



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ
ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υπολογισμός του Διδιάστατου Μη-Μόνιμου Πεδίου Ταχύτητας
Ασυμπίεστης Μη-Συνεκτικής Ροής Διαμέσου Ατερμόνων
Πτερυγώσεων Χρησιμοποιώντας Επιφανειακά Γραμμικά Στοιχεία
Πηγών

Ιωάννης Μητσόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλειος Δεδούσης

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τον υπολογισμό της διδιάστατης ασυμπίεστης και ατριβούς ροής που διέρχεται μέσω μιας ατέρμονος πτερύγωσης σε μη μόνιμη κατάσταση. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιείται η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων. Μετά την αναλυτική θεωρητική περιγραφή της μεθόδου ακολουθεί και η περιγραφή του προγράμματος Η/Υ σε γλώσσα FORTRAN, με το οποίο έγιναν οι υπολογισμοί. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχα αποτελέσματα άλλων ερευνητών. Η μέθοδος επεκτείνεται στα τελευταία κεφάλαια για να υπολογίσει τη ροή που διέρχεται μέσα από δυο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση όπου δίνεται η απαραίτητη θεωρητική ανάλυση και περιγράφεται το αντίστοιχο πρόγραμμα Η/Υ.

Περιεχόμενα

| Κεφάλαιο | Σελίδα |
|--|--------|
| Περίληψη..... | 2 |
| Περιεχόμενα..... | 3 |
| 1. Εισαγωγή..... | 6 |
| 2. Ανασκόπηση σχετικής βιβλιογραφίας..... | 8 |
| 3. Μεθοδολογία υπολογισμού της ροής γύρω από ατέρμονα πτερύγωση σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 13 |
| 3.1 Η οριακή συνθήκη ($v_p=0.0$)..... | 14 |
| 3.2 Συνθήκη Kutta..... | 21 |
| 3.2.1 Υπολογισμός ταχύτητας q_2 | 22 |
| 3.2.2 Υπολογισμός ταχύτητας q_3 | 24 |
| 3.2.3 Θεώρημα Kelvin..... | 26 |
| 3.2.4 Υπολογισμός της κάθετης ταχύτητας στα Σημεία Ελέγχου.. | 30 |
| 3.2.5 Υπολογισμός της ταχύτητας στο T.E..... | 30 |
| 3.3 Υπολογισμός της ταχύτητας στα σημεία του πεδίου ροής εκτός της επιφάνειας της αεροτομής..... | 31 |
| 3.4 Υπολογισμός του σημείου ανακοπής στο L.E..... | 33 |
| 3.5 Υπολογισμός άλλων παραμέτρων της ροής..... | 34 |
| 3.6 Υπολογισμός με δεδομένη την ταχύτητα V_{in} | 36 |
| 4. Περιγραφή του προγράμματος υπολογισμού της ροής γύρω από μια ατέρμονα πτερύγωση σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 38 |
| 4.1 Η κυρίως ρουτίνα CASCAD..... | 40 |
| 4.2 Η υπορουτίνα COORD..... | 43 |
| 4.3 Η υπορουτίνα COEFF..... | 43 |
| 4.4 Η υπορουτίνα MINV..... | 43 |
| 5. Αποτελέσματα για την περίπτωση της απλής κινούμενης πτερύγωσης σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 44 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 6. | Μεθοδολογία υπολογισμού της ροής γύρω από δύο διαδοχικές κινούμενες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 50 |
| 6.1 | Η οριακή συνθήκη ($v_p=0.0$)..... | 51 |
| 6.2 | Συνθήκη Kutta..... | 52 |
| 6.3 | Θεώρημα Kelvin..... | 55 |
| 6.4 | Υπολογισμός της ταχύτητας στα σημεία του πεδίου ροής εκτός της επιφάνειας της αεροτομής..... | 59 |
| 6.5 | Υπολογισμός των σημείων ανακοπής στα L.E των αεροτομών..... | 61 |
| 6.6 | Υπολογισμός παραμέτρων της ροής..... | 61 |
| 6.7 | Υπολογισμός με δεδομένη την ταχύτητα V_{in} | 62 |
| 7. | Περιγραφή του προγράμματος υπολογισμού της ροής γύρω από δύο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 63 |
| 7.1 | Η κυρίως ρουτίνα CAS2..... | 65 |
| 7.2 | Η υπορουτίνα COORD..... | 68 |
| 7.3 | Η υπορουτίνα COEFF..... | 68 |
| 7.4 | Η υπορουτίνα MINV..... | 68 |
| 7.5 | Η υπορουτίνα INOUT..... | 68 |
| 8. | Αποτελέσματα για την περίπτωση της ροής γύρω από δύο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση..... | 69 |
| 9. | Συμπεράσματα..... | 76 |
| | Βιβλιογραφία..... | 78 |
| | Παραρτήματα..... | 80 |
| | Παρ. Α.1: Κατάλογος μεταβλητών του προγράμματος CASCAD... | 80 |
| | Παρ. Α.2: Κατάλογος μεταβλητών του προγράμματος CAS2..... | 84 |
| | Παρ. Α.3: Πρόγραμμα CASCAD (run case), Περίπτωση 1..... | 94 |
| | Παρ. Α.4: Πρόγραμμα CAS2 (run case), Περίπτωση 2..... | 100 |
| | Παρ. Α.5: Πρόγραμμα CASCAD, Περίπτωση 1..... | 110 |
| | Παρ. Α.6: Πρόγραμμα CAS2, Περίπτωση 2..... | 134 |

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΗ

Κεφάλαιο 1:

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει ως αντικείμενο την εφαρμογή της μεθόδου των ιδιόμορφων σημείων με σκοπό τον υπολογισμό του πεδίου ροής, στις δύο διαστάσεις, γύρω από μια κινούμενη ατέρμονα πτερύγωση. Η ροή θεωρείται ασυμπιεστή και ατριβής. Παρά το γεγονός πως στη πραγματικότητα οι ροές δεν είναι ασυμπιεστές και εμφανίζουν τριβές, τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου είναι αξιοποιήσιμα και γι' αυτό έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές μετά την θεμελίωση της μεθόδου από τους Hess και Smith.

Η βάση της μεθόδου των ιδιόμορφων σημείων είναι η συνθήκη της μηδενικής κάθετης ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια του σώματος έτσι ώστε μέσω μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης να προκύψει μια κατανομή πηγών, δινών ή δίπολων που να ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Όταν βρεθεί αυτή η κατανομή το πρόβλημα έχει κατά μεγάλο μέρος λυθεί καθώς οι ταχύτητες μπορούν ύστερα να υπολογιστούν με σχετική ευκολία. Η επιφάνεια του σώματος προσεγγίζεται από ένα πολύγωνο του οποίου κάθε πλευρά είναι ένα τμήμα πάνω στο οποίο εφαρμόζεται η ανωτέρω κατανομή. Τα τμήματα αυτά δεν είναι απαραίτητα ισομήκη ενώ ο συνολικός αριθμός και η κατανομή των τμημάτων καθορίζει και την ακρίβεια του υπολογισμού.

Στο παρόν επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η κατανομή πηγών. Για ένα σώμα, όμως, στο οποίο ασκείται άνωση (lifting body) απαιτείται επιπρόσθετα και μια κατανομή δινών καθώς οι πηγές δεν προσδίδουν την απαραίτητη κυκλοφορία στη ροή. Η ένταση της κατανομής των δινών καθορίζεται από τη συνθήκη Kutta που εφαρμόζεται στην ακμή εκφυγής και που επιβάλλει ίσες πιέσεις, και άρα ίσες ταχύτητες, στα τμήματα που βρίσκονται εκατέρωθεν της ακμής.

Κατά τη κίνηση της ατέρμονος πτερύγωσης δημιουργούνται σημειακές δίνες πίσω από τις αεροτομές, που οφείλουν την ύπαρξη τους στην αυξομείωση της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή. Οι εντάσεις των δινών αυτών βρίσκονται με την εφαρμογή του θεωρήματος Kelvin που θεωρεί ότι η συνολική κυκλοφορία στον χώρο όλου του πεδίου και γύρω από την αεροτομή παραμένει χρονικά σταθερή. Ο ομόρους των δινών σχηματίζεται από τα σωματίδια του ρευστού στα οποία έχουν εφαρμοστεί / επικολληθεί οι εντάσεις των σημειακών δινών και ως εκ τούτου αλλάζει σχήμα συναρτήσει του χρόνου.

Η μέθοδος μας εφαρμόζεται βηματικά κατά τη διάρκεια του χρόνου αρχίζοντας από μια δεδομένη αρχική γεωμετρική τοποθέτηση της αεροτομής και προχωρώντας βηματικά σύμφωνα με τη προσχεδιασμένη τροχιά της. Η μέθοδος αυτή καθαυτή μπορεί να συμπεριλάβει τυχαίου σχήματος σώματα που κινούνται σε τυχαίες τροχιές. Αν και το πρόγραμμα που έχει διαμορφωθεί στη παρούσα εργασία δεν θέτει περιορισμούς στο σχήμα του σώματος, εν τούτοις είναι περισσότερο προσανατολισμένο σε ταλαντώσεις για τη περίπτωση της απλής ατέρμονος

πτερύγωσης και σε κινήσεις τύπου ρότορα-στάτορα για τη περίπτωση της διπλής ατέρμονος πτερύγωσης.

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται η μέθοδος «πρώτης» τάξης. Οι μέθοδοι υψηλότερης τάξης βελτιώνουν την υπολογιστική ακρίβεια. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για αρκετό καιρό αποδίδοντας αξιόπιστα αποτελέσματα για τις κοινές αεροτομές. Προβλήματα μπορεί να προκύψουν με αεροτομές ασυνήθιστου σχήματος που έχουν πολύ λεπτές ή σχετικά «φορτωμένες» (heavily loaded) ακμές εκφυγής (trailing edges). Προβλήματα μπορεί επίσης να προκύψουν από τη προσέγγιση της αεροτομής με λίγα τμήματα. Συνήθως 60-70 τμήματα αρκούν για να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων μπορούμε να φθάσουμε σε σχετικά ακριβή αποτελέσματα και να λάβουμε μια καλή εικόνα του πεδίου ροής σε σύντομο χρόνο, αποφεύγοντας παράλληλα την επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes που απαιτεί πολύ περισσότερη υπολογιστική ισχύ. Ακόμη η ακρίβεια των μεθόδων που χρησιμοποιούν πλέγμα (network methods) είναι μικρότερη, λόγω του ότι υπολογίζεται αρχικά το δυναμικό και όχι κατευθείαν η ταχύτητα όπως στη μέθοδο που χρησιμοποιούμε. Επίσης πρέπει να ειπωθεί ότι η ισχύς υπολογιστικής επεξεργασίας που απαιτείται αυξάνεται, συναρτήσει της ακρίβειας, περισσότερο σε σύγκριση με την αντίστοιχη αύξηση που έχουμε στη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων.

Η εργασία αποτελείται από οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι μια γενική εισαγωγή όπου σκιαγραφείται η μέθοδος επίλυσης ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται μια ανασκόπηση της εργασίας που έχει γίνει από άλλους ερευνητές. Στο τρίτο κεφάλαιο εξηγείται λεπτομερώς η μέθοδος επίλυσης για τη περίπτωση της απλής ατέρμονος πτερύγωσης και στο τέταρτο ακολουθεί περιγραφή της λειτουργίας του αντίστοιχου προγράμματος που έχει συνταχθεί σε γλώσσα FORTRAN. Στο πέμπτο κεφάλαιο συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του προγράμματός μας με αποτελέσματα άλλων ερευνητών. Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται επέκταση της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο τρίτο κεφάλαιο ώστε να περιλαμβάνει ακόμη μια ατέρμονα πτερύγωση που κινείται. Στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή του προγράμματος για την διπλή ατέρμονα πτερύγωση ενώ στο όγδοο κεφάλαιο έχουμε την σύγκριση με αποτελέσματα άλλων ερευνητών.

Κεφάλαιο 2:

Ανασκόπηση σχετικής βιβλιογραφίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρηθεί μια ανασκόπηση της εργασίας που έχει γίνει από άλλους ερευνητές στον τομέα της διδιάστατης, ασυμπίεστης και ατριβούς ροής με χρήση της μεθόδου των ιδιόμορφων σημείων.

Οι θεμελιωτές της μεθόδου ήταν οι Hess & Smith (ref. (1), Hess & Smith). Οι ερευνητές υπέθεσαν μια κατανομή πηγών, δηλ. πυκνότητα πηγών, σε επιφάνεια σώματος αυθαίρετου γεωμετρικού σχήματος. Η πυκνότητα αυτή προκύπτει ως λύση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης (ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους). Αναφέρεται ότι το κύριο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η γενικότητα της καθώς τα σώματα δε χρειάζεται να είναι λεπτά όπως υπέθεταν άλλοι ερευνητές π.χ. ο Karman ή ο Theodorsen και η ταχύτητα διαταραχής (perturbation velocity) δεν χρειάζεται να είναι μικρή. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι επίσης και η σχετικά μικρή υπολογιστική ισχύς που απαιτείται εν συγκρίσει με τις μεθόδους επίλυσης ολόκληρου του πεδίου ροής όπου απαιτείται η ύπαρξη υπολογιστικού πλέγματος.

Στην εργασία τους παραθέτουν τη βασική θεωρία και τη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος τόσο σε δύο όσο και σε τρεις διαστάσεις, ενώ θίγουν ακροθιγώς και την περίπτωση της ατέρμονος πτέρυγας. Συγκρίνουν ακόμη τη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων με άλλες μεθόδους επίλυσης όπως οι μέθοδοι που υποθέτουν ένα πλέγμα στο πεδίο ροής και βρίσκουν το δυναμικό ϕ επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση $\nabla \cdot \nabla \phi = 0$ με πεπερασμένες διαφορές, τηρώντας παράλληλα την οριακή συνθήκη για εφαιπτομενική στην επιφάνεια του σώματος, ταχύτητα ροής. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε μπορούσε να τροποποιηθεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει και τη πιθανή ύπαρξη οριακού στρώματος. Με τη τροποποίηση αυτή μετά τον αρχικό υπολογισμό της πίεσης, βρισκόταν το πάχος του οριακού στρώματος το οποίο προστίθετο στο αρχικό σώμα και ξαναγίνονταν οι υπολογισμοί βάσει του νέου σχήματος (διαδικασία αλληλεπίδρασης της μη συνεκτικής 'δυναμικής' ροής με την συνεκτική ροή του οριακού στρώματος –viscous/inviscid interaction procedure). Παρουσιάζεται επίσης μια σειρά από υπολογισμούς που έγιναν βάσει της δικής τους μεθόδου και αντιπαραβάλλονται με θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα από διάφορους τύπους ροών, όπου και διαπιστώνεται ικανοποιητική σύμπτωση.

Τέλος, η προσέγγιση των Hess & Smith, μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα φυσικά φαινόμενα που περιγράφονται από παρόμοιες εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη σε προβλήματα όπου έχουμε ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις όπως προβλήματα με εξισώσεις Laplace ή με εξισώσεις Helmholtz. Τέτοιου είδους φαινόμενα είναι προβλήματα ηλεκτροστατικού δυναμικού ή κατανομή θερμοκρασίας σε μόνιμη κατάσταση (Laplace) και διάδοση ακουστικών κυμάτων σε μόνιμη κατάσταση (Helmholtz).

Ο J.P. Giesing ήταν ο πρώτος που μελέτησε την μη μόνιμη ροή χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων και στηριζόμενος στο μοντέλο που πρότειναν οι Hess & Smith, που αφορούσε χρονικά μη μεταβαλλόμενα, μόνιμα πεδία ροής, ανέπτυξε τη μέθοδο για περιπτώσεις χρονικά μεταβαλλόμενης, μη μόνιμης, ροής (ref. 2, Giesing). Η μέθοδος του Giesing εφαρμόζεται βηματικά και εξελίσσεται χρονικά από μια δεδομένη αρχική γεωμετρική τοποθέτηση ενός αυθαίρετης γεωμετρίας σώματος, ακολουθώντας μια προκαθορισμένη εντελώς γενική τροχιά. Τα αποτελέσματα περιελάμβαναν πιέσεις, δυνάμεις και ροπές και γινόταν σύγκριση με θεωρητικά αποτελέσματα. Ο Giesing επεξέτεινε αργότερα τη μέθοδό του για να συμπεριλάβει δύο σώματα γενικού σχήματος υπογραμμίζοντας την ανάγκη για περαιτέρω μελέτη στην κατεύθυνση της ατέρμονος περυγώσης (ref. 3, Giesing). Στην εργασία εκείνη ο Giesing εστιάζοντας περισσότερο σε αεροτομές και λιγότερο σε θεωρητικά σχήματα υπολογίζει πιέσεις, δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στα σώματα και μας δίνει επίσης μια εικόνα του ομόρου των δινών μετά από έναν αριθμό χρονικών βημάτων για διάφορους συνδυασμούς σωμάτων και κινήσεων.

Οι Basu και Hancock (ref. 4, Basu & Hancock) υιοθέτησαν και απλοποίησαν την μέθοδο του Giesing, εφαρμόζοντάς το σε μια σειρά διαφορετικών περιπτώσεων όπου διαγράφονταν τα χαρακτηριστικά της μη μόνιμης ροής. Χρησιμοποίησαν επίσης και μια διαφορετική εκδοχή της συνθήκης Kutta βασισμένοι στην εργασία του Maskell (ref. 5, Maskell E. C.). Η διαφορετική αυτή εκδοχή, που βλέπουμε στην Εικόνα 2.1, υπαινίσσεται πως όταν η διαχεόμενη στροβιλότητα από την αεροτομή είναι ανθρωρολογιακή τότε η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής είναι παράλληλη στην κάτω επιφάνεια ενώ το αντίστροφο συμβαίνει όταν η διαχεόμενη στροβιλότητα είναι ωρολογιακή. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το μοντέλο του Giesing όπου η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής είναι το διανυσματικό ημίθροισμα των ταχυτήτων της άνω και κάτω επιφάνειας στην περιοχή της ακμής εκφυγής. Εφήρμοσαν τη μέθοδο τους σε τρεις περιπτώσεις: i) Σε αεροτομή που μεταβάλλεται ξαφνικά η γωνία πρόσπτωσης της από 0° σε α και όπου υπολογίζεται η χρονικά μεταβαλλόμενη άνωση καθόλη τη διάρκεια της κίνησης ii) Σε αεροτομή που αρχίζει την ταλάντωση πλάτους 0.01 rad (από 0°), σε υψηλή συχνότητα $\nu = 20 \text{ Hz}$ iii) Σε αεροτομή που εισέρχεται σε κάθετη ριπή ροής (sharp edged gust) με γωνίες πρόσπτωσης $\alpha=0^\circ$ και $\alpha=5^\circ$. Στις τρεις αυτές περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε η συμμετρική αεροτομή 8.4% Von Mises και για κάθε περίπτωση παρατίθεται η υπολογισθείσα πίεση καθώς και μια ποιοτική εικόνα του σχηματιζόμενου ομόρου των δινών. Σε κάθε περίπτωση επίσης η ροή δεν αποκολλάται.



Εικόνα 2.1 Συνθήκη Kutta των Basu & Hancock

Παρόμοια ήταν και η μέθοδος των Leishman και Galbraith (ref. 6, Leishman & Galbraith), όπου ακολουθούσαν μια διαφορετική προσέγγιση για να υπολογίσουν την

διαχεόμενη στροβιλότητα από βήμα σε βήμα και κατέληξαν σε μια ελαφρώς ευκολότερη επίλυση από τους Basu και Hancock.

Πολλές ερευνητικές προσπάθειες συμπεριλαμβάνουν στη θεώρηση τους και το οριακό στρώμα. Πιο συγκεκριμένα έχει γίνει σειρά από έρευνες όπου το οριακό στρώμα αντικαθιστούσε μια σειρά διακριτών δινών (ref. 7, N. D. Ham) αλλά και εκτεταμένες έρευνες που έκαναν χρήση τυρβώδους οριακού στρώματος (ref. 8, R. E. Singleton & J. F. Nash). Ο Ladopoulos ασχολήθηκε για αρκετά χρόνια με το αντικείμενο αυτό χρησιμοποιώντας μοντέλα με τυρβώδες οριακό στρώμα και εστιάζοντας σε εφαρμογές όπως οι ανεμογεννήτριες κάθετου άξονα (ref. 9, E. G. Ladopoulos) ή τα πεδία ταχυτήτων και ο καθορισμός των πιέσεων γύρω από αεροσκάφη (ref. 10, E. G. Ladopoulos).

Η μέθοδος εφαρμόστηκε επίσης από τον L. B. Wang για τη μοντελοποίηση των γεννητριών κάθετου άξονα που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος από παλιρροϊκά ρεύματα (ref. 11, L.B. Wang). Σε αυτή την εργασία ο Wang χρησιμοποίησε μια κατανομή πηγών στην επιφάνεια κάθε αεροτομής καθώς και μια κατανομή δινών κατά μήκος της μέσης γραμμής καμπυλότητας για να υπολογίσει τις πιέσεις που ασκούνται καθώς και για να μας δώσει μια ποιοτική εικόνα του ομόρου των παραγόμενων δινών. Ο συγγραφέας συγκρίνει την μέθοδο που ανέπτυξε με παλαιότερες μεθόδους όπως τη μέθοδο των ανεξάρτητων δινών (free vortex model – V-DART) και τη μέθοδο που συνδύαζε τις ανεξάρτητες δίνες με τα πεπερασμένα στοιχεία (FEVDTM). Παρατηρείται συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα πειραματικά δεδομένα και διαπιστώνεται ότι η παρούσα μέθοδος είναι αρκούτως καλύτερη από τη μέθοδο των ανεξάρτητων δινών και λιγότερο πολύπλοκη, αν και το ίδιο αποτελεσματική, με τη μέθοδο FEVDTM.

Η συνθήκη Kutta έχει γίνει επίσης αντικείμενο πειραματικών και θεωρητικών ερευνών. Η συνθήκη Kutta είναι μια απαραίτητη συνθήκη για έχουμε μοναδική λύση του πεδίου ροής και το φυσικό φαινόμενο που περιγράφει είναι η ομαλή διέλευση της ροής από την ακμή εκφυγής (δηλ. με ορισμένη ταχύτητα). Η εν λόγω συνθήκη είχε προταθεί και διερευνηθεί ανεξάρτητα από τους Chaplygin (ref. 12, Chaplygin), Kutta (ref. 13, Kutta) και Zhukovski (ref. 14, Zhukovski) για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που ανέκυπταν από την εφαρμογή της μεθόδου του σύμμορφου μετασχηματισμού (conformal mapping method) στην ακμή εκφυγής. Αναφερθήκαμε ήδη στο ότι οι Basu & Hancock ξέφυγαν από τον κλασικό ορισμό της συνθήκης Kutta βασισμένοι στην εργασία του Maskell. Από την άλλη μεριά, οι Poling και Telionis εξέτασαν έναν αριθμό μη σταθερών πεδίων ροής και τα πειραματικά δεδομένα τους έδειξαν ότι η συνθήκη Kutta, που λέει πως η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής είναι ορισμένη και η πίεση μηδενική, δεν ισχύει υπό ορισμένες συνθήκες (ref. 15, Poling & Telionis). Σε παρόμοιο πόρισμα κατέληξαν και άλλοι ερευνητές όπως οι Satyanarayana και Davis οι οποίοι μελέτησαν το πεδίο ροής στη περιοχή της ακμής εκφυγής (ref. 16, Satyanarayana & Davis). Ακόμη, οι Katz και Weihs μελετώντας αριθμητικά την δημιουργία του ομόρου των δινών κοντά στην ακμή εκφυγής σε αεροτομές που ταλαντώνονταν σε υψηλές συχνότητες, κατέληξαν στο ότι η κλασική συνθήκη του Kutta μπορεί να εφαρμοστεί για να υπολογιστούν πιέσεις, δυνάμεις και ροπές σε μικρού πλάτους ταλαντώσεις όπου έχουμε μη αποκολλημένη ροή (ref. 17, Katz & Weih)s). Η ροή στην ακμή εκφυγής μελετήθηκε επίσης και από τον Liebe ο

οποίος πρότεινε την αντικατάσταση της κλασικής συνθήκης Kutta με μια πιο γενική συνθήκη βασισμένη στον σχηματισμό και την περιοδική διάχυση των δινών από την ακμή εκφυγής (ref. 18, R. Liebe).

Αυτό οδήγησε σε μια νέα προσέγγιση (finite vortex model) για τον υπολογισμό των δυνάμεων σε σταθερές και κινούμενες πτέρυγες. Στηριγμένος, ο Mantia στις εργασίες των Poling & Telionis, Satyanarayana & Davis θεωρεί πως επειδή δεν υπάρχει πειραματική ένδειξη που να υποδηλώνει ότι η διαφορά πίεσης στην ακμή εκφυγής πρέπει να είναι αναγκαστικά μηδενική, τότε μπορούμε να εισάγουμε μια πιο γενική συνθήκη που θα στοχεύει (όπως και η συνθήκη Kutta) στο να λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της τριβής κατά την αριθμητική επίλυση (ref. 19, La Mantia M). Συνεχίζοντας, εφήρμοσε αυτή τη θεώρηση ώστε να διερευνήσει την επίδραση που έχει ο ομόρους των δινών στην ώθηση που παράγεται από μια ταλαντούμενη αεροτομή με απώτερο σκοπό να μελετηθεί περαιτέρω το πέταγμα των πτηνών και η κολύμβηση των ψαριών. Η έρευνα αυτή κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα αρχικά χαρακτηριστικά, δηλ. το μήκος κάθε στοιχείου (panel), του ομόρου έχουν μεγάλη επίδραση στα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης και ως εκ τούτου χρειάζεται να διεξαχθούν περισσότερα πειράματα για να βρεθεί μοναδική λύση (ref. 20, La Mantia M, Dabnichki).

Ο Dedoussis βασιζόμενος στις εργασίες των Hess & Smith, Giesing (ref. 21, Giesing), Bradshaw & Unsworth (ref. 22, Bradshaw & Unsworth) και Mahgoub, εφήρμοσε την μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων για να υπολογίσει το πεδίο ασυμπίεστης και ατριβούς ροής που διέρχεται από διδιάστατη ατέρμονα πεπευγώση σε μόνιμη κατάσταση (ref 23, Dedoussis V.). Ο Dedoussis στην εργασία του παρουσιάζει την θεωρητική ανάλυση σχετικά με την μέθοδο ιδιόμορφων στοιχείων - πηγών (source panel method), που αποτελεί μέρος και της παρούσης εργασίας, και στη συνέχεια αναπτύσσει το αντίστοιχο πρόγραμμα H/Y σε γλώσσα FORTRAN, που υλοποιεί την παρακάτω μέθοδο. Εφαρμόζει τη μέθοδο σε μια σειρά από περιπτώσεις και συγκρίνει τα αποτελέσματα με αναλυτικές λύσεις και πειραματικά δεδομένα από άλλους ερευνητές. Ακολούθως, η μέθοδος επεκτείνεται για να συμπεριλάβει δυο παράλληλες ατέρμονες πεπευγώσεις όπου, μετά την απαραίτητη σύγκριση με αναλυτικές λύσεις, βρίσκει εφαρμογή στην ανάλυση της επίδρασης της αεροδυναμικής σήραγγας σε σώμα που βρίσκεται εντός αυτής. Η μέθοδος, τέλος, τροποποιείται κατάλληλα μέσω της διαδικασίας αλληλεπίδρασης της μη συνεκτικής 'δυναμικής' ροής με την συνεκτική ροή του οριακού στρώματος –viscous/inviscid interaction procedure, ώστε να υπολογίσει την «πραγματική» ροή που διέρχεται από την ατέρμονα πεπευγώση. Επισημαίνουμε ακόμη πως λόγω της μονιμότητας της ροής του πεδίου ο Dedoussis δεν έχει πρόβλημα στο να υιοθετήσει την κλασική συνθήκη Kutta.

Το πρόγραμμα του Dedoussis αποτελεί μετεξέλιξη του προγράμματος του Mahgoub, ο οποίος το είχε χρησιμοποιήσει για να υπολογίσει το πεδίο ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή (ref 24, Mahgoub.). Στην εργασία του παρατίθεται το αντίστοιχο για κάθε περίπτωση πρόγραμμα καθώς και ένας σύντομος οδηγός για τη χρήση τους μαζί με κάποια run cases. Το πρόγραμμα FORTRAN της παρούσης εργασίας, που πραγματεύεται τη χρονικά μεταβαλλόμενη κατάσταση, είναι μια τροποποίηση του προγράμματος του Dedoussis.

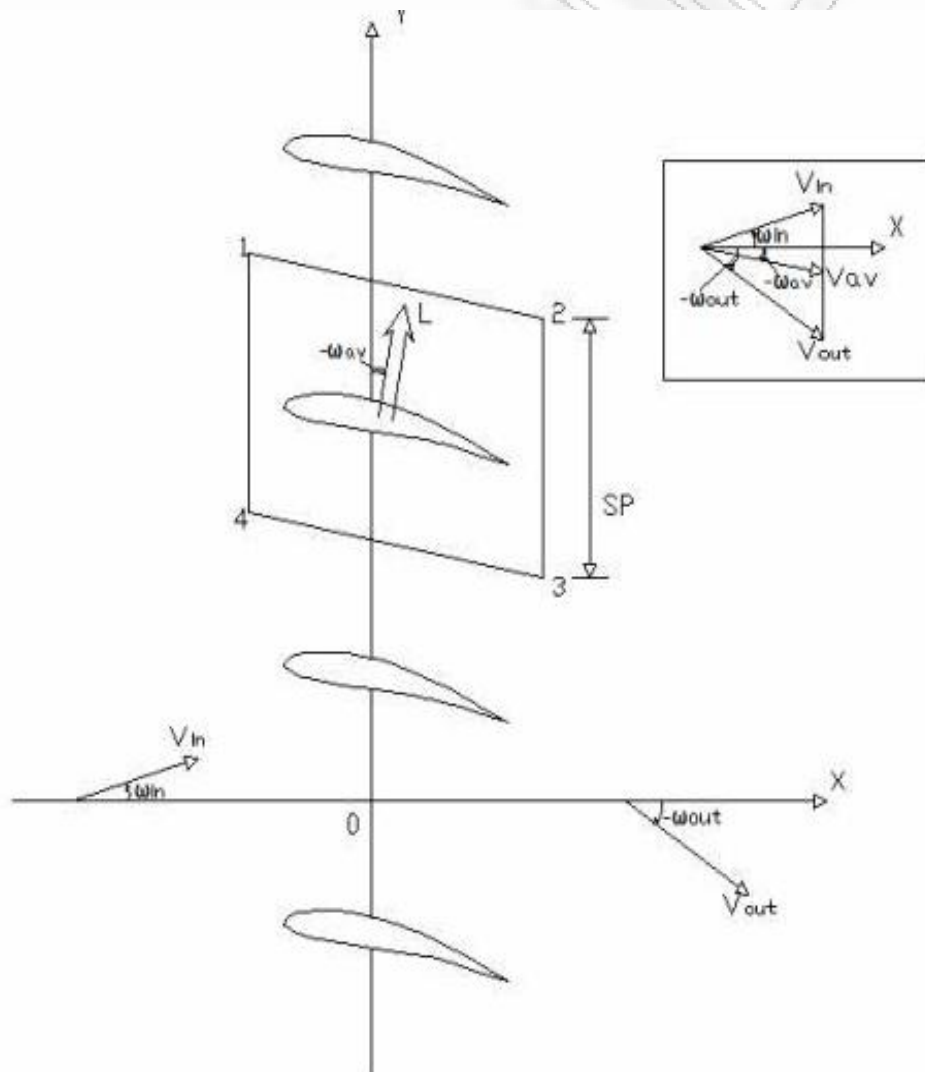
Ο Dedoussis χρησιμοποίησε επίσης την ίδια μέθοδο, αφού είναι ικανή να εμπλέξει σώματα οποιουδήποτε σχήματος, σε αριθμητική προσομοίωση διδιάστατης, ασυμπίεστης και ατριβούς ροής που διέρχεται, διαμέσου σειρών κυλίνδρων (ref 25, Dedoussis V.). Οι σειρές των κυλίνδρων εκτείνονται στο άπειρο, σε κάθετη διεύθυνση ως προς την (προσπίπτουσα) ροή, κατά την εγκάρσια δηλαδή έννοια (cross flow). Κάθε σειρά «συνιστά» μια «ατέρμονα πτερύγωση» από πανομοιότυπα (διδιάστατα) κυλινδρικά σώματα. Πολλαπλές ατέρμονες πτερυγώσεις χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν διάφορες διαμορφώσεις και συνδυασμούς. Όπως και στη προηγούμενη εργασία του ο Dedoussis προσεγγίζει τα σώματα με μια σειρά ευθύγραμμων τμημάτων (panels) όπου και εφαρμόζεται μια σταθερή κατανομή πηγών. Στις περιπτώσεις όπου έχουμε κυκλοφορία εφαρμόζεται μια επιπλέον κατανομή δινών στα ευθύγραμμα τμήματα, η ένταση των οποίων καθορίζεται από την συνθήκη Kutta. Περιλαμβάνονται αποτελέσματα για διάφορους συνδυασμούς κυλίνδρων και Rankine οβάλ. Τα αποτελέσματα κρίνονται ικανοποιητικά γεγονός που καταδεικνύει την αξιοπιστία και ευελιξία της μεθόδου.

Ενδεικτική των δυνατοτήτων της μεθόδου είναι και η εργασία των Dedoussis & Mathioudakis (ref 26, Dedoussis & Mathioudakis). Η συγκεκριμένη εργασία ασχολείται με την αριθμητική προσομοίωση των «υπογραφών βλάβης» (fault signatures) σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Πιο συγκεκριμένα, οι συγγραφείς υπολόγισαν το πεδίο ροής γύρω από πτερύγωση συμπίεστη όπου έχει εμφανισθεί βλάβη σε πτερύγιο. Βασισμένοι στο γνωστό μοντέλο των πολλαπλών ατερμόνων πτερυγώσεων και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων υπολογίζουν το πεδίο ροής λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη το γεγονός πως η περιοδικότητα έχει πάψει να υφίσταται λόγω της βλάβης. Από αυτό τον υπολογισμό λαμβάνουμε ενδείξεις για την πίεση σε ένα σημείο του εσωτερικού κελύφους που αντικρίζει τα πτερύγια του ρότορα. Η επεξεργασία αυτών των ενδείξεων σε συνδυασμό με ενδείξεις από άθικτη (υγιή) πτερύγωση οδηγεί στον σχηματισμό της υπογραφής της βλάβης. Στη συνέχεια συγκρίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα με πειραματικά δεδομένα όπου διαπιστώνεται ικανοποιητική συμφωνία. Η επιτυχής αναπαραγωγή των ενδείξεων από ένα πραγματικό πεδίο ροής χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστικό κώδικα που επιλύει διδιάστατη ατριβή ροή οφείλεται κατά τον Mathioudakis στο ότι τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στο διάκενο μεταξύ των πτερυγίων και του εσωτερικού κελύφους δεν παρουσιάζουν πολύ «ισχυρό» τριδιάστατο χαρακτήρα ώστε να είναι σε θέση να μετατρέψουν την κατά τα άλλα «διδιάστατη» ροή σε «πραγματικά» τριδιάστατη.

Κεφάλαιο 3:

Μεθοδολογία υπολογισμού της ροής γύρω από ατέρμονα πτερύγωση σε μη μόνιμη κατάσταση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων, η οποία χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος μας. Καταρχάς πρέπει να δοθεί ο ορισμός της ατέρμονος πτερύγωσης. Η ατέρμων πτερύγωση μπορεί να οριστεί ως μια σειρά από άπειρα σε αριθμό διδιάστατα γεωμετρικά σώματα (αεροτομές/πτερύγια) με τον ίδιο προσανατολισμό και σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, διατεταγμένα κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής. Στην Εικόνα 3.1 φαίνεται μια ατέρμων πτερύγωση κάθετη στον άξονα x .



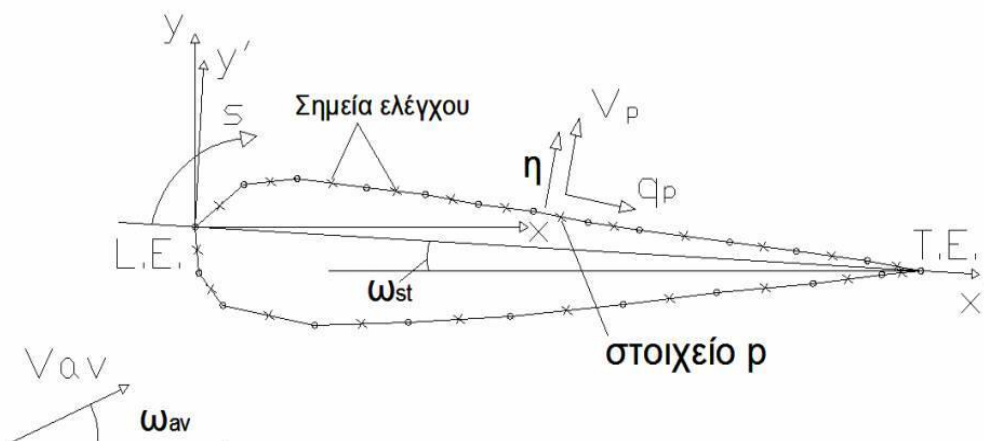
Εικόνα 3.1 Ατέρμων πτερύγωση

Η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων υποθέτει μια κατανομή πηγών $m(s)$ στην επιφάνεια κάθε αεροτομής. Όπου $m(s)$ είναι η πυκνότητα έντασης, δηλαδή η ένταση

ανά μονάδα μήκους. Η οριακή συνθήκη είναι ότι η συνολική κάθετη ταχύτητα v_p σε κάθε σημείο p της αεροτομής πρέπει να ισούται με 0 ($v_p=0.0$). Αν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη τότε προκύπτει μια ολοκληρωτική εξίσωση για την πυκνότητα $m(s)$, η λύση της οποίας είναι μοναδική αν έχει καθοριστεί η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή (ref. 1, Hess & Smith). Η κυκλοφορία μπορεί να καθοριστεί αν εφαρμοστεί, για παράδειγμα, η συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής.

3.1 Η οριακή συνθήκη ($v_p=0.0$)

Στη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων κάθε αεροτομή προσεγγίζεται από έναν αριθμό (έστω N) ευθύγραμμων τμημάτων (στοιχεία). Έτσι το σχήμα της αεροτομής γίνεται ένα εγγεγραμμένο πολύγωνα. Κατά μήκος αυτών των στοιχείων η πυκνότητα m_n είναι πεπερασμένη και σταθερή αλλά διαφέρει από στοιχείο σε στοιχείο. Λόγω του άπειρου μήκους της ατέρμονος πτερύγωσης και της ομοιομορφίας της προσπίπτουσας ροής (V_{av}) οι τιμές της πυκνότητας της έντασης στα αντίστοιχα σημεία της αεροτομής θα είναι ίδιες. Στην Εικόνα 3.2 μπορούμε να δούμε την προσέγγιση τη αεροτομής από ευθύγραμμα τμήματα. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για σώματα τυχαίου σχήματος.



Εικόνα 3.2 Προσέγγιση της αεροτομής από ευθύγραμμα τμήματα

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ταχύτητα που επάγει μια σημειακή πηγή σε ένα τυχαίο σημείο z . Έστω σημειακή πηγή με ένταση M σε σημείο C της επιφάνειας της αεροτομής. Το μιγαδικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο z θα είναι:

$$f(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \ln(z - c) \quad \text{Εξ. (3.1.1)}$$

Έστω ότι η ατέρμων πτερύγωση εκτείνεται στο άπειρο κατά τον άξονα y με διάκενο SP (Εικόνα 3.1). Σε αυτή τη περίπτωση το μιγαδικό δυναμικό στο σημείο z εξαιτίας όλων των πηγών M στα αντίστοιχα σημεία C (επιφάνειες των αεροτομών) θα είναι:

$$f(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot (\ln(z-c) + \ln(z-c+i\cdot SP) + \ln(z-c+2\cdot i\cdot SP) + \dots + \ln(z-c-i\cdot SP) + \ln(z-c-2\cdot i\cdot SP) + \dots)$$

Εξ. (3.1.2)

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή (ref. 27, Lamb):

$$f(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \ln \left[\sinh \left[\frac{\pi \cdot (z-c)}{SP} \right] \right]$$

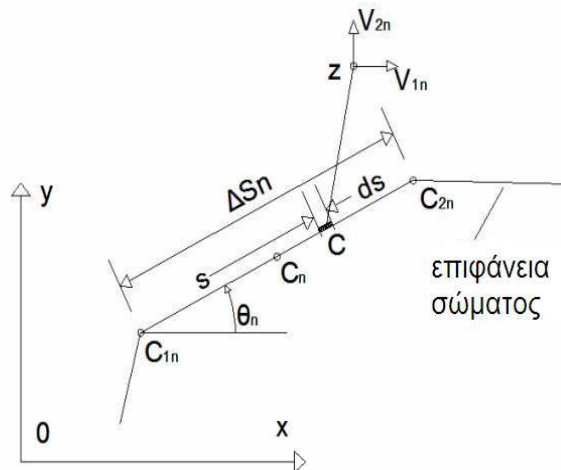
Εξ. (3.1.3)

Συνεπώς η ταχύτητα στο σημείο z μπορεί να βρεθεί παραγωγίζοντας την εξ. (3.1.3) και θα είναι:

$$\frac{d}{dz} f(z) = w = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{SP} \cdot \operatorname{coth} \left[\frac{\pi \cdot (z-c)}{SP} \right]$$

Εξ. (3.1.4)

Οι τελευταίες δυο εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές καθώς μας επιτρέπουν να μετατρέψουμε το πρόβλημα υπολογισμού της ροής γύρω από μια ατέρμονα πτερύγωση σε πρόβλημα υπολογισμού της ροής γύρω από μια απομονωμένη αεροτομή.



Εικόνα 3.3 Ευθύγραμμο τμήμα-στοιχείο (n-οστό) στην επιφάνεια της αεροτομής

Τα στοιχεία στην επιφάνεια της αεροτομής δεν αποτελούν διακριτές πηγές αλλά έχουν μια πυκνότητα έντασης καταμεμημένη σε όλο το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων τους. Έστω πως η πυκνότητα του n-οστού ευθυγράμμου στοιχείου (πηγή) είναι m_n με άκρα του στοιχείου τα σημεία C_{1n}, C_{2n} όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3. Πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα που επάγει το στοιχείο αυτό στο τυχαίο σημείο z του πεδίου ροής. Θεωρούμε ένα απειροστό στοιχείο με μήκος ds στο σημείο C. Το στοιχείο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακή πηγή με την έντασή του να είναι $M=m_n \cdot ds$. Συνεπώς αν ολοκληρώσουμε σε όλο το μήκος του στοιχείου

θα υπολογίσουμε την ταχύτητα που επάγεται από αυτό στο σημείο z . Έτσι θα έχουμε:

$$W_n(z) = \frac{m_n}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{SP} \cdot \int_{C_{1n}}^{C_{2n}} \coth \left[\frac{\pi \cdot (z - c)}{SP} \right] ds \quad \text{Εξ. (3.1.5)}$$

Επειδή όμως ισχύει ότι:

$$ds = e^{-i \cdot \theta_n} \cdot dc \quad \text{Εξ. (3.1.6)}$$

Θα έχουμε ότι:

$$W_n(z) = \frac{m_n}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{SP} \cdot e^{-i \cdot \theta_n} \cdot \int_{C_{1n}}^{C_{2n}} \coth \left[\frac{\pi \cdot (z - c)}{SP} \right] dc \Rightarrow$$

$$W_n(z) = e^{-i \cdot \theta_n} \cdot \frac{m_n}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{\sinh \left[\frac{\pi \cdot (z - c_{1n})}{SP} \right]}{\sinh \left[\frac{\pi \cdot (z - c_{2n})}{SP} \right]} \right] \quad \text{Εξ. (3.1.7)}$$

όπου θ_n η γωνία που σχηματίζει το n -οστό στοιχείο με τον άξονα x .

Η εξίσωση (3.1.7) είναι η μιγαδική ταχύτητα στο σημείο z με πλαίσιο αναφοράς τους άξονες x, y όπως αυτοί ορίστηκαν στην Εικόνα 3.1. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι για μεγάλο SP (δηλ. για $SP \rightarrow \infty$), η εξ. (3.1.7) γίνεται:

$$W_n(z) = e^{-i \cdot \theta_n} \cdot \frac{m_n}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{z - c_{1n}}{z - c_{2n}} \right) \quad \text{Εξ. (3.1.8)}$$

Η εξ. (3.1.8) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις που βλέπουμε στο (ref. 24, Mahgoub) και οι οποίες υπολογίζουν τη ροή, δηλ. το πεδίο ταχύτητας, γύρω από απομονωμένη αεροτομή.

