Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Σύνδεση Μεθοδολογιών UTA-DEA**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Αθανασία Καλογήρου**
Πατρώνυμο	**Αναστάσιος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΣΠ/ 09029**
Επιβλέπων	**Δημήτριος Δεσπότης, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Ιανουάριος , 2012**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Δ. Δεσπότης Καθηγητής	Ε. Φούντας Καθηγητής	Δ. Αποστόλου Επικ. Καθηγητής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία χωρίζεται σε δυο σκέλη.
Στο πρώτο,εξετάζεται η δυνατότητα εφαρμογής της μεθοδολογίας γραμμικοποίησης της DEA που παρουσιάζεται στο paper Data envelopment analysis with nonlinear virtual inputs and outputs του Δ.Δεσπότη κ.ά.στη μεθοδολογία της UTA.Γενικά στην DEA ισχύει ότι τα virtual outputs και τα virtual inputs χαρακτηρίζονται από μη –γραμμικές συναρτήσεις αξίας.Στο προαναφερόμενο paper παρουσιάζεται πως αυτές οι συναρτήσεις αξίας για τα virtual outputs και inputs γραμμικοποιούνται. Στη UTA πάλι , η συνολική συνάρτηση χρησιμότητας , είναι το άθροισμα μη-γραμμικών ή καλύτερα κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων μερικής χρησιμότητας.Η διαδικασία γραμμικοποίησης που εφαρμόστηκε για την DEA εφαρμόζεται εδώ στη συνάρτηση χρησιμότητας των εναλλακτικών.Βάση αυτής της αλλαγής, παρουσιάζεται και μοντελοποιημένο το πρόβλημα της UTA.
Στο δεύτερο σκέλος , ελέγχεται αν η υπόθεση της UTA ότι δηλαδή η ελάχιστη αξία του κριτηρίου είναι μια τιμή διάφορη του μηδενός είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι η ελάχιστη αξία ξεκινάει από το μηδέν .Για τον έλεγχο αυτό παρουσιάζεται μια μαθηματική και μια εμπειρική λύση.Για την παρουσίαση της εμπειρικής λύσης, τρέχθηκαν τυχαία δεδομένα στο Matlab και έγινε έλεγχος για διαφορετικά πλήθη εναλλακτικών .Και οι δυο αποδείξεις φανέρωσαν την μη ισοδυναμία των δυο υποθέσεων.

Abstract

The present diploma thesis is separated in two parts.

In the first part , is examined the possibility of application of the linearity methodology of the DEA that is presented in paper Data of envelopment analysis with nonlinear virtual inputs and outputs of D.Despotis et al. in the methodology of UTA . DEA assumes that virtual outputs and virtual inputs are characterized by not - linear value functions.The paper above presents how these value functions can be presented in a linear way.In UTA, the total function of usefulness, is the sum of not-linear or better at parts linear value functions. The linearity process that was applied for the DEA is applied here in the value function of the alternatives.With this change, is also presented the table for the problem of UTA.

In the second part, it is checked if the affair of UTA that is the minimal price of criterion begins from a price various zero is equivalent with the affair that the minimal price is zero.For this control , it is presented a mathematic and an empirical solution.For the presentation of the empirical solution, accidental data in Matlab were examined and became control for different crowds of alternatives.The two solutions revealed the non equivalence of the two affairs.

Εισαγωγή

Μεθοδολογία DEA

Ένα από τα πιο βασικά μοντέλα της DEA είναι το CCR (CRS) το οποίο προτάθηκε από τους Charnes, Cooper και Rhodes το 1978. Όπως και στα άλλα μοντέλα της DEA , έτσι και στο μοντέλο αυτό , η μονάδα που εξετάζουμε είναι η DMU (decision making unit) . Η μονάδα αυτή είναι υπεύθυνη για τη μετατροπή των εισροών σε εκροές.

Το μαθηματικό πρότυπο της DEA είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα, το οποίο δίνεται είτε στη κανονική μορφή , είτε στη δυϊκή μορφή του. Στην κανονική του μορφή η εκροή πολλαπλασιασμένη με το αντίστοιχο βάρος καλείται εικονική εκροή. Το άθροισμα των εικονικών εκροών όλων των μονάδων εκροών καλείται συνολική εικονική εκροή. Το ίδιο ισχύει και για τις εισροές . Τα βάρη για τις εισροές και τις εκροές κάθε μονάδας υπολογίζονται με τρόπο ώστε να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητά της. Τα βάρη αυτά αποτιμούν γραμμικές συναρτήσεις αξίας .Η αποδοτικότητα μιας μονάδας λαμβάνεται έτσι από την αναλογία της συνολικής εικονικής εκροής δια τη συνολική εικονική εισροή.

Το CCR μοντέλο αποτυπώνεται ως εξής:

$$\max \theta_{j_0} = \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{r_{j_0}}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{i j_0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{r_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{i j} \leq 0 \, , \; j = 1,\ldots,n$$

$$u_r \, , \, v_i \geq 0 \, , r = 1,\ldots,s \, , \; i=1,\ldots,m$$

Μια βέλτιστη λύση για το γραμμικό αυτό πρόβλημα είναι μια λύση της μορφής: (θ^*, u^*, v^*) , όπου τα u^* και v^* ικανοποιούν τους περιορισμούς της πιο πάνω μοντελοποίησης.Για να έχει επιτευχθεί η αποδοτικότητα κατά το CCR μοντέλο πρέπει να ισχύει για την DMUo μονάδα:

Η DMUo είναι αποδοτική κατά το CCR αν $\theta^* = 1$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα βέλτιστο (u^*, v^*) , με $u^* > 0$ και $v^* > 0$.

Πρόσφατα, οι Cook και Zhu (2009) και Cook και λοιποί (2009) χαλάρωσαν την υπόθεση γραμμικότητας για τις εισροές και τις εκροές με τη χρησιμοποίηση μιας τμηματικά γραμμικής αναπαράστασης της συνάρτησης αξίας για ορισμένες εκροές.

Στο paper Data envelopment analysis with nonlinear virtual inputs and outputs Despotis et al.(2009) , παρουσιάζεται επιπλέον, μια γενική προσέγγιση μοντελοποίησης με συγκεκριμένες μορφοποιήσεις για το χειρισμό των μη γραμμικών εικονικών εκροών και εισροών στη DEA.Οι μορφοποιήσεις αυτές , οδηγούν σε ένα μετασχηματισμό των αρχικών δεδομένων σε ένα σύνολο δεδομένων, στο οποίο τα συνηθισμένα πρότυπα DEA μπορούν έπειτα να εφαρμοστούν για να αξιολογήσουν την αποδοτικότητα των μονάδων.

Πιο συγκεκριμένα, στο προαναφερθέν paper, αναπτύσσονται οι μετασχηματισμοί που μοντελοποιούν τις μη-γραμμικές συναρτήσεις αξίας των εισροών και εκροών σε κατά τμήματα γραμμικές.

Οι μετασχηματισμοί γίνονται απευθείας στις εικονικές εκροές και εισροές και είναι έτσι άμεσα εφαρμόσιμες στην κανονική μορφή του προτύπου DEA.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ας δούμε τώρα πιο αναλυτικά πως μοντελοποιούνται στο paper οι μη-γραμμικές εκροές και οι μη-γραμμικές εισροές.

Στη μεθοδολογία CCR κάθε DMU j (με j Є [n]) θεωρούμε πως καταναλώνει ένα σύνολο από m μεταβλητές εισροών οι οποίες αποθηκεύονται σε ένα διάστημα $X_j=[x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}]$ και παράγει ένα σύνολο s μεταβλητών εκροών οι οποίες αποθηκεύονται σε ένα διάστημα $Y_j=[y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}]$.

