους και την θεωρία της πολυπλοκότητας,πολλά από τα οποία παραμένουν άλυτα.Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να παράσχει μια επισκόπηση αυτού του πεδίου ώστε να ενθαρρύνει την περαιτέρω έρευνα. Συγκεκριμένα,αρχίζουμε με το γενικό πλαίσιο της Συνδυαστικής Θεωρίας των Παιγνίων,η οποία αναλύει το ιδανικό παίξιμο σε παίγνια τέλειας-ενημέρωσης και την Περιορισμένη Λογική, η οποία παρέχει ένα πλαίσιο για την μέτρηση της δυσκολίας. Στη συνέχεια,εξετάζουμε τα αποτελέσματα σχετικά με την πολυπλοκότητα του προσδιορισμού του ιδανικού παιξίματος σε αυτά τα παίγνια και τα προβλήματα σχετικά με την επίλυση γρίφων (puzzle),όσον αφορά τόσο τον πολυωνυμικό αλγόριθμο σε σχέση με τον χρόνο όσο και τα αποτελέσματα της υπολογιστικής δυσκολίας.Η περίληψη μας των γενικών ιδεών και της εξέταση των αλγοριθμικών αποτελεσματων δεν είναι καθόλου πλήρης, αλλά θα πρέπει να χρησιμεύσει ως μια καλή πρώτη προσέγγιση.

4.1 Εισαγωγή

Πολλά κλασικά παίγνια είναι γνωστό ότι είναι υπολογιστικά δύσκολα (απροσέγγιστα) (υποθέτοντας ότι P διαφορετικό απο NP):παίγνια ενός παίκτη είναι συχνά NP-ολοκληρωμένα (όπως ο Ναρκαλιευτής) ή PSPACE-ολοκληρωμένα (όπως το RushHour),και τα παίγνια δύο παικτών είναι συχνά PSPACE-ολοκληρωμένα (όπως το Othello) ή EXPTIME-ολοκληρωμένα (όπως στην Ντάμα και το Σκάκι). Παραδόξως, πολλά φαινομενικά απλά παζλ και παίγνια είναι επίσης δύσκολα. Άλλα αποτελέσματα είναι θετικά,αποδεικνύοντας ότι ορισμένα παίγνια μπορούν να παχτούν με κάποιο καλύτερο δυνατό τρόπο σε πολυωνυμικά στο χρόνο.Σε ορισμένες περιπτώσεις,ιδίως σε παίγνια με ένα μόνο παίκτη,τα υπολογιστικά προσιτά παίγνια εξακολουθούν να είναι ενδιαφέροντα.

Αρχίζουμε με την εξέταση μερικών βασικών της Συνδυαστικής Θεωρίας των Παιγνίων στην παράγραφο 2, η οποία δίνει εργαλεία για το σχεδιασμό αλγορίθμων, ακολουθεί η ανάλυση της σχετικά νέας θεωρίας της Περιορισμένης Λογικής στο 3^{ο} τμήμα,η οποία δίνει τα εργαλεία για την απόδειξη της δυσκολίας.Στο μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου,τα τμήματα 4-6 εξετάζονται τα αποτελέσματα των αλγορίθμων και της δυσκολίας των συνδυαστικών παιγνίωνν και παζλ.Το τμήμα 7 καταλήγει στο συμπέρασμα με ένα μικρό δείγμα δύσκολων ανοικτών προβλημάτων στην αλγοριθμική Συνδυαστική Θεωρία Παιγνίων.

Η Συνδυαστική Θεωρία των Παιγνίων πρέπει να διακρίνεται από τις άλλες μορφές της θεωρίας των παιγνίων που προέκυψαν στο πλαίσιο της οικονομίας.Η οικονομική θεωρία των παιγνίων έχει πολλές εφαρμογές στην επιστήμη των υπολογιστών καθώς και, για παράδειγμα,στο πλαίσιο των δημοπρασιών και της ανάλυσης της συμπεριφοράς στο Διαδίκτυο

4.2 Συνδυαστική Θεωρία Παιγνίων

Ενα συνδυαστικό παίγνιο περιλαμβάνει συνήθως δύο παίκτες,που συχνά αποκαλούνται Αριστερά και Δεξιά,εναλλάσσουν τη σειρά τους στο παίγνιο κάνοντας καθορισμένες κινήσεις.Ωστόσο,στην ενδιαφέρουσα περίπτωση ενός συνδυαστικού παζλ (γρίφου),υπάρχει μόνο ένας παίκτης, και στα cellular automata,όπως το παίγνιο της Ζωής του Conway,δεν υπάρχουν καθόλου παίκτες.Σε κάθε περίπτωση,δεν επιτρέπεται να είναι τίποτα στην τύχη ή να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

υπάρχουν κρυμμένες πληροφορίες:όλοι οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις πληροφορίες σχετικά με το gameplay (τέλεια πληροφόρηση).Το πρόβλημα είναι καθαρά η στρατηγική: πώς να παίξει κανείς το καλύτερο δυνατό παίγνιο με ένα ιδανικό αντίπαλο.

Είναι χρήσιμο να διακρίνουμε διάφορους τύπους παιγνίων τέλειας πληροφόρησης με δύο παίκτες-τέλειο.Μια κοινή παραδοχή είναι ότι το παίγνιο τελειώνει μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό κινήσεων (το παίγνιο είναι πεπερασμένο ή μικρό) και το αποτέλεσμα είναι ένας μοναδικός νικητής.Φυσικά, υπάρχουν και εξαιρέσεις:ορισμένα παίγνια(Όπως το σκάκι)μπορούν να συνεχίζουν για πάντα και μερικά παίγνια (όπως η τρίλιζα και το σκάκι) δέχονται την ισοπαλλία σε ορισμένες περιπτώσεις.Εντούτοις, στο στήσιμο ενός συνδυαστικού-παίγνιου, είναι χρήσιμο να προσδιοριστεί σαν νικητής ο τελευταίος παίκτης που είναι σε θέση να κινηθεί,αυτό ονομάζεται κανονικό παίγνιο.Εάν,από την άλλη, νικητής είναι ο πρώτος παίκτης που δεν μπορεί να κινηθεί,αυτό ονομάζεται παίγνιο (misere).(Εμείς θα υποθέσουμε το κανονικό παίγνιο.)Ένα παίγνιο είναι (loopy) αν είναι δυνατόν να επαναλάβουμε τις ίδιες κινήσεις που έχουμε ήδη κανει στο παρελθόν(όπως στο σκάκι, για παράδειγμα).Τέλος, ένα παίγνιο ονομάζεται αμερόληπτο αν οι δύο παίκτες (αριστερά και δεξιά) αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή, για τον κάθε παίκτη διατίθενται οι ίδιες κινήσεις από την ίδια θέση αλλιώς το παίγνιο λέγεται μεροληπτικό.

Ένα ιδιαίτερο παίγνιο τέλειας πληροφορίας για δύο παίκτες χωρίς ισοπαλίες μπορεί να έχει ένα από τα τέσσερα αποτελέσματα ως απόρεια ιδανικού παιξίματος :
Ο παίκτης Αριστερά κερδίζει, ο παίκτης Δεξιά κερδίζει, ο πρώτος παίκτης που θα κινηθεί νικάει (είτε είναι ο αριστερά είτε ο δεξιά),ή ο δεύτερος παίκτης που θα κινηθεί νικάει.Ένας από τους στόχους όσον αφορά την ανάλυση των παιγνίων με δυο παικτες είναι να καθορίστει το αποτέλεσμα ως μία από τις τέσσερις αυτές κατηγορίες, και να βρεθεί μια στρατηγική για τον νικητή ώστε να κερδίζει.Ένας άλλος στόχος είναι να υπολογιστεί μια βαθύτερη δομή των παιγνίων που περιγράφονται στη συνέχεια αυτού του τμήματος, που ονομάζεται η αξία του παίγνιου.Μια όμορφη μαθηματική θεωρία έχει αναπτυχθεί για την ανάλυση των συνδυαστικών παιγνίων με δύο παίκτες.Ένα νέο εισαγωγικό βιβλίο σχετικά με το θέμα είναι το *Μαθήματα Παίγνιου* των Albert, Nowakowski, και Wolfe.Την πιο ολοκληρωμένη αναφορά κάνει το βιβλίο *Τρόποι για τη Νίκη* των Berlekamp, Conway, και Guy και μια πιο μαθηματική παρουσίαση είναι το βιβλίο *Σχετικά με τους Αριθμούς και τα Παίγνια* των Conway.Δείτε επίσης για επισκοπήσεις και την βιβλιογραφία.Η βασική ιδέα πίσω από τη θεωρία είναι απλή:ένα παίγνιο δύο παικτών μπορεί να περιγραφεί σαν τις ρίζες των δέντρων,όπου κάθε κόμβος έχει μηδέν ή περισσότερες αριστερές διακλαδώσεις που αντιστοιχούν στις επιλογές του παίκτη Αριστερά για να μετακινηθεί και μηδέν ή περισσότερες διακλάδώσεις δεξιά που αντιστοιχούν στις επιλογές για τον παίκτη Δεξιά να κινηθεί,τα φύλλα αντιστοιχούν στα παίγνια που έχουν τελειώσει, με το νικητή να καθορίζεται είτε με κανονικό ή με misère παίξιμο.Τα ενδιαφέροντα μέρη της Συνδυαστικής Θεωρίας των Παιγνίων είναι οι διάφορες μέθοδοι για το χειρισμό και την ανάλυση των παιγνίων/δέντρων.Δίνουμε μια σύντομη περίληψη μερικών από αυτές τις μεθόδους σε αυτό το τμήμα.

4.2.1 Σουρεαλιστικοί Αριθμοίτου Conway

Μια πλούσια δομημένη ειδική κατηγορία παιγνίων δύο παικτών είναι οι σουρεαλιστικοί αριθμοί του JohnH.Conway μια μεγάλη γενίκευση των πραγματικών και κανονικών αριθμικών συστημάτων.Βασικά, ένας σουρεαλιστικό αριθμός {L | R} είναι ο "πιο απλός" αριθμός μεγαλύτερος από οποιαδήποτε επιλογή του Αριστερά (σε L) και μικρότερος από όλες τις επιλογές του Δεξιά (σε Ε),για να αποτελέσει αυτό έναν αριθμό, όλες οι επιλογές των Αριστερά και Δεξιά θα πρέπει να είναι αριθμοί, που να καθορίζουν μια συνολική κατηγορία και κάθε επιλογή Αριστερά πρέπει να είναι μικρότερη από ό, τι κάθε επιλογή του Δεξιά.Για παράδειγμα, ο απλούστερος αριθμός χωρίς περιορισμούς μεγαλύτερο-από ή μικρότερο-από, που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

συμβολίζεται {|}, Είναι 0.Ο απλούστερος αριθμός μεγαλύτερος από μηδέν και χωρίς περιορισμούς μικρότερο-απο,συμβολίζεται {0 |} και είναι 1 και ο απλούστερος αριθμός μεγαλύτερος-από 0 και 1 (ή απλά μεγαλύτερος απο το 1), συμβολίζεται {0, 1 |},και είναι το 2.Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσει όλους τους φυσικούς αριθμούς και μάλιστα όλους τους ordinals.Από την άλλη, ο απλούστερος αριθμός μικρότερος-από 0, συμβολίζεται {| 0}, και είναι -1,ομοίως, όλοι οι αρνητικοί ακέραιοι μπορούν να παραχθούν.Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο απλούστερος αριθμός μεγαλύτερος-από μηδέν και μικρότερος από 1,συμβολίζεται {0 | 1}, και είναι το ½ ομοίως,όλοι οι δυαδικοί ρητοί μπορούν να παραχθούν.Μετά από έναν άπειρο αριθμό τέτοιων σταδίων κατασκευής,όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παραχθούν, μετά από πολλά περισσότερα βήματα, οι σουρεαλιστικοί (surreals) είναι όλοι αριθμοί που μπορούν να παραχθούν με αυτό τον τρόπο.

Οι σουρεαλιστικοί αριθμοί αποτελούν ένα πεδίο,εντελώς διαταγμενο και υποστηρίζουν τις πραξεις της πρόσθεσης,της αφαίρεσης,του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης,των ριζών, των δυνάμεων, και ακόμα και των ολοκληρωμάτων σε πολλές περιπτώσεις.(Για όσους είναι εξοικειωμένοι με τους ordinals, σε αντίθεση με τους σουρεαλιστικούς οι οποίοι καθορίζονται ω-1,1/ω, κλπ.)Ως εκ τούτου, οι σουρεαλιστικοί αριθμοί είναι χρήσιμοι απο μόνοι τους για καθαρότερες μορφές ανάλυσης.

Αυτό που είναι ενδιαφέρον για τους σουρεαλιστικούς αριθμούς από τη σκοπιά της συνδυαστικής θεωρίας των παιγνίων είναι ότι είναι μια υποκατηγορία του συνόλου των παιγνίων δύο παικτών τέλειας-πληροφορίας και ένα μέρος της σουρεαλιστικής δομής, όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση, εμφανίζονται γενικά στα παίγνια.Επιπλέον, ενώ τα παίγνια δεν είναι εντελώς σε διάταξη,μπορούν ακόμα να συγκριθούν με ορισμένους σουρεαλιστικούς αριθμούς και εκπληκτικά, αναλογα με το πως ένα παίγνιο ανταποκρίνετε στο σουρεαλιστικό αριθμό 0 καθορίζει ακριβώς το αποτέλεσμα του παίγνιου.Αυτή η αναλογία περιγράφεται λεπτομερώς στις επόμενες παραγράφους.

Πρώτα ορίζουμε κάποια αλγεβρική δομή των παιγνίων που να μεταφέρετε και στους σουρεαλιστικούς αριθμούς.Συνδυαστικά παίγνια δύο παικτων,ή δέντρα, μπορούν απλά να παρασταθούνως{L | R} όπου, σε αντίθεση με τους σουρεαλιστικούς αριθμούς,δεν υπάρχουν περιορισμοί για L και R.Η *άρνηση* (negation) του παίγνιου είναι το αποτέλεσμα της αντιστροφής των ρόλων των παικτών Αριστερά και Δεξιά σε όλη την διάρκεια του παίγνιου.Το (διαζευκτικό) άθροισμα των δύο (υπο)-παιγνίων είναι το παίγνιο στο οποίο,στη σειρά του ο κάθε παίκτης,έχει μια δυαδική επιλογή,σε ποιό υπο-παίγνιο να παίξει και κάνει μια κίνηση σε αυτό ακριβώς το υποπαίγνιο. Μια μερική διάταξη ορίζεται αναδρομικά στα παίγνια:ένα παίγνιο x είναι μικρότερο ή ίσο με ένα παίγνιο y,αν κάθε επιλογή x του Αριστερά είναι μικρότερη από το y και κάθε επιλογή y του Δεξιά είναι μεγαλύτερη από x.Η (Αριθμητική) ισότητα ορίζεται με το να είναι συγχρόνως μικρότερη-από ή ίση-με και μεγαλύτερη-από ή ίση-με.

Σημειώστε ότι ενώ{-1 | 1}=0={1}ως προς τους αριθμούς,{-1| 1} και {|} παραπέμπουν σε διαφορετικά παίγνια (διάρκειας 1 κίνησης και 0 κινήσεων, αντιστοίχως), και με αυτή την έννοια είναι ίσα σε αξία,αλλά δεν είναι όμοια στο συμβολισμό ούτε στη θεωρία του παίγνιου.Παρ 'όλα αυτά, τα παίγνια {-1|1} και {|} έχουν το ίδιο αποτέλεσμα: ο δεύτερος παίκτης που θα κινηθεί κερδίζει.

Αυτό ισχύει γενικά:δύο ίσοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν παίγνια με την ίδια έκβαση (σε ένα ιδανικό παίγνιο).Πιο συγκεκριμένα, όλα τα παίγνια ίσα με 0 έχουν το αποτέλεσμα οτι ο δεύτερος παίκτης που θα κινηθεί κερδίζει.Επιπλέον, όλα τα παίγνια ίσα με ένα θετικό αριθμό έχουν το αποτέλεσμα ότι ο παίκτης *Αριστερά* κερδίζει, γενικότερα,όλα τα θετικά παίγνια (παίγνια μεγαλύτερα από 0) έχουν αυτό το αποτέλεσμα.Αντίστοιχα,όλα τα παίγνια με αρνητικό αριθμό έχουν αποτέλεσμα να κερδίζει ο παίκτης *Δεξιά* (αυτό προκύπτει αυτόματα από τη λειτουργία της άρνησης). Παραδείγματα από μηδενικά, θετικά και αρνητικά παίγνια είναι οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ίδιοι οι σουρεαλιστικοί αριθμοί, ένα επιπλέον παράδειγμα περιγράφεται παρακάτω.Υπάρχει ένα αποτέλεσμα που δεν περιλαμβάνετε στον χαρακτηρισμό των μηδενικών, θετικών ή αρνητικών παιγνίων:ο πρώτος παίκτης που θα κινηθεί κερδίζει Για να βρούμε ένα τέτοιο παίγνιο θα πρέπει προφανώς να ψάξουμε πέρα από τους σουρεαλιστικούς αριθμούς.Επιπλέον, θα πρέπει να κοιτάξουμε για τα παίγνια G που δεν συγκρίνονται με το μηδέν (κανένα από τα G=0,G<0,ήG>0 δεν ισχύει),τέτοια παίγνια που ονομάζονται ασαφής με 0, συμβολίζονται με G||0.

Ένα παράδειγμα ενός παίγνιου που δεν είναι ένας σουρεαλιστικός αριθμός είναι το {1 | 0},δεν μπορεί να υπάρχει ένας αριθμός αυστηρά μεταξύ 1 και 0,επειδή 1≥0.

Let $x = \{x^L \mid x^R\}$ be a game.

- $x \leq y$ precisely if every $x^L < y$ and every $y^R > x$.
- $x = y$ precisely if $x \leq y$ and $x \geq y$; otherwise $x \neq y$.
- $x < y$ precisely if $x \leq y$ and $x \neq y$, or equivalently, $x \leq y$ and $x \ngeq y$.
- $-x = \{-x^R \mid -x^L\}$.
- $x + y = \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$.
- x is *impartial* precisely if x^L and x^R are identical sets and recursively every position ($\in x^L = x^R$) is impartial.
- A one-pile Nim game is defined by $*n = \{*0, \ldots, *(n-1) \mid *0, \ldots, *(n-1)\}$, together with $*0 = 0$.

Σχήμα 4.1

Παρ 'όλα αυτά, {1|0} είναι ένα παίγνιο: ο παίκτης Αριστερά έχει μια κίνηση που οδηγεί στο παίγνιο 1, στο οποίο ο Δεξιά δεν μπορεί να κινηθεί και ο Δεξιά έχει μια κίνηση που οδηγεί στο παίγνιο 0,στο οποίο ο Αριστερά δεν μπορεί να κινηθεί.Έτσι, σε κάθε περίπτωση, ο πρώτος παίκτης που θα κινηθεί κερδίζει.Ο ισχυρισμός σημαίνει ότι πάνω από{1|0} ||0.Πράγματι, {1 | 0} ||x για όλους τους σουρεαλιστικους αριθμούς x, 0≤x≤1. Αντίθετα, x<{1 | 0} για όλα τα x<0 και {1 | 0} <x για κάθε 1 <x.Σε γενικές γραμμές ισχύει ότι ένα παίγνιο είναι ασαφές (fuzzy) με σουραελιστικούς αριθμούς σε ένα διάστημα [-n, n], αλλά είναι συγκρίσιμο με όλους τους σουρεαλιστικούς αριθμούς εκτός του εν λόγω διαστήματος.Άλλο παράδειγμα παίγνιου που δεν είναι ένας αριθμός είναι {2|1},το οποίο είναι θετικό(> 0), και ως εκ τούτου ο *Δεξιά* νικάει,αλλά είναι ασαφές, για αριθμούς στο διάστημα [1, 2].

4.2.2 Η Θεωρία των Sprague και Grundy

Ένα εξαίρετο αποτέλεσμα της Συνδυαστικής Θεωρίας των Παιγνίων είναι ο χαρακτηρισμός των αμερόληπτων παιγνίων τέλειας πληροφορίας με δύο παίκτες,που ανακαλυφθηκαν ανεξάρτητα τη δεκαετία του 1930 από τους Sprague και Grundy.Θυμηθείτε ότι ένα παίγνιο είναι αμερόληπτο,αν δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των παικτών *Αριστερά* και *Δεξιά*.Η θεωρία των Sprague-Grundy αναφέρει ότι κάθε πεπερασμένο αμερόληπτο παίγνιο είναι ισοδύναμο με ένα μέρος από το παίγνιο του Nim, που χαρακτηρίζεται από ένα και μόνο φυσικό αριθμό n.Αυτή η θεωρία έχει έκτοτε γενικευτεί σε όλα τα αμερόληπτα παίγνια γενίκευοντας το Nim σε όλους τους ρητούς n δείτε Nim

Το Nim είναι ένα παίγνιο που παίζεται με διάφορους σωρούς,ο καθένας αποτελείται απο ένα συγκεκριμένο αριθμό κερμάτων.Ενα παίγνιο Nim με ένα ενιαίο σωρό μεγέθους n

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

συμβολίζεται με *n και ονομάζεται nimber.Στην κάθε κίνησης ενας παίκτης μπορεί να διαλέξει εναν οποιοδήποτε σωρό και να τον μειώσει σε οποιοδήποτε μικρότερο μέγεθος που να μην είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός.Το παίγνιο τελειώνει όταν όλοι οι σωροί έχουν μέγεθος 0.Ετσι, ένας ενιαίος σωρός *n μπορεί να μειωθεί σε οποιοδήποτε από τους μικρότερους σωρούς*0,*1,. . . , *(n- 1). Οι πολλοί απλοί σωροί σε ένα παίγνιο Nim είναι ανεξάρτητοι και κατά συνέπεια κάθε παίγνιο Nim είναι το άθροισμα των παιγνίων με μια σωρό *n για διάφορες τιμές του n. Στην πραγματικότητα, ένα παίγνιο Nim με k σωρούς των μεγεθών n_1, n_2,. . . , n_k είναι ισοδύναμο με ενα παίγνιο Nim με ένα σωρό *n όπου n είναι το δυαδικό XOR των n_1, n_2,. . . , n_k.Ως συνέπεια, ενα παίγνιο Nim μπορεί να παιχτεί με το καλύτερο δυνατό τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο (πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος κωδικοποίησης του μεγέθουςτων σωρών).Ακόμη πιο περίεργο είναι ότι κάθε αμερόληπτο παίγνιο τέλειας πληροφορίας με δύο παίκτες έχει την ίδια αξία με ένα Nim παίγνιο με ενιαίο-σωρό, *n για κάποιο n.Ο αριθμός n ονομάζεται G-αξία, ή Grundy-value,ή συνάρτηση Sprague-Grundy.Είναι εύκολο να οριστεί: ας υποθέσουμε ότι το παίγνιο xέχει k επιλογές y_1,. . . , y_k για τηνπρώτη κίνηση (ανεξάρτητα από το ποιος παίκτης παίζει πρώτος). Με επαγωγή, μπορούμε να υπολογίσουμε y_1 = *n_1,. . . , y_k = *n_k.Το θεώρημα λέει ότι το x είναι ίσο με *n όπου n είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός εκτόςτου συνόλου {n_1,. . . , n_k}.Αυτός ο αριθμός n ονομάζεται ελάχιστη εξαιρετέα τιμή του συνόλου.Αυτή η περιγραφή έχει επίσης υποτεθεί ότι το παίγνιο είναι πεπερασμένο, αλλά αυτό είναι εύκολο να γενικευτεί .

Η συνάρτησηSprague-Grundy μπορεί να αυξήσει το πολύ κατά 1 σε κάθε επίπεδο της διακλάδωσης του παίγνιου, και ως εκ τούτου το nimber που προκύπτει είναι γραμμικό στο μέγιστο αριθμό των κινήσεων που μπορούν να γίνουν στο παίγνιο,το μέγεθος της κωδικοποίησης nimber είναι μόνο λογαριθμική σε αυτό το σημείο. Δυστυχώς, υπολογίζονταςτην συνάρτησηSprague-Grundy για ένα γενικό παίγνιο με την προφανή μέθοδο χρησιμοποιούμε τον χρόνο γραμμικά στον αριθμό των πιθανών καταστάσεων,οι οποίες μπορεί να είναι εκθετικές στα ίδια τα nimber.

Παρ 'όλα αυτά, η θεωρία Sprague-Grundy είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την ανάλυση αμερόληπτων παιγνίων δύο παικτών και για πολλά παίγνια υπάρχει ένας αποδοτικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του nimber.Παραδείγματα περιλαμβάνουν τα ίδια τα Nim, τον Kayles, και διάφορες γενικεύσεις το Cutcake και το Maundy-Cake.Σε όλα αυτά τα παραδείγματα, η συνάρτηση Sprague-Grundy έχει έναν συνοπτικό χαρακτηρισμό(αν και κάπως δύσκολο να αποδειχθεί),που μπορεί επίσης να υπολογιστεί εύκολα με χρήση δυναμικού προγραμματισμού.

Η θεωρία Sprague-Grundy φαίνεται δύσκολο να γενικευτεί για την επιφανειακά παρόμοια περίπτωση ενός misère παίγνιου,όπου ο στόχος είναι ο πρώτος παίκτης που να μην μπορεί να κινηθεί.Ορισμένα παίγνια έχουν επιλυθεί σ’ αυτό το πλαίσιο όλα αυτά τα χρόνια, συμπεριλαμβανομένων των Nim.Πρόσφατα μια γενική θεωρία έχει προκύψει για την αντιμετώπιση των misère συνδυαστικών παιγνίων, με βάση μεταβαλόμενων «μονοειδών» που ονομάζονται «κλάσματα misère» που εντοπίζουν το πρόβλημα ορισμένων περιορισμένων σεναρίων των παιγνίων.Αυτή η θεωρία εισήχθη από τον Plambeck και αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Plambeck και Siegel.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.2.3 Κλοπή Στρατηγικής

Μια άλλη χρήσιμη τεχνική στη Συνδυαστική Θεωρία των Παιγνίων για να αποδείξουμε ότι ένας συγκεκριμένος παίκτης πρέπει να κερδίσει είναι η κλοπή στρατηγικής.Η βασική ιδέα είναι να υποθέσουμε ότι ένας παίκτης έχει μια στρατηγική νίκης και να αποδειχτεί ότι στην πραγματικότητα ο άλλος παίκτης έχει μια στρατηγική νίκης βάσισμένη σ' αυτή τη στρατηγική.Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι ο δεύτερος παίκτης έχει στην πραγματικότητα μια στρατηγική νίκης. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου επιχειρήματος δίνεται στο σημείο 4.1.Δυστυχώς, μια τέτοια απόδειξη με αντίφαση δεν παρέχει καμία ένδειξη του τι πραγματικά είναι η στρατηγική νίκης,μόνο ότι υπάρχει.Σε πολλές περιπτώσεις,όπως εκείνη στην Ενότητα 4.1,ο νικητής είναι γνωστός, αλλά δεν είναι γνωστή η στρατηγική νίκης πολυωνυμικού χρόνου.

4.2.4 Παζλ (Γρίφοι)

Υπάρχει λίγη θεωρία για την ανάλυση των συνδυαστικών παζλ (παίγνια με ένα παίκτη) σε σχέση με τη θεωρία παιγνίων δύο παικτών που συνοψίζεται σε αυτή την ενότητα.Σας παρουσιάζουμε μια τέτοια άποψη εδώ.Στα περισσότερα παζλ,οι λύσεις υποδιαιρούνται σε μια ακολουθία κινήσεων.Ετσι, ένα παζλ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δέντρο,παρόμοιο με ένα παίγνιο δύο παικτών,εκτός από το ότι δεν διακρίνονται κινήσεις μεταξύ των παιχτών *Αριστερά* και *Δεξιά*.Με την άποψη ότι το παίγνιο τελειώνει μόνο όταν ο γρίφος λύνεται,ο στόχος είναι να φτάσει κανείς σε μια θέση από την οποία δεν υπάρχουν πια έγκυρες κινήσεις (κανονικό παίξιμο) Τα παζλ με βρόγχο (loop) είναι κοινά,για να γίνει πιο σαφές,οι επαναλαμβανόμενες διακλαδώσεις μπορούν να μετατραπούν σε αυτο-παραπομπές για σχηματισμό ενός κατευθυνόμενου γραφήματος.

Μια συνέπεια της παραπάνω άποψης είναι ότι ένα παζλ είναι βασικά ένα αμερόληπτο παίγνιο δύο παικτών,μόνο που μας ενδιαφέρει η έκβαση των εναλλάξ κινήσεων από τους δύο παίκτες.Αντίθετα, οι ερωτήσεις ενδιαφέροντος στο πλαίσιο του παζλ είναι (α) κατά πόσον ένα δεδομένο παζλ είναι επιλύσιμο, και (β) η εύρεση της λύσης με τις λιγότερες κινήσεις.Μια σημαντική ανοιχτή κατεύθυνση της έρευνας είναι να αναπτυχθεί μια γενικήθεωρία για την επίλυση τέτοιων ζητημάτων, παρόμοια με τη θεωρία των δύο παικτών

.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.3 Περιορισμένη Λογική

Η Συνδυαστική Θεωρία των Παιγνίων μας δίνει ένα θεωρητικό πλαίσιο για την παροχή θετικών αλγοριθμικών αποτελεσμάτων για τα παίγνια,αλλά δεν λύνουν φυσικά παζλ.Αντίθετα, αρνητικά αλγοριθμικά αποτελέσματα–η σκληρότητα και η πληρότητα στα μαθήματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας-είναι πιο ομοιόμορφα: παζλ και τα παίγνια έχουν ανάλογες δομές πρωτότυπης απόδειξης.Επιπλέον, μια σχετικά νέα θεωρία που ονομάζεται Περιορισμένη Λογική επιχειρεί να συνδέσει ένα ευρύ φάσμα αποδείξεων σκληρότητας τόσο για τα παζλ όσο για τα παίγνια.

Αποδεικνύοντας ότι ένα πρόβλημα είναι δύσκολο μέσα σε μια συγκεκριμένη κατηγορία πολυπλοκότητας (όπως η NP, PSPACE, ή EXPTIME)σχεδόν πάντα περιλαμβάνει μια απλοποίηση του προβλήματος σε ένα γνωστό πρόβλημα εντός της κατηγορίας.Για παράδειγμα, το συστημικό πρόβλημα μείωσης για NP-δυσκολία είναι η Ικανοποιησιμότητα Boolean(Η απλοποίηση τηςSAT σε παζλ αποδεικνύει ότι το παζλ είναι NP-δύσκολο.Ομοίως, τοσυστημικό πρόβλημα απλοποίησης για PSPACE-δυσκολίαΚβαντοποιημένοι Boolean τύποι (QBF)

Η Περιορισμένη Λογική είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την προβολή της δυσκολίας των παιγνίων και των παζλ σε μια ποικιλία των ρυθμίσεων που έχει προκύψει τα τελευταία χρόνια.Πράγματι, πολλά από τα αποτελέσματα δυσκολίας που αναφέρονται σε αυτή την έρευνα βασίζονται σε απλοποιήσεις μέσω της Περιορισμένης Λογικής. Η Περιορισμένη Λογική είναι μια οικογένεια παιγνίων όπου οι παίκτες αντιστρέφουν τις άκρες σε μια επίπεδη γραφική παράσταση,ενώ πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένους περιορισμούς.Κάθε άκρη (edge) έχει ένα βάρος1 ή 2.Κάθε κορυφή (vertex) έχει βαθμό 3 και απαιτεί ότι το άθροισμα των βαρών των προς τα μέσα γυρισμένων ακρών είναι τουλάχιστον 2.Οι κορυφές μπορεί να περιορίζονται σε δύο τύπους:ΚΑΙ οι κορυφές έχουν βάρη άκρης 1, 1, και 2, και οι κορυφές έχουν βάρη άκρης 2, 2, και 2.Ο στόχος του παίκτη είναι να αντιστρέψει τελικά μια δεδομένη άκρη.

Αυτή η οικογένεια παιγνίων μπορεί να ερμηνευθεί με πολλές ρυθμίσεις θεωρίας παιγνίων,που κυμαίνονται από τα μηδενικού-παίκτη automata στα παίγνια πολλών παικτών με κρυφές πληροφορίες.Ειδικότερα, υπάρχουν φυσικές εκδοχές Περιορισμένης Λογικής που αντιστοιχούν σε παίγνια ενός παίκτη (παζλ) και παίγνια δύο παικτών,περιορισμένης ή απεριόριστης διάρκειας.(Εδώ αναφερόμαστε στο αν η διάρκεια του παίγνιου οριοθετείται απόμια πολυωνυμική συνάρτηση. Συνήθως, τα περιορισμένα παίγνια δεν έχουν επαναλαμβανόμενες κινήσεις, ενώ τα απεριόριστα παίγνια έχουν βρόχους, είναι loopy)Αυτά τα παίγνια έχουν τις αναμενόμενες περιπλοκές:.Τα περιορισμένα παίγνια με ένα παίκτη είναι NP-complete,απεριόριστα παίγνια ενός παίκτη και τα περιορισμένα με δύο παίκτες παίγνια είναι PSPACE-complete και απεριόριστα παίγνια δύο παικτών είναι EXPTIME-complete.
Αυτό που κάνει την Περιορισμένη Λογική ειδικά κατάλληλη για τις απλοποιήσεις των παιγνίων και των παζλ είναι ότι τα προβλήματα υπάρχουν ήδη σε παρόμοια μορφή σε πολλά παίγνια.Ειδικότερα, το γεγονός ότι τα παίγνια παίζονται σε επίπεδα γραφήματα σημαίνει ότι η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

απλοποίηση συνήθως δεν χρειάζεται κανένα ξεχωριστό gadget,ενώ ιστορικά,τα gadgets δημιουργούσαν συχνά περίπλοκα προβλήματα στην απόδειξη δυσκολίαστων παιγνίων.

4.4 Αλγόριθμοι για παίγνια δύο παικτών

Πολλά περιορισμένου-μήκους παίγνια δύο παικτών είναι PSPACE-complete. Αυτό είναι αρκετά φυσικό,διότι τα παίγνια είναι στενά συνδεδεμένα με Boolean εκφράσεις με εναλλασσόμενους ποσοδείκτες:υπάρχει μια κίνηση για τον *Αριστερά*, τέτοια ώστε, για όλες τις κινήσεις του *Δεξιά*,θα υπάρχει μια άλλη κίνηση για τον*Αριστερά*, κλπ.Ένα PSPACE-complete αποτέλεσμα έχει δύο συνέπειες.Πρώτον, όντας στην PSPACE σημαίνει ότι το παίγνιο μπορεί να παιχτεί βέλτιστα και τυπικά όλες οι θέσεις μπορούν να καταμετρηθούν,ενδεχομένως με τη χρήση εκθετικού χρόνου,αλλά μόνο σε πολυωνυμικό χώρο.Έτσι, τέτοια παίγνια προσφέρονται σε μια κάπως εξαντλητική αναζήτηση για πολύ μικρά μεγέθη.Δεύτερον, τα παίγνια δεν μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, εκτός εάν P = PSPACE, το οποίο είναι ακόμα «λιγότερο πιθανό» από ό, τι το P να ισούται NP.

Από την άλλη πλευρά, τα απεριόριστου μήκους παίγνια με δύο παίκτες είναι συχνά EXPTIME-complete.Ενα τέτοιο αποτέλεσμα είναι ένας από τους λίγους αληθινούς τύπους των χαμηλώτερων δεσμών στη θεωρία της πολυπλοκότητας, υπονοώντας ότι όλοι οι αλγόριθμοι, στη χειρότερη περίπτωση, απαιτούν εκθετικό χρόνο.Στην ενότητα αυτή θα ερευνήσουμε σύντομα πολλά από αυτά τα αποτελέσματα πολυπλοκότητας και συναφείθετικά αποτελέσματα.Δείτε επίσης για μια σχετική έρευνα και για βιβλιογραφία.

4.4.1 Hex

Το Hex είναι ένα παίγνιο που σχεδιάστηκε από Piet Hein και παίζεται σε ένα εξάγωνο επιπεδο με σχήμα διαμαντιού. Οι παίκτες με τη σειρά τους γεμίζουν τα κενά εξάγωνα με το χρώμα τους.Ο στόχος των παικτών είναι να συνδέσουν τις απέναντι πλευρές του χρώματος τους γεμίζοντας εξάγωνα με το χρώμα τους.Ένα παίγνιο Hex δεν μπορεί ποτέ να έρθει ισοπαλία,γιατί αν όλα τα εξάγωνα χρωματιστουν αυθαίρετα,θα υπάρχει ακριβώς μια διαδρομή που θα συνδέει με το κατάλληλο χρώμα τις απέναντι πλευρές του χαρτονιού.

Ο John Nash απέδειξε ότι ο πρώτος παίκτης που θα κινηθεί μπορεί να κερδίσει χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα κλοπής της στρατηγικής.Ας υποθέσουμε ότι ο δεύτερος παίκτης έχει μια στρατηγική νίκης και παίζει πρώτος συμμετρικά ο *Αριστερά*.Ο *Αριστερά* επιλέγει το πρώτο εξάγωνο τυχαία.Τώρα είναι ο *Δεξιά* που θα κάνει την πρώτη κίνηση και ο *Αριστερά* είναι ουσιαστικά ο δεύτερος παίκτης.Έτσι, ο *Αριστερά* μπορεί να ακολουθήσει την στρατηγική νίκης για τον δεύτερο παίκτη,αλλά ο *Αριστερά* θα έχει ενα επιπλέον εξάγωνο.Αλλά αυτό το επιπλέον εξάγωνο μόνο να βοηθήσει μπορεί τον *Αριστερά*:γιατί περιορίζει τις κινήσεις του *Δεξιά* και αν η στρατηγική του *Αριστερά* πρότεινε την πλήρωση του εν λόγω εξαγώνου, ο *Αριστερά* μπορεί να κινηθεί οπουδήποτε αλλού.Έτσι, ο Αριστερά έχει μια στρατηγική νίκης, έρχεται σε αντίθεση με την κίνηση που έκανε ο *Δεξιά* και ως εκ τούτου ο πρώτος παίκτης έχει μια στρατηγική νίκης.Ωστόσο, παραμένει ανοιχτό το ζήτημα να δωθεί ένας πολυώνυμο χαρακτηρισμός της στρατηγικής νίκης για τον πρώτο παίκτη.

Στο πρώτο ίσως PSPACE-δυσκολίας αποτέλεσμα για τα "ενδιαφέροντα" παίγνια,οι Even και Tarjan απέδειξαν ότι η γενίκευση του Hex σε γραφήματα είναι PSPACE-πλήρης,ακόμη και για τις μέγιστες $5^{ου}$ βαθμού γραφικές παραστάσεις. Συγκεκριμένα,σε αυτό το γράφημα παίγνιου,δύο κορυφές είναι αρχικά χρωματισμένες απο τον *Αριστερά*, και οι παίκτες σε κάθε γύρο χρωματίζουν τις ελεύθερες κορυφές με το δικό τους χρώμα.Ο στόχος του *Αριστερά* είναι να συνδέσει τις δύο αρχικές του κορυφές με ένα μονοπάτι, και ο στόχος του Δεξιά είναι να αποτρέψει μια τέτοια πορεία.Απροσδόκητα, το στενά σχετιζόμενο πρόβλημα στο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

οποίο οι παίκτες χρωματίζουν τις άκρες αντί των κορυφών μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, αυτό το παίγνιο είναι γνωστό ως Shannons-witching-game.Μια ειδική περίπτωση αυτού του παίγνιου είναι το Bridgit ή Gale, που εφευρέθηκε από τον DavidGale,στο οποίο η γραφική παράσταση είναι ένα τετράγωνο πλέγμα και στόχος του *Αριστερά* είναι να συνδέσει την πάνω με την κάτω κορυφή.Ωστόσο, εάν η γραφική παράσταση στοShannons-witching-game έχει κατευθυνόμενες άκρες το παίγνιο γίνεται και πάλι PSPACE-complete .

Λίγα χρόνια αργότερα,ο Reisch απέδειξε το ισχυρότερο αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό του αποτελέσματος της μια θέση στο Hex που είναι PSPACE-complete σε ένα κανονικό επίπεδο με σχήμα διαμαντιού (οχι τετράγωνο).Η απόδειξη είναι αρκετά διαφορετική από τη γενική απλοποίηση του γραφήματος των Even και Tarjan ,αλλά το κύριο ζήτημα είναι να αποδείξει ότι το Hexείναι PSPACE -complete για επίπεδες γραφικές παραστάσεις.

4.4.2 Περισσότερα παίγνια για γραφικές παραστάσεις: Kayles, Snort, Γεωγραφία, Peek, και Interactive Hamiltonicity

Η δεύτερη έρευνα για την αποδείξη PSPACE-δυσκολίας για τα "ενδιαφέροντα" παίγνια είναι από τον Schaefer.Αυτή η εργασία προτείνει περοσσότερα απο δεκάδες παίγνια και τα αποδεικνύει σαν PSPACE-πλήρη.Μερικά από τα παίγνια περιλαμβάνουν περιγραφικούς τύπους,άλλα και τις συλλογές συνόλων,αλλά ίσως τα πιο ενδιαφέροντα είναι αυτά που αφορούν τα γραφήματα.Δύο από αυτά τα παίγνια είναι γενικεύσεις του "Kayles", και ένα άλλο είναι το διαγραφικό παίγνιο και ονομάζεται Γεωγραφία των Ακρων.

Το Kayles είναι ένα αμερόληπτο παίγνιο,σχεδιασμένο ανεξάρτητα από τους Dudeney και SamLoyd,στο οποίο οι κορίνες του μπόουλινγκ παρατάσσονται σε μια γραμμή.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να ρίξουν τη μπάλα του μπόουλινγκ με την ιδιότητα οτι θα ρίξουν (δηλαδή θα βγουν απο το παίγνιο) ακριβώς μια ή ακριβώς δυο κορίνες σε κάθε κίνηση.Ετσι, οι περισσότερες κινήσεις χωρίζουν το παίγνιο σε ένα άθροισμα των δύο υποπαιγνίων. Σε ένα υπό κανονικές συνθήκες παίγνιο,το Kayles μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας την θεωρία Sprague-Grundy.Ο κόμβος Kayles είναι μια γενίκευση του Kayles σε γραφήματα στα οποία κάθε βολή "ρίχνει κάτω" (αφαιρεί)μία επιθυμητή κορυφή και όλες τις γειτονικές κορυφές της. (Εναλλακτικά, αυτό το παίγνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παίγνιο με δύο παίκτες που προσπαθούν να φτιάξουν ένα ανεξάρτητο σύνολο). Ο Schaefer απέδειξε ότι η απόφαση για το αποτέλεσμα αυτού του παίγνιου είναι PSPACE-complete.Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για ένα διαφορετική εκδοχή του κόμβου Kayles, στο οποίοκάθε κόμβος χρωματίζεται είτε απο τον *αριστερά* είτε τον *δεξιά* και μόνο ο αντίστοιχος παίκτης μπορεί να επιλέξει ένα συγκεκριμένο κόμβο σαν τον πρωταρχικό του στόχο.

Η Γεωγραφία είναι ένα άλλο παίγνιο γραφικής παράσταση,ή μάλλον μια οικογένεια παιγνίων,η οποία είναι ξεχωριστή από μια τεχνική άποψη: έχει χρησιμοποιηθεί ως βάση για την απλοποίηση πολλών άλλων PSPACE-δυσκολίας παιγνίων που περιγράφονται σε αυτή την ενότητα.Ενα παράδειγμα του παίγνιου είναι οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να ονομάσουν διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές,η καθεμία αρχίζοντας με το ίδιογράμμα με το οποίο τελειώνει η προηγούμενη ονομασία.Γενικότερα, η Γεωγραφία αποτελείται από ένα κατευθυνόμενο γράφημα με ένα κόμβο που αρχικά περιέχει ένα πιόνι.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής τη κίνηση του πιονιού κατά μήκος μιας κατευθυνόμενης ακμή.Ο Schaefer διαπίστωσε ότι η Γεωγραφία των Ακρων (ένα παίγνιο που του πρότεινε ο R. M.Karp)είναι PSPACE-complete,οι Λιχτενστάιν και Sipser έδειξαν ότι η Γεωγραφία των κορυφών (vertex) είναι επίσης PSPACE-complete.Οι Nowakowski και Poole έλυσαν ειδικές περιπτώσεις Γεωγραφίας των Κορυφών όταν το γράφημα είναι προϊόν δύο κύκλων (περιόδων).Κάποιος μπορεί επίσης να παίξει το παίγνιο της γεωγραφίας σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.Οι Fraenkel,Scheinerman, και Ullman δείχνουν ότι η μη κατευθυνόμενη Γεωγραφία των Κορυφών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο,ενώ η μη κατευθυνόμενη Γεωγραφία των Ακρων είναι PSPACE-πλήρης,ακόμη και για επίπεδα γραφήματα 3[ου] βαθμού.Αν το γράφημα είναι διμερές τότε η Γεωγραφία των Ακρωνείναι επίσης επιλύσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο.Το Snort είναι ένα παίγνιο σχεδιασμένο από τον S. Norton και συνήθως παίζεται σε επίπεδα γραφήματα (ή επίπεδους χάρτες).Σε κάθε περίπτωση, οι παίκτεςαναλαμβάνουν εκ περιτροπής το χρωματισμό κορυφών με το χρώματους έτσι ώστε μόνο τα «ισα» χρώματα να είναι δίπλα.

Το γενικευμένο Hex,ο κόμβος Kayles και η Γεωγραφία των Κορυφών αναλύθηκαν επίσης πρόσφατα στο πλαίσιο της παραμετροποιημένης πολυπλοκότητας. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα να κριθεί αν ο πρώτος παίκτης μπορεί να κερδίσει μέσα k κινήσεις, όπου k είναι μια παράμετρος του προβλήματος,είναι AW [*]-complete.Οι Stockmeyer και Chandra ήταν οι πρώτοι που απέδειξαν οτι τα συνδυαστικά παίγνια είναι EXPTIME-δύσκολα.Καθιέρωσαν την EXPTIME-πληρότητα για μια κατηγορία παιγνίων λογικής και για δύο παίγνια με γράφημα.Εδώ περιγράφουμε ένα παράδειγμα ενός παίγνιου λογικής της κατηγορίας και ένα από τα παίγνια με γράφημα, το άλλο παίγνιο με το γράφημα περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.Ένα παίγνιο λογικής, που ονομάζεται Peek,περιλαμβάνει ένα κουτί που περιέχει πολλές παράλληλες ορθογώνιες πλάκες.Κάθε πλάκα (1) χρωματίζεται είτε *αριστερά* ή *δεξιά* εκτός από μια πλάκα που δεν ανήκει σε κανένα, (2) έχει κυκλικές οπές σκαλισμένες σε συγκεκριμένες (γνωστές) θέσεις, και (3) μπορεί να παίρνει μία από τις δύο θέσεις ή πλήρως μέσα στο κουτί ή μερικώς έξω από το κουτί.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής είτε να πάνε πάσο ή να αλλάξουν τη θέση μιαςαπο τις πλάκες τους.Ο νικητής είναι ο πρώτος παίκτης που θα καταφέρει να ευθυγραμμίσει τις οπές κάθε πλάκας κατά μήκος μιας κάθετης γραμμής.Ένα δεύτερο παίγνιο περιλαμβάνει ένα γράφημαστο οποίο ορισμένες άκρες χρωματίζονται *Αριστερά* και κάποιες άκρες χρωματίζονται *Δεξιά*, και αρχικά μερικές άκρεςείναι "μέσα", ενώ οι άλλες είναι "έξω".Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής είτε να πάνε πάσο ή να αλλάξουν το ένα άκρο από"Έξω" σε "μέσα" ή αντίστροφα.Ο νικητής είναι ο πρώτος παίκτης που θα προκαλέσει η γραφική παράσταση των "μέσα" άκρων να έχουν έναν Hamiltonian κύκλο.(Και τα δύο από αυτά τα παίγνια μπορούν να αναδιατυπωθούν σε υπό κανονικών συνθηκών παίγνιο με τον καθορισμό να μην υπάρχουν έγκυρες κινήσεις από τις θέσεις που έχουν ευθυγραμμισμένες οπές ή Hamiltonian κύκλους.)

.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.4.3 Παίγνια Καταδίωξης:

Εκμηδενισμός(Annihilation), Αφαίρεση (Remove), Σύλληψη(Capture), Contrajunctive, Μπλόκο,Στόχος, και Κλέφτες και Αστυνόμοι

Το επόμενο σύνολο παιγνίων με γράφημα άρχισε ουσιαστικά να μελετάται το 1976, όταν οι Fraenkel και Yesha ανακοίνωσαν ότι ένα ορισμένο αμερόληπτο παίγνιο εκμηδενισμού θα μπορούσε να παιχτεί με καλύτερο δυνατό τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο.

Μια γενίκευση αυτού του αμερόληπτου παίγνιου,που ονομάζεται Εκμηδενισμός (Annihilation),είναι όταν διακρίνονται δύο (ή περισσότερα) είδη πιονιών και κάθε είδος μπορεί να ταξιδέψει κατά μήκος μόνο ενός ορισμένου υποσυνόλου των άκρων.Όπως και πριν,εάν ένα πιόνι μετακινηθεί σε μία κορυφή που περιέχει ήδη ένα άλλο(οποιουδήποτε τύπου) και τα δύο πιόνια εκμηδενίζονται.Ο προσδιορισμός του αποτελέσματος αυτού του παίγνιου αποδείχθηκε NP-hard και αργότερα PSPACE-hard.Για άκυκλα γραφήματα,το πρόβλημα είναι PSPACE-ολοκληρωμένο.Η ακριβής πολυπλοκότητα για τα κυκλικά γραφήματα παραμένει ένα ανοιχτό ζήτημα.Ο Εκμηδενισμός έχει επίσης μελετηθεί σε misère (κακό) παίγνιο.Ένα σχετικό αμερόληπτο παίγνιο,που ονομάζεται Κατάργηση (Remove),έχει τους ίδιους κανόνες με τον Εκμηδενισμό εκτός από το ότι όταν ένα πιόνι μετακινηθεί σε μία κορυφή που περιέχει ένα άλλο πιόνι,μόνο το πιόνι που μετακινήθηκε βγαίνει απο το παίγνιο.Αυτό το παίγνιο αποδείχθηκε επίσης NP-hard χρησιμοποιώντας μια απλοποίηση παρόμοια με εκείνη για τον Εκμηδενισμό αλλά κατά τα άλλα η πολυπλοκότητα του φαίνεται ανοικτή.Το ανάλογο αμερόληπτο παίγνιο στο οποίο μόνο το πιόνι που μένει σταθερό αφαιρείται, ονομάζεται Hit,είναι PSPACE-complete για άκυκλα γραφήματα, αλλά η ακριβής πολυπλοκότητά του παραμένει ανοικτή για τα κυκλικά γραφήματα.

Η Μεροληπτική εκδοχή του Εκμηδενισμού είναι η Σύλληψη (Capture) στην οποία έχουν ανατεθεί οι δύο τύποι πιονιών και οι αντίστοιχοι παίκτες.Ο *Αριστερά* μπορεί να κινηθεί μόνο με τα πιόνια του και μόνο σε μια θέση που δεν καταλαμβάνεται απο δικό του πιόνι.Εάν η θέση περιέχει ένα πιόνι του *Δεξιά*,τότε αυτό συλλαμβάνεται (αφαιρείται).Σε αντίθεση με τον Εκμηδενισμό,η Σύλληψη (Capture) επιτρέπει σε όλα τα πιόνια να ταξιδεύουν κατά μήκος όλων των άκρων.Ο καθορισμός του αποτελέσματος της Σύλληψης αποδείχθηκε NP-hard και αργότερα EXPTIME-complete .Για άκυκλα γραφήματα το παίγνιο είναι PSPACE-complete. Μια διαφορετική εκδοχή του Μεροληπτικού Εκμηδενισμού είναι το Contra-junctive, στο οποίο οι παίκτες μπορούν να κινηθούν και με τους δύο τύπους των πιονιών,αλλά κάθε παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των ακμών.Αυτό το παίγνιο είναι NP-hard ακόμη και για άκυκλα γραφήματα αλλά αντίθετα η πολυπλοκότητα του φαίνεται ανοικτή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Οι παραλλαγές του Εκμηδενισμού,τα Μπλόκα,απαγορεύουν σε ένα πιόνι να μετακινηθεί σε μια κορυφή που να είναι ήδη πιασμένη απο άλλο.Και οι δύο παραλλαγές είναι μεροληπτικές και παίζονται με πιόνια σε κατευθυνόμενο γράφημα.

Στο Κομβικό Μπλόκο (NodeBlocking),κάθε πιόνι ανατήθεται σε έναν από τους δύο παίκτες και όλοι τα πιόνια μπορούν να ταξιδεύουν κατά μήκος όλων των άκρων.Ο προσδιορισμός του αποτελέσματος αυτούτου το παίγνιου αποδείχθηκε NP-hard ύστερα PSPACE-δυσκολίας και, τέλος,EXPTIME-complete.Η κατάστασή του για άκυκλα γραφήματα παραμένει ανοιχτή.Στα Μπλόκα των Ακμών (EdgeBlocking), υπάρχει μόνο ένας τύπος πιονιών,αλλά κάθε παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο ένα υποσύνολο των ακμών.Ο προσδιορισμός του αποτελέσματος αυτού του παίγνιου είναι PSPACE-complete για άκυκλα γραφήματα.Η ακριβής πολυπλοκότητά του για γενικά γραφήματα παραμένει ανοιχτή.

Μια γενίκευση του Κομβικού Μπλόκου είναι ο Στόχος (Target),στον οποίο ορισμένοι κόμβοι χαρακτηρίζονται ως στόχοι για κάθε παίκτη και οι παίκτες μπορούν επίσης να κερδίσουν κουνόντας ένα από τα πιόνια τους σε μία κορυφή που να είναι ένας από τους στόχους τους.Όταν δεν υπάρχουν κόμβοι χαρακτηρισμένοι ως στόχοι, το παίγνιο είναι το ίδιο με το Μπλόκο και συνεπώς EXPTIME-complete.Στην πραγματικότητα,ο Στόχος γενικά σαν παίγνιο είχε ηδη αποδειχθεί EXPTIME-ολοκληρωμένο νωρίτερα από τους Stockmeyer και Chandra.Παραδόξως, ακόμη και η ειδική περίπτωση στην οποία η γραφική παράσταση είναι ακυκλική και διμερής και μόνο ένας παίκτης έχει στόχους είναι PSPACE-complete .Μια παραλλαγή του Στόχου είναι ο Ημι-Μεροληπτικός Στόχος, στον οποίο και οι δύο παίκτες μπορούν να κινήσουν όλα τα πιόνια,αλλά ο Αριστερά κερδίζει αν ένα πιόνι του φτάσει ένα στόχο, ανεξάρτητα από το ποιος το μετακίνησε το πιόνι εκεί. Επιπλέον, αν ένα πιόνι πέσει σε μια κορυφή που δεν είναι στόχος και έχει άλλο πιόνι τότε και τα δύο πιόνια εκμηδενίζονται (αφαιρούνται).Αυτό το παίγνιο είναι EXPTIME-complete.Ενώ αυτό το παίγνιο μπορεί να φαίνεται λίγο αφύσικο,επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί ως ένα βήμα προς την επίλυση του Εκμηδενισμού.

Πολλά από τα αποτελέσματα που περιγράφονται παραπάνω από βασίζονται στην ανάλυση ενός πιο περίπλοκου παίγνιου που ονομάζεται Καταδίωξη (Pursuit) ή κλέφτες και αστυνόμοι.Ένας παίκτης,ο κλέφτης, έχει μόνο ένα πιόνι και ο άλλος παίκτης,οι στυνόμοι, έχει k μάρκες.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής την μετακίνηση όλων των μαρκών τους κατά μήκος των άκρων σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα.Οι αστυνόμοι κερδίζουν αν στο τέλος κάθε κίνησης ο ληστής καταλαμβάνει την ίδια κορυφή με ένα αστυνομικό και ο ληστής κερδίζει αν μπορεί να κάνει το παίγνιο να συνεχίζεται για πάντα.Στην περίπτωση ενός μόνο αστυνόμουk = 1), υπάρχει ένας απλός πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος και σε γενικές γραμμές, πολλές εκδοχές του παίγνιου είναι EXPTIME-ολοκληρωμένες.Για παράδειγμα, EXPTIME-πληρότητα ισχύει ακόμη και για μη κατευθυνόμενες γραφικές παραστάσεις και για κατευθυνόμενες γραφικές παραστάσεις στις οποίες κλέφτες και αστυνόμοι μπορούν να επιλέξουν τις αρχικές τους θέσεις.Για άκυκλα γραφήματα, η Καταδίωξη είναι PSPACE-complete.

4.4.4 Ντάμα

Το γνωστό παίγνιο8×8 Ντάμα (Checkers),όπως και πολλά κλασικά παίγνια, είναι πεπερασμένος και επομένως μπορεί να παιχτεί με βέλτιστο τρόπο σε σταθερό χρόνο (Θεωρητικά).Πράγματι, ο Schaeffer υπολόγισε πρόσφατα οτι ο βέλτιστος τρόπος αναπαραγωγής του παιγνίου οδηγεί σε ισοπαλία από την αρχική διαμόρφωση(άλλες διαμορφώσεις παραμένουν χωρίς ανάλυση).Το αποτέλεσμα του παίγνιου σε ένα γενικό $n \times n$ επίπεδο από μία κανονική θέση εκκίνησης, παραμένει ανοικτό.Από την άλλη πλευρά, η απόφαση του αποτελέσματος σε μια τυχαία διαμόρφωση είναι PSPACE-δυσκολίας.Αν ένας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

πολυωνυμικός δεσμός τοποθετείται σχετικά με τον αριθμό των κινήσεων που επιτρέπονται μεταξύ των,τότε το πρόβλημα είναι στο PSPACE και ως εκ τούτου, είναι PSPACE-complete.Χωρίς ένα τέτοιο περιορισμό, ωστόσο, η Ντάμα είναι EXPTIME-complete

Από την άλλη πλευρά,ορισμένες απλές ερωτήσεις σχετικά με τη Ντάμα μπορούν να απαντηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο.Μπορεί ένας παίκτης αφαιρέσει όλα τα άλλα κομμάτια του παίκτη σε μία κίνηση (με αρκετά άλματα);Μπορεί ένας παίκτης να κάνει ένα πιόνι βασιλιά με μία κίνηση;Λόγω της έννοιας της ισοτιμίας στους πίνακες n × n,τα ερωτήματα αυτά καταλήγουν στην υπόθεση της ύπαρξης μιάς Eulerian διαδρομής ή γενικής διαδρομής,αντίστοιχα,σε ένα συγκεκριμένο κατευθυνόμενο γράφημα.

4.4.5 Go

Παρουσιάστηκε στο ίδιο συνέδριο με τα αποτελέσματα της Ντάμας της προηγούμενης ενότητας (FOCS'78),οι Λιχτενστάιν και Sipser απέδειξαν ότι το κλασικό ασιατικό παίγνιο Go είναι επίσης PSPACE-δυσκολίας για μια τυχαία διαμόρφωση σε ένα n × n πίνακα.Το Go έχει λίγους κανόνες:(1) οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής είτε πηγαίνοντας πάσο είτε τοποθετώντας πέτρες με το χρώμα τους σε θέσεις του πίνακα,(2) εάν μια νέα μαύρη(ας πούμε) πέτρα προκαλεί την περικύκλωση μιας ομάδας από λευκές πέτρες,οι άσπρες πέτρες αφαιρεθούνται, και (3) ένας κανόνας knockout(ko)για την πρόληψη επαναλαμβανόμενων διαμορφώσεων.Υπάρχουν αρκετές,ανάλογα με τη χώρα, παραλλαγές του κανόνα ko. Το Go δεν ακολουθεί κανονική αναπαραγωγή:ο νικητής στο Go είναι ο παίκτης με την υψηλότερη βαθμολογία στο τέλος του παίγνιου.Η βαθμολογία του παίκτη υπολογίζεται ως είτε ο αριθμός των λίθων του χρώματος του στο ταμπλώ του παίγνιου καθώς και των κενών που περιβάλλουν οι πέτρες του (καταμέτρηση περιοχών),είτε ως κενά που περιβάλλονται από τις πέτρες του συν τις πέτρες που κατέλαβε(καταμέτρηση εδαφων) και αυτό αλλάζει από χώρα σε χώρα.