Για να βρούμε τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας V_{1n} και V_{2n} πρέπει να βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ταχύτητας $W_n(z)$ εξ. (3.1.7).

Θέτουμε:

$$Z_1 = X_1 + iY_1 = \frac{\pi \cdot (z - c_{1n})}{SP} \quad \text{Εξ. (3.1.9.a)}$$

$$Z_2 = X_2 + iY_2 = \frac{\pi \cdot |z - c_{2n}|}{SP} \quad \text{Εξ. (3.1.9.β)}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\sinh |Z_1| = \sinh |X_1| \cdot \cos |Y_1| + i \cdot \cosh |X_1| \cdot \sin |Y_1| \quad \text{Εξ. (3.1.10.α)}$$

$$\sinh |Z_2| = \sinh |X_2| \cdot \cos |Y_2| + i \cdot \cosh |X_2| \cdot \sin |Y_2| \quad \text{Εξ. (3.1.10.β)}$$

Θέτουμε:

$$M_1 = \sinh |X_1| \cdot \cos |Y_1| \quad \text{Εξ. (3.1.11.α)}$$

$$M_2 = \sinh |X_2| \cdot \cos |Y_2| \quad \text{Εξ. (3.1.11.β)}$$

$$N_1 = \cosh |X_1| \cdot \sin |Y_1| \quad \text{Εξ. (3.1.11.γ)}$$

$$N_2 = \cosh |X_2| \cdot \sin |Y_2| \quad \text{Εξ. (3.1.11.δ)}$$

Συνεπώς η εξ. (3.1.7) θα γίνει:

$$W_n(z) = e^{-i \cdot \theta_n \cdot \frac{m_n}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{M_1 + i \cdot N_1}{M_2 + i \cdot N_2} \right)} \quad \text{Εξ. (3.1.12)}$$

η οποία μετά από πράξεις γίνεται:

$$W_n(z) = \left[\cos \theta_n - i \sin \theta_n \right] \cdot \frac{m_n}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\ln \left[\frac{|M_1|^2 + |N_1|^2}{|M_2|^2 + |N_2|^2} \right] + i \cdot 2 \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{M_2 \cdot N_1 - N_2 \cdot M_1}{M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2} \right) \right]$$

Εξ. (3.1.13)

Τώρα, αν η μιγαδική ταχύτητα W σε ένα σημείο είναι $W = A + i \cdot B$ τότε οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας θα ήταν $W_{1n} = A$ και $W_{2n} = -B$. Αντίστοιχα θα έχουμε ότι:

$$V_{1n} = \frac{m_n}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\cos \theta_n \cdot \ln \left[\frac{|M_1|^2 + |N_1|^2}{|M_2|^2 + |N_2|^2} \right] + \sin \theta_n \cdot 2 \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{M_2 \cdot N_1 - N_2 \cdot M_1}{M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2} \right) \right] \quad \text{Εξ. (3.1.14.α)}$$

$$V_{2n} = \frac{m_n}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\sin \theta_n \cdot \ln \left[\frac{|M_1|^2 + |N_1|^2}{|M_2|^2 + |N_2|^2} \right] - \cos \theta_n \cdot 2 \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{M_2 \cdot N_1 - N_2 \cdot M_1}{M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2} \right) \right] \quad \text{Εξ. (3.1.14.β)}$$

Οι εξισώσεις (3.1.14.α) και (3.1.14.β) μας δίνουν τις συνιστώσες της ταχύτητας που επάγει το n-οστό στοιχείο σε σημείο z με πλαίσιο αναφοράς τους άξονες x,y. Αν το σημείο z συμπίπτει με το μέσο του ρ-οστού στοιχείου τότε θα έχουμε την ταχύτητα που επάγει το n-οστό στοιχείο στο ρ-οστό στοιχείο. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μέσον κάθε στοιχείου είναι το Σημείο Ελέγχου (Σ.Ε.) όπου πρέπει να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη (βλ. Εικόνα 3.2). Η κάθετη ταχύτητα V_p λαμβάνεται θετική αν το διάνυσμα εξέρχεται από την επιφάνεια και η εφαπτομενική ταχύτητα q_p λαμβάνεται θετική αν είναι στη διεύθυνση του επιφανειακού τόξου s. Το τόξο s μετράται από την ακμή πρόσπτωσης και είναι θετικό κατά την ωρολογιακή φορά.

Για να εφαρμόσουμε την οριακή συνθήκη $V_p=0.0$ στο μέσον του τυχαίου στοιχείου ρ πρέπει να λάβουμε υπόψη τις εξής συνιστώσες της ταχύτητας:

- 1) Την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας που επάγουν τα υπόλοιπα στοιχεία στο στοιχείο ρ. Η ταχύτητα που επάγει το τυχαίο στοιχείο η στο στοιχείο ρ θα είναι (βλ. Εικόνα 3.4):

$$V_{np} = V_{2n} \cdot \cos|\theta_p| - V_{1n} \cdot \sin|\theta_p| \quad \text{Εξ. (3.1.15)}$$

όπου θ_p είναι η γωνία που σχηματίζει το στοιχείο ρ με τον άξονα x. Συνεπώς η ταχύτητα που επάγει το σύνολο των υπόλοιπων στοιχείων κάθετα στο στοιχείο ρ είναι:

$$V_{p1} = \sum_{(n=1, n \neq p)} \left(V_{2n} \cdot \cos|\theta_p| - V_{1n} \cdot \sin|\theta_p| \right) \quad \text{Εξ. (3.1.16)}$$

- 2) Την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας που επάγει το στοιχείο ρ στον εαυτό του και η οποία, σύμφωνα με το Παράρτημα Α.2. (ref. 23, Dedoussis) είναι:

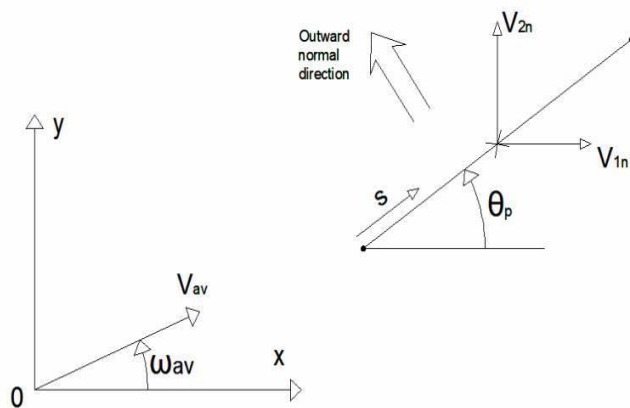
$$V_{p2} = \frac{m_p}{2} \quad \text{Εξ. (3.1.17)}$$

όπου m_p είναι η πυκνότητα έντασης του στοιχείου ρ.

- 3) Την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας που προέρχεται από την αδιατάρακτη ροή και η οποία είναι:

$$V_{p3} = V_{av} \cdot \sin|\omega_{av} - \theta_p| \quad \text{Εξ. (3.1.18)}$$

όπου ω_{av} είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα V_{av} με τον άξονα x (βλ. Εικόνα 3.1 και Εικόνα 3.4):



Εικόνα 3.4 Η ταχύτητα που επάγει το n -οστό στοιχείο (κατανομή πηγών m_n) στο p -οστό στοιχείο

Έχοντας λάβει υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η συνολική κάθετη ταχύτητα στο μέσον του p -οστού στοιχείου είναι:

$$V_p = \frac{m_p}{2} + \sum_{(n=1, n \neq p)} \left(V_{2n} \cdot \cos(\theta_p) - V_{1n} \cdot \sin(\theta_p) \right) + V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (3.1.19)}$$

Αν θέσουμε:

$$b_p = -V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (3.1.20)}$$

θα έχουμε ότι:

$$V_p = \sum_{(n=1, n \neq p)} \left(2 \cdot \pi \cdot \delta_{pn} + A_{pn} \right) \cdot \frac{m_n}{4\pi} - b_p \quad \text{Εξ. (3.1.21)}$$

όπου δ_{pn} είναι το δέλτα του Κρονεκερ και ισχύει ότι $A_{pp}=0$ για κάθε p . Η τελευταία εξίσωση μπορεί να επαναδιατυπωθεί με χρήση μητρών:

$$\bar{V}_p = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} - \bar{b}_p \quad \text{Εξ. (3.1.22)}$$

όπου η ποσότητα $A_{pn} \cdot m_n / 4\pi$ είναι η συνολική κάθετη ταχύτητα που επάγεται από όλα τα στοιχεία της αεροτομής στο στοιχείο p . Αν εφαρμόσουμε λοιπόν την οριακή συνθήκη μη εισχώρησης, δηλ. $V_p=0$, στην εξ. (3.1.22) θα έχουμε ότι:

$$\bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} - \bar{b}_p = 0 \quad \text{Εξ. (3.1.23)}$$

η οποία μπορεί να λυθεί με αντιστροφή του πίνακα A_{pn} . Έτσι θα έχουμε ότι:

$$\bar{m}_n = \left(A_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{b}_p \quad \text{Εξ. (3.1.24)}$$

Τέλος είναι σημαντικό πως τα στοιχεία του πίνακα A_{pn} εξαρτώνται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ατέρμονος πτερύγωσης (σχήμα αεροτομής, διάκενο SP, γωνία χορδής ω_{st} (Εικόνα 3.2)) και είναι ανεξάρτητα των παραμέτρων της ροής όπως το μέτρο ή η διεύθυνση της αδιατάρακτης ροής.

Ο υπολογισμός της επαπτομενικής ταχύτητας q_p ακολουθεί την ίδια λογική. Για ακόμη μια φορά πρέπει να αθροίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας που επάγονται στο μέσον κάθε στοιχείου. Οι συνιστώσες αυτές είναι:

- 1) Η επαπτομενική ταχύτητα που επάγεται από όλα τα στοιχεία στο στοιχείο p . Καταρχάς η επαπτομενική ταχύτητα που επάγει το n -οστό στοιχείο στο p -οστό στοιχείο είναι:

$$q_{np} = V_{1n} \cdot \cos(\theta_p) + V_{2n} \cdot \sin(\theta_p) \quad \text{Εξ. (3.1.25)}$$

Συνεπώς η επαπτομενική ταχύτητα από όλα τα στοιχεία είναι:

$$q_{p1} = \sum_{n=1}^N \left(V_{1n} \cdot \cos(\theta_p) + V_{2n} \cdot \sin(\theta_p) \right) \quad \text{Εξ. (3.1.26)}$$

Η σχέση αυτή συμπεριλαμβάνει την επαπτομενική ταχύτητα που επάγει το στοιχείο p στον εαυτό του που είναι μηδενική όπως φαίνεται και στο Παράρτημα 1.

- 2) Η επαπτομενική ταχύτητα που προέρχεται από την αδιατάρακτη ροή και η οποία είναι:

$$q_{p2} = V_{av} \cdot \cos(\omega_{av} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (3.1.27)}$$

Η συνολική επαπτομενική ταχύτητα λοιπόν στο μέσον του p -οστού στοιχείου θα είναι:

$$q_p = \sum_{n=1}^N \left(V_{1n} \cdot \cos(\theta_p) + V_{2n} \cdot \sin(\theta_p) \right) + V_{av} \cdot \cos(\omega_{av} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (3.1.28)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να διατυπωθεί με τη χρήση μητρών ως εξής:

$$\bar{q}_p = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + \bar{f}_p \quad \text{Εξ. (3.1.29)}$$

όπου έχουμε θέσει:

$$f_p = V_{av} \cdot \cos(\omega_{av} - \theta_p)$$

Εξ. (3.1.30)

Τα στοιχεία του πίνακα B_{pn} , όπως και στη περίπτωση του πίνακα A_{pn} , εξαρτώνται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ατέρμονος πτερύγωσης. Η διαφορά είναι στο ότι ο πίνακας B_{pn} συνδέεται με την εφαπτομενική ταχύτητα ενώ ο πίνακας A_{pn} συνδέεται με την κάθετη ταχύτητα που επάγεται στο στοιχείο p .

3.2 Συνθήκη Kutta

Η ροή που εξετάστηκε μέχρι εδώ δεν προκαλεί κάποιου είδους άνωση (lift) στην αεροτομή. Στις περισσότερες, όμως, περιπτώσεις συμβαίνει το αντίθετο και η άνωση που ασκείται σχετίζεται άμεσα με την κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή. Επειδή λοιπόν η κυκλοφορία γύρω από μια πηγή είναι μηδενική θα αναγκαστούμε να θεωρήσουμε μια «πηγή» στροβιλότητας μέσα ή επάνω στη αεροτομή. Η «πηγή» αυτή θα είναι μια κατανομή δινών σταθερής έντασης ($\gamma_n=1.0$) επάνω στα στοιχεία της αεροτομής, όπως αντίστοιχα πριν είχαμε μια κατανομή πηγών (m_n).

Η συνθήκη Kutta ορίζει πως η ροή εξέρχεται ομαλά από την ακμή εκφυγής (T.E.) και η ταχύτητα σε εκείνο το σημείο είναι πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει για το μοντέλο μας πως η εφαπτομενική ταχύτητα στο τελευταίο στοιχείο πριν το T.E. πρέπει να είναι ίση με την εφαπτομενική ταχύτητα στο πρώτο στοιχείο μετά το T.E. (κινούμαστε με την ωρολογιακή φορά). Επίσης σημαίνει πως η ροή στο T.E. κινείται στη κατεύθυνση της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζουν τα δυο στοιχεία αμέσως πριν και αμέσως μετά το T.E. (βλ. Εικόνα 3.7). Έτσι λοιπόν στο T.E. θα έχουμε ότι:

$$\Delta q = 0$$

Εξ. (3.2.1)

Η εφαπτομενική ταχύτητα q μετά την εισαγωγή της κατανομής δινών ($\gamma_n=1.0$) και σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.1 θα είναι συνισταμένη τριών συνιστωσών.

- 1) Της εφαπτομενικής ταχύτητας q_1 λόγω της αδιατάρακτης μοναδιαίας ροής $V_{av}=1.0$.
- 2) Της εφαπτομενικής ταχύτητας q_2 λόγω της κατανομής δινών με σταθερή ένταση $\gamma_n=1.0$
- 3) Της εφαπτομενικής ταχύτητας q_3 λόγω των δινών που «εξέρχονται/εκφεύγουν» από το T.E. της αεροτομής. Η αναγκαιότητα ύπαρξης των δινών αυτών οφείλεται στο θεώρημα Kelvin που εξηγείται στην παράγραφο 3.2.3

Άρα αν θεωρήσουμε πως γενικά η αδιατάρακτη ροή θα έχει ταχύτητα V_{av} και γύρω από την αεροτομή θα υπάρχει κυκλοφορία Γ τότε η συνολική εφαπτομενική ταχύτητα θα είναι:

$$q_p = V_{av} \cdot q_1 + \frac{\Gamma}{S} \cdot q_2 + q_3$$

Εξ. (3.2.2)

όπου S το συνολικό μήκος τόξου της αεροτομής.

Αν η διαφορά της εφαπτομενικής ταχύτητας είναι Δq , τότε θα ισχύει ότι:

$$\Delta q = V_{av} \cdot \Delta q_1 + \frac{\Gamma}{S} \cdot \Delta q_2 + \Delta q_3 \quad \text{Εξ. (3.2.3)}$$

και αφού σύμφωνα με τη συνθήκη Kutta πρέπει να ισχύει ότι $\Delta q=0$ καταλήγουμε στην εξής σχέση:

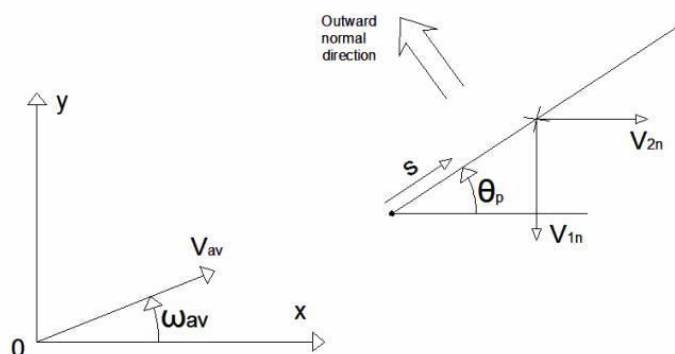
$$\frac{\Gamma}{S} = -V_{av} \cdot \frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} - \frac{\Delta q_3}{\Delta q_2} \quad \text{Εξ. (3.2.4)}$$

Με την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλοφορία Γ γύρω από την αεροτομή και στη συνέχεια με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.2.2) υπολογίζουμε την εφαπτομενική ταχύτητα σε κάθε σημείο της επιφάνειας της αεροτομής.

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε την ταχύτητα q_1 . Μένει ακόμα να υπολογίσουμε τις ταχύτητες q_2 και q_3 .

3.2.1 Υπολογισμός ταχύτητας q_2

Από τη γενική θεωρία της μηχανικής ρευστών γνωρίζουμε πως η επαγόμενη ταχύτητα από μια σημειακή δίνη με ένταση γ_n , τοποθετημένη στο σημείο C_n , είναι η ίδια με την ταχύτητα που επάγει μια σημειακή πηγή ίδιας έντασης δηλαδή ($m_n = \gamma_n$), τοποθετημένη επίσης στο σημείο C_n και με τη διεύθυνση στραμμένη κατά 90° με ωρολογιακή φορά ως προς τη πηγή (αν η δίνη έχει θετική έννοια την ωρολογιακή).



Εικόνα 3.5 Η ταχύτητα που επάγει το n -οστό στοιχείο (κατανομή δινών γ_n) στο p -οστό στοιχείο

Έτσι οι σχέσεις για την επαγόμενη ταχύτητα στο μέσον του στοιχείου p από την κατανομή δινών γ_n στο στοιχείο n , είναι ίδιες με τις σχέσεις (3.1.14) με τη διαφορά

ότι η ποσότητα m_n αντικαθίσταται από την ποσότητα γ_n και με τις διευθύνσεις στραμμένες κατά 90° ωρολογιακά (βλ. Εικόνα 3.5).

Στην Εικόνα 3.5 βλέπουμε πως η κατανομή δινών γ_n προκαλεί μια κάθετη ταχύτητα στο p -οστό στοιχείο. Η συνιστώσα αυτή πρέπει να εξουδετερωθεί για να τηρηθεί η οριακή συνθήκη $V_p=0$ και για το λόγο αυτό εισάγουμε μια νέα κατανομή πηγών m_{n1} . Η κάθετη ταχύτητα που προκαλεί στο p -οστό στοιχείο η κατανομή δινών γ_n είναι:

$$\sum_{n=1}^N \left(-V_{1n} \cdot \cos(\theta_p) - V_{2n} \cdot \sin(\theta_p) \right) \cdot \frac{\gamma_n}{4\pi} = -\bar{B}_{pn} \cdot \frac{\gamma_n}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.5)}$$

Ακολουθως η κάθετη ταχύτητα που προκαλεί η κατανομή πηγών m_{n1} στο p -οστό στοιχείο είναι:

$$\bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.6)}$$

Αφού πρέπει $V_p=0$ τότε θα έχουμε:

$$\bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\gamma_n}{4\pi} = 0 \quad \text{Εξ. (3.2.7)}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\bar{m}_{n1} = \left(\bar{A}_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{B}_{pn} \cdot \gamma_n \quad \text{Εξ. (3.2.8)}$$

Επειδή όμως έχουμε ορίσει ότι $\gamma_n=1$ τότε θα είναι:

$$\bar{B}_{pn} \cdot \gamma_n = \sum_{n=1}^N \bar{B}_{pn} \quad \text{Εξ. (3.2.9)}$$

Έτσι η εξ. (3.2.8) θα γίνει:

$$\bar{m}_{n1} = \left(\bar{A}_{pn} \right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N \bar{B}_{pn} \quad \text{Εξ. (3.2.10)}$$

Η εφαπτομενική ταχύτητα στο p -οστό στοιχείο λόγω της κατανομής δινών γ_n θα είναι:

$$\sum_{n=1}^N \left(V_{2n} \cdot \cos(\theta_p) - V_{1n} \cdot \sin(\theta_p) \right) \cdot \frac{\gamma_n}{4\pi} = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\gamma_n}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.11)}$$

Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγει το ρ-οστό στοιχείο στον εαυτό του είναι $(\gamma_p/2)$.

Συνολικά λοιπόν η εφαπτομενική ταχύτητα q_2 που επάγει η κατανομή δινών γ_n και η κατανομή πηγών m_{n1} στο ρ-οστό στοιχείο είναι:

$$\bar{q}_2 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} + \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{\gamma}_n}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.12)}$$

Επειδή όμως $\gamma_n=1$ τότε θα είναι:

$$\bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{\gamma}_n}{4\pi} = \sum_{n=1}^N \frac{A_{pn}}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.13)}$$

και συνεπώς θα έχουμε:

$$\bar{q}_2 = \bar{B}_{pn} \cdot \left| \bar{A}_{pn} \right|^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{B_{pn}}{4\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{A_{pn}}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.14)}$$

3.2.2 Υπολογισμός ταχύτητας q_3

Στην υποπαράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε την εφαπτομενική ταχύτητα q_3 στην επιφάνεια της αεροτομής, που επάγουν οι παραγόμενες δίνες από το Τ.Ε. της κινούμενης με μη σταθερό τρόπο, δηλαδή επιταχυνόμενη, ατέρμονος πτερύγωσης. Στην εξίσωση (3.1.4) είχαμε υπολογίσει την ταχύτητα που επάγουν στο τυχαίο σημείο z πηγές έντασης M που βρίσκονται σε αντίστοιχα σημεία C των αεροτομών της ατέρμονος πτερύγωσης:

$$w = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{SP} \cdot \text{coth} \left[\frac{\pi \cdot (z - c)}{SP} \right]$$

Αν θέσουμε:

$$\frac{\pi \cdot (z - c)}{SP} = Z = X + i \cdot Y \quad \text{Εξ. (3.2.15)}$$

και λάβουμε υπόψη πως ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\text{coth}(Z) = \frac{\sinh(2 \cdot X) - i \cdot \sin(2Y)}{\cosh(2X) - \cos(2Y)} \quad \text{Εξ. (3.2.16)}$$

Τότε συμπεραίνουμε ότι οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας w , $V_{1\Delta}$ και $V_{2\Delta}$ (βλ. Εικόνα 3.3), δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_{1\Delta} = \frac{M}{2SP} \cdot \frac{\sinh(2 \cdot X)}{\cosh(2X) - \cos(2Y)} \quad \text{Εξ. (3.2.17.α)}$$

$$V_{2\Delta} = \frac{M}{2SP} \cdot \frac{\sin(2 \cdot Y)}{\cosh(2X) - \cos(2Y)} \quad \text{Εξ. (3.2.17.β)}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.2.1 σχετικά με την επαγόμενη ταχύτητα από μια δίνη v_n και τη σχέση της με την ταχύτητα που επάγεται από μια πηγή m_n , η ταχύτητα που επάγεται σε τυχαίο z από μια σημειακή δίνη έντασης Γ_Δ θα εκφράζεται από τις σχέσεις (3.2.17.α) και (3.2.17.β) με την ένταση M αντικατεστημένη από την ένταση Γ_Δ και τις διευθύνσεις στραμμένες κατά 90° ωρολογιακά όπως δείχνει και η Εικόνα 3.5. Οι ταχύτητες (κάθετη - (3.2.18.α) και εφαπτομενική - (3.2.18.β)) που επάγουν οι σχηματισθείσες δίνες στο p -στό στοιχείο, θα δίνονται από τις κάτωθι σχέσεις:

$$-\sum_{K=1}^{STP-1} V_{1\Delta, K} \cdot \cos|\theta_p| - \sum_{K=1}^{STP-1} V_{2\Delta, K} \cdot \sin|\theta_p| = -\bar{d}_p \quad \text{Εξ. (3.2.18.α)}$$

$$\sum_{K=1}^{STP-1} V_{2\Delta, K} \cdot \cos|\theta_p| - \sum_{K=1}^{STP-1} V_{1\Delta, K} \cdot \sin|\theta_p| = \bar{e}_p \quad \text{Εξ. (3.2.18.β)}$$

όπου STP είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων μέχρι τη στιγμή που εξετάζουμε κάθε φορά.

Για να αντισταθμίσουμε την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας και να τηρήσουμε την οριακή συνθήκη $V_p=0$ εισάγουμε μια νέα κατανομή πηγών με ένταση m_{nD} , όπως και στην παράγραφο 3.2.1 εισάγαμε την κατανομή m_1 . Αφού λοιπόν πρέπει να ισχύει ότι $V_p=0$ θα έχουμε:

$$\bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD}}{4\pi} - \bar{d}_p = 0 \quad \text{Εξ. (3.2.19)}$$

και αν λύσουμε ως προς m_{nD} :

$$\frac{\bar{m}_{nD}}{4\pi} = \left[\bar{A}_{pn} \right]^{-1} \cdot \bar{d}_p \quad \text{Εξ. (3.2.20)}$$

Συνεπώς η ζητούμενη ταχύτητα q_3 θα είναι:

$$\bar{q}_3 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD}}{4\pi} + \bar{e}_p \quad \text{Εξ. (3.2.21)}$$

Αντικαθιστώντας από την εξ.(3.2.20) θα έχουμε ότι:

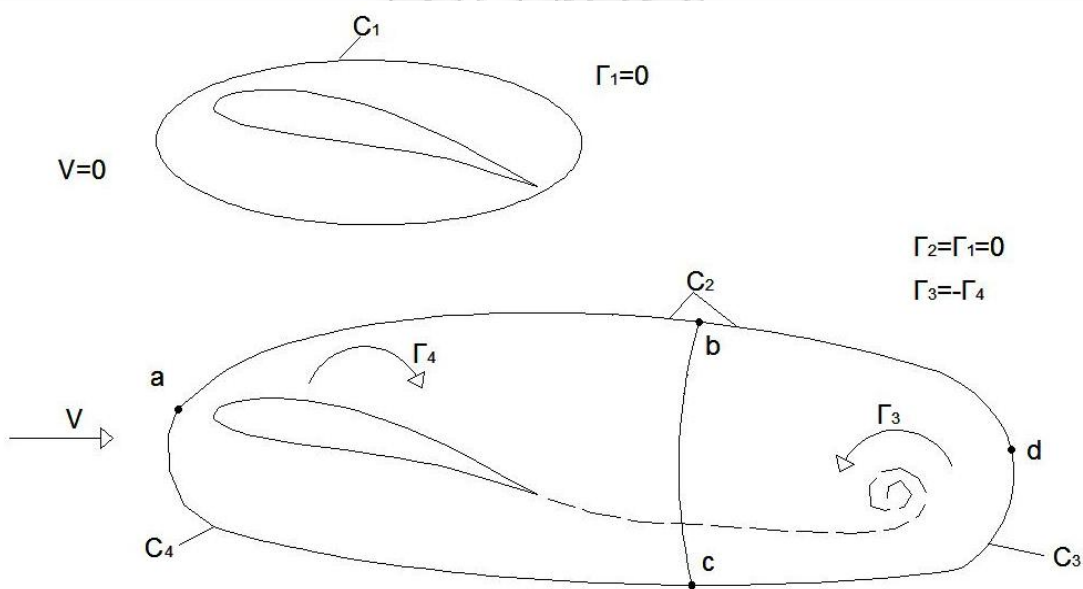
$$\bar{q}_3 = \bar{B}_{pn} \cdot \left[\bar{A}_{pn} \right]^{-1} \cdot \bar{d}_p + \bar{e}_p \quad \text{Εξ. (3.2.22)}$$

3.2.3 Θεώρημα Kelvin

Έστω ασυμπύεστη και μη συνεκτική ροή υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων. Το θεώρημα του Kelvin επιβάλλει όπως η κυκλοφορία κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C , που διέρχεται πάντα από τα ίδια υλικά στοιχεία του ρευστού, είναι σταθερή, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{Εξ. (3.2.23)}$$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την αεροτομή της Εικόνας 3.6 που τίθεται απότομα σε κίνηση. Πριν τεθεί σε κίνηση, η κυκλοφορία Γ_1 γύρω από την αεροτομή και κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C_1 είναι μηδενική. Όταν τεθεί σε κίνηση, γύρω από την αεροτομή, στην κλειστή καμπύλη C_4 (abca) δημιουργείται μια κυκλοφορία Γ_4 . Προκειμένου όμως η (συνολική) κυκλοφορία γύρω από τη καμπύλη C_2 (abdca) να παραμείνει σταθερή, ίδια δηλαδή με τη Γ_1 , και επειδή αρχικά $\Gamma_1 = 0$, θα πρέπει γύρω από την καμπύλη C_3 (dcbd) να αναπτυχθεί κυκλοφορία Γ_3 ίση και αντίθετη με την Γ_4 , δηλαδή $\Gamma_3 = -\Gamma_4$, η οποία εμφανίζεται στη πράξη/φύση υπό μορφή δίνης που απομακρύνεται από την αεροτομή.



Εικόνα 3.6 Αεροτομή που τίθεται σε κίνηση

Τι σημαίνει αυτό για το μοντέλο μας; Κατά τη διάρκεια του πρώτου χρονικού βήματος, θέτοντας $\Delta q_3=0$, υπολογίζουμε την κυκλοφορία Γ γύρω από την αεροτομή από την εξ. (3.2.4). Την κυκλοφορία αυτή ονομάζουμε Γ_{tot} και παραμένει σταθερή καθόλη τη διάρκεια της λύσης. Στη διάρκεια των επόμενων χρονικών βημάτων η

εκάστοτε κυκλοφορία Γ που θα υπολογίζουμε από την εξ. (3.2.4) θα συμβολίζεται Γ_{airf} . Αν μάλιστα θέσουμε στην εξίσωση (3.2.4) όπου:

$$\Gamma_Q = -V_{av} \cdot \frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} \quad \text{Εξ. (3.2.24.α)}$$

$$\Gamma_S = -\frac{\Delta q_3}{\Delta q_2} \quad \text{Εξ. (3.2.24.β)}$$

θα έχουμε ότι:

$$\frac{\Gamma_{airf}}{S} = \Gamma_Q + \Gamma_S \quad \text{Εξ. (3.2.25)}$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με Γ_D την νέα δίνη που δημιουργείται σε κάθε χρονικό βήμα και με $\sum \Gamma_k$ το άθροισμα των εντάσεων των δινών όλων των προηγούμενων χρονικών βημάτων, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Kelvin στην περίπτωση μας θα πάρουμε:

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_D + \Gamma_{airf} + \sum_k \Gamma_k \quad \text{Εξ. (3.2.26)}$$

Στη παραπάνω εξίσωση προσπαθούμε να υπολογίσουμε την ένταση της νεοσχηματιζόμενης δίνης Γ_D . Αντικαθιστώντας από την εξ. (3.2.25) θα είναι:

$$\Gamma_D + S \cdot \Gamma_S = \Gamma_{tot} - \sum_k \Gamma_k - S \cdot \Gamma_Q \quad \text{Εξ. (3.2.27)}$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το Γ_S συναρτήσει του Γ_D . Αν στις εξ. (3.2.17.α) και (3.2.17.β) θέσουμε:

$$H = \frac{1}{2SP} \cdot \frac{\sinh(2 \cdot X)}{\cosh(2X) - \cos(2Y)} \quad \text{Εξ. (3.2.28.α)}$$

$$\Theta = \frac{1}{2SP} \cdot \frac{\sin(2 \cdot Y)}{\cosh(2X) - \cos(2Y)} \quad \text{Εξ. (3.2.28.β)}$$

τότε οι εξ. (3.2.17.α) και (3.2.17.β), για τη περίπτωση της δίνης Γ_D , μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$V_{1\Delta} = \Gamma_D \cdot H \quad \text{Εξ. (3.2.29.α)}$$

$$V_{2\Delta} = \Gamma_D \cdot \Theta \quad \text{Εξ. (3.2.29.β)}$$

Η ποσότητα Δq_3 μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα θα εκφράζει την διαφορά της επαπτομενικής ταχύτητας λόγω όλων των δινών των

προηγούμενων χρονικών βημάτων και θα συμβολίζεται με Δq_k και το δεύτερο θα εκφράζει την διαφορά της επαπτομενικής ταχύτητας λόγω της νέας δίνης Γ_D και θα συμβολίζεται με Δq_D .

$$\Delta q_3 = \Delta q_k + \Delta q_D \quad \text{Εξ. (3.2.30)}$$

Συνδυάζοντας τις εξ. (3.2.24.β), (3.2.30) και (3.2.27) θα έχουμε:

$$\Gamma_D + S \cdot \left(-\frac{\Delta q_D}{\Delta q_2} \right) = \Gamma_{\text{tot}} - \sum_k \Gamma_k - S \cdot \Gamma_Q + S \cdot \frac{\Delta q_k}{\Delta q_2} \quad \text{Εξ. (3.2.31)}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.2.2 η ταχύτητα q_D θα είναι:

$$q_D = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \Gamma_D \cdot \left(H \cdot \cos(\theta_p) + \Theta \cdot \sin(\theta_p) \right) + \Gamma_D \cdot \left(\Theta \cdot \cos(\theta_p) - H \cdot \sin(\theta_p) \right) \quad \text{Εξ. (3.2.32)}$$

Η σχέση αυτή, αν βγάλουμε κοινό παράγοντα την ένταση Γ_D , μπορεί να γραφεί ως:

$$q_D = \Gamma_D \cdot q_{D1} \quad \text{Εξ. (3.2.33)}$$

όπου q_{D1} είναι η επαπτομενική ταχύτητα που επάγεται από μια δίνη με μοναδιαία ένταση ($\Gamma=1.0$) που βρίσκεται στη θέση της νέας δίνης Γ_D και που δίνεται από την σχέση:

$$q_{D1} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \left(H \cdot \cos(\theta_p) + \Theta \cdot \sin(\theta_p) \right) + \left(\Theta \cdot \cos(\theta_p) - H \cdot \sin(\theta_p) \right)$$

ή ισοδύναμα

$$q_{D1} = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{m_{nD1}}{4\pi} + e_p \quad \text{Εξ. (3.2.34)}$$

Συνδυάζοντας τις εξ. (3.2.31) και (3.2.33) θα έχουμε:

$$\Gamma_D + \Gamma_D \cdot S \cdot \left(-\frac{\Delta q_{D1}}{\Delta q_2} \right) = \Gamma_{\text{tot}} - \sum_k \Gamma_k - S \cdot \Gamma_Q + S \cdot \frac{\Delta q_k}{\Delta q_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma_D = \frac{\Gamma_{\text{tot}} - \sum_k \Gamma_k - S \cdot \Gamma_Q + S \cdot \frac{\Delta q_k}{\Delta q_2}}{1 + S \cdot \left(-\frac{\Delta q_{D1}}{\Delta q_2} \right)} \quad \text{Εξ. (3.2.35)}$$

Στην εξίσωση (3.2.34) όλα τα μεγέθη του δεξιού μέλους της εξίσωσης είναι γνωστά και συνεπώς η ένταση Γ_D της νεοσχηματισθείσας δίνης μπορεί να υπολογισθεί.

Επίσης η Γ_S μπορεί τώρα να υπολογιστεί ως:

$$\Gamma_S = - \left(\frac{\Delta q_k}{\Delta q_2} + \frac{\Delta q_{D1}}{\Delta q_2} \right) \quad \text{Εξ. (3.2.36)}$$

και τελικά η ζητούμενη ποσότητα Γ_{airf}/S μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (3.2.25).

3.2.4 Υπολογισμός της κάθετης ταχύτητας στα Σημεία Ελέγχου

Αντίστοιχα με τη σχέση (3.2.2) όπου υπολογίσαμε την εφαπτομενική ταχύτητα στα Σ.Ε. μπορούμε να διατυπώσουμε μια ανάλογη σχέση για τον υπολογισμό της V_p (η οποία σύμφωνα με την οριακή συνθήκη πρέπει να προκύπτει μηδενική). Η σχέση αυτή θα είναι:

$$V_p = V_{av} \cdot v_1 + \frac{\Gamma}{S} \cdot v_2 + v_3 \quad \text{Εξ. (3.2.37)}$$

όπου η v_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{V}_1 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} - \bar{b}_p \quad \text{Εξ. (3.2.38)}$$

η v_2 από τη σχέση:

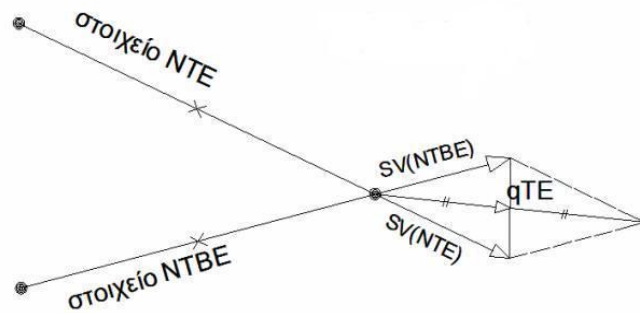
$$\bar{V}_2 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{\gamma}_n}{4\pi} \quad \text{Εξ. (3.2.39)}$$

και η v_3 από τη σχέση:

$$\bar{V}_3 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD}}{4\pi} - \bar{d}_p \quad \text{Εξ. (3.2.40)}$$

3.2.5 Υπολογισμός της ταχύτητας στο T.E.

Ο υπολογισμός της ταχύτητας στο T.E. είναι απλός καθώς προκύπτει ως το ημίαθροισμα των ταχυτήτων στο στοιχείο πριν (NTE) και μετά (NTBE) το T.E.



Εικόνα 3.7 Υπολογισμός ταχύτητας στο T.E.

Η ταχύτητα q_{TE} θα είναι:

$$\vec{q}_{TE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{SV}(NTBE) + \vec{SV}(NTE) \right) \quad \text{Εξ. (3.2.41)}$$

3.3 Υπολογισμός της ταχύτητας στα σημεία του πεδίου ροής εκτός της επιφάνειας της αεροτομής

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε υπολογίσει τις κατανομές πηγών m_n και m_{n1} , την κατανομή δινών γ_n , τις εντάσεις των δινών που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της κίνησης της ατέρμονος πτερυγώσης καθώς και τις αντίστοιχες διανομές πηγών m_{nD} που πρέπει να θεωρήσουμε για να μη διαταραχθεί η οριακή συνθήκη μη εισχώρησης (δηλ. μηδενική κάθετη συνιστώσα ταχύτητας) στην επιφάνεια της αεροτομής. Αυτά σε συνδυασμό με την αδιατάρακτη ροή V_{av} (ή V_{in}) δημιουργούν το πεδίο ροής του οποίου καλούμαστε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες σε κάθε χρονική στιγμή.

Πράγματι αφού έχουν καθοριστεί όλα τα παραπάνω είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ταχύτητα του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο του και οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα σε ένα τυχαίο σημείο z εκτός αεροτομής. Η ταχύτητα αυτή θα έχει τρεις συνιστώσες:

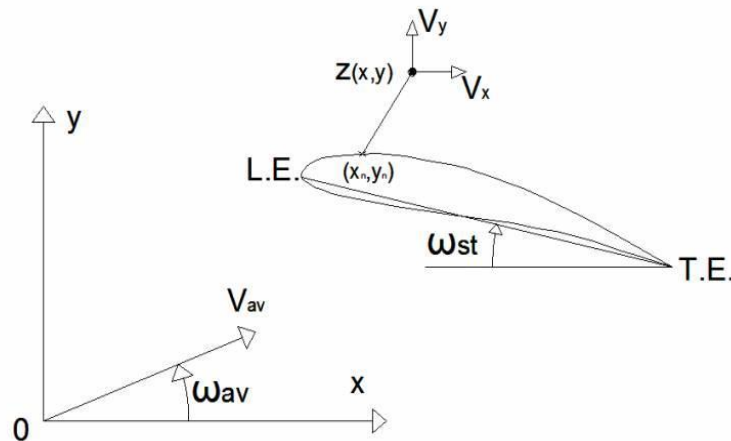
1. Την συνιστώσα που προέρχεται από την αδιατάρακτη ροή V_{av} και την κατανομή πηγών m_n , που έχει βρεθεί υπό αυτή τη ταχύτητα. Η συνιστώσα αναλύεται σε δυο συνιστώσες V_{x1} , V_{y1} κατά τους άξονες x και y , όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.8. Οι V_{x1} και V_{y1} δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_{x1} = \sum_{n=1}^N V_{1n} + V_{av} \cdot \cos(\omega_{av}) = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + V_{av} \cdot \cos(\omega_{av})$$

Εξ. (3.3.1.α)

$$V_{y1} = \sum_{n=1}^N V_{2n} + V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + V_{av} \cdot \sin(\omega_{av})$$

Εξ. (3.3.1.β)



Εικόνα 3.8 Υπολογισμός ταχύτητας σε σημείο εκτός αεροτομής

2. Την συνιστώσα που προέρχεται από την κατανομή πηγών m_{n1} και την κατανομή πηγών $\gamma_n=1$. Υπενθυμίζουμε ότι οι ταχύτητες που επάγει η κατανομή πηγών είναι οι ταχύτητες της κατανομής πηγών στραμμένες κατά 90° ωρολογιακά. Οι V_{x2} και V_{y2} δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_{x2} = \sum_{n=1}^N V_{1n} + \sum_{n=1}^N V_{2n} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} + \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{\gamma}_n}{4\pi}$$

⇒

$$V_{x2} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{4\pi}$$

Εξ. (3.3.2.α)

$$V_{y2} = \sum_{n=1}^N V_{2n} - \sum_{n=1}^N V_{1n} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{\gamma}_n}{4\pi}$$

⇒

$$V_{y2} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{4\pi}$$

Εξ. (3.3.2.β)

3. Την συνιστώσα από τις δίνες (με εντάσεις $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_K$) που δημιουργούνται κατά την κίνηση της ατέρμονος πτερύγωσης. Οι V_{x3} και V_{y3} δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_{x3} = C_n \cdot \frac{m_{nD}}{4\pi} + \sum_{K=1}^{STP-1} V_{2\Delta,K} \quad \text{Εξ. (3.3.3.α)}$$

$$V_{y3} = D_n \cdot \frac{m_{nD}}{4\pi} + \sum_{K=1}^{STP-1} V_{1\Delta,K} \quad \text{Εξ. (3.3.3.β)}$$

Οι ταχύτητες $V_{1\Delta}$ και $V_{2\Delta}$ δίνονται από τις σχέσεις (3.2.17.α) και (3.2.17.β) αν αντικαταστήσουμε την ένταση M με την ένταση της εκάστοτε δίνης Γ_K και όπου STP είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων μέχρι την στιγμή που εξετάζουμε.

Οι τρεις αυτές συνιστώσες συναποτελούν την ταχύτητα στο σημείο z η οποία θα είναι σε σχέση με τους άξονες x,y :

$$V_x = V_{x1} + \frac{\Gamma_{airf}}{S} V_{x2} + V_{x3} \quad \text{Εξ. (3.3.4.α)}$$

$$V_y = V_{y1} + \frac{\Gamma_{airf}}{S} V_{y2} + V_{y3} \quad \text{Εξ. (3.3.4.β)}$$

3.4 Υπολογισμός του σημείου ανακοπής στο L.E

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε το σημείο ανακοπής της αεροτομής, δηλαδή το σημείο εκείνο της επιφάνειας της αεροτομής στο οποίο μηδενίζεται η ταχύτητα. Αυτό που επιδιώκει το πρόγραμμα είναι να βρει δυο διαδοχικά σημεία (Σ.Ε.) με επαπτομενικές ταχύτητες $q(s)$ που να έχουν αντίθετα πρόσημα (υπενθυμίζουμε ότι η κάθετη ταχύτητα $V(s)$ είναι μηδενική). Τα διαδοχικά αυτά σημεία είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα σημεία του T.E., τα οποία έχουν επίσης διαφορετικά πρόσημα όσον αφορά την επαπτομενική ταχύτητα.

