ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΟΧΩΝ ΑΝΑΠΗΡΙΑΣ

Συντάκτης: Σαμαράς Νικόλαος

ΜΑΕ: 100/15

Περίληψη

Στο δοκίμιο που ακολουθεί θα ορίσουμε τη βασική πιθανοθεωρητική δομή, η οποία παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας μίας σειράς προτύπων για ασφάλειες υγείας (παροχές αναπηρίας, εφάπαξ παροχές ασθενείας καθώς και παροχές μακροχρόνιας φροντίδας). Παρουσιάζεται ένα συνεχές στο χρόνο γενικό μοντέλο, το οποίο επιτρέπει να λαμβάνεται υπόψη ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών συνθηκών. Επιπλέον, παρουσιάζονται και ερμηνεύονται ορισμένες ειδικές διαδικασίες υπολογισμού των προσόδων αναπηρίας, στο παρακάτω πλαίσιο. Επίσης περιγράφεται πώς οι μαρκοβιανές και οι ημι-μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη μιας γενικής προσέγγισης για την αναλογιστική μοντελοποίηση της αναπηρίας και των συναφών παροχών (και ιδίως για τη ασφάλιση υγείας και μακροχρόνιων προσόδων φροντίδας). Η χρήση των αλυσίδων Markov στη μοντελοποίηση φαινομένων που εμπεριέχουν τυχαιότητα έχει προταθεί από πολλούς συγγραφείς, τόσο στην περίπτωση συνεχούς χρόνου τόσο και στην περίπτωση διακριτού χρόνου. Όσον αφορά τις παροχές αναπηρίας (και ιδίως τα οφέλη στην μόνιμη ασφάλιση υγείας), οι μαρκοβιανές και οι ημι-μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο για μοντελοποίηση αυτών των παροχών.

Λέ ξεις Κλειδιά: παροχές ασθενείας, μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες, παροχές μακροχρόνιας φροντίδας

Abstract:
The purpose of this thesis is to define the basic probability theory structure, which enables the creation of a series of standards for health insurance (disability benefits, lump sickness and long-term care facilities). We present a continuous time general model, which allows taking into account a wide range of conditions. Furthermore we present and interpret some special procedures for calculating disability annuities. Moreover Markov and semi-Markov stochastic processes can be used to develop a general approach to actuarial modeling of disability and related benefits (and especially for health insurance and long term care annuities). The use of Markov chains in modeling phenomena involving randomness has been suggested by many authors, both in the continuous-time both in the case of discrete time. Regarding disability benefits (particularly benefits to permanent health insurance), the Markov and semi-Markov stochastic processes provide a powerful tool for modeling these benefits.

Key words: sickness benefits, Markov stochastic processes, long-term care facilities

Πίνακας περιεχομένων Σελίδες

Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή

Ιστορική αναδρομή των μοντέλων πολλαπλών καταστάσεων και η συμβολή του αναλογισμού στην ασφάλιση σε περιπτώσεις ανικανότητας.

Αν και η συστηματική μελέτη των μαθηματικών μοντέλων πολλαπλών καταστάσεων (μαρκοβιανών και οι μι-μαρκοβιανών στοχαστικών διαδικασιών) χρονολογείται πριν από το τέλος της δεκαετίας του 1960, θα πρέπει να τονιστεί ότι το μαθηματικό υπόβαθρο για αυτό που ονομάζουμε τώρα μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του $18^{ου}$ από τους D.Bernoully και PS de Laplace στη περίπτωση συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, η μελέτη του Hamza[1] (1900) αποτελεί την πρώτη συστηματική προσέγγιση για επιδόματα αναπηρίας, τόσο στην συνεχή όσο και στη διακριτή περίπτωση. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τις συγκρίσεις μεταξύ των διαφόρων τεχνικών υπολογισμών των προσόδων αναπηρίας θα πρέπει να συμβουλευτεί τους Hamilton & Jones[2] (1972) και Mattsson[3] (1977). Οι παροχές αναπηρίας και οι σχετικές τεχνικές υπολογισμού έχουν μελετηθεί σε πληθώρα άρθρων. Τα μοντέλα πολλαπλών καταστάσεων μας παρέχουν ένα δυναμικό εργαλείο για εφαρμογές σε πολλές σημεία της αναλογιστικής επιστήμης, ειδικότερα στη αναλογιστική εκτίμηση της ασφάλισης ασθενείας και στις αποζημιώσεις σε περίπτωση ανικανότητας.

Τα μοντέλα αυτά μπορούν να αναχθούν στη μελέτη του Bernoulli[4] (1766) ο οποίος εφάρμοσε τη μέθοδο του διαφορικού λογισμού σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα που σχετίζεται με τη νοσηρότητα και την θνησιμότητα προερχόμενη από τη ευλογιά και έπειτα επίλυσε τις διαφορικές εξισώσεις κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς .

Το πρόβλημα στη παραπάνω διαδικασία είναι το εξής :

Έστω ότι έχουμε δύο καταστάσεις Α και Β τέτοιες ώστε στη κατάσταση Α οι πιθανότητες i) μετάβασης από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β, ii) θανάτου να είναι συμπληρωματικές και πιθανώς εξαρτώμενες από το χρόνο που δαπανήθηκε στη κατάσταση Α, το ερώτημα είναι ποιά είναι η πιθανότητα ενός ατόμου να μεταβεί στη κατάσταση Β και να αποβιώσει σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο;

Η παραδοχή στη οποία προέβη ο Bernoulli ήταν να θεωρήσει ότι άτομα που ανήκουν στη κατάσταση Α δεν έχουν περάσει ποτέ την ευλογιά ενώ στη κατάσταση Β ανήκουν άτομα που είχαν περάσει ευλογιά και

---

[1] Hamza, E. (1900) Note sur la theoriemathematique del'assurance contre le risqué d' invalidite d'origine morbid, senile ou accidentelle. Paris

[2] Hamilton –Jones, J. (1972). Actuarial aspects of long- term sickness insurance.

[3] Mattsson (1977). Some reflections on different disability models.

[4] Bernulli, D. (1766) Testing a new analyze mortality caused by smallpox and advantages of inoculation to prevent it. Hist. Acad. Roy.

είτε απεβίωσαν ή επέζησαν και δεν πάσχουν πλέον από αυτή τη ασθένεια. Στη προσπάθεια του ο Bernoulli να λύσει αυτό το πρόβλημα ξεκίνησε με τους πίνακες επιβίωσης του Halley και κατάφερε να φτιάξει πίνακες διπλής εισόδου κάνοντας την παραδοχή ότι το φάρμακο κατά της ευλογιάς είναι αποτελεσματικό και κατέληξε σε ένα μαθηματικό μοντέλο για την ασθένεια αυτή. Στα 50 χρόνια που έπονται υπάρχει μία πληθώρα άρθρων και από άλλους συγγραφείς με θέμα την ευλογιά και τον εμβολιασμό της συμπεριλαμβανομένου του d'Alembert και του Trembley.

Ο Lambert[5] (1772) εξέτασε πως θα μπορούσε το πρόβλημα του Bernoulli να μελετηθεί με αριθμητικά δεδομένα και θέσπισε τις βάσεις για τα μοντέλα με χρησιμοποίηση πινάκων διπλής εισόδου και τους πίνακες ζωής (Daw (1980)). Παρόλη όμως τη προαναφερθείσα πρόοδο στις αρχές της δεκαετίας του 1800 υπήρχαν δύο εκκρεμή προβλήματα που είχαν σχέση με τη ακριβή φόρμουλα για την πρακτική εφαρμογή των αριθμητικών δεδομένων, που συνδέουν τις διακριτές και τις συνεχείς περιπτώσεις και την εξασφάλιση ακριβών αποτελεσμάτων σε ικανοποιητική μορφή. Αυτά τα προβλήματα αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς από τους Cournot (1843) και τον Makeham (1867). Αποτελούν τους πρώτους που κατάφεραν να θέσουν τις βασικές σχέσεις των σύνθετων μοντέλων.

Ο Karup το 1875 εξέτασε τις συντάξεις ανικανότητας και χηρείας σε υπαλλήλους σιδηροδρομικού σταθμού από τη οποία προκύπτει ένα μοντέλο ασθενείας-θανάτου με μη δυνατότητα επιστροφής σε προγενέστερη κατάσταση. Ακόμα εξετάζεται ο υπολογισμός των ανεξάρτητων πιθανοτήτων από παρατηρούμενα δεδομένα. Επιπλέον στη μελέτη του Karup το 1893 περιγράφεται λεπτομερώς ο υπολογισμός των υποχρεώσεων και των τεχνικών αποθεμάτων σε περίπτωση χηρείας, σε περίπτωση ορφάνιας και σε περίπτωση ανικανότητας του ασφαλισμένου. Ο Sprague[6] (1879) εξέτασε τον τρόπο άμεσου υπολογισμού των απωλειών και των ατομικών πιθανοτήτων απώλειας. Ο Du Pasquier [7] (1912, 1913) θεώρησε ένα μοντέλο ανικανότητας τριών καταστάσεων για τη ανικανότητα ή τη διαδικασία ασθενείας στο οποίο η ανάρρωση θεωρείται εφικτή. Προέκυψαν διαφορικές εξισώσεις για τις πιθανότητες μετατροπής και έδειξε ότι αυτές οδηγούν σε μία δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση τύπου Riccati την όποια έπειτα επίλυσε για το ενδεχόμενο σταθερών εντάσεων μετάβασης. Η εργασία του Du Pasquier αποτελεί μία από τις πρώτες μελέτες εφαρμογής των Μαρκοβιανών αλυσίδων για στην ασφάλιση ανικανότητας, στην ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας καθώς και στην ασφάλιση σημαντικών ασθενειών.

Εφαρμογές στην ασφάλιση

Η αναλογιστική συμβολή στη ασφάλιση υγείας και ασθένειας σχετίζεται στενά με τη εξέλιξη των αμοιβαίων συνδέσμων στη Αγγλία και αντίστοιχων φορέων σε άλλες χώρες. Ο αμοιβαίος σύνδεσμος

[5] Lambert, J.H. (1772). The mortality of smallpox in children, Berlin
[6] Sprague, T.B. (1879). On the construction of a combined marriage and mortality table from observations made as to the rates of marriage and mortality among anybody of men
[7] Du Pasquier, L.G.(1912) Mathematische Theorie der Invaliditätversicherung

είναι μία κοινώτητα η οποία δίνει οικονομική βοήθεια στα μέλη της και αφορά καλύψεις στην περίπτωση ασθένειας, γήρατος, ή θανάτου. Οι αμοιβαίοι σύνδεσμοι βασίζονται στις αρχές ασφάλισης και οι αποζημιώσεις πληρώνονται από ένα συσσωρευτικό ποσό το οποίο προκύπτει από τις τακτικές εισφορές των μελών.

Η προέλευση των αμοιβαίων συνδέσμωνστη Αγγλία μπορεί να αναχθεί στις συντεχνίες των βιοτεχνιών του 13ου και 14ου αιώνα. Ο πιο σπουδαίος παράγοντας στη μετέπειτα εξέλιξη τους ήταν η Βιομηχανική Επανάσταση, η οποία είναι ακολουθούμενη από ευρέως διαδεδομένη ανέχεια και αβεβαιότητα. Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή μία ταχεία αύξηση του πληθυσμού παρείχε μία πηγή φτηνής και εύκολα αξιοποιήσιμης εργασίας. Με την απουσία της πολιτειακής παρακολούθησης μέσω του συστήματος της κοινωνικής ασφάλισης ή των επαγγελματικών συντάξεων ή συστήματος πληρωμών για ασθενείς, οι φιλικές κοινωνίες καθιερώθηκαν με τη πρωτοβουλία των εργαζόμενων, και ήταν η μόνη μορφή διαθέσιμης οικονομικής ασφάλειας. Η ανάπτυξη των αμοιβαίων συνδέσμων αναπτύχθηκε παράλληλα και σε άλλες χώρες, λόγου χάριν στη Γαλλία και στη Αμερική ενώ στη Γερμανία και τη Αυστρία η ύπαρξη αμοιβαίων συνδέσμων συναντάται στο επάγγελμα των ανθρακωρύχων από το 18ο αιώνα.

Τον πρώτο καιρό, η οικονομική διαχείριση αυτών των συνδέσμων ήταν υποτυπώδης και υπήρχε άγνοια για το γεγονός ότι το μέσο κόστος για απρόβλεπτα έξοδα κάθε μέλους έτεινε να αυξάνεται με τη ηλικία. Οι εισφορές ήταν συχνά σταθερές οδηγώντας σε κλασικές περιπτώσεις αντεπιλογής και χρεωκοπίας.

Η αναλογιστική επιστήμη άρχισε να ασχολείται με τα οικονομικά θέματα των αμοιβαίων συνδέσμων κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα. Με τη εξέλιξη των τεχνικών, οι αναλογιστές παρείχαν συμβουλές όσον αφορά το ποσοστό εισφοράς συμμετοχής καθώς και για τη συσσώρευση των αποθεμάτων με σκοπό την ικανοποίηση των εγγυημένων μελλοντικών υποχρεώσεων.

Η πρώτη προσπάθεια δημιουργίας δεικτών ασθενείας σχετιζόμενους με τη ηλικία έγινε από τον Price (1792). Ο Finlaison[8] το 1829 παρουσίασε μία μελέτη στην οποία οι πρόσοδοι βασίζονται σε δείκτες ασθενείας και στην ανάλυση δεδομένων έξι ετών. Το έργο του Hubbard (1852) περιλαμβάνει τη πρώτη έρευνα στην ασφάλεια ασθενείας στις φιλικές κοινωνίες στη Γαλλία με βάση το επάγγελμα και το φύλο. Το 1855 ο K.F. Heym δημοσίευσε μία μελέτη στη οποία υποστηρίζει ότι τα ασφάλιστρα θα πρέπει να εξαρτώνται από την ηλικία εισόδου. Το 1854 η Πρωσία νομοθετεί τη υποχρεωτική συμμετοχή σε οργανώσεις ανάλογες των αμοιβαίων συνδέσμωνενώ η νομοθεσία της πάνω σε αυτόν το τομέα υιοθετείται από τα άλλα βόρεια κρατίδια της Γερμανίας. Το 1903 ο Watson[9] μας διερεύνησε τον κλάδο ασθενείας και θανάτου για τα έτη 1893 έως 1897 αναφορικά για τους αμοιβαίους συνδέσμους του Μάντσεστερ. Η παραπάνω εργασία αποτέλεσε τη πρότυπη μελέτη της ασφάλισης κατά ασθενείας στη

[8] Finlasion, J. (1829) Life annuities - Report of John Finlaison, Actuary of the national debt on the evidence and elementary factson which the tables of life annuituities were founded, House of Commons, London.

[9] Watson, A.W. (1903). Sickness and mortality experience of the Independent Order of Oddfellows Manchester Unity Friendly Society during the five years 1893-1897, Manchester

Αγγλία, ενώ η μεθοδολογία του κυριάρχησε στη αναλογιστική πρακτική για πάνω από 9 δεκαετίες. Το κίνημα των αμοιβαίων συνδέσμων μειώθηκε σημαντικά στα μέσα του $20^{ου}$ αιώνα. Παρόλα αυτά στις μέρες μας υπάρχει μία αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος από τις ασφαλιστικές εταιρείες σε πολλές χώρες, για παροχές μακροχρόνιας περίθαλψης, για παροχές ανικανότητας, για παροχές γήρατος καθώς και για παροχές προστασίας έναντι σημαντικών ασθενειών.

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τις βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια όσον αφορά τις διαδικασίες Markov.

Έστω ότι το S είναι ένα πεπερασμένο ή ένα αριθμητό σύνολο. Έστω επίσης ένας χώρος πιθανότητας (Ω,F,P). Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ξn, όπου nεN καλείται <u>αλυσίδα Markov</u>[10] εάν για όλα τα nεN και όλα τα sεS : $P\ \xi_{n+1} = s \mid \xi_o \ldots \xi_n \ \big| P\ \xi_{n+1} = s \mid \xi_n$, με : $P(\xi_{n+1} = s \mid \xi_n)$, να είναι η υπό συνθήκη πιθανότητα του γεγονότος $(\xi_{n+1} = s)$,

Μαρκοβιανά μοντέλα συνεχή στο χρόνο.

Είναι ευρέως γνωστό ότι οι αναλογιστικές αξιολογήσεις (που είναι αναγκαίες για να υπολογιστούν τα ατομικά ασφάλιστρα, τα περιοδικά ασφάλιστρα τα μαθηματικά αποθέματα κλπ.) περιλαμβάνουν και:

1. Το Υπολογισμό των παρουσών αξιών
2. Το υπολογισμό των αναμενόμενων αξιών.

Για τη εύρεση της παρούσας αξίας χρειάζεται να ορίσουμε μία οικονομική δομή. Η απλούστερη δομή που μπορεί να υπάρξει είναι αν αναλογιστούμε ένα μοντέλο σύνθετου τόκου με απουσία ύπαρξης στοχαστικού παράγοντα, με σταθερή ένταση του τόκου δ η οποία οδηγεί στην προεξοφλητική συνάρτηση $e^{-\delta t}$. Έστω ότι το v υποδηλώνει το ετήσιο προεξοφλητικό παράγοντα, συνεπώς $v = e^{-\delta t}$.

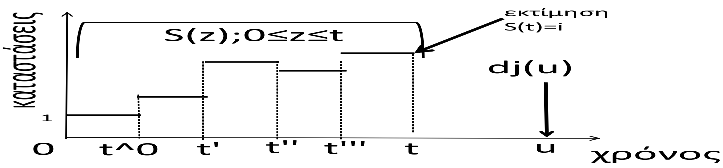
Προκειμένου να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές θα πρέπει να θεωρήσουμε μία πιθανοθεωρητική δομή συναρτήσει των γεγονότων που είναι συναφή με το ασφαλισμένο κίνδυνο με τις εκροές των εξόδων, και τις εισροές των ασφαλίστρων. Υπάρχουν πολλές διαθέσιμες προσεγγίσεις για την εν λόγω στοχαστική μοντελοποίηση επί της αρχής. Στη πράξη όμως η επιλογή μας υπόκειται σε περιορισμούς που επιβάλλονται από τα διαθέσιμα δεδομένα.

[10] Springer Undergraduate Mathematics Series. A course through exercises. Series: 1st ed. 1999

Με σκοπό τη καλύτερη κατανόηση των ανωτέρω ξεκινάμε με τη παράθεση ενός απλού παραδείγματος .

Διάγραμμα 1

Απεικόνιση μονοπατιού ενός ασφαλισμένου κινδύνου.



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Έστω στο παραπάνω διάγραμμα στο οποίο παρουσιάζεται το μονοπάτι ασφαλισμένου κινδύνου. Έστω ότι τη στιγμή t με $S\ t\ = i$ θέλουμε να υπολογίσουμε την παροχή $d_j\ u$.Η παροχή αυτή είναι εφάπαξ εάν ο κίνδυνος τη χρονική στιγμή u, δηλαδή αν $S\ u\ = j$, πληρωθεί εάν επέλθει το κίνδυνος κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή) δηλαδή να υπολογίσουμε τη αναμενόμενη παρούσα αξία .Η υπόθεση του ασφαλισμένου κινδύνου από τη στιγμή που γνωρίζουμε τη πολιτική που ακολουθείται , έτσι ώστε η υπό συνθήκη παρούσα αξία μπορεί να υπολογιστεί ως εξής : $d_j\ _u\ u^{u-t} P_r\ S\ u\ = j \,\big|\, S\ z\ = s\ z\ ; 0 \leq z \leq t$,; όπου $s\ t\ = i$

Είναι απίθανο η πιθανότητα που εμφανίζεται στη παραπάνω σχέση να μπορεί να αξιολογηθεί για υπό συνθήκη μονοπάτι $S\ z$ (και στη αναλογιστική πρακτική αυτό ισχύει εξαιτίας κακής ποιότητας δεδομένων), συνεπώς πρέπει να καταφεύγουμε σε απλούστερες μεθόδους αξιολόγησης. Σχετικά πιο απλές πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν με την αντικατάσταση του υπό συνθήκη γεγονότος, και ειδικότερα με τη εξέταση των πληροφοριών που παρέχονται από τη πορεία του ασφαλισμένου κινδύνου. Με άλλα λόγια κατάλληλες συναρτήσεις του $S\ z$, $0 \leq z \leq t$, θα έπρεπε να οριστούν. Αντί για τον τύπο $P_r\ S\ u\ = j \,\big|\, S\ z\ = s\ z\ ; 0 \leq z \leq t$, θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες πιθανότητες με σκοπό τον υπολογισμό της υπό συνθήκης αναμενόμενης παρούσας αξίας της αποζημίωσης: $P_r\{S\ u\ = j \,\big|\, S\ t\ = i; \}$ ο χρόνος που δαπανείται μέχρι την τελευταία μετάβαση στο i.

Μία ακολουθία ξν, νεΝ με τιμές στο σύνολο S ονομάζεται ομοιογενής στο χρόνο ή απλά ομοιογενής εάν για όλα τα νεΝ και όλα τα i, j ε S εάν ισχύει ότι: $P\ \xi_{\nu+1} = j \mid \xi_\nu = i\ = P(\xi_1 = j \mid \xi_0 = i)$. Η πιθανότητα αριθμός $P(\xi_1 = i \mid \xi_0 = i)$ υποδηλώνεται από τη P(j | i) και καλείται πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση i στη j. Η μήτρα P = [P(j | i)]$P = [\mathrm{p}\ \mathrm{i} \mid \mathrm{j}\ ]_{j,i\epsilon S}$ ονομάζεται μήτρα μετάβασης της αλυσίδας ξ_ν.

Ο πίνακας $\mathrm{A} = \{\alpha_{\mathrm{i},\mathrm{j}}\}, \mathrm{j} \in \mathrm{S}$ καλείται στοχαστική μήτρα εάν $\alpha_{\mathrm{i},\mathrm{j}} \geq 0\,, \forall\, \mathrm{i},\mathrm{j} \in \mathrm{S} \geq 0$. Επιπλέον ισχύει ότι το άθροισμα των καταχωρήσεων σε κάθε στήλη ισούται με 1 δηλαδή: $_{\iota\varepsilon S}\, a_{ji} = 1, \forall\, j \in S$. Επίσης ο πίνακας Α ονομάζεται διπλά στοχαστικός εάν και το Α και ο Α΄ είναι στοχαστικά. Αποδεικνύεται ότι μία στοχαστική μήτρα είναι διπλά στοχαστική εάν και μόνο αν το άθροισμα των τιμών σε κάθε σειρά ισούται με 1, δηλαδή $_{i\varepsilon \mathrm{S}}\, \mathrm{a}_{\mathrm{ji}} = 1, \forall\, \mathrm{j} \in \mathrm{S}$.

Ο νιοστός βήματος πίνακας μετατροπής μίας ακολουθίας Markov ξν με πιθανότητα μετατροπής $P\ j \mid i\ , j, i \in S$ είναι ο πίνακας Pn με εισόδους $P(j \mid i) = P(\,\xi_\nu = \mathrm{j} \mid \xi_0 = \mathrm{i})$

Έστω ότι $S = Z$. Έστω ότι n_η, $\mathrm{n} \geq 1$, είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαία κατανεμημένες μεταβλητές με $P\ n_1 = 1\ = p\ \kappa\alpha\iota\ P\ n_1 = 0\ = q = 1 - p$

Ορίζουμε την $\xi_\nu = \ _{i=1}^{n} n_i\ \gamma\iota\alpha\ n \geq 1\ \kappa\alpha\iota\ \xi_0 = 0$. Αποδεικνύεται ότι η ξ_ν είναι μία αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης:

$$P(j \mid i) = \begin{matrix} p\,, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ j = i + 1 \\ q\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ j = i - 1 \\ 0, \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{matrix}$$

Η $\xi_\nu,\ \mu\varepsilon\ \nu \geq 0$ καλείται τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το 0. Αντικαθιστώντας το $\nu_0 = 0$ με $\nu_0 = i$, παίρνουμε ένα τυχαίο περίπατο που ξεκινά από το i.

Θεωρούμε ότι $\xi\nu$ νεΝ είναι μια αλυσίδα Markov με τιμές στο S με πιθανότητες μετάβασης σε n βήματα $p_n\ j\ i$.Τότε για όλα τα κ,ν ε Ν $p_{n+k}\ j\ i\ = \ _{s\varepsilon S}\, p_n\ j\ s\ p_k\ s \mid i\ ,\ i, j \in S$. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή και ως εξίσωση του Chapman-Kolmogorov

Μια κατάσταση i ονομάζεται περιοδική εάν η διαδικασία ξν τελικά θα επιστρέφει στο i δοθέντος του ότι ξεκινάει στο i δηλαδή: $\mathrm{p}\ \xi_\nu = \mathrm{i}\ \gamma\iota\alpha\ \mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\alpha}\ \nu \geq 1 \mid \xi_0 = \mathrm{i}\ = 1$. Εάν η παραπάνω σχέση δεν ικανοποιείται, τότε η κατάσταση i ονομάζεται παροδική.

Έστω ένας τυχαίος περίπατος στο Z με παραμέτρους $p \in (0,1)$. Η κατάσταση 0 είναι περιοδική εάν και μόνο αν p=1/2. Το ίδιο ισχύει και αν το 0 αντικατασταθεί με οποιαδήποτε άλλη κατάσταση $i \in Z$

Μία κατάσταση ζεS λέγεται επαναλαμβανόμενη αν και μόνο αν $p\ \ \xi_\nu = j$ για απείρως πολλά $\nu \big| \xi_0 = j\ \ = 1$ και στάσιμη αν και μόνο αν $p\ \ \xi_\nu = j$ για απείρως πολλά $\nu \big| \xi_0 = j\ \ = 0$

Για μία αλυσίδα Markov με τιμές στο S με πιθανότητες μετάβασης ξν , νεN μια κατάσταση iεS καλείται μηδενικά περιοδική εάν είναι περιοδική και ο μέσος περιοδικός χρόνος mi , ορίζεται από τη σχέση $m_i := \ \ {}_{n=0}^{\infty} n f_n\ \ i \big| i$, και ισούται με ∞.

Μία κατάσταση iεS καλείται θετικά περιοδική εάν είναι περιοδική και ο μέσος περιοδικός χρόνος m_i είναι πεπερασμένος. N^*

Έστω ότι το ξν, νεN είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα χώρο καταστάσεων S.
Έστω iεS. Λέμε ότι i είναι μία παροδική κατάσταση αν και μόνο αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των $\nu\varepsilon N^*$ όπου $N^* = \{1,2,3...\}$, τέτοιος ώστε $p_n\ \ i \big| i\ \ > 0\ \textit{είναι} \geq 2$. Διαφορετικά η κατάσταση i καλείται παροδική. Και στις δύο καταστάσεις ο gcd (μέγιστος κοινός διαιρέτης)υποδηλώνεται με το d(i) και καλείται περίοδος της κατάστασης i.
Έτσι το (i) είναι περιοδικό αν και μόνο αν $\mathrm{d(i)} \geq 2$.
Μία κατάσταση i η οποία είναι θετικά περιοδική και παροδική καλείται εργοδική (ergodic).

Έστω ότι i , j εS και i ↔ j. Αποδεικνύεται ότι :
το i είναι παροδικό αν και μόνο αν είναι παροδικό το j.

το i είναι επαναλαμβανόμενο αν και μόνο αν το j είναι επαναλαμβανόμενο.