Η απόδειξη της PSPACE-δυσκολίας των Λιχτενστάιν και Sipser δεν συμπεριλαμβάνει καταστάσεις ko, όπου ο κανόνας ko πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να αποφευχθεί το παίγνιο χωρίς τέλος.Αντίθετα, ο Robson απέδειξε ότι το Go είναι EXPTIME-complete με βάση τους Ιάπωνικούς κανόνες όπου τα kos εμπλέκονται και πράγματι χρησιμοποιούνται με σύνεση.

Η απόδειξη του Robson βασίζεται στις ιδιότητες των ιαπωνικών κανόνων τόσο για τους ανώτερους όσο για τους κατώτερους δεσμούς.Για άλλα σύνολα κανόνων,το μόνο που είναι γνωστό είναι ότι το Go είναι PSPACE-δυσκολίας και σε EXPSPACE.Ειδικότερα,η "Superko" παραλλαγή του κανόνα ko (όπως χρησιμοποιείται σε, π.χ., οι ΗΠΑ και η Νέα Ζηλανδία),η οποία απαγορεύει την αναπαραγωγή κάθε προηγούμενης διαμόρφωσης του ταμπλώ του παίγνιου,δείχνει EXPSPACE-δυσκολία,σαν αποτέλεσμα του Robson για μη-επαναλαμβανόμενα παίγνια.Ωστόσο, αν όλες οι δυναμικές κατάστασεις του παίγνιου λαμβάνουν χώρα σε ko*s*,όπως συμβαίνει σε μια EXPTIME-δυσκολίας κατασκευή,τότε το παίγνιο είναι ακόμα σε EXPTIME,γιατί τότε πρόκειται για ένα παράδειγμα της Γεωγραφίας μη κατευθυνόμενων Κορυφών,το οποίο μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο στο μέγεθος της γραφικής παράστασης.(Στην περίπτωση αυτή, η γραφική παράσταση αποτελείται απο όλες τις δυνατές θέσεις παίγνιου,από τις οποίες υπάρχουν πάρα πολλές).Υπάρχουν επίσης πολλά αποτελέσματα για πιο περιορισμένες θέσεις του Go. Ο Wolfe δείχνει ότι ακόμα και τα Go End games είναι PSPACE-δυσκολίας.Πιο συγκεκριμένα,ένα Go-End-game είναι όταν το παίγνιο έχει απλοποιηθεί σε ένα μέρος υποπαιχνδιων Go,το καθένα ίσο με ένα πολυωνυμικού μεγέθους διάγραμμα παίγνιου. Η απόδειξη αυτή βασίζεται σε διάφορες συνδέσεις μεταξύ του Go και της συνδυαστικής θεωρίαστων παιγνίων που περιγράφεται σε ένα βιβλίο των Berlekamp και Wolfe .

4.4.6 Πέντε στη σειρά (Gobang)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Πέντε στη σειρά ή Gobang είναι ένα άλλο παίγνιο που παίζεται στο ίδιο ταμπλώ παίγνιου με το Go στο οποίο οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής την τοποθέτηση μιας πέτρας του χρώματος τους.Ο στόχος των παικτών είναι να τοποθετήσουν τουλάχιστον 5 πέτρες του χρώματός τους στη σειρά,οριζόντια, κάθετα, ή διαγώνια.Αυτό το παίγνιο είναι παρόμοιο με το Go-Moku το οποίο μετρά 6 ή περισσότερες πέτρες σε μια σειρά και επιβάλλει πρόσθετους περιορισμούς στις κινήσεις.

Ο Reisch απέδειξε η απόφαση για το αποτέλεσμα μιας Gobang θέσης είναι PSPACE-complete.Παρατήρησε επίσης ότι η απλοποίηση μπορεί να προσαρμοστεί στους κανόνες του k-στη-σειρά για σταθερό k.Αν και δεν είχε διευκρινίσει ποιές ακριβώς τιμές του *k* επιτρέπονται, η μείωση φαίνεται να γενικεύεται για κάθε k≥5.

4.4.7 Σκάκι

Οι Fraenkel και Lichtenstein απέδειξαν ότι μια γενίκευση του κλασικού παίγνιου του σκάκι με n × n ταμπλώ είναι EXPTIME-complete.Συγκεκριμένα, η γενίκευση τους έχει ένα μοναδικό βασιλιά του κάθε χρώματος και για κάθε χρώμα ο αριθμός των πιονιών,αξιωματικών, πύργων και βασίλισσων αυξάνονται ως κάποια κλασματική δύναμη του n. (Οι Ιππότες δεν χρειάζονται). Η αρχική διαμόρφωση είναι απροσδιόριστη,αυτό που είναι EXPTIME-δυσκολίας είναι να καθοριστεί ο νικητής (ο οποίος μπορεί να κάνει ματ) μέσα από μια αυθαίρετη διαμόρφωση.

4.4.8 Shogi

Το Shogi είναι ένα ιαπωνικό παίγνιο που παίζεται κατά μήκος των γραμμών παρόμοιο με το σκάκι,αλλά με κανόνες υπερβολικά πολύπλοκους για να τους εξηγήσουμε εδώ.Οι Adachi, Kamekawa, και Iwata απέδειξαν ότι η απόφαση για το αποτέλεσμα μιας θέσης στο Shogi είναι EXPTIME-complete.Πρόσφατα, οYokotaal απέδειξε ότι μια πιο περιορισμένη μορφή του Shogi, το Tsume-Shogi, στο οποίο ο πρώτος παίκτης πρέπει να κάνει συνεχώς oh-te (το αντίστοιχο του σαχ ή ρουα στο σκάκι),είναι επίσης EXPTIME-complete.

Το Οθέλλο (Reversi) είναι ένα κλασικό παίγνιο που παίζεται σε πίνακα 8 × 8,στο οποίο οι παίκτες τοποθετούν εναλλάξ κομμάτια με το χρώμα τους σε κενές πλατείες.Οι κινήσεις περιορίζονται στο να προκαλέσουν,σε τουλάχιστον μία σειρά,στήλη ή διαγώνια,μία συνεχή αλληλουχία των κομματιών αντίθετου χρώματος να έχει δύο κομμάτια του τρέχοντος παίκτη στην αρχη και το τέλος.Ως αποτέλεσμα της κίνησης, τα κομμάτια που περικλείωνται "γυρνάνε" στο χρώμα του τρέχοντα παίκτη.Ο νικητής είναι ο παίκτης που έχει τα περισσότερα κομμάτια του χρώματός του, όταν το ταμπλώ του παίγνιου γεμίσει.Γενικευμένο σε ένα n × n πίνακα με μια αυθαίρετη αρχική διαμόρφωση,το παίγνιο είναι σαφώς PSPACE επειδή μόνο n^2 - 4 κινήσεις μπορούν να γίνουν.Επιπλέον, οι Iwata και Kasai απέδειξαν ότι το παίγνιο είναι PSPACE-complete.

4.4.9 Hackenbush

Το Hackenbush είναι ένα από τα τυπικά παραδείγματα συνδυαστικού παίγνιου στο Winning Games.Μια θέση δίνεται σε ένα γράφημα με κάθε άκρη χρωματισμένη, είτε κόκκινη (*Αριστερά*),μπλε (*Δεξιά*),ή πράσινη (ουδέτερο),καθώς και με ορισμένες κορυφές σημειωμένες ως *ρίζες*.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής την αφαίρεση μιας άκρης του κατάλληλου χρώματος (είτε ουδέτερη ή το δικό τους χρώμα),η οποία προκαλεί επίσης την αφαίρεση όλων των ακμών που δεν συνδέονται με κορυφές ρίζα.Ο νικητής καθορίζεται από το κανονικό παίγνιο.Εφαρμόζεται σε μια περιορισμένη μορφή θέσεων του hackenbush, που ονομάζεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

κρεβάτια (redwood), αποτελείται από ένα κόκκινο διμερές γράφημα,με την κάθε κορυφή στη μία πλευρά να συνδέεται με ένα κόκκινο άκρο,του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με μια μπλε άκρη,το άλλο άκρο της οποίας είναι μια απο τις ρίζες της.

4.4.10 Κυριαρχία (Crosscram) και Cram

Η Κυριαρχία ή crosscram είναι ένα μεροληπτικό παίγνιο που αφορά την τοποθέτηση των οριζόντιων και κάθετων ντόμινο σε ένα πλέγμα,μια τυπική θέση εκκίνησης είναι ένα ορθογώνιο m × n.Ο *Αριστερά* μπορεί να παίξει μόνο τα κάθετα ντόμινο και ο *Δεξιά* μπορεί να παίξει μόνο τα οριζόντια ντόμινο και πρέπει τα ντόμινο να παραμένουν ξεχωριστά.Ο νικητής καθορίζεται από το κανονικό παίγνιο.Η πολυπλοκότητα της Κυριαρχίας,στον υπολογισμό,είτε του αποτελέσματος ή της αξίας μιας θέσης του,παραμένει ανοικτή.Οι Lachmann, Moore και Rapaport έχουν δείξει ότι ο νικητής και μια στρατηγική νίκης μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο για m∈{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11}και για κάθε n.Αυτοί οι αλγόριθμοι δεν υπολογίζουν την αξία του παίγνιου, ούτε η βέλτιστη στρατηγική, μόνον μια στρατηγική νίκης.

Το Cram είναι η αμερόληπτη εκδοχή της Κυριαρχίας στην οποία και οι δυο παίκτες μπορούν να τοποθετήσουν οριζόντια και κάθετα ντόμινο.Η έκβαση του Cram είναι εύκολο να καθοριστεί για ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν ζυγό αριθμό τετραγώνων αν ο αριθμός και των δύο πλευρων είναι ζυγός, ο δεύτερος παίκτης μπορεί να κερδίσει με μια στρατηγική συμμετρίας(αντιγράφοντας τις κινήσεις του πρώτου παίκτη και στους δύο άξονες) και αν ακριβώς η μία πλευρά είναι ζυγός αριθμός,ο πρώτος παίκτης μπορεί να κερδίσει παίζοντας τα μεσαία δύο τετράγωνα και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη στρατηγική της συμμετρίας.Φαίνεται ανοιχτός ο καθορίσμός του αποτελέσματος για ένα ορθογώνιο με δύο μονές πλευρές.Η πολυπλοκότητα του Cram για γενικούς πίνακες παραμένει ανοικτή.Το γραμμικό Cram είναι το ίδιο το Cram σε ορθογώνιο 1 × n πίνακα, όπου το παίγνιο χωρίζεται γρήγορα σε ένα άθροισμα παιγνίων.Αυτό το παίγνιο μπορεί να λυθεί εύκολα με την εφαρμογή τηςθεωρίας Sprague-Grundy και του δυναμικού προγραμματισμού,στην πραγματικότητα,υπάρχει μια απλούστερη λύση που βασίζεται στην απόδειξη ότι η συμπεριφορά του είναι περιοδική σε n.Η παραλλαγή του γραμμικού Cram στην οποία τοποθετούνται ορθογώνια 1 × k αντί των ντόμινο μπορεί επίσης να επιλυθεί μέσω δυναμικού προγραμματισμού,αλλά αν η συμπεριφορά είναι περιοδική παραμένει ανοιχτό ακόμα και γιαk = 3 .

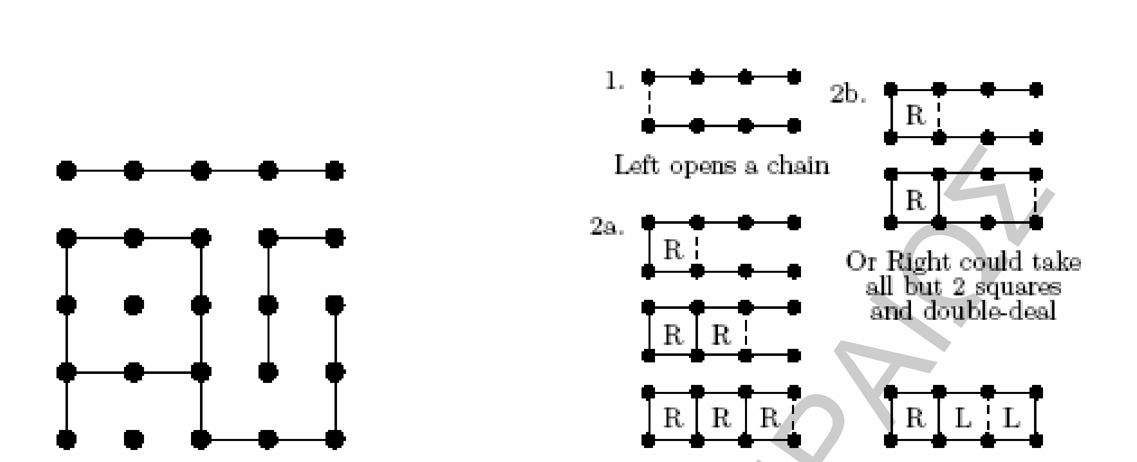
4.4.11 Dots-&-Boxes, Strings-&-Coins, και Nimstring

Το Dots-&-Boxes είναι ένα πολύ γνωστό παιδικό παίγνιο στο οποίο οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να ζωγραφίσουν οριζόντιες και κάθετες γραμμές που συνδέουν ζεύγη κουκκίδων σε ένα m × n υποσύνολο του πλέγματος.Κάθε φορά που ένας παίκτης κάνει μια κίνηση που κλείνει ένα τετράγωνο,ο παίκτης κερδίζει ένα πόντο και μετά πρέπει να ξαναπαίξει.Ο νικητής είναι ο παίκτης με τους περισσότερους πόντους, όταν γεμίσει ολόκληρο το πλέγμα.Ο τρόπος παίγνιου (Gameplay) στο Dots-&-Boxes χωρίζεται τυπικά σε δύο φάσεις:*το άνοιγμα* κατά τη διάρκεια του οποίου δεν υπάρχουν κλειστά κουτιά, και το φινάλε (endgame),στο οποίο τα κουτιά κλείνονται σε σχεδόν κάθε κίνηση, δείτε το Σχήμα 19.

Στο φινάλε, η "ελεύθερη κίνηση",που χαρίζεται κλείνοντας ένα τετράγωνο οδηγεί συχνά στο κλεισιμο διάφορων τετραγώνων σε ένα μόνο γύρο,δημιουργόντας μια αλυσίδα, βλέπε Σχήμα 4.2.Τα περισσότερα παιδιά εφαρμόζουν τον άπληστο αλγόριθμο κλείνοντας τα περισσότερα δυνατά τετράγωνα και έτσι παίζουν ολόκληρες αλυσίδες.Ωστόσο,η στρατηγική αυτή αναγκάζει τον παίκτη να ανοίξει μια άλλη αλυσίδα(στο φινάλε).Μια απλή βελτίωση της στρατηγικής ονομάζεται διπλό dealing, που αφήνει τα δύο τελευταία τετράγωνα της αλυσίδας,αλλά αναγκάζει τον αντίπαλο να ανοίξει την επόμενη αλυσίδα.Ο παίκτης που

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

χρησιμοποιεί το διπλό dealing φέρεται να διατηρεί τον έλεγχο,αν υπάρχουν αρκετά μεγάλες αλυσίδες,αυτός ο παίκτης θα κερδίσει για την επισημοποίηση αυτής της δήλωσης).



Σχήμα 4.2

Ψυφίο 5: τελείες και κουτιά σε τελική φάση **2α.δεξιά** μπορεί να ισχυριστεί αριστερά κερδίζει Κουτιά αλλιώς κινήται ξανά 2 κουτιά αλλα υποχρεούται να ανοίξει την επόμενη αλυσίδα

Μια γενίκευση που προκύπτει από το διπλό του Dots-&-Boxes είναι το Strings-&-Coins (χορδές και κέρματα).Αυτό το παίγνιο περιλαμβάνει ένα είδος γραφήματος του οποίου οι κορυφές είναι τα κέρματα και τα άκρα του οποίου είναι χορδές.Τα κέρματα μπορούν να συνδέονται μεταξύ τους και με το "έδαφος" από χορδές,η τελευταία σύνδεση μπορεί να εμφανιστεί ως βρόχος στο διάγραμμα.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να κόψουν τις χορδές (αφαιρώντας τα άκρα) και αν ένα νόμισμα ελευθερωθεί με αυτό το τρόπο,ο παίκτης το συλλέγει και κόβει μια άλλη χορδή στον ίδιο γύρο.Ο παίκτης που θα συλλέξει τα περισσότερα κερδίζει.

Ένα άλλο παίγνιο στενά συνδεδεμένο με το Dots-&-Boxes είναι το Nimstring το οποίο έχει τους ίδιους κανόνες με το Strings-&-Coins,εκτός από το ότι ο νικητής καθορίζεται από το κανονικό παίγνιο.Το Nimstring είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση του Strings-&-Coins αν προσθέσουμε μια αλυσίδα με περισσότερα από n + 1 νομίσματα σε περίπτωση το Nimstring έχει n νομίσματα,τότε στο ιδανικό παίγνιο του Strings-&-Coins που προκύπτει θα αποφευχθεί το άνοιγμα της μεγάλης αλυσίδας για όσο το δυνατόν περισσότερο και συνεπώς ο παίκτης που θα κινηθεί τελευταίος στο παράδειγμα Nimstring κερδίζει και τις χορδές και τα κέρματα.

Οι *Τροποι για να Κερδίσεις* υποστηρίζουν ότι το Strings-&-coins είναι NP-δυσκολίας όπως ακολουθει.Ας υποθέσουμε ότι έχετε συλλέξει αρκετά νομίσματα, αλλά ο αντίπαλός σας παίρνει τον έλεγχο.Τώρα είσαι αναγκασμένος να χάσετε το παίγνιο Nimstring, αλλά λόγω του αρχικού σας προβαδίσματος,μπορείτε ακόμα να κερδίσετε το παίγνιοStrings-&-Coins.Η ελαχιστοποίηση του αριθμού των κερμάτων που χάνετε ενώ ο αντίπαλός σας διατηρεί τον έλεγχο είναι ισοδύναμη με την εύρεση του μέγιστου αριθμού των κορυφών-ξεχωριστών κύκλων στο γράφημα,κυρίως επειδή το ισοδύναμο για ένα *double-deal* για να διατηρήσει τον έλεγχο όταν ένας (μεμονωμένος) κύκλος ανοίγει έχει σαν αποτέλεσμα το να χαθούν τέσσερα τετράγωνα αντί για δύο.Παρατηρούμε ότι κάνοντας τη διαφορά μεταξύ του αρχικού προβαδίσματος και των χαμένων νομισμάτων πολύ μικρή (είτε -1 ή 1),ο αντίπαλος δεν μπορεί επίσης να κερδίσει παραδίνοντας τον έλεγχο.Επειδή το πρόβλημα του προσδιορισμού των κύκλων είναι NP-hard για γενικά γραφήματα,ο προσδιορισμός του αποτελέσματος των παιγνίων στο στυλ του Strings-&-Coins φινάλε είναι NP-hard. Ο Eppstein παρατηρεί ότι η μείωση αυτή θα πρέπει να ισχύει και για τις περιπτώσεις των Dots-&-Boxes end game περιορίζοντας στο μέγιστο βαθμό τρεις επίπεδες γραφικές παραστάσεις.Η προσαρμογή αυτών των γραφικών παραστάσεων στο τετράγωνο ταμπλώ προκύπτει από το ότι μεγάλες αλυσίδες και κύκλοι (περισότερο από δύο άκρες για τις αλυσίδες και τρεις ακμές για τους κύκλους) μπορούν να αντικατασταθούν από ακόμη μακρύτερες αλυσίδεςή κύκλους.Παραμένει ανοικτό το ερώτημα αν τα Dots-&-BoxesκαιStrings-&-Coins είναι NP ή PSPACE complete ξεκινόντας από μία αυθαίρετη διαμόρφωση.Ακόμη και η περίπτωση ενός ταμπλώ n×1 κουτιών δεν είναι πλήρως κατανοητή από την προοπτική μιας Συνδυαστικής Θεωρίας των Παιγνίων .

4.4.12 Αμαζόνες

Οι Αμαζόνες είναι ένα παίγνιο που εφευρέθηκε από τον Walter Zamkauskas το 1988,το οποίο περιέχει στοιχεία του σκακιού (chess)και του Go.Το παίγνιο λαμβάνει χώρα σε ένα ταμπλώ 10 × 10 με τέσσερις αμαζόνες.

Σε κάθε γύρο,ο Αριστερά [Δεξιά] κινεί μια μαύρη [λευκή] αμαζόνα σε οποιοδήποτε κενό τετράγωνο προσβάσιμο με την κίνηση της βασίλισσας απο το Σκάκι και εκτοξεύει ένα βέλος σε κάθε μη κατειλημμένο τετράγωνο προσβάσιμο με την κίνηση μιας βασίλισσας του σκακιού από τη νέα θέση της Αμαζόνας.Το βέλος (ζωγραφισμένος ως ένας κύκλος) καταλαμβάνει τώρα το τετράγωνο του και αμαζόνες και βέλη δεν μπορούν πλέον να περάσουν απο πάνω ή να σταθούν σε αυτό το τετράγωνο.Ο νικητής καθορίζεται από το κανονικό παίγνιο.

Το παίγνιο στις Αμαζόνες συνήθως χωρίζεται σε ένα άθροισμα απλούστερων παιγνίων,γιατί τα βέλη χωρίζουν το ταμπλώ σε πολλαπλές υπο-περιοχές.Ειδικότερα, το φινάλε (endgame)αρχίζει όταν κάθε υπο-περιοχή του παίγνιου περιέχει αμαζόνες ενος μόνο χρώματος.Τότε ο στόχος του κάθε παίκτη είναι απλά να μεγιστοποιήσει τον αριθμό των κινήσεων του σε κάθε υπο-περιοχή.Ο Buro απέδειξε ότι η μεγιστοποίηση του αριθμού των κινήσεων σε μια ενιαία υπο-περιοχή είναι NP-complete(για n × n πίνακες).Γενικά στο φινάλε,η απόφαση για το αποτέλεσμα μπορεί να μην είναι σε NP επειδή είναι δύσκολο να αποδειχτεί ότι ο αντίπαλος δεν έχει την καλύτερη στρατηγική.Ωστόσο,ο Buro απέδειξε ότι το πρόβλημα αυτό είναι NP-ισοδύναμο δηλαδή,το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με ένα πολυώνυμο αριθμό σε ένα αλγόριθμο για κάθε NP-ολοκληρομένο πρόβλημα και αντιστρόφως.

Όπως το *Πρόβλημα του Άγγελου* του Conway η πολυπλοκότητα του να βρουν το αποτέλεσμα για μια γενική διαμόρφωση των Αμαζόνων παρέμεινε ανοικτή για αρκετά χρόνια,για να λυθεί σχεδόν ταυτόχρονα από πολλούς ανθρώπους.Οι Furtak, Kiyomi, Takeaki και Buro δίνουν δύο ανεξάρτητες αποδείξειςPSPACE-πληρότητας: μία απλοποίησητου Hex και η άλλη απλοποίησητης Γεωγραφίας των Κορυφών.Η δεύτερη ισχύει ακόμα και για τις θέσεις που περιέχουν μόνο μια μαύρη και μια μόνο λευκή Αμαζόνα.Ανεξάρτητα, ο Χερν έδωσε μια απλοποίηση Περιορισμένης Λογικής δείχνοντας PSPACE-πληρότητα.

4.4.13 Konane

Το Konane, ή Ντάμα της Χαβάης, είναι ένα παίγνιο που παίζεται στη Χαβάη από πολύ παλιά.Το Konane παίζεται σε ένα ορθογώνιο ταμπλώ(που συνήθως κυμαίνεται σε μέγεθος από 8 × 8 έως 13 × 20),το οποίο είναι αρχικά γεμάτο με μαύρες και άσπρες πέτρες σε ένα μοτίβο σκακιέρας.Για να αρχίσει το παίγνιο,δύο γειτονικές πέτρες στη μέση του ταμπλώ ή απο μια γωνία απομακρύνονται.Στη συνέχεια,οι παίκτες εναλλάσουν τις κινήσεις τους.Οι κινήσεις γίνονται όπως στο PegSolitaire.Πράγματι, το Konane μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος PegSolitaire για δύο παίκτες.Ο παίκτης μετακινεί την πέτρα του χρώματός του κανοντας ένα

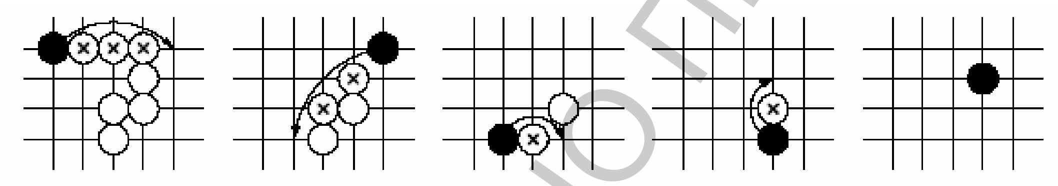
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

οριζόντιο η κάθετο αλμα πάνω απο μια διπλανή πέτρα αντίθετου χρώματος,σε ένα άδειο τετράγωνο,οι πέτρες αυτές απομακρύνονται από το παίγνιο.Μια πέτρα μπορεί να κάνει πολλαπλάδιαδοχικά άλματα σε μια και μόνο κίνηση,εφόσον αυτά είναι σε ευθεία γραμμή,δεν επιτρέπονται στροφές στην ίδια κίνηση.Ο πρώτος παίκτης που δεν μπορεί να κινηθεί κερδίζει.

Ο Χερν απέδειξε ότι το Konane είναι PSPACE-complete με μια απλοποίηση της Περιορισμένης Λογικής.Υπήρξαν ορισμένα θετικά αποτελέσματα για τις κλειστές διαμορφώσεις.Οι Chan και Tsaiμ ανέλύσαν το παίγνιο 1 × n,αλλά ακόμη και αυτή η εκδοχή του παίγνιου δεν έχει ακόμα επιλυθεί.

4.4.14 Phutball

Το παίγνιο του Conway,*το ποδόσφαιρο του φιλοσόφου* ή Phutball περιλαμβάνει λευκές και μαύρες πέτρες σε ένα ορθογώνιο ταμπλώ,όπως σε έναν πίνακα Go.Αρχικά,η μοναδική μαύρη πέτρα (η μπάλα) τοποθετείται στη μέση του ταμπλώ και δεν υπάρχουν καθόλου λευκές πέτρες.Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής είτε να τοποθετήσουν μια άσπρη πέτρα,σε κάποια μη κατειλημμένη θέση, ή να μετακίνησουν τη μπάλα με μια σειρά από άλματα πάνω από συνεχόμενες ακολουθίες απο λευκές πέτρες κάθε τοποθετημένες οριζόντια, κάθετα, ή διαγώνια. Βλέπε σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3
Ψυφίο 9: Μία μοναδική κίνηση σε Phutball συνιστά 4 άλματα

Ένα άλμα προκαλεί την άμεση απομάκρυνση των λευκών πετρών που περασε απο πάνω τους η μπάλα (μαύρη πέτρα),έτσι ώστε αυτές οι πέτρες να μην μπορούν να χρησιμοποιηθούνγια ένα μελλοντικό άλμα στην ίδια κίνηση.Οι *Αριστερά* και *Δεξιά* έχουν τις απέναντι πλευρές του ταμπλώ ως τέρματα.Ο στόχος του *Αριστερά* είναι με μια κίνηση να τερματίσει με την μπάλα πάνω ή πέρα απο το τέρμα του *Δεξιά* και αντιστοιχα και ο Δεξιά.Το Phutball έχει πολλές επαναλήψεις και δεν είναι σαφές αν κάποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης:το παίγνιο μπορεί να συνεχίστεί επ'αόριστον. Μια διαφορέτική πτυχή του παίγνιου είναι ότι οι λευκές πέτρες που τοποθετούνται από έναν παίκτη μπορεί να «διαφθαρούν» για καλύτερη χρήση από τον άλλο παίκτη. Πρόσφατα, ωστόσο, Demaine, Demaine και Eppstein βρήκαν μια πτυχή του Phutball που θα μπορούσε να αναλυθεί.Συγκεκριμένα, αποδείχθηκε ότι το ζήτημα εάν ο τρέχον παίκτης μπορεί να κερδίσει με μια μόνο κίνηση ("ματ σε 1" στο σκάκι) είναι NP-complete.Αυτό το αποτέλεσμα αφήνει ανοικτή την πολυπλοκότητα του καθορισμού του αποτελέσματος του παίγνιου απο μια δεδομένη θέση.

4.4.15 Το Πρόβλημα του Άγγελου του Conway

Ένα παλιό μακροχρόνια ανοικτό πρόβλημα ήταν το πρόβλημα του Άγγελου του Conway.Δύο παίκτες,ο *Άγγελος* και ο *Διάβολος*, εναλλάσουν κινήσεις παίζοντας σε έναν απείρων διαστάσεων τετράγωνο ταμλώ.Ο άγγελος μπορεί να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε έγκυρηθέση εντός ***k*** οριζόντιας απόστασης και ***k*** κάθετης απόστασης από την τρέχουσα θέση του.Ο Διάβολος μπορεί να τηλεμεταφερθεί σε οποιοδίποτε τετράγωνο,εκτός από αυτό στο οποίο βρίσκετε ο Άγγελος και "τρώει" το τετράγωνο, εμποδίζοντας τον Άγγελο από το να παίξει πανω σ' αυτό στο μέλλον(αλλά μπορεί να περάσει από πάνω).Στόχος του διαβόλου είναι να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

εμποδίσει τον Άγγελο να κινηθεί.Ήταν από καιρό γνωστό ότι ένας άγγελος δύναμης k = 1 μπορεί να μπλοκαριστεί έτσι ώστε ο Διάβολος να κερδίζει,αλλά δεν ήταν γνωστό αν ο Άγγελος θα είναι σε θέση να διαφύγει για κάθε k> 1.(Στο αρχικό ανοικτό πρόβλημα το k = 1000).Πρόσφατα,τέσσερις ανεξάρτητες αποδείξεις καθόρισαν ότι ένας αρκετά ισχυρός άγγελος μπορεί να κινείτε για πάντα,διασφαλίζοντας τον Άγγελο ως νικητή. Ο Mathe και ο Kloster έδειξαν ότι το k = 2 αρκεί,ο Bowditch έδειξε ότι το k = 4 αρκεί και ο Gacs έδειξε ότι κάποια kαρκούν.Ειδικότερα, η απόδειξη του Kloster δίνει μια σαφή αλγοριθμική στρατηγική νίκης για τον *Άγγελο* με k = 2 .

4.4.16 Jenga

Το Jenga είναι ένα δημοφιλές παίγνιο στο οποίο στοιβάζονται κομμάτια που εφευρέθηκε από τον Leslie Scott στη δεκαετία του 1970 και τώρα υπάρχει στο εμπόριο από την Hasbro.Δύο παίκτες που μετακινούν εναλλάξ ξεχωριστά κομμάτια απο έναν πύργο φτιαγμένο απο αυτά και ο πρώτος παίκτης που θα κάνει τον πύργο να πέσει χάνει.Κάθε κομμάτι (block) είναι 1 × 1 × 3 και βρίσκεται σε οριζόντια θέση.Ο αρχικός **3 × 3 × n** πύργος εναλλάσει επίπεδα τριών κομματιών,έτσι ώστε τα κομμάτια των επιπέδων που γειτονεύουν να είναι κάθετα.(Κατά το εμπορικό παίγνιο, n = 18.) Σε κάθε κίνηση,ο παίκτης αφαιρεί οποιοδίποτε κομμάτι είναι κάτω από το κορυφαίο ολοκληρωμένο (3-κομματιών) επίπεδο και προσθέτει το κομμάτι πανω στο κορυφαίο επίπεδο(ξεκινώντας ένα νέο επίπεδο εφόσον το υφιστάμενο κορυφαίο επίπεδο είναι πλήρες),κάθετα ως προς στα κομμάτια του ολοκληρομένου κάτω επιπέδου.Ο παίκτης χάνει εάν ο πύργος γίνει ασταθής, δηλαδή,το κέντρο βάρους των ανώτερων k επιπέδων βγαίνει εκτός του κυρτού κύτους της περιοχής επαφής μεταξύ των επιπέδωνk και του (k + 1) παίκτη.

Ο Zwick απέδειξε ότι η φυσική κατάσταση σταθερότητας του Jenga μπορεί να επαναδιατυπωθεί συνδυαστικά απλά περιορίζοντας τις επιτρεπόμενες διαμορφώσεις για κάθε επίπεδο και για τα τρία κορυφαία επίπεδα.Συγκεκριμένα, γράφοντας διάνυσμα *3-bit* για να καθορίσει ποια κομμάτια (blocks) υπάρχουν σε κάθε επίπεδο. Στη συνέχεια,ένας πύργος είναι σταθερός αν και μόνο αν κανένα επίπεδο εκτός ίσως απο το ψηλότερο είναι 100 ή 001 και τα τρία ανώτερα επίπεδα από κάτω προς τα πάνω δεν είναι κανένα από τα 010, 010, 100. 010, 010, 001. 011, 010, 100. ή 110, 010, 001.Χρησιμοποιώντας αυτόντο χαρακτηρισμό,ο Zwick αποδεικνύει ότι ο πρώτος παίκτης κερδίζει από την αρχική διαμόρφωση,εάν και μόνον αν n = 2 ή $n \geq 4$ και $n \equiv 1$ ή 2 (mod 3) και δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό των κινήσεων που κερδίζουν. Παραμένει ανοικτό το κατά πόσον μια τέτοια αποτελεσματική λύση μπορεί να γενικευτεί ως προςτουςμονούς αριθμούςk> 3 κομματιών σε κάθε επίπεδο.(Στην περίπτωση του ζυγού k κερδίζει ο δεύτερος παίκτης κερδίζει με απλή στρατηγική του καθρέφτη.)

4.5 Αλγόριθμοι για Παζλ

Πολλά παζλ (παίγνια ενός παίκτη) έχουν σύντομες λύσεις και είναι NP-complete.Ωστόσο, αρκετά παζλ με βάση τον προγραμματισμό των κινήσεων είναι πιο δύσκολα,PSPACE-δυσκολίας.Συνήθως αυτά τα παζλ παίζονται σε ένα οριοθετειμένο ταμπλώ ή περιοχή,έτσι ώστε να είναι επίσης PSPACE-complete.Μια κοινή μέθοδος που αποδεικνείει ότι παζλ είναι σε PSPACE είναι να δωθεί ένας απλός αλγόριθμος χαμηλού χώρου(low-space)που μαντεύει τη λύση και να εφαρμοστεί το θεώρημα του Savitch ότι PSPACE = NPSPACE(μη καθορισμένος πολυωνυμικός χώρος). Ωστόσο, όταν γενικεύονται σε ολόκληρο το το επίπεδο και τα κομμάτιαείναι πολλά,τα παζλ γίνονται συχνά αναποφάσιστα.Το τμήμα αυτό ερευνά εν συντομία μερικά από αυτά τα αποτελέσματα,ακολουθόντας τη δομή της προηγούμενης ενότητας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.5.1 Στιγμιαία Τρέλα

Δίνονται n κύβοι,κάθε επιφάνεια έχει το χρώμα ενός από τα n χρώματα,είναι δυνατόν να στοιβαχθούν οι κύβοι έτσι ώστε κάθε χρώμα να εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε μία από τις 4 πλευρές της στοίβας;Η περίπτωση του n = 4 είναι ένα παζλ που ονομάζεται Στιγμιαία Τρέλα που διανέμεται από την ParkerBros.Σε μια από τις πρώτες μελέτες σχετικά με τη δυσκολία των παζλ και τα παίγνια που παίζουν οι άνθρωποι,οι Robertson και Munro απέδειξαν οτι το πρόβλημα της γενικευμένης Στιγμιαίας Τρέλας (InstantInsanity) είναι NP-complete.

Το παίγνιο του στοιβάγματος τωνκύβων είναι ένα παίγνιο δύο παικτών, βασισμένο σε αυτό το παζλ.Δίνονται μια σειρα διατεταγμένων κύβων,οι παίκτες προσθέτουν κύβο στον κύβο στοιβαζοντάς τους με έναν επιλεγμένο προσανατολισμό. Ο χαμένος είναι ο πρώτος παίκτης που θα προσθέσει ένα κύβο επαναλαμβάνοντας ένα χρώμα σε μια απο τις τέσσερις πλευρές της.Οι Robertson και Munro απέδειξαν ότι αυτό το παίγνιο είναι PSPACE-complete,αν αντιμετοπιστεί ως γενικό παράδειγμα ότι τα NP-πλήρη παζλ τείνουν να οδηγούν σε PSPACE-complete παίγνια.

4.5.2 Κρυπτάριθμοι (Αλφαματικά, Προφορική Αριθμητική)

Οι Κρυπτάριθμοι (cryptarithms) ή Αλφαματικά ή Προφορική Αριθμητική είναι κλασικά παζλ που περιλαμβάνουν μια εξίσωση συμβόλων,το πρωτότυπο είναι το SEND + MORE= MONEY του Dudeney από το 1924, στο οποίο κάθε σύμβολο (π.χ., M) αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο ψηφίο (μεταξύ 0 και 9).Ο στόχος είναι να προσδιοριστούν τα ψηφία σύμφωνα με τα σύμβολα ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση.Τέτοια προβλήματα μπορούν να λυθούν εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο απαρίθμόντας και τα 10! ψηφία.Ωστόσο, οEppstein απέδειξε ότι είναι NP-complete η λύση της γενίκευσης σε βάση Θ(n^3) (αντί του δεκαδικού) καιΘ(n) σύμβολα (αντί των 26).

4.5.3 Σταυρόλεξα και Scrabble

Ίσως ένα από τα πιο δημοφιλή παζλ να είναι το σταυρόλεξο,που χρονολογείται στο 1913 και σήμερα εμφανίζεται σχεδόν σε κάθε εφημερίδα,καθώς είναι και το αντικείμενο του πρόσφατου ντοκιμαντέρ Wordplay(2006).Εδώ είναι πιο εύκολο να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα του σχεδιασμού των σταυρολέξων,αγνοώντας τη μη μαθηματική έννοια των ορισμών.Δίνεται μια λίστα λέξεων (το λεξικό) και ένα ορθογωνικό πλέγμα με μερικά τετράγωνα,αλλα κλειστά και άλλα κενά,μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα υποσύνολο των λέξεων οριζόντια ή κάθετα στα μεγαλύτερα κενά, έτσι ώστε οι διασταυρούμενες λέξεις να έχουν γράμματα που ταιριάζουν;Οι Lewis και Παπαδημητρίου απέδειξαν ότι το ζήτημα αυτό είναι NP-complete,ακόμα και όταν το πλέγμα (σταυρόλεξο) δεν έχει εμπόδια,ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη πρέπει να σχηματίζει μια λέξη.

Διαφορετικά, το πρόβλημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η απόλυτη μορφή της επίλυσης σταυρολέξων,χωρίς ορισμούς.Σε αυτή την περίπτωση,θα ήταν ενδιαφέρον να μάθουμε αν το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

πρόβλημα παραμένει NP-hard ακόμη και αν κάθε λέξη στη συγκεκριμένη λίστα θα πρέπει να χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά,έτσι ώστε ο μοναδικός ορισμός να είναι "χρησιμοποιήσετε αυτές τις λέξεις".Ένα σχετικό ανοικτό πρόβλημα είναι το *Scrabble*.Η πιο φυσική θεωρητική ερώτηση που μας έρχεται στο μυαλό στην εκδοχή της μιας κίνησης:με τα κομματια στο χέρι(με γράμματα και βαθμούς) και δεδομένης της τρέχουσας διαμόρφωσης του ταμπλώ του παίγνιου(με τα παιγμένα κομμάτια και διαθέσιμα διπλά / τριπλά γράμματα / λέξεις και κενά τετράγωνα),είναι ποιά κίνηση μεγιστοποιεί το σκορ;Προφανώς, η ερώτηση απόφασης είναι NP-complete.Επίσης, ανοικτή παραμένει η πολυπλοκότητα του παίγνιου δύο παικτών,στην παραλλαγή της τέλειας-πληροφορισης όπου και οι δύο παίκτες γνωρίζουν τη σειρά με την οποία υπόλοιπα κομμάτια θα εξαχθούν καθώς και τα κομμάτια στο χέρι του αντιπάλου.Πιθανώς ο καθορισμός μιας νικηφόρας κίνησης από μια δεδομένη θέση στο παίγνιο αυτό είναι PSPACE-πλήρης.

4.5.4 Παζλ με μολύβι και χαρτί: Sudoku και Φίλοι

Το Sudoku είναι ένα παζλ που παίζεται με μολύβι και χαρτί που έγινε δημοφιλές σε όλο τον κόσμο γύρω στο 2005.Ο Αμερικανός αρχιτέκτονας Howard Garns δημοσίευσε για πρώτη φορά το παζλ στο τεύχος Μαΐου 1979(και σε πολλά μεταγενέστερα τεύχη) του *Dell Pencil Puzzles and Word Games*, τότε το Ιαπωνικό περιοδικό *Monthly Nikolist* εισήγαγε το παζλ,το 1984 και κατοχύρωσε το όνομα Sudoku (Μονοί αριθμοί),τότε η ιδέα εξαπλώθηκε σε όλες τις ιαπωνικές δημοσιεύσεις, οWayne Gould,στο τέλος, δημοσίευσε τα δικά του,φτιαγμένα στον υπολογιστή παζλ στην εφημερίδα *The Times* το 2004,λίγο μετά την δημοσίευση πολλές εφημερίδες και περιοδικά υιοθέτησαν το παζλ.Το συνηθισμένο παζλ αποτελείται από ένα πλέγμα τετραγώνων 9 × 9 ,που διαιρείται σε 3 × 3 διάταξη των 3 × 3 τετραγώνων.Ορισμένα τετράγωνα του πλέγματος αρχικά γεμίζονται με ψηφία μεταξύ 1 και 9 και μερικά παραμένουν κενά.Ο στόχος είναι να καλυφθούν τα κενά τετράγωνα έτσι ώστε κάθε σειρά,στήλη και υποομάδα πλακιδίων (3x3)να έχει και τα εννέα ψηφία χωρίς επανάληψη.

Το Sudoku γενικεύεται φυσικά σε $n^2 \times n^2$ πλέγμα των τετραγώνων,διαιρούμενο σε μια n × n διαμόρφωση τωνn × n τετραγώνων.Οι Yato και Seta απέδειξαν ότι αυτή η γενίκευση είναι NP-complete.Μάλιστα, απέδειξαν ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα της πληρότητας,στην τάξη των Εναλλακτικών Λύσεων των Προβλημά των *Another Solution Problems*(**ASP**),όπου δίνεται μία λύση,άλλη μια ή περισσότερες λύσεις μπορούν να βρεθούν.Έτσι, ειδικότερα, δεδομένου ενός Sudoku και της λύσης,είναι NP-complete η διαπίστωση του αν υπάρχει μια άλλη λύση,αυτό είναι ένα πρόβλημα που προκύπτει στο σχεδιασμό των παζλ.Τα περισσότερα παζλ Sudoku υπόσχονται ότι έχουν μια μοναδική λύση.Οι Valiant και Vazirani απέδειξαν ότι η προσθήκη μιας τέτοιας υπόσχεσης μοναδικότητας κάνει ένα πρόβλημα NP-δύσκολο κάτω από τυχαίες απλοποιήσεις,οπότε δεν υπάρχει λύση πολυωνυμικού χρόνου για τα Sudokus με μοναδική λύση εκτός αν RP = NP.

Η ASP-πληρότητα (ιδίως, η NP-πληρότητα) έχει καθιερωθεί και για έξι άλλα παζλ χαρτιού και μολυβιού από τον Ιάπωνα εκδότη Nicoli:Nonograms,Slitherlink, CrossSum,Fillomino,LightUp και LITS.Σε ένα παζλ *Nonogram* ο στόχος είναι να συμπληρωθούν τα υποσύνολα των τετραγώνων στον πίνακα,έτσι ώστε, σε κάθε σειρά και στήλη,οι συνεχόμενες σειρές απο χρωματισμένα τετράγωνα να έχουν μήκη που να ταιριάζουν με τους ακαίρους.Στο *Slither link* μας δίνονται ετικέτες μεταξύ του 0 και του 4 σαν υποσύνολα κάποιων πλευρών σε ένα ορθογώνιο πλέγμα και ο στόχος είναι να συνταχθεί ένας απλός κύκλος στο πλέγμα έτσι ώστε κάθε ετικέτα τις πλευράς να περιβάλλεται από τον καθορισμένο αριθμό των ακμών.Στο *Kakuro* ή *CrossSum* μας δίνεται ένα *polyomino*(ένα ορθογώνιο πλέγμα, όπου μόνο μερικά τετράγωνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν) και ένας ακέραιος για κάθε μέγιστη συνεχόμενη (οριζόντια ή κάθετη)σειρά τετραγώνων και ο στόχος είναι να γεμίσει κάθε τετράγωνο με ένα ψηφίο μεταξύ 1 και 9 έτσι ώστε κάθε σειρά να έχει το καθορισμένο άθροισμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

χωρίς να υπάρχει επαναλαμβανόμενο ψηφίο.Στο *Fillomino* μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα στο οποίο μερικά τετράγωνα έχουν γεμίσει με θετικούς ακέραιους και ο στόχος είναι να γεμίσουν τα υπόλοιπα τετράγωνα με θετικούς ακέραιους,έτσι ώστε κάθε μέγιστη περιοχή συνδεδεμένων τετραγώνων με τον ίδιο αριθμό να αποτελείται από ακριβώς αυτόν τον αριθμό των τετραγώνων.Στο*LightUp(Akari)*μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα στο οποίο υπάρχουν είτε τετράγωνα δωμάτια ή τοίχοι και μερικοί τοίχοι έχουν ένα συγκεκριμένο ακέραιο μεταξύ 0 και 4,ο στόχος είναι να τοποθετήθούν φώτα σε ένα υποσύνολο των δωματίων έτσι ώστε κάθε αριθμημένος τοίχος να επικοινωνεί με ακριβώς τον καθορισμένο αριθμό(οριζόντια ή κάθετα) απο φώτα,κάθε δωμάτιο είναι οριζόντια ή κάθετα ορατό από ένα φως και δεν υπάρχουν δύο φώτα που να είναι οριζόντια ή κάθετα ορατά το ένα από το άλλο.Στο *LITS* μας δίνεται μέρος ενός ορθογωνίου σε polyomino κομμάτια και ο στόχος είναι να επιλέξουμε ένα tetromino (υποσύνολο τεσσάρων συνδεδεμένωντετραγώνων) σε κάθε τέτοιο polyomino τέτοιο ώστε η ένωση των tetrominoes συνδεδεμένων μεταξύ τους να μην προκαλεί ένα τετράγωνο 2×2.Όπως με Sudoku,είναι NP-complete τόσο η εύρεση λύσεων όσο και η απόδειξη μοναδικότητας των λύσεων σε όλα αυτά τα παζλ.

Η NP-πληρότητα έχει επιβεβαιωθεί για άλλα επτά παίγνια με μολύβι και χαρτί που δημοσιεύονται από το *Nicoli*:TentaiShow,Masyu,Bag,Nurikabe,Hiroimono, Heyawake και Hitori.Στο TentaiShow ή Σπειροειδείς Γαλαξίες μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με κουκίδες σε ορισμένες κορυφές,στο μέσο των άκρων και στο μέσο των πλευρών,ο στόχος είναι να διαιρεθεί το ορθογώνιο σε ακριβώς ένα κομμάτι polyomino ανά κουκκίδα που να είναι δύο φορές περιστροφικά συμμετρικό γύρω από την κουκίδα.Στο Masyu ή PearlPuzzle μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με τετράγωνα που περιέχουν ορισμένα λευκά ή μαύρα μαργαριτάρια και ο στόχος είναι να βρεθεί μια απλή διαδρομή μέσα από τατετράγωνα που επισκέπτεται το κάθε μαργαριτάρι,στρίβωντας 90 μοίρες σε κάθε μαύρο μαργαριτάρι,περνάει κατ 'ευθείαν μέσα από κάθε λευκό μαργαριτάρι και στρίβει 90 μοίρες αμέσως πριν ή μετά από κάθε λευκό μαργαριτάρι.Στο Bag ή CorralPuzzle μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με ορισμένα τετράγωνα να ετικετάρονται με θετικούς ακέραιους και ο στόχος είναι να βρεθεί ένας απλός κύκλος στο πλέγμα που να περικλείει όλες τις ετικέτες και έτσι ώστε ο αριθμός των οριζοντίων και κατακόρυφων τετραγώνων που είναι ορατά από κάθε ετικεταρισμένο τετράγωνο να ισούται με τον ακέραιο της ετικέτας.Στο *Nurikabe* μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με τετράγωνα ετικεταρισμένα με θετικούς ακέραιους και ο στόχος είναι να βρεθεί ένα συνδεδεμένο υποσύνολο των μη ετικεταρισμένων τετραγώνων που να μην προκαλεί την αφαίρεση κανενός τετραγώνου 2×2 ή ολόκληρου τετραγώνου με αποτελέσματα να υπάρχει ακριβώς μια περιοχή ανά ετικεταρισμένο τετράγωνο του οποίουτο μέγεθος ισούται με την εν λόγω ετικέτα.Η απλοποίηση του McPhail χρησιμοποιεί ετικέτες απο 1 έως 5,ενώ η απλοποίηση τωνHolzerκαιal 's χρησιμοποιεί μόνο ετικέτες με 1 και 2 (μόνο με 1 θα ήταν ασήμαντο)και λειτουργεί χωρίς τον κανόνα της συνδεσιμότητας και / ή του κανόνα 2×2.

Στο *Hiroimono* ή *Goishi Hiroi* μας δίνεται μια συλλογή από πέτρες στις κορυφές ενός ορθογώνιου πλέγματος και ο στόχος είναι να βρεθεί ένα μονοπάτι που να περνάει απο όλες τις πέτρες,αλλάζοντας κατευθύνσεις ± 90 μοιρών μόνο στις πέτρες, και οι πέτρες που επισκέπτονται αφαιρούνται.Στο *Heyawake* μας δίνεται μια υποδιαίρεση ενός ορθογωνικού πλέγματος με ορθογώνια δωμάτια,μερικά από τα οποία είναι ετικεταρισμένα με έναν θετικό ακέραιο και ο στόχος είναι να χρωματιιστεί ένα υποσύνολο των μεμονομένων τετραγώνων έτσι ώστε ο αριθμός των χρωματισμένων τετραγώνων σε κάθε ετικεταρισμένο δωμάτιο να ισούται με τον αριθμό της ετικέτας,τα χρωματισμένα τετράγωνα δεν είναι ποτέ (οριζόντια ή κάθετα) παρακείμενα,τα άβαφα τετράγωνα μπορούν να είναι γειτονικά συνδεδεμένα (μέσω οριζόντιων και κάθετων συνδέσεων, και η μεγαλύτερες σειρές συνεχόμενων γειτονικών(οριζόντιων ή κάθετων) σειρών απο τετράγωνανα τέμνονται το πολύ σε δυο δωμάτια.Στο *Hitori* μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με κάθε τετράγωνο ετικεταρισμένο με έναν ακέραιο αριθμό και ο στόχος είναι να χρωματιστεί ένα υποσύνολο μεμονομένων τετραγώνων,έτσι ώστε κάθε σειρά και κάθε στήλη να μην έχει δυο φορές την ίδια άβαφη ετικέτα (παρόμοιο με τοSudoku),τα χρωματισμένα τετράγωνα δεν είναι ποτέ (οριζόντια ή κάθετα) γειτονικά, και τα άβαφα τετράγωνα είναι συνδεδεμένα (μέσω οριζόντιων και κάθετων συνδέσεων).

Ένα διαφορετικό είδος παζλ με μολύβι και χαρτί είναι το *Morpion Solitaire*, δημοφιλές σε διάφορες ευρωπαϊκές χώρες.Το παίγνιο ξεκινά με κάποια διάταξη των σημείων στις διασταυρώσεις ενός τετραγωνικού πλέγματος (συνήθως σε ένα τυπικόσχήμα σταυρού).Η κίνηση αποτελείται από την τοποθέτηση ενός νέου σημείου σε μια διασταύρωση του πλέγματος και στη συνέχεια την χάραξη μιας οριζόντιας, κάθετης,ή διαγώνιας γραμμής που ενώνοντας πέντε τμήματα συνεχόμενων σημείων που περιλαμβάνουν το νέο.Τα τμήματα γραμμής με την ίδια κατεύθυνση δεν μπορούν να μοιραστούν το ίδιο σημείο (το ασυνεχές μοντέλο) εναλλακτικά,τμήματα γραμμής με την ίδια κατεύθυνση μπορούν να συμπίπτουν μόνον σε ένα κοινό τελικό σημείο (το μοντέλο της επαφής).Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των κινήσεων πριν γίνει αδύνατο το να κινηθείς.Οι Demaine,Langerman θεωρούν ότι αυτό παίγνιο γενικεύεται με κινήσεις που συνδέουν οποιοδήποτε αριθμό k + 1 σημείων και όχι μόνο 5.Επιπλέον με τον περιορισμό του αριθμού των κινήσεων στην τυπική διαμόρφωση του σταυρού,αποδεικνύουν την πολυπλοκότητα των αποτελεσμάτων για τη γενική περίπτωση.Δείχνουν ότι για τα δύο μοντέλα παίγνιου και για k≥3, είναι NP-δυσκολίας η εύρεση του μακρύτερου παίγνιου από ένα δεδομένο σχήμα με n σημεία,ή ακόμη και η προσέγγιση του μακρύτερου παίγνιου μέσα σε $n^{1-\varepsilon}$ για κάθε ε > 0. Για k> 3, το πρόβλημα είναι στην ουσίαNP-complete. Για k = 3, είναι ανοιχτότο αν το πρόβλημα είναι NP, και για k = 2 θα μπορούσε ακόμη και να είναι στο P.

Ενα τελικό αποτέλεσμα NP-πληρότητας για παζλ με μολύβι και χαρτί είναι το παζλ Battle ship Solitaire.Αυτό το παζλ είναι μια παραλλαγή για ένα παίκτη με τέλεια πληροφόρησητης κλασικής Ναυμαχίας για δύο παικτες με ατελή πληροφόρηση.Στο Battle ship Solitaire μας δίνεται μια λίστα από 1 × k πλοία για διάφορες τιμές του k, ένα ορθογώνιο πλέγμα με τετράγωνα όπου ορισμένα επισημαίνονται ως νερό, εσωτερικό πλοίου, άκρη πλοίου,ή ολόκληρο (1 × 1) πλοίο και ο αριθμός των τετραγώνων με πλοίο που θα πρέπει να υπάρχει σε κάθε σειρά και κάθε στήλη.Ο στόχος είναι να γεμίσουμε το ταμπλώ τοποθετόντας τα πλοία που μας δίνονται ώστε να ταιριάζουν με το συγκεκριμένο αριθμό των τετραγώνων των πλοίων σε κάθε γραμμή και στήλη.Αρκετά άλλα παζλ για μολύβι και χαρτί παραμένουν χωρίς να έχουν μελετηθεί από την άποψη της πολυπλοκότητας.

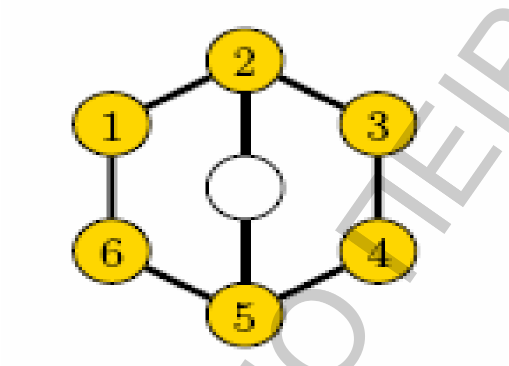
4.5.5 Μετακινόντας Πούλια: Το παζλ Δεκαπέντε και Γενικεύσεις

Το παζλ Δεκαπέντε είναι ένα κλασικό παζλ που αποτελείται από δεκαπέντε τετράγωνα αριθμημένα από το 1 έως το 15 σε ένα πλέγμα 4 × 4,το δέκατο έκτο τετράγωνο του πλέγματος είναι ένα κενό που επιτρέπει στα αριθμιμένα τετράγωνα να κινούνται.Ο στόχος είναι να μπουν τα αρ. τετράγωνα σε αυξουσα σειρά.Οι (έξι) δυσκολότερες επιλύσιμες διαμορφώσεις απαιτούν ακριβώς 80 κινήσεις.Οι Slocum και Sonneveld[πρόσφατα αποκάλυψαν την ιστορία αυτού του παζλ του τέλους του 19ου αιώνα,η οποία ήταν καλά κρυμμένη από τον Σαμ Λόιντ που ισχυριζόταν ότι το είχε επινοήσει αυτός.Μια φυσική γενίκευση του παζλ Δεκαπέντε είναι το παζλn^2 – 1 σε ένα n × n πλέγμα.Είναι εύκολο να καθοριστεί αν μια διάταξη του παζλn^2 – 1 μπορεί να φτάσει μια άλλη:οι δύο παραλλαγές των αριθμών απλά πρέπει να ταιριάζει στην ισοτιμία,δηλαδή, αν ο αριθμός των αντιστροφών-μετακινήσεων (ζεύγη έξω απο τη θέση τους) είναι άρτιος ή περιττός.Οταν το παζλ είναι επιλύσιμο,οι απαιτούμενες κινήσεις των αριθμών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

είναι Θ(n^3) στη χειρότερη περίπτωση.Από την άλλη,είναι NP-complete η εύρεση μιας λύσης με τις λιγότερες δυνατές ολισθήσεις από μια συγκεκριμένη αρχική διάταξη είναι, επίσης, NP-δυσκολίας η προσέγγιση των λιγότερων ολισθήσεων εντός μιας πρόσθετης σταθεράς,αλλά υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου σταθερός παράγοντας της προσέγγισης .

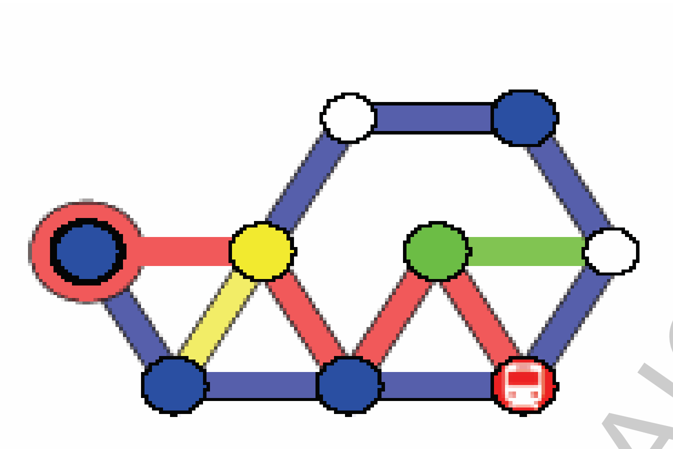
Η τεχνική της ισοτιμίας για τον προσδιορισμό τουπαζλ n^2 – 1έχει γενικευτεί για μια κατηγορία παρόμοιων παζλ σε γραφήματα.Σκεφτείτε ένα γράφημα N κορυφών στο οποίο N - 1 κορυφές έχουν επισημανθεί με μάρκες αριθμημένες απο 1 έως N-1, η μία κορυφή είναι άδεια(δεν έχει πιόνι) και κάθε κίνηση στο παζλ είναι η μετακίνηση ενός πιονιού σε μια παρακείμενη άδεια κορυφή.Ο στόχος είναι να φτάσει στη μια διαμόρφωση από την άλλη.Αυτή η γενίκευση περιλαμβάνει τα παζλn^2 – 1και πολλά άλλα παζλ που αφορούν κυλιόμενες μπίλιες σε κυκλικές διαδρομές,π.χ., το παζλ LuckySeven ή ο γρίφος που φαίνεται στο σχήμα.



