Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Πληροφορική»

– ***Μεταπτυχιακή Διατριβή*** –

Πρότυπα σε Μονοπάτια Motzkin

Ηλίας Γ. Τριανταφυλλάκης
Αριθμός Μητρώου: ΜΠΠΛ/ 09041

Επιβλέπων: Αριστείδης Σαπουνάκης, Καθηγητής

Πειραιάς, Νοέμβριος 2012

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Αριστείδης Σαπουνάκης Καθηγητής	Παναγιώτης Τσικούρας Καθηγητής	Ευάγγελος Φούντας Καθηγητής

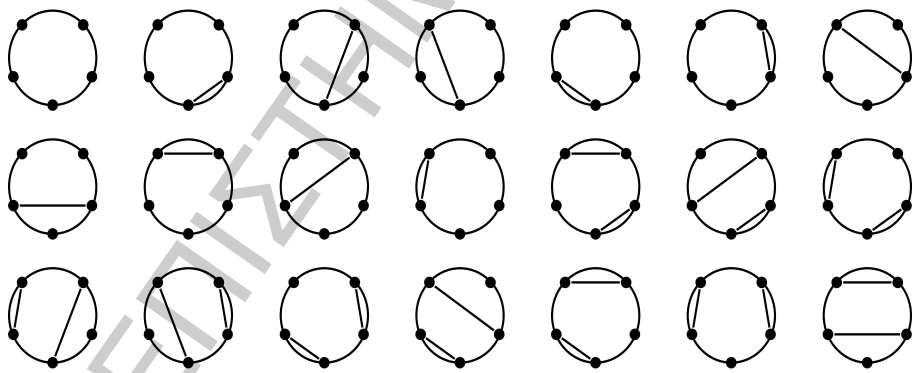
Περιεχόμενα

Πρόλογος

Τα τελευταία έτη παρατηρείται ένας αυξανόμενος αριθμός επιστημονικών εργασιών στην Συνδυαστική Ανάλυση με αντικείμενο τα μονοπάτια σε δικτυωτό, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα μονοπάτια αυτά αποτελούν ένα πεδίο έρευνας με έντονη δραστηριότητα.

Αρκετές είναι εξάλλου οι κλασσικές ακολουθίες αριθμών που μπορούν να αποτυπωθούν με συγκεκριμένα μονοπάτια σε δικτυωτό. Μάλιστα, τα μονοπάτια αυτά έχουν πάρει τα ονόματα τους από τους αντίστοιχους Μαθηματικούς που μελέτησαν αυτές τις ακολουθίες. Είναι εντυπωσιακό όμως το γεγονός ότι πολλοί από αυτούς είναι πλέον γνωστοί για προβλήματα της Συνδυαστικής που μπορούν να επιλυθούν με την χρήση των μονοπατιών παρά από την αλγεβρική αρχική διατύπωσή τους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν ο Βέλγος Eugene Catalan (1814-1894), οι Γερμανοί Ernst Schröder (1841-1902) και Walther von Dyck (1856-1934), ο Αμερικάνος Theodore Motzkin (1908-1970) και ο Ινδός Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987).

Οι αριθμοί Motzkin εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην εργασία του Motzkin [10] στην προσπάθειά του να απαριθμήσει όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μη τεμνόμενες χορδές μπορούν να συνδέσουν μερικά (μπορεί και κανένα) από n διακεκριμένα σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου. Για παράδειγμα, $n=5$ σημεία μπορούν να συνδεθούν με τους εξής 21 τρόπους:



Οι αριθμοί Motzkin απαριθμούν αρκετά συνδυαστικά αντικείμενα [18] που έχουν σπουδαία χρήση στην Επιστήμη της Πληροφορικής. Ορισμένα από αυτά είναι τα εξής:

1. Τα δυαδικά δέντρα με $n-1$ δεσμούς τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς δεσμούς στα δεξιά.
2. Τα δυαδικά δέντρα με $n+1$ κορυφές στα οποία κάθε κορυφή περιττού ύψους έχει το πολύ έναν απόγονο.
3. Τα διατεταγμένα δέντρα με n δεσμούς στα οποία κάθε κορυφή έχει το πολύ δύο απογόνους.

4. Τα διατεταγμένα δέντρα με $n+1$ δεσμούς στα οποία καμία κορυφή πλην της ρίζας δεν έχει μόνο έναν απόγονο.
5. Τα μονοπάτια Motzkin.

Πολλές επιστημονικές εργασίες τα τελευταία 15 χρόνια ασχολούνται με την εμφάνιση των προτύπων σε μονοπάτια Dyck, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως μονοπάτια Motzkin χωρίς οριζόντια βήματα. Για παράδειγμα, η Dyck στατιστική N_τ : "αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ" έχει μελετηθεί για $\tau = ud$ ή du από τον Deutsch [2] και για $\tau = udu$ ανεξάρτητα από τον Sun [20] και Merlini-Sprugnoli-Verri [9]. Πιο συστηματικά η στατιστική N_τ έχει εξετασθεί από τους Σαπουνάκη-Τασούλα-Τσικούρα για κάθε πρότυπο τ με μήκος το πολύ 4 [14]. Με ορισμένα πρότυπα μεγαλύτερους μήκους έχουν ασχοληθεί οι Mansour [8] και Σαπουνάκης-Τασούλας-Τσικούρας [15].

Σε μια πιο ενδιαφέρουσα κατεύθυνση, το πρόβλημα της εμφάνισης ενός προτύπου σε μονοπάτια Dyck με ή χωρίς περιορισμό στο ύψος της εμφάνισης εξετάστηκε από τους Μανέ-Σαπουνάκη-Τασούλα-Τσικούρα [6], [7] όπου ερευνώνται τυχαία πρότυπα με συγκεκριμένα δομικά χαρακτηριστικά (δηλαδή αριθμό ανόδων, ύψος, βάθος και περιοδικότητα).

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής αφορά την εμφάνιση των προτύπων σε μονοπάτια Motzkin μελετώνται όλα τα πρότυπα μήκους 3. Η εμφάνιση των προτύπων σε μονοπάτια Motzkin έχει μελετηθεί μόνο για πρότυπα μήκους 2 από τους Σαπουνάκη-Τσικούρα [13], όπως επίσης και για μονοπάτια που αποφεύγουν μια ειδική κατηγορία προτύπων μήκους 3, τα οποία ονομάζονται Ζιγκ-Ζαγκ από τους Munarini-Zagaglia [11].

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των μεταπτυχιακού προγράμματος ‘‘Πληροφορική’’ του Πανεπιστημίου Πειραιώς υπό την επίβλεψη του Καθηγητή του Τμήματος Αριστείδη Σαπουνάκη.

Στον κύριο Σαπουνάκη οφείλω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την παρούσα εργασία και την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα συναρπαστικό αντικείμενο. Η ανεπανάληπτη καθοδήγησή του με τις πολύτιμες γνώσεις και την ανεκτίμητη εμπειρία του αλλά και η εφαρμογή της ουσιώδης μεθοδολογίας σε όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αποτελούσαν τον μεγαλύτερο αρωγό στην δική μου προσπάθεια. Μα πάνω απ’ όλα η συνεχής παρουσία και υποστήριξη που μου πρόσφερε, αφιερώνοντας ακόμη και τον ελεύθερο χρόνο που διέθετε για την δική μου εξυπηρέτηση τον καθιστούν ένα υπόδειγμα όχι απλά ενός εξαίρετου επαγγελματία αλλά και θεσπέσιου ανθρώπου.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Τσικούρα για όλες τις ώρες που ανάλωσε διαβάζοντας και ξαναδιαβάζοντας την παρούσα εργασία και ελέγχοντας τις απαραίτητες εκείνες λεπτομέρειες ώστε να παρουσιαστεί το αρτιότερο δυνατό αποτέλεσμα.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω έντονα τον κ. Γιάννη Τασούλα για την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε αλλά και την υπομονή που επέδειξε διδάσκοντάς μου τα απαραίτητα συστατικά αυτής της εργασίας, ώστε να είμαι σε θέση να ολοκληρώσω το παρούσα εργασία.

Είμαι ευγνώμων στον κ. Κώστα Μανέ, για την εξαιρετική προθυμία που επεδείκνυε κάθε στιγμή που αντιμετώπιζα κάποια δυσκολία, ιδιαίτερα δε στον σχεδιασμό των σχημάτων και στην δημιουργία του λογισμικού.

Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ οφείλω στον ξάδελφο μου Κωνσταντίνο Χατζηθεοδώρου για την ένθερμη ψυχολογική υποστήριξη που μου προσέφερε, μετατρέποντας την συγγραφή της διπλωματικής εργασίας σε μία ευχάριστη ενασχόληση.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, στην οποία και αφιερώνω την εργασία αυτή, για την αμέριστη συμπαράσταση και υλοποίηση των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Πειραιάς, 08 Νοεμβρίου 2012
Ηλίας Τριανταφυλλάκης

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η στατιστική N_{τ} : ''αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ'' σε μονοπάτια Motzkin, για κάθε πρότυπο με μήκος το πολύ 3. Στη συνέχεια προκύπτουν ορισμένες ενδιαφέρουσες ισοκατανομές οι οποίες επαληθεύονται συνδυαστικά με τη βοήθεια ορισμένων αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων στο σύνολο $\mathcal{M}$ των μονοπατιών Motzkin.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίδονται ορισμένες βασικές έννοιες και προτάσεις που θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την εργασία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο υπολογίζονται όλες οι γεννήτριες συναρτήσεις δύο μεταβλητών, στο σύνολο $\mathcal{M}$, ως προς το μήκος των μονοπατιών και την εμφάνιση όλων των προτύπων μήκους 2 και μήκους 3. Επίσης, απαριθμούνται ενδεικτικά κάποια από τα παραπάνω υποσύνολα των μονοπατιών Motzkin.

Στο τρίτο κεφάλαιο κατασκευάζονται αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις στο σύνολο $\mathcal{M}$, σε όλες τις περιπτώσεις όπου οι γεννήτριες συναρτήσεις των προτύπων μήκους 2 και μήκους 3 συμπίπτουν.

Τέλος, την διπλωματική συμπληρώνει λογισμικό που υλοποιεί τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις που παρουσιάστηκαν στο τρίτο κεφάλαιο.

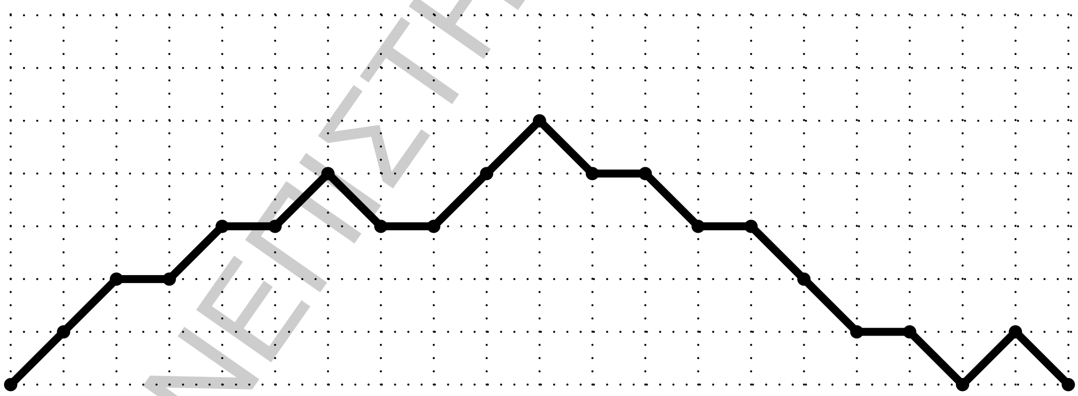
Κεφάλαιο 1

Μονοπάτια και Λέξεις Motzkin

1.1 Βασικοί ορισμοί και προτάσεις

Ένα μονοπάτι σε δικτυωτό μήκους n ή απλά ***μονοπάτι*** είναι μια ακολουθία $\left((x_i, y_i)\right)_{i\in[0,n]}$ από σημεία στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες, για τα οποία ισχύει $x_i > x_{i-1}$, για κάθε $i \in [n]$. Ορίζουμε ως το i*-στό βήμα* του μονοπατιού το ζεύγος $(x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$, $i \in [n]$. Η τιμή y_i ονομάζεται ***ύψος*** *του* i*-στού βήματος*. Το ***ύψος του μονοπατιού*** είναι η μέγιστη τιμή ύψους για όλα τα βήματα του μονοπατιού. Κάθε μονοπάτι μπορεί να περιγραφεί πλήρως από το σημείο έναρξής του (x_0, y_0) και την ακολουθία βημάτων του. Το μονοπάτι που δεν έχει κανένα βήμα ονομάζεται ***κενό μονοπάτι***.

Ένα μονοπάτι στο πρώτο τεταρτημόριο με αρχή το σημείο $(0,0)$ και πέρας το σημείο $(n,0)$, που αποτελείται από ανοδικά βήματα $u=(1,1)$, καθοδικά βήματα $d=(1,-1)$, ή οριζόντια βήματα $h=(1,0)$, ονομάζεται ***μονοπάτι Motzkin***.



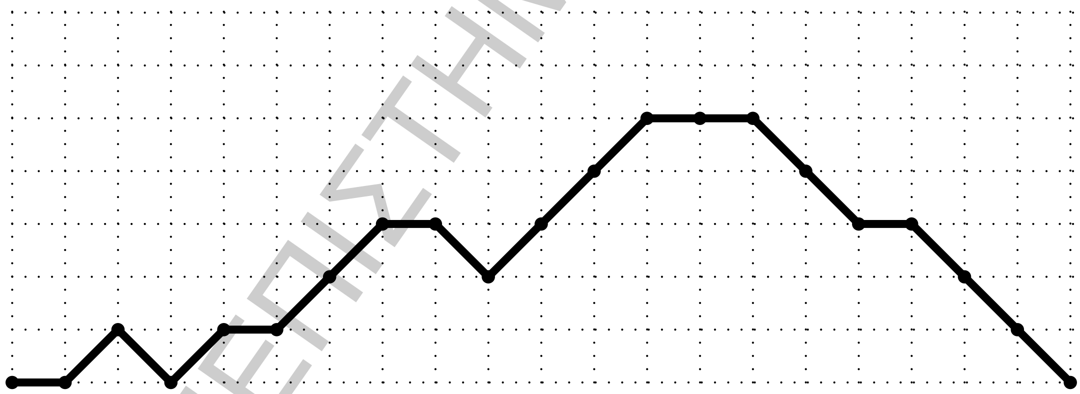
Σχήμα 1.1 Μονοπάτι Motzkin με 7 ανοδικά, 7 καθοδικά και 6 οριζόντια βήματα

Μία λέξη $a \in \{u,d,h\}^*$ ονομάζεται ***λέξη Motzkin*** αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ισότητες:

- $|\alpha|_u = |\alpha|_d$, όπου $|\alpha|_i$, για κάθε γράμμα i του αλφαβήτου είναι ο συνολικός αριθμός εμφανίσεων του γράμματος i στην λέξη a.
- Αν $a = \beta\gamma$, τότε $|\beta|_u \geq |\beta|_d$, δηλαδή για κάθε ανάλυση $a = \beta\gamma$ μιας λέξης Motzkin a, το πλήθος των u στην υπολέξη β είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος των d της β. Σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχαν βήματα του αντίστοιχου μονοπατιού κάτω από τον άξονα των x, κάτι που δεν ισχύει για τα μονοπάτια Motzkin.

Για κάθε μονοπάτι Motzkin, αν αντιστοιχήσουμε σε κάθε ανοδικό βήμα το γράμμα u, σε κάθε καθοδικό βήμα το γράμμα d και σε κάθε οριζόντιο βήμα το γράμμα h, τότε προκύπτει η κωδικοποίηση του μονοπατιού, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι λέξη Motzkin.

Αντίστροφα, αν σε κάθε λέξη Motzkin αντιστοιχήσουμε σε κάθε γράμμα u ένα ανοδικό βήμα, σε κάθε γράμμα d ένα καθοδικό βήμα και σε κάθε γράμμα h ένα οριζόντιο βήμα, τότε προκύπτει ένα μονοπάτι, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι μονοπάτι Motzkin.



h u d u h u u h d u u u h h d d h d d d

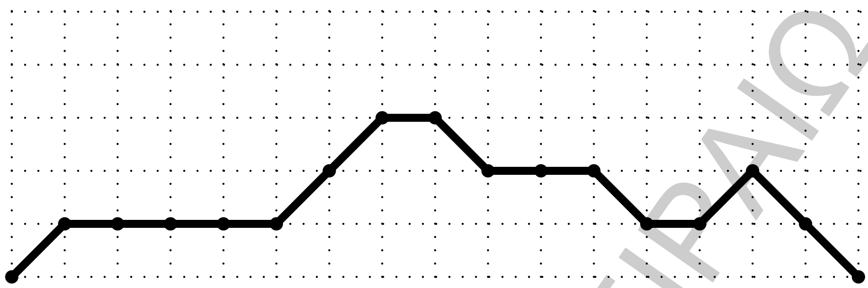
Σχήμα 1.2: Ένα μονοπάτι Motzkin και η αντίστοιχη λέξη Motzkin

Κατόπιν τούτων, προκύπτει η παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση 1.1.1.</u> Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των μονοπατιών Motzkin και των λέξεων Motzkin.

Συνεπώς, με βάση την παραπάνω πρόταση οι έννοιες του μονοπατιού και της λέξης Motzkin θα θεωρούνται ταυτόσημες.

Μήκος ενός μονοπατιού (ή μιας λέξης) Motzkin α ονομάζεται το πλήθος των βημάτων του (ή γραμμάτων του) και συμβολίζεται με $|a|$. Το κενό μονοπάτι θεωρείται ότι έχει μήκος 0.



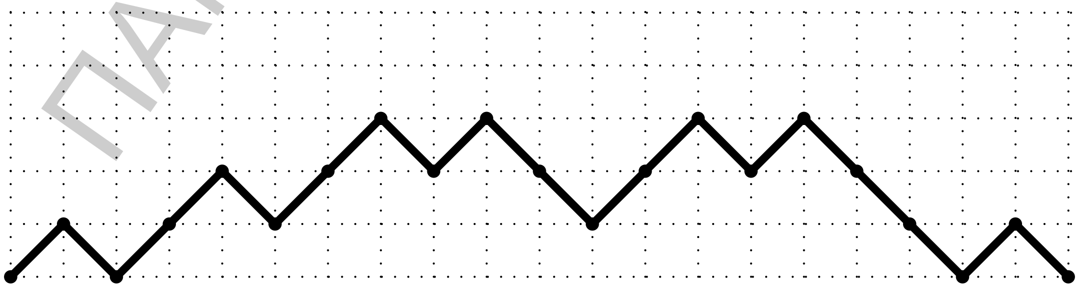
Σχήμα 1.3: Μονοπάτι Motzkin μήκους 16, με λέξη Motzkin την uhhhhuuhdhhdhudd

Το σύνολο όλων των μονοπατιών Motzkin μήκους n συμβολίζεται με $\mathcal{M}_n$ και ορίζουμε:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n .$$

Είναι γνωστό ότι το σύνολο $\mathcal{M}_n$ των μονοπατιών Motzkin απαριθμείται από την ακολουθία M_n των αριθμών Motzkin *(A001006 στο [16]),* της οποίας η γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση $M = 1 + xM + x^2M^2$.

Ένα πολύ σημαντικό υποσύνολο του $\mathcal{M}$ είναι το σύνολο των μονοπατιών *Dyck,* το οποίο περιέχει τα μονοπάτια που δεν έχουν οριζόντια βήματα. Είναι γνωστό ότι το σύνολο των μονοπατιών Dyck μήκους $2n$ απαριθμείται από την ακολουθία *Catalan*: $C_n = (1/n+1)\binom{2n}{n}$ *(A000108 στο [16]).*



Σχήμα 1.4: Μονοπάτι Dyck μήκους 20, με λέξη Dyck την uduuduududdduududdddud

1.2 Διάσπαση των μονοπατιών Motzkin

<u>Πρόταση 1.2.1.</u> Κάθε μονοπάτι Motzkin a διασπάται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή:

$$\alpha = \varepsilon, \quad \text{ή} \quad \alpha = h\beta, \quad \text{ή} \quad \alpha = u\beta d\gamma \qquad \beta,\gamma \in \mathcal{M}.$$

<u>Απόδειξη.</u> Κάθε μη κενό μονοπάτι Motzkin α θα ξεκινάει με οριζόντιο βήμα $h,$ ή με ανοδικό βήμα $u.$

Αν a ξεκινάει με οριζόντιο βήμα $h,$ τότε θα γράφεται υπό τη μορφή $a = h\beta,$ όπου $\beta \in \mathcal{M}.$ Πράγματι, αν αφαιρέσουμε από το a το πρώτο οριζόντιο βήμα, τότε θα προκύψει ένα μικρότερου μήκους μονοπάτι $\beta \in \mathcal{M}.$

Αν a ξεκινάει με ανοδικό βήμα $u,$ τότε θα γράφεται υπό τη μορφή $a = u\beta d\gamma,$ όπου $\beta,\gamma \in \mathcal{M}.$ Πράγματι, αφού το a ξεκινάει με $u,$ θα περιέχει οπωσδήποτε ένα τουλάχιστον d το οποίο θα καταλήγει στον άξονα $x.$ Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $a = u\beta d\gamma,$ όπου d το αριστερότερο καθοδικό βήμα που καταλήγει στον άξονα $x.$ Αφού το $u\beta d$ δεν περιέχει άλλες καθόδους που να καταλήγουν στον άξονα x εκτός της τελευταίας, έπεται ότι το β θα είναι μονοπάτι Motzkin. Επίσης και το γ είναι μονοπάτι Motzkin αφού ξεκινά και καταλήγει στον άξονα x και δεν περιέχει βήματα κάτω από αυτόν. □

Έτσι το σύνολο $\mathcal{M}$ διαμερίζεται ως εξής:

$$\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u,$$

όπου $\mathcal{A}_h = \{h\beta,\ \beta \in \mathcal{M}\}$ και $\mathcal{A}_u = \{u\beta d\gamma,\ \beta,\gamma \in \mathcal{M}\}.$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε μονοπάτι $a \in \mathcal{M}$ διασπάται κατά μοναδικό τρόπο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5:

Σχήμα 1.5: Διάσπαση των μονοπατιών Motzkin

1.3 Γεννήτριες συναρτήσεις

Γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Γεννήτρια συνάρτηση ενός συνόλου $\mathcal{S}$ ως προς μία παράμετρο $p:\mathcal{S}\to\mathbb{N}$ ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x)=\sum_{a\in\mathcal{S}} x^{p(a)} .$$

Η παράμετρος p διαμερίζει το σύνολο $\mathcal{S}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας $\mathcal{S}_n=\{a\in\mathcal{S}: p(a)=n,\ n\in\mathbb{N}\}$, οπότε:

$$\sum_{a\in\mathcal{S}}^{\infty} x^{p(a)}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{a\in\mathcal{S}_n} x^{p(a)}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{a\in\mathcal{S}_n} x^{n}=\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{n}\sum_{a\in\mathcal{S}_n} 1=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathcal{S}_n\right| x^{n}.$$

Αν θεωρήσουμε ότι $a_n=\left|\mathcal{S}_n\right|, n\in\mathbb{N},$ τότε προκύπτει ότι οι δύο παραπάνω ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Δηλάδή, μια γεννήτρια συνάρτηση είναι μια δυναμοσειρά $x,$ στην οποία ο κάθε συντελεστής του x^n είναι ίσος με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathcal{S}$ που έχουν τιμή παραμέτρου p ίση με n.