το i είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενο αν και μόνο αν το j είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενο.

το i είναι θετικά επαναλαμβανόμενο αν και μόνο αν το j είναι θετικά επαναλαμβανόμενο.

το i είναι θετικά περιοδικό αν και μόνο αν το j είναι θετικά περιοδικό. Σε αυτή τη περίπτωση $\mathrm{d(i)} = \mathrm{d(j)}$ (όπου το d:είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης) το i είναι εργοδικό αν και μόνο αν είναι εργοδικό το j.

Θεωρούμε ότι ξν, ν$\in N$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Τότε ένα σύνολο C c S ονομάζεται κλειστό εάν, όταν η αλυσίδα μπαίνει στο C και δεν βγαίνει εκτός αυτού του σύνολο δηλαδή:$P\ \ \xi_\nu\ \kappa \in S \big|\ C\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha\ \kappa \geq \nu \big|\ \xi_\nu \epsilon C\ \ \ = 0$. Ακόμα ένα σύνολο C c S καλείται μη αναγώγιμο εάν όποιο στοιχείο i, j του C συν-επικοινωνεί, δηλαδή $\mathrm{P}\ \ \mathrm{j} \big|\ \mathrm{i}\ \ > 0\ \forall\ \mathrm{i}, \mathrm{j} \in \mathrm{C}$.

Έστω ότι $P[p\ \ j \big|\ i\ \ ]$ είναι η μήτρα μετάβασης μιας αλυσίδας Markov με χώρο καταστάσεων S.Έστω ότι για όλα τα $i, j \in S$ $\lim_{n\to\infty} p_n(j \big|\ i) \coloneqq \pi_j$(j/i). Το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο του i. Τότε θα ισχύει ότι: $_i\, \pi j \leq 1,\ \ \ _i\, p(j\ /\ i)\pi i = \pi_{jj}$, ή ότι $_\mathrm{j}\, \pi_\mathrm{j} = 1$ ή $\pi_j = 0$ για όλα τα $j \in S$.

Κεφάλαιο 2ο.

Η Ισόβια Ασφάλιση ζωής.

Τα ατομικά ασφαλιστήρια Ισόβιας ασφάλισης ζωής[11] (Permanent Health Insurance PHI) έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν ένα εισόδημα σε ένα άτομο (εβδομαδιαίο ή μηνιαίο) σαν πρόληψη από μία ασθένεια ή τραυματισμό εργασία. Υπό αυτή την έννοια τα ασφαλιστήρια ισόβιας ασφάλισης ζωής (PHI) παρέχουν προστασία σε περιπτώσεις ανικανότητας. Στα συμβόλαια αυτά υπάρχει ο λεγόμενος ηθικός κίνδυνος, ο οποίος προκύπτει από την ενδεχόμενη αύξηση του εισοδήματος του ασφαλισμένου σε περίπτωση ανικανότητας. Για το λόγο αυτό τα συμβόλαια αυτά ενδέχεται να περιέχουν ρήτρα μείωσης της μείωσης της παροχής για παράδειγμα αν ο ασφαλισμένος σε περίπτωση ανικανότητας προς εργασία λαμβάνει και άλλες παροχές από το σύστημα κοινωνικής ασφάλισης.

Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια κανονικά συμπεριλαμβάνουν μία αναβαλλόμενη περίοδο έτσι ώστε η παροχή να μην ξεκινήσει να πληρώνεται εάν η ασθένεια διαρκέσει για συγκεκριμένη περίοδο [12] (πχ. από 13 έως 26 εβδομάδες). Καθώς τα συμβόλαια ισόβιας ασφάλισης είναι συνήθως αναπροσαρμοσμένα ώστε να παρέχουν συμπληρωματική κάλυψη σε αυτή που παρέχεται από τον εργοδότη ή σε αυτή που παρέχεται από τον αντίστοιχο φορέα κοινωνικής ασφάλισης η αναβαλλόμενη περίοδος που καθορίζεται από τον αντισυμβαλλόμενο τείνει να επηρεάζει το μήκος του χρόνου μετά το πέρας του οποίου οι παροχές μειώνονται ή παύουν να υπάρχουν. Προφανώς όσο μεγαλύτερη είναι η αναβαλλόμενη περίοδος τόσο φθηνότερη είναι η κάλυψη και έτσι μειώνεται και το ασφάλιστρου ασφαλιστήρια συμβόλαια είναι συνήθως ορισμένου χρόνου και συνήθως σταματάνε στη ηλικία των 65 έτη για τους άντρες και 60 έτη για τις γυναίκες. Από την στιγμή που η ασφαλιστική εταιρεία προσφερθεί να παρέχει τη απαραίτητη κάλυψη και το πρώτο ασφάλιστρο πληρωθεί, η εταιρεία ενδέχεται να μην μπορεί να ακυρώσει το συμβόλαιο.

Στις πιο κοινές μορφές εφαρμογής ασφαλιστηρίων συμβολαίων ισόβιας ασφάλισης ζωής αρχίζει η καταβολή ενός εβδομαδιαίου ή μηνιαίου εισοδήματος στον ασφαλιζόμενο στη περίπτωση που είναι άρρωστος για μεγαλύτερο διάστημα από τη αναβαλλόμενη περίοδο. Οι παροχές συνεχίζουν να πληρώνονται μέχρι ο ασφαλιζόμενος να αναρρώσει ή να πεθάνει, ή μέχρι την ηλικία στη οποία το ασφαλιστήριο συμβόλαιο θα διακοπεί. Αν το ασφαλιστήριο συμβόλαιο δεν μπορεί να διακοπεί ισχύει ότι ο ασφαλισμένος θα λαμβάνει τη παροχή καθ'όλη τη διάρκεια

[11] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America
[12] CMIR12 (1991). The Analysis of Permanent Health Insurance data. Continuous Mortality Investigation Bureau, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries

μέχρι ένα από τα παραπάνω γεγονότα συμβούν. Στα περισσότερα ασφαλιστήρια συμβόλαια η καταβολή των ασφαλίστρων σταματάει όταν σταματήσουν οι παροχές. Σε μερικά ασφαλιστήρια συμβόλαια ενδέχεται να πληρώνεται ένα σταθερό επίπεδο αποζημιώσεων ενώ σε άλλα παρέχονται αποζημιώσεις που αυξάνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προστατεύεται ο ασφαλισμένος από τη επίδραση του πληθωρισμού. Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια συνήθως σχεδιάζονται έτσι ώστε οι αυξανόμενες αποζημιώσεις να συμφωνούν είτε με τα αυξανόμενα ασφάλιστρα, είτε με τα ετήσια ασφάλιστρα ή με τα επαναλαμβανόμενα ατομικά ασφάλιστρα. Ένα άλλο χαρακτηριστικό στο σχεδιασμό του ασφαλιστήριου συμβολαίου είναι η ύπαρξη ενός επιπέδου αποζημίωσης που φθίνει ευθέως ανάλογα με την εξέλιξη της ασθένειας μέχρι και το πέρας της. Το παραπάνω χαρακτηριστικό υφίσταται ώστε ο εργαζόμενος να έχει κίνητρο επιστροφής στην εργασία του.

Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια στην Αγγλία ακολουθούν ένα αριθμό από ξεχωριστούς σχεδιασμούς :

- Συμβατικά ασφαλιστήρια συμβόλαια όπου οι όροι είναι εξασφαλισμένοι καθ 'όλη τη διάρκεια της ζωής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.
- Ανανεώσιμα βραχυπρόθεσμα ασφαλιστήρια συμβόλαια.
- Unit-linked ασφαλιστήρια συμβόλαια.
- Keyman ασφαλιστήρια συμβόλαια τα οποία καλύπτουν το κίνδυνο ενός ανίκανου βασικού στελέχους ενώ τα εισοδηματικά οφέλη είναι καταβλητέα μόνο για ένα ή δύο έτη.

Αυτού του είδους τα ασφαλιστήρια συμβόλαια προσφέρονται σε μία ατομική βάση .Τα ομαδικά ασφαλιστήρια συμβόλαια ανικανότητας γενικά περιλαμβάνουν επαναλαμβανόμενα ατομικά ασφάλιστρα συμπεριλαμβανομένου και κλιμακούμενων ή σταθερών παροχών.

Στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής[13] τα ασφαλιστήρια συμβόλαια ανικανότητας συχνά καλούνται ασφαλιστήρια συμβόλαια απώλειας χρόνου ή ασφαλιστήρια συμβόλαια απώλειας εισοδήματος ή ασφαλιστήρια συμβόλαια μακροχρόνιας φροντίδας. Παρέχουν πληρωμές όταν ένας ασφαλισμένος είναι ανίκανος να εργαστεί εξαιτίας τραυματισμού ή ασθενείας. Οι σχεδιασμοί των ασφαλιστηρίων συμβολαίων είναι ίδιοι με αυτούς του Αγγλίας παρόλο που χρησιμοποιούμε διαφορετική ονοματολογία. Ακόμα είναι σύνηθες να καθοριστεί μία μέγιστη περίοδο παροχών στη περίπτωση ολικής ανικανότητας του ασφαλισμένου. Οι παροχές κανονικά πληρώνονται σε μηνιαία σε σταθερές πληρωμές ενόσω ο ασφαλισμένος είναι ανίκανος. Όπως

[13] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America

και στα Ηνωμένο Βασίλειο η ασφάλιση είναι διαθέσιμη τόσο σε ατομική τόσο και σε ομαδική βάση. Στη ομαδική κάλυψη το ποσό παροχής εξαρτάται άμεσα από τα έσοδα του ασφαλισμένου. Σε ατομικές καλύψεις η παραπάνω σχέση είναι πολύ πιο χαλαρή και η παροχή υφίσταται μονάχα στο χρονικό διάστημα που είναι έγκυρο το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Οι παροχές[14] ενδέχεται να συνοδεύονται και με κοινωνική ασφάλεια, και να είναι μειωμένες εάν έχουν αποκτηθεί παροχές κοινωνικής ασφάλισης.

Στη Ολλανδία υπάρχουν δύο τύποι ασφάλισης ανικανότητας προς πώληση: το ασφαλιστήριο για το πρώτο χρόνο κινδύνου(A-cover) και το ασφαλιστήριο για τον δεύτερο χρόνο κινδύνου (B-cover). Οι όροι ενός (A-cover) ασφαλιστήριου συμβολαίου περιλαμβάνουν μία αναβαλλόμενη περίοδο μεταξύ έξι ημερών και έξι μηνών και μία μέγιστη περίοδο προσόδων πληρωμών ίση με ένα χρόνο. Ο ασφαλισμένος δικαιούται παροχές όταν αυτός είναι τουλάχιστον 25% ανίκανος και ανίκανος να εκτελέσει τα καθήκοντα του που σχετίζονται με τη εργασία.

Οι όροι ενός (B-cover) ασφαλιστήριου συμβολαίου περιλαμβάνουν μία αναβαλλόμενη περίοδο ενός έτους. Η πρόσοδος ανικανότητας σταματάει σε περίπτωση θανάτου, σε περίπτωση ανάρρωσης του ασφαλισμένου ή όταν λήξει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Ο ασφαλισμένος δικαιούται παροχές όταν έχει αναπηρία τουλάχιστον κατά 25%, και είναι ανίκανος να εκτελέσει τα καθήκοντα του σε σχέση με τις ικανότητές οι οποίες λογικώς απαιτούνται από αυτόν, λαμβάνοντας υπόψη τη μόρφωση και τις προηγούμενες δραστηριότητές του. Τα ασφαλισμένα ποσά μπορούν να αναπροσαρμόζονται σύμφωνα με ένα σταθερό επιτόκιο: 3, 4 ή 5%.

Στη Γερμανία είναι διαθέσιμες τόσο οι καλύψεις συμπληρωματικής ρήτρας ανικανότητας τόσο και οι αυτόνομες καλύψεις. Ο ορισμός της ανικανότητας[15] είναι ο ακόλουθος: Ανικανότητα είναι η μερική ή ολική ανικανότητα του ασφαλισμένου εξαιτίας ασθένειας ή ατυχήματος η οποία οδηγεί σε αδυναμία του ασφαλισμένου να ασκήσει τα επαγγελματικά του καθήκοντα ή σε οποιαδήποτε άλλη δραστηριότητα την οποία μπορεί λογικά να φέρει εις πέρας εν όψει της κατάστασης του στη ζωή, των γνώσεων του και των ικανοτήτων του. Γενικά, οι ασφαλιστικές εταιρείες πληρώνουν ολόκληρη την αποζημίωση σε περίπτωση ανικανότητας μεγαλύτερης ή ίσης με 50%.(ανικανότητα $\geq$ 50%). Στη ***Αυστρία*** οι ασφαλίσεις ανικανότητας προσφέρονται μόνο ως συμπληρωματικές ρήτρες στα ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής. Ο

[14] Clark, G.and Dulllaway, D. (1995) PHI Pricing, Health and care PHI Meeting, Institute of actuaries, London.
[15] CMIR7 (1984) Sickness Experience 1975-78 for individual PHI Policies. Continuous Mortality Investigation Bureau, the Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries.

ορισμός της ανικανότητας είναι όμοιος με αυτόν που χρησιμοποιείται στη Γερμανία. Στη ***Ελβετία*** η ασφάλιση ανικανότητας πωλείται είτε ως αυτόνομη κάλυψη είτε στη μορφή συμπληρωματικής ρήτρας η δεύτερη με μειωμένες παροχές. Οι παροχές είναι ανάλογες με το βαθμό της ανικανότητας. Ολικές παροχές παρέχονται εάν ο βαθμός ανικανότητας είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 66,6% (ανικανότητα $\geq 66{,}6\%$) ενώ μερικές παροχές παρέχονται σε περίπτωση που ο βαθμός ανικανότητας είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 25% (ανικανότητα $\geq 25\%$). Όσο αναφορά τα παραπάνω εξεταζόμενα μοντέλα θα πρέπει να αναφέρουμε ότι έχουν προβλήματα κατά την εφαρμογή τους. Στις προσόδους ανικανότητας συχνά υιοθετούνται αναλογιστικές πρακτικές οι οποίες είναι εύκολο να επεκταθούν και να γραφούν φόρμουλες οι οποίες θα σχετίζονται με άλλες προσόδους όπως έναντι σοβαρών ασθενειών ή μακροχρόνιας φροντίδας. Οι συμβολισμοί[16] που θα χρησιμοποιηθούν καθόλο το μήκος της εργασίας είναι η ακόλουθη: τα γράμματα: a, i, d μας υποδηλώνουν τις καταστάσεις ενεργός, ανάπηρος, ή και αποβιώσας. Μερικές επεκτάσεις των παραπάνω συμβολισμών όπως για παράδειγμα i_1, i_2…μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη σφοδρότητα της αναπηρίας, τη επίδραση της διάρκειας κ.α. Η ηλικία εισόδου θα υποδεικνύεται ρητά με το γράμμα x.Εν συνεχεία θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για την ασφάλιση ενός ατόμου. Κάτι τέτοιο όμως προϋποθέτει την επέκταση σε συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στα παραδείγματα μας αλλά και καθόλο το μήκος της εργασίας. Έτσι λοιπόν το $S\ t$ θα συμβολίζει ένα απλό μονοπάτι της στοχαστικής διαδικασίας $\{S\ t\ \}$. Με $p_1\ t$ θα συμβολίζουμε ένα συνεχές ασφάλιστρο μιας στιγμιαίας τιμής $p_1\ t$ πληρωτέο από τον ασφαλισμένο όταν ο κίνδυνος είναι στη κατάσταση 1, με $b_2\ t$ θα συμβολίζουμε μία συνεχής πρόσοδο μίας στιγμιαίας τιμής $b_2\ t$ πληρωτέα από τη ασφαλιστική όταν ο κίνδυνος είναι στη κατάσταση 2, με $C_{13}\ t_3$ θα συμβολίζουμε ένα εφάπαξ ποσό πληρωτέο από την ασφαλιστική τη χρονική στιγμή t_3 εξαιτίας μίας μετάβασης που συνέβη από τη κατάσταση 1 στη 3, ενώ με $d_3\ t_4$ θα συμβολίζουμε ένα εφάπαξ ποσό πληρωτέο από το ασφαλισμένο σε μία καθορισμένη στιγμή t_4 επειδή ο κίνδυνος βρίσκεται στη κατάσταση 3.

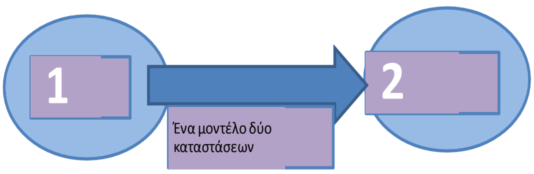
[16] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America

Παραδείγματα Ασφαλιστηρίων συμβολαίων

Παράδειγμα 2.1.

Έστω μία προσωρινή ασφάλιση με ένα σταθερό ασφαλιζόμενο ποσό c και συνεχές ασφάλιστρο με σταθερό ρυθμό p. Έστω ότι το n υποδηλώνει τον όρο του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Στο ακόλουθο διάγραμμα περιγράφονται οι πιθανές μεταβάσεις

Γράφημα 2.1: Παρουσίαση ενός μοντέλου δύο καταστάσεων



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Έτσι έχουμε ότι :

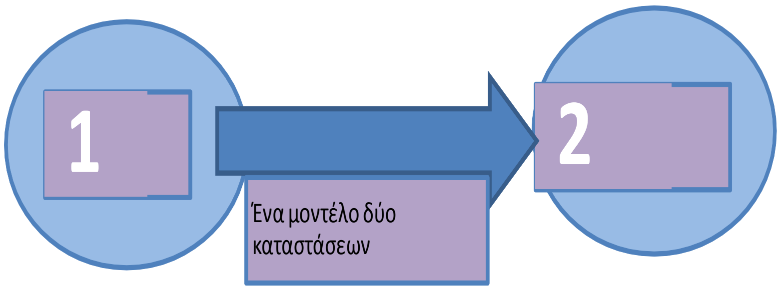
- $c_{12}\ t\ = c, (0 < t \leq n)$
- $p_1\ t\ = \begin{matrix} p\,, εάν\ 0 < t \leq n \\ 0, εάν\ \ t \geq n \end{matrix}$

Είναι αντιληπτό ότι οι συναρτήσεις των κερδών και των ασφαλίστρων που δεν εμφανίζονται για παράδειγμα το $p_2\ t$ θα έχουν τιμή ίση με το 0.

Παράδειγμα 2.2.

Έστω μία ασφάλιση προικοδότησης με ασφαλισμένο ποσό c, στη περίπτωση θανάτου ή στη περίπτωση επιβίωσης στη λήξη. Το γράφημα σε αυτήν την περίπτωση είναι όμοιο με του προηγούμενου παραδείγματος στην περίπτωση συνεχούς καταβολής ασφαλίστρου:

Γράφημα 2.2: Παρουσίαση ενός μοντέλου δύο καταστάσεων



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

$$c_{12}\ t\ = c, (0 < t \le n),\ d_1\ n\ = c, p_1\ t\ = \begin{cases} p\,, εάν\ 0 < t \le n \\ 0, εάν\ \ t \ge n \end{cases}$$

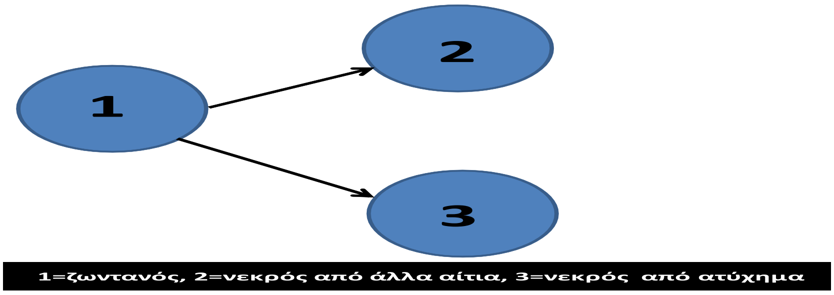
Παράδειγμα 2.3.

Τώρα θεωρούμε μία αναβαλλόμενη πρόσοδο. Τα ασφάλιστρα Έστω ότι πληρώνονται συνεχώς με ένα ρυθμό p στο διάστημα [o,m) όταν ο ασφαλισμένος είναι εν ζωή. Η αποζημίωση σε αυτή τη περίπτωση καταβάλλεται μέσω μίας συνεχούς προσόδου με ένα ρυθμό b μέχρι το θάνατο του ασφαλισμένου. Έτσι οι συναρτήσεις του κέρδους και το ασφαλίστρου είναι οι ακόλουθες $b_1\ t\ = \begin{cases} 0\,, εάν\ 0 < t \le m \\ b, εάν\ \ t \ge m \end{cases}$ και $p_1\ t\ = \begin{cases} p\,, εάν\ 0 < t \le m \\ 0, εάν\ \ t \ge m \end{cases}$

Παράδειγμα 2.4

Στα παραδείγματα που έπονται συνεχίζουμε με το κτίσιμο πιο δύσκολων μοντέλων. Έστω λοιπόν μία προσωρινή ασφάλιση με αποζημίωση συμπληρωματικής ρήτρας σε περίπτωση ξαφνικού θανάτου του ασφαλισμένου. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μία διάκριση μεταξύ ενός ξαφνικού θανάτου και θανάτου εξαιτίας άλλων αιτιών. Η γραφική αναπαράσταση παρουσιάζεται παρακάτω:

Γράφημα 2.4: Ένα μοντέλο τριών καταστάσεων



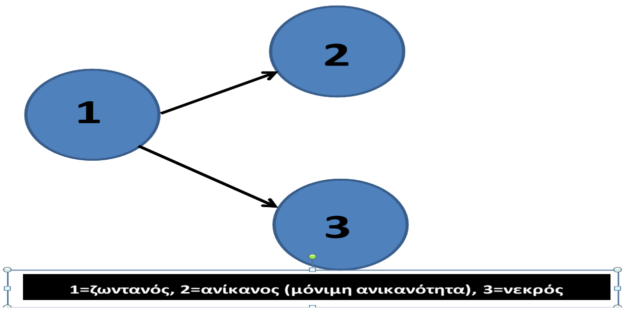
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Οι συναρτήσεις κέρδους και ασφαλίστρων ορίζονται ως ακολούθως:

$c_{12}(t) = c,\ 0 < t \leq n\ , c_{13}(t) = c',\ 0 < t \leq n\ ,\ p_1(t) = \begin{cases} p\ , εάν\ 0 < t \leq n \\ 0, εάν\ \ t \geq n \end{cases}$, όπου $c' > c$, $c' - c$ είναι ένα συμπληρωματικό όφελος σε περίπτωση ξαφνικού θανάτου. Παράδειγμα 2.5.

Έστω τώρα μία ασφάλιση n-ετών η οποία παρέχει ένα όφελος σωρευτικού ποσού σε περίπτωση ολικής ανικανότητας. Σε αυτή τη περίπτωση Έστω ένα μοντέλο τριών καταστάσεων : «ενεργός » «ανίκανος» και «αποβιώσας». Είναι σημαντικό να καταθέσουμε ότι με τον όρο «ανίκανος» υποδηλώνουμε μία μόνιμη και ολική ανικανότητα ενώ με τον όρο «ενεργός » ορίζουμε οποιονδήποτε ασφαλισμένο ο οποίος είναι ζωντανός και παροδικά ανίκανος. Το μοντέλο αναπαρίσταται στο κάτωθι διάγραμμα:

Γράφημα 2.5: Ένα μοντέλο τριών καταστάσεων



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Έστω ότι το c υποδηλώνει το ασφαλισμένο ποσό. Τα ασφάλιστρα θεωρούνται ότι πληρώνονται συνεχώς με ένα ρυθμό p στο [0,n) όταν το συμβόλαιο μένει στη κατάσταση 1, δηλαδή όταν ο ασφαλισμένος είναι ενεργός. Οι συναρτήσεις του οφέλους και των ασφαλίστρων είναι:

- $c_{12}(t) = c, (0 < t \leq n)$

- $p_1 \ t \ = \begin{matrix} p\,,\text{εάν}\ 0 < t \leq n \\ 0,\text{εάν}\ \ t \geq n \end{matrix}$

Το παραπάνω μοντέλο είναι πολύ απλό αλλά από την άλλη μη ρεαλιστικό. Είναι πιο ρεαλιστικό να θεωρήσουμε ότι το εφάπαξ ποσό της αποζημίωσης θα πληρωθεί μετά από μία περίοδο τροποποίησης η οποία ορίζεται από την ασφαλιστική εταιρεία με σκοπό να διαπιστώσει το μόνιμο χαρακτήρα της ανικανότητας. Το μήκος της περιόδου τροποποίησης θα επιλεγεί με ένα τέτοιο τρόπο που η ανάκαμψη θα είναι πρακτικά αδύνατη μετά το πέρας της ανωτέρω περιόδου.

Παράδειγμα 2.6.

Μία πιο πολύπλοκη δομή από αυτή του παραδείγματος 1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρουσιάσουμε την θνησιμότητα εξαιτίας μίας συγκεκριμένης ασθένειας. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τις ακόλουθες τρεις καταστάσεις: «ενεργός» «ανίκανος λόγω της τελική ασθένεια» ή «αποβιώσας». Εάν η πιθανότητα του θανάτου ανάμεσα σε αυτούς που δεν πάσχουν από την ασθένεια θεωρηθεί ότι είναι ικανοποιητικά μικρή οι πιθανές μεταβάσεις παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:

Γράφημα 2.6: Ένα άλλο μοντέλο τριών καταστάσεων

Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Κεφάλαιο 3ο

Μοντελοποίηση Συμβολαίων Ισόβιας Ασφάλισης Ζωής

Παράδειγμα 3.1

Ας περιγράψουμε την ανάπτυξη ενός ατομικού ασφαλιστήριο συμβόλαιο που πληρώνει μια συνεχή πρόσοδο στο στιγμιαίο διάστημα (t, t + dt), αν ο ασφαλισμένος είναι ανίκανος. Έστω x η ηλικία του ασφαλισμένου. Έστω επίσης ότι

$S\ x+t$ αντιπροσωπεύει την τυχαία κατάσταση που βρίσκεται ο ασφαλιζόμενος στην ηλικία x + t; για κάθε t, t> 0 τα πιθανά ενδεχόμενα του. $S\ x+t$ είναι: a=(ενεργός ή υγιής), i =(άκυρο συμβόλαιο ή άτομο με ασθένεια ή αναπηρία), d =(νεκρός).

Για παράδειγμα, η δήλωση $S(_{X+t})$=a σημαίνει ότι ο ασφαλισμένος βρίσκεται σε κατάσταση a στη ηλικία x + t.

Έστω: $\varphi\ x+t\ = P_r\{S\ x+t\ = i \mid S\ x\ = a\}$;

Τότε το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο $a_x^{\alpha_i}$ δίνεται από τον τύπο: $a_x^{\alpha_i} = E\ Y_k\ = \int_0^{+\infty} \Phi\ x,t\ v^t d_t$,

όπου το v είναι ο ετήσιος συντελεστής προεξόφλησης. Σε πιο ρεαλιστικές καταστάσεις η αποζημίωση καταβάλλεται αν και μόνο αν πληρούνται σοβαρές καταστάσεις αναφορικά με τη διάρκεια της ανικανότητας. Ας ορίσουμε το $\varphi^\Gamma\ x,t$ ως τη πιθανότητα ο ασφαλισμένος (υγιής στη ηλικία x) να είναι ανίκανος, και η πρόσοδος σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου να είναι πληρωτέα στη ηλικία x+t. Προφανώς και ισχύει ότι $\varphi^\Gamma\ x,t\ \leq \varphi\ x,t$.