Ο Wilson χαρακτήρισε το πότε αυτά τα παζλ είναι επιλύσιμα και επιπλέον,χαρακτήρισε τη δομή της ομάδας τους.Στις περισσότερες περιπτώσεις,όλα τα παζλ(γρίφοι) είναι επιλύσιμα(αποτελόντας τη συμμετρική ομάδα),εκτός εάν το γράφημα είναι διμερές,τότε στις μισές περιπτώσεις τα παζλ είναι επιλύσιμα(σχηματίζοντας την εναλλασσόμενη ομάδα).Επιπλέον,υπάρχουν τρεις ειδικές καταστάσεις: τα κυκλικά γραφήματα,τα γραφήματα που έχουν μια κομμένη κορυφή

Γενικότερα,οι Kornhauser,Miller και Σπυράκης έδειξαν πώς αποφασίζεται η επιλυσιμότητα του παζλ για οποιονδήποτε αριθμό k επισημασμένων (αριθμημένων) πιονιών για N κορυφές.Αποδεικνύουν επίσης ότι O(N^3)κινήσεις πάντα αρκούν και Ω(N^3) κινήσεις είναι μερικές φορές απαραίτητες,σε τέτοια παζλ.Οι Calinescu, Dumitrescu αποδεικνύουν ότι η εξεύρεση της λύσης με τις λιγότερες μετακινήσεις είναι NP-hard στο τετράγωνο ταμπλώ με άπειρες διαστάσεις και APX-hard σε γενικά γραφήματα,ακόμη και αν τα πιόνια είναι χωρίς σήμανση (όμοια).Από τη θετική πλευρά,παρουσιάζουνμια προσέγγιση στο 3 για όμοια (unlabeled) πιόνια σε γενικά γραφήματα,μια βέλτιστη λύση για όμοια πιόνια σε διαγράμματα δέντρα (trees),ένα άνω όριο των N ολισθήσεων για όμοια πιόνια σε γενικά γραφήματα και ένα άνω φράγμα των ολισθήσεων O(N) για αριθμημένα πιόνια στο άπειρο τετραγωνικό ταμπλώ.Ο περιορισμός του συνόλου των επιτρεπόμενων κινήσεων μπορεί να κάνει αυτά τα παζλ πιο δύσκολα.Σκεφτείτε ένα γράφημα με μη αριθμημένα πιόνια σε κάποιες κορυφές, και τον περιορισμό ότι τα σύμβολα πρέπει να αποτελούν μια ανεξάρτητη ομάδα στο γράφημα (δηλαδή, να μην υπάρχουν δύο πιόνια δίπλα δίπλα κατά μήκος μιας ακμής).Η κίνηση γίνεται με την ολίσθηση ενός πιονιού απο μια άκρη σε μια παρακείμενη κορυφή,με την επιφύλαξη να διατηρηθεί ο περιορισμός της μη γειτονικότητας.Τότε το πρόβλημα του καθορισμού αν με μια σειρά από κινήσεις θα μπορέσουμε νακουνήσουμε ένα συγκεκριμένο πιόνι, που ονομάζεται Συρόμενα Πιόνια είναι PSPACE-complete.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Το *Subway Shuffle* είναι άλλο ένα περιορισμένο παζλ με συρόμενα πιόνια σε ένα ταμπλώ.Σε αυτό το παζλ και τα πιόνια και οι ακμές του ταμπλώ είναι χρωματισμένες,η κίνηση είναι να σύρετε ένα πιόνι κατά μήκος μιας ακμής του χρώματος του σε μια κενή διπλανή κορυφή. Ο στόχος είναι να μετακινήσετε ένα συγκεκριμένο πιόνι (το "βαγόνι του μετρό που έχετε επιβιβαστεί") μέχρι μια συγκεκριμένηκορυφή («την έξόδο τουσταθμού σας»).Ένα δείγμα αυτού του παζλ παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.Η πολυπλοκότητα του προσδιορισμού κατά πόσον υπάρχει λύση σε ένα δεδομένο παζλ είναι ανοιχτή.Αυτό το ανοικτό πρόβλημα είναι αρκετά συναρπαστικό:η επίλυση του παζλ εμπειρικά φαίνεται δύσκολη,με βάση τη γρήγορη αύξηση των ελάχιστου μήκους λύσεωνοσο αυξάνεται το μέγεθος του γραφήματος.Ωστόσο,είναι εύκολο να προσδιοριστεί αν ένα πιόνι μπορεί να κινηθεί σε μία ακολουθία κινήσεων,καθιστώντας την απόδειξη που χρησιμοποιείται για τα Συρόμενα Πιόνια και προβλήματα που σχετίζονται με την σκληρότητα άχρηστα.Το *Subway Shuffle*μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια γενικευμένη εκδοχή RushHourse1 × 1.

Ένα άλλο είδος παζλ συρόμενων πιονιών είναι το *Atomix*,ένα παίγνιο στον υπολογιστή που δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1990.Το παίγνιο διαδραματίζεται σε ένα ορθογώνιο ταμπλώ,τα κομμάτια είναι είτε τοίχοι (ακίνητα μπλοκ) ή άτομα διαφορετικών τύπων.Μια κίνηση είναι να σύρετε ένα άτομο,σε αυτή την περίπτωση το άτομο πρέπει να συρθεί προς την κατεύθυνση της κίνησης μέχρι να χτυπήσει ένα τοίχο.Ο στόχος είναι να συγκεντρώσετε μια συγκεκριμένη ομάδα ατόμων (ένα μόριο).Οι Huffner,Edelkamp, Fernau, και Niedermeier παρατήρησαν οτι το Atomix ότι είναι τόσο δύσκολο όσο τα παζλ (n^2 – 1), γι 'αυτό είναι NP-δυσκολίας να βρεθεί μια λύση ελάχιστων-κινήσεων.Οι Holzer και Schwoon αργότερα απέδηξαν το ισχυρότερο αποτέλεσμα οτι είναι PSPACE-complete ο προσδιορισμός του αν υπάρχει μια λύση.

Το *Lunar Lockout* είναι ένα άλλο παράδειγμα παζλ συρόμενων πιονιών, παρόμοιο με το Atomix στο ότι τα πιόνια κυλάνε μέχρι να σταματηθούν.Το *Lunar Lockout* παρήχθη από την Think Fun με τη μια,ουσιαστικά το ίδιο παίγνιο πωλείται τώρα ως “PikePete”.(Ακόμη νωρίτερα, το παίγνιο ονομαζόταν "UFO".) Στο *Lunar Lockout* δεν υπάρχουν τοίχοι ή τα εμπόδια το πιόνι μπορεί να γλιστρήσει μόνο αν υπάρχει άλλο πιόνι σε κάποια θέση που να το σταματήσει.Ο στόχος είναι να φτάσει ένα συγκεκριμένο πιόνι σε μια συγκεκριμένη θέση.Έτσι, οι κανόνες είναι αρκετά απλοί και φυσικοί ωστόσο,η πολυπλοκότητα είναι ανοικτή,αν και υπάρχουν μερικά αποτελέσματα.Ο Hock έδειξε ότι *Lunar Lockout* είναι NP-δυσκολίας και ότι όταν το πιόνιπου πρέπει να φτάσει στη συγκεκριμένη θέση δεν μπορεί να ξαναπεράσει απο την ίδια θέση στο ταμπλώ,το πρόβλημα γίνεται NP-complete.Οι Hartline και Libeskind-Hadas δείχνουν ότι η γενίκευση του *Lunar Lockout* που επιτρέπει την ύπαρξη σταθερών μπλοκ είναι PSPACE-complete.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

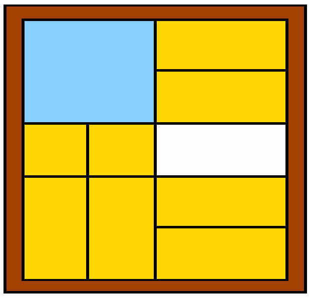
4.5.6 Ο Κύβος του Ρούμπικ και γενικεύσεις

Διαφορετικά,το n^2 – 1 παζλ μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση καθορισμού για το αν μια μετάθεση N αντικειμένων μπορεί να γραφτεί ως ένα προϊόν (σύνθεση) των δεδομένων παραγόμενων μεταθέσεων και αν ναι, η εύρεση ενός τέτοιου προϊόντος.Αυτή η οικογένεια των παζλ περιλαμβάνει επίσης τον *Κύβο του Rubik*(πρόσφατα φαίνεται να έχει επιλυθεί σε 26 κινήσεις και πολλές παραλλαγές του.Σε γενικές γραμμές,ο αριθμός των κινήσεων (όροι) απαιτούνται για την επίλυση ενός τέτοιου παζλ μπορεί να είναι εκθετικός(σε αντίθεση με το PuzzleFifteen).Παρ 'όλα αυτά, ένας O(N^5) χρόνου αλγόριθμος μπορεί να αποφασίσει εάν ένα δεδομένο παζλ αυτού του τύπου είναι επιλύσιμο και αν ναι,βρίσκει μια έμμεση αναπαράσταση της λύσης.Από την άλλη,η εύρεση μιας λύσης με τις λιγότερες κινήσεις (όρους) είναι PSPACE-complete.Όταν σε κάθε δεδομένη γεννήτρια μετατοπίζονται κυκλικά μόλις ένας συγκεκριμένος αριθμό των αντικειμένων,όπως στο PuzzleFifteen και όχι σε k × k × k όπως στον Κύβο του Ρούμπικ,οι Driscoll και Furst έδειξαν ότι τέτοια παζλ μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας μόνο O(N^2) κινήσεις. Επιπλέον Θ(N^2) είναι το καλύτερο δυνατό όριο για την χειρότερη περίπτωση,π.χ., όταν επιτρέπονται μόνο οι κινήσεις που αλλάζουν γειτονικά στοιχεία σε μια γραμμή.

4.5.7 Συρόμενα μπλοκ και RushHour

Μια κλασική αναφορά σε μια ευρεία κατηγορία των παζλ συρόμενων μπλοκ είναι από τον Hordern.Μία γενική μορφή αυτών των παζλ είναι ότι ορθογώνια κομμάτια τοποθετούνται σε ένα ορθογώνιο κουτί και κάθε κομμάτι μπορεί να κινείται οριζόντια και κάθετα,υπό την προϋπόθεση ότι τα κομμάτια παραμένουν χωρισμένα. Ο στόχος είναι συνήθως είτε να μετακινήσετε ένα συγκεκριμένο κομμάτι σε έναν συγκεκριμένο τόπο,ή να ρυθμίσετε εκ νέου μια διαμόρφωση σε μία άλλη.Ο Gardner πρώτος έθεσε το ζήτημα του εάν υπάρχει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για την επίλυση αυτών παζλ.Οι Σπυράκης και Yap έδειξαν ότι η επίτευξη ενός συγκεκριμένης διαμόρφωσης σαν στόχος είναι NP-hard και υπέθεσαν PSPACE-πληρότητα.Οι Hopcroft, Schwartz και Sharir απέδηξαν την PSPACE-πληρότητα λίγο αργότερα,μετονομάζοντας το πρόβλημα σε «Πρόβλημα του Αποθηκάριου".Στο Πρόβλημα του Αποθηκάριου,δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σχετικά με τα μεγέθη των μπλοκ(κομματιών),τα μπλοκ στην απλοποίηση αυξάνονται με το μέγεθος του περιέχοντος κουτιού.Αντιθέτως, στα περισσότερα παζλ συρόμενων-μπλοκ, το μπλοκ έχουν μικρά σταθερά μεγέθη.Τέλος, οι Χερν και Demaine έδειξαν ότι είναι PSPACE-δύσκολιας να αποφασιστεί εάν ένα δεδομένο μπλοκ μπορεί να κινηθεί καθόλου σε μια ακολουθία κινήσεων,ακόμη και όταν όλα τα μπλοκ είναι 1 × 2 ή 2 × 1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Αυτό το αποτέλεσμα είναι το καλύτερο δυνατο: τα παραπάνω αποτελέσματα για μη σημασμένα πιόνια σε γραφήματα δείχνουν ότι τα μπλοκ με διαστάσεις 1 × 1 είναι εύκολο να ρυθμιστούν εκ νέου.Ένα δημοφιλές παζλ συρόμενων μπλοκ είναι το*RushHour*,που διανέμεται από την ThinkFunInc.(πρώην BinaryArtsInc).Μας δίνεται μια διαμόρφωση διαφόρων 1 × 2,3 × 1, 2 × 1, και 3 × 1 ορθογώνιων μπλοκ διαττεταγμένα σε ένα πλέγμα m × n.(Στην εμπορική έκδοση, το ταμπλώ είναι 6 × 6, τα μήκους 2 ορθογώνια είναι τα αυτοκίνητα και τα μήκους 3 ορθογώνια είναι τα φορτηγά.)Τα οριζόντια προσανατολισμένο μπλοκ μπορούν να γλιστρούν αριστερά και δεξιά και τακάθετα προσανατολισμένα μπλοκ μπορούν να γλιστρούν πάνω και κάτω,με την προϋπόθεση τα μπλοκ παραμένουν χωρισμένα.(Αυτοκίνητα και φορτηγά μπορούν να οδηγήσουν μόνο προς τα εμπρός ή προς τα πίσω.)Ο στόχος είναι να αφαιρέσετε ένα συγκεκριμένο μπλοκ από το παζλ μέσα απο το άνοιγμα σε ένα σημείο του οριοθετημένου ορθογώνιου.Οι Flake και Baum απέδειξαν ότι η διατύπωση αυτή του *RushHour* είναι PSPACE-complete.Η προσέγγισή τους είναι επίσης η βάση για την μη-καθοριστική περιορισμένη λογική που περιγράφεται στο τμήμα 3.Μια εκδοχή του RushHour που παίζεται σε ένα τριγωνικό πλέγμα,Triagonal Slide-Out,είναι επίσης PSPACE-complete.Οι Tromp και Cilibrasi ενίσχυσαντα αποτελέσματα των Flake και Baum αποδεικνύοντας ότι το RushHour παραμένει PSPACE-complete ακόμα και όταν όλα τα τμήματα έχουν μήκος 2 (αυτοκίνητα).Η πολυπλοκότητα του προβλήματος παραμένει ανοιχτή όταν όλα τα μπλοκ είναι 1 × 1, αλλά ετικεταρισμενα αν θα κινούνται μόνο οριζοντίως ή μόνο κάθετα,οπως και με SubwayShuffle,την επίλυση του παζλ (να αφαιρέσεται το μπλοκ-στόχο από το κουτί) εμπειρικά φαίνεται δύσκολο ενώ είναι εύκολο να προσδιοριστεί εάν ένα μπλοκ μπορεί να κινηθεί καθόλου με μια ακολουθία κινήσεων.Πράγματι,το 1 × 1 *RushHour* είναι μια περιορισμένη μορφή του SubwayShuffle,όπου υπάρχουν μόνο δύο χρώματα,το γράφημα είναι ένα πλέγμα και οι οριζόντιες και κάθετες ακμές χρησιμοποιούν διαφορετικά χρώματα.Ετσι, θα είναι ευκολότερο να βρεθούν θετικά αποτελέσματα για 1 × 1 RushHour και πιο εύκολο να βρεθούν αποτελέσματα για τη σκληρότητα του SubwayShuffle.Εμείς εικάζουμε ότι και τα δύο είναι PSPACE-complete, αλλά οι υπάρχουσες τεχνικές απόδειξης φαίνεται να είναι ανεφάρμοστες.

4.5.8 Σπρώχνοντας μπλοκ

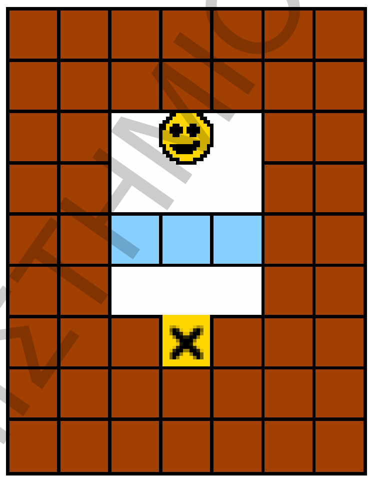
Παρόμοια στο πνεύμα με τα παζλ συρόμενων μπλοκ ειναι τα παζλ όπου τα κομμάτια(μπλοκ) σπρώχνονται.Στα παζλ με συρόμενα μπλοκ,ένας εξωτερικός παράγωντας μπορεί να κουνίσει αυθαίρετα όποιο μπλοκ θέλει,ενώ στα παζλ όπου σπρώχνονται τα μπλοκ το αναθέτουμε σε ένα ρομπότ που μπορεί να μετακινήσει μόνο γειτονικά μπλοκ, αλλά μπορεί επίσης να κινηθεί μόνοτου μέσα στο κενό χώρο. Η μελέτη αυτού του τύπου παζλ ξεκίνησε από Wilfong ο οποίος απέδειξε ότι η απόφαση εαν το ρομπότ μπορεί να φτάσει σε ένα επιθυμητό στόχο είναι NP-δύσκολιας,όταν το ρομπότ μπορεί να ωθήσει και να τραβήξει μπλοκ σχηματος L.

Μετά απο την δουλειά του Wilfong,η έρευνα έχει επικεντρωθεί στο απλούστερο μοντέλο στο οποίο το ρομπότ μπορεί να ωθήσει μόνο και τα μπλοκ είναι τετράγωνα1 x 1.Οι τύποι των παζλ διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με το πόσα πολλά μπλοκ μπορούν να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σπρωχτούν ταυτόχρονα,είτε αν μπορούν να ορίζονται κάποια μπλοκ σανακίνητα ή σταθερά (συνδεδεμένα με τοταμπλώ),το πόσο μακριά κινούνται τα μπλοκ όταν τα ωθείσουμε, και το στόχο (συνήθως για το ρομπότ να φτάσει σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία).Οι Dhagat και O'Rourke ξεκίνησαν την εξερεύνηση των παζλ με τετράγωνα μπλοκ αποδεικνύοντας ότι το Push-*,στο οποίο αυθαιρέτως πολλά μπλοκ μπορεί να σπρωχτούν ταυτόχρονα,είναι NP-δυσκολίας αν υπάρχουν σταθερά μπλοκ.Οι Bremner,O'Rourke και Shermer[ενίσχυσαν αυτό το αποτέλεσμα σε PSPACE-πληρότητα.Πρόσφατα, ο Hoffmann απέδειξε ότι το Push-* είναι NP-δύσκολο ακόμη και χωρίς σταθερά μπλοκ, αλλά παραμένει ανοιχτό το αν είναι σε NP ή PSPACE complete.

Αρκετά άλλα αποτελέσματα επιτρέπουν να ωθείται μόνο ένα μπλοκ την φορά. Σε αυτό το πλαίσιο,τα σταθερά μπλοκ είναι λιγότερο σημαντικά,γιατί ένα σύμπλεγμα μπλοκ 2 × 2 δεν μπορεί να διαταραχθεί.Ενα γνωστό παζλ στον υπολογιστή σε αυτό το πλαίσιο είναι το Sokoban,όπου ο στόχος είναι να τοποθετηθεί το κάθε μπλοκ επάνω στα στοχευμένα τετράγωνα.Αυτό το παζλ αποδείχθηκε NP-δύσκολίας από τους Dor και Zwick και αργότερα PSPACE-complete από τον Culberson.Υστερα αυτό το αποτέλεσμα ενισχύθηκε σε διαμορφώσεις με μη σταθερά μπλοκ.Ενα απλό παζλ, που ονομάζεται Push-1, προκύπτει όταν ο στόχος είναι απλά για το ρομπότ να φτάσει σε μια συγκεκριμένη θέση, χωρίς να υπάρχει κανένα σταθερό μπλοκ.Οι Demaine και O'Rourke αποδεικνύουν ότι αυτό το παζλ είναι NP-δύσκολο,αλλά παραμένει ανοιχτό το αν είναι NPήPSPACE-complete.Από την άλλη πλευρά,η PSPACE-πληρότητα έχει αποδειχθεί για το Push-2-F,στο οποίο υπάρχουν σταθερα μπλοκ και το ρομπότ μπορεί να ωθήσει δύο μπλοκ σε συγχρόνως .



Μια παραλλαγή στη σειρά των Pushπαζλ,που ονομάζεται PushPushείναι όταν ένα μπλοκ ολισθαίνει οσο το δυνατόν πιο μακριά όταν ωθηθεί.Τέτοια παζλ προκύπτουν σε ένα παίγνιο του υπολογιστή με το ίδιο όνομα Το PushPush-1 αποδείχτηκε οτι είναι NP-hard λίγο νωρίτερα από ό, τι το Push-1 η απλοποίηση Push-1 ισχύει και για το Push- Push-1.Το PushPush-k αργότερα εμφανίζεται σαν PSPACE-complete για κάθε σταθερόk≥1.Η απλοποίηση του Hoffmann για το Push-* αποδεικνύει επίσης ότι Push- Push-* είναι NP-hard όταν δεν υπάρχουν σταθερά κομμάτια.

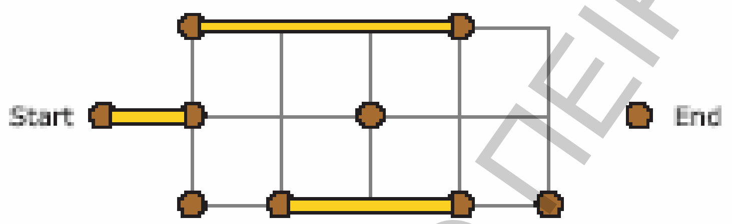
Μια άλλη παραλλαγή, που ονομάζεται Push-X,δεν επιτρέπει στο ρομπότ να ξαναπεράσει απο το ίδιο τετράγωνο.Αυτή η κατεύθυνση προτάθηκε σε,διότι τοποθετεί αμέσως το παζλ στο NP.Οι Demaine και Hoffmann απέδειξαν ότι το Push-1X και το PushPush-1X είναι NP-complete.Η απλοποίηση του Hoffmann για το Push-* καθορίζει επίσης την NP-πληρότητα του Push-*X χωρίς σταθερά μπλοκ.Ο Friedman θεωρεί ότι μια άλλη παραλλαγή,όπου ενεργεί η βαρύτητα στα μπλοκ (αλλά όχι στο ρομπότ):όταν ένα μπλοκ ωθείται πέφτει αν δεν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

υποστηρίζεται.Δείχνει ότι το Push-1-G,όπου το ρομπότ μπορεί να ωθήσει μόνο ένα τετράγωνο, είναι NP-hard.

Το RiverCrossing,ένα άλλο παζλ της ThinkFun,είναι παρόμοιο με τα παζλ όπου τα μπλοκ ωθούνται στο ότι υπάρχει ένα μοναδικό κομμάτι που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να κουνίσουμε τα υπόλοιπα κομμάτια του παζλ.Το ταμπλώ του παίγνιου είναι ένα πλέγμα,με κενές ορισμένες διασταυρώσεις και σανίδες τοποθετημένες μεταξύ των κενών, κατά μήκος των γραμμών του πλέγματος. Ενα ειδικό κομμάτι,ο πεζοπόρος, βρίσκεται πάντα σε κάποια σανίδα και μπορούν να περπατήσει κατά μήκος ενομένων σανίδων.Μπορεί επίσης να πάρει και να κουβαλήσει μια μόνο σανίδα τη φορά και να βάλει τη σανίδα μεταξύ των κατάλληλα κατανεμημένων κενών.Ο στόχος είναι για τον πεζοπόρο να φτάσει σε ένα συγκεκριμένο κούτσουρο.

Το Σχήμα παρακάτω δείχνει ένα παράδειγμα.Ο Χερν αποδεικνύει ότι το RiverCrossing είναι PSPACE-complete,με μια απλοποίηση Περιορισμένης Λογικής.



4.5.9 ΚυλιόμεναBlocks

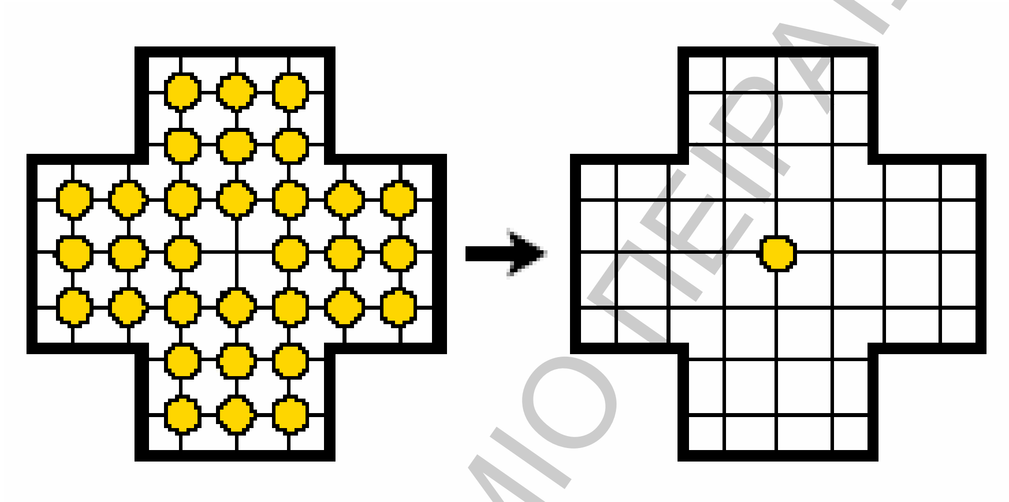
Σε ορισμένες παζλ τα μπλοκ μπορούν να αλλάζουν τον προσανατολισμό τους, καθώς και τη θέση τους.Τα παζλ κυλιόμενων-κύβων διαδόθηκαν από τον MartinGardner στη στήλη του *Μαθηματικοί Αγώνες* στο περιοδικό Scientific American.Σε αυτά τα παζλ, ένας ή περισσότεροι κύβοι με ορισμένες επισημασμένες πλευρές (συχνά ζάρια) τοποθετούνται σε ένα πλέγμα και μπορούν να κυλήσουν από θέση σε θέση,περιστρέφοντας τις πλευρές τους.Ορισμένες θέσεις μπορεί να έχουν ετικέτες που πρέπει να ταιριάζουν με την ετικέτα του πάνω πρόσωπου του κύβου που επισκέπτεται τη κενή θέση.Οι στόχοι του παζλ περιλαμβάνουν την ολοκλήρωση γενικά κάποιου είδους γύρου,ικανοποιόντας κάποιους περιορισμούς ετικέτας (π.χ., εξασφαλίζοντας ότι ποτέ ένα συγκεκριμένο ετικεταρισμένο πρόσωπο δεν θα δείχνει προς τα πάνω).Πρόσφατα ο Buchin επισημοποιησε αυτό το είδος προβλήματος και έδωσε αρκετά αποτελέσματα.Στην εκδοχή του, κάθε ετικεταρισμένη κενή θέση πρέπει να επισκεφθεί,με την ετικέτα στην επάνω επιφάνεια του κύβου να ταιριάζει με την ετικέτα της κενής θέσης.Οι κενές θέσεις μπορούν να σημανθούν σαν μπλοκαρισμένες,ή ελεύθερες.Οι μπλοκαρισμένες κενές θέσεις δεν μπορούν να επισκεφθουν,ενώ οι ελεύθερες κενές θέσεις μπορουν να επισκεφθουν,ανεξάρτητα απο τον προσανατολισμό του κύβου.Τέτοια παζλ έχουν αποδειχθεί να είναι εύκολα αν οι ετικεταρισμένες κενες θέσεις μπορούν να επισκεφθουν πολλές φορές.Εάν κάθε ετικεταρισμένη κενή θέση πρέπει να επισκεφθεί ακριβώς μια φορα, το πρόβλημα γίνεται NP-complete.

Τα παζλ των κυλιόμενων-μπλοκ γενικοποιήθηκαν αργότερα από τον Richard Tucker για τα παζλ, όπου τα μπλοκ δεν χρειάζεται να είναι πλέον κύβοι.Σε αυτά τα παζλ τα κομμάτια είναι κουτιά k × m × n.Συνήθως,μερικά κελιά (κενές θέσεις)του πλέγματος έχουν αποκλειστεί και ο στόχος είναι να μετακινήσετε ένα μπλοκ από μια αρχική θέση σε μια τελική θέση με διαδοχικές περιστροφές σε αμπλοκάριστα κελιά. Ο Buchin πρόσφατα έδειξε ότι αυτά τα παζλ είναι PSPACE-complete όταν χρησιμοποιούνται πολλαπλά κυλιόμενα μπλοκ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.5.10 Peg Solitaire (Hi-Q)

Το κλασικό παζλ PegSolitaire φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.Πείροι είναι διατεταγμένοι σε ένα ελληνικό σταυρό,με το κεντρικό πείρο να λείπει.Σε κάθε κίνηση ένας πείρος πηδά πάνω από έναν άλλο πείρο (δίπλα οριζόντια ή κάθετα) προς την κενή θέση στο σταυρό και αφαιρεί τον πείρο που πήδηξε.Ο στόχος είναι να μείνει ένας μόνο πείρος,σε ιδανική τοποθεσία στο το κέντρο.Μια φυσική γενίκευση του PegSolitaire είναι να χρησιμοποιήσουμε πείρους διατεταγμένους σε ένα n × n ταμπλώ και ο στόχος είναι να μείνει ένας μόνο πείρος.Οι Uehara και Iwata απέδειξαν ότι είναι NP-complete η απόφαση εάν ένα τέτοιο παζλ είναι επιλύσιμο.



Από την άλλη πλευρά,οι Moore και Eppstein απέδειξαν ότι η μονοδιάστατη ειδική περίπτωση(πείροι κατά μήκος μιας γραμμής) μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα,οι Moore και Eppstein οικοδόμησαν έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για να μεγιστοποιήσουν τον αριθμό των πείρων που αφαιρούνται από οποιαδήποτε δεδομένο παζλ.

Οι Moore και Eppstein επίσης μελέτησαν το φυσικό αμερόληπτο παίγνιο δύο παικτών,που προκύπτει από το *PegSolitaire* ,το *duotaire*:οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής το άλμα με τον πείρο και ο νικητής καθορίζεται από το κανονικό παίγνιο.

4.5.11 Πασιέντζα με Χαρτιά (τράπουλα)

Δύο παίγνια πασιέντζας με τραπουλόχαρτα έχουν αναλυθεί από την άποψη της πολυπλοκότητας.Με όλα αυτά τα παίγνια,πρέπει να γενικεύσουμε τη τράπουλα πέραν των 52 καρτών.Η τυπική προσέγγιση είναι να κρατηθεί ο αριθμός των χρωμάτων σταθερά σε τέσσερα, αλλά να αυξηθείο αριθμός των βαθμών σε κάθε χρώμα σε n.

Το *Klondike* ή *Solitaire* είναι το κλασικό παίγνιο,που ήταν πακέτο με τα MicrosoftWindows από τις πρώτες ημέρες τους.Στην τέλεια πληροφόρηση αυτού του παίγνιου,εμείς υποθέτουμε ότι ο παίκτης γνωρίζει όλα τα χαρτιά που κανονικά είναι κρυμμένα.Οι Longpre και McKenzie απέδειξαν ότι η εκδοχή τέλειας-πληροφορίας είναι NP-complete,ακόμα και με μόλις τρία χρώματα.Αποδεικνύουν επίσης ότι το *Klondike* με ένα μαύρο χρώμα και ένα κόκκινο είναι NL-δυσκολίας,το Klondike με οποιοδήποτε σταθερό αριθμό μαύρου χρώματος και χωρίς καθόλου κόκκινα κοστούμια είναι σε NL και τέλος το Klondike με ένα μόνο χρώμα είναι σε AC^0 [3] μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Οι Κυψέλες είναι ένα άλλο κοινό παίγνιο που διανέμεται απότα Microsoft WindowsXP.Εμείς δεν θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τους κανόνες εδώ.Ο Helmert απέδειξε ότι Κυψέλες είναι NP-complete,για κάθε σταθερό θετικό αριθμότων ελευθέρων κελιών.

4.5.12 Jigsaw, Edge-Matching, Πλακάκια, και Παζλ συσκευασίας

Το jigsaw παζλ είναι άλλο ένα από τα δημοφιλή είδη των παζλ,που χρονολογείται από το 1760s.Ένας τρόπος για να συγκεκριμενοποιήσουμε το παζλ είναι ως μια συλλογή από τετράγωνα κομμάτια,όπου κάθε πλευρά είναι είτε ευθεία ή χαρακτιρίζεται απο μια εξοχή ή μια εσοχή ενός συγκεκριμένου σχήματος.Ο στόχος είναι να οργανωθούν τα δεδομένα κομμάτια,έτσι ώστε να σχηματίζουν ακριβώς ένα δεδομένο ορθογώνιο σχήμα.Αν και αυτή η τυποποίηση δεν επιτρέπει στα σχηματα που βρίσκονται στα κομμάτια(σχέδιο του παζλ) να δώσουν στοιχεία σχετικά με το αν τα κομμάτια ταιριάζουν,αυτές οι πληροφορίες μπορούν απλά να κωδικοποιηθούν στα σχήματα των εξοχών και των εσοχών, που τα καθιστά συμβατά μόνο όταν τα σχήματα επίσης ταιριάζουν.Η απόφαση για το αν ένα τέτοιο παζλ έχει λύση αποδείχτηκε πρόσφατα NP-complete .

Ενας στενά συνδεδεμένο είδος παζλ είναι τα παζλ με αντιστοιχεία των πλευρών(*edge matching puzzles*, που χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1890.Στην απλούστερη μορφή,τα κομμάτια είναι τετράγωνα και αντί των εξοχών ή εσοχών,κάθε άκρη είναι χρωματισμένη για να δείξει τη συμβατότητα.Τα τετράγωνα μπορούν να τοποθετηθούν πλάι-πλάι όταν τα χρώματα των ακμών ταιριάζουν,είτε είναι ακριβώς ίδια ή είναι αντίθετα.Πάλι ο στόχος είναι να τακτοποιηθούν τα κομμάτια σε ένα δεδομένο ορθογώνιο.Τα παζλ αντιστοίχισης των άκρων είναι κοινά στην πραγματικότητα,όπου τα χρώματα είναι στην πραγματικότητα εικόνες απο σαύρες, έντομα, κλπ.και μία πλευρά δείχνει το κεφάλι ενώ η άλλη την ουρά.Τέτοια παζλ είναι σχεδόν ταυτόσημα με το *Jigsaw* παζλ,με τις εσοχές και εξοχές στη θέση των σημαδιών,τα jigsaw παζλ είναι ουσιαστικά η ειδική περίπτωση κατά την οποία το όριο πρέπει να έχει ομοιόμορφο χρώμα.Έτσι, τα παζλ αντιστοίχησης των άκρων είναι NP-complete και στην πραγματικότητα,το ίδιο είναι και τα παζλ αντιστοίχησης αχαρακτήριστων άκρων .

Ενα παλαιότερο αποτέλεσμα του Berger αποδεικνύει ότι η άπειρη γενίκευση των παζλ αντιστοίχισης-ακμών,όπου ο στόχος είναι να πλακοστρώσουμε ολόκληρο το επίπεδο με δεδομένα απείρως πολλά αντίγραφα του κάθε τύπου πλακιδίων,δεν μπορεί να αποφασιστεί (undecidable).Το αποτέλεσμα αυτό είναι για τα παζλα αχαρακτήριστων άκρων,αλλά με μια απλή μείωση σε ισχύει και για τα παζλ χαρακτηρισμένων άκρων.Προς την ίδια κατεύθυνση,οιGarey,Johnson και Παπαδημητρίου παρατήρησαν ότι το πεπερασμένη έκδοση με έναν συγκεκριμένο ορθογώνιο στόχο είναι NP-complete,όταν δίνονται αυθαίρετα μεγάλος αριθμός αντίτυπων για κάθε τύπο πλακιδίων.Αντίθετα, το παραπάνω πεπερασμένο αποτέλεσμα απαιτεί το κάθε δεδομένο πλακίδιο να χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά, το οποίο αντιστοιχεί περισσότερο στα πραγματικά παζλ.Μια οικογένεια σχετική με παζλ με πλακάκια ή συσκευασίας περιλαμβάνει πολυμορφές (*polyforms*?) όπως polyominoes,ενώσεις άκρη με άκρη τετραγώνων μονάδων.Σε γενικές γραμμές, μας δίνεται μια συλλογή από τέτοια σχήματα και μιαδιαμόρφωση στόχο είτε να την πλακοστρώσουμε(να καλύψουμε ακριβώς την επιφάνεια) ή την πακετάρουμε (να τη σχηματίσουμε έστω με τα κενά).Σε αμφότερες τις περιπτώσεις,τα κομμάτια δεν μπορούν να επικαλύπτονται,έτσι ώστε το πρόβλημα της πλακόστρωσης είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση κατά την οποία οι επιφάνεις των κομματιών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

αθροίζονται στο σύνολο της ζητούμενης επιφανειας στόχου.Ένα από τα λίγα θετικά αποτελέσματα είναι το (μαθηματικό) ντόμινο,polyominoes(ορθογώνια) που αποτελούνται απο δύο τετράγωνα το καθένα:τα προβλήματα πλακόστρωσης (*tiling*) και πακεταρίσματος (*packing*) ευθυγραμμισμένα με το πλέγμα μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο για αυθαίρετα σχήματα με στόχο το τέλειο και μέγιστο ταίριασμα των polyomino.Αντίστοιχα, δείτε επίσης, το *κομψό κριτήριο πλακόστρωσης* του Thurston.Σε αντίθεση, με το "πραγματικό" ντόμινο, όπου κάθε τετράγωνο έχει ένα χρώμα και τα δίπλα ντόμινο πρέπει να ταιριάζουν με το χρώμα,η πλακόστρωση (και ως εκ τούτου το πακετάρισμα) γίνεται NP-complete.Το πρόβλημα της πλακόστρωση είναι επίσης NP-complete,όταν το σχήμα στόχος είναι ένα polyomino με κενά (τρύπες) και τα κομμάτια είναι όλα ίδιατετράγωνα 2 × 2, ή ορθογώνια 1 × 3, ή σχήματα L2 × 2 .Το πρόβλημα του πακεταρίσματος και της πλακόστρωσης είναι NP-complete όταν τα δεδομένα κομμάτια είναι διαφορετικού μεγέθους τετράγωνα και το σχήμα στόχος είναι ένα τετράγωνο.Τέλος, το πρόβλημα της πλακόστρωσης είναι NP-complete,όταν τα δεδομένα κομμάτια είναι πολυαλγορυθμικής-περιοχής polyominoes και το σχήμα στόχος είναι ένα τετράγωνο ,αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από την προσομοίωση των παζλ jigsaw.

4.5.13 Ναρκαλιευτής (Minesweeper)

Ο Ναρκαλιευτής είναι ένα πολύ γνωστό παζλ ατελούς-πληροφορίας στον υπολογιστή και διαδόθηκε από συμπερίληψη του στα Microsoft Windows.Το παίγνιο λαμβάνει χώρα σε ένα ταμπλώ n × n, και ο παίκτης δεν ξέρει ποιά πλακίδια (κελιά) περιέχουν νάρκες.Μια κίνηση αποτελείται από την αποκάλυψη ενός τετραγώνου,εάν το τετράγωνο περιέχει νάρκη ο παίκτης χάνει και αλλιώς αποκαλύπτεται στον παίκτη ο αριθμός των ναρκών στα 8 παρακείμενα πλακίδια.Ο παίκτης γνωρίζει επίσης το συνολικό αριθμό των ναρκών που κρύβονται σε όλο το ταμπλώ.Υπάρχουν διάφορα ενδιαφέροντα προβλήματα στον Ναρκαλιευτή.Για παράδειγμα,δίνεται μια διαμόρφωση με μερικά ακάλυπτα τετράγωνα (το καθένα, με τον αριθμό των γειτονικών ναρκών),υπάρχει μια θέση που θα μπορούσε να αποκαλυφθεί με ασφάλεια;Γενικότερα, ποια είναι η πιθανότητα ένα συγκεκριμένο τετράγωνο να περιέχει νάρκη,υποθέτοντας μια ομοιόμορφη κατανομή των υπόλοιπόμενων ναρκών; Μια διαφορετική γενίκευση του πρώτου ερωτήματος είναι εάν μια δεδομένη διαμόρφωση είναι ρεαλιστική,δηλαδή, μπορεί να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη με τη συλλογή των ναρκών.Ένα δοκιμαστικό πούλι θα επετρέπε να διαπιστωθεί εάν ένα τετράγωνο μπορεί να είναι εγγυημένα ελεύθερο ή με νάρκη.Ένα επιπλέον πρόβλημα είναι αν μια δεδομένη διαμόρφωση έχει μια μοναδική υλοποίηση.Ο Kaye αποδεικνύει ότι η δοκιμή συνέπειας (consistency) είναι NP-complete.Το αποτέλεσμα αυτό αφήνει ανοικτό την πολυπλοκότητα των παραπάνω ερωτήσεων.Οι Fix και McPhail ενίσχυσαν το αποτέλεσμα του Kaye δείχνοντας NP-πληρότητα του προσδιορισμού της συνέπειας,όταν οι αριθμοί που φαίνονται είναι όλοι το πολύ 1.Ο McPhail επίσης δείχνει ότι, δεδομένης μια συνεπούς τοποθέτησης των ναρκών,ο καθορισμός του αν υπάρχει άλλη συνεπής τοποθέτηση είναι NP-complete (ASP-πληρότητας από το τμήμα 5,4).

Ο Kaye αποδεικνύει επίσης, ότι μια γενίκευση στο άπειρο του Ναρκαλιευτή είναι undecidable.Συγκεκριμένα,το ερώτημα είναι κατά πόσον μια δεδομένη πεπερασμένη διαμόρφωση μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο την επιφάνεια.Οι κανόνες επιτρέπουν ένα πολύ πιο ισχυρό επίπεδο των πληροφοριών που αποκαλύπτονται οσο αποκαλύπτονται τα τετράγωνα,για παράδειγμα,ανακαλύπτοντας ότι ένα τετράγωνο έχει μια συγκεκριμένη ετικέτα (αριθμό) θα μπορούσε να σημαίνει ότι υπάρχουν ακριβώς 3 συνεχόμενα κελιά με μια άλλη συγκεκριμένη ετικέτα.(Η έννοια της νάρκης χάνεται.)

Ο Hearn υποστηρίζει ότι η «φυσική» ερώτηση απόφασης στον Ναρκαλιευτή, σύμφωναμε τη στάνταρ διαδικασία για τα αποτελέσματα της πολυπλοκότητας στα παζλ,είναι το κατά πόσο ένα δεδομένο (υποτίθεται συνεπές)παράδειγμα μπορεί (σίγουρα) να λυθεί, το οποίο είναι ένα διαφορετικό θέμα από οποιοδήποτε από τα παραπάνω. Παρατηρεί ότι μια απλή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

τροποποίηση στην κατασκευή του Kaye δείχνει ότι το ζήτημα αυτό είναι coNP-complete, μιαασυνήθιστη τάξη πολυπλοκότητας για ένα παζλ.Η απλοποίηση έιναι από την Ταυτολογία.(Εάν η περίπτωση δεν είναι γνωστό οτι είναι συνεπής,τότε το πρόβλημα μπορεί να μην είναι σε coNP.) Σημειώστε ότι αυτό το ερώτημα δεν είναι το ίδιο όπως το αν μια συγκεκριμένη διάταξη έχει μια μοναδική υλοποίηση:θα μπορούσαν να υπάρξουν πολλές λύσεις, εφ ' όσον στον παίκτης εγγυάται ότι οι σιγουρα-ασφαλείς κινήσεις θα αποκαλύψουν τελικά το σύνολο της διαμόρφωσης.

4.5.14 Mahjong Solitaire (Shanghai)

Η πασιέντζα Majong ή Σαγκάη είναι ένα κοινό ηλεκτρονικό παίγνιο που παίζεται με τα πλακίδια Mahjong,στοιβάζονται σε ένα μοτίβο όπου κάποια πλακίδια μένουν κρυφά και άλλα φαίνονται, και μερικά είναι εντελώς εκτεθειμένα. Κάθε κίνηση αφαιρεί ένα ζευγάρι πλακιδίων που είναι εντελώς εκτεθειμένα,υπάρχουν ακριβώς τέσσερα πλακάκια κάθε τάξης ισοδυναμίας που να ταιριάζουν.Ο στόχος είναι να αφαιρεθούν όλα τα κεραμίδια.

Οι Condon,Feigenbaum,Lund και Shor απέδειξαν ότι είναι PSPACE-δυσκολίας να προσεγγιστεί η μέγιστη πιθανότητα να απομακρυνθούν όλα τα πλακίδια κατά έναν παράγονταn^{ε} , υποθέτοντας ότι υπάρχουν αυθαίρετα πολλές τετράδες πλακιδίων και ότι τα κρυφα πλακίδια ομοιόμορφα κατανεμημένα.Ο Eppstein απέδειξε ότι είναι NP-complete το να αποφασίσει αν όλα τα πλακίδια μπορούν να αφαιρεθούν στην τέλειας-πληροφορίας εκδοχή αυτού του παζλ, όπου είναι γνωστές όλες οι θέσεις των πλακιδίων.

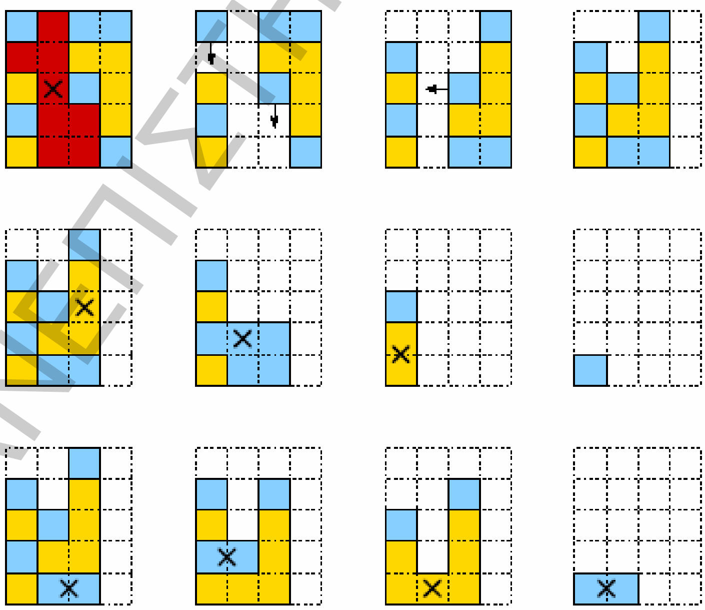
4.5.15 Tetris

Το Tetris είναι ένα δημοφιλές παζλ για τους υπολογιστές εφευρέθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1980 από τον Alexey Pazhitnov και από το 1988 έγινε το καλύτερο σε πωλήσεις παίγνιο στις Ηνωμένες Πολιτείες και την Αγγλία.Το παίγνιο παίζεται σε ένα ορθογώνιο πλέγμα (αρχικά, 20 × 10) με ορισμένες κελιά να καταλαμβάνονται από μπλοκ.Κατά τη διάρκεια κάθε κίνησης,ο υπολογιστής παράγει ένα κομμάτι tetromino και το τοποθετεί στην κορυφή του πλέγματος,ο παίκτης μπορεί να περιστρέψει το κομμάτι και να το σπρώξει το προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά καθώς πέφτει προς τα κάτω.Όταν το κομμάτι χτυπά ένα άλλο κομμάτι ή το πάτωμα, παγώνει στη θέση του και η κίνηση τελειώνει.Επίσης, αν υπάρχουν μια εντελώς γεμάτη σειρα,εξαφανίζεται,φέρνοντας κάτω τα υπόλοιπα κατά ένα επίπεδο.Για να κάνουν ένα παζλ Tetris τέλειας-πληροφορίας,ο Breukelaaretal υπέθεσε ότι ο παίκτης γνωρίζει εκ των προτέρων την πλήρη αλληλουχία των τεμαχίων που πρόκειται να πεσουν στο πλέγμα.Τέτοια παζλ εμφανίζονται στο *GamesMagazine*, για παράδειγμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.5.16 Clickomania (SameGame)

Η Clickomania ή SameGame είναι ένα παζλ του υπολογιστή που αποτελείται από ένα ορθογώνιο πλέγμα με τετράγωνα χρωματισμένο με ένα απο τα kμ χρώματα. Οριζοντίως και κατακορύφως γειτονικα μπλοκ του ίδιου χρώματος θεωρούνται μέρος της ίδιας ομάδας.Μια κίνηση επιλέγει μια ομάδα που περιέχει τουλάχιστον δύο μπλοκ και απομακρύνει αυτά τα τμήματα και ακολουθείται από δύο κανόνες "πτώσης", βλέπε Εικόνα.Κατ 'αρχάς,κάθε μπλοκ που παραμένει πάνω από τις τρύπες που δημιουργήθηκαν απο την αφαίρεση πέφτει κάτω ανά στήλη.Δεύτερον, αφαιρούνται η τυχόν κενές στήλεςσύροντας τις στήλες που μένουν προς τα αριστερά.



Σχήμα 4.4

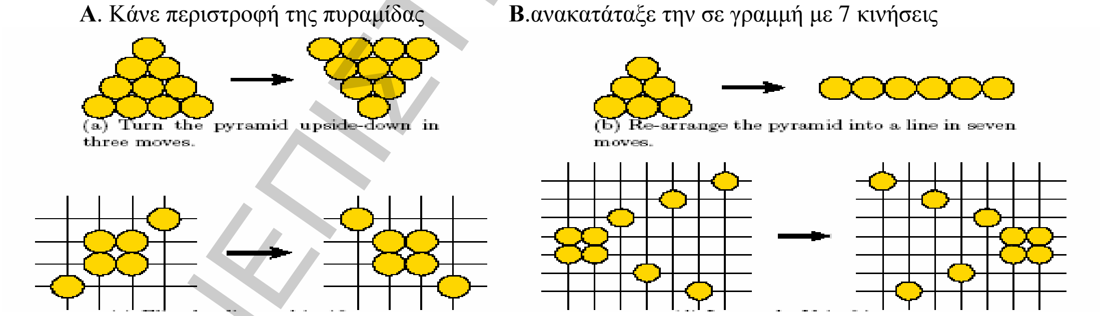
Οι κανόνες για την αφαίρεση μιας ομάδας στην Clickomania (κορυφή),μια αποτυχημένη προσπάθεια (μέση), και μια επιτυχημένη λύση (κάτω).Ο κύριος στόχος στην Clickomania είναι να αφαιρέσετε όλα τα μπλοκ.Ένα απλό παράδειγμα για το οποίο αυτό είναι αδύνατο είναι η σκακιέρα,όπου καμία κίνηση δεν μπορεί να γίνει. Ένας δευτερεύων στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί το σκορ,που συνήθως ορίζεται από k^2 πόντους που απονέμονται για την αφαίρεση μιας ομάδας k μπλοκ.Ο Biedl απέδειξε ότι είναι NP-complete η απόφαση αν όλα τα μπλοκ μπορούν να αφαιρεθούν σε ένα παζλ Clickomania.Αυτό το αποτέλεσμα πολυπλοκότητας ισχύει ακόμα και για τα παζλ με δύο στήλες και πέντε χρώματα και για παζλ με πέντε στήλες και τρία χρώματα.Από την άλλη πλευρά,για παζλ με μια στήλη (ή μία γραμμή) και αυθαίρετα πολλά χρώματα,έδειξε ότι ο μέγιστος αριθμός των μπλοκ μπορεί να αφαιρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο .

Διάφορες περιπτώσεις του παζλ Clickomania παραμένουν ανοικτές,για παράδειγμα, παζλ με δύο χρώματα, και παζλ με O(1) σειρές.Ο Richard Nowakowski πρότεινε μια εκδοχή δύο παικτών του παζλ Clickomania,που περιγράφεται στο στο οποίο οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής την αφαίρεση των ομάδων και το κανονικό παίγνιο θα κρίνει το νικητή, η πολυπλοκότητα αυτού του παίγνιου παραμένει ανοικτή. Ένα σχετικό παζλ ονομάζεται *Vexed*, ή *Cubic*.Σε αυτό το παζλ υπάρχουν σταθερά μπλοκ,καθώς και τα αφαιρούμενα χρωματιστά μπλοκ.Μια κίνηση στο*Vexed* είναι να σύρετε ένα χρωματιστό μπλοκ προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά σε έναν άδειο χώρο,τότε η βαρύτητα θα τραβήξει το μπλοκ κάτω έως ότου έρθει σε επαφή με ένα άλλο μπλοκ,τότε οποιαδήποτε επαφή με μπλοκ του ίδιου χρώματος προκαλεί την αφαιρεσή τους.Πάλι ο στόχος είναι να αφαιρεθούν όλα τα χρωματιστό μπλοκ.Ο Friedman έδειξε ότι το *Vexed* είναι NP-complete.

4.5.17 Μετακίνηση κερμάτων

Αρκετά παζλ συρόμενων ή κινούμενων κερμάτων πέφτουν στο εξής γενικό πλαίσιο:αναδιαμορφώστε ένα συγκεκριμένο σχήμα με τις μονάδες δίσκους στο επίπεδο σε ένα άλλο σχήμα με μία ακολουθία κινήσεων,επανατοποθετόντας το κάθε κέρμα σε μια κενή θέση που να αγγίζει τουλάχιστον δύο άλλα κέρματα. Παραδείγματα τέτοιων παζλ είναι φαίνονται στο Σχήμα.Το πλαίσιο αυτό μπορεί γενικευθεί σε περαιτέρω μη γεωμετρικά παζλ που αφορούν την διακίνηση των πιονιών σε γραφήματα με περιορισμούς γειτνίασης.

Α. Κάνε περιστροφή της πυραμίδας **Β**.ανακατάταξε την σε γραμμή με 7 κινήσεις



Γ.Γύρισε σε 18 κιν΄σεις τη διαγώνιο **Δ**.Ανάστρεψε το V σε 24 κινήσεις

Τα παζλ με κινούμενα κέρματα αναλύονται από τους Demaine και Verrill. Ειδικότερα,μελετούν παζλ όπως στο Σχήμα στα οποία τα κέντρα των νομισμάτων παραμένουν είτε στο τριγωνικό πλέγμα ή στο τετράγωνο πλέγμα.Παραδόξως, τα αποτελέσματα τους την απόφαση της επιλυσιμότητας του παζλ είναι θετικα.Για το τριγωνικό πλέγμα,σχεδόν όλα τα παζλ είναι επιλύσιμα και υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που τα χαρακτηρίζει.Για το τετράγωνο πλέγμα, υπάρχουν πιο αυστηρούς περιορισμοί.Για παράδειγμα,το πλαίσιο οριοθέτησης δεν μπορεί να μεγαλώσει με τις κινήσεις, γενικότερα, το σύνολο των προσβάσιμων θέσεων μέσω της κίνησης με μιας άπειρη παροχή κερμάτων δεν μπορεί να αυξηθεί. Οι Demaine και Verrill δείχνουν ότι, σεβόμενος αυτού του περιορισμού, υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για την επίλυση όλων των παζλ με

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

τουλάχιστον δύο επιπλέον κέρματα απ’ οτι απαιτείται για την επίτευξη του αποτελέσματος. (Ειδικότερα, όλα αυτά τα παζλ είναι επιλύσιμα.)

4.5.18 Τηλεσκόπια του Dyson

Το παίγνιο τηλεσκόπιο του Dyson είναι ένα online παζλ που παράγεται από την εταιρεία Dyson και βασίζεται στις πτησόμενες ηλεκτρικές σκούπες τους.Ο στόχος είναι να ελιχτεί μια μπάλα σε ένα τετράγωνο πλέγμα από μια θέση εκκίνησης σε μία θέση στόχο με την καθοδήγηση πτησόμενων τηλεσκόπιων που μακραίνουν και κονταίνουν πανω στο πλέγμα.Όταν ένας τηλεσκόπιο επεκτείνεται,αναπτύσσεται στο μέγιστο μήκος του προς την κατεύθυνση που δείχνει(παράμετροι του κάθε τηλεσκόπιου),εκτός εάν το σταματήσει άλλο τηλεσκόπιο.Εάν η μπάλα είναι στην διαδρομή,ωθείται από την άκρη του τηλεσκοπίου.Όταν ένα τηλεσκόπιο μαζεύει, συρρικνώνεται πίσω στην αρχική του μονάδα μήκους,τραβώντας την μπάλα μαζι του αν η μπάλα βρισκεται στηνάκρη του τηλεσκοπίου. Ο Demaine έδειξε ότι το ζήτημα εάν ένα συγκεκριμένο παζλ έχει μια λύση είναι γενικά PSPACE-complete.Από την άλλη πλευρά,το πρόβλημα είναι πολυωνυμικό για ορισμένες περιορισμένες διαμορφώσεις που είναι ενδιαφέρουσες, ωστόσο, να παίχτουν απο τους ανθρώπους. Συγκεκριμένα,εάν δεν υπάρχουν δύο τηλεσκόπια το ένα απέναντι απο το άλλο και επικαλύπτονται όταν εκτείνονται σε πάνω από έναν χώρο,τότε το πρόβλημα είναι πολυωνιμικό.Πολλά από τα επίπεδα του παίγνιου στην ηλεκτρονική έκδοση έχουν αυτή την ιδιότητα.

4.5.19 Παζλ Αντανάκλασης

Δύο παζλ που αφορούν την αντανάκλαση μιας κατευθυνόμενης ακτινας φωτός ή κίνησης έχουν μελετηθεί από την μερια της πολυπλοκότητας.Στο *Αντανακλάσεις*, μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα με ένα τετράγωνο που σημαδεύεται με λέιζερ σε έναν από τους τέσσερις άξονες-παράλληλες κατευθύνσεις,ένα η περισσότερα τετράγωνα είναι λάμπες,μερικά τετράγωνα σημειώνονται σαν μονόδρομος σε έναν παράλληλης κατεύθυνσης άξονα, και τα υπόλοιπα τετράγωνα σημειώνονται είτε σαν κενά ή σαν τοίχος.Μας δίνονται επίσης μια σειρά από διαγώνιους καθρέπτες ή / και Τ-διαχωριστές που μπορούμε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα στα κενά τετράγωνα.Το φως ταξιδεύει στη συνέχεια,από το λέιζερ, όταν συναντά έναν διαγώνιο καθρέφτη, αντανακλάται κατά 90° σύμφωνα με τον προσανατολισμό του καθρέπτη,όταν συναντά ένα διαχωριστή στη βάση του Τ,διασπάται σε δύο ορθογώνιες κατευθύνσεις, όταν συναντά ένα μονόδρομο τετράγωνο σταματάει εκτός εάν η κατεύθυνση του φωτός ταιριάζει με την κατεύθυνση του μονόδρομου,όταν συναντά μια λάμπα, αλλάζει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται και σταματάει και όταν συναντά έναν τοίχο,σταματάει.Ο στόχος είναι να τοποθετήσετε τους καθρέφτες και τους διαχωριστές,έτσι ώστε κάθε λάμπα χτυπιέται μονό αριθμό φορές.Αυτό το παζλ είναι NP-complete .