Ο αντίστοιχος συντελεστής του x^n συμβολίζεται ως $\left[x^n\right]F$.

Γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών ενός συνόλου $\mathcal{S}$ ως προς τις παραμέτρους $p,q:\mathcal{S}\to\mathbb{N}$ ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x,y)=\sum_{a\in\mathcal{S}} x^{p(a)} y^{q(a)},$$

δηλαδή τα x,y μετρούν αντίστοιχα τα p,q.

Ο αντίστοιχος συντελεστής του $x^n y^k$ συμβολίζεται ως $\left[x^n y^k\right]F$.

Σε πολλά συνδυαστικά αντικείμενα ορίζεται μια παράμετρος αναφοράς που ονομάζεται συνήθως ‘‘μέγεθος’’ ή ‘‘μήκος’’. Έχοντας ως βάση αυτήν την παράμετρο, επιτυγχάνεται μια φυσική διαμέριση του αντίστοιχου συνόλου ενώ συνδέεται στενά με την απαρίθμηση και κατασκευή των αντίστοιχων αντικειμένων. Κατά συνέπεια, η παράμετρος αυτή θεωρείται πολύ σημαντική.

Παραδείγματα τέτοιων παραμέτρων είναι για τις δυαδικές λέξεις το ‘‘μήκος της λέξης’’ και για τα δέντρα το ‘‘πλήθος δεσμών του δέντρου’’. Για τα μονοπάτια *Motzkin* παράμετρο αναφοράς αποτελεί το ‘‘μήκος του μονοπατιού’’.

Μια άλλη σημαντική έννοια που σχετίζεται με τις παραμέτρους είναι η έννοια της στατιστικής. Αν θεωρήσουμε δύο παραμέτρους όπου η πρώτη είναι παράμετρος αναφοράς για το συνδυαστικό αντικείμενο, τότε **στατιστική** της δεύτερης παραμέτρου (ως προς την πρώτη παράμετρο) ονομάζεται η κατανομή του αντικειμένου με συγκεκριμένο μέγεθος σε μικρότερες κλάσεις με βάση τις τιμές της δεύτερης παραμέτρου. Δύο στατιστικές ονομάζονται ***ισοκατανεμημένες*** αν οι γεννήτριές τους είναι ίσες.

<u>Πρόταση 1.3.1.</u> *Αν για δύο παραμέτρους p,q στο σύνολο $\mathcal{M}$ των μονοπατιών Motzkin υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ με $|\alpha|=|f(\alpha)|$ και $p(\alpha)=q(f(\alpha))$, τότε οι στατιστικές που ορίζουν οι παράμετροι p,q είναι ισοκατανεμημένες.*

<u>Απόδειξη</u>

Αν $F(x,y)$ και $G(x,y)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις ως προς τις παραμέτρους p και q αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|}y^{p(a)} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|f(a)|}y^{q(f(a))} \\ &= \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{q(\beta)} \\ &= G(x,y). \end{aligned}$$

Επομένως οι στατιστικές που ορίζουν οι παράμετροι p,q έχουν τις γεννήτριες συναρτήσεις τους ίσες, οπότε είναι ισοκατανεμημένες. □

1.4 Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

<u>Πρόταση 1.4.1.</u> Αν μια γεννήτρια συνάρτηση $F(x)$ ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση

$$F(x) = 1 + xH(F(x)),$$

όπου $H(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς $\lambda,$ τότε η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, και αν το $G(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς $\lambda,$ τότε

$$\left[x^n\right]G(F(x)) = \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]G'(1+\lambda)\left(H(1+\lambda)\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Αν θέσουμε στην προηγούμενη σχέση $G(x) = x^s,$ έχουμε

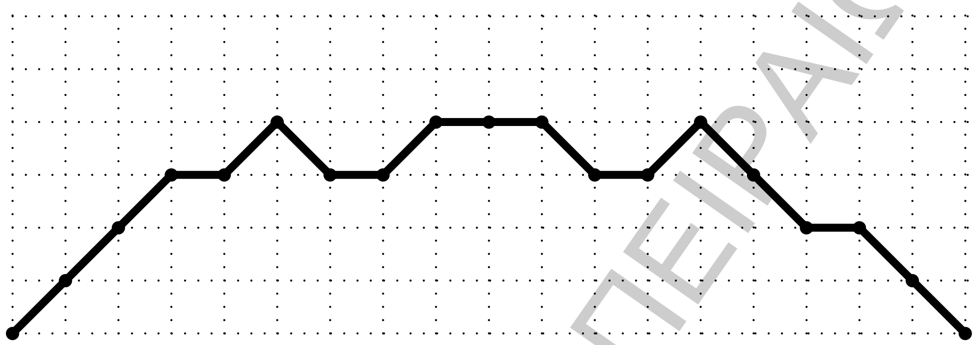
$$\left[x^n\right]F^s(x) = \frac{s}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]G'(1+\lambda)^{s-1}\left(H(1+\lambda)\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Αν θέσουμε στην προηγούμενη σχέση $s = 1,$ έχουμε

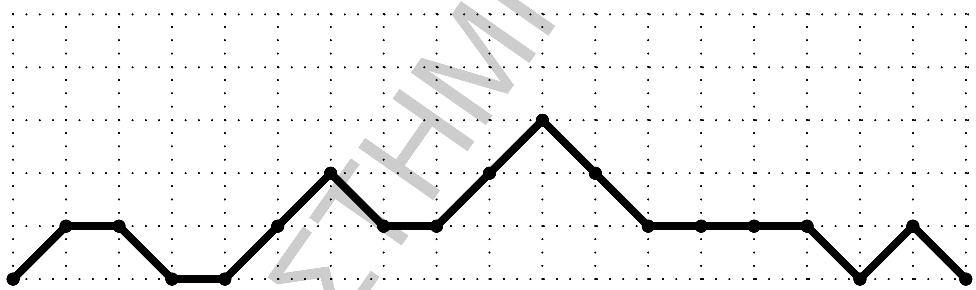
$$\left[x^n\right]F(x) = \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\left(H(1+\lambda)\right)^n, \quad n \geq 1.$$

1.5 Πρότυπα

Μία λέξη $\tau \in \{u,h,d\}^*$, η οποία στην παρούσα εργασία θα ονομάζεται ***πρότυπο,*** **εμφανίζεται** σε ένα μονοπάτι Motzkin a όταν $a = \beta\tau\gamma$, με $\beta,\gamma \in \{u,h,d\}^*$. Αντιθετα, όταν ένα πρότυπο δεν εμφανίζεται σε ένα μονοπάτι Motzkin a, θα λέμε ότι το πρότυπο αυτό **αποφεύγεται**. Ο αριθμός των εμφανίσεων της λέξης τ στο μονοπάτι a συμβολίζεται με $|a|_\tau$.



Σχήμα 1.6: Μονοπάτι Motzkin με 3 εμφανίσεις των προτύπων *hu* και *dh*, 2 εμφανίσεις των προτύπων *uu*, *uh*, *ud*, *hd*, *dd*, 1 εμφάνιση του προτύπου *hh*, ενώ αποφεύγεται το πρότυπο *du*



Σχήμα 1.7: Μονοπάτι Motzkin με 2 εμφανίσεις των προτύπων *uud, huu, dhu,* 1 εμφάνιση των προτύπων *uhd, udh, udd, hhh, hhd, hdu, hdh, dud, dhh, ddh,* ενώ αποφεύγονται τα πρότυπα *uuu, uuh, uhu, uhh, udu, huh, hud, hhu, hdd, duu, duh, dhd, ddu, ddd*

Για την μελέτη της στατιστικής “αριθμός των εμφανίσεων του τ” θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $M_\tau(x,y)$, όπου το x μετράει το μήκος του μονοπατιού και το y τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου τ. Συγκεκριμένα ισχύει $M_\tau(x,y) = \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^n y^k$, όπου $a_{n,k}$ είναι ο αριθμός όλων των $a \in \mathcal{M}_n$ με k εμφανίσεις του τ.

Στην παρούσα εργασία μελετώνται όλα τα πρότυπα μήκους 2 και 3, δηλαδή ευρίσκονται οι αριθμοί $a_{n,k}$ για κάθε πρότυπο τ με μήκος μικρότερο ή ίσο του 3. Η μέθοδος εύρεσης των $a_{n,k}$ ακολουθεί τα εξής 2 βήματα:

α) Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin, ευρίσκεται η εξίσωση την οποία ικανοποιεί η γεννήτρια συνάρτηση $M_\tau(x,y)$.

β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση και με την βοήθεια του θεωρήματος Lagrange, ευρίσκονται οι συντελεστές $a_{n,k}$.

Κεφάλαιο 2

Εύρεση και επίλυση εξισώσεων γεννητριών συναρτήσεων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα απαριθμήσουμε όλα τα μονοπάτια *Motzkin* με βάση το μήκος τους και τον αριθμό των εμφανίσεων ενός προτύπου τ για κάθε πρότυπο μήκους 2 ή 3.

Υπάρχουν 9 πρότυπα μήκους 2 και 27 πρότυπα μήκους 3. Εντούτοις, τα πρότυπα αυτά μπορούν να περιοριστούν σε 6 και 15 αντίστοιχα, περιπτώσεις καθώς αν τ είναι ένα δοσμένο πρότυπο και τ^* η αντιστροφή του προτύπου τ με την ταυτόχρονη αντιστοίχηση κάθε ανοδικού βήματος u του τ σε καθοδικό βήμα d για το τ^* και κάθε καθοδικού βήματος d του τ σε ανοδικό βήμα u για το τ^*, τότε οι στατιστικές ''αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ'' και ''αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ^*'' με συμμετρία ως προς έναν κατακόρυφο άξονα είναι ισοκατανεμημένες. Επομένως, τα ακόλουθα ζεύγη προτύπων έχουν ισοκατανεμημένες τις στατιστικές τους, οπότε αρκεί να ασχοληθούμε με ένα στοιχείο κάθε μέλους.

Ζεύγη προτύπων με ισοκατανεμημένη την στατιστική ''αριθμός των εμφανίσεων του τ''

Μήκους 2	Μήκους 3	
$uu-dd$	$uuu-ddd$	$udh-hud$
$uh-hd$	$uuh-hdd$	$huu-ddh$
$hu-dh$	$uud-udd$	$huh-hdh$
	$uhu-dhd$	$hhu-dhh$
	$uhh-hhd$	$hdu-duh$
	$udu-dud$	$ddu-duu$

Στα παρακάτω, θα αποτυπώσουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος του μονοπατιού'', η οποία θα κωδικοποιείται από την μεταβλητή x και ''πλήθος εμφανίσεων του προτύπου τ'', η οποία θα κωδικοποιείται από την μεταβλητή y.

Σε κάθε περίπτωση η γεννήτρια συνάρτηση θα συμβολίζεται με:

$$M_{\tau}(x,y)=\sum_{\alpha\in M} x^{|a|}y^{|a|_{\tau}}.$$

Ζητούμενο σε κάθε περίπτωση απαρίθμησης είναι ο συντελεστής του όρου $x^m y^r$ στο ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης, δηλαδή ο $\left[x^m y^r\right]M_{\tau}(x,y)$, ο οποίος ισούται με το πλήθος των μονοπατιών μήκους m με r εμφανίσεις του κατά περίπτωση προτύπου τ.

Η μέθοδος που ακολουθείται στις επόμενες απαριθμήσεις συνοψίζεται όπως ήδη αναφέραμε στα ακόλουθα βήματα:

α) Εύρεση της εξίσωσης που ικανοποιεί η γεννήτρια συνάρτηση $M_{\tau}(x,y)$ με χρήση της κατάλληλης διάσπασης.

β) Εύρεση του συντελεστή $\left[x^m y^r\right]M(x,y)$ με τη χρήση του τύπου του θεωρήματος αντιστροφής Lagrange.

Για την επίλυση των παραπάνω, θα χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός του Iverson:

$$[p]=\begin{cases}1, & \text{αν p είναι αληθής}\\ 0, & \text{αν p είναι ψευδής}\end{cases}$$

όπου p μια πρόταση.

Επίσης θα χρησιμοποιηθεί το δέλτα του Kronecker, όπου

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{αν i = j}\\ 0, & \text{αν i} \neq \text{j.}\end{cases}$$

Τέλος, θα χρησιμοποιηθούν τα σύνολα της μορφής

$$\mathcal{A}_p=\{a\in\mathcal{M} : a \text{ αρχίζει με το μονοπάτι } p\}$$

ενώ οι αντίστοιχες γεννήτριες του συνόλου $\mathcal{A}_p$ ως προς ένα δοσμένο πρότυπο τ θα συμβολίζονται με $A_{p,\tau}$, δηλαδή

$$A_{p,\tau} = A_{p,\tau}\left(x, y\right) = \sum_{a \in \mathcal{A}_p} x^{|a|} y^{|a|_\tau}.$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{B}_p = \left\{ a \in \mathcal{M} : a \text{ τελείωνει με το μονοπάτι } p \right\}$$

και οι αντίστοιχες γεννήτριες του συνόλου $\mathcal{B}_{p,\tau}$ ως προς ένα δοσμένο πρότυπο τ θα συμβολίζονται με $B_{p,\tau}$, δηλαδή

$$B_{p,\tau} = B_{p,\tau}\left(x, y\right) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}_p} x^{|a|} y^{|a|_\tau}.$$

Στις περιπτώσεις όπου το πρότυπο τ είναι γνωστό, για χάρη απλούστευσης θα γράφεται A_p (αντ. B_p) αντί $A_{p,\tau}$ (αντ. $B_{p,\tau}$).

2.2 Πρότυπα μήκους 2

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική ‘‘αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ’’ για κάθε πρότυπο μήκους 2. Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή του Κεφαλαίου, αρκεί να ασχοληθούμε με 6 από τα 9 πρότυπα μήκους 2.

1.Το πρότυπο uu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{uu} = |\beta|_{uu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{uu} = |\beta|_{uu} + |\gamma|_{uu} + [\beta \in \mathcal{A}_u],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uu} = M_{uu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών *Motzkin* ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου uu στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uu}+|\gamma|_{uu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} y^{|\gamma|_{uu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} y^{|\gamma|_{uu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uu}} \\
&= 1 + xM_{uu} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} M_{uu} \\
&= 1 + xM_{uu} + x^{2} \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} \right) M_{uu} \\
&= 1 + xM_{uu} + x^{2} \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uu}} \right) M_{uu}
\end{aligned}$$

$$= 1 + xM_{uu} + x^2\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uu}}\right)M_{uu}$$

$$= 1 + xM_{uu} + x^2\left(yA_u + M_{uu} - A_u\right)M_{uu}$$

και άρα

$$M_{uu} = 1 + xM_{uu} + x^2M_{uu}^2 + x^2\left(y-1\right)M_{uu}A_u. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_u. Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \bigcup \mathcal{A}_h \bigcup \mathcal{A}_u$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_u} x^{|a|}y^{|a|_{uu}} \\
&= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|}y^{|a|_{uu}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή} \\ a=h\beta,\beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{uu}} \\
&= M_{uu} - x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{uu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{uu}} \\
&= M_{uu} - 1 - x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uu}} \\
&= M_{uu} - 1 - xM_{uu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_u = \left(1-x\right)M_{uu} - 1.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_u στη σχέση (1), έχουμε ότι

$$M_{uu} = 1 + xM_{uu} + x^2M_{uu}^2 + x^2\left(y-1\right)M_{uu}\left(\left(1-x\right)M_{uu} - 1\right). \qquad (2.2.1)$$

2. Το πρότυπο uh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1+|\beta|,\ |h\beta|_{uh} = |\beta|_{uh}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2+|\beta|+|\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{uh} = |\beta|_{uh}+|\gamma|_{uh}+[\beta \in \mathcal{A}_h],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uh} = M_{uh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uh* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uh} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|}y^{|a|_{uh}} = x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{uh}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{uh}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{uh}}\\
&= x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{uh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{uh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|}y^{|u\beta d\gamma|_{uh}}\\
&= 1+\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|}y^{|\beta|_{uh}+|\gamma|_{uh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]}\\
&= 1+\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1}x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2}x^{|\beta|}x^{|\gamma|}y^{|\beta|_{uh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]}y^{|\gamma|_{uh}}\\
&= 1+x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} + x^{2}\sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}x^{|\gamma|}y^{|\beta|_{uh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]}y^{|\gamma|_{uh}}\\
&= 1+x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} + x^{2}\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]}\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|}y^{|\gamma|_{uh}}\\
&= 1+xM_{uh} + x^{2}\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]}M_{uh}\\
&= 1+xM_{uh} + x^{2}\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}}\right)M_{uh}\\
&= 1+xM_{uh} + x^{2}\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}}y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}}\right)M_{uh}\\
&= 1+xM_{uh} + x^{2}\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uh}}\right)M_{uh}\\
&= 1+xM_{uh} + x^{2}\left(yA_h + M_{uh} - A_h\right)M_{uh}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uh} = 1+xM_{uh} + x^{2}M_{uh}^{2} + x^{2}\left(y-1\right)M_{uh}A_h. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_h. Για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_h = A_h(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_h$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_h &= \sum_{a \in A_h} x^{|a|} y^{|a|_{uh}} = \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta \in \mathrm{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uh}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uh}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} \\
&= x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} \\
&= x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} \right) \\
&= x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uh}} \right) \\
&= x \left(A_h + M_{uh} - A_h \right)
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_h = x M_{uh}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_h στη σχέση (1), έχουμε ότι

$$M_{uh} = 1 + x M_{uh} + x^2 M_{uh}^2 + x^3 \left(y - 1 \right) M_{uh}^2. \qquad (2.2.2)$$

3. Το πρότυπο ud

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{ud} = |\beta|_{ud}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{ud} = |\beta|_{ud} + |\gamma|_{ud} + [\beta = \varepsilon],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{ud} = M_{ud}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *ud* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{ud} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{ud}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{ud}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{ud}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{ud}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{ud}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{ud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{ud}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{ud}+|\gamma|_{ud}+[\beta=\varepsilon]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{ud}+[\beta=\varepsilon]} y^{|\gamma|_{ud}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{ud}|\beta|_{ud}+[\beta=\varepsilon]} y^{|\gamma|_{ud}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}+[\beta=\varepsilon]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{ud}} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}+[\beta=\varepsilon]} M_{ud} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \left(\sum_{\beta=\varepsilon} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\{\varepsilon\}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} \right) M_{ud} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \left(\sum_{\beta=\varepsilon} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} - \sum_{\beta=\varepsilon} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} \right) M_{ud} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \left(y\sum_{\beta=\varepsilon} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} - \sum_{\beta=\varepsilon} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{ud}} \right) M_{ud} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \left(yx^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{ud}} + M_{ud} - x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{ud}} \right) M_{ud} \\
&= 1 + xM_{ud} + x^2 \left(y + M_{ud} - 1 \right) M_{ud}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{ud} = 1 + xM_{ud} + x^2 M_{ud}^2 + x^2 (y-1) M_{ud}. \tag{2.2.3}$$

4. Το πρότυπο hu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1+|\beta|,\ \ |h\beta|_{hu} = |\beta|_{hu} + [\beta \in \mathcal{A}_u]$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2+|\beta|+|\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{hu} = |\beta|_{hu}+|\gamma|_{hu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{hu} = M_{hu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *hu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{hu} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|}y^{|a|_{hu}} = x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{hu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{hu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{hu}}\\
&= x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{uh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{hu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|}y^{|u\beta d\gamma|_{hu}}\\
&= 1+\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|}y^{|\beta|_{hu}+|\gamma|_{hu}}\\
&= 1+\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1}x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2}x^{|\beta|}x^{|\gamma|}y^{|\beta|_{hu}}y^{|\gamma|_{hu}}\\
&= 1+x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} + x^{2}\sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}x^{|\gamma|}y^{|\beta|_{hu}}y^{|\gamma|_{hu}}\\
&= 1+x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} + x^{2}\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}}\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|}y^{|\gamma|_{hu}}\\
&= 1+x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+[\beta\in\mathcal{A}_u]} + x^{2}M_{hu}^{2}\\
&= 1+x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}}\right) + x^{2}M_{hu}^{2}\\
&= 1+x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}}y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}}\right) + x^{2}M_{hu}^{2}\\
&= 1+x\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_u} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{hu}}\right) + x^{2}M_{hu}^{2}\\
&= 1+x\left(yA_u + M_{hu} - A_u\right) + x^{2}M_{hu}^{2}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{hu} = 1 + xM_{hu} + x^2M_{hu}^2 + x(y-1)A_u. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_u. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in A_u$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = u\beta d\gamma, \text{ όπου } \beta, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Επομένως, για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{a \in \mathcal{A}_u} x^{|a|} y^{|a|_{hu}} = \sum_{\substack{a = u\beta d\gamma \\ \beta, \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hu}} \\
&= \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hu}} \\
&= \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{hu}+|\gamma|_{hu}} \\
&= \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hu}} y^{|\gamma|_{hu}} \\
&= x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hu}} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hu}}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_u = x^2 M_{hu}^2.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_u στη σχέση (1), έχουμε ότι

$$M_{hu} = 1 + xM_{hu} + x^2 M_{hu}^2 + x^3 (y-1) M_{hu}^2. \tag{2.2.4}$$

5. Το πρότυπο hh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{hh} = |\beta|_{hh} + [\beta \in \mathcal{A}_h]$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{hh} = |\beta|_{hh} + |\gamma|_{hh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{hh} = M_{hh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *hh* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{hh} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hh}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{hh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{hh}+|\gamma|_{hh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hh}} y^{|\gamma|_{hh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hh}} y^{|\gamma|_{hh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+[\beta\in\mathcal{A}_h]} + x^2 M_{hh}^2 \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} \right) + x^2 M_{hh}^2 \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} y^1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} \right) + x^2 M_{hh}^2 \\
&= 1 + x\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} \right) + x^2 M_{hh}^2 \\
&= 1 + x\left(yA_h + M_{hh} - A_h \right) + x^2 M_{hh}^2
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{hh} = 1 + xM_{hh} + x^2 M_{hh}^2 + x(y-1)A_h. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_h. Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_h = A_h(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_h$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_h &= \sum_{a \in \mathcal{A}_h} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή} \\ a=u\beta d\gamma, \beta,\gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hh}} \\
&= \mathrm{M}_{hh} - x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hh}} - \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hh}} \\
&= \mathrm{M}_{hh} - 1 - x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hh}} \\
&= \mathrm{M}_{hh} - 1 - x^2 \mathrm{M}_{hh}^2
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_h = \left(1 - x^2 \mathrm{M}_{hh}\right) \mathrm{M}_{hh} - 1.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $\mathcal{A}_h$ στη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$M_{hh} = 1 + xM_{hh} + x^2 M_{hh}^2 + x\left(y-1\right)\left(\left(1 - x^2 M_{hh}\right) M_{hh} - 1\right). \qquad (2.2.5)$$

6. Το πρότυπο du

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{du} = |\beta|_{du}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{du} = |\beta|_{du} + |\gamma|_{du} + [\gamma \in \mathcal{A}_u],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uu} = M_{uu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *du* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{du} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{du}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{du}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{du}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{du}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{du}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{du}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{du}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{du}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{du}+|\gamma|_{du}+[\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{du}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{du}} y^{|\gamma|_{du}+[\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{du}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{du}} y^{|\gamma|_{du}+[\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{du}} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{du}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}+[\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + xM_{du} + x^2 M_{du} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}+[\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + xM_{du} + x^2 M_{du} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}+1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} \right) \\
&= 1 + xM_{du} + x^2 M_{du} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} y^{1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} \right) \\
&= 1 + xM_{du} + x^2 M_{du} \left(y\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{du}} \right) \\
&= 1 + xM_{du} + x^2 M_{du} \left(yA_u + M_{du} - A_u \right)
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{du} = 1 + xM_{du} + x^2 M_{du}^2 + x^2 (y-1) M_{du} A_u. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_h. Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M}=\{\varepsilon\}\bigcup\mathcal{A}_h\bigcup\mathcal{A}_u$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$
\begin{aligned}
A_u &= \sum_{a\in\mathcal{A}_u} x^{|a|}y^{|a|_{du}} \\
&= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|}y^{|a|_{du}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή} \\ a=h\beta,\beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|}y^{|a|_{du}} \\
&= M_{du} - x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{du}} - \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{du}} \\
&= M_{du} - 1 - x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{du}} \\
&= M_{du} - 1 - xM_{du}
\end{aligned}
$$

και άρα

$$A_u = (1-x)M_{du} - 1.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_u στη σχέση (1), έχουμε ότι

$$M_{du} = 1 + xM_{du} + x^2M_{du}^2 + x^2(y-1)M_{du}\left((1-x)M_{du}-1\right). \tag{2.2.6}$$

2.3. Πρότυπα μήκους 3

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική ‘‘αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ’’ για κάθε πρότυπο μήκους 3. Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή του Κεφαλαίου, αρκεί να ασχοληθούμε με 15 από τα 27 πρότυπα μήκους 3.

