ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Δημήτριος Μ. Κοτσιφάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2004

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι   Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α   Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Δημήτριος Μ. Κοτσιφάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2004

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………. (Επιβλέπων)
- ……………………………….
- ……………………………….

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

MODELS FOR THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES

By

Dimitrios M. Kotsifakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
November 2004

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και κυρίως στον επιβλέποντα Επίκουρο καθηγητή κ. Πολίτη Κώστα, χωρίς την πρωτοβουλία, τα πολύτιμα σχόλια και τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του οποίου, η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής δεν θα είχε επιτευχθεί. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση και τη βοήθεια που μου προσέφερε.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη της αγοράς των επιτοκιακών παραγώγων έχει στρέψει το ενδιαφέρον των χρηματοοικονομικών αναλυτών στη μελέτη της διάρθρωσης επιτοκίων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι τέσσερεις βασικές θεωρίες που πλαισιώνουν τη διάρθρωση επιτοκίων ανάλογα με τη διάρκεια: η θεωρία των προσδοκιών, του πριμ ρευστότητας, των προτιμούμενων συνηθειών και η τμηματική θεωρία. Επίσης, αναλύονται και συγκρίνονται τέσσερα βασικά μοντέλα κατά ένα παράγοντα για τη διάρθρωση επιτοκίων: Merton (1973), Vasicek (1977), Dothan (1978), και Cox-Ingersoll-Ross (1985). Τέλος, αναλύοντας επιτόκια της ελληνικής αγοράς, ελέγχεται αν ισχύει η υπόθεση των προσδοκιών και συγκρίνονται τα τέσσερα μοντέλα σε πρακτικό επίπεδο.

Abstract

Over the last years, the development in the market of interest-rate derivatives has turned the attention of financial analysts on the study of the term structure of interest rates. In this dissertation, the four basic theories framing the term structure are presented: the expectations theory, the liquidity preference theory, the preferred habitat theory and the market segmentation theory. Furthermore, four basic single-factor models for the term structure of interest rates are analyzed and compared to each other: Merton (1973), Vasicek (1977), Dothan (1978), και Cox-Ingersoll-Ross (1985). Finally, analysing interest rates of the Greek market, the expectations hypothesis is examined, and the four models are compared empirically.

Περιεχόμενα

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διάρθρωση επιτοκίων αποτελεί αντικείμενο σημαντικής έρευνας στο χώρο των χρηματοοικονομικών. Προσελκύει το ενδιαφέρον των οικονομικών μελετητών και αναλυτών λόγω του ότι παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για την ύπαρξη κερδοσκοπικών ευκαιριών μέσα στο χρόνο. Επίσης, μαρτυρεί την ικανότητα των χρηματοοικονομικών αγορών να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες πληροφορίες για τη διαμόρφωση προσδοκιών για το μέλλον. Σε μακροοικονομικό επίπεδο, αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τις νομισματικές αρχές το να γνωρίζουν αν η διάρθρωση επιτοκίων μπορεί να μεταβληθεί με τρόπο τέτοιο, ώστε να επηρεάζει σε επιθυμητό επίπεδο τη διεθνή βραχυπρόθεσμη κίνηση κεφαλαίων, ενώ ταυτόχρονα να ενθαρρύνει την εγχώρια μακροπρόθεσμη επένδυση. Συνεπώς, η πλήρης κατανόηση της διάρθρωσης επιτοκίων αποτελεί έρεισμα για τη λήψη οικονομικών μέτρων και αποφάσεων.

Σε πρακτικό επίπεδο, το πριμ διάρκειας των επιτοκίων συνήθως ορίζεται ως το προωθητικό επιτόκιο (*forward rate*), δηλαδή το επιτόκιο για μελλοντικά συμβόλαια, μείον το αντίστοιχο προσδοκώμενο μελλοντικό στιγμιαίο επιτόκιο (*future spot rate*) (Lee και Tse, 1991). Έτσι, η συμπεριφορά της διάρθρωσης επιτοκίων μπορεί να μεταφραστεί ως μία περιγραφή της κατάστασης του πριμ διάρκειας. Έχουν προταθεί τέσσερεις βασικές θεωρίες για τη διάρθρωση των επιτοκίων. Σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών, το πριμ διάρκειας είναι μηδενικό, ως αποτέλεσμα της ισορροπίας στην αγορά, στην οποία συμμετέχουν επενδυτές που επιθυμούν με ουδέτερο κίνδυνο τη μεγιστοποίηση του κέρδους τους. Η θεωρία του πριμ ρευστότητας υποστηρίζει ότι το πριμ διάρκειας είναι θετικό. Η βασική υπόθεση αναφέρει ότι οι επενδυτές τυπικά έχουν βραχυπρόθεσμους επενδυτικούς ορίζοντες. Αυτό υποδηλώνει ότι οι μακροπρόθεσμες επενδύσεις ενέχουν επιπλέον κίνδυνο έναντι των βραχυπρόθεσμων, που μεταφράζεται σε πριμ κινδύνου. Η θεωρία των προτιμούμενων συνηθειών αναφέρει ότι το πριμ διάρκειας ενδέχεται να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, ανάλογα τον επενδυτικό ορίζοντα του επενδυτή. Δηλαδή, αν τον επενδυτή τον ενδιαφέρουν οι αποδόσεις από μακροχρόνιες επενδύσεις, ενδεχομένως οι αντίστοιχες βραχυχρόνιες επενδύσεις να είναι περισσότερο ριψοκίνδυνες, οπότε ο επενδυτής να απαιτεί από αυτές υψηλότερη απόδοση. Τέλος, σύμφωνα με την τμηματική θεωρία, η μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη αγορά δεν συνδέονται και δεν γίνεται καμία αναφορά στο πριμ διάρκειας.

Η προσαρμογή μοντέλων στη διάρθρωση επιτοκίων, αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα πεδία στο χώρο της χρηματοοικονομικής έρευνας. Βασικά, υπάρχουν πολλά ωφέλη από την πληρέστερη κατανόηση της διάρθρωσης επιτοκίων. Έπειτα από την εισαγωγή και διεύρυνση της αγοράς επιτοκιακών παράγωγων, δηλαδή χρηματοοικονομικών προϊόντων που η τιμή τους εξαρτάται από την πορεία των επιτοκίων μέσα στο χρόνο, έχει δοθεί πολλή προσοχή στην ανάπτυξη μοντέλων για την τιμολόγησή τους, καθώς επίσης για την αντιστάθμιση κινδύνου που βασίζεται στην κατάσταση των επιτοκίων. Το μοντέλο των Black και Scholes καθιερώθηκε άμεσα ως το πιο αντιπροσωπευτικό υπόδειγμα για παράγωγα προϊόντα πάνω σε μετοχές. Αντίθετα, υπάρχει μια τεράστια ποικιλία υποδειγμάτων που χρησιμοποιείται ταυτόχρονα σε θεωρητικό αλλά και πρακτικό επίπεδο, όσον αφορά τα επιτοκιακά παράγωγα προϊόντα. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι, αντίθετα με τις μετοχές, τα επιτόκια παρουσιάζουν πιο πολύπλοκη στοχαστική συμπεριφορά και δεν είναι άμεσα εμπορεύσιμα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην υπάρχει μία συγκεκριμένη και προκαθορισμένη προσέγγιση για την τιμολόγηση επιτοκιακών παραγώγων, όπως και για τη διαχείρηση επιτοκιακού κινδύνου. Κάθε μοντέλο αντιπροσωπεύει διαφορετική προσέγγιση, και παρουσιάζει τα δικά του πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Τεράστια βιβλιογραφία υπάρχει επίσης, με αντικείμενο την εμπειρική μελέτη της διάρθρωσης επιτοκίων. Έχουν προταθεί ποικίλες μεθοδολογίες για τον έλεγχο των παραπάνω τεσσάρων θεωριών πάνω σε πραγματικά δεδομένα. Η κύρια τακτική περιλαμβάνει τον έλεγχο της υπόθεσης των προσδοκιών. Είτε χρησιμοποιώντας γραμμική παλινδρόμηση, είτε ανεπτυγμένες οικονομετρικές μεθόδους, τα συμπεράσματα είναι ποικίλα και άμεσα συνυφασμένα με το εκάστοτε οικονομικό περιβάλλον που αφορούν. Επίσης, σημαντική προσπάθεια γίνεται και για τη σύγκριση σε πρακτικό επίπεδο, των διαφόρων μοντέλων για τη διάρθρωση επιτοκίων. Και σε αυτήν την περίπτωση, η επιλογή κάποιου μοντέλου έναντι των υπολοίπων ως πιο κατάλληλου, επηρεάζεται από το γενικότερο οικονομικό πλαίσιο και τις συνθήκες της αγοράς.

Η συγκεκριμένη εργασία δομείται ως εξής: Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται πλήρης περιγραφή, ανάλυση και σύγκριση των τεσσάρων βασικών θεωριών για τη διάρθρωση των επιτοκίων. Επίσης γίνεται μία αναφορά στην αγορά ομολογιών στα πλαίσια της ελληνικής οικονομικής πραγματικότητας, καθώς και μία στοιχειώδης ανασκόπηση των βασικών και επιτοκιακών παράγωγων προϊόντων. Στο τρίτο κεφάλαιο, θέτονται βασικές αρχές των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όπως οι στοχαστικές διαδικασίες και το λήμμα του Ito, και παρουσιάζεται η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εξίσωση της διάρθρωσης των επιτοκίων, καθώς επίσης τέσσερα μοντέλα κατά ένα παράγοντα για τη διάρθρωση των επιτοκίων, ως αποτέλεσμα της επιστρεφόμενης στο μέσο στοχαστικής διαδικασίας των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Τα τέσσερα αυτά μοντέλα είναι των Merton (1973), Vasicek (1977), Dothan (1978) και Cox-Ingersoll-Ross (1985). Στο πέμπτο κεφάλαιο ελέγχεται η υπόθεση των προσδοκιών σε πραγματικά δεδομένα, με τρεις διαφορετικές μεθόδους, που έχουν σαν βάση κάποιο γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Στο έκτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μία σύγκριση των προαναφερθέντων μοντέλων, σε εμπειρικό επίπεδο. Τέλος, κάποιες συμπερασματικές παρατηρήσεις παρουσιάζονται στο έβδομο κεφάλαιο.

2. ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Σχέση Βραχυπρόθεσμων – Μακροπρόθεσμων Επιτοκίων

Η διάρθρωση επιτοκίων ανάλογα με τη διάρκεια (*term structure of interest rates*) αναφέρεται στη σχέση μεταξύ χρεογράφων διαφορετικής διάρκειας, δηλαδή μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων. Η συνήθης περίπτωση είναι τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια να είναι σε χαμηλότερα επίπεδα από τα μακροπρόθεσμα. Παρ' όλα αυτά, η εμπειρία έχει δείξει ότι κατά περιόδους, είναι πιθανόν να συμβαίνει και το αντίστροφο.

Κατά τη φάση ανόδου του επιχειρηματικού κύκλου, όπου παρατηρείται έντονη άνθηση της οικονομίας και αύξηση της παραγωγής σε όλους τους τομείς, υπάρχει έντονη ζήτηση κεφαλαίων, με αποτέλεσμα την ώθηση των επιτοκίων σε υψηλότερα επίπεδα. Επίσης, παρατηρείται άνοδος του κόστους των αγαθών, με συνέπεια την ταυτόχρονη αύξηση των τιμών και την εμφάνιση πληθωριστικών τάσεων. Οι νομισματικές αρχές αναγκάζονται να περιορίζουν την προσφορά του χρήματος και να ασκούν περιοριστική νομισματική πολιτική.

Αντίθετα, κατά τη φάση ύφεσης του επιχειρηματικού κύκλου, παρατηρείται μειωμένη παραγωγή, χαμηλή ζήτηση κεφαλαίων, η οποία επιφέρει πτώση των τιμών και απουσία πληθωριστικών πιέσεων. Συνεπώς, οι αρχές ασκούν χαλαρή νομισματική πολιτική και τα επιτόκια διαμορφώνονται σε χαμηλότερα επίπεδα.

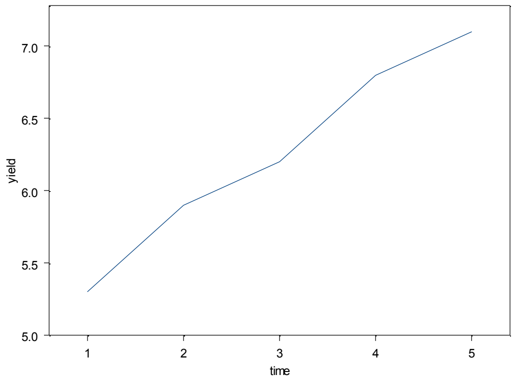
Στις διάφορες μεταβαλλόμενες οικονομικές συνθήκες, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια είναι αυτά που επηρεάζονται σε μεγαλύτερο βαθμό. Αυτό οφείλεται στο ότι διαμορφώνονται περισσότερο από τις τρέχουσες απαιτήσεις κεφαλαίου, ενώ τα μακροπρόθεσμα επιτόκια επηρεάζονται κυρίως από τον προσδωκόμενο πληθωρισμό. Η διαφορά μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων είναι πιο έντονη σε περιόδους ύφεσης, ενώ σε περιόδους ανάκαμψης το εύρος μεταξύ τους είναι μικρό.

2.2 Καμπύλη Απόδοσης

Η καμπύλη απόδοσης (*yield curve*) παριστάνει γραφικά τη σχέση των επιτοκίων με τον χρόνο (διάρκεια μέχρι τη λήξη), για κάποιο συγκεκριμένο χρεόγραφο ή για μια ομάδα χρεογράφων με δεδομένο και σταθερό κίνδυνο (risk - ρίσκο) και συνθήκες ρευστότητας.

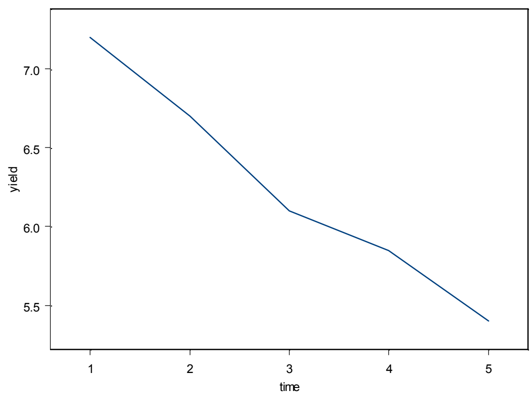
Εξετάζοντας το επίπεδο και την κυρτότητά της, η καμπύλη απόδοσης αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίου.

Όταν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια βρίσκονται σε χαμηλότερα επίπεδα από τα μακροπρόθεσμα, η καμπύλη απόδοσης κινείται ανοδικά, δηλαδή έχει θετική κλίση. Όπως έχει αναφερθεί, αυτή είναι και η πιο συνήθης περίπτωση. Γι'αυτό, η θετική καμπύλη απόδοσης είναι γνωστή και ως «ομαλή» καμπύλη απόδοσης ("*normal*" *yield curve*) (Διάγραμμα *2.1*).



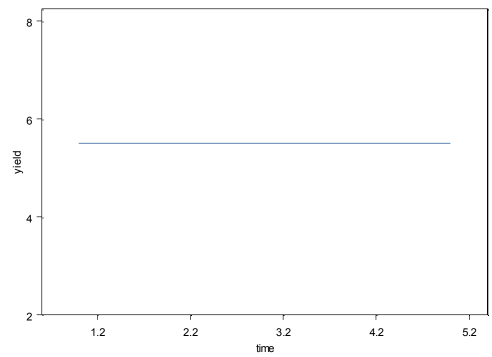
Διάγραμμα *2.1*

Στην αντίθετη περίπτωση, όπου τα μακροπρόθεσμα επιτόκια βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτό των βραχυπρόθεσμων, η καμπύλη απόδοσης έχει αρνητική κλίση και είναι γνωστή και ως «μη-ομαλή» καμπύλη απόδοσης ("*abnormal" yield curve*) (Διάγραμμα *2.2*), λόγω της σχετικής σπανιότητας με την οποία παρουσιάζεται.