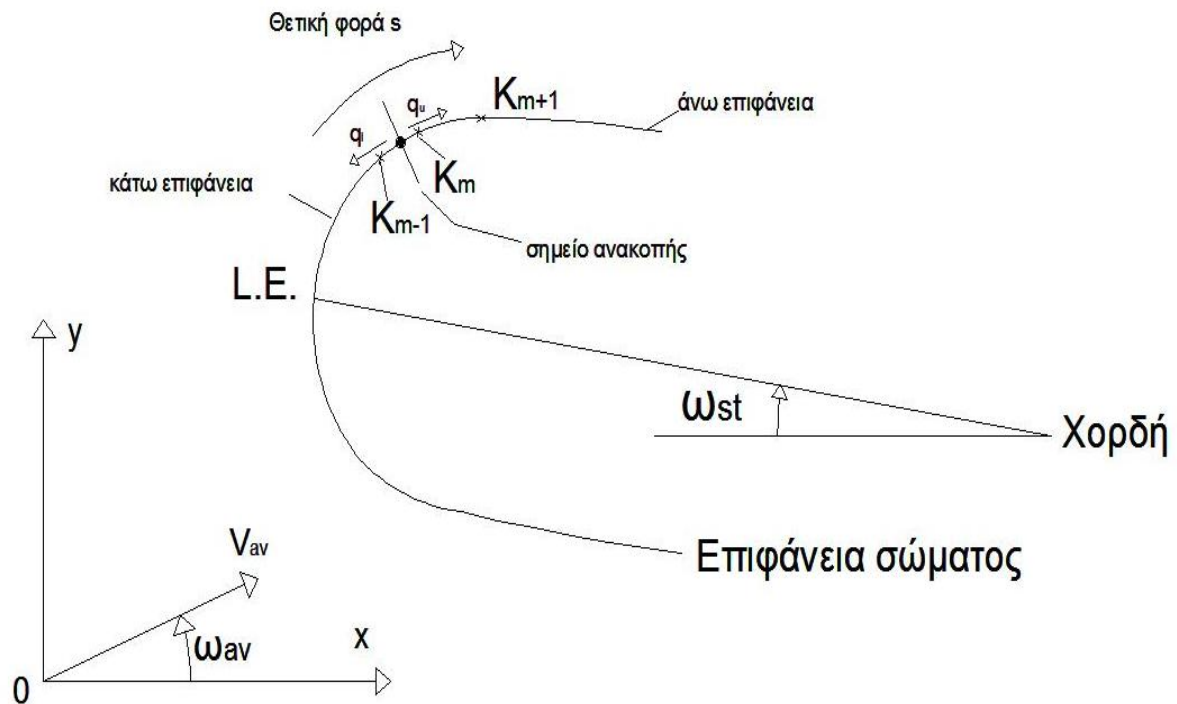
Το σημείο ανακοπής χωρίζει την επιφάνεια της αεροτομής σε άνω και κάτω επιφάνεια. Στην άνω επιφάνεια η ταχύτητα $q(s)$ είναι θετική, δηλαδή είναι προς την θετική κατεύθυνση του επιφανειακού τόξου s . Στην κάτω επιφάνεια συμβαίνει το αντίθετο καθώς η ταχύτητα είναι προς την αρνητική κατεύθυνση του τόξου s (Η θετική φορά του τόξου s είναι η ωρολογιακή φορά – βλ. Εικόνα 3.9).

Στην Εικόνα 3.10 βλέπουμε το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας σε σχέση με το μήκος του τόξου s . Πιο συγκεκριμένα έχουμε εστιάσει στην περιοχή του σημείου ανακοπής στο L.E. Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το τόξο s_{st} στο οποίο ισχύει ότι $q=0$. Η τιμή του s_{st} προσεγγίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$s_{st} = \frac{1}{2} \cdot (s_1 + s_2)$$

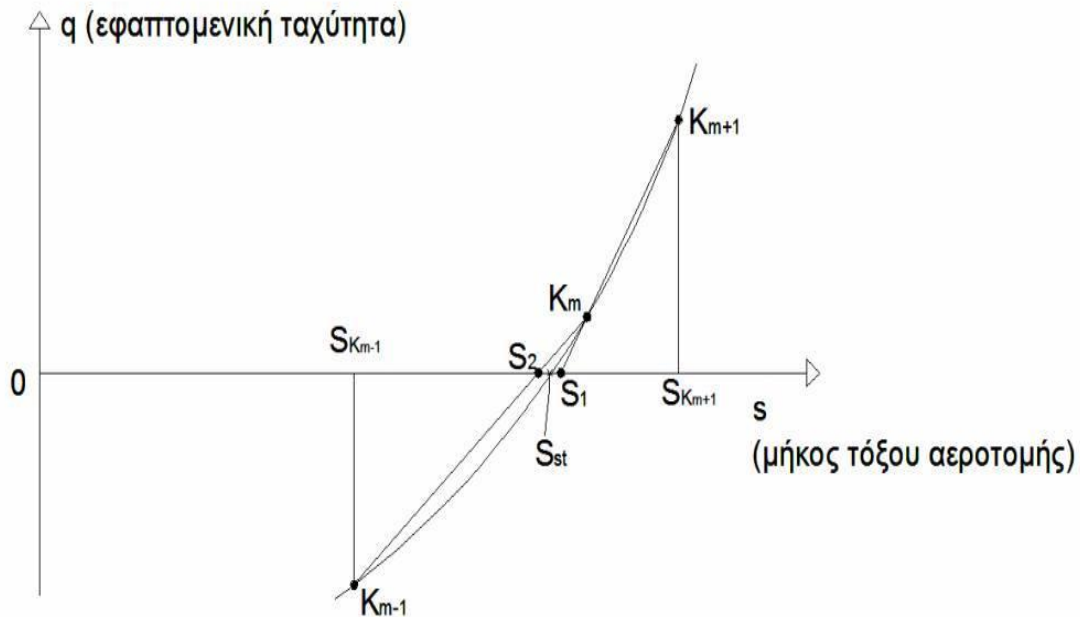
Εξ. (3.4.1)

όπου s_1, s_2 είναι τα σημεία τομής μεταξύ των ευθειών που περνούν από τα σημεία k_m, k_{m+1} και k_m, k_{m-1} αντίστοιχα με τον άξονα του μήκους του τόξου s (βλ. Εικόνα 3.10).



Εικόνα 3.9 Οι εφαπτομενικές ταχύτητες στην περιοχή του σημείου ανακοπής (stagnation point)

Από την Εικόνα 3.10 είναι σαφές ότι $s_{K_{m-1}} < s_{st} < s_{K_{m+1}}$. Υπάρχει, παρόλα αυτά, η περίπτωση να έχουμε ότι $s_{st} < s_{K_{m-1}}$ ή $s_{st} > s_{K_{m+1}}$. Στις περιπτώσεις αυτές ισχύει αντίστοιχα ότι $s_{st} = s_1$, αν $q_{K_m} \cdot q_{K_{m+1}} < 0$ και $s_{st} = s_2$, αν $q_{K_m} \cdot q_{K_{m-1}} < 0$.



Εικόνα 3.10 Υπολογισμός του σημείου ανακοπής (S_{st}). Τα σημεία K_{m-1} , K_m , K_{m+1} αντιστοιχούν στις εφαπτομενικές ταχύτητες.

3.5 Υπολογισμός άλλων παραμέτρων της ροής

Η διαδικασία του υπολογισμού της ροής γύρω από κινούμενη ατέρμονα πτερύγωση καταλήγει με τον υπολογισμό κάποιων σημαντικών παραμέτρων της ροής. Οι παράμετροι αυτοί είναι η δύναμη που ασκεί το ρευστό στην αεροτομή, η ταχύτητα και η γωνία εισόδου καθώς και η ταχύτητα και γωνία εξόδου της ροής. Επίσης υπολογίζεται και η γωνία κατά την οποία στρέφεται η ροή όταν περνά μέσα από την ατέρμονα πτερύγωση.

Από τη θεωρία των στροβιλομηχανών γνωρίζουμε ότι για την άνωση L ισχύει:

$$\vec{L} = \rho \cdot \vec{V}_{av} \times \vec{\Gamma} \quad \text{Εξ. (3.5.1)}$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού ($\rho = 1$ για το μοντέλο ασυμπίεστης ροής) και η ταχύτητα V_{av} δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{V}_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{V}_{in} + \vec{V}_{out} \right) \quad \text{Εξ. (3.5.2)}$$

Ο συντελεστής άνωσης της ατέρμονος πτερύγωσης ορίζεται ως:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot |V_{av}|^2 \cdot C} \quad \text{Εξ. (3.5.3)}$$

όπου C η χορδή της αεροτομής. Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (3.5.1) και (3.5.3) θα έχουμε ότι:

$$C_L = \frac{2 \cdot \Gamma}{|V_{av}|^2 \cdot C} \quad \text{Εξ. (3.5.4)}$$

Η κυκλοφορία Γ σε μια κλειστή καμπύλη C ορίζεται ως:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{Εξ. (3.5.5)}$$

Αν υπολογίσουμε από τον ορισμό την κυκλοφορία Γ γύρω από μια αεροτομή (βλ. Εικόνα 3.1) τότε στο παραλληλόγραμμο 12341 θα έχουμε:

$$V_{in} \cdot \sin|\omega_{in}| - V_{out} \cdot \sin|\omega_{out}| = \frac{\Gamma}{SP} \quad \text{Εξ. (3.5.6)}$$

Από διατήρηση μάζας θα έχουμε ότι:

$$V_{in} \cdot \cos|\omega_{in}| = V_{out} \cdot \cos|\omega_{out}| = V_{av} \cdot \cos|\omega_{av}| \quad \text{Εξ. (3.5.7)}$$

Επειδή η μέση ταχύτητα V_{av} αποτελεί το διανυσματικό ημίθροισμα των ταχυτήτων V_{in} και V_{out} θα ισχύει επίσης ότι:

$$V_{in} \cdot \sin|\omega_{in}| + V_{out} \cdot \sin|\omega_{out}| = 2 \cdot V_{av} \cdot \sin|\omega_{av}| \quad \text{Εξ. (3.5.8)}$$

Από το διάγραμμα ταχυτήτων στην Εικόνα 3.1 συμπεραίνουμε ότι:

$$\tan|\omega_{in}| = \frac{V_{av} \cdot \sin|\omega_{av}| + \frac{1}{2} \cdot (V_{in} \cdot \sin|\omega_{in}| - V_{out} \cdot \sin|\omega_{out}|)}{V_{av} \cdot \cos|\omega_{av}|} \quad \text{Εξ. (3.5.9)}$$

και

$$\tan|\omega_{out}| = \frac{V_{av} \cdot \sin|\omega_{av}| - \frac{1}{2} \cdot (V_{in} \cdot \sin|\omega_{in}| - V_{out} \cdot \sin|\omega_{out}|)}{V_{av} \cdot \cos|\omega_{av}|} \quad \text{Εξ. (3.5.10)}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.5.6), (3.5.8) και (3.5.9) παίρνουμε:

$$\omega_{in} = \tan^{-1} \frac{\sin \omega_{av} + \frac{\Gamma}{2 \cdot SP \cdot V_{av}}}{\cos \omega_{av}} \quad \text{Εξ. (3.5.11)}$$

και

$$\omega_{out} = \tan^{-1} \frac{\sin \omega_{av} - \frac{\Gamma}{2 \cdot SP \cdot V_{av}}}{\cos \omega_{av}}$$

Εξ. (3.5.12)

Όταν η ροή περνά μέσα από την ατέρμονα πτερύγωση στρέφεται κατά μια γωνία $\Delta\omega$ λόγω της κυκλοφορίας Γ που έχει κάθε αεροτομή της πτερύγωσης. Η γωνία αυτή είναι:

$$\Delta\omega = \omega_{in} - \omega_{out} \quad \text{Εξ. (3.5.13)}$$

Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$V_{in} = \sqrt{|V_{av} \cdot \cos(\omega_{av})|^2 + \left(V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) + \frac{\Gamma}{2 \cdot SP}\right)^2} \quad \text{Εξ. (3.5.14)}$$

και

$$V_{out} = \sqrt{|V_{av} \cdot \cos(\omega_{av})|^2 + \left(V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) - \frac{\Gamma}{2 \cdot SP}\right)^2} \quad \text{Εξ. (3.5.15)}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι οι θετικές φορές των γωνιών και των διανυσμάτων των ταχυτήτων φαίνεται στην Εικόνα 3.1.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι τα παραπάνω μεγέθη αφορούν στιγμιαίες τιμές, δεδομένου ότι τόσο τα V_{av} και Γ όσο και η θέση της αεροτομής/ατέρμονος πτερύγωσης είναι συναρτήσεις του χρόνου.

3.6 Υπολογισμός με δεδομένη την ταχύτητα V_{in}

Οι υπολογισμοί μας μέχρι τώρα προϋπέθεταν ως δεδομένη την ταχύτητα V_{av} (μέτρο και γωνία). Στα περισσότερα προβλήματα, όμως, αυτό που είναι γνωστό είναι η ταχύτητα V_{in} (μέτρο και γωνία). Ο υπολογισμός της ροής σε αυτή τη περίπτωση γίνεται ως εξής. Υποθέτουμε «δαισθητικά» μια αρχική V_{av} και στη συνέχεια ακολουθεί μια επαναληπτική διαδικασία μέχρι να βρεθεί η V_{in} .

Παρατηρήθηκε ότι μεγάλη διακύμανση της γωνίας ω_{av} δεν έχει ουσιαστική επίδραση στην τιμή της γωνίας ω_{out} . Συνεπώς θεωρήσαμε ότι η γωνία ω_{out} παραμένει σταθερή σε κάθε επανάληψη. Από τις σχέσεις (3.5.9) και (3.5.10) θα έχουμε:

$$\tan(\omega_{av})^{old} = \frac{1}{2} \cdot \left(\tan(\omega_{in})^{old} + \tan(\omega_{out})^{old} \right) \quad \text{Εξ. (3.6.1)}$$

$$\tan(\omega_{av})^{new} = \frac{1}{2} \cdot \left(\tan(\omega_{in})^{new} + \tan(\omega_{out})^{new} \right) \quad \text{Εξ. (3.6.2)}$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη και λάβουμε υπόψη ότι $\tan(\omega_{out})^{old} \approx \tan(\omega_{out})^{new}$ θα πάρουμε:

$$\tan|\omega_{av}|^{new} = \frac{1}{2} \cdot \left[\tan|\omega_{in}|^{new} - \tan|\omega_{in}|^{old} \right] + \tan|\omega_{av}|^{old} \quad \text{Εξ. (3.6.3)}$$

Αν αντικαταστήσουμε την $(\omega_{in})^{new}$ με την δεδομένη ω_{in} θα έχουμε:

$$|\omega_{av}|^{new} = \text{atan} \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\tan|\omega_{in}| - \tan|\omega_{in}|^{old} \right] + \tan|\omega_{av}|^{old} \right] \quad \text{Εξ. (3.6.4)}$$

Στην εξίσωση (3.6.4) βασίζεται η επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε επανάληψη βρίσκεται το πεδίο ροής για μια ω_{av} , στη συνέχεια υπολογίζεται η ω_{in} από την εξ. (3.5.11). Αν η υπολογισθείσα ω_{in} διαφέρει από την δεδομένη ω_{in} περισσότερο από 0.0005 rad τότε υπολογίζουμε μια νέα ω_{av} από την εξ. (3.6.4) και επαναλαμβάνουμε την επίλυση.

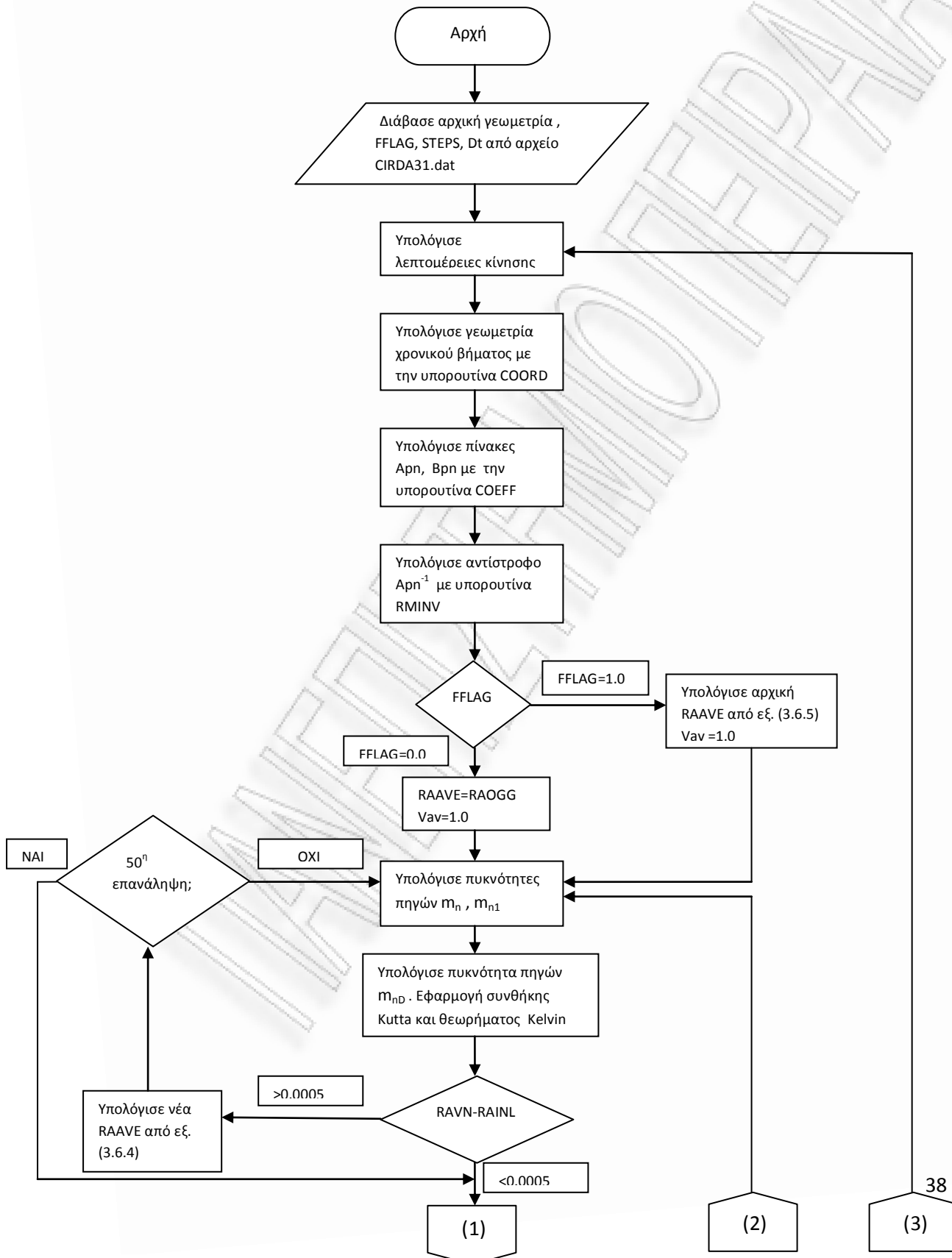
Η αρχική «δισοθητική» τιμή της ω_{av} λαμβάνεται από τη σχέση:

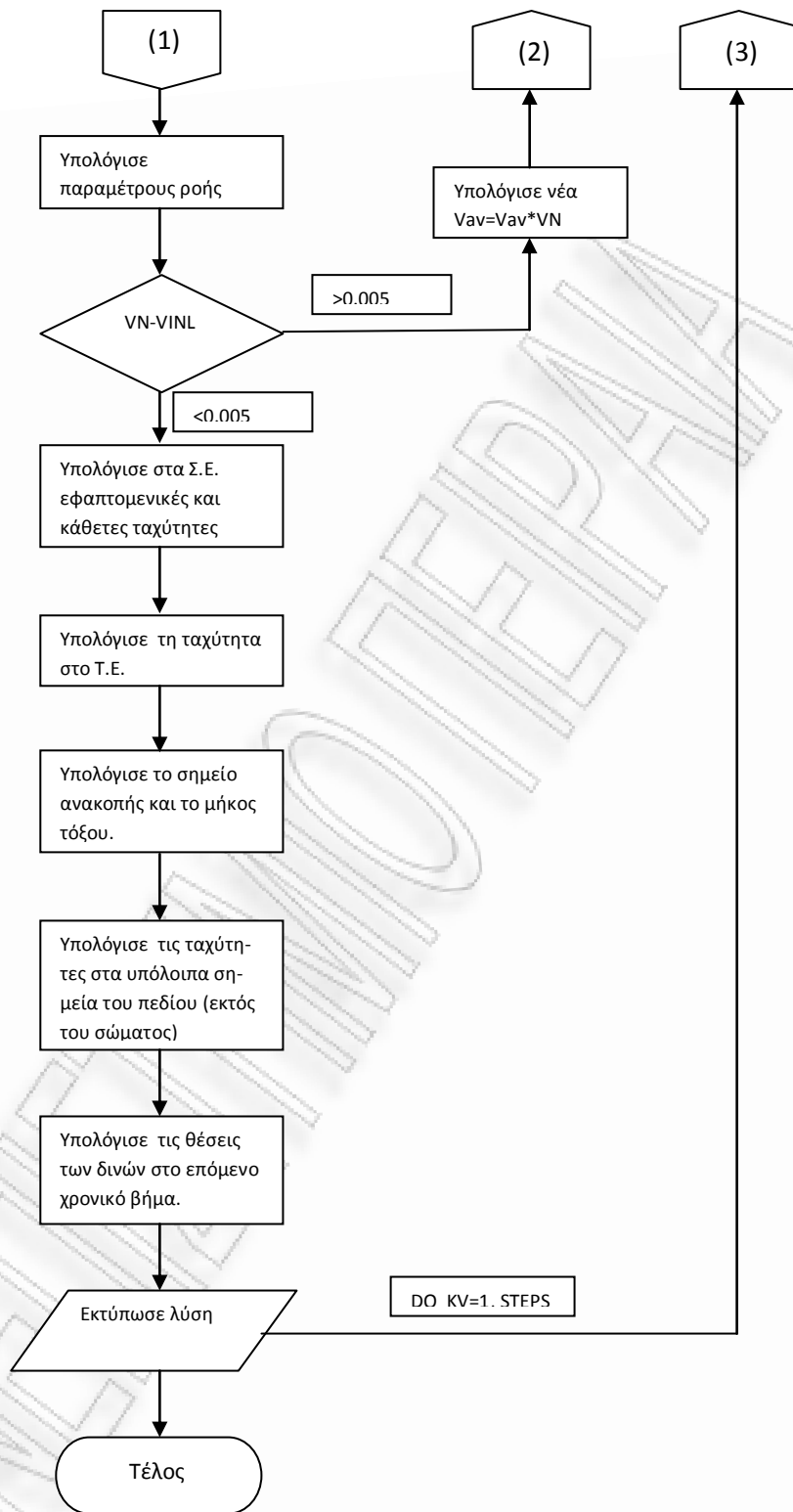
$$\omega_{av} = \text{atan} \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\tan|\omega_{in}| + \tan \left[-\omega_{st} \right] \right] \right] \quad \text{Εξ. (3.6.5)}$$

Η σχέση αυτή προήλθε από την εξ. (3.6.1) αντικαθιστώντας την ω_{av} με την ω_{st} (γωνία χορδής). Εδώ υποθέσαμε ότι μακριά κατόντι της περύγωσης η ροή έχει αποκτήσει την διεύθυνση της χορδής. Αν και για περιπτώσεις όπου η αεροτομή παρουσιάζει μεγάλη κυρτότητα η προσέγγιση φαντάζει χονδροειδής, εν τούτοις τα αποτελέσματα δεν επηρεάζονται αφού η αρχική τιμή της ω_{av} επηρεάζει ελάχιστα την επαναληπτική διαδικασία.

Κεφάλαιο 4:

Περιγραφή του προγράμματος υπολογισμού της ροής γύρω από μια ατέρμονα πτερύγωση σε μη μόνιμη κατάσταση





Εικόνα 4.1 Διάγραμμα ροής

Στο κεφάλαιο 4 περιγράφεται το πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει τη ροή γύρω από μια κινούμενη ατέρμονα πτερύγωση. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Α.1 όπου υπάρχει κατάλογος με της μεταβλητές του εν λόγω προγράμματος, όπως επίσης και στο διάγραμμα ροής της Εικόνας 4.1.

Ακολουθεί η περιγραφή της κυρίως ρουτίνας (CASCAD) και έπονται οι υπορουτίνες (COORD, COEFF, RMINV).

Το πρόγραμμα αποτελεί τροποποίηση του προγράμματος του Dedoussis (ref. 23, Dedoussis) που υπολόγιζε την ροή γύρω από μια ατέρμονα πτερύγωση σε σταθερή κατάσταση.

4.1 Η κυρίως ρουτίνα CASCAD

Το πρόγραμμα αρχίζει διαβάζοντας την αρχική γεωμετρική τοποθέτηση της αεροτομής, δηλαδή την γωνία κλίσης της (**OGSTG**), το διάκενο ανάμεσα στις αεροτομές της ατέρμονος πτερύγωσης (**SPNG**) και το μήκος της χορδής (**CHD**). Κατόπιν διαβάζει τον συνολικό αριθμό των σημείων (**N**) με τον οποίο προσεγγίζεται η εκάστοτε αεροτομή, τον αριθμό του σημείου T.E. (**NTE**) και τον αριθμό των σημείων (**NOFBDY**) του πεδίου ροής που βρίσκονται εκτός σώματος. Μετά διαβάζει τις συντεταγμένες των σημείων της αεροτομής με πλαίσιο αναφοράς τους άξονες x',y' (βλ. Εικόνα 3.2) και αποθηκεύονται στους πίνακες (**X1**) και (**Y1**). Αν ο αριθμός (**NOFBDY**) δεν είναι μηδενικός τότε διαβάζει στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων εκτός αεροτομής με πλαίσιο αναφοράς τους αδρανειακούς άξονες x,y . Οι συντεταγμένες αποθηκεύονται στους πίνακες (**XX**) και (**YY**). Συνεχίζοντας, το πρόγραμμα διαβάζει από το αρχείο εισόδου την γωνία πρόσπτωσης της αδιατάρακτης ροής (**OGG**) καθώς και τη μεταβλητή (**FFLAG**). Το πρόγραμμα ολοκληρώνει την ανάγνωση του αρχείου εισόδου CIRDA31.dat, διαβάζοντας τον συνολικό αριθμό των χρονικών βημάτων (**STEPS**) καθώς και τη χρονική διάρκεια του κάθε βήματος (**Dt**).

Στο σημείο αυτό αρχίζει ο κυρίως βρόγχος (main loop) και αμέσως μετά υπολογίζονται οι λεπτομέρειες της κίνησης ανάλογα με την περίπτωση (ταχύτητα εισόδου, γωνία εισόδου, γωνιακή ταχύτητα κτλ). Στην Περίπτωση (1), για παράδειγμα, εισάγουμε το πλάτος (**am**) και τη συχνότητα (**co**) της ταλάντωσης και το μήκος (**TRN**) από το σημείο όπου έχουμε «δέσει» την L.E της αεροτομής μας. Το πρόγραμμα υπολογίζει με βάση αυτά την εκάστοτε γωνία (**RASTG**) της αεροτομής, τη γωνιακή της ταχύτητα (**OM**), την ταχύτητα (**VN**) και τη γωνία πρόσπτωσης της ροής που «βλέπει» η αεροτομή (**RAVN**).

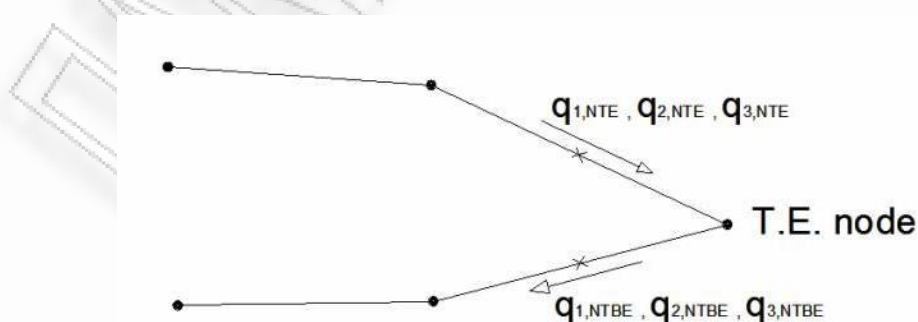
Ακόλουθα καλείται η υπορουτίνα COORD η οποία υπολογίζει τη γεωμετρία της αεροτομής σε κάθε χρονικό βήμα (βλ. 4.2). Στο επόμενο τμήμα του προγράμματος η υπορουτίνα COEFF (βλ. 4.3) υπολογίζει τους πίνακες A_{pn} και B_{pn} και αμέσως μετά η υπορουτίνα RMINV (βλ. 4.4) αντιστρέφει τον A_{pn} .

Κατόπιν το πρόγραμμα αποφασίζει, βάσει της μεταβλητής (**FFLAG**) αν η γωνία πρόσπτωσης της ροής (**OGG**) είναι η μέση γωνία της αδιατάρακτης ροής ω_{av}

(**FFLAG=0.0**) ή είναι η γωνία εισόδου της αδιατάρακτης ροής ω_{in} (**FFLAG=1.0**). Στη τελευταία περίπτωση η αρχική τιμή της ω_{av} υπολογίζεται την εξ. (3.6.5) για να αρχίσει η επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση αφού οριστεί η τιμή της ω_{av} , το πρόγραμμα υπολογίζει την κάθετη ταχύτητα (b_p – εξ.(3.1.20)) που επάγεται σε κάθε στοιχείο της αεροτομής από μια μοναδιαία μέση ταχύτητα ($V_{av}=1.0$) και την αποθηκεύει στον πίνακα (**VC**). Ύστερα, βάσει των εξισώσεων (3.2.10) και (3.1.24), υπολογίζονται οι πυκνότητες των πηγών m_{n1} και $m_r/4\pi$ και αποθηκεύονται αντίστοιχα στους πίνακες (**DG**) και (**VC**).

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η συνθήκη Kutta και το θεώρημα Kelvin. Προσπαθούμε να βρούμε τις διαφορές των εφαπτομενικών ταχυτήτων στο τελευταίο στοιχείο (NTE) πριν και στο πρώτο στοιχείο (NTBE) μετά το T.E. Υπολογίζονται, κατ' αρχάς, οι εφαπτομενικές ταχύτητες $q_{1,NTE}$ και $q_{1,NTBE}$ από τη σχέση (3.1.29). Σημειώνουμε ότι η διαφορά υπολογίζεται ως $\Delta q_1 = q_{1,NTE} + q_{1,NTBE}$ καθώς η εφαπτομενική ταχύτητα αμέσως μετά το T.E. λαμβάνεται θετική έχοντας αντίθετη διεύθυνση από την αντίστοιχη ταχύτητα αμέσως πριν το T.E. Ακόλουθα υπολογίζουμε τις ταχύτητες $4\pi \cdot q_{2,NTE}$ και $4\pi \cdot q_{2,NTBE}$ από την εξ. (3.2.12) από τις οποίες βρίσκεται η διαφορά $4\pi \cdot \Delta q_2$.

Αν το τρέχον χρονικό βήμα είναι το πρώτο (**KV=1**) τότε υπολογίζουμε την κυκλοφορία $\Gamma/4\pi \cdot S$ από τη σχέση (3.2.4) θέτοντας $\Delta q_3=0$ και αποθηκεύεται ως (**GAP**) (στα υπόλοιπα χρονικά βήματα αποθηκεύεται ως (**GQ**)). Έχοντας βρει την κυκλοφορία $\Gamma/4\pi \cdot S$ υπολογίζουμε την κυκλοφορία Γ γύρω από την αεροτομή. Η κυκλοφορία αυτή αποθηκεύεται ως το πρώτο στοιχείο στον πίνακα (**GAPP**) και αποτελεί την κυκλοφορία Γ_{tot} (βλ. Κεφ. 3). Στα επόμενα χρονικά βήματα (**KV≥2**) αφού έχουμε αποθηκεύσει την κυκλοφορία (**GQ**) υπολογίζουμε τις πηγές m_{nD1} (**GND1**) από τη σχέση (3.2.20) και τις εφαπτομενικές ταχύτητες $q_{D1,NTE}$ και $q_{D1,NTBE}$ από την σχέση (3.2.34). Άρα συνεπώς μπορούμε να βρούμε την διαφορά Δq_{D1} . Στη συνέχεια υπολογίζονται οι πηγές m_{nDk} (**GND**) λόγω των δινών των προηγούμενων χρονικών βημάτων από την σχέση (3.2.20) και ακόλουθα οι εφαπτομενικές ταχύτητες $q_{k,NTE}$ και $q_{k,NTBE}$ από τη σχέση (3.2.21) (αν είμαστε στο βήμα (**KV=2**) τότε προφανώς $q_{k,NTE}=q_{k,NTBE}=0$). Συνεπώς μπορούμε να βρούμε και την διαφορά Δq_k . Βρίσκοντας επίσης και το άθροισμα των εντάσεων των δινών $\Sigma \Gamma_k$ (**SKM**) έχουμε ότι χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της έντασης Γ_D της νεοσχηματισθείσας δίνης από τη σχέση (3.2.35). Οι τιμές των εντάσεων των δινών αποθηκεύονται στον πίνακα-γραμμή (**GAPDS**).



Εικόνα 4.2 Εφαρμογή της συνθήκης Kutta στο T.E. της αεροτομής

Όταν υπολογισθεί η ένταση Γ_D ακολουθεί ο υπολογισμός της Γ_S από τη σχέση (3.2.36) και συνακόλουθα ο υπολογισμός της ποσότητας Γ_{airf}/S από τη σχέση (3.2.25) και η αποθήκευση της στη μεταβλητή (**GAP**). Επειδή χρειαζόμαστε και την Γ_{airf} , την υπολογίζουμε και αποθηκεύεται στον πίνακα (**GAPP**).

Αμέσως μετά ακολουθεί ο υπολογισμός των γωνιών ω_{in} και ω_{out} από τις σχέσεις (3.5.11) και (3.5.12) αντίστοιχα. Βρίσκουμε στη συνέχεια την διαφορά ανάμεσα στην γωνία ω_{in} και στη γωνία (**RAVN**). Αν αυτή η διαφορά είναι μεγαλύτερη από 0.0005 rad τότε υπολογίζουμε μια νέα τιμή της μέσης γωνίας ω_{av} από τη σχέση (3.6.4) και επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς μέχρι αυτό το σημείο. Αν η διαφορά είναι μικρότερη από 0.0005 rad τότε θεωρούμε ότι βρήκαμε τη σωστή γωνία ω_{in} και προχωρούμε στους υπολογισμούς των παραμέτρων της ροής, δηλ. V_{in} , V_{out} , $\Delta\omega$ και C_L . Σημειώνουμε ότι οι ταχύτητες κανονικοποιούνται με την V_{in} ή με την $V_{av}=1$ αναλόγως με το ποια ταχύτητα έχουμε ως δεδομένη [$V_{in}(\omega_{in})$ ή $V_{av}(\omega_{av})$ αντίστοιχα]. Αν η μεταβλητή (**FFLAG**) είναι 0 τότε η γωνία που έχουμε ως δεδομένη (**OGG**) είναι η μέση γωνία ω_{av} και δεν μπαίνουμε στην επαναληπτική διαδικασία, προχωρώντας κατευθείαν στον υπολογισμό των παραμέτρων της ροής. Σε περίπτωση που δεν υπάρξει σύγκλιση της ω_{in} στις 50 πρώτες επαναλήψεις το πρόγραμμα συνεχίζει τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις τιμές των μεταβλητών της 50^{ης} επανάληψης. Επίσης σε περίπτωση που έχουμε δεδομένη την ω_{in} , δηλ. (**FFLAG=1**), τότε γίνεται και μια τελική επανάληψη όπου αντικαθίσταται η κανονικοποιημένη V_{av} με την αντίστοιχη V_{av} για την ταχύτητα (**VN**). Αφού γίνει ο τελικός υπολογισμός των παραμέτρων της ροής, το πρόγραμμα συνεχίζει με την εγγραφή σε αρχείο των εξής μεταβλητών για το τρέχον χρονικό βήμα: (**OGSTG**), (**SPNG**), (**CHD**), (**VAVE**), (**OGAVE**), (**VVINL**), (**OGINL**), (**VOUT**), (**OGOUT**), (**DEOG**), (**CL**). Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα (...) για το που αντιστοιχούν οι μεταβλητές.

Στη συνέχεια του προγράμματος υπολογίζονται οι εφαπτομενικές και κάθετες ταχύτητες στα Σημεία Ελέγχου από τις σχέσεις (3.2.2) και (3.2.36) αντίστοιχα. Οι υπολογισθείσες ταχύτητες κανονικοποιούνται και αποθηκεύονται. Οι εφαπτομενικές αποθηκεύονται στον πίνακα (**SV**) ενώ οι κάθετες ταχύτητες στον πίνακα (**SY**). Οι κάθετες ταχύτητες υπολογίζονται για επαλήθευση αφού σύμφωνα με την οριακή συνθήκη που θέσαμε πρέπει να είναι μηδενικές.

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της ταχύτητας στο Trailing Edge της αεροτομής και αφού γίνει αυτό πηγαίνουμε στον υπολογισμό του σημείου ανακοπής. Ο υπολογισμός του σημείου ανακοπής γίνεται σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.4 και οι θέσεις του αποθηκεύεται στο αντίστοιχο αρχείο. Ακόμη υπολογίζεται το μήκος τόξου μετρημένο από το σημείο ανακοπής μέχρι το T.E. και είναι χωρισμένο σε upper surface και lower surface. Δίνεται επίσης και η ταχύτητα στα αντίστοιχα Σημεία Ελέγχου.

Το επόμενο τμήμα του προγράμματος υπολογίζει την ταχύτητα στα σημεία του πεδίου ροής που βρίσκονται εκτός της αεροτομής χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της παραγράφου 3.3. Οι ταχύτητες εγγράφονται στο αντίστοιχο αρχείο. Επίσης το πρόγραμμα ελέγχει αν το εκάστοτε σημείο βρίσκεται εντός της περιοχής που

περικλείει η αεροτομή. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε η ταχύτητα του σημείου αυτού τίθεται ίση με 0. Στην αρχή αυτού του τμήματος συγκρίνουμε την τιμή της μεταβλητής (**NOFBDY**) με το 0. Αν είναι 0 τότε το πρόγραμμα παρακάμπτει το συγκεκριμένο τμήμα και πηγαίνει κατευθείαν στο επόμενο.

Στο τελευταίο κομμάτι του προγράμματος υπολογίζονται οι θέσεις των δινών του επόμενου χρονικού βήματος. Οι θέσεις των δινών υπολογίζονται με χρήση των σχέσεων της παραγράφου 3.3, αφού οι δίνες βρίσκονται σε σημεία εκτός της αεροτομής. Αφού οι θέσεις υπολογιστούν (με αναφορά στους άξονες x, y), αποθηκεύονται στους πίνακες (**XD**) και (**YD**). Οι θέσεις των δινών του τελευταίου βήματος εγγράφονται στο αντίστοιχο αρχείο.

4.2 Η υπορουτίνα COORD

Η υπορουτίνα COORD υπολογίζει τις συντεταγμένες των σημείων της αεροτομής σε κάθε χρονικό βήμα. Αυτό γίνεται με στροφή των αξόνων x', y' της Εικόνας 3.2 κατά γωνία ίση με ω_{st} (**RASTG**). Έτσι έχουμε την αεροτομή ορισμένη με πλαίσιο αναφοράς τους άξονες x, y της Εικόνας 3.2. Ανάλογα με το είδος της κίνησης είναι πιθανόν επίσης να έχουμε και μεταφορά των αξόνων x, y κατά (**XTRN**) και (**YTRN**) αντίστοιχα. Η υπορουτίνα υπολογίζει ακόμη τα κέντρα των στοιχείων (Σημεία Ελέγχου (**S**), (**R**)), το μήκος (**DS**) και τη γωνία (**TH**) που σχηματίζουν με τον άξονα x τα ευθύγραμμα τμήματα (στοιχεία) που αποτελούν την αεροτομή.

4.3 Η υπορουτίνα COEFF

Η υπορουτίνα COEFF υπολογίζει τις ποσότητες στο εσωτερικό των παρενθέσεων στην σχέση (3.1.13). Ο λογάριθμος αποθηκεύεται στη μεταβλητή (**PA**) και το τόξο εφαπτομένης στη μεταβλητή (**PB**). Οι υπολογισμοί τους έγιναν βάσει των σχέσεων (3.1.9),(3.1.10) και (3.1.11).

4.4 Η υπορουτίνα MINV

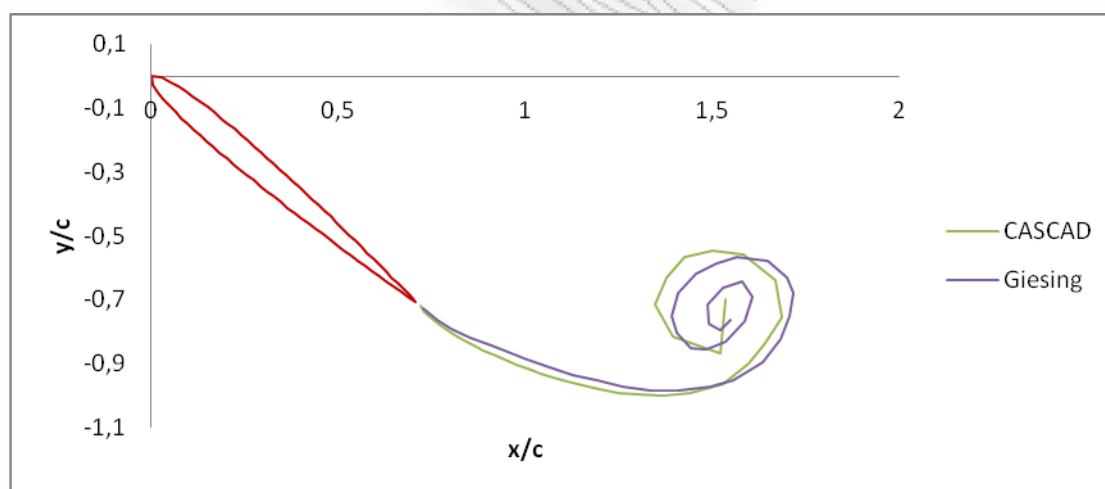
Η υπορουτίνα MINV αντιστρέφει έναν πίνακα αποθηκευμένο στον πίνακα-γραμμή (**A**). Η αντιστροφή γίνεται με τον αλγόριθμο του Gauss. Ο αντίστροφος πίνακας αποθηκεύεται στον πίνακα (**A**). Η μεταβλητή (**D**) είναι η ορίζουσα του πίνακα η οποία στην κυρίως ρουτίνα CASCAD συγκρίνεται με το μηδέν και αν είναι πράγματι μηδέν τότε τυπώνεται "DET ZERO NO SOLN" και το πρόγραμμα μεταβαίνει στο επόμενο χρονικό βήμα.

Κεφάλαιο 5:

Αποτελέσματα για την περίπτωση της απλής κινούμενης πτερύγωσης σε μη μόνιμη κατάσταση

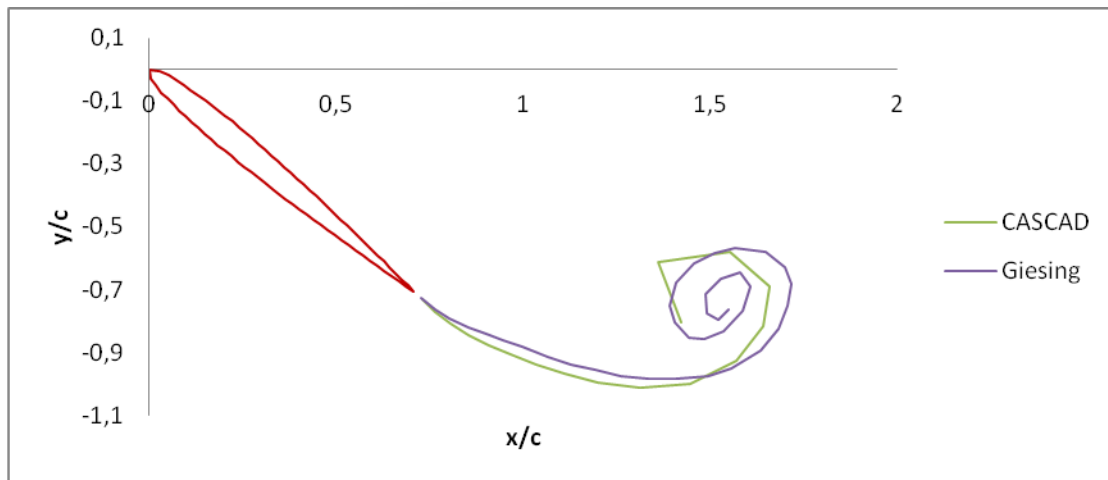
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αποτελέσματα για διάφορες περιπτώσεις ροής γύρω από κινούμενη μεμονωμένη αεροτομή προκειμένου να ελεγχθεί η αξιοπιστία του κώδικα που δημιουργήθηκε. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα άλλων ερευνητών.