Στο *Reflexion*,μας δίνεται ένα ορθογώνιο πλέγμα στο οποίο τα κελιά είναι είτε τοίχοι,καθρέφτες, ή διαμάντια.Επίσης,ένα τετράγωνο είναι η αρχική θέση για μια μπίλια και ένα άλλο τετράγωνο είναι η θέση στόχος.Μπορούμε να απελευθερώσουμε την μπάλα σε μια από τις τέσσερις κατευθύνσεις παράλληλες στους άξονες και μπορούμε να αναστρέψουμε τους καθρέφτες μεταξύ των δύο διαγώνιων κατευθύνσεων τους, ενώ η μπίλια κυλάει.Η μπίλια ταξιδεύει σαν μια αχτίδα φωτός, αντανακλοντας στους καθρέφτες και σταματώντας στους τοίχους,στα διαμάντια, γυρίζει γύρω και αφαιρεί το διαμάντι.Ο στόχος είναι να φτάσουμε στη θέση στόχο.Σε αυτήν την απλούστερη μορφή,το*Reflexion* είναι NL-complete που στην ουσία συνεπάγεται έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο .Αν κάποιοι από τους καθρέφτες μπορούν να γυρίσει μόνο πριν κυλίσει η μπίλια, το παζλ γίνεται NP-complete.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

4.5.20 Lemmings

Το *Lemmings* είναι ένα δημοφιλές παίγνιο παζλ για υπολογιστές που χρονολογείται στις αρχές της δεκαετίας του 1990.Χαρακτήρες που ονομάζονται Lemmings ξεκινούν από μία ή περισσότερες αρχικές θέσεις και συμπεριφέρονται νομοτελειακά ανάλογα με το είδος τους,αρχικά μόνο περπατόντας σε μια σταθερή κατεύθυνση,γυρίζοντας γύρω όταν συναντούν τοίχους και πέφτοντας από τους γκρεμούς,πεθαίνουν αν πέσουν απο πάρα πολύ ψηλά.Ο παίκτης μπορεί να τροποποιήσει αυτή τη βασική συμπεριφορά εφαρμόζοντας μια δεξιότητα στο Lemming,κάθε δεξιότητα έχει έναν περιορισμένο αριθμό τέτοιων εφαρμογών.Ο στόχος είναι για ένα καθορισμένο αριθμό των Lemmings να φθάσουν σε μια καθορισμένη θέση στόχο.Οι ακριβείς κανόνες, και ιδιαίτερα οι διάφορες δεξιότητες, είναι πολύ περίπλοκοι για να τους εξετάσουμε εδώ.Ο Cormode απέδειξε ότι τα εν λόγω παζλ είναι NP-complete,ακόμα και με ένα μόνο Lemming.Η συμμετοχή στο NP προκύπτει από την υπόθεση ενός πολυωνύμου σαν ανώτερο όριο για το χρόνο περαίωσης ένος επίπεδου (μια αρκετά ακριβή προσομοίωση του πραγματικού παίγνιου), ο Cormode εικάζει ότι αυτή η υπόθεση δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

4.6. Κυτταρικά Αυτόματα και Life

Το Παίγνιο της Ζωής του Conway είναι ένα μηδένικού-παίκτη κυτταρικό αυτόματο που παίζεται σαν τετράγωνη πλακόστρωση του επιπέδου.Αρχικά, ορισμένα κυτταρα (τετράγωνα) σημαδεύονται ζωντανά ή νεκρά.Κάθε κίνηση εξελίσσει όλα τα κύτταρα του επιπέδου:ένα ζωντανό κύτταρο παραμένει ζωντανό αν 2 ή 3 από τα8 γείτονικά του είναι ζωντανά και ένα νεκρό κύτταρο ζωντανεύει αν έχει ακριβώς 3 ζωντανούς γείτονες.Πολλές ερωτήσεις μπορούν να γίνουν για την αρχική διαμόρφωση του *Life*.Ένα βασικό ερώτημα είναι κατά πόσον ο πληθυσμός θα πεθάνει εντελώς(δεν υπάρχουν πια ζωντανά κύτταρα).Υπάρχουν και άλλες ανοικτές ερωτήσεις που αφορούν την πολυπλοκότητα και την θεωρία σχετικά με το *Life*. Πόσο δύσκολο είναι να πούμε αν μια διαμόρφωση είναι ένα *κήπος της Εδέμ*, που να είναι, η κατάσταση που δεν μπορεί να προκύψει από μια άλλη;Δεδομένου ενός ορθογωνίου σχήματος στο *Life*,πόσο δύσκολο είναι να επεκτείνουμε το σχέδιο έξω από το ορθογώνιο για να σχηματίσουμε ένα Still Life .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 5

5.1 Ο Πυρήνας Ενός Παιγνίου Ν Ατόμων

Εισαγωγη

Τα προβλήματα της κατανομής σε ένα οικονομικό σύστημα, μπορούν να αναλυθούν είτε μέσω των συμπερασμάτων συμπεριφοράς ενός συναγωνιστικού μοντέλου είτε μέσω των περισσότερο ευέλικτων τεχνικών της θεωρίας παιγνίων n- ατόμων. Στο συναγωνιστικό μοντέλο, οι καταναλωτές αναμένεται να ανταποκριθούν σε ένα σύνολο τιμών μεγιστοποιώντας τη χρησιμότητα που υπόκειται σε έναν περιοριστικό προυπολογισμό και οι παραγωγοί μεγιστοποιώντας το κέρδος. Οι συνεπείς αποφάσεις παραγωγής και η διανομή των εμπορευμάτων διατηρούνται μέσω του καθορισμού ενός συνόλου τιμών στις οποίες όλες οι αγορές βρίσκονται σε ισορροπία.

Η ανάλυση αυτών των προβλημάτων με τη θεωρία παιγνίων n- ατόμων απαιτεί από εμάς να προσδιορίσουμε τις δραστηριότες παραγωγής και διανομής που είναι διαθέσιμες σε έναν αυθαίρετο συνασπισμό οικονομικών πρακτόρων. Συχνά είναι επαρκής η περίληψη της λεπτομερούς στρατηγικής πιθανοτήτων που είναι προσβάσιμες από έναν συνασπισμό μέσω του συνόλου των πιθανών χρήσιμων διανυσμάτων που μπορούν να επιτευχθούν από το συνασπισμό. Για παράδειγμα, σε μία απλή οικονομία συναλλαγών, κάθε συνασπισμός θα έχει συσχετίσει με αυτόν το σύνολο όλων των χρήσιμων διανυσμάτων που μπορούν να αποκτηθούν μέσω αυθαίρετων ανακατανομών των πόρων αυτού του συνασπισμού.

Ο πυρήνας ενός παιγνίου n ατόμων είναι μία γενίκευση της καμπύλης του Edgeworth.Προτείνεται ένα διάνυσμα επιπέδων χρησιμότητας που είναι εφικτό για όλους τους παίκτες που συμπεριφέρονται ομαδικά και ένας αυθαίρετος συνασπισμός εξετάζεται για να διαπιστωθεί αν μπορεί να παρέχει υψηλότερα επίπεδα χρησιμότητας για όλα τα μέλη του. Εάν αυτό είναι εφικτό, το αρχικά προτεινόμενο διάνυσμα χρησιμότητας μπλοκάρεται από τον συνασπισμό. Ο πυρήνας του παιγνίου n ατόμων αποτελείται από αυτά τα διανύσματα χρησιμότητας που είναι εφικτά για ολόκληρο το σύνολο παικτών και που κανένας συνασπισμός δεν μπορεί να μπλοκάρει.

Όπως έχουμε παρατηρήσει τα τελευταία χρόνια, υπάρχει μία ιδιαίτερη σύνδεση ανάμεσα σε αυτές τις δύο μεθόδους ανάλυσης. Εάν βγούν τα τυπικά συμπεράσματα του συναγωνιστικού μοντέλου, όπως η διακύμανση των προτιμήσεων, και αυτή η διακύμανση και η σταθερότητα επιστρέφουν στην κλίμακα για το σύνολο παραγωγής, τότε θα έχουμε ένα οικονομικό σύστημα στο οποίο όλες οι αγορές θα βρίσκονται σε ισορροπία και το αποτέλεσμα του έργου θα "τυλίξει" τους καταναλωτές. Το διάνυσμα χρησιμότητας σε συνδυασμό με αυτή τη συναγωνιστική ισορροπία ίσως βρεθούν μέσα στον πυρήνα. Ακόμα, εάν ο αριθμός των καταναλωτών τείνει στο άπειρο με έναν κατάλληλο τρόπο, το σετ των πιθανών διανυσμάτων χρησιμότητας μέσα στον πυρήνα γίνεται μικρότερο και τείνει, εντός ορίου, στα διανύσματα που σχετίζονται με τη συναγωνιστική ισορροπία.

Φυσικά δεν περιμένουμε μία συναγωνιστική ισορροπία εάν δε βγούν τα τυπικά συμπεράσματα ενός συναγωνιστικού μοντέλου. Από την άλλη πλευρά, ο σχηματισμός του προβλήματος της διανομής σε ένα παίγνιο n ατόμων είναι ικανοποιητικά ευέλικτος για να δεχτεί οποιοδήποτε αριθμό αποκλίσεων από το κλασικό μοντέλο. Αυτό θέτει το εξής ερώτημα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ποιες είναι οι καθοριστικές συνθήκες που επαρκούν για να εγγυηθούν την ύπαρξη ενός διανύσματος χρησιμότητας μέσα στον πυρήνα και ποιες περιγράφονται άμεσα σε ό,τι αφορά τη δομή ενός παιγνίου n ατόμων αντί να επικαλούνται έμμεσα την ύπαρξη της συναγωνιστικης ισορροπίας;

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη μορφή που μπορούν να πάρουν αυτές οι συνθήκες, ας ξεκινήσουμε εξετάζοντας ένα παιχνίδι με τρείς παίκτες. Σε αύτη την περίπτωση υπάρχουν επτά δυνατοί συνασπισμοί: οι ενός παίκτη τρείς συνασπισμοί, οι δύο παικτών συνασπισμοί και οι συνασπισμοί και των τριών παικτών. Κάθε τέτοιος συνασπισμός μπορεί να διατηρεί ένα σετ διανυσμάτων χρησιμότητας ανάλογα με τις διαθέσιμες στρατηγικές των μελών του. Θα ήταν χρήσιμο να συμβολίσουμε με Vs το σύνολο των διανυσμάτων που είναι προσιτό από τον συνασπισμό S. Το V (123) θα αναπαριστάται γεωμετρικά από ένα σύνολο διανυσμάτων σε τρεία διαστήματα. Το V12 θα βρίσκεται στο επίπεδο που καθορίζεται από τις συντεταγμένες των αξόνων1 και 2 και γενικά το Vs θα βρίσκεται στον επιμηκή υποχώρο των τριών διαστημάτων των οποίων οι συντεταγμένες ανταποκρίνονται στα μέλη του S.Τα Vs εννοείται ότι θα έχουν διάφορες τεχνικές ιδιότητες όπως το να είναι κλειστά και να περιλαμβάνουν οποιοδήποτε σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι μικρότερες ή ίσες με αυτές των σημείων του Vs.

Προκειμένου να έχει αυτό το παιχνίδι έναν πυρήνα που δεν θα είναι άδειος, το V(123) θα πρέπει να είναι τόσο μεγάλο ώστε να περιέχει ένα διάνυσμα το οποίο δεν μπορεί να αποκλειστεί από οποιονδήποτε συνασπισμό. Όταν λέμε επαρκώς μεγάλο, εννοούμε το πλεονέκτημα του συνδυασμού μιας διαμελισμένης συλλογής συνασπισμών. Για παράδειγμα, εάν $u1 \in V1$ και $(u2, u3) \in V23$ τότε θα υποθέσουμε ότι $(u1, u2, u3) \in V123$ και το ίδιο για όλα τα υπόλοιπα μέλη του συνόλου των τριών παικτών. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε, ότι το παιχνίδι είναι υπερπροσθετικό, είναι αρκετά φυσιολογικό για τα περισσότερα οικονομικά μοντέλα. Πάραυτα, δεν είναι αρκετό να εγγυηθούμε μόνο την ύπαρξη ενός διανύσματος στον πυρήνα, απαιτείται και μία ακόμη σχέση.

Ας υποθέσουμε για μία στιγμή ότι το παίγνιο προέρχεται από ένα μοντέλο αγοράς στο οποίο οι τρείς παίκτες ανταλλάσουν τα αρχικά τους εμπορεύματα. Οι επιλογές του i-οστου παίκτη θα αναπαριστούνται από μία συνάρτηση ui (xi), όπου xi τα εμπορεύματα που πήρε από αυτόν τον παίκτη. Το εμπόρευμα που αρχικά ανήκε στον i- οστό παίκτη , τώρα θα δηλωθεί στον ωi. Έτσι το V(123) περιγράφεται από:

$V(123) = \{ (u1,u2,u3) \mid aj \leq uj\ (xj)$ για κάποια $(x1, x2, x3)$ με

$x1+ x2+ x3 = ω1+ω2+ω3 \}$

και το V(12) από:

$V(12) = \{(u1,u2) \mid uj \leq uj(xj)$ για κάποια $(x1,x2)$ με $x1+x2= ω1+ω2$

με παρόμοιο ορισμό για κάθε σετ Vs.

Αυτό το παίγνιο είναι υπερπροσθετικό έτσι όπως φάνηκε παραπάνω , ακόμα και με την έλλειψη πληθώρας επιλογών. Γνωρίζουμε εντούτοις ότι ένα παίγνιο χωρίς πληθώρα επιλογών δε χρειάζεται να έχει πυρήνα και γι'αυτό θα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να μεταφράσουμε αυτή την πληθώρα επιλογών σε μία σχέση που μπορεί να οριστεί μόνο στα σύνολα Vs , για να

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

μπορούμε να βρούμε την κατάσταση που λείπει. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα (u1,u2,u3) το οποίο είναι αυθαίρετο αν εξαιρέσουμε ότι ικανοποιεί τις τρείς ακόλουθες συνθήκες:

$(u1,u2) \in V12$,
$(u2,u3) \in V23$,
$(u1,u3) \in V13$.

Στην οικονομία της αγοράς αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δεσμίδες εμπορευμάτων (x1, x2) , (y1, y2) και (z1, z3) με

$x1 + x2 = \omega1 + \omega2$,
$y1 + y2 = \omega2 + \omega3$,
$z1 + z3 = \omega1 + \omega3$,

και

$u1\,(x1) \geq u1,\ \ u1(z1) \geq u1,$
$u2(\,x2) \geq u2,\ \ u2(y2) \geq u2,$
$u3\,(y3) \geq u3,\ \ u3(z3) \geq u3.$

Όμως τότε

$$\frac{x^1 + z^1}{2}, \quad \frac{x^2 + y^2}{2},$$

αναπαριστούν μία εφικτή συναλλαγή και για τους τρείς παίκτες αφού τα αυτά τα διανύσματα ανέρχονται σε ω1+ ω2+ ω3. Εάν οι επιλογές των τριών καταναλωτών είναι κυρτές, τότε τα επίπεδα χρησιμότητας που σχετίζονται με αυτή τη συναλλαγή μπορούν να περιγραφούν πολύ εύκολα , αφού η κυρτότητα δείχνει ότι

$$u1\left(\frac{x^1 + z^1}{2}\right) \geq \min[u1(x^1), \quad u1\,(z^1)] \geq u1,$$

$$u2\left(\frac{x^2 + z^2}{2}\right) \geq \min[u2(x^2), \quad u2\,(y^2)] \geq u2,$$

$$u3\left(\frac{x^3 + z^3}{2}\right) \geq \min[u3(y^3), \quad u3\,(z^3)] \geq u3$$

Με άλλα λόγια, το διάνυσμα (u1,u2,u3) διατηρείται από τον συνασπισμό των τριών παικτών και επομένως βρίσκεται στο V(1,2,3).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

5.1 Παίγνια Ν Ατόμων

Αυτή η περίεργη παράλληλη μετατόπιση της κυρτότητας που συνδέει τους τρεις συνασπισμούς δύο παικτών στον συνασπισμό όλων των παικτών , είναι σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα της υπερπροσθετικότητας,επαρκής για την ύπαρξη ενός διανύσματος στον πυρήνα ενός παιγνίου τριών ατόμων. Προκειμένου να συζητήσουμε την κατάλληλη γενίκευση αυτών των συνθηκών ας δώσουμε έναν πιο επίσημο ορισμό του παιγνίου n ατόμων σύμφωνα με τους Aumann και Peleg.

Το σύνολο n των παικτών ορίζεται ως N και ένας αυθαίρετος συνασπισμός ως S. Για κάθε σύνολο S , το E^s θα είναι ο ευκλείδιος χώρος των διαστάσεων που είναι ίσος με τον αριθμό των παικτών στο S και των οποίων οι συντεταγμένες έχουν σαν subcripts τους παίκτες του S. Εάν το u είναι ένα διάνυσμα στο E^N τότε το u^S θα είναι η προβολή του στο E^s.

Θα συσχετίσουμε με κάθε συνασπισμό S ένα σύνολο V_S , στο E^s, το οποίο θα αναπαριστά το σύνολο των χρήσιμων διανυσμάτων που μπορεί να διατηρήσει αυτός ο συνασπισμός. Τα μέλη του S ίσως χρειαστεί να δεσμευτούν με μία πληθώρα δραστηριοτήτων,ανάλογα με τη φύση του παιγνίου n ατόμων, προκειμένου να διατηρηθεί ένα συγκεκριμένο διάνυσμα στο V_s.Πάραυτα, για τους δικούς μας σκοπούς το μόνο που χρειάζεται είναι μία σύνοψη των διανυσμάτων χρησιμότητας που είναι προσβάσιμα από κάθε συνασπισμό.

Θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις για το σύνολο V_s:

i. Για κάθε S, το V_s είναι ένα κλειστό σύνολο.
ii. Εάν $u \in Vs$ και $y \in E^s$ με $y \leq u$, τότε $y \in Vs$.
iii. Τα σύνολα των διανυσμάτων του Vs στα οποία κάθε παίκτης στο S δε λαμβάνει τίποτα λιγότερο από το μέγιστο που μπορεί να κρατήσει μόνος του , είναι μη κενά, ορισμένα σύνολα.
iv.

Αυτές οι συνθήκες είναι όλες αρκετά κατανοητές και δε χρειάζονται περετέρω σχόλια. Διαφέρουν ελαφρώς από τις συνθήκες των Aumann και Peleg. Συγκεκριμένα τα σύνολα Vs δε χρειάζεται να είναι καμπυλωτά (convex).

Έχουμε ήδη δει πως ένα μοντέλο συναλλαγών τριών ατόμων εφαρμόζεται σε παιχνίδι αυτής της μορφής. Σε μία οικονομία συναλλαγών n ατόμων όπου η συνάρτηση χρησιμότητας του i παίκτη δίνεται από το $u_i(x^i)$ και τα αρχικά του υπάρχοντα απο το ω^i, ένα διάνυσμα $u \in E^s$ θα ανήκει στο Vs αν μπορούμε να βρούμε δεσμευμένο εμπόρευμα x^i με $\sum_{i\in s} x^i = \sum_{i\in s} \omega^i$ και $u_i(x^i) \geq u_i$ για όλα τα $i \in S$. Μπορούμε να ενσωματώσουμε την παραγωγή υποθέτοντας ότι κάθε συνασπισμός έχει την ικανότητα να μετατρέπει εμπορεύματα σύμφωνα με κάποια σύνολα παραγωγής , παρότι αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για να ενσωματώσουμε την παραγωγή στη θεωρία μοντέλου παιγνίου n ατόμων

Σαν ένα ακόμα παράδειγμα θεωρείστε την κλασική περίπτωση ενός παιγνίου n ατόμων με μεταβαλόμενη χρησιμότητα η οποία περιγράφεται από τον αριθμό f_s που συσχετίζεται με κάθε συνασπισμό. Αυτό σημαίνει ότι ένα διάνυσμα $u \in E^s$ μπορεί να ανήκει στο συνασπισμό S εάν $\sum_{i\in s} u_i \leq f_s$ έτσι ώστε τα σύνολα Vs να αποτελούνται από μισούς χώρους που ορίζονται από υπερεπίπεδα των οποίων τα κανονικά διανύσματα έχουν μέλη το 0 ή το 1.

Έστω u ένα σημείο στο V_N και u^S η προβολή του στο E^s. Το διάνυσμα u μπλοκάρεται από το σύνολο S εάν μπορεί να βρεθεί ένα σημείο $y \in Vs$ με $y > u^s$ ή με άλλα λόγια εάν ο συνασπισμός μπορεί να διατηρεί ένα υψηλότερο επίπεδο χρησιμότητας για κάθε ένα από τα μέλη του σε σχέση με αυτό που δίνει το διάνυσμα u. Ένα σημείο $u \in V_N$ θα είναι μέσα στον πυρήνα εάν δεν μπορεί να μπλοκαριστεί από οποιδήποτε σύνολο S.

Προκειμένου να καθορίσουμε την καλύτερη γενίκευση της επιπρόσθετης συνθήκης στο τριών ατόμων παίγνιό μας πρέπει να έχουμε πρόσβαση στο ενδεχόμενο ενός

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ισορροπημένου συνόλου συνασπισμών που μελέτησαν οι Shapley, Peleg και Bondareva στα πλαίσια ενός παιχνιδιού με μεταβαλόμενη χρησιμότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω T={S} ένα σύνολο συνασπισμών σε ένα παίγνιο n ατόμων. Το T θεωρείται ισορροπημένο σύνολο εάν είναι εφικτή η εύρεση μη αρνητικών δs για κάθε συνασπισμό στο T έτσι ώστε:

$$\sum_{\substack{s\in T\\ s\supset \{i\}}} \delta s = 1 \text{ για κάθε } i$$

Με άλλα λόγια τα δs έχουν την ιδιότητα ότι εάν επιλεγεί οποισδήποτε άτομο , το άθροισμά που ανταποκρίνεται σε αυτούς τους συνασπισμούς του T που περιλαμβάνουν τον άτομο , θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε τον ορισμό θα ήταν να πούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου των παικτών είναι ένας θετικός γραμμικός συνδυασμός των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συνασπισμών σε ένα ισορροπημένο σύνολο.

Τα ισορροπημένα σύνολα συνασπισμών αναπαριστούν μία γενίκευση όλων των συνασπισμών δύο παικτών που μελετήθηκαν στο παίγνιο τριών ατόμων, αφού δ(12)= δ(23)= δ(13) = ½ will serve as an appropriate system of weights. Είναι κάπως απογοητευτικό, δοσμένης της σημασίας των ισορροπημένων συνόλων για τη μελέτη του πυρήνα, το ότι δεν έχουμε ορισμό που να καθορίζει πότε μία δοσμένη συλογή είναι ισορροπημένη.

Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να επεκτείνουμε σε ένα παίγνιο n ατόμων την πρόσθετη απαίτηση που επιβάλλαμε στην περίπτωση των τριών ατόμων.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένα παίγνιο n ατόμων είναι ισορροπημένο εάν για κάθε ισορροπημένο σύνολο T ένα διάνυσμα u πρέπει να ανήκει στο V_N εάν $u^s \in Vs$ για όλα τα $S \in T$.

Τώρα μπορούμε να παραθέσουμε το κύριο θεώρημα.

***Θεώρημα 1** : Ένα ισορροπημένο παίγνιο n ατόμων έχει πάντα μη κενό πυρήνα.*

Πρέπει να προσέξουμε ότι όλες οι περιπτώσεις που είδαμε έχουν τον ίδιο "χαρακτήρα" : δεν έχουν διαφορά εάν μία συνεχόμενη μονότονη αλλαγή εφαρμόζεται στη χρησιμότητα οποιουδήποτε ατόμου. Μάλιστα θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε τη συζήτηση σε ένα πιο αφαιρετικό επίπεδο με τα αποτελέσματα κάθε ατόμου να αναπαριστούνται σε αυθαίρετη σειρά συνόλων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

5.2 Μερικά Αποτελέσματα Ισορροπημένων Παιγνίων

Η συνθήκη για να είναι ένα παιχνίδι ισορροπημένο είναι σαφής και θα χρησιμεύσει στην εξέταση κάποιων παραδειγμάτων. Ένα παίγνιο αγοράς με κυρτές επιλογές θα είναι πάντα ισορροπημένο εάν T είναι μία αυθαιρέτως ισορροπημένη συλλογή και u ένα διάνυσμα με $u^s \in$ Vs για όλα τα $S \in T$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε τέτοιο συνασπισμό, υπάρχει ένας τρόπος ανακατανομής των στοιχείων του έτσι ώστε να διατηρεί το διάνυσμα u^S. Εάν η ανακατανομή δίνει σε έναν παίκτη i (με την παραδοχή ότι αυτός ο παίκτης ανήκει στο S) εμπόρευμα x_s^i , τότε

$$\sum_{i \in S} x_s^i = \sum_{i \in S} \omega^i$$

και $u_i (X_S^i) \geq u_i$

Προκειμένου να δείξουμε ότι το παιχνίδι είναι ισορροπημένο πρέπει να κατασκευάσουμε μία κατανομή $x^1, x^2, \ldots, x^n$ με $\Sigma_1^n x^i = \Sigma_1^n \omega^i$ και $u_i(x^i) > u_i$ για κάθε i. Αυτή η κατανομή μπορεί να κατασκευαστεί στα πλαίσια των δs που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό του ισορροπημένου συνόλου.

Για κάθε παίκτη i ορίζουμε x^i ως $\Sigma_{s \in T,\, s \supset \{i\}} \delta_s x_s^i$. Από τον ορισμό του δs κάθε xs i είναι ένας συνδυασμός κυρτότητας με το S να έχει εύρος τα σύνολα του T που περιλαμβάνουν τον i-οστό παίκτη. Αν οι προτιμήσεις είναι convex τότε το ui(xi) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μικρότερου από τους u_i (x_s^i) και επομένως και μεγαλύτερο ή ίσο του u_i. Έτσι έχουμε κατασκευάσει ένα έργο πακέτων εμπορευμάτων που προσφέρει ένα επίπεδο χρησιμότητας για κάθε παίκτη που δεν είναι μικρότερο από την ανταπόκρισή του στον componement του u. Προκειμένου να δείξουμε ότι $u \in Vn$ χρειάζεται μόνο να επιβεβαιώσουμε ότι $\Sigma_1^n x^i = \Sigma_1^n \omega^i$.
Αλλά,

$$\sum_1^n x^i = \sum_1^n \sum_{s \supset \{i\}} \delta_s x_s^i$$

$$= \sum_{s \in T} \delta_S \sum_{I \in S} X_S^I$$

$$= \sum_{s \in T} \delta_S \sum_{I \in S} \omega^I$$

$$= \sum_1^n \omega^i \sum_{\substack{s \in t \\ s \supset \{i\}}} \delta_s = \sum_1^n \omega^i .$$

Αυτό το επιχείρημα δείχνει ότι μία οικονομία συναλλαγής με κυρτές επιλογές θα εφαρμόζεται σε ένα ισορροπημένο παίγνιο n ατόμων και σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

της έρευνας ο πυρήνας αυτού του παιγνίου θα είναι πάντα μη κενός. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι δε χρειάζονται περεταίρω υποθέσεις όπως αυστηρή μονοτονία των επιλογών ή αυστηρή θετικότητα των αρχικών ιδιοκτησιών.(φυσικά σε ένα μοντέλο συναλλαγών απαιτούνται μερικές επιπρόσθετες υποθέσεις έτσι ώστε να φτάσουμε το όριο και να κρατήσουμε την συναγωνιστική ισορροπία.)

Στο δεύτερο παράδειγμά μας, ένα παίγνιο n ατόμων με μεταβαλλόμενη χρησιμότητα, είναι αρκετά εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ένα ισορροπημένο παίγνιο δεν έχει κενό πυρήνα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις πιο λεπτεπίλεπτες τεχνικές που θα αναπτύξουμε αγότερα. Για την ακρίβεια ένα παίγνιο με μεταβαλλόμενη χρησιμότητα έχει πυρήνα αν και μόνο αν είναι ισορροπημένο.

Εάν τα σύνολα Vs αποτελούνται από αυτά τα διανύσματα του E^s με $\sum_{i\in S} u_i \le f_s$,το διάνυσμα $(u_1,\ldots, u_n)$ θα βρίσκεται στον πυρήνα εάν

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \le f_N$$

$$\sum_{i\in S} u_i \ge f_S$$

για όλα τα υποσύνολα του S.

Η πρώτη ανισότητα υποδηλώνει ότι $u \in V_N$ και το δεύτερο u ότι δεν μπορεί να σκιαγραφηθεί από οποιονδήποτε συνασπισμό S. Με άλλα λόγιατο παίγνιο θα έχει πυρήνα εάν το γραμμικό προγραμματιστικό πρόβλημα είναι

$$\min \sum_{1}^{n} u_i$$

$$\sum_{i\in S} u_i \ge f_S$$

για όλα τα S και έχει μία λύση στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με f_N. Οι δυαδικές μεταβλητές μπορεί να δηλωθούν ως δs, μία για κάθε υποσύνολο, και το δυαδικό γραμμικό προγραμματιστικό πρόβλημα είναι

$$\max \sum_{S} \delta_S f_S$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

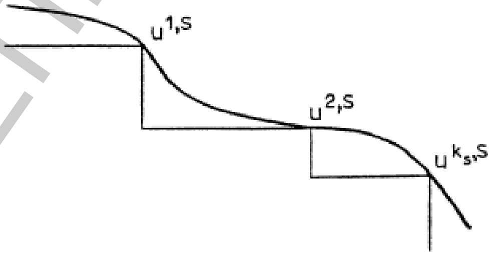
$$\sum_{s \supset \{j\}} \delta_S = 1,$$

με δs≥ 0 . Εδώ έχουμε ισότητα αφού οι μεταβλητές στο αρχικό πρόβλημα δεν περιορίζουν ως προς το πρόσημο. Έστω $\{\delta_s\}$ μία λύση στο διττό πρόβλημα και $\{u\hat{}_i\}$ μία λύση στο αρχικό πρόβλημα. Τότε το σύνολο T των συνασπισμών για τους οποίους $\delta_s>0$, είναι εξ ορισμού ένα ισορροπημένο σύνολο και η λύση του αρχικού προβλήματος μας δίνει ένα διάνυσμα u τέτοιο ώστε $\sum_{i\in S}$ u= f_s για κάθε S∈T αφού η θετική τιμή μιας δίσημης μεταβλητής αναγκάζει τους αρχικούς περιορισμούς να είναι ισότητες. Όμως τότε $u^S \in V_S$ για κάθε S ∈T και εάν το παίγνιο είναι ισορροπημένο, αυτό υποδηλώνει ότι $u \in V_N$ ή ότι $\sum_1^n u_i \leq f_N$. Αυτό δείχνει ότι στην περίπτωση της μεταβαλόμενης χρησιμότητας, ένα ισορροπημένο παίγνιο δεν έχει άδειο πυρήνα. Όπως θα δούμε, ένα παίγνιο n ατόμων, χωρίς την υπόθεση της μεταβαλόμενης χρησιμότητας, απαιτεί πιο περίτεχνες τεχνικές από αυτές του γραμμικού προγραμματισμού.

5.3 Ένα Συνδιαστικό Πρόβλημα που Υποδηλώνει το Θεώρημα 1

Η απόδειξη του θεωρήματος 1 θα χωριστεί σε δύο μέρη. Θα ξεκινήσουμε διαλέγοντας από κάθε σύνολο Vs (όπου S ένα κανονικό υποσύνολο του N) ένα αριθμό διανυσμάτων $u^{1,S}$, $u^{2,S}$, …. $u^{s,\ Su}$, που δε δίνει σε κανένα παίκτη στο S λιγότερα από το μέγιστο που μπορεί να κατορθώσει μόνος του. Εάν το παίγνιο είναι ισορροπημένο, ο αλγόριθμος θα υπολογίσει ένα διάνυσμα στο V_N το οποίο δε θα μπορεί να μπλοκαριστεί από οποιονδήποτε συνασπισμό κάνοντας χρήση ενός διανύσματος από αυτό σύνολο . Η δίοδος προς το όριο,η οποία περιλαμβάνει την επιλογή ενός απείρου, και η πυκνή ακολουθία διανυσμάτων από κάθε Vs θα συζητηθούν αργότερα.

Ουσιαστικά προσεγγίζουμε κάθε σύνολο στο Vs μέσω ενός συνόλου με έναν πεπερασμένο αριθμό <<corners>> όπως είδαμε στο σχήμα 22. Αφού αυτή η προσέγγιση δεν αλλάζει την ιδιότητα που έχει το παίγνιο να είναι ισορροπημένο, μπορούμε προς στιγμή, να περιορίσουμε την προσοχή μας σε εκείνα τα παίγνια στα οποία τα σύνολα Vs έχουν στην πραγματικότητα περιορισμένο αριθμό γωνιών για κάθε κανονικό υποσύνολο S.



Σχήμα 5.1

Θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε μία περίληψη μέσω ενός πίνακα C , με n γραμμές , τον αριθμό των παικτών στο παιχνίδι, και $\Sigma_s k_s$ στήλες, μία για κάθε διάνυσμα του παιγνίου. Οι γραμμές του πίνακα C θα συμβολίζονται με το ι και οι στήλες θα απαιτούν το ζεύγος (j,S) έτσι ώστε μία τυπική είσοδος στο C να ορίζεται ως c_{ijs}. Εάν ο παίκτης ι συμπεριλαμβάνεται στο συνασπισμό S, τότε το c_{ijs} ορίζεται ως η ι-οστή συνιστώσα του διανύσματος $uj^{,s}$.Θα ήταν χρήσιμο να ορίσουμε το c_{ijs} να είναι ίσο με ένα μεγαλύτερο αριθμό M εάν ο παίκτης ι δεν είναι μέλος του S. Η επιλογή του M δεν έχει σχέση με τον υπολογισμό αν το επιλέξουμε να είναι μεγαλύτερο οποιαδήποτε από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $u^{j,s}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

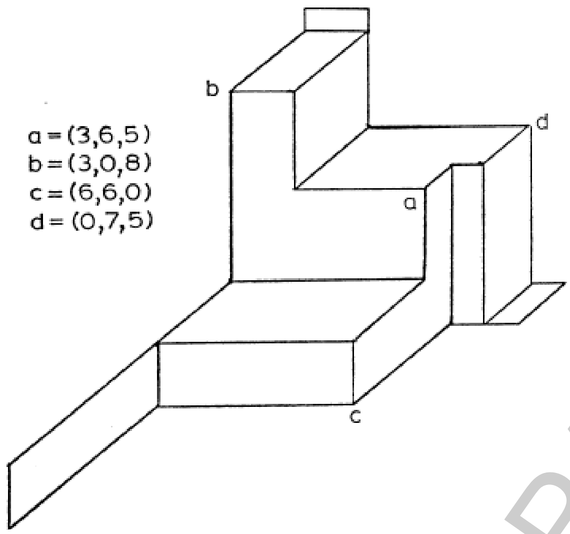
Ας ορίσουμε μία μήτρα A με n γραμμές και $\Sigma_s k_s$ στήλες με α_{ijS}= 1 εάν ο παίκτης ι είναι μέσα στο συνασπισμό S ,αλλιώς α_{ijS}=0. Η A είναι η μήτρα εμφάνισης των παικτών έναντι θέτει , με τη στήλη που αναπαριστά το S να εμφανίζεται τόσες φορές όσο υπάρχουν γωνίες στο Vs.

Θα ξεκινήσω με ένα παράδειγμα ενός παιγνίου τριών ατόμων προκειμένου να δείξω αυτό το πρόβλημα. Σε αυτό το παράδειγμα, το σύνολο Vs για έναν τυπικό συνασπισμό δύο ατόμων θα υποθέσουμε ότι έχει δύο γωνίες. Η μήτρα C δίνεται παρακάτω

$$\begin{array}{ccccccccc} (1) & (2) & (3) & (1,12) & (2,12) & (1,13) & (2,13) & (1,23) & (2,23) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & M & M & 6 & 2 & !2 & 3 & M & M \\ M & 0 & M & 6 & 8 & M & M & 7 & 2 \\ M & M & 0 & M & M & 2 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Σε αυτό το παράδειγμα, κάθε παίκτης μπορεί να διατηρήσει από μόνος του μία μέγιστη χρησιμότητα 0. Γενικά δε χρειάζεται να συμπεριλαμβάνουμε πληροφορίες για το V_N στη μήτρα C. Είναι χρήσιμο επίσης να εξετάσουμε το πρόβλημα από γεωμετρικής άποψης. Έχω σχεδιάσει στο σχέδιο 2 το σύνολο, το οποίο μπορούμε να ονομάσουμε V, των σημείων στο θετικό orthant τα οποία πρέπει οπωσδήποτε να περιλαμβάνονται στο V(123) , εάν το παίγνιο είναι ισορροπημένο. Το V συμπεριλαμβάνει εκείνα τα σημεία του επιπέδου στα οποία έχουν πρόσβαση οι συνασπισμοί δύο παικτών, αφού ένας συνασπισμός δύο παικτών και ο συμπληρωματικός του συνασπισμός ενός ατόμου σχηματίζουν μία ισορροπημένη συλλογή. Το V επίσης συμπεριλαμβάνει εκείνα τα διανύσματα (u1,u2,u3) με (u1,u2)$\in$ V12, (u1,u3)$\in$ V13 και (u2,u3)$\in$ V23. Σύμφωνα με το συμπέρασμα ότι το παίγνιο είναι ισορροπημένο, γνωρίζουμε μόνο ότι το V(123) συμπεριλαμβάνει το V. Μπορεί όμως να είναι αρκετά μεγαλύτερο. Κανένα σημείο στο θετικό orthant δεν μπορεί να μπλοκαριστεί από οποιονδήποτε συνασπισμό ενός παίκτη. Υπάρχει κάποιο σημείο στο V το οποίο να μπορεί να μπλοκαριστεί από ένα συνασπισμό ο οποίος δεν είναι δύο παικτών; Με άλλα λόγια υπάρχει σημείο στο V του οποίου και οι τρείς προβολές είναι στα όρια των συνόλων των επιπέδων χρησιμότητας που είναι προσιτά από τους συνασπισμούς δύο ατόμων; Ο αναγνώστης μπορεί να εξακριβώσει ότι υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σημείο, το u=(3,6,5). Φυσικά αυτό το διάνυσμα, δε χρειάζεται να είναι στον πυρήνα , εάν δεν είναι βέλτιστο pareto , αλλά τότε οποιδήποτε βέλτιστο σημείο pareto στο V(123) το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το u , είναι μέσα στον πυρήνα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Το διάνυσμα (3,6,5) παράγεται από τα σημεία (6,6,0), (3,0,8) και (0,7,5) με την έννοια ότι εάν σχηματίσουμε την τετραγωνική υπομήτρα του C , που ανταποκρίνεται σε αυτά τα σημεία

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} & M \\ \mathbf{6} & M & \mathbf{7} \\ M & \mathbf{8} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

και ορίσουμε το u να είναι το μικρότερο από την ι-οστή γραμμή αυτής της τετραγωνικής υπομήτρας , τότε (u1,u2,u3)= (3,6,5). Το γεγονός ότι το u δεν μπορεί να μπλοκαριστεί φαίνεται από τη C μήτρα, εάν τα u μποκαριστούν από το S, τότε θα υπάρχει μία στήλη j , S με $c_{ijs}> u_i$ για όλα τα i, και ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει ότι τέτοια στήλη δεν υπάρχει.

Αναλυτικά ,το επιχείρημα ότι το u είναι μέσα στο V(123) , εάν το παίγνιο είναι ισορροπημένο, εξαρτάται από την παρατήρηση:

$(3,6,5)^{12}$ = (3,6)
$(3,6,5)^{13}$ = (3,5)
$(3,6,5)^{23}$ = (6,5)

και τα τρία σύνολα των δύο στοιχείων σχηματίζουν ένα ισορροπημένο σύνολο.

Στη γενική περίπτωση θεωρούμε μία τετραγωνική υπομήτρα του C, και ορίζουμε u_i ως την ελάχιστη από τις εισόδους στην ι-οστή γραμμή αυτής της υπομήτρας. Προκειμένου, το διάνυσμα u, να μας οδηγήσει σε ένα σημείο μέσα στον πυρήνα απαιτούνται να έχει δύο ιδιότητες. Πρώτα, θα πρέπει το u να μη μπλοκάρεται από οποιονδήποτε συνασπισμό, που σημαίνει ότι για κάθε στήλη στη μήτρα C τουλάχιστον μία είσοδος πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη είσοδο στο διάνυσμα u. Φυσικά δεν θα παράγει κάθε τετραγωνική υπομήτρα του C ένα διάνυσμα u με αυτή την ιδιότητα, και ένα μέρος του αλγορίθμου θα ασχοληθεί με καθοριστικές υπομήτρες αυτού του είδους.

Για να συμπεράνουμε ότι το διάνυσμα u είναι μέσα στο V_N η δεύτερη ιδιότητα αφορά τις στήλες της υπομήτρας του C.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Έστω T το σύνολο εκείνων των συνασπισμών του S που εμφανίζονται σε τουλάχιστον μία στήλη της τετραγωνικής υπομήτρας. Για κάθε S στο T, το διάνυσμα u^s, ανήκει σίγουρα στο Vs, αφού είναι μικρότερο ή ίσο με μία από τις γωνίες που εμφανίζονται στο Vs. Προκειμένου να συμπεράνουμε ότι το $u \in V_N$ είναι επαρκές να είναι ισορροπημένο το σύνολο T, ή με άλλα λόγια να υπάρχουν θετικοί αριθμοί δ_s, μηδενικοί για τα S που δεν είναι στο T, και τέτοιοι ώστε

$$\sum_{S \supseteq \{i\}} \delta_S = 1$$

για ι=1,…,n.

Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι οι ισότητες Ax=e (όπου e το διάνυσμα όλων των στοιχείων που είναι 1) έχουν θετικές λύσεις , με $x_{js}=0$, για κάθε στήλη j,S που δεν εμφανίζεται στην τετραγωνική υπομήτρα του C, αφού μπορεί να πάρουμε $\delta_S = \Sigma_j x_{jS}$.

Με άλλα λόγια ψάχνουμε για μία εφικτή βάση,με την έννοια του γραμμικού προγραμματισμού, για τις ισότητες Ax=e. Οι n στήλες αυτής της βάσης οδηγούν στη δημιουργία της τετραγωνικής υπομήτρας του C και το u_i ορίζεται ως το ελάχιστο από την i-οστή γραμμή αυτής της υπομήτρας. Η βάση θα πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε για κάθε στήλη της μήτρας C, τουλάχιστον μία από τις εισόδους να είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη είσοδο στο διάνυσμα u.

Είναι πολύ χρήσιμο να γενικεύσουμε το πρόβλημα, θεωρώντας μία αυθαίρετη μήτρα A, με n γραμμές και m στήλες, αντί για μία επαναλαμβανόμενη μήτρα εμφάνισης, μία μήτρα C που έχει τις ίδιες διαστάσεις με την A, και ένα αυθαίρετο διάνυσμα b. Σε αυτή την πιο γενική περίπτωση, και οι δύο μήτρες θα έχουν το j αντί για το πιο περίπλοκο δείκτη (j, S) που είναι κατάλληλο για μια επαναλαμβανόμενη μήτρα εμφάνισης. Ψάχνουμε για μία εφικτή βάση για τις ισότητες Ax=b και για κάθε τέτοια βάση ορίζουμε $u_i=\min \{c_{ij} \mid$ για κάθε j που εμφανίζεται στη βάση.} Θα υπάρχει όμως τέτοια βάση ώστε για κάθε στήλη k να υπάρχει τουλάχιστον ένα i με $u_i \geq c_{ik}$;

Προκειμένου να εγγυηθούμε μια απάντηση που επιβεβαιώνει αυτή τη γενική ερώτηση, οι μήτρες A και C θα έχουν τις ιδιότητες που περιγράφονται στον παρακάτω ορισμό:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Έστω A και C δύο μήτρες nxm της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_{1,n+1} & a_{1,m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n,n+1} & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} & c_{1,n+1} & c_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} & c_{n,n+1} & cn,m \end{bmatrix}$$

Λέμε ότι οι μήτρες A και C είναι **κανονικής μορφής** εάν

1) για κάθε γραμμή i, το c_{ii}, είναι το ελάχιστο από τα στοιχεία στη γραμμή του και
2) για κάθε μη διαγώνιο στοιχείο c_{ij}, στην τετραγωνική μήτρα C που αποτελείται από τις n πρώτες στήλες και για κάθε στήλη k>n, έχουμε $c_{ij} \geq c_{ik}$.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να εξακριβώσει ότι οι μήτρες A και C που προκύπτουν από πεπερασμένο παίγνιο είναι συγκεκριμένης μορφής εάν τα διανύσματα $u^{j,S}$, τα οποία αναπαριστούν τις γωνίες, δε δίνουν σε κάθε παίκτη στο S λιγότερα από αυτά που μπορεί να αποκτήσει από μόνος του και εάν η σταθερά M επιλέγεται έτσι ώστε να είναι μεγαλύτερη από τα στοιχεία αυτών των διανυσμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω A και C δύο μήτρες nxm συγκεκριμένης μορφής. ‘Έστω b ένα θετικό διάνυσμα τέτοιο ώστε το σύνολο {x| x≥ 0 και Ax=b} να είναι ορισμένο. Τότε υπάρχει μία βάση για την εξίσωση Ax=b, τέτοια ώστε αν ορίσουμε u_i=min c_{ij} για όλες τις στήλες j σε αυτή τη βάση , τότε για κάθε στήλη k υπάρχει ένα στοιχείο με $u_i \geq c_{ik}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2 είναι ξεκάθαρο πως ένα ισορροπημένο παίγνιο δεν έχει κενό πυρήνα εάν κάθε Vs έχει ένα πεπερασμένο αριθμό γωνιών.

5.4 ΕΝΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2

Το πρόβλημα που παρουσιάστηκε στο θεώρημα 2 δεν είναι καθαρά ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού παρότι εμπλέκονται μόνο γραμμικές ανισότητες. Οποιαδήποτε προσπάθεια να προσεγγίσουμε αυτό το πρόβλημα με μία γραμμική προγραμματιστική μορφή θα αντιμετώπιζε την εξής δυσκολία : δεν μπορούν να εξεταστούν ταυτόχρονα όλες οι σχετικές ανισότητες. Η προσπάθεια χρήσης προγραμματιστικών μεθόδων ακεραίων δεν θα μπορούσε ούτε να παράσχει ένα θεώρημα ούτε να εκμεταλλευτεί την ειδική δομή του προβλήματος. Ο αλγόριθμος αυτής της εργασίας, ο οποίος βασίζεται στην έξυπνη διαδικασία που ανακάλυψαν οι Lemke και Howson για τη λύση ενός παιγνίου δύο ατόμων μη μηδενικού αθροίσματος, παρέχει μία μέθοδο για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος, και αφού ο αλγόριθμος τερματίζει σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων,εγγυάται την ύπαρξη μίας τουλάχιστον λύσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Το θεώρημα 2 μπορεί να αποδειχθεί κατευθείαν με την εξέταση ενός παιγνίου δύο ατόμων μη μηδενικού αθροίσματος στο οποίο ένας παίκτης έχει μία μήτρα πληρωμών A της οποίας οι στήλες αφορούν τις στρατηγικές του παίκτη. Ο δεύτερος παίκτης, του οποίου οι στρατηγικές είναι στις γραμμές, έχει μία μήτρα πληρωμών $B= (b_{ij})$ όπου $b_{ij}= -1/ cij^{n}$ (μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι cij>0 , αφού δεν αλλάζει το θεώρημα εάν κάθε είσοδος στο C αυξάνεται ισόποσα). Το θεώρημα 2 μπορεί να διατηρηθεί , αφήνοντας τον εκθέτη n να τείνει στο άπειρο και θεωρώντας μία συγκλίνουσα υποακολουθία των σημείων ισορροπίας για αυτά τα παίγνια. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή ,αλλά αφού περιλαμβάνει την επιλογή μιας συγκλίνουσας υποακολουθίας , δεν είναι βασικά εποικοδομητική παρότι το επιχείρημα των **Lemke και Howson** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ενός σημείου ισορροπίας για κάθε τιμή του n. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα παρουσιάσουμε μία παραλλαγή αυτού του αλγορίθμου που είναι εφαρμόσιμη απευθείας στην οριακή περίπτωση.

Η ορολογία που εισάγουμε στον ακόλουθο ορισμό θα είναι χρήσιμη στη συζήτηση του οριακού αλγορίθμου.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Μία ***τακτική βάση*** για τη μήτρα C αποτελείται από ένα σύνολο n στηλών j1,j2,…,jn έτσι ώστε εάν u_i=min (c_{ij1}, ci_{j2},…, c_{ijn}) τότε για κάθε στήλη k υπάρχει τουλάχιστον ένα i με $u_i \geq c_{ik}$.

Ο όρος ***τακτική βάση*** που χρησιμοποιείται σε αυτόν τον ορισμό υποδηλώνει μία αναλογία με γραμμικό προγραμματισμό , όπως θα δούμε σε μερικές από τις ιδιότητες που περιγράφονται παρακάτω. Πρώτα από όλα όμως θα πρέπει να τονίσουμε ότι το θεώρημά μας θα αποδειχθεί αν και μόνο αν μπορέσουμε να εκθέσουμε μία βάση για το A η οποία θα είναι ταυτόχρονα και τακτική βάση για το C.

Ο αλγόριθμος για τον προσδιορισμό ενός τέτοιου συνόλου στηλων εναλλάσεται ανάμεσα σε pivot βήματα για γραμμικές ισότητες και μία σχετική λειτουργία στη μήτρα C. Βγάζουμε το συμπέρασμα ότι όλες οι μεταβλητές που σχετίζονται με τις n στήλες μίας βάσης για τις ισότητες Ax=b είναι αυστηρά θετικές. Το μη γενικευμένο συμπέρασμα για το C παίρνει τη νέα μορφή ότι δεν μπορούν να είναι ίσα δύο στοιχεία στην ίδια γραμμή. Τα δύο αυτά συμπεράσματα μπορούν να προκαλέσουν σύγχυση των αντιστοιχων μητρών.

Πριν στρέψουμε τη συζήτηση στα pivot βήματα θα ήταν χρήσιμο να τονίσουμε ότι το μη εκφυλιστικό συμπέρασμα για το C υποδηλώνει ότι κάθε στήλη μιας τακτικής βάσης έχει ακριβώς μία ελάχιστη γραμμή που χρησιμοποιείται για το σχηματισμό του διανύσματος u. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εάν η στήλη k, στον ορισμό μιας τακτικής βάσης, λαμβάνεται ως στήλη στη βάση.

ΛΗΜΜΑ 1 : Έστω j1,j2,…,jn οι στήλες μίας βάσης για τις ισότητες Ax=b και j* μία αυθαίρετη στήλη εκτός αυτού του συνόλου. Τότε εάν το πρόβλημα είναι μη εκφυλιστικό και το κυρτό σύνολο {x| x≥ 0 και Ax=b} είναι ορισμένο, υπάρχει μία μοναδική εφικτή βάση η οποία αποτελείται από τη στήλη j* και n-1 στήλες της κανονικής εφικτής βάσης.

Αυτό αποτελεί φυσικά ένα σίγουρο αποτέλεσμα του γραμμικού προγραμματισμού το οποίο δηλώνει ότι εάν το κλειστό σύνολο είναι ορισμένο και το πρόβλημα είναι μη εκφυλιστικό τότε οποιαδήποτε στήλη έξω από τη βάση μπορεί να εισαχθεί και ακριβώς μία στήλη θα διαγραφεί ως αποτέλεσμα ενός pivot βήματος. Κάτι παρόμοιο με ένα pivot βήμα μπορεί να εφαρμοστεί σε μία τακτική βάση του C. Με μία εξαίρεση, μία συγκεκριμένη στήλη σε μία τακτική βάση μπορεί να μετακινηθεί και μία ξεχωριστή στήλη που εισήχθη από έξω έτσι ώστε το νέο σύνολο στηλών να αποτελεί επίσης τακτική βάση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΛΗΜΜΑ 2: Έστω j1,j2,…,jn μία κανονική βάση του C και j1 μία αυθαίρετη αυτών των στήλων. Υποθέτουμε ότι τα j1,j2,…,jn δεν επιλέγονται όλα από τις n πρώτες στήλες του C.Τότε εάν δεν είναι δύο στοιχεία της ίδιας γραμμής ίσα και εάν το C είναι συγκεκριμένης μορφής , τότε υπάρχει μία στήλη j*≠j1 έτσι ώστε τα j1,j2,…,jn να αποτελούν μία κανονική βάση.

Τα βήματα που χρειάζονται για να απομακρύνουμε μία συγκεκριμένη στήλη από μία κανονική βάση και να την αντικαταστήσουμε με μία στήλη εκτός της βάσης ονομάζονται τακτικά pivot βήματα. Πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό του τακτικού pivot step και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το νέο σύνολο στηλων αποτελεί μία κανονική βάση και στο τέλος θα δείξουμε ότι εάν δεν εισάγουμε καμία καινούργια στήλη, πάλι θα έχουμε κανονική βάση.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Θεωρείστε μία κανονική βάση για το C και μία συγκεκριμένη στήλη που θα αφαιρεθεί. Στη nx n-1 μήτρα των στηλών που απομένουν, ακριβώς μία στήλη θα περιλαμβάνει δύο minimizers γραμμών, η μία από τις οποίες είναι καινούρια και η άλλη είναι γραμμή minimizer για τη βάση. Έστω ότι η γραμμή που συσχετίζεται με το τελευταίο έχει ένα περιεχόμενο i*. Εξετάζουμε όλες τις στήλες στο C για τις οποίες c_{ik}=min {c_{ij}| το j παραμένει στη βάση} για όλα τα ι που δεν είναι ίσα με το i*. Από αυτές τις στήλες επιλέγουμε αυτή που μεγιστοποιεί το c_{ik}.Ένα τακτικό pivot step εισάγει αυτή τη στήλη στη βάση.

Είναι πιθανό να κάνουμε ένα τακτικό pivot step εάν υπάρχη στήλη στο C για την οποία c_{ik}=min {c_{ij} | το j παραμένει στη βάση} για όλα τα i που δεν είναι ίσα με το i*. Αφού όμως ο πίνακας C είναι συγκεκριμένης μορφής η στήλη

$$\begin{bmatrix} c_{1i*} \\ \vdots \\ c_{ni*} \end{bmatrix}$$

θα ικανοποιήσει τη συνθήκη εκτός και αν οι n-1 στήλες που απομένουν στη βάση προέρχονται από τις τις n πρώτες στήλες της μήτρας C.

Εάν η j* είναι η στήλη που μπήκε στη βάση, τότε το νέο διάνυσμα u δίνεται από το u'_i=min{c_{ij}| το j παραμένει στη βάση} για όλα τα i που δεν είναι ίσα με το i* και $u'_{i*}=c_{ij*}$. Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται το j* δείχνει ότι δεν υπάρχει στήλη στο C της οποίας τα στοιχεία να είναι αυστηρώς μεγαλύτερα από αυτά του u' , έτσι ώστε το νέο σύνολο στηλών να είναι μία κανονική βάση.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι μόνο η εισαγωγή της στήλης j* θα οδηγήσει σε κανονική βάση, ας θεωρήσουμε την τετραγωνική υπομήτρα από την αρχική κανονική βάση.

$$\begin{bmatrix} c_{\frac{1}{i}} & c_{\frac{1}{2}} & & c_{\frac{1}{n}} \\ c_{\frac{2}{i}} & c_{\frac{2}{2}} & \cdots & c_{\frac{2}{n}} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\frac{n}{i}} & c_{\frac{n}{2}} & \cdots & c_{\frac{n}{n}} \end{bmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι , θα υποθέσουμε ότι οι minimizers γραμμών βρίσκονται διαγώνια έτσι ώστε η στήλη j1 να απομακρυνθεί από τη βάση και το μικρότερο στοιχείο στην πρώτη γραμμή να είναι το c_{1j2}. Αυτό σημαίνει ότι i*=2.

Όταν φέρνουμε μία νέα στήλη για να αντικαταστήσει την πρώτη στήλη, η c_{3j3}, θα πρέπει ακόμα να είναι η μικρότερη γραμμή για την τρίτη γραμμή, αφού αλλιώς δεν θα υπήρχε μικρότερη γραμμή για την τρίτη στήλη , παρομοίως και για τις $c_{4j4}, \ldots, c_{njn}$. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι αν μπει η γραμμή j* στη βάση ,τότε $c_{3j*} > c_{3j3}$, $c_{4j*} > c_{4j4}, \ldots, c_{nj*} > c_{njn}$.

Δύο περιπτώσεις προκύπτουν για τη μικρότερη γραμμή από τις δύο πρώτες γραμμές: $c_{1j*} < c_{1j2}$, $c_{2j*} < c_{2j2}$ ή το αντίθετο. Η πρώτη περίπτωση οδηγεί στην αρχική βάση. Για να το δούμε αυτό, εάν δε συβεί η πρώτη περίπτωση, το νέο διάνυσμα u θα δίνεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} c_{1j1} \\ c_{2j2} \\ \vdots \\ c_{njn} \end{bmatrix},$$

και εάν το νέο σύνολο των στηλων αποτελούν μία κανονική βάση, τότε για κάθε στήλη k πρέπει $u_i \geq c_{ik}$ για κάποια i. Όμως εάν το k είναι η στήλη j αυτό σημαίνει ότι $c_{1j*} > c_{1j1}$. Από την άλλη πλευρά, το παλιό σύνολο στηλων ήταν μία κανονική βάση και έτσι για κάθε k, $c_{iji} > c_{ik}$ για κάποια i. Εδώ όμως μπορούμε να πάρουμε k=j* και βλέπουμε ότι $c_{1j1} \geq c_{1j*}$ έτσι ώστε $c_{1j1} = c_{1j*}$. Από το μη εκφυλιστικό συμπέρασμα , δεν μπορούν να είναι ίσα δύο στοιχεία της ίδιας γραμμής, επομένως j*=j1 και είμαστε πίσω στο αρχικό σύνολο στηλών.

Στη δεύτερη παραλλαγή, τα μικρότερα στοιχεία των δύο πρώτων γραμμών διατηρούνται, για να προχωρήσουμε σε νέες βάσεις. Σ΄ αυτή την περίπτωση ψάχνουμε για τη στήλη j* στην οποία : $c_{1j*} > c_{1j2}$, $c_{3j*} > c_{3j3}, \ldots, c_{nj*} > c_{njn}$, ή $c_{ij*} > \min \{c_{ij} \mid$ j να παραμένει στη βάση $\}$ για όλα τα $i \neq 2$ και προκειμένου να είναι εφικτή η νέα βάση θα πρέπει να επιλέξουμε τέτοιες στήλες για να μεγιστοποιηθεί το c_{2j*}. Αυτή είναι η στήλη που περιγράψαμε στο δεύτερο ορισμό και στο δεύτερο λήμμα .

Κάπου εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι τα τακτικά pivot steps είναι αντιστρέψιμα. Εάν διαγραφεί το j1 από μία βάση και μπεί το j*, τότε το j* μπορεί να διαγραφεί από την καινούρια βάση και να διατηρηθεί η αρχική. Τα τακτικά pivot steps είναι πολύ εύκολο να πραγματοποιηθούν. Περιλαμβάνουν μόνο τακτικές συγκρίσεις των στοιχείων της ίδιας γραμμής και επομένως οι είσοδοι στη μήτρα C μπορούν να επιλεγούν από αυθαίρετα διατεταγμένα σύνολα, ένα για κάθε γραμμή, αντί για πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα οι είσοδοι σε μία γραμμή μπορεί να είναι δεσμίδες εμπορευμάτων διατεταγμένα με σειρά προτίμησης.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να συζητήσουμε για τον αλγόριθμο που καθορίζει το σύνολο στηλών που ταυτόχρονα αποτελεί μία εφικτή βάση για τις ισότητες Ax=b και μία κανονική βάση για τη μήτρα C. Είναι αρκετά εύκολο να βρεθεί ένα ζεύγος βάσεων, μία εφικτή βάση A και μία κανονική για τη μήτρα C, οι οποίες να μην είναι ίδιες αλλά να είναι αρκετά ‘κοντινές’. Ένα τέτοιο ζεύγος θα χρησιμοποιήσουμε σαν σημείο αρχής στον αλγόριθμο. Οι στήλες (1,2,…,n) σχηματίζουν μία εφικτή βάση για το A , και οι στήλες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\begin{bmatrix} c_{1j} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2j} & c_{2,2} & & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{nj} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν μία κανονική βάση για τη μήτρα C εάν το j επιλεγεί από όλες τις στήλες k>n έτσι ώστε να μεγιστοποιεί το c_{1k}. Οι στήλες της βάσης C είναι της μορφής (j,2,…,n). Μπορούμε να περιγράψουμε τη σχέση ανάμεσα στις δύο βάσεις λέγοντας ότι η βάση A περιλαμβάνει τη στήλη 1 και τις n-1 υπολειπόμενες στήλες. Οι n-1 υπολειπόμενες στήλες περιλαμβάνονται και στη βάση C μαζί με μία επιπρόσθετη στήλη εκτός της 1. Η ευφυής ιδέα των Lemke και Howson είναι η επιμονή για τη διατήρηση αυτής της σχέσης ανάμεσα στις δύο βάσεις.

Με άλλα λόγια, η εφικτή βάση A θα περιγραφεται πάντα από τις στήλες (1, j2,…,jn) και η κανονική βάση του C από (j1, j2,…,jn) με j1≠1. Τι βήματα πρέπει να κάνουμε όμως για να διατηρήσουμε αυτή την ιδιότητα; Υπάρχουν μόνο δύο εφικτά βήματα, ένα pivot step για τη μήτρα A και ένα τακτικό pivot step για τη μήτρα C.

Ένα pivot step για τη μήτρα A θα αφήσει τη σχέση αυτή ανεπηρέαστη μόνο εάν εισαχθεί η στήλη j1 στη βάση A. Φυσικά είναι πιθανό να διαγραφεί η στήλη 1 όταν εισαχθεί η στήλη j1 . Αυτό το πρόβλημα θα λυνόταν εάν αυτό συνέβαινε αφού η ίδια βάση (j1, j2,…,jn) θα μπορούσε να διατηρηθεί τότε και για τις δύο μήτρες. Εάν δε διαγραφεί η στήλη 1 από το pivot step, τότε θα διαγραφεί κάποια άλλη ας πούμε η ji.Τότε οι δύο βάσεις θα έχουν την ίδια σχέση με το ji, η οποία είναι η στήλη της C βάσης που δεν εμφανίζεται στην A βάση.