Διάγραμμα *2.2*

Στο μεταβατικό στάδιο από την μία περίπτωση στην άλλη, υπάρχουν περίοδοι όπου οι μακροπρόθεσμες αποδόσεις κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα με τις βραχυπρόθεσμες. Η καμπύλη απόδοσης τότε είναι επίπεδη (“*flat” yield curve*) (Διάγραμμα *2.3*).



Διάγραμμα *2.3*

Η καμπύλη απόδοσης δίνει σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά τις προσδοκίες των επενδυτών. Όταν προβλέπεται ομαλό οικονομικό μέλλον χωρίς πληθωριστικές αποκλίσεις, η καμπύλη απόδοσης έχει σχετικά θετική κλίση. Δηλαδή, οι επενδυτές που διοχετεύουν το κεφάλαιό τους σε μακροχρόνιο κίνδυνο, απαιτούν υψηλότερη απόδοση (υψηλότερα επιτόκια). Επίσης, όσο μεγαλύτερη κλίση έχει η καμπύλη απόδοσης, τόσο πιο έντονη είναι η διαφορά μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων, όπως συμβαίνει σε περιόδους οικονομικής ύφεσης.

2.3 Διάρθρωση Επιτοκίων – αριθμητικό παράδειγμα

Έστω ότι ένας επενδυτής αγοράζει ένα ομόλογο το οποίο λήγει σε 4 έτη. Στη λήξη του ομολόγου, θα λάβει το ποσό των € 1000, ενώ στη λήξη κάθε έτους, ο επενδυτής θα λαμβάνει μέρισμα € 150. Έστω ότι τα επιτόκια r για κάθε έτος έχουν την εξής δομή: $\{r_1 = 4{,}72\%,\ r_2 = 5{,}15\%,\ r_3 = 5{,}60\%,\ r_4 = 5{,}89\%\}$. Η παρούσα αξία των παραπάνω χρηματικών ροών υπολογίζεται ως εξής:

$$\Pi.\mathrm{A.} = 150\left[\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_2)^2} + \frac{1}{(1+r_3)^3} + \frac{1}{(1+r_4)^4}\right] + \frac{1000}{(1+r_4)^4} = 1320{,}98$$

Επομένως, η αξία του ομολόγου θα είναι € 1320,98. Θέλοντας να βρούμε ενιαίο επιτόκιο, έστω R, για την παραπάνω διαδικασία, λύνουμε την εξής εξίσωση:

$$1320,98 = 150\left[\frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \frac{1}{(1+R)^3} + \frac{1}{(1+R)^4}\right] + \frac{1000}{(1+R)^4} \Rightarrow R = 5,783\%$$

Συνεπώς, η απόδοση του ομολόγου στη λήξη του (*yield to maturity*) είναι 5,783%. Η απόδοση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος μέσου των παραπάνω επιτοκίων r_i. Παρακάτω, θα αναφερθούμε στις κύριες θεωρίες που πλαισιώνουν την έννοια της διάρθρωσης επιτοκίου ανάλογα με τη διάρκεια.

2.4 Θεωρία των Προσδοκιών (Expectations Theory)

Μία από τις πρώιμες θεωρίες που προταθήκαν για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίων ανάλογα με τη διάρκεια, είναι η θεωρία των προσδοκιών. Αυτή η θεωρία δεν μπορεί να αποδοθεί σε ένα άτομο μεμονωμένα. Είναι περισσότερο αποτέλεσμα εξέλιξης μέσα στον 20^{ο} αιώνα. Η θεωρητική βάση της υπόθεσης των προσδοκιών αναπτύχθηκε κατά κύριο λόγο στη δεκαετία του 1930 από τον J. Hicks και τον F. Lutz. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η καμπύλη απόδοσης διαμορφώνεται από τις προσδοκίες του επενδυτικού κοινού. Πιο συγκεκριμένα, τα μακροχρόνια επιτόκια αποτελούν τον μέσο των σημερινών και προσδοκόμενων βραχυπρόθεσμων επιτοκίων.

Δύο από τις βασικές υποθέσεις πάνω στις οποίες βασίζεται η θεωρία των προσδοκιών είναι ότι (α) τα μελλοντικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια είναι γνωστά με απόλυτη βεβαιότητα και (β) δεν υφίσταται κόστος συναλλαγών. Δεδομένων των παραπάνω προϋποθέσεων, οι συνθήκες της αγοράς διαμορφώνουν έτσι τα επιτόκια, ώστε η απόδοση ενός κεφαλαίου σε n έτη με βάση ένα μακροχρόνιο επιτόκιο r_n, να είναι ίση με την απόδοση του ίδιου κεφαλαίου σε n έτη με βάση το σημερινό και τα μελλοντικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια $r_{1,1}r_{2,\dots,n-1}r_n$. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής Α που θέλει να επενδύσει το κεφάλαιό του για 2 έτη, θα είναι αδιάφορος αν αγοράσει ένα ομόλογο για το σύνολο των 2 ετών με επιτόκιο r_2, ή αν επενδύσει το κεφάλαιο σε 2 ετήσια ομόλογα με αντίστοιχα επιτόκια $r_{1,\,1}r_2$.

Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη από τις δύο βασικές προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, υπονοεί ότι τα μελλοντικά επιτόκια αποτελούν αμερόληπτες εκτιμήσεις με βάση τα σημερινά επιτόκια. Έστω ότι ο παραπάνω επενδυτής Α έχει να επιλέξει ανάμεσα στις εξής δύο επενδυτικές αποφάσεις:

1. Να επενδύσει € 100 σε ένα 2-ετές ομόλογο με επιτόκιο r_2 = 7% για κάθε έτος.
2. Να επενδύσει € 100 σε 2 ετήσια ομόλογα με τρέχον επιτόκιο r_1 = 5%

Αν ο επενδυτής Α ακολουθήσει την πρώτη περίπτωση, μετά το τέλος των δύο ετών θα έχει € 100 $(1{,}07)^2$ = € 114,49. Σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών, θα πρέπει να έχει το ίδιο ποσό στο τέλος των δύο ετών ακόμα κι αν ακολουθήσει την δεύτερη περίπτωση. Δηλαδή

$$€\ 100\ (1{,}05)\ [1+E({}_1r_2)] = €\ 105\ [1+E({}_1r_2)] = €\ 114{,}49,$$

όπου $E({}_1r_2)$ είναι η εκτίμηση του μελλοντικού ετήσιου επιτοκίου για το δεύτερο έτος. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι $E({}_1r_2)$ = 9,04%. Από την άλλη, αν εκτιμούσαμε το μελλοντικό ετήσιο επιτόκιο για το δεύτερο έτος 9,04% (π.χ. πρόβλεψη αύξησης πληθωρισμού), χωρίς να γνωρίζουμε το επιτόκιο r_2, παρά μόνο ότι r_1 = 5%, θα λύναμε την εξίσωση

$$€\ 100\ (1 + r_2)^2 = €\ 100\ (1{,}05)\ (1{,}0904),$$

για να καταλήξουμε ότι $r_2 = 7\%$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι κατά το δεύτερο έτος, το μελλοντικό ετήσιο επιτόκιο ${}_1r_2$ είναι μεγαλύτερο από το εκτιμούμενο, έστω 10%, τότε ο επενδυτής Α θα προτιμήσει να κινηθεί προς τη δεύτερη περίπτωση αφού στο τέλος των δύο ετών θα έχει αποκομίσει

$$€\ 100\ (1{,}05)\ (1{,}10) = €\ 115{,}50 > €\ 114{,}49.$$

Το αντίστροφο θα συνέβαινε αν το επιτόκιο ${}_1r_2$ ήταν χαμηλότερο του εκτιμούμενου. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με αυτή τη θεωρία των προσδοκιών τα μελλοντικά επιτόκια εκτιμούνται πλήρως από τα αναμενόμενα (προσδοκώμενα) επιτόκια.

Αναλύοντας την παραπάνω περίπτωση, παρατηρούμε ότι έχουμε αποδεχθεί σιωπηρά ότι ένας επενδυτής που επιθυμεί να επενδύσει το κεφάλαιό του μόνο για ένα έτος, μπορεί εξ αρχής να αγοράσει ένα ομόλογο με διάρκεια οποιαδήποτε περίοδο μεγαλύτερη του έτους και να το πωλήσει με τη διέλευση του πρώτου έτους. Συνεπώς, προκειμένου οι κινήσεις του επενδυτή να χαρακτηρίζονται από ισορροπία για τα ωφέλη του, αποδεχόμαστε ότι θα πρέπει οι αποδόσεις των ομολόγων ανεξάρτητα από τη διάρκειά τους να είναι ίσες. Πιο συγκεκριμένα, στο παραπάνω παράδειγμα θα ισχύει ότι

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)E(1+{}_1r_2) \Rightarrow E(1+{}_1r_2) = (1+r_2)^2/(1+r_1).$$

Επομένως, έστω ότι υπάρχουν οι εξής δύο επενδυτικές επιλογές για το προσεχές έτος:

(α) Να αγοραστεί ένα διετές ομόλογο και να πωληθεί κατά τη λήξη του πρώτου έτους. Στην περίπτωση αυτή η αναμενόμενη απόδοση θα είναι $E[(1+{}_2r_1)^{-1}][1+r_2]^2$.

(β) Να αγοραστεί ένα ετήσιο ομόλογο με απόδοση $1+r_1$.

Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα, θα πρέπει οι δύο αποδόσεις να είναι ίσες. Έτσι, από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι:

$$E\left(\frac{1}{1+{}_1r_2}\right)(1+r_2)^2 = (1+r_1) \Rightarrow E\left(\frac{1}{1+{}_1r_2}\right) = \frac{1}{E(1+{}_1r_2)},$$

το οποίο όμως, είναι ασυνεπές λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα *Jensen*, σύμφωνα με την οποία $E[g(X)] > g(E[X])$ για X μη-εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή και g κυρτή συνάρτηση. Συνεπώς, η συγκεκριμένη θεωρία είναι ανίσχυρη, δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα των αποδόσεων ανεξάρτητα από τη διάρκεια των ομολόγων που αφορούν. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί διάφορες μορφές της θεωρίας των προσδοκιών. Αρχικά μάλιστα, υπήρχε η πεποίθηση ότι όλες αυτές οι μορφές είναι ισοδύναμες. Παρ'όλα αυτά, το 1981 οι C. Cox, J. E. Ingersoll και S. Ross με την εργασία τους "*A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates*" έδειξαν ότι οι θεωρίες αυτές δεν είναι συμβατές μεταξύ τους, αλλά ταυτίζονται μόνο όταν υπάρχει βεβαιότητα για τη μελλοντική εξέλιξη των επιτοκίων. Παρακάτω αναλύουμε ορισμένες μορφές της θεωρίας των προσδοκιών.

2.4.1 Αμερόληπτη Θεωρία Προσδοκιών (*Unbiased Expectations Theory*)

Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία, όπως περιγράφηκε και πιο πάνω, τα αναμενόμενα (προσδοκώμενα) επιτόκια αποτελούν αμερόληπτες εκτιμήσεις των μελλοντικών επιτοκίων. Πιο συγκεκριμένα ${}_af_b = E[{}_ar_b]$, όπου ${}_ar_b$ είναι τα μελλοντικά επιτόκια (*future spot rates*) και ${}_af_b$ τα επιτόκια για μελλοντικά συμβόλαια ή προωθητικά επιτόκια (*forward rates*) με αρχή και λήξη, τις χρονικές στιγμές *α* και *b* αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να κάνουμε τις εκτιμήσεις μας με βάση την παρακάτω ισότητα:

$$(1+r_t)^t = (1+r_1)(1+{}_1f_t)^{t-1}$$

όπου ${}_1f_t$ είναι τα τρέχοντα επιτόκια για μελλοντικά συμβόλαια ή προωθητικά επιτόκια (*current forward rates*), όπως διαμορφώνονται στην αγορά και που στην ουσία αποτελούν τις εκτιμήσεις $E({}_1r_t)$. Δηλαδή, υπολογίζονται τα μακροπρόθεσμα επιτόκια ως ο γεωμετρικός μέσος των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Η αμερόληπτη θεωρία προσδοκιών έχει δεχτεί αρκετή κριτική λόγω των περιοριστικών προϋποθέσεων που απαιτεί.

Θέλοντας να εξετάσουμε την αμερόληπτη θεωρία προσδοκιών σε συνεχή χρόνο, θέτουμε ως $r(\cdot)$ το συνεχές επιτόκιο και ως $P(Y,t,T)$ την αξία ενός ομολόγου με έναρξη το χρόνο *t*, που πληρώνει € 1 κατά τη λήξη (χρόνος *T*) υπό δεδομένες συνθήκες οικονομίας, οι οποίες αντιπροσωπεύονται από τη μεταβλητή *Y*. Συνεπώς, δεχόμαστε ότι $P(Y,T,T)=1$. Έτσι, η ισότητα μεταξύ προωθητικών επιτοκίων και αναμενόμενων μελλοντικών επιτοκίων εκφράζεται ως:

$$\frac{-\partial P(Y,t,T)/\partial T}{P(Y,t,T)} = E[r(T)|Y(t)] \Rightarrow -\ln[P(Y,t,T)] = \int_t^T E[r(s)|Y(t)]ds\,.$$

2.4.2 Τοπική Θεωρία Προσδοκιών (*Local Expectations Theory*)

Η αμερόληπτη θεωρία προσδοκιών παρουσιάζει κάποια εννοιολογικά προβλήματα που αντιμετωπίζονται βασικά με την τοπική θεωρία των προσδοκιών. Σύμφωνα με την τελευταία, ορίζεται ως προϋπόθεση οι αναμενόμενες αποδόσεις για ομόλογα διάρκειας πέρα από μία συγκεκριμένη περίοδο, να είναι ίσες με το συγκεκριμένο ισχύον βραχυπρόσθεσμο επιτόκιο της περιόδου αυτής. Η περίοδος αυτή είναι, όπως περιγράψαμε και πιο πάνω, συνήθως το έτος. Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{E[(1+{}_1r_n)^{-(n-1)}]}{(1+r_n)^{-n}} = 1+r_1\ , \text{ για όλα τα } n>1.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει και η επόμενη:

$$E\left[\frac{1}{(1+r_1)(1+{}_1r_2)\ldots(1+{}_{n-1}r_n)}\right] = \frac{1}{(1+r_n)^n}\ , \text{ για } n>1.$$

Δηλαδή, σύμφωνα με την τοπική θεωρία των προσδοκιών η αξία € 1 προεξοφλούμενο για *n* έτη είναι ίσο με τις αναμενόμενες προεξοφλήσεις των *n* διαδοχικών ετήσιων περιόδων.

Για παράδειγμα, αν το τρέχον ετήσιο επιτόκιο είναι r_1 = 5%, και το επιτόκιο για δύο έτη είναι r_2 = 7%, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση θα έχουμε:

$$E\left[\frac{1}{(1+0{,}05)(1+{}_1r_2)}\right] = \frac{1}{(1+0{,}07)^2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{1+{}_1r_2}\right) = 0{,}9171\,.$$

Δηλαδή, η αναμενόμενη παρούσα αξία € 100 δύο χρόνια από τώρα είναι $100/(1{,}07)^2 = 87{,}3439$ και μετά τη διέλευση του πρώτου έτους, θα αναμένεται να είναι 100(0,9171) = 91,71.

Σε συνεχή χρόνο και τηρώντας τους συμβολισμούς που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη θεωρία, η τοπική θεωρία προσδοκιών σύμφωνα με την εργασία των Cox, Ingersoll και Ross εκφράζεται με τη σχέση:

$$\frac{E[dP(Y,t,T)]}{P(Y,t,T)} = r(t)dt \Rightarrow P(Y,t,T) = E[\exp(-\int_t^T r(s)ds)|Y(t)].$$

2.4.3 Θεωρία Προσδοκιών Επίστροφής-ανά-Διάρκεια και Απόδοσης-ανά-Διάρκεια (*Return-to-Maturity Expectations Theory*, *Yield-to-Maturity Expectations Theory*)

Σύμφωνα με την πρώτη θεωρία, η απόδοση από την αγορά ενός ομολόγου με συγκεκριμένη διάρκεια, είναι ίση με την απόδοση των αντίστοιχων βραχυπρόθεσμων ομολόγων (π.χ. ετησίων) που αφορούν την ίδια διάρκεια. Πιο συγκεκριμένα:

$$(1+r_n)^n = E[(1+r_1)(1+{}_1r_2)...(1+{}_{n-1}r_n)],\ n > 1.$$

Θεωρούμε δηλαδή ότι η απόδοση € 1 μετά από n έτη με το μακροπρόθεσμο επιτόκιο r_n είναι ίσο με το εκτιμούμενο γινόμενο των ετήσιων αποδόσεων με βάση τα αντίστοιχα επί μέρους επιτόκια $r_1, {}_1r_2, ..., {}_{n-1}r_n$.