Η πρώτη περίπτωση αφορά μια αεροτομή 8,4 % Von Mises που ξεκινά από την ακινησία κινούμενη με σταθερή ταχύτητα $U=1$ κατά την έννοια του αρνητικού άξονα x ευρισκόμενη υπό κλίση 45° , όπως φαίνεται στο Fig. 6 (ref. 2, Giesing). Στη περίπτωση του Giesing η αεροτομή προσεγγίζεται από 95 σημεία και η επίλυση έχει γίνει με $\Delta t = 0.05$ ενώ στη δική μας η 8,4% Von Mises αντικαθίσταται από την σχεδόν πανομοιότυπη NACA 0008, η οποία προσεγγίζεται από 81 σημεία με $\Delta t = 0.03$. Η κλίση της αεροτομής είναι $\omega_{st}=45^\circ$ και η αδιατάρακτη ροή είναι $U=1.0$. Η επίλυση στον κώδικα CASCAD ολοκληρώνεται σε 35 χρονικά βήματα. Μπορούμε να δούμε τη διαφορά ανάμεσα στον ομόρου των δινών στην Εικόνα 5.1. Σημειώνεται ότι η μονάδα του χρόνου ορίζεται ως $t = U/c$.

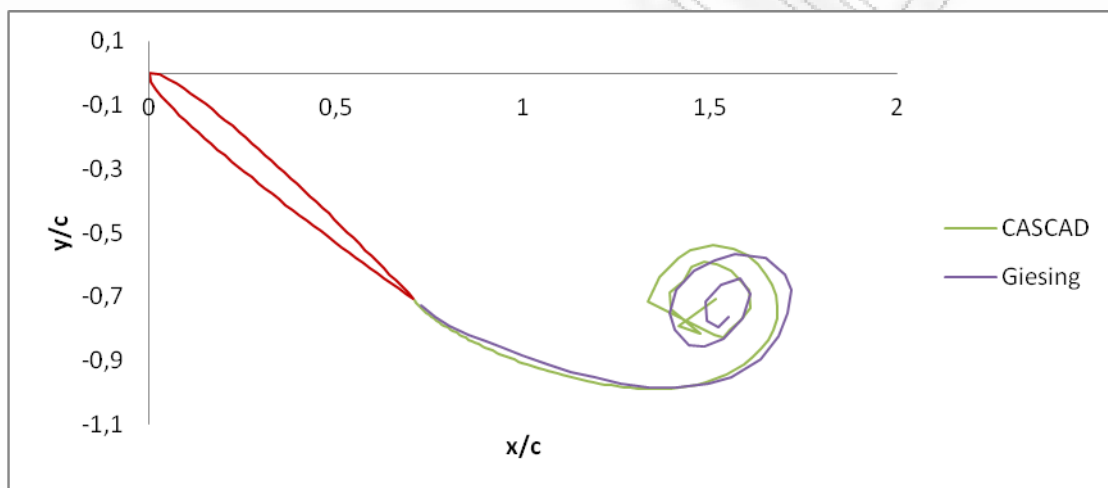


Εικόνα 5.1 NACA 0008 σε κλίση 45° με $\Delta t=0.03$

Με μωβ χρώμα έχουμε σχεδιάσει τον ομόρου δινών του Giesing ενώ με πράσινο χρώμα τον ομόρου των δινών που υπολογίσαμε με το πρόγραμμα CASCAD. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε σχεδόν απόλυτη ταύτιση μεταξύ του ομόρου των 2 περιπτώσεων. Παραθέτουμε επίσης τις περιπτώσεις για $\Delta t=0.06176$ (Εικόνα 5.2) και $\Delta t=0.01$ (Εικόνα 5.3)



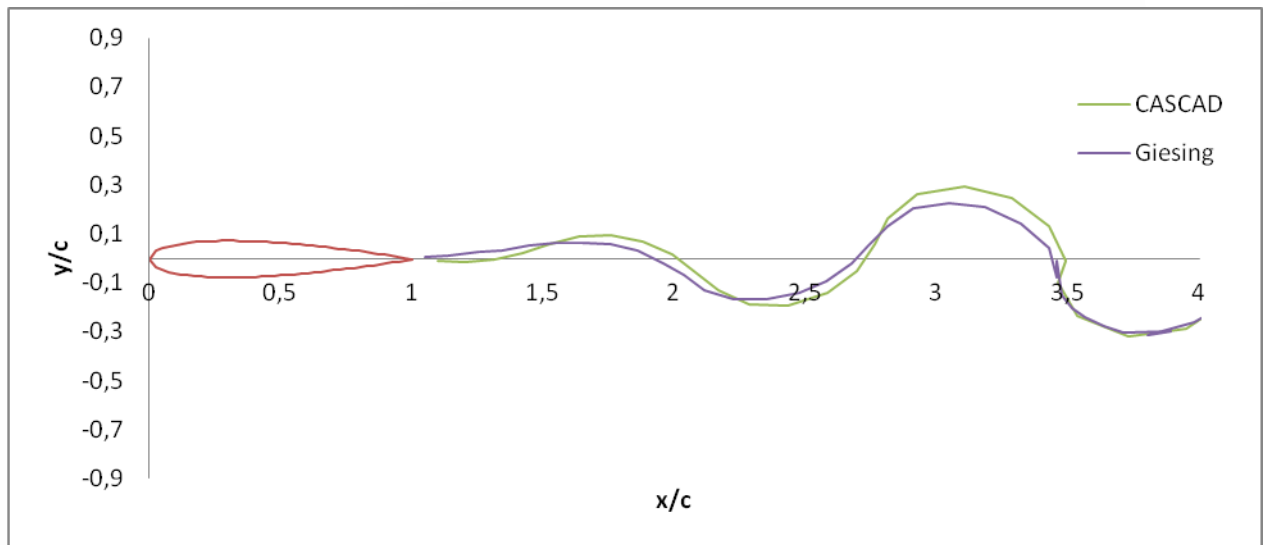
Εικόνα 5.2 NACA 0008 σε κλίση 45° με $\Delta t=0.06176$



Εικόνα 5.3 NACA 0008 σε κλίση 45° με $\Delta t=0.01$

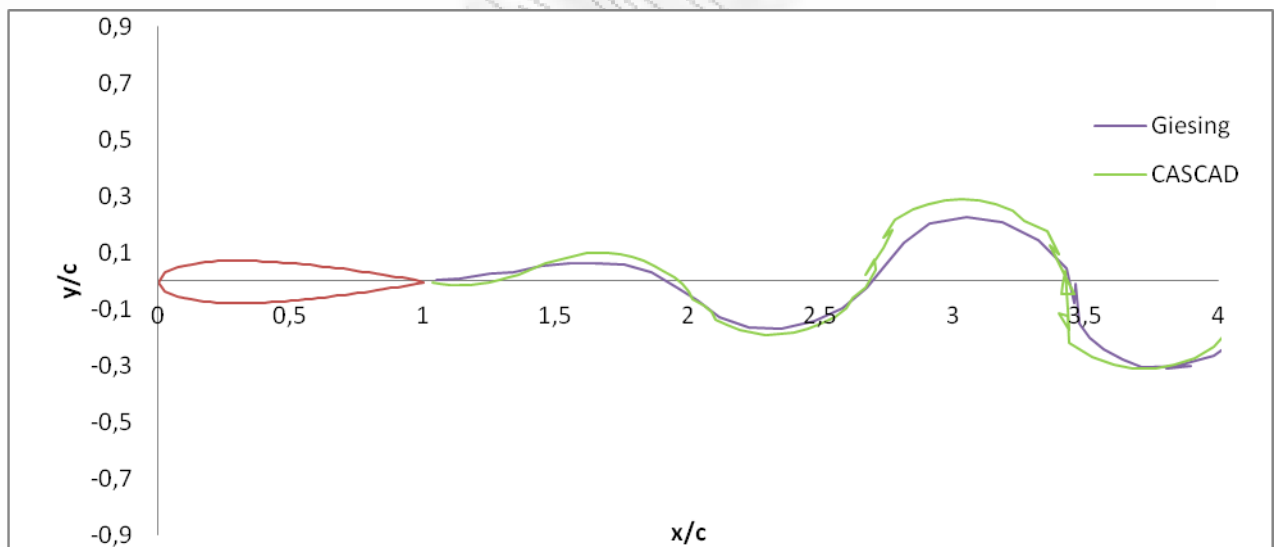
Όπως παρατηρούμε στις περιπτώσεις των Εικόνων 5.2 και 5.3 δεν έχουμε σημαντικές αποκλίσεις από τον ομόρου του Giesing με εξαίρεση ένα μικρό «σπάσιμο» για $\Delta t=0.01$ και το οποίο οφείλεται στο πολύ μικρό Δt .

Η επόμενη περίπτωση που θα εξετάσουμε είναι αυτή του Fig. 5a (ref. 2, Giesing). Εδώ έχουμε μια αεροτομή NACA 0015 σε μηδενική κλίση ως προς τη προσπίπτουσα ροή ($\omega_{st}=0.0$) να ταλαντώνεται με πλάτος $0.018c$ και με συχνότητα $4.3U_\infty/c$. Η αδιατάρακτη ροή είναι $U_\infty=1.0$. Στον κώδικα μας η αεροτομή προσεγγίζεται με 81 σημεία με $\Delta t=0.1145$ και τα συνολικά χρονικά βήματα να είναι 51.

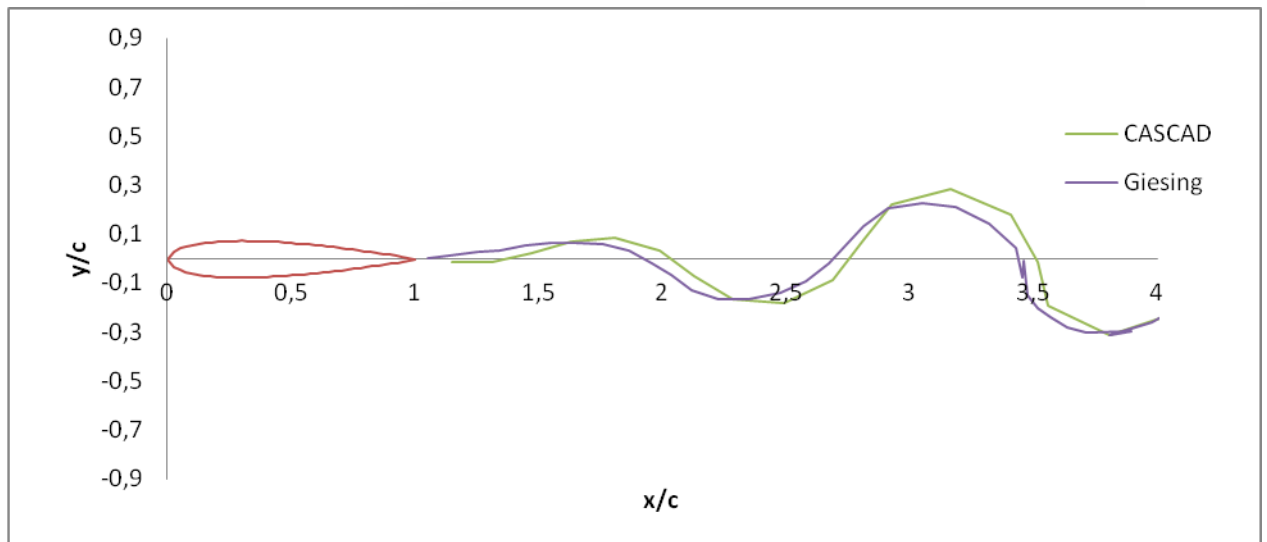


Εικόνα 5.4 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.1145$

Πάλι με μωβ χρώμα αναπαρίσταται ο ομόρουσ των δινών του Giesing και με πράσινο ο ομόρουσ της δικής μας επίλυσης. Διαπιστώνεται μια αρκετά καλή ακρίβεια στον υπολογισμό του ομόρουσ από τον κώδικα CASCAD. Παραθέτουμε ακόμη τον υπολογισμό του πεδίου για $\Delta t = 0.03893$ και για $\Delta t = 0.17175$



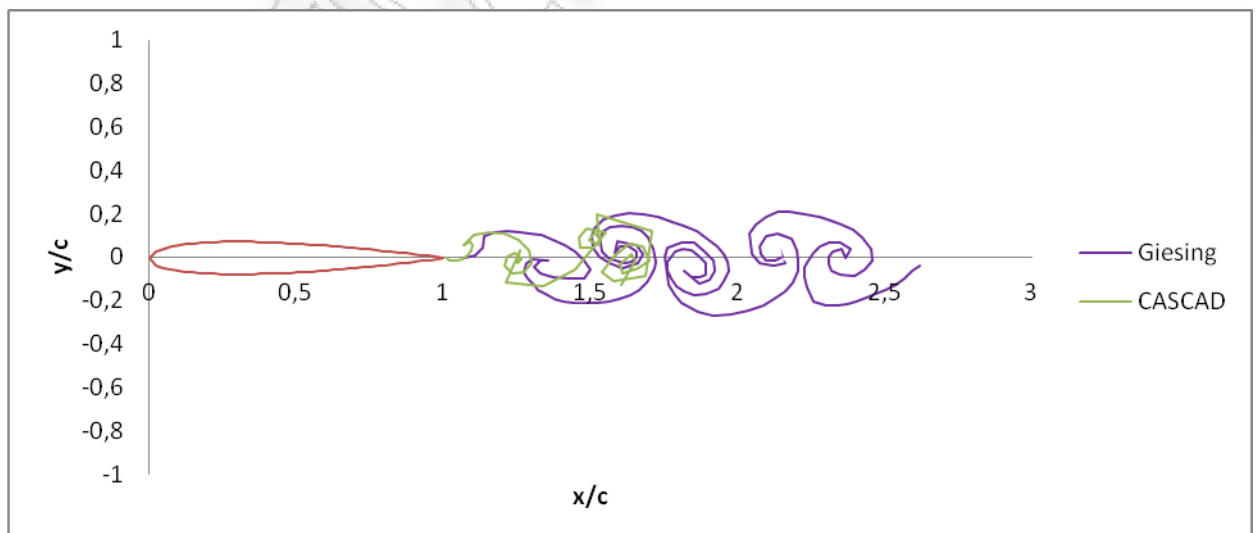
Εικόνα 5.5 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.03893$



Εικόνα 5.6 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.17175$

Παρατηρούμε και πάλι ότι για μικρό Δt (Εικόνα 5.5) τα αποτελέσματα εμφανίζουν το χαρακτηριστικό «σπάσιμο» που γίνεται όλο και πιο εμφανές όσο απομακρυνόμαστε από την αεροτομή ενώ για μεγάλο Δt (Εικόνα 5.6) ο ομόρως φαίνεται να κινείται στα κατάντι της ροής με μεγαλύτερη ταχύτητα από ότι στη λύση του Giesing.

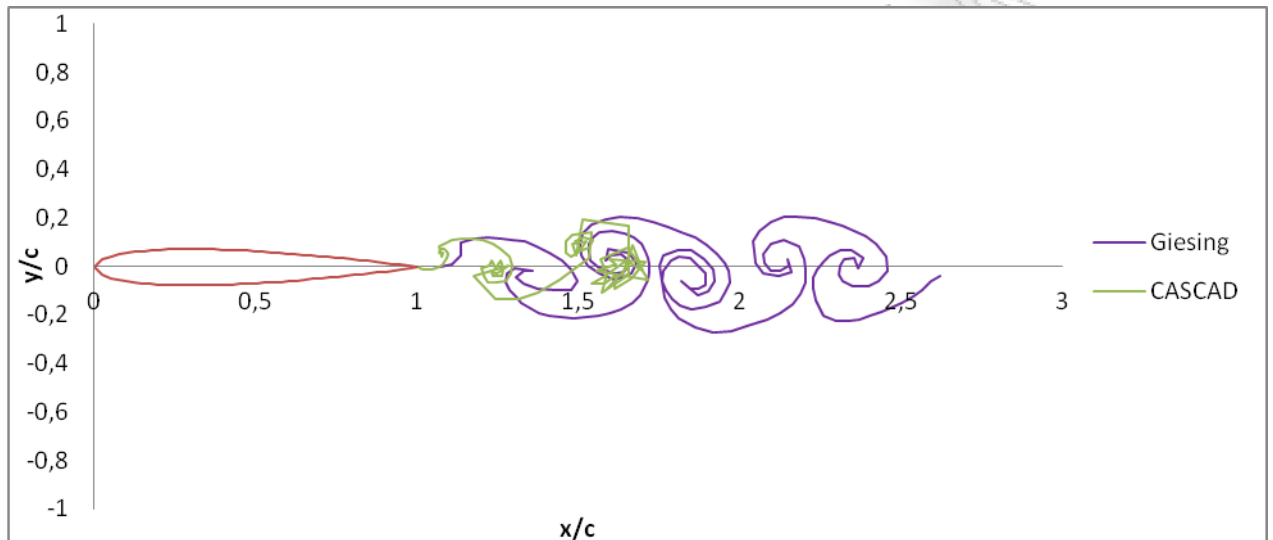
Η επόμενη περίπτωση έχει να κάνει πάλι με ταλαντούμενη αεροτομή και πιο συγκεκριμένα με αυτήν της Fig. 5b (ref. 2, Giesing). Αυτή τη φορά η NACA 0015 ταλαντώνεται πιο γρήγορα με συχνότητα $17.0U_\infty/c$. Το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει $0.018c$ και η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής $U_\infty=1.0$. Η αεροτομή προσεγγίζεται με 81 σημεία, το χρονικό βήμα είναι $\Delta t=0.0144$ και το σύνολο των χρονικών βημάτων είναι 51.



Εικόνα 5.7 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.0144$

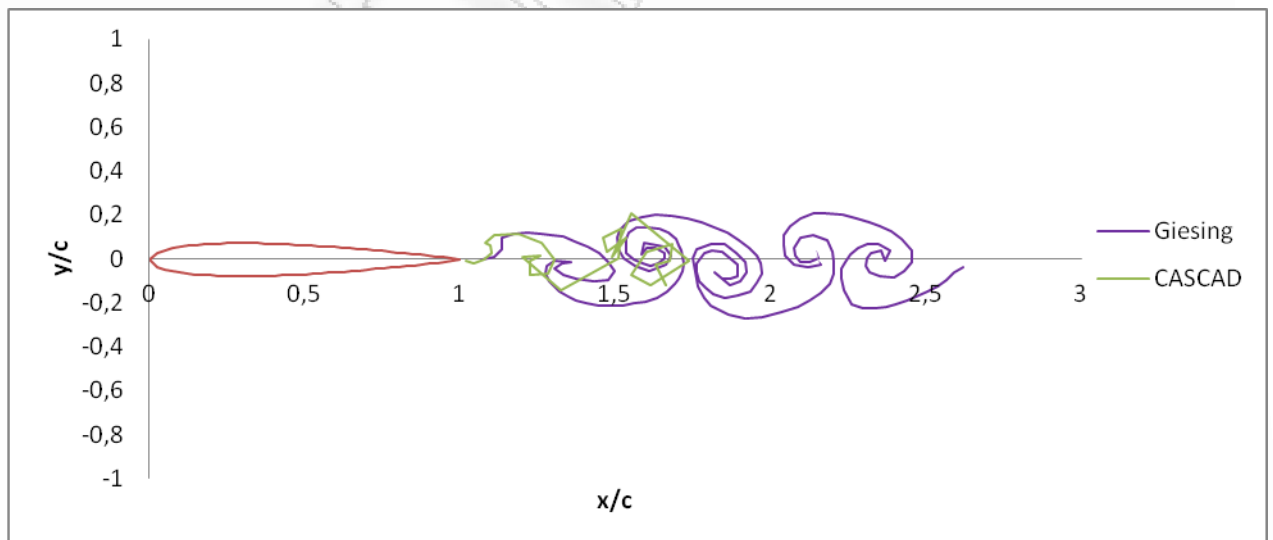
Λόγω της μεγαλύτερης συχνότητας οι δίνες του σχηματιζόμενου ομόρως είναι εντονότερες. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια σχετική απόκλιση από τον υπολογισμό του

Giesing (μωβ χρώμα). Η απόκλιση αυτή οφείλεται κατά κύριο λόγο στην υψηλή συχνότητα της ταλάντωσης η οποία προκαλεί και ανακρίβεια στον υπολογισμό του πεδίου. Θα παραθέσουμε τον υπολογισμό του πεδίου για $\Delta t = 0.00882$ και $\Delta t = 0.02383$.



Εικόνα 5.8 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.00882$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις είναι φανερή η «αναστάτωση» στα αποτελέσματα λόγω του μικρού βήματος. Παρόλαυτα δεν παρατηρείται απόκλιση από τους υπολογισμούς του προηγούμενου χρονικού βήματος (Εικόνα 5.7). Αν τώρα επιλέξουμε μεγαλύτερο βήμα $\Delta t = 0.02383$ θα έχουμε το αποτέλεσμα της Εικόνας 5.9.



Εικόνα 5.9 NACA 0015 σε κλίση 0° με $\Delta t=0.02383$

Και πάλι βλέπουμε μια πιο ασαφή εικόνα του ορόρου των δινών χωρίς να έχουμε μεγάλες αποκλίσεις σε σχέση με τον υπολογισμό της Εικόνας 5.7. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα για σχετικά μεγάλα χρονικά βήματα εμφανίζουν μια

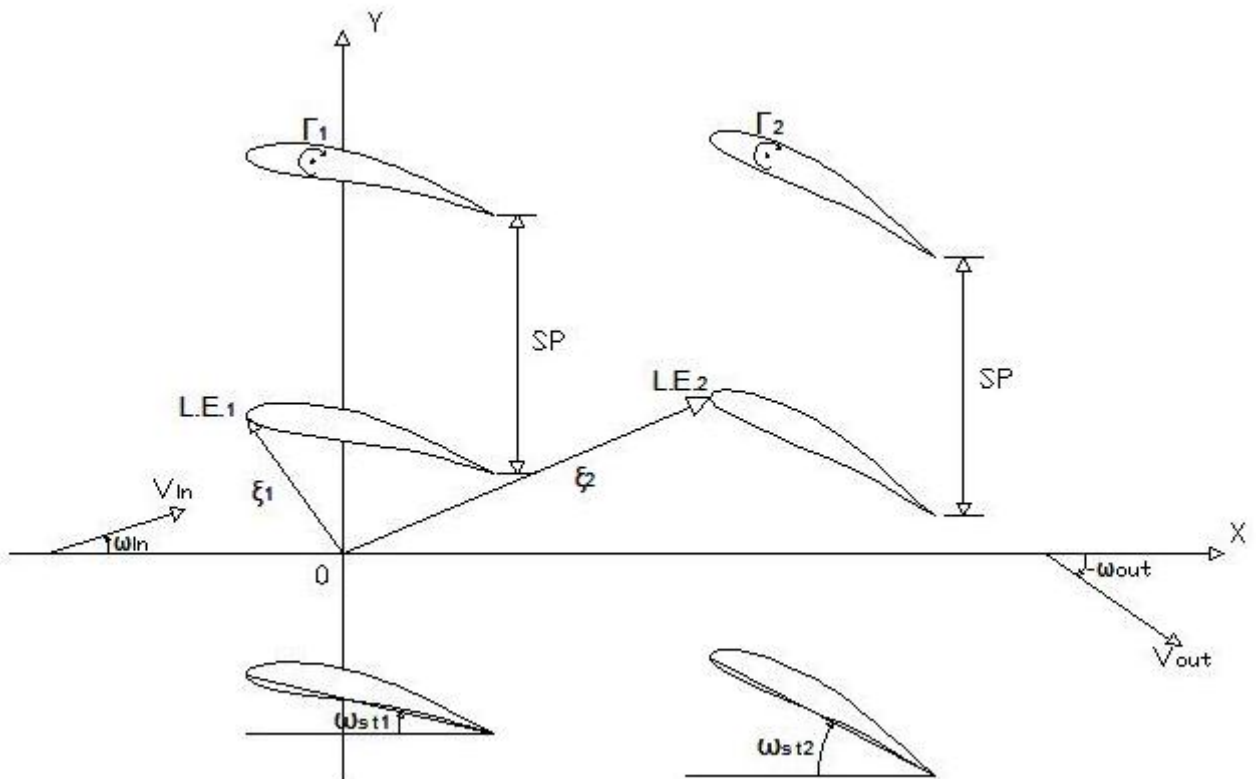
εξομάλυνση η οποία πολύ πιθανόν να οφείλεται σε αριθμητικό λάθος διακριτοποίησης 2^{ου} βαθμού που δρα σαν όρος αριθμητικής διάχυσης με τρόπο ανάλογο της φυσικής/συνεκτικής διάχυσης που θεωρητικά όμως απουσιάζει δεδομένου ότι το ρευστό μας έχει θεωρηθεί ως μη συνεκτικό/ατριβές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 6:

Μεθοδολογία υπολογισμού της ροής γύρω από δύο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση

Η αριθμητική μέθοδος που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 3 και αφορά μια κινούμενη ατέρμονα πτερυγώση μπορεί να επεκταθεί ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή γύρω από δυο ή περισσότερες διαδοχικές παράλληλες κινούμενες πτερυγώσεις με το ίδιο διάκενο SP . Παρακάτω στην Εικόνα 6.1 βλέπουμε τις δυο ατέρμονες πτερυγώσεις με τις παραμέτρους τους.



Εικόνα 6.1 Δυο ατέρμονες πτερυγώσεις και οι παράμετροι τους

Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι παρόμοια με αυτή της επίλυσης για μια κινούμενη ατέρμονα πτερυγώση. Για ακόμη μια φορά θα ορίσουμε τη θέση και το προσανατολισμό των δυο αεροτομών και θα τις προσεγγίσουμε με N_1 και N_2 στοιχεία αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την οριακή συνθήκη μη εισχώρησης, της μηδενικής δηλαδή κάθετης ταχύτητας στα στοιχεία που αποτελούν τις αεροτομές και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη συνθήκη Kutta και το θεώρημα Kelvin για να βρούμε τη μοναδική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης για την οποία κάναμε λόγο στην αρχή του Κεφαλαίου 3.

6.1 Η οριακή συνθήκη ($v_p=0.0$)

Η ανάλυση είναι παρόμοια με αυτή του Κεφαλαίου 3. Οι ταχύτητες που επάγει το n -στοιχείο της αεροτομής (είτε της πρώτης είτε της δεύτερης) στο p -στοιχείο, δίνονται από τις σχέσεις (3.1.14.α) και (3.1.14.β). Συνεπώς καταλήγουμε σε μια σχέση παρόμοια με την (3.1.22) όσον αφορά την συνολική κάθετη ταχύτητα στο μέσον του στοιχείου p , με τη διαφορά ότι συνυπολογίζουμε και την κάθετη ταχύτητα στο μέσον του στοιχείου από τη κίνηση της αεροτομής που είναι:

$$1^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad u_{p1} = V_{y1} \cdot \cos(\theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.1.α)}$$

$$2^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad u_{p2} = V_{y2} \cdot \cos(\theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.1.β)}$$

Η b_p δίνεται επίσης από διαφοροποιημένους τύπους σε σχέση με την απλή ατέρμονα πτερύγωση:

$$1^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad b_{p1} = V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} + z_{rev1} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.2.α)}$$

$$2^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad b_{p2} = V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} + z_{rev2} - \theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.2.α)}$$

όπου z_{rev1} και z_{rev2} είναι οι σχετικές γωνίες πρόσπτωσης.

Συνεπώς η σχέση (3.1.22) θα τροποποιηθεί ως εξής:

$$\bar{V}_p = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} - \bar{b}_p - \bar{u}_p \quad \text{Εξ. (6.1.3)}$$

όπου $n, p = 1, 2, \dots, N$ και $N = N_1 + N_2$. Βέβαια η σχέση (6.1.3) πρέπει να εκφραστεί μια φορά για κάθε αεροτομή αφού η ποσότητα $(b_p + u_p)$ αλλάζει κάθε φορά.

Πρέπει σύμφωνα με την οριακή συνθήκη να ισχύει $v_p=0$. Έτσι θα έχουμε ότι:

$$\frac{\bar{m}_n}{4\pi} = \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot (\bar{b}_p + \bar{u}_p) \quad \text{Εξ. (6.1.4)}$$

Ο υπολογισμός της εφαπτομενικής ταχύτητας στο μέσο του p -στοιχείου γίνεται όπως και στη περίπτωση της απλής ατέρμονος πτερύγωσης. Καταλήγουμε πάλι λοιπόν σε παρόμοια εξίσωση:

$$\bar{q}_p = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + \bar{f}_p \quad \text{Εξ. (6.1.5)}$$

όπου η ποσότητα f_p δίνεται από τη σχέση:

$$1^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad f_{p1} = V_{av} \cdot \cos(\omega_{av} + z_{rev1} - \theta_p) + V_{y1} \cdot \sin(\theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.6.α)}$$

$$2^{\text{η}} \text{ αεροτομή} \quad f_{p2} = V_{av} \cdot \cos(\omega_{av} + z_{rev2} - \theta_p) + V_{y2} \cdot \sin(\theta_p) \quad \text{Εξ. (6.1.6.α)}$$

6.2 Συνθήκη Kutta

Επειδή η συνθήκη Kutta πρέπει να ικανοποιείται στο Τ.Ε. θα πρέπει να εισάγουμε ξανά μια «πηγή» στροβιλότητας μέσα ή επάνω στην αεροτομή (δηλαδή όπως πράξαμε και στο Κεφάλαιο 3). Εισάγουμε λοιπόν δυο κατανομές δινών σταθερής έντασης, γ_k για την πρώτη αεροτομή και γ_m για τη δεύτερη αεροτομή με $\gamma_k = \gamma_m = 1.0$. Για να αντισταθμιστούν βέβαια οι κάθετες ταχύτητες που επάγουν αυτές οι δύο κατανομές δινών σε κάθε στοιχείο ρ , εισάγουμε όπως και στη παράγραφο 3.2 (εξ. 3.2.10) τις κατανομές πηγών m_{n1} και m_{n2} . Οι κατανομές αυτές σε συνδυασμό με την αδιατάρακτη ροή V_{av} και τις σημειακές δίνες που δημιουργούνται πίσω από κάθε αεροτομή σε κάθε χρονικό βήμα, επάγουν την εφαπτομενική ταχύτητα που βλέπουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$q(s) = V_{av} \cdot q1 + \frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot q2 + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot q3 + q4 + q5 \quad \text{Εξ. (6.2.1)}$$

όπου **q1** η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγει η αδιατάρακτη ροή V_{av} , **q2** η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγουν οι κατανομές δινών γ_k και πηγών m_{n1} , **q3** η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγουν η κατανομές δινών γ_m και πηγών m_{n2} , **q4** η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγουν οι δίνες που δημιουργούνται από την πρώτη αεροτομή και **q5** η εφαπτομενική ταχύτητα που επάγουν οι δίνες που δημιουργούνται από την δεύτερη αεροτομή.

Η ταχύτητα **q1** δίνεται από τη σχέση (6.1.5). Η ταχύτητα **q2** δίνεται από μια σχέση παρόμοια με την εξ. (3.2.12):

$$q2 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_{pk}}{4\pi} \quad \text{Εξ. (6.2.2)}$$

όπου $n, p = 1, 2, \dots, N$ και $k = 1, \dots, N_1$. Οι πηγές m_{n1} δίνονται από σχέση ανάλογη με τη εξ. (3.2.10):

$$\bar{m}_{n1} = \left| A_{pn} \right|^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{N_1} B_{pk} \quad \text{Εξ. (6.2.3)}$$

Η ταχύτητα **q3** θα δίνεται ανάλογα:

$$q3 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n2}}{4\pi} + \sum_{m=N_1+1}^N \frac{A_{pm}}{4\pi} \quad \text{Εξ. (6.2.4)}$$

όπου $n, p = 1, 2, \dots, N$ και $m = N_1 + 1, \dots, N$. Οι πηγές m_{n2} δίνονται αντίστοιχα από τη σχέση:

$$\bar{m}_{n2} = \left(A_{pn} \right)^{-1} \cdot \sum_{m = N_1 + 1}^N B_{pm} \quad \text{Εξ. (6.2.5)}$$

Η ταχύτητα q_4 δίνεται από μια σχέση παρόμοια με την εξ. (3.2.21):

$$\bar{q}_4 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD1}}{4\pi} + \bar{e}_{1p} \quad \text{Εξ. (6.2.6)}$$

όπου οι πηγές m_{nD1} δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{\bar{m}_{nD1}}{4\pi} = \left(A_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{d}_{1p} \quad \text{Εξ. (6.2.7)}$$

Οι ποσότητες d_{1p} και e_{1p} δίνονται από τις σχέσεις (3.2.18.α) και (3.2.18.β)

Η ταχύτητα q_5 δίνεται από μια σχέση:

$$\bar{q}_5 = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD2}}{4\pi} + \bar{e}_{2p} \quad \text{Εξ. (6.2.8)}$$

όπου οι πηγές m_{nD2} δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{\bar{m}_{nD2}}{4\pi} = \left(A_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{d}_{2p} \quad \text{Εξ. (6.2.9)}$$

Οι ποσότητες d_{2p} και e_{2p} δίνονται και πάλι από τις σχέσεις (3.2.18.α) και (3.2.18.β)

Στα Τ.Ε. των αεροτομών πρέπει να ισχύει ότι:

1^η αεροτομή: $\Delta q_1 = 0$ Εξ. (6.2.10)

και

2^η αεροτομή: $\Delta q_2 = 0$ Εξ. (6.2.11)

που σημαίνει ότι από την σχέση (6.2.1) θα έχουμε τις εξής δυο σχέσεις (μια για κάθε αεροτομή):

1^η αεροτομή: $\frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot \Delta q_{21} + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot \Delta q_{31} = -V_{av} \cdot \Delta q_{11} - \Delta q_{41} - \Delta q_{51}$ Εξ. (6.2.12)

2^η αεροτομή:
$$\frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot \Delta q_{22} + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot \Delta q_{32} = -V_{av} \cdot \Delta q_{12} - \Delta q_{42} - \Delta q_{52}$$
 Εξ. (6.2.13)

(οι δείκτες 1 και 2 αφορούν αντίστοιχα την πρώτη και την δεύτερη αεροτομή)

Το σύστημα των εξισώσεων (6.2.12) και (6.2.13) θα λυθεί με την μέθοδο των οριζουσών. Συνεπώς θα έχουμε:

$$D1 = \Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}$$

$$Dx1 = -\Delta q_{32} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{11} + \Delta q_{41} + \Delta q_{51}] + \Delta q_{31} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{12} + \Delta q_{42} + \Delta q_{52}]$$

$$Dy1 = -\Delta q_{21} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{12} + \Delta q_{42} + \Delta q_{52}] + \Delta q_{22} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{11} + \Delta q_{41} + \Delta q_{51}]$$

και άρα η λύση θα είναι:

$$\frac{\Gamma_1}{S_1} = \frac{-\Delta q_{32} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{11} + \Delta q_{41} + \Delta q_{51}] + \Delta q_{31} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{12} + \Delta q_{42} + \Delta q_{52}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.14)

$$\frac{\Gamma_2}{S_2} = \frac{-\Delta q_{21} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{12} + \Delta q_{42} + \Delta q_{52}] + \Delta q_{22} \cdot [V_{av} \cdot \Delta q_{11} + \Delta q_{41} + \Delta q_{51}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.15)

Αν τώρα θέσουμε

$$\Gamma Q_1 = \frac{V_{av} \cdot [-\Delta q_{32} \cdot \Delta q_{11} + \Delta q_{31} \cdot \Delta q_{12}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.16)

$$\Gamma S_1 = \frac{-\Delta q_{32} \cdot [\Delta q_{41} + \Delta q_{51}] + \Delta q_{31} \cdot [\Delta q_{42} + \Delta q_{52}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.17)

$$\Gamma Q_2 = \frac{V_{av} \cdot [-\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{12} + \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{11}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.18)

$$\Gamma S_2 = \frac{-\Delta q_{21} \cdot [\Delta q_{42} + \Delta q_{52}] + \Delta q_{22} \cdot [\Delta q_{41} + \Delta q_{51}]}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}}$$
 Εξ. (6.2.19)

οι εξισώσεις (6.2.14) και (6.2.15) θα γίνουν:

$$\frac{\Gamma_1}{S_1} = \Gamma Q_1 + \Gamma S_1$$
 Εξ. (6.2.20)

$$\frac{\Gamma_2}{S_2} = \Gamma Q_2 + \Gamma S_2$$

Εξ. (6.2.21)

Επίσης μπορούμε για επαλήθευση να υπολογίσουμε την κάθετη ταχύτητα στα στοιχεία των αεροτομών και η οποία πρέπει να προκύπτει μηδενική:

$$v(s) = V_{av} \cdot v_1 + \frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot v_2 + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot v_3 + v_4 + v_5$$

Εξ. (6.2.22)

Η ταχύτητα v_1 δίνεται από τη σχέση (6.1.3), η ταχύτητες v_2 και v_3 δίνονται από εξισώσεις παρόμοιες με την εξ. (3.2.39):

$$\bar{v}_2 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \bar{B}_{pk} \cdot \frac{\bar{\gamma}_k}{4\pi}$$

Εξ. (6.2.23)

$$\bar{v}_3 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n2}}{4\pi} - \bar{B}_{pm} \cdot \frac{\bar{\gamma}_m}{4\pi}$$

Εξ. (6.2.24)

Οι ταχύτητες v_4 και v_5 δίνονται από σχέσεις παρόμοιες με την εξ. (3.2.40):

$$\bar{v}_4 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD1}}{4\pi} - \bar{d}_{1p}$$

Εξ. (6.2.25)

$$\bar{v}_5 = \bar{A}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{nD2}}{4\pi} - \bar{d}_{2p}$$

Εξ. (6.2.26)

6.3 Θεώρημα Kelvin

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Kelvin γύρω από κάθε αεροτομή. Αν συμβολίσουμε με Γ_{t1} και Γ_{t2} τις αρχικές κυκλοφορίες (δηλ. τις κυκλοφορίες γύρω από την αεροτομή που υπολογίσαμε στο πρώτο χρονικό βήμα κατά την εκτέλεση του προγράμματος), με Γ_{D1} και Γ_{D2} τις νέες δίνες που δημιουργούνται σε κάθε χρονικό βήμα και με $\sum \Gamma_{k1}$ και $\sum \Gamma_{k2}$ το άθροισμα των εντάσεων των δινών όλων των προηγούμενων χρονικών βημάτων, τότε θα πάρουμε:

$$\Gamma_{t1} = \Gamma_{D1} + \Gamma_1 + \sum_k \Gamma_{k1}$$

1^η αεροτομή:

Εξ. (6.3.1)

$$\Gamma_{t2} = \Gamma_{D2} + \Gamma_2 + \sum_k \Gamma_{k2}$$

2^η αεροτομή:

Εξ. (6.3.2)

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις τις κυκλοφορίες Γ_1 και Γ_2 από τις σχέσεις (6.2.20) και (6.2.21) θα πάρουμε ότι:

$$\Gamma_{D1} + S_1 \Gamma S_1 = \Gamma_{t1} - \sum_k \Gamma_{k1} - S_1 \Gamma Q_1 \quad \text{Εξ. (6.3.3)}$$

$$\Gamma_{D2} + S_2 \Gamma S_2 = \Gamma_{t2} - \sum_k \Gamma_{k2} - S_2 \Gamma Q_2 \quad \text{Εξ. (6.3.4)}$$

Οι διαφορές Δq_{41} , Δq_{51} , Δq_{42} , Δq_{52} μπορούν να χωριστούν σε δυο τμήματα. Το πρώτο τμήμα θα εκφράζει την διαφορά της επαπτομενικής ταχύτητας λόγω όλων των δινών των προηγούμενων χρονικών βημάτων και θα συμβολίζεται με Δq_{1k} και Δq_{2k} . Το δεύτερο θα εκφράζει την διαφορά της επαπτομενικής ταχύτητας λόγω των νέων δινών Γ_{D1} , Γ_{D2} και θα συμβολίζεται με Δq_{D1} και Δq_{D2} (Οι δείκτες 1 και 2 αφορούν την πρώτη και δεύτερη αεροτομή αντίστοιχα). Άρα θα είναι:

$$\Delta q_{41} = \Delta q_{41k} + \Delta q_{41D} \quad \text{Εξ. (6.3.5.α)}$$

$$\Delta q_{42} = \Delta q_{42k} + \Delta q_{42D} \quad \text{Εξ. (6.3.5.β)}$$

$$\Delta q_{51} = \Delta q_{51k} + \Delta q_{51D} \quad \text{Εξ. (6.3.5.γ)}$$

$$\Delta q_{52} = \Delta q_{52k} + \Delta q_{52D} \quad \text{Εξ. (6.3.5.δ)}$$

Για τις ταχύτητες q_{41D} , q_{51D} , q_{42D} , q_{52D} μπορούν να διατυπωθούν σχέσεις ανάλογες με τη σχέση (3.2.32):

$$q_{41D} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \Gamma_{D1} \cdot \left[H_{41} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{41} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \Gamma_{D1} \cdot \left[\Theta_{41} \cdot \cos(\theta_p) - H_{41} \cdot \sin(\theta_p) \right] \quad \text{Εξ. (6.3.6.α)}$$

$$q_{42D} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \Gamma_{D1} \cdot \left[H_{42} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{42} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \Gamma_{D1} \cdot \left[\Theta_{42} \cdot \cos(\theta_p) - H_{42} \cdot \sin(\theta_p) \right] \quad \text{Εξ. (6.3.6.β)}$$

$$q_{51D} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \Gamma_{D2} \cdot \left[H_{51} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{51} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \Gamma_{D2} \cdot \left[\Theta_{51} \cdot \cos(\theta_p) - H_{51} \cdot \sin(\theta_p) \right] \quad \text{Εξ. (6.3.6.γ)}$$

$$q_{52D} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \Gamma_{D2} \cdot \left[H_{52} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{52} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \Gamma_{D2} \cdot \left[\Theta_{52} \cdot \cos(\theta_p) - H_{52} \cdot \sin(\theta_p) \right] \quad \text{Εξ. (6.3.6.δ)}$$

Οι ποσότητες H και Θ υπολογίζονται βάσει των εξ. (3.2.28.α) και (3.2.28.β). Οι ποσότητες H_{41} και Θ_{41} σημαίνουν ότι υπολογίζουμε την επαγόμενη ταχύτητα από

τις δίνες της πρώτης αεροτομής (δείκτης 4) στην πρώτη αεροτομή (δείκτης 1), οι ποσότητες H_{4_2} και Θ_{4_2} σημαίνουν ότι υπολογίζουμε την επαγόμενη ταχύτητα από τις δίνες της πρώτης αεροτομής (δείκτης 4) στην δεύτερη αεροτομή (δείκτης 2) και ούτω καθεξής.