Προκειμένου η κάθε μονάδα να είναι αποδοτική έχει τη δυνατότητα να σταθμίσει με διαφορετικό τρόπο την κάθε μεταβλητή εισροής (x_{ij}) και την κάθε μεταβλητή εκροής (y_{rj}) .

Στην παραδοσιακή γραμμική προσέγγιση η συνολική αποτίμηση των εισροών γίνεται με μια έκφραση της μορφής:

$$U(X_j)=\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \quad \text{total virtual input για την DMU j} \qquad (1)$$

Αντίστοιχα, η συνολική αποτίμηση των εκροών δίνεται από μια έκφραση της μορφής:

$$U(Y_j)=\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \quad \text{total virtual output για την DMU j} \qquad (2)$$

Η χαλάρωση της υπόθεσης της γραμμικότητας έχει σαν συνέπεια την αλλαγή του τρόπου με τον οποίο υπολογίζεται η συνεισφορά της κάθε μεταβλητής εκροής και εισροής για το total virtual input και το total virtual output ,αντίστοιχα για τις DMU j.

Συγκεκριμένα θεωρείται πως η συνεισφορά της κάθε εισροής δίνεται από μια μη-γραμμική συνάρτηση $u_i()$ η οποία επιστρέφει το virtual input για την κάθε εισροή (x_{ij}) ως $U_i(x_{ij})$ με i Є [m].

Αντίστοιχα, η συνεισφορά της κάθε εκροής δίνεται από μια μη-γραμμική συνάρτηση $U_r()$ η οποία επιστρέφει το virtual output για την εκροή (y_{rj}) ως $U_r(y_{rj})$.

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο total virtual output για την DMU j μέσα στο πλαίσιο της γραμμικής αποτίμησης των επιμέρους εκροών θα έχουμε ότι το total virtual output θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$U(Y_j)=\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \qquad (3)$$

Στο paper Data envelopment analysis with nonlinear virtual inputs and outputs περιγράφεται διεξοδικά η μεθοδολογία με βάση την οποία υπολογίζονται οι μη-γραμμικές συναρτήσεις $U_r()$ με r Є [s].(Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και στις εισροές).

1. Υπολογίζεται το εύρος $[l_r, h_r]$ της κάθε εκροής (y_r) για το σύνολο των DMUs με βάση τις παρακάτω εξισώσεις:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$l_r = \min_{j \in [n]} \{y_{rj}\} \qquad (4)$$

$$h_r = \max_{j \in [n]} \{y_{rj}\} \qquad (5)$$

2. Το εύρος [l_r, h_r] διαμερίζεται σε ένα σύνολο υποδιαστημάτων της μορφής (b_r^k, b_r^{k+1}] με k Є [$a_r - 1$] έτσι ώστε $b_r^1 = l_r$ και $b_r^{a_r} = h_r$.
3. Με βάση τα παραπάνω για κάθε μεταβλητή $y_{rj} > l_r$ θα υπάρχει ένα και μοναδικό υποδιάστημα ($b_r^{k_j}$, $b_r^{k_j+1}$] έτσι ώστε $y_{rj} \in \left(b_r^{k_j}, b_r^{k_j+1}\right]$.
4. Στη συνέχεια πραγματοποιούνται οι παρακάτω αναθέσεις στις μεταβλητές γ_{rk}^j , για k Є [a_r]:

$$\gamma_{rk}^j = \begin{cases} b_r^1, & k = 1 \\ b_r^k - b_r^{k-1}, & 2 \le k \le k_j \end{cases}$$

και (6)

$$\gamma_{rk}^j = \begin{cases} y_{rj} - b_r^{k_j}, & k = k_j + 1 \\ 0, & k_j + 2 \le k \le a_r. \end{cases}$$

5. Η τιμή $U_r(y_{rj})$ για κάθε $y_{rj} \in \left(b_r^{k_j}, b_r^{k_j+1}\right]$ θα δίνεται από τη σχέση:
6.

$$U_r(y_{rj}) = (\gamma_{r1}^j + \gamma_{r2}^j)\, u_{r1} + \sum_{k=3}^{a_r} \gamma_{rk}^j u_{r,k-1} \qquad (7)$$

όπου οι τιμές των διανυσμάτων u_r = [$u_{r1}, \dots, u_{ra_r}$] με r $\in [s]$ $\varepsilon\Omega\nu\alpha\iota$ ζητούμενα του τελικού γραμμικού προβλήματος.

7. Η τελική τιμή για το total virtual output της DMU j θα δίνεται από τη σχέση:

$$U(Y_j) = \sum_{r=1}^{s} \left\{ (\gamma_{r1}^j + \gamma_{r2}^j)\, u_{r1} + \sum_{k=3}^{a_r} \gamma_{rk}^j u_{r,k-1} \right\} \qquad (8)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Μεθοδολογία UTA

Σκοπός της μεθοδολογίας UTA είναι να προσδιορίσει το βέλτιστο τρόπο αποτίμησης ενός συνόλου A από m εναλλακτικές λύσεις }) στη βάση ενός συνόλου n κριτηρίων C={$g_1, g_2, \dots, g_n$ } ώστε να είναι συμβατός με μια δοσμένη σχέση προτίμησης στο A. Συγκεκριμένα η μεταβλητή g_{ji} μας δίνει την αποτίμηση της εναλλακτικής λύσης $x_j \in A$ από το κριτήριο g_i .
Η γενική μοντελοποίηση για την UTA είναι ως εξής:

Min $\sum_{j \in A} \left(\sigma_j^+ + \sigma_j^-\right)$

$U_j(x) - U_{j+1}(x) - \sigma_j^+ + \sigma_j^- + \sigma_{j+1}^+ - \sigma_{j+1}^-$ > δ ,αν jPj+1

$U_j(x) - U_{j+1}(x) - \sigma_j^+ + \sigma_j^- + \sigma_{j+1}^+ - \sigma_{j+1}^-$ =0 ,αν jIj+1

$\sum_{q \in C} \sum_{i=1}^{a_q - 1} x_{qi}$ =1

x≥ 0, $\sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0$, j$\in A$

Όπου : σ_j^+ κτλ τα σφάλματα

$U_j(x)$ η ολική χρησιμότητα για κάθε εναλλακτική j

Σύμφωνα με το μοντέλο συνάθροισης των κριτηρίων που χρησιμοποιείται στην UTA , η συνολική αποτίμηση των κριτηρίων g=[$g_1, g_2, [\dots, g] _{(n)}]$ θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i (g_i) \qquad (9)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Οι επιμέρους συναρτήσεις u_i ( ) είναι **μη-γραμμικές** και επιστρέφουν την αποτίμηση του κριτηρίου g_i ως $p_i u_i(g_i)$ ικανοποιώντας τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{10}$$

$$u_i(g_{i*}) = 0, \forall\ i \in [n] \tag{11}$$

$$u_i(g_i^*) = 1, \forall\ i \in [n] \tag{12}$$

$$g_{i*} = \min_{j \in [m]}\{g_{ji}\}, \forall\ i \in [n] \tag{13}$$

$$g_i^* = \max_{j \in [m]}\{g_{ji}\}, \forall\ i \in [n] \tag{14}$$

Στην ίδια λογική η αποτίμηση της εναλλακτικής λύσης $x_j \in A$ από το σύνολο των κριτηρίων g=[$g_1 1, g_1 2, [\ldots, g] _1(n)]$ θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u(g_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i (g_{ji}) \tag{15}$$

Η σχέση (9) είναι ισοδύναμε με μια σχέση της μορφής:

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i) \tag{16}$$

όπου οι μη-γραμμικές συναρτήσεις u_i ( ) θα πρέπει να ικανοποιούν τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(g_i^*) = 1 \tag{17}$$

$$u_i(g_{i*}) = 0, \forall\ i \in [n] \tag{18}$$

Η σχέση (16) για την αποτίμηση μιας συγκεκριμένης εναλλακτικής λύσης $x_j \in A$ μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$u(g_j) = \sum_{i=1} u_i(g_{ji}), \forall\ j \in [m] \tag{19}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Αν η σχέση (19) ήταν η ιδανική για την αποτίμηση της εναλλακτικής λύσης ($x_j \in A$) τότε στην πράξη θα εκτιμούσαμε μια έκφραση της μορφής:

$$u^{*}(g_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_{ji}) + \sigma_j, \forall j \in [m] \quad (20)$$

Το πρόβλημα και εδώ έχει να κάνει με τον υπολογισμό των επιμέρους μη-γραμμικών συναρτήσεων u_i ( ) για την αποτίμηση του κριτηρίου g_i .Στο paper Siskos, Y., E. Grigoroudis and F. Matsatsinis (2008), UTA METHODS αναλύεται διεξοδικά η μεθοδολογία κατά την οποία υπολογίζονται οι συναρτήσεις u_i ( ) με i$\in [n]$:

1. Υπολογίζεται το εύρος $[g_1(i *), g_1 i^{\dagger} *]$ για την μεταβλητή του κριτηρίου (g_i) για το σύνολο των εναλλακτικών λύσεων σύμφωνα με τις σχέσεις (13,14).
2. Το εύρος $[g_1(i *), g_1 i^{\dagger} *]$ διαμερίζεται σε ένα σύνολο υποδιαστημάτων της μορφής $[g_1 i^{\dagger} k, g_1 i^{\dagger}(k+1)]$ με k $\in$ $[a_i - 1$] έτσι ώστε:

$$g_i^k = g_{i*} + \frac{k-1}{a_i - 1}(g_1(i-)^{\dagger} * g_1(i *)) \quad (21)$$

3. Η τιμή u_i (g_{ji}) για κάθε $g_{ji} \in [g_1 i^{\dagger} k, g_1 i^{\dagger}(k+1)]$ θα προσεγγίζεται από μια έκφραση της μορφής:
4. u_i (u_i

$$g_{ji}) = u_i(g_i^k) + \frac{g_{ji} - g_i^k}{g_i^{k+1} - g_i^k}[u_i(g_i^{k+1}) - (g_i^k)] \quad (22)$$

όπου οι τιμές $u_i(g_i^k)$ $\forall$ i $\in [n]$ και $\forall$ j $\in [m]$ είναι αυτές που θα προσδιοριστούν στο τελικό γραμμικό πρόβλημα.

Σύνδεση μεθοδολογιών UTA-DEA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Όπως παρουσιάστηκε και προηγουμένως, τα δεδομένα της μεθοδολογίας UTA είναι ένα σύνολο $A = \{x_1 1, x_1 2 \dots, x_1 m$ } από m αντικείμενα ή εναλλακτικές οι οποίες αποτιμώνται με βάση ένα σύνολο G ={$g_1, g_2, \cdots, g_n,$ } n κριτηρίων.

Για το σύνολο των m εναλλακτικών λύσεων έχουμε στη διάθεσή μας μια σχέση ασθενούς προτίμησης R , με βάση την οποία τα αντικείμενα /εναλλακτικές του συνόλου A μπορούν να ταξινομηθούν σε φθίνουσα σειρά προτίμησης.

Έστω $A^{'}$ = {$x_1 1^{r'}, x_1 2^{r'}, \dots, x_1 m^{r}$} το σύνολο των διατεταγμένων σε φθίνουσα σειρά εναλλακτικών με βάση τη σχέση R έτσι ώστε :R($x_1 j$) $\geq \mathbf{R}(x_{j+1})$

Με άλλα λόγια έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο αναφοράς $A^{'}$ *της παρακΦτω μορφΨς:*

		CRITERIA				B
		g_1	g_2	…	g_n	
Alternatives	x_1	g_{11}	g_{12}	I	g_{1n}	R_1
	x_2	g_{21}	g_{22}	…	g_{2n}	R_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	x_m	g_{m1}	g_{m2}	…	g_{mn}	R_m

με $R_j \geq R_{j+1}$, $\forall$ j $\in [m-1]$.

Η μεθοδολογία UTA χρησιμοποιεί το μοντέλο συνάθροισης των κριτηρίων προκειμένου να εκτιμήσει την αποτίμηση της κάθε εναλλακτικής x_j ως προς το κριτήριο g_i .

Συγκεκριμένα , η αποτίμηση της εναλλακτικής x_j ως προς το κριτήριο g_i δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u_i\,(g_{ji}) = f(g_{ji})\,,\ \forall\ i \in [n]\ \text{και}\ \forall\ j \in [m] \qquad (23)$$

η οποία στη γενική περίπτωση είναι μη γραμμική.Έτσι , η συνολική αποτίμηση της εναλλακτικής x_j ως προς το σύνολο των n κριτηρίων θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u(X_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_{ji})\,,\ \forall\ j \in [m] \qquad (24)$$

Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε τις συναρτήσεις $u_i(\cdot)$ ώστε η αποτίμηση των εναλλακτικών να είναι κατά το μέγιστο δυνατό βαθμό συμβατή με τη δοθείσα σχέση ασθενούς προτίμησης R.

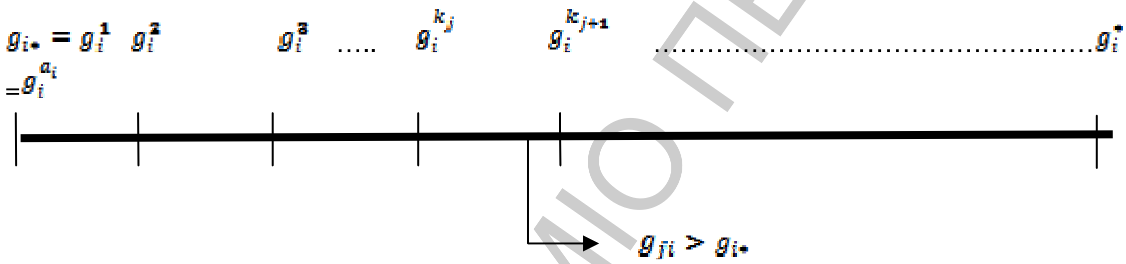
Η ενσωμάτωση της μεθοδολογίας της DEA έχει να κάνει με τη διαδικασία γραμμικοποίησης των συναρτήσεων $u_i(\cdot)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Η διαδικασία γραμμικοποίησης στην DEA , εάν εφαρμοστεί για την γραμμικοποίηση των συναρτήσεων u_i (·) θα έχει σα συνέπεια η συνάρτηση αποτίμησης της j-οστής εναλλακτικής προς το i_οστό κριτήριο να πάρει τη μορφή:

$$u_i(g_{ji}) = \llbracket(\delta\rrbracket_{\downarrow}(i,1)^{\uparrow}j + \delta^j_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^j_{i,k} * w_{i,k-1} \quad (25)$$

Όπου τα $\delta^j_{i,k}$ έχουν να κάνουν με τη διαμέριση του διαστήματος της τιμής του i-οστού κριτηρίου $[g_{\downarrow}(i\ *), g_{\downarrow}i^{\uparrow}*]$ σε υποδιαστήματα της μορφής ($g_{\downarrow}i^{\uparrow}k, g_{\downarrow}i^{\uparrow}(k+1)]$ για k $\in$ $[a_{i-1}]$ και του ακριβούς υποδιαστήματος ($g_{\downarrow}i^{\uparrow}(k_{\downarrow}j\ ), g_{\downarrow}i^{\uparrow}(k_{\downarrow}j+1)]$ στο οποίο βρίσκεται η συγκεκριμένη τιμή g_{ji}.