Οι όροι του συμβολαίου[17] μπορούν επίσημα να αντιπροσωπευτούν από ένα σύνολο πέντε παραμέτρων $\Gamma = \ n_1, n_2, f, m, r$ όπου το: Το n_1, n_2 υποδηλώνει τη περίοδο ασφάλισης (μία πρόσοδος είναι καταβλητέα εάν τη στιγμή έναρξης της αναπηρίας ανήκει σε αυτό το διάστημα). Για παράδειγμα $n_1 = c$ είναι η περίοδος αναμονής (από τη έκδοση του συμβολαίου), και το $n_2\ = n$ η διάρκεια του συμβολαίου.

Το f δηλώνει τη αναβαλλόμενη περίοδο (από τη έναρξη της ανικανότητας) Το m δηλώνει ο μέγιστος αριθμός των ετών της προσόδου πληρωμής (από τη έναρξη της ανικανότητας).Το r είναι η στιγμή διακοπής (από τη έκδοση του ασφαλιστηρίου) της προσόδου πληρωμής. Για παράδειγμα εάν το ξ είναι η ηλικία συνταξιοδότησης τότε το $r = \xi - x$ Για παράδειγμα έχουμε ότι $\varphi^{\ 0,\infty,0,\infty,\infty}\ \ x,t\ = \varphi\ x,t$. Η παραπάνω εξίσωση είναι μία συνεχής στο

[17] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America

χρόνο συνάρτηση αφού ο χρόνος ασφάλισης είναι το διάστημα: $n_1, n_2 \; = 0, \infty$ δηλαδή έχουμε μία ισόβια ασφάλιση ζωής με μηδενική περίοδο αναμονής σε αντίθεση με τη εξίσωση του παρακάτω παραδείγματος αφού το διάστημα ασφάλισης τώρα είναι το διάστημα (0,n), και έχω κατά συνέπεια μία πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής n-ετών αναμένουμε λοιπόν την ύπαρξη μίας διακλαδικής εξίσωσης αφού μετά το πέρας των n-ετών παύει η ισχύς του συμβολαίου και $\varphi^{0,n,0,\infty,n}\; x,t \; = \begin{cases} \varphi\; x,t \;\; \text{εάν } t < n \\ 0\,, \text{εάν } t \geq n \end{cases}$. Έτσι το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο (το οποίο υποδηλώνεται με το $a_{x:n}^{a_i}$ σύμφωνα με τη κοινή αναλογιστική σημειωγραφία) για το $\Gamma = \; 0, n, 0, \infty, n$ δίδεται από τη σχέση: $a_{x,\Gamma}^{a_i} = \int_0^{+\infty} \varphi^{\,0,n,0,\infty,n}\;\; x,t \; v^t d_t \; = \int_0^{n} \varphi\; x,t \; v^t d_t$. Η παραπάνω εξίσωση είναι μία ολοκληρώσιμη συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $(0, \infty)$ και εκφράζεται ως γινόμενο της πιθανότητας ο αρχικά υγιής ασφαλισμένος να είναι τη στιγμή $x + t$ σε μία κατάσταση ασθενείας δοθέντος ότι στη ηλικία x που αρχίζει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο με το συντελεστή προεξόφλησης v για t έτη που έχουν παρέλθει από τη έναρξη της ασφάλισης μέχρι και τη παρούσα χρονική στιγμή.

Το Πιθανοθεωρητικό μοντέλο

Στη παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το Μαρκοβιανό μοντέλο. Αρχικά θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία $S \; x + t \; ; t \geq 0$ η οποία είναι μία συνεχής και μη ομογενής στο χρόνο Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων. (Για τους ορισμούς της Μαρκοβιανής αλυσίδας και της ομογενής διαδικασία μπορούμε να ανατρέξουμε στην εισαγωγή.

Μέσω της παραπάνω θεώρησης απορρέει το παρακάτω:

$$P_r \; S \; y_n \; = h_n \; \middle| S \; y_{n-1} \; = h_{n-1} \wedge S \; y_{n-2} \; = h_{n-2} \wedge \ldots . . \wedge S \; y_1 \; = h_1 \qquad \mathit{Markov\ Process}$$

$$P_r \; S \; y_n \; = h_n \; \middle| S \; y_{n-1} \; = h_{n-1} \;\; \forall \, n, h_1 \ldots . . h_n \; , y_1 \; < \cdots < \; y_n$$

Έστω τώρα το ${}_t p_y^{gh}$ υποδηλώνει τις πιθανότητες μετάβασης από τη κατάσταση g στη κατάσταση h. Θα ισχύει ότι: ${}_t p_y^{gh} = P \; S \; y + t \; = h \,\middle|\, S \; y \; = g \; ; h = a, i, d; g = a, i.$

Τότε οι μεταβατικές εντάσεις ορίζονται ως:

$$\mu^{gh} \; y \; = \lim_{t \to 0+} \frac{{}_t p_y^{gh}}{t}; \; h = a, \; i, d; \; g = a, i \, ; h \neq g;$$

Αυτά τα όρια Έστω ότι ισχύουν για όλα τα σχετικά y και οι εντάσεις Έστω ότι είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις του y.

Οι εντάσεις μετάβασης[18] ορίζονται ως: $\mu_{ij}(t) = \lim_{u\to t}\frac{P_{ij}(t,u)}{u-t}$

Αυτά τα όρια θεωρούνται ότι ισχύουν για όλα τα σχετικά t και $i \neq j$. Εάν θεωρήσουμε ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία που έχουμε είναι ομογενής στο χρόνο τότε έχουμε:

$\mu_{ij}(t) = \lim_{u\to t}\frac{P_{ij}(u-t)}{u-t} = \mu_{ij}$.

Έτσι οι εντάσεις μετάβασης είναι σταθερές συναρτήσεις. Επιστρέφουμε τώρα στη εξίσωση $\mu^{gh}(y) = \lim_{t\to 0+}\frac{{}_tp_y^{gh}}{t}$; $h = a, i, d$; $g = a, i$; $h \neq g$; και στις παραδοχές που έχουμε κάνει πάνω σε αυτήν. Μπορούμε πλέον να υποδηλώσουμε τις πιθανότητες πυκνότητας ως:

${}_tp_y^{hh} = P\left(S(y+u) = h \,\forall u \in (o,t) \,\middle|\, S(y) = h\right); h = a, i$.Οι μεταβατικές εντάσεις ικανοποιούν τη σχέση του Chapman - Kolmogorov: ${}_tp_y^{gh} = \sum_{k=a,i} {}_tp_y^{gk}\, {}_{t-\tau}p_{y+\tau}^{kh}$; h=a, i,d; g=a,i

από τη οποία για τις πιθανότητες ${}_tp_y^{hh}$ εύκολα παίρνουμε ότι: ${}_tp_y^{hh} = {}_\tau p_y^{gh}\, {}_{t-\tau}p_y^{hh}; h = a, i.$

Οι μεταβατικές πιθανότητες μετάβασης ικανοποιούν τις ακόλουθες προοπτικές στο χρόνο εξισώσεις :

$\frac{d}{dt}\, {}_tp_y^{aa} = -\,{}_tp_y^{aa}\left(\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)\right) + {}_tp_y^{ai}\mu^{ai}(y+t)$,

Η απόδειξη της εξίσωσης αυτής είναι η εξής:

μέσω της σχέσης ${}_tp_y^{hh} = {}_\tau p_y^{gh}\, {}_{t-\tau}p_y^{hh}; h = a, i.$ που έχουμε ορίσει παραπάνω έχουμε ότι:

${}_{t+\Delta t}p_y^{aa} = {}_tp_y^{aa} * {}_{\Delta t}p_{y+t}^{aa} + {}_tp_y^{ai} * {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ia}$,

και έτσι αφού: $1 - {}_{\Delta t}p_y^{aa} = {}_{\Delta t}p_y^{ai} + {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad}$. ${}_{\Delta t}p_y^{aa} = 1 - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ai} - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad}$,

η προηγούμενη σχέση ισχύει ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ${}_{\Delta t}p_y^{ai} + {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad} + {}_{\Delta t}p_y^{aa} = 1$,

κάτι το οποίο ισχύει επειδή οι παραπάνω πιθανότητες είναι συμπληρωματικές και κατά συνέπεια αθροίζουν στη μονάδα. Η αρχική σχέση λοιπόν γίνεται:

${}_{t+\Delta t}p_y^{aa} = {}_t p_y^{aa}\left(1 - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ai} - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad}\right) + {}_tp_y^{ai} * {}_{\Delta t}\, p_{y+t}^{ia}$.

[18] Chadburn, R.G. Cooper, D.R. and Haberman, S. (1995). Actuarial mathematics , Institute and Faculty of Actuaries Oxford.

$_{t+\Delta t}p_y^{aa} - {}_{t}p_y^{aa} = -{}_{t}p_y^{aa} \; +{}_{\Delta t}p_{y+t}^{ai} - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad} \; + \; tp_y^{ai} \; *_{\Delta t} \; p_{y+t}^{ia}$ κατα μέλλη: /Δt

έχουμε ότι:

$\frac{(_{t+\Delta t}p_y^{aa} - \cdot {}_{t}tp_y^{aa})}{\Delta t} = -{}_{t}p_y^{aa} * \frac{(_{\Delta t}p_{y+t}^{ai} - {}_{\Delta t}p_{y+t}^{ad})}{\Delta t} + {}_{t}p_y^{ai} * \frac{\cdot * {}_{\Delta t}p_y^{ia}}{\Delta t}$

τελικά καθώς το $\Delta_t \to 0$ παίρνουμε ότι:

$\frac{d}{dt}({}_{t}p_y^{aa}) = -{}_{t}p_y^{aa} \;\; \mu^{ai} \; y+t \;\; + \mu^{ad} \; y+t \;\;\; +{}_{t}p_y^{ai}\mu^{ia}(y+t)$

Η παρατήρηση που θα μπορούσε να γίνει πάνω στο αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης είναι η εξής. Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη πιθανότητα ${}_{t}p_y^{aa}$ απορρέει από το γεγονός ότι οι εντάσεις μ^{ai} και μ^{ad} μειώνουν την πιθανότητα ${}_{t}p_y^{aa}$

Μία άλλη διαφορική εξίσωση είναι η:

$\frac{d}{dt}({}_{t}p_y^{ai}) = -{}_{t}p_y^{\alpha i} \;\; \mu^{ia} \; y+t \;\; + \mu^{id} \; y+t \;\;\; +{}_{t}p_y^{aa} \, \mu^{ai} \; y+t$,

Το αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής:

Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη πιθανότητα ${}_{t}p_y^{ai}$ απορρέει από το γεγονός ότι οι εντάσεις μ^{ia} και μ^{id} μειώνουν την πιθανότητα ${}_{t}p_y^{ai}$

Μία άλλη διαφορική εξίσωση που ισχύει είναι η εξής:

$\frac{d}{dt}({}_{t}p_y^{\alpha d}) =_{t} p_y^{aa}\mu^{ad} \;\; y+t \; +{}_{t}p_y^{\alpha i} \, \mu^{id} \;\; y+t$,

Η ερμηνεία της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: Η ένταση θνησιμότητας αυξάνεται στο πέρασμα του χρόνου , γεγονός απόλυτα φυσιολογικό καθώς όσο γερνάει το άτομο είναι ολοένα και πιθανότερο να πεθάνει.

$\frac{d}{dt}({}_{t}p_y^{ia}) = -{}_{t}p_y^{ia} \;\; \mu^{ai} \; y+t \;\; + \mu^{ad} \;\; y+t \;\;\; +{}_{t}p_y^{ii} \, \mu^{ai} \;\; y+t$,

Όπως διαπιστώνεται και σε προηγούμενα αποτελέσματα το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη πιθανότητα ${}_{t}p_y^{ia}$ απορρέει από το γεγονός ότι οι εντάσεις μ^{ai} και μ^{ad} μειώνουν την πιθανότητα ${}_{t}p_y^{ia}$ ενώ η ένταση μ^{ai}αυξάνει την πιθανότητα παραμονής σε κατάσταση ασθενείας $({}_{t}p_y^{ii})$

Ακόμα ισχύει και η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\ \ \mu^{ia}\ \ y+t\ \ +\mu^{id}\ \ y+t\ \ \ +{}_tp_y^{ia}\,\mu^{ai}\ \ y+t$,

Όπως παρατηρούμε εδώ το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη πιθανότητα ${}_tp_y^{ii}$ απορρέει από το γεγονός ότι οι εντάσεις μ^{ia} και μ^{id} μειώνουν την πιθανότητα ${}_tp_y^{ii}$ ενώ η ένταση μ^{ai}αυξάνει την πιθανότητα παραμονής σε κατάσταση ασθενείας $({}_tp_y^{ia})$

Ακόμα έχουμε και την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{id}) ={}_t\ p_y^{ii}\mu^{id}\ \ y+t\ \ +{}_tp_y^{ia}\,\mu^{ad}\ \ y+t$,

Η παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε εδώ είναι ότι εντάσεις μετάβασης μ^{id} και μ^{ad} αυξάνουν τις πιθανότητες (p_y^{ii}) και $({}_tp_y^{ia})$.

Μία ακόμα διαφορική είναι η εξής:

$\frac{d}{dt}(p_y^{aa}) = -{}_tp_y^{aa}\ \ \mu^{ai}\ \ y+t\ \ +\mu^{ad}\ \ y+t$,

Εδώ έχουμε ότι οι εντάσεις μ^{ai}και μ^{ad} μειώνουν την πιθανότητα p_y^{aa}

$\frac{d}{dt}(p_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\ \ \mu^{ia}\ \ y+t\ \ +\mu^{id}\ \ y+t$,

Η παρατήρηση που θα μπορούσε να γίνει πάνω στο αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης είναι η εξής. Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη πιθανότητα ${}_tp_y^{ii}$ απορρέει από το γεγονός ότι οι εντάσεις μ^{ia} και μ^{id} μειώνουν την πιθανότητα ${}_tp_y^{ii}$

Ακόμα ισχύει:

$p_y^{aa} = \exp\ -\ {}_0^t\mu^{ai}\ \ y+u\ \ +\mu^{ad}\ \ y+u\ )du$,

Η παραπάνω εξίσωση όταν ολοκληρωθεί ως προς du μας δίνει τη εξίσωση

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{aa}) = -{}_tp_y^{aa}\ \ \mu^{ai}\ \ y+t\ \ +\mu^{ad}\ \ y+t$, με $0 \leq y \leq t$_ που έχουμε ορίσει παραπάνω.

Η απόδειξη είναι πολύ απλή και παρουσιάζεται παρακάτω:

Ξεκινάμε με τη εξίσωση: $\frac{d}{dt}\ \ tp_y^{aa}\ \ = -{}_tp_y^{aa}\ \ \mu^{ai}\ \ y+t\ \ +\mu^{ad}\ \ y+t$, με $0 \leq y \leq t$

Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη $P_{aa}\ \ y,y\ \ = 1$ παίρνουμε ότι:

$p_y^{aa} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{ai}(y+u) + \mu^{ad}(y+u))du\right)$.

Επιπλέον ισχύει ότι:

$p_y^{ii} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{ia}(y+u) + \mu^{id}(y+u))du\right)$

Η παρατήρηση που μπορεί να γίνει στη παραπάνω εξίσωση είναι ότι όταν ολοκληρωθεί η εξίσωση ως προς du μας δίνει τη εξίσωση $\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\left(\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)\right)$ που έχουμε αναφέρει παραπάνω.

Η απόδειξη συνοψίζεται παρακάτω:

Παίρνω την εξίσωση: $\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\left(\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)\right)$, με $0 \leq y \leq t$

Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη $P_{ii}(y, y) = 1$ παίρνω ότι:

$p_y^{ii} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{ia}(y+u) + \mu^{id}(y+u))du\right)$

Οι εναπομείναντες εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως ακολούθως. Οι εξισώσεις

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{aa}) = -{}_tp_y^{aa}\left(\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)\right) + {}_tp_y^{ai}\mu^{ia}(y+t)$, και η

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ai}) = -{}_tp_y^{\alpha i}\left(\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)\right) + {}_tp_y^{aa}\mu^{ai}(y+t)$,

αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις $({}_tp_y^{aa})$ και $({}_tp_y^{ai})$. Μέσω της διαφοροποίησης και της αντικατάστασης μπορεί να προκύψει μία διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού για τα $({}_tp_y^{aa})$ ή για το $({}_tp_y^{ai})$ και η εξίσωση θα μπορούσε να λυθεί με αριθμητικές μεθόδους . Μετά από τις παραπάνω ενέργειες η εξίσωση:

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{\alpha d}) = {}_tp_y^{aa}\mu^{ad}(y+t) + {}_tp_y^{\alpha i}\mu^{id}(y+t)$, μπορεί να λυθεί. Η ίδια διαδικασία μπορεί να προσαρμοστεί για το υποσύνολο των εξισώσεων:

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{\alpha d}) = {}_tp_y^{aa}\mu^{ad}(y+t) + {}_tp_y^{\alpha i}\mu^{id}(y+t)$,

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ia}) = -{}_tp_y^{ia}\left(\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)\right) + {}_tp_y^{ii}\mu^{ai}(y+t)$

$\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\left(\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)\right) + {}_tp_y^{ia}\mu^{ai}(y+t)$, έτσι εφόσον οι μεταβατικές εντάσεις είναι δεδομένες η σχετικές πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν. Στους υπολογισμούς για ισόβιες ασφάλειες ζωής συχνά απαιτείται η ακόλουθη πιθανότητα:

$$({}_{t}p_{y}^{ai}(\tau)) = P_r\{S(y+u) = i\ \forall u \in [t-\tau, t] \,\big|\, S(y) = a\}, (0 \leq \tau \leq t)\ ,$$

Φυσικά και έχουμε ότι: ${}_{t}p_{y}^{ai}(0) = {}_{t}\,p_{y}^{ai}$ και ότι : ${}_{t}p_{y}^{ai}(\tau) = 0$ όταν $\tau \geq t$

Για $0 \leq \tau \leq t$ μπορεί να προκύψει η ακόλουθη

έκφραση: $${}_{t}p_{y}^{ai}(\tau) = \int_{0}^{t-\tau} {}_{u}p_{y}^{aa}\, \mu^{ai}(y+u)\, {}_{\tau-u}p_{y+u}^{ii}\, du$$

Το προηγούμενο Μαρκοβιανό μοντέλο θεωρεί ότι οι εντάσεις μετάβασης στη ηλικία y εξαρτώνται μονάχα από τη παρούσα κατάσταση στη ηλικία y.

Η υπόθεση ενός ημί-Μαρκοβιανού Μοντέλου.

Πιο ρεαλιστικά και πολύπλοκα μοντέλα[19] μπορούν να κατασκευαστούν θεωρώντας :

a) Τη εξάρτηση μερικών εντάσεων από τη ηλικία x του συμβολαίου
b) Τη εξάρτηση μερικών εντάσεων από το χρόνο που δαπανείται στη παρούσα κατάσταση από τη τελευταία μετάβαση σε αυτή τη κατάσταση.
c) Τη εξάρτηση μερικών εντάσεων από το συνολικό χρόνο που δαπανείται στη κατάσταση α και i από τη αρχή του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Η μελέτη του a) (εξαρτάται από τη διάρκεια από τη έναρξη του ασφαλιστηρίου συμβολαίου) συνεπάγεται τη χρησιμοποίηση εντάσεων μετάβασης, ενώ η μελέτη του b) (εξαρτάται από τη διάρκεια στη παρούσα κατάσταση υγείας) αφορά κυρίως μεταβάσεις από τη κατάσταση i και απαιτεί εντατικά επιλεγόμενες εντάσεις μετάβασης. Τελικά ο σκοπός του c) είναι να τονίσει το ιστορικό υγείας του ασφαλισμένου.

Οι παραπάνω αναφερόμενες υποθέσεις περιπλέκουν πολύ τα αναλογιστικά μοντέλα. Από την άλλη μπορούμε να ορίσουμε μοντέλα θεωρώντας απλά τη υπόθεση b), περιοριζόμενη από εντάσεις μετάβασης από τη κατάσταση i δηλαδή ένταση ανάρρωσης $(i \to a)$ και θανάτου για ανίκανα εν ζωή άτομα $(i \to d)$. Φυσικά η Μαρκοβιανή ιδιότητα της διαδικασίας $\{S(x+t);t \geq 0\}$ έχει χαθεί. Μπορεί να αποδειχθεί γενικά ότι η υπόθεση b) οδηγεί σε ημί-Μαρκοβιανές δομές

[19] Amsler, M.H., (1968) Les chaines de Markov des assurance vie, invalidite et maladie, Mùnchen

ως προς τη διαδικασία $S(x+t);t\geq 0$.Έστω $Z(y)$ υποδηλώνει το τυχαίο χρόνο, ο οποίος δαπανείται στη παρούσα κατάσταση στη ηλικία y μέχρι τη τελευταία μετάβαση σε αυτή τη κατάσταση. Ισχύει ότι: $Z(y) = \max\{w\colon (w \leq y) \cap (S(y-\tau) = S(y)\ \forall \tau \in (0,w))\}$

Σύμφωνα με τη υπόθεση b), θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη οι ακόλουθες πιθανότητες:

$\cdot_t\mathrm{p}_{y,z}^{ih} = \mathrm{P_r}\{\mathrm{S}(\mathrm{y}+\mathrm{t}) = \mathrm{h} \,|\, \mathrm{S}(\mathrm{y}) = \mathrm{i}) \cap (\mathrm{Z}(\mathrm{y}) = \mathrm{z})\}, \mathrm{h} = \mathrm{a}, \mathrm{i}, \mathrm{d};$ και ακόμα η

$\cdot_t p_{y,z}^{ii} = P_r\{S(y+u) = i \forall u \in (0,t] \,|\, S(y) = i) \cap (Z(y) = z)\}$ \η οποία καταλήγει τελικά στη σχέση $\cdot_t\mathrm{p}_{y,z}^{ii} = \mathrm{P_r}\{\mathrm{S}(\mathrm{y}+\mathrm{t}) = \mathrm{i} \wedge (\mathrm{Z}(\mathrm{y}+\mathrm{t}) = \mathrm{z}+\mathrm{t} \,|\, \mathrm{S}(\mathrm{y}) = \mathrm{i} \wedge \mathrm{Z}(\mathrm{y}) = \mathrm{Z}\}$

Το σύστημα αυτών των διαφορικών εξισώσεων μπορεί να αντικατασταθεί από ένα πιο σύνθετο σύστημα διαφορικών και ολοκληρωτικών – διαφορικών εξισώσεων[20]. Για παράδειγμα η εξίσωση: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}({}_t\mathrm{p}_y^{\alpha\alpha}) = -{}_t\mathrm{p}_y^{\alpha\alpha}\left(\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)\right) + {}_t\mathrm{p}_y^{\alpha i}\,\mu^{ai}(y+t)$,

θα έπρεπε να αντικατασταθεί από τη σχέση:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\cdot_t\mathrm{p}_y^{\alpha\alpha}\right) = -{}_t\mathrm{p}_y^{\alpha\alpha}\left(\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)\right) + \int_0^t \cdot_{t-z}\mathrm{p}_y^{\alpha\alpha}\left(\mu^{ai}(y+t-z)\right)\,{}_z\mathrm{p}_{y+t-z,0}^{ii}\,\mu^{ia}(y+t,z)\,\mathrm{dz},$$

Με άμεσο συλλογισμό είναι αναγκαίο να λάβουμε υπόψη τις πιθανές πραγματοποιήσεις z στο τυχαίο χρόνο ο οποίος δαπανείται στη κατάσταση i προ της μετάβασης $i \to a$ στη ηλικία y+t). Απεναντίας η εξίσωση: $\frac{d}{dt}({}_tp_y^{ii}) = -{}_tp_y^{ii}\left(\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)\right)$, πρέπει να αντικατασταθεί από τη ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$\frac{d}{dt}({}_tp_{y+z}^{ii}) = -{}_tp_{y,z}^{ii}\left(\mu^{ia}(y+t,z+t) + \mu^{id}(y+t,z+t)\right)$, της οποίας η λύση είναι: ${}_tp_{y+z}^{ii} = \exp\left(-\int_0^t(\mu^{ia}(y+u,z+u) + \left(\mu^{ia}(y+t,z+t) + \mu^{id}(y+u,z+u)\right)du\right)$

Τώρα θα μπορούσαμε να δώσουμε τον ορισμό μίας ημι-μαρκοβιανής διαδικασίας:

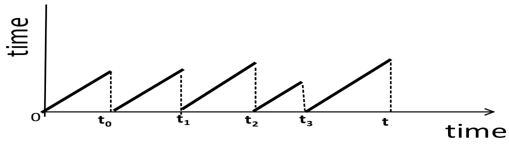
Έστω μία στοχαστική διαδικασία: $(S(t),R(t);t \geq 0)$, όπου το S(t) είναι μία τυχαία κατάσταση που καταλαμβάνεται από το κίνδυνο τη στιγμή t.Το $S(t)$ παίρνει τιμές στο χώρο καταστάσεων $\complement\{1,2 \ldots N\}$ και το R(t) είναι ο χρόνος που δαπανείται στη κατάσταση $S(t)$ μέχρι τη στιγμή t μέχρι τη τελευταία μετάβαση αυτή τη κατάσταση:

$R(t) = \max\{\tau\colon \tau \leq t, S(t-h) = S(t)\ \forall h \in (0,\tau)\}$ και R(t) παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,+\infty)$. Έτσι η νέα στοχαστική διαδικασία μπορεί να οριστεί ως ένα ζεύγος συνεχών στο χρόνο στοχαστικών διαδικασιών $\{S(t)\},\{R(t)\}$ που παίρνει τιμές στο $\complement \times [0,+\infty)$.Έτσι το $\complement \times [0,+\infty)$

[20] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America.

είναι ένας νέος χώρος καταστάσεων. Ένα απλό μονοπάτι του $\{R\ t\ \}$ παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα. Να σημειωθεί ότι για οποιαδήποτε δοθείσα κατάσταση μετάβασης στους χρόνους $t_0, t_1, t_2 \ldots..$ το απλό μονπάτι $\{R\ t\ \}$ είναι το ίδιο οποιαδήποτε και αν είναι η ακολουθία των καταστάσεων που επισκέπτεται από την $\{S\ t\ \}$,

Διάγραμμα 3.1



Ας θεωρήσουμε ότι $\{S\ t\ , R\ t\ , t \geq 0\}$ είναι μία συνεχής και μη ομογενής Μαρκοβιανή διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t όλες οι υπό συνθήκη πιθανότητες σχετικά με το μέλλον της διαδικασίας μετά τη στιγμή t εξαρτώνται μονάχα από τις πιο πρόσφατες πληροφορίες, για παράδειγμα τη παρούσα κατάσταση, $S\ t\ = i$, και το χρόνο που υπολείπεται μέχρι τη τελευταία μετάβαση σε αυτή τη κατάσταση, $R\ t\ = r$. Έτσι οι προαναφερθείσες υπό συνθήκη πιθανότητες δεν εξαρτώνται από τις πληροφορίες όσον αφορά το μονοπάτι της διαδικασίας πριν τη στιγμή t, όποιες και αν είναι αυτές οι πληροφορίες.