Οι ταχύτητες $q_{4_{1D}}$, $q_{5_{1D}}$, $q_{4_{2D}}$, $q_{5_{2D}}$ μπορούν να εκφραστούν επίσης ως:

$$q_{4_{1D}} = \Gamma_{D1} \cdot q_{4_{1D1}} \quad \text{Εξ. (6.3.7.α)}$$

$$q_{4_{2D}} = \Gamma_{D1} \cdot q_{4_{2D1}} \quad \text{Εξ. (6.3.7.β)}$$

$$q_{5_{1D}} = \Gamma_{D2} \cdot q_{5_{1D1}} \quad \text{Εξ. (6.3.7.γ)}$$

$$q_{5_{2D}} = \Gamma_{D2} \cdot q_{5_{2D1}} \quad \text{Εξ. (6.3.7.δ)}$$

όπου $q_{4_{1D1}}$, $q_{4_{2D1}}$ είναι οι εφαπτομενικές ταχύτητες που επάγονται από μια δίνη με μοναδιαία ένταση ($\Gamma=1.0$) που βρίσκεται στη θέση της νέας δίνης Γ_{D1} και $q_{5_{1D1}}$, $q_{5_{2D1}}$ είναι οι εφαπτομενικές ταχύτητες που επάγονται από μια δίνη με μοναδιαία ένταση ($\Gamma=1.0$) που βρίσκεται στη θέση της νέας δίνης Γ_{D2} . Οι ταχύτητες αυτές δίνονται από σχέσεις παρόμοιες με την εξ. (3.2.34):

$$\bar{q}_{4_{1D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1D1}}{4\pi} + \bar{e}_{1pD1} \quad \text{Εξ. (6.3.8.α)}$$

$$\bar{q}_{4_{2D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n1D1}}{4\pi} + \bar{e}_{1pD1} \quad \text{Εξ. (6.3.8.β)}$$

$$\bar{q}_{5_{1D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n2D1}}{4\pi} + \bar{e}_{2pD1} \quad \text{Εξ. (6.3.8.γ)}$$

$$\bar{q}_{5_{2D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \frac{\bar{m}_{n2D1}}{4\pi} + \bar{e}_{2pD1} \quad \text{Εξ. (6.3.8.δ)}$$

ή ισοδύναμα από τις σχέσεις:

$$q_{4_{1D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \left[H_{4_1} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{4_1} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \left[\Theta_{4_1} \cdot \cos(\theta_p) - H_{4_1} \cdot \sin(\theta_p) \right]$$

$$q_{4_{2D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \left[H_{4_2} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{4_2} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \left[\Theta_{4_2} \cdot \cos(\theta_p) - H_{4_2} \cdot \sin(\theta_p) \right]$$

$$q_{5_{1D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \left[H_{5_1} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{5_1} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \left[\Theta_{5_1} \cdot \cos(\theta_p) - H_{5_1} \cdot \sin(\theta_p) \right]$$

$$q_{5_{2D1}} = \bar{B}_{pn} \cdot \bar{A}_{pn}^{-1} \cdot \left[H_{5_2} \cdot \cos(\theta_p) + \Theta_{5_2} \cdot \sin(\theta_p) \right] + \left[\Theta_{5_2} \cdot \cos(\theta_p) - H_{5_2} \cdot \sin(\theta_p) \right]$$

Φυσικά στις παραπάνω εξισώσεις είναι σαφές ότι ισχύει:

$$\frac{\bar{m}_{n1D1}}{4\pi} = \left(\bar{A}_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{d}_{1pD1}$$

$$\frac{\bar{m}_{n2D1}}{4\pi} = \left(\bar{A}_{pn} \right)^{-1} \cdot \bar{d}_{2pD1}$$

Συνεπώς οι εξισώσεις (6.3.5.α-δ) θα γίνουν:

$$\Delta q_{41} = \Delta q_{41k} + \Gamma_{D1} \cdot \Delta q_{41D1} \quad \text{Εξ. (6.3.9.α)}$$

$$\Delta q_{42} = \Delta q_{42k} + \Gamma_{D1} \cdot \Delta q_{42D1} \quad \text{Εξ. (6.3.9.β)}$$

$$\Delta q_{51} = \Delta q_{51k} + \Gamma_{D2} \cdot \Delta q_{51D1} \quad \text{Εξ. (6.3.9.γ)}$$

$$\Delta q_{52} = \Delta q_{52k} + \Gamma_{D2} \cdot \Delta q_{52D1} \quad \text{Εξ. (6.3.9.δ)}$$

Συνεπώς οι εξισώσεις (6.2.17) και (6.2.19) θα πάρουν τη παρακάτω μορφή:

$$\Gamma S_1 = \Gamma_{D1} \cdot G_1 + \Gamma_{D2} \cdot G_2 + G_A \quad \text{Εξ. (6.3.10.α)}$$

$$\Gamma S_2 = \Gamma_{D1} \cdot G_3 + \Gamma_{D2} \cdot G_4 + G_B \quad \text{Εξ. (6.3.10.β)}$$

με τις ποσότητες G_1, G_2, G_3, G_4, G_A και G_B να δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$G_1 = \frac{-\Delta q_{32} \cdot \Delta q_{41D1} + \Delta q_{31} \cdot \Delta q_{42D1}}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.α)}$$

$$G_2 = \frac{-\Delta q_{32} \cdot \Delta q_{51D1} + \Delta q_{31} \cdot \Delta q_{52D1}}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.β)}$$

$$G_A = \frac{-\Delta q_{32} \cdot (\Delta q_{41k} + \Delta q_{51k}) + \Delta q_{31} \cdot (\Delta q_{42k} + \Delta q_{52k})}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.γ)}$$

$$G_3 = \frac{-\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{42D1} + \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{41D1}}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.δ)}$$

$$G_4 = \frac{-\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{52D1} + \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{51D1}}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.ε)}$$

$$G_B = \frac{-\Delta q_{22} \cdot (\Delta q_{42k} + \Delta q_{52k}) + \Delta q_{21} \cdot (\Delta q_{41k} + \Delta q_{51k})}{\Delta q_{21} \cdot \Delta q_{32} - \Delta q_{22} \cdot \Delta q_{31}} \quad \text{Εξ. (6.3.11.στ)}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στις σχέσεις (6.3.3) και (6.3.4) τα Γ_{S_1} και Γ_{S_2} από τις σχέσεις (6.3.10.α) και (6.3.10.β) θα έχουμε:

$$\Gamma_{D1} \cdot (1 + S_1 \cdot G1) + \Gamma_{D2} \cdot S_2 \cdot G2 = \Gamma_{t1} - \sum_k \Gamma_{k1} - S_1 \cdot \Gamma_{Q1} - S_1 \cdot GA \quad \text{Εξ. (6.3.12.α)}$$

$$\Gamma_{D1} \cdot S_2 \cdot G3 + \Gamma_{D2} \cdot (1 + S_2 \cdot G4) = \Gamma_{t2} - \sum_k \Gamma_{k2} - S_2 \cdot \Gamma_{Q2} - S_2 \cdot GB \quad \text{Εξ. (6.3.12.β)}$$

Θέτοντας:

$$E_1 = \Gamma_{t1} - \sum_k \Gamma_{k1} - S_1 \cdot \Gamma_{Q1} - S_1 \cdot GA \quad \text{Εξ. (6.3.13.α)}$$

$$E_2 = \Gamma_{t2} - \sum_k \Gamma_{k2} - S_2 \cdot \Gamma_{Q2} - S_2 \cdot GB \quad \text{Εξ. (6.3.13.β)}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (6.3.12.α-β) με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$D2 = (1 + S_1 \cdot G1) (1 + S_2 \cdot G4) - S_1 \cdot S_2 \cdot G2 \cdot G3 \quad \text{Εξ. (6.3.14.α)}$$

$$Dx2 = E_1 \cdot (1 + S_2 \cdot G4) - S_1 \cdot G2 \cdot E_2 \quad \text{Εξ. (6.3.14.β)}$$

$$Dy2 = E_2 \cdot (1 + S_1 \cdot G1) - S_2 \cdot G3 \cdot E_1 \quad \text{Εξ. (6.3.14.γ)}$$

Η λύση συνεπώς είναι:

$$\Gamma_{D1} = \frac{Dx2}{D2} \quad \text{Εξ. (6.3.15.α)}$$

$$\Gamma_{D2} = \frac{Dy2}{D2} \quad \text{Εξ. (6.3.15.β)}$$

6.4 Υπολογισμός της ταχύτητας στα σημεία του πεδίου ροής εκτός της επιφάνειας της αεροτομής

Ο υπολογισμός της ταχύτητας σε σημείο εκτός της επιφάνειας της αεροτομής γίνεται με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.3.

$$V_x = V_{x1} + \frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot V_{x2} + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot V_{x3} + V_{x4} + V_{x5} \quad \text{Εξ. (6.4.1.α)}$$

$$V_y = V_{y1} + \frac{\Gamma_1}{S_1} \cdot V_{y2} + \frac{\Gamma_2}{S_2} \cdot V_{y3} + V_{y4} + V_{y5} \quad \text{Εξ. (6.4.1.β)}$$

Η ταχύτητες V_{x1} και V_{y1} δίνονται όπως και στη παράγραφο 3.3 από τις σχέσεις:

$$V_{x1} = \sum_{n=1}^N V_{1n} + V_{av} \cdot \cos(\omega_{av}) = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + V_{av} \cdot \cos(\omega_{av})$$

Εξ. (6.4.2.α)

$$V_{y1} = \sum_{n=1}^N V_{2n} + V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_n}{4\pi} + V_{av} \cdot \sin(\omega_{av})$$

Εξ. (6.4.2.β)

Οι ταχύτητες V_{x2} και V_{y2} δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_{x2} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{D_k}{4\pi}$$

Εξ. (6.4.3.α)

$$V_{y2} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n1}}{4\pi} - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{C_k}{4\pi}$$

Εξ. (6.4.3.β)

Αντίστοιχα και οι ταχύτητες V_{x3} και V_{y3} :

$$V_{x3} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n2}}{4\pi} + \sum_{m=1+N_1}^N \frac{D_m}{4\pi}$$

Εξ. (6.4.4.α)

$$V_{y3} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_{n2}}{4\pi} - \sum_{m=1+N_1}^N \frac{C_m}{4\pi}$$

Εξ. (6.4.4.β)

Οι ταχύτητες V_{x4} και V_{y4} δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_{x4} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_{nD1}}{4\pi} + \sum_{K=1}^{STP-1} V_{2D1,K}$$

Εξ. (6.4.5.α)

$$V_{y4} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_{nD1}}{4\pi} - \sum_{K=1}^{STP-1} V_{1D1,K}$$

Εξ. (6.4.5.β)

Οι ταχύτητες V_{1D1} και V_{2D1} δίνονται από τις σχέσεις (3.2.17.α) και (3.2.17.β) αν αντικαταστήσουμε την ένταση M με την ένταση της εκάστοτε δίνης Γ_k και όπου STP είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων μέχρι την στιγμή που εξετάζουμε. Οι ταχύτητες V_{1D1} και V_{2D1} προέρχονται από τις δίνες που δημιουργεί η πρώτη αεροτομή.

Αντίστοιχα οι ταχύτητες V_{x5} και V_{y5} δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_{x5} = \bar{C}_n \cdot \frac{\bar{m}_n D_2}{4\pi} + \sum_{K=1}^{STP-1} V_{2D2,K} \quad \text{Εξ. (6.4.6.α)}$$

$$V_{y5} = \bar{D}_n \cdot \frac{\bar{m}_n D_2}{4\pi} - \sum_{K=1}^{STP-1} V_{1D2,K} \quad \text{Εξ. (6.4.6.β)}$$

Οι ταχύτητες V_{1D2} και V_{2D2} προέρχονται από τις δίνες που δημιουργεί η δεύτερη αεροτομή.

6.5 Υπολογισμός των σημείων ανακοπής στα L.E των αεροτομών

Ο υπολογισμός των σημείων ανακοπής γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της απλής κινούμενης πτερυγώσης (παράγραφος 3.4).

6.6 Υπολογισμός παραμέτρων της ροής

Καθώς η ροή περνά από τις πτερυγώσεις δέχεται την επίδραση των κυκλοφοριών Γ_1, Γ_2 από τις αεροτομές και την επίδραση των κυκλοφοριών των σημειακών δινών που δημιουργούνται από την κίνηση των δυο αεροτομών. Θα δεχθούμε ότι η συνολική κυκλοφορία που δρα στη ροή είναι το άθροισμα των Γ_1, Γ_2 και των σημειακών δινών που απέχουν λιγότερο από $2c$ (c : μήκος χορδής) από το TE της κάθε αεροτομής. Έτσι οι εξισώσεις (3.5.11)-(3.5.12) θα γίνουν:

$$\omega_{in} = \text{atan} \left(\frac{\sin|\omega_{av}| + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \sum_k \Gamma_k}{2 \cdot SP \cdot V_{av}}}{\cos|\omega_{av}|} \right) \quad \text{Εξ. (6.6.1)}$$

$$\omega_{out} = \text{atan} \left(\frac{\sin|\omega_{av}| - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \sum_k \Gamma_k}{2 \cdot SP \cdot V_{av}}}{\cos|\omega_{av}|} \right) \quad \text{Εξ. (6.6.2)}$$

$$\Delta\omega = \omega_{in} - \omega_{out} \quad \text{Εξ. (6.6.3)}$$

$$V_{in} = \sqrt{\left| V_{av} \cdot \cos(\omega_{av}) \right|^2 + \left(V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \sum_k \Gamma_k}{2 \cdot SP} \right)^2} \quad \text{Εξ. (6.6.4)}$$

$$V_{out} = \sqrt{\left| V_{av} \cdot \cos(\omega_{av}) \right|^2 + \left(V_{av} \cdot \sin(\omega_{av}) - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \sum_k \Gamma_k}{2 \cdot SP} \right)^2} \quad \text{Εξ. (6.6.5)}$$

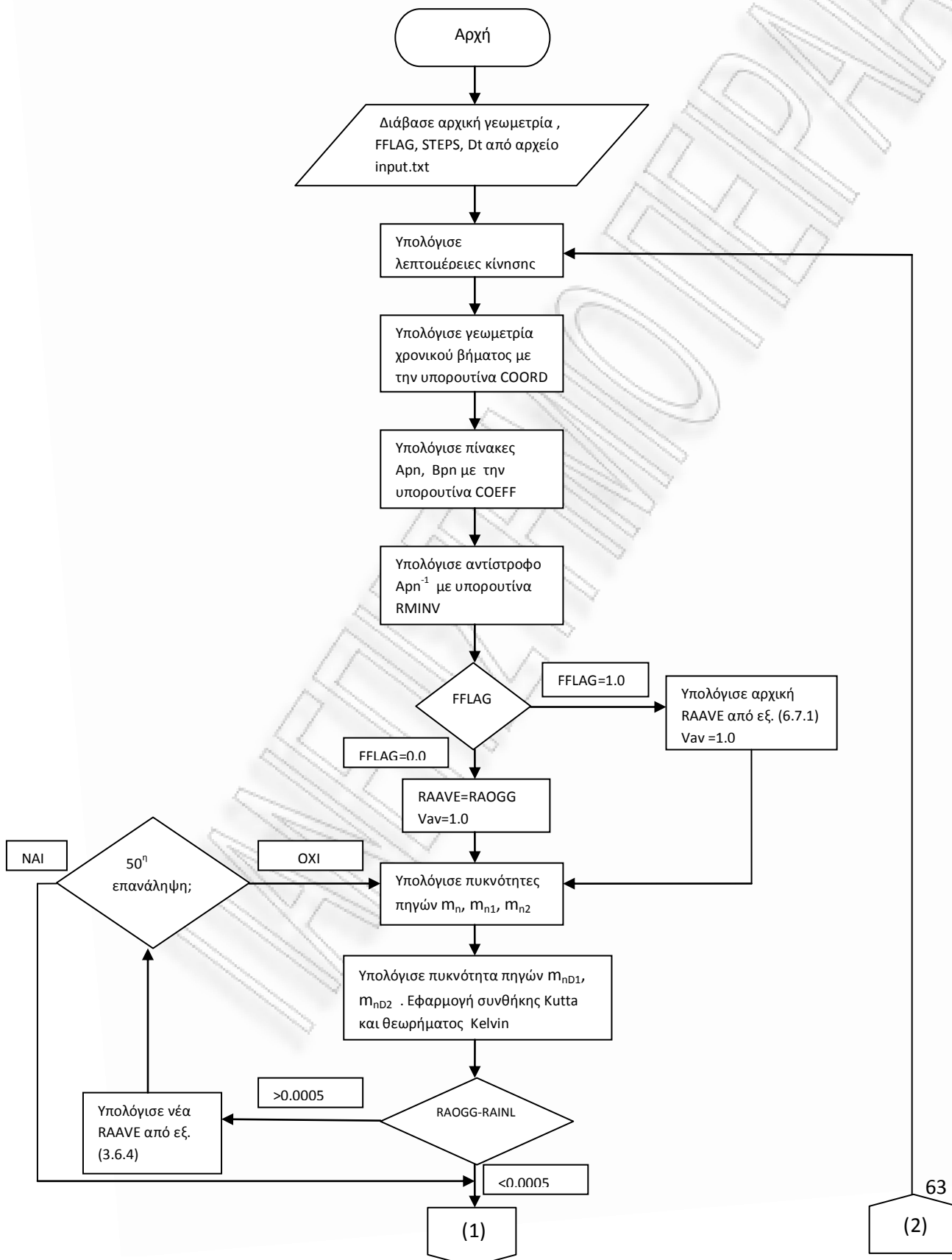
6.7 Υπολογισμός με δεδομένη την ταχύτητα V_{in}

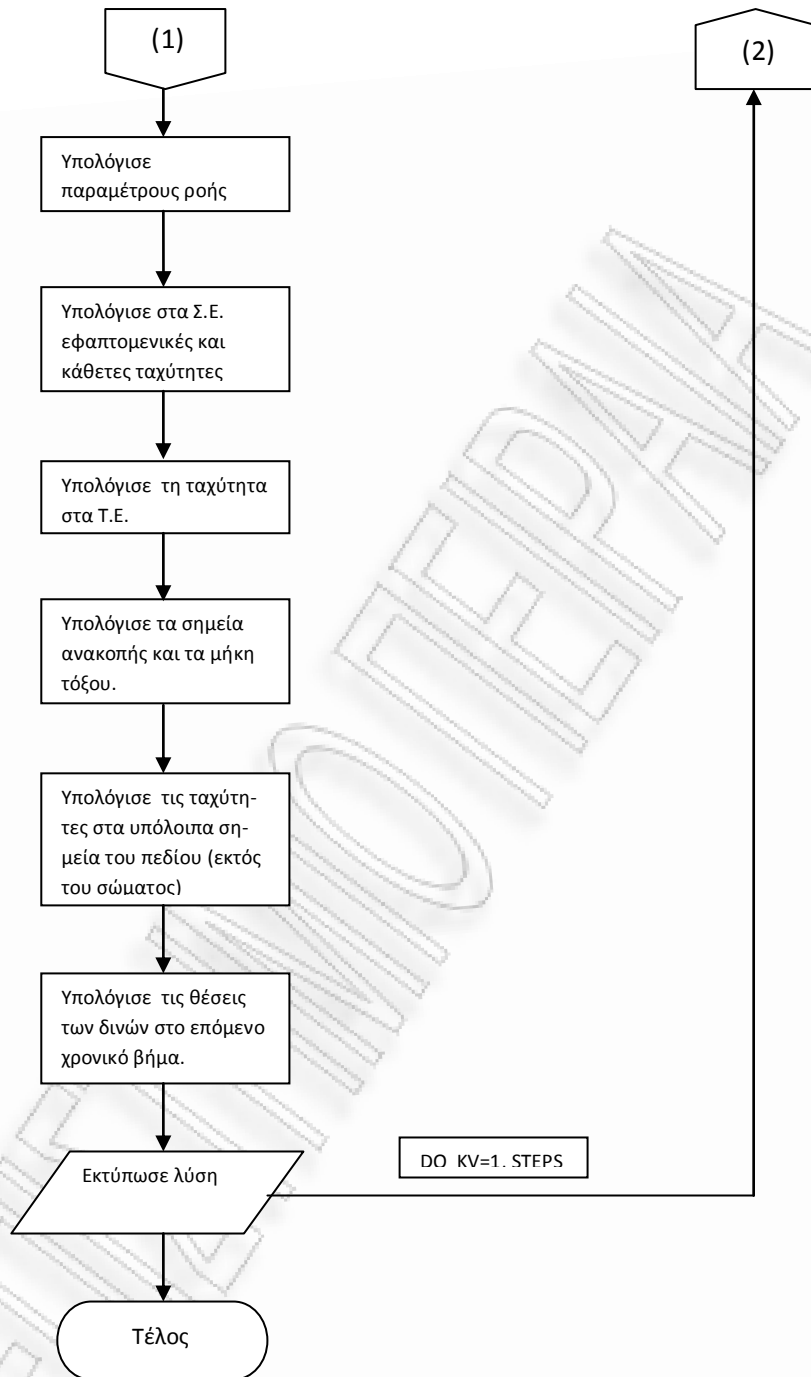
Όπως και στη παράγραφο 3.6 που εξετάσαμε τον υπολογισμό της ροής γύρω από μια κινούμενη ατέρμονα πτερύγωση με δεδομένη την ταχύτητα V_{in} , οι υπολογισμοί μας μέχρι τώρα προϋπέθεταν ως δεδομένη την ταχύτητα V_{av} . Επειδή όμως στα περισσότερα προβλήματα αυτό που έχουμε ως δεδομένο είναι η ταχύτητα V_{in} τότε ακολουθούμε μια επαναληπτική διαδικασία ίδια με αυτή της παρ. 3.6 με μόνη διαφορά την αρχική «διαισθητική» τιμή που αυτή τη φορά δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_{av} = \text{atan} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\tan(\omega_{in}) + \tan \left(\frac{-\omega_{st1} - \omega_{st2}}{2} \right) \right) \right] \quad \text{Εξ. (6.7.1)}$$

Κεφάλαιο 7:

Περιγραφή του προγράμματος υπολογισμού της ροής γύρω από δύο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση





Εικόνα 7.1 Διάγραμμα ροής

Στο κεφάλαιο 7 περιγράφεται το πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει τη ροή γύρω από δυο κινούμενες ατέρμονες πτερυγώσεις. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Α.2 όπου υπάρχει κατάλογος με της μεταβλητές του εν λόγω προγράμματος, όπως επίσης και στο διάγραμμα ροής της Εικόνας 7.1.

Ακολουθεί η περιγραφή της κυρίως ρουτίνας (CAS2) και έπονται οι υπορουτίνες (COORD, COEFF, RMINV).

Το πρόγραμμα αποτελεί τροποποίηση του προγράμματος του Dedoussis (ref. 23, Dedoussis) που υπολόγιζε την ροή γύρω από δυο ατέρμονες πτερυγώσεις σε σταθερή κατάσταση.

7.1 Η κυρίως ρουτίνα CAS2

Το πρόγραμμα αρχίζει διαβάζοντας από το αρχείο input.txt την αρχική γεωμετρική τοποθέτηση των δυο αεροτομών. Αρχικά διαβάζει το διάκενο ανάμεσα στις αεροτομές (**SPNG**), που είναι ίδιο και για τις δυο ατέρμονες πτερυγώσεις, και τον αριθμό (**OFBDY**) των σημείων του πεδίου ροής που βρίσκονται εκτός των αεροτομών. Συνεχίζει με την ανάγνωση του συνολικού αριθμού σημείων (**N**), τον αριθμό του σημείου του T.E. (**NTEE**), το μήκος της χορδής (**CHD**), τη γωνία κλίσης της αεροτομής (**OGSTG**), την τεταγμένη (**XTRN**) του σημείου L.E., την τετμημένη (**YTRN**) του σημείου L.E. και τις συντεταγμένες (**X1**) και (**Y1**) της πρώτης αεροτομής. Ακολούθως επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία για τη δεύτερη αεροτομή. Αν έχουμε σημεία εκτός αεροτομής (δηλ. (**OFBDY**)>0) τότε διαβάζει τις συντεταγμένες τους (**XX**) και (**YY**), αντίστοιχα. Κατόπιν, το πρόγραμμα διαβάζει από το αρχείο εισόδου την γωνία πρόσπτωσης της αδιατάρακτης ροής (**OGG**) καθώς και τη τιμή της μεταβλητής (**FFLAG**). Το πρόγραμμα ολοκληρώνει την ανάγνωση του αρχείου εισόδου input.txt, διαβάζοντας τον συνολικό αριθμό των χρονικών βημάτων (**STEPS**) καθώς και τη χρονική διάρκεια του κάθε βήματος (**Dt**).

Στο σημείο αυτό αρχίζει ο κυρίως βρόγχος (main loop) και αμέσως μετά υπολογίζονται οι λεπτομέρειες της κίνησης ανάλογα με την περίπτωση. Στις περιπτώσεις των test cases που αναφέρονται στο κεφάλαιο 8, για παράδειγμα, εισάγουμε τις ταχύτητες κίνησης της κάθε αεροτομής (**VY1**) και (**VY2**) και υπολογίζουμε τις προσπίπτουσες ροές που «βλέπει» η κάθε αεροτομή (**V1**), (**V2**) με τις αντίστοιχες γωνίες (**Z1**), (**Z2**). Επίσης υπολογίζονται οι σχετικές γωνίες πρόσπτωσης (**Zrev1**), (**Zrev2**).

Ακόλουθα καλείται η υπορουτίνα COORD (βλ. 4.2) η οποία υπολογίζει τη γεωμετρία της αεροτομής σε κάθε χρονικό βήμα. Στο επόμενο τμήμα του προγράμματος η υπορουτίνα COEFF (βλ. 4.3) υπολογίζει τους πίνακες A_{pn} και B_{pn} και αμέσως μετά η υπορουτίνα RMINV (βλ. 4.4) αντιστρέφει τον A_{pn} .

Κατόπιν το πρόγραμμα αποφασίζει, βάσει της μεταβλητής (**FFLAG**) αν η γωνία πρόσπτωσης της ροής (**OGG**) είναι η μέση γωνία της αδιατάρακτης ροής ω_{av}

(FFLAG=0.0) ή είναι η γωνία εισόδου της αδιατάρακτης ροής ω_{in} **(FFLAG=1.0)**. Στη τελευταία περίπτωση η αρχική τιμή της ω_{av} υπολογίζεται την εξ. (6.7.1) για να αρχίσει η επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση αφού οριστεί η τιμή της ω_{av} , το πρόγραμμα υπολογίζει την κάθετη ταχύτητα (b_p – εξ.(6.1.2.α-6.1.2.β)) που επάγεται σε κάθε στοιχείο της αεροτομής από μια μοναδιαία μέση ταχύτητα ($V_{av}=1.0$) και την αποθηκεύει στον πίνακα **(VC)**. Ύστερα, βάσει των εξισώσεων (6.1.4), (6.2.3) και (6.2.5) υπολογίζονται οι πυκνότητες των πηγών $m_n/4\pi$, m_{n1} , m_{n2} και αποθηκεύονται αντίστοιχα στους πίνακες **(VC)**, **(DG)** και **(DGG)**.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η συνθήκη Kutta και το θεώρημα Kelvin. Προσπαθούμε να βρούμε τις διαφορές των εφαιπτομενικών ταχυτήτων στο τελευταίο στοιχείο (NTE) πριν και στο πρώτο στοιχείο (NTBE) μετά το T.E κάθε αεροτομής. Υπολογίζονται, κατ' αρχάς, οι εφαιπτομενικές ταχύτητες $q_{1,NTE}$ και $q_{1,NTBE}$ από τη σχέση (6.1.5). Σημειώνουμε ότι η διαφορά υπολογίζεται ως $\Delta q_1 = q_{1,NTE} - q_{1,NTBE}$ καθώς η εφαιπτομενική ταχύτητα αμέσως μετά το T.E λαμβάνεται θετική έχοντας αντίθετη διεύθυνση από την αντίστοιχη ταχύτητα αμέσως πριν το T.E. Ακόλουθα υπολογίζουμε τις ταχύτητες $4\pi \cdot q_{2,NTE}$ και $4\pi \cdot q_{2,NTBE}$ από την εξ. (6.2.2) από τις οποίες βρίσκεται η διαφορά $4\pi \cdot \Delta q_2$. Ομοίως και για την διαφορά $4\pi \cdot \Delta q_3$, όπου οι ταχύτητες $4\pi \cdot q_{3,NTE}$ και $4\pi \cdot q_{3,NTBE}$ υπολογίζονται από την εξ. (6.2.4).

Αν το τρέχον χρονικό βήμα είναι το πρώτο **(KV=1)**, τότε υπολογίζουμε τις κυκλοφορίες $\Gamma_1/4\pi \cdot S_1$ και $\Gamma_2/4\pi \cdot S_2$ από τις σχέσεις (6.2.14) – (6.2.15), θέτοντας $\Delta q_4 = \Delta q_5 = 0$. Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται ως **(GAP1)** και **(GAP2)**. Έχοντας βρει τις κυκλοφορίες $\Gamma_1/4\pi \cdot S_1$, $\Gamma_2/4\pi \cdot S_2$ υπολογίζουμε τις κυκλοφορίες Γ_1 , Γ_2 γύρω από τις δυο αεροτομές. Οι κυκλοφορίες αυτές αποθηκεύονται ως τα δυο πρώτα στοιχεία στον πίνακα **(GAM)** – **(GAM(1,1))** και **(GAM(2,1))** αντίστοιχα). Οι κυκλοφορίες **(GAM(1,1))** και **(GAM(2,1))** είναι παράλληλα και οι συνολικές κυκλοφορίες Γ_{t1} και Γ_{t2} (βλ. παράγραφο 6.3).

Στα υπόλοιπα χρονικά βήματα **(KV≥2)** υπολογίζουμε κατευθείαν τις ποσότητες Γ_{Q1} , Γ_{Q2} από τις εξισώσεις (6.2.16), (6.2.18) και τις αποθηκεύουμε στις μεταβλητές **(GQ1)** και **(GQ2)** αντίστοιχα. Ακολούθως προσπαθούμε να υπολογίσουμε τις πηγές m_{nD1} **(GND1)** και m_{nD2} **(GND2)**. Βρίσκουμε αρχικά τις πηγές m_{nDk1} και m_{nDk2} (εξ. 6.2.7 και εξ. 6.2.9) λόγω των γνωστών δινών των προηγούμενων βημάτων και τις αποθηκεύουμε προσωρινά στους πίνακες **(GND1)** και **(GND2)**. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις πηγές m_{n1D1} και m_{n2D1} λόγω των μοναδιαίων νέων δινών και τις αποθηκεύουμε στους πίνακες **(GND11)** και **(GND21)**. Ύστερα βρίσκουμε τις μεταβλητές G_1 , G_2 , G_A , G_3 , G_4 και G_B από τις εξισώσεις (6.3.11α - στ) και τις αποθηκεύουμε στις μεταβλητές **(G1)**, **(G2)**, **(GA)**, **(G3)**, **(G4)** και **(GB)**. Ακολουθεί ο υπολογισμός των E_1 , E_2 (εξ. 6.3.13α-β) και η αποθήκευση στις μεταβλητές **(E1)**, **(E2)**. Μετά υπολογίζονται οι D_2 , Dx_2 , Dy_2 από τις εξ. (6.3.14α-γ) και αποθηκεύονται στις μεταβλητές **(DT2)**, **(DX2)**, **(DY2)** αντίστοιχα. Τέλος υπολογίζουμε τις εντάσεις των νεοσχηματισμένων δινών Γ_{D1} , Γ_{D2} από τις εξ. (6.3.15α -β) και τις αποθηκεύουμε στους πίνακες **(GAPDS1)** και **(GAPDS2)**. Κατόπιν έχουμε τον υπολογισμό των κυκλοφοριών Γ_1 και Γ_2 γύρω από τις αεροτομές από τις εξ. (6.2.20-6.2.21) και την αποθήκευσή τους στον πίνακα **(GAM)**.

Αμέσως μετά υπολογίζουμε τις γωνίες ω_{in} και ω_{out} από τις σχέσεις (6.6.1) και (6.6.2) συνυπολογίζοντας και τις εντάσεις των σημειακών δινών που απέχουν λιγότερο από $2c$ (c : μήκος χορδής) από το TE της κάθε αεροτομής. Οι γωνίες αποθηκεύονται στις μεταβλητές **(RAINL)** και **(RAOUT)** αντίστοιχα. Βρίσκουμε στη συνέχεια την διαφορά ανάμεσα στην γωνία ω_{in} και στη γωνία **(RAOGG)**. Αν αυτή η διαφορά είναι μεγαλύτερη από 0.0005 rad τότε υπολογίζουμε μια νέα τιμή της μέσης γωνίας ω_{av} από τη σχέση (3.6.4) και επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς μέχρι αυτό το σημείο. Αν η διαφορά είναι μικρότερη από 0.0005 rad τότε θεωρούμε ότι βρήκαμε τη σωστή γωνία ω_{in} και προχωρούμε στους υπολογισμούς των παραμέτρων της ροής. Αν η μεταβλητή **(FFLAG)** είναι 0 τότε η γωνία που έχουμε ως δεδομένη **(OGG)** είναι η μέση γωνία ω_{av} και δεν μπαίνουμε στην επαναληπτική διαδικασία, προχωρώντας κατευθείαν στον υπολογισμό των παραμέτρων της ροής. Σε περίπτωση που δεν υπάρξει σύγκλιση της ω_{in} στις 50 πρώτες επαναλήψεις το πρόγραμμα συνεχίζει τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις τιμές των μεταβλητών της 50^{ης} επανάληψης. Οι παράμετροι που υπολογίζονται είναι οι V_{in} , V_{out} και $\Delta\omega$ και αποθηκεύονται στις μεταβλητές **(VVINL)**, **(VOUT)** και **(DEOG)**. Αφού γίνει ο υπολογισμός των παραμέτρων της ροής, το πρόγραμμα συνεχίζει με την εγγραφή σε αρχείο των εξής μεταβλητών για το τρέχον χρονικό βήμα: **(VAVE)**, **(OGAVE)**, **(VVINL)**, **(OGINL)**, **(VOUT)**, **(OGOUT)**, **(DEOG)**.

Στη συνέχεια του προγράμματος υπολογίζονται οι εφαπτομενικές και κάθετες ταχύτητες στα Σημεία Ελέγχου από τις σχέσεις (6.2.1) και (6.2.22) αντίστοιχα. Οι υπολογισθείσες ταχύτητες κανονικοποιούνται και αποθηκεύονται. Οι εφαπτομενικές αποθηκεύονται στον πίνακα **(SV)** ενώ οι κάθετες ταχύτητες στον πίνακα **(SY)**. Οι κάθετες ταχύτητες υπολογίζονται για επαλήθευση αφού σύμφωνα με την οριακή συνθήκη που θέσαμε πρέπει να είναι μηδενικές.

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των ταχυτήτων στα Trailing Edge των αεροτομών και αφού γίνει αυτό πηγαίνουμε στον υπολογισμό των σημείων ανακοπής. Ο υπολογισμός των σημείων ανακοπής γίνεται σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.4 και οι θέσεις τους αποθηκεύεται στο αντίστοιχο αρχείο. Ακόμη υπολογίζεται το μήκος τόξου για τις δυο αεροτομές μετρημένο από το σημείο ανακοπής μέχρι το T.E. και είναι χωρισμένο σε upper surface και lower surface. Δίνεται επίσης και η ταχύτητα στα αντίστοιχα Σημεία Ελέγχου.

Το επόμενο τμήμα του προγράμματος υπολογίζει την ταχύτητα στα σημεία του πεδίου ροής που βρίσκονται εκτός της αεροτομής χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της παραγράφου 6.4. Οι ταχύτητες εγγράφονται στο αντίστοιχο αρχείο. Επίσης το πρόγραμμα ελέγχει αν το εκάστοτε σημείο βρίσκεται εντός της περιοχής που περικλείει η αεροτομή. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε η ταχύτητα του σημείου αυτού τίθεται ίση με 0. Στην αρχή αυτού του τμήματος συγκρίνουμε την τιμή της μεταβλητής **(OFBDY)** με το 0. Αν είναι 0 τότε το πρόγραμμα παρακάμπτει το συγκεκριμένο τμήμα και πηγαίνει κατευθείαν στο επόμενο.

Στο τελευταίο κομμάτι του προγράμματος υπολογίζονται οι θέσεις των δινών του επόμενου χρονικού βήματος. Οι θέσεις των δινών υπολογίζονται με χρήση των σχέσεων της παραγράφου 6.4, αφού οι δίνες βρίσκονται σε σημεία εκτός της

αεροτομής. Αφού οι θέσεις υπολογιστούν (με αναφορά στους άξονες x, y), αποθηκεύονται στους πίνακες **(XD1)**, **(YD1)**, **(XD2)**, και **(YD2)**. Οι θέσεις των δινών του τελευταίου βήματος εγγράφονται στα αντίστοιχα αρχεία.

7.2 Η υπορουτίνα COORD

Η υπορουτίνα COORD υπολογίζει τις συντεταγμένες των σημείων των αεροτομών σε κάθε χρονικό βήμα. Αυτό γίνεται με στροφή των αξόνων x', y' της Εικόνας 3.2 κατά γωνίες ίσες με ω_{st1} **(RASTG(2))** και ω_{st2} **(RASTG(2))**. Έτσι έχουμε τις αεροτομές ορισμένες με πλαίσιο αναφοράς τους άξονες x, y της Εικόνας 3.2. Ανάλογα με το είδος της κίνησης είναι πιθανόν επίσης να έχουμε και μεταφορά των αξόνων x, y κατά **(XTRN(1))**, **(YTRN(1))** και **(XTRN(2))**, **(YTRN(2))** αντίστοιχα για κάθε αεροτομή. Η υπορουτίνα υπολογίζει ακόμη τα κέντρα των στοιχείων (Σημεία Ελέγχου **(S)**, **(R)**), το μήκος **(DS)** και τη γωνία **(TH)** που σχηματίζουν με τον άξονα x τα ευθύγραμμα τμήματα (στοιχεία) που αποτελούν την αεροτομή. Επίσης υπολογίζονται και τα τόξα που αντιστοιχούν σε κάθε Σημείο Ελέγχου **(SS)** καθώς και το συνολικό μήκος τόξου **(SP)** των αεροτομών.

7.3 Η υπορουτίνα COEFF

Η υπορουτίνα COEFF υπολογίζει τις ποσότητες στο εσωτερικό των παρενθέσεων στην σχέση (3.1.13). Ο λογάριθμος αποθηκεύεται στη μεταβλητή **(PA)** και το τόξο εφαπτομένης στη μεταβλητή **(PB)**. Οι υπολογισμοί τους έγιναν βάσει των σχέσεων (3.1.9), (3.1.10) και (3.1.11).

7.4 Η υπορουτίνα MINV

Η υπορουτίνα MINV αντιστρέφει έναν πίνακα αποθηκευμένο στον πίνακα-γραμμή **(A)**. Η αντιστροφή γίνεται με τον αλγόριθμο του Gauss. Ο αντίστροφος πίνακας αποθηκεύεται στον πίνακα **(A)**. Η μεταβλητή **(D)** είναι η ορίζουσα του πίνακα η οποία στην κυρίως ρουτίνα CAS2 συγκρίνεται με το μηδέν και αν είναι πράγματι μηδέν τότε τυπώνεται "DET ZERO NO SOLN" και το πρόγραμμα μεταβαίνει στο επόμενο χρονικό βήμα.

7.5 Η υπορουτίνα INOUT

Η υπορουτίνα INOUT αποφαινεται αν ένα δεδομένο σημείο βρίσκεται εντός ή εκτός των δύο αεροτομών. Η μεταβλητή **(IPD)** είναι 1.0 αν το δεδομένο σημείο είναι εντός, οπότε και οι ταχύτητα του πεδίου είναι μηδενική, και 0.0 αν είναι εκτός των περιοχών που περικλείουν οι δύο αεροτομές, οπότε και η ταχύτητα του πεδίου είναι αυτή που υπολογίζεται από την κυρίως ρουτίνα CAS2. Στη περίπτωση με την απλή κινούμενη ατέρμονα πεπερασμένη η υπορουτίνα αυτή ήταν κομμάτι της κυρίως ρουτίνας CASCAD.

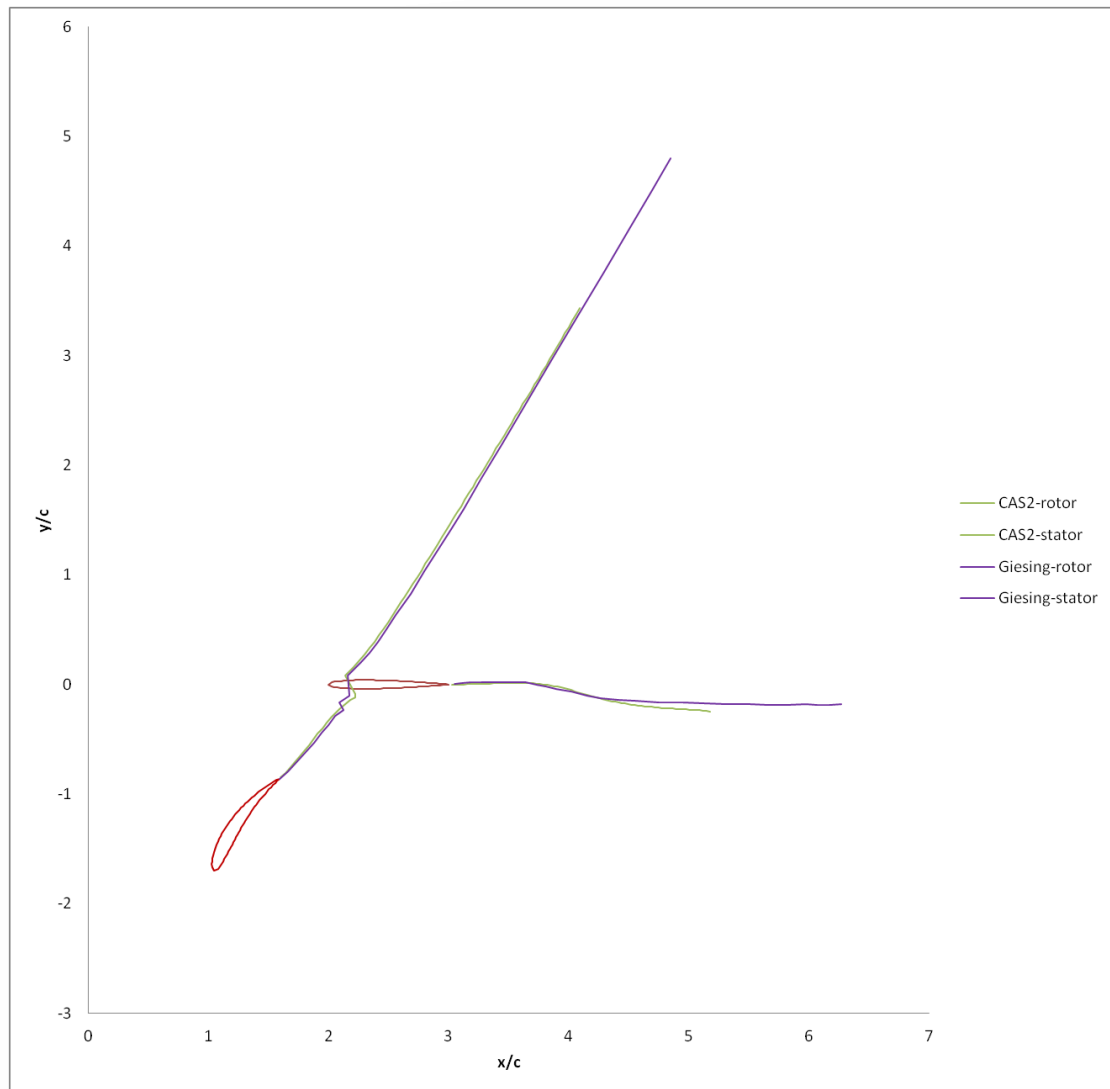
Κεφάλαιο 8:

Αποτελέσματα για την περίπτωση της ροής γύρω από δύο διαδοχικές κινούμενες πτερυγώσεις σε μη μόνιμη κατάσταση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν διάφορες περιπτώσεις της ροής γύρω από δυο ατέρμονες πτερυγώσεις εκ των οποίων η μια είναι η σταθερή ενώ η άλλη κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά έννοια κάθετη ως προς την προσπίπτουσα αδιατάρακτη ροή. Η διάταξη αυτή προσομοιάζει εκείνη ρότορα και στάτορα που βρίσκονται σε σειρά σε αξονικής ροής στροβιλομηχανή. Τα αποτελέσματα του παρόντος υπολογιστικού κώδικα συγκρίνονται με εκείνα άλλων ερευνητών. Η συγκεκριμένη περίπτωση που υπολογίστηκε δεν αφορά ατέρμονες πτερυγώσεις, αλλά δυο μεμονωμένες αεροτομές εκ των οποίων η μια κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς την άλλη κατά έννοια κάθετη ως προς την U_∞ . Προκειμένου ο κώδικας μας για ατέρμονες πτερυγώσεις να υπολογίσει την διάταξη αυτή, έχει τεθεί ιδιαίτερα μεγάλο διάκενο, π.χ. $SP=299c$.