Οι τιμές των $\delta^j_{i,k}$ για i $\in [n]$, j $\in [m]$ και k $\in$ $[a_i]$ δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta^j_{i,1} = g_{i*}\ ,\ \delta^j_{i,2} = g_i^2 - g_i^1\ ,\ \ldots,\ \delta^j_{i,k_j} = g_i^{k_j} - g_i^{k_{j-1}}\ , = g_{ji} - g_i^{k_j}, \delta^j_{i,k_{j+2}} = 0, \ldots,\ \delta^j_{i,a_i} = 0$$

Ενώ η συνεισφορά του κάθε υποδιαστήματος ($g_{\downarrow}i^{\uparrow}k, g_{\downarrow}i^{\uparrow}(k+1)]$ σταθμίζεται από ένα βάρος $w_{i,k}$, με i $\in [n]$ και k $\in$ $[a_i]$.

Επομένως , ζητούμενο της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων $w_{i,k}$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε η συνολική αποτίμηση των κριτηρίων για το σύνολο των m εναλλακτικών να είναι κατά το μέγιστο δυνατό βαθμό συμβατή με τη δοθείσα σχέση R.

Η συνολική αποτίμηση της εναλλακτικής x_j ως προς το σύνολο των n κριτηρίων θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$u(X_j) = \Sigma_{\downarrow}(i=1)^{\uparrow}n \blacksquare [\ \llbracket(\delta\rrbracket_{\downarrow}(i,1)^{\uparrow}j + \delta^j_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^j_{i,k} * w_{i,k-1}\ ] \quad (26)$$

η οποία στη γενική περίπτωση μπορεί να περιέχει και έναν όρο σφάλματος ως εξής:

$$u^{'}(X_j) = u(X_j) + \sigma_j \quad (27)$$

Η εύρεση των βέλτιστων τιμών για τα $w_{i,k}$ με i $\in [n]$ και k $\in$ $[a_i]$ και σ_j $\mu\varepsilon$ j $\in [m]$ προκύπτει από την επίλυση του παρακάτω γραμμικού προγράμματος:

$$\sum_{j\in[m]} \sigma_j$$

Minimize

Υπό τους περιορισμούς:

$$\Sigma_{\downarrow}(i=1)^{\uparrow}n \,[\; [(\delta]\; {\downarrow}(i,1)^{\uparrow}j + \delta^{j}_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^{j}_{i,k} * w_{i,k-1} \;] \; -$$

$$\Sigma_{\downarrow}(i=1)^{\uparrow}n \,[\; [(\delta]\; {\downarrow}(i,1)^{\uparrow}(j+1) + \delta^{j+1}_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^{j+1}_{i,k} * w_{i,k-1} \;]$$

$$> \rho \,, \gamma\iota\alpha\; x_j \; P \; x_{j+1}$$

$$+\sigma_j \; - \; \sigma_{j+1}$$

$$\Sigma_{\downarrow}(i=1)^{\uparrow}n \,[\; [(\delta]\; {\downarrow}(i,1)^{\uparrow}j + \delta^{j}_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^{j}_{i,k} * w_{i,k-1} \;] \; -$$

$$\Sigma_{\downarrow}(i=1)^{\uparrow}n \,[\; [(\delta]\; {\downarrow}(i,1)^{\uparrow}(j+1) + \delta^{j+1}_{i,2})*w_{i,1} + \sum_{k=3}^{a_i} \delta^{j+1}_{i,k} * w_{i,k-1} \;]$$

$$+\sigma_j \; - \; \sigma_{j+1} = 0 \,, \gamma\iota\alpha\; x_j \; I \; x_{j+1}$$

$$\sigma_j \geq 0, \forall \; j \in [m]$$

$$w_{i,k} \geq 0, \forall\; k \in [a_{i-1}] \;\kappa\alpha\iota\; i \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{a_{i-1}} w_{i,k} = 1$$

(28)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Έλεγχος της υπόθεσης της UTA ότι η ελάχιστη αξία του κριτηρίου είναι διάφορη του μηδενός

Στη δεύτερη φάση της διπλωματικής εξετάζουμε αν τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας UTA είναι τα ίδια είτε οι αξίες των υποκριτηρίων ξεκινάνε από το μηδέν , είτε από ένα αριθμό μεγαλύτερο του μηδενός.

Εμφανίζουμε αρχικά ένα αριθμητικό παράδειγμα.Εδώ η μέγιστη τιμή χρησιμότητας κάθε κριτηρίου είναι το 175 και η ελάχιστη το 85.Για να χωρίσουμε τη συνολική χρησιμότητα κάθε κριτηρίου σε 3 διαστήματα παίρνουμε τρία breakpoints στο 85, 95 και στο 125 :

	$U(c_1)$	$[U(c]_2)$	$[U(c]_3)$	U(c)
	95	30	20	145
	95	30	0	125
	95	10	0	105
	95	30	5	130
	85	0	0	85
	95	30	50	175
Min	85	0	0	
Max	95	30	50	

Table I

Ισχύει γενικά ότι:

a. $U(C)=U(c_1) + U(c_2) + [U(c]_3)$ και:

b. $[U(c]_i^{'}) = \frac{[U(c]_i) - U(c_{i,min})}{[U(c]_{i,max}) - U(c_{i,min})}$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου η ελάχιστη αξία του υποκριτηρίου είναι το 0.Δηλαδή:

$U(c_{i,min}) = 0 \ \forall\, i\,[3]$.
(*)

Λόγω αυτής της υπόθεσης (*) οι χρησιμότητες των υποκριτηρίων κανονικοποιούνται όπως εξετάζουμε στη b περίπτωση.

Τότε ο πιο πάνω πίνακας γράφεται στη μορφή:

Alternative	$[U(c]_1^{'})$	$[U(c]_2^{'})$	$[U(c]_3^{'})$	RANK	U(c)	$U(x_i)$
x_2	1	1	2/5	2	145	$y_1 + y_2 + 0.4y_3$
x_4	1	1	0	4	125	$y_1 + y_2$
x_5	1	1/3	0	5	105	$y_1 + 0.3y_2$
x_3	1	1	1/10	3	130	$y_1 + y_2 + 0.1y_3$
x_6	85/95	0	0	6	85	$0.895y_1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

x_1	1	1	1	1	175	$y_1 + y_2 + y_3$

Table II

Ισχύει ότι:

$\bar{U}(x_i) = u_1 (c_1 1^{\uparrow'}) + u_2 (c_1 2^{\uparrow'}) + u_1 3 \; (c_1 3^{\uparrow'})$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

u_i

$(c_1 i^{\uparrow'}) = c_i' * y_i$, $\forall$ i $\in [3]$

Ο πίνακας κατάταξης ΙΙ ,ταξινομεί τις εναλλακτικές κατά φθίνουσα σειρά βάσει της συνολικής αξίας των υποκριτηρίων c . Προσθέτοντας τα σφάλματα προκύπτει ο πίνακας της εξής μορφής:

Alternative	$[U(c]'_1)$	$[U(c]_1 2^{\uparrow'})$	$[U(c]'_3)$	RANK	C(x_i)	$\bar{U}(x_i)$
x_2	1	1	2/5	2	145	$y_1 + y_2 + 0.4 y_3 + \sigma_2$
x_4	1	1	0	4	125	$y_1 + y_2 + \sigma_4$
x_5	1	1/3	0	5	105	$y_1 + 0.3 y_2 + \sigma_5$
x_3	1	1	1/10	3	130	$y_1 + y_2 + 0.1 y_3 + \sigma_3$
x_6	85/95	0	0	6	85	$0.895 y_1 + \sigma_6$
x_1	1	1	1	1	175	$y_1 + y_2 + y_3 + \sigma_1$

Table III

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της UTA εκφράζεται ως ακολούθως:

Min $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$

Υ.π.