Κατά συνέπεια χρησιμοποιούμενης ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης $P_{i,j}\ t, u, r, w\ = P_r\ S\ u\ = j \cap R\ u\ \leq w\ S\ t\ = i \cap R\ t\ = r\ $, για $0 \leq t \leq u$ και $r, w \geq 0$. Ακόμα για $t = u$ ορίζουμε: $P_{i,j}\ t, u, r, w\ = \delta_{ij}\varepsilon(w - r)$ όπου $\varepsilon\ y\ = 0$ ανάλογα αν $y < 0$ ή $y \geq 0$. Τότε οι πιθανότητες μετάβασης $P_{i,j}\ t, u, r, w$ ορίζονται για $0 \leq t \leq u$.

Ένα γενικό συνεχές μοντέλο για ισόβιες ασφαλίσεις ζωής.

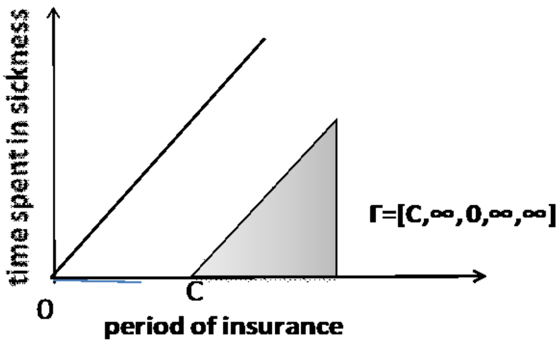
Ας επιστρέψουμε στις πιθανότητες $\varphi^{\Gamma}(x,t)$.Το πιθανοθεωρητικό μοντέλο που έχει περιγραφεί σε προηγούμενη ενότητα μας αφήνει περιθώρια για απλές εκφράσεις αυτών των πιθανοτήτων. Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε το Μαρκοβιανό μοντέλο και για αυτό το λόγο δεν Έστω καμία επιλεγμένη ένταση. Ιδιαίτερα έχουμε[21] προφανώς ότι: $\varphi\ x, t\ = \varphi^{[0,\infty,0,\infty,\infty]}\ x, t\ =_t p_x^{ai}$.Στη συνέχεια ακολουθούν μερικά παραδείγματα τα οποία αφορούν πιο ρεαλιστικές καταστάσεις ασφαλιστηρίων συμβολαίων:

[21] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America.

<u>Ασφαλιστήριο συμβόλαιο με περίοδο ασφάλισης το διάστημα c, ∞</u>

- $\varphi^{c,\infty,0,\infty,\infty}\ x, t \ = \begin{cases} 0 \text{ εάν } t \leq c, \\ {}_{\cdot t}p_x^{ai} - {}_{t}p_x^{ai}\ t-c \ \text{ εάν } t > c \end{cases}$

Διάγραμμα 3.2



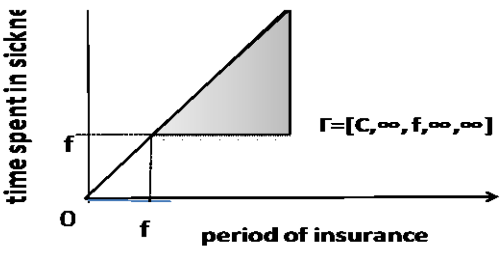
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Στη παραπάνω εξίσωση η περίοδος ασφάλισης είναι το διάστημα $n_1, n_2 \ = \ c, \infty$ με περίοδο αναμονής από τη έναρξη του ασφαλιστηρίου συμβολαίου το χρονικό διάστημα $n_1 = c$.Το ασφαλιστήριο συμβόλαιο ξεκινάει λοιπόν από τη στιγμή c και μετά. Για το παραπάνω λόγο η εξέταση των πιθανοτήτων $\varphi^{\Gamma}(x, t)$ αρκούνται στο διάστημα $t > c$.

<u>Ισόβια ασφάλιση με μία αναβαλλόμενη περίοδο ίση με f</u>

- $\boldsymbol{\varphi}^{0,\infty,\mathbf{f},\infty,\infty}\ \mathbf{x}, \mathbf{t} \ = \begin{cases} \mathbf{0} \textbf{ εάν } \mathbf{t} \leq \mathbf{f}, \\ {}_{\cdot t}\mathbf{p}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{ai}}\ \mathbf{f} \ \textbf{ εάν } \mathbf{t} > \mathrm{f} \end{cases}$

Διάγραμμα 3.3



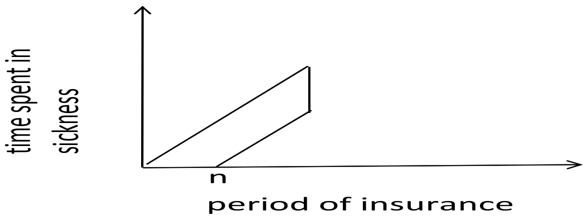
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Η παραπάνω εξίσωση αφορά ασφαλιστήριο συμβόλαιο για ισόβια ασφάλιση με μία αναβαλλόμενη περίοδο ίση με $\boldsymbol{f}$.Το χρονικό διάστημα που χρήζει μελέτης εδώ λοιπόν είναι το διάστημα $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{f}$ ενώ οτιδήποτε συμβαίνει πιο πριν δεν καλύπτεται από τους όρους του συμβολαίου .

Ασφάλιση διάρκειας n ετών με μηδενική περίοδο αναμονής και άπειρο χρόνο προσόδων πληρωμών

- $\varphi^{[0,n,0,\infty,\infty]}(x,t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} & \text{εάν } t < n, \\ {}_t p_x^{ai}(t-n) & \text{εάν } t \geq n \end{cases}$

Διάγραμμα 3.4



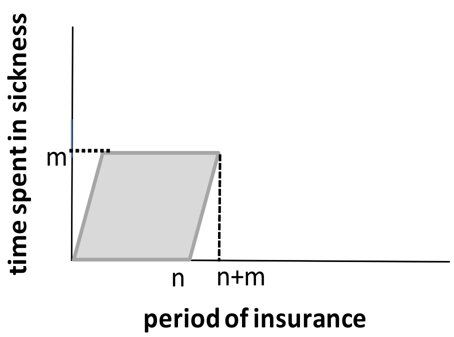
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται σε μία ασφάλιση διάρκειας n ετών με μηδενική περίοδο αναμονής και άπειρο χρόνο προσόδων πληρωμών .Η ασφαλιστική εταιρεία δέχεται τη πιθανότητα ασθενείας ενός ατόμου στο διάστημα $t < n$ σαν αν είναι σταθερή. Παράλληλα όμως μας ενδιαφέρει και η πιθανότητα να ασθενήσει το άτομο στο χρονικό διάστημα $t - n$ εάν ισχύει ότι $t \geq n$ γιατί ο μέγιστος αριθμός των προσόδων πληρωμών είναι άπειρος. Αυτή τη φορά όμως η πιθανότητα μετάβασης από τη υγιής κατάσταση στη κατάσταση ασθενείας είναι διαφορετική και λογικά μεγαλύτερη (όσο αυξάνεται η ηλικία ενός ατόμου τόσο αυξάνεται η πιθανότητα ασθένειας του.).Το διάστημα $t \geq n$ μας ενδιαφέρει παρόλο που έχει λήξει το διάστημα της ασφάλειας διοτί εξακολουθούμε να έχουμε τις προσόδους των πληρωμών .

Ισόβια ασφάλιση με προσόδους πληρωμών ίσες με m.

- $\varphi^{[0,\infty,0,m,\infty]}(x,t) = {}_t p_x^{ai} - {}_t p_x^{ai}(m)$

Διάγραμμα 3.5



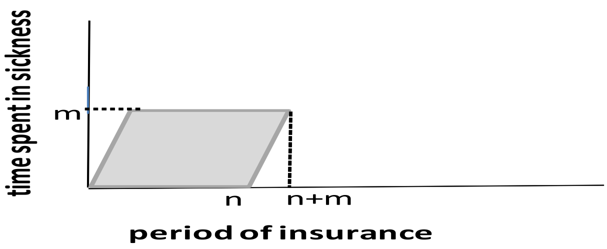
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Η προκειμένη περίπτωση αναφέρεται σε μία ισόβια ασφάλιση με κάποιο χρονικό όριο στις προσόδους των πληρωμών ίσο με m. Στη προκειμένη περίπτωση προς αποφυγή εκτίμησης μίας μεγαλύτερης πιθανότητας ασθενείας με άμεσο επακόλουθο ένα μεγαλύτερο ασφάλιστρο για το υπολογισμό της εκτιμώμενης πιθανότητα ασθενείας αφαιρούμε τη πιθανότητα: ${}_t\mathrm{p}_x^{\mathrm{ai}}$ m .

Πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με μέγιστο αριθμό ετών προσόδων πληρωμών ίσο με m

- $\varphi^{[0,n,0,m,\infty]}\ x,t \ = \ \begin{matrix} [{}_tp_x^{ai}(\max(0,\mathrm{t}-\mathrm{n}))] - {}_tp_x^{ai}(m)\ εάν\ t \le n+m, \\ 0\ εάν\ t \ge n+m \end{matrix}$

Διάγραμμα 3.6



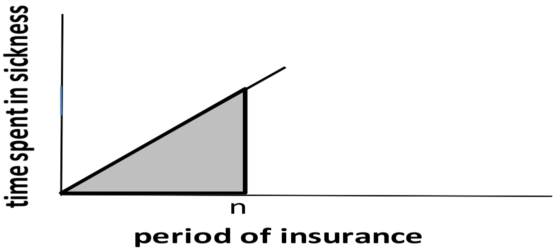
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Εδώ έχουμε να κάνουμε με μία πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με μέγιστο αριθμό ετών προσόδων πληρωμών ίσο με m.Το χρονικό διάστημα ασφάλισης είναι το διάστημα $t \le n+m$ το οποίο περιορίζεται από τα χρόνια της ασφάλισης αφενώς και από μέγιστο αριθμό των προσόδων πληρωμών αφετέρου.

Πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα n έτη.

- $\varphi^{\ 0,n,0,\infty,n}\ \ x,t \ = \ \begin{matrix} \cdot_t\, p_x^{ai}\ εάν\ t < n, \\ 0\ εάν\ t \ge n; \end{matrix}$

Διάγραμμα 3.7



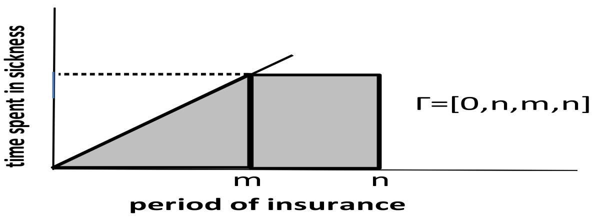
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Η περίπτωση αυτή αναφέρεται σε μία πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα n έτη. Κάτω από τους παραπάνω περιορισμούς το διάστημα που ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τη πιθανότητα μετάβασης σε κατάσταση ασθενείας από μία υγιής κατάσταση ενός ατόμου είναι το διάστημα $t < n$.

<u>Πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα n έτη και μέγιστο αριθμό ετών προσόδου πληρωμής τα m έτη.</u>

- $\varphi^{[0,n,0,m,n]}\ x,t \ = \begin{cases} \cdot_t\, p_x^{ai} - {}_t p_x^{ai}(m) \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ t < n, \\ 0 \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ t \geq n; \end{cases}$

Διάγραμμα 3.8



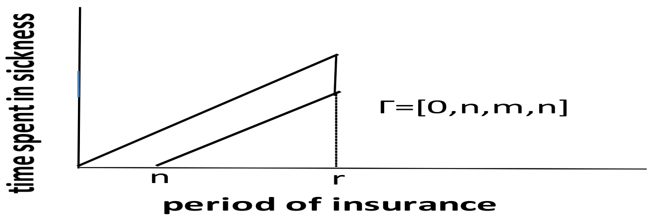
Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Έχουμε να κάνουμε με μία πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα n έτη και μέγιστο αριθμό ετών προσόδου πληρωμής τα m έτη. Η ασφάλιση μας διακόπτεται στα n έτη από τη έναρξη του ασφαλιστηρίου συμβολαίου για αυτό υπάρχει η διακλαδική συνάρτηση και ο περιορισμός $t < n$ στη εκτίμηση της πιθανότητας ασθενείας του άνω μέρους της δικλαδικής συνάρτησης.Ταυτόχρονα η εκτίμησή μας για τη πιθανότητα ασθενείας περιορίζεται από το παράγοντα των ετών των προσόδων πληρωμών.

<u>Πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα r έτη και άπειρο αριθμό ετών προσόδων πληρωμής</u>

- $\varphi^{[0,n,0,\infty,r]}\ x,t \ = \begin{cases} \cdot_t\, p_x^{ai} \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ t < n, \\ \cdot_t\, p_x^{ai} \ \ t - n \ \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ n \leq t < r \\ 0 \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ t \geq r \end{cases}$

Διάγραμμα 3.9



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Στη προκείμενη περίπτωση αναφερόμαστε σε μία πρόσκαιρη ασφάλιση n ετών με στιγμή διακοπής της προσόδου τα r έτη και άπειρο αριθμό ετών προσόδων πληρωμής. Η περίοδος που εξετάζουμε διακόπτεται από τη στιγμή διακοπής της προσόδου. Ακόμα η εξεταζόμενη περίοδος χωρίζεται σε δύο χρονικά διαστήματα α) το $t < n$ και β) το $n \leq t < r$ διότι προφανώς στο πρώτο διάστημα έχουμε i) την ισχύς της ασφάλισης και ii) την ισχύ της καταβαλλόμενης προσόδου. Στο δεύτερο διάστημα έχει λήξει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο και το μοναδικό σκέλος εν ισχύ είναι η καταβαλλόμενη πρόσοδος. Επιπλέον η πιθανότηταα ${}_tp_x^{ai}$ αυτή μπορεί να εκφραστεί ως εξής : ${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_up_x^{aa}\, \mu^{ai}(y+u)_{t-u}p_{y+u}^{ii}\, du$ και από τις σχέσεις:

$$\varphi\ x,t\ = \varphi^{[0,\infty,0,\infty,\infty]}\ x,t\ =_t p_x^{ai} \text{ και } \varphi^{\ 0,\infty,f,\infty,\infty}\ x,t\ = \begin{cases} 0 \text{ εάν } t \leq f, \\ \cdot_t\, p_x^{ai}\ f \ \text{ εάν } t > f \end{cases}$$

έχουμε ότι: $a_x^{ai} = \int_0^{+\infty} \varphi(\chi,t) v^t dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x^{ai} v^t dt$

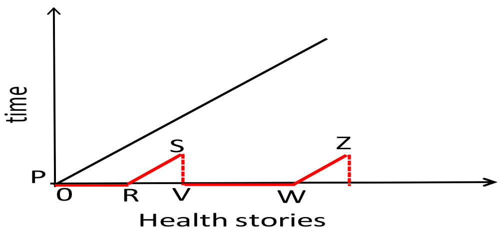
Η παράγωγος της ${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_up_x^{aa}\, \mu^{ai}(y+u)_{t-u}p_{y+u}^{ii}\, du$ είναι:

$a_x^{ai} = \int_0^{+\infty}\int_0^t u^t{}_up_x^{aa}\, \mu^{ai}(x+u)_{t-u}p_{x+u}^{ii} du dt$ και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης παίρνουμε $a_x^{ai} = \int_0^t \cdot_u p_x^{aa}\, \mu^{ai}\ \chi+u\ u^u \int_u^{+\infty} \cdot_{t-u}\, p_{x+u}^{ii} u^{t-u} dt\ du$. Στην τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα μέσα στις αγκύλες είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία στη ηλικία x+u μίας συνεχούς προσόδους πληρώσιμη σε ένα ανίκανο ασφαλισμένο στην κατάσταση αναπηρίας μέχρι την ανάρρωση του ή το θάνατο του.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η φόρμουλα $a_x^{ai} = \int_0^{+\infty} \varphi(\chi,t) v^t dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x^{ai} v^t dt$ βασίζεται στη πιθανότητα αναπηρίας i από την κατάσταση πλήρους υγείας a. $({}_tp_x^{ai})$ ενώ η $a_x^{ai} = \int_0^t \cdot_u p_x^{aa}\, \mu^{ai}\ \chi+u\ u^u \int_u^{+\infty} \cdot_{t-u}\, p_{x+u}^{ii} u^{t-u} dt\ du$ βασίζεται στη πιθανότητα παραμονής σε κατάσταση αναπηρίας.

Μέσω της γραφικής παράστασης μπορούμε να εξετάσουμε τον υπολογισμό των ατομικών ασφαλίστρων για διάφορες συνθήκες Γ των ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Το παρακάτω γράφημα μας εκφράζει μία πιθανή εξέλιξη αναπηρίας[22] για ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο ζωής. Ο ασφαλισμένος μετακινείται στο οριζόντιο άξονα όσο παραμένει υγιής .Στο σημείο R του διαγράμματος μεταβαίνει σε κατάσταση ασθενείας μετακινείται ανοδικά μέχρι να επανακάμψει (RS) , μετά είναι υγιής ξανά (VW), μεταβαίνει σε κατάσταση ασθενείας και τελικά πεθαίνει στο διάστημα (WZ).

Διάγραμμα 3.10



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Οποιοδήποτε ατομικό ασφάλιστρο μπορεί να ερμηνευτεί ως η τιμή ενός ολοκληρώματος σε ένα συγκεκριμένο σχετικό χωρίο. Για να αποδειχθεί κάτι τέτοιο Έστω μία συνάρτηση ψ: $\psi(x,u,t) = {}_{t-z}p_x^{aa}\mu^{ai}(\chi+u)\,{}_{t-u}p_{x+u}^{ii}$ ή $\psi(x,t-z,t) = {}_{t-z}p_x^{aa}\mu^{ai}(\chi+t-z)\,{}_{t-z}p_{x+t-z}^{ii}$.Έτσι για $\Gamma = (0,n,0,\infty,\infty)$ παίρνουμε: $a_{x,\Gamma}^{ai} = \int_0^n {}_t p_x^{ai}\, u^t dt + \int_n^{+\infty} {}_t p_x^{ai}(t-n)\, u^t dt =$

$\int_0^n \int_0^t \psi(x,u,t)\, u^t du dt + \int_n^{+\infty} \int_0^n \psi(x,u,t)\, u^t du dt$.

$a_{x,\Gamma=}^{ai} \int_0^n \left(\int_0^t \psi(x,t-z,t) dz\right) dt + \int_n^{+\infty} \int_{t-n}^{t} \psi(x,t-z,t)\, u^t dr dt$

---

[22] Pitacco, E. (1995). Collective life insurance indexing. A multistate approach, Brussels

Ενότητα 4η

Τα κυριότερα Αναλογιστικά Μοντέλα

Η χρησιμότητα[23] ενός μοντέλου ισόβιας ασφάλισης υγείας θα μπορούσε να συνοψιστεί ως ακολούθως :

a) Την παρακολούθηση της εμπειρίας ενός χαρτοφυλακίου ασφάλισης ισόβιας υγείας και συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών χαρτοφυλακίων.
b) Η δημιουργία ενός συνόλου πινάκων ή εντάσεων για να χρησιμοποιηθούν ώστε να υπολογιστούν τα ασφάλιστρα και τα αποθεματικά για συμβόλαια ισόβιας ασφάλισης υγείας.

Για να είμαστε σε θέση να εκτελέσουμε αυτές τις συναρτήσεις, το μοντέλο πρέπει να πληρεί τα ακόλουθα να είναι ρεαλιστικό, και απλό, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή του, αλλά όχι τόσο απλό ώστε να αγνοεί τα βασικά χαρακτηριστικά του ασφαλιστηρίου συμβολαίου

Εν συνεχεία θα προχωρήσουμε σε μία εξέταση των αναλογιστικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για ασφαλίσεις ασθενείας. Η εξέταση μας θα γίνει υπό το πρίσμα του γενικού μοντέλου που έχουμε αναπτύξει σε προηγούμενη ενότητα.

Πρέπει να σημειωθεί παρόλα αυτά ότι στη πράξη διαφορετικά μοντέλα μπορεί να είναι κατάλληλα για διαφορετικούς σκοπούς. Για παράδειγμα ένα μοντέλο αποθεματικών μπορεί κάλλιστα να είναι λιγότερο σύνθετο από ένα μοντέλο τιμολόγησης συμβολαίων ισόβιας ασφάλισης. Όμως τα πλεονεκτήματα που έχει κάποιος από ένα αρκετά ενιαίο πολύπλοκο μοντέλο είναι τα εξής :

a) από ένα πιο σύνθετο μοντέλο μπορούν να προκύψουν πιο απλά μοντέλα.
b) Ένα πιο σύνθετο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άσκηση ελέγχου στις απλοποιήσεις ή τις προσεγγίσεις που κάνουν πιο απλά μοντέλα

a) Το Νορβηγικό Μοντέλο

Ας θεωρήσουμε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο οριζόμενο με τη χρήση της συνάρτησης $\Gamma = [0, \mathrm{n}, 0, \infty, \mathrm{n}]$. Έτσι λοιπόν η περίοδος ασφάλισης είναι το διάστημα $[0, n]$ με μηδενική περίοδο αναμονής, μηδενική αναβαλλόμενη περίοδο, μη ύπαρξη μεγίστου αριθμού ετών από λειτουργικά

[23] Amsler, MH (1968) Markov chains for life insurance, disability and sickness, Munchen

οφέλη, και στιγμή διακοπής του ασφαλιστηρίου όπως ορίζεται από το συμβόλαιο. Τότε το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο ορίζεται ως : $\alpha^{ai}_{\chi:\overline{n}} = \int_0^n {}_t p^{ai}_x v^t dt$

Έστω ότι το j_{x+t} υποδηλώνει την πιθανότητα ένα άτομο να είναι σε κατάσταση ασθενείας στη ηλικία x+t δοθέντος ότι ήταν υγιής στη ηλικία x και ότι είναι εν ζωή στη ηλικία x+t.Τότε: $j_{x+t} = P_r\ S\ x+t\ = i \mid [S\ x\ = a\ \cap\ S\ x+t\ = a\ \cup S\ x+t\ = i)]]\}$.Επιπλέον

$P_r\ S\ x+t\ = a \cup S\ x+t\ = i \mid S\ x\ = a\ = {}_t p^{a\alpha}_x + {}_t p^{ai}_x$ και συνεπώς έχουμε ότι:

${}_t p^{ai}_x = ({}_t p^{aa}_x + {}_t p^{ai}_x) j_{x+t}$.Κατά συνέπεια το ατομικό ασφάλιστρο δίδεται από τη σχέση:

$$\alpha^{ai}_{\chi:\overline{n}} = \int_0^n ({}_t p^{aa}_x + {}_t p^{ai}_x)\, j_{x+t}\, v^t dt.$$

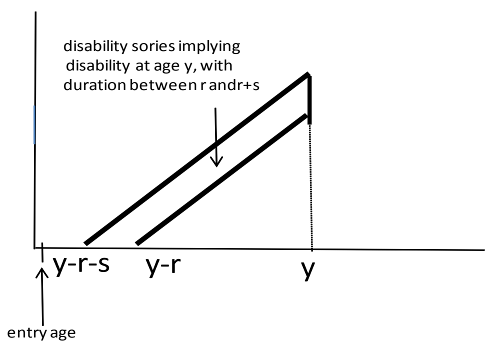
Εάν προσεγγίσουμε τη πιθανότητα $({}_t p^{a\alpha}_x + {}_t p^{ai}_x)$ χρησιμοποιώντας μία απλή πιθανότητα επιβίωσης $\frac{l_{x+t}}{l_x}$ (ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης στη ηλικία x), παίρνουμε τη φόρμουλα που χρησιμοποιείται στη επονομαζόμενη Νορβηγική μέθοδο και η οποία είναι η εξής:

$$\alpha^{ai}_{\chi:\overline{n}} \cong \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} \times j_{x+t}\, v^t dt.$$

Έπεται ότι η Νορβηγική μέθοδος βασίζεται στη πιθανότητα ενός ατόμου να μεταβεί σε κατάσταση ασθενείας. Αν υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο καταβάλλεται όταν ο ασφαλισμένος είναι σε κάποια κατάσταση πλήρους υγείας, θα έχουμε ότι: $\alpha^{aa}_{\chi:m} = \int_0^m {}_t p^{aa}_x v^t dt$ και για τα ασφάλιστρα σύγκρισης των επιπέδων θα έχουμε ότι: $\overline{P}_{x:m,n} = \frac{a^{ai}_{x:n}}{a^{aa}_{x:m}}$

b) Το Μοντέλο του Manchester Unity .

Διάγραμμα 4.1



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1994)

Ας θεωρήσουμε τη πιθανότητα f_{x+t} ότι ένα άτομο είναι ασθενές στη ηλικία x+t δοθέντος ότι είναι εν ζωή στη ηλικία x+t (χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τη κατάσταση στη ηλικία x του ασφαλισμένου τη στιγμή σύναψης του συμβολαίου). Η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως:

$\mathrm{f}_{x+t} = \mathrm{P_r}\ S\ x+t\ = i \,|\, S\ x+t\ = a\ \cup S\ x+t\ = i)\}$. Θεωρούμε τη ακόλουθη προσέγγιση για το ατομικό ασφάλιστρο: $\alpha^{ai}_{\chi:\overline{n}} \cong \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\ f_{\ x\ +t}\, v^t dt$. Από τη σχέση αυτή διαφαίνεται ότι η τεχνική αυτή βασίζεται στη πιθανότητα αναπηρίας του ασφαλισμένου. Πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ η πιθανότητα $j_{\ x\ +t}$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών x και t, η πιθανότητα $\mathrm{f}_{\chi+t}$ εξαρτάται μόνο από τη ηλικία $x+t$. Έπεται λοιπόν ότι για ένα ασφαλισμένο ηλικίας $x+t$ και σε κατάσταση ασθενείας στη παραπάνω ηλικία, μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε προηγούμενη ηλικία ως πιθανή ηλικία έναρξής της παρούσας κατάστασης ανικανότητας, ενώ μόνο ανικανότητες γενομένης μετά τη ηλικία εισόδου x μπορεί να οδηγήσουν στη παρούσα κατάσταση αναπηρίας. Για το ατομικό ασφάλιστρο $\alpha^{ai}_{x:\overline{n}}$ μπορούμε να υιοθετήσουμε την ακόλουθη προσέγγιση: $\int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\ f_{\chi+t}\, v^t dt = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{l_x} \int_0^1 f_{x+h-1+\tau} l_{x+h-1+\tau}\, v^{h-1+\tau}\, d\tau \cong$ $\sum_{h=1}^{n} \frac{l_{x+h-1\ 2}}{l_x} v^{h-1\ 2}\ \frac{\int_0^1 f_{x+h-1+\tau} l_{x+h-1+\tau}\, d\tau}{\int_0^1 l_{x+h-1+\tau}\, d\tau}$, ορίζοντας τη παρακάτω συνάρτηση:

$\theta_y = \frac{\int_0^1 f_{y+\tau} l_{y+\tau}\, d\tau}{\int_0^1 l_{y+\tau}\, d\tau}$, η οποία μας παρουσιάζει τη αναλογία του αναμενόμενου χρόνου που δαπανείται στη ασθένεια μεταξύ των ηλικιών y και y+1, από τη οποία παίρνουμε τη προσέγγιση για το ατομικό ασφάλιστρο: $\alpha^{ai}_{\chi:\overline{n}} \cong \sum_{h=1}^{n} \frac{l_{x+h-1\ 2}}{l_x} v^{h-1\ 2} \theta_{x+h-1}$

Προσεγγίσεις χρήσιμες στη ασφαλιστική πρακτική θα μπορούσαν να εφαρμοστούν μέσω των πιθανοτήτων $f_y^{\ r\ \ s}$ κατά τις οποίες ο ασφαλισμένος ηλικίας y είναι ανίκανος προς εργασία με διάρκεια ανικανότητας r και $r+s$.Το παρακάτω διάγραμμα μας παρουσιάζει ένα σύνολο από ανικανότητες οι οποίες συνεπάγονται ανικανότητα στη ηλικία y με διάρκεια μεταξύ r και r+s. Η πιθανότητα $f_y^{\ r\ \ s}$ μπορεί προσεγγιστικά να εκφραστεί σε όρους πιθανοτήτων: ${}_t p^{ah}_{x0}$ με $h = a, i$ και ${}_{\cdot t}\, p^{ai}_{x0}(\tau)$ όπου το x_0 υποδηλώνει μία ηλικία στη οποία το άτομο είναι υγιές. Για αυτό το λόγο ας θεωρήσουμε τη πιθανότητα ένα άτομο, υγιές στη ηλικία x_0, να είναι ζωντανό στη ηλικία y, $P_r\{\ S\ y\ = a\ \cup\ S\ y\ = i \,|\, S\ x_0\ = a\ ={}_{y-x_0}\, p^{aa}_{x0} + {}_{y-x_0} p^{ai}_{x0}$, και η πιθανότητα να είναι ανίκανος στη ηλικία y με διάρκεια ανικανότητας μεταξύ r και r+s θα είναι:

$P_r\{S\ \ x_0+u\ \ = i, \forall u \in [y-x_0-k, y-x_0]\,$, για $r \le k \le r+s \,|\, S(\ x_0 = a)\}$.