Η άλλη πιθανή λύση είναι να γίνει ένα τακτικό pivot step στη μήτρα C, διαγράφοντας έτσι μία από τις στήλες της. Η σχέση ανάμεσα στις βάσεις A και C μπορεί να διατηρηθεί μόνο εάν διαγραφεί η στήλη j1 από τη βάση C. Αν διαγραφεί η j1 και εισαχθεί η 1,τότε έχει λυθεί το πρόβλημα αφού η ίδια βάση η (1, j2,…,jn) θα υπάρχει και για τις δύο βάσεις. Από την άλλη πλευρά εάν εισάγουμε τη στήλη j* και διαγραφεί η j1, τότε πάλι οι δύο βάσεις έχουν την ίδια σχέση με το j* να είναι η στήλη της C βάσης που δεν εμφανίζεται στην A βάση.

Όπως είδαμε μπορεί πάντα να γίνει ένα βέλτιστο pivot step στη μήτρα C, εκτός από την περίπτωση όπου οι στήλες ,εκτός από τη j1, στην κανονική βάση για το C επιλεγούν από τις n πρώτες στήλες της μήτρας C. Για να προκύψει αυτή η περίπτωση θα πρέπει η βάση A να είναι (1,2,…,n) και η βάση C (j,2,…,n) έτσι ώστε να είμαστε στο σημείο έναρξης που περιγράψαμε προηγουμένως. Από το σημείο έναρξης μπορούμε να πάρουμε ένα μόνο pivot step , για να εισάγουμε τη στήλη j στη βάση A. Σε όλες τις άλλες καταστάσεις στις οποίες οι A και C έχουν τη σωστή σχέση ,είναι διαθέσιμα δύο pivot steps.

Αυτές οι διαπιστώσεις προτείνουν τον ακόλουθο αλγόριθμο. Ξεκίνα με τις βάσεις που περιγράφηκαν παραπάνω και κάνε εκείνο το pivot step που είναι διαθέσιμο. Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο ένα από τα δύο pivot steps θα είχε χρησιμοποιηθεί προκειμένου να φτάσουμε σε εκείνη την κατάσταση όπου η μοναδική συνέχεια είναι το τελευταίο pivot step. Υπάρχει μία μοναδική συνέχεια σε κάθε βήμα και η διαδικασία μπορεί να τερματίσει μόνο όταν θα pivot σε μία λύση του προβλήματος. Υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός πιθανών λύσεων και αν δε γυρίσουμε ποτέ στην ίδια κατάσταση, η διεργασία αναπόφευκτα θα τερματίσει σε ένα σύνολο στηλών που είναι ταυτόχρονα μία εφικτή βάση για την Ax=b και μια κανονική βάση για το C.

Η επανάληψη είναι πιθανή εάν η πρώτη κατάσταση που επαναλαμβάνεται είναι η αρχική κατάσταση και αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχουν δύο πιθανά βήματα pivot από την αρχική

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

κατάσταση, τα οποία έχουμε δει ότι είναι λανθασμένα. Από την άλλη πλευρά εάν η διεργασία επαναλαμβάνεται για πρώτη φορά σε άλλο σημείο , που δεν είναι η αρχική κατάσταση, τότε θα υπήρχαν τρία πιθανά pivot steps για να προχωρήσει , κάτι το οποίο είναι επίσης αδύνατο. Ο αλγόριθμος επομένως θα πρέπει να τερματίζει σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων με τη λύση του προβλήματος.

Αυτό περιλαμβάνει την απόδειξη του Θεωρήματος 2 και συνεπώς και του Θεωρήματος 1 στην περίπτωση που τα σύνολα Vs έχουν ένα πεπερασμένο αριθμό γωνιών για κάθε κανονικό υποσύνολο S.

5.5 Ένα Παράδειγμα του Αλγορύθμου

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα του αλγορίθμου που εφαρμόζεται σε ένα ισορροπημένο παίγνιο τριών ατόμων. Θα υποθέσω ότι κάθε παίκτης μπορεί να πετύχει από μόνος του ένα μηδενικό επίπεδο χρησιμότητας και τίποτα περισσότερο. Κάθε δύο παίκτες Vs έχουν δύο γωνίες και αφού το παίγνιο είναι ισορροπημένο το V(123) δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψην . Η μήτρα C θα αποτελείται από 12 στήλες , τρεις για κάθε συνασπισμό δύο παικτών και μία στήλη για κάθε μονό παίκτη. Κάθε στήλη θα έχει έναν μεγάλο αυθαίρετο αριθμό ο οποίος βρίσκεται στις γραμμές που αντιστοιχούν σε παίκτες που δεν βρίσκονται στο συνασπισμό και προκειμένου να αποφύγουμε εκφυλισμό , αυτοί οι αριθμοί θα είναι διαφορετικοί για διαφορετικές στήλες.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & M_2 & M_3 & 12 & 3 & 2 & 9 & 5 & 4 & M_{10} & M_{11} & M_{12} \\ M_1 & 0 & M_3 & 6 & 7 & 9 & M_7 & M_8 & M_9 & 5 & 2 & 8 \\ M_1 & M_2 & 0 & M_4 & M_5 & M_6 & 3 & 8 & 10 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα Μ είναι αυθαίρετα και ικανοποιούν τις ανισότητες Μ1>Μ2>…>Μ12> 12. Η μήτρα Α είναι η μήτρα εμφάνισης των παικτών ενάντια των συνόλων που επαναλαμβάνονται. Προκειμένου να αποφύγουμε τον εκφυλισμό στη μήτρα Α , η τελευταία στήλη έχει ‘διαταραχτεί’ από μικρά ε, με 0<ε1<ε2<ε3.

<u>Βημα 1</u>: Ξεκινάμε με μία βάση για τη μήτρα Α η οποία αποτελείται από τις στήλες (1,2,3) και για τη C τις στήλες (10,2,3) έτσι ώστε το διάνυσμα u σε συνδυασμό με αυτή τη C βάση να είναι u= (M10, 0, 0). Το πρώτο βήμα είναι να φέρουμε τη δέκατη στήλη στη βάση Α και το pivot στοιχείο αυτού του βήματος φαίνεται παρακάτω.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+ & \varepsilon_1 \\ 1+ & \varepsilon_2 \\ 1+ & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη στήλη έχει μετακινηθεί από τη βάση Α , επομένως θα πρέπει να μετακινηθεί και από τη βάση C. Στις υπολειπόμενες δύο στήλες, η στήλη δέκα έχει δύο minimizers γραμμών με τον καινούριο στη δεύτερη γραμμή. Επομένως εξετάζουμε όλες τις στήλες k με c_{2k}>5 και c_{3k}>0.

<u>Βήμα 2</u> : Η μήτρα Α που προκύπτει μετά το πρώτο pivot step είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+ & \varepsilon_1 \\ 1+ & \varepsilon_2 \\ 1- & \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Η βάση A είναι (1,3,10) και η βάση C (12,3,10) με το u διάνυσμα u=(M12, 5, 0). Συνεχίζουμε βάζοντας τη στήλη 12 στη βάση.Δε χειάζεται να κάνουμε κανένα υπολογισμό αφού η στήλη 10, η οποία είναι ίδια με τη 12, θα διαγραφεί . Η στήλη 10 θα πρέπει να διαγραφεί από τη βάση C. Αν δούμε την υπομήτρα των στηλών (12, 2,10)

$$\begin{bmatrix} M_{12} & M_2 & M_{10} \\ 8 & M_2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

θα διαπιστώσουμε ότι όταν διαγραφεί η δέκατη στήλη, η στήλη 12 έχει δύο minimizers γραμμών με τον καινούριο να εμφανίζεται στη δεύτερη γραμμή. Επομένως μεγιστοποιούμε το c_{1k} έτσι ώστε $c_{2k}>8$, $c_{3k}>0$ και κρατάμε την έβδομη στήλη.

Ο αλγόριθμος στη συνέχεια προχωράει με τα ακόλουθα pivot steps

Βήμα 3: Η βάση A είναι (1,3,12) και η βάση C είναι (7,3,12) και το u(9,8,0). Η στήλη επτά μπαίνει στη βάση A και η στήλη τρία απομακρύνεται. Η στήλη τρία στη συνέχεια απομακρύνεται από τη βάση C και μπαίνει η στήλη οκτώ.

Βήμα 4: Η βάση A είναι (1,7,12) και η βάση C είναι (7,8,12) και το u(5,8,3). Η στήλη οκτώ μπαίνει στη βάση A και η στήλη επτά απομακρύνεται. Η στήλη επτά στη συνέχεια απομακρύνεται από τη βάση C και μπαίνει η στήλη τέσσερα.

Βήμα 5: Η βάση A είναι (1,8,12) και η βάση C είναι (4,8,12) και το u(5,6,4). Η στήλη τέσσερα μπαίνει στη βάση A και η στήλη ένα απομακρύνεται, έτσι ώστε να διατηρηθεί η λύση. Οι στήλες (4,8,12) σχηματίζουν μία εφικτή βάση για την A και μία κανονική βάση για το C. Το διάνυσμα χρησιμότητας u (5,6,4) δεν μπορεί να μπλοκαριστεί από οποιοδήποτε σύνολο ενός ή δύο παικτών και εάν το παίγνιο είναι ισορροπημένο , τότε το διάνυσμα θα πρέπει να βρίσκεται στο V(123). Οποιοδήποτε pareto βέλτιστο σημείο μέσα στο V(123) που είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το (5,6,4) θα πρέπει να βρίσκεται μέσα στον πυρήνα.

Υπάρχει ένα ουσιαστικό ποσό αυθαιρεσίας στην αρχή του αλγορίθμου: στη διάταξη των M, στη λεξικογραφική διάταξη ,που χρησιμοποιήθηκε στη μήτρα A και στον καθορισμό ενός συνόλου βάσεων οι οποίες διαφέρουν κυρίως σε μία στήλη. Η ερώτηση για το ποια σημεία του πυρήνα θα καθοριστούν(επηρεαστουν) από αυτές τις επιλογές είναι σημαντική αλλά θα ήθελα να την αναβάλω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

5.6 Μερικά Γενικά Συμπεράσματα

Έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος 1 για την περίπτωση στην οποία κάθε Vs έχει έναν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Μπορούμε να μελετήσουμε τη γενική περίπτωση επιλέγοντας ένα πεπερασμένο αριθμό διανυσμάτων από κάθε σύνολο Vs και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο έτσι ώστε να κρατήσουμε ένα διάνυσμα στο V_N τέτοιο που να μη μπορεί να μλοκαριστεί από οποιοδήποτε διάνυσμα της λίστας. Εάν ο αριθμός των διανυσμάτων σε κάθε Vs αυξάνεται συστηματικά , και γίνεται παντού μεγάλος εντός ορίου , θα κρατήσουμε μία ακολουθία διανυσμάτων στο V_N και κάθε οριακό σημείο αυτής της ακολουθίας δεν θα μπορεί να μπλοκαριστεί από οποιονδήποτε συνασπισμό , με βάση το θεώρημα 1.

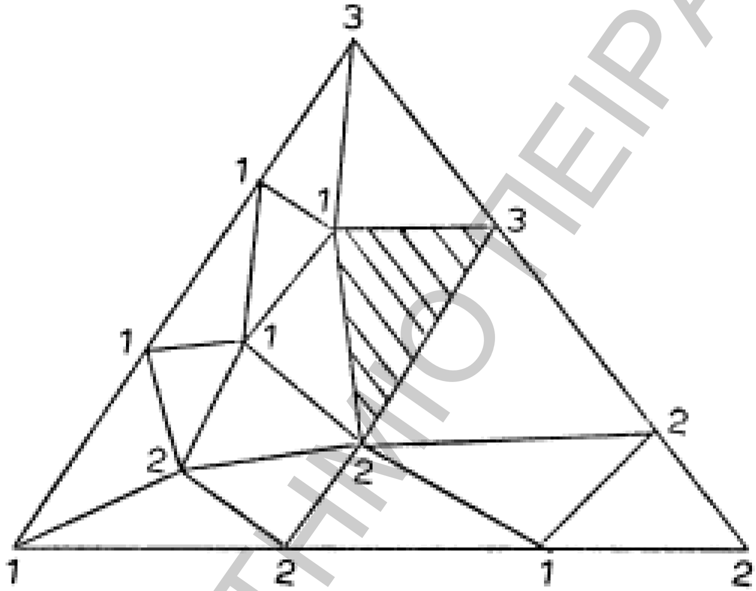
Στη δεύτερη παράγραφο δείξαμε ότι σε μία οικονομία συναλλαγων,η κυρτότητα των επιλογών δείχνει ότι το παίγνιο είναι ισορροπημένο και επομένως δεν έχει κενό πυρήνα. Εάν ο αριθμός των παικτών τείνει στο άπειρο με ένα μη συνετό τρόπο, και βγάλουμε μερικά επιπλέον συμπεράσματα, ο πυρήνας πλησιάζει το σύνολο της συναγωνιστικής ισορροπίας. Η ύπαρξη της συναγωνιστικής ισορροπίας έχει αποδειχθεί με ένα επιχείρημα που βασίζεται σε αλγόριθμο και όχι στη χρήση συγκεκριμένων σημείων των θεωρημάτων. Μία εναλλακτική διαδικασία την οποία ανακάλυψε ο Mr Rolf Mantel είναι να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2 κατευθείαν στις υπάρχουσες τιμές ισορροπίας χωρίς καμία αναφορά στη θεωρία παιγνίων n ατόμων.

Θα ήθελα να προτείνω δύο μοτίβα προς αποφυγήν της αφηρημένης απόδειξης της υπάρχουσας ισορροπίας που έδωσα προηγουμένως. Αρχικά η σύγχρονη μελέτη των συναγωνιστικών μοντέλων εστιάζει στα προβλήματα της ύπαρξης και όχι στα υπολογιστικά προβλήματα και αυτή η δεύτερη πλευρά του προβλήματος αξίζει να μελετηθεί. Φυσικά απαιτείται ένα μεγάλο ποσό πληροφοριών προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές ισορροπίας σε μία πραγματική οικονομία , και αυτό θα συνεχίσει να ισχύει ακόμα και αν οι ικανότητες των υπολογιστών εξελιχτούν ραγδαία στο μέλλον. Από την άλλη πλευρά πιστεύω ότι οι πειραματικοί υπολογισμοί σε μικρά οικονομικά μοντέλα θα είναι πολύ χρήσιμοι και τώρα είναι εφικτό να γίνονται τέτοιοι υπολογισμοί σε μοντέλα που περιλαμβάνουν την πλευρά του καταναλωτή σε ότι αφορά την οικονομία.

Για να είμαστε σίγουροι, κάποια σημεία των θεωρημάτων προσφέρουν μία μέθοδο υπολογισμού των τιμών ισορροπίας. Έστω ότι fj(π) η πλεονάζουσα ζήτηση για το j προιόν στην τιμή π. Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, ικανοποιώντας έτσι τον κανόνα του Warlas {π f(π)=0 } ,και ομογενείς μηδενικού βαθμού. Σε ένα σύστημα ισορροπημένων τιμών κάθε πλεονάζουσα ζήτηση είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός , και η ιδιότητα της ομοιογένειας μας επιτρέπει να περιορίσουμε την προσοχή μας στις τιμές που βρίσκονται στο simplex πj≥0, Σπj=1. Έστω ότι η τιμή simplex διαιρείται σε μία απλή υποδιαίρεση και ονομάζει κάθε κορυφή της υποδιαίρεσης με ένα προιόν του οποίου η πλεονάζουσα ζήτηση είναι μικρότερη ή ίση από το μηδέν στο σύστημα τιμών. Τότε το λήμμα του Sperner, το βασικό θεώρημα για την απόδειξη θεωρημάτων σταθερού σημείου, μας λέει ότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μικρό simplex του οποίου όλες οι κορυφές θα έχουν ξεχωριστές ονομασίες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Εάν η υποδιαίρεση είναι αρκετά καλή, το σύστημα τιμών στο κέντρο του ξεχωριστού συμπλέγματος θα έχει πλεονάζουσα ζήτηση μικρότερη ή ίση με το μηδέν ή αν τα θετικά πλεονάζοντα προιόντα είναι πολύ μικρά. Η τιμή που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο θα είναι αρκετά κοντά στην τιμή ισορροπίας με μία συναρτησιακή έννοια, όχι όμως απαραίτητα με την έννοια της Ευκλείδιας απόστασης. Η συναρτησιακή έννοια της απόστασης, με την οποία κάθε αγορά είναι κοντά στην ισορροπία ,είναι η επιθυμητή απόσταση , και αφού η πλεονάζουσα ζήτηση για έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών διανυσμάτων μπορεί να υπολογιστεί εφόσον γνωρίζουμε τις προτιμήσεις των καταναλωτών και το σύνολο παραγωγής, έχουμε μία μεθοδολογία υπολογισμού η οποία βασίζεται σε σταθερού σημείου θεωρήματα για τον υπολογισμό των τιμών ισορροπίας με ένα βαθμό ακρίβειας.



Όταν τα σύνολα Vs προσεγγίζονται από σύνολα που έχουν ένα πεπερασμένο αριθμό γωνιών, τότε ο αλγόριθμός μας θα υπολογίσει,με έναν παρόμοιο συναρτησιακό τρόπο, ένα σημείο κοντά στον πυρήνα. Το πλεονέκτημά του σε σχέση με τη διαδικασία που περιγράφεται στο λήμμα του Sperner είναι ότι η τελευταία τεχνική είναι μία πολύ κουραστική αναζήτηση και όχι ένας συστηματικός αλγόριθμος. Αυτή είναι μία διάκριση που μπορεί να την κατανοήσει κάποιος με εμπειρία στους υπολογισμούς, πάραυτα και ο αναγνώστης μπορεί να συγκρίνει αυτή την κατάσταση με εκείνη που προκύπτει από τον γραμμικό προγραμματισμό. Η εξωθενουτική αναζήτηση όλων των κορυφών ενός κυρτού πολύεδρου προκειμένου να βρεθεί το μέγιστο μιάς γραμμικής συνάρτησης είναι λιγότερη αποτελεσματική σαν μία υπολογιστική συσκευή παρά σαν τη σειριακή ακολουθία των βημάτων που περιγράφηκαν.

Το δεύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου που συζητήσαμε σε αυτή την εργασία βρίσκεται στην πιθανότητα της οικονομικής του ερμηνείας. Αφού το συμβατικό επιχείρημα τιμών του Walrasian δεν οδηγεί πάντα σε ισορροπία, δεν έχουμε προς το παρόν μία τυπική έγκυρη διαδικασία υπολογισμού των προβλημάτων που περιλαμβάνουν την πλευρά του καταναλωτή σε μία οικονομία, κάτι που ταυτόχρονα προτείνεται στην οικονομία. Μία εξουθενωτική αναζήτηση που βασίζεται στο λήμμα του Sperner, δεν έχει οικονομική ερμηνεία σαν μία πιθανή μηχανική ρύθμιση όταν φθάνουμε σε κατάσταση ισορροπίας. Από την άλλη πλευρά, η μεθοδολογία αυτής της εργασίας είναι ικανή για τέτοια ερμηνεία. Προτείνει σε κάθε επανάληψη ένα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

διάνυσμα χρησιμότητας το οποίο δεν μπορεί να μπλοκαριστεί από κανένα σύνολο παικτών. Εάν το διάνυσμα χρησιμότητας είναι εφικτό για το σύνολο των παικτών, τότε το πρόβλημα έχει τελειώσει. Εάν δεν προτείνεται ένα διάνυσμα που να διαφέρει από το παλιό μόνο για δύο παίκτες, ένας από τους δύο θα παίρνει περισσότερα και ο άλλος λιγότερα. Ο αναγνώστης θα πρέπει να κρίνει από μόνος του εάν ο αλγόριθμος έχει οικονομική ερμηνεία ως μηχανισμός ρύθμισης , αλλά η δική μου αίσθηση είναι ότι η πιθανότητα ερμηνείας είναι μεγαλύτερη από την παρουσίαση από μία εξουθενωτική αναζήτηση.

Το θεώρημα σταθερού σημείουτου Brouwer μπορεί να αποδειχθεί από μόνο του απλά θεωρώντας τη μήτρα A σαν μία επαναλαμβανόμενη μονάδα μήτρας στο Θεωρημα 2. Ο αλγόριθμος μπορεί επομένως να αντικαταστήσει το λήμμα παρέχοντας τη συνδυαστική βάση για θεωρήματα σταθερού σημείου. Προς το παρόν όμως δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να γνωρίζουμε εάν ο αλγόριθμος πραγματικά αποφεύγει την εξουθενωτική αναζήτηση στην εύρεση των σταθερών σημείων συνεχόμενων χαρτογραφήσεων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6. Η Θεωρία Παιγνίον Ν Ατόμων με Τέλεια Πληροφορία

6.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των παιγνίων n ατόμων , σε αντίθεση με τη θεωρία μηδενικού αθροίσματος παιγνίου δύο ατόμων , παραμένει σε κατάσταση απροσδιοριστίας. Το κύριο πρόβλημα φαίνεται να είναι ο καθορισμός του κατάλληλου ορισμού της λύσης για τέτοια παίγνια. Οι προσπάθειες που γίνονται προς αυτή την κατεύθυνση χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, η θεωρία συνεργασίας στην οποία οι παίκτες αναμένεται να σχηματίσουν συνασπισμούς και η μη συνεργατική θεωρία στην οποία τέτοιοι συνασπισμοί απαγορεύονται. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τη θεωρία των von Neumann και Morgenstern καθώς και την πιο πρόσφατη εργασία του Shapley, το δεύτερο σημείο ισορροπίας του Nash. Οι θεωρίες συνεργασίας έχουν την εξής ατέλεια ,η ιδέα της λύσης δε δίνει πολύ ενημέρωση για το πώς θα παίζονται τα παιχνίδια. Η δεύτερη κατηγορία είναι πιο συγκεκριμένη από αυτή την άποψη , αλλά ο ορισμός της λύσης εφαρμόζεται μόνο σε συγκεκριμένα παίγνια και προς το παρόν δεν έχει βρεθεί τρόπος να που να καθορίζει εκ των προτέρων εάν ένα παίγνιο μπορεί να λυθεί με τον μη συνεργατικό τρόπο. Σίγουρα πολλά ενδιαφέροντα παιχνίδια δεν μπορούν να λυθούν με αυτό τον τρόπο.

Η θεωρία που αναπτύσσεται παρακάτω δίνει μια συγκεκριμένη ιδέα για τη λύση για μία ειδική αλλά σημαντική τάξη παιγνίων n ατόμων, όπως ονομάζονται, εκείνα με την τέλεια πληροφορία. Η θεωρία είναι μη συνεργατική με την έννοια που περιγράψαμε παραπάνω. Η πιο γενική θεωρία που αφορά τέτοια παίγνια είναι του Kuhn και υποστηρίζει ότι όλα αυτά τα παίγνια έχουν ένα σημείο ισορροπίας μεταξύ των βασικών στρατηγικών τους. Αυτό το σημείο ισορροπίας δε θα είναι γενικά μοναδικό, και αυτά τα παίγνια δε θα λύνονται με τη μέθοδο του Nash. Επομένως θα δοκιμάσουμε μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Ο ορισμός της λύσης του προβλήματος που δώσαμε, οδηγεί σε ένα σύνολο στρατηγικών οι οποίες σχηματίζουν το σημείο ισορροπίας, αλλά αυτές γενικά θα είναι μικτές παρά ξεχωριστές στρατηγικές.

6.2 Μερικά Παραδείγματα

Ένα παράδειγμα θα ήταν χρήσιμο για την κινητοποίηση των ακολουθων ορισμών. Ένας κριτής θα διαλέξει τυχαία έναν ακέραιο αριθμό ανάμεσα στο 1 και στο 9. Τρείς παίκτες θα επιλέξουν εκ περιτροπής ξεχωριστούς αριθμούς από αυτό το εύρος τιμών και αυτός που θα πέσει πιο κοντά στον ήδη επιλεγμένο από τον κριτή αριθμό κερδίζει ένα δολάριο. Σε περίπτωση ισοπαλίας, κάθε παίκτης κερδίζει μισό δολάριο. Ένας αφελής παίκτης που θα επιλέξει πρώτος μπορεί να διαλέξει τον αριθμό 5. Με λίγη παραπάνω σκέψη, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο δεύτερος και ο τρίτος παίκτης πιθανόν θα επιλέξουν τους αριθμούς 4 και 6 έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης να είναι 1/10 ενώ για τους άλλους δύο 4/10. Ένας πιο σωστός τρόπος για να παίξει κάποιος το παιχνίδι θα ήταν να επιλέξει ο πρώτος παίκτης το 3 ή το 7 , ο δεύτερος παίκτης το 7 ή το 3 και ο τρίτος παίκτης όποιον αριθμό μείνει. Η δικαιολογία για αυτές τις επιλογές είναι η εξής: εάν ο πρώτος και ο δεύτερος παίκτης έχουν ήδη επιλέξει, η επιλογή για τον τρίτο παίκτη είναι ξεκάθαρη αφού θα διαλέξει τον αριθμό που μεγιστοποιεί τις πιθανότητες του να κερδίσει. Εάν υπάρχουν πολλοί τέτοιοι αριθμοί, υποθέτουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να επιλέξει έναν από αυτούς. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο τρίτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

παίκτης ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει τις πιθανότητες του να κερδίσει και όχι για τις πιθανότητες των άλλων παικτών. Ας υποθέσουμε ότι ο πρώτος παίκτης έκανε την επιλογή του. Ο δεύτερος παίκτης θα πρέπει να σκεφτεί κάθε πιθανή επιλογή με την προυπόθεση ότι ο τρίτος παίκτης στο επόμενο βήμα θα παίξει σύμφωνα με τους κανόνες που περιγράφηκαν παραπάνω. Θα κάνει τέτοια επιλογή η οποία θα του δώσει τις μεγαλύτερες προσδοκίες σύμφωνα με αυτά τα συμπεράσματα. Τώρα σκεφτείτε την αρχική επιλογή του πρώτου παίκτη. Για κάθε πιθανή επιλογή, μπορεί να υπολογίσει πως θα δράσουν οι άλλοι παίκτες. Επίσης σε κάθε περίπτωση υπολογίζει την πιθανότητά του να κερδίσει και παίζει με τέτοιο τρόπο ώστε να τη μεγιστοποιήσει. Εάν υπάρχουν πολλοί αριθμοί που μεγιστοποιούν την πιθανότητα να κερδίσει, διαλέγει τυχαία έναν αριθμό με μία μηχανή. Αν παίξουν τελικά με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, οι πιθανότητες τους θα είναι 7/18, 7/18, 4/18 για τους παίκτες 1,2 και 3 αντίστοιχα.

Η θεωρία που παραθέσαμε εδώ χρησιμοποιεί τις μεθόδους που περιγράψαμε προηγουμένως για κάθε παίγνιο με τέλεια πληροφορία και παρέχει τον ορισμό των τιμών και των στρατηγικών για τέτοιου είδους παίγνια.

Ο αναγνώστης μπορεί να διασκεδάσει λύνοντας με παρόμοιο τρόπο με το παράδειγμα που δείξαμε το πρόβλημα που ακολουθεί. Τρείς παίκτες διαλέγουν εκ περιτροπής έναν πραγματικό αριθμό ενός διαστήματος. Ο παίκτης θα λέμε ότι 'ελέγχει' τον αριθμό ι $\in[0,1]$ εάν ο t είναι πιο κοντά στη δική του επιλογή σε σχέση με τους άλλους παίκτες. Στο τέλος του παιχνιδιού κάθε παίκτης παίρνει ως αμοιβή ένα ποσό το οποίο είναι ανάλογο με τον αριθμό των διαστημάτων που ελέγχει.

6.3 Ορισμοί και Σημειώσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα παίγνια, και προκειμένου να έχουμε διαυγείς και ελεγχόμενες σημειώσεις, θα υποθέσουμε ότι τα παίγνια που εξετάζουμε δεν έχουν τυχαίες κινήσεις παρότι όλα τα αποτελέσματα περικλείουν τέτοιες καταστάσεις.

Ορισμός: **Ένα παίγνιο Ν ατόμων με τέλεια πληροφορία αποτελείται από** :

- Ένα σύνολο Χ που ονομάζεται *σύνολο των καταστάσεων* του Γ.
- Ένα σημείο $x_0 \in X$ που ονομάζεται *αρχική κατάσταση*.
- Μία συνάρτηση P που ονομάζεται η '*προκάτοχος συνάρτηση*' η οποία αντιστοιχίζει το X στο x_0 και έχει την ιδιότητα :

  Α) Υπάρχει ένας ακέραιος Ν τέτοιος ώστε $P^N(X)=X_0$ (οι καταστάσεις που είναι προσιτές στο επόμενο βήμα από την κατάσταση x είναι οι καταστάσεις $P^{-1}(x)$.). Το σύνολο των καταστάσεων $P^{-1}(x)=\varnothing$ ονομάζεται *σύνολο των τελικών καταστάσεων* και συμβολίζεται με X_F.
- Ένας διαχωρισμός των $X-X_F$ στα σύνολα $(X_1,X_2,\ldots,Xn)$ (Η κατάσταση $x\in X\iota$ εάν ο παίκτης i θα πάει στην κατάσταση x.)
- n συναρτήσεις πραγματικών τιμών P1,P2,…,Pn , οι οποίες ορίζονται στο σύνολο X_F. Η P_i ονομάζεται η συνάρτηση πληρωμής του i παίκτη.

Αυτά τα πέντε αντικείμενα συνιστούν το παίγνιο Γ. Μένει να περιγράψουμε πως θα παιχτεί το παίγνιο. Αυτό που διαισθανόμαστε είναι το ακόλουθο: Υποθέστε ότι $x_0\in X\iota$. Ο παίκτης i επιλέγει την κατάσταση $x_1 \in P^{-1}(x_0)$. Τώρα υποθέστε ότι $x_1\in X\iota_1$. Τότε ο παίκτης ι_1 επιλέγει την

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

κατάσταση $x_2 \in P^{-1}(x_1)$, κλπ. Το παιχνίδι συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο μέχρι να επιλεγεί η κατάσταση $x \in X_F$,το οποίο συμβαίνει πάντα σύμφωνα με την ιδιότητα (Α). Σε αυτό το σημείο το παίγνιο έχει τελειώσει και ο παίκτης i λαμβάνει το ποσό $P_i(x)$, με i=1,2,…,n.

Όπως είναι σύνηθες στη θεωρία παιγνίων (αλλά όχι στις εφαρμογές της) υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική του εκ των προτέρων που σημαίνει ότι έχει αποφασίσει τι επιλογές θα κάνει σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις .

Οι ακόλουθοι ορισμοί κάνουν αυτές τις σημειώσεις πιο ακριβείς.

Ορισμοί: Ένα παιχνίδι του Γ είναι μία ακολουθία $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$ όπου $P(x_i)=x_{i-1}$ και $x_k \in X_F$.

Μία *καθαρή στρατηγική* σ_i για τον παίκτη i είναι μία συνάρτηση από το Xι στο X τέτοια ώστε για κάθε x∈Xι, $\sigma_i(x) \in P^{-1}(x)$.

Δοσμένης μιας n-αδας καθαρών στρατηγικών (σ1,σ2,…,σn) ορίζουμε επαγωγικά ένα παίγνιο $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ ως εξής: x_0 είναι η αρχική κατάσταση. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει το x_j και $x_j \in$ Xi. Τότε $x_{j+1}=\sigma_i(x_j)$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες του σ_i, η ακολουθία που ορίσαμε ως παίγνιο κανονικά περιγράφεται ως εξής: το παίγνιο *καθορίζεται* από τα (σ1,σ2,…,σn) και δηλώνεται με το σύμβολο <σ1,σ2,…,σn>. Τέλος, εάν η x_k είναι η τελική κατάσταση του παιγνίου $<σ1,σ2,…,σn>_2$ ορίζουμε $<σ1,σ2,…,σn>_i= P_i(x_k)$, i=1,2,…,n. Το $<σ1,σ2,…,σn>_i$ είναι η πληρωμή του παίκτη i εάν οι παίκτες επιλέξουν τις στρατηγικές (σ1,σ2,…,σκ).

(Υπάρχει μία καθορισμένη γεωμετρική απεικόνιση του Γ. Οι καταστάσεις απεικονίζονται ως σημεία σε έναν χώρο. Εάν x=P(x΄) , σχεδιάζουμε μία γραμμή από το x στο x΄. Μπορούμε να επιλέξουμε τα σημεία x έτσι ώστε να μη διασταυρώνονται οι γραμμές. Έτσι το σχήμα γίνεται ένα τοπολογικό δένδρο στο χώρο και κάθε παίγνιο αναπαριστάται από ένα μονοπάτι σημείων που ξεκινάει από την αρχική κατάσταση x_0 και καταλήγει σε μία τελική κατάσταση. Χάρη στην εμφάνισή του, κάποιοι συγγραφείς έχουν χρησιμοποιήσει το τοπολογικό δένδρο σαν τον αρχικό τρόπο ορισμού ενός παιγνίου. Από μαθηματικής πλευράς βέβαια δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος για να εισαχθούν αυτές οι γεωμετρικές απεικονίσεις στη θεωρία παιγνίων αφού δεν θεωρούνται σχετικές. Ακόμη, γίνεται πιο εύκολο να δουλέψουμε με την προκάτοχο συνάρτηση. Η γεωμετρική αναπαράσταση πάραυτα βοηθάει κάποιον να δει τις ιδιότητες των παιγνίων.)

Για τη συνέχεια, θα ήταν πιο βολικό να κάνουμε μία μικρή αλλαγή του σεναρίου της καθαρής στρατηγικής. Γενικά, κάθε φορά που ο παίκτης κάνει μία κίνηση , αποκλείει την πιθανότητα εμφάνισης κάποιων καταστάσεων. Προφανώς θα ήταν μεγάλο χάσιμο χρόνου γι΄ αυτόν να οργανώσει στρατηγική για καταστάσεις που γνωρίζει πως δεν πρόκειται να προκύψουν. Σύμφωνα με τον Kuhn ονομάζουμε την κατάσταση x άσχετη για τη στρατηγική σi εάν το x δεν ανήκει σε κανένα παίγνιο $<\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_i,\ldots,\sigma_n>$. Διαφορετικά το x είναι σχετικό και ένα υποσύνολο $X' \subset X$ ονομάζεται σχετικό για το σi εάν όλα τα σημεία του είναι σχετικά. Η αλλαγή που θα κάνουμε είναι να απαιτήσουμε για κάθε στρατηγική σ_i να ορίζεται μόνο σε ένα μέγιστο σχετικό υποσύνολο του X_i που είναι σχετικό με το σ_i. Αυτή η προϋπόθεση που θέσαμε έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του αριθμού των καθαρών στρατηγικών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ας ξαναθυμηθούμε τον ορισμό ενός *παιγνίου n- ατόμων* σε κανονική μορφή. Ένα τέτοιο παίγνιο αποτελείται από n σύνολα $\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n$,τα στοιχεία των οποίων καλούνται στρατηγικές καθώς επίσης και από n συναρτήσεις πραγματικών τιμών $P_1,P_2,\ldots,P_n$ των οποίων το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $\Sigma_1 x\ \Sigma_2 \ldots x\Sigma_n$. Εάν στο Γ παιχνίδι μας ορίσουμε ως Σ_i το σύνολο των καθαρών στρατηγικών για τον παίκτη i και ορίσουμε

$P_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = < \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n >$

θα διαπιστώσουμε ότι έχουμε ορίσει ένα παιχνίδι σε κανονική μορφή που ανταποκρίνεται στο Γ. Αυτό το ονομάζουμε *κανονική μορφή* του Γ.

6.4 Η Θεωρία

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε ένα νέο τρόπο λύσης ενός παιγνίου. Τα παίγνια γενικά δεν έχουν λύσεις όπως τις παρουσιάζουμε εμείς. Πάραυτα, η ύπαρξη του ουσιαστικού θεωρήματός μας επιβεβαιώνει ότι τα παίγνια με τέλεια πληροφορία έχουν πάντα τέτοιες λύσεις. Ο ορισμός που δίνουμε για τη λύση θα καθορίσει μία ξεχωριστή βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη και ένα σύνολο τιμών ή προσδοκιών για κάθε παίκτη για όλο το παίγνιο με το βέλτιστο τρόπο.

Μία ακόμη παρατήρηση συγκεντρώνει το ενδιαφέρον μας. Εξετάζοντας την αιτιολόγηση που χρησιμοποιήσαμε για τη λύση του παραδείγματος της δεύτερης ενότητας , συμπεραίνουμε ότι κάναμε σημαντική χρήση της εκτεταμένης μορφής του παιγνίου που μελετούσαμε. Συγκεκριμένα η σειρά με την οποία οι παίκτες έκαναν τις κινήσεις τους έπαιξε σημαντικό ρόλο στην αιτιολόγηση. Προκαλεί μεγάλη έκπληξη ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε την ίδια λύση εξετάζοντας μόνο την κανονική μορφή του παιχνιδιού. Θα ορίσουμε λοιπόν τον τρόπο λύσης από την κανονική μορφή . Διαφορετικά παίγνια μπορεί να έχουν την ίδια λύση με την προυπόθεση ότι έχουν την ίδια κανονική μορφή.

<u>Ορισμός</u>: Η καθαρή στρατηγική σ_1 υπερέχει της $\sigma_1{'}$, γράφεται $\sigma_1 > \sigma_1{'}$, δεδομένου

1) $<\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1 \geq <\sigma_1{'}, \sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1$ για όλα τα $(\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$.

2) $<\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1 \ > <\sigma_1{'}, \sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1$ για κάποια (σ2,…,σn).

Οι καθαρές στρατηγικές σ1 και σ1΄ είναι *ισοδύναμες* εάν

$<\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1 = <\sigma_1{'}, \sigma_2,\ldots,\sigma_n>_1$ για όλα τα (σ2,…,σn).

Παρόμοιοι ορισμοί γίνονται για τις στρατηγικές σi, i=2…n.

Το σενάριο λύσης που κάνουμε βασίζεται στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Ένας παίκτης δε θα χρησιμοποιήσει μία κυριαρχική στρατηγική.
- Ένας παίκτης θα χρησιμοποιήσει ισοδύναμες στρατηγικές με ίση πιθανότητα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Μία λέξη για αυτά τα συμπεράσματα. Η ιδέα τηςκυριαρχίας προκύπτει συχνά στη μελέτη των παιγνίων, παρότι ο συνήθης ορισμός δεν είναι ακριβώς αυτός που δώσαμε εδώ. Το δεύτερο συμπέρασμα δείχνει την αδιαφορία κάθε παίκτη για τη μοίρα των άλλων παικτών. Μπορεί να ειπωθεί ότι αυτή η συνθήκη είναι αφύσικη ή ακόμα και πολύ περιοριστική. Για παράδειγμα σε ένα παίγνιο δύο ατόμων, ένας παίκτης μπορεί να αποφασίσει να κάνει τη μέγιστη δυνατή ζημιά στον αντίπαλό του ή αν είναι πιο φιλικός ,να τον βοηθήσει. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε το θεώρημα εξίσου καλά αντικαθιστώντας τη δεύτερη υπόθεση με διάφορες άλλες υποθέσεις. Η μοναδική απαίτηση είναι ότι θα πρέπει να έχουμε έναν συγκεκριμένο κανόνα ο οποίος θα καθορίζει τη συμπεριφορά κάθε παίκτη όταν αυτός βρίσκεται ανάμεσα σε ισοδύναμες στρατηγικές. Αυτός είναι ένας κανόνας ο οποίος προσδίδει οποιδήποτε σύνολο ισοδύναμων καθαρών στρατηγικών μία πιθανότητα συνδυασμού αυτών των στρατηγικών. Το δεύτερο συμπέρασμά μας είναι ο πιο απλός τέτοιος κανόνας αλλά και άλλοι θα μας εξυπηρετούσαν εξίσου καλά. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα ένα και δύο θα εισάγουμε τώρα **δύο λειτουργίες** στην κανονική μορφή του Γ.

Λειτουργία D_1: Διαγραφή όλων των κυρίαρχων στρατηγικών.

Λειτουργία A_1: Αντικατάσταση όλων των συνόλων των ισοδύναμων στρατηγικών με μία μεικτή στρατηγική, χρησιμοποιώντας κάθε ισοδύναμη στρατηγική με ίση πιθανότητα.

Θα διαπιστώσουμε ότι αυτές οι δύο λειτουργίες, όταν είναι δυνατόν, έχουν επίδραση στη μείωση του αριθμού στρατηγικών κάθε παίκτη.

Θα ορίσουμε τώρα ένα νέο παίγνιο Γ σε κανονική μορφή του οποίου οι καθαρές στρατηγικές είναι εκείνες που διατηρήθηκαν από τα αρχικά σύνολα των λειτουργιών D_1 και A_1. Οι συναρτήσεις πληρωμών P_i^1 είναι οι αρχικές συναρτήσεις πληρωμών P_i που έχουν επεκταθεί με τον συνήθη τρόπο που χρησιμοποιούμε για τις μεικτές στρατηγικές όταν αυτό είναι αναγκαίο. Τώρα ορίζουμε τις λειτουργίες D_2 και A_2 να είναι παρόμοιες με τις D_1 και A_1 αλλά να λειτουργούν στο παίγνιο $Γ^1$. Άρα παίρνουμε ένα παίγνιο $Γ^2$. Αφού ο αρχικός αριθμός των καθαρών στρατηγικών ήταν πεπερασμένος, είναι προφανές ότι κάποια στιγμή αυτή η διεργασία πρέπει να τελειώσει.(δε θα είναι δυνατή επιπρόσθετη μείωση).

ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Εάν Γ είναι η κανονική μορφή ενός παιγνίου με τέλεια πληροφορία οι επιτυχείς εφαρμογές των λειτουργιών D_i και A_i , μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό σταδίων, θα απλοποιήσει το Γ σε ένα παίγνιο $Γ^k$ που θα έχει ακριβώς μία καθαρή στρατηγική για κάθε παίκτη.

Η απόδειξη του ουσιαστικού θεωρήματος είναι αρκετά περίπλοκη εξαιτίας της περίπλοκης δομής των παιγνίων στην εκτεταμένη μορφή. Η συνήθης τεχνική εφαρμογής ενός συμπεράσματος στα πλαίσια του παιγνίου δε φαίνεται να δουλεύει εδώ. Η απόδειξη προχωράει δείχνοντας ότι σε οποιοδήποτε στάδιο της απλοποίησης διεργασίας, αν σε κάποιο παίκτη έχουν απομείνει περισσότερες από μία στρατηγικές, είναι πιθανές οι παραπάνω αναγωγές.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι μεικτές στρατηγικές σχηματίζουν ένα σημείο ισορροπίας. Αυτό δείχνει ότι εάν το Γ είναι παίγνιο δύο ατόμων μηδενικού αθροίσματος , ο δικός μας ορισμός των τιμών συμφωνεί με τον συνηθισμένο και οι βέλτιστες στρατηγικές μας είναι βέλτιστες με τον ευρέως αποδεκτό τρόπο. Ο λόγος για τον οποίο διατηρούμε μια ξεχωριστή στρατηγική είναι φυσικά χάρη στη διεργασία. Αυτό είναι αφύσικο σε μερικές περιπτώσεις όπως για παράδειγμα εάν ένας παίκτης γνώριζε διάφορες στρατηγικές για το σκάκι , πιθανότατα θα χρησιμοποιούσε αυτή που θα ολοκλήρωνε το παιχνίδι πιο γρήγορα. Εάν εισάγουμε τέτοιες σκέψεις θα περιπλέξουμε πολύ το θεώρημα χωρίς λόγο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 7

7.1 Εισαγωγή

7. 1Μια Λύση Συνεργασίας για Ένα Παίγνιο Ν Ατόμων Γενικής Τάξης

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα σενάρια θεωρίας δύο παιγνίων των εφαρμογών στην οικονομία προχρονολογούνται της έκδοσης "Η Θεωρία των Παιγνίων και η Οικονομική Συμπεριφορά" για τουλάχιστον 50 χρόνια. Το σενάριο της ισορροπίας του Nash για ένα παίγνιο n ατόμων είναι ο "απόγονος " της διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε από τον Cournot το 1838 ,για να αναλύσει τις επιδράσεις της oligopolistic συμπεριφοράς. Η άλλη κυρίαρχη τεχνική λύσης , ο πυρήνας, εισήχθη από τον Edgeworth με το όνομα contract curve το 1886.

Στη σύγχρονη ορολογία της θεωρίας παιγνίων, ο πυρήνας είναι μία λύση συνεργασίας η οποία περιλαμβάνει τη συμπεριφορά των συνασπισμών των παικτών. Η ισορροπία του Nash δε θεωρείται λύση συνεργασίας και το ενδιαφέρον των ομάδων των παικτών δε λαμβάνεται υπ'όψην. Αυτά τα δύο σενάρια είναι αρκετά διαφορετικά και έχουν εφαρμοστεί σε παίγνια που έχουν εντελώς διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Η ισορροπία του Nash απαιτεί το παίγνιο να βρίσκεται σε κανονική μορφή, δηλαδή οι ανεξάρτητες στρατηγικές που είναι διαθέσιμες σε κάθε παίκτη πρέπει να περιγράφονται αναλυτικά, μαζί με μία διευκρίνιση για τη χρησιμότητα του κάθε παίκτη για ενιαίες στρατηγικές επιλογές. Η επιλογή των στρατηγικών , μία για κάθε άτομο, είναι σε ισορροπία εάν κανένας παίκτης δεν μπορεί να μεγαλώσει τη χρησιμότητά του κάνοντας μία εναλλακτική επιλογή , με την υπόθεση ότι οι υπόλοιποι παίκτες δεν αλλάζουν τις στρατηγικές τους.

Προκειμένου να είναι εφαρμόσιμο ένα σενάριο συνεργασίας, όπως ο πυρήνας, η περιγραφή του παιγνίου θα πρέπει να γίνεται με τη διευκρίνιση του συνόλου των διανυσμάτων χρησιμότητας που μπορεί να αποκτήσει κάθε συνασπισμός. Τότε ένα διάνυσμα χρησιμότητας βρίσκεται μέσα στον πυρήνα εάν πρώτα από όλα είναι προσιτό από όλους τους παίκτες που δρουν συλλογικά και δεύτερον εάν κανένας συνασπισμός δεν μπορεί να πετύχει μεγαλύτερη χρησιμότητα για κάθε μέλος του.

Η επιτυχής εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων συνεργασίας στην οικονομία έχει σημειωθεί κυρίως σε μοντέλα συναλλαγών και πιθανώς σε μοντέλα παραγωγής στα οποία μπορεί να οριστεί για κάθε συνασπισμό το σύνολο των προσιτών διανυσμάτων χρησιμότητας. Σε ένα μοντέλο όπου κάθε καταναλωτής ξεκινάει την εμπορική περίοδο με μία προμήθεια εμπορευμάτων και έχει μία συνάρτηση χρησιμότητας της τελικής κατανάλωσης, τα διανύσματα χρησιμότητας που είναι προσιτά από έναν συνασπισμό είναι πιο πιθανόν να είναι εκείνα που προκύπτουν από μία αυθαίρετη ανακατανομή των προιόντων του συνασπισμού.

Η απλότητα ωστόσο εξαφανίζεται εάν γενικεύσουμε το μοντέλο συναλλαγών έστω και ελάχιστα. Εάν για παράδειγμα, μερικά από τα αγαθά είναι ανεπιθύμητα και απαιτούν τη χρήση πραγματικών πηγών , οι παίκτες που δε συμμετέχουν σε έναν συνασπισμό, μπορεί με τις πράξεις τους, να τροποποιήσουν την ανακατανομή των χρησιμοτήτων μέσα στον συνασπισμό. Αυτό περιπλέκει τον καθορισμό για ποιον συνασπισμό μπορεί να πετύχει από μόνος του. Παρόμοιες δυσκολίες προκύπτουν εάν εξωτερικοί παράγοντες της κατανάλωσης εισαχθούν στο μοντέλο συναλλαγών και σε διάφορες άλλες παραλλαγές του νεοκλασικού μοντέλου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν τη γενική πρόταση ότι οι πιθανότητες ενός συνασπισμού πρέπει ίσως να θεωρούνται ότι προέρχονται από μία προηγούμενη εξειδίκευση του παιχνιδιού στην κανονική μορφή του, που είναι οι επιλογές στρατηγικών των παικτών και οι αξιολογήσεις τους για τα αποτελέσματα. Οι von Neumann και Morgenstern προσπάθησαν να κάνουν ακριβώς αυτό αλλά βάσισαν την ανάλυσή τους στο αυθαίρετο συμπέρασμα της μεταφερόμενης χρησιμότητας. Για αυτούς το ερώτημα για το εάν ένα διάνυσμα χρησιμότητας $\{u_i\}$ $i \in S$ είναι προσιτό για το συνασπισμό S , εξαρτάται μόνο από το άθροισμα $u_s=\Sigma_{i \in S}\, u_i$ και όχι από τις ίδιες τις χρησιμότητες. Ακόμα, ένας συνασπισμός μπορεί να αποκτήσει αυτό το διάνυσμα μόνο εάν τα μέλη του έχουν μία στρατηγική η οποία παράγει ένα διάνυσμα χρησιμοτήτων με άθροισμα τουλάχιτον u_s, ανεξάρτητα από αυτό που επιλέγουν να κάνουν τα μέλη του συνασπισμού.

Η πρόταση του Aumann για τη μετάβαση από την κανονική μορφή ενός παιγνίου σε μία περιγραφή συνεργασίας είναι τακτική και αποφεύγει τις επιπρόσθετες χρησιμότητες τις οποίες οι ευήμερες οικονομίες βρίσκουν τόσο περιττές. Ο ορισμός του είναι ακριβώς σαν και αυτόν που δώσαμε παραπάνω με τη διαφορά ότι βασίζεται στις ίδιες τις χρησιμότητες και όχι στο άθροισμά τους. Για τον Aumann το διάνυσμα u_i είναι προσιτό από τον συνασπισμό S αν και μόνο αν τα μέλη του έχουν μία προκαθορισμένη στρατηγική η οποία εγγυείται αυτό το διάνυσμα ανεξάρτητα από τις πράξεις του συμπληρωματικού συνασπισμού.

Αυτή η εργασία , χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Aumann , θα περιγράψει, στο πλαίσιο της κανονικής μορφής ενός παιγνίου n ατόμων ,ένα απλό και γενικό σύνολο συνθηκών που είναι επαρκείς για να εγγυηθούν ένα γεμάτο πυρήνα.

Ας θεωρήσουμε ένα παίγνιο n ατόμων στο οποίο ο πρώτος παίκτης έχει ένα σύνολο πιθανών στρατηγικών X^1 , ο δεύτερος παίκτης X^2, κλπ. Μία τυπική στρατηγική για τον παίκτη i σημειώνεται ως x^i. **Βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα για τα σύνολα των στρατηγικών:**

1) Κάθε X^i είναι ένα κλειστό σύνολο σε έναν πεπερασμένο convex πολυδιάστατο ευκλείδιο χώρο.

Η σημαντική πλευρά αυτού του συμπεράσματος είναι ότι κάθε χώρος στρατηγικών είναι κυρτός. Οι υπόλοιποι όροι είναι τεχνικοί και το συμπέρασμα ότι κάθε στρατηγικός χώρος που ανήκει σε ένα πεπερασμένο πολυδιάστατο ευκλείδιο χώρο μπορεί να προκύψει εύκολα.

Το συμπέρασμα για την κυρτότητα είναι παρόμοιο στη θεωρία παιγνίων και συνήθως το βγάζουμε επιτρέποντας στους παίκτες να επιλέγουν τυχαία και ανεξάρτητα τις στρατηγικές τους. Υπάρχουν πολλά παίγνια n ατόμων στα οποία η απαίτηση για κυρτότητα ικανοποιείται χωρίς την εισαγωγή μεικτών στρατηγικών. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο συναλλαγών μπορεί να σχηματίσει ένα παιχνίδι επιτρέποντας σε κάθε παίκτη να διανείμει αυθαίρετα τα αρχικά του προιόντα σε όλους τους παίκτες. Η παραγωγή μπορεί να ενσωματωθεί στο παίγνιο εάν έχουμε διάφορους από τους παίκτες να αναπαριστούν τις επιχειρήσεις, οι οποίοι επιλέγουν την παραγωγή και τα σχέδια ανακατανομής σύμφωνα με την τεχνολογία τους και με τις πηγές που προήλθαν από τους άλλους παίκτες. Σε κάθε ένα από τα παραδείγματα,απαίτηση για κυρτότητα είτε είναι άμεση είτε προκύπτει σαν απλή συνέπεια των τυπικών οικονομικών συμπερασμάτων.

Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή του παιγνίου, ο i παίκτης έχει μία συνάρτηση χρησιμότητας $u_i\ (x^1,\ldots,x^n)$ που ορίζεται στο χώρο παραγωγής $X=X^1 \times X^2 \times \ldots X^n$, ο οποίος περιγράφει τις επιλογές του για ενιαίες στρατηγικές επιλογές. Θα βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις επιλογές έτσι ώστε η λύση που θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα να είναι εφαρμόσιμη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

7.2 ΗΛύση του Παιγνίου

Το συγκεκριμένο είδος λύσης που συζητάμε εδώ μοιράζεται με άλλες λύσεις παιγνίων n ατόμων την ιδιότητα που βασίζεται στο σενάριο της ισορροπίας . Κάθε ένας από τους παίκτες διαλέγει μία στρατηγική. Εξετάζουμε εάν υπάρχουν ισχυρά επιχειρήματα που οδηγούν σε εναλλακτικές στρατηγικές. Τα χαρακτηριστικά της λύσης προσδιορίζονται από την επιλογή επιχειρημάτων για την αποχώρηση από μία επιλογή ενιαίας στρατηγικής.

Για παράδειγμα, η ισορροπία του Nash είναι ένα σύνολο στρατηγικών $x^1, \ldots, x^n$ με την εξής ιδιότητα: κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει τη χρησιμότητά του επιλέγοντας μία εναλλακτική στρατηγική με την προϋπόθεση ότι οι στρατηγικές των υπολοίπων παικτών δεν αλλάζουν. Σε αυτό το σενάριο λύσης τα επιχειρήματα για μία αποχώρηση από μία ισορροπία βασίζονται στη μεμονωμένη δράση των παικτών και υποθέτουμε ότι δε θα υπάρχει αντίκρισμα από τους υπόλοιπους n-1 παίκτες.

Η δική μας λύση θα διαφέρει σε δύο βασικά σημεία από την ισορροπία του Nash. Πρώτον , ο συνασπισμός των παικτών θα μπορεί να αλλάξει τη στρατηγική του συνολικά, με την ελπίδα για βελτίωση του επιπέδου χρησιμότητας του κάθε μέλους του συνασπισμού. Δεύτερον, ο συμπληρωματικός συνασπισμός μπορεί να δεχτεί αλλαγή των στρατηγικών επιλογών του , προκειμένου να αποτρέψει τον συνασπισμό που ξεκίνησε την αλλαγή. Μία ενιαία στρατηγική επιλογή $x^1,\ldots, x^n$, η οποία παρέχει στον παίκτη i τη χρησιμότητα u_i , θα βρίσκεται σε ισορροπία εάν για κάθε συνασπισμό S και κάθε συλλογή στρατηγικών των μελών του S, υπάρχει μία συλλογή στρατηγικών του συμπληρωματικού συνασπισμού η οποία εμποδίζει έναν παίκτη του S να πετύχει μεγαλύτερη χρησιμότητα από το u_i. Με άλλα λόγια, μία κατάσταση βρίσκεται σε ισορροπία εάν κανένας συνασπισμός δεν μπορεί να έχει υψηλότερα επίπεδα χρησιμότητας για όλα τα μέλη του, ανεξάρτητα από τις πράξεις του συμπληρωματικού συνασπισμού.

Η άκρως συντηρητική αντιμετώπιση των απειλών που παρουσιάστηκε σε αυτή τη λύση είναι μπελάς. Ένας συνασπισμός S, στην προσπάθειά του να διατηρήσει μια βελτιωμένη θέση για όλα τα μέλη του θα πρέπει να αντιμετωπίσει όλο το εύρος των στρατηγικών πιθανοτήτων των παικτών που δεν ανήκουν στον S συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που οδηγούν σε καταστροφικά συμπεράσματα για τον συμπληρωματικό συνασπισμό και δεν θα λαμβάνονταν με καμία πιθανότητα. Αυτή η ανικανότητα διαχωρισμού των counterresponces στερεί την ευκαιρία για έναν συνασπισμό που θα αντιτίθεται στο status quo και έχει σαν αποτέλεσμα να έχουμε περισσότερα αποτελέσματα στη λύση απ΄ότι θα ήταν λογικό. Προκειμένου να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, οι απαντήσεις του συμπληρωματικού συνασπισμού θα πρέπει να περιοριστούν σε εύλογους προβληματισμούς , και δεν υπάρχει προφανής τρόπος για να γίνει αυτό μέσα από αυτή την εργασία που συζητάμε εδώ.

Το κύριο συμπέρασμα αυτής της εργασίας είναι το Συμπέρασμα 1 για την κυρτότητα του χώρου στρατηγικών του κάθε παίκτη και το επόμενο συμπέρασμα το οποίο μελετάει αν οι συναρτήσεις χρησιμότητας είναι επαρκείς για να εγγυηθούν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο στρατηγικών σε ισορροπία με την έννοια που περιγράψαμε παραπάνω.

2) Κάθε $u_i(x)$ είναι μία συνεχής, quasiconcave συνάρτηση. Με άλλα λόγια, εάν $x=(x^1,\ldots,x^n)$ και $y=(y^1,\ldots,y^n)$ είναι δύο ενιαίες επιλογές στρατηγικών και $0\leq a\leq 1$ τότε

$$u_i [ax + (1-a) y] \geq \min [u_i (x), u_i (y)].$$

Τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε το κύριο θεώρημα αυτής της εργασίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε ένα παίγνιο n ατόμων το οποίο ικανοποιεί τα συμπεράσματα 1 και 2 , υπάρχει τουλάχιστον μία επιλογή στρατηγικής σε ισορροπία με την έννοια ότι κανένας συνασπισμός δεν θα έχει εναλλακτική επιλογή η οποία θα προσφέρει επίπεδα χρησιμότητας για όλα τα μέλη του , ανεξάρτητα από τις πράξεις των συμπληρωματικών συνασπισμών

Η quasiconcave προυπόθεση που απαιτείται σε αυτό το θεώρημα, είναι αρκετά ισχυρή σε σχέση με τις τυπικές προϋποθέσεις της θεωρίας παιγνίων n ατόμων. Για παράδειγμα, αντί να δείξουμε την ύπαρξη της ισορροπίας στρατηγικών του Nash , αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από την πολύ πιο αδύναμη συνθήκη ότι η χρησιμότητα του κάθε παίκτη είναι μία quasiconcave συνάρτηση της δικής του μόνο στρατηγικής. Η σοβαρότητα της προυπόθεσης αυτής μπορεί να διαπιστωθεί αφού γενικά δεν ικανοποιείται στην περίπτωση όπου κάθε παίκτης έχει έναν πεπερασμένο αριθμό pure στρατηγικών ,και επιτρέπεται να επιλέγει τυχαία τις στρατηγικές του , ανεξάρτητα από τις επιλογές των άλλων παικτών.

Από την άλλη πλευρά, τα παίγνια n ατόμων που προκύπτουν από οικονομικά μοντέλα οδηγούν σε επιλογές με αυτή την ιδιότητα εάν γίνουν τα κλασικά συμπεράσματα κυρτών καμπυλών αδιαφορίας και συνόλων παραγωγής. Θεωρείστε για παράδειγμα ένα τυπικό μοντέλο συναλλαγών στο οποίο ο i παίκτης έχει αρχικά w^i προιόντα για να ανταλλάξει, και μία συνάρτηση χρησιμότητας h_i για κατανάλωση. Περιγράφουμε αυτό σαν ένα παίγνιο κανονικής μορφής επιτρέποντας στον παίκτη ι να κατανείμει τα προϊόντα του

$$w^i = x^{i1} + x^{i2} + \dots + x^{in}$$

με αυθαίρετο τρόπο και πιθανότατα να κρατήσει μερικά για τον ίδιο. Το αποτέλεσμα μίας ενιαίας επιλογής στρατηγικών θα είναι η ανακατανομή των εμπορευμάτων που αρχικά διέθετε ,στα οποία ο παίκτης j λαμβάνει το πακέτο εμπορεύματος

$$\sum_{i=1}^{n} x^{ij}$$

Εάν πάρουμε τη χρησιμότητά του για αυτή την ενιαία επιλογή στρατηγικών να είναι η χρησιμότητα κατανάλωσής του,

$$h_j \sum_{i=1}^{n} x^{ij}$$

τότε το quasiconcave συμπέρασμα ικανοποείται εάν οι κλασικές καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές από πάνω.