$\bar{U}(x_1) - \bar{U}(x_2) > \delta$

$\bar{U}(x_2) - \bar{U}(x_3) > \delta$

$\bar{U}(x_3) - \bar{U}(x_4) > \delta$

$\bar{U}(x_4) - \bar{U}(x_5) > \delta$

$\bar{U}(x_5) - \bar{U}(x_6) > \delta$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \geq 0$

Αναπτύσσοντας το πρόβλημα παίρνουμε:

Min $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Υ.π.

$0.6y_3 + \sigma_1$

$-\sigma_2 > \delta$

$0.3y_3 + \sigma_2$

$-\sigma_3 > \delta$

$0.1y_3 + \sigma_3$

$-\sigma_4 > \delta$

$0.7y_2 + \sigma_4 - \sigma_5 > \delta$

$0.105y_1 + 0.3y_2 + \sigma_5 - \sigma_6 > \delta$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \geq 0$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου η ελάχιστη αξία του κριτηρίου δεν είναι το 0.Δηλαδή ισχύει :

$[U(c]_{1,min}) = 85$

$[U(c]_{2,min}) = 0$

$[U(c]_{3,min}) = 0$

Τότε ο πίνακας I γράφεται στη μορφή:

Alternative	$[U(c]'_1)$	$[U(c]_{1}2'$)	$[U(c]'_3)$	RANK	U(c)	U(x_i)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

x_2	1	1	2/5	2	145	$y_1 + y_2 + 0.4y_3$
x_4	1	1	0	4	125	$y_1 + y_2$
x_5	1	1/3	0	5	105	$y_1 + 0.3y_2$
x_3	1	1	1/10	3	130	$y_1 + y_2 + 0.1y_3$
x_6	0	0	0	6	85	
x_1	1	1	1	1	175	$y_1 + y_2 + y_3$

Table IV

Ισχύει πάλι ότι:

$U(x_i) = u_1 (c_1 1^{\dagger}) + u_2 (c_1 2^{\dagger}) + u_1 3 \ (c_1 3^{\dagger})$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

u_i

$(c_1 i^{\dagger}) = c_i^{'} * y_i$, $\forall$ i ∈ [3]

Στον πίνακα κατάταξης IV προσθέτοντας τα σφάλματα προκύπτει ο πίνακας της εξής μορφής:

Alternative	$c_1^{'}$	$c_2^{'}$	$c_3^{'}$	RANK	C(x_i)	$\overline{\mathbf{U}}(x_i)$
x_2	1	1	2/5	2	145	$y_1 + y_2 + 0.4y_3 + \sigma_2$
x_4	1	1	0	4	125	$y_1 + y_2 + \sigma_4$
x_5	1	1/3	0	5	105	$y_1 + 0.3y_2 + \sigma_5$
x_3	1	1	1/10	3	130	$y_1 + y_2 + 0.1y_3 + \sigma_3$
x_6	0	0	0	6	85	
x_1	1	1	1	1	175	$y_1 + y_2 + y_3 + \sigma_1$

Table V

Η Μοντελοποίηση του προβλήματος είναι ως εξής:

Min $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$

Υ.π.

$\overline{\mathbf{U}}(x_1) - \overline{\mathbf{U}}(x_2) > \delta$

$\overline{\mathbf{U}}(x_2) - \overline{\mathbf{U}}(x_3) > \delta$

$\overline{\mathbf{U}}(x_3) - \overline{\mathbf{U}}(x_4) > \delta$

$\overline{\mathbf{U}}(x_4) - \overline{\mathbf{U}}(x_5) > \delta$

$\overline{\mathbf{U}}(x_5) - \overline{\mathbf{U}}(x_6) > \delta$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \geq 0$

Αναπτύσσοντας το πρόβλημα έχουμε:

Min $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$
Υ.π.
$0.6y_3 + \sigma_1$

$-\sigma_2 > \delta$
$0.3y_3 + \sigma_2$

$-\sigma_3 > \delta$
$0.1y_3 + \sigma_3$

$-\sigma_4 > \delta$
$0.7y_2 + \sigma_4 - \sigma_5 > \delta$
$y_1 + 0.3y_2 + \sigma_5 - \sigma_6 > \delta$
$y_1 + y_2 + y_3 = 1$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \geq 0$

Απόδειξη ότι τα δυο προβλήματα δεν είναι ισοδύναμα

Έστω ότι m είναι ο αριθμός των εναλλακτικών επιλογών έτσι ώστε:
X = { $x_1, x_2, \dots, x_m$ } (I) .
Ας υποτεθεί ότι οι είσοδοι του X είναι ταξινομημένες κατά φθίνουσα διάταξη ως προς τη συνολική χρησιμότητά τους.
Έχουμε ένα κριτήριο το οποίο χωρίζουμε σε n υποκριτήρια έτσι ώστε:
c_n

c = { c_1 , c_2 ,…, }
Η μήτρα των τιμών των υποκριτηρίων c ανά εναλλακτική είναι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$c^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$

Τώρα λαμβάνουμε υπόψη τα δυο σενάρια :

A. Μήτρα $c^{T'}$, έτσι ώστε: $c'_{ij} = \frac{c_{ij} - c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$, όπου $c_{i,min}$ =0 $\forall$ i $\in [n]$ και $c_{i,max} = \max_{j\in[m]}\{c_{ij}\}$

B. Μήτρα $c^{T''}$, έτσι ώστε: $c''_{ij} = \frac{c_{ij} - c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$, όπου $c_{i,min} = \min_{j\in[m]}\{c_{ij}\}$ $\forall$ i $\in [n]$ και $c_{i,max} = \max_{j\in[m]}\{c_{ij}\}$

Για την περίπτωση Α έχουμε το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης :

Min $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j$

Υ.π.

$\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

$\lambda_{11}y_1 + \lambda_{21}y_2 + \cdots + \lambda_{n1}y_n - \sigma_1 + \sigma_2$ **< -δ,**

$\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

$\lambda_{12}y_1 + \lambda_{22}y_2 + \cdots + \lambda_{n2}y_n - \sigma_2 + \sigma_3$ **<-δ,**

.

.

σ_m

$\lambda_{1,m-1}y_1 + \lambda_{2,m-1}y_2 + \cdots + \lambda_{n,m-1}y_n - \sigma_{m-1} +$ **<-**

$,\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

δ

$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

$\lambda_{11}y_1 + \lambda_{21}y_2 + \cdots + \lambda_{n1}y_n - \sigma_1 + \sigma_2$ **=0,**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$$

$\lambda_{12}y_1 + \lambda_{22}y_2 + \cdots + \lambda_{n2}y_n - \sigma_2 + \sigma_3$ =0,

.

.