1. Το πρότυπο uuu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{uuu} = |\beta|_{uuu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{uuu} = |\beta|_{uuu} + |\gamma|_{uuu} + [\beta \in \mathcal{A}_{uu}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uuu} = M_{uuu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uuu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uuu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uuu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uuu}} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uuu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uuu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uuu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uuu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uuu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uuu}+|\gamma|_{uuu}+[\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uuu}+[\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} y^{|\gamma|_{uuu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uuu}+[\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} y^{|\gamma|_{uuu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}+[\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uuu}} \\
&= 1 + xM_{uuu} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}+[\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} M_{uuu} \\
&= 1 + xM_{uuu} + x^{2}\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} \right) M_{uuu} \\
&= 1 + xM_{uuu} + x^{2}\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} \right) M_{uuu} \\
&= 1 + xM_{uuu} + x^{2}\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuu}} \right) M_{uuu}
\end{aligned}$$

$$=1+xM_{uuu}+x^2\left(yA_{uu}+M_{uuu}-A_{uu}\right)M_{uuu}$$

και άρα

$$M_{uuu}=1+xM_{uuu}+x^2M_{uuu}^2+x^2\left(y-1\right)M_{uuu}A_{uu}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{uu}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a\in\mathcal{A}_{uh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a=u\beta d\gamma,\ \text{όπου } \beta\in\mathcal{A}_h \text{ και } \gamma\in\mathcal{M}.$$

Εξάλλου, κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta\in\mathcal{A}_h$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\beta=h\kappa,\ \text{όπου } \kappa\in\mathcal{M}.$$

Επομένως κάθε μονοπάτι Motzkin $a\in\mathcal{A}_{uh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a=uh\kappa d\gamma,\ \text{όπου } \kappa,\gamma\in\mathcal{M}.$$

Κάθε μονοπάτι Motzkin $a\in\mathcal{A}_{ud}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a=ud\gamma,\ \text{όπου } \gamma\in\mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M}=\{\varepsilon\}\cup\mathcal{A}_h\cup\mathcal{A}_u$, του συνόλου $\mathcal{A}_u=\mathcal{A}_{uu}\cup\mathcal{A}_{uh}\cup\mathcal{A}_{ud}$ αλλά και τις σχέσεις:

$$|ud\gamma|=2+|\gamma|,\ |ud\gamma|_{uuu}=|\gamma|_{uuu}$$

και

$$|uh\kappa d\gamma|=3+|\kappa|+|\gamma|,\ |uh\kappa d\gamma|_{uuu}=|\kappa|_{uuu}+|\gamma|_{uuu}$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{uu}=A_{uu}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{uu}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$A_{uu}=\sum_{a\in\mathcal{A}_{uu}}x^{|a|}y^{|a|_{uuu}}$$

$$=\sum_{a\in\mathcal{M}}x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_{uuu}}-\sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή } a=h\beta \text{ ή}\\ a=uh\kappa d\gamma \text{ ή } a=ud\gamma}}x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_{uuu}}$$

$$=\sum_{a\in\mathcal{M}}x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_{uuu}}-x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{uuu}}-\sum_{\beta\in\mathcal{M}}x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{uuu}}-\sum_{\kappa,\gamma\in\mathcal{M}}x^{|uh\kappa d\gamma|}y^{|uh\kappa d\gamma|_{uuu}}-\sum_{\gamma\in\mathcal{M}}x^{|ud\gamma|}y^{|ud\gamma|_{uuu}}$$

$$= M_{uuu} - 1 - x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{uuu}} - x^3\sum_{\kappa\in\mathcal{M}} x^{|\kappa|}y^{|\kappa|_{uuu}}\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|}y^{|\gamma|_{uuu}} - x^2\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|}y^{|\gamma|_{uuu}}$$

$$= M_{uuu} - 1 - xM_{uuu} - x^3M_{uuu}^2 - x^2M_{uuu}$$

και άρα

$$A_{uu} = (1 - x - x^2 - x^3M_{uuu})M_{uuu} - 1.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{uu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{uuu} = 1 + xM_{uuu} + x^2M_{uuu}^2 + x^2(y-1)M_{uuu}\left(\left(1 - x - x^2 - x^3M_{uuu}\right)M_{uuu} - 1\right). \qquad (2.3.1)$$

2. Το πρότυπο uuh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{uuh} = |\beta|_{uuh}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{uuh} = |\beta|_{uuh} + |\gamma|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uuh} = M_{uuh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uuh* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uuh} &= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uuh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uuh}} + \sum_{\substack{a = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uuh}} + \sum_{\substack{a = u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uuh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uuh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uuh}} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uuh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uuh} + |\gamma|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} y^{|\gamma|_{uuh}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} y^{|\gamma|_{uuh}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} + x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uuh}} \\
&= 1 + xM_{uuh} + x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} M_{uuh} \\
&= 1 + xM_{uuh} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}+1} + \sum_{\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} \right) M_{uuh} \\
&= 1 + xM_{uuh} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} y^{1} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} \right) M_{uuh} \\
&= 1 + xM_{uuh} + x^2 \left(y \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uuh}} \right) M_{uuh} \\
&= 1 + xM_{uuh} + x^2 \left(yA_{uh} + M_{uuh} - A_{uh} \right) M_{uuh}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uuh} = 1 + xM_{uuh} + x^2 M_{uuh}^2 + x^2 (y-1) M_{uuh} A_{uh}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{uh}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = u\beta d\gamma, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{A}_h \text{ και } \gamma \in \mathcal{M}.$$

Εξάλλου, κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta \in \mathcal{A}_h$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\beta = h\kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathcal{M}.$$

Επομένως κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = uh\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$|uh\kappa d\gamma| = 3 + |\kappa| + |\gamma|$$

και

$$|uh\kappa d\gamma|_{uuh} = |\kappa|_{uuh} + |\gamma|_{uuh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{uh} = A_{uh}(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{uh}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{uh} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|a|} y^{|a|_{uuh}} = \sum_{\substack{a = uh\kappa d\gamma \\ \kappa, \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uuh}} \\
&= \sum_{\kappa, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|uh\kappa d\gamma|} y^{|uh\kappa d\gamma|_{uuh}} \\
&= \sum_{\kappa, \gamma \in \mathcal{M}} x^{3+|\kappa|+|\gamma|} y^{|\kappa|_{uuh}+|\gamma|_{uuh}} \\
&= \sum_{\kappa, \gamma \in \mathcal{M}} x^3 x^{|\kappa|} x^{|\gamma|} y^{|\kappa|_{uuh}} y^{|\gamma|_{uuh}} \\
&= x^3 \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{uuh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uuh}}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_{uh} = x^3 M_{uuh}^2.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{ud} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{uuh} = 1 + xM_{uuh} + x^2 M_{uuh}^2 + x^5 (y-1) M_{uuh}^3. \qquad (2.3.2)$$

3. Το πρότυπο uud

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{uud} = |\beta|_{uud}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{uud} = |\beta|_{uud} + |\gamma|_{uud} + [\beta \in \mathcal{A}_{ud}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uud} = M_{uud}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος'' και ''αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uud* στο μονοπάτι'', ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uud} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uud}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uud}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uud}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uud}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uud}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uud}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uud}+|\gamma|_{uud}+[\beta\in\mathcal{A}_{ud}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uud}+[\beta\in\mathcal{A}_{ud}]} y^{|\gamma|_{uud}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uud}+[\beta\in\mathcal{A}_{ud}]} y^{|\gamma|_{uud}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}+[\beta\in\mathcal{A}_{ud}]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uud}} \\
&= 1 + xM_{uud} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}+[\beta\in\mathcal{A}_{ud}]} M_{uud} \\
&= 1 + xM_{uud} + x^2 \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} \right) M_{uud} \\
&= 1 + xM_{uud} + x^2 \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} y^1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} \right) M_{uud} \\
&= 1 + xM_{uud} + x^2 \left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uud}} \right) M_{uud} \\
&= 1 + xM_{uud} + x^2 \left(yA_{ud} + M_{uud} - A_{ud} \right) M_{uud}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uud} = 1 + xM_{uud} + x^2 M_{uud}^2 + x^2 (y-1) M_{uud} A_{ud}. \tag{1}$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $\mathcal{A}_{ud}$. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{ud}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = ud\gamma,\ \text{ όπου } \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$|ud\gamma| = 2 + |\gamma|,\ \ |ud\gamma|_{uud} = |\gamma|_{uud},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{ud} = A_{ud}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{ud}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned} A_{ud} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{ud}} x^{|a|} y^{|a|_{uud}} = \sum_{\substack{a = ud\gamma \\ \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uud}} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|ud\gamma|} y^{|ud\gamma|_{uud}} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\gamma|} y^{|\gamma|_{uud}} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^2 x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uud}} \\ &= x^2 \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uud}} \end{aligned}$$

και άρα

$$A_{ud} = x^2 M_{uud}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{ud} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{uud} = 1 + xM_{uud} + x^2 M_{uud}^2 + x^2 (y-1) M_{uud} x^2 M_{uud}$$

και άρα

$$M_{uud} = 1 + xM_{uud} + x^2 M_{uud}^2 + x^4 (y-1) M_{uud}^2. \tag{2.3.3}$$

4. Το πρότυπο uhu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{uhu} = |\beta|_{uhu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{uhu} = |\beta|_{uhu} + |\gamma|_{uhu} + [\beta \in \mathcal{A}_{hu}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uhu} = M_{uhu}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uhu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uhu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uhu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uhu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uhu}}\\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uhu}}\\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uhu}+|\gamma|_{uhu}+[\beta\in\mathcal{A}_{hu}]}\\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhu}+[\beta\in\mathcal{A}_{hu}]} y^{|\gamma|_{uhu}}\\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhu}+[\beta\in\mathcal{A}_{hu}]} y^{|\gamma|_{uhu}}\\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}+[\beta\in\mathcal{A}_{hu}]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uhu}}\\
&= 1 + xM_{uhu} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}+[\beta\in\mathcal{A}_{hu}]} M_{uhu}\\
&= 1 + xM_{uhu} + x^2 \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} \right) M_{uhu}\\
&= 1 + xM_{uhu} + x^2 \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} \right) M_{uhu}\\
&= 1 + xM_{uhu} + x^2 \left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} \right) M_{uhu}\\
&= 1 + xM_{uhu} + x^2 \left(yA_{hu} + M_{uhu} - A_{hu} \right) M_{uhu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uhu} = 1 + xM_{uhu} + x^2 M_{uhu}^2 + x^2 (y-1) M_{uhu} A_{hu}. \tag{1}$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{hu}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = hh\beta, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{A}_h = \{h\} \cup \mathcal{A}_{hh} \cup \mathcal{A}_{hu}$, αλλά και τις σχέσεις:

$$\left|hh\beta\right| = 2 + \left|\beta\right|, \ \left|hh\beta\right|_{uhu} = \left|\beta\right|_{uhu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{hu} = A_{hu}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{hu}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{hu} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{hu}} x^{|a|} y^{|a|_{uhu}} \\
&= \sum_{\substack{a = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_{uhu}} - \sum_{\substack{a = h \text{ ή} \\ \alpha = hh\beta, \beta \in \mathcal{M}}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_{uhu}} \\
&= xM_{uhu} - x^{|h|} y^{|h|_{uhu}} - \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|hh\beta|} y^{|hh\beta|_{uhu}} \\
&= xM_{uhu} - x - \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} \\
&= xM_{uhu} - x - x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhu}} \\
&= xM_{uhu} - x - x^2 M_{uhu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_{hu} = x\big((1-x)M_{uhu} - 1\big).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{uh} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{uhu} = 1 + xM_{uhu} + x^2 M_{uhu}^2 + x^2 (y-1) M_{uhu} x\big((1-x)M_{uhu} - 1\big)$$

και άρα

$$M_{uhu} = 1 + xM_{uhu} + x^2 M_{uhu}^2 + x^3 (y-1) M_{uhu} \big((1-x)M_{uhu} - 1\big). \qquad (2.3.4)$$

5. Το πρότυπο uhh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{uhh} = |\beta|_{uhh}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{uhh} = |\beta|_{uhh} + |\gamma|_{uhh} + [\beta \in \mathcal{A}_{hh}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uhh} = M_{uhh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος'' και ''αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uhh* στο μονοπάτι'', ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uhh} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{uhh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhh}} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uhh}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uhh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uhh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uhh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uhh}+|\gamma|_{uhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} y^{|\gamma|_{uhh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} y^{|\gamma|_{uhh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uhh}} \\
&= 1 + xM_{uhh} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} M_{uhh} \\
&= 1 + xM_{uhh} + x^{2} \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} \right) M_{uhh} \\
&= 1 + xM_{uhh} + x^{2} \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} \right) M_{uhh} \\
&= 1 + xM_{uhh} + x^{2} \left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhh}} \right) M_{uhh} \\
&= 1 + xM_{uhh} + x^{2} \left(yA_{hh} + M_{uhh} - A_{hh} \right) M_{uhh}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uhh} = 1 + xM_{uhh} + x^{2} M_{uhh}^{2} + x^{2}(y-1) M_{uhh} A_{hh}. \qquad (1)$$

Κάθε μονοπάτι Motzkin $\alpha \in \mathcal{A}_{hh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = hh\kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$|hh\kappa| = 2 + |\kappa|, \; |hh\kappa|_{uhh} = |\kappa|_{uhh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{hh} = A_{hh}(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{hh}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned} A_{hh} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{hh}} x^{|a|} y^{|a|_{uhh}} = \sum_{\substack{a = hh\kappa \\ \kappa \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{uhh}} \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|hh\kappa|} y^{|hh\kappa|_{uhh}} \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{2+|\kappa|} y^{|\kappa|_{uhh}} \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^2 x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{uhh}} \\ &= x^2 \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{uhh}} \end{aligned}$$

και άρα

$$A_{hh} = x^2 M_{uhh}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{hu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{uhh} = 1 + xM_{uhh} + x^2 M_{uhh}^2 + x^4 (y-1) M_{uhh}^2. \tag{2.3.5}$$

6. Το πρότυπο uhd

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|, \ \ |h\beta|_{uhd} = |\beta|_{uhd}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|, \ \ |u\beta d\gamma|_{uhd} = |\beta|_{uhd} + |\gamma|_{uhd} + [\beta = h],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{uhd} = M_{uhd}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *uhd* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{uhd} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_{uhd}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhd}} + \sum_{\substack{\alpha = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_{uhd}} + \sum_{\substack{\alpha = u\beta d\gamma \\ \beta, \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_{uhd}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{uhd}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{uhd}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{uhd}} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{uhd} + |\gamma|_{uhd} + [\beta = h]} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhd} + [\beta = h]} y^{|\gamma|_{uhd}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} + x^{2} \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{uhd} + [\beta = h]} y^{|\gamma|_{uhd}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} + x^{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd} + [\beta = h]} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{uhd}} \\
&= 1 + xM_{uhd} + x^{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd} + [\beta = h]} M_{uhd} \\
&= 1 + xM_{uhd} + x^{2} \left(\sum_{\beta = h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd} + 1} + \sum_{\beta \in \mathcal{M} \setminus \{h\}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} \right) M_{uhd} \\
&= 1 + xM_{uhd} + x^{2} \left(\sum_{\beta = h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} y^{1} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} - \sum_{\beta = h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} \right) M_{uhd} \\
&= 1 + xM_{uhd} + x^{2} \left(y \sum_{\beta = h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} - \sum_{\beta = h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{uhd}} \right) M_{uhd} \\
&= 1 + xM_{uhd} + x^{2} \left(xy + M_{uhd} - x \right) M_{uhd}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{uhd} = 1 + xM_{uhd} + x^{2} M_{uhd}^{2} + x^{3} (y - 1) M_{uhd}. \qquad (2.3.6)$$

7. Το πρότυπο udu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{udu} = |\beta|_{udu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{udu} = |\beta|_{udu} + |\gamma|_{udu} + [\beta = \varepsilon][\gamma \in \mathcal{A}_u],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{udu} = M_{udu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος'' και ''αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *udu* στο μονοπάτι'', ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{udu} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{udu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{udu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{udu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{udu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{udu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{udu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{udu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}+|\gamma|_{udu}+[\beta = \varepsilon][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\beta = \varepsilon][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\beta = \varepsilon][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\substack{\beta=\varepsilon,\\ \gamma\in\mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\substack{\beta\in \mathrm{M}\setminus\{\varepsilon\},\\ \gamma\in\mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\substack{\beta=\varepsilon,\\ \gamma\in\mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\substack{\beta=\varepsilon,\\ \gamma\in\mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udu}} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}+1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} y^{1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} \right) \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} + x^2 \left(y\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udu}} \right)
\end{aligned}$$

$$= 1 + xM_{udu} + x^2\left(yA_u + M_{udu} - A_u + M_{udu}^2 - M_{udu}\right)$$

και άρα

$$M_{udu} = 1 + xM_{udu} + x^2M_{udu}^2 + x^2\left(y-1\right)A_u. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_u. Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u$, και τη σχέση $\left|h\beta\right|_{udu} = \left|\beta\right|_{udu}$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{a\in\mathcal{A}_u} x^{|a|}y^{|a|_{udu}} \\
&= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_{udu}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή} \\ a=h\beta}} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_{udu}} \\
&= M_{udu} - x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_{udu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|}y^{|h\beta|_{udu}} \\
&= M_{udu} - 1 - x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_{udu}} \\
&= M_{udu} - 1 - xM_{udu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_u = \left(1-x\right)M_{uuu} - 1.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_u στην (1), έχουμε ότι

$$M_{udu} = 1 + xM_{udu} + x^2M_{udu}^2 + x^2\left(y-1\right)\left(\left(1-x\right)M_{uuu} - 1\right). \qquad (2.3.7)$$

8. Το πρότυπο udh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{udh} = |\beta|_{udh}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{udh} = |\beta|_{udh} + |\gamma|_{udh} + [\beta = \varepsilon][\gamma \in \mathcal{A}_h],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{udh} = M_{udh}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *udh* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{udh} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{udh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{udh}} + \sum_{\substack{a = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{udh}} + \sum_{\substack{a = u\beta d\gamma \\ \beta, \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{udh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{udh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{udh}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{udh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{udh} + |\gamma|_{udh} + [\beta = \varepsilon][\gamma \in \mathcal{A}_h]} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} y^{[\beta = \varepsilon][\gamma \in \mathcal{A}_h]} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} y^{[\beta = \varepsilon][\gamma \in \mathcal{A}_h]} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\substack{\beta = \varepsilon, \\ \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} y^{[\gamma \in \mathcal{A}_h]} + \sum_{\substack{\beta \in \mathrm{M} \setminus \{\varepsilon\}, \\ \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} \right) \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\substack{\beta = \varepsilon, \\ \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} y^{[\gamma \in \mathcal{A}_h]} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\substack{\beta = \varepsilon, \\ \gamma \in \mathcal{M}}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} \right) \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} y^{[\gamma \in \mathcal{A}_h]} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{udh}} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} \right) \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh} + [\gamma \in \mathcal{A}_h]} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} \right) \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh} + 1} + \sum_{\gamma \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} \right) \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} y^1 + \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} \right)
\end{aligned}$$

$$= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} + x^2 \left(y \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} + \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} - \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{udh}} \right)$$

$$= 1 + xM_{udh} + x^2 \left(yA_h + M_{udh} - A_h - M_{udh} + M_{udh}^2 \right)$$

και άρα

$$M_{udh} = 1 + xM_{udh} + x^2 M_{udh}^2 + x^2 (y-1) A_h. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_h. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in A_h$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = h\beta, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{M}.$$

Επομένως, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_h = A_h(x, y)$ του συνόλου A_h ισχύουν οι ισότητες:

$$A_h = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} x^{|a|} y^{|a|_{udh}} = \sum_{\substack{a = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{udh}}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{udh}}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{udh}}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}}$$

$$= x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{udh}}$$

και άρα

$$A_h = xM_{udh}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_h στην (1), έχουμε ότι

$$M_{udh} = 1 + xM_{udh} + x^2 M_{udh}^2 + x^3 (y-1) M_{udh}. \qquad (2.3.8)$$

9. Το πρότυπο huu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{huu} = |\beta|_{huu} + [\beta \in \mathcal{A}_{uu}]$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{huu} = |\beta|_{huu} + |\gamma|_{huu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{huu} = M_{huu}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *huu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{huu} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{huu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{huu}} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{huu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{huu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{huu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{huu} + |\gamma|_{huu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{huu}} y^{|\gamma|_{huu}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{huu}} y^{|\gamma|_{huu}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huu}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uu}]} + x^{2} M_{huu}^{2} \\
&= 1 + x \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} \right) + x^{2} M_{huu}^{2} \\
&= 1 + x \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} \right) + x^{2} M_{huu}^{2} \\
&= 1 + x \left(y \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu}} \right) + x^{2} M_{huu}^{2} \\
&= 1 + x \left(yA_{uu} + M_{huu} - A_{uu} \right) + x^{2} M_{huu}^{2}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{huu} = 1 + xM_{huu} + x^{2} M_{huu}^{2} + x(y-1)A_{uu}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{uu}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = u\beta d\gamma,\ \text{όπου } \beta \in \mathcal{A}_u \text{ και } \gamma \in \mathcal{M}.$$

Εξάλλου, κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta \in \mathcal{A}_u$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\beta = u\kappa d\lambda,\ \text{όπου } \kappa, \lambda \in \mathcal{M}.$$