Για παράδειγμα, αν το τρέχον ετήσιο επιτόκιο είναι r_1 = 5%, και το επιτόκιο για δύο έτη είναι r_2 = 7%, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση θα έχουμε:

$$1{,}07^2 = E[1{,}05(1+{}_1r_2)] \Rightarrow E(1+{}_1r_2) = 1{,}0904.$$

Δηλαδή, αν ο επενδυτής έχει € 100 σε ένα χρόνο από τώρα, η αξία τους σε δύο χρόνια σύμφωνα με το ετήσιο επιτόκιο ${}_1r_2$ εκτιμάται να είναι ίση με 100(1,0904) = 109,04.

Η θεωρία των προσδοκιών επιστροφής-ανά-διάρκεια σε συνεχή χρόνο αποδίδεται με τη σχέση:

$$\frac{1}{P(Y,t,T)} = E[\exp(\int_t^T r(s)ds)|Y(t)].$$

Μια παρόμοια υπόθεση ότι δεν υπάρχουν διαφοροποιήσεις στις αναμενόμενες αποδόσεις διαφόρων διαρκειών, μας οδηγεί στη θεωρία προσδοκιών απόδοσης-ανά-διάρκεια. Η συγκεκριμένη θεωρία εκφράζεται σε συνεχή χρόνο με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{-1}{T-t}\ln[P(Y,t,T)] = E\left[\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds|Y(t)\right],$$

δηλαδή, ανεξάρτητα από τη διάρκεια, οι αναμενόμενες αποδόσεις θεωρούνται ίσες. Παρατηρούμε ότι εννοιολογικά, η θεωρία προσδοκιών απόδοσης-ανά-διάρκεια πλησιάζει πολύ στην αμερόληπτη θεωρία προσδοκιών. Μάλιστα, σε συνεχή χρόνο, οι δύο θεωρίες θεωρούνται εφάμιλλες.

Όλες οι παραπάνω μορφές της θεωρίας των προσδοκιών, ταυτίζονται στην ιδεατή περίπτωση που γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα τη μελλοντική πορεία των επιτοκίων. Επειδή σε πραγματικές συνθήκες μιας υπαρκτής οικονομίας αυτό είναι ανέφικτο, εκτιμούμε τα μελλοντικά επιτόκια με βάση κάποια από τις προηγούμενες μορφές της θεωρίας των προσδοκιών.

Μπορούμε να δούμε πιο αναλυτικά τι υποστηρίζει η κάθε θεωρία και τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσά τους, αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις σε συνεχή χρόνο που αναφέρθηκαν πιο πάνω και επίσης ορίσουμε μία τυχαία μεταβλητή $X \equiv \exp(-\int_t^T r(s)ds)$. Έτσι για την τοπική θεωρία των προσδοκιών, τη θεωρία προσδοκιών επιστροφής-ανά-διάρκεια και τη θεωρία προσδοκιών απόδοσης-ανά-διάρκεια θα έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις:

- $P = E(X)$
- $P^{-1} = E(X^{-1})$
- $\ln(P) = E(\ln X)$

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών, ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει τη διάρθρωση των επιτοκίων, είναι οι προσδοκίες των επενδυτών και οι εκτιμήσεις τους όσον αφορά τη μελλοντική κατάσταση του πληθωρισμού. Μία καμπύλη απόδοσης με θετική κλίση είναι αποτέλεσμα των προσδοκιών των επενδυτών για άνοδο του επιπέδου των μελλοντικών επιτοκίων σε σχέση με τα σημερινά, η οποία ενδεχομένως να οφείλεται σε αύξηση του πληθωρισμού. Οι επενδυτές σε αυτήν την περίπτωση, δεν είναι διατεθειμένοι να επενδύσουν σε μακροχρόνιο επίπεδο, και προτιμούν τις βραχυπρόθεσμες αποδόσεις και την επανα-επένδυση αυτών. Το αντίστροφο ισχύει στην περίπτωση μιας καμπύλης απόδοσης με αρνητική κλίση, ενώ στην περίπτωση της επίπεδης καμπύλης απόδοσης, δεν αναμένεται διαφορά στο επίπεδο των επιτοκίων και συνεπώς βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα επιτόκια θα θεωρούνται ίσα.

2.5 Θεωρία του Πριμ Ρευστότητας (Liquidity Preference Theory)

Η θεωρία των προσδοκιών ενδεχομένως να υστερεί στην ερμηνεία της διάρθρωσης του επιτοκίου, από την άποψη ότι δεν αναφέρει πουθενά την έννοια του επενδυτικού κινδύνου (ρίσκου). Η θεωρία του πριμ ρευστότητας (*J. Hicks*, 1946), βασίζεται εκεί ακριβώς.

Η αβεβαιότητα όσον αφορά το μελλοντικό επίπεδο των επιτοκίων είναι μεγαλύτερη ανάλογα με το χρόνο λήξης ενός χρεογράφου. Συνεπώς, οι επενδυτές απαιτούν υψηλότερες αποδόσεις από τα μακροπρόθεσμα ομόλογα και γενικά από τη λήψη μακροχρόνιων επενδυτικών κινδύνων.

Γενικότερα, οι επενδυτές προτιμούν τα βραχυπρόθεσμα χρεόγραφα, αφού τους προσφέρουν ευελιξία, μεγαλύτερες δυνατότητες ρευστοποίησης και μικρή πιθανότητα ζημίας του αρχικού κεφαλαίου επένδυσης. Επομένως, θα απαιτήσουν μικρότερες αποδόσεις από τους βραχυπρόθεσμους τίτλους με αποτέλεσμα τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια να είναι σχετικά χαμηλά. Από την άλλη, οι οφειλέτες γενικότερα προτιμούν το μακροπρόθεσμο χρέος, που τους διασφαλίζει σταθερότητα κινήσεων και τους βγάζει από τον κίνδυνο να εκτεθούν στην περίπτωση άμεσης εξόφλησης του χρέους. Συνεπώς, είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν μεγαλύτερο τόκο για μακροπρόθεσμα χρεόγραφα απ' ότι για βραχυπρόθεσμα, γεγονός που θέτει τα μακροπρόθεσμα επιτόκια σε σχετικά υψηλότερα επίπεδα.

Σε σύγκριση με τη θεωρία των προσδοκιών, και ενώ αυτή υποστηρίζει ότι τα μελλοντικά επιτόκια εκτιμούνται αμερόληπτα από τα τρέχοντα, στη θεωρία του πριμ ρευστότητας, υπάρχει μεροληψία με τη μορφή της θετικής ποσότητας του ίδιου του πριμ ρευστότητας. Στο παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι το πριμ της ρευστότητας είναι 3% για το 2-ετές ομόλογο και έχουμε εκτιμήσει $E({}_1r_2)$ = 9,04%, τότε το r_2 θα υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση:

$$(1 + r_2)^2 = (1{,}05)\ (1{,}0904) + 0{,}03 \Rightarrow r_2 = 0{,}084 = 8{,}4\% > 7\%.$$

Επίσης, αν γνωρίζαμε ότι r_2 = 8,4% και προσπαθούσαμε να εκτιμήσουμε το $E({}_1r_2)$, χωρίς να έχουμε υπολογίσει το πριμ της ρευστότητας, θα καταλήγαμε ότι $E({}_1r_2)$ = 11,91%. Δηλαδή, θα υπερεκτιμούσαμε το μελλοντικό ετήσιο επιτόκιο. Συνεπώς, γνωρίζοντας το πριμ της ρευστότητας, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε καλύτερες εκτιμήσεις για το μελλοντικό επίπεδο των επιτοκίων. Έτσι, η ισότητα των εκτιμήσεων που παρουσιάστηκε παραπάνω μετατρέπεται ως εξής:

$$(1+r_t)^t = (1+r_1)(1+{}_1f_t)^{t-1} + lp_t\,,$$

όπου lp_t είναι το πριμ ρευστότητας για κάθε περίοδο t.

Συμφωνα με τη θεωρία του πριμ ρευστότητας, η καμπύλη απόδοσης θα πρέπει να έχει θετική κλίση πιο συχνά, και πάντα θα είναι σε υψηλότερο επίπεδο από την καμπύλη απόδοσης της θεωρίας των προσδοκιών.

- ***Παράδειγμα***

Έστω ότι για το χρονικό ορίζοντα 5 ετών, προβλέπεται αύξηση του πληθωρισμού και του επιπέδου των επιτοκίων. Επίσης, έστω ότι το premium της ρευστότητας αυξάνεται κάθε χρόνο με τον παρακάτω τρόπο (%):

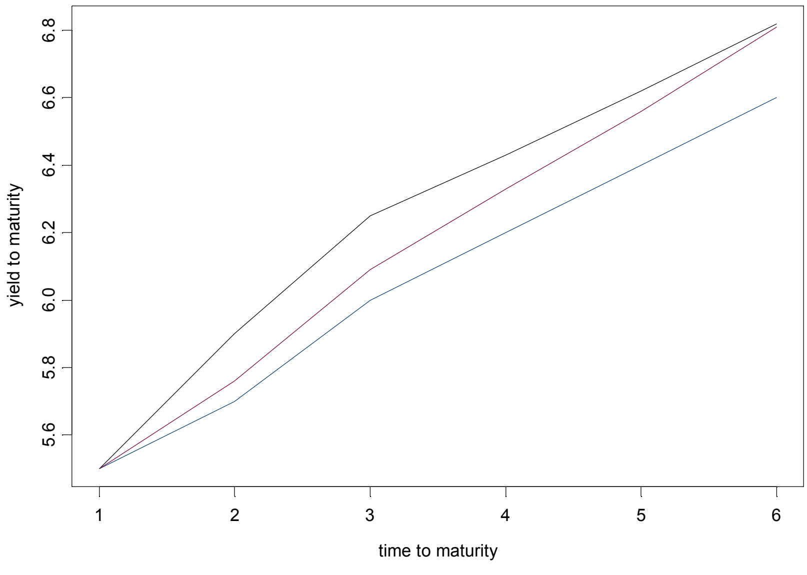
έτη	1	2	3	4	5
πριμ	0,06	0,09	0,13	0,16	0,21

Πίνακας *2.1*

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των επιτοκίων για τα 5 έτη, όπου r_1 = 5,5%, με βάση την θεωρία των προσδοκιών (θπρ) και τη θεωρία του πριμ ρευστότητας (θπριμ), σύμφωνα με τις ισότητες που έχουν αναφερθεί. Ακολουθεί το διάγραμμα με τις τρεις καμπύλες.

Έτη		1	2	3	4	5
προσδοκίες (*f*)	5,50	5,90	6,25	6,43	6,62	6,82
επιτόκια-θπρ	5,50	5,70	6,00	6,20	6,40	6,60
επιτόκια-θπριμ	5,50	5,76	6,09	6,33	6,56	6,81

Πίνακας *2.2*



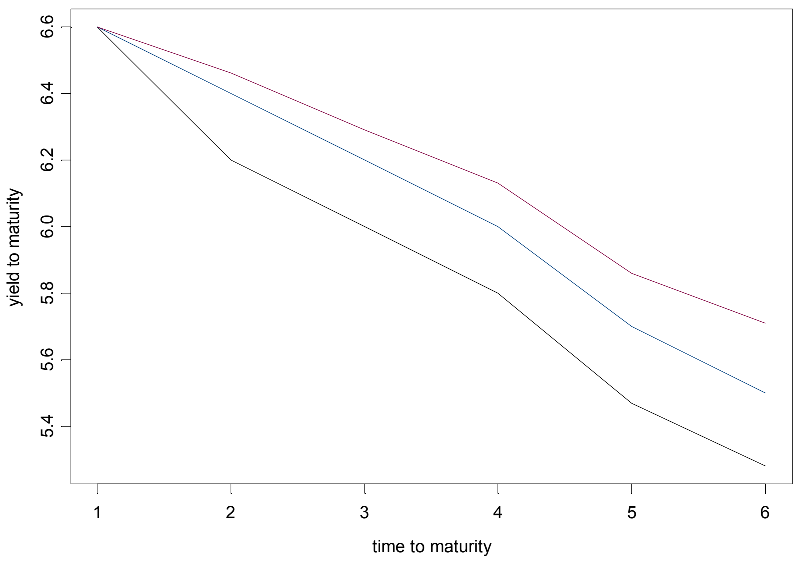
Διάγραμμα *2.4*

Όπως παρατηρούμε από το Διάγραμμα *2.4*, η καμπύλη απόδοσης σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών (μπλε γραμμή), βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτή της θεωρίας του πριμ ρευστότητας (μοβ γραμμή). Οι δύο καμπύλες διαφέρουν κατά το πριμ ρευστότητας. Η μαύρη γραμμή είναι η καμπύλη των προσδοκιών.

Έστω τώρα ότι για τα επόμενα 5 έτη, προβλέπεται μείωση των επιτοκίων λόγω ενδεχόμενης μείωσης του πληθωρισμού. Έστω επίσης, ότι το πριμ ρευστότητας κινείται όπως στον Πίνακα *2.1*. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των επιτοκίων για τα 5 έτη, όπου r_1 = 6,6%, με βάση την θεωρία των προσδοκιών και τη θεωρία του πριμ ρευστότητας, σύμφωνα με τις ισότητες που έχουν αναφερθεί. Ακολουθεί το διάγραμμα με τις τρεις καμπύλες.

Έτη		1	2	3	4	5
προσδοκίες (*f*)	6,60	6,20	6,00	5,80	5,47	5,28
επιτόκια-θπρ	6,60	6,40	6,20	6,00	5,70	5,50
επιτόκια-θπριμ	6,60	6,46	6,29	6,13	5,86	5,71

Πίνακας *2.3*



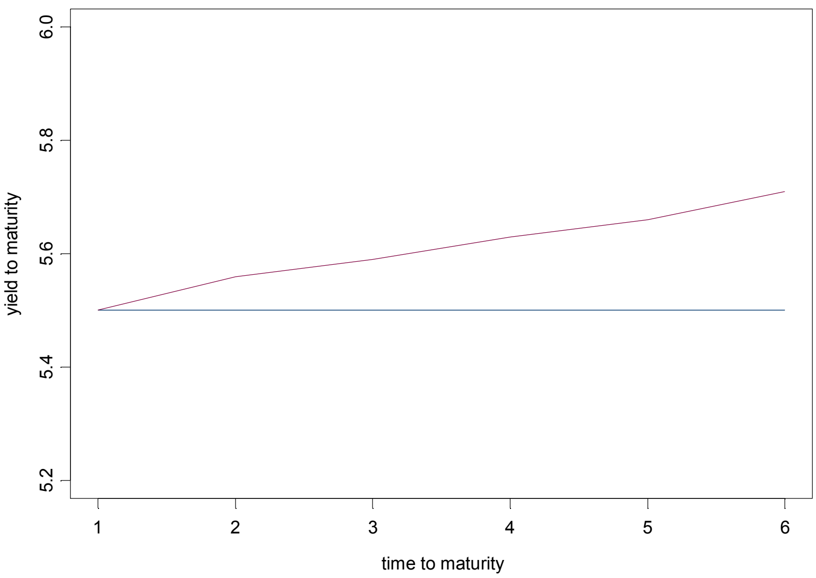
Διάγραμμα *2.5*

Όπως παρατηρούμε από το Διάγραμμα *2.5*, η καμπύλη αποδοσης λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις προσδοκίες των επενδυτών (μπλε γραμμή), βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο από την καμπύλη απόδοσης όπου συνυπολογίζεται το πριμ ρευστότητας (μοβ γραμμή). Η καμπύλη των προσδοκιών είναι η τρίτη καμπύλη (μαύρη γραμμή).