Επομένως το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί στην κλασική περίπτωση μιας αγοράς, με τις συνηθισμένες παραδοχές κυρτότητας σαν προεπιλογή .Το συμπέρασμα δείχνει τη διανομή των αρχικών εμπορευμάτων της κοινωνίας , κάτι που κανένας συνασπισμός δεν μπορεί να βελτιώσει με ανακατανομή των προϊόντων του πχ μία κατανομή στον πυρήνα αυτής της αγοράς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αυτό το παράδειγμα έχει τουλάχιστον μία γενίκευση την οποία δεν έχουμε ξανασυναντήσει σε οικονομικά δοκίμια. Θεωρήστε την περίπτωση όπου υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην κατανάλωση, έτσι ώστε η χρησιμότητα του καθενός να μην εξαρτάται μόνο από το δικό του διάνυσμα κατανάλωσης , αλλά να είναι μία συνάρτηση πακέτων εμπορευμάτων που καταναλώθηκαν από έναν ή όλους τους υπόλοιπους καταναλωτές. Εάν αυτή η γενικευμένη συνάρτηση χρησιμότητας έχει αδιάφορες επιφάνειες οι οποίες είναι κυρτές από πάνω όταν κοιτάζουμε το προϊόν κάθε χώρου καταναλωτή των πακέτων κατανάλωσης, τότε το θεώρημα 1 μπορεί να εφαρμοστεί. Τονίζουμε ότι υπάρχει διανομή των αρχικών αγαθών της κοινωνίας που δε μπορεί να βελτιωθεί από μία συγκεκριμένη ανακατανομή των προϊόντων οποιουδήποτε συνασπισμού, εάν ο συμπληρωματικός συνασπισμός μπορεί να κάνει ανακατανομή των αρχικών του αγαθών με αυθαίρετο τρόπο.

Εάν δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις στην κατανάλωση, και δεν υπάρχει ούτε διαθέσιμο κόστος, αυτή η ακολουθιακή ανακατανομή των αγαθών του συμπληρωματικού συνασπισμού δεν μπορεί να επηρεάσει τα επίπεδα χρησιμότητας του συνασπισμού που προσπαθεί να μπλοκάρει. Η ύπαρξη όμως εξωτερικών επιδράσεων στην κατανάλωση, επιτρέπει στα μέλη του συμπληρωματικού συνασπισμού είτε να αρνηθούν να καταναλώσουν , είτε με ανακατανομή των αγαθών τους να επηρεάσουν , με ακολουθιακό τρόπο, τις χρησιμότητες στον συνασπισμό που προσπαθούν να μπλοκάρουν. Αυτή η πλευρά των εξωτερικών παραγόντων χρειάζεται το παρόν θεώρημα και όχι μία πιο συμβατική προσέγγιση.

7.3 Απόδειξη του Θεωρήματος

Ο αναγνώστης ο οποίος δεν θέλει να εντρυφήσει στη θεωρία παιγνίων μπορεί να παραλείψει αυτή την ενότητα καθώς θα δώσουμε μία τεχνική απόδειξη του κύριου θεωρήματος. Η απόδειξη βασίζεται στην ιδέα ενός ισορροπημένου παιγνίου n ατόμων, όπως μελετήθηκε από τους Bondareva και Shapley στην περίπτωση της μεταβλητής χρησιμότητας και από τον συγγραφέα στη γενική περίπτωση.

Θεωρείστε ένα παίγνιο n ατόμων στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε με ακρίβεια για κάθε συνασπισμό $S \subseteq N$, το σύνολο Vs εκείνων των διανυσμάτων χρησιμότητας $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ που είναι προσιτά για την S , με την προυπόθεση ότι τα στοιχεία του u με τόνο (u’) που αναφέρονται στους παίκτες που δεν είναι στο S, είναι αυθαίρετα. Κάνουμε τους ισχυρισμούς για αυτά τα σύνολα:

1) Για κάθε S, το Vs είναι κλειστό και μη κενό.
2) Εάν $u \in Vs$ και $u' \leq u$, τότε $u' \in Vs$.
3) Το V_N οριοθετείται από τα παραπάνω.

Ένα διάνυσμα u βρίσκεται μέσα στον πυρήνα αυτού του παιγνίου, εάν u V_N και δεν είναι μέσα στο Vs για οποιονδήποτε συνασπισμό S. Η ιδέα ενός συνόλου ισορροπημένων συνασπισμών χρησιμοποιείται προκειμένου να έχουμε επαρκής συνθήκες για την ύπαρξη διανύσματος στον πυρήνα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένα σύνολο συνασπισμών T= {S} είναι ισορροπημένο εάν δεν υπάρχουν αρνητικά δs , ίσα με το μηδέν για συνασπισμούς που δεν ανήκουν στο T, έτσι ώστε οι ισότητες

$\Sigma_{S \supset \{i\}} \delta_S = 1$

να ισχύουν για i=1…n.

Για παράδειγμα, τα σύνολα των συνασπισμών (I,2), (I,3), (I,4), (2,3,4) είναι ισορροπημένα με δs 1/3, 1/3, 1/3, 2/3 αντίστοιχα.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένα παίγνιο n ατόμων είναι ισορροπημένο εάν

$$\bigcap_{S \in T} V_S \subseteq V_N$$

για κάθε ισορροπημένο σύνολο T.

Το πιο σημαντικό συμπέρασμα που δείξαμε είναι ότι ένα ισορροπημένο παίγνιο δεν έχει άδειο πυρήνα. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα εδώ πρέπει να περάσουμε από τον ορισμό του παιγνίου, με την έννοια των στρατηγικών και των συναρτήσεων χρησιμότητας, στα σύνολα Vs με τέτοιο τρόπο ώστε ο πυρήνας που βασίζεται σε αυτά τα σύνολα να ανταποκρίνεται στη λύση που προτείναμε στην προηγούμενη ενότητα. Αυτό θα είναι αληθές εάν ακολουθήσουμε τον Aumann και κάνουμε τους παρακάτω ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ένα διάνυσμα $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ ανήκει στο Vs, εάν υπάρχει μία ενιαία στρατηγική των μελών του S, η οποία δίνει στον παίκτη i μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_i, για όλες τις στρατηγικές επιλογές των παικτών που δεν ανήκουν στο S.

Όπως βλέπουμε τα στοιχεία ενός διανύσματος u ∈ Vs, που ανταποκρίνονται στους παίκτες που δεν ανήκουν στο S, είναι αυθαίρετα σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό.

Το ασήμαντο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος είναι να δείξουμε ότι ο ισχυρισμός της σχεδόν κυρτότητας των συναρτήσεων χρησιμότητας δηλώνει ότι το παίγνιο είναι ισορροπημένο. Έστω T= {S} είναι ένα ισορροπημένο σύνολο συνασπισμών με weights δs, και $u \in \bigcap_{s \in T}$ Vs. Πρέπει επομένως να δείξουμε ότι
$u \in V_N$.

Για κάθε S ∈T , το u ∈ Vs σημαίνει ότι υπάρχει μία ενιαία στρατηγική των παικτών του S, που αποφέρει στον παίκτη i χρησιμότητα τουλάχιστον u_i για όλες τις στρατηγικές του συμπληρωματικού συνασπισμού. Έστω ότι αυτή η ενιαία στρατηγική συμβολίζεται με $x^i(S)$ για όλα τα i S. Η απόδειξη ότι u ∈ V_N συνεχίζεται δείχνοντας ότι συγκεκριμένες στρατηγικές

$$x^1 = \sum_{s \square \{1\}} \square \delta_s \, x^1(s),$$

$$x^2 = \sum_{s \square \{2\}} \square \delta_s \, x^2(s),$$

$$x^n = \sum_{s \square \{n\}} \square \delta_s \, x^n(s),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

(οι οποίες είναι εφικτές αφού για κάθε i , το x^i είναι ένας κυρτός συνδυασμός των στρατηγικών στο X^i) θα εγγυηθούν στον i παίκτη μια χρησιμότητα τουλάχιστον u_i.

Το συμπέρασμα είναι αρκετά έξυπνο και θα ήταν ίσως καλύτερο να το δείξουμε πρώτα στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου n=4 και τι ισορροπημένο σύνολο είναι (1,2), (1,3), (1,4), (2,3,4). Οι στρατηγικές $x^i(S)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4
(12)	$x^1(12)$	$x^2(12)$	$y^3(12)$	$y^4(12)$
(13)	$x^1(13)$	$y^2(13)$	$x^3(13)$	$y^4(13)$
(14)	$x^1(14)$	$y^2(14)$	$y^3(14)$	$x^4(14)$
(234)	$y^1(234)$	$x^2(234)$	$x^3(234)$	$x^4(234)$

στον οποίο τα x σε κάθε γραμμή αναπαριστούν τις στρατηγικές που εγγυώνται στα μέλη αυτού του συνασπισμού μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_i, για οποιεσδήποτε στρατηγικές y που επιλέγονται από τα μέλη του συμπληρωματικού συνασπισμού.

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι αυτή η ενιαία επιλογή στρατηγικής

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = \frac{x^1(12)+x^1(13)x^1(14)}{3}, \frac{x^2(12)+2x^2(234)}{3}$$

$$\frac{x^3(13)+2x^3(234)x^1(14)}{3}, \frac{x^4(14)+2x^4(234)}{3}$$

θα παράγει μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_i και για τους τέσσερις παίκτες ταυτόχρονα. Προς μεγάλη εκπληξή μας τα συμπεράσματα διαφέρουν από παίκτη σε παίκτη.

Προκειμένου να πιστοποιήσουμε ότι αυτή η ενιαία επιλογή στρατηγικών αποφέρει στον πρώτο παίκτη τουλάχιστον u_1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις στρατηγικές των τριών πρώτων γραμμών του παραπάνω πίνακα. Οι στρατηγικές σε κάθε μία από αυτές τις γραμμές παρέχουν μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_1 στον πρώτο παίκτη, και επομένως σε οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό αυτών των γραμμών. Συγκεκριμένα,

$$\frac{x^1(12)+x^1(13)x^1(14)}{3}$$

$$\frac{x^2(12)+x^2(13)+y^2(14)}{3}$$

$$\frac{y^3(12)+x^3(13)+y^3(14)}{3}$$

$$\frac{y^4(12)+x^4(13)+x^4(14)}{3}$$

αυτό θα κάνει ο παίκτης 1 ανεξάρτητα από τις επιλογές των y. Προκειμένου αυτή η στρατηγική να είναι ίδια με την (x^1,x^2,x^3,x^4) πρέπει να έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$x^{2}(234) = \frac{y^{2}(13) + y^{2}(14)}{2}$$

$$x^{3}(234) = \frac{y^{3}(12) + y^{3}(14)}{2}$$

$$x^{4}(234) = \frac{y^{4}(12) + y^{4}(13)}{2}$$

το οποίο μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας $y^2(13)= y^2(14)= x^2(234)$, $y^3(12)=y^3(14)=x^2(234)$, $y^4(12)=y^4(13)=x^4(234)$.

Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όμως ένα τελείως διαφορετικό επιχείρημα για να εξακριβώσουμε ότι η ίδια ενιαία στρατηγική (x^1,x^2,x^3,x^4) παράγει μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_2 για τον δεύτερο παίκτη. Εδώ δείχνουμε ότι ο convex συνδυασμός της πρώτης και της τελευταίας γραμμής του πίνακα

$$\frac{x^{1}(12) + 2\,y^{1}(234)}{3}$$

$$\frac{x^{2}(12) + 2\,x^{2}(234)}{3}$$

$$\frac{y^{2}(12) + 2\,x^{2}(234)}{3}$$

$$\frac{y^{1}(12) + 2\,x^{4}(234)}{3}$$

είναι επαρκής για τον παίκτη 2 , ανεξάρτητα από την επιλογή y. Προκειμένου να έχουμε αυτό το διάνυσμα ίδιο με το (x^1,x^2,x^3,x^4), πρέπει να έχουμε

$$\frac{x^{1}(13) + x^{1}(14)}{2} = y^{1}(234)$$

$$x^{3}(13) = y^{2}(12)$$

$$x^{4}(14) = y^{4}(12)$$

το οποίο μπορεί να γίνει σίγουρα αλλά είναι μία επιλογή των y διαφορετικών διανυσμάτων από την πρώτη περίπτωση. Μπορούμε να δώσουμε ένα παρόμοιο επιχείρημα για τους παίκτες 3 και 4.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τώρα μπορούμε να γυρίσουμε στην περίπτωση των n παικτών, ένα ισορροπημένο σύνολο T={S} και το διάνυσμα στρατηγικής x=(x1,x2,…,xn) που ορίζεται ως

$x^i = \Sigma\ \delta_s\ x^i\ (S)$
$s \in T$
$S \supset \{i\}$

Σε αυτό το γενικό επίπεδο είναι επαρκές να δείξουμε ότι $u_1(x) \geq u_1$, αφού με έναν επαναπροσδιορισμό των παικτών οποιοσδήποτε παίκτης μπορεί να μπεί πρώτος. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον παίκτη που εξετάζουμε.

Θα εκφράσουμε

$(x^1, ..., x^n) = \Sigma\ \delta_s\ (\ y^1\ (S),\ldots,\ y^n\ (S)\ )$
$s \in T$
$S \supset \{i\}$

με $u_1(y^1(S),\ldots y^n(S)) \geq u_1$ όλους τους συνασπισμούς $S \in T$ οι οποίοι περιλαμβάνουν τον πρώτο παίκτη. Το συμπέρασμα της quasi concavity τότε είναι επαρκές για να δείξουμε ότι

$u_1(x^1,x^2,\ldots,x^n) \geq u_1$.

Ορίζουμε τα διανύσματα $(y^1(S),\ldots,\ y^n(S))$ για κάθε $S \in T$ που περιλαμβάνουν τον πρώτο παίκτη. Ας συγκεντρώσουμε την προσοχή μας σε ένα συγκεκριμένο S. Έστω δύο περιπτώσεις για $y^i(S)$.

Εάν $i \in S$

$y^i\ (S) = x^i\ (S)$.

Εάν όχι, τότε ορίζουμε

$$y^i(s)\frac{\sum \delta_\varepsilon x^4(E)}{\sum \delta_\varepsilon},$$

όπου και στον αριθμητή αλλά και στον παρονομαστή το άθροισμα είναι για όλα τα $E \in T$ που *περιλαμβάνουν τον παίκτη i αλλά όχι τον πρώτο παίκτη* (Το $y^i(S)$ είναι ίδιο για όλους τους συνασπισμούς S που δεν περιλαμβάνουν τον i παίκτη.).

Συνεχίζοντας να εστιάζουμε την προσοχή μας στον συνασπισμό S, βλέπουμε ότι έχουμε ορίσει μια ενιαία επιλογή στρατηγικής στην οποία οι παίκτες του S χρησιμοποιούν τη στρατηγική $x^i(S)$ και οι παίκτες εκτός του S τη στρατηγική $y^i(S)$. Αφού το{ $x^i(S)$ } εγγυείται στον πρώτο παίκτη μία χρησιμότητα τουλάχιστον u_1, ανεξάρτητα από τις στρατηγικές των άλλων παικτών που δεν ανήκουν στο S, διαπιστώνουμε ότι $u_1(\ y^1(S),\ y^2(S),\ \ldots,\ y^n(S)) \geq u_1$ που ισχύει για όλα τα S στο T που περιλαμβάνουν τον παίκτη1.

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε αυτή την απόδειξη, είναι αναγκαίο να δείξουμε ότι η αναπαράσταση των $(x^1,\ldots,x^n)$ σε ότι αφορά τα δ και τα y είναι σωστή. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$x^i = \sum_{\substack{s \in T \\ S \supset \{1\}}} \square\, \delta_S Y^I(S)$$

=

$$= \sum_{\substack{s \in T \\ S \supset \{1\}}} \square\, \delta_S X^i(S) \quad + \sum_{\delta_{S>0}} \delta_S$$

) ,

με το εύρος του αθροίσματος του περιεχομένου του Ε να είναι όλο το Ε που περιλαμβάνει τον παίκτη ι αλλά όχι τον πρώτο παίκτη.
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι

$x^i = \Sigma\, \delta_S\, {}_x{}^i\, (S) + \Sigma\ \ \delta_E\, x^i\,(E) * c$
$\delta_S>0$ $\delta_E>0$
$S\supset\{1,i\}$ το Ε περιλαμβάνει
Ι αλλά όχι το 1

όπου η σταθερά c είναι

$$C = \frac{\sum_{\delta_{S>0}} (\square_{\square})^{\delta_S}}{\sum_{\delta_{E>0}} \square\, \delta_E}$$

Άρα η αναπαράσταση είναι σωστή και η απόδειξη ολοκληρωμένη για c=1 ή

$$\sum_{\substack{\delta_{S>0} \\ \square}} \square\, \delta_S = \sum_{\substack{\delta_{S>0} \\ \square}} \square\, \delta_S$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί ανακτηθεί εύκολα από την ισότητα

$$\sum_{\substack{\delta_{S>0} \\ S \supset \{1\}}} \square\, \delta_S = \sum_{\substack{\delta_{S>0} \\ S \supset \{i\}}} \square\, \delta_S = 1$$

αφαιρώντας το

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\sum_{\substack{\delta_{S>0} \\ S \sqsupset (i,j)}} \square\, \delta_S$$

και από τις δύο πλευρές. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος.

7.4 Ο β Πυρήνας

Στο συγκεκριμένο είδος λύσης που περιγράψαμε εδώ είναι αυτό που ονόμασε ο Aumann α πυρήνα, σε αντίθεση με ένα εναλλακτικό σενάριο που είναι γνωστό ως πυρήνας β. Για να είναι ένα διάνυσμα χρησιμότητας στον πυρήνα α πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες: πρώτον, το διάνυσμα χρησιμότητας πρέπει να προκύπτει από ένα ενιαίο σύνολο στρατηγικών όλων των παικτών και δεύτερον, κανένας συνασπισμός δεν μπορεί να πετύχει κάτι καλύτερο για όλους τους παίκτες της επιλέγοντας ένα εναλλακτικό σύνολο στρατηγικών,ανεξάρτητα από αυτό που επιλέγει ο συμπληρωματικός συνασπισμός.

Για τον ορισμό του β πυρήνα θα τροποποιήσουμε τη δεύτερη συνθήκη. Δεν απαιτείται πλέον ένα κλείδωμα συνασπισμού για την επιλογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής ,ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους παίκτες, αλλά χρησιμοποιείται για την ποικιλία των 'κλειδωμένων' στρατηγικών σαν μία συνάρτηση των επιλογών του συμπληρωματικού συνασπισμού. Είναι σαν ένας 'κλειδωμένος' συνασπισμός να επικεντρώνει την προσοχή του στο block, να αναγκάζει τον συμπληρωματικό συνασπισμό να κάνει την πρώτη κίνηση και μετά να ανταποκρίνεται αντί για την αντίστροφη σειρά των κινήσεων. Προφανώς οι πιθανότητες μπλοκαρίσματος είναι μεγαλύτερες για οποιονδήποτε συνασπισμό, σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα και ο β πυρήνας είναι μικρότερος από τον α πυρήνα. Ο β πυρήνας είναι πιο έξυπνη ιδέα σε σχέση με τον α και είναι πολύ ενδιαφέρον να δούμε εάν τα συμπεράσματα 1 και 2 είναι επαρκή για το β πυρήνα ώστε να μην είναι άδειος.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι εύκολο να φτιάξουμε ένα παράδειγμα μιας αγοράς με δύο προιόντα και 3 παίκτες καθένας από τους οποίους έχει ένα σύνολο και από τα δύο αγαθά. Οι στρατηγικές που είναι διαθέσιμες σε έναν παίκτη θα είναι να διατηρήσει μερικά από τα προϊόντα του για τον εαυτό του και να κάνει ανακατανομή των εναπομεινάντων αγαθών στους άλλους παίκτες με αυθαίρετο τρόπο. Σ αυτό το παράδειγμα είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι κανένα από τα δεύτερα προϊόντα δεν επιτρέπεται να ξαναμοιραστεί. Γι΄αυτό το εμπόρευμα, το ποσό που έχει ένας παίκτης μαζί με το συνολικό από τη διανομή στους άλλους παίκτης,πρέπει να είναι ακριβώς ίσο με το ένα. Άρα ικανοποιήσαμε το πρώτο συμπέρασμα.

Μία ενιαία επιλογή στρατηγικών προκαλεί ανακατανομή

$(x1,y1)+(x2,y2)+(x3,y3) \leq (3,3)$

της τελικής ποσότητας που υπήρχε αρχικά, με ισότητα για το δεύτερο εμπόρευμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κεφάλαιο 8

Εισαγωγή

8.1 RAND NASH Πειραματισμοί στη Θεωρία Παιγνίων Ν Ατόμων

Αυτή η ενότητα περιλαμβάνει μία σειρά πειραμάτων στα παίγνια n ατόμων . Πιο πολύ μας ενδιαφέρουν τα παίγνια συνεργασίας στα οποία τα παζάρια, οι διαπραγματεύσεις και οι συνασπισμοί είναι οι κυρίαρχες αρχές.Τα περισσότερα από αυτά τα παίγνια είναι σαν των Neumann και Morgenastern: προσπαθούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του παιγνίου με διάφορα θεωρητικά σενάρια που έχουν διατυπωθεί για τέτοια παίγνια.

Ένα πείραμα αφορά ένα παίγνιο στο οποίο δεν επιτρέπονται οι side πληρωμές. Κάποια άλλα περιλαμβάνουν διαδικασίες διαπραγματεύσεων και σ΄αυτά οι ταυτότητες των αντιπάλων ενός παίκτη παραμένουν κρυφές από αυτόν. Αυτά είναι κυρίως πειραματικές μελέτες και ελέγχουν την εφαρμοσιμότητα των μοντέλων διαπραγμάτευσης.

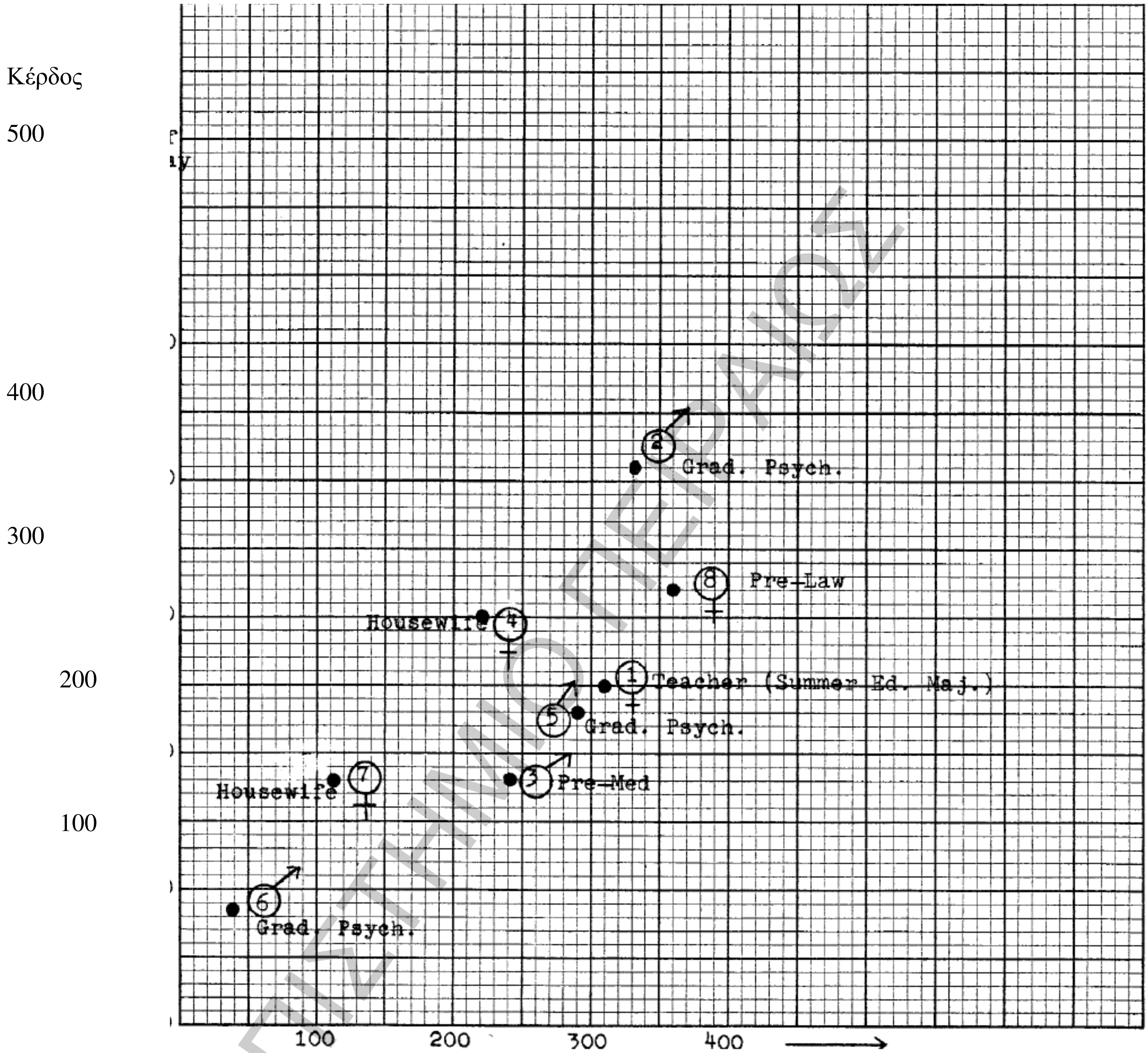
Τα πρόσωπά μας είναι τέσσερις άντρες και τέσσερις γυναίκες ανάμεσα στους οποίους πέντε φοιτητές ,δύο νοικοκυρές και μία δασκάλα. Αποτελούν μια έξυπνη και συνεργάσιμη ομάδα. Παρατηρήσαμε με μεγάλο ενδιαφέρον ότι οι διαφορετικές προσωπικότητές τους έπαιξαν μεγάλο ρόλο στον καθορισμό της επιτυχίας ή αποτυχίας κάθε ατόμου στο παίγνιο. Δώσαμε στους παίκτες chips για να χρησιμοποιήσουν στις πληρωμές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού και μετά από δύο μέρες που κάναμε τα πειράματα, εξαργυρώσαμε τα chips σε χρήματα. Παρουσιάζουμε παρακάτω ένα διάγραμμα το οποίο δείχνει τη σχέση των κερδών των παικτών της πρώτης και της δεύτερης μέρας.

Γενικά, θεωρούμε ότι τα πειράματά μας ήταν καρποφόρα και ότι περισσότερα πειράματα θα ήταν χρήσιμα και όχι υπερβολικά δύσκολα να διεξαχθούν. Αυτός ο τομέας των παιγνίων n ατόμων δεν έχει δεχτεί μεγάλη εξερεύνηση. Γι΄αυτό το λόγο και εξαιτίας της σχετικής υπανάπτυξης αυτού του τομέα της θεωρίας ενδείκνυται η πειραματική προσέγγιση.

Το κέρδος για τη $2^{η}$ μέρα είναι σωστό ωστε να μην περικλύει τα αποτελέσματα του KQJ παιχνιδιού τα οποία είχαν μεγαλύτερη καθαρή αλλαγή στοιχείων

Το κέρδος για τη $2^{η}$ μέρα είναι σωστό ωστε να μην περικλύει τα αποτελέσματα του KQJ παιχνιδιού τα οποία είχαν μεγαλύτερη καθαρή αλλαγή στοιχείων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Το κέρδος για τη 2η μέρα είναι σωστό ώστε να μην περικλύει τα αποτελέσματα του KQJ παιχνιδιού τα οποία είχαν μεγαλύτερη καθαρή αλλαγή στοιχείων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

8.2 Παίγνια Συνεργασίας με Πληρωμές Side

Α. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Έξι παίγνια σταθερού αθροίσματος , του τύπου που μελετήθηκε από τους Neumann και Morgenstern (δηλαδή παίγνια συνεργασίας στα οποία επιτρέπονται οι side πληρωμές) είναι εκείνα στα οποία συμμετέχουν τα άτομα του πειράματός μας. Τα τέσσερα από αυτά είναι παίγνια ήταν παίγνια τεσσάρων ατόμων τα οποία παίχτηκαν οκτώ φορές το καθένα. Ένα παίγνιο πέντε ατόμων παίχτηκε τρείς φορές και ένα παίγνιο επτά ατόμων , δύο φορές. Αυτά τα παίγνια παρουσιάστηκαν απλώς μόνο με τη χαρακτηριστική τους συνάρτηση. Οι παίκτες εναλλάσονται μετά από κάθε παίγνιο, έτσι ώστε να αποφευχθούν μόνιμοι συνασπισμοί. Ενδεχομένως ο καλύτερος τρόπος για να περιγράψουμε αυτά τα παίγνια είναι να παρουσιάσουμε εδώ τα υλικά που δώσαμε στα άτομα. Αυτό θα κάνουμε στην επόμενη ενότητα. Σημειώστε ότι τα παίγνια 1 και 4 είναι στρατηγικά ισοδύναμα καθώς επίσης και τα 2 και 3. Το παίγνιο 3 είναι ένα συμμετρικό παίγνιο τεσσάρων ατόμων. Τα παίγνια πέντε και επτά ατόμων τα βλέπουμε από παραδείγματα στα

Β. ΤΑ ΥΛΙΚΑ ΤΩΝ ΠΑΙΚΤΩΝ

Δείτε τις σελίδες που ακολουθούν.

8.3 Πειράματα Παιγνίων με Συνασπισμούς – Γενικές Οδηγίες για τα Άτομα

Διεξάγουμε αυτό το πείραμα προκειμένου να πάρουμε πληροφορίες για τις πιθανές τιμές , επεκτείνοντας τη θεωρία παιγνίων. Θα είναι σαν ένα bridge tournament. Σε κάθε γύρο θα χωρίζεστε σε δύο ομάδες των τεσσάρων ατόμων και τα μέλη κάθε ομάδας θα παίζουν ένα παιχνίδι συνασπισμού.

Στο παιχνίδι συνασπισμού θα κερδίσετε εάν μαζί με άλλον ένα ή δύο παίκτες σχηματίσετε έναν συνασπισμό ενάντια στους υπόλοιπους παίκτες. Για κάθε πιθανό συνασπισμό, έχουμε αποφασίσει εκ των προτέρων , το ποσό των chips που μπορεί να κερδίσει. Μπορεί να μην κερδίσει αλλά να χάσει. Ένας συνασπισμός όμως, για να αποπληρωθεί , θα πρέπει όλα τα μέλη του να συμφωνήσουν για το πώς θα μοιράσουν τα κέρδη τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Θα πρέπει να παίξετε αυτό το παίγνιο με πνεύμα ήρεμου, επιθετικού εγωισμού, με σκοπό είτε να κερδίσετε chips, είτε να χάσετε όσο το δυνατόν λιγότερα. Θα πρέπει να διαπραγματεύεστε με όλους τους παίκτες με την ίδια ευγενική, επιφυλακτική συμπεριφορά και να μην κάνετε διακρίσεις.

Φυσικά, για να κερδίσετε σε κάθε παιχνίδι θα πρέπει να συνεργαστείτε με άλλον ένα ή δύο παίκτες και να εκμεταλλευτείτε τους υπόλοιπους. Θα πρέπει όμως να επιλέξετε να σχηματίσετε έναν συνασπισμό με εκείνα τα άτομα που έχουν τα προσόντα ανάλογα με την κατάσταση του παιγνίου,ανεξάρτητα από τις προσωπικές σας προτιμήσεις ή τι έγινε στους προηγούμενους γύρους. Επίσης θα πρέπει να είσαστε αδίστακτοι σε ότι αφορά την εκμετάλλευση των υπόλοιπων παικτών και να προσπαθείτε πάντα να κερδίσετε όσο το δυνατόν περισσότερα.

Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο θέλουμε να παίξετε προκειμένου να εξυπηρετηθούν οι σκοποί του πειράματός μας.

Στο τέλος του πειράματος θα μετρήσουμε τα συνολικά χαμένα και κερδισμένα chips και θα δώσουμε ένα μικρό ποσό των χρημάτων επιβράβευσης στη βάση αυτών των ποσών.

Το πείραμα θα είναι δίκαιο για όλους ,αν και κάποιες φορές ένας παίκτης μπορεί σε ένα παίγνιο να έχει δύσκολη θέση και άλλες φορές να έχει δυνατή θέση.

8.4 Ειδικές Οδηγίες

Θα έχετε δέκα λεπτά για κάθε γύρο. Κατά τη διάρκεια του κάθε γύρου, οι παίκτες θα διαπραγματεύονται για τον σχηματισμό των συνασπισμών και θα παζαρεύουν τη μοιρασιά των προϊόντων. Αυτό το ανεπίσημο παζάρεμα είναι δοκιμαστικό και κανένας δεν περιορίζεται από ανεπίσημες προτάσεις.

Ο αντικειμενικός σκοπός είναι ο καθορισμός των τελικών συμφωνιών των συνασπισμών. Με τον όρο ‘ τελικές συμφωνίες των συνασπισμών’ εννοούμε τις συμφωνίες των μελών του συνόλου των παικτών έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα συνασπισμό και να μοιράσουν τα προϊόντα του με συγκεκριμένο τρόπο. Όταν μία ομάδα παικτών φτάσει στο σημείο να κάνει μία τέτοια συμφωνία , πρέπει να ενημερώσει τον κριτή ο οποίος θα την καταγράψει, θα την ξαναδιαβάσει στην ομάδα και θα την ανακοινώσει σαν συμβόλαιο εφόσον συμφωνήσουν όλα τα μέλη.

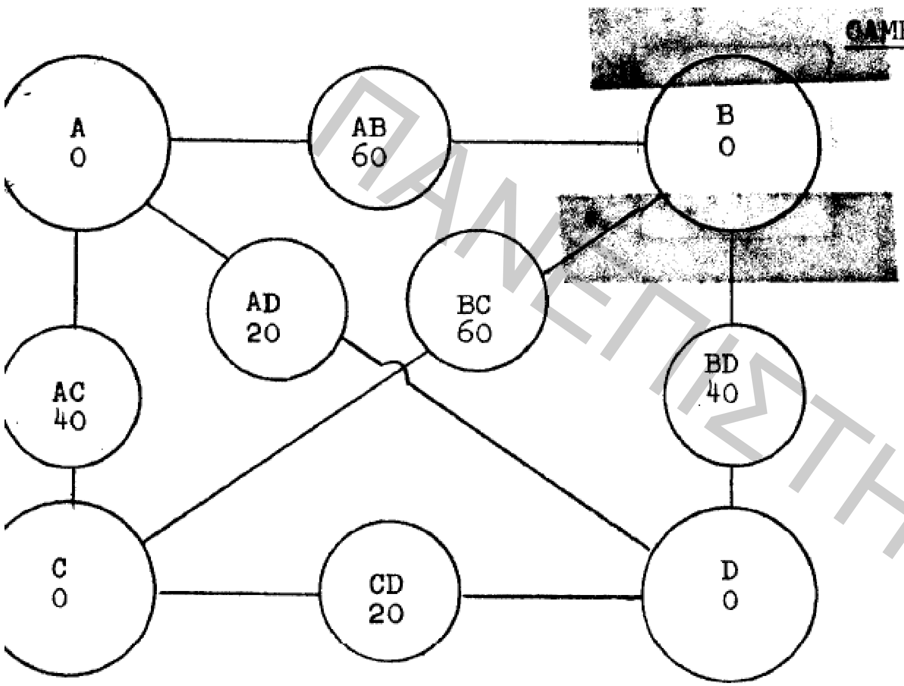
Μαζί με αυτή τη συμφωνία της ομάδας των παικτών , μπορεί να επιβληθούν από τον κριτή και πολλές ακόμα άλλες συμφωνίες κατά τη διάρκεια του γύρου του παιχνιδιού. Για παράδειγμα, δύο παίκτες μπορεί να συμφωνήσουν ότι εάν δε βρουν ένα τρίτο παίκτη για να σχηματίσουν ένα συνασπισμό τριών ατόμων, θα σχηματίσουν μόνοι τους ένα συνασπισμό και θα μοιράσουν τα κέρδη με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο. Εάν δημιουργήσουν ένα συνασπισμό τριών ατόμων, δεν θα είναι υποχρεωτικό να εισάγουν περιορισμούς στο συμφωνητικό τους. Ένας παίκτης μπορεί να παίξει μονόπλευρα επίσης. Για παράδειγμα μπορεί να επιλέξει να μη συμφωνήσει να μπει σε έναν συνασπισμό ο οποίος δε θα του αποδώσει σίγουρο κέρδος. Δύο παίκτες μπορεί να αποφασίσουν να μη μπει κανένας σε έναν συνασπισμό, αποκλείοντας με αυτό τον τρόπο τον άλλο. Αυτή η συμφωνία μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα και να αποφέρει πολλά πλεονεκτήματα. Όλοι αυτοί οι περιορισμοί είναι υποχρεωτικοί μόνο εάν έγκαιρα processed through the umpire όπως περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

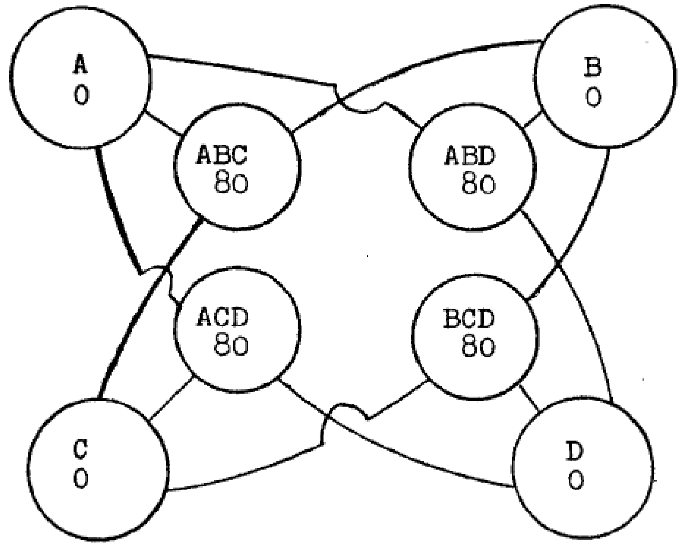
Όταν τελειώνει ο χρόνος ή όταν γίνεται ξεκάθαρο ότι δεν υπάρχει πιθανότητα ή επιθυμία για περαιτέρω σχηματισμό συνασπισμών μεταξύ των παικτών,ο γύρος τερματίζεται. Μπορεί να υπάρχει συνασπισμός τριών και ενός μόνο παίκτη, δύο αντίπαλων συνασπισμών (δύο ζευγαριών) , ενός ζευγαριού και δύο ξεχωριστών παικτών, ή ακόμα και τεσσάρων ξεχωριστών παικτών. Τώρα οι συνασπισμοί ή οι παίκτες πληρώνονται σε chips σύμφωνα με τα ποσά που δίνονται στο διάγραμμα που περιγράφει το παίγνιο. Μέσα σε κάθε συνασπισμό οι πληρωμές γίνονται σύμφωνα με τις συμφωνίες που γίνονται μέσα σε αυτούς. Θυμηθείτε ότι ένα σύνολο παικτών δε θα πληρωθεί σαν συνασπισμός εκτός και αν έχουν καθορίσει έναν συγκεκριμένο τρόπο κατανομής των χρημάτων στο συνασπισμό.

Στους όρους του παιχνιδιού μπορεί να συμπεριληφθούν τόσο θετικές όσο και αρνητικές πληρωμές. Όπως θα παρατηρήσετε στα διαγράμματα, η τιμή ενός παίκτη ή ενός συνασπισμού μπορεί να είναι αρνητική. Μπορεί να συμφωνηθούν ακόμα και άλλες 'μετακινήσεις' chips . Για παράδειγμα, ένας συνασπισμός μπορεί να συμφωνήσει να δώσει σε έναν εξωτερικό παίκτη ένα ποσό από τα κέρδη του, κλπ..

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Singles and Doubles



GAME 1

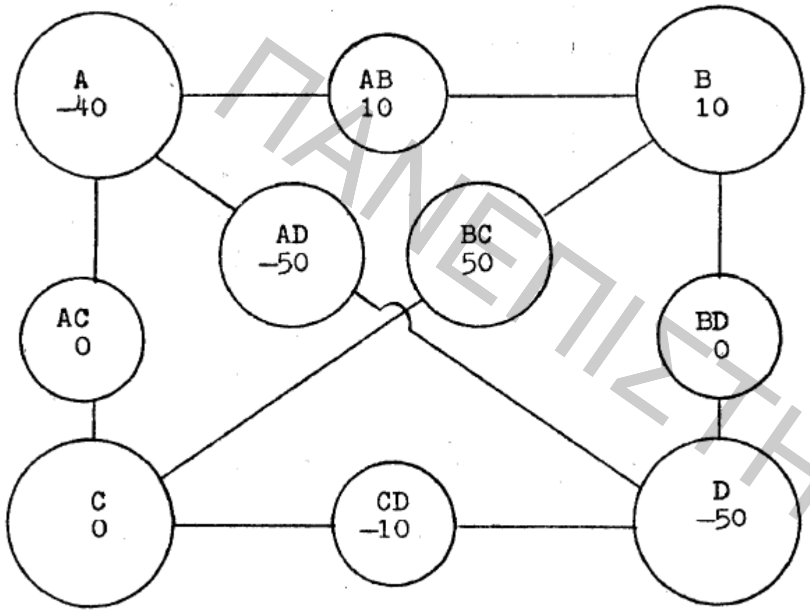
Single and Triples

one player alone	A	0	a pair of players	AB	60	three players	ABC	80
	B	0		AC	40		ABD	80
	C	0		AD	20		ACD	80
	D	0		BC	60		BCD	80
				BD	40			
				CD	20			

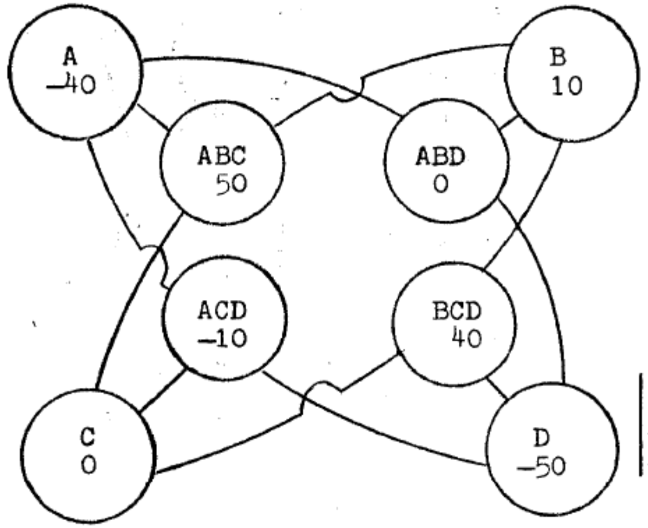
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

GAME 2



Singles and Doubles



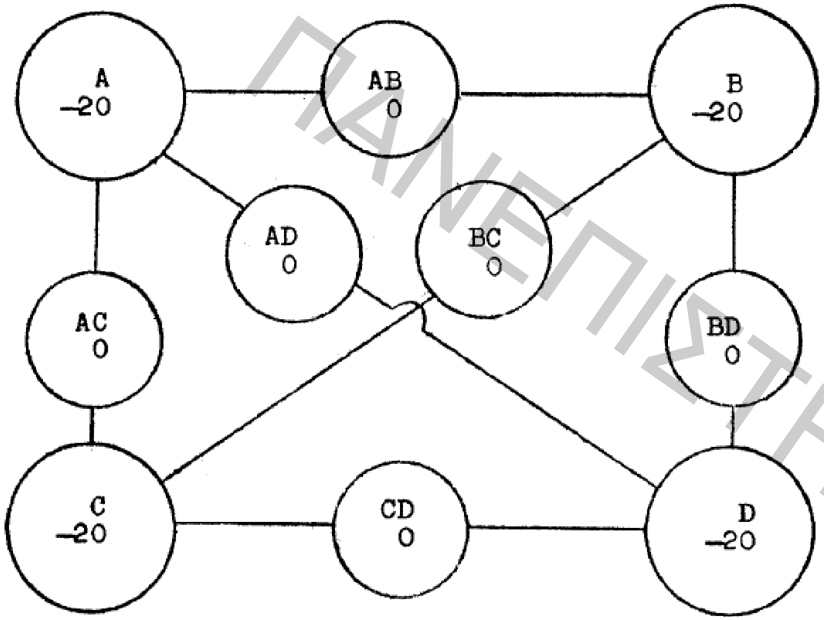
Singles and Triples

one player alone	A	–40	a pair of players	AB	+10	three players	ABC	+50
	B	+10		AC	0		ABD	0
	C	0		AD	–50		ACD	–10
	D	–50		BC	+50		BCD	+40
				BD	0			
				CD	–10			

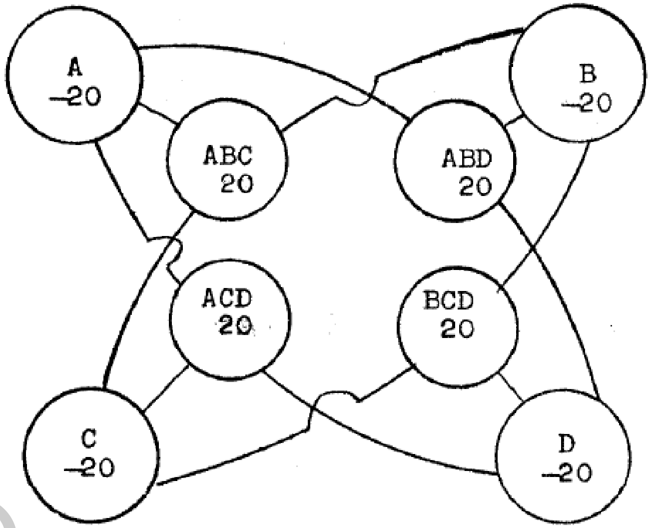
–10–

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

GAME 3



Singles and Doubles

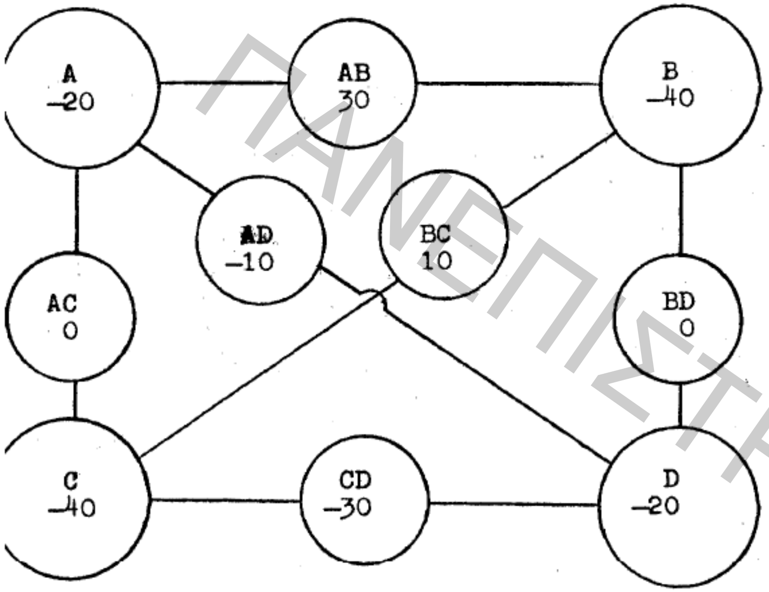


Singles and Triples

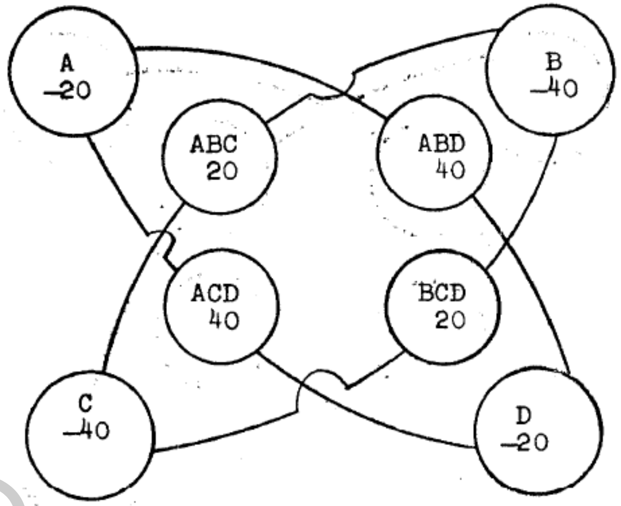
one player alone	A	-20	a pair of players	AB	0	three players	ABC	20
	B	-20		AC	0		ABD	20
	C	-20		AD	0		ACD	20
	D	-20		BC	0		BCD	20
				BD	0			
				CD	0			

-11-

GAME 4



Singles and Doubles



Singles and Triples

one player alone	A	−20	a pair of players	AB	30	three players	ABC	20
	B	−40		AC	0		ABD	40
	C	−40		AD	−10		ACD	40
	D	−20		BC	10		BCD	20
				BD	0			
				CD	−30			

−12−

FIVE-PERSON GAME

ONE PLAYER

A	-60
B	-30
C	-20
D	-50
E	-40

THREE PLAYERS

ABC	40	ADE	0
ABD	10	BCD	0
ABE	20	BCE	10
ACD	20	BDE	-20
ACE	30	CDE	-10

TWO PLAYERS

AB	10	BD	-30
AC	20	BE	-20
AD	-10	CD	-20
AE	0	CE	-10
BC	0	DE	-40

FOUR PLAYERS

ABCD	40
ABCE	50
ABDE	20
ACDE	30
BCDE	60

SEVEN-PERSON GAME

No. of Players in Coalition	1	2	3	4	5	6
Payoff	-40	0	-20	20	0	40

8.5 Γενική Συζήτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Υπάρχει μία τάση των μελών ενός συνασπισμού , να χωρίζονται περιστασιακά , κυρίως τα πρώτα μέλη. Όταν σχηματιστεί ο πυρήνας ενός συνασπισμού, δημιουργείται μία ασφάλεια και γίνεται προσπάθεια απόκτησης μεγαλύτερου ποσού από τα ακόλουθα μέλη ενός συνασπισμού. Η τάση για παραπάνω διαμερισμό στους πρώτους παίκτες ενός συνασπισμού έγινε εν μέρει λόγω της πεποίθησης ότι είναι πιο σημαντικός ο σχηματισμός του συνασπισμού παρά η διαφωνία για τις ακριβείς περιόδους.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του παζαρέματος ήταν η τάση να ψάχνουμε για συνασπισμούς με μεγάλες θετικές τιμές, σα να είναι οι μόνοι που αξίζουν την προσοχή μας, παραβλέποντας συχνά το γεγονός ότι κάποιοι παίκτες μπορούν να κερδίσουν ένα συνασπισμό με αρνητική τιμή και κοινό κέρδος(αυτό το παρατηρήσαμε στο παιχνίδι 2 , όπου Brand C ήταν πάντα μαζί).

Σπάνια σχηματίζονται συνασπισμοί με περισσότερα από δύο άτομα, εκτός και αν προκύψουν από μικρότερους συνασπισμούς. Ο σχηματισμός περισσότερων συνασπισμών επιτεύχθηκε επίσης μέσω παζαριών μεταξύ δύο αλλά όχι περισσότερων ομάδων.

Το αποτέλεσμα αυτών ήταν ότι ο πιο πιθανός συνασπισμός ήταν αυτός με τη μεγαλύτερη τιμή ακόμα και εάν αυτός δεν αποτελούσε πάντα το μεγαλύτερο σύνολο πλεονεκτημάτων για τους συμμετέχοντες. Όσο αφορά την ταχύτητα, αυτός ο συνασπισμός συνήθως διαμοιράζεται ομαλά. Συχνά όμως προέκυψε ότι ο παίκτης με το δεύτερο φαινομενικά μεγαλύτερο αρχικό πλεονέκτημα, πέτυχε τα περισσότερα παζαρέματα. Ο παίκτης με το φαινομενικά μεγαλύτερο αρχικό πλεονέκτημα είναι πιο πιθανό να μπει σε έναν συνασπισμό αλλά συνήθως δεν παίρνει το μεγαλύτερο μερίδιο του συνασπισμού.

Οι παίκτες αρχικά φαινόταν ότι παζάρευαν και περίμεναν ή προκαλούσαν συναγωνιστικές προσφορές. Αυτό όμως είχε ισχύ μέχρι κάποιο σημείο σε αυτά τα παιχνίδια όπου η κατάσταση δεν ήταν συμμετρική. Πάραυτα όμως, αργότερα σε εκείνα τα παιχνίδια που ήταν προφανώς συμμετρικά, το βασικό κίνητρο ήταν να αποφευχθεί ο παραμερισμός από τον συνασπισμό. Επίσης, δεν γίνονται πολλά παζαρέματα και υπήρχε μία τάση για όσο το δυνατόν πιο γρήγορη ομιλία μετά την παρότρυνση για έναρξη από τον κριτή και για να καταλήξουν σε κάποιο είδος συμφωνίας κατευθείαν. Ακόμα και σε ένα παίγνιο το οποίο ήταν στρατηγικά ισοδύναμο με ένα συμμετρικό παίγνιο, οι παίκτες δεν ήταν τόσο βιαστικοί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό συνέβη επειδή μερικοί παίκτες ένιωθαν ότι ήταν σε καλύτερη θέση από άλλους ανεξάρτητα από το αν ανήκαν ή όχι σε συνασπισμούς, ενώ άλλοι ένιωθαν ότι ήταν σε χειρότερη θέση επίσης ανεξάρτητα από το αν ανήκαν σε συνασπισμούς. Δεν έδιναν, όπως φαίνεται, προσοχή στο γεγονός ότι το στρατηγικό παιχνίδι του συνασπισμού ήταν το ίδιο για όλους.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε μία συνέντευξη μετά το τέλος των γύρων, ένα άτομο μου είπε ότι ο περισσότερο ευνοούμενος παίκτης δεν πέτυχε την καλύτερη συμφωνία. Όταν βρέθηκε λοιπόν αυτό το άτομο στη θέση του ευνοούμενου παίκτη, ένιωθε ότι εάν απαιτούσε αυτά που δικαιούταν , θα φαινόταν αδικαιολόγητο στους άλλους παίκτες και δε θα μπορούσε να μπει σε κάποιο συνασπισμό. Ακόμα, όταν δεν ήταν ο ευνοούμενος παίκτης δε μπορούσε να εκφράσει τη γνώμη του για τίποτα από όλα αυτά.

Οι διαφορές στις προσωπικότητες των παικτών γίνεται παντού διακριτή. Η τάση ενός παίκτη να μπει σε συνασπισμούς είχε μεγάλη σχέση με την ομιλητικότητά του. Συχνά, κατά τον σχηματισμό ενός συνασπισμού, το πιο επιθετικό μέλος του ήταν υπεύθυνο για τις διαπραγματεύσεις του συνασπισμού. Σε πολλές περιπτώσεις, η επιθετικότητα έπαιζε σημαντικό ρόλο ακόμα και στον πρώτο σχηματισμό ενός συνασπισμού. Επίσης και το ποιος φώναξε πρώτος και πιο δυνατά μετά το σινιάλο του κριτή επηρέασε το αποτέλεσμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

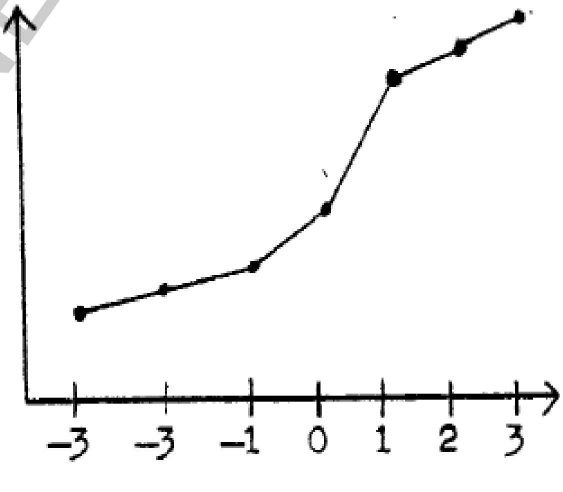
Στα παίγνια τεσσάρων ατόμων, φαινόταν ότι ο γεωμετρικός διακανονισμός των παικτών γύρω από το τραπέζι δεν είχε επίδραση στο αποτέλεσμα. Στα παίγνια πέντε ατόμων όμως , και ειδικά σε αυτά των επτά ατόμων, ήταν αρκετά σημαντικό. Στο παίγνιο πέντε ατόμων εάν δύο παίκτες ήταν καθισμένοι ο ένας απέναντι στον άλλο, ήταν πολύ πιθανό να σχηματίσουν ένα συνασπισμό. Επίσης, στα παίγνια επτά ατόμων, όλοι οι συνασπισμοί σχηματίστηκαν μεταξύ γειτονικών παικτών ή ομάδων από παίκτες. Γενικά, όσο μεγάλωνε ο αριθμός των παικτών, η ατμόσφαιρα γινόταν πιο μπερδεμένη, πιο πυρετώδης, και λιγότερο ευχάριστη στα υποκείμενα. Τα έργα των παιγνίων επτά ατόμων ήταν απλώς εκρήξεις σχηματισμών συνασπισμών.

Παρά την προσπάθεια για επικράτηση μιας εντελώς εγωιστικής και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς μεταξύ των παικτών, εκείνοι συχνά διατηρούσαν μία ευγενή συμπεριφορά συνεργασίας. Φυσικά, αυτό ήταν αρκετά λειτουργικό για να αυξήσουν τις πιθανότητες τους για να συμμετάσχουν σε συνασπισμούς. Πάντα προτιμούσανε και ανεπίσημες συμφωνίες. Συχνά δύο παίκτες ΄κολλούσαν΄ μαζί χωρίς να δώσουν καμία υπόσχεση. Οι υποσχέσεις ανάμεσα σε δύο άτομα ήταν πάντα σαν μία συμφωνία για σχηματισμό ενός συνασπισμού με συγκεκριμένο διαμερισμό των κερδών, εκτός και αν ένας τρίτος παίκτης εισέλθει οπότε δε διευκρινίζεται η αποπληρωμή. Αυτό αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο διαφωνίας μετά την εισαγωγή ενός τρίτου παίκτη αλλά δε δημιουργήθηκε ποτέ τέτοιο θέμα. Η αρχή του διαμερισμού της διαφοράς εφαρμόζεται πάντα σε τέτοιες περιπτώσεις.

Στα παίγνια επτά ατόμων η χαρακτηριστική συνάρτηση έκανε τους συνασπισμούς με άρτιο αριθμό παικτών πιο επιθυμητούς σε σχέση με εκείνους που είχαν περιττό αριθμό παικτών. Με τις διαπραγματευτικές διαδικασίες που χρησιμοποιήσαμε, είναι αναπόφευκτο ένας παίκτης να μη χάσει άσχημα. Υπήρχε μία αίσθηση σε μερικούς από τους παίκτες ότι κανένας παίκτης ξεχωριστός δεν πρέπει να χάσει δύο φορές στη σειρά και έτσι ενδεχομένως ένα σύστημα περιστροφής θα είχε αναπτυχθεί εάν υπήρχαν περισσότερα παιχνίδια. Δεν υπήρχε εντούτοις τέτοια τάση μέσα στο συνασπισμό που όταν κέρδιζε να αποζημίωνε το χαμένο.