Επομένως κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = uu\kappa d\lambda d\gamma,\ \text{όπου } \kappa, \lambda, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\left|uu\kappa d\lambda d\gamma\right| = 4 + |\kappa| + |\lambda| + |\gamma|,\ \left|uu\kappa d\lambda d\gamma\right|_{huu} = |\kappa|_{huu} + |\lambda|_{huu} + |\gamma|_{huu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{uu} = A_{uu}(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{uu}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{uu} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{uu}} x^{|a|} y^{|a|_{huu}} = \sum_{\substack{a = uu\kappa d\lambda d\gamma \\ \kappa,\lambda,\gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huu}} \\
&= \sum_{\kappa,\lambda,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|uu\kappa d\lambda d\gamma|} y^{|uu\kappa d\lambda d\gamma|_{huu}} \\
&= \sum_{\kappa,\lambda,\gamma \in \mathcal{M}} x^{4+|\kappa|+|\lambda|+|\gamma|} y^{|\kappa|_{huu}+|\lambda|_{huu}+|\gamma|_{huu}} \\
&= \sum_{\kappa,\lambda,\gamma \in \mathcal{M}} x^4 x^{|\kappa|} x^{|\lambda|} x^{|\gamma|} y^{|\kappa|_{huu}} y^{|\lambda|_{huu}} y^{|\gamma|_{huu}} \\
&= x^4 \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{huu}} \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} x^{|\lambda|} y^{|\lambda|_{huu}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huu}} \\
&= x^4 M_{huu} M_{huu} M_{huu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_{uu} = x^4 M_{huu}^3.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{uu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{huu} = 1 + xM_{huu} + x^2 M_{huu}^2 + x^5 (y-1) M_{huu}^3. \qquad (2.3.9)$$

10. Το πρότυπο huh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{huh} = |\beta|_{huh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{huh} = |\beta|_{huh} + |\gamma|_{huh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{huh} = M_{huh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *huh* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{huh} &= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{huh}} + \sum_{\substack{a = h\beta \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} + \sum_{\substack{a = u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{huh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{huh}} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{huh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{huh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{huh} + |\gamma|_{huh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{huh}} y^{|\gamma|_{huh}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} + x^2 \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{huh}} y^{|\gamma|_{huh}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huu} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} + x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huh}} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh} + [\beta \in \mathcal{A}_{uh}]} + x^2 M_{huh}^2 \\
&= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}+1} + \sum_{\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} \right) + x^2 M_{huh}^2 \\
&= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} y^1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} \right) + x^2 M_{huh}^2 \\
&= 1 + x \left(y \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{uh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} \right) + x^2 M_{huh}^2 \\
&= 1 + x \left(y A_{uh} + M_{huh} - A_{uh} \right) + x^2 M_{huh}^2
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{huh} = 1 + x M_{huh} + x^2 M_{huh}^2 + x(y-1) A_{uh}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{uh}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = uu\kappa d\lambda d\gamma, \text{ όπου } \kappa,\lambda,\gamma \in \mathcal{M},$$

ενώ κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta \in \mathcal{A}_{ud}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\beta = ud\gamma, \text{ όπου } \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_{uu} \cup \mathcal{A}_{uh} \cup \mathcal{A}_{ud}$ αλλά και τις σχέσεις:

$$|ud\gamma| = 2 + |\gamma|, \ |ud\gamma|_{huh} = |\gamma|_{huh}$$

και

$$|uu\kappa d\lambda d\gamma| = 4 + |\kappa| + |\lambda| + |\gamma|, \ |uu\kappa d\lambda d\gamma|_{huh} = |\kappa|_{huh} + |\lambda|_{huh} + |\gamma|_{huh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{uh} = A_{uh}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{uh}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{uh} &= \sum_{a\in\mathcal{A}_{uh}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} \\
&= \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \mu\varepsilon\ \beta,\gamma\in \mathrm{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} - \sum_{\substack{a=uu\kappa d\lambda d\gamma \text{ με } \kappa,\lambda,\gamma\in\mathcal{M} \text{ ή} \\ a=ud\gamma \text{ με } \gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{huh}} \\
&= \sum_{\beta,\gamma\in \mathrm{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{huh}} - \sum_{\kappa,\lambda,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|uu\kappa d\lambda d\gamma|} y^{|uu\kappa d\lambda d\gamma|_{huh}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|ud\gamma|} y^{|ud\gamma|_{huh}} \\
&= \sum_{\beta,\gamma\in \mathrm{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{huh}+|\gamma|_{huh}} - \sum_{\kappa,\lambda,\gamma\in\mathcal{M}} x^{4+|\kappa|+|\lambda|+|\gamma|} y^{|\kappa|_{huh}+|\lambda|_{huh}+|\gamma|_{huh}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\gamma|} y^{|\gamma|_{huh}} \\
&= x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{huh}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huh}} - x^4 \sum_{\kappa\in\mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{huh}} \sum_{\lambda\in\mathcal{M}} x^{|\lambda|} y^{|\lambda|_{huh}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huh}} - x^2 \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{huh}} \\
&= x^2 M_{huh}^2 - x^4 M_{huh}^3 - x^2 M_{huh} \\
&= x^2 M_{huh}\left(M_{huh} - x^2 M_{huh}^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{uh} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{huh} = 1 + xM_{huh} + x^2 M_{huh}^2 + x(y-1)x^2 M_{huh}\left(M_{huh} - x^2 M_{huh}^2 - 1\right)$$

και άρα

$$M_{huh} = 1 + xM_{huh} + x^2M_{huh}^2 + x^3\left(y-1\right)M_{huh}\left(\left(1 - x^2M_{huh}\right)M_{huh} - 1\right). \qquad (2.3.10)$$

11. Το πρότυπο hhu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{hhu} = |\beta|_{hhu} + [\beta \in \mathcal{A}_{hu}]$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{hhu} = |\beta|_{hhu} + |\gamma|_{hhu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{hhu} = M_{hhu}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *hhu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{hhu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hhu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hhu}} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hhu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{hhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hhu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{hhu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uh}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{hhu} + |\gamma|_{hhu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uh}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^2 x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hhu}} y^{|\gamma|_{hhu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uh}]} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hhu}} y^{|\gamma|_{hhu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uh}]} + x^2 \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hhu}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu} + [\beta\in\mathcal{A}_{uh}]} + x^2 M_{hhu}^2 \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} \right) + x^2 M_{hhu}^2 \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} y^1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} \right) + x^2 M_{hhu}^2 \\
&= 1 + x\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhu}} \right) + x^2 M_{hhu}^2 \\
&= 1 + x\left(yA_{hu} + M_{hhu} - A_{hu} \right) + x^2 M_{hhu}^2
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{hhu} = 1 + xM_{hhu} + x^2 M_{hhu}^2 + x(y-1)A_{hu}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{hu}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = h\beta, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{A}_u.$$

Εξάλλου, κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta \in \mathcal{A}_u$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\beta = u\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Επομένως κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = hu\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$|hu\kappa d\gamma| = 3 + |\kappa| + |\gamma|, \ |hu\kappa d\gamma|_{hhu} = |\kappa|_{hhu} + |\gamma|_{hhu}$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{hu} = A_{hu}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{hu}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{hu} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{hu}} x^{|a|} y^{|a|_{hhu}} = \sum_{\substack{a = hu\kappa d\gamma \\ \kappa,\gamma \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhu}} \\
&= \sum_{\kappa,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|hu\kappa d\gamma|} y^{|hu\kappa d\gamma|_{hhu}} \\
&= \sum_{\kappa,\gamma \in \mathcal{M}} x^{3+|\kappa|+|\gamma|} y^{|\kappa|_{hhu}+|\gamma|_{hhu}} \\
&= \sum_{\kappa,\gamma \in \mathcal{M}} x^3 x^{|\kappa|} x^{|\gamma|} y^{|\kappa|_{hhu}} y^{|\gamma|_{hhu}} \\
&= x^3 \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{hhu}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hhu}}
\end{aligned}$$

και άρα

$$A_{hu} = x^3 M_{hhu}^2.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{hu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{hhu} = 1 + xM_{hhu} + x^2 M_{hhu}^2 + x(y-1)x^3 M_{hhu}^2$$

και άρα

$$M_{hhu} = 1 + xM_{hhu} + x^2 M_{hhu}^2 + x^4 \left(y-1\right) M_{hhu}^2 . \qquad (2.3.11)$$

12. Το πρότυπο hhh

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$\left|h\beta\right| = 1 + \left|\beta\right|,\ \left|h\beta\right|_{hhh} = \left|\beta\right|_{hhh} + \left[\beta \in \mathcal{A}_{hh}\right]$$

και

$$\left|u\beta d\gamma\right| = 2 + \left|\beta\right| + \left|\gamma\right|,\ \left|u\beta d\gamma\right|_{hhh} = \left|\beta\right|_{hhh} + \left|\gamma\right|_{hhh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{hhh} = M_{hhh}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος'' και ''αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *hhh* στο μονοπάτι'', ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{hhh} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hhh}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hhh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{hhh}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hhh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{hhh}+|\gamma|_{hhh}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hhh}} y^{|\gamma|_{hhh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hhh}} y^{|\gamma|_{hhh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hhh}} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+[\beta\in\mathcal{A}_{hh}]} + x^{2} M_{hhh}^{2} \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} \right) + x^{2} M_{hhh}^{2} \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} y^{1} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} \right) + x^{2} M_{hhh}^{2} \\
&= 1 + x\left(y\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} - \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{hh}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} \right) + x^{2} M_{hhh}^{2} \\
&= 1 + x\left(yA_{hh} + M_{hhh} - A_{hh} \right) + x^{2} M_{hhh}^{2}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{hhh} = 1 + xM_{hhh} + x^{2}M_{hhh}^{2} + x(y-1)A_{hh}. \tag{1}$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{hh}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = h\beta, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{A}_u.$$

Εξάλλου, κάθε μονοπάτι Motzkin $\beta \in \mathcal{A}_u$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\beta = u\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Επομένως κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = hu\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u$, του συνόλου $\mathcal{A}_h = \{h\} \cup \mathcal{A}_{hu} \cup \mathcal{A}_{hh}$ αλλά και τις σχέσεις:

$$|hu\kappa d\gamma| = 3 + |\kappa| + |\gamma|, \quad |hu\kappa d\gamma|_{hhh} = |\kappa|_{hhh} + |\gamma|_{hhh},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{hh} = A_{hh}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{hh}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{hh} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{hh}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή } a=h \text{ ή} \\ a=hu\kappa d\gamma \text{ με } \kappa,\gamma\in\mathcal{M} \text{ ή} \\ a=u\beta d\gamma \text{ με } \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hhh}} \\
&= M_{hhh} - x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hhh}} - x^{|h|} y^{|h|_{hhh}} - \sum_{\kappa,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|hu\kappa d\gamma|} y^{|hu\kappa d\gamma|_{hhh}} - \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hhh}} \\
&= M_{hhh} - 1 - x - x^3 \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} x^{|\kappa|} y^{|\kappa|_{hhh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hhh}} - x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hhh}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hhh}} \\
&= M_{hhh} - 1 - x - x^3 M_{hhh}^2 - x^2 M_{hhh}^2.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{hh} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{hhh} = 1 + xM_{hhh} + x^2 M_{hhh}^2 + x(y-1)\left(M_{hhh} - 1 - x - x^2 M_{hhh}^2 - x^3 M_{hhh}^2\right)$$

και άρα

$$M_{hhh} = 1 + xM_{hhh} + x^2 M_{hhh}^2 + x(y-1)\left(\left(1 - x^2(1+x)M_{hhh}\right)M_{hhh} - x - 1\right). \qquad (2.3.11)$$

13. Το πρότυπο hdu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{hdu} = |\beta|_{hdu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{hdu} = |\beta|_{hdu} + |\gamma|_{hdu} + [\beta \in \mathcal{B}_h][\gamma \in \mathcal{A}_u],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{hdu} = M_{hdu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *hdu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{hhh} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hdu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hdu}} + \sum_{\beta\in\mathrm{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{hdu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathrm{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{hdu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathrm{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathrm{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{hdu}+|\gamma|_{hdu}+[\beta\in\mathcal{B}_h][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hdu}} y^{|\gamma|_{hdu}} y^{[\beta\in\mathcal{B}_h][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} + x^2 \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hdu}} y^{|\gamma|_{hdu}} y^{[\beta\in\mathcal{B}_h][\gamma\in\mathcal{A}_u]} \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2\left(\sum_{\beta\in\mathcal{B}_h,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hdu}} y^{|\gamma|_{hdu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{B}_h,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{hdu}} y^{|\gamma|_{hdu}} \right) \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2\left(\sum_{\beta\in\mathcal{B}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{B}_h} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} \right) \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2\left(B_h \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} y^{[\gamma\in\mathcal{A}_u]} + M_{hdu}^2 - B_h M_{hdu} \right) \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2 B_h \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} y + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} \right) + x^2 M_{hdu}^2 - x^2 B_h M_{hdu} \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2 B_h \left(y\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_u} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{hdu}} \right) + x^2 M_{hdu}^2 - x^2 B_h M_{hdu} \\
&= 1 + xM_{hdu} + x^2 B_h \left(yA_u + M_{hdu} - A_u \right) + x^2 M_{hdu}^2 - x^2 B_h M_{hdu}
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{hdu} = 1 + xM_{hdu} + x^2 M_{hdu}^2 + x^2 B_h A_u \left(y - 1 \right). \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις B_h και A_u. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{B}_h$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = \beta h, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\left|\beta h\right| = 1 + \left|\beta\right|, \ \left|\beta h\right|_{hdu} = \left|\beta\right|_{hdu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $B_h = B_h(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{B}_h$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
B_h &= \sum_{a \in \mathcal{B}_h} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} = \sum_{\substack{a = \beta h \\ \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta h|} y^{|\beta h|_{hdu}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^1 x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}} \\
&= x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}}
\end{aligned}$$

και άρα

$$B_h = xM_{hdu}.$$

Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in A_u$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$a = u\beta d\gamma, \text{ όπου } \beta, \gamma \in \mathrm{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{a \in \mathcal{A}_u} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}} - \sum_{\substack{a = \varepsilon \text{ ή} \\ a = h\beta \text{ με } \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{hdu}}
\end{aligned}$$

$$= M_{hdu} - x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{hdu}} - \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{hdu}}$$

$$= M_{hdu} - 1 - x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{hdu}}$$

$$= M_{hdu} - 1 - x M_{hdu}$$

και άρα

$$A_u = M_{hdu}(1-x) - 1.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των B_h και A_u στην (1), έχουμε ότι

$$M_{hdu} = 1 + xM_{hdu} + x^2 M_{hdu}^2 + x^2 x M_{hdu}\left(M_{hdu}(1-x) - 1\right)(y-1)$$

και άρα

$$M_{hdu} = 1 + xM_{hdu} + x^2 M_{hdu}^2 + x^3 (y-1) M_{hdu}\left((1-x)M_{hdu} - 1\right). \qquad (2.3.13)$$

14. Το πρότυπο duu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ \ |h\beta|_{duu} = |\beta|_{duu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ \ |u\beta d\gamma|_{duu} = |\beta|_{duu} + |\gamma|_{duu} + [\gamma \in \mathcal{A}_{uu}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{duu} = M_{duu}(x, y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ''μήκος'' και ''αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *duu* στο μονοπάτι'', ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{duu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{duu}} + \sum_{\substack{a=h\beta\\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma\\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{duu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{duu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{duu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{duu}+|\gamma|_{duu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{duu}} y^{|\gamma|_{duu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{duu}} y^{|\gamma|_{duu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{uu}]} \\
&= 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}+1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} \right) \\
&= 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} y^{1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} \right) \\
&= 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu} \left(y\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{uu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{duu}} \right) \\
&= 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu} \left(yA_{uu} + M_{duu} - A_{uu} \right)
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{duu} = 1 + xM_{duu} + x^{2} M_{duu}^{2} + x^{2}(y-1) M_{duu} A_{uu}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{uu}. Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_{uu} \cup \mathcal{A}_{uh} \cup \mathcal{A}_{ud}$, προκύπτει ότι

$$A_{uu} = A_u - A_{uh} - A_{ud}. \qquad (2)$$

Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{uh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = uh\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M},$$

ενώ κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hu}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = hu\kappa d\gamma, \text{ όπου } \kappa, \gamma \in \mathcal{M}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων $\mathcal{A}_{uh}$ και $\mathcal{A}_{hu}$, η οποία διατηρεί το μήκος και τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου duu. Επομένως, όπως στην απόδειξη της πρότασης 1.3.1

$$A_{uh} = A_{hu}.$$

Καθώς $a = hu\kappa d\gamma$ όπου $\kappa, \gamma \in \mathcal{M}$, άρα

$$A_{uh} = A_{hu} = xA_u.$$

Εξάλλου

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{duu}} \\
&= \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|+|ud\gamma|} y^{|\beta|_{duu}+|ud\gamma|_{duu}} \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|ud\gamma|} y^{|ud\gamma|_{duu}} \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{ud}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} \\
&= M_{duu} \cdot A_{ud},
\end{aligned}$$

οπότε

$$A_{ud} = \frac{A_u}{\mathrm{M}_{duu}}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2), έχουμε ότι

$$A_{uu} = A_u - xA_u - \frac{A_u}{\mathrm{M}_{duu}}$$

και άρα

$$A_{uu} = A_u\left(1 - x - \frac{1}{\mathrm{M}_{duu}}\right). \qquad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{M} = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{A}_h \cup \mathcal{A}_u$, προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_u = A_u(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_u$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_u &= \sum_{a \in \mathcal{A}_u} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} - \sum_{\substack{a=\varepsilon \text{ ή} \\ a=h\beta \text{ με } \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{duu}} \\
&= M_{duu} - x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{duu}} - \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{duu}} \\
&= M_{duu} - 1 - x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{duu}} \\
&= M_{duu} - 1 - xM_{duu} \\
&= (1-x)M_{duu} - 1.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (3), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A_{uu} &= \big((1-x)M_{duu} - 1\big)\left(1 - x - \frac{1}{\mathrm{M}_{duu}}\right) \\
&= \frac{\big((1-x)M_{duu} - 1\big)^2}{M_{duu}}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{uu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{duu} = 1 + xM_{duu} + x^2 M_{duu}^2 + x^2(y-1)M_{duu}\frac{\big((1-x)M_{duu} - 1\big)^2}{M_{duu}}$$

και άρα

$$M_{duu} = 1 + xM_{duu} + x^2 M_{duu}^2 + x^2(y-1)\big((1-x)M_{duu} - 1\big)^2. \qquad (2.3.14)$$

15. Το πρότυπο dhu

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση των μονοπατιών Motzkin και τις σχέσεις:

$$|h\beta| = 1 + |\beta|,\ |h\beta|_{dhu} = |\beta|_{dhu}$$

και

$$|u\beta d\gamma| = 2 + |\beta| + |\gamma|,\ |u\beta d\gamma|_{dhu} = |\beta|_{dhu} + |\gamma|_{dhu} + [\gamma \in \mathcal{A}_{hu}],$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $M_{duu} = M_{duu}(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Motzkin ως προς τις παραμέτρους ‘‘μήκος’’ και ‘‘αριθμός εμφανίσεων του προτύπου *dhu* στο μονοπάτι’’, ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
M_{dhu} &= \sum_{a\in\mathcal{M}} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} = x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{dhu}} + \sum_{\substack{a=h\beta \\ \beta\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} + \sum_{\substack{a=u\beta d\gamma \\ \beta,\gamma\in\mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} \\
&= x^{|\varepsilon|} y^{|\varepsilon|_{dhu}} + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{dhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|u\beta d\gamma|} y^{|u\beta d\gamma|_{dhu}} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1+|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2+|\beta|+|\gamma|} y^{|\beta|_{dhu}+|\gamma|_{dhu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{hu}]} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{1} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{2} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{dhu}} y^{|\gamma|_{dhu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{hu}]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} + x^{2} \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} x^{|\gamma|} y^{|\beta|_{dhu}} y^{|\gamma|_{dhu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{hu}]} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} + x^{2} \sum_{\beta\in\mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{hu}]} \\
&= 1 + xM_{dhu} + x^{2} M_{dhu} \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}+[\gamma\in\mathcal{A}_{hu}]} \\
&= 1 + xM_{dhu} + x^{2} M_{dhu} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}+1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} \right) \\
&= 1 + xM_{dhu} + x^{2} M_{dhu} \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} y^{1} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} \right) \\
&= 1 + xM_{dhu} + x^{2} M_{dhu} \left(y\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} + \sum_{\gamma\in\mathcal{M}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{hu}} x^{|\gamma|} y^{|\gamma|_{dhu}} \right) \\
&= 1 + xM_{dhu} + x^{2} M_{dhu} \left(yA_{hu} + M_{dhu} - A_{hu} \right)
\end{aligned}$$

και άρα

$$M_{dhu} = 1 + xM_{dhu} + x^{2}M_{dhu}^{2} + x^{2}(y-1)M_{dhu}A_{hu}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{hu}. Κάθε μονοπάτι Motzkin $a \in \mathcal{A}_{hh}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a = hh\beta, \text{ όπου } \beta \in \mathcal{M}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαμέριση του συνόλου $\mathcal{A}_h = \{h\} \cup \mathcal{A}_{hh} \cup \mathcal{A}_{hu}$, αλλά και τις σχέσεις:

$$\left|hh\beta\right| = 2 + \left|\beta\right|, \quad \left|hh\beta\right|_{dhu} = \left|\beta\right|_{dhu},$$

προκύπτει ότι για τη γεννήτρια συνάρτηση $A_{hu} = A_{hu}(x,y)$ του συνόλου $\mathcal{A}_{hu}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}
A_{hu} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_{hu}} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}_h} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} - \sum_{\substack{a = h \text{ ή} \\ a = hh\beta \text{ με } \beta \in \mathcal{M}}} x^{|a|} y^{|a|_{dhu}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|h\beta|} y^{|h\beta|_{dhu}} - x^{|h|} y^{|h|_{dhu}} - \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|hh\beta|} y^{|hh\beta|_{dhu}} \\
&= x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} - x - x^2 \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_{dhu}} \\
&= xM_{dhu} - x - x^2 M_{dhu} \\
&= x\left((1-x)M_{dhu} - 1\right).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της A_{hu} στην (1), έχουμε ότι

$$M_{dhu} = 1 + xM_{dhu} + x^2 M_{dhu}^2 + x^2 (y-1) M_{dhu} x\left((1-x)M_{dhu} - 1\right)$$

και άρα

$$M_{dhu} = 1 + xM_{dhu} + x^2 M_{dhu}^2 + x^3 (y-1) M_{dhu} \left((1-x)M_{dhu} - 1\right). \qquad (2.3.15)$$

Συνοπτικά, έχουμε:

Πρότυπο	Γεννήτρια Συνάρτηση
uu	$M_{uu}=1+xM_{uu}-x^2M_{uu}^2+x^2\left(y-1\right)M_{uu}\left(\left(1-x\right)M_{uu}-1\right)$
uh	$M_{uh}=1+xM_{uh}+x^2M_{uh}^2+x^3\left(y-1\right)M_{uh}^2$
ud	$M_{ud}=1+xM_{ud}+x^2M_{ud}^2+x^2\left(y-1\right)M_{ud}$
hu	$M_{hu}=1+xM_{hu}+x^2M_{hu}^2+x^3\left(y-1\right)M_{hu}^2$
hh	$M_{hh}=1+xM_{hh}+x^2M_{hh}^2+x\left(y-1\right)\left(\left(1-x^2M_{hh}\right)M_{hh}-1\right)$
du	$M_{du}=1+xM_{du}+x^2M_{du}^2+x^2\left(y-1\right)M_{du}\left(\left(1-x\right)M_{du}-1\right)$

Πρότυπο	Γεννήτρια Συνάρτηση
uuu	$M_{uuu}=1+xM_{uuu}+x^2M_{uuu}^2+x^2\left(y-1\right)M_{uuu}\left(\left(1-x-x^2-x^3M_{uuu}\right)M_{uuu}-1\right)$
uuh	$M_{uuh}=1+xM_{uuh}+x^2M_{uuh}^2+x^5\left(y-1\right)M_{uuh}^3$
uud	$M_{uud}=1+xM_{uud}+x^2M_{uud}^2+x^4\left(y-1\right)M_{uud}^2$
uhu	$M_{uhu}=1+xM_{uhu}+x^2M_{uhu}^2+x^3\left(y-1\right)M_{uhu}\left(\left(1-x\right)M_{uhu}-1\right)$
uhh	$M_{uhh}=1+xM_{uhh}+x^2M_{uhh}^2+x^4\left(y-1\right)M_{uhh}^2$
uhd	$M_{uhd}=1+xM_{uhd}+x^2M_{uhd}^2+x^3\left(y-1\right)M_{uhd}$
udu	$M_{udu}=1+xM_{udu}+x^2M_{udu}^2+x^2\left(y-1\right)\left(\left(1-x\right)M_{uuu}-1\right)$
udh	$M_{udh}=1+xM_{udh}+x^2M_{udh}^2+x^3\left(y-1\right)M_{udh}$
huu	$M_{huu}=1+xM_{huu}+x^2M_{huu}^2+x^5\left(y-1\right)M_{huu}^3$
huh	$M_{huh}=1+xM_{huh}+x^2M_{huh}^2+x^3\left(y-1\right)M_{huh}\left(\left(1-x^2M_{huh}\right)M_{huh}-1\right)$
hhu	$M_{hhu}=1+xM_{hhu}+x^2M_{hhu}^2+x^4\left(y-1\right)M_{hhu}^2$
hhh	$M_{hhh}=1+xM_{hhh}+x^2M_{hhh}^2+x\left(y-1\right)\left(\left(1-x^2\left(1+x\right)M_{hhh}\right)M_{hhh}-x-1\right)$
hdu	$M_{hdu}=1+xM_{hdu}+x^2M_{hdu}^2+x^3\left(y-1\right)M_{hdu}\left(\left(1-x\right)M_{hdu}-1\right)$
duu	$M_{duu}=1+xM_{duu}+x^2M_{duu}^2+x^2\left(y-1\right)\left(\left(1-x\right)M_{duu}-1\right)^2$
dhu	$M_{dhu}=1+xM_{dhu}+x^2M_{dhu}^2+x^3\left(y-1\right)M_{dhu}\left(\left(1-x\right)M_{dhu}-1\right)$

2.4. Επίλυση εξισώσεων γεννητριών συναρτήσεων

Στη παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε τις εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων που βρέθηκαν για κάθε πρότυπο μήκους 2 και 3. Η επίλυσή τους θα γίνει με τη χρήση του θεωρήματος αντιστροφής Lagrange, μέσω του οποίου θα βρεθεί ο συντελεστής $\left[x^n y^k\right]$ της εξεταζόμενης γεννήτριας συνάρτησης.