$P_r\{S\ \ x_0+u\ \ ={}_{y-x_0}\, p^{ai}_{x0}\ r\ \ -{}_{y-x_0} p^{ai}_{x0}\ \ r+s\ $.

Ας υποδηλώσουμε με $f_y^{r\ s}$ τη πιθανότητα ο ασφαλισμένος, να είναι εν ζωή στη ηλικία y, να είναι ανίκανος στη ηλικία αυτή, με διάρκεια ανικανότητας μεταξύ r και $r + s$ δοθέντος ότι ήταν υγιής σε κάποια ηλικία x_0 , $x_0 < y - \ r + s$. Έπεται τότε ότι: $f_{y,x_0}^{r\ S} = \frac{\cdot_{y-x_0} p_{x0}^{ai}\ r\ -_{y-x_0} p_{x0}^{ai}\ r+S}{\cdot_{y-x_0} p_{x0}^{aa} -_{y-x_0} p_{x0}^{ai}}$

Η πιθανότητα $f_y^{r\ S}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση του $f_{y,x_0}^{r\ S}$. Συγκεκριμένα:

$$f_y^{r\ S} = f_y^{0\ \infty} \cong \frac{\cdot_{y-x_0} p_{x0}^{ai}}{\cdot_{y-x_0} p_{x0}^{aa} +_{y-x_0} p_{x0}^{ai}} .$$

Σε τελική βάση τα αποτελέσματα της προσέγγισης της κοινότητας του Μάντσεστερ μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω: Η παραδοσιακή προσέγγιση που ακολουθείται στα Ηνωμένα Έθνη για τη ανάλυση δεδομένων ισόβιας ασφάλισης Υγείας και για την εκτίμηση της εργασία της ισόβιας ασφάλισης Υγείας είναι η προσέγγιση του Manchester Unity. Πρέπει να πούμε όμως ότι είναι δύσκολο να αναφέρουμε τη προσέγγιση της κοινότητας του Μάντσεστερ ως μοντέλο. Με αυτή την προσέγγιση τα ασφάλιστρα και τα αποθέματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας ρυθμούς ασθενείας. Ο κύριος ρυθμός ασθενείας στην ηλικία x για διάρκεια ασθενείας $a \rightarrow (a + b)$ εβδομάδες υποδηλώνεται με $z_x^{a\ b}$ και ορίζεται να είναι ο λόγος των αναμενόμενων αριθμών εβδομάδων που καταναλώνονται σε ασθένεια μεταξύ των ηλικιών x και $(x + 1)$, υπολογίζοντας μόνο το χρόνο όταν η διάρκεια ασθενείας είναι μεταξύ a και $(a + b)$ εβδομάδων προς το αναμενόμενο χρόνο που δαπανείται ενώ είναι εν ζωή μεταξύ των ηλικιών x και $(x + 1)$. Ενώ αυτή η προσέγγιση είναι μία απλή μέθοδος υπολογισμού για ασφάλιστρα και αποθέματα έχει κάποια μειονεκτήματα [24]. Συγκεκριμένα:

α)Ο ρυθμός ασθενείας για ένα ασφαλισμένο άτομο μίας ισόβιας ασφάλειας υγείας εξαρτάται από την ηλικία του ασφαλισμένου και όχι από το διάστημα που το συμβόλαιο είναι εν ισχύ. Μπορεί να υποστηριχθεί ότι αυτό το χαρακτηριστικό της προσέγγισης της κοινότητας του Μάντσεστερ μας δείχνει ότι είναι πολύ απλή και πρακτική μέθοδος.

β)Είναι δύσκολο να υπολογιστούν οι ρυθμοί ασθενείας από τα διαθέσιμα δεδομένα της επιτροπής Μελέτης θνησιμότητας (Continuous mortality Investigation Bureau CMIB)

[24] H.R. Waters (1989). Some aspects of the modeling of permanent health Insurance

c) Το μοντέλο της επιτροπής Μελέτης θνησιμότητας πολλαπλών καταστάσεων.

Η επιτροπής Μελέτης θνησιμότητας[25] (CMIB) ερεύνησε τη πιθανότητα χρησιμοποίησης μίας διαφορετικής προσέγγισης για τη ισόβια ασφάλιση υγείας, που εμπλέκει την χρησιμοποίηση ενός μοντέλου σύνθετων καταστάσεων για τη ανάλυση δεδομένων ισόβιας ασφάλισης Υγείας.

Το μοντέλο πολλαπλών καταστάσεων που έχει διερευνηθεί από την επιτροπή **CMIB** μπορεί εύκολα να παρουσιαστεί στο παρακάτω γράφημα.

Διάγραμμα 4.2

Πηγή: H.R.Waters, M.A., D. PHI F.I.A. 1989

Ένα άτομο είναι σε μία από τις παραπάνω καταστάσεις υγιής, ασθενής ή και αποβιώσας. Οι πιθανές μεταβάσεις μεταξύ αυτών των καταστάσεων υποδεικνύονται με τα βέλη του σχήματος. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η κατάσταση «ασθενής» δεν είναι ταυτόσημη ενός ισχυρισμού υπό όρους ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου για ασφάλιση ισόβιας υγείας. Με άλλα λόγια, για μοντέλο της **CMIB** η κατάσταση «ασθενής» σημαίνει «ασθενής» ανεξάρτητα από τη διάρκεια της ασθένειας.

Οι εντάσεις μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων του μοντέλου υποδεικνύονται στο άνωθεν σχήμα. Οι προαναφερθείσες εντάσεις μετάβασης είναι απλά γενικεύσεις της έντασης θνησιμότητας για ένα πίνακα ζωής και μπορούν να ερμηνευτούν ως ακολούθως:

α)Για ένα άτομο που είναι υγιής και αυτή τη στιγμή στην ηλικία χ, η πιθανότητα:

i. να γίνεις άρρωστος πριν την ηλικία x+h είναι h x σ_x.
ii. να πεθάνει πριν την ηλικία x + h είναι h x μ_x

β)Για ένα άτομο που είναι άρρωστος και είναι αυτή τη στιγμή στην ηλικία x, με διάρκεια της παρούσας ασθένειας z, η πιθανότητα να

[25] H.R. Waters (1989). Some aspects of the modeling of permanent health Insurance

i. να επανακάμψει πριν τη ηλικία x+h είναι $h \times \rho_{\chi,z}$

ii. να πεθάνει πριν την ηλικία x+h είναι $h \times v_{\chi,z}$

το h είναι τόσο μικρό που η πιθανότητα δύο ή περισσοτέρων μεταβάσεων πριν την ηλικία $\chi + h$ θα μπορούσε να αγνοηθεί. Σε αυτές τις καταστάσεις η μελλοντική μετάβαση μεταξύ των καταστάσεων ενός υγιούς ατόμου εξαρτάται μονάχα από τη παρούσα ηλικία του ατόμου και τις μελλοντικές μεταβάσεις ενός ασθενούς και εξαρτάται μονάχα από τη παρούσα ηλικία και τη διάρκεια της παρούσας ασθενείας του ατόμου. Για να είμαστε πιο ακριβείς το μοντέλο θεωρεί ταυτόσημο δύο υγιή άτομα ιδίας ηλικίας, ένας εκ των οποίων είναι υγιής και έχει μόλις έχει υπογράψει ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο ισόβιας ασφάλισης υγείας και το άλλο άτομο που είναι υγιές και έχει μόλις αναρρώσει από μία μακριά και σοβαρή ασθένεια.

Για το CMIB μοντέλο πολλαπλών καταστάσεων μπορούν να γίνει η εξής παρατήρηση:

Το μοντέλο αυτό είναι ένα μοντέλο ασθενείας και όχι απλά απαιτήσεων (υπό τους όρους ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου ισόβιας ασφάλισης). Αφού το CMIB μοντέλο συλλέγει δεδομένα μόνο για απαιτήσεις και όχι για ασθένειες υπάρχει μία φαινομενική αποτυχία του μοντέλου να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις που πρέπει να πληρεί ένα μοντέλο αφού επί παραδείγματι δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα για την CMIB αναφερόμενη ασθένεια η οποία δεν θα διαρκέσει πέρα της αναβαλλόμενης περιόδου ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου ισόβιας ασφάλισης.

d) Το Σουηδικό Μοντέλο

Ας θεωρήσουμε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο οριζόμενο με τη χρήση της συνάρτησης $\Gamma = [0, n, f, \infty, n]$. Επίσης ας θεωρήσουμε ένα ατομικό ασφάλιστρο $\alpha^{ai}_{\chi:n(f)}$ δοθέντος ότι:

$$\alpha^{ai}_{\chi:n\ f} = {}_{0}^{n} \frac{l_{x+u}}{l_x} \mu^{ai}(x+u) \cdot_{f} p^{ii}_{x+u,0}\, u^{u+f} \quad {}_{u+f}^{n} \cdot t^{-u-f}\, p^{ii}_{x+u+f,f}\, u^{t-u-f} dt\ du$$

Όσο αναφορά τη παραπάνω σχέση μπορούμε να πούμε ότι είναι ιδίου τύπου με τη σχέση που έχουμε καταλήξει όταν σε προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε σε ένα γενικό μοντέλο για Ασφάλιση ατόμων με προσωρινή αναπηρία όπου η πιθανότητα: ${}_{u}p^{aa}_{x}$ αντικαθίσταται με τη πιθανότητα επιβίωσης $\frac{l_{x+u}}{l_x}$. Ακόμα όσο αναφορά τις μεταβάσεις από τη κατάσταση ανικανότητας, το πιθανοθεωρητικό μοντέλο που έχουμε ορίσει έχει επιλεγεί από την έναρξη του συμβολαίου. Επιπλέον η αναβαλλόμενη περίοδος f απαιτεί τη χρησιμοποίηση της πιθανότητας ${}_{\cdot f}\, p^{ii}_{x+u,0}$.Τελικά μπορούμε να θεωρήσουμε τα εξής:

$\lambda\ y, z\ =_{z} p^{ii}_{y,0}$, και $v\ y, z\ =\ \mu^{ai}(y)_{z} p^{ii}_{y,0} = \mu^{ai}\ y\ * \lambda(y, z)$

Έτσι το $\lambda\ y, z$ είναι μία επιλεγόμενη συνάρτηση επιβίωσης θεωρώντας την συνέχιση της ανικανότητας ενώ το $v\ y, z\ dy$ είναι η πιθανότητα ένας υγιής και ασφαλισμένος ηλικίας y να γίνει ανίκανος προς εργασία μεταξύ των ηλικιών y και y+dy και παραμένει ασθενής το ελάχιστο για ένα χρονικό διάστημα z.

Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση: ${}_{f}p^{ii}_{x+u,0,t-u-f}p^{ii}_{x+u+f,f} ={}_{t-u}\ p^{ii}_{x+u\ ,0}$ έχουμε ότι:

$$\alpha^{ai}_{\chi:n\ f} = \int_0^{n-f} \frac{l_{x+u}}{l_x} v\ x+u, f\ \ v^{u+f} \int_{u+f}^{n} \frac{\lambda\ x+u, t-u}{\lambda\ x+u, f}\ v^{t-u-f} dt\ \ du.$$

Το Σουηδικό μοντέλο βασίζεται στη πιθανότητα να αρρωστήσουμε $\{\mu^{ai}(x+u)du\}$ και να παραμείνουμε σε αυτή τη κατάσταση $\{p^{ii}$ή $\lambda\}$

e) Το μοντέλο της Δανίας

Έστω ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο οριζόμενο με τη χρήση της συνάρτησης $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$. Έτσι η ασφαλισμένη περίοδος είναι η $[0, n]$ με μηδενική περίοδο αναμονής, μηδενική αναβαλλόμενη περίοδο, χωρίς μέγιστο αριθμό ετών καταβολής παροχών, και ότι η στιγμή διακοπής του συμβολαίου είναι ίση με τη διάρκεια του συμβολαίου. Ας θεωρήσουμε ότι το πιθανοθεωρητικό μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη την πιθανότητα ανάρρωσης. Ορίζουμε τις ακόλουθες εντάσεις μετάβασης πρέπει να οριστούν: $\mu^{ai}_{y}, \mu^{ad}_{y}, \mu^{id}_{y}$. Οι Δανέζικες ασφαλιστικές εταιρείες θεωρούν στους υπολογισμούς τους ότι οι εντάσεις μετάβασης δίδονται από τις σχέσεις: $\mu^{ai}_{y} = 0.0004 + 10^{0.06y-5.46}$ και $\mu^{ad}_{y} = \mu^{id}_{y} = 0.0005 + 10^{0.038y-4.12} = \mu_y$

Έτσι η θνησιμότητα των ανίκανων προς εργασία Έστω ότι είναι ίσες της θνησιμότητας των ασφαλισμένων σε κατάσταση πλήρους υγείας. Οι εντάσεις μετάβασης που Έστω στο μοντέλο ακολουθούν το πρότυπο του Makeham. Να σημειωθεί ότι επειδή $\mu^{ad}_{y} = \mu^{id}_{y}$ έπεται ότι οι υγιείς και οι ασθενείς έχουν την ίδια πιθανότητα επιβίωσης:${}_{t}\ p^{aa}_{y} + {}_{t}p^{ai}_{y} ={}_{t}\ p^{ii}_{y} ={}_{t}\ p_y$

Έτσι έχουμε ότι:${}_{t}\ p_y = \exp[-\int_0^t \mu_{y+u} du]$ και ${}_{t}p^{aa}_{y} ={}_{t}\ p^{aa}_{y} = \exp[-\int_0^t (\mu_{y+u}{}^{ai} + \mu_{y+u}{}^{ad}) du]$

Οι ακόλουθες αναλογιστικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των ασφαλίστρων και στους υπολογισμούς των αποθεμάτων: $\alpha^{ai}_{\chi:n} = \int_0^n {}_{t}p^{ai}_{x} v^t dt$, ακόμα τη σχέση $\alpha^{ii}_{\chi:n} = \int_0^n {}_{t}p^{ii}_{x} v^t dt = \int_0^n {}_{t}p_x v^t dt = \alpha_{\chi:n}$ και τη $\alpha^{aa}_{\chi:n} = \int_0^n {}_{t}p^{aa}_{x} v^t dt = \alpha_{\chi:n} - \alpha^{\ ai}_{\chi:n}$

Όπου το $\alpha_{\chi:n}$ υποδηλώνει τη αναλογιστική αξία μίας κοινής προσόδου ζωής. Με σκοπό να υπολογίσουμε το επίπεδο ασφαλίστρου $P_{\chi:m,\overline{n}}$.Έστω ότι η καταβολή ασφαλίστρων σταματάει κατά την διάρκεια της ανικανότητας και αυτές οι πληρωμές ασφαλίστρων ισχύουν μετά από m έτη με $m < n$, με σκοπό να αποφύγουμε ένα αρνητικό ενεργό απόθεμα κοντά στη λήξη.

Τότε έχουμε ότι: $P_{\chi:m,\overline{n}} = \frac{\alpha^{ai}_{\chi:n}}{\alpha^{a\alpha}_{\chi:\overline{m}}}$

Το ενεργό απόθεμα $\overline{V}^{a}_{x+t,n-t}$ δίδεται για $0 \leq t \leq m,$ από τη σχέση

$\overline{V}^{a}_{x+t,n-t} = \overline{\alpha}^{ai}_{x+t:n-t} - P_{\chi:m,\overline{n}}\ x\ \overline{\alpha}^{aa}_{x+t:m-t}$ και για $m \leq t \leq n$ από τη σχέση:

$\overline{V}^{a}_{x+t,n-t} = \overline{\alpha}^{ai}_{x+t:n-t}$ ενώ το απόθεμα ανικανότητας $\overline{V}^{i}_{x+t,n-t}$ δίδεται από τη σχέση :

$\overline{V}^{i}_{x+t,n-t} = \overline{\alpha}^{ii}_{x+t:n-t}$

f) Το Ολλανδικό Μοντέλο

Οι κύριοι τύποι καλύψεων ανικανότητας[26] που πωλούνται στη Ολλανδία είναι οι κάτωθι:

- Η ασφάλιση του πρώτου χρόνου κινδύνου (Α- τύπου) με μία αναβαλλόμενη περίοδο μεταξύ 7 ημερών και 6 εβδομάδων, και μέγιστη περίοδο προσόδων πληρωμών εφάμιλλη του ενός έτους .
- Η ασφάλιση κινδύνου μετά το πέρασμα του ενός έτους (Β- τύπου) με αναβαλλόμενη περίοδο ίση με ένα έτος.

Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε το αναλογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση και αποθεματοποίηση των προσόδων του Β τύπου. Το αναλογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στη Ολλανδία για τη κάλυψη του Β-τύπου αποτελεί μία ενδιαφέρουσα εκτέλεση του διακριτού στο χρόνο μοντέλου Markov στο οποίο η κατάσταση ανικανότητας χωρίζεται δεδομένα καταστάσεων σύμφωνα με τη διάρκεια της ανικανότητας. Στη πραγματικότητα το ημι -Μαρκοβιανό μοντέλο χρησιμοποιείται, από τη στιγμή που οι επιπτώσεις της διάρκειας λαμβάνονται υπόψη. Η επιλεγόμενη περίοδος θεωρείται ότι είναι τα πέντε έτη, μετά το πέρας των οποίων η επίδραση της επιλογής θεωρείται ότι δεν λαμβάνεται υπόψη. Έτσι η κατάσταση ανικανότητας χωρίζεται σε έξι καταστάσεις. Για τις καταστάσεις $i_{1,} i_{2,} \ldots i_{5,}$ η ανάρρωση θεωρείται πιθανή ενώ στη i_6 θεωρήται ότι υπάρχει η κατάσταση μόνιμης ανικανότητας. Οι Ολλανδικές ασφαλιστικές εταιρείες θεωρούν τις ακόλουθες υποθέσεις απλοποίησης για τις πιθανότητες μετάβασης όσο αναφορά το τομέα της ζωής: $p_y^{i_s i_\eta} = 0$, s=1,2….,6;

[26] S. Haberman (1999). Actuarial models for disability Insurance, United States of America.

Έτσι θεωρείται ότι δεν είναι πιθανό να ξαναγίνει ενεργός ή και ασθενής μέσα στο ίδιο το έτος. Οι παραπάνω υποθέσεις οδηγούν στο κάτωθι πίνακα μετάβασης ενός έτους. Επιπλέον θεωρούμε ότι τόσο η θνησιμότητα σε κατάσταση ανικανότητας όσο και θνησιμότητας ενεργών ατόμων είναι ίση με τη γενική θνησιμότητα του πληθυσμού: $\mathrm{p}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{i_s d}} = \mathrm{p}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{q}_{\mathrm{y}}$; s=1,2…,.6. Να σημειώσουμε ότι η πιθανότητα θανάτου q_{y} δεν ορίζεται με βάση το Μαρκοβιανό μοντέλο, από τη στιγμή που είναι ανεξάρτητο της κατάστασης στη ηλικία y. Οι πιθανότητες ανικανότητας δηλαδή $p_y^{ai_1}$'Εστω ότι είναι εκθετικές συναρτήσεις της ηλικίας y.

- $p_y^{ai_1} = 0.00223x1.0468^y$

Οι πιθανότητες ανάκαμψης θεωρούνται ότι είναι μειούμενες γραμμικές συναρτήσεις της ηλικίας y για κάθε κατάσταση s. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες συναρτήσεις: $p_y^{i_s\alpha} = max\{a_s - \beta_s y;0\}$ για s=1,2,3,4,5 με τις παραμέτρους a_s, β_s να δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

S	$\boldsymbol{a_s}$	$\boldsymbol{\beta_s}$
1	1.24111	0.02219
2	0.66499	0.01153
3	0.27394	0.00532
4	0.23547	0.00470
5	0.14166	0.00319

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα διπλής εισόδου για τις πιθανότητες μετάβασης για ένα έτος έχουμε:

	a	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	d
a	p_y^{aa}	$p_y^{ai_1}$	0	0	0	0	0	p_y^{ad}
i_1	$p_y^{i_1a}$	0	$p_y^{i_1i_2}$	0	0	0	0	$p_y^{i_1d}$
i_2	$p_y^{i_2a}$	0	0	$p_y^{i_2i_3}$	0	0	0	$p_y^{i_2d}$
i_3	$p_y^{i_3a}$	0	0	0	$p_y^{i_3i_4}$	0	0	$p_y^{i_3d}$
i_4	$p_y^{i_4a}$	0	0	0	0	$p_y^{i_4i_5}$	0	$p_y^{i_4d}$
i_5	$p_y^{i_5a}$	0	0	0	0	0	$p_y^{i_5i_6}$	$p_y^{i_5d}$
i_6	*0*	0	0	0	0	0	$p_y^{i_6i_6}$	$p_y^{i_6d}$
D	0	0	0	0	0	0	0	1

Οι παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν στον παραπάνω πίνακα είναι οι εξής:

- Το άθροισμα που προκύπτει σε κάθε στήλη ή και γραμμή από το σύνολο των υφιστάμενων πιθανοτήτων πρέπει να αθροίζει στη μονάδα.
- Οι πιθανότητες μετάβασης από μία αρχική κατάσταση σε κατάσταση θανάτου υφίστανται σε κάθε περίπτωση γεγονός που είναι λογικό καθώς οποιαδήποτε αρχική κατάσταση μπορεί να με οδηγήσει σε κατάσταση θανάτου.
- Η πιθανότητα μετάβασης από αρχική κατάσταση d=αποβιώσας σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση πλην του θανάτου είναι μηδέν, άπαξ δηλαδή και κάποιο άτομο πεθάνει δεν μπορεί να επιστρέψει σε κάποια άλλη κατάσταση.
- Μία άλλη διαπίστωση είναι ότι πιθανότητες μετάβασης από μία κατάσταση σε μία άλλη υφίστανται στη περίπτωση που η τελική κατάσταση είναι η a= (υγιής) ή για τάξεις της μορφής i_s και i_{s+1}. Δηλαδή ένα άτομο εάν ασθενήσει μπορεί είτε να αναρρώσει είτε να παραμείνει στη ίδια κατάσταση ασθένειας ποτέ όμως δεν μπορεί να μεταβεί σε μία προγενέστερη κατάσταση ασθενείας. Η τελευταία παρατήρηση απορρέει από τις παραδοχές που έχουμε κάνει για το μοντέλο που χρησιμοποιούμε.

g) Μοντέλα έναρξης επιδόματος.

Η σχέση $a_x^{ai} = {}_0^t \cdot_u p_x^{aa}\, \mu^{ai}\ \chi + u\ u^u\ {}_u^{+\infty} \cdot_{t-u} p_{x+u}^{ii} u^{t-u} dt\ du$ που καταλήξαμε όταν αναφερθήκαμε σε ένα γενικό μοντέλο ισόβιας ασφάλισης υγείας μπορεί να γραφτεί στη ακόλουθη μορφή:

$$\alpha_{\chi=}^{ai}\ {}_{h=0}^{+\infty}\ {}_0^1 \cdot_{h+u} p_x^{aa} + \mu^{ai}\ x + h + u\ v^{h+u}[\ {}_{h+u}^{+\infty} \cdot_{t-h-u} p_{x+h+u}^{ii} v^{t-h-u} dt]du\ .$$

Όπως έχουμε προαναφέρει σε προηγούμενη ενότητα το ολοκλήρωμα που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία μίας συνεχούς στο χρόνο προσόδου η οποία παύει να ισχύει σε περίπτωση θανάτου ή ανάρρωσης. Στη περίπτωση διακριτών στο χρόνο μοντέλων το ολοκλήρωμα πρέπει να αντικατασταθεί με ένα κατάλληλο άθροισμα. Ας συμβολίσουμε με a_{x+h+u}^{*} τη τιμή του παραπάνω αθροίσματος . Έτσι, το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης που έχουμε ορίσει μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύνολο όρων του ακόλουθου τύπου: ${}_0^1 \cdot_{h+u} p_x^{aa}\ \mu^{ai}\ x + h + u\ v^{h+u} a_{x+h+u}^{*} du,$ από τη οποία μπορεί να προκύψει η ακόλουθη προσέγγιση: $v^{h+½} a_{x+h+½}^{*}\ {}_0^1\ {}_{h+u}p_x^{aa} \mu^{ai}\ x + h + u\ du$

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης για $h = 0$ το οποίο παρουσιάζει το αναμενόμενο αριθμό εισόδων στη κατάσταση ασθενείας μεταξύ των ηλικιών x και $x + 1$.Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα μας δίνει μία καλή προσέγγιση για τη πιθανότητα εισόδου σε αυτή τη κατάσταση μεταξύ x και x+1 καθώς η πιθανότητα δύο ή και περισσοτέρων εισόδων είναι πολύ μικρή. Ας υποδηλώσουμε με w_x τη παραπάνω πιθανότητα. Ας επιστρέψουμε στη τελευταία μας σχέση $v^{h+½} a_{x+h+½}^{*}\ {}_0^1\ {}_{h+u}p_x^{aa} \mu^{ai}\ x + h + u\ du$ και θεωρούμε για το ${}_{h+u}p_x^{aa}$ τη ακόλουθη προσέγγιση: ${}_{h+u}p_x^{aa} \cong_h p_x^{aa} *_u p_{x+h}^{aa}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ακριβής σχέση δίδεται από τη σχέση Chapman - Kolmogorov δηλαδή η:

${}_{h+u}p_x^{aa} =_h p_x^{aa}\ {}_u p_{x+h}^{aa} +_h p_x^{ai}\ {}_u p_{x+h}^{aa}$ από τη οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η σχέση $\alpha_{\chi:n}^{ai}\ =\ {}_0^n \cdot_t p_x^{ai} v^t dt$ αγνοεί τη πιθανότητα ανάρρωσης μεταξύ των ηλικιών $x + h$ και $x + h + 1$ για ένα άτομο με ανικανότητα προς εργασία μεταξύ αυτών των ηλικιών. Εν τέλει χρησιμοποιώντας τη τελευταία προσέγγιση που έχουμε θεωρήσει παίρνουμε ότι:

$\alpha_\chi^{ai} \cong\ {}_{h=0}^{+\infty} v^{h+1\ 2} a_{x+h+½}^{*}\ {}_0^1 \cdot_{h+u} p_x^{aa} \mu^{ai}\ x + h + u\ du$ και τότε:

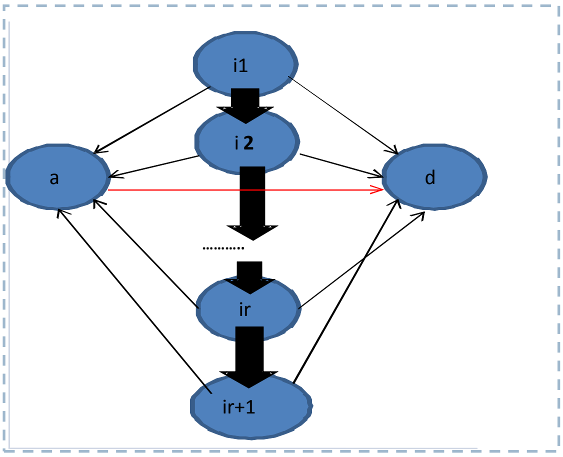
$$\alpha_\chi^{ai} \cong\ {}_{h=0}^{+\infty} \cdot_h p_x^{aa} w_{x+h}\, v^{h+1\ 2} a_{x+h+½}^{*}$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μία πρόσοδος για ένα ατομικό ασφάλιστρο μίας κάλυψης ανικανότητας. Αποτελεί μια διακριτή στο χρόνο προσέγγιση βασιζόμενη στις πιθανότητες w_{x+h} ένα άτομο να ασθενήσει (έναρξη) και στη αναμενόμενη παρούσα αξία $a^{*}_{x+h+½}$ μίας προσόδου καταβλητέας ενώ ο ασφαλισμένος παραμένει σε κατάσταση ασθενείας. Παρεμφερή μοντέλα χρησιμοποιούνται επίσης στη Γερμανία, την Αυστρία και τη Ελβετία.

h) Ένα Μαρκοβιανό μοντέλο με χρήση επιλεγμένων πιθανοτήτων

Το μοντέλο αυτό περιγράφεται στο ακόλουθο σχήμα:

Γράφημα 4.3:Απεικόνηση πολλαπλών καταστάσεων ανικανότητας .