Η ακόλουθη συζήτηση θα βασιστεί στο συμπέρασμα ότι η χρησιμότητα ενός αποτελέσματος σε έναν παίκτη, με την έννοια των von Neumann και Morgenstern, είναι ανάλογη με τον αριθμό των chips που κέρδισε. Φυσικά αυτό δεν είναι αληθές. Για παράδειγμα είναι δύσκολο να εμποδίσουμε ένα υποκείμενο να κάνει διαχωρισμό ανάμεσα στα παιχνίδια που κερδίζει και σε εκείνα που χάνει. Η γραφική παράσταση της χρησιμότητας και των chips που κερδίζει φαίνεται παρακάτω:

ΠΑΡΟΧΕΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΡΔΙΣΜΕΝΕΣ ΜΑΡΚΕΣ

Είναι πολύ δύσκολο να κρίνουμε εάν τέτοια φαινόμενα σαν και αυτό είναι σημαντικά. Ήταν αξιοσημείωτο εντούτοις ότι κάποιοι παίκτες είχαν μία κυρτή συνάρτηση χρησιμότητας η οποία εξέφραζε ότι ήθελαν να παίζουν τυχαία ενώ άλλοι δεν επιθυμούσαν κάτι τέτοιο. Στο τελευταίο γύρο του παιχνιδιού 3 για παράδειγμα, και οι τέσσερις παίκτες έπαιζαν τυχαία για να δουν ποιος συνασπισμός τριών ατόμων θα σχηματιζόταν. Ένας παίκτης διαμαρτυρήθηκε τόσο σθεναρά σε αυτή τη διαδικασία εδάφους που θα ήταν άδικο για τον παίκτη που έμεινε εκτός. Αναγκάστηκε όμως να συμβιβαστεί υπό την απειλή ενός συνασπισμού τριών ατόμων εναντίων της.

8.6 Συμβατότητα με τις τιμές του Shapley.

Οι τιμές του Shapley για διαφορετικές θέσεις συγκρίνονται με τα μέσα αποτελέσματα που προκύψανε στα διαγράμματα που ακολουθούν. Θα βρείτε πιο λεπτομερή αριθμητικά δεδομένα στις επόμενες σελίδες. Υπάρχει μία επαρκής συμβατότητα ανάμεσα στα δεδομένα από τις παρατηρήσεις μας και στις τιμές του Shapley, εάν λάβει κανείς υπόψη τον μικρό αριθμό παιχνιδιών που υπολογίσαμε. Ωστόσο , το πραγματικό αποτέλεσμα είναι πιο ακραίο σε σχέση με τις τιμές του Shapley. Αυτό το παρατηρούμε κυρίως στο παιχνίδι 1. Προφανώς αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι πιο πιθανό να σχηματιστούν συνασπισμοί που έχουν μεγάλα κέρδη. Οι παίκτες που είχαν σχετικά υψηλές Shapley τιμές ανταμείφτηκαν όχι μόνο με υψηλά κέρδη όταν μπήκαν σε συνασπισμούς αλλά και με μία ισχυρή τάση συμμετοχής σε συνασπισμούς. Στο παιχνίδι 2 και στο παίγνιο πέντε ατόμων όπου υπάρχουν δύο παίκτες που είχαν αξιοσημείωτα υψηλές Shapley τιμές, ο δεύτερος καλύτερος παίκτης τα πήγε εξίσου καλά με τον πρώτο.

8.7 Συμβατότητα με στρατηγική ισοδυναμία

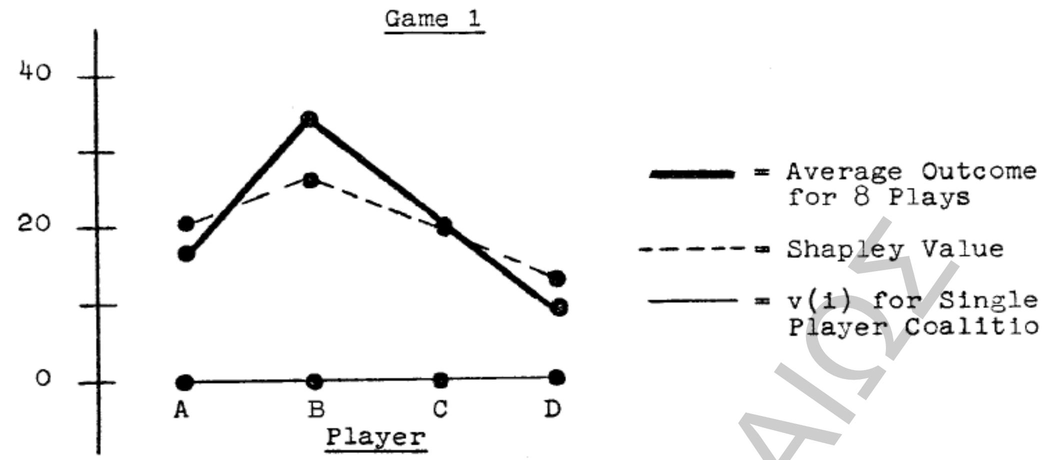
Τα γραφήματα δείχνουν τα μέσα αποτελέσματα των παιγνίων μας αφού αυτά μετατραπούν σε κανονικοποιημένη μορφή με στρατηγική ισοδυναμία. Η κανονικοποίηση που χρησιμοποιείται είναι εκείνη στη οποία η αξία του συνασπισμού ενός ατόμου είναι μηδενική ενώ όλο το σύνολο των παικτών αξίζει όσο μία μονάδα. Προκειμένου να εξηγήσουμε αυτά τα γραφήματα είναι απαραίτητο να θυμηθούμε ότι τα παιχνίδια 1 και 4 καθώς και τα 2 και 3 είναι στρατηγικώς ισοδύναμα. Επιπρόσθετα, το παιχνίδι 1 είναι συμμετρικό μεταξύ A και C, το παιχνίδι 3 είναι συμμετρικό μεταξύ όλων των παικτών , ενώ το παίγνιο πέντε ατόμων είναι ισοδύναμο με ένα παίγνιο όπου B,C,D,E είναι συμμετρικά. Θα πρέπει να περιμένουμε ότι τα διαγράμματα για τα παιχνίδια 1 και4 θα έχουν μία κλίση το ένα προς το άλλο και το ίδιο θα ισχύει για τα παιχνίδια 2 και 3. Επίσης, περιμένουμε ότι αυτά τα διαγράμματα θα είναι λίγο αλλαγμένα από τις ανταλλαγές του κύκλου των παικτών.

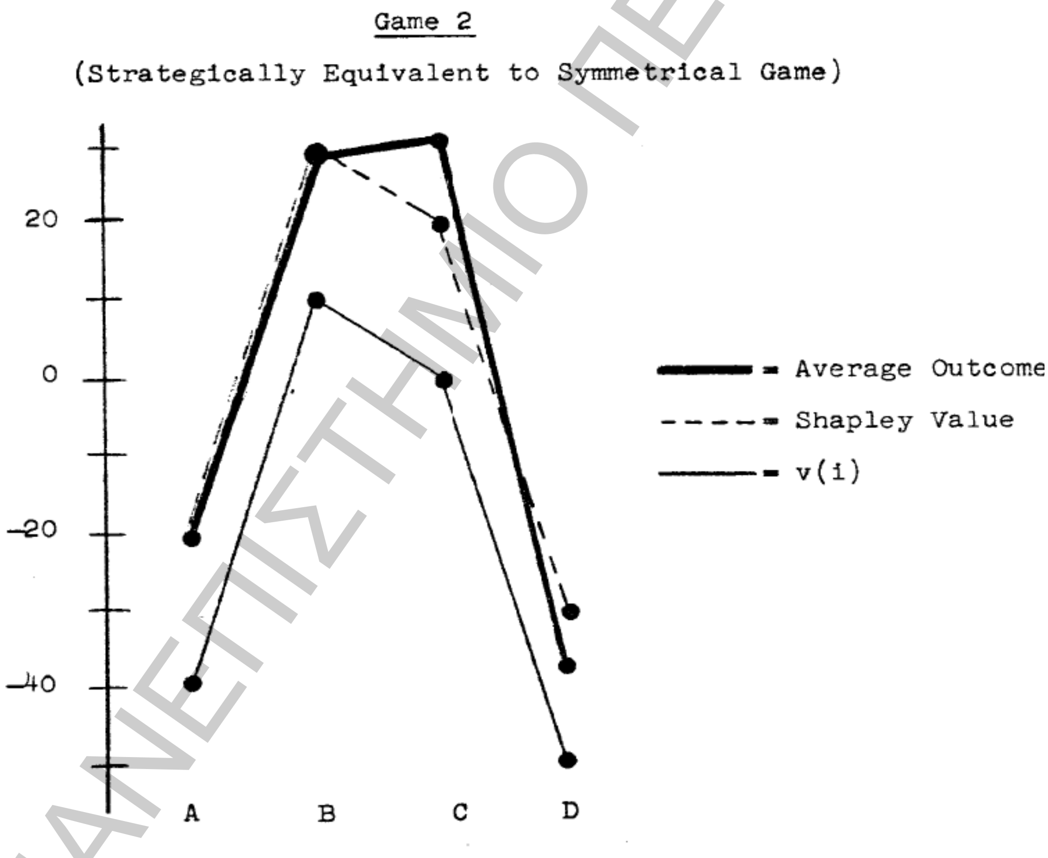
Τα πραγματικά αποτελέσματα δεν είναι πολύ καλά. Θα τα περιμέναμε από τη συζήτηση στην ενότητα γ. Το γεγονός ότι οι συνασπισμοί με μεγάλη χαρακτηριστική συνάρτηση είναι πιο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

πιθανό να σχηματιστούν, η τάση των μελών ενός συνασπισμού να διαχωρίζονται ομαλά και η μη γραμμικότητα των συναρτήσεων χρησιμότητας οδηγούν σε κατάρριψη του σεναρίου στρατηγικής ισοδυναμίας.

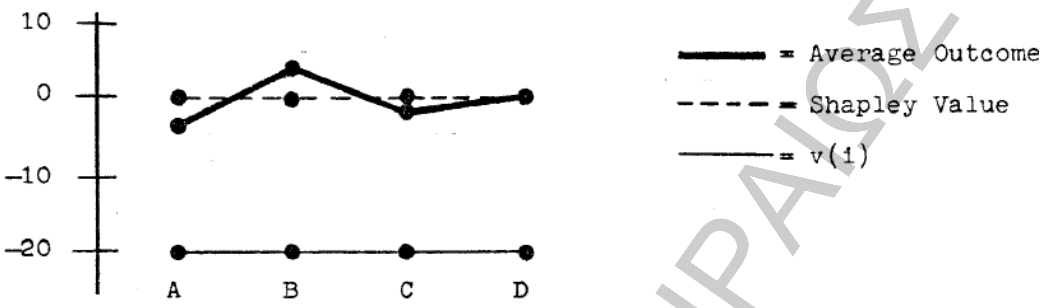
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



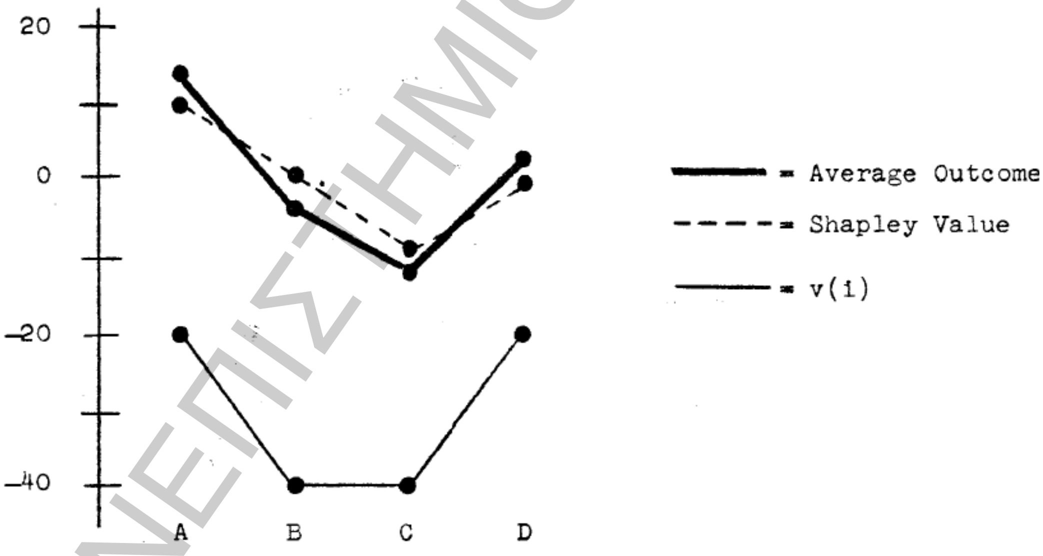


Συμβατότη-τα παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων
Shspley value

Game 3
(Symmetrical)

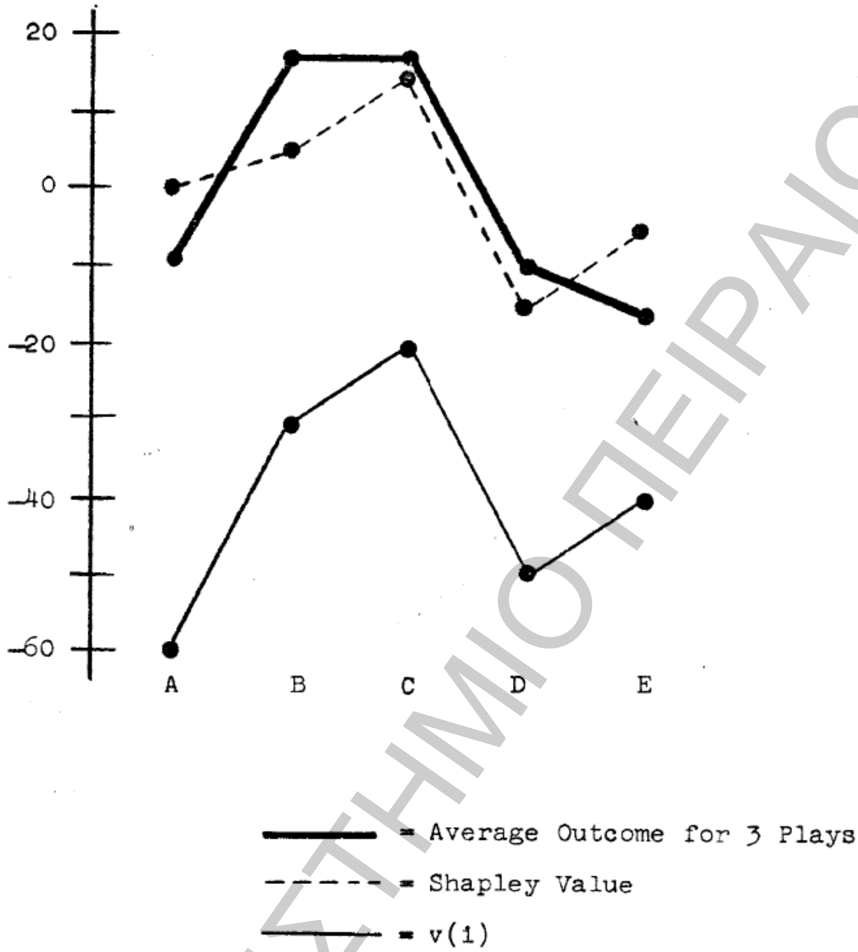


Game 4
(Strategically Equivalent to Game 1)



Στρατηγικά ισοδύναμα συμμετρικού παιχνιδιού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Παρουσιάζαται παραπάνω Παιχνίδι 5 ατόμων

Στρατηγικά ισοδύναμα παιχνιδιού τα οποία είναι συμμετρικά ανάμεσα στους παίχτες B,C,D,E

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

8.8 Συμβατότητα με τις λύσεις των von Neumann – Morgenstern

Είναι εξαιρετικά δύσκολο να πούμε εάν τα αποτελέσματα που παρατηρήσαμε επιβεβαιώνουν ή όχι τη θεωρία von Neumann και Morgenstern. Αυτό εν μέρει συμβαίνει επειδή δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο τι ισχυρίζεται η θεωρία. Σύμφωνα με μία εξήγηση, η λύση αναπαριστά μια σταθερή κοινωνική δομή των παικτών. Προκειμένου να εξετάσουμε αυτή τη θεωρία επαρκώς, θα ήταν πιθανόν αναγκαίο να επαναλαμβάνουμε συνεχώς ένα παιχνίδι, με ένα σταθερό σύνολο παικτών μέχρι να εμφανιστεί κάποια σταθερότητα στο σύνολο των αποτελεσμάτων. Κάποιος θα μπορούσε να δει σε ποιο βαθμό τα αποτελέσματα του τελικού συνόλου επηρεάζουν το ένα το άλλο και σε ποιο βαθμό άλλα πιθανά αποτελέσματα δεν επηρεάζουν από αυτά.

Αυτό προτείνει να βρούμε σε ποιο βαθμό τα αποτελέσματα κάθε παιγνίου επηρεάζουν το ένα το άλλο. Αυτή δεν είναι μία δίκαιη εξέταση της θεωρίας αλλά δε μπορούμε να κάνουμε πολλά περισσότερα με τα διαθέσιμα δεδομένα. Αυτά που ακολουθούν είναι σημαντικές επιρροές που προκύπτουν ανάμεσα στα οκτώ αποτελέσματα που προκύπτουν για κάθε ένα από τα παίγνια τεσσάρων ατόμων. Οι επιρροές που προκύπτουν εξαιτίας μιας διαφοράς ενός chip αγνοούνται.

<u>Παιχνίδι 1</u>

2 ,6 ,7 > 3 ,
3, 4 ,7 > 1,
5 > 1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 , 8 .

<u>Παιχνίδι 2</u>

1 > 2, 4,
3 > 1, 7, 8,
4 > 3, 5,
5 > 1, 7,
6 > 1, 7,
7 > 1 ,2, 4,
8 > 1, 2, 6.

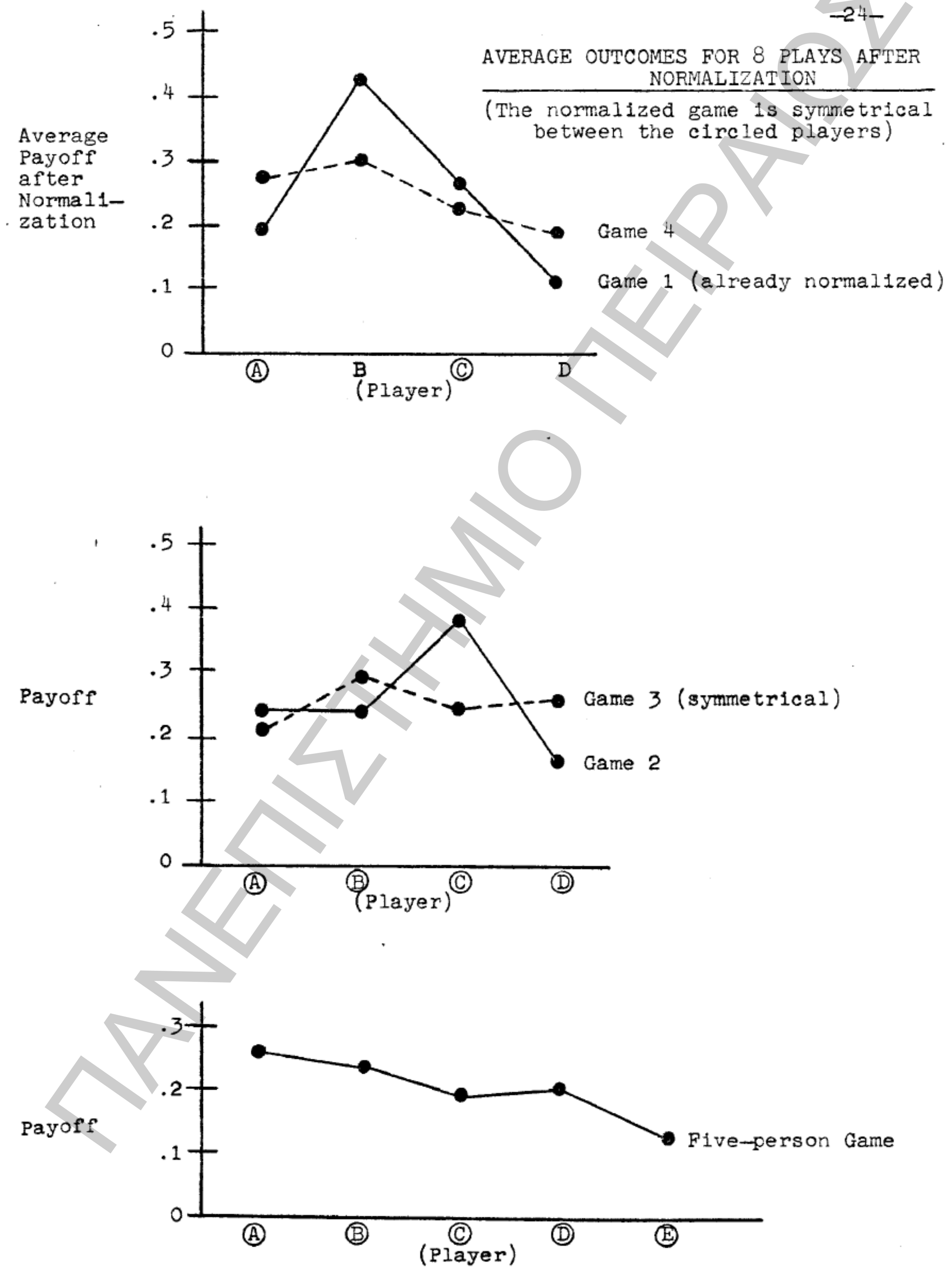
<u>Παιχνίδι 3</u>

3 > 1, 5, 7, 8,
4 > 3.

<u>Παιχνίδι 4</u>

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2, 3, 8 > 6,
6 > 1,
3 >2.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Για το ***παιχνίδι 2*** προκύπτουν τόσες πολλές κυριαρχίες που το σύνολο των αποτελεσμάτων δε μπορεί να συσχετιστεί με καμία λύση. Για το ***παιχνίδι 1*** υπάρχει μία ελπίδα αφού τα αποτελέσματα 2,4,6,7 και 8 δεν επηρεάζουν το ένα το άλλο.

Για το ***παιχνίδι 3*** , η κατάσταση είναι αρκετά ικανοποιητική. Τα αποτελέσματα 1,2,4,5,6,7 και 8 δε συγκρούονται το ένα με το άλλο και σχετίζονται καθαρά με μία παρόμοια λύση σε αυτό το παιχνίδι:ονομαστικά, η λύση αποτελείται από (10,10,0,-20) και οι ανταλλαγές μαζί με (0,0,0,0). Το σημείο 3 επίσης ανήκει σε μία παρόμοια λύση , αυτή που αποτελείται από (6 2/3 , 6 2/3, 6 2/3, -20) , (6 2/3, 6 2/3, -6 2/3, -6 2/3) και οι ανταλλαγές τους. Αυτά τα αποτελέσματα εξηγούνται λιγότερο ή περισσότερο από τη συμμετρία του παιχνιδιού και έτσι δεν είναι ξεκάθαρο ότι είναι σημαντικά.

Για το ***παιχνίδι 4*** τα αποτελέσματα 1,3,4,5,7 και 8 δεν επηρεάζουν το ένα το άλλο. Θα ήταν αναγκαίο να προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε αυτό το σύνολο σε μία λύση προκειμένου να εξετάσουμε τη σημασία αυτού του αποτελέσματος.

Με μία άλλη ερμηνεία της θεωρίας, μία λύση αναπαριστά μία συλλογή αποτελεσμάτων υπό μελέτη από τους παίκτες σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας των διαπραγματεύσεων. Η λύση αναφέρεται σε έναν ξεχωριστό παίκτη ενός παιγνίου και όχι σε έναν αριθμό παικτών. Είναι πολύ δύσκολο να πούμε ποια αποτελέσματα ήταν υπό μελέτη από τους παίκτες σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αυτό που παρατηρήσαμε ήταν ένας αριθμός προσφορών που έγιναν η μία μετά την άλλη. Μία πιο σχολαστική μελέτη των δεδομένων μας θα ήταν αναγκαία για να αναιρέσουμε αυτή την ερμηνεία.

Ένα παράδειγμα όπου μία τέτοια έρευνα φαίνεται λογική παρουσιάζεται παρακάτω. Σε ένα παίγνιο τεσσάρων ατόμων σχηματίστηκε ένας συνασπισμός δύο ατόμων αλλά έγινε συμφωνία να μην επεκταθεί ο συνασπισμός. Έτσι έμειναν οι άλλοι δύο παίκτες σε μία απλή κατάσταση διαπραγματεύσεων. Επέλεξαν να διαμοιράσουν ομαλώς αντί να προχωρήσουν στη δοκιμασία του παζαρέματος. Εάν όμως είχαν διαπραγματευτεί, το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων θα είχε σχηματίσει ένα μέρος από την quota-type λύση του Shapley.

8.9 Συμβατότητα με λογικά αποτελέσματα

Ο Milnor ορίζει διάφορα όρια για το ποσό που οποιοδήποτε σύνολο παικτών μπορεί να πάρει σε οποιοδήποτε παίγνιο n ατόμων. Συγκεκριμένα, ορίζεται το ανώτερο ότι b(i) για κάθε παίκτη i και το ανώτερο όριο d(S) για κάθε σύνολο S. Αυτές οι τιμές συγκρίνονται με τα πραγματικά αποτελέσματα στον τομέα H.

Στα περισσότερα παιχνίδια, ένα σύνολο S έχει περισσότερο από το d(S). Η συνάρτηση d(S) δε φαίνεται να έχει καμία σχέση με τον τρόπο με τον οποίο παίζεται το παίγνιο. Από την άλλη πλευρά, το ανώτατο όριο b(i) ήταν συνήθως συμβατό με τα αποτελέσματα. Στα παίγνια τεσσάρων ατόμων υπήρξε μόνο μία περίπτωση παίκτη που να πήρε περισσότερα ή ίσα από b(i).

Σε αυτό το συγκεκριμένο παιχνίδι (γύρος 7 του δεύτερου παιχνιδιού) ένας από τους παίκτες ανέφερε εκ των υστέρων ότι είχε κάνει λάθος μη συνειδητοποιώντας την πιθανότητα ενός συνασπισμού. Τα αποτελέσματα ήταν λιγότερο ευνοικά για το παίγνιο πέντε ατόμων. Κάποιος παίκτης πήρε περισσότερα από b(i) σε κάθε παιχνίδι. Αυτό προκλήθηκε από το γεγονός ότι οι παίκτες βιάστηκαν να μπουν σε συνασπισμούς, μοιράζονται τα κέρδη ομοιόμορφα χωρίς να μελετούν στην ουσία τις στρατηγικές πιθανότητες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ένα κατώτατο όριο l(S) ορίζεται επίσης για τα κέρδη σε κάθε συνασπισμό. Το παίγνιό μας επτά ατόμων κατασκευάστηκε σαν παράδειγμα ενός παιχνιδιού για το οποίο μία λύση των von Neumann και Morgenstern. Έδωσε ένα σύνολο S μικρότερο από l(S). Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει ότι κάθε σύνολο S πήρε τουλάχιστον l(S) και στους δύο παίκτες του παιχνιδιού. Το ελάχιστο κέρδος του S καταλαμβάνει όλα τα σύνολα S που περιλαμβάνουν ένα δοσμένο αριθμό στοιχείων.

No. of elements in S		1	2	3	4	5	6
Minimum over such S of payoff	run 1 run 2	−40 −26	−34 −23	−28 −20	−21 −15	−14 −10	−7 −5
$\ell(S)$		−40	−80	−40	−60	−20	−40

8.10 Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα πραγματικά αποτελέσματα δίνονται στους επόμενους πίνακες. Τα αναμενόμενα αποτελέσματα δίνονται στις λίγες περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει τυχαιότητα παικτών. Το παίγνιο 1 είναι ένα παίγνιο σταθερού αθροίσματος με v(I)= 80. Όλα τα άλλα είναι μηδενικού αθροίσματος (οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις δίνονται στην ενότητα β).

Τα στοιχεία που φαίνονται στην τελευταία στήλη περιλαμβάνουν μόνο επίσημες συμφωνίες οι οποίες αναπτύχθηκαν από τον κριτή. Έγιναν πολλές ανεπίσημες συμφωνίες οι οποίες κρατήθηκαν.

Οι αριθμοί b(S) και d(S) θα είναι τα ανώτατα όρια για το ποσόν που θα πρέπει να πάρει ένας συνασπισμός σε ξεχωριστούς γύρους ενός παιγνίου. Η τιμή του Shapley θεωρείται μία προσέγγιση των μέσων αποτελεσμάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

DATA FOR GAME 1
(Equivalent to Game 4)

et of Player S v(S)	A 0	B 0	C 0	D 0	AB 60	AC 40	AD 20	BC 60	BD 40	CD 20	Coalitions or Commit- ments Made
ayoff in run umber 1	0	32	24	24	32	24	24	56	56	48	(CD), BCD
2	0	34	34	12	34	34	12	68	46	46	(BC), BCD
3	10	30	30	10	40	40	20	60	40	40	BC, AD
4	10	35	35	0	45	45	10	70	35	35	BC, ABC
5	20	40	10	10	60	30	30	50	50	20	AB, CD
6	34	34	0	12	68	34	46	34	46	12	ABD
7	15	35	30	0	50	45	15	65	35	30	BC, ABC
8	35.5	35.5	0	9	71	35.5	44.5	35.5	44.5	9	AB, ABD
verage Payoff	15.6	34.4	20.3	9.6	50.0	35.9	25.2	54.8	44.1	30.0	
(S)	60	60	60	40							
(S)	30	30	30	26.7	70	60	50	70	60	50	
apley Value	20	26.7	20	13.3	46.7	40	33.3	46.7	40	33.3	
o. of times S as part of oalition	6	8	6	6	5	2	3	5	4	3	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

DATA FOR GAME 2
(Equivalent to Symmetrical Game)

Set of Players S	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	Coalitions or Commitments Made
v(S)	–40	10	0	–50	10	0	–50	50	0	–10	
Payoff in run number 1	–4	20	30	–46	16	26	–50	50	–26	–16	AD, BC
2	–2	26	26	–50	24	24	–52	52	–24	–24	BC, ABC
3	–25	25	25	–25	0	0	–50	50	0	0	AD, BC
4	–20	35	35	–50	15	15	–80	70	–15	–15	ABC
5	–23	25	25	–27	2	2	–50	50	–2	–2	BC, AD
6	–18	25	25	–32	7	7	–50	50	–7	–7	BC, AD
7	–40	42	41	–43	2	1	–83	83	–1	–2	BCD
8	–40	34	34	–28	–6	–6	–68	68	6	6	BC, BCD
Average Payoff	–21.5	29.0	30.1	–37.6	7.5	8.6	–59.1	59.1	–8.6	–7.5	
b(S)	0	50	40	–10							
d(S)	–13.3	36.7	26.7	–23.3	30	20	–30	70	20	10	
Shapley Value	–20	30	20	–30	10	0	–50	50	0	–10	
No. of times S was part of coalition	6	8	8	6	2	2	4	8	2	2	

DATA FOR GAME 3
(Symmetrical)

Set of Players S / v(S)	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	Coalitions or Commitments Made
v(S)	–20	–20	–20	–20	0	0	0	0	0	0	
Payoffs in run number 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	AB, CD
2	–20	1	9	10	–19	–11	–10	10	11	19	CD, BCD
3	7	6	7	–20	13	14	–13	13	–14	–13	ABC
4	10	9	–20	1	19	–10	11	–11	10	–19	AB, ABD
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	AC, BD
6	–20	9	2	9	–11	–18	–11	11	18	11	BD, BCD
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	CD, AB
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ABCD
Average Payoff	–2.9	3.1	–0.2	0	0.2	–3.1	–2.9	2.9	3.1	–0.2	
b(S)	20	20	20	20							
d(S)	6.7	6.7	6.7	6.7	20	20	20	20	20	20	
Shapley Value	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
No. of times S was part of coalition	6	8	7	7	5	3	2	4	5	5	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

DATA FOR GAME 4
(Equivalent to Game 1)

Set of Players S	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	Coalitions or Commitments Made
v(S)	−20	−40	−40	−20	30	0	−10	10	0	−30	
Payoff in run number 1	25	−40	−10	25	−15	15	50	−50	−15	15	ACD
2	−20	10	10	0	−10	−10	−20	20	10	10	BC, BCD
3	15	−40	15	10	−25	30	25	−25	−30	25	AC, ACD
4	25	25	−40	−10	50	−15	15	−15	15	−50	AB, ABD
5	24	24	−40	−8	48	−16	16	−16	16	−48	AB, ABD
6	−5	5	5	−5	0	0	−10	10	0	0	BC, AD
7	25	25	−40	−10	50	−15	15	−15	15	−50	AB, ABD
8	15	−40	10	15	−25	25	30	−30	−25	25	ACD
Average Payoff	13.0	−3.9	−11.2	2.1	9.1	1.7	15.1	−15.1	−1.7	−9.1	
b(S)	70	50	50	40							
d(S)	25	5	5	20	45	30	35	25	30	15	
Shapley Value	10	0	−10	0	10	0	10	−10	0	−10	
No. of times S was part of coalition	7	5	5	8	3	3	7	2	4	4	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

DATA FOR FIVE-PERSON GAME
(Equivalent to Game Symmetric between B, C, D, E)

Player i	A	B	C	D	E	Coalitions or Commitments Made
v(i)	−60	−30	−20	−50	−40	
Payoff in run number 1	10	10	10	10	−40	BC, AD, ABCD
2	23	23	23	−50	−19	ABC, ABCE
3	−60	20	20	10	10	BC, BCD, BCDE
Average Payoff	−9.0	17.7	17.7	−10	−16.3	
b(i)	40	20	30	0	10	
d(i)	−10	20	30	0	10	
Shapley Value	0	5	15	−15	−5	
No. of times i was member of coalition	2	3	3	2	2	

DATA FOR SEVEN-PERSON GAME
(Symmetric)

Player i	A	B	C	D	E	F	G	Coalitions or Commitments Made
v(i)	−40	−40	−40	−40	−40	−40	−40	
Payoff in run number 1	−40	6	6	7	7	7	7	BC, DE, FG; DEFG; BCDEFG
2	−26	5	5	5	5	3	33	CE, DB, FG; BCDE; AFG

-3-

Κεφάλαιο 9

Εισαγωγή

9.1 Μια διαμάχη n ατόμων σε φυλετικά παίγνια

Το παίγνιο της μάχης των φίλων (Battle of Sexes – BOS) , σαν ένα ενδιαφέρον παράδειγμα παιγνίου μη συνεργασίας με multiple ισορροπία του Nash, μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές. Το θεώρησαν σαν ένα παίγνιο δύο ατόμων και μιας ευκαιρίας τόσο στις θεωρητικές μελέτες όσο και στα πειράματα στο εργαστήριο. Αποδεικνύεται ότι οι διαπραγματεύσεις με πλήρη ενημέρωση και η επιλογή συμβατών δεδομένων μπορούν να περιγραφούν από το ίδιο μαθηματικό μοντέλο. Καθορίζονται απλές και μεικτές στρατηγικές ισορροπίας και η επίδραση της ‘φθηνής ομιλίας’αναλύεται στα αποτελέσματα του παιγνίου. Εισάγεται επαγωγή σαν πρότυπο και εξετάζεται επίσης και η επίδραση εξωτερικών επιλογών. Έχουν διεξαχθεί πειράματα προκειμένου να αναλυθούν οι επιδράσεις των διαφορετικών δομών επικοινωνίας. Οι διαφορές μεταξύ αντρών και των γυναικών τους σε ό,τι αφορά την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του διαπληκτισμού περιγράφονται σε πειραματική έρευνα και αναλύεται επίσης η επίδραση προηγούμενης εμπειρίας. Πάραυτα, δεν έχει γίνει έρευνα για πολλαπλά άτομα και για δυναμικές επεκτάσεις και όλες οι πρόσφατες έρευνες περιορίζονται στη χρήση απλών μητρών κερδών. Σε αυτή την εργασία θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε BOS παίγνια με αυθαίρετο αριθμό n παικτών. Το παίγνιο BOS n ατόμων είναι μια άμεση επέκταση της περίπτωσης 2 ατόμων αν και αυτή η περίπτωση δεν είναι brivial. Όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα, θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με τη διατήρηση των βασικών ιδιοτήτων του παιγνίου στη γενική περίπτωση. Στη δεύτερη ενότητα θα συζητήσουμε τις ουσιαστικές ιδιότητες ενός BOS παιγνίου δύο ατόμων και μετά θα το επεκτείνουμε στην περίπτωση n ατόμων.

Πρόσφατα δημοσιεύτηκε ένας μεγάλος αριθμός μελετών παιγνίων διλλήματος n ατόμων (Prisoner’s Dilemma and Chicken Game) που περιλαμβάνουν και το μοντέλο της συνάρτησης κερδών αλλά και την προσομοίωση στον υπολογιστή. Οι συναρτήσεις των κερδών εξαρτώνται πάντα από τον αριθμό των συνεργατών στο παίγνιο. Ένα BOS παίγνιο είναι διαφορετικό από τα παίγνια διλλημάτων αφού στα δεύτερα ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο και τον λόγο που συνεργάζονται οι παίκτες καθώς επίσης και για τον τρόπο με τον οποίο χειριζόμαστε τους παίκτες προκειμένου να συνεργαστούν. Ωστόσο η συνεργασία στα BOS παίγνια δεν είναι σημαντική.

Σε ένα BOS παίγνιο δύο ατόμων, όταν συνεργάζονται και οι δύο παίκτες, θα λάβουν τα μικρότερα δυνατά κέρδη. Επομένως ενδιαφερόμαστε να βρούμε πότε και πως οι παίκτες θα μπορούσαν να κάνουν την ίδια επιλογή. Όπως θα διαπιστώσουμε στις ενότητες 3 και 4, τα κέρδη των BOS παιγνίων n ατόμων μοντελοποιούνται σαν συναρτήσεις του αριθμού των παικτών που κάνουν τις ίδιες επιλογές. Θα εισάγουμε ειδικές γραμμικές συναρτήσεις κερδών και θα τις αναλύσουμε στην ενότητα 5. Τα τελικά συμπεράσματα δίνονται στην ενότητα 6.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

9.2 Παίγνια BOS δύο ατόμων

Ένα παίγνιο BOS δύο ατόμων παρουσιάζεται συνήθως σαν την ιστορία που ακολουθεί. Ένας άντρας και η σύζυγός του θέλουν να περάσουν μαζί ένα απόγευμα και έτσι προσπαθούν να επιλέξουν έναν τρόπο να διασκεδάσουν που θα τους ευχαριστεί και τους δύο. Ο άντρας (παίκτης1) προτιμάει έναν αγώνα ποδοσφαίρου ενώ η σύζυγός του (παίκτης 2) προτιμάει μία παράσταση μπαλέτου. Πάραυτα και οι δύο προτιμούν να βγούν μαζί και όχι ο καθένας μόνος του. Το παίγνιο BOS δύο ατόμων είναι ένα παίγνιο συντονισμού με αντικρουόμενες προτιμήσεις. Υπάρχουν δύο επιλογές για τους παίκτες και οι προτιμώμενες επιλογές των παικτών θα είναι μία από τις προτιμήσεις τους. Ανάλογα με το πώς συνδυάζονται οι αποφάσεις των δύο παικτών, οι παίκτες λαμβάνουν κέρδη σύμφωνα με τη μήτρα κερδών που φαίνεται στον πίνακα 9.1.

Payoff matrix of 2-person BOS games

		Player 2	
		Football (Cooperate)	Ballet (Defect)
Player 1	Ballet (Cooperate)	(R, R)	(S, T)
	Football (Defect)	(T, S)	(P, P)

Πίνακας 9.1

Το πρώτο στοιχείο στην παρένθεση κάθε κελιού αναπαριστά τα κέρδη του παίκτη 1 και το δεύτερο στοιχείο τα κέρδη που αναλογούν στον παίκτη 2.

Συνήθως στα παίγνια 2x2 (2 άτομα, 2 επιλογές) οι επιλογές των παικτών θεωρούνται σαν defection ή συνεργασία. Για παράδειγμα στο δίλημμα ενός φυλακισμένου, ‘συνεργασία’ δεν είναι η παραδοχή του εγκλήματος (συνεργασία με τον συνεργάτη) και defection είναι η παραδοχή. Σε ένα chicken game, defection δεν είναι η αποφυγή τρακαρίσματος , αυτό θεωρείται συνεργασία. Όταν χρησιμοποιούμε τους όρους defection και συνεργασία σε bos παίγνια στα οποία δε διευκρινίζονται οι δύο επιλογές , τότε defection είναι η επιλογή που αρέσει στον παίκτη και συνεργασία είναι η επιλογή που δεν του αρέσει. Στο παίγνιο BOS που περιγράψαμε παραπάνω, το ποδόσφαιρο είναι η ψυχαγωγία που προτιμάει ο παίκτης 1. Εντούτοις αυτή η επιλογή δείχνει τη μη συνεργάσιμη συμπεριφορά του παίκτη 1, δηλαδή τη defection του παίκτη. Η συνεργασία αναπαριστά την απόφαση του παίκτη 1 να επιλέξει την απόφαση του παίκτη 2, δηλαδή την παράσταση μπαλέτου και όχι τη δική του προτίμηση για διασκέδαση. Ο παίκτης 2 βρίσκεται σε παρόμοια θέση. Στα 2x2 συμμετρικά παίγνια η μήτρα των κερδών μπορεί να έχει 4 πιθανές τιμές: T,S,R,P. Αυτά προέρχονται από τα PD παίγνια δύο ατόμων στα οποία η ‘λιποταξία’ είναι ‘πειρασμός’ όταν συνεργάζεται ο άλλος, η συνεργασία είναι η επιλογή του ‘κορόιδου’ όταν ο άλλος λιποτακτεί, η ανταμοιβή δίνεται όταν συνεργάζονται και οι δύο και η τιμωρία όταν detect και οι δύο. Το T αναπαριστά το κέρδος του πειρασμού, το S το κέρδος του κορόιδου, το R την επιβράβευση και το P την τιμωρία. Όταν οι σχετικές τιμές των T,S,R,P αλλάζουν, η μήτρα αναπαριστά διαφορετικά παίγνια. Σε ένα BOS παίγνιο ισχύει T>S>P>R. Οι ανισότητες (T και S) > (P και R) απαιτούν να έχει ένας παίκτης μεγαλύτερο κέρδος όταν και οι δύο παίκτες είναι μαζί και όχι χωριστά. Οι σχέσεις T>S και P>R εγγυώνται ότι ένας παίκτης θα έχει υψηλότερο κέρδος αν η επιλογή του είναι αυτό που του αρέσει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Υπάρχει μία ουσιώδης διαφορά μεταξύ συνεργασίας και defection στα BOS παίγνια και στα PD ή τα chicken games. Στα παίγνια PD και στα Chicken games , η έννοια της 'λιποταξίας' είναι ίδια και για τους δύο παίκτες(ή θα ομολογήσουν ή θα crash). Το ίδιο ισχύει και για την έννοια της συνεργασίας. Σε ένα BOS παίγνιο, 'λιποταξία' θεωρείται η επιλογή που του αρέσει, επειδή όμως οι παίκτες έχουν διαφορετικές προτιμήσεις, η 'λιποταξία'του παίκτη 1 είναι η επιλογή του ποδοσφαίρου ενώ του παίκτη 2 είναι η επιλογή μπαλέτου. Η σύγκρουση των προτιμήσεων σε αυτά τα παίγνια δίνει στις έννοιες της συνεργασίας και της 'λιποταξίας' διαφορετικό νόημα σε σχέση με τα άλλα παιχνίδια. Τα παιχνίδια PD δύο παικτών καθώς επίσης και τα chicken games έχουν τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς αποφάσεων: (λιποταξία, συνεργασία), (συνεργασία, λιποταξία), (συνεργασία, συνεργασία), (λιποταξία, λιποταξία). Σε ένα παίγνιο BOS δύο ατόμων έχουμε θεωρητικά 16 πιθανούς συνδυασμούς αποφάσεων αφού οι προτιμήσεις των παικτών εμπλέκονται και στη μήτρα κερδών (πίνακας 9.2). Μπορεί να χωριστεί σε 4 μέρη.

Payoff matrix with preference of 2-person BOS games

			Player 2			
			like Ballet		like Football	
			football	ballet	ballet	football
Player 1	like Football	ballet	(R, R)	(S, T)		
		football	(T, S)	(P, P)		
	like Ballet	football			(R, R)	(S, T)
		ballet			(T, S)	(P, P)

The preferences of the players are capitals: Football and Ballet. The decisions are lowercase: football and ballet.

Πίνακας 9.2

Οι πάνω δεξιά και κάτω αριστερά γωνίες αναπαριστούν τις καταστάσεις στις οποίες οι παίκτες έχουν τις ίδιες προτιμήσεις. Θα πρέπει όμως να παραβλέψουμε αυτές τις περιπτώσεις αφού η έλλειψη σύγκρουσης των προτιμήσεων των παικτών θα παραβίαζε τη βασική προϋπόθεση των BOS παιγνίων. Συνεπώς αφήνουμε αυτά τα κομμάτια της μήτρας. Οι υπόλοιποι συνδυασμοί σχηματίζουν δύο υπομήτρες, μία στην πάνω αριστερή γωνία και άλλη μία στην κάτω δεξιά γωνία. Μόνο μία από τις υπομήτρες χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενο γραπτό, καθώς είναι συμμετρικές και με εναλλαγή της μίας υπομήτρας δύο παικτών, σχηματίζεται η άλλη. Στην περίπτωσή μας οι προτιμήσεις των παικτών είναι προκαθορισμένες: στον παίκτη 1 αρέσει το ποδόσφαιρο και στον παίκτη 2 το μπαλέτο. Χρησιμοποιείται μόνο η πάνω αριστερή υπομήτρα (πίνακας 9.1) και οι προτιμήσεις των παικτών είναι απούσες και δε φαίνονται. Τότε το BOS παίγνιο 2 ατόμων ανάγεται σε ένα 2x2 παίγνιο με τα ίδια κέρδη και την ίδια μήτρα δομής σε αντίθεση με αυτή που χρησιμοποιήθηκε σε παίγνια διλλήματος. Εντούτοις, όπως θα συζητήσουμε αργότερα, στην περίπτωση n παικτών (n>2), δε γίνεται να παραβλέψουμε τις προτιμήσεις των παικτών.

Για μεγαλύτερη διευκόλυνση, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το ποδόσφαιρο και το μπαλέτο σαν τις δύο επιλογές στα παραδείγματα και στις αναλύσεις των παιγνίων BOS n ατόμων.

Με βάση τη μήτρα κερδών του πίνακα 1, **οι βασικές ιδιότητες ενός BOS παιγνίου 2 ατόμων είναι οι εξής:**

- Ένας παίκτης έχει δύο επιλογές (πχ. ποδόσφαιρο, μπαλέτο), που αποτελεί δυαδική επιλογή με την έννοια του Schelling.
- Οι προτιμήσεις των δύο παικτών είναι αντίθετες.
- Ένας παίκτης θα βγάλει μεγαλύτερο κέρδος όταν και οι δύο παίκτες κάνουν την ίδια επιλογή παρά εάν κάνουν διαφορετικές επιλογές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Ένας παίκτης θα βγάλει μεγαλύτερο κέρδος εάν η κοινή επιλογή είναι αυτό που του αρέσει και όχι αυτό που αντιπαθεί.

Οι ιδιότητες 3 και 4 απαιτούν οι τιμές των κερδών να ικανοποιούν

T > S > P > R.

9.3 Παίγνια BOS n ατόμων

Ένα παίγνιο BOS n ατόμων πρέπει να έχει παρόμοιες ιδιότητες με ένα BOS παίγνιο δύο ατόμων με τη μόνη διαφορά ότι ο αριθμός των παικτών είναι μεγαλύτερος. Θα πρέπει να διατηρεί την κυρίαρχη σύγκρουση κάθε παίκτη μεταξύ της προτίμησης του και της θέλησης του να έχει όσο το δυνατόν περισσότερους παίκτες με την ίδια προτίμηση. Υπάρχουν όμως κάποιες δυσκολίες στην επέκταση των βασικών ιδιοτήτων ενός παιγνίου BOS δύο ατόμων σε ένα παίγνιο BOS n ατόμων χωρίς να γίνουν κάποιες αλλαγές. Προτού όμως ορίσουμε και συζητήσουμε τα BOS παίγνια n ατόμων, θα πρέπει να εισάγουμε κάποιες ιδέες. Ο συνολικός αριθμός των παικτών είναι n, ο αριθμός των παικτών που τους αρέσει το ποδόσφαιρο (και δεν τους αρέσει το μπαλέτο) είναι F. Επομένως έχουμε n-F παίκτες που τους αρέσει το μπαλέτο (και δεν τους αρέσει το ποδόσφαιρο). Έστω y ο αριθμός των παικτών που συνεργάζονται και n-y ο αριθμός των παικτών που 'λιποτακτούν'. Ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο είναι x και ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το μπαλέτο είναι n-x.

Η ιδιότητα 1 ενός BOS παιγνίου δύο ατόμων προφανώς πρέπει να εφαρμοστεί και στη γενική περίπτωση n ατόμων:

1) Κάθε παίκτης έχει δύο επιλογές (ποδόσφαιρο, μπαλέτο) και σε κάθε παίκτη αρέσει μία από αυτές και αντιπαθεί την άλλη.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε και θα επεκτείνουμε τις ιδιότητες 2-4 και θα εισάγουμε επιπρόσθετα συμπεράσματα για τη διαμόρφωση του παιγνίου. Γενικά υπάρχουν δύο τύποι παικτών σε ότι αφορά τις προτιμήσεις τους: οι παίκτες του πρώτου τύπου προτιμούν το ποδόσφαιρο και οι παίκτες του δεύτερου τύπου προτιμούν το μπαλέτο. Στην περίπτωση των δύο επιλογών για n άτομα, κάποιοι παίκτες πρέπει να έχουν την ίδια προτίμηση επομένως δε μπορούμε να πούμε ότι οι προτιμήσεις συγκρούονται για όλα τα ζεύγη παικτών. Παρομοίως με την περίπτωση δύο ατόμων, θα εξαιρέσουμε την κατάσταση που όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια προτίμηση. Αλλιώς δε θα υπήρχε καμιά σύγκρουση καθώς όλοι οι παίκτες θα είχαν την ίδια προτιμώμενη επιλογή. Με αυτό το συμπέρασμα υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις για τις επιλογές των παικτών. Η πρώτη περίπτωση προκύπτει όταν η προτίμηση ενός μόνο παίκτη είναι αντίθετη με την προτίμηση όλων των άλλων παικτών. Η δεύτερη περίπτωση προκύπτει όταν η προτίμηση των μισών παικτών είναι ίδια και είναι αντίθετη με την προτίμηση του άλλου μισού των παικτών. Υπάρχουν πολλές ακόμη περιπτώσεις στο ενδιάμεσο. Ο αριθμός των παικτών σε οποιοδήποτε τύπο είναι ανάμεσα στο 1 και το n-1. **Η ιδιότητα 2 ανασχηματίζεται ως εξής**:

2)Για κάθε παίκτη μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον έναν άλλο παίκτη που θα έχει διαφορετική προτίμηση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Οι ιδιότητες 1 και 2 είναι συμπεράσματα για τις προτιμήσεις των παικτών. Οι ιδιότητες 3 και 4 θα θέσουν τις προϋποθέσεις για τις αποφάσεις των παικτών και για τα κέρδη τους. Προτού συνεχίσουμε τη συζήτησή μας θα πρέπει να βγάλουμε ένα σημαντικό συμπέρασμα: η απόφαση κάθε παίκτη έχει την ίδια επιρροή στα κέρδη των άλλων παικτών. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να ερμηνευτεί σαν συμμετρία του παιγνίου όταν όλοι οι άλλοι παίκτες έχουν ταυτόσημο ρόλο. Οι παίκτες μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες ανάλογα με τις επιλογές τους. Αυτοί που επιλέγουν το ποδόσφαιρο έχουν ομάδα μεγέθους x και αυτοί που επιλέγουν το μπαλέτο ομάδα μεγέθους n-x. Προφανώς $1 \leq x \leq n-1$. Η συμμετρία του παιγνίου δείχνει ότι μόνο οι αριθμοί των παικτών στις δύο ομάδες καθορίζουν τα κέρδη. Ένας παίκτης θεωρείται περισσότερο χαρούμενος, δηλαδή έχει μεγαλύτερο κέρδος, όταν έχει κάνει την ίδια επιλογή με την πλειοψηφία των παικτών. Τα κέρδη των παικτών δεν εξαρτώνται από τους άλλους παίκτες που ανήκουν στην ίδια ομάδα αφού μετράει μόνο το μέγεθος της ομάδας. Επομένως τα κέρδη των παικτών καθορίζονται από τα μεγέθη των ομάδων x και n-x. Σε κάθε ομάδα υπάρχουν 'λιποτάκτες' και συνεργάτες. Όταν όλοι οι παίκτες κάνουν την ίδια επιλογή, τότε ομοίως με την περίπτωση δύο ατόμων, οι 'λιποτάκτες' θα λάβουν τα υψηλότερα κέρδη. Τα λιγότερα κέρδη πρέπει να μοιραστούν στους παίκτες που βρίσκονται στη χειρότερη κατάσταση.

Ένας παίκτης του οποίου η απόφαση αντιτίθεται με την απόφαση των άλλων παικτών ονομάζεται loner(μοναχικός). Ένας loner συνεργάτης θα πρέπει να έχει το μικρότερο κέρδος στο παίγνιο αφού είναι μόνος του και η επιλογή του αντιτίθεται στην προτίμησή του. Το πιο χαμηλό κέρδος προκύπτει όταν x=1 ή n-x=1 και ο παίκτης είναι ένας συνεργάτης. Η χειρότερη κατάσταση ενός loner συνεργάτη είναι διαφορετική από αυτή των συνεργατών σε μια άλλη ομάδα. Αυτοί θα πρέπει να λάβουν υψηλότερα κέρδη από τα χαμηλότερα κέρδη του παιγνίου εάν υπάρχουν περισσότεροι του ενός συνεργάτες στην ομάδα.

Τα κέρδη ενός παίκτη επομένως εξαρτώνται από το εάν η απόφαση του παίκτη είναι η προτιμώμενη επιλογή του ή όχι, καθώς επίσης και από τον αριθμό των παικτών που κάνανε την ίδια επιλογή. Το κέρδος ενός παίκτη που είναι μαζί με όλους τους άλλους αλλά διαλέγει ενάντια στις προτιμήσεις του δε θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό σε σχέση με αυτό του παίκτη που έχει επιλέξει αυτό που του αρέσει.

Οι παραπάνω συνθήκες συνοψίζονται ως εξής:

- Με οποιαδήποτε δοσμένη επιλογή, όταν ο αριθμός των παικτών σε μία ομάδα μεγαλώνει, το κέρδος οποιουδήποτε παίκτη στην ομάδα θα μεγαλώνει επίσης.
- Με οποιοδήποτε δοσμένο αριθμό παικτών σε μία ομάδα, ένας παίκτης θα λάβει υψηλότερο κέρδος όταν η επιλογή του είναι αυτό που του αρέσει σε σύγκριση με τους παίκτες των οποίων η επιλογή αντιτίθεται στις προτιμήσεις τους.

Μαζί με αυτές τις προϋποθέσεις απαιτούμε και

- Οποιοσδήποτε παίκτης που δεν του αρέσει η επιλογή του και αυτή η επιλογή είναι η ίδια με την επιλογή όλων των άλλων παικτών, θα έχει υψηλότερο κέρδος απ΄ότι αν του άρεσε η επιλογή του αλλά ήταν και ο μοναδικός που την έκανε.

9.4 Συναρτήσεις Κερδών BOS Παιγνίων n- ατόμων

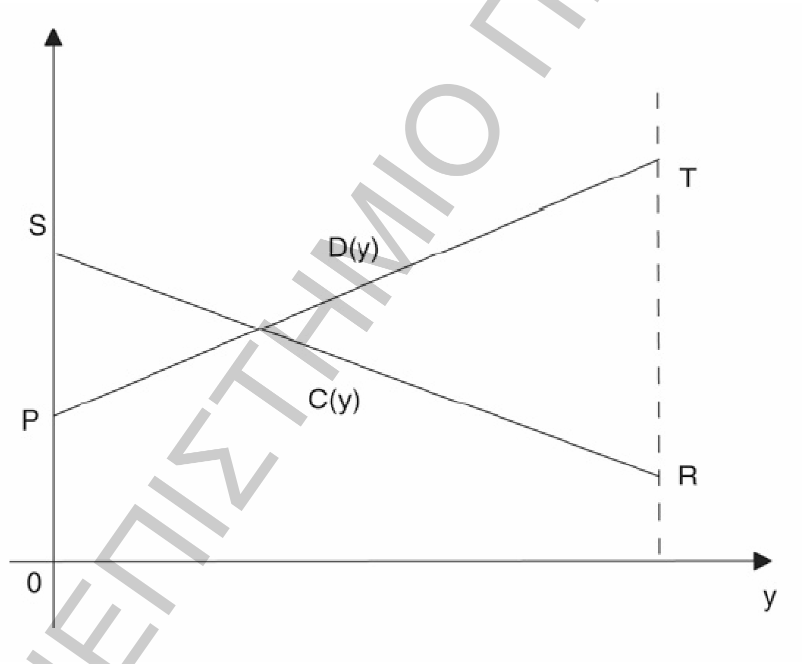
Στα παίγνια n ατόμων, όταν μεγαλώνει ο αριθμός των παικτών, ο αριθμός των συνδυασμών επιλογών μεγαλώνει εκθετικά. Υπάρχουν τέσσερις συνδυασμοί επιλογών για 2 ατόμων -2 επιλογών PD ή Chicken παίγνια και όταν υπάρχουν n παίκτες, ο αριθμός των συνδυασμών αυξάνεται σε 2^n. Σε ένα BOS παίγνιο n ατόμων σημειώνουμε με F τον αριθμό των παικτών που τους αρέσει το ποδόσφαιρο και προφανώς ισχύει $1 \leq F \leq n-1$ με βάση την ιδιότητα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2. Υπάρχουν F+1 πιθανές καταστάσεις (ή συνδυασμοί αποφάσεων) οι οποίες αντικατοπτρίζονται από τον αριθμό των συνεργατών, οι οποίοι μπορεί να είναι 0,1,2,...,F. Στην άλλη ομάδα υπάρχουν n-F παίκτες με n-F+1 πιθανές καταστάσεις που προκύπτουν από τον αριθμό των συνεργατών σε αυτή την ομάδα. Άρα σε ένα BOS παίγνιο n ατόμων είναι όλοι μαζί

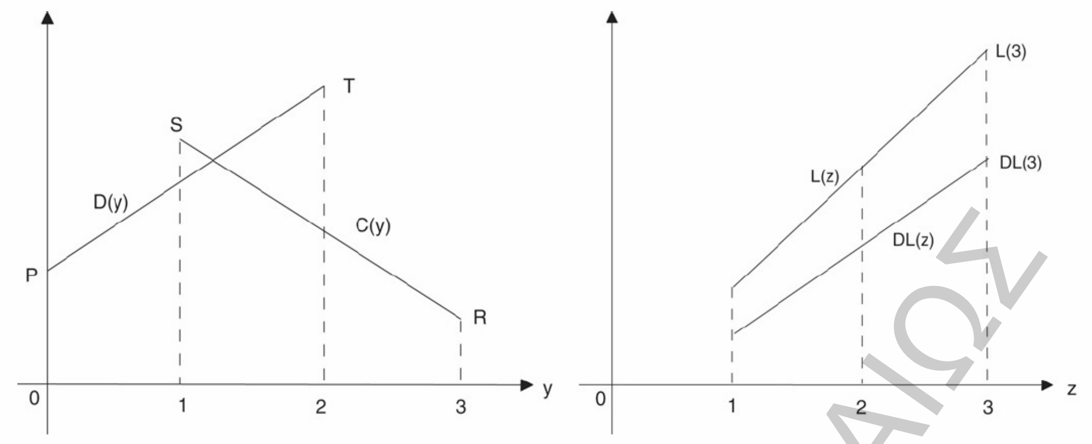
$$\sum_{F=1}^{n-1}(F+1)(n-F+1)=\frac{1}{6}\,(n^3+6n^2-n-6)=\frac{(n+6)(n^2-1)}{6}$$

πιθανοί συνδυασμοί. Οι συναρτήσεις κερδών θα χρησιμοποιηθούν αντί για μήτρες κερδών στη μοντελοποίηση BOS παιγνίων n ατόμων . Στα n-ατόμων Prisoners Dilemma και στα n ατόμων Chicken games, οι συναρτήσεις κερδών μοντελοποιούνται σαν συναρτήσεις του αριθμού των συνεργατών. Βασίζονται σε μία συνάρτηση συνεργασίας και σε μία συνάρτηση defection. Εάν y ο αριθμός των συνεργατών, τότε ένας συνεργάσιμος παίκτης παίρνει C(y) και ένας defector D(y). Όταν η σειρά των τιμών T,S,R,P αλλάζει, τότε παίρνουμε διαφορετικά παίγνια n- ατόμων. Το σχήμα δείχνει αυτές τις συναρτήσεις.