Λόγω του όγκου των πράξεων αλλά και καθώς η εύρεση του τύπου για κάθε γεννήτρια συνάρτηση $M(x,y)$ ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, θα επιλυθούν ενδεικτικά 3 εξισώσεις γεννητριών συναρτήσεων προτύπων μήκους 2 – οι εξισώσεις των $M_{uu}(x,y),\ M_{ud}(x,y),\ M_{hh}(x,y)$ – και 1 εξίσωση γεννήτριας συνάρτησης προτύπου μήκους 3 – η εξίσωση της $M_{uhd}(x,y)$.

1. Επίλυση της εξίσωσης της γεννήτριας συνάρτησης M_{uu}

Όπως είδαμε:

$$M_{uu} = 1 + xM_{uu} + x^2 M_{uu}^2 + x^2\left(y-1\right)M_{uu}\left(\left(1-x\right)M_{uu}-1\right).$$

Αν τεθεί $H(\lambda) = \left(1+x\left(1-y\right)\right)\lambda + x\left(y+x\left(1-y\right)\right)\lambda^2,$ παρατηρούμε ότι:

$$M_{uu}(x,y) = 1 + xH\left(M_{uu}(x,y)\right),$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής του Langrange, θα ισχύει:

$$\left[x^m\right]M_{ud}(x,y) = \frac{1}{m}\left[\lambda^{m-1}\right]H^m(1+\lambda).$$

Είναι

$$H(1+\lambda) = \left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right) + x\left(y+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2,$$

και επομένως

$$H^m(1+\lambda) = \left(\left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right) + x\left(y+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2\right)^m$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(\left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)\right)^{m-a}\left(x\left(y+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2\right)^a$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(1+x\left(1-y\right)\right)^{m-a}\left(1+\lambda\right)^{m-a}x^a\left(y+x\left(1-y\right)\right)^a\left(1+\lambda\right)^{2a}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(1+x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^a\left(y+x\left(1-y\right)\right)^a\left(1+\lambda\right)^{m+a}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{m} \binom{m}{a} \left(1 + x(1-y)\right)^{m-a} x^{a} \left(y + x(1-y)\right)^{a} \sum_{b=0}^{m+a} \binom{m+a}{b} \lambda^{b},$$

οπότε

$$H^{m}(1+\lambda) = \sum_{b=0}^{2m} \sum_{a=(b-m)^{+}}^{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{b} \left(1 + x(1-y)\right)^{m-a} x^{a} \left(y + x(1-y)\right)^{a} \lambda^{b}.$$

Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του λ^{m-1} στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου $H^{m}(1+\lambda)$ είναι:

$$\sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \left(1 + x(1-y)\right)^{m-a} x^{a} \left(y + x(1-y)\right)^{a}.$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$M_{uu}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[x^m\right] M_{uu}(x,y)\, x^m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{n-1} \left(1 + x(1-y)\right)^{m-a} x^{a} \left(y + x(1-y)\right)^{a} \right) x^{m}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \left(1 + x(1-y)\right)^{m-a} x^{m+a} \left(y + x(1-y)\right)^{a}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \sum_{c=0}^{m-a} \binom{m-a}{c} x^{c} (1-y)^{c} x^{m+a} \sum_{d=0}^{a} \binom{a}{d} y^{a-d} x^{d} (1-y)^{d}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \sum_{c=0}^{m-a} \sum_{d=0}^{a} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \binom{m-a}{c} \binom{a}{d} x^{c} (1-y)^{c} x^{m+a} y^{a-d} x^{d} (1-y)^{d}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \sum_{c=0}^{m-a} \sum_{d=0}^{a} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \binom{m-a}{c} \binom{a}{d} x^{m+a+c+d} (1-y)^{c+d} y^{a-d}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \sum_{c=0}^{m-a} \sum_{d=0}^{a} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \binom{m-a}{c} \binom{a}{d} x^{m+a+c+d} \sum_{r=0}^{c+d} \binom{c+d}{r} (-y)^{r} y^{a-d}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \sum_{c=0}^{m-a} \sum_{d=0}^{a} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \binom{m-a}{c} \binom{a}{d} x^{m+a+c+d} \sum_{r=0}^{c+d} \binom{c+d}{r} y^{a+r-d} (-1)^{r}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{m} \sum_{c=0}^{m-a} \sum_{d=0}^{a} \sum_{r=0}^{c+d} \frac{1}{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \binom{m-a}{c} \binom{a}{d} \binom{c+d}{r} (-1)^{r} x^{m+a+c+d} y^{a+r-d}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{d=0}^{a}\sum_{r=0}^{c+d}(-1)^r\frac{(m+a)!}{(a+1)!c!(m-a-c)!(a-d)!d!}\binom{c+d}{r}x^{m+a+c+d}y^{a+r-d}.$$

Αν τεθούν $n=m+a+c+d,\ k=a+r-d,\ i=a+c,$ και $j=a-d$ προκύπτει ότι

$$M_{uu}(x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{k}\sum_{d=0}^{\min\{i-j,n-2i\}}(-1)^{k-j}\frac{(n-i+j)!}{(j+d+1)!(i-j-d)!(n-2i-d)!j!d!}\cdot\binom{i-j}{k-j}x^ny^k$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{k}\sum_{d=0}^{\min\{i-j,n-2i\}}(-1)^{k-j}\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(n-2i)!}\frac{(n-i+j)!}{j!}\cdot\frac{(i+1)!}{(j+d+1)!(i-j-d)!}\frac{(n-2i)!}{(n-2i-d)!d!}\binom{i-j}{k-j}x^ny^k$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{k}\sum_{d=0}^{\min\{i-j,n-2i\}}(-1)^{k-j}\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(n-2i)!}\frac{(n-i+j)!}{j!}\cdot\binom{i+1}{i-j-d}\binom{n-2i}{d}\binom{i-j}{k-j}x^ny^k.$$

Επομένως, για $n\geq 1$ θα είναι

$$\left[x^ny^k\right]M_{uu}=\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{1}{(n-2i)!(i+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{i-j}{k-j}\frac{(n-i+j)!}{j!}\sum_{d=0}^{i-j}\binom{i+1}{i-j-d}\binom{n-2i}{d}$$

$$\overset{(1)}{=}\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{1}{(n-2i)!(i+1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{i-j}{k-j}\frac{(n-i+j)!}{j!}\binom{n-i+1}{i-j}$$

$$=\sum_{i=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(n-i+1)!}{(n-2i)!(i+1)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{(n-i+j)!}{(k-j)!j!(n-2i+j+1)!}$$

[1]Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα Vandermonde: $\sum_{d=0}^{\mu}\binom{\alpha}{\mu-d}\binom{\beta}{d}=\binom{\alpha+\beta}{\mu}$ (Ταυτότ 3.1 στο [5]).

$$=\sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-i+1}{i+1}\binom{i}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{(n-i+j)!}{(n-2i+j+1)!i!}\ .$$

Για τον πρώτο όρο του προηγούμενου αθροίσματος (δηλαδή για $i=k$) διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $k=0$, τότε ο πρώτος όρος ισούται με

$$\binom{n+1}{1}\binom{0}{0}\sum_{j=0}^{0}(-1)^{-j}\frac{(n+j)!}{(n+j+1)!}$$

$$=(n+1)\frac{1}{n+1}$$

$$=1.$$

2. Αν $k\geq 1$ τότε:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{(n-i+j)!}{(n-2i+j+1)!i!}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\binom{n-k+j}{k-1}$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{k}\binom{n-k}{n-k+1}$$

$$=0,$$

οπότε ο πρώτος όρος ισούται με 0.

Κατόπιν τούτου είναι:

$$\left[x^n y^k\right]M_{uu}=\sum_{i=k+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{i}\binom{n-i+1}{i+1}\binom{i}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\binom{n-i+j}{i-1}+\delta_{k,0}$$

[2]Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα: $\sum_{\nu=(-\mu)^{+}}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\binom{n+\mu+\nu}{k}=\binom{n+\mu}{k+\mu}$ (Ταυτ. 3.48 στο [5]).

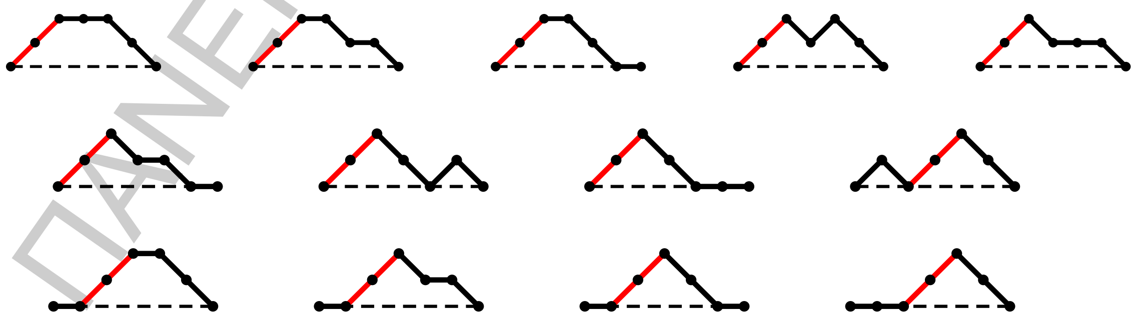
και άρα[3]

$$\left[x^n y^k\right] M_{uu} = \sum_{i=k+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{i} \binom{n-i+1}{i+1} \binom{i}{k} \binom{n-i}{i-k-1} + \delta_{k,0}. \qquad (2.4.1)$$

Παράδειγμα 1. Για να υπολογίσουμε το μήκος των μονοπατιών μήκους 6 με 1 εμφάνιση του προτύπου *uu*, έχουμε από την σχέση (2.4.1) για $n=6$ και $k=1$:

$$\begin{aligned}
\left[x^6 y^1\right] M_{uu} &= \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{i} \binom{6-i+1}{i+1} \binom{i}{1} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{1-j} \binom{1}{j} \binom{6-i+j}{i-1} + \delta_{1,0} \\
&= \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{i} \binom{6-i+1}{i+1} \binom{i}{1} \left((-1)^1 \binom{1}{0} \binom{6-i}{i-1} + (-1)^0 \binom{1}{1} \binom{6-i+1}{i-1} \right) \\
&= \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{i} \binom{6-i+1}{i+1} \binom{i}{1} \left(\binom{6-i+1}{i-1} - \binom{6-i}{i-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \binom{6-2+1}{2+1} \binom{2}{1} \left(\binom{6-2+1}{2-1} - \binom{6-2}{2-1} \right) + \frac{1}{3} \binom{6-3+1}{3+1} \binom{3}{1} \left(\binom{6-3+1}{3-1} - \binom{6-3}{3-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \binom{5}{3} \binom{2}{1} \left(\binom{5}{1} - \binom{4}{1} \right) + \frac{1}{3} \binom{4}{4} \binom{3}{1} \left(\binom{4}{2} - \binom{3}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot (5-4) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot (6-3) = 10 + 3 = 13.
\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν 13 μονοπάτια μήκους 6 και με 1 εμφάνιση του προτύπου *uu*, τα οποία απεικονίζονται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Μονοπάτια Motzkin μήκους 6 με 1 εμφάνιση του προτύπου *uu*

[3]Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα: $\sum_{\nu=(-\mu)^+}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \binom{n+\mu+\nu}{k} = \binom{n+\mu}{k+\mu}$ (Ταυτ. 3.48 στο [5]).

Πίνακας 2.1: Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας (2.4.1)

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	8	17	37	82	185	423	978
1	–	0	0	1	4	13	40	116	326	899
2	–	–	0	0	0	1	5	21	80	279
3	–	–	–	0	0	0	0	1	6	31
4	–	–	–	–	0	0	0	0	0	1

2. Επίλυση της εξίσωσης της γεννήτριας συνάρτησης M_{ud}

Όπως είδαμε:

$$M_{ud} = 1 + xM_{ud} + x^2 M_{ud}^2 + x^2\left(y-1\right)M_{ud}.$$

Αν τεθεί $H\left(\lambda\right) = \left(1 + x\left(y-1\right)\right)\lambda + x\lambda^2$, παρατηρούμε ότι:

$$M_{ud}\left(x,y\right) = 1 + xH\left(M_{ud}\left(x,y\right)\right),$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής του Langrange, θα ισχύει:

$$\left[x^m\right]M_{ud}\left(x,y\right) = \frac{1}{m}\left[\lambda^{m-1}\right]H^m\left(1+\lambda\right).$$

Είναι

$$H\left(1+\lambda\right) = \left(1 - x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right) + x\left(1+\lambda\right)^2,$$

και επομένως

$$\begin{aligned} H^m\left(1+\lambda\right) &= \left(\left(1 - x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right) + x\left(1+\lambda\right)^2\right)^m \\ &= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(\left(1 - x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)\right)^{m-a}\left(x\left(1+\lambda\right)^2\right)^a \\ &= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(1 - x\left(1-y\right)\right)^{m-a}\left(1+\lambda\right)^{m-a}x^a\left(1+\lambda\right)^{2a} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(1 - x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^a\left(1+\lambda\right)^{m+a} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{a}\left(1 - x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^a\sum_{b=0}^{m+a}\binom{m+a}{b}\lambda^b, \end{aligned}$$

οπότε

$$H^m\left(1+\lambda\right) = \sum_{b=0}^{2m}\sum_{a=(b-m)^+}^{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{b}\left(1 - x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^a\lambda^b.$$

Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του λ^{m-1} στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου $H^{m}\left(1+\lambda\right)$ είναι:

$$\sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\left(1-x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^{a}.$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$\begin{aligned}
M_{ud}\left(x,y\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m = 1+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^m\right]M_{ud}\left(x,y\right)x^m \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\left(1-x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^{a}\right)x^{m} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\left(1-x\left(1-y\right)\right)^{m-a}x^{m+a} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\sum_{c=0}^{m-a}\binom{m-a}{c}\left(-x\right)^{c}\left(1-y\right)^{c}x^{m+a} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}\left(-1\right)^{c}x^{m+a+c}\left(1-y\right)^{c} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}\left(-1\right)^{c}x^{m+a+c}\sum_{k=0}^{c}\binom{c}{d}\left(-y\right)^{k} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}\binom{c}{k}\left(-1\right)^{c+k}x^{m+a+c}y^{k} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}\left(-1\right)^{c+k}\frac{\left(m+a\right)!}{a!\left(a+1\right)!\left(m-a-c\right)!k!\left(c-k\right)!}x^{m+a+c}y^{k} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}\left(-1\right)^{c+k}\frac{1}{m}\frac{m!}{\left(m-a-c\right)!\left(a+c\right)!}\frac{\left(a+c\right)!}{\left(a+c-k\right)!k!}\cdot \\
&\quad\frac{\left(m+a\right)!}{\left(a+1\right)!\left(m-1\right)!}\frac{\left(a+c-k\right)!}{a!\left(c-k\right)!}x^{m+a+c}y^{k} \\
&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}\left(-1\right)^{c+k}\frac{1}{m}\binom{m}{a+c}\binom{a+c}{k}\binom{m+a}{m-1}\binom{a+c-k}{c-k}x^{m+a+c}y^{k}.
\end{aligned}$$

Αν τεθούν $n = m + a + c$, $i = a + c$ και $j = c - k$ προκύπτει ότι

$$M_{ud}(x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{i=d}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{c=k}^{i} (-1)^{c+k} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{i}{k} \binom{n-c}{n-i-1} \binom{i-k}{c-k} x^n y^k .$$

Επομένως, για $n \geq 1$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\left[x^n y^k\right] M_{ud} &= \sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{i}{k} \sum_{c=k}^{i} (-1)^{c+k} \binom{n-c}{n-i-1} \binom{i-k}{c-k} \\
&= \sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{i}{k} \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^{j} \binom{n-k-j}{n-i-1} \binom{i-k}{j} \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{i}{k} \binom{n-i}{n-2i+k-1}
\end{aligned}$$

και τελικά

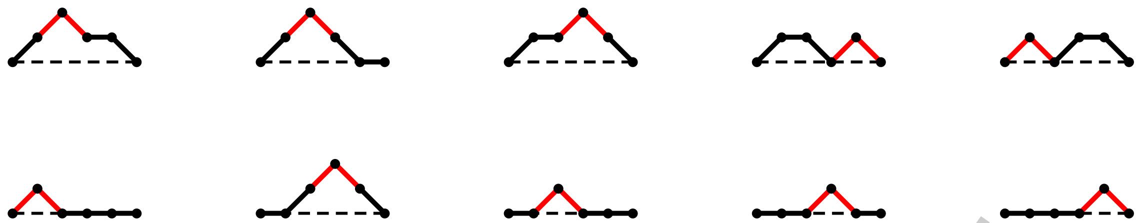
$$\left[x^n y^k\right] M_{ud} = \sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{i}{k} \binom{n-i}{i-k+1}. \qquad (2.4.2)$$

Παράδειγμα 2. Για να υπολογίσουμε το μήκος των μονοπατιών μήκους 5 με 1 εμφάνιση του προτύπου ud, έχουμε από την σχέση (2.4.2) για $n = 5$ και $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\left[x^5 y^1\right] M_{ud} &= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{5-i} \binom{5-i}{i} \binom{i}{1} \binom{5-i}{i-1+1} \\
&= \frac{1}{4} \binom{4}{1} \binom{1}{1} \binom{4}{1} + \frac{1}{3} \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{3}{2} = 4 + 6 = 10.
\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν 10 μονοπάτια μήκους 5 και με 1 εμφάνιση του προτύπου ud, τα οποία απεικονίζονται στο σχήμα 2.2:

[4]Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα: $= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{r} = \binom{x-n}{r-n}$ (Ταυτ. 3.49 στο [5]).