Τέλος, έστω ότι οι επενδυτές δεν αναμένουν κάποια αλλαγή στα επίπεδα των επιτοκίων, δηλαδή ότι ο πληθωρισμός θα παραμείνει σταθερός στα επόμενα 5 έτη, χωρίς να προκαλέσει αλλαγές στη σχέση μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων. Δεδομένης της πορείας του πριμ ρευστότητας, όπως έχει περιγραφεί στον Πίνακα *2.1*, δίνεται παρακάτω ο πίνακας των εκτιμήσεων των επιτοκίων για τα 5 έτη, όπου r_1 = 5,5%, με βάση την θεωρία των προσδοκιών και τη θεωρία του πριμ ρευστότητας, σύμφωνα με τις ισότητες που έχουν αναφερθεί. Ακολουθεί το διάγραμμα με τις τρεις καμπύλες.

Έτη		1	2	3	4	5
προσδοκίες (*f*)	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
επιτόκια-θπ	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
επιτόκια-θpr	5,50	5,56	5,59	5,63	5,66	5,71

Πίνακας *2.4*



Διάγραμμα *2.6*

Όπως είναι αναμενόμενο, η καμπύλη απόδοσης για τη θεωρία των προσδοκιών θα είναι ευθεία και θα ταυτίζεται με την καμπύλη των προσδοκιών (μπλε γραμμή). Αυτό οφείλεται στο ότι δεν προσδοκώνται αλλαγές στα επιτόκια από τους επενδυτές, οπότε, θεωρητικά τουλάχιστον, θα μείνουν σταθερά στο 5,5%. Ωστόσο, η καμπύλη απόδοσης σύμφωνα με τη θεωρία του πριμ της ρευστότητας, βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο από τις προηγούμενες δύο, και έχει ανοδική πορεία ανάλογα με την πορεία του πριμ της ρευστότητας μέσα στα 5 έτη (μοβ γραμμή).

2.6 Τμηματική Θεωρία (Market Segmentation Theory)

Η τμηματική θεωρία (*J. Culbertson*, 1957), βρίσκεται στον αντίποδα των θεωριών των προσδοκιών και του πριμ ρευστότητας. Ενώ οι δύο πρώτες βασίζονται κατά κύριο λόγο στις προσδοκίες των επενδυτών όσον αφορά τη μελλοντική κατάσταση του πληθωρισμού και στις δυνατότητες ρευστότητας, η τμηματική θεωρία υποστηρίζει ότι κύριος παράγοντας που επηρεάζει τη διάρθρωση των επιτοκίων είναι οι προτιμήσεις των επενδυτών πάνω στη διάρκεια μέχρι τη λήξη του χρεογράφου.

Σύμφωνα με την εν λόγω θεωρία, η αγορά χρεογράφων χωρίζεται ανάλογα με τη διάρκεια μέχρι τη λήξη τους, σε τμήματα όπως βραχυπρόθεσμη και μακροπρόθεσμη. Για παράδειγμα ένας επενδυτής ο οποίος έχει άμεση ανάγκη από ένα καταναλωτικό δάνειο, θα απευθυνθεί στη βραχυπρόθεσμη αγορά κεφαλαίου. Από την άλλη, οι ασφαλιστικές εταιρίες ανήκουν στους δανειστές της μακροπρόθεσμης αγοράς.

Συνεπώς, σε κάθε τμήμα της αγοράς ισχύουν οι νόμοι της προσφοράς και της ζήτησης, οι οποίοι καθορίζουν στην ουσία το επίπεδο των επιτοκίων. Για παράδειγμα, αν αυξηθεί η ζήτηση χρεογράφων μικρής διάρκειας, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια θα ανέλθουν σε υψηλότερα επίπεδα. Έτσι, οι προσδοκίες των επενδυτών δεν παίζουν κανένα ρόλο στη διαμόρφωση της διάρθρωσης των επιτοκίων.

Συνεπώς μια καμπύλη απόδοσης θετικής κλίσης, όπως είναι και η συνήθης περίπτωση, είναι το αποτέλεσμα αυξημένης ζήτησης στη μακροπρόθεσμη αγορά κεφαλαίου σε σχέση με την προσφορά τους, οπότε και τα μακροπρόθεσμα επιτόκια αυξάνονται, ή/και της αυξημένης προσφοράς στη βραχυπρόθεσμη αγορά κεφαλαίου ενώ η ζήτηση είναι χαμηλή, οπότε και τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια μειώνονται. Δηλαδή, οι περισσότεροι δανειστές προτιμούν να δανείζουν βραχυχρόνια, ενώ οι περισσότεροι οφειλέτες να δανείζονται μακροχρόνια. Αντίστροφα, μια καμπύλη απόδοσης αρνητικής κλίσης θα οφείλεται στη μειωμένη ζήτηση στην αγορά μακροπρόθεσμων κεφαλαίων ενώ η προσφορά θα είναι υψηλή, με αποτέλεσμα να μειώνονται τα μακροπρόθεσμα επιτόκια, ή/και στη μείωση της προσφοράς βραχυπρόθεσμων κεφαλαίων ενώ η ζήτηση θα είναι υψηλή, με αποτέλεσμα την αύξηση του επιπέδου των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων.

2.7 Θεωρία Προτιμούμενων Συνηθειών (Preferred Habitat Theory)

Η θεωρία των προτιμούμενων συνηθειών (*F. Modigliani* & *R. Sutch*, 1966-67) περιέχει στοιχεία και από τις τρεις προηγούμενες θεωρίες. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι οι επενδυτές προτιμούν κάποια χρεόγραφα ανάλογα με τη διάρκεια μέχρι τη λήξη τους και τον επενδυτικό κίνδυνο που αυτή επιφέρει, αλλά δεν αποκλείει την αλλαγή των προτιμήσεών τους σε χρεόγραφα διαφορετικής διάρκειας αν αυτά αναμένεται ότι θα αποφέρουν μεγαλύτερη απόδοση. Συνεπώς, η διάρθρωση των επιτοκίων εξαρτάται από την προσδοκώμενη απόδοση των μακροπρόθεσμων χρεογράφων (στοιχείο της θεωρίας των προσδοκιών) αλλά και από τις σχετικές ζητούμενες/προσφερόμενες ποσότητες των χρεογράφων με διαφορετικές διάρκειες μέχρι τη λήξη (στοιχείο της τμηματικής θεωρίας).

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία των προτιμούμενων συνηθειών, τα μακροπρόθεσμα επιτόκια θα εκτιμώνται ως ο μέσος των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων συνυπολογίζοντας όμως και ένα πριμ διάρκειας (*term premium*). Το πριμ διάρκειας δεν πρέπει να παρερμηνευτεί και να θεωρηθεί εφάμιλλο με το πριμ ρευστότητας. Εξαρτάται από την αυξημένη απόδοση που θα παρακινήσει τους επενδυτές να αλλάξουν προτιμήσεις (τομείς) σε χρεόγραφα διαφορετικής διάρκειας. Στους διαφορετικούς τομείς, μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό χωρίς να είναι απαραίτητο ότι θα αυξάνεται ανάλογα με τη διάρκεια μέχρι τη λήξη. Έτσι, οι πιο συντηρητικοί επενδυτές (*risk averters*) απαιτούν αρνητικό πριμ διάρκειας.

2.8 Συμπέρασμα πάνω στις Θεωρίες για τη Διάρθρωση Επιτοκίων

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι όλες οι παραπάνω θεωρίες έχουν κάποια βάση στην ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίου ανάλογα με τη διάρκεια, όπως έχει δείξει και η μέχρι τώρα εμπειρία. Δηλαδή, το σχήμα της καμπύλης απόδοσης επηρεάζεται και από τις προσδοκίες των επενδυτών για τον πληθωρισμό και από τις προτιμήσεις τους σε σχέση με τη ρευστότητα αλλά και από τους νόμους της προσφοράς και της ζήτησης στην αγορά μακροπρόθεσμων και βραχυπρόθεσμων χρεογράφων. Δηλαδή, μια ανοδική καμπύλη απόδοσης είναι το αποτέλεσμα προσδοκιών των επενδυτών για αύξηση του πληθωρισμού, προτίμησης των δανειστών για βραχυχρόνιο δανεισμό και ταυτόχρονα, προτίμησης των δανειζομένων για μακροχρόνιο δανεισμό, που επηρεάζουν την προσφορά και ζήτηση των αντίστοιχων χρεογράφων και καθορίζουν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια σε χαμηλότερα επίπεδα από τα μακροπρόθεσμα. Το αντίστροφο συμβαίνει στην περίπτωση της καμπύλης απόδοσης με αρνητική κλίση.

2.9 Αγορά Ομολογιών

Τα ομολογιακά δάνεια για τις επιχειρήσεις αποτελούν πηγές χρηματοδότησης και κεφαλαιακής ενίσχυσης. Από την πλευρά των κατόχων τους, αποτελούν τίτλους σταθερού εισοδήματος που τους αποδίδεται με τη μορφή τόκου. Δηλαδή, τα ομολογιακά δάνεια είναι για τους εκδότες μορφή δανεισμού, ενώ για τους κατόχους είναι μορφή επένδυσης.

Σε σύγκριση με τη μετοχή, η ομολογία δεν παρέχει διοικητικά δικαιώματα στον κάτοχό της, αφού η αξία της ομολογίας δεν αποτελεί μέρος του κεφαλαίου της εταιρίας. Παρ' όλα αυτά, οι κάτοχοι ομολογιών προηγούνται, όσον αφορά την ικανοποίηση των απαιτήσεων τους, από τους μετόχους, επειδή αποτελούν τους δανειστές της επιχείρησης.

Οι ομολογίες διακρίνονται σε διάφορα είδη ανάλογα με ποικίλα κριτήρια. Ένα από αυτά είναι και η νομική μορφή του εκδότη, οπότε και χωρίζονται σε ομολογίες δημοσίου και ιδιωτικές. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα κρατικά ομόλογα, τα ομόλογα τραπεζών, τα έντοκα γραμμάτια δημοσίου, οι ομολογίες δημοσίου κ.α. Εκδίδονται στην περίπτωση που δημιουργείται η ανάγκη για κάλυψη ταμειακών ελλειμάτων του δημοσίου και γενικά, για τη συγκέντρωση χρηματικού κεφαλαίου για συγκεκριμένες βλέψεις του κράτους, και έπειτα από εξουσιοδότηση του υπουργείου Οικονομικών. Τα έντοκα γραμμάτια είναι τίτλοι μικρής συνήθως διάρκειας (3, 6 και 12 μήνες). Ο επενδυτής καταβάλλει για την αγορά του γραμματίου ένα ποσό μικρότερο της τιμής έκδοσης και εισπράτει κατά τη λήξη του, ακέραιο το ποσό της ονομαστικής αξίας. Όσον αφορά τα ομόλογα Ελληνικού Δημοσίου, υπάρχουν διάφορα προϊόντα, όπως τα ομόλογα σταθερής απόδοσης, τα οποία παρέχουν στους επενδυτές μία εκ των προτέρων γνωστή και αμετάβλητη απόδοση κάθε έτος. Επίσης, υπάρχουν στην αγορά και τα τιμαριθμημένα ομόλογα, τα οποία «προστατεύουν» τον επενδυτή από τις διακυμάνσεις του πληθωρισμού, αφού εξοφλούνται σε τιμή μεγαλύτερη της ονομαστικής αξίας, έχοντας υπολογίσει την πορεία του πληθωρισμού στην εν λόγω περίοδο.

Λόγω της ιδιαιτερότητας του εκδότη τους (το Ελληνικό κράτος), οι ομολογίες του δημοσίου αποτελούν λιγότερο ριψοκίνδυνες επενδύσεις από τις ομολογίες των ιδιωτικών επιχειρήσεων, προσφέροντας περισσότερη ασφάλεια για το κεφάλαιο του επενδυτή.

Ένα άλλο κριτήριο για το διαχωρισμό των ομολογιών είναι με βάση το επιτόκιο. Υπάρχουν ομολογίες σταθερού επιτοκίου, όπου το επιτόκιο παραμένει αμετάβλητο μέχρι τη λήξη, και κυμαινόμενου επιτοκίου, όπου το επιτόκιο μεταβάλλεται (αναπροσαρμόζεται) ανάλογα με κάποιο άλλο επιτόκιο, όπως για παράδειγμα αυτό των ομολογιών του δημοσίου. Επίσης, υπάρχουν και οι ομολογίες μηδενικού επιτοκίου, όπου στην ουσία δεν υφίστανται τοκομερίδια, οι τόκοι έχουν ήδη συμπεριληφθεί στην ονομαστική αξία η οποία και λαμβάνεται ακέραιη στη λήξη από τον επενδυτή.

Επίσης ένας άλλος διαχωρισμός μεταξύ των ομολογιών, είναι για παράδειγμα ανάλογα τον επενδυτικό κίνδυνο (ρίσκο) στον οποίο υπόκειται ο ομολογιούχος. Συνήθως οι ομολογίες υψηλού κινδύνου επιφέρουν και υψηλές αποδόσεις, οπότε αντισταθμίζεται το ρίσκο. Γνωστά ομόλογα υψηλού κινδύνου αποτελούν τα “*junk bonds*”, τα οποία εκδίδονται συνήθως για να χρηματοδοτήσουν εξαγορές, συγχωνεύσεις και γενικά να ενισχύσουν εταιρίες οι οποίες δυσκολεύονται να αντεπεξέλθουν στις υποχρεώσεις τους.

2.9.1 Νομικό πλαίσιο στην Ελλάδα

Λεπτομέρειες σχετικά με τις νομικές διατάξεις που πλαισιώνουν το καθεστώς των ομολογιών στην Ελλάδα, μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο του Ν. Ρόκα (1996) «*Εμπορικές Εταιρίες*». Η έκδοση εταιρικών ομολόγων και η σύναψη ομολογιακών δανείων ρυθμίζεται από τις σχετικές διατάξεις του ν. 2190/1920. Η έκδοση ομολογιών από τις εταιρίες υπάγεται στην αρμοδιότητα της καταστατικής γενικής συνέλευσης. Κατά την λήψη αυτής της απόφασης, πρέπει να αναφερθεί το ύψος του δανείου, ο τρόπος κάλυψης του, ο αριθμός και το είδος της ομολογίας, η ονομαστική αξία και η τιμή διάθεσης.

Ο ν. 2190 προβλέπει τρεις κατηγορίες ομολογιών. Το κοινό ομολογιακό δάνειο δεν προβλέπεται ρητά αλλά εμμέσως από το νόμο, και αποτελείται από κοινές ομολογίες που παρέχουν μόνο δικαίωμα τόκου και επιστροφής της ονομαστικής τους αξίας, χωρίς κανένα άλλο δικαίωμα. Οι υπόλοιπες τρεις κατηγορίες είναι:

Α. Το μετατρέψιμο ομολογιακό δάνειο, το οποίο αποτελείται από ομολογίες που παρέχουν στον κάτοχο το δικαίωμα να ζητήσει τη μετατροπή τους σε κοινές μετοχές του εκδότη. Δηλαδή, αν μέχρι τη λήξη, το ομόλογο δεν μετατραπεί σε μετοχή, δεν διαφέρει από ένα κοινό ομόλογο, αλλά αν μετατραπεί σημαίνει ότι η αξία του είναι τουλάχιστον μεγαλύτερη από την ονομαστική του αξία. Απευθύνεται σε εκείνους τους επενδυτές, που ενώ επιθυμούν να επενδύσουν σε μετοχές, προτιμούν να εξασφαλίσουν μια ελάχιστη πρόσοδο, σε περίπτωση που δεν επαληθευθούν οι προσδοκίες για άνοδο των τιμών των μετοχών. Από την πλευρά της εταιρίας, η έκδοση ομολογιακού δανείου με μετατρέψιμες ομολογίες, ισοδυναμεί με αύξηση του μετοχικού της κεφαλαίου, και στην ουσία προεξοφλείται η μελλοντική αύξηση της τιμής της μετοχής της.