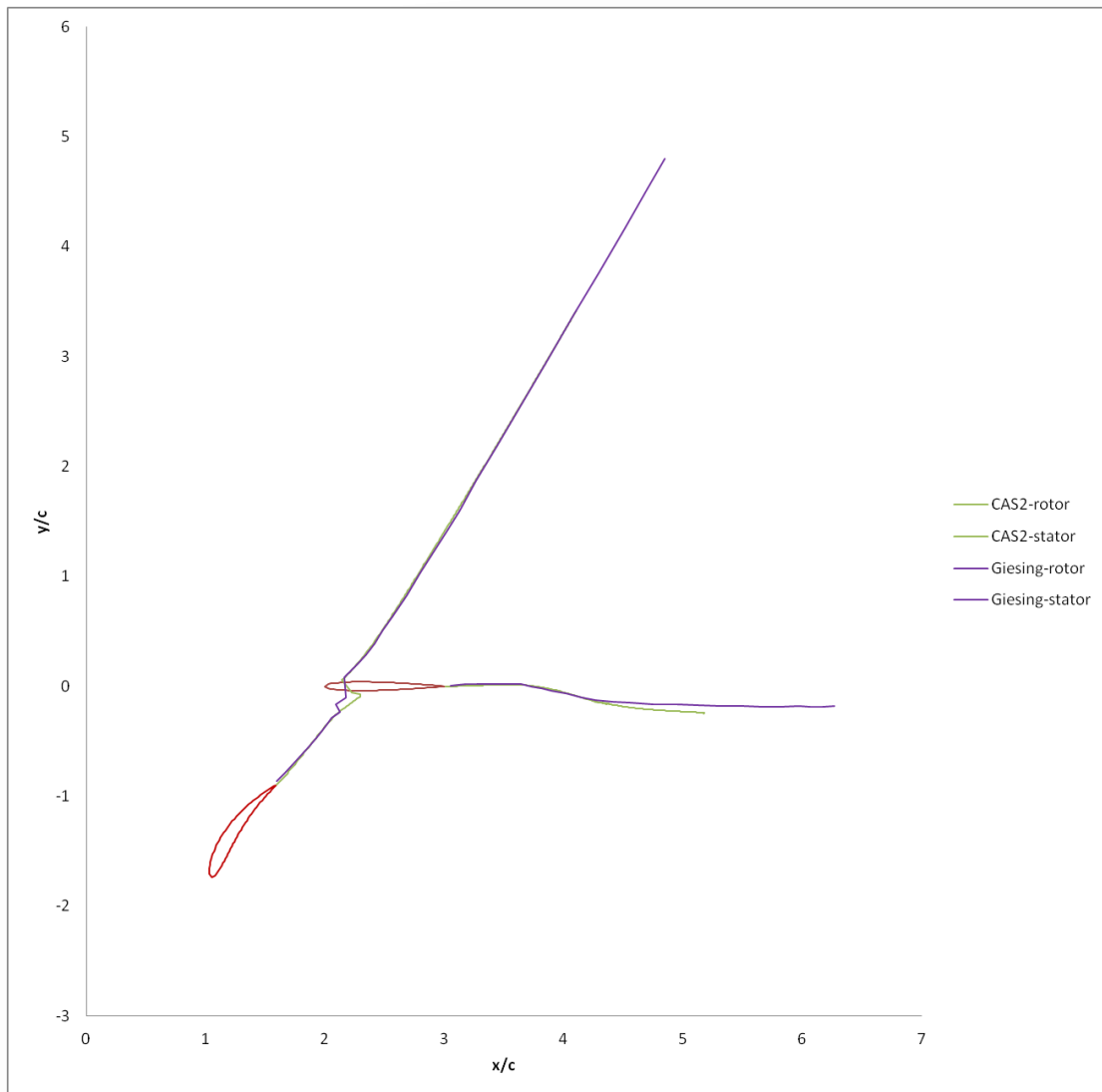
Η πρώτη σύγκριση αποτελεσμάτων αφορά τη περίπτωση όπου ο **στάτορας** είναι μια συμμετρική αεροτομή 8,4 % Von Mises ενώ ο **ρότορας** είναι μια αεροτομή Von Mises πάχους 11,4% και κλίσης 8,2% όπως φαίνεται στο Fig. 6 (a) (ref. 3, Giesing) και ο οποίος κινείται με ταχύτητα $2U_\infty$. Στη περίπτωση μας η αεροτομή του **στάτορα** (8,4% Von Mises) αντικαθίσταται από την σχεδόν πανομοιότυπη NACA 0008, η οποία προσεγγίζεται από 81 σημεία με τη κλίση της να είναι $\omega_{st2} = 0^\circ$. Η αεροτομή του **ρότορα** (Von Mises πάχους 11,4% και κλίσης 8,2%) αντικαθίσταται από τη σχεδόν πανομοιότυπη NACA 8512, η οποία προσεγγίζεται από 81 σημεία με τη κλίση της να είναι $\omega_{st1} = -57,23^\circ$. Η επίλυση στο πρόγραμμα CAS2 ολοκληρώνεται σε 76 βήματα με το χρονικό βήμα να είναι $\Delta t = 0.03$. Μπορούμε να δούμε τη διαφορά ανάμεσα στον ομόρου των δινών στην Εικόνα 8.1. Η αδιατάρακτη ροή είναι $U_\infty=1.0$ με απόλυτη γωνία 0° , ενώ η σχετική γωνία πρόσπτωσης στο ρότορα προκύπτει ίση με 6.2° . Επίσης η απόσταση μεταξύ του T.E του ρότορα και του L.E. του στάτορα είναι $0.412c$. Σημειώνεται ότι η μονάδα του χρόνου ορίζεται ως $t = U_\infty / c$.

Ο ομόρους των δινών του προγράμματος CAS2 είναι με πράσινο χρώμα ενώ ο ομόρους των δινών του Giesing είναι με μωβ χρώμα.

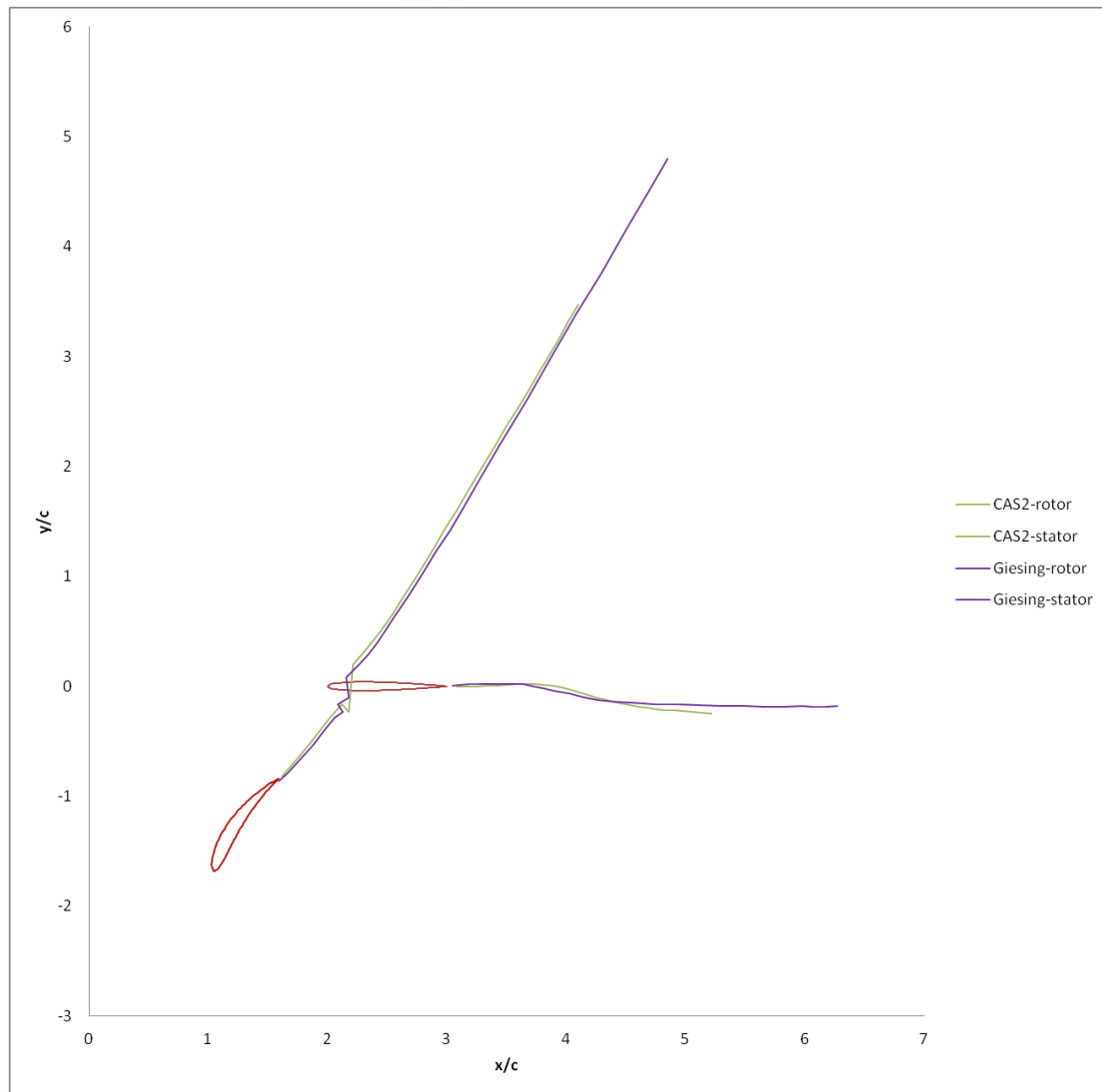


Εικόνα 8.1 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 6.2° και με διάκενο $0.412c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.03$)

Διαπιστώνουμε ότι έχουμε σχεδόν απόλυτη ταύτιση μεταξύ του ομόρου των 2 περιπτώσεων. Παραθέτουμε επίσης τις περιπτώσεις για $\Delta t=0.01$ (Εικόνα 8.2) και $\Delta t=0.08$ (Εικόνα 8.3).



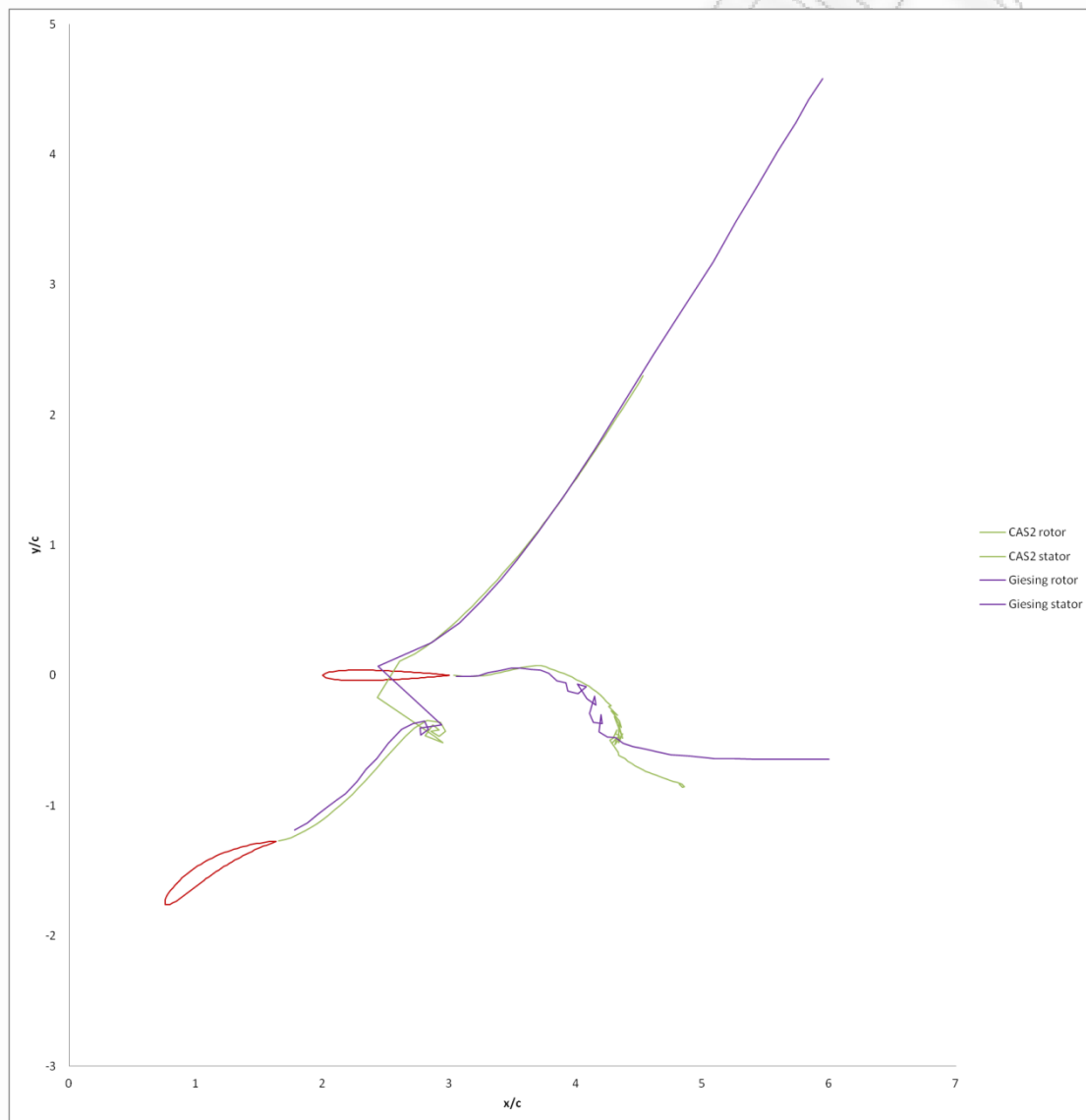
Εικόνα 8.2 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 6.2° και με διάκενο $0.412c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.01$)



Εικόνα 8.3 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 6.2° και με διάκενο $0.412c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.08$)

Βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις, με μικρότερο και μεγαλύτερο Δt αντίστοιχα, ο ομόρους των δινών δεν παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις από τον ομόρου που υπολογίστηκε από τον Giesing.

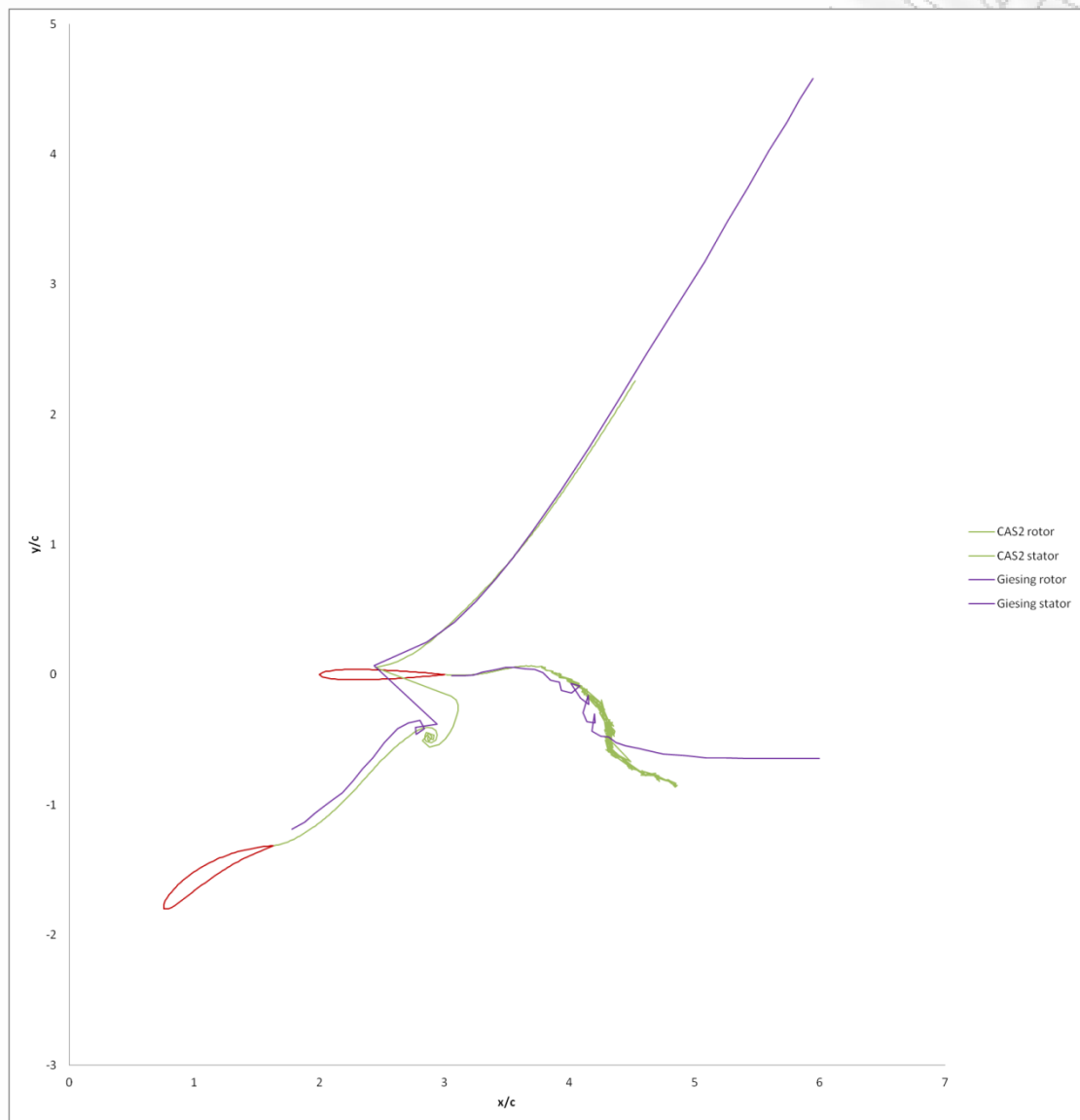
Η δεύτερη σύγκριση αποτελεσμάτων αφορά τις ίδιες αεροτομές με τη μόνη διαφορά να είναι η **γωνία κλίσης του ρότορα** $\omega_{st1} = -29,03^\circ$. Επίσης η απόσταση μεταξύ του T.E του ρότορα και του L.E. του στάτορα είναι τώρα $0.368c$. Η αδιατάρακτη ροή είναι $U_\infty=1.0$ με απόλυτη γωνία 0° , ενώ η σχετική γωνία πρόσπτωσης στο ρότορα προκύπτει ίση με 34.4° . Η επίλυση στο πρόγραμμα CAS2 ολοκληρώνεται σε 77 βήματα με το χρονικό βήμα να είναι $\Delta t = 0.03$. Μπορούμε να δούμε τη διαφορά ανάμεσα στον ομόρου των δινών στην Εικόνα 8.4.



Εικόνα 8.4 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 34.4° και με διάκενο $0.368c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.03$)

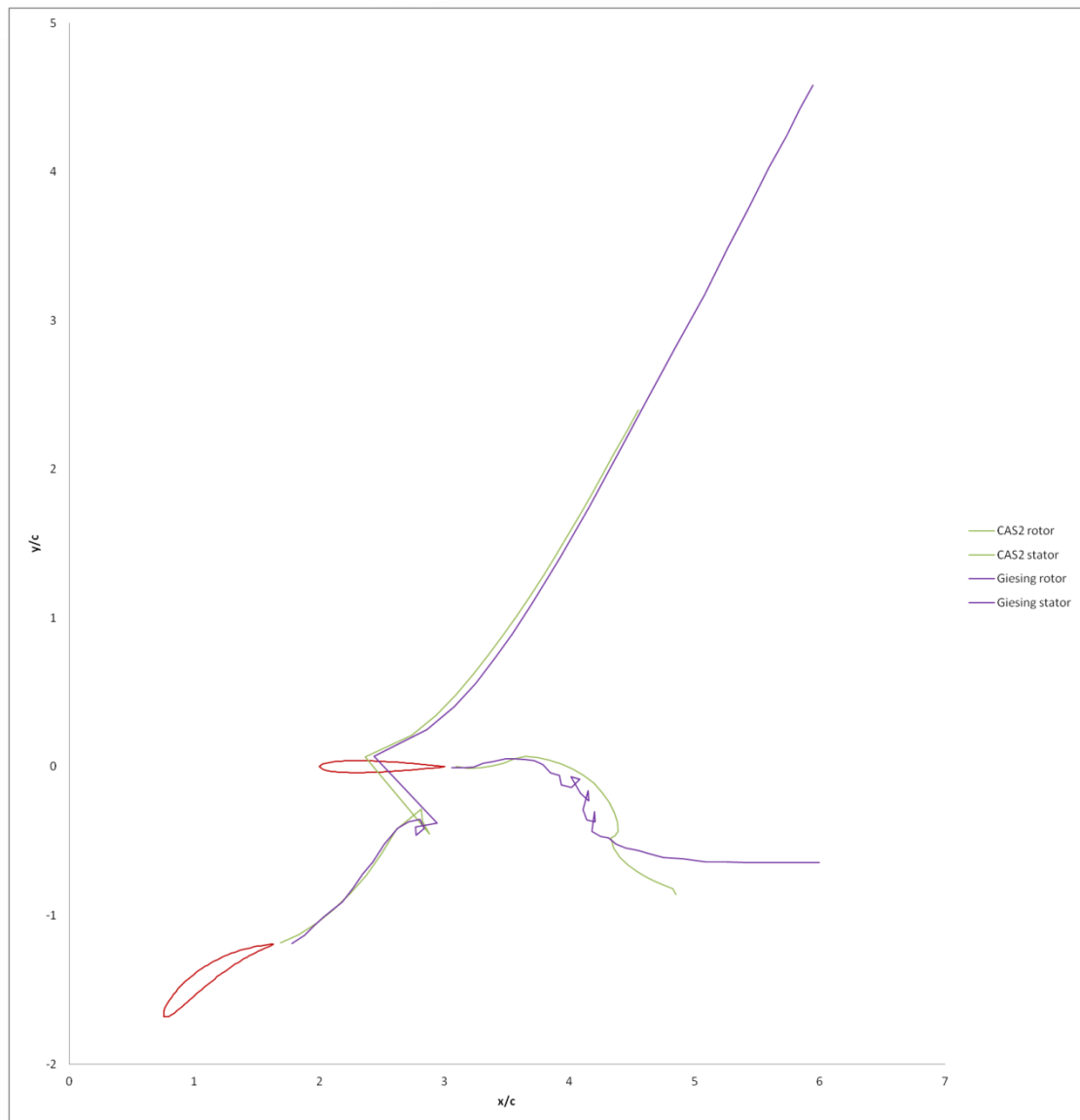
Διαπιστώνουμε ότι έχουμε μικρές διαφορές μεταξύ του ομόρου των 2 περιπτώσεων. Η ασάφεια στον ομόρου του στάτορα είναι ενδεικτική του

στροβιλισμού που διαπιστώνεται και στα αποτελέσματα του Giesing. Παραθέτουμε επίσης τις περιπτώσεις για $\Delta t=0.01$ (Εικόνα 8.5) και $\Delta t=0.08$ (Εικόνα 8.6).



Εικόνα 8.5 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 34.4° και με διάκενο $0.368c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.01$)

Στη παραπάνω περίπτωση ($\Delta t=0.01$) βλέπουμε ότι αν εξαιρέσουμε την ασάφεια του ομόρου του στάτορα, που έχει διευρυνθεί, δεν έχουμε μεγάλες αποκλίσεις από τα προσδοκώμενα αποτελέσματα.



Εικόνα 8.6 Ομόρους των δινών για σχετική γωνία πρόσπτωσης 34.4° και με διάκενο $0.368c$ μεταξύ TE_1 και LE_2 . ($\Delta t = 0.08$)

Στη περίπτωση όπου έχουμε μεγάλο βήμα ($\Delta t=0.08$) χάνεται η ασάφεια στον ομόρου του **στάτορα** και ο στροβιλισμός που υπάρχει στα αποτελέσματα του Giesing περιορίζεται πλέον σε ένα απλό σημείο καμπής. Τα αποτελέσματα για τον ομόρου του **ρότορα** δεν παρουσιάζουν προβλήματα.

Κεφάλαιο 9:

Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο τον υπολογισμό του διδιάστατου μη-μόνιμου πεδίου ταχύτητας ασυμπιέστης μη-συνεκτικής ροής διαμέσου αερισμένων πτερυγώσεων χρησιμοποιώντας επιφανειακά γραμμικά στοιχεία πηγών. Η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων χρησιμοποιήθηκε καταρχήν σε μεμονωμένη ατέρμονα πτερύγωση ευρισκόμενη σε μη μόνιμη κατάσταση και αργότερα τροποποιήθηκε για να συμπεριλάβει δυο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις. Η αεροτομή της κάθε πτερύγωσης προσεγγίστηκε από μια σειρά ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία εφαρμόστηκε μια κατανομή πηγών και δινών που σε συνδυασμό με την αδιατάρακτη ροή και τις σημειακές δίνες, που προκύπτουν από την μεταβολή της κυκλοφορίας γύρω από την/τις αεροτομή/ές, μας δίνουν το επιθυμητό πεδίο ταχυτήτων.

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε ήταν σε μεγάλο βαθμό επιτυχής όπως έδειξε και η σύγκριση με αποτελέσματα άλλων ερευνητών όπως επίσης και εντελώς γενική ως προς το σχήμα της αεροτομής. Παρόλαυτα η μέθοδος έχει σχετικό βαθμό επιτυχίας όταν οι δίνες που δημιουργούνται από την κίνηση του σώματος/αεροτομής είναι αρκετά ισχυρές. Σε κάθε περίπτωση όμως τα αποτελέσματα των υπολογισμών παραμένουν αξιοποιήσιμα καθώς αναπαριστούν το πεδίο ταχυτήτων με μεγάλη πιστότητα. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ο κώδικας που αναπτύχθηκε δεν είναι γενικός ως προς την κίνηση της/του αεροτομής/σώματος. Ο κώδικας για τη μεμονωμένη αεροτομή είναι προσανατολισμένος στη περίπτωση της ταλάντωσης ενώ ο κώδικας για τις διαδοχικές αεροτομές προσομοιώνει την κίνηση ρότορα-στάτορα, χωρίς παρόλαυτα να είναι δυσχερής η μελλοντική τροποποίηση για να συμπεριληφθούν και άλλα είδη κινήσεων. Η μέθοδος και ο κώδικας που αναπτύχθηκε είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον υπολογισμό της αλληλεπίδρασης μεταξύ ρότορα και στάτορα, αφού και αυτός ήταν ο πρωταρχικός σκοπός.

Ο χρήστης πρέπει ακόμη να είναι προσεκτικός ως προς το χρονικό βήμα που θα επιλέξει καθώς αν μεν είναι πολύ μικρό θα εμφανιστεί ένα χαρακτηριστικό «σπάσιμο» στον ομόρου των δινών και αν είναι πολύ μεγάλο παρουσιάζεται μια εξομάλυνση του ομόρου που πιθανόν οφείλεται σε αριθμητικό λάθος διακριτοποίησης. Το χρονικό βήμα είναι βέβαια στενά συνδεδεμένο με το είδος της κίνησης που έχουμε. Ο αριθμός, επίσης, των ευθύγραμμων τμημάτων που απαρτίζουν την αεροτομή είναι επίσης σημαντικός και δεν πρέπει να είναι μικρότερος από κάποιο όριο καθώς τα αποτελέσματα θα είναι ανακριβή. Στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στην εργασία οι αεροτομές αποτελούνταν από 40 τμήματα, αριθμός που κρίνεται επαρκής.

Όσον αφορά τον πραγματικό χρόνο εκτέλεσης του κώδικα που αναπτύχθηκε σε γλώσσα FORTRAN θα σημειώσουμε ο χρόνος εκτέλεσης για την περίπτωση της Εικόνας 5.7 με την αεροτομή να αποτελείται από 40 τμήματα, το χρονικό βήμα να είναι $\Delta t = 0.0147$ και το σύνολο των βημάτων να είναι 51 είναι 11 sec ενώ ο χρόνος εκτέλεσης για την περίπτωση της Εικόνας 8.4 με τις δυο αεροτομές να αποτελούνται

συνολικά από 80 τμήματα, το χρονικό βήμα να είναι $\Delta t = 0.03$ και το σύνολο των βημάτων να είναι 77 είναι 62 sec. Ο επεξεργαστής είναι Intel Core Duo T2250 στα 1.73 GHz και η μνήμη RAM είναι 1 GB.

Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε ότι παρά το ότι ο υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων είναι εν γένει αξιόπιστος, υπολείπεται ο υπολογισμός των πιέσεων που ασκούνται σε κάθε χρονική στιγμή πάνω στις αεροτομές αλλά και σε κάθε σημείο του πεδίου. Ο συντελεστής c_p για ένα δεδομένο σημείο μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2} = \left(\frac{V_g}{U_\infty} \right)^2 - \left(\frac{V_c}{U_\infty} \right)^2 - \frac{2}{U_\infty^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

όπου p_∞ και p είναι η πίεση αναφοράς και η τοπική πίεση αντίστοιχα, V_g είναι η μετοχική ταχύτητα και V_c η σχετική ταχύτητα του εν λόγω σημείου, U_∞ είναι η αδιατάρακτη ταχύτητα που είναι και ταχύτητα αναφοράς και Φ το δυναμικό στο σημείο αυτό. Η μετοχική ταχύτητα V_g ορίζεται ως:

$$\overline{V}_g = \overline{V}_f + \Omega (\vec{j}x - \vec{i}y)$$

όπου V_f η γραμμική και Ω η γωνιακή ταχύτητα του σώματος. Η σχετική ταχύτητα V_c ορίζεται ως:

$$\overline{V}_c = \nabla \Phi - \overline{V}_g$$

Βιβλιογραφία

1. Hess, J. L., Smith, A. M. O., "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", *Progress in Aeronautical Sciences-Pergamon Press*, 1966; 8 :1-138
2. Giesing J. P., "Nonlinear Two-Dimensional Unsteady Potential Flow with Lift", *J. Aircraft* 1968; 5-2 : 135
3. Giesing J. P., "Nonlinear Interaction of Two Lifting Bodies in Arbitrary Unsteady Motion", *Journal of Basic Engineering* 1968; 387
4. B. C. Basu and G. J. Hancock, 'The unsteady motion of a two-dimensional aerofoil in incompressible, inviscid flow', *J. Fluid Mech*, 1978; 87 (Part I): 159-178
5. Maskell, E. C. On the Kutta-Joukowski condition in two dimensional unsteady flow", *Unpublished note, Roy. Aircraft Establishment Farnborough*
6. J. G. Leishman and R. A. McD. Galbraith, 'An algorithm for the calculation of the potential flow about an arbitrary two-dimensional aerofoil', 1981; G. U. Report No. 8102
7. N. D. Ham, Aerodynamic loading on a two-dimensional airfoil during dynamic stall. *AIAA* 1968; J. 6: 1927
8. R. E. Singleton and J. F. Nash, Method for calculating unsteady turbulent boundary layers in two- and three dimensional flows. *AIAA* 1974; J. 12: 590
9. E.G. Ladopoulos, Non-linear singular integral representation analysis for inviscid flowfields of unsteady airfoils, *Inf. J Non-Linear Mechanics*, 1997; 32 (2) : 377-384
10. E.G. Ladopoulos, Unsteady inviscid flowfields of 2D airfoils by non-linear singular integral computational analysis, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 2011; 46 : 1022–1026
11. L. B. Wang, L. Zhuang, N. D. Zeng, "A potential flow 2-D vortex panel model: Applications to vertical axis straight blade tidal turbine", *Energy Conversion and Management* 2007; 48: 454–461
12. Chaplygin SA. On the pressure exerted by a plane-parallel flow upon an obstructing body (aeroplane theory). *Math Collect Moscow* 1910; 28 :120–66.
13. Kutta WM. "Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. *Sitzungsber K Bayer Akad Wiss* 1910; 40 :1–58.
14. Zhukovski NE. "Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. *Z Flugtech Motorluftschiffahrt* 1910 ; 1 : 281–4.
15. Poling D.R. , Telionis D.P. , The response of airfoils to periodic disturbances - The unsteady Kutta condition. *AIAA J* 1986; 24(2):193–9.

16. Satyanarayana B, Davis S., *Experimental studies of unsteady trailing-edge conditions*. *AIAA J* 1978; 16(2):125–9.
17. Katz J., Weihs D. , *Wake rollup and the Kutta condition for airfoils oscillating at high frequency*. *AIAA J* 1981;19 (12):1604–6.
18. Liebe R. *Unsteady flow mechanisms on airfoils: the extended finite vortex model with applications*. In: Liebe R, editor. *A challenge to engineering design*. *Flow phenomena in nature*, 2007; 1: 283–339.
19. La Mantia M, Dabnichki P. *Unsteady panel method for oscillating foils*. In: Gatmiri B, Sellier A, Aliabadi MH, editors. *Advances in boundary element techniques* 2006; 7: 91–6.
20. La Mantia M, Peter Dabnichki, *Influence of the wake model on the thrust of oscillating foil*, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2011; (35) : 404–414
21. Giesing J. P., “*Extension of the Douglas Neumann Program to Problems of Lifting Infinite Cascades*”, Douglas Aircraft Company, 1964; Report No. LB-31653
22. Bradshaw P., Unsworth K., “*An improved FORTRAN Program for the Bradshaw-Ferris-Atwell Method of Calculating Turbulent Shear Layers*”, Imperial College Aero 1974; Report 74-02
23. Dedoussis, V. “*Calculation of inviscid flow through aerofoil cascade and between wind tunnel walls*”, Dept. Aeronautics Imperial College. London, 1983; M. Sc. Thesis
24. Mahgoub, H. E. H., “*Calculation of the interaction between a complex turbulent shear layer and an inviscid stream*”, Imperial College, London, 1978; Ph. D. Thesis
25. Dedoussis V., “*Numerical simulation of inviscid flow through rows of cylinders*”, *Proceedings 4th GRACM Congress on Computational Mechanics*, Patra 2002; 1248-1256
26. Dedoussis V., Mathioudakis K., “*Numerical Simulation of Blade Fault Signatures From Unsteady Wall Pressure Signals*”, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1997; 119: 362-369
27. Lamb, H, “*Hydrodynamics*” Cambridge University Press, New York, 1932; 6th Ed. : 71

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α.1: Κατάλογος μεταβλητών του προγράμματος CASCAD

| | |
|-------|--|
| A | Ο δισδιάστατος πίνακας A_{pn} |
| am | Πλάτος ταλάντωσης (Περίπτωση 1)* |
| APX | X_1 |
| APY | Y_1 |
| AQX | X_2 |
| AQY | Y_2 |
| AX1 | M_1 |
| AX2 | N_1 |
| AY1 | M_2 |
| AY2 | N_2 |
| B | Ο δισδιάστατος πίνακας B_{pn} |
| C | $V_{1n} \cdot (4\pi/m_n)$ για σημεία εκτός αεροτομής |
| CC | Το μήκος της χορδής (c) υπολογισμένο βάσει των συντεταγμένων της αεροτομής |
| CHD | Μήκος χορδής που διαβάζεται από αρχείο |
| CL | C_L - εξ. (3.5.4) |
| CNST | $\pi/(SP \cdot c)$ |
| co | Συχνότητα ταλάντωσης (Περίπτωση 1)* |
| COM | $S/\Delta q_2$ |
| COMP | $[1+S \cdot (-\Delta q_{p1}/\Delta q_2)]$ - εξ. (3.2.35) |
| D | $V_{2n} \cdot (4\pi/m_n)$ για σημεία εκτός αεροτομής |
| DD | d_p - εξ. (3.2.18.α) |
| DD1 | d_p λόγω μοναδιαίας δίνης |
| DENOM | Η ταχύτητα με την οποία κανονικοποιούνται οι υπόλοιπες ταχύτητες της επίλυσης (είτε V_{av} είτε V_{in}) |
| DEOG | Η γωνία κατά την οποία στρέφεται η ροή καθώς περνά από την ατέρμονα πτερύγωση |
| DET | Η ορίζουσα του πίνακα A_{pn} |
| DG | Αρχικά $\sum B_{pn}$. Έπειτα πηγές m_{n1} |
| DS | Πίνακας που περιέχει τα μήκη των στοιχείων της αεροτομής |
| Dsa | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού με ταχύτητα q_{TE} σε χρόνο Dt |
| Dt | Το χρονικό βήμα Δt της επίλυσης |
| DXX1 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα V_{XD} σε χρόνο Dt |
| DYY1 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα V_{YD} σε χρόνο Dt |
| ED | e_p - εξ. (3.2.18.β) |

| | |
|--------|--|
| ED1 | ϵ_p λόγω μοναδιαίας δίνης |
| ERP | $S \cdot (\Delta\alpha_k / \Delta\alpha_3)$ |
| ETAT | Η αρχική διαισθητική τιμή της γωνίας ω_{av} (radians). Αργότερα η νέα τιμή της ω_{av} σύμφωνα με την εξ. (3.6.4) |
| FFLAG | Η μεταβλητή FFLAG έχει είτε την τιμή 0.0 είτε την τιμή 1.0 ανάλογα με το εάν η μεταβλητή OGG είναι η ω_{av} ή η ω_{in} |
| GAP | $\Gamma_{airf} / (4\pi \cdot S)$ |
| GAPD | Δισδιάστατος πίνακας που περιέχει τις εντάσεις Γ_D των σχηματιζόμενων δινών για όλα τα χρονικά βήματα |
| GAPDS | Πίνακας-γραμμή στον οποίο αποθηκεύονται οι εντάσεις Γ_D των σχηματιζόμενων δινών για όλα τα χρονικά βήματα |
| GAPP | Πίνακας στον οποίο αποθηκεύεται η κυκλοφορία Γ_{airf} γύρω από την αεροτομή |
| GAPT | Γ_{tot} - Η αρχική κυκλοφορία που μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της επίλυσης |
| GAQ | Γ_Q - εξ. (3.2.24.α) |
| GND | Πηγές m_{nD} |
| GND1 | Πηγές m_{nD1} |
| GQ | $\Gamma_Q / 4\pi$ - εξ. (3.2.24.α) |
| GS | Γ_S - εξ. (3.2.24.β) |
| IL | Μεταβλητή που μετρά το πλήθος των επαναλήψεων (όταν η μεταβλητή FFLAG είναι 1.0) |
| JM | Το Σημείο Ελέγχου με τη μικρότερη ταχύτητα (μέτρο) και το οποίο βρίσκεται εγγύτερα στο σημείο ανακοπής |
| KV | Τρέχων χρονικό βήμα |
| N | Ο αριθμός των σημείων της αεροτομής αρχικά και έπειτα ο αριθμός των στοιχείων της |
| NOFBDY | Ο αριθμός των σημείων εκτός αεροτομής |
| NTE | Ο αριθμός του σημείου του T.E. και έπειτα ο αριθμός του στοιχείου πριν το T.E. |
| OGAVE | μέση γωνία ω_{av} (degrees) |
| OGG | ω_{av} ή ω_{in} (degrees) |
| OGINL | Η γωνία εισόδου της ροής (ω_{in}) που «βλέπει» η αεροτομή (degrees) |
| OGOUT | Η γωνία εξόδου της ροής (ω_{out}) που «βλέπει» η αεροτομή (degrees) |
| OGSTG | Αρχική γωνία χορδής ω_{st} (degrees) |
| PI | π |
| qTE | Η ταχύτητα στο T.E. που προκύπτει ως ημίαθροισμα των SXA και SYA |
| R | Οι τεταγμένες των Σημείων Ελέγχου |
| RAAVE | μέση γωνία ω_{av} (radians) |
| RAINL | Η γωνία εισόδου της ροής (ω_{in}) που «βλέπει» η αεροτομή (radians) |
| RAOGG | ω_{av} ή ω_{in} (radians) |
| RAOUT | Η γωνία εξόδου της ροής (ω_{out}) που «βλέπει» η αεροτομή (radians) |
| RASTG | Γωνία χορδής ω_{st} εκάστοτε χρονικού βήματος (Περίπτωση 1)* |
| RASTG1 | Αρχική γωνία χορδής ω_{st} (rad) |
| RAVN | Η γωνία της ταχύτητας που «βλέπει» η αεροτομή (Περίπτωση 1)* |
| S | Οι τετμημένες των Σημείων Ελέγχου |

| | |
|-------|---|
| SP | Το συνολικό μήκος τόξου της αεροτομής (s) |
| SPNG | Διάκενο μεταξύ των αεροτομών SP |
| SS | Πίνακας που περιέχει τα μήκη των τόξων στα Σημεία Ελέγχου |
| STAG | Το μήκος του τόξου στο οποίο έχουμε το σημείο ανακοπής |
| STEPS | Τα συνολικά χρονικά βήματα της επίλυσης |
| SV | Εφαπτομενική ταχύτητα στο στοιχείο της αεροτομής |
| SXA | Η συνισταμένη ταχύτητα στο T.E. από τα στοιχεία NTE και NTBE κατά τον x-άξονα |
| SY | Κάθετη ταχύτητα στο στοιχείο της αεροτομής |
| SYA | Η συνισταμένη ταχύτητα στο T.E. από τα στοιχεία NTE και NTBE κατά τον γ-άξονα |
| t | Συνολικός χρόνος που έχει παρέλθει από την αρχή της επίλυσης |
| TH | Πίνακας που περιέχει τις γωνίες που σχηματίζουν τα στοιχεία της αεροτομής με τον άξονα x |
| thTE | Η γωνία της ταχύτητας qTE με τον άξονα x |
| TRN | Απόσταση της αεροτομής από το κέντρο των αξόνων (Περίπτωση 1)* |
| TSA | $4\pi \cdot q_{2,NTE}$ |
| TSB | $4\pi \cdot q_{2,NTBE}$ |
| TVBN | Η εφαπτομενική ταχύτητα στο στοιχείο (NTBE) λόγω των πηγών m_n και λόγω της V_{av} ($q_{1,NTBE}$) |
| TVDA | $q_{k,NTBE}$ |
| TVDA1 | $q_{D1,NTBE}$ |
| TVDB | $q_{k,NTE}$ |
| TVDB1 | $q_{D1,NTE}$ |
| TVTN | Η εφαπτομενική ταχύτητα στο στοιχείο (NTE) λόγω των πηγών m_n και λόγω της V_{av} ($q_{1,NTE}$) |
| TY | Ο πίνακας-γραμμή που αρχικά περιέχει τα στοιχεία του Arn και αργότερα τα στοιχεία του αντιστρόφου του |
| V1A | $V_{1\Delta}$ - εξ.(3.2.17.α) Η κάθετη ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε στοιχείο της αεροτομής |
| V2A | $V_{2\Delta}$ - εξ.(3.2.17.β) Η οριζόντια ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε στοιχείο της αεροτομής |
| V3A | $V_{1\Delta}$ - εξ.(3.2.17.α) Η κάθετη ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε σημείο εκτός της αεροτομής |
| V4A | $V_{2\Delta}$ - εξ.(3.2.17.β) Η οριζόντια ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε σημείο εκτός της αεροτομής |
| V5A | $V_{1\Delta}$ - εξ.(3.2.17.α) Η κάθετη ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε μια άλλη σημειακή δίνη |
| V6A | $V_{2\Delta}$ - εξ.(3.2.17.β) Η οριζόντια ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη σε μια άλλη σημειακή δίνη |
| VAVE | Το μέτρο της ταχύτητας V_{av} (αρχικά 1.0) |
| VC | Αρχικά $V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} - \theta_p)$. Έπειτα $m_n/4\pi$ |
| VINL | Το μέτρο της ταχύτητας V_{in} - εξ. (3.5.14) |
| VN | Ταχύτητα που «βλέπει» η αεροτομή (Περίπτωση 1)* |
| VNX | Ταχύτητα που «βλέπει» η αεροτομή κατά τον άξονα x (Περίπτωση 1)* |
| VNY | Ταχύτητα που «βλέπει» η αεροτομή κατά τον άξονα γ (Περίπτωση 1)* |

| | |
|-------|---|
| VOUT | Το μέτρο της ταχύτητας V_{out} - εξ. (3.5.15) |
| VVER | $\Gamma_{airf}/(2 \cdot SP)$ |
| VVINL | Η κανονικοποιημένη V_{in} |
| VX | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x σε σημείο εκτός αεροτομής |
| VXD | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x σε σημείο όπου υπάρχει δίνη |
| VY | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y σε σημείο εκτός αεροτομής |
| VYD | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y σε σημείο όπου υπάρχει δίνη |
| X | Οι τετμημένες των σημείων της εκάστοτε θέσης της αεροτομής |
| X1 | Οι τετμημένες των σημείων της αρχικής θέσης της αεροτομής |
| XD | Η τετμημένη μιας δίνης σε δεδομένη χρονική στιγμή |
| XIJ | $V_{1n} \cdot (4\pi/m_n)$ - εξ. (3.1.14.α) |
| XSTAG | Η τετμημένη του σημείου ανακοπής |
| XTRN | Απόσταση της αεροτομής κατά τον x-άξονα από το κέντρο των αξόνων (Περίπτωση 1)* |
| XX | Οι τετμημένες των σημείων εκτός αεροτομής |
| Y | Οι τεταγμένες των σημείων της εκάστοτε θέσης της αεροτομής |
| Y1 | Οι τεταγμένες των σημείων της αρχικής θέσης της αεροτομής |
| YD | Η τεταγμένη μιας δίνης σε δεδομένη χρονική στιγμή |
| YIJ | $V_{2n} \cdot (4\pi/m_n)$ - εξ. (3.1.14.β) |
| YSTAG | Η τεταγμένη του σημείου ανακοπής |
| YTRN | Απόσταση της αεροτομής κατά τον y-άξονα από το κέντρο των αξόνων (Περίπτωση 1)* |
| YY | Οι τεταγμένες των σημείων εκτός αεροτομής |

* Όσες μεταβλητές έχουν τη σημείωση (Περίπτωση 1) ενδέχεται να αλλάζουν ή και να καταργούνται σε περίπτωση που αλλάζει ο τρόπος κίνησης της αεροτομής. Οι μεταβλητές αυτές αφορούν μονάχα την Περίπτωση 1 από τα test cases.