Σχήμα 2.2 Μονοπάτια Motzkin μήκους 5 με 1 εμφάνιση του προτύπου *ud*

Πίνακας 2.2: Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας (2.4.2)

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	2	4	8	17	37	82	185	423
1	–	1	2	4	10	24	58	143	354	881
2	–	–	0	1	3	9	28	81	231	653
3	–	–	–	0	0	1	4	16	60	205
4	–	–	–	–	0	0	0	1	5	25

3. Επίλυση της εξίσωσης της γεννήτριας συνάρτησης M_{hh}

Όπως είδαμε:

$$M_{hh} = 1 + xM_{hh} + x^2 M_{hh}^2 + x\left(y-1\right)\left(\left(1-x^2 M_{hh}\right)M_{hh} - 1\right).$$

Αν τεθεί $H\left(\lambda\right) = \left(1-y\right) + y\lambda + x\left(1+x\left(1-y\right)\right)\lambda^2$, παρατηρούμε ότι:

$$M_{hh}\left(x,y\right) = 1 + xH\left(M_{hh}\left(x,y\right)\right),$$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής του Langrange θα ισχύει:

$$\left[x^m\right]M_{hh}\left(x,y\right) = \frac{1}{m}\left[\lambda^{m-1}\right]H^m\left(1+\lambda\right).$$

Είναι

$$H\left(1+\lambda\right) = \left(1-y\right) + y\left(1+\lambda\right) + x\left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2,$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
H^m\left(1+\lambda\right) &= \left(\left(1-y\right) + y\left(1+\lambda\right) + x\left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2\right)^m \\
&= \sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\left(\left(1-y\right)+y\left(1+\lambda\right)\right)^{m-a}\left(x\left(1+x\left(1-y\right)\right)\left(1+\lambda\right)^2\right)^a \\
&= \sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\left(\left(1-y\right)+y\left(1+\lambda\right)\right)^{m-a} x^a\left(1+x\left(1-y\right)\right)^a\left(1+\lambda\right)^{2a} \\
&= \sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\sum_{b=0}^{m-a}\binom{m-a}{b}\left(1-y\right)^{m-a-b} y^b\left(1+\lambda\right)^b x^a\left(1+x\left(1-y\right)\right)^a\left(1+\lambda\right)^{2a} \\
&= \sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{m-a}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\left(1-y\right)^{m-a-b} x^a y^b\left(1+x\left(1-y\right)\right)^a\left(1+\lambda\right)^{2a+b} \\
&= \sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{m-a}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\left(1-y\right)^{m-a-b} x^a y^b\left(1+x\left(1-y\right)\right)^a\sum_{s=0}^{2a+b}\binom{2a+b}{s}\lambda^s \\
&= \sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{m-a}\sum_{s=0}^{2a+b}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{s}\left(1-y\right)^{m-a-b} x^a y^b\left(1+x\left(1-y\right)\right)^a\lambda^s,
\end{aligned}$$

οπότε

$$H^m(1+\lambda)=\sum_{s=0}^{2m}\sum_{a=(s-m)^+}^{m}\sum_{b=(s-2a)^+}^{m-a}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{s}(1-y)^{m-a-b}x^a y^b\left(1+x(1-y)\right)^a\lambda^s.$$

Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του λ^{m-1} στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου $H^m(1+\lambda)$ είναι:

$$\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(s-2a)^+}^{m-a}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}(1-y)^{m-a-b}x^a y^b\left(1+x(1-y)\right)^a.$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$M_{hh}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^m\right]M_{uh}(x,y)x^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}(1-y)^{m-a-b}x^a y^b\left(1+x(1-y)\right)^a\right)x^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}(1-y)^{m-a-b}x^{m+a}y^b\left(1+x(1-y)\right)^a$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}(1-y)^{m-a-b}x^{m+a}y^b\sum_{c=0}^{a}\binom{a}{c}\left(x(1-y)\right)^c$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\sum_{c=0}^{a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}\binom{a}{c}(1-y)^{m-a-b+c}x^{m+a+c}y^b$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\sum_{c=0}^{a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}\binom{a}{c}\sum_{d=0}^{m-a-b+c}\binom{m-a-b+c}{d}(-y)^d x^{m+a+c}y^b$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=(m-2a-1)^+}^{m-a}\sum_{c=0}^{a}\sum_{d=0}^{m-a-b+c}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}\binom{a}{c}\binom{m-a-b+c}{d}(-1)^d x^{m+a+c}y^{b+d}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{m-a}\sum_{c=0}^{a}\sum_{d=0}^{m-a-b+c}\frac{(-1)^d}{m}\binom{m}{a}\binom{m-a}{b}\binom{2a+b}{m-1}\binom{a}{c}\binom{m-a-b+c}{d}x^{m+a+c}y^{b+d}.$$

Αν τεθούν $n=m+a+c$ και $k=b+d$ προκύπτει ότι

$$M_{hh}(x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\sum_{b=(n-4a-1)^+}^{k}\sum_{c=0}^{a}\frac{(-1)^{k-b}}{n-a-c}\binom{n-a-c}{a}\binom{n-2a-c}{b}\cdot\binom{2a+b}{n-a-c-1}\binom{a}{c}\binom{n-2a-b}{k-b}x^n y^k,$$

οπότε για $n\geq 1$ προκύπτει ότι

$$\left[x^n y^k\right]M_{hh}=\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\sum_{b=(n-4a-1)^+}^{k}(-1)^{k-b}\frac{(2a+b)!}{b!(n-2a-b)!(4a+b-n+1)!}\binom{n-2a-b}{k-b}\cdot\sum_{c=0}^{a}\binom{n-2a-b}{c}\binom{4a+b-n+1}{a-c}$$

$$\overset{(5)}{=}\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{1}{(n-2a-k)!}\sum_{b=(n-4a-1)^+}^{k}(-1)^{k-b}\frac{(2a+b)!}{(k-b)!b!(4a+b-n+1)!}\binom{2a+1}{a}$$

$$=\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\binom{2a+1}{a}\frac{(n-2a-1)!}{(n-2a-k)!k!}\sum_{b=(n-4a-1)^+}^{k}(-1)^{k-b}\binom{k}{b}\binom{2a+b}{4a-n+b+1}$$

$$\overset{(6)}{=}\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{1}{n-2a}\binom{n-2a}{k}\binom{2a+1}{a}\binom{2a}{4a-n+k+1}$$

και τελικά

$$\left[x^n y^k\right]M_{hh}=\sum_{a=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\binom{2a+1}{n-2a-k}\binom{n-2a-1}{k}C_a. \qquad (2.4.3)$$

---

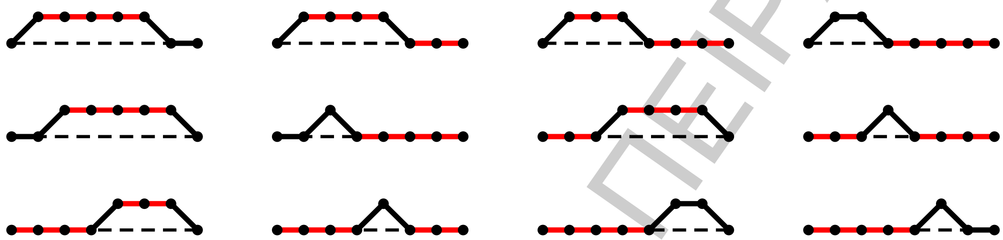
[5] Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα Vandermonde: $\sum_{d=0}^{\mu}\binom{\alpha}{\mu-d}\binom{\beta}{d}=\binom{\alpha+\beta}{\mu}$ (Ταυτότ 3.1 στο [5]).

[6] Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα: $\sum_{\nu=(-\mu)^+}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\binom{n+\mu+\nu}{\mu+\nu}=\binom{n+\mu}{k+\mu}$ [13].

Παράδειγμα 3. Για να υπολογίσουμε το μήκος των μονοπατιών μήκους 7 με 3 εμφανίσεις του προτύπου *hh*, έχουμε από την σχέση (2.4.3) για $n=7$ και $k=3$:

$$
\begin{aligned}
\left[x^7y^3\right]M_{hh} &= \sum_{a=0}^{2}\binom{2a+1}{4-2a}\binom{6-2a}{3}C_a \\
&= \binom{1}{4}\binom{6}{3}C_0+\binom{3}{2}\binom{4}{3}C_1+\binom{5}{0}\binom{2}{3}C_2=0+3\cdot 4\cdot 1+0=12.
\end{aligned}
$$

Επομένως υπάρχουν 12 μονοπάτια μήκους 7 και με 3 εμφανίσεις του προτύπου *hh*, τα οποία απεικονίζονται στο σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3: Μονοπάτια Motzkin μήκους 7 με 3 εμφανίσεις του προτύπου *hh*

Πίνακας 2.3: Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας (2.4.3)

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	3	5	11	25	55	129	303	721
1	–	1	0	3	6	13	40	95	250	661
2	–	–	1	0	3	9	16	60	155	415
3	–	–	–	1	0	3	12	20	80	235
4	–	–	–	–	1	0	3	15	25	100

4. Επίλυση της εξίσωσης της γεννήτριας συνάρτησης M_{uhd}

Όπως είδαμε:

$$M_{uhd} = 1 + xM_{uhd} + x^2 M_{uhd}^2 + x^3 (y-1) M_{uhd}.$$

Αν τεθεί $H(\lambda) = \lambda\left(x\lambda + 1 + x^2(y-1)\right)$, παρατηρούμε ότι

$$M_{uhd}(x,y) = 1 + xH\left(M_{uhd}(x,y)\right),$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής του Langrange, θα ισχύει:

$$\left[x^m\right] M_{uhd}(x,y) = \frac{1}{m}\left[\lambda^{m-1}\right] H^m(1+\lambda).$$

Είναι

$$H(1+\lambda) = (1+\lambda)\left(x(1+\lambda) + 1 + x^2(y-1)\right),$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
H^m(1+\lambda) &= \left((1+\lambda)\left(x(1+\lambda)+1+x^2(y-1)\right)\right)^m \\
&= (1+\lambda)^m \left(x(1+\lambda)+1+x^2(y-1)\right)^m \\
&= \sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} x^a \left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a} (1+\lambda)^{m+a} \\
&= \sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} x^a \left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a} \sum_{b=0}^{m+a} \binom{m+a}{b} \lambda^b \\
&= \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=0}^{m+a} \binom{m}{a} \binom{m+a}{b} \left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a} x^a \lambda^b,
\end{aligned}$$

οπότε

$$H^m(1+\lambda) = \sum_{b=0}^{2m} \sum_{a=(b-m)^+}^{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{b} \left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a} x^a \lambda^b.$$

Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του λ^{m-1} στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου $H^m(1+\lambda)$ είναι:

$$\sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} \binom{m+a}{m-1} \left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a} x^a.$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης έχουμε:

$$M_{uhd}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^m\right]M_{uu}(x,y)x^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a}x^a\right)x^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\left(1+x^2(y-1)\right)^{m-a}x^{m+a}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\sum_{c=0}^{m-a}\binom{m-a}{c}\left(x^2(y-1)\right)^{c}x^{m+a}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}(y-1)^{c}x^{m+a+2c}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\frac{1}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}\sum_{k=0}^{c}\binom{c}{k}(-1)^{c-k}x^{m+a+2c}y^k$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}\frac{(-1)^{c-k}}{m}\binom{m}{a}\binom{m+a}{m-1}\binom{m-a}{c}\binom{c}{k}x^{m+a+2c}y^k$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{c-k}\frac{(m+a)!}{a!(a+1)!(m-a-c)!k!(c-k)!}x^{m+a+2c}y^k$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{c-k}\frac{(2a)!}{a!(a+1)!}\frac{(m+a)!}{(2a)!(m-a)!}\frac{(m-a)!}{(m-a-k)!k!}\cdot$$

$$\frac{(m-a-k)!}{(m-a-c)!(c-k)!}x^{m+a+2c}y^k$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{m}\sum_{c=0}^{m-a}\sum_{k=0}^{c}(-1)^{c-k}C_a\binom{m+a}{2a}\binom{m-a}{k}\binom{m-a-k}{m-a-c}x^{m+a+2c}y^k.$$

Αν τεθούν $n=m+a+2c$ και $i=a+c$ προκύπτει ότι

$$M_{uhd}(x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{i=k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\sum_{c=k}^{\min\{i,n-2i\}}(-1)^{c-k}C_{i-c}\binom{n-2c}{2(i-c)}\binom{n-2i}{k}\cdot$$

$$\binom{n-2i-k}{n-2i-c}x^n y^k.$$

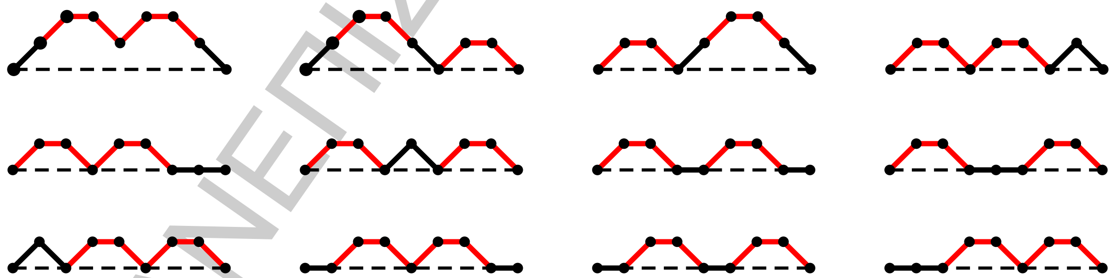
Επομένως για $n \geq 1$ θα είναι

$$\left[x^n y^k\right] M_{uhd} = \sum_{i=k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-2i}{k} \sum_{c=k}^{\min\{i,n-2i\}} (-1)^{c-k} C_{i-c} \binom{n-2c}{2(i-c)} \binom{n-2i-k}{c-k}. \qquad (2.4.4)$$

Παράδειγμα 3. Για να υπολογίσουμε το μήκος των μονοπατιών μήκους 8 με 2 εμφανίσεις του προτύπου *uhd*, έχουμε από την σχέση (2.4.4) για $n=8$ και $k=2$:

$$\begin{aligned}
\left[x^8 y^2\right] M_{uhd} &= \sum_{i=2}^{3} \binom{8-2i}{2} \sum_{c=2}^{\min\{i,8-2i\}} (-1)^{c-2} C_{i-c} \binom{8-2c}{2(i-c)} \binom{6-2i}{c-2} \\
&= \binom{4}{2} \sum_{c=2}^{2} (-1)^{c-2} C_{2-c} \binom{8-2c}{2(2-c)} \binom{2}{c-2} + \\
&\quad \binom{2}{2} \sum_{c=2}^{2} (-1)^{c-2} C_{3-c} \binom{8-2c}{2(3-c)} \binom{0}{c-2} \\
&= 6(-1)^0 C_0 \binom{4}{0}\binom{2}{0} + 1(-1)^0 C_1 \binom{4}{2}\binom{0}{0} \\
&= 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 6\cdot 1 = 6+6 = 12.
\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν 12 μονοπάτια μήκους 8 και με 2 εμφανίσεις του προτύπου *uhd*, τα οποία απεικονίζονται στο σχήμα 2.4:



Σχήμα 2.4: Μονοπάτια Motzkin μήκους 8 με 2 εμφανίσεις του προτύπου *uhd*

Πίνακας 2.4: Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας (2.4.4)

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	7	15	36	85	209	517	1303
1	–	–	1	2	6	14	39	102	280	758
2	–	–	–	–	–	1	3	12	37	123
3	–	–	–	–	–	–	–	–	1	4
4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Κεφάλαιο 3

Ισοκατανομές στατιστικών

3.1 Εισαγωγή

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι γεννήτριες συναρτήσεις κάποιων προτύπων συμπίπτουν. Επομένως, οι αντίστοιχες στατιστικές θα είναι ισοκατανεμημένες. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί και συνδυαστικά. Δηλαδή, σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να κατασκευαστεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση στο σύνολο $\mathcal{M}$, η οποία να διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την μία παράμετρο στην άλλη.

Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει κάθε φορά να διατυπώνεται εκείνος ο κανόνας που αντιστοιχεί κάθε μονοπάτι *Motzkin* σε ένα μονοπάτι *Motzkin* και που ικανοποιεί τους εξής περιορισμούς:

i) Ο κανόνας αυτός θα πρέπει να αντιστοιχεί όλα τα μονοπάτια του πρώτου συνόλου και να μην υπάρχει μονοπάτι στο δεύτερο σύνολο που να μην αποτελεί εικόνα ενός μονοπατιού στο πρώτο σύνολο.

ii) Το μήκος κάθε μονοπατιού να είναι ίσο με το μήκος της εικόνας του, δηλαδή $|\alpha| = |f(a)|$.

iii) Ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ_1 σε κάθε μονοπάτι να είναι ίσος με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου τ_2 στην εικόνα του μονοπατιού, δηλαδή $|\alpha|_{\tau_1} = |f(a)|_{\tau_2}$.

Η απόδειξη της ισχύος των παραπάνω περιορισμών γίνεται στις περισσότερες περιπτώσεις αξιοποιώντας την αναδρομική διάσπαση των μονοπατιών *Motzkin* και χρησιμοποιώντας την επαγωγική μέθοδο, όπου υποθέτοντας ότι μια πρόταση ισχύει για μονοπάτια μήκους μικρότερου του n, απομένει να αποδειχθεί ότι ισχύει και για μονοπάτια μήκους n.

Στις περιπτώσεις όπου η αναδρομική μέθοδος δεν είναι εφαρμόσιμη για την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση f, τότε χρησιμοποιείται άλλη κατάλληλη μέθοδος.

3.2 Τα πρότυπα uu και du

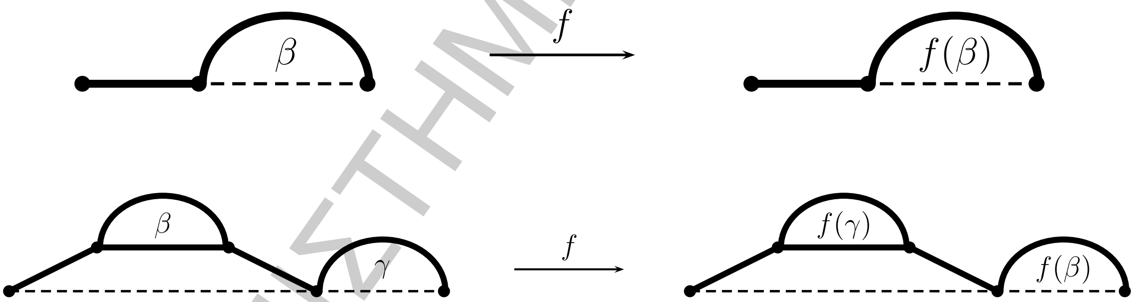
Όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$M_{uu} = 1 + xM_{uu} + x^2 M_{uu}^2 + x^2 (y-1) M_{uu} \left((1-x) M_{uu} - 1 \right),$$
$$M_{du} = 1 + xM_{du} + x^2 M_{du}^2 + x^2 (y-1) M_{du} \left((1-x) M_{du} - 1 \right)$$

ισχύει ότι $M_{uu} = M_{du}$, οπότε οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uu και du είναι ισοκατανεμημένες.

Το παραπάνω επιβεβαιώνεται συνδυαστικά με την κάτωθι απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, που ορίζεται αναδρομικά στο σύνολο των μονοπατιών *Motzkin* ως εξής:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$f(h\beta) = hf(\beta),$$
$$f(u\beta d\gamma) = uf(\gamma) df(\beta), \text{ με } \beta, \gamma \in \mathcal{M}.$$



Σχήμα 3.1: Η απεικόνιση *f*

Είναι προφανές ότι:

$$a \in \mathcal{A}_h \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_h,$$
$$a \in \mathcal{A}_u \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_u.$$

Η f είναι μάλιστα μια ενέλιξη (involution), η οποία διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την παράμετρο uu στην παράμετρο du. Πράγματι:

i) $f^2(a) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(\varepsilon)\right) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(h\beta)\right) \\ &= f\left(hf(\beta)\right) \\ &= hf^2(\beta) \\ &= h\beta \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_u$ οπότε $a = u\beta d\gamma$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(u\beta d\gamma)\right) \\ &= f\left(uf(\gamma)df(\beta)\right) \\ &= uf\left(f(\beta)\right)df\left(f(\gamma)\right) \\ &= uf^2(\beta)df^2(\gamma) \\ &= u\beta d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = \left|f(\alpha)\right|$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\left|f(\varepsilon)\right| = 0 = |\varepsilon|.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right| &= \left| f(h\beta) \right| \\ &= \left| hf(\beta) \right| \\ &= 1 + \left| f(\beta) \right| \\ &= 1 + \left| \beta \right| \\ &= \left| h\beta \right| \\ &= \left| a \right|. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_u$ οπότε $a = u\beta d\gamma$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right| &= \left| f(u\beta d\gamma) \right| \\ &= \left| uf(\gamma) df(\beta) \right| \\ &= 2 + \left| f(\beta) \right| + \left| f(\gamma) \right| \\ &= 2 + \left| \beta \right| + \left| \gamma \right| \\ &= \left| u\beta d\gamma \right| \\ &= \left| a \right|. \end{aligned}$$

iii) $\left| f(\alpha) \right|_{du} = \left| \alpha \right|_{uu}$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\left| f(\varepsilon) \right|_{du} = 0 = \left| \varepsilon \right|_{uu}.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right|_{du} &= \left| f(h\beta) \right|_{du} \\ &= \left| hf(\beta) \right|_{du} \\ &= \left| f(\beta) \right|_{du} \\ &= \left| \beta \right|_{uu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= |h\beta|_{uu}\\&= |a|_{uu}.\end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_u$ οπότε $a = u\beta d\gamma$. Είναι:

$$\begin{aligned}|f(\alpha)|_{du} &= |f(u\beta d\gamma)|_{du}\\&= |uf(\gamma)df(\beta)|_{du}\\&= |f(\beta)|_{du} + |f(\gamma)|_{du} + [f(\beta) \in \mathcal{A}_u]\\&= |\beta|_{uu} + |\gamma|_{uu} + [\beta \in \mathcal{A}_u]\\&= |u\beta d\gamma|_{uu}\\&= |a|_{uu}.\end{aligned}$$

Επομένως, οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uu και du είναι ισοκατανεμημένες.

3.3 Τα πρότυπα uh και hu

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$M_{uh}(x,y)=1+xM_{uh}(x,y)+x^2M_{uh}^2(x,y)+x^3(y-1)M_{uh}^2(x,y),$$
$$M_{hu}(x,y)=1+xM_{hu}(x,y)+x^2M_{hu}^2(x,y)+x^3(y-1)M_{hu}^2(x,y)$$

ισχύει ότι $M_{uh}=M_{hu}$, οπότε οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uh και hu είναι ισοκατανεμημένες.

Θα δοθεί μία πρόταση για πρότυπα γενικότερης μορφής.

Πρόταση 3.3.1. *Οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα* $u^\kappa h^\lambda$ *και* $h^\lambda u^\kappa$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{N}^*$, *είναι ισοκατανεμημένες.*

Απόδειξη

Κάθε μονοπάτι *Motzkin* μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$a=a_1d^{k_1}a_2d^{k_2}a_3d^{k_3}...a_nd^{k_n}a_{n+1}$$

όπου $a_1,a_2,a_3,...,a_n,a_{n+1}$ είναι λέξεις που αποτελούνται μόνο από οριζόντια ή ανοδικά βήματα h, u και $k_1,k_2,...,k_n \geq 1$.

Έστω $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ με

$$f(\alpha)=a_1^*d^{k_1}a_2^*d^{k_2}a_3^*d^{k_3}...a_n^*d^{k_n}a_{n+1}^*,$$

όπου $a_1^*,a_2^*,a_3^*,...,a_n^*,a_{n+1}^*$ οι λέξεις που αποτελούνται μόνο από οριζόντια ή ανοδικά βήματα h, u και που προέρχονται από την ανάγνωση των βημάτων της αντίστοιχης λέξης στο μονοπάτι a από το τέλος προς της αρχή.

Είναι προφανές ότι το μήκος κάθε λέξης a_i είναι ίσο με το μήκος της αντίστοιχης λέξης a_i^*.

Η f είναι μια ενέλιξη, η οποία διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την παράμετρο $u^\kappa h^\lambda$ στην παράμετρο $h^\lambda u^\kappa$. Πράγματι:

i) $f^2(a) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(\varepsilon)\right) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a_i \in \mathcal{A}_h$, οπότε $a_i^* \in \mathcal{B}_h$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f\left(a_1 d^{k_1} a_2 d^{k_2} a_3 d^{k_3} \ldots a_n d^{k_n} a_{n+1}\right)\right) \\ &= f\left(a_1^* d^{k_1} a_2^* d^{k_2} a_3^* d^{k_3} \ldots a_n^* d^{k_n} a_{n+1}^*\right) \\ &= a_1 d^{k_1} a_2 d^{k_2} a_3 d^{k_3} \ldots a_n d^{k_n} a_{n+1} \\ &= a. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = |f(\alpha)|$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} |f(a)| &= \left|f\left(a_1 d^{k_1} a_2 d^{k_2} a_3 d^{k_3} \ldots a_n d^{k_n} a_{n+1}\right)\right| \\ &= \left|a_1^* d^{k_1} a_2^* d^{k_2} a_3^* d^{k_3} \ldots a_n^* d^{k_n} a_{n+1}^*\right| \\ &= |a_1^*| + |a_2^*| + |a_3^*| + \ldots + |a_n^*| + |a_{n+1}^*| + \sum_{i=1}^{n} k_i \\ &= |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}| + \sum_{i=1}^{n} k_i \\ &= \left|a_1 d^{k_1} a_2 d^{k_2} a_3 d^{k_3} \ldots a_n d^{k_n} a_{n+1}\right| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

iii) $\left|f\left(\alpha\right)\right|_{h^{\lambda}u^{\kappa}}=\left|\alpha\right|_{u^{\kappa}h^{\lambda}}$ για κάθε $a\in\mathcal{M}$.

Είναι:

$$\begin{aligned}\left|f\left(\alpha\right)\right|_{h^{\lambda}u^{\kappa}} &=\left|f\left(a_1d^{k_1}a_2d^{k_2}a_3d^{k_3}...a_nd^{k_n}a_{n+1}\right)\right|_{h^{\lambda}u^{\kappa}}\\ &=\left|a_1^*d^{k_1}a_2^*d^{k_2}a_3^*d^{k_3}...a_n^*d^{k_n}a_{n+1}^*\right|_{h^{\lambda}u^{\kappa}}\\ &=\sum_{i=1}^{n+1}\left|a_i^*\right|_{h^{\lambda}u^{\kappa}}\\ &=\sum_{i=1}^{n+1}\left|a_i\right|_{u^{\kappa}h^{\lambda}}\\ &=\left|a_1d^{k_1}a_2d^{k_2}a_3d^{k_3}...a_nd^{k_n}a_{n+1}\right|_{u^{\kappa}h^{\lambda}}\\ &=\left|a\right|_{u^{\kappa}h^{\lambda}}.\end{aligned}$$

Επομένως, οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uh και hu είναι ισοκατανεμημένες.