Β. Οι συμμετοχικές ομολογίες, οι οποίες πέρα από τον τόκο, παρέχουν και δικαίωμα συμμετοχής στα κέρδη ή και άλλες πρόσθετες παροχές ανάλογα με το ύψος της παραγωγής και το επίπεδο δραστηριότητας της εταιρίας. Αρμόδια για την έκδοση τέτοιων ομολογιακών δανείων είναι η γενική συνέλευση.

Γ. Ομολογιακό δάνειο ασφαλισμένο κατά κεφάλαιο και τόκο με υποθήκη σε ακίνητα της εταιρίας ή τρίτου. Για την έκδοση ενός τέτοιου δανείου απαιτείται άδεια της επιτροπής κεφαλαιαγοράς, η οποία κρίνει την επάρκεια της παρεχόμενης ασφάλειας.

Η έκδοση ομολογιακού δανείου μπορεί να γίνει είτε με ατομικώς ορισμένα πρόσωπα είτε με δημόσια εγγραφή. Στην τελευταία περίπτωση απαιτούνται κάποιες προϋποθέσεις όπως το κεφάλαιο της εταιρίας να είναι € 300.000, το ποσό του δανείου να μην είναι μεγαλύτερο από το κεφάλαιο, απαιτείται η άδεια από την επιτροπή κεφαλαιαγοράς, και τέλος η εκδότρια εταιρία είναι υποχρεωμένη να ζητήσει εντός ενός έτους την εισαγωγή των ομολογιών στο χρηματιστήριο.

2.9.2 Ελληνική και Ευρωπαϊκή πραγματικότητα

Η αγορά των ομολόγων στην Ελλάδα είναι ιδιαίτερα υποτονική, παρ' όλο που εκδόσεις ομολογιακών δανείων πραγματοποιούνται ήδη πολλά χρόνια. Οι εκδόσεις αυτές ήταν περιορισμένες σε αριθμό και υστερούσαν σε μέγεθος αντλούμενων κεφαλαίων σε σύγκριση με το μέγεθος των εκδοτριών εταιριών. Ένας κύριος λόγος στον οποίο οφείλεται το παραπάνω φαινόμενο, ήταν το άνισο φορολογικό καθεστώς που λειτουργούσε υπέρ των κρατικών ομολόγων και εις βάρος των εταιρικών. Μόλις μετά το 2000, επήλθε εξομοίωση του φόρου της αγοράς εταιρικών ομολόγων με αυτόν της κρατικής αγοράς, στο συντελεστή 10%.

Την τελευταία δεκαετία, οι εκδόσεις εταιρικών ομολόγων αυξάνονται με σταθερό ρυθμό. Κατά την περίοδο του 1998-1999, όπου οι τιμές των μετοχών ανήλθαν σε ιδιαίτερα υψηλά επίπεδα, λόγω του έντονα ευνοϊκού κλίματος που επικρατούσε στη χρηματιστηριακή αγορά, οι εκδόσεις των ομολογιών παρουσίασαν πτώση, αφού οι εταιρίες μπορούσαν να αντλήσουν κεφάλαια μέσω αυξήσεων του μετοχικού τους κεφαλαίου. Στη συνέχεια όμως, από το 2000, όπου οι συνθήκες στο χρηματιστήριο δεν ήταν και τόσο θετικές, οι εταιρίες αντιμετώπισαν δυσκολίες όσον αφορά την κεφαλαιακή τους ενίσχυση μέσω των μετοχών, και έτσι στράφηκαν στην έκδοση ομολογιών.

Γενικά, η ελληνική αγορά ομολόγων χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερη έλλειψη ρευστότητας και απουσία δευτερογενούς αγοράς που θα ενίσχυε την έκδοση και αγοραπωλησία τίτλων. Προκειμένου να ενεργοποιηθεί το ενδιαφέρον των επιχειρήσεων, αλλά και των επενδυτών για συμμετοχή στην αγορά ομολόγων, χρειάζεται να τροποποιηθεί το ισχύον θεσμικό πλαίσιο με αποφάσεις όπως πλήρης φορολογική εξομοίωση με τίτλους του δημοσίου, κατάργηση του ορίου του 50% του μετοχικού κεφαλαίου για έκδοση μετατρέψιμων ομολογιών, απλούστευση των διαδικασιών με μείωση της γραφειοκρατίας. Τα παραπάνω προβλέπονται σε ρυθμίσεις σχετικού νομοσχεδίου.

Συγκρίνοντας την Ευρωπαϊκή αγορά ομολόγων, με αυτήν της Αμερικής, παρατηρούμε ότι βρίσκεται ακόμα σε χαμηλά επίπεδα. Όμως, όλο και περισσότερες ευρωπαϊκές εταιρίες στρέφονται στην έκδοση ομολογιών για την άντληση των απαραίτητων κεφαλαίων. Μία από τις βλέψεις της Ευρωπαϊκής Επιτροπής είναι και η ενοποίηση των αγορών ομολόγων. Μία τέτοια απόφαση θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του κόστους συναλλαγών και τη δραστηριοποίηση επιχειρήσεων στο χώρο αυτό. Ήδη, από το 2002 με τη νομισματική ενοποίηση και τη θεσμοθέτηση του ευρώ, μειώθηκε ο συναλλαγματικός κίνδυνος που οδήγησε στην άρση των περιορισμών επενδύσεων σε αλλοδαπά περιουσιακά στοιχεία, παράγοντας που επηρέασε ευνοϊκά την αγορά των ομολόγων στην Ευρώπη. Λεπτομέρειες σχετικά με την κατάσταση των ομολογιών στα πλαίσια της Ελληνικής και Ευρωπαϊκής οικονομικής πραγματικότητας, μπορεί να βρει κανείς στην εργασία Δ. Ξένου-Γαβριέλη (2003) «*Η αγορά των εταιρικών ομολόγων στην Ελλάδα*».

Είναι σημαντικό να τονωθεί η αγορά των ομολόγων στην Ελλάδα, αφού για τις επιχειρήσεις αποτελεί αξιόλογη πηγή άντλησης κεφαλαίων με δανεισμό στο ευρύ επενδυτικό κοινό, αλλά προσφέρει και σημαντικές ευκαιρίες στους ίδιους τους επενδυτές να πραγματοποιούν ικανοποιητικές αποδόσεις.

2.10 Είδη Παραγώγων

Ένα παράγωγο (*derivative*) είναι ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, του οποίου η τιμή εξαρτάται από την τιμή κάποιου άλλου βασικότερου παράγοντα. Τέτοιοι παράγοντες μπορούν να είναι είτε οι τιμές περουσιακών στοιχείων όπως το συνάλλαγμα, οι μετοχές, ο χρυσός, είτε χρηματιστηριακοί δείκτες, είτε τα ίδιο το επίπεδο των επιτοκίων. Η ελληνική αγορά παραγώγων έχει πραγματοποιήσει σημαντική εξέλιξη τα τελευταία χρόνια, σίγουρα όμως δεν μπορεί να φτάσει τα επίπεδα παρεμφερών αγορών του εξωτερικού. Παρακάτω δίνονται περιγραφικά τα βασικά είδη παραγώγων και ορισμένα είδη επιτοκιακών παραγώγων (*interest rate derivatives*).

2.10.1 Βασικά είδη παραγώγων

Ένα μελλοντικό συμβόλαιο (*forward contract*) είναι μία συμφωνία για αγορά ή πώληση ενός προϊόντος σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον και σε συγκεκριμένη τιμή (τιμή παράδοσης). Τις δύο πλευρές ενός μελλοντικού συμβολαίου αποτελούν από τη μία ο αγοραστής, ο οποίος έχει την υποχρέωση να αγοράσει το προϊόν την καθορισμένη ημερομηνία στην τιμή παράδοσης, και από την άλλη, ο πωλητής, ο οποίος έχει αντίστοιχα την υποχρέωση να το πωλήσει. Τα μελλοντικά συμβόλαια συνάπτονται μεταξύ δύο χρηματιστηριακών οργανισμών ή ενός χρηματιστηριακού οργανισμού και ενός φυσικού προσώπου (πελάτης).

Στην περίπτωση ενός μελλοντικού συμβολαίου ανταλλαγής (*future contract*), οι δύο πλευρές έχουν και πάλι την υποχρέωση της αγοράς και πώλησης του προϊόντος. Η διαφορά έγκειται στο ότι τα μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής είναι αντικείμενα αγοραπωλησιών σε γραφεία ανταλλαγών (*exchanges*), τα οποία και τηρούν εγγυητικούς μηχανισμούς για την κατοχύρωση των δύο πλευρών. Επίσης, αντίθετα με τα μελλοντικά συμβόλαια, δεν καθορίζεται συγκεκριμένη ημερομηνία παράδοσης του προϊόντος, παρά μόνο ο μήνας της παράδοσης.

Ένα πολύ βασικό κομμάτι των παραγώγων αποτελούν τα δικαιώματα (*options*). Τα δικαιώματα αγοράς (*call options*) είναι συμβόλαια που δίνουν το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ο επενδυτής το περιουσιακό στοιχείο σε μία καθορισμένη τιμή παράδοσης στο μέλλον. Αντίστοιχα τα δικαιώματα πώλησης (*put options*) δίνουν το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να πωλήσει ο επενδυτής το περιουσιακό στοιχείο. Αν το δικαίωμα αυτό ασκείται στο τέλος της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου, τότε μιλάμε για Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή πώλησης (*European call* ή *put option*), ενώ αν το δικαίωμα ασκείται οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του συμβολαίου, τότε μιλάμε για Αμερικάνικο δικαίωμα (*American call* ή *put option*). Πιο συγκεκριμένα, ένας κάτοχος ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ημερομηνία εξάσκησης T και τιμή εξάσκησης K, θα έχει ωφέλημα τη χρονική στιγμή T το ποσό που η τιμή του περουσιακού στοιχείου τη στιγμή εκείνη (S_T) υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης. Στην περίπτωση που $S_T \leq K$, το κέρδος από το δικαίωμα θα είναι μηδενικό. Άρα:

$$C_T = \max[S_T - K, 0].$$

Αντίστοιχα για τον κάτοχο ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης το όφελος θα είναι:

$$P_T = \max[K - S_T, 0].$$

Υπάρχει στην αγορά παραγώγων, μία τεράστια ποικιλία δικαιωμάτων όπως τα *Asian options*, τα *Lookback options*, τα *Binary options* και πολλά άλλα, προσφέροντας διευκολύνσεις και ευελιξία στους συμβαλλόμενους που επιθυμούν να τα εκμεταλλευτούν. Η ανάλυση αυτών των δικαιωμάτων ξεφεύγει από τα όρια της συγκεκριμένης συνοπτικής παρουσίασης των βασικών ειδών παραγώγων προϊόντων.

Τέλος, βασικά παράγωγα προϊόντα αποτελούν και οι ανταλλαγές (*swaps*), οι οποίες είναι συμφωνίες ανάμεσα σε δύο μη-φυσικά πρόσωπα για ανταλλαγή μετρητών σε συγκεκριμένα και προκαθορισμένα χρονικά σημεία στο μέλλον. Οι συμφωνίες αυτές καθορίζουν τις ημερομηνίες που πρέπει να γίνονται οι ανταλλαγές των μετρητών, ο υπολογισμός αυτών και τι δικαιούται η κάθε πλευρά.

2.10.2 Επιτοκιακά Παράγωγα

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, όταν ο παράγοντας που επηρεάζει την τιμή του παραγώγου είναι κάποιο επιτόκιο, τότε μιλάμε για επιτοκιακά παράγωγα προϊόντα. Τέτοια θεωρούνται τα επιτοκιακά μελλοντικά συμβόλαια και συμβόλαια ανταλλαγής (*interest rate forwards and futures*). Στην περίπτωση αυτή, συμφωνείται προγενέστερα η επισύναψη δανείου κάποια μελλοντική χρονική στιγμή, με συγκεκριμένο επιτόκιο και συγκεκριμένη διάρκεια στη λήξη της οποίας θα εξοφληθεί το δάνειο. Για παράδειγμα, αν r_{t_i} είναι το προδιαγεγραμμένο επιτόκιο δανεισμού που αφορά την περίοδο από τη χρονική στιγμή t_i μέχρι

t_{i+1}, μπορούμε προγενέστερα να επισυνάψουμε μελλοντικά συμβόλαια ή συμβόλαια ανταλλαγής τη χρονική στιγμή t, όπου $t < t_i < t_{i+1}$. Ο αγοραστής του συμβολαίου θα δανειστεί το ποσό N τη στιγμή t_i και θα επιστρέψει τη στιγμή t_{i+1} το ποσό $N(1+r_{t_i}d)$, όπου δ είναι ο αριθμός των ημερών που περιέχεται στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, διαιρούμενος με το 365.

Στην κατηγορία των επιτοκιακών παραγώγων ανήκουν και τα δικαιώματα σε ομολογίες (*bond options*). Αντίστοιχα με τα απλά δικαιώματα, τα δικαιώματα σε ομολογίες είναι συμβόλαια που δίνουν το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοραστεί η να πωληθεί μία συγκεκριμένη ομολογία σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον και σε συγκεκριμένη τιμή παράδοσης.

Επίσης, σημαντικό μέρος αυτής της κατηγορίας των παραγώγων αποτελούν τα επιτοκιακά υπερ-καλύμματα (*interest rate caps*) και επιτοκιακά υπο-καλύμματα (*interest rate floors*). Το επιτόκιο σε αυτές τις περιπτώσεις αναπροσαρμόζεται κάθε συγκεκριμένη χρονική περίοδο με βάση το επιτόκιο LIBOR (*London Interbank Offer Rate*), δηλαδή το επιτόκιο καταθέσεων που δίνουν η μία τράπεζα στην άλλη. Τα υπερ-καλύμματα είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε να παρέχουν ασφάλεια στην περίπτωση που ένα κυμαινόμενο επιτόκιο υπερβεί κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο. Αντίστοιχα τα υπο-καλύμματα παρέχουν κάλυψη όταν το κυμαινόμενο επιτόκιο πέσει σε χαμηλότερα επίπεδα από το επιθυμητό. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε t το παρόν και αντίστοιχα t_0 και t_i την ημερομηνία εκκίνησης και λήξης του επιτοκιακού υπερ-καλύμματος. Οι ημερομηνίες επαναπροσδιορισμού θα είναι $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$. Τότε, για κάθε περίοδο $[t_i, t_{i+1}]$, ο αγοραστής του προϊόντος θα λαμβάνει τη χρονική στιγμή t_{i+1} το ποσό $N\max[d(L_{t_i} - R_{cap}),0]$, όπου N είναι συγκεκριμένο ποσό, L_{t_i} είναι το επιτόκιο LIBOR τη χρονική στιγμή t_i και R_{cap} είναι το προσυμφωνημένο επίπεδο επιτοκίων. Στην ουσία, τα επιτοκιακά υπερ-καλύμματα μπορούν να θεωρηθούν δικαιώματα πώλησης πάνω σε μία ομολογία με ημερομηνία λήξης t_{i+1} και τιμή εξάσκησης R_{cap}. Αντίστοιχοι κανόνες ισχύουν για τα επιτοκιακά υπο-καλύμματα που μπορούν να θεωρηθούν σαν δικαιώματα αγοράς πάνω σε κάποια ομολογία με τα ίδια χαρακτηριστικά.

Από τις ανταλλαγές που περιγράφηκαν παραπάνω διακρίνουμε αυτές των επιτοκίων (*interest rate swaps*), κατά τις οποίες το χρηματικό ποσό που συμφωνεί να δώσει η μία πλευρά είναι ίσο με τον τόκο ενός ποσού με βάση ένα προκαθορισμένο σταθερό επιτόκιο, και ταυτόχρονα το ποσό που συμφωνεί να ανταλλάξει η άλλη πλευρά είναι ίσο με τον τόκο ενός ποσού με βάση ένα κυμαινόμενο επιτόκιο για την ίδια χρονική περίοδο. Ένα βήμα παραπάνω βρίσκονται τα δικαιώματα σε ανταλλαγές (*swap options* ή *swaptions*), που δίνουν στον κάτοχο το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να συνάψει μία ανταλλαγή-*swap* σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον. Πιο αναλυτικά, στο πάρον t ο επενδυτής μπορεί να επισυνάψει μία ανταλλαγή με τιμή εξάσκησης k πάνω σε ένα ποσό N. Το δικαίωμα θα λήξει τη χρονική στιγμή T και η ανταλλαγή θα ξεκινήσει τη μεταγενέστερη χρονική στιγμή T_1, ενώ θα λήξει τη χρονική στιγμή T_2 (δηλαδή $T \leq T_1 < T_2$). Ο αγοραστής του δικαιώματος *swaption*, θα έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση τη χρονική στιγμή T να επισυνάψει την ανταλλαγή *swap* με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Η αξία του *swaption* θα είναι θετική αν το επίπεδο του *swap* τη χρονική στιγμή T_1 (R_{T_1}) υπερβαίνει το επίπεδο k.