Πηγή: Actuarial models for Disability Insurance, S.Haberman & E.Pitacco (1999)

Στο σχήμα αυτό η κατάσταση i αντικαθίσταται από ένα σύνολο καταστάσεων $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots . \mathrm{i}_{r+1}$ με τη ακόλουθη ερμηνεία:

- Το i_s υποδηλώνει ο ασφαλισμένος να είναι ανίκανος προς εργασία με διάρκεια αναπηρίας μεταξύ $\mathrm{s}-1$ και s για $\mathrm{s}=1,2, \dots . \mathrm{r}$
- i_{r+1} υποδηλώνει ο ασφαλισμένος να είναι ανίκανος προς εργασία με διάρκεια αναπηρίας μεγαλύτερη του r.

Η διαμέριση σε καταστάσεις ασθενείας υφίσταται επειδή υπάρχουν διαφορετικές διάρκειες για την έναρξη ανικανότητας, την ανάρρωση και τα ποσοστά θνησιμότητας δηλαδή η παραπάνω διαμέριση μας επιτρέπει να θεωρήσουμε συγκεκριμένες εντάσεις και πιθανότητες.

Το μοντέλο απαιτεί να ορίσουμε τις ακόλουθες εντάσεις μετάβασης:

$\mu^{ad}\ y$, $\mu^{ai}\ y$, $\mu^{i_s a}\ y$, $\mu^{i_s d}\ y$ για $\mathrm{s}=1,2, \dots \dots , \mathrm{r}+1$ Όσον αναφορά τη ανάρρωση, η εμπειρία μας για τη νοσηρότητα για κάθε δοθέν y μας δίνει ότι:

$\mu^{i_1 a}\ y > \mu^{i_2 a}\ y > \mu^{i_3 a}\ y \dots \dots . \mu^{i_{r+1} a}\ y$. Πρακτικά είναι πιθανό να έχουμε για κάθε y:

$\mu^{i_s a}\ y\ > 0$ για $s = 1,2, \dots r$, $\mu^{i_{r+1} a}\ y\ = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση δεν είναι πιθανή καμία ανάκαμψη μετά από r έτη.

i) Μοντέλο για εφάπαξ ποσά παροχών μόνιμης αναπηρίας.

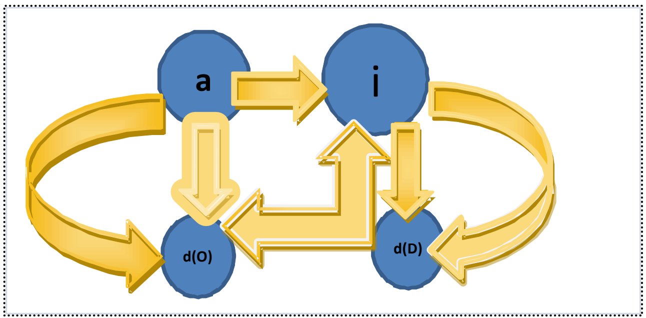
Εδώ θα θεωρήσουμε ένα αναλογιστικό μοντέλο για την κάλυψη n-ετών παρέχοντας ένα εφάπαξ ποσό σε περίπτωση διαρκής και ολικής ανικανότητας.

Έστω ότι ζητείται μια περίοδος τ ετών με σκοπό να διαπιστώσουμε το μόνιμο χαρακτήρα της ανικανότητας (συνήθως $0{,}5 \leq \tau \leq 2$). Με άλλα λόγια το ασφαλισμένο κεφάλαιο θα πληρωθεί μετά από ένα διάστημα (τ) από τη έναρξη της ασθένειας. Το μήκος της περιόδου πρόκρισης πρέπει να επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ανάρρωση μετά από αυτό το διάστημα να είναι πρακτικά αδύνατη. Το παραπάνω θα μπορούσε να εκφραστεί και ως: $\mu^{ai}\ y, u\ = 0$, για $u \geq t$ Έπειτα το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο για τη αποζημίωση μόνιμης ανικανότητας δίδεται ως εξής: $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = {}_{0}^{n} \cdot {}_t p_x^{aa}\, \mu^{ai}\ x + t\ \cdot {}_t p_{x+t,0}^{ai} v^{t+\tau} dt$. Να σημειωθεί ότι γενικά το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης εκφράζει τη αναμενόμενη παρούσα αξία μίας τυχαίας αποζημίωσης αποτελούμενη από μία χρηματική μονάδα για κάθε μετάβαση $a \to i$, εάν ο ασφαλισμένος παραμένει ανίκανος για τουλάχιστον ένα διάστημα (τ) που έπεται της ανικανότητας. Ακόμα μας επιτρέπει επαναλαμβανόμενες πληρωμές του ασφαλισμένου ποσού, ενώ οι καλύψεις ισόβιας ανικανότητας επιτρέπουν μία πληρωμή το μέγιστο. Παρόλα αυτά η σχέση αυτή υπάρχει εξαιτίας της σχέσης : $\mu^{ai}\ y, u\ = 0\, , για\, u \geq t$ η όποια δεν καθιστά δυνατό μία ανάκαμψη μετά από (τ) έτη ανικανότητας. Εάν επιλέξουμε $\tau = 0$ τότε το ατομικό ασφάλιστρο δίδεται από τη σχέση: $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = {}_{0}^{n} \cdot {}_t p_x^{aa}\, \mu^{ai}\ x + t\ v^t dt$ Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη περίπτωση η πιθανότητα ${}_t p_x^{aa}$ αντικαθίσταται από τη ${}_t p_x^{\overline{aa}}$, στην οποία η ανάκαμψη είναι πιθανή, και η πληρωμή της αποζημίωσης περιορίζεται στο πρώτο μεταβατικό στάδιο $a \to i$.Αν τώρα στην σχέση $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = {}_{0}^{n} \cdot {}_t p_x^{aa}\, \mu^{ai}(x+t) {}_t p_{x+t,0}^{ai} v^{t+\tau} dt$ ορίσουμε: $\sigma_\tau\ x + t\ = \mu^{ai}(x+t) {}_t p_{x+t,0}^{ii}$ θα μπορούσαμε να την ξαναγράψουμε ως ακολούθως: $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = {}_{0}^{n} \cdot {}_t p_x^{aa}\, \sigma_\tau\ x + t\ v^{t+\tau} dt$.Να σημειωθεί ότι το $\sigma_\tau\ x + t$ είναι η πιθανότητα ένας υγιής άνθρωπος ηλικίας x+t να μεταβεί σε κατάσταση ασθενείας χωρίς την δυνατότητα ανάρρωσης μεταξύ των ηλικιών $x + t$ και $x + t + dt$ και να είναι ακόμα εν ζωή και ασθενής στην ηλικία $x + t + \tau$. Τελικά εάν αντικαταστήσουμε την πιθανότητα ${}_t p_x^{aa}$ με μία πιθανότητα ${}_t p_x$ θα πάρουμε τη ακόλουθη προσέγγιση η οποία συχνά χρησιμοποιείται στη αναλογιστική πρακτική: $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = {}_{0}^{n} \cdot {}_t p_x\, \sigma_\tau\ x + t\ v^{t+\tau} dt$.

j) Ένα μοντέλο για ασφάλιση κατά σοβαρών ασθενειών.

Ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο κατά σοβαρών ασθενειών ή Dread Disease (DD) παρέχει στο ασφαλισμένο ένα εφάπαξ ποσό σε περίπτωση πάθησης από μία σοβαρή ασθένεια που καθορίζεται από το καταστατικό του συμβολαίου. Οι πιο κοινές καλυπτόμενες ασθένειες είναι ανακοπή καρδιάς, στεφανιαία νόσος που απαιτεί εγχείρηση, καρκίνος και εγκεφαλικό. Η ασφάλιση σοβαρών ασθενειών είναι συνήθως συμπληρωματική της μόνιμης ασφάλισης, ή της προικοδότησης αλλά μπορεί να πωληθεί και ως αυτόνομο προϊόν. Στη πρώτη περίπτωση, μπορεί να πάρει μία από τις ακόλουθες μορφές: μπορεί να μας παρέχει μία επίσπευση του συνόλου ή μέρους των παροχών θανάτου, ή μπορεί να είναι μία συμπληρωματική παροχή. Τα αναλογιστικά μοντέλα για ασφάλιση κατά σοβαρών ασθενειών μπορούν να χτιστούν αρχίζοντας με μία πολύπλοκη δομή πολλαπλών καταστάσεων.

Διάγραμμα 4.4: απεικόνιση μοντέλου κρίσιμων ασθενειών



Πηγή H.R.Waters, M.A., D. PHI F.I.A. 1989

Στο παραπάνω διάγραμμα θεωρούνται οι ακόλουθες καταστάσεις :

- a= ο ασφαλισμένος να είναι ενεργός ή υγιής
- i= να είναι άρρωστος δηλαδή να πάσχει από σοβαρή ασθένεια.
- d (O)= να πεθάνει, και ο θάνατος να έχει προέλθει από σοβαρή ασθένεια.
- d (D)= να πεθάνει, και ο θάνατος να έχει προέλθει από άλλα αίτια.

Να σημειωθεί ότι οι ξαφνικοί θάνατοι εξαιτίας σοβαρών ασθενειών παρουσιάζονται με ένα ζεύγος μεταβάσεων $a \rightarrow i,\ i \rightarrow d(D)$, πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όλοι οι θάνατοι από σοβαρές ασθένειες αντιπροσωπεύονται από τη κατάσταση $d(D)$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η κατάσταση i θεωρείται ότι είναι μη αναστρέψιμη. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η κάλυψη τελειώνει μετά τη διάγνωση της και τη πληρωμή του εφάπαξ ποσού.

Οι ακόλουθες εντάσεις καθορίζουν τη πιθανοθεωρητική δομή :

- $\mu^{ai}(y)$ = η ένταση μετάβασης $\alpha \rightarrow i$
- $\mu^{ad(O)}(y)$ = η ένταση μετάβασης $\alpha \rightarrow d(O)$
- $\mu^{id(O)}(y,u)$ = η ένταση μετάβασης $i \rightarrow d(O)$
- $\mu^{id(D)}(y,u)$ = η ένταση μετάβασης $i \rightarrow d(D)$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η $\mu^{id(O)}(y,u)$ και η $\mu^{id(D)}(y,u)$ είναι επιλεγμένες εντάσεις μετάβασης. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα θανάτου για άτομο που πάσχει από σοβαρή ασθένεια εξαρτάται μονάχα από τη διάρκεια της ασθένειας. Οι παραπάνω ορισμοί οδηγούν στις ακόλουθες πιθανότητες

$$ {}_tp_{\overline{x}}^{aa} = \exp[-\int_0^t(\mu^{ai}(x+u) + \mu^{ad(O)}(x+u))du $$

και

$$ {}_tp_{\overline{x}}^{ii} = \exp[-\int_0^\tau(\mu^{id(O)}(x+t+u,u) + \mu^{id(D)}(x+t+u,u))\, du $$

όπου το x υποδηλώνει τη ηλικία στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Για λόγους συντομίας θεωρούμε μόνο τη περίπτωση μίας πρόσθετης αποζημίωσης .Έστω ότι το n υποδηλώνει την διάρκεια του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο για μία εφάπαξ αποζημίωση μίας νομισματικής μονάδας στη περίπτωση διάγνωσης μίας σοβαρής ασθένειας δίδεται από τη σχέση: $A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = \int_0^n {}_tp_{\overline{x}}^{aa}\, \mu^{ai}(x+t)v^t dt$. Στη περίπτωση μίας πρόσθετης παροχής, είναι σημαντικό να αποφύγουμε μία κατάσταση υπερπληρωμής η οποία θα μπορούσε να λάβει χώρα όταν ο θάνατος επέλθει ανάμεσα σε ένα πολύ μικρό διάστημα μετά από τη έναρξη της ασθένειας. Μία πιθανή λύση είναι να αντικαταστήσουμε τη ατομική πληρωμή με μία σειρά πληρωμών με τη προϋπόθεση επιβίωσης του ασφαλισμένου. Ας θεωρήσουμε μία κάλυψη έναντι σοβαρών ασθενειών με ένα ασφαλισμένο ποσό 1νομισματική μονάδα και μία σειρά από τρεις πληρωμές στις ηλικίες x+t, x+t+τ΄και x+t+τ΄+τ΄΄ των οποίων τα ποσά είναι a, b, 1-a-b αντίστοιχα. Σε αυτή τη περίπτωση το ατομικό ασφάλιστρο δίδεται από:

$$ A_{x,n(\tau)}^{(PD)} = \int_0^n {}_tp_{\overline{x}}^{aa}\, \mu^{ai}(x+t)\left(av^t + {}_{\tau'}p_{x+t,0}^{ii}\beta v^{t+\tau'} + {}_{t+\tau'}p_{x+t,0}^{ii}(1-\alpha-\beta)v^{t+\tau'+t''}\right)dt $$

Μοντέλα για ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας.

Η ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας (Long Term Care LTC) είναι η φροντίδα που απαιτείται για καταστάσεις ή παθήσεις μακράς διάρκειας. Η ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας παρέχει εισοδηματική υποστήριξη για τους ηλικιωμένους που χρειάζονται νοσηλεία ή ιατρική περίθαλψη. Οι αποζημιώσεις για ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας μπορεί να είναι διαφόρων τύπων. Τα ασφαλιστικά προϊόντα που είναι προς πώληση είναι τα εξής:

<u>Αυτόνομα ασφαλιστήρια συμβόλαια</u> που παρέχουν ένα σταθερό ποσό προσόδου για μακροχρόνια φροντίδα.

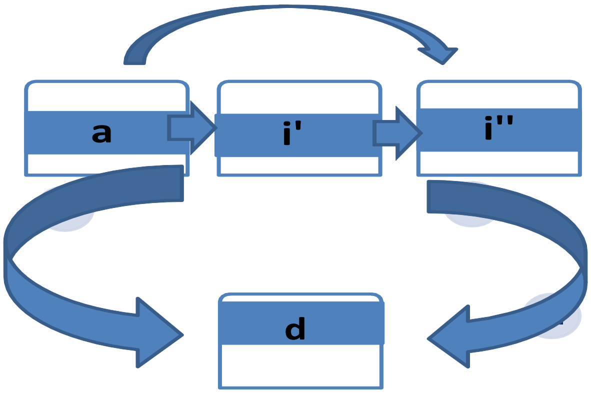
<u>Ενισχυμένη ισόβια Πρόσοδο</u>. Μία πρόσοδος πωλείται σε ένα ηλικιωμένο άτομο τη στιγμή που χρειάζεται νοσοκομειακή περίθαλψη.

<u>Μακροχρόνια φροντίδα</u> ως αποζημίωση συμπληρωματικής ρήτρας. Μία κοινότυπη μέθοδος αποτελείται με τη πρόσθεση σε μία ολόκληρη κάλυψη ζωής μίας μηνιαία αποζημίωση της τάξης του 2% του διασφαλισμένου ποσού. Ένα συμπληρωματικό χαρακτηριστικό θα ήταν να προσθέσουμε μία εγγύηση στη οποία η αποζημίωση θα συνέχιζε να πληρώνεται όταν η απαίτηση μακροχρόνιας φροντίδας υπερβεί τους πενήντα μήνες.

<u>Ενισχυμένη σύνταξη</u>. Αυτό το προϊόν δίνεται τη μέρα συνταξιοδότησης και είναι ένας συνδυασμός μίας συγκεκριμένης προσόδου συνταξιοδότησης και ενός επιπλέον εισοδήματος που καταβάλλεται τη στιγμή της ύπαρξης της απαίτησης μακροχρόνιας φροντίδας. Η τιμή του επιπλέον ποσού εσόδων αποτελεί μία μείωση στα αρχικά έσοδα συνταξιοδότησης.

Ας θεωρήσουμε το μοντέλο πολλαπλών καταστάσεων του παραπάνω σχήματος .Έστω ότι υπάρχουν δύο καταστάσεις (LTC) Μακροχρόνιας φροντίδας i' και i''. Ένας ασφαλισμένος εκχωρείται σε μία από τις αυτές τις καταστάσεις σύμφωνα με κάποιον κανόνα που εκφράζει τη σφοδρότητα της ασθένειας. Ένα κοινά χρησιμοποιημένο σύστημα βασίζεται στις δραστηριότητες της καθημερινής ζωής (ADL Activities of daily Living) η οποίες και καθορίζουν το βαθμό της ασθένειας σαν συνάρτηση της ικανότητος κάποιου ατόμου να εκτελέσει τα βασικές καθημερινές δραστηριότητες. Συνήθως θεωρούνται οι ακόλουθες δραστηριότητες: το να μπορεί να τρέφεται ,να μπορεί να πηγαίνει στο μπάνιο, να μπορεί να κινείται, να μπορεί να κάνει μπάνιο, να μπορεί να ντύνεται μόνο του. Ας υποδηλώσουμε με S(y) τη κατάσταση που καταλαμβάνεται από ένα άτομο ηλικίας y. Ακόμα Έστω ότι η διαδικασία $\{S\ y\ ; y \geq x\}$ (όπου το x είναι η ηλικία στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο) είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία. Φυσικά και το ιστορικό υγείας ενός ατόμου μπορεί σε γενικές γραμμές να είναι πολύτιμο στη πρόβλεψη μελλοντικών αλλαγών στη υγεία. Έτσι, μία ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία ενδέχεται να είναι περισσότερο κατάλληλη, αλλά ταυτόχρονα περισσότερο περίπλοκη. Έστω ότι το μοντέλο δεν αφήνει περιθώρια για επανάκαμψη του ασθενούς όπως διαπιστώνεται και από τη κάτωθι σχηματική απεικόνιση.

Γράφημα 4.5: Απεικόνιση για μία κάλυψη Μακροχρόνιας φροντίδας



Πηγή: H.R.Waters, M.A., D. PHI F.I.A. 1989

Για απλοποίηση, θα θεωρήσουμε απλά τη περίπτωση ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο μίας μακροχρόνιας φροντίδας (LTC), παρέχοντας μία συνεχή στο χρόνο πρόσοδο ενός ποσού R' όταν ο ασφαλισμένος είναι στη κατάσταση i', *και* R'' όταν βρίσκεται στη κατάσταση i''. Στο συμβόλαιο η στιγμιαία παρούσα αξία Y_x της προσόδου αυτής δίδεται από τη σχέση $Y_x = {}_{0}^{+\infty} R'\ S\ x+t\ = i'\ S\ x\ = a + R''\ S\ x+t\ = i''\ S\ x\ = a\ v^t dt$ και ακόμα ορίζουμε με: $\varphi'\ x,t\ = P_r\ S\ x+t\ = i'|S\ x\ = a$, και $\varphi''^{\ x,t} = P_r\ S\ x+t\ = i''|S\ x\ = a$ Έτσι λοιπόν το ατομικό ασφάλιστρο δίδεται από τη σχέση: $A_x^{LTC} = E\ Y_x\ = {}_{0}^{+\infty}[R'\varphi'\ x,t\ + R''\ \varphi''(x,t)]v^t dt$. Η παραπάνω σχέση βασίζεται στη πιθανότητα να υπάρχει ασθένεια. Θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε τη παραπάνω σχέση σε μία άλλη η οποία βασίζεται στη πιθανότητα να μεταβεί σε μία από τις ακόλουθες καταστάσεις η οποία προσδιορίζεται μέσω των: $\mu^{ai}\ x+u\ du$ ή $\mu^{ai''}\ x+u\ du$ ή $\mu^{i'i''}\ x+u\ du$ και να παραμείνει σε μία από τις ακόλουθες καταστάσεις: $({}_{t-u}p_{x+u}^{i'i'}$ ή ${}_{t-u}p_{x+u}^{i''i''})$ ασθενείας. Έτσι λοιπόν έχουμε σταδιακά:

$$A_x^{LTC} = R'\ {}_{0}^{+\infty}\ {}_{u}p_{\bar{x}}^{aa}\mu^{ai'}\ x+u\ v^u[\ {}_{0}^{+\infty} \cdot {}_{t-u}\,p_{x+u}^{i'i'}\,v^{t-u}dt]du +$$

$$+R'' \int_0^{+\infty} {}_u p_{\bar{x}}^{aa} \mu^{ai''}(x+u) v^u [\int_u^{+\infty} {}_{t-u} p_{x+u}^{i''i''} v^{t-u} dt] du +$$

$$+R'' \int_0^{+\infty} {}_u p_{\bar{x}}^{aa} \mu^{i'i''}(x+u) v^u [\int_0^{+\infty} {}_{t-u} p_{x+u}^{i''i''} v^{t-u} dt] du$$

όπου : ${}_t p_{\bar{x}}^{aa} = \exp[-\int_0^u (\mu^{ai}(x+z) + \mu^{ad}(x+z)) dz,$

${}_{t-u} p_{x+u}^{i''i''} = \exp[-\int_0^{t-u} (\mu^{i'i''}(x+z+u) + \mu^{i'd}(x+z+u)) dz],$

${}_u p_{\bar{x}}^{ai'} = \int_0^t {}_u p_{\bar{x}}^{aa} \mu^{ai'}(y+u) {}_{t-u} p_{x+u}^{i'i'} du$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο μακροχρόνιας φροντίδας στο οποίο θεωρείται απλά μία κατάσταση της ασθένειας i. Μία πρόσοδος πληρώνεται όταν ο ασφαλισμένος είναι στη κατάσταση i. Στο συμβόλαιο η στιγμιαία παρούσα αξία της προσόδου είναι: $Y_\chi = \int_0^{+\infty} |S(x+t) = i|S(x) = a| v^t dt$. Αν υποδηλώσουμε με M το στιγμιαίο αριθμό των υποχρεώσεων μακροχρόνιας φροντίδας, η στιγμιαία παρούσα αξία Y_χ θα μπορούσε να εκφραστεί ως:

$$Y_\chi = \begin{cases} \sum_{h=1}^{M} v^{T_h} \left(T_h \,\, {}^a\!D_h\right) & \text{εάν } M \geq 1, \\ 0 \text{ εάν } M = 0, \end{cases}$$

όπου $x + T_1$ είναι η στιγμιαία ηλικία στη πρώτη υποχρέωση μακροχρόνιας φροντίδας,

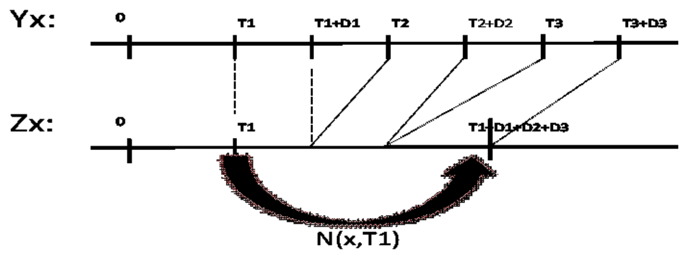
το D_1είναι η στιγμιαία διάρκεια της πρώτης υποχρέωσης μακροχρόνιας φροντίδας,

το $x + T_2$ είναι η στιγμιαία ηλικία στη δεύτερη υποχρέωση μακροχρόνιας φροντίδας.

Φυσικά και ισχύει ότι αυτό το μοντέλο μας αφήνει περιθώρια για ανάρρωση .Ένα απλούστερο μοντέλο μπορεί να κατασκευαστεί θεωρώντας την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή.

$N(x, T_1) = \begin{cases} \sum_{h=1}^{M} D_h \,\big|\, T_1 \text{ εάν } M \geq 1 \\ 0 \text{ εάν } M = 0 \end{cases}$. Δηλαδή το $N(x, T_1)$ είναι η τυχαία μεταβλητή του χρόνου που ένα άτομο ηλικίας x βρίσκεται σε ασθένεια, ενώ ήταν υγιής στους την στιγμή έναρξης του συμβολαίου, του οποίου η πρώτη υποχρέωση συμβαίνει τη στιγμή T_1. Τώρα ας ορίσουμε τη ακόλουθη τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας: $Z_x = {}_{T_1}|a_{N(x,T_1)}. = v^{T_1} * a_{N(x,T_1)}.$. Φυσικά έχω ότι: $Z_x \geq Y_\chi$ και τότε: $E(Z_x) \geq E(Y_\chi)$, επειδή το Z_x αντιπροσωπεύει τις πληρωμές της προσόδου με ένα κανονικό ρυθμό και έτσι σε προηγούμενες στιγμές (κατά μέσο όρο) από τον διακοπτόμενο ρυθμό των πληρωμών Y_χ.Το παραπάνω συμπέρασμα αναπαρίσταται και στο ακόλουθο σχήμα:

Γράφημα 4.6



Το καθαρό ατομικό ασφάλιστρο δίδεται από τη σχέση $\alpha_\chi^{ai} = E(Y_\chi)$ και συνεπώς μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση $\alpha_\chi^{ai} = E(Z_x) = \int_0^{\infty} {}_u p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u)\, v^u E(a_{N(x,u)})\, du$

Να παρατηρήσουμε ότι η προσέγγιση εμπεριέχει μία έμμεση επιβάρυνση.