3.4 Τα πρότυπα uud και uhh

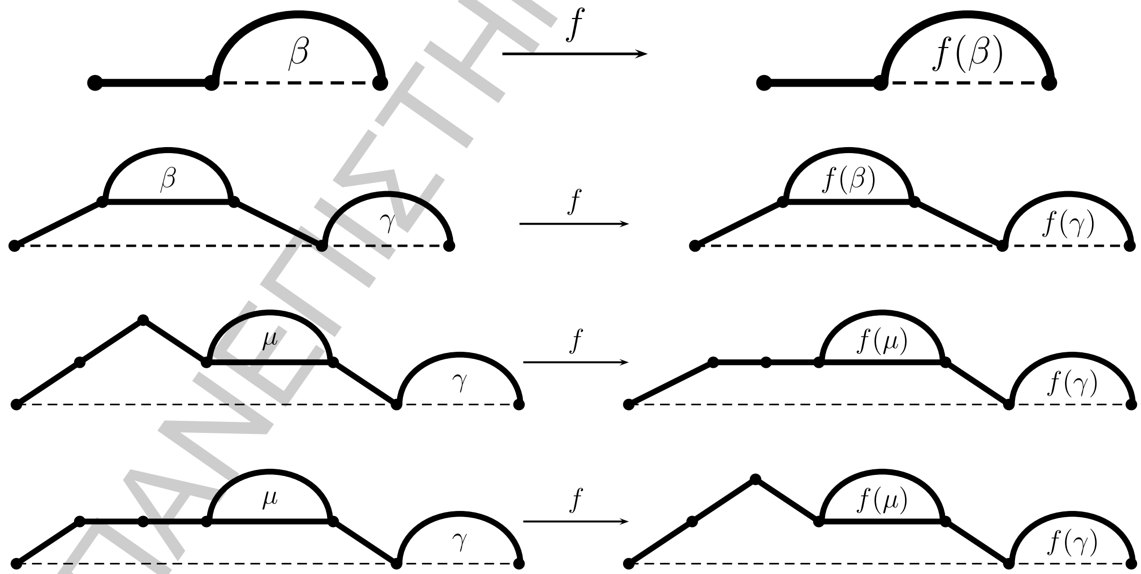
Όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$M_{uud} = 1 + xM_{uud} + x^2 M_{uud}^2 + x^4 \left(y-1\right) M_{uud}^2,$$
$$M_{uhh} = 1 + xM_{uhh} + x^2 M_{uhh}^2 + x^4 \left(y-1\right) M_{uhh}^2$$

ισχύει ότι $M_{uud} = M_{uhh}$, οπότε οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uud και uhh είναι ισοκατανεμημένες.

Το παραπάνω, επιβεβαιώνεται συνδυαστικά με την κάτωθι απεικόνιση της $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, που ορίζεται αναδρομικά στο σύνολο των μονοπατιών *Motzkin* ως εξής:

$$\begin{aligned}
&f\left(\varepsilon\right) = \varepsilon,\\
&f\left(h\beta\right) = hf\left(\beta\right),\\
&f\left(u\beta d\gamma\right) = uf\left(\beta\right)df\left(\gamma\right),\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \beta \in \mathcal{M} \setminus \left(\mathcal{A}_{ud} \bigcup \mathcal{A}_{hh}\right)\ \kappa\alpha\iota\ \gamma \in \mathcal{M},\\
&f\left(uud\mu d\gamma\right) = uhhf\left(\mu\right)df\left(\gamma\right),\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \gamma, \mu \in \mathcal{M},\\
&f\left(uhh\mu d\gamma\right) = uudf\left(\mu\right)df\left(\gamma\right),\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \gamma, \mu \in \mathcal{M}.
\end{aligned}$$



Σχήμα 3.2: Η απεικόνιση *f*

Είναι προφανές ότι:

$$a \in \mathcal{A}_h \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_h,$$
$$a \in \mathcal{A}_u \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_u.$$

Η f είναι μια ενέλιξη, η οποία διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την παράμετρο uud στην παράμετρο uhh. Πράγματι:

i) $f^2(a) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(\varepsilon)\right) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(h\beta)\right) \\ &= f\left(hf(\beta)\right) \\ &= hf^2(\beta) \\ &= h\beta \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M} \setminus \left(\mathcal{A}_{ud} \bigcup \mathcal{A}_{hh}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(u\beta d\gamma)\right) \\ &= f\left(uf(\beta)df(\gamma)\right) \\ &= uf\left(f(\beta)\right)df\left(f(\gamma)\right) \\ &= uf^2(\beta)df^2(\gamma) \\ &= u\beta d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uud\mu d\gamma$, με $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f\left(uud\mu d\gamma\right)\right) \\ &= f\left(uhhf(\mu)df(\gamma)\right) \\ &= uudf\left(f(\mu)\right)df\left(f(\gamma)\right) \\ &= uudf^2(\mu)df^2(\gamma) \\ &= uud\mu d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uhh\mu d\gamma$, με $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f\left(uhh\mu d\gamma\right)\right) \\ &= f\left(uudf(\mu)df(\gamma)\right) \\ &= uhhf\left(f(\mu)\right)df\left(f(\gamma)\right) \\ &= uhhf^2(\mu)df^2(\gamma) \\ &= uhh\mu d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = |f(\alpha)|$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$|f(\varepsilon)| = 0 = |\varepsilon|.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$ με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(h\beta)| \\ &= |hf(\beta)| \\ &= 1 + |f(\beta)| \\ &= 1 + |\beta| \\ &= |h\beta| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M} \setminus \left(\mathcal{A}_{ud} \bigcup \mathcal{A}_{hh}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left|f(\alpha)\right| &= \left|f(u\beta d\gamma)\right| \\ &= \left|uf(\gamma)df(\beta)\right| \\ &= 2 + \left|f(\beta)\right| + \left|f(\gamma)\right| \\ &= 2 + |\beta| + |\gamma| \\ &= |u\beta d\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uud\mu d\gamma$, με $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left|f(\alpha)\right| &= \left|f(uud\mu d\gamma)\right| \\ &= \left|uhhf(\mu)df(\gamma)\right| \\ &= 4 + \left|f(\mu)\right| + \left|f(\gamma)\right| \\ &= 4 + |\mu| + |\gamma| \\ &= |uud\mu d\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uhh\mu d\gamma$, με $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left|f(\alpha)\right| &= \left|f(uhh\mu d\gamma)\right| \\ &= \left|uudf(\mu)df(\gamma)\right| \\ &= 4 + \left|f(\mu)\right| + \left|f(\gamma)\right| \\ &= 4 + |\mu| + |\gamma| \\ &= |uhh\mu d\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

iii) $\left|f(\alpha)\right|_{uhh} = |\alpha|_{uud}$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:
$$\left|f(\varepsilon)\right|_{uhh} = 0 = |\varepsilon|_{uud}.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$ με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:
$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{uhh} &= \left|f(h\beta)\right|_{uhh} \\ &= \left|hf(\beta)\right|_{uhh} \\ &= \left|f(\beta)\right|_{uhh} \\ &= |\beta|_{uud} \\ &= |h\beta|_{uud} \\ &= |a|_{uud}.\end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M} \setminus \left(\mathcal{A}_{ud} \bigcup \mathcal{A}_{hh}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:
$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{uhh} &= \left|f(u\beta d\gamma)\right|_{uhh} \\ &= \left|uf(\beta)df(\gamma)\right|_{uhh} \\ &= \left|f(\beta)\right|_{uhh} + \left|f(\gamma)\right|_{uhh} \\ &= |\beta|_{uud} + |\gamma|_{uud} \\ &= |u\beta d\gamma|_{uud} \\ &= |a|_{uud}.\end{aligned}$$

- Έστω $a = uud\mu d\gamma$, με $\mu, \gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:
$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{uhh} &= \left|f(uud\mu d\gamma)\right|_{uhh} \\ &= \left|uhhf(\mu)df(\gamma)\right|_{uhh} \\ &= 1 + \left|f(\mu)\right|_{uhh} + \left|f(\gamma)\right|_{uhh} \\ &= 1 + |\mu|_{uud} + |\gamma|_{uud}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|uud\mu d\gamma\right|_{uud} \\
&= |a|_{uud}\,.
\end{aligned}
$$

- Έστω $a = uhh\mu d\gamma,$ με $\mu,\gamma \in \mathcal{M}.$ Είναι:

$$
\begin{aligned}
\left|f(\alpha)\right|_{uhh} &= \left|f(uhh\mu d\gamma)\right|_{uhh} \\
&= \left|uudf(\mu)df(\gamma)\right|_{uhh} \\
&= \left|f(\mu)\right|_{uhh} + \left|f(\gamma)\right|_{uhh} \\
&= |\mu|_{uud} + |\gamma|_{uud} \\
&= \left|uhh\mu d\gamma\right|_{uud} \\
&= |a|_{uud}\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως, οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uud και uhh είναι ισοκατανεμημένες.

3.5 Τα πρότυπα uuh και huu

Σύμφωνα με την πρόταση 3.3.1 (για $\kappa = 2,\ \lambda = 1$), οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uuh και huu είναι ισοκατανεμημένες.

3.6 Τα πρότυπα uhd και udh

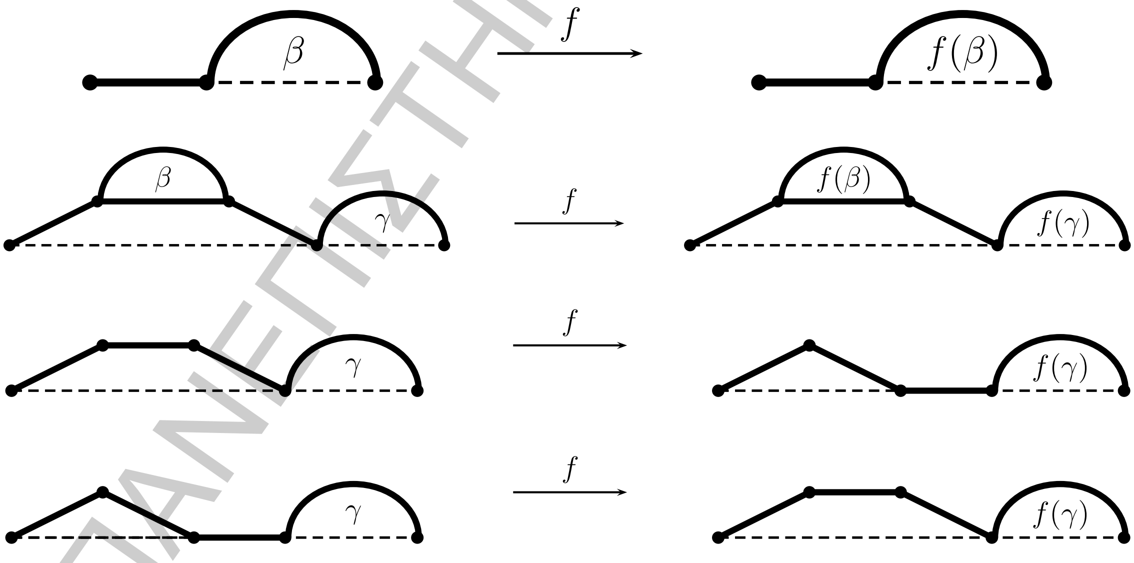
Όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$M_{uhd} = 1 + xM_{uhd} + x^2 M_{uhd}^2 + x^3\left(y-1\right)M_{uhd},$$
$$M_{udh} = 1 + xM_{uhd} + x^2 M_{uhd}^2 + x^3\left(y-1\right)M_{uhd}$$

ισχύει ότι $M_{uhd} = M_{udh}$, οπότε οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uhd και udh είναι ισοκατανεμημένες.

Το παραπάνω, επιβεβαιώνεται συνδυαστικά με την κάτωθι απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, που ορίζεται αναδρομικά στο σύνολο των μονοπατιών *Motzkin* ως εξής:

$$f\left(\varepsilon\right) = \varepsilon,$$
$$f\left(h\beta\right) = hf\left(\beta\right),$$
$$f\left(u\beta d\gamma\right) = uf\left(\beta\right)df\left(\gamma\right), \text{ όταν } \beta \in \mathcal{M}\setminus\{\varepsilon\}\bigcup\{h\} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma \in \mathcal{M},$$
$$f\left(uhd\gamma\right) = udhf\left(\gamma\right), \text{ με } \gamma \in \mathcal{M},$$
$$f\left(udh\gamma\right) = uhdf\left(\gamma\right), \text{ με } \gamma \in \mathcal{M}.$$



Σχήμα 3.3: Η απεικόνιση *f*

Είναι προφανές ότι:

$$a \in \mathcal{A}_h \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_h,$$
$$a \in \mathcal{A}_u \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_u.$$

Η f είναι μια ενέλιξη, η οποία διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την παράμετρο uhd στην παράμετρο udh. Πράγματι:

i) $f^2(a) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(\varepsilon)) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$, με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(h\beta)) \\ &= f(hf(\beta)) \\ &= hf^2(\beta) \\ &= h\beta \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M} \setminus \{\varepsilon\} \bigcup \{h\}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(u\beta d\gamma)) \\ &= f(uf(\beta)df(\gamma)) \\ &= uf(f(\beta))df(f(\gamma)) \\ &= uf^2(\beta)df^2(\gamma) \\ &= u\beta d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uhd\gamma$, με $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(uhd\gamma)\right) \\ &= f\left(udhf(\gamma)\right) \\ &= uhdf\left(f(\gamma)\right) \\ &= uhdf^2(\gamma) \\ &= uhd\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = udh\gamma$, με $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f(udh\gamma)\right) \\ &= f\left(uhdf(\gamma)\right) \\ &= udhf\left(f(\gamma)\right) \\ &= udhf^2(\gamma) \\ &= udh\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = |f(\alpha)|$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$|f(\varepsilon)| = 0 = |\varepsilon|.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$, με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(h\beta)| \\ &= |hf(\beta)| \\ &= 1 + |f(\beta)| \\ &= 1 + |\beta| \\ &= |h\beta| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M} \setminus \{\varepsilon\} \bigcup \{h\}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(u\beta d\gamma)| \\ &= |uf(\beta)df(\gamma)| \\ &= 2 + |f(\beta)| + |f(\gamma)| \\ &= 2 + |\beta| + |\gamma| \\ &= |u\beta d\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = uhd\gamma$, με $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(uhd\gamma)| \\ &= |udhf(\gamma)| \\ &= 3 + |f(\gamma)| \\ &= 3 + |\gamma| \\ &= |uhd\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = udh\gamma$, με $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(udh\gamma)| \\ &= |uhdf(\gamma)| \\ &= 3 + |f(\gamma)| \\ &= 3 + |\gamma| \\ &= |udh\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

iii) $\left|f(\alpha)\right|_{udh}=|\alpha|_{uhd}$ για κάθε $a\in\mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a=\varepsilon$. Είναι:

$$\left|f(\varepsilon)\right|_{udh}=0=|\varepsilon|_{uhd}.$$

- Έστω $a\in\mathcal{A}_h$ οπότε $a=h\beta$, με $\beta\in\mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{udh}&=\left|f(h\beta)\right|_{udh}\\&=\left|hf(\beta)\right|_{udh}\\&=\left|f(\beta)\right|_{udh}\\&=|\beta|_{uhd}\\&=|h\beta|_{uhd}\\&=|a|_{uhd}.\end{aligned}$$

- Έστω $a=u\beta d\gamma$, με $\beta\in\mathcal{M}\setminus\{\varepsilon\}\bigcup\{h\}\ \kappa\alpha\iota\ \gamma\in\mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{udh}&=\left|f(u\beta d\gamma)\right|_{udh}\\&=\left|uf(\beta)df(\gamma)\right|_{udh}\\&=\left|f(\beta)\right|_{udh}+\left|f(\gamma)\right|_{udh}\\&=|\beta|_{uhd}+|\gamma|_{uhd}\\&=|u\beta d\gamma|_{uhd}\\&=|a|_{uhd}.\end{aligned}$$

- Έστω $a=uhd\gamma$, με $\gamma\in\mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{udh}&=\left|f(uhd\gamma)\right|_{udh}\\&=\left|udhf(\gamma)\right|_{udh}\\&=1+\left|f(\gamma)\right|_{udh}\\&=1+|\gamma|_{uhd}\end{aligned}$$

$$= |uhd\gamma|_{uhd}$$
$$= |a|_{uhd}.$$

- Έστω $a = udh\gamma$, με $\gamma \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)|_{udh} &= |f(udh\gamma)|_{udh} \\ &= |uhdf(\gamma)|_{udh} \\ &= |f(\gamma)|_{udh} \\ &= |\gamma|_{uhd} \\ &= |udh\gamma|_{uhd} \\ &= |a|_{uhd}. \end{aligned}$$

Επομένως, οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα uhd και udh είναι ισοκατανεμημένες.

3.7 Τα πρότυπα hdu και dhu

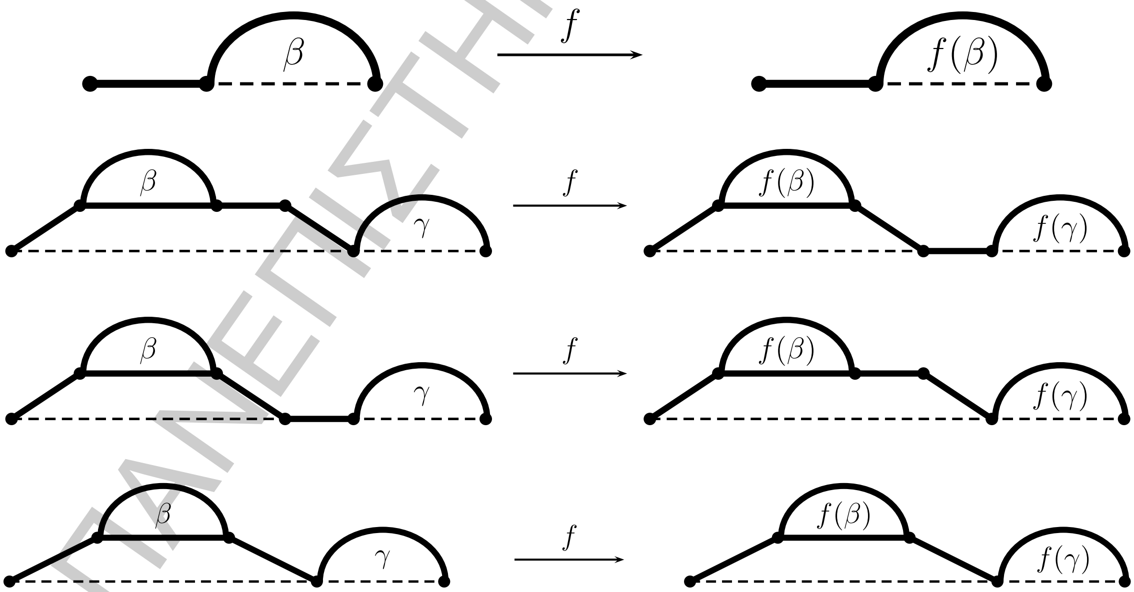
Όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$M_{hdu} = 1 + xM_{hdu} + x^2 M_{hdu}^2 + x^3 (y-1) M_{hdu} \left((1-x) M_{hdu} - 1 \right),$$
$$M_{dhu} = 1 + xM_{dhu} + x^2 M_{dhu}^2 + x^3 (y-1) M_{dhu} \left((1-x) M_{dhu} - 1 \right)$$

ισχύει ότι $M_{hdu} = M_{dhu}$, οπότε οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα hdu και dhu είναι ισοκατανεμημένες.

Το παραπάνω, επιβεβαιώνεται συνδυαστικά με την κάτωθι απεικόνιση της $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, που ορίζεται αναδρομικά στο σύνολο των μονοπατιών *Motzkin* ως εξής:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$f(h\beta) = hf(\beta),$$
$$f(u\beta hd\gamma) = uf(\beta) dhf(\gamma), \text{ όταν } \beta \in \mathcal{M} \text{ και } \gamma \in \mathcal{A}_u,$$
$$f(u\beta dh\gamma) = uf(\beta) hdf(\gamma), \text{ όταν } \beta \in \mathcal{M} \text{ και } \gamma \in \mathcal{A}_u,$$
$$f(u\beta d\gamma) = uf(\beta) df(\gamma), \text{ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.}$$



Σχήμα 3.4: Η απεικόνιση *f*

Είναι προφανές ότι:

$$a \in \mathcal{A}_h \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_h,$$
$$a \in \mathcal{A}_u \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{A}_u.$$

Η f είναι μια ενέλιξη, η οποία διατηρεί το μήκος και μεταφέρει την παράμετρο hdu στην παράμετρο dhu. Πράγματι:

i) $f^2(a) = a$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(\varepsilon)) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$, με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(h\beta)) \\ &= f(hf(\beta)) \\ &= hf^2(\beta) \\ &= h\beta \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta hd\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $και$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f(f(u\beta hd\gamma)) \\ &= f(uf(\beta)dhf(\gamma)) \\ &= uf(f(\beta))hdf(f(\gamma)) \\ &= uf^2(\beta)hdf^2(\gamma) \\ &= u\beta hd\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta dh\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f\left(u\beta dh\gamma\right)\right) \\ &= f\left(uf\left(\beta\right)hdf\left(\gamma\right)\right) \\ &= uf\left(f\left(\beta\right)\right)dhf\left(f\left(\gamma\right)\right) \\ &= uf^2\left(\beta\right)dhf^2\left(\gamma\right) \\ &= u\beta dh\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{B}_h$ και $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_u$, ή $\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}_h$ και $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_{hu}$. Είναι:

$$\begin{aligned} f^2(a) &= f\left(f\left(u\beta d\gamma\right)\right) \\ &= f\left(uf\left(\beta\right)df\left(\gamma\right)\right) \\ &= uf\left(f\left(\beta\right)\right)df\left(f\left(\gamma\right)\right) \\ &= uf^2\left(\beta\right)df^2\left(\gamma\right) \\ &= u\beta d\gamma \\ &= a. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = |f(\alpha)|$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$|f(\varepsilon)| = 0 = |\varepsilon|.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$, με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(h\beta)| \\ &= |hf(\beta)| \\ &= 1 + |f(\beta)| \\ &= 1 + |\beta| \end{aligned}$$

$$=|h\beta|$$
$$=|a|.$$

- Έστω $a = u\beta hd\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(u\beta hd\gamma)| \\ &= |uf(\beta)dhf(\gamma)| \\ &= 3 + |f(\beta)| + |f(\gamma)| \\ &= 3 + |\beta| + |\gamma| \\ &= |u\beta hd\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta dh\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(u\beta dh\gamma)| \\ &= |uf(\beta)hdf(\gamma)| \\ &= 3 + |f(\beta)| + |f(\gamma)| \\ &= 3 + |\beta| + |\gamma| \\ &= |u\beta dh\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta d\gamma$, με $\beta \in \mathcal{B}_h$ και $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_u$, ή $\beta \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}_h$ και $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_{hu}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= |f(u\beta d\gamma)| \\ &= |uf(\beta)df(\gamma)| \\ &= 2 + |f(\beta)| + |f(\gamma)| \\ &= 2 + |\beta| + |\gamma| \\ &= |u\beta d\gamma| \\ &= |a|. \end{aligned}$$

iii) $\left| f(\alpha) \right|_{dhu} = |\alpha|_{hdu}$ για κάθε $a \in \mathcal{M}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $a = \varepsilon$. Είναι:

$$\left| f(\varepsilon) \right|_{dhu} = 0 = |\varepsilon|_{hdu}.$$

- Έστω $a \in \mathcal{A}_h$ οπότε $a = h\beta$, με $\beta \in \mathcal{M}$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right|_{dhu} &= \left| f(h\beta) \right|_{dhu} \\ &= \left| hf(\beta) \right|_{dhu} \\ &= \left| f(\beta) \right|_{dhu} \\ &= |\beta|_{hdu} \\ &= |h\beta|_{hdu} \\ &= |a|_{hdu}. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta hd\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right|_{dhu} &= \left| f(u\beta hd\gamma) \right|_{dhu} \\ &= \left| uf(\beta) dhf(\gamma) \right|_{dhu} \\ &= 1 + \left| f(\beta) \right|_{dhu} + \left| f(\gamma) \right|_{dhu} \\ &= 1 + |\beta|_{hdu} + |\gamma|_{hdu} \\ &= |u\beta hd\gamma|_{hdu} \\ &= |a|_{hdu}. \end{aligned}$$