σ_m

$\lambda_{1,m-1}y_1 + \lambda_{2,m-1}y_2 + \cdots + \lambda_{n,m-1}y_n - \sigma_{m-1} +$ =0, $\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

$\sum_{i=1}^{n} y_i$ =1

$y_i \geq 0$, $\forall$ i $\in [n]$

$\sigma_j \geq 0$, $\forall$ j $\in [m]$

δ> 0 και λ_{ij} = $c'_{i,j+1}$ - $c'_{i,j}$

Και για την περίπτωση Β έχουμε το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης :

Min $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j$

Υ.π.

$$\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$

$\mu_{11}y_1 + \mu_{21}y_2 + \cdots + \mu_{n1}y_n - \sigma_1 + \sigma_2$ < -δ,

$$\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$

$\mu_{12}y_1 + \mu_{22}y_2 + \cdots + \mu_{n2}y_n - \sigma_2 + \sigma_3$ < -δ,

.

.

.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σ_m

$\mu_{1,m-1}y_1 + \mu_{2,m-1}y_2 + \cdots + \mu_{n,m-1}y_n - \sigma_{m-1} +$ < -
$\gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

δ,

$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

$\mu_{11}y_1 + \mu_{21}y_2 + \cdots + \mu_{n1}y_n - \sigma_1 + \sigma_2$ =0,
$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

$\mu_{12}y_1 + \mu_{22}y_2 + \cdots + \mu_{n2}y_n - \sigma_2 + \sigma_3$ =0,

.

.

.

σ_m

$\mu_{1,m-1}y_1 + \mu_{2,m-1}y_2 + \cdots + \mu_{n,m-1}y_n - \sigma_{m-1} +$ =0,
$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

$\sum_{i=1}^{n} y_i$ =1

$y_i \geq 0$, $\forall$ i $\in [n]$

$\sigma_j \geq 0$, $\forall$ j $\in [m]$

δ> 0 και μ_{ij} = $c'^{\prime}_{i,j+1}$ - $c'^{\prime}_{i,j}$

Ισχύει ότι: = $c'_{i,j+1}$ - $c'_{i,j}$ = $\frac{c_{ij+1}}{c_{i,max}}$ - $\frac{c_{ij}}{c_{i,max}}$ = $\frac{c_{ij+1-c_{ij}}}{c_{i,max}}$, με $-1 \leq \lambda_{ij} \leq 1$

Για το μ_{ij} ισχύει: = $c'^{\prime}_{i,j+1}$ - $c'^{\prime}_{i,j}$ = $\frac{c_{i,j+1} - c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$ - $\frac{c_{ij} - c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$ = $\frac{c_{i,j+1} - c_{ij}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$

Άρα $\mu_{ij} > \lambda_{ij}$, $\forall$ i $\in [n]$ $\kappa\alpha\iota$ $\forall$ j $\in [m]$ καθώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$\mu_{ij} = \frac{c_{i,max}}{c_{i,max} - c_{i,min}}\lambda_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij} = \frac{(c_{i,max} - c_{i,min}) + c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}\lambda_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij} =$
$\left[1 + \frac{c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}\right]\lambda_{ij} \leftrightarrow$

$\mu_{ij} = [1 + \varepsilon_i]\lambda_{ij}$ **όπου** $\varepsilon_i = \frac{c_{i,min}}{c_{i,max} - c_{i,min}}$ **με** $\varepsilon_i > 0$ **αφού** $c_{i,min} < c_{i,max}$.

Για να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δύο γραμμικών προγραμμάτων που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις Α και Β θα πρέπει να δειχθεί ότι οι βέλτιστες λύσεις του ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης, οι οποίες προφανώς θα ικανοποιούν το σύνολο των γραμμικών του περιορισμών, θα ικανοποιούν και το σύνολο των γραμμικών περιορισμών του άλλου προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Η συνεπτυγμένη μορφή των δύο γραμμικών προγραμμάτων παρουσιάζεται παρακάτω:

(LP I)

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sigma_j$$

Υ.π.

$$\lambda_{1r}y_1 + \lambda_{2r}y_2 + \cdots + \lambda_{nr}y_n < \xi_r, \forall r \in [m-1]\ \mu\varepsilon\ \xi_r = (\sigma_r - \sigma_{r+1}) - \delta\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$
$$\lambda_{1r}y_1 + \lambda_{2r}y_2 + \cdots + \lambda_{nr}y_n = \xi_{rt}, \forall r \in [m-1]\ \mu\varepsilon\ \xi_{rt} = (\sigma_r - \sigma_{r+1}), \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} \quad \text{(I)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$
$$y_i \geq 0$$
$$\sigma_j \geq 0$$
$$\delta > 0$$

(LP II)

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sigma_j$$

s.t.

$$\mu_{1r}y_1 + \mu_{2r}y_2 + \cdots + \mu_{nr}y_n < \xi_r, \forall r \in [m-1]\ \mu\varepsilon\ \xi_r = (\sigma_r - \sigma_{r+1}) - \delta\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$
$$\mu_{1r}y_1 + \mu_{2r}y_2 + \cdots + \mu_{nr}y_n = \xi_{rt}, \forall r \in [m-1]\ \mu\varepsilon\ \xi_{rt} = (\sigma_r - \sigma_{r+1}), \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} \quad \text{(II)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$
$$y_i \geq 0$$
$$\sigma_j \geq 0$$
$$\delta > 0$$

θα μπορούσε να γραφεί και ως εξής:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

(LP I)

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sigma_j$$

Υ.π.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir} y_i + \delta + \omega_r < 0, \forall r \in [m-1]\,, \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir} y_i + \omega_r = 0, \forall r \in [m-1]\,, \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} (III)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$y_i \geq 0$$

$$\sigma_j \geq 0$$

$$\delta > 0$$

(LP II)

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sigma_j$$

Υ.π.

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i + \delta + \omega_r < 0, \forall r \in [m-1]\,, \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i + \omega_r = 0, \forall r \in [m-1]\,, \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} (IV)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$y_i \geq 0$$

$$\sigma_j \geq 0$$

$$\delta > 0$$

θεωρώντας την ποσότητα $\omega_r = \sigma_{r+1} - \sigma_r$.

Λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία διατύπωση των γραμμικών προγραμμάτων είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως ο χώρος των εφικτών τους λύσεων περιλαμβάνει όλα τα σημεία $y \in \mathbb{R}_+^n$ με $y = (y_1, y_2, \dots y_n)\ \mu\varepsilon\ y_i \in \mathbb{R}_+$, τα οποία βρίσκονται πάνω στο υπερεπίπεδο που δίνεται από την εξίσωση $\sum_{i=1}^{n} y_i - 1 = 0$ και συγχρόνως ικανοποιούν ένα σύνολο από γραμμικούς περιορισμούς που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir} y_i + \delta + \omega_r < 0, \forall r \in [m-1]\,, \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir} y_i + \omega_r = 0, \forall r \in [m-1]\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} (V)$ και

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i + \delta + \omega_r < 0, \forall r \in [m-1]\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i + \omega_r = 0, \forall r \in [m-1]\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1} (VI)$ αντίστοιχα.

Σκοπός επομένως των δύο γραμμικών προγραμμάτων (LPI) και (LP II) είναι η εύρεση ενός βέλτιστου σημείου $y \in \mathbb{R}_+^n$ το οποίο θα ανήκει στο υπερεπίπεδο $\sum_{i=1}^{n} y_i - 1 = 0$ και θα είναι συσχετισμένο με ένα βέλτιστο σύνολο χαλαρών μεταβλητών $\omega_r \in \mathbb{R}, \forall r \in [m-1]$ ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί (III) και (IV) αντίστοιχα.