Ακόμα ας ορίσουμε για κάθε u: $n(x,u) = E[N(x,u)]$ είναι γνωστό ότι: $a_{n(x,u)} > E(a_{N(x,u)})$

έτσι, εισάγοντας μία επιπλέον επιβάρυνση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι:

$\alpha_\chi^{ai} \cong \int_0^{\infty} {}_t p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u)\, v^u x a_{n(x,u)}\, du$. Η τελευταία σχέση απαιτεί τα ακόλουθα δεδομένα:

Τη πιθανότητα παραμονής σε υγιή κατάσταση $({}_u p_x^{aa})$, τη πιθανότητα να γίνει ασθενής η οποία δίνεται από την σχέση $\mu^{ai}(x+u)\, du$, και τη αναμενόμενη διάρκεια ασθένειας $n(x,u)$ ως συνάρτηση του u.

Ας ορίσουμε ως : $\varphi(x,u)\, du = {}_u p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u)\, du$ τότε η $\varphi(x,u)$ είναι η πιθανότητα η πρώτη υποχρέωση να συμβεί μεταξύ των ηλικιών $x+u$ και $x+u+du$. Έπεται ότι η : $\Phi(\chi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x,u)\, du$ είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη έξοδος από τη κατάσταση a να υφίσταται εξαιτίας της απαίτησης μακροχρόνιας φροντίδας .Τώρα ας ορίσουμε ως: $\psi(x,u) = \frac{\varphi(x,u)}{\varphi(x)}$ η οποία αναπαριστά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητα της στιγμής T_1. Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι: $\alpha_\chi^{ai} \cong \Phi(\chi) \int_0^{+\infty} \psi(x,u)\, v^u a_{n(x,u)}\, du$.Οι τιμές του $\Phi(\chi)$ θα μπορούσανε να υπολογιστούν από τον αριθμό των ατόμων ηλικίας x για τους οποίους απαιτείται παροχή μακροχρόνιας φροντίδας.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα μοντέλο μακροχρόνιας φροντίδας τριών καταστάσεων.

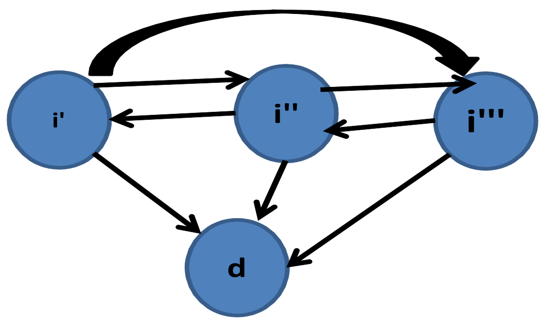
Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο τριών καταστάσεων ασθενείας στο οποίο :

- i' = οικιακή φροντίδα (είναι κατάλληλη για αυτούς οι οποίοι πρωτίστως χρειάζονται παρακολούθηση και βοήθεια με τις δραστηριότητες της καθημερινής τους ζωής)
- i'' = εκτεταμένη φροντίδα (κατάλληλη για άτομα που χρειάζονται προσωπική φροντίδα σε μία 24ωρη βάση με ιατρικές και επαγγελματικές νοσοκομειακές παροχές)
- i'''= χρόνια φροντίδα (για αυτούς που χρειάζονται ένα εύρος θεραπευτικών παροχών, ιατρική παρακολούθηση και εξειδικευμένη νοσοκομειακή φροντίδα).

Θα πρέπει να περιορίσουμε τη συζήτησή μας στις πιθανοθεωρητικές πλευρές του μοντέλου.

Έστω το παρακάτω μοντέλο:

Γράφημα 4.7



Το μοντέλο αυτό δεν εμπεριέχει μία κατάσταση (α) στη οποία το άτομο δεν απαιτεί φροντίδα, παρόλο που αυτή η κατάσταση είναι πολύ σημαντική στη πρόβλεψη των απαιτήσεων μακροχρόνιας φροντίδας .Αυτό απορρέει εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν υπάρχουν διαθέσιμα στατιστικά δεδομένα αναφορικά με τα υγιή άτομα στη βάση δεδομένων την οποία υποστηρίζει αυτή η έρευνα. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι το μοντέλο αυτό αφήνει περιθώρια ένα άτομο να επιστρέψει σε μία πιο ελαφριά μορφή ασθένειας. Επιπλέον, ενώ άμεσες μεταβάσεις $i' \to i'''$ είναι πιθανές, απευθείας μεταβάσεις $i''' \to i'$ δεν επιτρέπονται. Ο λόγος είναι ότι ότι οι μεταβάσεις $i' \to i'''$ μπορούν να προκύψουν από τραυματικά γεγονότα, άλλα οι ανακάμψεις από την κατάσταση i''' πρέπει να είναι σταδιακές. Έστω ότι η $S(y)$ υποδηλώνει τη κατάσταση που καταλαμβάνεται από ένα άτομο στη ηλικία y. Ας θεωρήσουμε ότι η ελάχιστη ηλικία στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο είναι τα 65 έτη. Στη μελέτη του Jones 1991 η στοχαστική διαδικασία $\{\ S\ y\ ; y \geq 65\}$ θεωρείται ως μία Μαρκοβιανή διαδικασία. Έτσι οι ακόλουθες εντάσεις μετάβασης χρειάζεται να υπολογιστούν: $\mu^{i'i''}(y)$, $\mu^{i'i'''}\ y$, $\mu^{i''i''}\ y$, $\mu^{i''i''}\ y$, $\mu^{i''i'}\ y$, $\mu^{i'''i''}(y)$, $\mu^{i'd}(y)$, $\mu^{i''d}(y)$, $\mu^{i'''d}(y)$.Φυσικά, το ιστορικό υγείας ενός ατόμου θα μπορούσε γενικά να είναι σημαντικό στη πρόβλεψη των μελλοντικών αλλαγών στη υγεία .Έτσι, μία ημι-μαρκοβιανή διαδικασία θα ήταν πιο κατάλληλη, αλλά ταυτόχρονα και πιο πολύπλοκη. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε αναλυτική αριθμητική εφαρμογή για τα σημαντικότερα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στο 3^{ο} κεφάλαιο

Κεφάλαιο 5ο: Αριθμητική εφαρμογή

Στην εφαρμογή όλοι οι υπολογισμοί μας έχουν γίνει υπό την παραδοχή ότι η ένταση θνησιμότητας, οι πιθανότητες θνησιμότητας, και το προεξοφλητικό επιτόκιο που έχουμε παρακάτω έχουν την ίδια μορφή η οποία έχει καθοριστεί σύμφωνα με το μοντέλο της Δανίας. Η παραπάνω παραδοχή συνεπάγεται ότι:

$\mu_y^{ai} = 0.0004 + 10^{(0.06*y-5.46)}$

$\mu_y^{ai} = 0.0005 + 10^{(0.038*y-4.12)}$

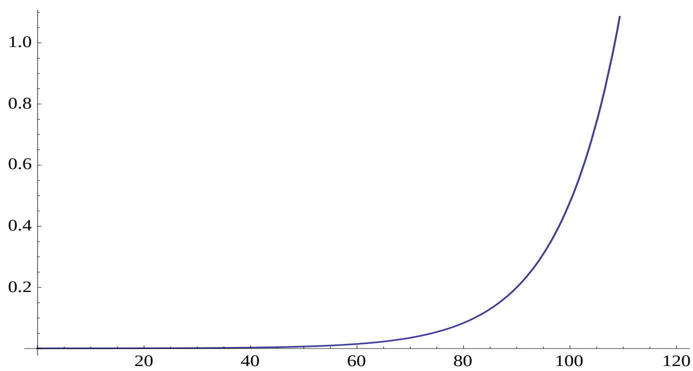
$\mu_y^{id} = 0.0005 + 10^{(0.038*y-4.12)}$

$\boldsymbol{\mu_y = 0.0005 + 10^{(0.038*y-4.12)}}$

Η απεικόνιση των εντάσεων θνησιμότητας θεωρώντας ότι έχουμε ακολουθήσει τη ανωτέρω προσέγγιση για την εύρεσή της παρατίθεται στα παρακάτω διαγράμματα:

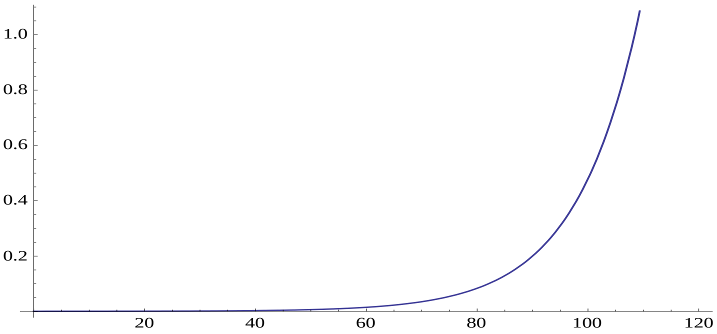
<u>Διαγράμματα Εντάσεων Θνησιμότητας</u>

Διάγραμμα 5.1: Απεικόνιση $\boldsymbol{\mu_y^{ai}}$



Έχουμε υποθέσει ότι σύμφωνα με το μοντέλο της Δανίας $\boldsymbol{\mu_y^{ad}} = \boldsymbol{\mu_y^{id}} = \boldsymbol{\mu_y}$ άρα η γραφική παράσταση είναι κοινή για τις παραπάνω τρεις εντάσεις θνησιμότητας.

Διάγραμμα 5.2



Ακόμα με $\mathbf{v = \frac{1}{(1+i)}}$, ό**που** $\mathbf{i =}$ **προεξοφλητικό επιτόκιο** ορίζουμε όπως έχουμε ήδη αναφέρει το συντελεστή προεξόφλησης και επιπλέον έχουμε και τις πιθανότητες:

$$\mathbf{p_y^{aa}\ y,k\ + p_y^{ai}\ y,k\ = p_y^{ii}\ y,k\ = p_y\ y,k}$$

$$\mathbf{p_y^{aa}(y,k) = e^{-\int_0^k (\mu_{y+u}^{ai}+\mu_{y+u}^{ad})\,du}}$$

$$\mathbf{p_y\ y,k\ = e^{-\int_0^k \mu_{y+u}\,du}}$$

$$\mathbf{p_y^{ai}\ y,k\ = p_y\ y,k\ - p_y^{aa}(y,k)}$$

Τώρα είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε και να πειραματιστούμε με τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν την πρόσοδο πληρωμών δηλαδή και τα αντίστοιχα επίπεδα ασφαλίστρων. Για την παραπάνω ενέργεια μας θα έχουμε σαν παραμέτρους την ηλικία του ατόμου και τα έτη πληρωμών της προσόδου.

Ξεκινάμε με τη προσέγγιση που μας δίδεται μέσω της χρήσης του **Νορβηγικού μοντέλου**. Έστω λοιπόν ότι το επιτόκιο είναι στο i=4%, και μελετάμε για κ=10 έτη την κύμανση των προσόδων πληρωμών $\{P_{x:10,10}\}$ και των επιπέδων ασφαλίστρων $\{\alpha_{\chi:10}^{ai}, \alpha_{\chi:10}^{aa}\}$.

Προς υπενθύμιση έχουμε ότι στο Νορβηγικό μοντέλο:

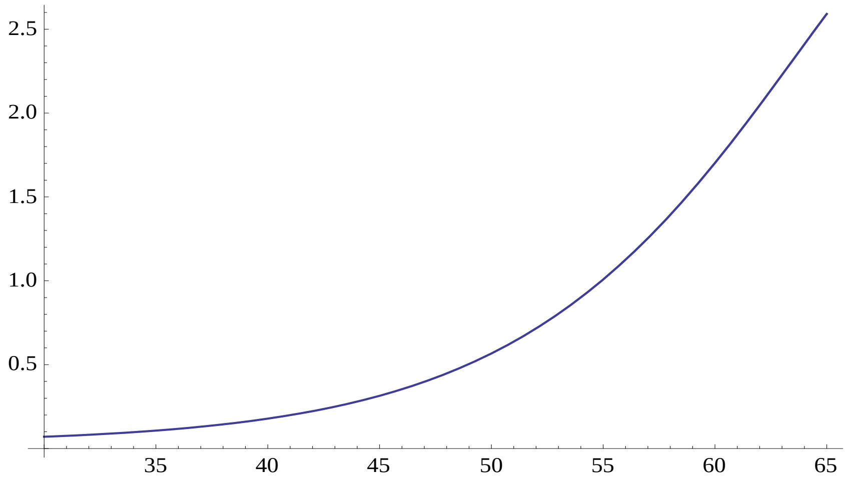
$$\alpha_{\chi:n}^{ai} = \int_0^k p_y^{ai}(y,k) * v^u\,du\ ,\ \alpha_{\chi:n}^{aa} = \int_0^k p_y^{aa}(y,k) * v^u\,du, \text{ και } P_{x:n,m} = \frac{\alpha_{\chi:n}^{ai}}{\alpha_{\chi:m}^{aa}}$$

Να σημειωθεί ότι με a στις παραπάνω σχέσεις συμβολίζουμε την υγιή κατάσταση ενός ατόμου ενώ με i συμβολίζουμε την κατάσταση ασθενείας ενός ατόμου.

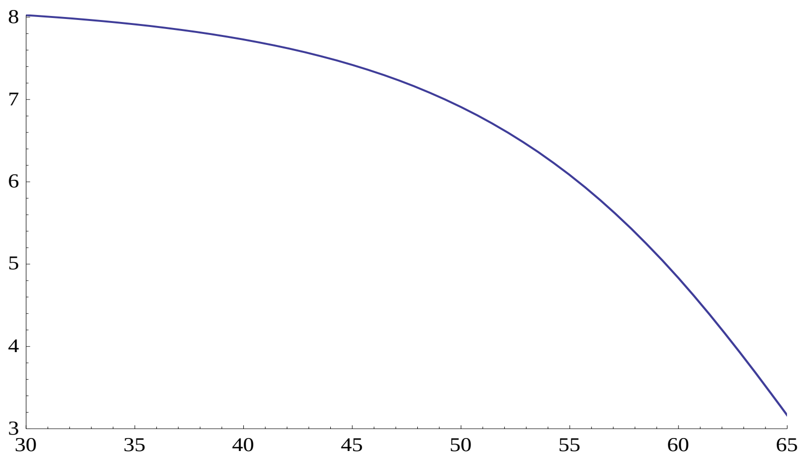
Πίνακας 5.1: Υπολογισμός προσόδων πληρωμών και επιπέδων ασφαλίστρου για το Νορβηγικό μοντέλο.

Ηλικία σε έτη (x)	$\alpha^{ai}_{\chi:10}$	$\alpha^{aa}_{\chi:10}$	$P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10}\ \ \alpha^{aa}_{\chi:10}$
30	0.0702797	8.02388	0.00875883
31	0.0757735	8.006	0.00946459
32	0.0820625	7.98622	0.0102755
33	0.0892593	7.96433	0.0112074
34	0.0974914	7.94008	0.0122784
35	0.106903	7.91323	0.0135095
36	0.117659	7.88348	0.0149248
37	0.129943	7.85052	0.0165522
38	0.143964	7.81399	0.0184239
39	0.159957	7.77351	0.0205772
40	0.178185	7.72863	0.0230552
41	0.198942	7.67889	0.0259076
42	0.222557	7.62377	0.0291925
43	0.249395	7.56268	0.032977
44	0.279859	7.49501	0.0373394
45	0.314395	7.42007	0.0423708
46	0.353486	7.33711	0.0481778
47	0.397661	7.24535	0.0548849
48	0.447486	7.14392	0.0626387
49	0.503566	7.03191	0.0716116
50	0.566537	6.90837	0.0820073
51	0.637054	6.7723	0.0940675
52	0.715782	6.62268	0.10808
53	0.803377	6.45848	0.124391
54	0.900456	6.27871	0.143414
55	1.00757	6.08242	0.165653
56	1.12516	5.86876	0.19172
57	1.25351	5.63704	0.222369
58	1.39266	5.3868	0.258533
59	1.5424	5.11787	0.301375
60	1.70209	4.83048	0.352366
61	1.87067	4.52531	0.41338
62	2.0465	4.20367	0.486835
63	2.22728	3.86752	0.575893
64	2.41003	3.51961	0.684744
65	2.59098	3.51961	0.684744

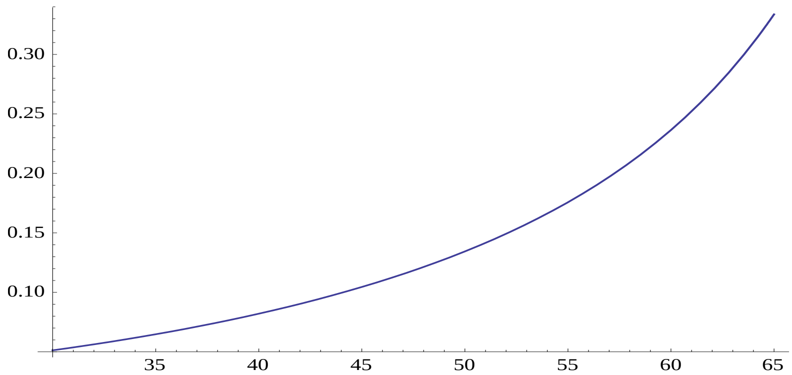
Διάγραμμα 5.3: Απεικόνιση του $\boldsymbol{\alpha}^{ai}_{\chi:10}$



Διάγραμμα 5.4: Απεικόνιση του $\boldsymbol{\alpha}^{aa}_{\chi:10}$



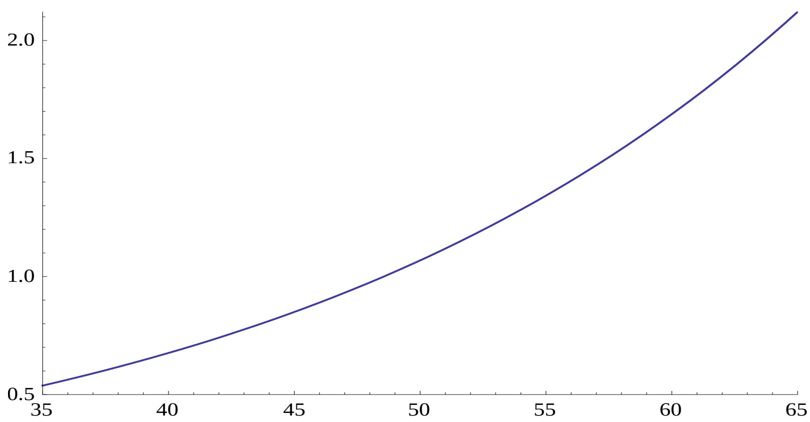
Διάγραμμα 5.5 : Απεικόνιση του $P_{x:10,10}$



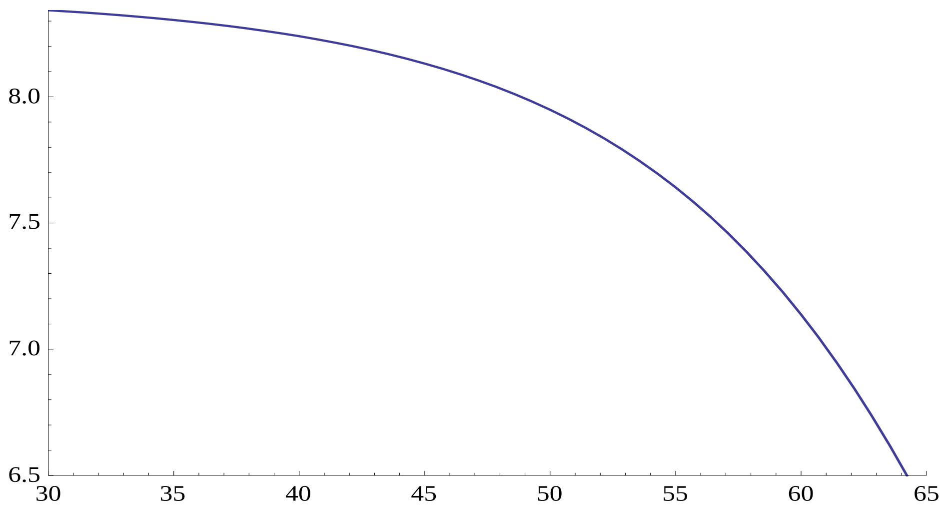
Μελέτη του Μοντέλου της Ολλανδίας

Μελετάμε πάλι για κ=10 έτη την κύμανση των προσόδων πληρωμών και των επιπέδων ασφαλίστρων με επιτόκιο i=4% .Αυτή τη φορά έχουμε ότι: $\alpha^{aa}_{\chi:n} = \sum_{k=0}^{n-1} p^{aa}_{y} * v^{k}$ και $\alpha^{ai}_{\chi:n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{6} p^{ai_s}_{y} * v^{k}$ όπου το $p^{ai_s}_{y}$ ταυτίζεται με το $p^{ai_1}_{y}$γεγονός που προκύπτει από τη φύση κατασκευής του μοντέλου, ενώ το επίπεδο ασφαλίστρου παράμενει το ίδιο δηλαδή ίσο με: $P_{x:n,m} = \frac{\alpha^{ai}_{\chi:10}}{\alpha^{aa}_{\chi:10}}$.

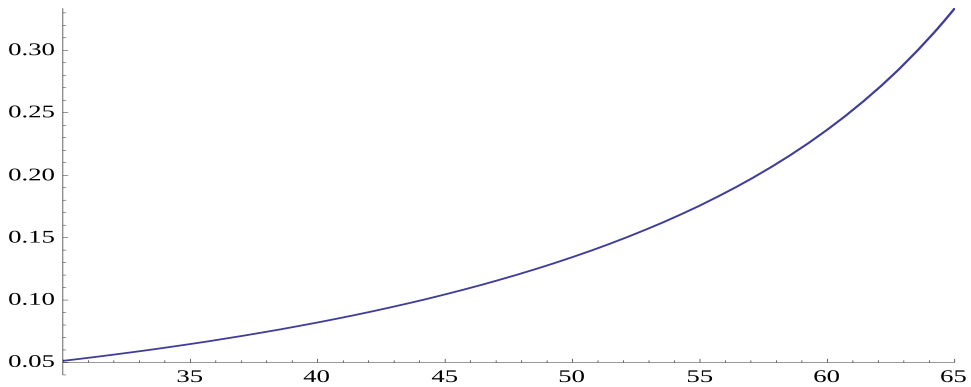
Διάγραμμα 5.6: Απεικόνιση του $\alpha^{ai}_{\chi:10}$



Διάγραμμα 5.7: Απεικόνιση της $\alpha^{aa}_{\chi:10}$



Διάγραμμα 5.8: Απεικόνιση του $P_{x:10,10}$



Πίνακας 5.2: Υπολογισμός ράντας πληρωμών και επιπέδων ασφαλίστρου για το μοντέλο της Ολλανδίας.

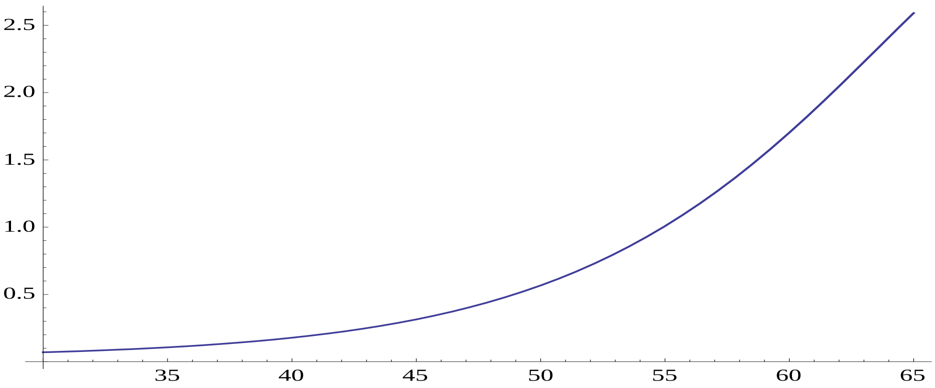
Ηλικία σε έτη (x)	$\alpha^{ai}_{\chi:10}$	$\alpha^{aa}_{\chi:10}$	$P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10}\ \ \alpha^{aa}_{\chi:10}$
30	0.427993	8.34285	0.0513005
31	0.448023	8.33663	0.0537414
32	0.46899	8.32976	0.056303
33	0.490939	8.32214	0.0589919
34	0.513915	8.31371	0.0618153
35	0.537966	8.30437	0.0647811
36	0.563143	8.29402	0.0678975
37	0.589498	8.28255	0.0711735
38	0.617087	8.26983	0.0746191
39	0.645966	8.25571	0.0782448
40	0.676197	8.24005	0.0820623
41	0.707843	8.22267	0.0860844
42	0.740971	8.20337	0.0903252
43	0.775648	8.18194	0.0948
44	0.811948	8.15814	0.0995262
45	0.849947	8.1317	0.104523
46	0.889725	8.10234	0.109811
47	0.931364	8.06972	0.115415
48	0.974952	8.0335	0.121361
49	1.02058	7.99328	0.12768
50	1.06834	7.94863	0.134406
51	1.11834	7.89909	0.141578
52	1.17068	7.84416	0.149242
53	1.22547	7.78327	0.157449
54	1.28282	7.71587	0.166257
55	1.34286	7.64131	0.175736
56	1.4057	7.55895	0.185965
57	1.47149	7.46811	0.197036
58	1.54035	7.36809	0.209057
59	1.61244	7.2582	0.222154
60	1.6879	7.13775	0.236476
61	1.7669	7.0061	0.252194
62	1.84959	6.86264	0.269515
63	1.93615	6.70691	0.28868
64	2.02676	6.53852	0.309972
65	2.12161	6.35731	0.333728

Μελέτη του μοντέλου της Δανίας .

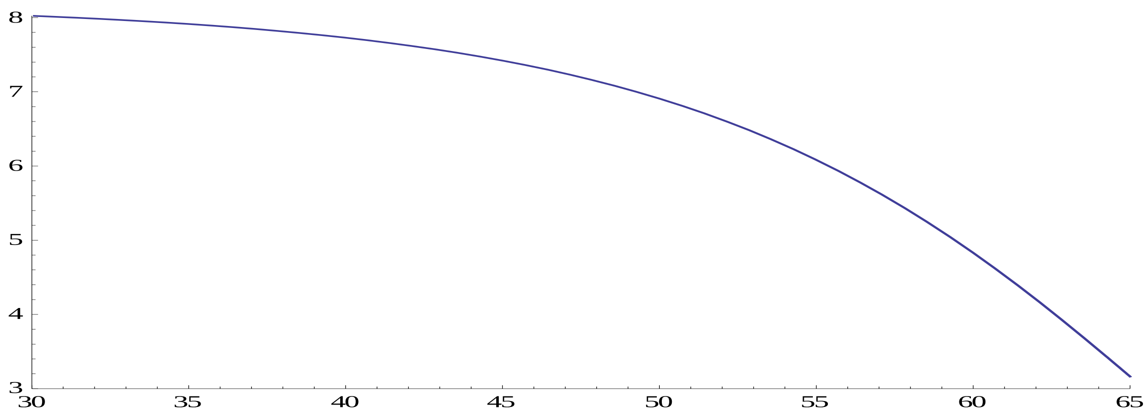
Μελετάμε επίσης για κ=10 έτη την κύμανση των προσόδων πληρωμών και των επιπέδων ασφαλίστρων με επιτόκιο i=4%.