- Έστω $a = u\beta dh\gamma$, με $\beta \in \mathcal{M}$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma \in \mathcal{A}_u$. Είναι:

$$\begin{aligned} \left| f(\alpha) \right|_{dhu} &= \left| f(u\beta dh\gamma) \right|_{dhu} \\ &= \left| uf(\beta) hdf(\gamma) \right|_{dhu} \\ &= \left| f(\beta) \right|_{dhu} + \left| f(\gamma) \right|_{dhu} \\ &= |\beta|_{hdu} + |\gamma|_{hdu} \end{aligned}$$

$$=\left|u\beta dh\gamma\right|_{hdu}$$
$$=\left|a\right|_{hdu}.$$

- Έστω $a=u\beta d\gamma$, με $\beta\in\mathcal{B}_h$ και $\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_u$, ή $\beta\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{B}_h$ και $\gamma\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}_{hu}$. Είναι:

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha)\right|_{dhu} &=\left|f(u\beta d\gamma)\right|_{dhu}\\ &=\left|uf(\beta)df(\gamma)\right|_{dhu}\\ &=\left|f(\beta)\right|_{dhu}+\left|f(\gamma)\right|_{dhu}\\ &=\left|\beta\right|_{hdu}+\left|\gamma\right|_{hdu}\\ &=\left|u\beta d\gamma\right|_{hdu}\\ &=\left|a\right|_{hdu}.\end{aligned}$$

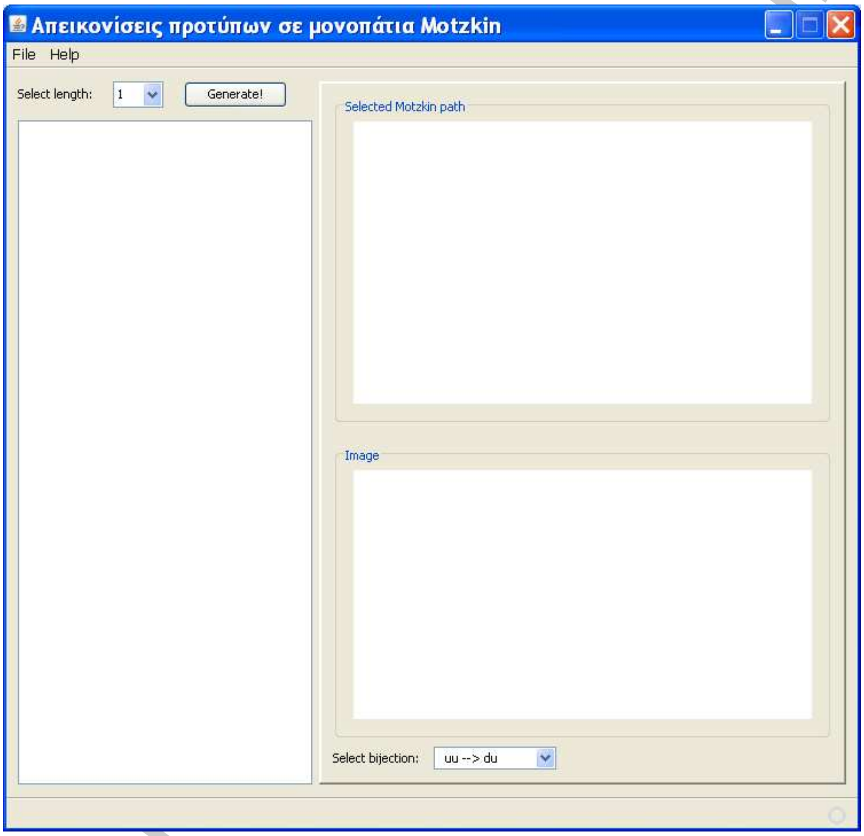
Επομένως, οι στατιστικές που αντιστοιχούν στα πρότυπα hdu και dhu είναι ισοκατανεμημένες.

Παράρτημα

Λογισμικό

Η εφαρμογή που παρουσιάζεται παρακάτω κατασκευάζει όλες τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3 στο υποσύνολο $\mathcal{M}$ που περιέχει τα μονοπάτια Motzkin ως και μήκους 15.

Ανοίγοντας την εφαρμογή, εμφανίζεται η φόρμα Απεικονίσεις προτύπων σε μονοπάτια Motzkin (σχήμα 4.1):

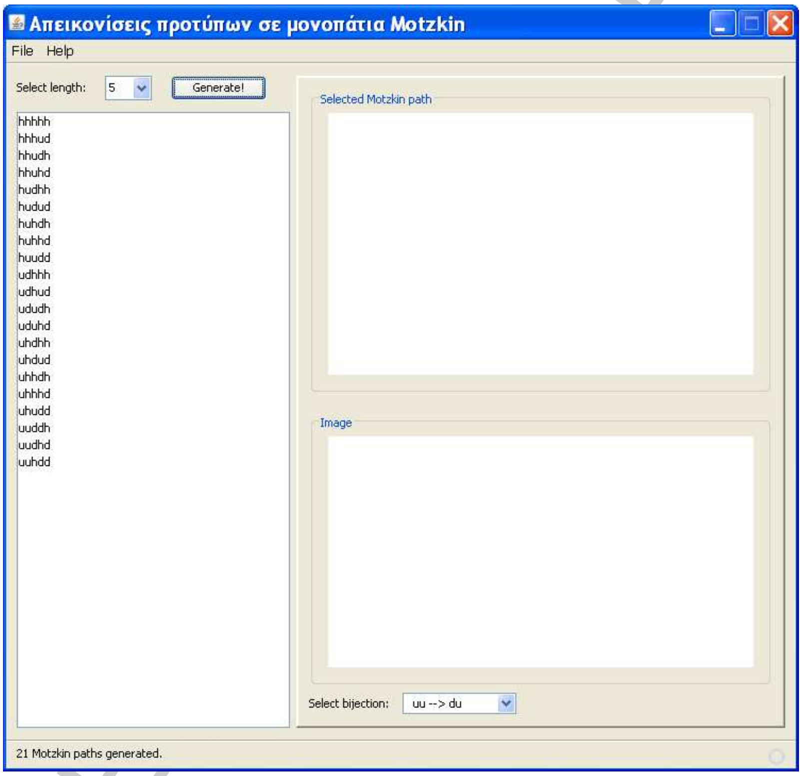


Εικόνα 1: Η φόρμα της εφαρμογής

Στην παραπάνω φόρμα υπάρχουν τα παρακάτω αντικείμενα:

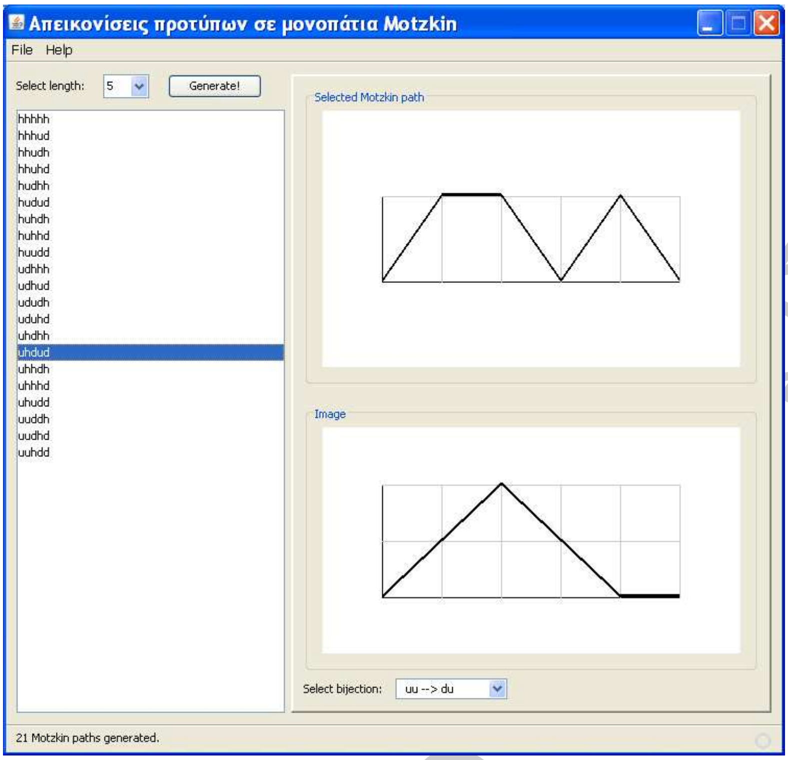
- Πάνω αριστερά υπάρχει το πεδίο πολλαπλών επιλογών **Select length,** όπου ο χρήστης επιλέγει το μήκος των μονοπατιών Motzkin που θέλει να παράγει η εφαρμογή.
- Δεξιά του πεδίου πολλαπλών επιλογών υπάρχει το κουμπί **Generate,** με την επιλογή του οποίου εμφανίζονται όλες οι λέξεις Motzkin του επιλεχθέντος μήκους στην λίστα
- Κάτω από το πεδίο πολλαπλών επιλογών και το κουμπί Generate, υπάρχει η λίστα όπου εμφανίζονται όλες οι λέξεις Motzkin με το μήκος που έχει προεπιλεχθεί.

- Κάτω δεξιά υπάρχει το πεδίο πολλαπλών επιλογών **Select bijection,** όπου ο χρήστης επιλέγει μία από τις πέντε διαθέσιμες απεικονίσεις (bijections) που υπάρχουν.
- Πάνω δεξιά υπάρχει ένας καμβάς με το όνομα **Selected Motzkin path.** Ο χρήστης επιλέγει μία από τις λέξεις Motzkin που κατασκευάστηκαν στη λίστα και αυτή σχεδιάζεται στον συγκεκριμένο καμβά.
- Κάτω από τον **Selected Motzkin path**, υπάρχει δεύτερος καμβάς με το όνομα Image. Εδώ σχεδιάζεται η απεικόνιση που έχει επιλέξει ο χρήστης, για το συγκεκριμένο μονοπάτι του **Selected Motzkin path.**

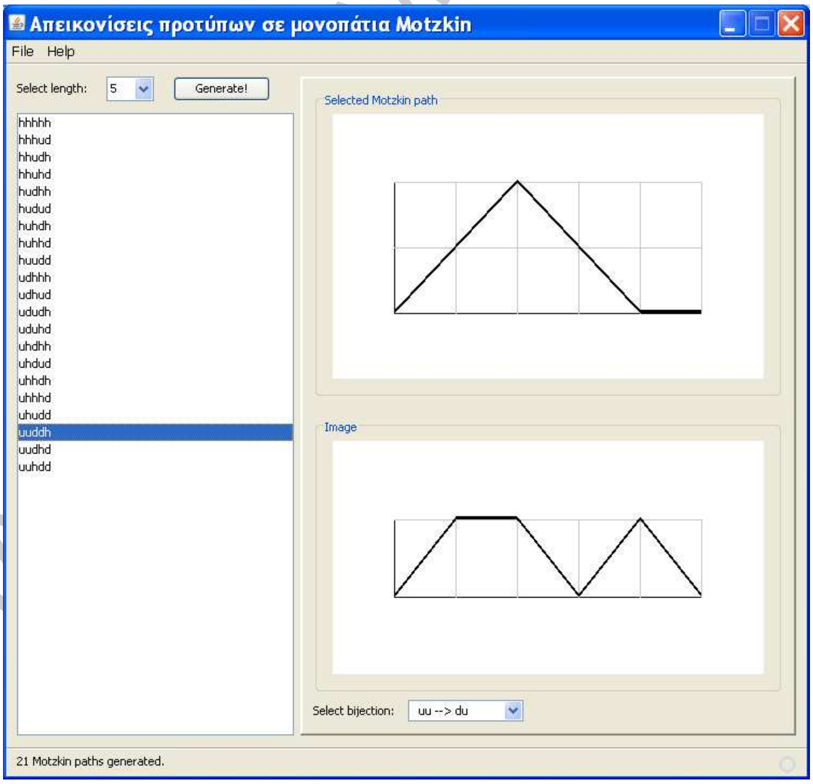


Εικόνα 2: Κατασκευή λέξεων Motzkin μήκους 5

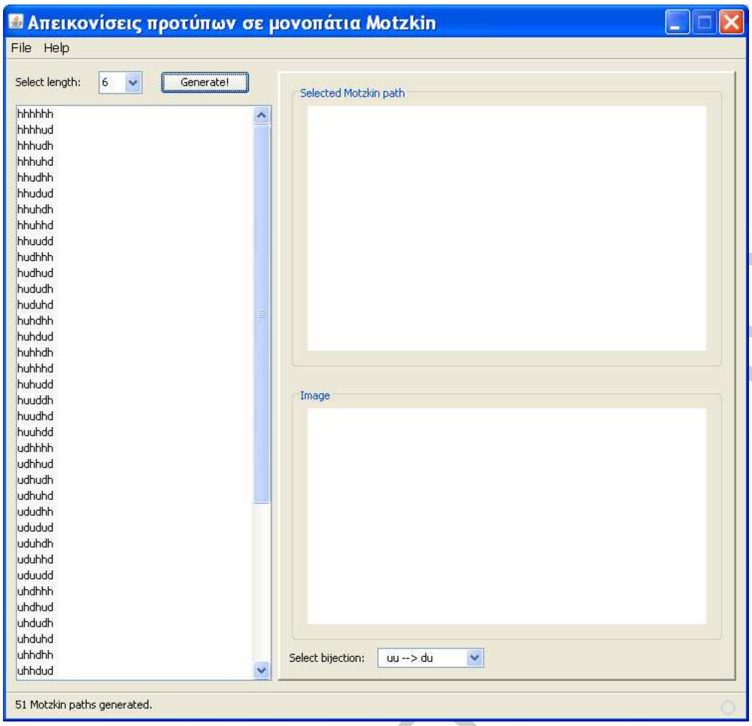
Ακολουθούν κάποιες ενδεικτικές απεικονίσεις της εφαρμογής:



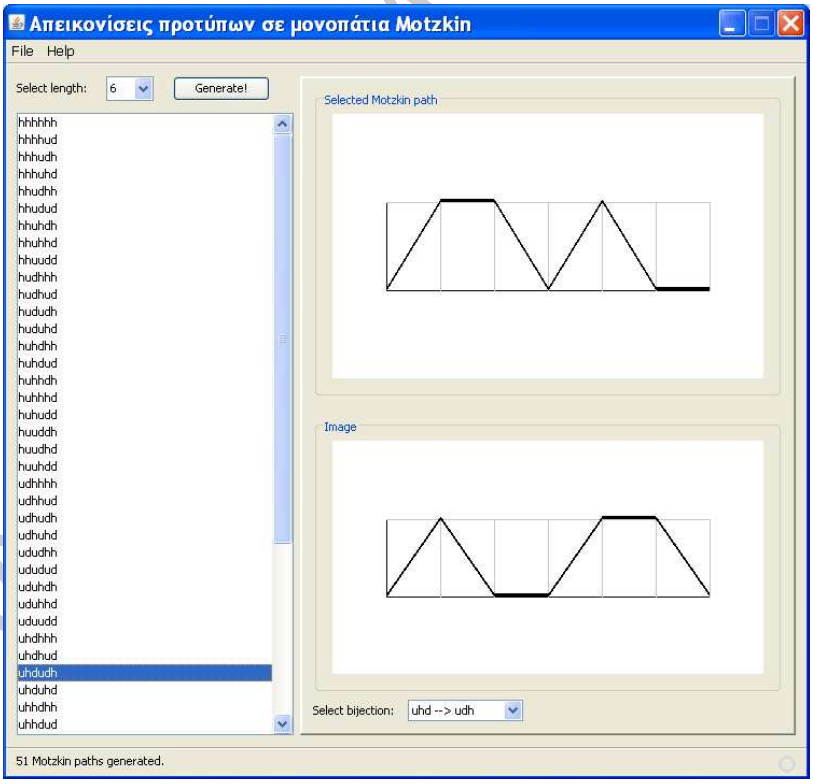
Εικόνα 3: Επιλογή και σχεδιασμός του μονοπατιού Motzkin uhdud και της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισής του για uu -> du



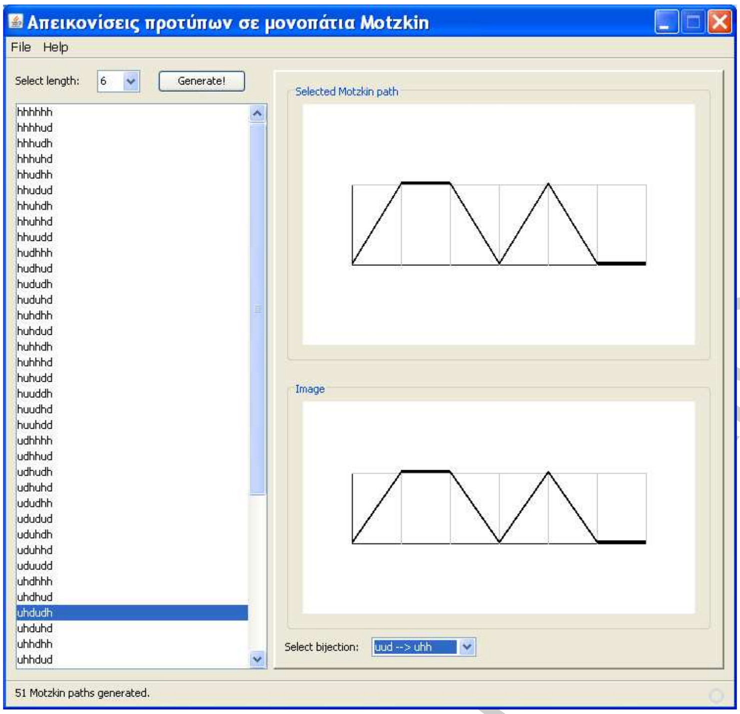
Εικόνα 4: Επιλογή και σχεδιασμός του μονοπατιού Motzkin uhddh και της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισής του για uu -> du



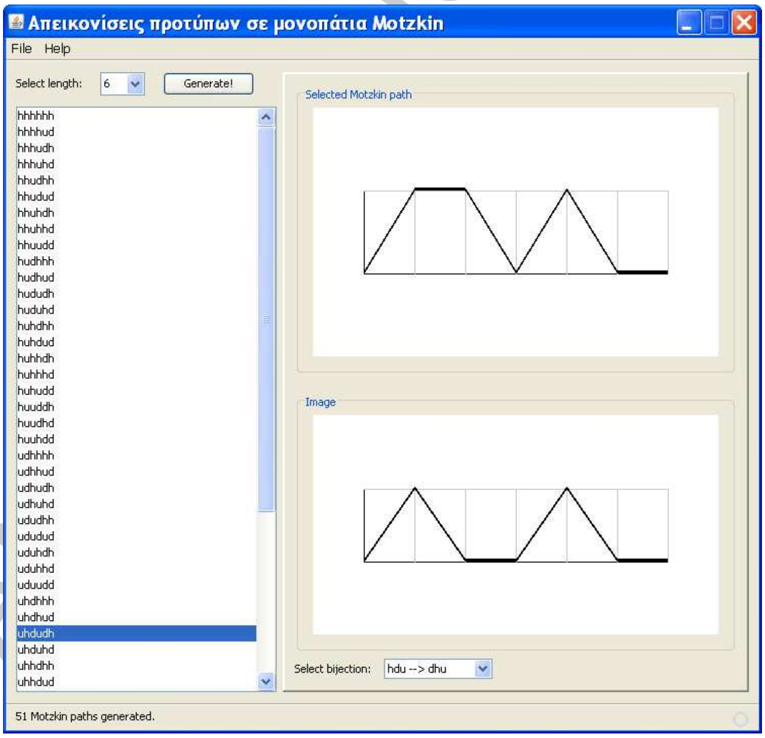
Εικόνα 5: Κατασκευή λέξεων Motzkin μήκους 6



Εικόνα 6: Επιλογή και σχεδιασμός του μονοπατιού Motzkin uududh και της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισής του για uhd -> udh



Εικόνα 7: Επιλογή και σχεδιασμός του μονοπατιού Motzkin uhdudh και της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισής του για uud -> uhh



Εικόνα 8: Επιλογή και σχεδιασμός του μονοπατιού Motzkin uhdudh και της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισής του για hdu -> dhu

Βιβλιογραφία

[1] M. Aigner, Motzkin numbers, *European J. Combin* ***19*** *(1998), 663-675.*

[2] E. Deutsch, Dyck path enumeration, *Discrete Math.* **204** (1999), 167-202.

[3] R. Donaghey and L.W. Shapiro, Motzkin numbers, *J. Combin. Theory Ser.* A***23*** *(1977), 291-301.*

[4] S. Elizalde and T. Mansour, Restricted Motzkin permutations, Motzkin paths, continued fractions, and Chebyshev polynomials, *Discrete Math.* **305** (2005), 170–189

[5] H. Gould, Combinatorial Identities, *Morgantown*, 1972.

[6] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings at height j in Dyck paths, Journal of Statistical Planning and Inference. **141** (2011), 2100-2107.

[7] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, General results on the enumeration of strings in Dyck paths, *Electron. J. Combin*. **18** (2011), #P74.

[8] T. Mansour, Statistics on Dyck paths, *J. Integer Seq.* **9** (2006), Article 06.1.5.

[9] D. Merlini, R. Sprungoli and M. Verri, Some statistics on Dyck paths, *J. Statist. Plann. and Infer.* **101** (2002), 211-227.

[10] T. Motzkin, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 352–360.

[11] E. Munarini and N. Zagaglia Salvi, Binary strings without zigzags, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **49** (2004), Article B49h.

[12] A. Sapounakis and P. Tsikouras, On *k*-colored Motkzin words, *J. Integer Seq.* **7** (2004), Article 04.2.5.

[13] A. Sapounakis and P. Tsikouras, Counting peaks and valleys in *k*-colored Motzkin paths, *Electron. J. Combin*. **12** (2005), #R16.

[14] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings in Dyck paths, *Discrete Math.* **307** (2007), 2909–2924.

[15] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Some strings in Dyck paths, *Australasian J. Combin* **39** (2007), 49–72.

[16] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (2009), published electronically at http://www.research.att.com/_njas/sequences/.

[17] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 1, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[18] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 2, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] R. P. Stanley, Catalan Addendum, available at http://www-math.mit.edu/rstan/ec/catadd.pdf.

[20] Y. Sun, The Statistic “number of udu’s” in Dyck paths, *Discrete Math.* **287** (2004), 177–186.

[21] I. Tasoulas, Strings in Dyck paths and ordered trees, PhD thesis (in Greek), University of Piraeus, Greece (2009).