3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3.1 Στοχαστικές διαδικασίες – Κίνηση Brown – Διαδικασία Wienner

Μία στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t)\}$ είναι μία χρονολογική σειρά τυχαίων μεταβλητών. Είναι δηλαδή, η *X(t)* μία τυχαία μεταβλητή για κάθε χρονική στιγμή *t*, η οποία φανερώνει την κατάσταση της στοχαστικής διαδικασίας. Για παράδειγμα, η *X(t)* θα μπορούσε να είναι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου, όπως μιας μετοχής, τη χρονική στιγμή *t*, ή θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει την τιμή του συναλλάγματος ή ακόμα την κατάσταση των επιτοκίων για τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Γενικότερα, οποιαδήποτε μεταβλητή της οποίας η τιμή μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο με αβέβαιο τρόπο, ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία. Ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών ονομάζεται στοχαστική ανάλυση και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Λεπτομέρειες και εκτενέστερη ανάλυση μπορεί κανείς να εντοπίσει στα βιβλία "*An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*" S. Neftci, (2000) (Academic Press) και "*Financial Engineering and Computation*" Y.-D. Lyuu, (2002) (Cambridge University Press), πάνω στα οποία βασίζεται το μεγαλύτερο μέρος της συγκεκριμένης ενότητας της εργασίας.

Οι στοχαστικές διαδικασίες χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς. Οι διακριτές στοχαστικές διαδικασίες είναι γνωστές και ως χρονολογικές σειρές. Αν η τυχαία μεταβλητή μεταβάλλεται συνεχώς μέσα στο χρόνο, τότε μιλάμε για συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες. Μία συνεχής στοχαστική διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν για κάθε χρόνο $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$-$X(t_0)$, $X(t_2)$ – $X(t_1)$,…, $X(t_n)$-$X(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες. Επίσης, έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν η $X(t+s) - X(t)$ έχει την ίδια κατανομή για όλες τις χρονικές στιγμές *t*, η οποία και εξαρτάται μόνο από το *s*.

Έστω ότι r_0 είναι το επιτόκιο δανεισμού μίας τράπεζας στο χρόνο μηδέν. Θεωρούμε ότι στο χρόνο ένα θα έχουμε δύο ενδεχόμενα: το επιτόκιο να ανέβει με πιθανότητα *p* ή να κατέβει με πιθανότητα 1-*p*. Αν η δίττιμη τυχαία μεταβλητή X_1 συμβολίζει την πορεία του επιτοκίου στο χρόνο ένα ("1" αν έχουμε άνοδο των επιτοκίων, "-1" αν έχουμε κάθοδο), τότε έχουμε δημιουργήσει ένα διωνυμικό πείραμα όπου $Pr\{X_1=1\} = p$, οπότε έχουμε άνοδο του επιτοκίου, και $Pr\{X_1=-1\} = 1-p$, οπότε έχουμε κάθοδο του επιτοκίου στο χρόνο ένα. Συμβολίζουμε το επιτόκιο στο χρόνο ένα μετά από άνοδο $r_1(1)$ και μετά από κάθοδο $r_1(-1)$. Έστω ότι η εξέλιξη του διωνυμικού πειράματος είναι όμοια και στο χρόνο δύο. Δηλαδή έχουμε $Pr\{X_2=1\} = p$ και $Pr\{X_2=-1\} = 1-p$, όπου η X_2 συμβολίζει την πορεία του επιτοκίου στο χρόνο δύο. Τότε το επιτόκιο θα έχει τέσσερεις δυνατές τιμές:

1. $r_2(1\ 1)$, με πιθανότητα p^2 (δύο συνεχόμενες άνοδοι)
2. $r_2(1\ -1)$, με πιθανότητα $p(1-p)$ (πρώτα άνοδος, έπειτα κάθοδος)
3. $r_2(-1\ 1)$, με πιθανότητα $(1-p)p$ (πρώτα κάθοδος, έπειτα άνοδος)
4. $r_2(-1\ -1)$, με πιθανότητα $(1-p)^2$ (δύο συνεχόμενες κάθοδοι)

Έστω ότι η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται και στο χρονικό ορίζοντα τρία κ.ο.κ. Η διακριτή στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ ονομάζεται τυχαίος περίπατος και αποτελεί τη βάση για τα διακριτά μοντέλα τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων.

Ένα πολύ σημαντικό είδος στοχαστικής διαδικασίας είναι η κίνηση Brown. Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t\geq 0\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $X(0) = 0$
2. Για κάθε $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_k) - X(t_{k-1})$ για $1\leq k\leq n$ είναι ανεξάρτητες
3. Για $0\leq s<t$, η $X(t)-X(s)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu(t-s)$ και διακύμανση $\sigma^2(t-s)$, όπου μ και $\sigma \neq 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αυτή η διαδικασία καλείται κίνηση Brown (μ, σ) με μέσο μ και διακύμανση σ^2 και εκφράζει την έννοια του τυχαίου περιπάτου σε συνεχή χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, έστω στο προηγούμενο παράδειγμα το επιτόκιο μεταβάλλεται κατα Δr προς τα πάνω με πιθανότητα p και προς τα κάτω με πιθανότητα $1-p$ μετά από Δt χρόνο. Έτσι, η συνολική αλλαγή της στοχαστικής διαδικασίας του επιτοκίου τη χρονική στιγμή t θα είναι:

$$Y(t) \equiv \Delta r(X_1 + X_2 + \ldots + X_n),$$

όπου οι X_i είναι οι γνωστές δίττιμες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $Pr(X_i=1) = p = 1-Pr(X_i=-1)$ και $n \equiv t/\Delta t$. Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή X_i έχει μέση τιμή $E(X_i) = 2p-1$ και διακύμανση $Var(X_i) = 1-(2p-1)^2$. Έτσι για την $Y(t)$, θα έχουμε αντίστοιχα

$$E[Y(t)] = (\Delta r)n(2p-1)$$
$$Var[Y(t)] = (\Delta r)^2 n[1-(2p-1)^2].$$

Για να είναι σε μία διαμέριση του χρόνου πιο φανερή η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας, θα πρέπει αυτή η διαμέριση να είναι πιο λεπτή. Θέτοντας $\Delta r \equiv s\sqrt{\Delta t}$, όπου το σ^2 έχει επιλεγεί να είναι η διακύμανση της προσαύξησης στο χρόνο ένα, δηλαδή $Var(X_1) = s^2$.

Επίσης, επιλέγουμε η p να είναι ίση με $p \equiv [1+(m/s)\sqrt{\Delta t}]/2$, όπου το μ αποτελεί τη μέση τιμή της προσαύξησης στο χρόνο ένα, δηλαδή $E(X_1)=m$.

Συνεπώς, παίρνουμε τα εξής δύο αποτελέσματα:

- $E[Y(t)] = ns\sqrt{\Delta t}(m/s)\sqrt{\Delta t} = mt$
- $Var[Y(t)] = ns^2\Delta t(1-(m/s)^2\Delta t) \to s^2 t$, καθώς $\Delta t \to 0$.

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, η προσαύξηση $Y(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διακύμανση $\sigma^2 t$ καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν. Άρα τελικά, η στοχαστική διαδικασία $\{Y(t), t \geq 0\}$ συγκλίνει προς μία κίνηση Brown (μ,σ).

Η κίνηση Brown παρ' όλο που είναι μία συνεχής συνάρτηση του t, δεν είναι σχεδόν πουθενά διαφορίσιμη. Οποιαδήποτε διαδικασία σε συνεχή χρόνο με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μία κίνηση Brown, γεγονός που δείχνει την τεράστια σημασία της κίνησης Brown στη στοχαστική ανάλυση.

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για περισσότερη κατανόηση της έννοιας της κίνησης Brown. Έστω ότι η τιμή μίας μετοχής είναι € 5 και ακολουθεί την κίνηση Brown (2, 3), δηλαδή έχει μέση τιμή 2 και διακύμανση 9. Στο τέλος του ενός έτους η τιμή της μετοχής θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 7 και τυπική απόκλιση 3.

Η διαδικασία Wienner είναι η κίνηση Brown (0, 1), δηλαδή με μέσο 0 και διακύμανση 1. Έτσι, αν μία μεταβλητή ακολουθεί τη διαδικασία Wienner, η αλλαγή στην τιμή της μετά από ένα έτος θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση 1 (τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$). Η αλλαγή στην τιμή της μετά από δύο έτη θα είναι το άθροισμα των δύο τυπικών κανονικών κατανομών, δηλαδή θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση 2 (κατανομή $N(0,\sqrt{2})$). Γενικότερα, η αλλαγή στην τιμή της τυχαίας μεταβλητής, μετά από χρονική περίοδο t θα ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,\sqrt{t})$.

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα, παρόμοιο με το παραπάνω για περισσότερη κατανόηση της έννοιας της διαδικασίας Wienner. Έστω ότι η τιμή μίας μετοχής είναι € 5 και ακολουθεί τη διαδικασία Wienner. Στο τέλος του ενός έτους η τιμή της μετοχής θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 5 και τυπική απόκλιση 1. Στο τέλος των τριών ετών, θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 5 και τυπική απόκλιση $\sqrt{3}$. Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα για την τιμή της μετοχής σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, συναρτήσει της τυπικής απόκλισης, αυξάνεται ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του χρονικού ορίζοντα.

3.2 Στοχαστική Ολοκλήρωση – Το λήμμα του Ito – Τιμολόγηση

Μία πολύ σημαντική πηγή ενδιαφέροντος για τη μελέτη των στοχαστικών φαινομένων είναι η στοχαστική ολοκλήρωση. Διαφορικά και διαφορικές εξισώσεις αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών διαφόρων περιουσιακών στοιχείων και άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Γενικά όμως, λόγω της ιδιαιτερότητας που παρουσιάζουν από τη φύση τους οι στοχαστικές διαδικασίες, στο στοχαστικό λογισμό δεν ισχύουν οι κανόνες που ισχύουν στο διαφορικό λογισμό.

Για παράδειγμα, θέλωντας κάποιος να μελετήσει τη συμπεριφορά και τις μεταβολές στις οποίες υπόκειται ένα περιουσιακό στοιχείο (π.χ. μία μετοχή) μέσα στο χρόνο, δεν θα μπορεί να χρησιμοποιήσει τους ίδιους κανόνες που ισχύουν σε ένα ντετερμινιστικό περιβάλλον. Αυτό συμβαίνει επειδή ως μεταβλητή, το περουσιακό στοιχείο παρουσιάζει έντονα το στοιχείο του τυχαίου. Αν υπήρχε συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο εξελίσσεται η πορεία της μεταβλητής μέσα στο χρόνο, τότε θα χρησιμοποιούνταν κανονικές διαφορικές εξισώσεις.

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να μιλάμε για διαφόριση σε στοχαστικό περιβάλλον και να παράγουμε επιτυχώς στοχαστικά ολοκληρώματα. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε κανονικές διαφορικές εξισώσεις με αντίστοιχες στοχαστικές όπως η παρακάτω:

$$dX_t = a_t dt + s_t dW_t, t \in [0, \infty),$$

όπου οι κινήσεις μέσα στο χρόνο εκφράζονται με όρους διαφορικών όπως dX_t, dt και dW_t αντί για παράγωγα όπως dX_t / dt. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος dX_t παριστάνει την απειροστή μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής X, dW_t αντιπροσωπεύει το τυχαίο και απρόβλεπτο μέρος, που συμβαίνει κατά το απειροστό διάστημα χρόνου dt, και α_t και σ_t είναι αντίστοιχα οι όροι τάσης (*drift*) και διάχυσης (*diffusion*) που εξαρτώνται και καθορίζονται από το οικονομικό περιβάλλον. Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε μία στοχαστική διαφορική εξίσωση που αντιπροσωπεύει τη συμπεριφορά της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου S_t:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + s(S_t, t)dW_t, t \in [0, \infty). \qquad (3.0)$$

Η (*3.0*) είναι γνωστή και ως διαδικασία Ito, μία διαδικασία όπου ο συντελεστής τάσης α και διάχυσης σ μπορούν να είναι συναρτήσεις της εν λόγω μεταβλητής και του χρόνου. Ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές, έχουμε:

$$\int_0^t dS_u = \int_0^t a(S_u, u)du + \int_0^t s\,(S_u, u)dW_u\ , \qquad (3.1)$$

όπου W_t είναι η διαδικασία Wienner και dW_t είναι οι προσαυξήσεις της διαδικασίας Wienner, τυχαία μεταβλητή μη-προβλέψιμη ακόμα και στο άμεσο μέλλον. Συνεπώς η τιμή της W_t τη χρονική στιγμή *t*, είναι το άθροισμα των απείρων ανεξάρτητων προσαυξήσεων:

$$W_t = \int_0^t dW_u\ . \qquad (3.2)$$

Η (*3.2*) αποτελεί την πιο απλή έκφραση στοχαστικού ολοκληρώματος. Από την πιο πάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση (*3.1*) ανάγουμε και το παρακάτω στοχαστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^t s\,(S_u, u)dW_u\ . \qquad (3.3)$$

Και τα δύο ολοκληρώματα (*3.2*) και (*3.3*) αποτελούν αθροίσματα ιδιαίτερα ασταθών ποσοτήτων. Την εκτίμησή τους διευκολύνει σημαντικά το ολοκλήρωμα Ito. Η στοχαστική διαδικασία (*3.0*) γραμμένη με βάση πεπερασμένα διαστήματα μεγέθους *h* παίρνει τη μορφή:

$$S_k - S_{k-1} = a(S_{k-1}, k)h + s\,(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}].$$

Αποδεικνύεται ότι για το ολοκλήρωμα Ito

$$\int_0^T s\,(S_t, t)dW_t$$

ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{k=1}^{n} s\,(S_{k-1}, k)[W_k - W_{k-1}] \to \int_0^T s\,(S_t, t)dW_t\,,$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή $h \to 0$. Από την παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι καθώς ο αριθμός των διαστημάτων *n* τείνει προς το άπειρο ενώ ταυτόχρονα το μήκος τους *h* τείνει προς το μηδέν, το πεπερασμένο άθροισμα θα τείνει προς την τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το ολοκλήρωμα Ito. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε τη διαφορά που υπάρχει στην έννοια του ορίου και της ολοκλήρωσης ανάμεσα στο διαφορικό και το στοχαστικό λογισμό.