Αυτή τη φορά έχουμε ότι: $\alpha^{ai}_{\chi:n} = \int_0^k p^{ai}_{y}(y,k) * v^{u}\, du$, $\alpha^{aa}_{\chi:n} = \int_0^k p^{aa}_{y}(y,k) * v^{u}\, du$ και όπως και προγενέστερα :$P_{x:10,10} = \frac{\alpha^{ai}_{\chi:10}}{\alpha^{aa}_{\chi:10}}$. Η απεικόνιση των προσόδων πληρωμών αυτή τη φορά θα είναι:

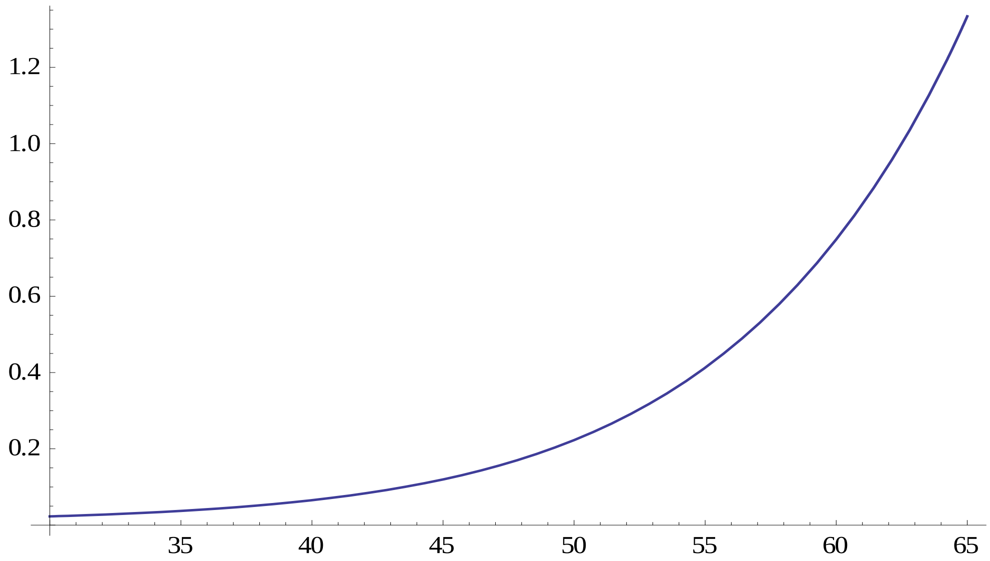
Διάγραμμα 9 : Απεικόνιση του $\alpha^{ai}_{\chi:10}$



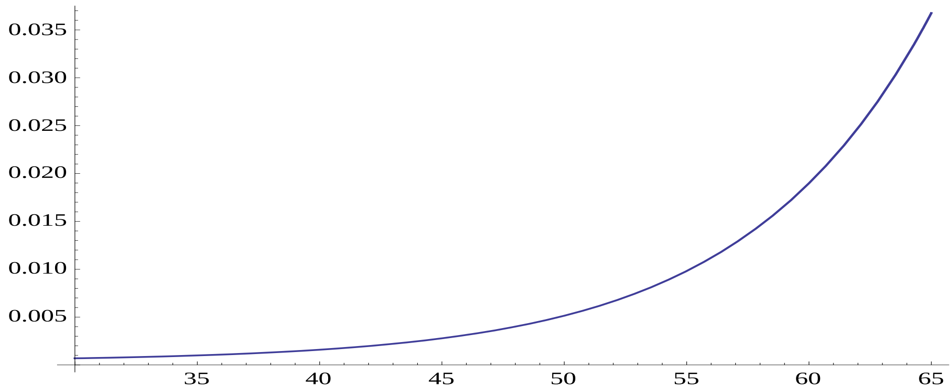
Διάγραμμα 5.10 : Απεικόνιση του $\alpha^{aa}_{\chi:10}$



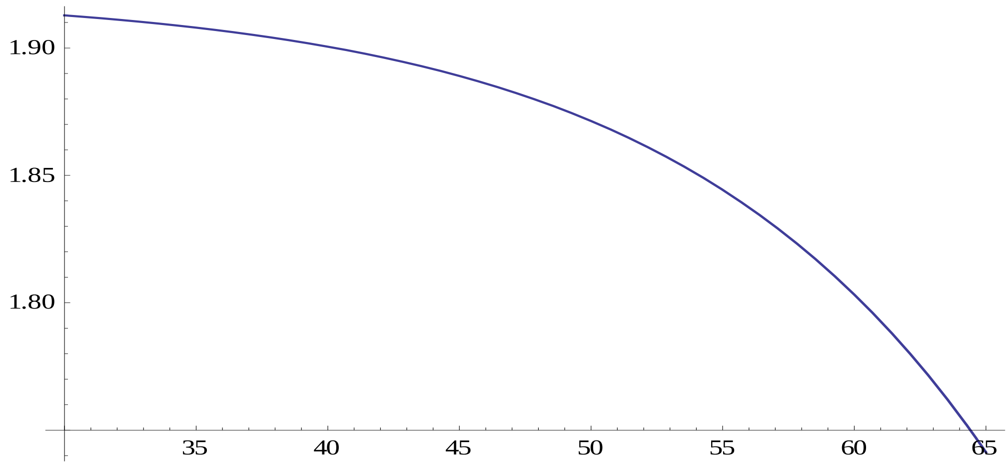
Διάγραμμα 5.11: Απεικόνιση $P_{x:10,10}$



Διάγραμμα 5.12: Απεικόνιση αποθεμάτων $\alpha_{\chi:n}^{ai}$ για $m \leq t \leq n$



Διάγραμμα 5.13: Απεικόνιση αποθεμάτων $\alpha_{\chi:n}^{ii}$ για $m \leq t \leq n$



Πίνακας 5.3: Υπολογισμός προσόδων πληρωμών και επιπέδων ασφαλίστρου για το μοντέλο της Δανίας.

Ηλικία σε έτη (x)	$\alpha^{ai}_{\chi:10}$	$\alpha^{aa}_{\chi:10}$	$P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10} \quad \alpha^{aa}_{\chi:10}$
30	0.0702797	8.02388	0.00875883
31	0.0757735	8.006	0.00946459
32	0.0820625	7.98622	0.0102755
33	0.0892593	7.96433	0.0112074
34	0.0974914	7.94008	0.0122784
35	0.106903	7.91323	0.0135095
36	0.117659	7.88348	0.0149248
37	0.129943	7.85052	0.0165522
38	0.143964	7.81399	0.0184239
39	0.159957	7.77351	0.0205772
40	0.178185	7.72863	0.0230552
41	0.198942	7.67889	0.0259076
42	0.222557	7.62377	0.0291925
43	0.249395	7.56268	0.032977
44	0.279859	7.49501	0.0373394
45	0.314395	7.42007	0.0423708
46	0.353486	7.33711	0.0481778
47	0.397661	7.24535	0.0548849
48	0.447486	7.14392	0.0626387
49	0.503566	7.03191	0.0716116
50	0.566537	6.90837	0.0820073
51	0.637054	6.7723	0.0940675
52	0.715782	6.62268	0.10808
53	0.803377	6.45848	0.124391
54	0.900456	6.27871	0.143414
55	1.00757	6.08242	0.165653
56	1.12516	5.86876	0.19172
57	1.25351	5.63704	0.222369
58	1.39266	5.3868	0.258533
59	1.5424	5.11787	0.301375
60	1.70209	4.83048	0.352366
61	1.87067	4.52531	0.41338
62	2.0465	4.20367	0.486835
63	2.22728	3.86752	0.575893
64	2.41003	3.51961	0.684744
65	2.59098	3.1635	0.819023

Πίνακας 5.4: Υπολογισμός αποθεμάτων για το μοντέλο της Δανίας

Ηλικία σε έτη (x)	Αποθέματα για $0<t<m$, με m=10, t=2,n=0	Αποθέματα $\alpha_{\chi:n}^{ai}$ για $m \le t \le n$, με m=10, t=12	Αποθέματα $\alpha_{\chi:n}^{ii}$ για $m \le t \le n$, με m=10, t=12
30	0.00272368	0.00443637	1.91281
31	0.00288035	0.00486458	1.91201
32	0.00306029	0.00535581	1.91113
33	0.00326696	0.00591924	1.91017
34	0.00350436	0.00656543	1.90912
35	0.00377706	0.00730644	1.90798
36	0.00409034	0.00815604	1.90673
37	0.00445025	0.00913002	1.90538
38	0.00486379	0.0102464	1.9039
39	0.00533896	0.0115256	1.90228
40	0.00588501	0.0129913	1.90052
41	0.00651259	0.0146701	1.8986
42	0.00723395	0.0165925	1.89651
43	0.0080632	0.0187932	1.89422
44	0.00901662	0.0213116	1.89173
45	0.010113	0.0241924	1.88902
46	0.0113739	0.0274865	1.88607
47	0.0128244	0.0312512	1.88285
48	0.0144934	0.0355516	1.87934
49	0.0164142	0.0404608	1.87552
50	0.0186253	0.0460613	1.87135
51	0.0211715	0.0524454	1.86682
52	0.0241045	0.0597166	1.86189
53	0.0274844	0.0679902	1.85652
54	0.0313808	0.0773939	1.85067
55	0.0358747	0.0880691	1.84431
56	0.0410607	0.100171	1.8374
57	0.0470486	0.113867	1.82988
58	0.0539672	0.129342	1.82171
59	0.0619669	0.14679	1.81284
60	0.0712244	0.166418	1.8032
61	0.0819474	0.188441	1.79274
62	0.0943808	0.213078	1.7814
63	0.108814	0.240545	1.76909
64	0.125592	0.271051	1.75576
65	0.145123	0.304783	1.74133

Παρατηρήσεις πάνω στο κομμάτι εφαρμογής των μοντέλων:

Από την γραφική απεικόνιση των εντάσεων θνησιμότητας παρατηρούμε ότι η ένταση θνησιμότητας αυξάνεται καθώς κυλάει ο χρόνος και μάλιστα σε μεγάλες ηλικίες η εν λόγω αύξηση είναι εντονότερη. Πράγματι κάτι τέτοιο έχει λογική από την στιγμή που όσο πιο μεγάλο είναι ένα άτομο σε ηλικία τόσο πιθανότερο είναι να αποβιώσει.

Για το Νορβηγικό μοντέλο μπορούμε να πούμε τα εξής:

Μετά από την εξαγωγή των αποτελεσμάτων στο πίνακα 5.1 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ράντα πληρωμών έχει τιμές οι οποίες είναι αύξουσες καθώς αυξάνεται η ηλικία του ατόμου όταν αναφερόμαστε σε άτομο που έχει μεταβεί και βρίσκεται σε κατάσταση ασθενείας από την αρχική κατάσταση υγείας. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το άτομο παραμένει σε υγιής κατάσταση. Η ράντα πληρωμών μειώνεται όπως φαίνεται στο πέρασμα του χρόνου. Τα γραφήματα που ακολουθούν μας επιβεβαιώνουν την ευθέως ανάλογη σχέση που αναμέναμε για την ράντα πληρωμών $\alpha^{ai}_{\chi:10}$ και του επίπεδο ασφαλίστρου $P_{x:10,10}$ σε συνάρτηση με το χρόνο και την αντιστρόφως ανάλογη σχέση της ράντας πληρωμών $\alpha^{aa}_{\chi:10}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για το Ολλανδικό τώρα μοντέλο μπορούμε να αναφέρουμε ότι:

Όπως και στην εξέταση του προηγούμενου μοντέλου η ράντα πληρωμών για ασθενές άτομο από αρχική υγιής κατάσταση, είναι αύξουσα συναρτήσει του χρόνου που κυλάει, η ράντα πληρωμών υγιούς ατόμου από αρχική κατάσταση υγιής είναι φθίνουσα συναρτήσει της εξέλιξης του χρόνου, και τα επίπεδα ασφαλίστρου αυξάνονται καθώς ο χρόνος κυλάει. Οι γραφικές αναπαραστάσεις μας επιβεβαιώνουν και πάλι για τα συμπεράσματα που έχουμε βγάλει πιο πριν.

Για το μοντέλο της Δανίας μπορούμε να αναφέρουμε ότι:

Σε αυτό το εξεταζόμενο μοντέλο είναι άξιο λόγου να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τα αποθέματα που για πρώτη φορά έχουμε, για τα εν λόγω μεγέθη μία εικόνα. Οι παρατηρήσεις λοιπόν που μπορούν να γίνουν είναι ότι γενικά τα αποθέματα αυξάνονται κάθε χρόνο, εκτός της περίπτωσης που αναφερόμαστε σε αποθέματα που δημιουργούνται όταν έχουμε να κάνουμε με ράντα πληρωμών ατόμου που είναι ασθενής και παραμένει ασθενής μέχρι και τα 65 έτη του (ηλικία συνταξιοδότησης). Τα συμπεράσματα για την εικόνα που παρουσιάζουν οι ράντες πληρωμών είναι παρόμοια με των προηγούμενων εξεταζόμενων μοντέλων.

Ακολουθεί μία σύγκριση μεταξύ των τριών εξεταζόμενων μοντέλων.

Πίνακας 5.5

Ηλικία σε έτη (x)	Νορβηγικό μοντέλο $\alpha_{\chi:10}^{ai}$	Ολλανδικό μοντέλο $\alpha_{\chi:10}^{ai}$	Μοντέλο της Δανίας $\alpha_{\chi:10}^{ai}$
30	0.0702797	0.427993	0.0702797
31	0.0757735	0.448023	0.0757735
32	0.0820625	0.46899	0.0820625
33	0.0892593	0.490939	0.0892593
34	0.0974914	0.513915	0.0974914
35	0.106903	0.537966	0.106903
36	0.117659	0.563143	0.117659
37	0.129943	0.589498	0.129943
38	0.143964	0.617087	0.143964
39	0.159957	0.645966	0.159957
40	0.178185	0.676197	0.178185
41	0.198942	0.707843	0.198942
42	0.222557	0.740971	0.222557
43	0.249395	0.775648	0.249395
44	0.279859	0.811948	0.279859
45	0.314395	0.849947	0.314395
46	0.353486	0.889725	0.353486
47	0.397661	0.931364	0.397661
48	0.447486	0.974952	0.447486
49	0.503566	1.02058	0.503566
50	0.566537	1.06834	0.566537
51	0.637054	1.11834	0.637054
52	0.715782	1.17068	0.715782
53	0.803377	1.22547	0.803377
54	0.900456	1.28282	0.900456
55	1.00757	1.34286	1.00757
56	1.12516	1.4057	1.12516
57	1.25351	1.47149	1.25351
58	1.39266	1.54035	1.39266
59	1.5424	1.61244	1.5424
60	1.70209	1.6879	1.70209
61	1.87067	1.7669	1.87067
62	2.0465	1.84959	2.0465
63	2.22728	1.93615	2.22728
64	2.41003	2.02676	2.41003
65	2.59098	2.12161	2.59098

Πίνακας 5.6

Ηλικία σε έτη (x)	Νορβηγικό μοντέλο $\alpha_{\chi:10}^{aa}$	Ολλανδικό μοντέλο $\alpha_{\chi:10}^{aa}$	Μοντέλο της Δανίας $\alpha_{\chi:10}^{aa}$
30	8.02388	8.34285	8.02388
31	8.006	8.33663	8.006
32	7.98622	8.32976	7.98622
33	7.96433	8.32214	7.96433
34	7.94008	8.31371	7.94008
35	7.91323	8.30437	7.91323
36	7.88348	8.29402	7.88348
37	7.85052	8.28255	7.85052
38	7.81399	8.26983	7.81399
39	7.77351	8.25571	7.77351
40	7.72863	8.24005	7.72863
41	7.67889	8.22267	7.67889
42	7.62377	8.20337	7.62377
43	7.56268	8.18194	7.56268
44	7.49501	8.15814	7.49501
45	7.42007	8.1317	7.42007
46	7.33711	8.10234	7.33711
47	7.24535	8.06972	7.24535
48	7.14392	8.0335	7.14392
49	7.03191	7.99328	7.03191
50	6.90837	7.94863	6.90837
51	6.7723	7.89909	6.7723
52	6.62268	7.84416	6.62268
53	6.45848	7.78327	6.45848
54	6.27871	7.71587	6.27871
55	6.08242	7.64131	6.08242
56	5.86876	7.55895	5.86876
57	5.63704	7.46811	5.63704
58	5.3868	7.36809	5.3868
59	5.11787	7.2582	5.11787
60	4.83048	7.13775	4.83048
61	4.52531	7.0061	4.52531
62	4.20367	6.86264	4.20367
63	3.86752	6.70691	3.86752
64	3.51961	6.53852	3.51961
65	3.51961	6.35731	3.1635

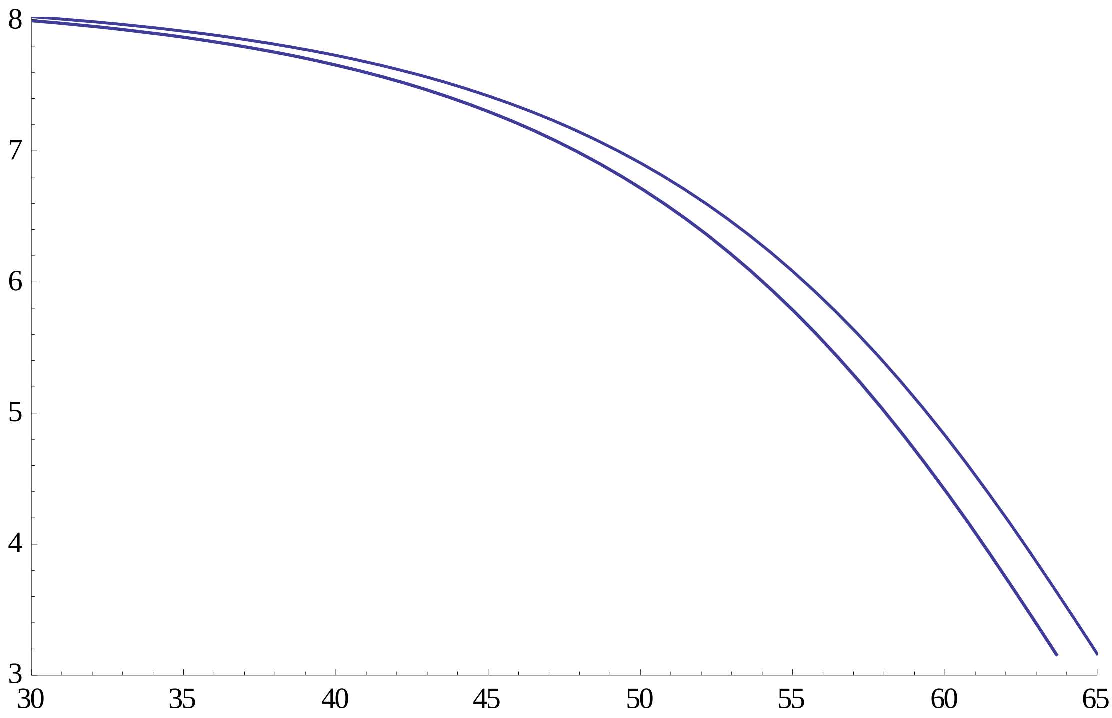
Πίνακας 5.7

Ηλικία σε έτη (x)	Νορβηγικό μοντέλο $P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10}\ \ \alpha^{aa}_{\chi:10}$	Ολλανδικό μοντέλο $P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10}\ \ \alpha^{aa}_{\chi:10}$	Μοντέλο της Δανίας $P_{x:10,10} = \alpha^{ai}_{\chi:10}\ \ \alpha^{aa}_{\chi:10}$
30	0.00875883	0.0513005	0.00875883
31	0.00946459	0.0537414	0.00946459
32	0.0102755	0.056303	0.0102755
33	0.0112074	0.0589919	0.0112074
34	0.0122784	0.0618153	0.0122784
35	0.0135095	0.0647811	0.0135095
36	0.0149248	0.0678975	0.0149248
37	0.0165522	0.0711735	0.0165522
38	0.0184239	0.0746191	0.0184239
39	0.0205772	0.0782448	0.0205772
40	0.0230552	0.0820623	0.0230552
41	0.0259076	0.0860844	0.0259076
42	0.0291925	0.0903252	0.0291925
43	0.032977	0.0948	0.032977
44	0.0373394	0.0995262	0.0373394
45	0.0423708	0.104523	0.0423708
46	0.0481778	0.109811	0.0481778
47	0.0548849	0.115415	0.0548849
48	0.0626387	0.121361	0.0626387
49	0.0716116	0.12768	0.0716116
50	0.0820073	0.134406	0.0820073
51	0.0940675	0.141578	0.0940675
52	0.10808	0.149242	0.10808
53	0.124391	0.157449	0.124391
54	0.143414	0.166257	0.143414
55	0.165653	0.175736	0.165653
56	0.19172	0.185965	0.19172
57	0.222369	0.197036	0.222369
58	0.258533	0.209057	0.258533
59	0.301375	0.222154	0.301375
60	0.352366	0.236476	0.352366
61	0.41338	0.252194	0.41338
62	0.486835	0.269515	0.486835
63	0.575893	0.28868	0.575893
64	0.684744	0.309972	0.684744
65	0.684744	0.333728	0.819023

Οι παρατηρήσεις οι ο οποίες μπορούν να γίνουν πάνω στο πίνακα 5.5 είναι οι εξής: Καταρχήν παρατηρώ ότι η αναλογιστική παρούσα αξία $\alpha^{ai}_{\chi:10}$ του μοντέλου της Νορβηγίας είναι ίση με του μοντέλου της Δανίας. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε δεχθεί την ίδια προσέγγιση για τον υπολογισμό τους.Μία άλλη διαπίστωση παρατηρείται όταν συγκρίνω το μοντέλο της Δανίας (ή της Νορβηγίας) με το μοντέλο της Ολλανδίας. Η παρατήρηση που μπορεί να γίνει εδώ είναι ότι η αναλογιστική παρούσα αξία στο Ολλανδικό μοντέλο είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της Δανίας μέχρι την ηλικία των 59 ετών. Μετά την ηλικία των 59 ετών το μοντέλο της Ολλανδίας έχει μεγαλύτερη αναλογιστική παρούσα αξία.

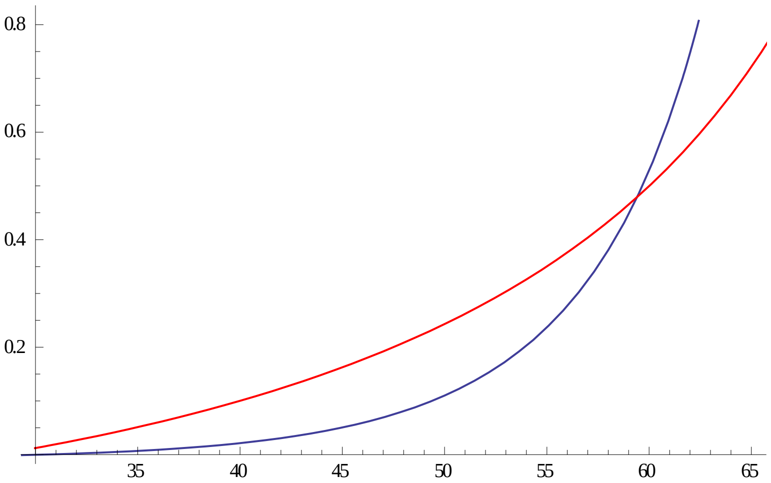
Οι παρατηρήσεις οι ο οποίες μπορούν να γίνουν στο πίνακα 5.6 είναι οι εξής: Παρατηρώ ότι η αναλογιστική παρούσα αξία $\alpha^{aa}_{\chi:10}$ του μοντέλου της Νορβηγίας είναι ίση με του μοντέλου της Δανίας. Ακόμα η αναλογιστική παρούσα αξία στο μοντέλο της Ολλανδίας είναι σε κάθε ηλικία υψηλότερη από την αντίστοιχη του μοντέλου της Νορβηγίας. Η εικόνα αυτή επιβεβαιώνεται και από το παρακάτω διάγραμμα:

Διάγραμμα 5.14



Τέλος η παρατήρηση που μπορεί να γίνει πάνω στο πίνακα 5.7 είναι ότι το επίπεδο ασφάλιστρου είναι υψηλότερο για το Ολλανδικό μοντέλο μέχρι την ηλικία των 56 ετών και από εκεί και περά και μέχρι την τελική ηλικία των 65 ετών το επίπεδο ασφαλίστρου είναι υψηλότερο στο μοντέλο της Νορβηγίας. Η εξήγηση είναι ότι το Ολλανδικό μοντέλο φροντίζει σε μικρές ηλικίες να δημιουργεί μεγαλύτερα αποθεματικά με αποτέλεσμα το επίπεδο ασφαλίστρου να είναι μικρότερο σε μεγάλες ηλικίες. Παρακάτω ακολουθεί η διαγραμματική απεικόνιση των ανωτέρω μεγεθών.

Διάγραμμα 5.15



.

Βιβλιογραφία

1. Amsler, M.H. (1968) Les chaines de Markov des assurance vie, invalidite et maladie, Mù nchen.
2. Bernulli, D. (1766) Testing a new analyze mortality caused by smallpox and advantages of inoculation to prevent it. Hist. Acad. Roy.
3. Chadburn, R.G. Cooper, D.R. and Haberman, S. (1995). Actuarial mathematics, Institute and Faculty of Actuaries Oxford. Clark, G.and Dulllaway, D. (1995) PHI Pricing, Health and care PHI Meeting, Institute of actuaries, London.
4. CMIR7 (1984) Sickness Experience 1975-78 for individual PHI Policies. Continuous Mortality Investigation Bureau, the Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries.
5. CMIR12 (1991). The Analysis of Permanent Health Insurance data. Continuous Mortality Investigation Bureau, the Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries.
6. Cournot, AA (1843) Expositionde la theorie des chances et des probabilities, Librarie de L'Hachette, Paris.
7. Du Pasquier, L.G.(1912) Mathematische Theorie der Invaliditätversicherung
8. Finlasion, J. (1829) Life annuities-Report of John Finlaison, Actuary of the national debt on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities were founded, House of Commons, London.
9. Hamilton –Jones, J. (1972). Actuarial aspects of long- term sickness insurance.
10. Hamza, E. (1900) Note sur la theoriemathematique del'assurance contre le risqué d' invalidite d'origine morbid, senile ou accidentelle. Paris
11. H.R. Waters (1989). Some aspects of the modeling of permanent health Insurance.
12. Hubbard, G.N. (1852) De l'organisation des Societes de Prevoyance ou de Secours mutuels et des bases scientifiques sur lesqyelles elles doivent etre etablies, Guillamin et Cie, Paris
13. Lambert, J.H. (1772). The mortality of smallpox in children, Berlin.
14. Makeham W.M. (1867) On the law of mortality.
15. Mattsson (1977). Some reflections on different disability models.
16. Pitacco, E. (1995). Collective life insurance indexing. A multistate approach, Brussels.
17. Sprague, T.B. (1879). On the construction of a combined marriage and mortality table from observations made as to the rates of marriage and mortality among anybody of men.
18. Springer Undergraduate Mathematics Series (1999). A course through exercises. Series: 1st ed
19. S. Haberman & E.Pitacco (1994). Actuarial models for disability Insurance, United States of America.
20. Watson, A.W. (1903). Sickness and mortality experience of the Independent Order of Oddfellows Manchester Unity Friendly Society during the five years 1893-1897, Manchester.