Παράρτημα A.2: Κατάλογος μεταβλητών του προγράμματος CAS2

| | |
|-------|--|
| A | Ο δισδιάστατος πίνακας A_{pn} |
| APX | X_1 |
| APY | Y_1 |
| AQX | X_2 |
| AQY | Y_2 |
| AX1 | M_1 |
| AX2 | N_1 |
| AY1 | M_2 |
| AY2 | N_2 |
| B | Ο δισδιάστατος πίνακας B_{pn} |
| C | $V_{1n} \cdot (4\pi/m_n)$ για σημεία εκτός αεροτομής |
| CC | Το μήκος της χορδής (c) κάθε αεροτομής υπολογισμένο βάσει των συντεταγμένων της |
| CHD | Μήκος χορδής που διαβάζεται από αρχείο |
| CNST | $\pi/(SP \cdot c)$ |
| D | $V_{2n} \cdot (4\pi/m_n)$ για σημεία εκτός αεροτομής |
| DD1 | d_{1p} - εξ. (6.2.7) |
| DD11 | d_{1pD1} - εξ. (6.3.8.α-β) |
| DD2 | d_{2p} - εξ. (6.2.9) |
| DD21 | d_{2pD1} - εξ. (6.3.8.γ-δ) |
| DENOM | Η ταχύτητα με την οποία κανονικοποιούνται οι υπόλοιπες ταχύτητες της επίλυσης (είτε V_{av} είτε V_{in}) |
| DEOG | Η γωνία κατά την οποία στρέφεται η ροή καθώς περνά από τις ατέρμονες πτερυγώσεις |
| DET | Η οριζουσα του πίνακα A_{pn} |
| DG | Αρχικά $\sum B_{pk}$ ($k=1, \dots, N_1$) Έπειτα πηγές m_{n1} |
| DGG | Αρχικά $\sum B_{pm}$ ($m=N_1+1, \dots, N$). Έπειτα πηγές m_{n2} |
| DQA1 | $\Delta q_{1,1}$ |
| DQA2 | $4\pi \cdot \Delta q_{2,1}$ |
| DQA3 | $4\pi \cdot \Delta q_{3,1}$ |
| DQB1 | $\Delta q_{1,2}$ |
| DQB2 | $4\pi \cdot \Delta q_{2,2}$ |
| DQB3 | $4\pi \cdot \Delta q_{3,2}$ |
| DS | Πίνακας που περιέχει τα μήκη των στοιχείων της κάθε αεροτομής |
| Dsa1 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού με ταχύτητα q_{TE1} σε χρόνο Dt . (Το σωματίδιο του ρευστού βρίσκεται αρχικά στο TE της 1ης αεροτομής) |

| | |
|-------|--|
| Dsa2 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού με ταχύτητα q_{TE2} σε χρόνο Dt . (Το σωματίδιο του ρευστού βρίσκεται αρχικά στο TE της 2ης αεροτομής) |
| Dt | Χρονικό βήμα Δt |
| DT2 | D2 - εξ. (6.3.14.α) |
| DX2 | Dx2 - εξ. (6.3.14.β) |
| DXX1 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα $VXD1$ σε χρόνο Dt |
| DXX2 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα $VXD2$ σε χρόνο Dt |
| DY1 | Το διάστημα που έχει διανύσει η 1η αεροτομή κατά το χρονικό διάστημα Dt |
| DY2 | Το διάστημα που έχει διανύσει η 2η αεροτομή κατά το χρονικό διάστημα Dt |
| DY2 | Dy2 - εξ. (6.3.14.γ) |
| DYY1 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα $VYD1$ σε χρόνο Dt |
| DYY2 | Το διάστημα που καλύπτει το στοιχειώδες σωματίδιο του ρευστού (δίνη) με ταχύτητα $VYD2$ σε χρόνο Dt |
| E1 | E1 - εξ. (6.3.13.α) |
| E2 | E2 - εξ. (6.3.13.β) |
| EA | $\Delta q_{4_{1k}}$ - εξ. (6.3.5.α) |
| EA1 | $\Delta q_{4_{1D1}}$ - εξ. (6.3.9.α) |
| EB | $\Delta q_{4_{2k}}$ - εξ. (6.5.3.β) |
| EB1 | $\Delta q_{4_{2D1}}$ - εξ. (6.3.9.β) |
| ED1 | e_{1_p} - εξ. (6.2.6) |
| ED11 | $e_{1_{pD1}}$ - εξ. (6.3.8.α-β) |
| ED2 | e_{2_p} - εξ. (6.2.8) |
| ED21 | $e_{2_{pD1}}$ - εξ. (6.3.8.γ-δ) |
| ETAT | Η αρχική διαισθητική τιμή της γωνίας ω_{av} (radians). Αργότερα η νέα τιμή της ω_{av} σύμφωνα με την εξ. (3.6.4) |
| FA | $\Delta q_{5_{1k}}$ - εξ. (6.3.5.γ) |
| FA1 | $\Delta q_{5_{1D1}}$ - εξ. (6.3.9.γ) |
| FB | $\Delta q_{5_{2k}}$ - εξ. (6.3.5.δ) |
| FB1 | $\Delta q_{5_{2D1}}$ - εξ. (6.3.9.δ) |
| FFLAG | Η μεταβλητή FFLAG έχει είτε την τιμή 0.0 είτε την τιμή 1.0 ανάλογα με το εάν η μεταβλητή OGG είναι η ω_{av} ή η ω_{in} |
| G1 | G1 - εξ. (6.3.11.α) |
| G2 | G2 - εξ. (6.3.11.β) |
| G3 | G3 - εξ. (6.3.11.δ) |
| G4 | G4 - εξ. (6.3.11.ε) |

| | |
|--------|--|
| GA | GA - εξ. (6.3.11.γ) |
| GAM | Πίνακας στον οποίο αποθηκεύονται οι κυκλοφορίες Γ_1 και Γ_2 [1η στήλη: Γ_1 --- 2η στήλη Γ_2] |
| GAP1 | $\Gamma_1/4\pi \cdot S_1$ - 1ο χρονικό βήμα |
| GAP1 | $\Gamma_1/4\pi S_1$ |
| GAP2 | $\Gamma_2/4\pi \cdot S_2$ - 1ο χρονικό βήμα |
| GAP2 | $\Gamma_2/4\pi S_2$ |
| GAPB1 | Γ_1/S_1 - εξ. (6.2.20) |
| GAPB2 | Γ_2/S_2 - εξ. (6.2.21) |
| GAPD1 | Δισδιάστατος πίνακας που περιέχει τις εντάσεις των σχηματιζόμενων δινών σχηματίζονται από τη 1η αεροτομή για όλα τα χρονικά βήματα |
| GAPD2 | Δισδιάστατος πίνακας που περιέχει τις εντάσεις των σχηματιζόμενων δινών σχηματίζονται από τη 2η αεροτομή για όλα τα χρονικά βήματα |
| GAPDS1 | Πίνακας που περιέχει τις εντάσεις Γ_D των δινών που σχηματίζονται πίσω από τη 1η αεροτομή |
| GAPDS2 | Πίνακας που περιέχει τις εντάσεις Γ_D των δινών που σχηματίζονται πίσω από τη 2η αεροτομή |
| GAPP | Πίνακας στον οποίο αποθηκεύεται η συνολική κυκλοφορία γύρω από τις 2 αεροτομές. Περιλαμβάνονται οι κυκλοφορίες Γ_1 , Γ_2 και οι δίνες που βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 2c από τα αντίστοιχα TE |
| GAPT1 | Η ολική κυκλοφορία Γ_{t1} γύρω από τη 1η αεροτομή κατά το 1ο χρονικό βήμα. Παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της επίλυσης |
| GAPT2 | Η ολική κυκλοφορία Γ_{t2} γύρω από τη 2η αεροτομή κατά το 1ο χρονικό βήμα. Παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της επίλυσης |
| GB | GB - εξ. (6.3.11.στ) |
| GND1 | Πηγές $m_{nD1}/4\pi$ - εξ. (6.2.7) |
| GND11 | $m_{n1D1}/4\pi$ - εξ. (6.3.8.α-β) |
| GND2 | Πηγές $m_{nD2}/4\pi$ - εξ. (6.2.9) |
| GND21 | $m_{n2D1}/4\pi$ - εξ. (6.3.8.γ-δ) |
| GQ1 | Πίνακας που περιέχει τις κυκλοφορίες $\Gamma Q1$ σε κάθε χρονικό βήμα |
| GQ2 | Πίνακας που περιέχει τις κυκλοφορίες $\Gamma Q2$ σε κάθε χρονικό βήμα |
| GQI1 | ΓQ_1 - εξ. (6.2.16) |
| GQI2 | ΓQ_2 - εξ. (6.2.18) |

| | |
|-------|--|
| GS1 | GS_1 - εξ. (6.3.10.α) |
| GS2 | GS_2 - εξ. (6.3.10.β) |
| IPD | Η μεταβλητή IPD είναι 0 αν το σημείο είναι εκτός αεροτομής και 1 αν είναι εντός. Αρχικά, στην υπορουτίνα INOUT, τίθεται ίση με 0 και αν βρεθεί ότι το σημείο είναι εντός της αεροτομής τίθεται ίση με 1. |
| KV | Τρέχων χρονικό βήμα |
| MO | STEPS (ενδιάμεση μεταβλητή) |
| N | Ο αριθμός των σημείων της κάθε αεροτομής αρχικά και έπειτα ο αριθμός των στοιχείων της |
| N1 | Ο αριθμός των στοιχείων της 1ης αεροτομής |
| NT | Ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της 1ης και 2ης αεροτομής |
| NTBE | Ο αριθμός του στοιχείου μετά το T.E. |
| NTBE1 | Ο αριθμός του στοιχείου μετά το TE της 1ης αεροτομής |
| NTBE2 | Ο αριθμός του στοιχείου μετά το TE της 2ης αεροτομής |
| NTE | Ο αριθμός του στοιχείου πριν το T.E. |
| NTE1 | Ο αριθμός του στοιχείου πριν το TE της 1ης αεροτομής |
| NTE2 | Ο αριθμός του στοιχείου πριν το TE της 2ης αεροτομής |
| NTEE | Ο αριθμός του σημείου του T.E. |
| OFBDY | Ο αριθμός των σημείων του πεδίου εκτός αεροτομών |
| OGAVE | Η μέση γωνία της ροής ω_{av} (degrees) |
| OGG | ω_{av} ή ω_{in} (degrees) |
| OGINL | Η γωνία εισόδου της ροής ω_{in} (degrees) |
| OGOUT | Η γωνία εξόδου της ροής ω_{out} (degrees) |
| OGSTG | Γωνία χορδής ω_{st} (degrees) |
| PI | π |
| qTE1 | Η ταχύτητα στο T.E. της 1ης αεροτομής που προκύπτει ως ημιάθροισμα των SXA1 και SYA1 |
| qTE2 | Η ταχύτητα στο T.E. της 2ης αεροτομής που προκύπτει ως ημιάθροισμα των SXA2 και SYA2 |
| R | Οι τεταγμένες των Σημείων Ελέγχου |
| RAAVE | μέση γωνία ω_{av} (radians) |
| RAINL | Η γωνία εισόδου της ροής (ω_{in}) που «βλέπει» η αεροτομή (radians) |
| RAOGG | ω_{av} ή ω_{in} (radians) |
| RAOUT | Η γωνία εξόδου της ροής (ω_{out}) που «βλέπει» η αεροτομή (radians) |
| RAS | μέση γωνία κλίσης των δυο αεροτομών (radians) |
| RASTG | Γωνία χορδής ω_{st} (radians) |
| RY | Οι τεταγμένες των Σημείων Ελέγχου |
| S | Οι τετμημένες των Σημείων Ελέγχου |

| | |
|--------|---|
| SGD | Η συνολική κυκλοφορία των δινών που δημιουργούνται από τις 2 αεροτομές και οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 2c από το αντίστοιχο TE |
| SGD1 | Η συνολική κυκλοφορία των δινών που δημιουργούνται από την 1η αεροτομή και βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 2c από το TE |
| SGD2 | Η συνολική κυκλοφορία των δινών που δημιουργούνται από την 2η αεροτομή και βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 2c από το TE |
| SPNG | Διάκενο μεταξύ των αεροτομών SP |
| SS | Πίνακας που περιέχει τα μήκη των τόξων στα Σημεία Ελέγχου |
| SS | Πίνακας που περιέχει τα μήκη των τόξων στα Σημεία Ελέγχου |
| STAG | Το μήκος του τόξου στο οποίο έχουμε το σημείο ανακοπής |
| STEPS | Τα συνολικά χρονικά βήματα της επίλυσης |
| SUM3A | Η συνολική ταχύτητα κατά τον x άξονα που επάγεται σε σημείο εκτός αεροτομής από τις δίνες που δημιουργήθηκαν από τη 1η αεροτομή |
| SUM4A | Η συνολική ταχύτητα κατά τον y άξονα που επάγεται σε σημείο εκτός αεροτομής από τις δίνες που δημιουργήθηκαν από τη 1η αεροτομή |
| SUM5A | Η συνολική ταχύτητα κατά τον x άξονα που επάγεται σε σημείο εκτός αεροτομής από τις δίνες που δημιουργήθηκαν από τη 2η αεροτομή |
| SUM6A | Η συνολική ταχύτητα κατά τον y άξονα που επάγεται σε σημείο εκτός αεροτομής από τις δίνες που δημιουργήθηκαν από τη 2η αεροτομή |
| SUMXDA | Η συνολική ταχύτητα κατά τον x άξονα που επάγεται από σημειακές δίνες της 1ης αεροτομής σε δίνη που δημιουργήθηκε από τη 1η αεροτομή. Αργότερα γίνεται η ταχύτητα από δίνες της 2ης σε δίνη της 1ης. Μετά είναι η ταχύτητα από δίνες της 1ης σε δίνη της 2ης και τέλος γίνεται η ταχύτητα από δίνες της 2ης σε δίνη της 2ης |
| SUMYDA | Η συνολική ταχύτητα κατά τον y άξονα που επάγεται από σημειακές δίνες της 1ης αεροτομής σε δίνη που δημιουργήθηκε από τη 1η αεροτομή. Αργότερα γίνεται η ταχύτητα από δίνες της 2ης σε δίνη της 1ης. Μετά είναι η ταχύτητα από δίνες της 1ης σε δίνη της 2ης και τέλος γίνεται η ταχύτητα από δίνες της 2ης σε δίνη της 2ης |

| | |
|-------|---|
| SV | Η εφαπτομενική ταχύτητα στα Σημεία Ελέγχου των αεροτομών |
| SX | Οι τετμημένες των Σημείων Ελέγχου |
| SXA1 | Η συνισταμένη, από τα στοιχεία NTE και NTBE, ταχύτητα στο T.E. της 1ης αεροτομής κατά τον x-άξονα |
| SXA2 | Η συνισταμένη, από τα στοιχεία NTE και NTBE, ταχύτητα στο T.E. της 2ης αεροτομής κατά τον x-άξονα |
| SY | Η κάθετη ταχύτητα στα Σημεία Ελέγχου των αεροτομών. (Πρέπει να είναι μηδενική) |
| SYA1 | Η συνισταμένη, από τα στοιχεία NTE και NTBE, ταχύτητα στο T.E. της 1ης αεροτομής κατά τον y-άξονα |
| SYA2 | Η συνισταμένη, από τα στοιχεία NTE και NTBE, ταχύτητα στο T.E. της 2ης αεροτομής κατά τον y-άξονα |
| TH | Πίνακας που περιέχει τις γωνίες που σχηματίζουν τα στοιχεία της κάθε αεροτομής με τον άξονα x |
| thTE1 | Η γωνία της ταχύτητας q_{TE1} με τον άξονα x |
| thTE2 | Η γωνία της ταχύτητας q_{TE2} με τον άξονα x |
| TSA1 | $4\pi \cdot q_{2,NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TSA2 | $4\pi \cdot q_{2,NTE}$ - 2η αεροτομή |
| TSAA1 | $4\pi \cdot q_{3,NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TSAA2 | $4\pi \cdot q_{3,NTE}$ - 2η αεροτομή |
| TSB1 | $4\pi \cdot q_{2,NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TSB2 | $4\pi \cdot q_{2,NTBE}$ - 2η αεροτομή |
| TSBB1 | $4\pi \cdot q_{3,NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TSBB2 | $4\pi \cdot q_{3,NTBE}$ - 2η αεροτομή |
| TVBN1 | $q_{1,NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TVBN2 | $q_{1,NTBE}$ - 2η αεροτομή |
| TVDA | $q_{4_{1k},NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TVDA1 | $q_{4_{1D1},NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TVDB | $q_{4_{1k},NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TVDB1 | $q_{4_{1D1},NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TVDC | $q_{4_{2k},NTBE}$ - 2η αεροτομή |
| TVDC1 | $q_{4_{2D1},NTBE}$ - 2η αεροτομή |
| TVDD | $q_{4_{2k},NTE}$ - 2η αεροτομή |
| TVDD1 | $q_{4_{2D1},NTE}$ - 2η αεροτομή |
| TVTA | $q_{5_{1k},NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TVTA1 | $q_{5_{1D1},NTBE}$ - 1η αεροτομή |
| TVTB | $q_{5_{1k},NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TVTB1 | $q_{5_{1D1},NTE}$ - 1η αεροτομή |
| TVTC | $q_{5_{2k},NTBE}$ - 2η αεροτομή |

| | |
|-------|---|
| TVTC1 | $q_{5_{2D1}}$, NTBE - 2η αεροτομή |
| TVTD | $q_{5_{2k}}$, NTE - 2η αεροτομή |
| TVTD1 | $q_{5_{2D1}}$, NTE - 2η αεροτομή |
| TVTN1 | q_1 , NTE - 1η αεροτομή |
| TVTN2 | q_1 , NTE - 2η αεροτομή |
| TY | Ο πίνακας-γραμμή που αρχικά περιέχει τα στοιχεία του A_{pn} και αργότερα τα στοιχεία του αντιστρόφου του |
| V1 | Η συνισταμένη ταχύτητα που <<βλέπει>> η 1η αεροτομή |
| V10A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 2η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή - εξ. (3.2.17.β) |
| V11A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 1η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή - εξ. (3.2.17.α) |
| V12A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 1η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή - εξ. (3.2.17.β) |
| V13A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 2η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή - εξ. (3.2.17.α) |
| V14A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 2η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή - εξ. (3.2.17.β) |
| V1A1 | $V_{1\Delta}$ - εξ.(3.2.17.α) Η κάθετη ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη που προέρχεται από τη 1η αεροτομή σε οποιοδήποτε στοιχείο των δύο αεροτομών |
| V1A2 | $V_{1\Delta}$ - εξ.(3.2.17.α) Η κάθετη ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη που προέρχεται από τη 2η αεροτομή σε οποιοδήποτε στοιχείο των δύο αεροτομών |
| V2 | Η συνισταμένη ταχύτητα που <<βλέπει>> η 1η αεροτομή |
| V2A1 | $V_{2\Delta}$ - εξ.(3.2.17.β) Η οριζόντια ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη που προέρχεται από τη 1η αεροτομή σε οποιοδήποτε στοιχείο των δύο αεροτομών |

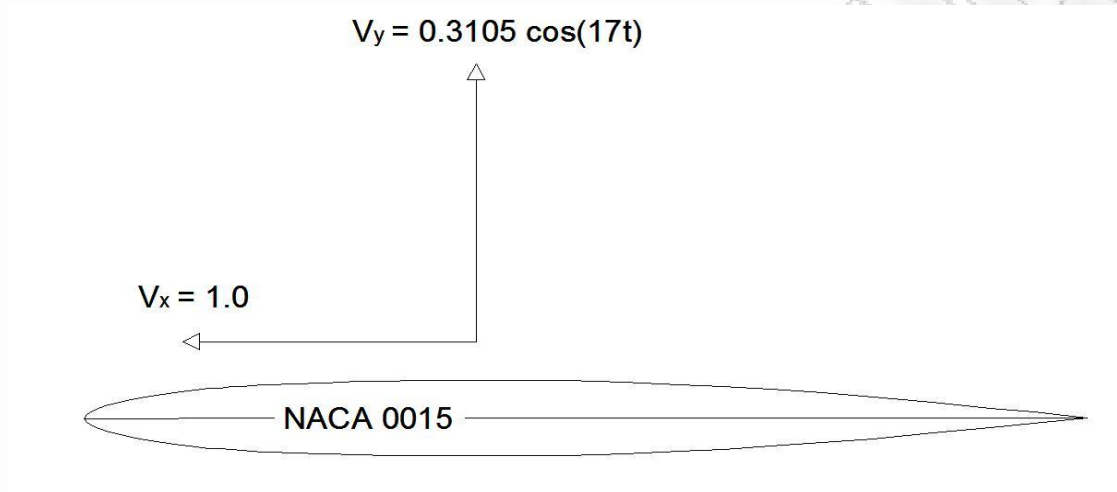
| | |
|------|---|
| V2Δ | V _{2Δ} - εξ.(3.2.17.β) Η οριζόντια ταχύτητα που επάγει μια σημειακή δίνη που προέρχεται από τη 2η αεροτομή σε οποιοδήποτε στοιχείο των δύο αεροτομών |
| V3A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία δημιουργείται από την 1η αεροτομή, σε σημείο εκτός της αεροτομής - εξ. (3.2.17.α) |
| V4A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία δημιουργείται από την 1η αεροτομή, σε σημείο εκτός της αεροτομής - εξ. (3.2.17.β) |
| V5A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία δημιουργείται από την 2η αεροτομή, σε σημείο εκτός της αεροτομής - εξ. (3.2.17.α) |
| V6A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία δημιουργείται από την 2η αεροτομή, σε σημείο εκτός της αεροτομής - εξ. (3.2.17.β) |
| V7A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 1η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή - εξ. (3.2.17.α) |
| V8A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 1η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή - εξ. (3.2.17.β) |
| V9A | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x που επάγει μια σημειακή δίνη, η οποία έχει δημιουργηθεί από την 2η αεροτομή, σε σημειακή δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή - εξ. (3.2.17.α) |
| VAVE | Το μέτρο της ταχύτητας V _{av} |
| VC | Αρχικά $-V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} + Z_{rev1} - \theta_p) - V_{y1} \cdot \cos(\theta_p)$ για τη 1η αεροτομή και $-V_{av} \cdot \sin(\omega_{av} + Z_{rev2} - \theta_p) - V_{y2} \cdot \cos(\theta_p)$ για τη 2η αεροτομή. Έπειτα $m_n/4\pi$ |
| VH1 | Η ταχύτητα τη αδιατάρακτης ροής κατά τον άξονα X |
| VINL | Το μέτρο της ταχύτητας V _{in} - εξ. (6.6.4) |
| VOUL | Το μέτρο της ταχύτητας V _{out} - εξ. (6.6.5) |
| VTY1 | Η συνισταμένη ταχύτητα κατά τον άξονα Y που <<βλέπει>> η 1η αεροτομή |
| VTY2 | Η συνισταμένη ταχύτητα κατά τον άξονα Y που <<βλέπει>> η 2η αεροτομή |
| VV1 | Η ταχύτητα τη αδιατάρακτης ροής κατά τον άξονα Y |

| | |
|-------|---|
| VVER | $\Gamma_{airf}/(2 \cdot SP)$, όπου Γ_{airf} είναι η συνολική κυκλοφορία γύρω από τις 2 αεροτομές (στο πρόγραμμα συμβολίζεται ως GAPP) |
| VVINL | Η κανονικοποιημένη V_{in} |
| VX | Η ταχύτητα κατά τον άξονα x σε σημείο εκτός αεροτομής |
| VXD1 | Η ταχύτητα του πεδίου ροής κατά τον άξονα x στο σημείο που βρίσκεται μια δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή |
| VXD2 | Η ταχύτητα του πεδίου ροής κατά τον άξονα x στο σημείο που βρίσκεται μια δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή |
| VY | Η ταχύτητα κατά τον άξονα y σε σημείο εκτός αεροτομής |
| VY1 | Η ταχύτητα της 1ης αεροτομής κατά τον άξονα Y |
| VY2 | Η ταχύτητα της 2ης αεροτομής κατά τον άξονα Y |
| VYD1 | Η ταχύτητα του πεδίου ροής κατά τον άξονα y στο σημείο που βρίσκεται μια δίνη δημιουργημένη από τη 1η αεροτομή |
| VYD2 | Η ταχύτητα του πεδίου ροής κατά τον άξονα y στο σημείο που βρίσκεται μια δίνη δημιουργημένη από τη 2η αεροτομή |
| X | Οι τετμημένες των σημείων των εκάστοτε θέσεων των αεροτομών |
| X1 | Οι τετμημένες των σημείων της αρχικής θέσης της κάθε αεροτομής |
| XD1 | Η τετμημένη μιας δίνης που δημιουργήθηκε από τη 1η αεροτομή σε δεδομένη χρονική στιγμή |
| XD2 | Η τετμημένη μιας δίνης που δημιουργήθηκε από τη 2η αεροτομή σε δεδομένη χρονική στιγμή |
| XSTAG | Πίνακας που περιέχει τις τετμημένες των σημείων ανακοπής για τις 2 αεροτομές |
| XTRN | Απόσταση της αεροτομής κατά τον x-άξονα από το κέντρο των αξόνων |
| XX | Οι τεταγμένες των σημείων εκτός αεροτομής |
| Y | Οι τεταγμένες των σημείων των εκάστοτε θέσεων των αεροτομών |
| Y1 | Οι τεταγμένες των σημείων της αρχικής θέσης της κάθε αεροτομής |
| YD1 | Η τεταγμένη μιας δίνης που δημιουργήθηκε από τη 1η αεροτομή σε δεδομένη χρονική στιγμή |
| YD2 | Η τεταγμένη μιας δίνης που δημιουργήθηκε από τη 2η αεροτομή σε δεδομένη χρονική στιγμή |

| | |
|-------|--|
| YSTAG | Πίνακας που περιέχει τις τεταγμένες των σημείων ανακοπής για τις 2 αεροτομές |
| YTRN | Απόσταση της αεροτομής κατά τον y-άξονα από το κέντρο των αξόνων |
| YY | Οι τετμημένες των σημείων εκτός αεροτομής |
| Z1 | Η απόλυτη γωνία πρόσπτωσης της ροής στην 1η αεροτομή |
| Z2 | Η απόλυτη γωνία πρόσπτωσης της ροής στην 2η αεροτομή |
| Zrev1 | Η σχετική γωνία πρόσπτωσης Z_{rev1} στην 1η αεροτομή |
| Zrev2 | Η σχετική γωνία πρόσπτωσης Z_{rev2} στην 2η αεροτομή |

Παράρτημα A.3: Πρόγραμμα CASCAD (run case), Περίπτωση 1

Η Περίπτωση 1 από τα run cases αφορά μια αεροτομή NACA 0015 που ταλαντώνεται με $V_x = 1.0$ και $V_y = 0.3105 \cdot \cos(17 \cdot t)$ όπως βλέπουμε παρακάτω:



Εικόνα 1: NACA 0015 σε ταλάντωση

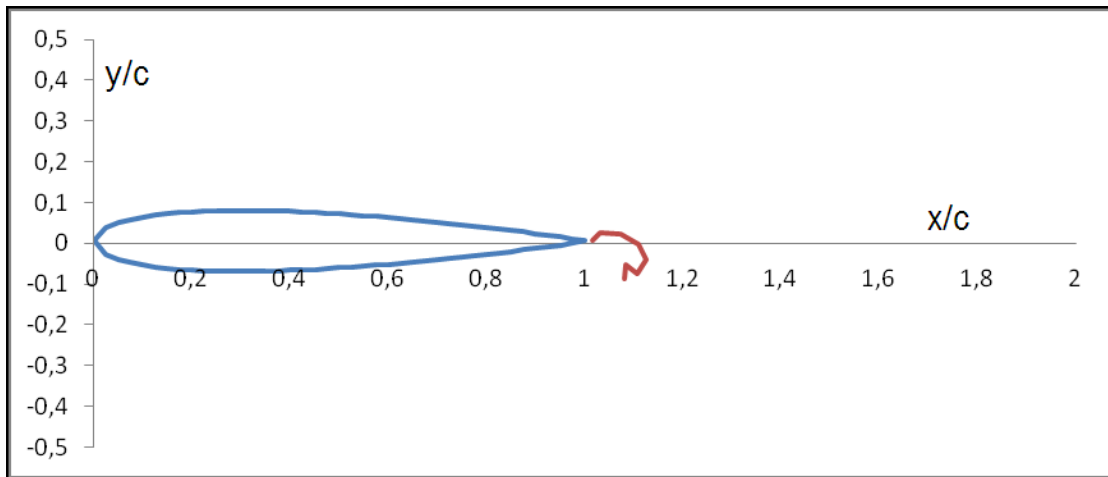
Το αρχείο εισόδου για τη Περίπτωση 1 είναι το CIRDA31.dat και τα περιεχόμενα του δίνονται παρακάτω:

| | | |
|--------------------|--------------------|-----|
| 0.0 | 299.0 | 1.0 |
| 81 | 41 | 4 |
| 0.00000000000 | 0.00000000000 | |
| 2.500000037253E-02 | 3.268399979528E-02 | |
| 5.000000074506E-02 | 4.443357305429E-02 | |
| 7.500000111759E-02 | 5.249879578736E-02 | |
| 0.100000001490 | 5.853463296266E-02 | |
| 0.125000001863 | 6.319256150958E-02 | |
| 0.150000002235 | 6.681450582242E-02 | |
| 0.175000002608 | 6.960968223219E-02 | |
| 0.200000002980 | 7.171929072225E-02 | |
| 0.225000003353 | 7.324538361629E-02 | |
| 0.250000003725 | 7.426553089059E-02 | |
| 0.275000004098 | 7.484099035458E-02 | |
| 0.300000004470 | 7.502158669631E-02 | |
| 0.325000004843 | 7.484878784927E-02 | |
| 0.350000005215 | 7.435773149922E-02 | |
| 0.375000005588 | 7.357860901285E-02 | |
| 0.400000005960 | 7.253763955171E-02 | |
| 0.425000006333 | 7.125777360346E-02 | |
| 0.450000006706 | 6.975921248875E-02 | |
| 0.475000007078 | 6.805979946543E-02 | |
| 0.500000007451 | 6.617531921147E-02 | |
| 0.525000007823 | 6.411973062959E-02 | |
| 0.550000008196 | 6.190535026726E-02 | |
| 0.575000008568 | 5.954299858284E-02 | |
| 0.600000008941 | 5.704211786205E-02 | |
| 0.625000009313 | 5.441086822451E-02 | |
| 0.650000009686 | 5.165620650000E-02 | |
| 0.675000010058 | 4.878395156810E-02 | |
| 0.700000010431 | 4.579883889696E-02 | |
| 0.725000010803 | 4.270456638622E-02 | |

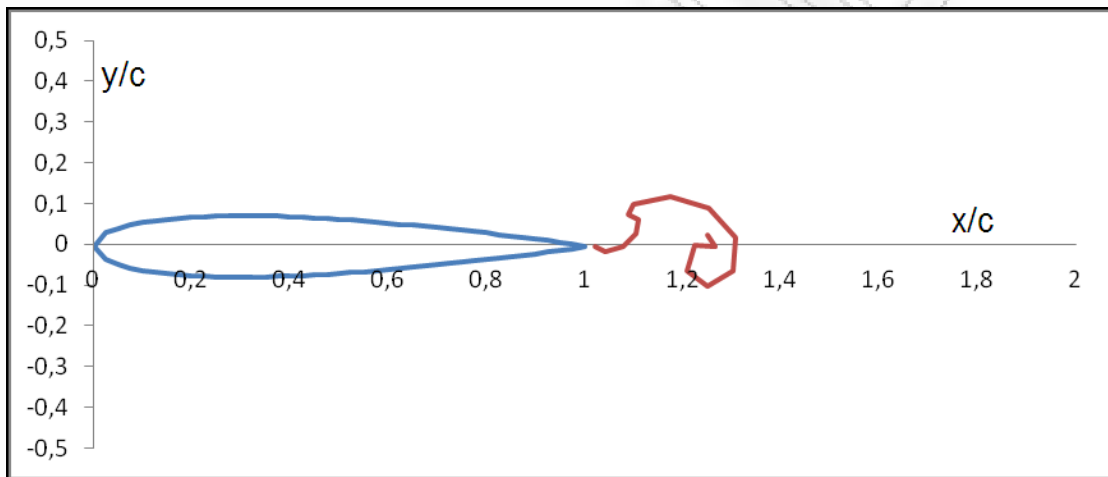
| | |
|----------------|---------------------|
| 0.750000011176 | 3.950383315111E-02 |
| 0.775000011548 | 3.619837253218E-02 |
| 0.800000011921 | 3.278898034815E-02 |
| 0.825000012293 | 2.927553920357E-02 |
| 0.850000012666 | 2.565703950463E-02 |
| 0.875000013039 | 2.193159771193E-02 |
| 0.900000013411 | 1.809647226179E-02 |
| 0.925000013784 | 1.414807751002E-02 |
| 0.950000014156 | 1.008199599025E-02 |
| 0.975000014529 | 5.892989229491E-03 |
| 1.000000000000 | 0.000000000000 |
| 0.975000014529 | -5.892989229491E-03 |
| 0.950000014156 | -1.008199599025E-02 |
| 0.925000013784 | -1.414807751002E-02 |
| 0.900000013411 | -1.809647226179E-02 |
| 0.875000013039 | -2.193159771193E-02 |
| 0.850000012666 | -2.565703950463E-02 |
| 0.825000012293 | -2.927553920357E-02 |
| 0.800000011921 | -3.278898034815E-02 |
| 0.775000011548 | -3.619837253218E-02 |
| 0.750000011176 | -3.950383315111E-02 |
| 0.725000010803 | -4.270456638622E-02 |
| 0.700000010431 | -4.579883889696E-02 |
| 0.675000010058 | -4.878395156810E-02 |
| 0.650000009686 | -5.165620650000E-02 |
| 0.625000009313 | -5.441086822451E-02 |
| 0.600000008941 | -5.704211786205E-02 |
| 0.575000008568 | -5.954299858284E-02 |
| 0.550000008196 | -6.190535026726E-02 |
| 0.525000007823 | -6.411973062959E-02 |
| 0.500000007451 | -6.617531921147E-02 |
| 0.475000007078 | -6.805979946543E-02 |
| 0.450000006706 | -6.975921248875E-02 |
| 0.425000006333 | -7.125777360346E-02 |

| | |
|--------------------|---------------------|
| 0.400000005960 | -7.253763955171E-02 |
| 0.375000005588 | -7.357860901285E-02 |
| 0.350000005215 | -7.435773149922E-02 |
| 0.325000004843 | -7.484878784927E-02 |
| 0.300000004470 | -7.502158669631E-02 |
| 0.275000004098 | -7.484099035458E-02 |
| 0.250000003725 | -7.426553089059E-02 |
| 0.225000003353 | -7.324538361629E-02 |
| 0.200000002980 | -7.171929072225E-02 |
| 0.175000002608 | -6.960968223219E-02 |
| 0.150000002235 | -6.681450582242E-02 |
| 0.125000001863 | -6.319256150958E-02 |
| 0.100000001490 | -5.853463296266E-02 |
| 7.500000111759E-02 | -5.249879578736E-02 |
| 5.000000074506E-02 | -4.443357305429E-02 |
| 2.500000037253E-02 | -3.268399979528E-02 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| 0.212000 | -0.920000 |
| 0.500000 | -0.400000 |
| 0.692000 | 0.280000 |
| 0.452000 | 1.000000 |
| 0.0 | 1.0 |
| 40 | 0.0235618 |

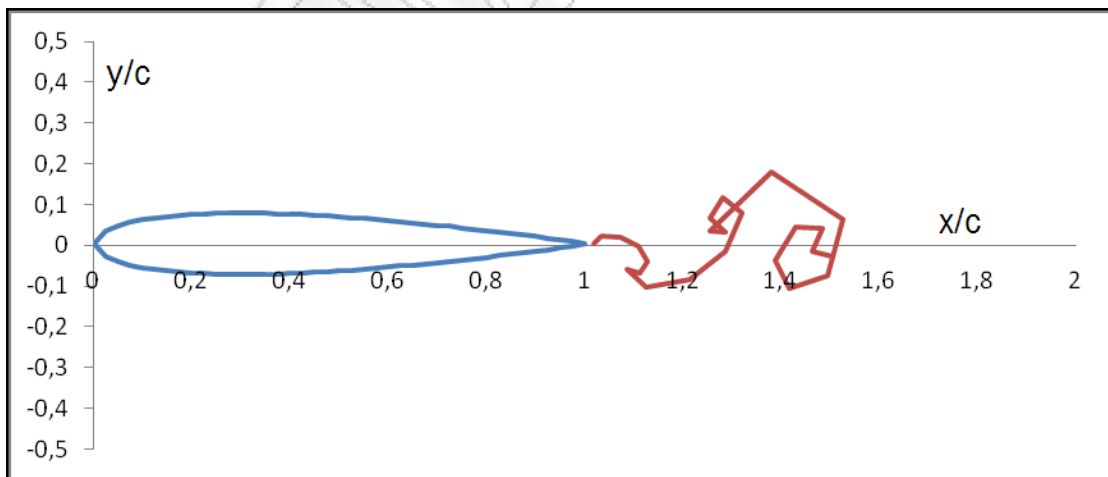
Παρακάτω φαίνεται ο ομόρους των δινών που προέκυψε μετά την εκτέλεση του προγράμματος για τη Περίπτωση 1 σε πέντε διαφορετικές χρονικές στιγμές ($\Delta t = 0.024$).



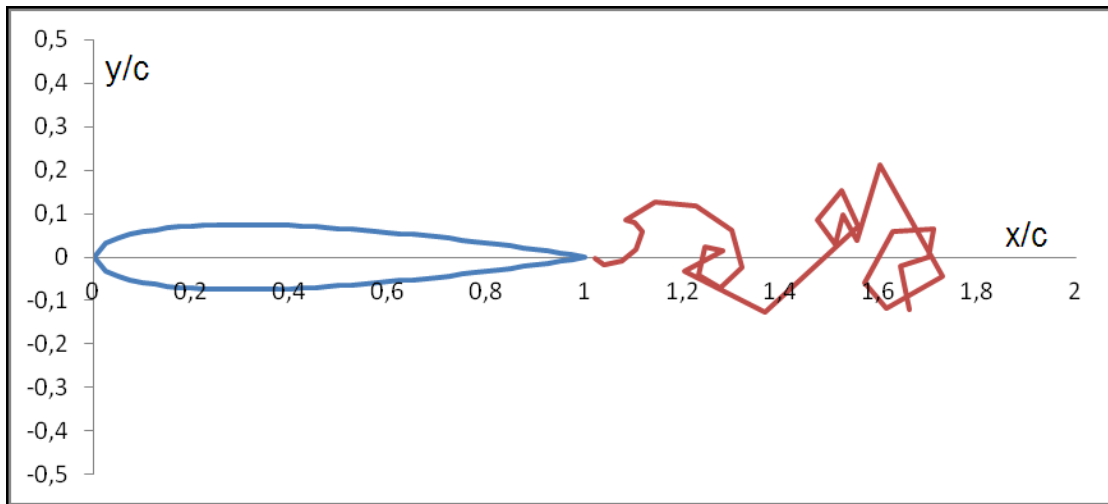
Εικόνα 2α: $t=1,88$



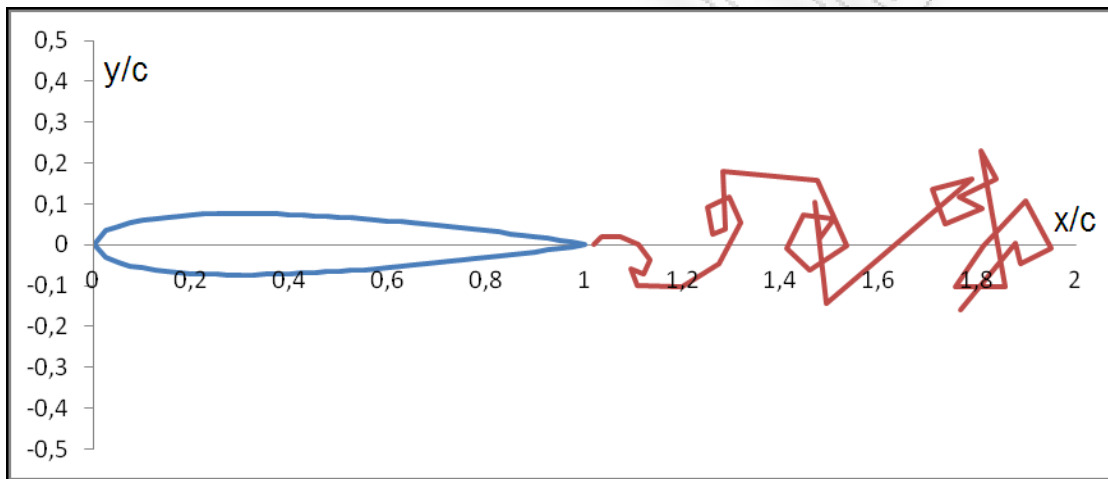
Εικόνα 2β: $t=3,77$



Εικόνα 2γ: $t=5,65$



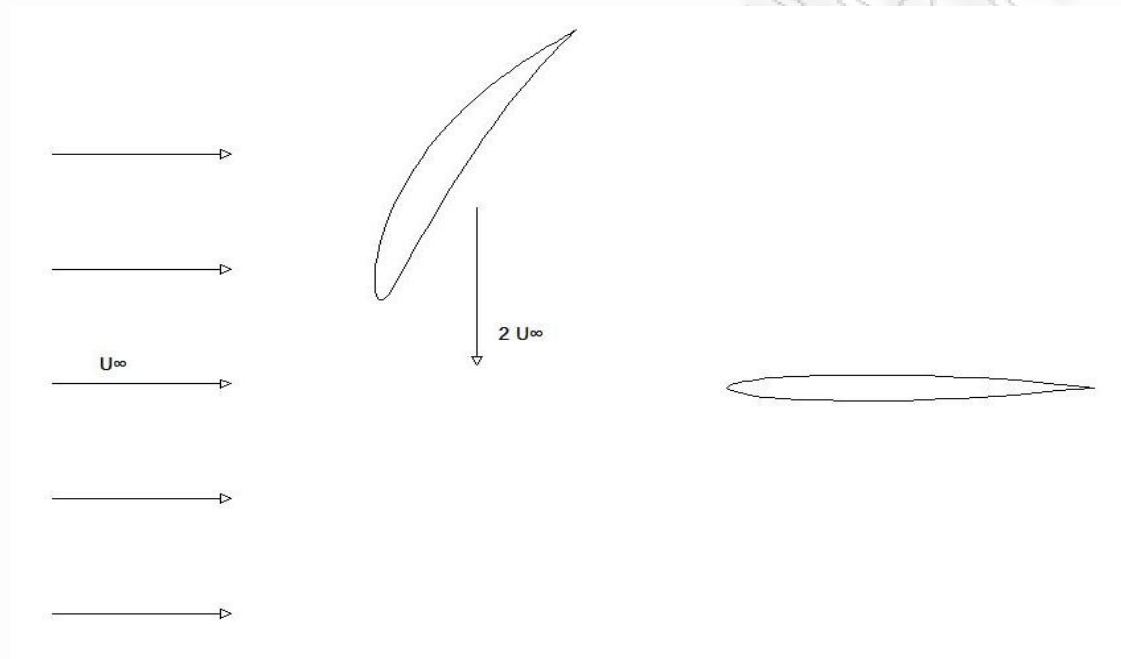
Εικόνα 2δ: $t=7,54$



Εικόνα 2ε: $t=9,42$

Παράρτημα A.4: Πρόγραμμα CAS2 (run case), Περίπτωση 2

Η Περίπτωση 2 από τα run cases αφορά μια βαθμίδα συμπιεστή, όπου ο ρότορας είναι μια αεροτομή NACA 8512 και ο στάτορας μια συμμετρική αεροτομή NACA 0008. Ο ρότορας έχει κλίση $-57,23^\circ$ και κινείται προς τα κάτω με ταχύτητα $2U_\infty$ ενώ ο στάτορας 0° . Η αδιατάρακτη ροή είναι $U_\infty=1.0$ με απόλυτη γωνία 0° , ενώ η σχετική γωνία πρόσπτωσης στο ρότορα προκύπτει ίση με 6.2° . Επίσης το διάκενο μεταξύ του T.E του ρότορα και του L.E. του στάτορα είναι $0.412c$.