Θεωρούμε τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος (LPII) $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_+^n$ η οποία θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του υπερεπιπέδου $\sum_{i=1}^{n} y_i^* - 1 = 0$ και θα είναι συσχετισμένη με ένα βέλτιστο σύνολο χαλαρών μεταβλητών $\omega_r^* \in \mathbb{R}, \forall r \in [m-1]$ έτσι ώστε να ικανοποιείται το σύνολο των γραμμικών περιορισμών:

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i^* + \delta + \omega_r^* < 0, \forall r \in [m-1], \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1}$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i^* + \omega_r^* = 0, \forall r \in [m-1]\ , \gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$.Μάλιστα, οι βέλτιστες τιμές των $\omega_r^*, \forall r \in [m-1]$ καθορίζουν και τα σύνορα των υποχώρων που βρίσκονται μεταξύ της αρχής των αξόνων και των αντίστοιχων υπερεπιπέδων $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i^* + \delta + \omega_r^*, \forall r \in [m-1]$ τα οποία τέμνουν καθέναν από τους $i \in [n]$ άξονες στα σημεία:

$y_i = -\dfrac{\delta + \omega_r^*}{\mu_{ir}}, \forall r \in [m-1], \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1} (VII)$.

Επιπλέον , $\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$ οι βέλτιστες λύσεις καθορίζουν και το υπερεπίπεδο $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ir} y_i^* + \omega_r^* + 0, \forall r \in [m-1]$ το οποΩο τΧμνει καθΧναν από τους Φξονες στα σημεΩα $y_i = -\dfrac{\omega_r^*}{\mu_{ir}}, \forall r \in [m-1$ **(VIII).**

Η σχέση (VII) μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$y_i = -\dfrac{\delta + \omega_r^*}{(1+\varepsilon_i)\lambda_{ir}}, \forall r \in [m-1]\ (IX)$ καθώς $\mu_{ir} = (1+\varepsilon_i)\lambda_{ir}$.

Και η σχέση ($VIII$) μπορεί να γραφεί στη μορφή :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

$$y_i = -\frac{\omega_r^*}{(1+\varepsilon_i)\lambda_{ir}}, \forall r \in [m-1] \quad \textbf{(X)}$$

Συνυπολογίζοντας τη σχέση (V) είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς πως τα σημεία τομής των αξόνων $i \in [n]$ για το σύνολο των υπερεπιπέδων που καθορίζουν τα σύνορα των υποχώρων που αντιστοιχούν στους περιορισμούς ανισότητας και ισότητας του γραμμικού προβλήματος (LPI) θα δίνονται από τη σχέση :

$$y_i = -\frac{\delta + \omega_r}{\lambda_{ir}}, \forall r \in [m-1], \gamma\iota\alpha\ x_j\ P\ x_{j+1} \quad (XI)$$

.Ενώ για

$\gamma\iota\alpha\ x_j\ I\ x_{j+1}$

θα είναι τα σημεία του υπερεπιπέδου:

$$y_i = -\frac{\omega_r}{\lambda_{ir}}, \forall r \in [m-1] \ (XII)$$

Γνωρίζοντας όμως ότι $\varepsilon_i > 0$ και με βάση τις σχέσεις (X) και (XII) φτάνει κανείς στο συμπέρασμα πως καθένας από τους υποχώρους που αντιστοιχούν στους γραμμικούς περιορισμούς του προβλήματος (LPII) δεν περιέχεται μέσα στους αντίστοιχους υποχώρους των γραμμικών περιορισμών του προβλήματος (LPI), καθώς το υπερεπίπεδο που τέμνει καθένα από τους i $\in [n]$ άξονες στα σημεία

:

$$y_i = -\frac{\omega_r}{(1+\varepsilon_i)\lambda_{ir}}, \textit{δεν καλύπτεπται με το υπερεπΩπεδο που τΧμνει καθΧνα από τους } \mathbf{i} \in [n] \textbf{ Φξονες στα σημεΩα}$$

. Συνεπώς, η βέλτιστη λύση $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_+^n$ του γραμμικού προγράμματος (LPII) και οι αντίστοιχες βέλτιστες τιμές των παραμέτρων $\omega_r^* \in \mathbb{R}, \forall r \in [m-1]$ δεν θα ικανοποιούν και το σύνολο των γραμμικών περιορισμών του προβλήματος (LPI). Αυτό σημαίνει πως τα δύο γραμμικά προβλήματα δεν είναι ισοδύναμα.

Θεωρούμε τώρα δυο γραμμικά προβλήματα με πλήθος εναλλακτικών έξι και ένα κριτήριο το οποίο χωρίζουμε σε τρία υποκριτήρια.Θέτουμε 3 breakpoints ένα στο 10 , το άλλο στο 95 και το τελευταίο στο 125.Τα δυο αυτά προβλήματα λύνονται στο Matlab με τυχαία δεδομένα . Προκύπτει ότι δεν είναι πανομοιότυπα.

Για το συγκεκριμένο πλήθος υποκριτηρίων και εναλλακτικών προκύπτουν μη όμοιες οι δυο λύσεις για τα δυο προβλήματα .Συγκεκριμένα εδώ προκύπτει για την πρώτη περίπτωση όπου η ελάχιστη αξία του υποκριτηρίου είναι το μηδέν:

.

:

σ_1	0,45266
σ_2	3,5059e-010
σ_3	4,4809e-011
σ_4	3,266e-011
σ_5	4,5373e-011
σ_6	1,7311e-010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

y_1	0,44797
y_2	3,73e-010
y_3	0,55203

Και για τη δεύτερη περίπτωση όπου η ελάχιστη αξία του κάθε υποκριτηρίου δεν είναι το μηδέν προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

σ_1	0,51643
σ_2	2,0673e-010
σ_3	2,854e-011
σ_4	1,71e-011
σ_5	1,2885e-010
σ_6	1,3772e-010
y_1	0,38007
y_2	3,6234e-010
y_3	0,61993

Όπου :

σ_1 ,…,σ_6 είναι τα σφάλματα και $y_1, \ldots, y_3$ οι τιμές των τριών υποκριτηρίων .

Αλλάζοντας τα breakpoints σε 60 , 70 και 150 προκύπτουν πάλι μη όμοιες λύσεις. Συγκεκριμένα έχουμε για την πρώτη υποπερίπτωση τις ακόλουθες τιμές στα σφάλματα και στις τιμές των υποκριτηρίων:

σ_1	3,1171e-016
σ_2	0,052838
σ_3	0,13732
σ_4	3,5003e-016
σ_5	9,7433e-016
σ_6	1,7139e-016
y_1	0,88432
y_2	0,083677
y_3	0,032006

Και για τη δεύτερη:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σ_1	7,3936e-016
σ_2	0,14304
σ_3	0,57483
σ_4	4,7859e-016
σ_5	4,7281e-016
σ_6	4,6815e-016
y_1	0,57682
y_2	0,35974
y_3	0,063436

Κάνοντας έναν τελευταίο έλεγχο και αλλάζοντας το πλήθος των εναλλακτικών εξισώσεων σε 10 - στο πρόβλημα όπως διατυπώθηκε πιο πάνω - προκύπτουν και για τα δυο προβλήματα πάλι ανόμοιες λύσεις :

σ_1	0,084199
σ_2	0,1408
σ_3	0,10041
σ_4	0,06736
σ_5	0,031298
σ_6	0,13356
σ_7	1,1161e-014
σ_8	1,0123e-015
σ_9	8,2789e-015
σ_{10}	9,2609e-015
y_1	0,97699
y_2	0,023005
y_3	1,0466e-014

Και για τη δεύτερη περίπτωση:

σ_1	2,8185e-014
σ_2	0,49899
σ_3	0,029227

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

σ_4	0,40649
σ_5	0,62381
σ_6	2,0152e-014
σ_7	9,2371e-014
σ_8	8,1088e-015
σ_9	3,5612e-014
σ_{10}	3,6406e-014
y_1	0,17778
y_2	0,017523
y_3	0,80469

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Συμπεράσματα – Περίληψη

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας εκτός από τη γραμμικοποίηση της UTA βάσει της DEA , αποδείχθηκε και μαθηματικά η μη ισοδυναμία των δυο υποθέσεων ότι δηλαδή το γραμμικό πρόβλημα της UTA δεν είναι ισοδύναμο με ένα αντίστοιχο πρόβλημα στο οποίο η ελάχιστη χρησιμότητα του κριτηρίου ξεκινάει από το μηδέν.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικας Matlab

Ο κώδικας του Matlab παρατίθεται :

```
% UTA METHODOLOGY APPLIED ON RANDOM DATA.
% This script file tests the utilization of the UTA methodology on
% two different scenarios.

% SCENARIO #1: The first scenario assumes that the individual
% criteria values for the i-th criterion range within the [0..Ci,max]
% range where Ci,max is the maximum value for the i-th criterion.

% SCENARIO #2: The second scenario assumes that the individual
% criteria values for the i-th criterion range within the
% [Ci,min..Ci,max] range where Ci,min and Ci,max are the minimum and
% maximum values for the i-th criterion.
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

```
% -----------------------------------------------------------------------
% General Variables Definition:
% -----------------------------------------------------------------------
clc
clear all
% Number of criteria to be considered.
subCriteriaNumber = 3;
% The minimum possible value for each criterion.
Cmin = 10;
% The maximum possible value for each criterion.
Cmn = 95;
Cmm = 125;
Cmax = 185;
% Number of alternatives to be considered.
AlternativesNumber =6;
% According to the problem formulation the number of inequalities is by one
% lesser than the number of alternatives considered.
InequalitiesNumber = AlternativesNumber - 1;
% The problem formulation indicates that the total number of variables are
% equal to number of alternatives plus the number of criteria.
VariablesNumber = AlternativesNumber + subCriteriaNumber;
% Internal model parameter.
delta = 0.01;
% -----------------------------------------------------------------------

% Generate Random Criteria Values in the [Cmin,Cmax] Interval:
Co = Cmin + (Cmn-Cmin)*rand(AlternativesNumber,1);
C3=(Cmm - Cmin) * rand(AlternativesNumber,1);
C4= (Cmax - Cmm)* rand(AlternativesNumber,1);

% Generate the corresponding ranking matrix R.
R = unique(AlternativesNumber * rand(1,AlternativesNumber));

% Sort elements in R in descending order.
[Rs,Is] = sort(R,'descend');

% Sort alternatives in C according to the descending ranking order.
Co = Co(Is,:);
C3 = C3(Is,:);
C4 = C4(Is,:);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

```
% ---------------------------------------------------------------
% SCENARIO #1: Assuming Ci,min = 0 for all criteria.
% ---------------------------------------------------------------
% Normalize all criteria values according to the following equation:
% C’i = (Ci - Ci,min) / (Ci,max - Ci,min) where Ci,min is set to 0.
co_max= max(Co); % Vector containing maximum value per criterion.
Co_max = (co_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
Coo = Co ./ Co_max;
c3_max= max(C3); % Vector containing maximum value per criterion.
C3_max = (c3_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
C33 = C3 ./ C3_max;

c4_max= max(C4); % Vector containing maximum value per criterion.
C4_max = (c4_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
C44 = C4 ./ C4_max;
C5=[Coo,C33,C44];

% Set the parameters f,A,Aeq,b,beq,lb,ub of the corresponding linear
% program.

% Set the parameter f defining the objective function to be
% minimized.
f = [ones(1,AlternativesNumber),zeros(1,subCriteriaNumber)];

% Set the parameter A defining the matrix of inequality coefficients.
P = -eye(InequalitiesNumber,InequalitiesNumber);
Q = eye(InequalitiesNumber,InequalitiesNumber);
Pex = [P,zeros(InequalitiesNumber,1)];
Qex = [zeros(InequalitiesNumber,1),Q];
Aineq = Pex + Qex;
Cineq = diff(C5);
A = [Aineq,Cineq];

% Set the parameter b defining the right hand side of the inequality
% constraints.
b = -delta * ones(1,InequalitiesNumber);

% Set the parameter A defining the matrix of the equality
% constraints.
Aeq = [zeros(1,AlternativesNumber),ones(1,subCriteriaNumber)];

% Set the parameter b defining the right hand side of the equality
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

```
% constraints.
beq = 1;

% Set matrices of lower and upper bounds.
lb = zeros(1,VariablesNumber);
ub = [];

% Solve the corresponding linear program.
x1 = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub);

% ----------------------------------------------------------------
% SCENARIO #2: Assuming Ci,min is the actual minimum for the i-th
% criterion.
% ----------------------------------------------------------------

% Normalize all criteria values according to the following equation:
% C'i = (Ci - Ci,min) / (Ci,max - Ci,min).
% Ci,min and Ci,max are the actual minimum and maximum values for
% each criterion.3
c7_max = max(Co); % Vector containing maximum value per criterion.
c7_min = min(Co); % Vector containing minimum value per criterion.
C7_max = (c7_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
C7_min = (c7_min' * ones(1,AlternativesNumber))';
C7 = (Co- C7_min)  ./(C7_max- C7_min) ;

c8_max = max(C3); % Vector containing maximum value per criterion.
c8_min = min(C3); % Vector containing minimum value per criterion.
C8_max = (c8_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
C8_min = (c8_min' * ones(1,AlternativesNumber))';
C8 = (C3 - C8_min )./(C8_max- C8_min) ;
c9_max = max(C4); % Vector containing maximum value per criterion.
c9_min = min(C4); % Vector containing minimum value per criterion.
C9_max = (c9_max' * ones(1,AlternativesNumber))';
C9_min = (c9_min' * ones(1,AlternativesNumber))';
C9 = (C4 - C9_min)  ./ (C9_max- C9_min) ;
C6=[C7,C8,C9];

% Set the parameters f,A,Aeq,b,beq,lb,ub of the corresponding linear
% program.

% Set the parameter f defining the objective function to be
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

```
% minimized.
f = [ones(1,AlternativesNumber),zeros(1,subCriteriaNumber)];

% Set the parameter A defining the matrix of inequality coefficients.
P = -eye(InequalitiesNumber,InequalitiesNumber);
Q = eye(InequalitiesNumber,InequalitiesNumber);
Pex = [P,zeros(InequalitiesNumber,1)];
Qex = [zeros(InequalitiesNumber,1),Q];
Aineq = Pex + Qex;
Cineq = diff(C6);
A = [Aineq,Cineq];

% Set the parameter b defining the right hand side of the inequality
% constraints.
b = -delta * ones(1,InequalitiesNumber);

% Set the parameter A defining the matrix of the equality
% constraints.
Aeq = [zeros(1,AlternativesNumber),ones(1,subCriteriaNumber)];

% Set the parameter b defining the right hand side of the equality
% constraints.
beq = 1;

% Set matrices of lower and upper bounds.
lb = zeros(1,VariablesNumber);
ub = [];

% Solve the corresponding linear program.
x2 = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Dimitris K.Despotis, Lamprini V. Stamati, Yiannis G. Smirlis , Data envelopment analysis with nonlinear virtual inputs and outputs,*European Journal of Operational Research*,2009.
2. Siskos, Y., E. Grigoroudis and F. Matsatsinis (2008). UTA METHODS
3. Dimitris K.Despotis,Σημειώσεις μαθήματος Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων 2009-2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