Functions συνεργασίας και λειτουργίας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



(a) *C* and *D* functions. (b) *L* and *DL* functions.

Fig. 2. Payoff functions for 3-person BOS games.

Εντούτοις, για τα παίγνια n- ατόμων η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Χρησιμοποιώντας μόνο τον αριθμό των συνεργατών σαν τη μοναδική μεταβλητή για τη μοντελοποίηση BOS παιγνίων n- ατόμων, θα είχαμε μόνο n+1 διαφορετικές καταστάσεις παιγνίου προς ανάλυση. Αυτό είναι πολύ λιγότερο από τον συνολικό αριθμό των καταστάσεων BOS παιγνίουn- ατόμων που δίνεται στην Eq.(1). Η χρήση των συναρτήσεων C και D μόνο μπορεί επίσης να οδηγήσει σε μπέρδεμα σε πολλές καταστάσεις. Ας πάρουμε την απλή περίπτωση όπου n=3 και έχουμε 3 παίκτες A1,A2,A3. Οι 12 μη επαναλαμβανόμενοι συνδυασμοί (από Eq(1)) φαίνονται στον πίνακα 3. Στις στήλες 2,4,6 το κεφαλαίο φράμμα κάθε στοιχείου αναπαριστά την προτίμηση του παίκτη και το μικρότερο γράμμα αναπαριστά την απόφαση του παίκτη. Οι στήλες 3,5,7 αντικατοπτρίζουν την κατάσταση του παίκτη: λιποταξία defection (συμβολίζεται με d) ή συνεργασία (συμβλίζεται με c). Εάν χρησιμοποιήσουμε μόνο τις συναρτήσεις C,D (σχήμα 2α) οι περιπτώσεις των γραμμών 7,8,10 και 12 επαναλαμβάνουν εκείνες των περιπτώσεων 2,4 και 6. Εντούτοις είναι διαφορετικές καταστάσεις. Πάρτε τις γραμμες 1 και 7 σαν παράδειγμα. Η γραμμή 1 έχει τον συνδυασμό (Bf, Bf, Fb) και η γραμμή 7 τον (BF, Fb, Fb). Ο αριθμός των συνεργατών στις γραμμές 1 και 7 είναι ο ίδιος (και στις δύο περιπτώσεις η κατάσταση είναι (c,c,c) επομένως τα κέρδη και για τους τρείς παίκτες είναι τα ίδια (R,R,R,) και στις δύο περιπτώσεις. Μια άλλη εναλλακτική είναι η εξής; Θεωρείστε έναν αυθαίρετο παίκτη και z τον αριθμό των παικτών με την ίδια επιλογή (συμπεριλαμβανομένου του ιδίου). Εάν η επιλογή αυτού του παίκτη είναι αυτό που του αρέσει, τότε το κέρδος του είναι l(z) , αλλιώς DL(z) , όπου L και DL είναι δοσμένες συναρτήσεις . Εάν χρησιμοποιήσουμε L και DL συναρτήσεις , τότε τα κέρδη για τους παίκτες στην πρώτη περίπτωση είναι (DL(2), DL(2), DL(1)), τα κέρδη για τους παίκτες στην περίπτωση 7 είναι (DL(1), DL(2),DL(2)). Τα κέρδη των παικτών A1και A2 εναλλάσονται. Στην περίπτωση 3, ο A2 είναι λιποτάκτης και ακόμη λαβάνει το υψηλότερο δυνατό κέρδος T του παιγνίου χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις C και D. Το υψηλότερο κέρδος T θα πρέπει να πάει στον λιποτάκτη μόνο όταν είναι με όλους τους υπόλοιπους παίκτες. Οι συναρτήσεις Cκαι D μόνες τους δε μπορούν να αντικατοπτρίσουν σωστά την κατάσταση. Όμως χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις L και DL, το κέρδος του A2 στην κατασταση 3 είναι L(2), μικρότερο δηλαδή από το υψηλότερο κέρδος L(3) του παιγνίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

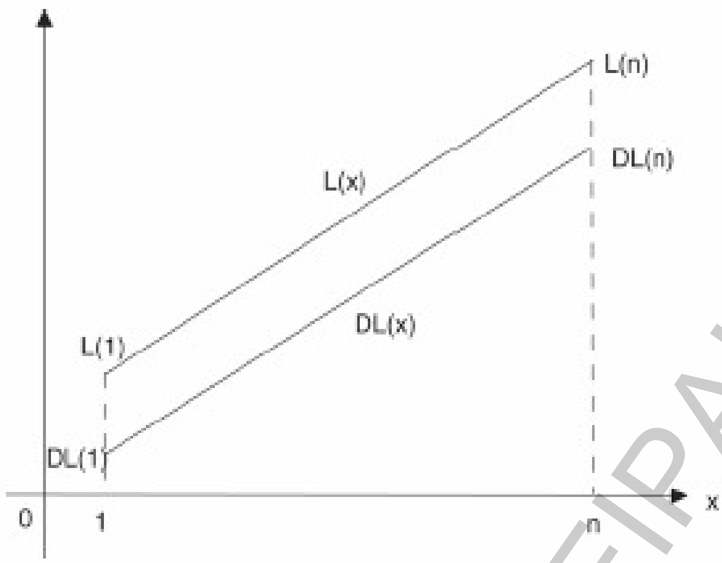


Fig. 3. Graphs of functions *L* and *DL*.

Comparison of payoffs based on the *C* and *D* functions and those obtained from the *L* and *DL* functions

	A1	State	A2	State	A3	State	Number of cooperators	Payoffs by *C*, *D* A1	A2	A3	Payoffs by *L* and *DL* A1	A2	A3
1	*Bf*	*c*	*Bf*	*c*	*Fb*	*c*	3	*R*	*R*	*R*	*DL*(2)	*DL*(2)	*DL*(1)
2	*Bf*	*c*	*Bf*	*c*	*Ff*	*d*	2	*C*(2)	*C*(2)	*T*	*DL*(3)	*DL*(3)	*L*(3)
3	*Bf*	*c*	*Bb*	*d*	*Fb*	*c*	2	*C*(2)	T	*C*(2)	*DL*(1)	*L*(2)	*DL*(2)
4	*Bf*	*c*	*Bb*	*d*	*Ff*	*d*	1	S	*D*(1)	*D*(1)	*DL*(2)	*L*(1)	*L*(2)
5	*Bb*	*d*	*Bb*	*d*	*Fb*	*c*	1	*D*(1)	*D*(1)	S	*L*(3)	*L*(3)	*DL*(3)
6	*Bb*	*d*	*Bb*	*d*	*Ff*	*d*	0	*P*	*P*	*P*	*L*(2)	*L*(2)	*L*(1)
7	*Bf*	*c*	*Fb*	*c*	*Fb*	*c*	3	*R*	*R*	*R*	*DL*(1)	*DL*(2)	*DL*(2)
8	*Bf*	*c*	*Fb*	*c*	*Ff*	*d*	2	*C*(2)	*C*(2)	*T*	*DL*(2)	*DL*(1)	*L*(2)
9	*Bb*	*d*	*Fb*	*c*	*Fb*	*c*	2	*T*	*C*(2)	*C*(2)	*L*(3)	*DL*(3)	*DL*(3)
10	*Bf*	*c*	*Ff*	*d*	*Ff*	*d*	1	S	*D*(1)	*D*(1)	*DL*(3)	*L*(3)	*L*(3)
11	*Bb*	*d*	*Fb*	*c*	*Ff*	*d*	1	*D*(1)	*S*	*D*(1)	*L*(2)	*DL*(2)	*L*(1)
12	*Bb*	*d*	*Ff*	*d*	*Ff*	*d*	0	*P*	*P*	*P*	*L*(1)	*L*(2)	*L*(2)

Επομένως, η χρήση των συναρτήσεων L και DL μπορεί να περιγράψει καλύτερα την κατάσταση. Τα κέρδη από τις συναρτήσεις C και D στην κατάσταση 5 θα μπορούσαν να παραβιάσουν την τέταρτη ιδιότητα αφού το D(1) είναι πάντα μικρότερο από το S.
Άρα είναι πιο εύλογο να μοντελοποιούμε τα κέρδη με βάση τον αριθμό των παικτών που έχουν την ίδια επιλογή παρά με βάση τον αριθμό των συνεργατών στο παιχνίδι.

Έχουμε ήδη διαιρέσει τους παίκτες σε δύο ομάδες. Όλοι οι παίκτες στην ομάδα 1 επιλέγουν το ποδόσφαιρο και όλοι οι παίκτες στην άλλη ομάδα επιλέγουν το ποδόσφαιρο και όλοι οι παίκτες στην άλλη ομάδα επιλέγουν το μπαλέτο.Σε κάθε ομάδα υπάρχουν δύο είδη παικτών. Στον ένα τύπο αρέσει η επιλογή του και στον άλλο τύπο δεν αρέσει. Επομένως υπάρχουν τέσσερα είδη παικτών΄αυτοί που τους αρέσει το ποδόσφαιρο και το επιλέγουν, αυτοί που τους αρέσει το μπαλέτο αλλά επιλέγουν το ποδόσφαιρο, αυτοί που τους αρέσει το ποδόσφαιρο αλλά επιλέγουν το μπαλέτο και τέλος αυτοί που τους αρέσει το μπαλέτο και το επιλέγουνε. Θα χρησιμοποιήσουμε Ff, Bf, Fb, Bb αντίστοιχα για την αναπαράσταση των τεσσάρων ειδών των παικτών. Τα πρώτα κεφαλαία γράμματααναπαριστούν τις προτιμήσεις των παικτών και τα δεύτερα μικρπά γράμματα ανπαριστούν τις αποφάσεις των παικτών. Το F ή f αναπαριστά το ποδόσφαιρο και τα B ή b αναπαριστά το μπαλέτο. Για εκείνους τους παίκτες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

που επιλέγουν το ποδόσφαιρο θα ορίσουμε δύο συναρτήσεις. Εάν ένας παίκτης διαλέξει το ποδόσφαιρο, τότε το λέρδος του θα είναι L(x), αλλιώς DL(x) όπου x ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο. Οι συναρτήσεις L(x) και DL(x) έχουν μέγιστη μονοτονία στο x. Η γραφική τους παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3. Παρομοίως πράττουμε και για την ομάδα που θα επιλέξει το μπαλέτο. Έχουμε επομένως τέσσερις συναρτήσεις κερδών. Υπάρχουν τέσσερα πιθανά κέρδη: L(x) , DL(x), L(n-x) και DL(n-x) για τα τέσσερα είδη παικτών Bf, Bf, Bb και Fb αντίστοιχα. Παρόμοιες συναρτήσεις κερδών μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα BOS παίγνια δύο ατόμων. Εντούτοις οι τιμές των κερδών που προκύπτουν μπορούν να αναπαρασταθούν ως μήτρες κερδών.

Οι ιδιότητες 1-5 των BOS παγνίων μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά όπως φαίνεται στη συνέχεια. Όπως προηγουμένως, το x αναπαριστά τον αριθμό των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο. Τότε $1\geq x \geq n-1$ και οι συναρτήσεις L και DL αυξάνουν. Επίσης

$L(x) > DL(x)$ για όλα τα x

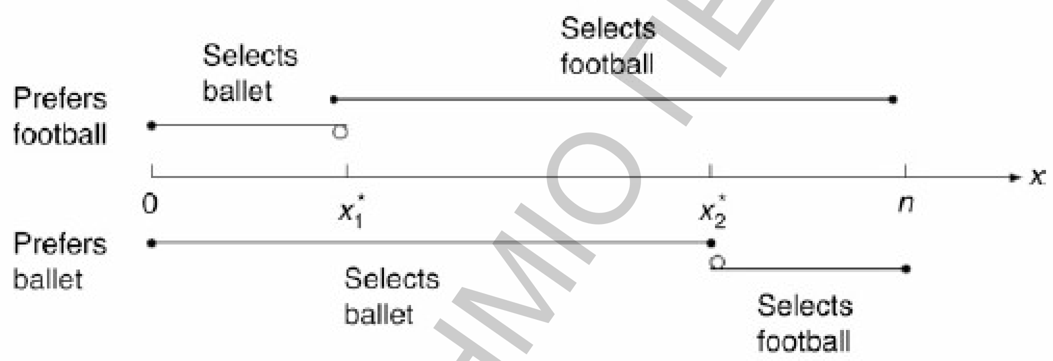


Fig. 4. Selection of the players as function of *x*.

και $DL(n) > L(1)$.

9.5 Γραμμικές Συναρτήσεις Κερδών

Οι γραμμικές συναρτήσεις κερδών γενικά μοντελοποιούνται ως εξής:

$L(x) = ax + b$
$DL(X) = cx + d, \quad x\geq 1$
$L'(x) = a' (n-x) + b$
$DL'(x) = c'(n-x) + d$

Όπου x ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο. Τα L και DL είναι τα κέρδη των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο και τα L΄και DL΄είναι τα κέρδη εκείνων των παικτών που επιλέγουν το μπαλέτο. Για χάρη απλότητας εξετάζουμε μόνο τη συμμετρική κατάσταση όπου α= α΄, b= b΄, c= c΄ και d= d΄. Σύμφωνα με τις ιδιότητες του παιγνίου , από τις σχέσεις 2 και 3, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

a, c > 0
d< b
cn + d <an + b
cn +d > a + b

Όπως προηγουμένως, έστω F ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το ποδόσφαιρο, τότε 1≤ F≤ n-1 και n-1 ο αριθμός των παικτών που επιλέγουν το μπαλέτο. Υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία και οι παίκτες που επιλέγουν το ποδόσφαιρο είναι x. Θεωρούμε ότι ο πρώτος παίκτης επιλέγει το ποδόσφαιρο. Η επιλογή του θα είναι το ποδόσφαιρο αν και μόνο αν δεν ενδιαφέρεται να αλλάξει γνώμη και να επιλέξει το μπαλέτο. Αυτό γράφεται ως εξής:

L(x) ≥ DL (x-1)

Όπου υποθέτουμε ότι το κίνητρο του παίκτη είναι να αποκομίσει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος και όταν δεν υπάρχει διαφορά στο κέρδος μεταξύ των δύο επιλογών, τότε θα διαλέξει αυτό που προτιμάει. Μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση ως εξής:

$$\geq \frac{c(n+1)+\ d-b}{a+c}$$

x

Ένας παίκτης που προτιμάει το ποδόσφαιρο θα επιλέξει το μπαλέτο εάν δεν τον πειράζει να αλλάξει την επιλογή του.
DL(΄x) ≥ L (x-1)
Που είναι

$$x < \frac{cn+\ d-a-b}{a+c}$$

Θεωρείστε στη συνέχεια έναν παίκτη που προτιμάει το μπαλέτο. Η καλύτερη επιλογή που μπορεί να κάνει είναι το ποδόσφαιρο εάν

DL(x) > L' (x-1)

Που γράφεται ως

$$x > \frac{a(n\ 1)+\ d-\ b}{a+c}$$

και η επιλογή του θα είναι το μπαλέτο εάν

L(΄x) ≥ DL (x+1)

Που γράφεται ως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\leq \frac{an + b - c - d}{a + c}$$

x

Για χάρη απλότητας εισάγουμε τα

x

x

Προφανώς

x1* + x2* = n

και η σχέση 5 δείχνει ότι x1* > 0. Ακόμη

x^2 *- x1*=

$$[n(a-c) + 2a + 2\ (b-a)] > \frac{1}{a+c}\ [(d-b) + 2a + 2(b-d\ )] =$$

Άρα x1* < x2*

Έχουμε επομένως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1** Εάν x< x1* , τότε η καλύτερη επιλογή όλων των παικτών είναι το μπαλέτο. Άρα x=0 με όλους τους παίκτες να διαλέγουν το μπαλέτο,έχουμε ισορροπία.
- **Περίπτωση 2** Εάν x> x2*, τότε όλοι οι παίκτες επιλέγουν το ποδόσφαιρο. Άρα x=n, με όλους τους παίκτες να διαλέγουν το ποδόσφαιρο, έχουμε ισορροπία.
- **Περίπτωση 3** Εάν x1*≤ x ≤ x2* , τότε όλοι οι παίκτες επιλέγουν σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους, επομένως εάν x1*≤ F ≤ x2* τότε x= F και έχουμε πάλι ισορροπία.

Οι διαφορές των ανισοτήτων στις 6,7,8,10 και 12 ερμηνεύονται ως ακολούθως:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

L(x) – DL (X-1) : το κίνητρο εκείνων που προτιμούν το ποδόσφαιρο και επιλέγουν το ποδόσφαιρο.

DL΄(x) – L(x+1) : το κίνητρο εκείνων που προτιμούν το ποδόσφαιρο και επιλέγουν το μπαλέτο.
DL(x) – L (x-1) : το κίνητρο εκείνων που προτιμούν το μπαλέτο και επιλέγουν το ποδόσφαιρο.
L(x)- DL(x+1) : το κίνητρο εκείνων που προτιμούν το μπαλέτο και επιλέγουν το μπαλέτο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Βιβλιογραφία

- (1962) No. 13, pp. 141-142.
  97(8):757–773, October 1990.
- A. S. Fraenkel and Y. Yesha. Complexity of problems in games, graphs and algebraic equations. Discrete Applied Mathematics, 1:15–30, 1979.
- A. S. Fraenkel and Y. Yesha. Theory of annihilation games—I. Journal of CombinatorialTheory,SeriesB,33:60–86, 1982.http://arXiv.org/abs/0706.2817.
- A. S. Fraenkel and Y. Yesha.Theory of annihilation games.Bulletin of the Americac Mathematical Society, 82(5):775–777, September 1976.
- A. S. Fraenkel, M. R. Garey, D. S. Johnson, T. Schaefer, and Y. Yesha.The complexityof checkers on an N ×N board - preliminary report. In Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 55–64, Ann Arbor, Michigan,October 1978.
- Aaron F. Archer. A modern treatment of the 15 puzzle.American Mathematical
- Aaron N. Siegel. Mis`ere games and mis`erequotients.arXiv:math/0612616v2, December2006. http://arxiv.org/abs/math/0612616.
- Adrian Br¨ungger, Ambros Marzetta, Komei Fukuda, and Jurg Nievergelt. The parallelsearch bench ZRAM and its applications. Annals of Operations Research, 90:45–63,1999.33
- Alice Chan and Alice Tsai. 1×n Konane: a summary of results. In R. J. Nowakowski,editor, More Games of No Chance, pages 331–339, 2002.
- Anderson, Simon P., Jacob K. Goeree, and Charles A. Holt (1998a) "Rent Seeking with Bounded Rationality: An Analysis of the All-Pay Auction," Journal of Political Economy, 106(4),August 1998, 828-853.
- Anderson, Simon P., Jacob K. Goeree, and Charles A. Holt (1998b) "A Theoretical Analysis of Altruism and Decision Error in Public Goods Games," Journal of Public Economics, 70,297-323.
- Anderson, Simon P., Jacob K. Goeree, and Charles A. Holt (1999) "The Logit Equilibrium: A Perspective on Intuitive Behavioral Anomalies," Working Paper, University of Virginia.
- Anderson, Simon P., Jacob K. Goeree, and Charles A. Holt (2000) "Minimum Effort Coordination Games: Stochastic Potential and the Logit Equilibrium," Games and Economic Behavior, forthcoming.
- Andr´as M´ath´e. The angel of power 2 wins. Combinatocis, Probability and Computing,16(3):363–374, 2007.
- Anne Condon, Joan Feigenbaum, and Carsten Lund Peter Shor. Random debaters and the hardness of approximating stochastic functions. SIAM Journal on Computing,26(2):369–400, 1997.
- Anne D. Williams. The Jigsaw Puzzle: Piecing Together a History. Berkley Books, NewYork, 2004.
- Arthur S. Goldstein and Edward M. Reingold.The complexity of pursuit on a graph.Theoretical Computer Science, 143:93–112, 1995.
- Arundhati Dhagat and Joseph O'Rourke. Motion planning amidst movable square blocks. In Proceedings of the 4th Canadian Conference on Computational Geometry,pages 188–191, 1992.
- AUMANN, R. J., AND B. PELEG: "Von Neumann-MorgensternSolutions to Cooperative Games Without Side Payments," Bulletín of the Amerícan Mathematícal Socíe ty, 66, (1960)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Aviezri S. Fraenkel and David Lichtenstein. Computing a perfect strategy for n×n chessrequires time exponential in n. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 31:199–214,1981.
- Aviezri S. Fraenkel and Elisheva Goldschmidt.PSPACE-hardness of some combinatorialgames.Journal of Combinatorial Theory, Series A, 46:21–38, 1987.
- Aviezri S. Fraenkel, Edward R. Scheinerman, and Daniel Ullman. Undirected edge geography. Theoretical Computer Science, 112(2):371–381, 1993.
- Aviezri S. Fraenkel. Combinatorial games with an annihilation rule. In The Influence of Computing on Mathematical and Research and Education, volume 20 of Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics, pages 87–91, 1974.
- Aviezri S. Fraenkel. Combinatorial games: Selected bibliography with a succinct gourmet introduction. Electronic Journal of Combinatorics, 1994–2007. Dynamic Survey DS2, http://www.combinatorics.org/Surveys/. One version also appears in Gamesof No Chance, pages 493–537, 1996.
- Aviezri S. Fraenkel. Scenic trails ascending from sea-level Nim to alpine Chess. In R. J.Nowakowski, editor, Games of No Chance, pages 13–42. Cambridge University Press,1996.
- Basu, Kaushik (1994) "The Traveler’s Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory,"American Economic Review, 84(2), 391-395.
- Beard, T. Randolph, and Richard O. Beil, Jr. (1994) "Do People Rely on the Self-interested Maximization of Others - An Experimental Test," Management Science, February 1994,40(2), 252-262.
- Bernheim, B. Douglas (1984) "Rationalizable Strategic Behavior," Econometrica, 52, 1007-1028.
- Bolton, Gary E. (1998) "Bargaining and Dilemma Games: From Laboratory Data Towards Theoretical Synthesis," Experimental Economics, 1:3 257-281.
- Bolton, Gary E. and Axel Ockenfels (2000) "A Theory of Equity, Reciprocity, and Competition,"American Economic Review, 90(1), 166-193.
- BONDAREVA, 0.: "The Core of a N Person Game," Vestnik Leníngrad Uníversíty , 17,
- BONDAREVA, The core of a n-person game, Vestnik Leningrad. Univ. 17 (19621, 141-142).
- Brandon McPhail. Light Up is NP-complete. Unpublished manuscript, 2005.http://www.cs.umass.edu/_mcphailb/papers/2005lightup.pdf.
- Brandon McPhail. Metapuzzles: Reducing SAT to your favorite puzzle. CS Theory .http://www.cs.umass.edu/_mcphailb/papers/2007metapuzzles.pdf.
- Brandon McPhail. The complexity of puzzles. Undergraduate thesis, Reed College,Portland, Oregon, 2003.
- Brandts, Jordi and Charles A. Holt (1992) "An Experimental Test of Equilibrium Dominance inSignaling Games," American Economic Review, 82(5), 1350-1365.
- Brandts, Jordi and Charles A. Holt (1993) "Adjustment Patterns and Equilibrium Selection in Experimental Signaling Games," International Journal of Game Theory, 22, 279-302.
- Brandts, Jordi, and Charles A. Holt (1995) "Naive Bayesian Learning and Adjustment to Equilibrium in Signaling Games," Working Paper, University of Virginia.
- Brian H. Bowditch. The angel game in the plane.Combinatocis, Probability and Computing,16(3):345–362, 2007.
- Brian Hayes. Unwed numbers.American Scientist, 94(1):12, January–February 2006.
- Brown University, and it was from consideration of these examples that I was led to
- C. Schade, A. Schroder, K. Krause, Strategy and coordination after prior gain and loss experiences: An experimental analysis, Working Paper , 2003.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Camerer, Colin and Teck-Hua Ho (1999) "Experience Weighted Attraction Learning in NormalForm Games," Econometrica, 67, 827-874.
- Capra, C. Monica (1998) "Noisy Expectation Formation in One-Shot Games," PhD thesis,University of Virginia.
- Capra, C. Monica, Jacob K. Goeree, Rosario Gomez, and Charles A. Holt (1999) "Anomalous Behavior in a Traveler's Dilemma?"American Economic Review, 89:3 (June), 678-690.
- Capra, C. Monica, Jacob K. Goeree, Rosario Gomez, and Charles A. Holt (2000) "Learning and Noisy Equilibrium Behavior in an Experimental Study of Imperfect Price Competition,"working paper, University of Virginia.
- Cedric A. B. Smith. Graphs and composite games.Journal of Combinatorial Theory,1:51–81, 1966.
- Charles L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory.Annals of Mathematics, Series 2, 3:35–39, 1901–02.
- Cho, In-Koo and David M. Kreps (1987) "Signaling Games and Stable Equilibria," Quarterly Journal of Economics, 102, 179-221.
- Christos H. Papadimitriou. Algorithms, games, and the Internet.In Proceedings of the33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Crete, Greece, July 2001.
- Christos H. Papadimitriou. Games against nature.Journal of Computer and System Sciences, 31(2):288–301, 1985.
- Contributions to the Theory of Games-II, Annals of Mathematics, Study No. 28,
- Cooper, David J., Susan Garvin and John H. Kagel (1997) "Signalling and Adaptive Learning in an Entry Limit Pricing Game," RAND Journal of Economics, Winter, 28(4), 662-683.
- Cooper, Russell, Douglas V. DeJong, Robert Forsythe, and Thomas W. Ross (1992) "Communication in Coordination Games," Quarterly Journal of Economics, 107, 739-771.
- Crawford, Vince and Miguel Costa-Gomez (2000) "Cognition and Behavior in Normal-Form Games: An Experimental Study," Econometrica, forthcoming.
- Cristopher Moore and David Eppstein. One-dimensional peg solitaire, and duotaire.
- Cristopher Moore and John Michael Robson.Hard tiling problems with simple tiles.Discrete and Computational Geometry, 26(4):573–590, 2001.
- Daniel Andersson. HIROIMONO is NP-complete. In Proceedings of the 4th InternationalConference on FUN with Algorithms, volume 4475 of Lecture Notes in ComputerScience, pages 30–39, 2007.
- Daniel Kornhauser, Gary Miller, and Paul Spirakis. Coordinating pebble motion on graphs, the diameter of permutation groups, and applications. In Proceedings of the 25th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 241–250, 1984.
- Daniel Kurkle and Gene Cooperman. Twenty-six moves suffice for Rubiks cube. InProceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pages 235–242, 2007.
- Daniel Ratner and Manfred Warmuth. The (n2−1)-puzzle and related relocation problems.Journal of Symbolic Computation, 10:111–137, 1990.
- David Bremner, Joseph O'Rourke, and Thomas Shermer. Motion planning amidst movable square blocks is PSPACE complete. Draft, June 1994.
- David Eppstein. Computational complexity of games and puzzles. http://www.ics.uci.edu/_eppstein/cgt/hard.html.
- David Eppstein. On the NP-completeness of cryptarithms.SIGACT News, 18(3):38–40,1987.
- David Kempe. On the complexity of the reflections game.Unpublished manuscript,January2003.http://www.rcf.usc.edu/_dkempe/publications/reflections.pdf.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- David Lichtenstein and Michael Sipser. GO is polynomial-space hard. Journal of theAssociation for Computing Machinery, 27(2):393–401, April 1980.
- Davis, Douglas D. and Charles A. Holt (1993) Experimental Economics, Princeton: Princeton University Press.
- DEBREU, G., AND H. SCARF: ''A Limit Theorem on the Core of aπ Economy," Internatioιιal Economíc Revíew, Vol. 4, No. 3, Sept., 1963.
- Donald Knuth. Surreal Numbers.Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- Dorit Dor and Uri Zwick.SOKOBAN and other motion planning problems.ComputationalGeometry: Theory and Applications, 13(4):215–228, 1999.
- Eatwell, Murray Milgate, and Peter Newman, New York: Norton, 176-177.
- Eckel, Catherine and Rick Wilson (1999) "The Human Face of Game Theory: Trust and Reciprocity in Sequential Games," Discussion Paper, Rice University.
- Edward Hordern. Sliding Piece Puzzles. Oxford University Press, 1986.
- Edward Robertson and Ian Munro. NP-completeness, puzzles and games. Utilitas Mathematica, 13:99–116, 1978.
- Elwyn Berlekamp and David Wolfe.Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point. A.K. Peters, Ltd., 1994.
- Elwyn Berlekamp. The Dots and Boxes Game: Sophisticated Child's Play. A K Peters,Wellesley, MA, 2000.
- Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy.Winning Ways for YourMathematical Plays.A K Peters, Wellesley, MA, 2nd edition, 2001–2004.
- Erev, Ido and Alvin E. Roth (1998) "Predicting How People Play Games: Reinforcement Learning in Experimental Games with Unique, Mixed Strategy Equilibria," American Economic Review, 88(4), 848-881.
- Erich Friedman. Corral puzzles are NP-complete. Unpublished manuscript, August2002. http://www.stetson.edu/_efriedma/papers/corral/corral.html.
- Erich Friedman. Cubic is NP-complete. In Proceedings of the 34th Annual Florida MAASection Meeting, 2001.
- Erich Friedman. Pearl puzzles are NP-complete. Unpublished manuscript, August 2002.http://www.stetson.edu/_efriedma/papers/pearl/pearl.html.
- Erich Friedman. Pushing blocks in gravity is NP-hard. Unpublished manuscript,March2002.http://www.stetson.edu/_efriedma/papers/gravity/gravity.html.
- Erich Friedman. Spiral galaxies puzzles are NP-complete. Unpublished manuscript,March,2002.http://www.stetson.edu/_efriedma/papers/spiral/spiral.html.
- Erik D. Demaine and Martin L. Demaine. Jigsaw puzzles, edge matching, andpolyomino packing: Connections and complexity. Graphs and Combinatorics, 23 (Supplement):195–208, 2007. Special issue on Computational Geometry and Graph Theory: The Akiyama-Chvatal Festschrift.
- Erik D. Demaine and Michael Hoffmann. Pushing blocks is NP-complete for noncrossingsolution paths. In Proceedings of the 13th Canadian Conference on Computational Geometry,pages 65–68, Waterloo, Canada, August 2001.http://compgeo.math.uwaterloo.ca/_cccg01/proceedings/long/eddemaine-24711.ps.
- Erik D. Demaine and Robert A. Hearn. Constraint logic: A uniform framework for modeling computation as games. In Proceedings of the 23rd Annual IEEE Conference on Computational Complexity, College Park, Maryland, June 2008. To appear.
- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and David Eppstein. Phutball endgames are NP-hard. In R. J. Nowakowski, editor, More Games of No Chance, pages 351–360.Cambridge University Press, 2002. Collection of papers from the MSRI Combinatorial Game Theory Research Workshop, Berkeley, California, July 2000. http://www.arXiv.org/abs/cs.CC/0008025.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Helena Verrill. Coin-moving puzzles. In MSRI Combinatorial Game Theory Research Workshop, Berkeley, California, July 2000.
- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Joseph O'Rourke. PushPush and Push-1 are NP-hard in 2D. In Proceedings of the 12th Annual Canadian Conference onComputational Geometry, pages 211–219, Fredericton, Canada, August 2000. http://www.cs.unb.ca/conf/cccg/eProceedings/26.ps.gz.
- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Joseph O'Rourke. PushPush is NP-hard in 2D. Technical Report 065, Department of Computer Science, Smith College, Northampton,MA, January 2000. http://arXiv.org/abs/cs.CG/0001019.
- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Arthur Langerman, and Stefan Langerman. Morpion-solitaire. Theory of Computing Systems, 39(3):439–453, June 2006.
- Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Rudolf Fleischer, Robert A. Hearn, and Timo von Oertzen. The complexity of Dyson telescopes.In Games of No Chance III. 2008.
- Erik D. Demaine, Michael Hoffmann, and Markus Holzer. PushPush-k is PSPACEcomplete.In Proceedings of the 3rd International Conference on FUN with Algorithms,pages 159–170, Isola d'Elba, Italy, May 2004.
- Erik D. Demaine, Robert A. Hearn, and Michael Hoffmann. Push-2-F is PSPACEcomplete.In Proceedings of the 14th Canadian Conference on Computational Geometry,pages 31–35, Lethbridge, Canada, August 2002.
- Examples of this type were brought to my attention by Mr. J. D. Ellinwood of
- F. Bean, A. Kerckhoff , Personality and perception in husband-wife conflicts, Journal of Marriage and the Family 33 (2) (1971) 351-359.
- F. Szidarovszky, M.N. Szilagyi, An analytical study of the N- person prisonners' dilemma, Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics 2 (2002) 22-31.
- Falk H¨uffner, Stefan Edelkamp, Henning Fernau, and Rolf Niedermeier.Finding optimalsolutions to Atomix. In Proceedings of the Joint German/Austrian Conference on AI:Advances in Artificial Intelligence, volume 2174 of Lecture Notes in Computer Science,pages 229–243, Vienna, Austria, 2001.
- Fehr, Ernst and Klaus Schmidt (1999) "A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation,"Quarterly Journal of Economics, August, 114(3), 817-868.
- Fudenberg, Drew and David K. Levine (1998) Learning in Games, Cambridge, MA: MIT Press.
- Fudenberg, Drew and Jean Tirole (1993) Game Theory, Cambridge, MA: MIT Press.
- Gale, David, and Stewart, F. M., "Infinite Games with Perfect Information,"
- Games-II, Analysis of Mathematics, Study No. 28, Princeton University Press, 1953.
- Gary William Flake and Eric B. Baum.Rush Hour is PSPACE-complete, or "Why youshould generously tip parking lot attendants". Theoretical Computer Science, 270(1–2):895–911, January 2002.
- Gibbons, Robert (1997) "An Introduction to Applicable Game Theory," Journal of Economic Perspectives, 11(1), Winter 1997, 127-149.
- Goeree, Jacob K. and Charles A. Holt (1998) "An Experimental Study of Costly Coordination,"working paper, University of Virginia.
- Goeree, Jacob K. and Charles A. Holt (1999) "Stochastic Game Theory: For Playing Games, Not Just For Doing Theory," Proceedings of the National Academy of Sciences, 96,September, 10564-10567.
- Goeree, Jacob K. and Charles A. Holt (2000a) "Asymmetric Inequality Aversion and Noisy Behavior in Alternating-Offer Bargaining Games," European Economic Review, 44, 1079-1089.
- Goeree, Jacob K. and Charles A. Holt (2000b) "Models of Noisy Introspection," draft, University of Virginia.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Goeree, Jacob K., Charles A. Holt, and Thomas Palfrey (1999) "Quantal Response Equilibrium and Overbidding in Private Value Auctions," Discussion Paper, Caltech.
- Goeree, Jacob K., Charles A. Holt, and Thomas Palfrey (2000) "Risk Averse Behavior in Asymmetric Matching Pennies Games," Discussion Paper, University of Virginia.
- Gordon Wilfong. Motion planning in the presence of movable obstacles.Annals ofMathematics and Artificial Intelligence, 3(1):131–150, 1991.
- Graham Cormode. The hardness of the Lemmings game, or Oh no, more NPcompletenessproofs. In Proceedings of the 3rd International Conference on FUN with Algorithms, pages 65–76, Isola d'Elba, Italy, May 2004.
- Gruia Calinescu, Adrian Dumitrescu, and J´anos Pach.Reconfigurations in graphs andgrids. In Proceedings of the 7th Latin American Symposium on Theoretical Informatics,pages 262–273, 2006.
- Harrison, Glenn (1989) "Theory and Misbehavior of First-Price Auctions," American Economic Review, 79, 749-762.
- Harry Gonshor. An Introduction to the Theory of Surreal Numbers.Cambridge UniversityPress, 1986.
- Harsanyi, John C. and Reinhard Selten (1988) A General Theory of Equilibrium Selection in Games, Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Henry E. Dudeney. Strand Magazine, 68:97 and 214, July 1924.
- Hiroyuki Adachi, Hiroyuki Kamekawa, and Shigeki Iwata. Shogi on n × n board is complete in exponential time (in Japanese).
- Ian Parberry. A real-time algorithm for the (n2 − 1)-puzzle. Information Processing Letters, 56(1):23–28, 1995.
- In R. J. Nowakowski, editor, More Games of No Chance, pages 341–350. Cambridge University Press, 2002.
- I-X, SCARF, The core of n n-person game, Econometrica 35 (1967), W-69.
- J. E. Hopcroft, J. T. Schwartz, and M. Sharir. On the complexity of motion planning for multiple independent objects: PSPACE-hardness of the 'Warehouseman's Problem'.International Journal of Robotics Research, 3(4):76–88, 1984.
- J. Farelli, Cheap talk, coordination and entry, Rand Journal of Economics 18 (1) (1987) 34-39.
- J. H. Conway. All games bright and beautiful. American Mathematical Monthly, 84:417–434, 1977.
- J. M. Robson. Combinatorial games with exponential space complete decision problems.In Proceedings of the 11th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, volume 176 of Lecture Notes in Computer Science, pages 498–506, 1984.
- J. M. Robson. N by N Checkers is EXPTIME complete. SIAM Journal on Computing,13(2):252–267, May 1984.
- J. M. Robson. The complexity of Go. In Proceedings of the IFIP 9th World Computer Congress on Information Processing, pages 413–417, 1983.
- Jacques Haubrich. Compendium of Card Matching Puzzles.Self-published, May 1995.Three volumes.
- James D. Fix and BrandonMcPhail. Offline 1-Minesweeper is NP-complete. Manuscript,2004.http://people.reed.edu/_jimfix/papers/1MINESWEEPER.pdf.
- James R. Driscoll and Merrick L. Furst.On the diameter of permutation groups. In Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 152–160, 1983.
- James W. Stephens. The Kung Fu Packing Crate Maze, 2003.http://www.puzzlebeast.com/crate/.W. E. Story. Note on the '15' puzzle. American Mathematical Monthly, 2:399–404,1879.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Jean-Paul Delahaye. The science behind Sudoku.Scientific American, pages 80–87,June 2006.
- Jeffrey R. Hartline and Ran Libeskind-Hadas.The computational complexity of motionplanning.SIAM Review, 45:543–557, 2003.
- Jerry Slocum and Dic Sonneveld.The 15 Puzzle.Slocum Puzzle Foundation, 2006.
- John Bruno and LouisWeinberg.A constructive graph-theoretic solution of the Shannonswitching game.IEEE Transactions on Circuit Theory CT-17, 1:74–81, February 1970.
- John D. Beasley. The Ins& Outs of Peg Solitaire. Oxford University Press, 1985.
- John H. Conway. On Numbers and Games. A K Peters, Wellesley, MA, 2nd edition,2001.
- John Tromp and Rudy Cilibrasi.Limits of Rush Hour Logic complexity.Manuscript,
- John Tromp. On size 2 Rush Hour logic. Manuscript, December 2000. http://turing.wins.uva.nl/_peter/teaching/tromprh.ps.
- Jonathan Schaeffer, Neil Burch, Yngvi Bj¨ornsson, Akihiro Kishimoto, Martin M¨uller,Robert Lake, Paul Lu, and Steve Sutphen. Checkers is solved. Science, 317(5844):1518–1522, September 2007.
- Joseph Culberson. Sokoban is PSPACE-complete. In Proceedings of the International Conference on Fun with Algorithms, pages 65–76, Elba, Italy, June 1998.
- Joseph O'Rourke and the Smith Problem Solving Group. PushPush is NP-hard in 3D. June 2004. http://www.cwi.nl/_tromp/rh.ps.
- June, 1965.
- K. Li and K. H. Cheng. Complexity of resource allocation and job scheduling problemson partitionable mesh connected systems. In Proceedings of the 1st Annual IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pages 358–365, May 1989.
- Kahneman, Daniel, Jack L. Knetsch, and Richard H. Thaler (1991) "The Endowment Effect, Loss Aversion, and Status Quo Bias: Anomalies," Journal of Economic Perspectives, 5:1(Winter), 193-206.
- Kahneman, Daniel, Paul Slovic, and Amos Tversky, eds. (1982) Judgement Under Uncertainty:Heuristics and Biases, Cambridge: Cambridge University Press.
- Kevin Buchin and Maike Buchin. Rolling block mazes are PSPACE-complete.
- Kevin Buchin, Maike Buchin, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Dania El-Khechen,S´andor Fekete, Christian Knauer, Andr´e Schulz, and Perouz Taslakian. On rolling cubepuzzles. In Proceedings of the 19th Canadian Conference on Computational Geometry,pages 141–144, Ottawa, Canada, August 2007.
- Kreps, David M. (1995) "Nash Equilibrium," in The New Palgrave: Game Theory, eds. John
- Kübler, Dorothea and Georg Weizsäcker (2000) "Limited Depth of Reasoning and Failure of Cascade Formation in the Laboratory," Working Paper, Harvard University.
- Kuhn, H. W., "Extensive Games," PROC. NATL. Ac4D. Sci., 36, 570-576 (1950).
- L. G. Valiant and V. V. Vazirani. NP is as easy as detecting unique solutions. TheoreticalComputer Science, 47:85–93, 1986.
- L. J. Stockmeyer and A. R. Meyer. Word problems requiring exponential time (preliminary report). In Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Theoryof Computing, pages 1–9, Austin, Texas, 1973.
- L. SHAPLEY, "On Balanced Sets and Cores," RM-4601-PR, Rand Corporation,
- Larry J. Stockmeyer and Ashok K. Chandra.Provably difficult combinatorial games.SIAM Journal on Computing, 8(2):151–174, 1979.
- LEMKE, C. E. and "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming," Management Scíence, Vol. 11, No. 7, May, 1965.
- LEMKE, C. E., AND J. T. Howson, 'Equilibrium Points of Bi-matrix Games," SIAM

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Journal,

- Luc Longpr´e and Pierre McKenzie.The complexity of solitaire. In Proceedings of the 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science,volume 4708 of Lecture Notes in Computer Science, pages 182–193, 2007.
- Lucking-Reiley, David (1999) "Using Field Experiments to Test the Equivalence BetweenAuction Formats: Magic on the Internet," American Economic Review, 89(5), 1063-1080.
- M.N. Szilagyi An investigation of N- person prisoners' dilemmas, Complex Systems 14 (2003) 155-174.
- M.N. Szilagyi, Computer simulation fot the N- person chicken dilemma for parlovian agents in : Proceedings of the Eleventh International Symposium on Dynamic Games and Application, Tucson, AZ, 2004.
- M.N. Szilagyi, Z.C Szilagyi, A tool for simulated social experiments, Simulation 74 (1) (2000) 4-10.
- Mailath, George (1998) "Do People Play Nash Equilibrium? Lessons from Evolutionary Game Theory," Journal of Economic Literature, XXXVI(3), 1347-1374.
- Malte Helmert. Complexity results for standard benchmark domains in planning. ArtificialIntelligence, 143(2):219–262, 2003.
- MANTEL, ROLF: "Toward a Constructive Proof of the Existence of Eq uilibrium ín a Competitive Economy," submitted as a thesis to theDepartment of Economics, Yale University, 1965.
- Marcel Crˆa¸smaru and John Tromp. Ladders are PSPACE-complete. In Proceedings ofthe 2nd International Conference on Computers and Games, volume 2063 of Lecture,Notes in Computer Science, pages 241–249, 2000.
- Marcel Crˆasmaru. On the complexity of Tsume-Go. In Proceedings of the 1st InternationalConference on Computers and Games, volume 1558 of Lecture Notes in ComputerScience, pages 222–231, London, UK, 1999. Springer-Verlag.
- Mark Jerrum. A compact representation for permutation groups.Journal of Algorithms,7(1):60–78, 1986.
- Mark R. Jerrum. The complexity of finding minimum-length generator sequences. TheoreticalComputer Science, 36(2–3):265–289, 1985.
- Markus Holzer and Oliver Ruepp.The troubles of interior design—a complexity analysisof the game Heyawake. In Proceedings of the 4th International Conference on FUN withAlgorithms, volume 4475 of Lecture Notes in Computer Science, pages 198–212, 2007.
- Markus Holzer and Stefan Schwoon. Assembling molecules in ATOMIX is hard. TheoreticalComputer Science, 313(3):447–462, February 2004.
- Markus Holzer and Stefan Schwoon.Reflections on reflexion—computational complexityconsiderations on a puzzle game. In Proceedings of the 3rd International Conferenceon FUN with Algorithms, pages 90–105, Isola d'Elba, Italy, May 2004.
- Markus Holzer, Andreas Klein, and Martin Kutrib. On the NP-completeness of the nurikabepencil puzzle and variants thereof. In Proceedings of the 3rd International Conference on FUN with Algorithms, pages 77–89, Isola d'Elba, Italy, May 2004.
- Martin Gardner. Cram, bynum and quadraphage. In Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments, chapter 16. W. H. Freeman and Company, 1986. http://www.clickmazes.com/planks/ixplanks.
- Martin Gardner. Mathematical games column. Scientific American, 209(6):144, December1963. Solution in January 1964 column.
- Martin Gardner. Mathematical games column. Scientific American, 213(5):120–123.November 1965. Problem 9.Solution in December 1965 column.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Martin Gardner. Mathematical games column. Scientific American, 232(3):112–116, March 1975. Solution in April 1975 column.
- Martin Gardner. The hypnotic fascination of sliding-block puzzles.Scientific American,210:122–130, 1964. Appears as Chapter 7 of Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions, University of Chicago Press, 1984.
- Martin Hock. Exploring the complexity of the ufo puzzle. Undergraduate thesis,CarnegieUniversity,2001.http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/user/mjs/ftp/thesis-02/hock.ps.
- Masaya Yokota, Tatsuie Tsukiji, Tomohiro Kitagawa, Gembu Morohashi, and ShigekiIwata.Exptime-completeness of generalized Tsume-Shogi (in Japanese).Transactionsof the IEICE, J84-D-I(3):239–246, 2001.
- McKelvey, Richard D. and Thomas R. Palfrey (1992) "An Experimental Study of the Centipede Game," Econometrica, 60, 803-836.
- McKelvey, Richard D. and Thomas R. Palfrey (1995) "Quantal Response Equilibria for Normal Form Games," Games and Economic Behavior, 10, 6-38.
- McKelvey, Richard D., Thomas R. Palfrey, and Roberto A. Weber (2000) "The Effects of Payoff Magnitude and Heterogeneity on Behavior in 2 × 2 Games with Unique Mixed StrategyEquilibria," Journal of Economic Behavior and Organization, 42(4), August, 523-548.
- Merlijn Sevenster. Battleships as a decision problem.ICGA Journal, 27(3):142–147.
- Michael Buro. Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs. In Proceedings of the 2nd International Conference on Computers and Games, volume 2063 of Lecture Notes in Computer Science, pages 250–261,Hamamatsu, Japan, October 2000.
- Michael D. Ernst. Playing Konane mathematically: A combinatorial game-theoretic analysis. UMAP Journal, 16(2):95–121, Spring 1995.
- Michael H. Albert, Richard J. Nowakowski, and David Wolfe.Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory.A K Peters, Wellesley, MA, 2007.
- Michael Hoffmann. Push-* is NP-hard. In Proceedings of the 12th Canadian Conferenceon Computational Geometry, pages 205–210, Fredericton, Canada, August 2000. http://www.cs.unb.ca/conf/cccg/eProceedings/13.ps.gz.
- Michael Lachmann, Cristopher Moore, and Ivan Rapaport. Who wins Research Workshop,Berkeley, California, July 2000.
- Michael R. Garey and David S. Johnson.Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman & Co., 1979.
- Nagel, Rosemarie (1995) "Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study," American Economic Review, 85(5), 1313-1326.
- Nasar, Sylvia (1998) A Beautiful Mind, New York: Simon and Schuster.
- Nash, J. F., "Non-cooperative Games," Ann. Math., 54, 286-295 (1951).
- Nash, John (1950) "The Bargaining Problem," Econometrica, 28, 155-162.
- Neumann, J. von, and Morgenstern, O., The Theory of Games and Economic Behavior.Princeton University Press, 1947.
- Nobuhisa Ueda and Tadaaki Nagao. NP-completeness results for NONOGRAM via parsimoniousreductions. Technical Report TR96-0008, Department of Computer Science,Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, May 1996.
- Norman Alling. Foundations of Analysis over Surreal Number Fields. North-Holland Notes 2002-AL-87-2, 2002.
- Ochs, Jack (1994) "Games with Unique, Mixed Strategy Equilibria: An Experimental Study,Games and Economic Behavior, 10, 202-217.
- Ochs, Jack (1995) "Coordination Problems," in J. Kagel and A. Roth (eds.), Handbook of Experimental Economics, Princeton: Princeton University Press, 1995, 195-249.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Oddvar Kloster. A solution to the Angel Problem.Theoretical Computer Science,389(1–2):152–161, December 2007.
  of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology,Cambridge,Massachusetts,May2006.http://www.swiss.ai.mit.edu/_bob/hearn-thesis-final.pdf.
- Offerman, Theo (1997) Beliefs and Decision Rules in Public Goods Games: Theory and Experiments, Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Olcina, Gonzalo and Amparo Urbano (1994) "Introspection and Equilibrium Selection in 2×2 Matrix Games," International Journal of Game Theory, 23, 183-206.
- P. M. Grundy and C. A. B. Smith. Disjunctive games with the last player losing.Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 52:527–533, 1956.
- P. M. Grundy. Mathematics and games.Eureka, 2:6–8, October 1939. Reprinted in Eureka: The Archimedeans' Journal, 27:9–11, October 1964.
- Paul Rendell. A Turing machine implemented in Conway's Game of Life. http://rendell-attic.org/gol/tm.htm, January 2005.
- Paul Spirakis and Chee Yap.On the combinatorial complexity of motion coordination.Report 76, Computer Science Department, New York University, 1983.
- Pearce, David G. (1984) "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection,"Econometrica, 52, 1029-1050.
- PELEG, B.: An lnductíve Method for Constructíng Míιιímαl Balanced Collection of Fíníte Sets, Research Program ín Game Theory and Mathematical Economics, Memorandum
- Pierre McKenzie. Permutations of bounded degree generate groups of polynomial diameter.Information Processing Letters, 19(5):253–254, November 1984.
- pp. 173-179.
- Princeton University Press, 1953.
- R. Cooper, D. Dejong , R. Forsythe, T. Ross, Communication in the battle of the sexes game: Some experimental results, RAND Journal of Economics 20 (4) (1989) 568-587.
- R. Cooper, D. Dejong , R. Forsythe, T. Ross, Forward induction in the battle of the sexes games, The American Economic Review 83 (5) (1993) 1303- 1316.
- R. G. Downey and M. R. Fellows.Parameterized Complexity.Springer-Verlag, 1997.
- R. J. AUMANN, The core of a cooperative game without side payments, Trans. Amer.Math. Sot. 98 (1961), 539-552.
- R. Sprague. ¨Uber mathematische Kampfspiele.Tˆohoku Mathematical Journal, 41:438–444, 1935–36.
- Rabin, Matthew (1993) "Incorporating Fairness into Game Theory and Economics," American Economic Review, 83(5), December, 1281-1302.
- Reynolds, Stanley S. (1999) "Sequential Bargaining with Asymmetric Information: The Role of Quantal Response Equilibrium in Explaining Experimental Results," Discussion Paper, University of Arizona.
- Richard J. Nowakowski and David G. Poole. Geography played on products of directedcycles. In R. J. Nowakowski, editor, Games of No Chance, pages 329–337. CambridgeUniversity Press, 1996.
- Richard K. Guy and Cedric A. B. Smith.The G-values of various games.Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 52:514–526, 1956.
- Richard K. Guy and Richard J. Nowakowski. Unsolved problems in combinatorial games. In R. J. Nowakowski, editor, More Games of No Chance, pages 457–473. CambridgeUniversity Press, 2002.
- Richard Kaye. Infinite versions of minesweeper are Turing-complete. Manuscript,August2000. http://www.mat.bham.ac.uk/R.W.Kaye/minesw/infmsw.pdf.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Richard Kaye. Minesweeper is NP-complete. Mathematical Intelligencer, 22(2):9–15,2000.
- Richard M. Wilson. Graph puzzles, homotopy, and the alternating group. Journal ofCombinatorial Theory, Series B, 16:86–96, 1974.
- Robert A. Hearn and Erik D. Demaine. PSPACE-completeness of sliding-block puzzlesand other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation.Theoretical Computer Science, 343(1–2):72–96, October 2005. Special issue “GameTheory Meets Theoretical Computer Science”.
- Robert A. Hearn and Erik D. Demaine. The nondeterministic constraint logic modelof computation: Reductions and applications. In Proceedings of the 29th InternationalColloquium on Automata, Languages and Programming, volume 2380 of Lecture Notesin Computer Science, pages 401–413, Malaga, Spain, July 2002.
- Robert A. Hearn. Amazons is PSPACE-complete. Manuscript, February 2005. http://www.arXiv.org/abs/cs.CC/0008025.
- Robert A. Hearn. Amazons, Konane, and Cross Purposes are PSPACE-complete. In R. J. Nowakowski, editor, Games of No Chance 3, 2008. To appear.
- Robert A. Hearn. Games, Puzzles, and Computation. PhD thesis, Department
- Robert A. Hearn. Hitori is NP-complete. Manuscript in preparation, 2008.
- Robert A. Hearn. The complexity of Minesweeper revisited. Manuscript in preparation,2008.
- Robert A. Hearn. The complexity of sliding block puzzles and plank puzzles. In Tributeto a Mathemagician, pages 173–183. A K Peters, 2004.
- Robert Berger. The undecidability of the domino problem.Memoirs of the American Mathematical Society, 66, 1966.
- Robert Hearn. TipOver is NP-complete. Mathematical Intelligencer, 28(3):10–14, 2006.
- RobertA.Hearn.Thesubwayshufflepuzzle,2005.http://www.subwayshuffle.com.
- Ron Breukelaar, Erik D. Demaine, Susan Hohenberger, Hendrik Jan Hoogeboom, WalterA. Kosters, and David Liben-Nowell. Tetris is hard, even to approximate. InternationalJournal of Computational Geometry and Applications, 14(1–2):41–68, 2004.
- Rosenthal, Robert W. (1981) "Games of Perfect Information, Predatory Pricing and the Chain- Store Paradox," Journal of Economic Theory, 25, 92-100.
- Roth, Alvin E. (1995) "Bargaining Experiments," in J. Kagel and A. Roth (eds.), Handbook of Experimental Economics, Princeton: Princeton University Press, 1995, 253-348.
- Rubinstein, Ariel (1982) "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model," Econometrica, 50, 97-100.
- Ryuhei Uehara and Shigeki Iwata. Generalized Hi-Q is NP-complete. Transactions of IEICE, E73:270–273, February 1990.
- S. Even and R. E. Tarjan. A combinatorial problem which is complete in polynomial space. Journal of the Association for Computing Machinery, 23(4):710–719, 1976.
- Santa Monica, Cal., 1965.
- Selten, Reinhard (1975) "Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," International Journal of Game Theory, 4, 25-55.
- Selten, Reinhard (1991) "Anticipatory Learning in Two-Person Games," in R. Selten, ed., Game Equilibrium Models I, Berlin: Springer Verlag, 98-153.
- Selten, Reinhard and Joachim Buchta (1998) "Experimental Sealed Bid First Price Auctions with Directly Observed Bid Functions," in Budescu, I. E. D. and Zwick, R., eds., Games and Human Behavior: Essays in Honor of Amnon Rapoport, Hillside, N.J.Schotter, Andrew and Yaw Narkov (1998) "Equilibria in Beliefs and Our Belief in Equilibrium: An Experimental Approach," working paper, New York University.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Shapley, L. S., "A Value for n-Person Games," Contributions to the Theory of
- SHAPLEY, L. S.: On Balanced Sets and Cores, RAND Corp. Memorandum, RM-4601-PR,
- Shigeki Iwata and Takumi Kasai. The Othello game on an n × n board is PSPACEcomplete.Theoretical Computer Science, 123:329–340, 1994.
- Stahl, Dale O. and Paul W. Wilson (1995) "On Players' Models of Other Players: Theory and Experimental Evidence," Games and Economic Behavior, 10, 218-254.
- Stefan Reisch. Gobang ist PSPACE-vollst¨andig (Gobang is PSPACE-complete). Acta Informatica, 13:59–66, 1980.
- Stefan Reisch. Hex ist PSPACE-vollst¨andig (Hex is PSPACE-complete). Acta Informatica,15:167–191, 1981.
- Stephen A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In Proceedings of the3rd IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science, pages 151–158, 1971.
- Stephen Wolfram. Cellular Automata and Complexity: Collected Papers. Perseus Press,1994 David Wolfe. Go endgames are PSPACE-hard. In R. J. Nowakowski, editor, MoreGames of No Chance, pages 125–136. Cambridge University Press, 2002.
- Straub, Paul G. (1995) "Risk Dominance and Coordination Failures in Static Games," Quarterly Review of Economics and Finance, 35(4), Winter 1995, 339-363.
- Sven de Vries and Rakesh Vohra. Combinatorial auctions: A survey. INFORMS Journalon Computing, 15(3):284–309, Summer 2003.35
- T. S. Ferguson. On sums of graph games with last player losing.International Journal of Game Theory, 3(3):159–167, 1974.
- T. Schelling, Hockey helmets, concealed weapons and daylight saving, Journal of Conflict Resolution 17 (3) (1973) 381-428.
- Takayuki Yato and Takahiro Seta.Complexity and completeness of finding another solutionand its application to puzzles.IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics,Communications, and Computer Sciences, E86-A(5):1052–1060, 2003. Also IPSJ SIG
- Takayuki Yato. Complexity and completeness of finding another solution and its applicationto puzzles.Master's thesis, University of Tokyo, Tokyo, Japan, January 2003.
- Technical Report 064, Department of Computer Science, Smith College, Northampton,MA, November 1999. http://arXiv.org/abs/cs/9911013.
- Thane E. Plambeck and Aaron N. Siegel.Mis`ere quotients for impartial games.arXiv:math/0609825v5,. http://arxiv.org/abs/math/0609825.
- Thane E. Plambeck.Advances in losing.In Games of No Chance 3.To appear.http://arxiv.org/abs/math/0603027.
- Thane E. Plambeck.miseregames.org.
- Thane E. Plambeck.Taming the wild in impartial combinatorial games.INTEGERS:Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 5(G05), 2005.
- the investigations reported on herein.
- Therese Biedl. The complexity of domino tiling. In Proceedings of the 17th Canadian Conference on Computational Geometry, pages 187–190, 2005.
- Therese C. Biedl, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Rudolf Fleischer, Lars Jacobsen,and J. Ian Munro.The complexity of Clickomania. In R. J. Nowakowski, editor, MoreGames of No Chance, pages 389–404. Cambridge University Press, 2002. Collection of papers from the MSRI Combinatorial Game Theory Research Workshop, Berkeley, California, July 2000.
- Thomas J. Schaefer. On the complexity of some two-person perfect-information games.Journal of Computer and System Sciences, 16:185–225, 1978.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

- Thomas S. Ferguson. Mis`ere annihilation games.Journal of Combinatorial Theory,Series A, 37:205–230, 1984.
- Timothy Furtak, Masashi Kiyomi, Takeaki Uno, and Michael Buro.Generalized Amazonsis PSPACE-complete. In Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 132–137, 2005.
- Tucker, Al W. (1950) "A Two-Person Dilemma," mimeo, Stanford University. Published in 1980 under the heading "On Jargon: The Prisoner's Dilemma," UMAP Journal, 1, 101.
- Van Huyck, John B., Raymond C. Battalio, and Richard O. Beil (1990) "Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure," American Economic Review, 80,234-248.
- Vickrey, William (1961) "Counterspeculation, Auctions, and Sealed Tenders," Journal of Finance, 16, 8-37.von Neumann, John, and Oscar Morgenstern (1944) Theory of Games and Economic Behavior,Princeton: Princeton University Press.
- Vol. 12, July, 1964.
- Walter J. Savitch. Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities.Journal of Computer and System Sciences, 4(2):177–192, 1970.
- William P. Thurston. Conway's tiling groups. American Mathematical Monthly,
- No. 3, February, 1964, Department of Mathematics, Hebrew University, Jerusalem.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