Εικόνα 3: Βαθμίδα συμπιεστή: NACA 8512(ρότορας) – NACA 0008(στάτορας)

Το αρχείο εισόδου για τη Περίπτωση 2 είναι το input.txt και τα περιεχόμενα του δίνονται παρακάτω:

| | |
|--------------------|-------------------------|
| 299.0 | 4 |
| 81 | 41 1.0 -57.23 1.047 2.8 |
| 0.00000000000 | 0.00000000000 |
| 1.739490425377E-02 | 3.281676406625E-02 |
| 4.016236640147E-02 | 4.935845327678E-02 |
| 6.397676043412E-02 | 6.272662097999E-02 |
| 8.838661844747E-02 | 7.416477843105E-02 |
| 0.113202055177 | 8.415811219896E-02 |
| 0.138316375264 | 9.295905006450E-02 |
| 0.163659669206 | 0.100720834829 |
| 0.189181522568 | 0.107546253396 |
| 0.214843163765 | 0.113509317176 |
| 0.240613405897 | 0.118666237869 |
| 0.266466345885 | 0.123061516932 |
| 0.292379964562 | 0.126731563518 |
| 0.318335225422 | 0.129706961064 |
| 0.344315466394 | 0.132013948316 |
| 0.370305972167 | 0.133675420463 |
| 0.396293662184 | 0.134711624913 |
| 0.422266855067 | 0.135140656016 |
| 0.448215084902 | 0.134978813533 |
| 0.474128953453 | 0.134240866540 |
| 0.500000007703 | 0.132940250294 |
| 0.525820635529 | 0.131089214807 |
| 0.551583974505 | 0.128698938126 |
| 0.577283830332 | 0.125779613557 |
| 0.602914602401 | 0.122340517481 |
| 0.628471214703 | 0.118390062682 |
| 0.653949050817 | 0.113935840826 |

| | |
|----------------|--------------------|
| 0.679343892079 | 0.108984656842 |
| 0.704651858267 | 0.103542557301 |
| 0.729869350393 | 9.761485441519E-02 |
| 0.754992995291 | 9.120614689170E-02 |
| 0.780019591818 | 8.432033860327E-02 |
| 0.804946058585 | 7.696065582863E-02 |
| 0.829769383149 | 6.912966362888E-02 |
| 0.854486572691 | 6.082928179876E-02 |
| 0.879094606201 | 5.206080071941E-02 |
| 0.903590388217 | 4.282489735069E-02 |
| 0.927970704184 | 3.312165152941E-02 |
| 0.952232177501 | 2.295056268123E-02 |
| 0.976371228306 | 1.231056700641E-02 |
| 1.000000000000 | 0.000000000000 |
| 0.973628800752 | 3.289423811493E-03 |
| 0.947767850812 | 7.449428485363E-03 |
| 0.922029323383 | 1.127833997990E-02 |
| 0.896409638605 | 1.477509449539E-02 |
| 0.870905419876 | 1.793919145748E-02 |
| 0.845513452641 | 2.077071070297E-02 |
| 0.820230641438 | 2.327032919174E-02 |
| 0.795053965257 | 2.543933730491E-02 |
| 0.769980431278 | 2.727965483724E-02 |
| 0.745007027061 | 2.879384684981E-02 |
| 0.720130671213 | 2.998513962136E-02 |
| 0.695348162595 | 3.085743702503E-02 |
| 0.670656128038 | 3.141533776691E-02 |
| 0.646050968554 | 3.166415405961E-02 |
| 0.621528803924 | 3.160993247528E-02 |
| 0.597085415480 | 3.125947794153E-02 |
| 0.572716186804 | 3.062038212422E-02 |

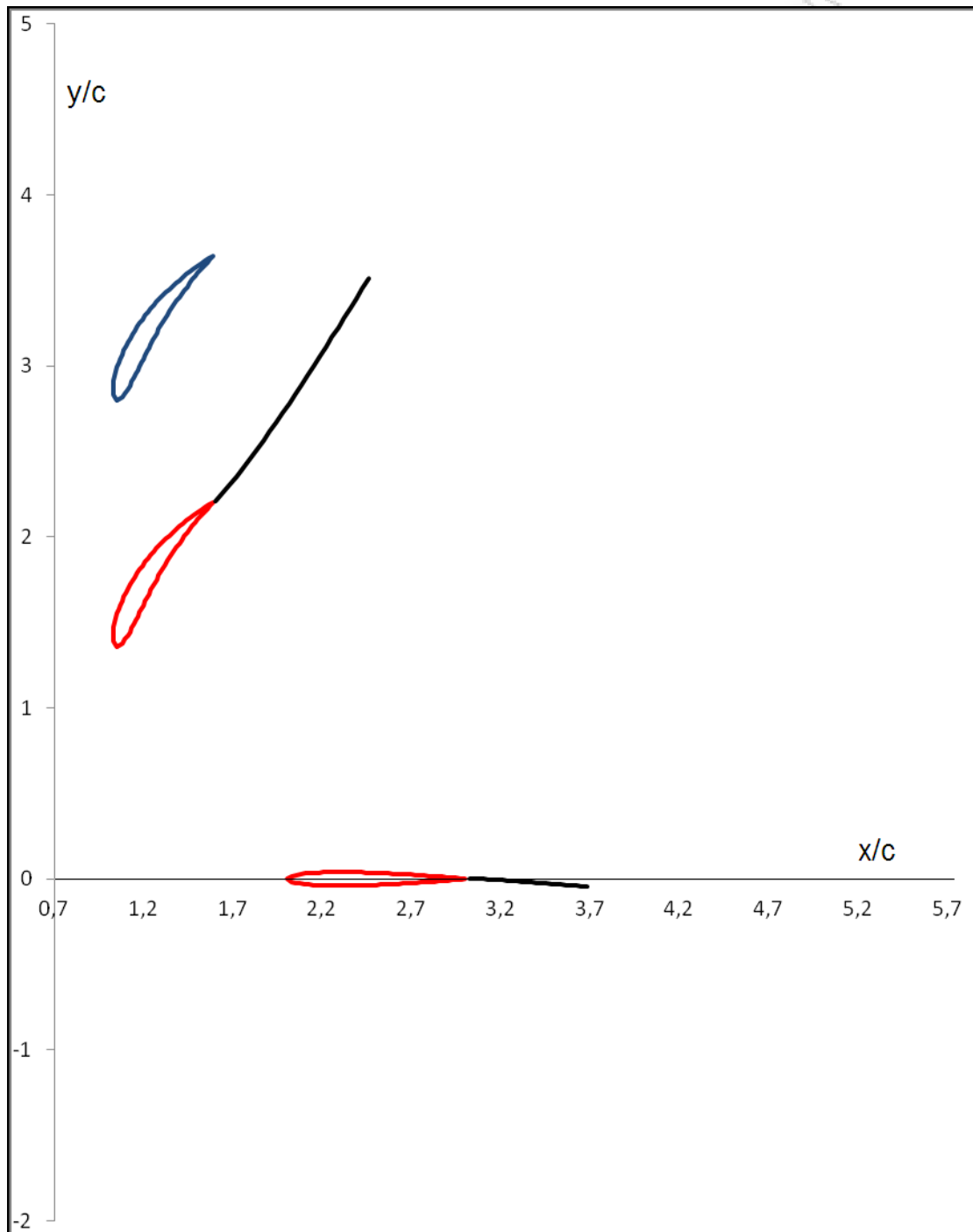
| | | | | | |
|--------------------|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| 0.548416041886 | 2.970105780848E-02 | | | | |
| 0.524179380117 | 2.851078137580E-02 | | | | |
| 0.500000007198 | 2.705974612965E-02 | | | | |
| 0.475871060703 | 2.535913011876E-02 | | | | |
| 0.451784928509 | 2.342118335539E-02 | | | | |
| 0.427733157599 | 2.125934109650E-02 | | | | |
| 0.403706349737 | 1.888837241624E-02 | | | | |
| 0.379694039009 | 1.632457707873E-02 | | | | |
| 0.355684544037 | 1.358604943124E-02 | | | | |
| 0.331664784264 | 1.069303688279E-02 | | | | |
| 0.307620044379 | 7.668434622597E-03 | | | | |
| 0.283533662310 | 4.538481395650E-03 | | | | |
| 0.259386601554 | 1.333760641084E-03 | | | | |
| 0.235156842940 | -1.909318489955E-03 | | | | |
| 0.210818483393 | -5.146254540593E-03 | | | | |
| 0.186340336010 | -8.320835809815E-03 | | | | |
| 0.161683629206 | -1.135905088705E-02 | | | | |
| 0.136797948549 | -1.415811286951E-02 | | | | |
| 0.111613384533 | -1.656477895558E-02 | | | | |
| 8.602324180105E-02 | -1.832662136444E-02 | | | | |
| 5.983763508864E-02 | -1.895845352712E-02 | | | | |
| 3.260509649129E-02 | -1.721676418844E-02 | | | | |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | | | | |
| 81 | 41 | 1.0 | 0.0 | 2.0 | 0.0 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | | | | |
| 2.500000037253E-02 | 1.743146547519E-02 | | | | |
| 5.000000074506E-02 | 2.369790415760E-02 | | | | |
| 7.500000111759E-02 | 2.799935601483E-02 | | | | |
| 0.100000001490 | 3.121846897512E-02 | | | | |
| 0.125000001863 | 3.370269737924E-02 | | | | |
| 0.150000002235 | 3.563440089282E-02 | | | | |

| | |
|----------------|--------------------|
| 0.175000002608 | 3.712516155213E-02 |
| 0.200000002980 | 3.825028601031E-02 |
| 0.225000003353 | 3.906420216993E-02 |
| 0.250000003725 | 3.960828068244E-02 |
| 0.275000004098 | 3.991519237751E-02 |
| 0.300000004470 | 4.001151042046E-02 |
| 0.325000004843 | 3.991935104109E-02 |
| 0.350000005215 | 3.965745433733E-02 |
| 0.375000005588 | 3.924192237039E-02 |
| 0.400000005960 | 3.868673869226E-02 |
| 0.425000006333 | 3.800414356223E-02 |
| 0.450000006706 | 3.720491101735E-02 |
| 0.475000007078 | 3.629855746118E-02 |
| 0.500000007451 | 3.529350138814E-02 |
| 0.525000007823 | 3.419718754587E-02 |
| 0.550000008196 | 3.301618475929E-02 |
| 0.575000008568 | 3.175626393916E-02 |
| 0.600000008941 | 3.042246097088E-02 |
| 0.625000009313 | 2.901912791799E-02 |
| 0.650000009686 | 2.754997508947E-02 |
| 0.675000010058 | 2.601810588757E-02 |
| 0.700000010431 | 2.442604589514E-02 |
| 0.725000010803 | 2.277576732521E-02 |
| 0.750000011176 | 2.106870970581E-02 |
| 0.775000011548 | 1.930579748517E-02 |
| 0.800000011921 | 1.748745509991E-02 |
| 0.825000012293 | 1.561361993915E-02 |
| 0.850000012666 | 1.368375355287E-02 |
| 0.875000013039 | 1.169685138679E-02 |
| 0.900000013411 | 9.651451273714E-03 |
| 0.925000013784 | 7.545640870181E-03 |

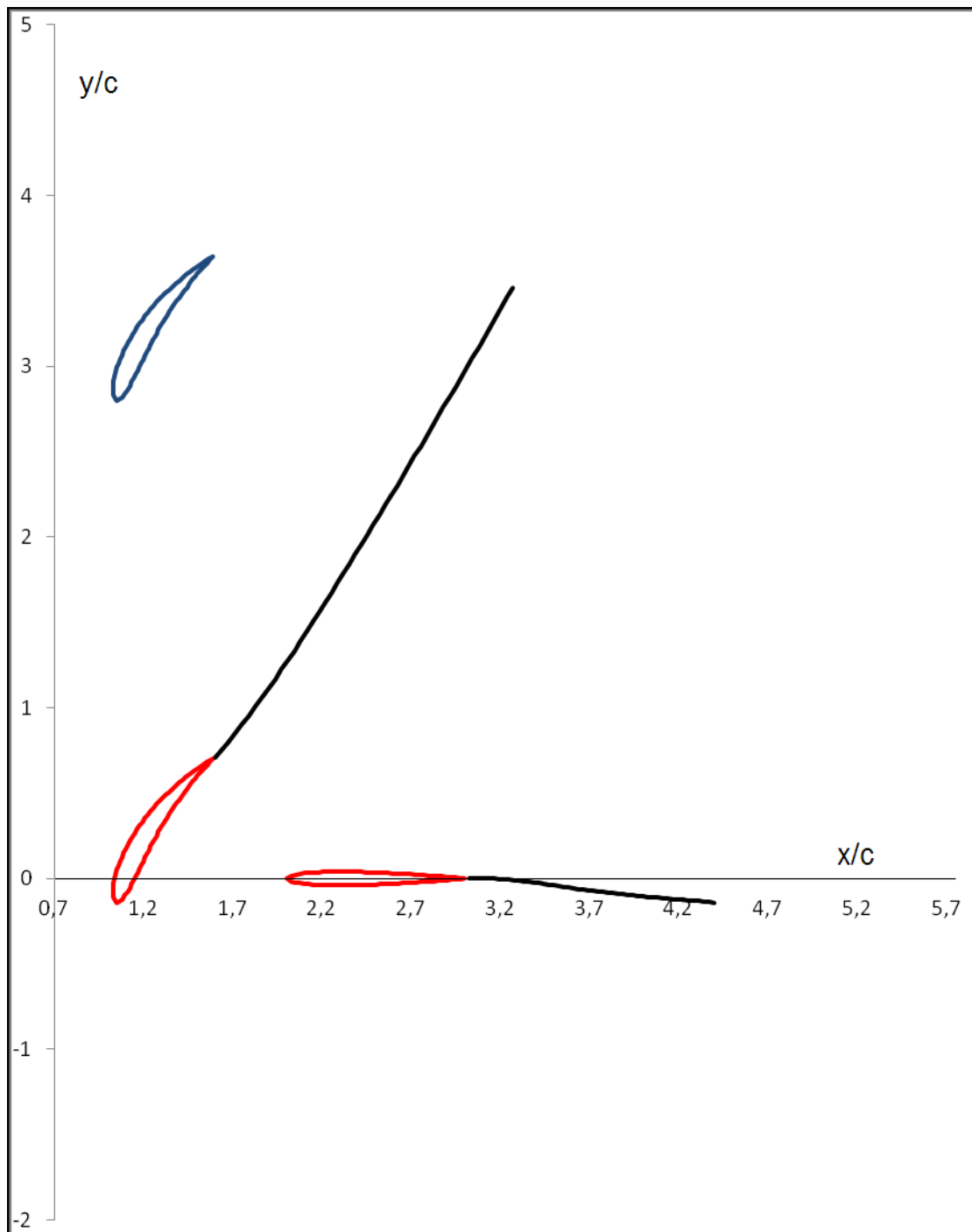
| | |
|----------------|---------------------|
| 0.950000014156 | 5.377064194282E-03 |
| 0.975000014529 | 3.142927393923E-03 |
| 1.000000000000 | 0.000000000000 |
| 0.975000014529 | -3.142927393923E-03 |
| 0.950000014156 | -5.377064194282E-03 |
| 0.925000013784 | -7.545640870181E-03 |
| 0.900000013411 | -9.651451273714E-03 |
| 0.875000013039 | -1.169685138679E-02 |
| 0.850000012666 | -1.368375355287E-02 |
| 0.825000012293 | -1.561361993915E-02 |
| 0.800000011921 | -1.748745509991E-02 |
| 0.775000011548 | -1.930579748517E-02 |
| 0.750000011176 | -2.106870970581E-02 |
| 0.725000010803 | -2.277576732521E-02 |
| 0.700000010431 | -2.442604589514E-02 |
| 0.675000010058 | -2.601810588757E-02 |
| 0.650000009686 | -2.754997508947E-02 |
| 0.625000009313 | -2.901912791799E-02 |
| 0.600000008941 | -3.042246097088E-02 |
| 0.575000008568 | -3.175626393916E-02 |
| 0.550000008196 | -3.301618475929E-02 |
| 0.525000007823 | -3.419718754587E-02 |
| 0.500000007451 | -3.529350138814E-02 |
| 0.475000007078 | -3.629855746118E-02 |
| 0.450000006706 | -3.720491101735E-02 |
| 0.425000006333 | -3.800414356223E-02 |
| 0.400000005960 | -3.868673869226E-02 |
| 0.375000005588 | -3.924192237039E-02 |
| 0.350000005215 | -3.965745433733E-02 |
| 0.325000004843 | -3.991935104109E-02 |
| 0.300000004470 | -4.001151042046E-02 |

| | |
|--------------------|---------------------|
| 0.275000004098 | -3.991519237751E-02 |
| 0.250000003725 | -3.960828068244E-02 |
| 0.225000003353 | -3.906420216993E-02 |
| 0.200000002980 | -3.825028601031E-02 |
| 0.175000002608 | -3.712516155213E-02 |
| 0.150000002235 | -3.563440089282E-02 |
| 0.125000001863 | -3.370269737924E-02 |
| 0.100000001490 | -3.121846897512E-02 |
| 7.500000111759E-02 | -2.799935601483E-02 |
| 5.000000074506E-02 | -2.369790415760E-02 |
| 2.500000037253E-02 | -1.743146547519E-02 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| 2.04000 | 0.00000 |
| 1.96000 | 0.120000 |
| 2.20000 | 0.240000 |
| 1.92000 | 0.400000 |
| 0.0 | 1.0 |
| 77 | 0.03 |

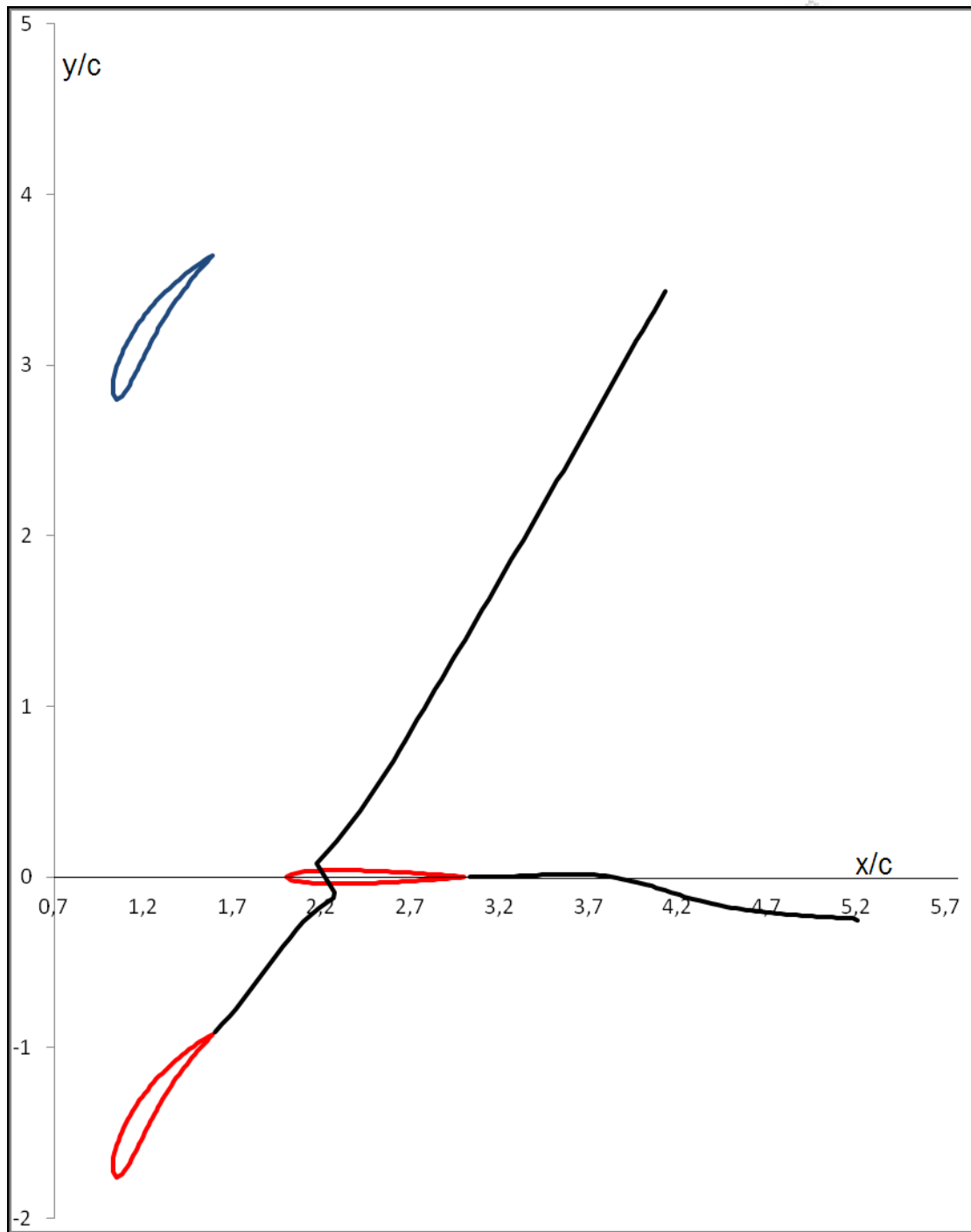
Παρακάτω βλέπουμε τον ομόρου των δινών που προέκυψε μετά την εκτέλεση του προγράμματος για 3 χρονικές στιγμές ($\Delta t = 0,03$). Με μπλε χρώμα είναι η αρχική θέση του ρότορα και με κόκκινο η τελική.



Εικόνα 4α: $t=0,75$



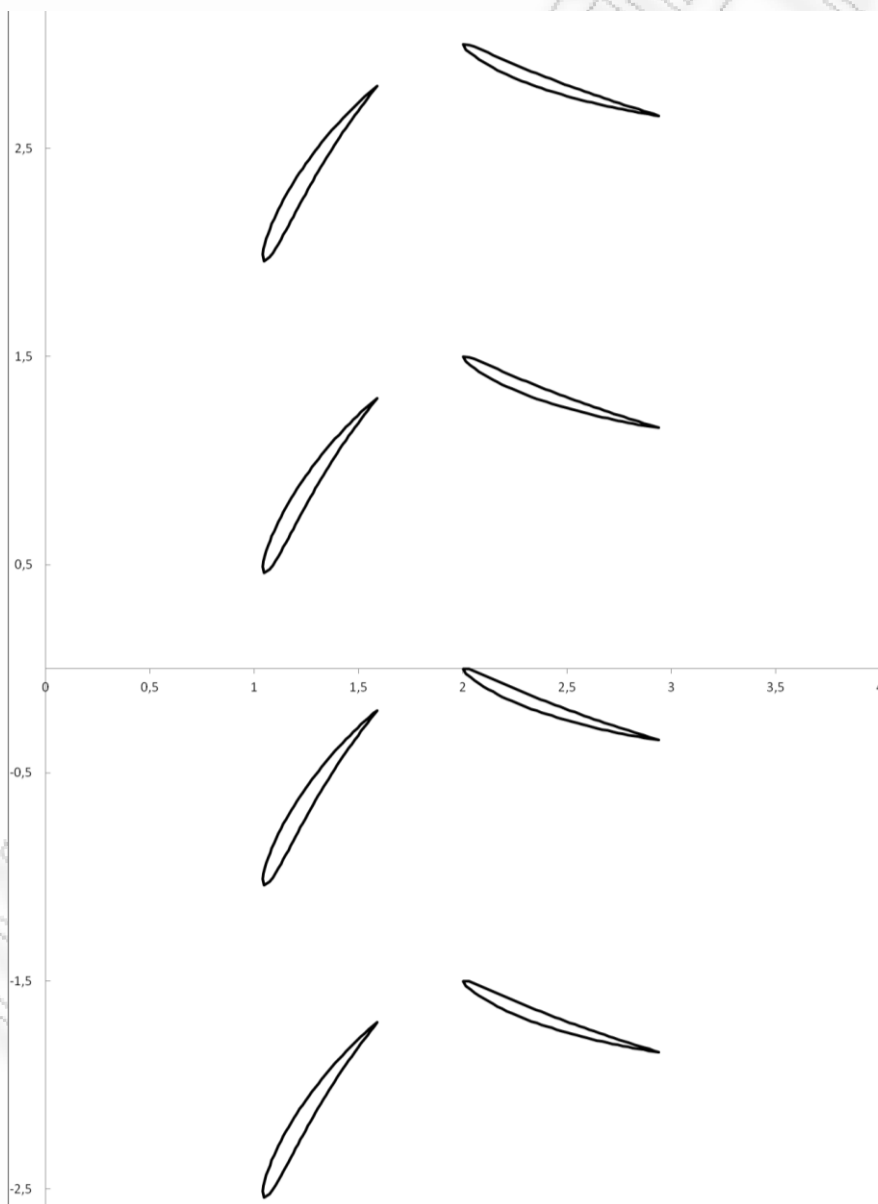
Εικόνα 4β: $t=1,50$



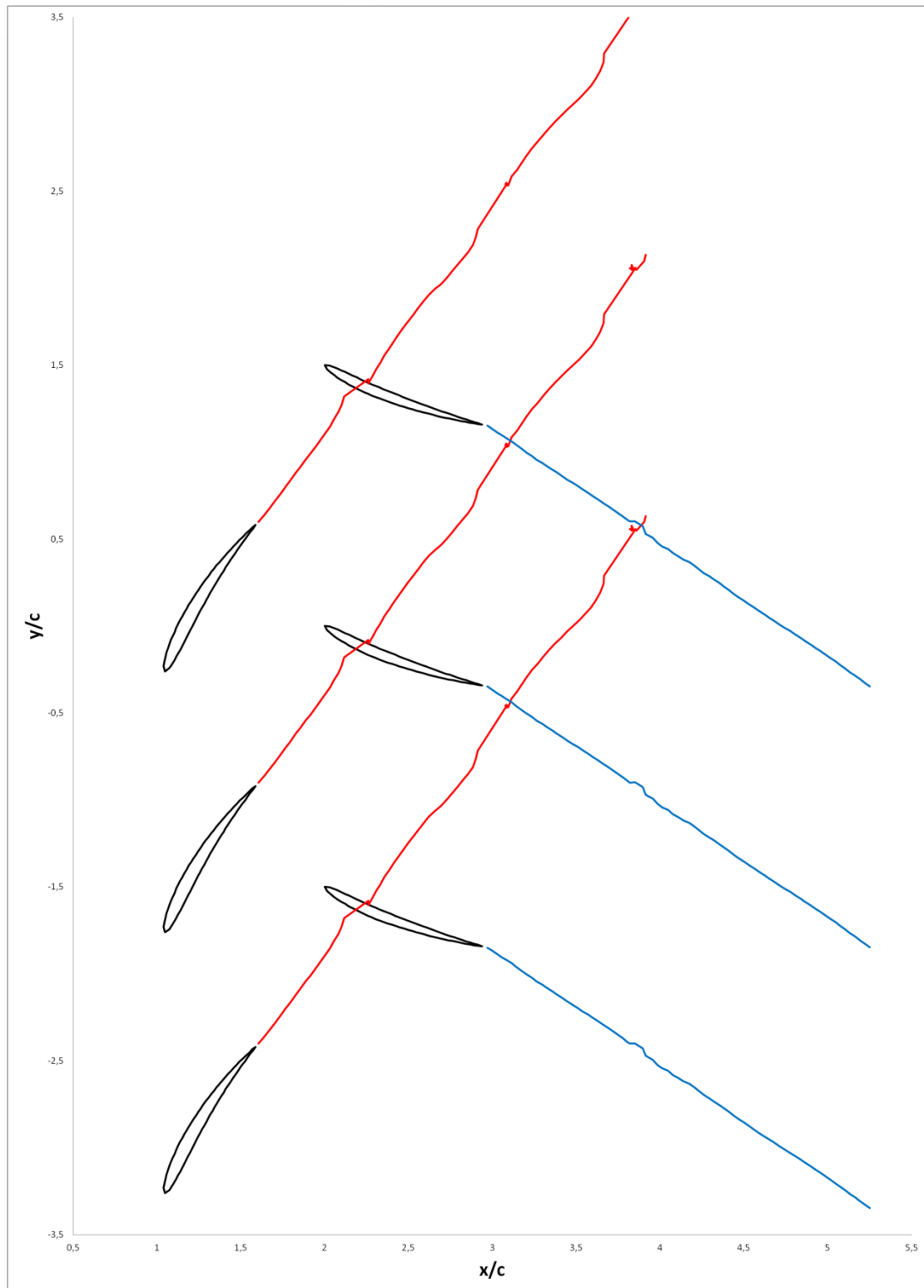
Εικόνα 4γ: $t=2,31$

Παράρτημα A.7: Περιπτώσεις (run cases) με ατέρμονες πτερυγώσεις

Στο παράρτημα αυτό θα παραθέσουμε ορισμένες περιπτώσεις (run cases) όπου έχουμε δυο διαδοχικές ατέρμονες πτερυγώσεις με διάκενο της τάξης 1.5c και 0.75c. Στη θέση του ρότορα έχουμε μια αεροτομή NACA 5508 υπό γωνία 57.23° που κινείται με ταχύτητα $2U_\infty$ (όπου U_∞ η αδιατάρακτη ταχύτητα αναφοράς) κατά την αρνητική έννοια του άξονα y. Στη θέση του στάτορα έχουμε μια αεροτομή NACA 4406 (ανεστραμμένη) υπό γωνία -20° . Κάθε αεροτομή αποτελείται από 40 ευθύγραμμα τμήματα. Το χρονικό βήμα είναι $\Delta t = 0.03$ και τα συνολικά βήματα είναι 77. Στην Εικόνα 5α βλέπουμε την διάταξη των πτερυγώσεων και στην Εικόνα 5β βλέπουμε τον ομόρου των δινών μετά την εκτέλεση του κώδικα. Ο κώδικας εκτελέστηκε σε 76 sec. Παρατίθεται και η περίπτωση για ταχύτητα ρότορα $3U_\infty$ στην Εικόνα 5γ.



Εικόνα 5α: Βαθμίδα συμπίεστή NACA 5508 – NACA 4406



Εικόνα 5β: Ομόρουοι δινών NACA 5508(κόκκινο) – NACA 4406(μπλε)

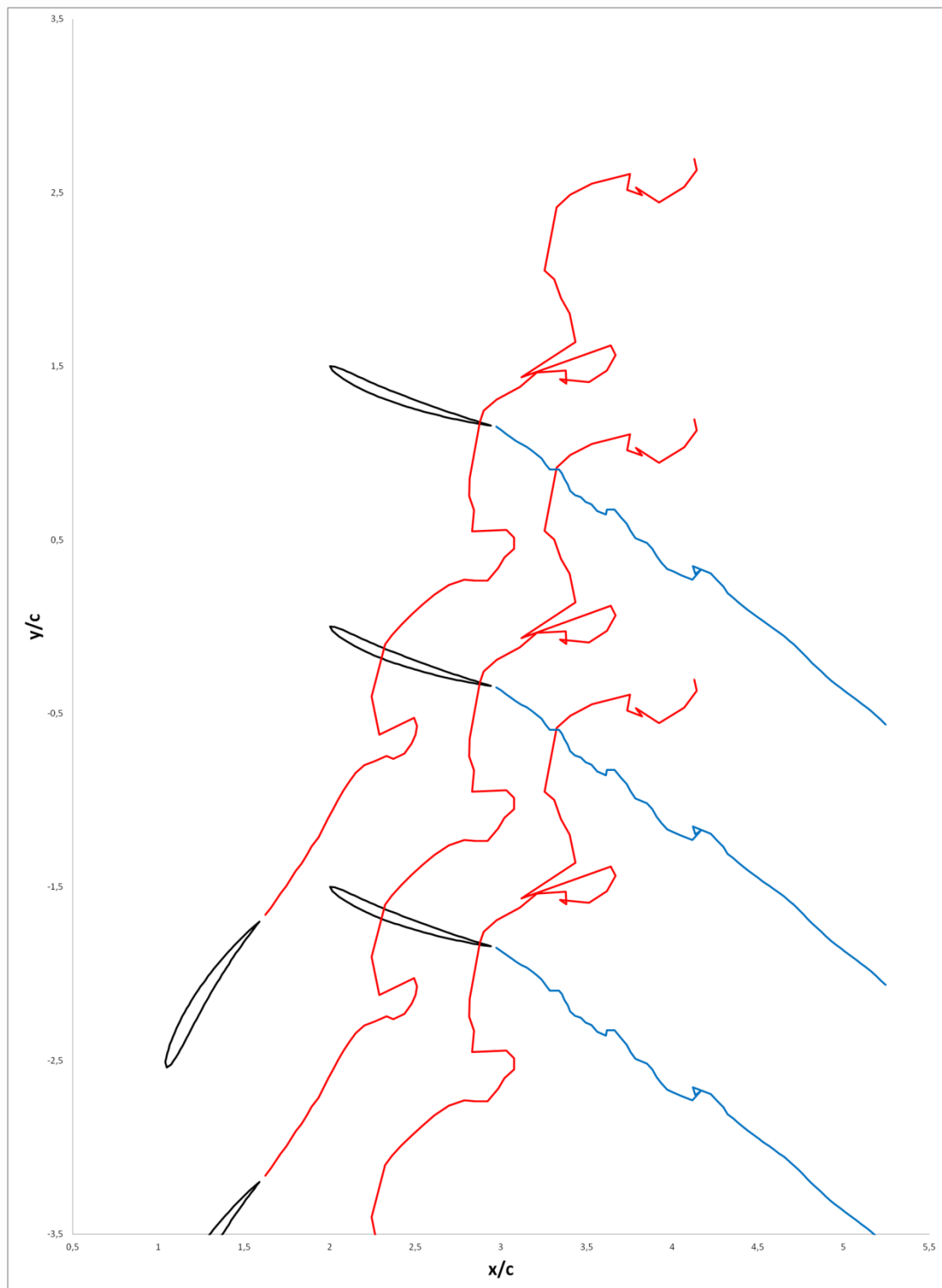
ταχύτητα ρότορα $2U_\infty$

Στην Εικόνα 5β βλέπουμε τον ομόρουο των δινών που προκάλεσε η κίνηση του ρότορα με ταχύτητα $2U_\infty$. Είναι εμφανές ότι το πεδίο που προκύπτει είναι αρκετά ομαλό με τις δίνες που δημιουργούνται να είναι πολύ μικρής έντασης. Είναι επίσης

χαρακτηριστική η αλληλεπίδραση μεταξύ του ομόρου των δινών του ρότορα και του στάτορα όπου καθώς ο στάτορας εισέρχεται στον ομόρου σχηματίζεται ένα πέταλο και οι δίνες που δημιουργούνται τοπικά είναι, σχετικά, αρκετά δυνατότερες από τις υπόλοιπες. Μπορούμε επίσης να επισημάνουμε και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον ομόρου του ρότορα και στον ομόρου του στάτορα. Παρατηρούμε ότι η ισχυρή δίνη που σχηματίστηκε στο πάνω μέρος του πέταλου προκαλεί μια «αναστάτωση» όταν έρχεται σε επαφή με τον ομόρου του στάτορα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Στην Εικόνα 5γ βλέπουμε τον ομόρου των δινών για ταχύτητα ρότορα $3U_\infty$.



Εικόνα 5γ: Ομόρους δινών NACA 5508(κόκκινο) – NACA 4406(μπλε)

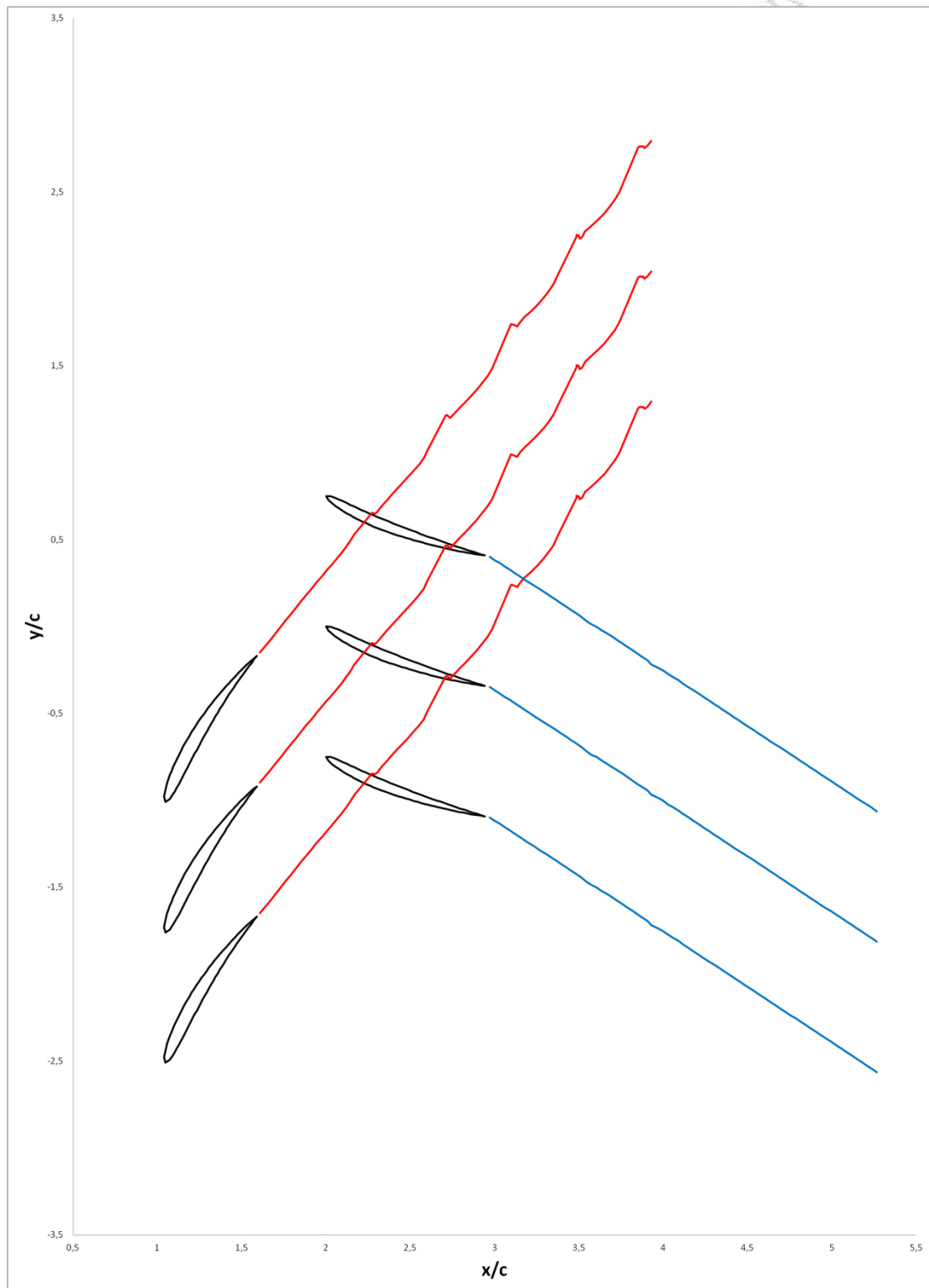
ταχύτητα ρότορα $3U_\infty$

Σε αυτή τη περίπτωση βλέπουμε ότι οι δίνες που δημιουργούνται είναι σημαντικά ισχυρότερες από τη περίπτωση της Εικόνας 5β. Είναι εμφανές ακόμη ότι

το φαινόμενο της δημιουργίας πέταλου γύρω από τον στάτορα είναι πιο έντονο με τις δίνες που δημιουργούνται εκατέρωθεν του στάτορα να είναι πολύ ισχυρότερες. Οι δίνες του ομόρου του στάτορα είναι για μια ακόμη φορά πολύ αδύναμες σε σχέση με αυτές του ομόρου του ρότορα.

ΓΑΛΕΡΙΟ ΤΗΜΟ ΠΕΡΑΝ

Οι δύο επόμενες περιπτώσεις είναι με διάκενο 0.75c διατηρώντας τους ίδιους τύπους αεροτομών. Η Εικόνα 5δ αφορά ταχύτητα ρότορα $2U_\infty$ και η Εικόνα 5ε είναι με ταχύτητα ρότορα $2,6U_\infty$.

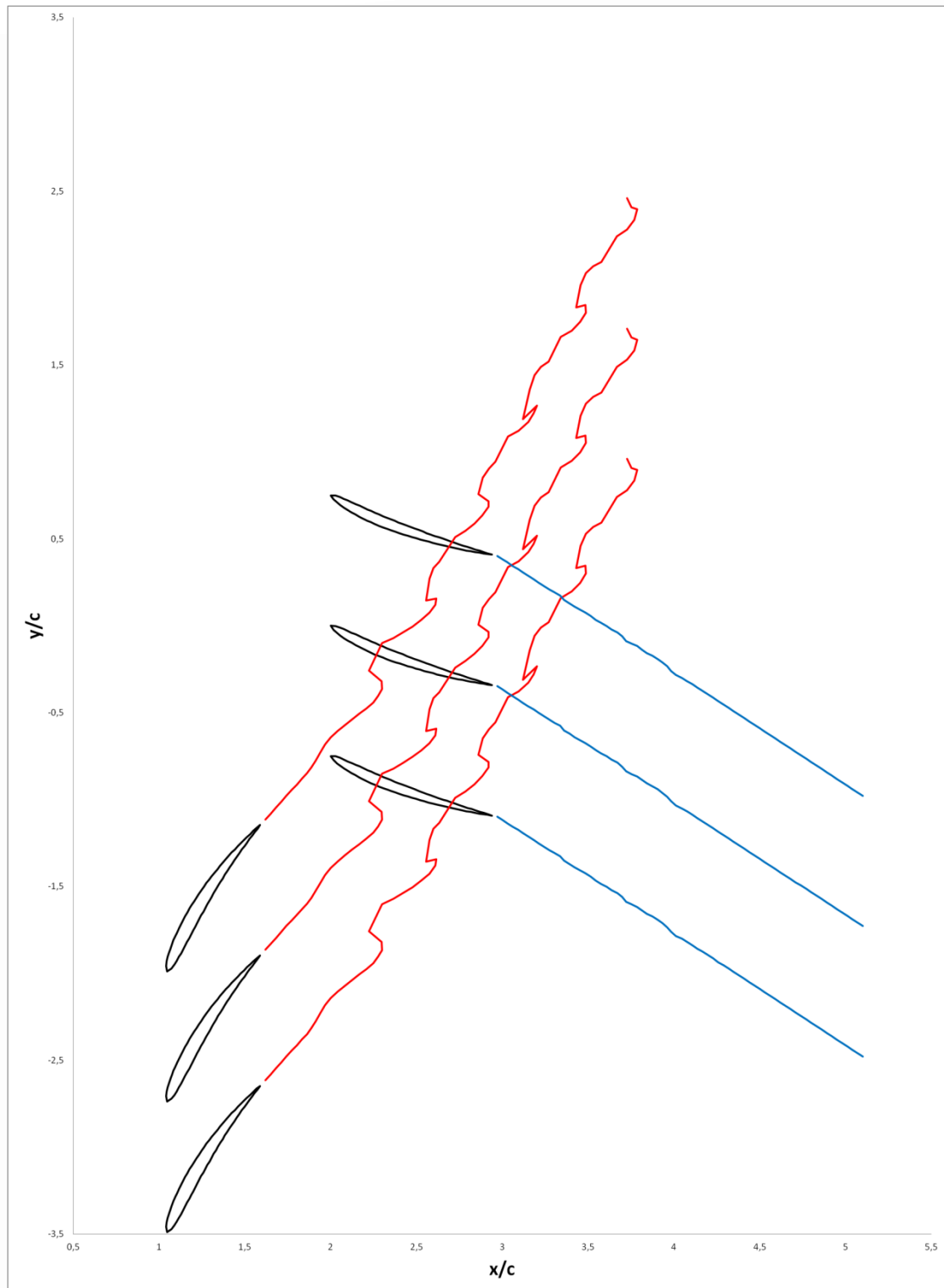


Εικόνα 5δ: Ομόρους δινών NACA 5508(κόκκινο) – NACA 4406(μπλε)

ταχύτητα ρότορα $2U_\infty$

Στην Εικόνα 5δ βλέπουμε ένα σχετικά ομαλό πεδίο ταχυτήτων με τις δημιουργηθείσες δίνες τόσο στον ομόρου του ρότορα όσο και στον ομόρου του στάτορα να είναι χαμηλής έντασης. Το πέταλο που δημιουργείται γύρω από τον στάτορα είναι σχεδόν ανεπαίσθητο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ



Εικόνα 5ε: Ομόρους δινών NACA 5508(κόκκινο) – NACA 4406(μπλε)

ταχύτητα ρότορα $2.6U_{\infty}$

Στην Εικόνα 5ε φαίνεται ότι το πεδίο ταχυτήτων δεν είναι πλέον ομαλό με τις δίνες του ομόρου του ρότορα να έχουν μεγαλύτερη ένταση από την περίπτωση της Εικόνας 5δ. Οι δίνες του ομόρου του στάτορα είναι και πάλι αδύναμες. Αυτή τη φορά

το πέταλο που σχηματίζεται γύρω από τον στάτορα είναι ξεκάθαρο με τις δίνες που σχηματίζονται εκατέρωθεν να είναι αρκετά ισχυρές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