Το ολοκλήρωμα του Ito αποτελεί σημαντικό βήμα για ένα άλλο θεωρητικό εφόδιο, το λήμμα του Ito. Σημαντικό συμπέρασμα του λήμματος του Ito είναι μία στοχαστική διαδικασία μίας συνάρτησης μίας μεταβλητής να υπολογίζεται από μία στοχαστική διαδικασία της ίδιας της μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα, για μια μεταβλητή X για την οποία $dX = a_t dt + b_t dW$, θα έχουμε τη διαδικασία Ito $f(X)$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)a_s ds + \int_0^t f'(X_s)b_s dW + \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)b_s^2 ds, \text{ για } t \geq 0.$$

Σε διαφορική μορφή, το λήμμα του Ito γράφεται:

$$df(X) = f'(X)adt + f'(X)bdW + \tfrac{1}{2} f''(X)b^2 dt.$$

Το λήμμα του Ito αποτελεί σημαντικότατο εργαλείο για την τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων. Ο λόγος που κάνουμε απλά μία αναφορά και δεν προχωρούμε σε μία βαθύτερη ανάλυση της θεωρίας που πλαισιώνει το κομμάτι αυτό της στοχαστικής ανάλυσης, είναι επειδή κάτι τέτοιο θα ξέφευγε από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, με τη βοήθεια του λήμματος Ito, αποτελούν αποτελεσματικές μέθοδοι τιμολόγησης παράγωγων προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε ένα περιουσιακό στοιχείο S_t και ένα παράγωγο προϊόν του, $F(S_t, t)$ και δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο P_t ως εξής:

$$P_t = q_1 F(S_t, t) + q_2 S_t,$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι οι ποσότητες του παράγωγου και του περουσιακού στοιχείου αντίστοιχα, έστω σταθερές. Θέλωντας να μελετήσουμε την αλλαγή του χαρτοφυλακίου μέσα στο χρόνο, έχουμε:

$$dP_t = q_1 dF_t + q_2 dS_t.$$

Στην παραπάνω σχέση τόσο το dF_t, όσο και το dS_t αποτελούν μεταβολές στις οποίες ενυπάρχει η έννοια του τυχαίου και απρόβλεπτου μέσα από τον όρο dW_t. Ακολουθεί δηλαδή η τιμή του περιουσιακού στοιχείου τη διαδικασία Ito:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + s\,(S_t, t)dW_t, \quad t \in [0, \infty).$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito για την dF_t, έχουμε:

$$dF_t = F_t dt + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 dt + F_S dS_t.$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά, έχουμε:

$$dF_t = (F_S a_t + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 + F_t)dt + F_S s_t dW_t.$$

Είναι δηλαδή, ο ίδιος όρος τυχαιότητας dW_t που ισχύει και για τις δύο μεταβολές. Αντικαθιστώντας έπειτα, έχουμε:

$$dP_t = q_1[F_t dt + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 dt + F_S dS_t] + q_2 dS_t.$$

Επιλέγοντας θ_1= 1 και θ_2= $-F_S$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$dP_t = F_t dt + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 dt,$$

οπότε και απαλείφονται οι όροι τυχαιότητας. Χρησιμοποιούμε το επιτόκιο r για να παρουσιάσουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου μέσα στο απειροστό διάστημα dt. Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$rP_t dt = F_t dt + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 dt.$$

Επειδή ο όρος dt βρίσκεται σε όλους τους παράγοντες, απαλείφεται ως εξής:

$$r[F(S_t,t) - F_S S_t] = F_t + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 \Rightarrow -rF(S_t,t) + rF_S S_t + F_t + \tfrac{1}{2} F_{SS} s_t^2 = 0.$$

Η παραπάνω είναι μια μερική στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μία τιμή για το παράγωγο προϊόν με τη βοήθεια μίας συνοριακής συνθήκης. Κατά τη λήξη του παράγωγου προϊόντος στο χρόνο T, η τιμή του θα είναι γνωστή και ίση με $F(S_T, T)$, η οποία θα ακολουθεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση $G(S_T, T)$ που με τη σειρά της θα εξυπηρετεί μία καθορισμένη συνοριακή συνθήκη ανάλογα με την ίδια τη φύση του προϊόντος (για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς θα είναι $G(S_T, T) = \max[S_T - K, 0]$). Έτσι, από τη σχέση $F(S_T, T) = G(S_T, T)$, μπορούμε να εξάγουμε μία τιμή για το παράγωγο προϊόν. Η παραπάνω διαδικασία είναι ιδιαίτερα απλουστευμένη μιας και δεν υπολογίζει μέρισμα του εν λόγω περιουσιακού στοιχείου καθώς και δημιουργεί ένα ακίνδυνο για τον κάτοχό του χαρτοφυλάκιο. Εξυπηρετεί παρ’ όλα αυτά το σκοπό του συγκεκριμένου κεφαλαίου, να παρουσιάσει σε προκαταρκτικό τουλάχιστον επίπεδο τη χρησιμότητα του λήμματος Ito και των μερικών διαφορικών εξισώσεων στην τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων.

3.3 Η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους

Η παραπάνω διαδικασία, καθώς και όλες οι σύγχρονες μέθοδοι τιμολόγησης παράγωγων προϊόντων, βασίζονται στην αρχή του μη-βέβαιου κέρδους. Οι τιμές που εξάγονται από τις διαδικασίες αυτές, έχουν υπολογιστεί κάτω από συνθήκες που αποκλείουν κάθε περίπτωση κερδοσκοπίας ή βέβαιου κέρδους (*arbitrage*). Οι συνθήκες αυτές έλλειψης ευκαιριών βέβαιου κέρδους συγκροτούν μία γενική ισορροπία (*equilibrium*) που με τη σειρά της αποτελεί τη βάση για ορθή τιμολόγηση των προϊόντων.

Σε μία πρώτη φάση, θα μπορούσαμε να πούμε πως τέτοιες ευκαιρίες κερδοσκοπίας δημιουργούνται από την παράλληλη θέση που παίρνει ένας επενδυτής απέναντι σε μία σειρά προϊόντων, που με τον κατάλληλο συνδυασμό επιφέρουν βέβαιο κέρδος. Ευκαιρίες βέβαιου κέρδους μπορούν να παρουσιαστούν με δύο τρόπους. Ο ένας είναι να αναλάβει κάποιος μια σειρά από επενδύσεις χωρίς καμία τρέχουσα δέσμευση ή επιβάρυνση, και παρ' όλα αυτά να αναμένει κέρδος. Ο άλλος είναι να συγκροτήσει κάποιος ένα χαρτοφυλάκιο που να επιβεβαιώνει αρνητική δέσμευση σήμερα και να επιφέρει μη-αρνητικά ωφέλη στο μέλλον. Ένα παράδειγμα ευκαιρίας βέβαιου κέρδους είναι να πωλήσει ο επενδυτής μία μετοχή και με την είσπραξη από την πώληση αυτή να αγοράσει δικαιώματα αγοράς πάνω στην ίδια μετοχή. Με τον κατάλληλο συνδυασμό, αυτό μπορεί να γίνει ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο με προοπτικές βέβαιου κέρδους.

Στην πραγματικότητα, μπορεί να υπάρχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους. Ωστόσο, σαν έννοια η αρχή του μη βέβαιου κέρδους είναι πάρα πολύ σημαντική. Είναι στην ουσία ο λόγος για τον οποίο ένα χαρτοφυλάκιο Α αξίζει περισσότερο από ένα χαρτοφυλάκιο Β, αν η εξόφλησή του είναι το ίδιο ή/και περισσότερο καλή. Επίσης βασικό συμπέρασμα της αρχής αυτής είναι ένα χαρτοφυλάκιο που αποδίδει μηδέν να έχει οπωσδήποτε μηδενική παρούσα αξία. Αν είχε θετική αξία, ο επενδυτής θα πωλούσε το χαρτοφυλάκιο, και αν είχε αρνητική αξία, θα το αγόραζε δημιουργώντας έτσι συνθήκες βέβαιης κερδοσκοπίας.

Η τιμολόγηση προϊόντων με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους έχει διάφορες χρησιμότητες. Στην περίπτωση ενός πρωτοεμφανιζόμενου προϊόντος στην αγορά, η τιμολόγησή του δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση τις πραγματικές συναλλαγές. Η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους αποτελεί σημαντικό παράγοντα στον καθορισμό μίας τιμής για τα προϊόντα αυτά. Επίσης, αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην αντιστάθμιση κινδύνου, καθώς επίσης στον υπολογισμό της αξίας χαρτοφυλακίων που περιέχουν περουσιακά στοιχεία με περιορισμένο αριθμό συναλλαγών. Τέλος, συγκρίνοντας την τιμή ενός προϊόντος που έχει υπολογιστεί με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους με την πραγματική τιμή του στην αγορά, οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα για τους επενδυτές. Στην περίπτωση που η τιμή αυτή είναι υψηλότερη από την παρατηρούμενη, το προϊόν είναι υποτιμημένο. Στην περίπτωση που είναι χαμηλότερη, το προϊόν είναι υπερτιμημένο.

Μπορούμε να ορίσουμε έναν πίνακα από εξοφλήσεις D με $N \times K$ στοιχεία, όπου N να είναι ο συνολικός αριθμός των περιουσιακών στοιχείων και K ο αριθμός των κατάστασεων στην οικονομία. Επίσης ορίζουμε το διάνυσμα θ με N στοιχεία που καθορίζει ένα χαρτοφυλάκιο. Τότε, η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$S_t' q = \sum_{i=1}^{N} S_i(t) q_i \ ,$$

όπου στην ουσία τα στοιχεία θ_i είναι οι θέσεις που παίρνει ο επενδυτής απέναντι στα περιουσιακά στοιχεία ή προϊόντα S_i. Η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους ορίζει πως για να μην υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας θα πρέπει να ισχύει η παραπάνω σχέση και επίσης να υπάρχει ένα διάνυσμα έστω ψ, με K στοιχεία και για το οποίο να ισχύει:

$$\psi > 0 \text{ και } S = Dy \ .$$

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για περισσότερη κατανόηση. Έστω πως η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι $S_t = 50$. Έστω επίσης πως στο χρόνο t+1 έχουμε δύο πιθανά ενδεχόμενα: να πέσει η τιμή της μετοχής σε $S_{t+1} = 45$ ή να ανέβει σε $S_{t+1} = 65$. Δηλαδή οι καταστάσεις της οικονομία είναι K=2. Υπάρχει ένα δικαίωμα αγοράς C με τιμή εξάσκησης 55 και χρόνο εξάσκησης t+1. Τέλος, υπάρχει και μία μονάδα ενός στοιχείου που φέρει βέβαιο τόκο για ένα έτος 20%. Άρα τα περιουσιακά στοιχεία είναι N=3. Υπό την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+r) & (1+r) \\ S_{t+1}^1 & S_{t+1}^2 \\ C_{t+1}^1 & C_{t+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας, θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 50 \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 1{,}2 \\ 45 & 65 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε ως προς ψ_1 και ψ_2 με βάση τις δύο πρώτες ισότητες. Τα αποτελέσματα είναι:

$$\psi_1 = 0{,}2083 \text{ και } \psi_2 = 0{,}625$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω τιμές τιμολογούμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους ως $C_t = 6{,}25$.

Η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους μας βοηθάει να ανάγουμε θεμελιώδεις σχέσεις για την τιμολόγηση των ομολογιών. Θεωρούμε $B(t,T)$ την τιμή της ομολογίας με μηδενικό κίνδυνο και χωρίς άλλες εισφορές (κουπόνια – coupons) κατά τη διάρκειά της από t εώς T, η οποία πληρώνει στη λήξη € 1. Έστω ότι το επιτόκιο για την ομολογία είναι σταθερό, δηλαδή $r_t = r$, η αξία της ομολογίας, με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους θα είναι:

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}.$$

Η παραπάνω ισότητα εξασφαλίζει την εξάλειψη κερδοσκοπικών ευκαιριών. Έστω ότι:

$$B(t,T) > e^{-r(T-t)},$$

τότε ο επενδυτής θα μπορούσε να πωλήσει την ομολογία για την περίοδο από t εώς T και να επενδύσει το ποσό των € $e^{-r(T-t)}$ από τα έσοδα. Κατά τη λήξη της ομολογίας, η πώληση της ομολογίας θα αξίζει € 1, και παράλληλα τα έσοδα από την επένδυση θα είναι € 1, συνεπώς η καθαρή χρηματική ροή θα είναι μηδενική. Παρ'όλα αυτά, τη χρονική στιγμή t, κατά την αρχή της διάρκειας της ομολογίας ο επενδυτής έχει επωφεληθεί από τη χρηματική διαφορά:

$$B(t,T) - e^{-r(T-t)} > 0.$$

Στην αντίθετη περίπτωση που:

$$B(t,T) < e^{-r(T-t)},$$

ο επενδυτής θα δανειζόταν το ποσό των € $e^{-r(T-t)}$ και παράλληλα θα αγόραζε μία ομολογία στην τιμή $B(t,T)$. Κατά τη λήξη της ομολογίας, η καθαρή χρηματική ροή θα είναι και πάλι ίση με το μηδέν. Παρ'όλα αυτά, τη χρονική στιγμή t, κατά την αρχή της διάρκειας της ομολογίας ο επενδυτής θα έχει επωφεληθεί από τη χρηματική διαφορά:

$$e^{-r(T-t)} - B(t,T) > 0.$$

Συνεπώς, προκειμένου να μην υφίστανται συνθήκες κερδοσκοπίας, θα πρέπει να ισχύει η παραπάνω ισότητα, η οποία είναι περισσότερο ένας περιορισμός παρά μία προϋπόθεση για την τιμολόγηση ομολογιών.

Στην περίπτωση που το επιτόκιο r_t δεν είναι σταθερό αλλά στοχαστικό, δηλαδή μεταβάλλεται στο χρόνο με αβέβαιο τρόπο, τότε η παραπάνω ισότητα μεταβάλλεται ως εξής:

$$B(t,T) = E_t[e^{-\int_t^T r_s ds}].$$

Το επιτόκιο r_t είναι γνωστό τη χρονική στιγμή t, αλλά οι μελλοντικές του τιμές κυμαίνονται τυχαία μέσα στο χρόνο μέχρι τη στιγμή T. Η τιμή της ομολογίας εξαρτάται από όλο το φάσμα των μελλοντικών επιτοκίων r_s, όπου $t < s < T$. Η παραπάνω σχέση αποκλείει κερδοσκοπικές ευκαιρίες αφού βασίζεται στην αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

Μία άλλη σχέση υπό την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους για την τιμολόγηση της ομολογίας είναι με βάση τα προωθητικά επιτόκια. Έστω $F(t, T, U)$ είναι το προωθητικό επιτόκιο που προσυμφωνείται τη χρονική στιγμή t, για ένα δάνειο το οποίο ξεκινάει στο χρόνο T και λήγει στο χρόνο U. Η σχέση

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T F(t,s)ds}$$

δίνει την τιμή μίας ομολογίας με μηδενικό κίνδυνο και χωρίς άλλες εισφορές κατά τη διάρκειά της, η οποία πληρώνει στη λήξη € 1 συναρτήσει των προωθητικών επιτοκίων F.

Συγκεκριμένα, ο όρος $F(t, s)$ είναι το στιγμιαίο προωθητικό επιτόκιο που έχει καθοριστεί στο χρόνο t και αφορά δάνειο που αρχίζει το χρόνο s και λήγει μετά την έλευση του απειροστού χρονικού διαστήματος ds. Συνεπώς μία σχέση που συνδέει τις τιμές των ομολογιών $B(t, T)$, $B(t, U)$ και $F(t, T, U)$ είναι η παρακάτω:

$$F(t,T,U) = \frac{\log B(t,T) - \log B(t,U)}{U - T}, \quad t < T < U.$$

Η παραπάνω ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τιμολόγηση, εφόσον γνωρίζοντας το επιτόκιο $F(t, T, U)$, γνωρίζουμε επίσης έναν από τους δύο άγνωστους όρους $B(t, T)$, $B(t, U)$.

Στο παραπάνω παράδειγμα θεωρήσαμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό. Παρ' όλα αυτά, όπως είδαμε ήδη, υπάρχει και το ενδεχόμενο τα επιτόκια να μεταβάλλονται στο χρόνο και μάλιστα με τυχαίο τρόπο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τη λειτουργία κάποιων βασικών επιτοκιακών παράγωγων προϊόντων, τα οποία χρησιμοποιούνται είτε για αντιστάθμιση κινδύνου, είτε για εκμετάλλευση κερδοσκοπικών ευκαιριών. Για την εξάλειψη αυτών των ευκαιριών η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους διαμορφώνεται εκ νέου. Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να εμπλουτιστεί –και ταυτόχρονα να γίνει πιο περίπλοκο- με τον κατάλληλο συνδυασμό των συγκεκριμένων αυτών προϊόντων, προκειμένου να προσαρμοστεί στις μεταβολές των επιτοκίων. Έτσι, θα δημιουργηθούν νέες σχέσεις τιμολόγησης για τα παράγωγα προϊόντα. Η ανάλυση ενός τέτοιου παραδείγματος, λόγω της πολυπλοκότητας του, θα ξέφευγε από το σκοπό της εργασίας αυτής.

4. ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

4.1 Εισαγωγή - Μοντέλα για τα στιγμιαία επιτόκια

Μία προσέγγιση για την τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων που βασίζονται στις μεταβολές των επιτοκίων, είναι να γίνει χρήση της σχέσης που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως απόρροια της αρχής του μη-βέβαιου κέρδους:

$$B(t,T) = E_t[e^{-\int_t^T r_s ds}],$$

η οποία έδινε τιμές για τις ομολογίες αποκλείωντας κάθε κερδοσκοπική ευκαιρία. Η χρησιμότητα της σχέσης αυτής, που συνδέει την τιμή της ομολογίας με τα στιγμιαία επιτόκια, μπορεί να έχει δύο όψεις. Στη μία αν είναι γνωστή μία σειρά από προεξοφλήσεις ομολογιών με διαφορετικές διάρκειες $\{B(t, T)\}$, τότε χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα, οδηγούμαστε σε ένα μοντέλο για το στιγμιαίο επιτόκιο r_t, προσαρμοσμένο στην αρχή του μη-βέβαιου κέρδους. Το μοντέλο αυτό θα αποτελέσει το εργαλείο για την τιμολόγηση άλλων επιτοκιακών παραγώγων πέρα των ομολογιών. Στην άλλη περίπτωση, όπου δεν είναι γνωστές αυτές οι προεξοφλήσεις, εφαρμόζουμε ένα μοντέλο για τα επιτόκια r_t βασιζόμενοι σε εμπειρικά δεδομένα και έπειτα το χρησιμοποιούμε για την τιμολόγηση ομολογιών και λοιπών παραγώγων.

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για περισσότερη κατανόηση. Πρώτα παίρνουμε την περίπτωση όπου εκτιμούμε αρχικά το μοντέλο των επιτοκίων r_t. Έστω ότι τα διαθέσιμα δεδομένα μας δίνουν την πεποίθηση ότι τα στιγμιαία επιτόκια r_s είναι σταθερά. Δηλαδή $r_s = r$ για κάθε $s \geq t$. Από την παραπάνω σχέση και όπως έχουμε ήδη δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε:

$$B(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r ds}\right] = e^{-r(T-t)}.$$

Έστω ότι $r = 0{,}07$. Τότε για λήξη διάρκειας της ομολογίας 1, 2 και 3 έτη αντίστοιχα, οι προεξοφλήσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$B(t,t+1) = 0{,}93$$
$$B(t,t+2) = 0{,}87$$
$$B(t,t+3) = 0{,}81.$$

Έτσι αν οι ισχυρισμοί για τη σταθερότητα του στιγμιαίου επιτοκίου αληθεύουν, οι τιμές για τις ομολογίες που μόλις υπολογίσθηκαν είναι σύμφωνες με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

Από την άλλη, αν υποθέσουμε ότι δεν γνωρίζουμε το μοντέλο που εκφράζει την πορεία των στιγμιαίων επιτοκίων στο χρόνο, παρ'όλα αυτά έχουμε στη διάθεση μας τις τιμές των ομολογιών στην αγορά με διάρκεια 1, 2 και 3 έτη ως εξής:

$$B(t,t+1) = 0{,}93$$
$$B(t,t+2) = 0{,}87$$
$$B(t,t+3) = 0{,}81.$$

Από τις παραπάνω τιμές ανάγουμε το μοντέλο για τα στιγμιαία επιτόκια, τα οποία ακολουθούν την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr_t = a(r_t,t)dt + b(r_t,t)dW_t,$$

όπου δεχόμαστε $a(r_t,t) = 0$ και $b(r_t,t) = 0$, δηλαδή η διαδικασία r_t είναι σταθερή στο χρόνο. Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορούμε να τιμολογήσουμε επιτοκιακά παράγωγα προϊόντα με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

Γενικεύοντας το παραπάνω παράδειγμα, έστω ότι λαμβάνουμε μία σειρά από προεξοφλήσεις $\{B(t, u),\ t < u < T\}$ σύμφωνες με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους. Τότε με βάση την πιο πάνω ισότητα, η διαδικασία των στιγμιαίων επιτοκίων θα πρέπει να ικανοποιεί όλες τις παρακάτω σχέσεις:

$$B(t,T_0) = E_t\left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds}\right],$$
$$B(t,T_1) = E_t\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds}\right],$$
$$\ldots = \ldots$$
$$B(t,T_n) = E_t\left[e^{-\int_t^{T_n} r_s ds}\right],$$

όπου $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ αποτελούν τις διαδοχικές λήξεις για κάθε ομολογία. Οι τιμές $B(t, T_i)$ θα καθορισθούν στην αγορά. Το βασικό ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα υπόδειγμα για τη διαδικασία των στιγμιαίων επιτοκίων, που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες τις παραπάνω σχέσεις. Η διαδικασία αυτή είναι στοχαστική αφού τα επιτόκια κυμαίνονται τυχαία μέσα στο χρόνο. Ο καθορισμός λοιπόν του μοντέλου έχει ως βάση την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dV_t,$$

καθώς επίσης εξαρτάται από τις παραμέτρους $a(r_t, t)$ και $b(r_t, t)$. Από τη στιγμή που θα καθοριστούν αυτοί οι παράγοντες και εφόσον τηρείται η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους όπως είχαμε θέσει ως προϋπόθεση στην αρχή, το μοντέλο για τη διαδικασία r_s είναι το κατάλληλο για την τιμολόγηση επιτοκιακών παράγωγων προϊόντων. Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι συντελεστές $a(r_t, t)$ και $b(r_t, t)$ εξαρτώνται μόνο από την τιμή r_t, δηλαδή την τελευταία παρατηρούμενη τιμή του επιτοκίου, και όχι από τα υπολοιπα r_s, $s < t$, που έχουν προηγηθεί.

Ένα είδος στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που παρουσιάζει ευελιξία στην προσαρμογή της διαδικασίας των στιγμιαίων επιτοκίων στην αντίστοιχη σειρά $\{B(t, T_i), i=0,\ldots,n\}$ των προεξοφλήσεων, είναι αυτό της επιστρεφόμενης στο μέσο (*mean-reverting*) στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης ("*Interest Rate Option Models*" R. Rebonato, Wiley 1998):

$$dr_t = k(q_t - r_t)dt + s r_t^b \, dW_t.$$

Στην παραπάνω εξίσωση η παράμετρος θ_t, η οποία παριστάνει τον μέσο της μεταβλητής, παίρνει διαφορετική τίμη για κάθε χρονική στιγμή t και η W_t δεν είναι άλλη από τη διαδικασία Wienner. Έτσι για τις χρονικές στιγμές $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ οι παράμετροι θα είναι αντίστοιχα $n + 3$, δηλαδή

$$\{q_{t_0}, q_{t_1}, \ldots, q_{t_n}, l, s\},$$

γεγονός στο οποίο οφείλεται η ευελιξία που προαναφέρθηκε. Επίσης, η επιστρεφόμενη στο μέσο στοχαστική διαφορική εξίσωση εκφράζει την ιδιότητα των επιτοκίων να κινούνται μακροπρόθεσμα γύρω από ένα μέσο επίπεδο. Δηλαδή, όταν τα στιγμιαία επιτόκια υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο μακροπρόθεσμο επίπεδο, τότε θα έχουν αρνητική τάση ώστε να «επιστρέψουν» σ'αυτό το επίπεδο. Αντίστροφα, όταν είναι αρκετά χαμηλότερα από το μέσο μακροπρόθεσμο επίπεδο, θα έχουν θετική τάση μέσα στο χρόνο. Από οικονομικής πλευράς, όταν τα επιτόκια είναι υψηλά, η οικονομία επιβραδύνεται και οι δανειζόμενοι ζητούν λιγότερα κεφάλαια. Αντίθετα, όταν τα επιτόκια είναι χαμηλά, υπάρχει μεγαλύτερη ζήτηση κεφαλαίων και τα επιτόκια έχουν την τάση να αυξάνονται.

Έστω τώρα ότι έχουμε καταλήξει σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο για τα στιγμιαία επιτόκια βασιζόμενοι στη διάρθρωση $\{B(t, T)\}$, και έστω ότι εκφράζεται με την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr_t = a'(r, t)dt + b'(r_t, t)dW_t.$$

Έστω ότι θέλουμε να δώσουμε τιμή $C(r_t, t)$ σε ένα παράγωγο προϊόν που εξαρτάται αποκλειστικά από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια r_t, γνωρίζοντας ότι κατά τη λήξη T θα ακολουθεί συγκεκριμένη συνάρτηση $G(r_T, T)$. Δηλαδή

$$C(r_T, T) = G(r_T, T) .$$

Οπότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας την ισότητα τιμολόγησης ως εξής:

$$C(r_t, T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds} G(r_T, T) \right].$$

Η παραπάνω αναμενόμενη τιμή αν δεν υπολογίζεται απ' ευθείας, μπορεί να εκτιμηθεί με μεθόδους *Monte Carlo* ή να μετατραπεί σε μερική διαφορική εξίσωση. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των επιτοκίων, που εκφράζεται μέσα από το επιλεγμένο μοντέλο, η τιμολόγηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ποικίλους τρόπους.

Επίσης, υπάρχει και η περίπτωση το παράγωγο προϊόν που επιθυμούμε να τιμολογήσουμε, να μην εξαρτάται μόνο από τα στιγμιαία επιτόκια, αλλά και από ένα δεύτερο παράγοντα όπως για παράδειγμα τα μακροπρόθεσμα επιτόκια έστω R_t. Έτσι, η τιμή του παραγώγου αυτού θα είναι ίση με $C(r_t, R_t, t)$, ενώ κατά τη λήξη T η εξόφληση θα είναι ίση με $G(r_T, R_T, T)$. Δηλαδή:

$$C(r_T, T) = G(r_T, R_T, T) .$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ισότητα τιμολόγησης ως εξής:

$$C(r_t, T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r_s ds} G(r_T, R_T, T) \right].$$

Παρ'όλα αυτά, υπάρχει μία σημαντική παράλειψη. Δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για το δεύτερο παράγοντα πάνω στον οποίο εξαρτάται το προϊόν, δηλαδή τα μακροπρόθεσμα επιτόκια. Όπως είναι κατανοητό, η πολυπλοκότητα του προβλήματος της τιμολόγησης διογκώνεται, αφού θα πρέπει να βρούμε ένα μοντέλο στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης και για τη διαδικασία των R_T, η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

4.2 Ανάλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και Επιτοκιακά Παράγωγα

Η εξίσωση της διάρθρωσης επιτοκίων (term structure equation)

Κάνοντας χρήση της θεωρίας των μερικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και του λήμματος Ito μπορούμε να τιμολογήσουμε παράγωγα προϊόντα που εξαρτώνται από την πορεία των επιτοκίων. Ενώ στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την ανάλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, είχαμε πάρει ένα παράγωγο προϊόν που βασίζεται σε ένα περιουσιακό στοιχείο καθώς επίσης το ίδιο το περιουσιακό στοιχείο, ως συστατικά ενός ακίνδυνου χαρτοφυλακίου, στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πάρουμε ομολογίες με διαφορετικές διάρκειες. Ο κατάλληλος συνδυασμός τους θα αποτελέσει το επιθυμητό χαρτοφυλάκιο. Καθώς είναι παρόμοια χρεόγραφα, οι ομολογίες αυτές θα έχουν την ίδια πηγή αβεβαιότητας. Δηλαδή, θα επηρεάζονται από τον ίδιο τυχαίο παράγοντα, τα στιγμιαία επιτόκια r_t. Η παρακάτω ανάλυση για τη διεξαγωγή της εξίσωσης της διάρθρωσης επιτοκίων μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο "*An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*" S. Neftci, (Academic Press, 2000).

Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο ομολογίες με μηδενικό κίνδυνο και χωρίς άλλα κουπόνια - εισφορές κατά τη διάρκειά τους, οι οποίες πληρώνουν στη λήξη η καθεμία € 1. Οι αντίστοιχες διάρκειες των ομολογιών θα είναι T_1 και T_2, όπου $T_1 < T_2$, επομένως οι αντίστοιχες προεξοφλήσεις θα είναι:

$$B_1 = B(t, T_1)$$
$$B_2 = B(t, T_2),$$

και η δυναμική συμπεριφορά (*dynamics*) των παραπάνω ομολογιών μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$dB_1 = m(B_1, t)B_1 dt + s_1(B_1, t)B_1 dW_t,$$
$$dB_2 = m(B_2, t)B_2 dt + s_2(B_2, t)B_2 dW_t.$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι διάχυσης αποτελούν συναρτήσεις της ίδιας διαδικασίας Wienner W_t αλλά εξαρτώνται από διαφορετικές παραμέτρους σ_i. Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαίο να ορίσουμε ένα μοντέλο για τη δυναμική συμπεριφορά των επιτοκίων r_t. Έστω λοιπόν ότι

$$dr_t = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dW_t,$$

όπου οι συντελεστές $a(r_t, t)$ και $b(r_t, t)$ θεωρούνται γνωστοί, αναγόμενοι είτε από εμπειρικά δεδομένα του παρελθόντος είτε από τιμές της αγοράς.

Υποθέτουμε ότι το επιθυμητό ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο συγκροτείται αν αποκτηθούν θ_1 μονάδες της ομολογίας B_1 και ταυτόχρονα πωληθούν θ_2 μονάδες της ομολογίας B_2. Η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$P = q_1 B_1 - q_2 B_2.$$

Επιλέγουμε οι ποσότητες θ_1 και θ_2 να παίρνουν τις εξής τιμές:

$$q_1 = \frac{s_2}{B_1(s_2 - s_1)} P$$

$$q_2 = \frac{s_1}{B_2(s_2 - s_1)} P,$$

όπου $s_1 = s_1(B_1, t)$ και $s_2 = s_2(B_2, t)$. Οι μεταβολές της τιμής του χαρτοφυλακίου P μέσα σε απειροστά χρονικά διαστήματα δίνονται ως εξής:

$$dP = q_1 dB_1 - q_2 dB_2 .$$

Στην παραπάνω ισότητα έχουμε αποδεχθεί ότι οι ποσότητες θ_1 και θ_2 παραμένουν σταθερές. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$dP = q_1[m(B_1,t)B_1 dt + s_1(B_1,t)B_1 dW_t] - q_2[m(B_2,t)B_2 dt + s_2(B_2,t)B_2 dW_t]$$

Παρατηρούμε ότι:

$$q_1 s_1 B_1 - q_2 s_2 B_2 = \left(\frac{s_2}{B_1(s_2 - s_1)} s_1 B_1 - \frac{s_1}{B_2(s_2 - s_1)} s_2 B_2 \right) P = 0 .$$

Συνεπώς οι μεταβολές στην τιμή του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$dP = (q_1 m_1 B_1 - q_2 m_2 B_2) dt .$$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω σχέση δεν υφίσταται ο όρος τυχαιότητας dW_t της διαδικασίας Wienner, οπότε οι μεταβολές αυτές της τιμής του χαρτοφυλακίου μπορούν να προβλεφθούν πλήρως.

Στην τελευταία σχέση, αντικαθιστούμε τις τιμές των θ_i και διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε με P. Οπότε έχουμε:

$$dP = \frac{(s_2 m_1 - s_1 m_2)}{(s_2 - s_1)} P dt .$$

Η συγκεκριμένη στοχαστική διαφορική εξίσωση δεν περιέχει όρο διάχυσης και η δυναμική συμπεριφορά του χαρτοφυλακίου dP πραγματοποιείται υπό καθεστώς μηδενικού κινδύνου. Οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι συμβατό με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους. Έτσι, η απόδοση του θα πρέπει να είναι ίση με $r_t P dt$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{(s_2 m_1 - s_1 m_2)}{(s_2 - s_1)} P dt \; = \; r_t P dt ,$$

και απλοποιώντας τη σχέση αυτή, έχουμε:

$$\frac{m_1 - r_t}{s_1} = \frac{m_2 - r_t}{s_2} .$$

Η παρακάτω ποσότητα:

$$\frac{m_i - r_t}{s_i} = l(r_t, t) = l_t$$

αποτελεί την τιμή της αγοράς για τον κίνδυνο των επιτοκίων ή πριμ κινδύνου (*market price of interest rate risk*). Είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από τα επιτόκια r_t και το χρόνο t, αλλά δεν εξαρτάται από το χρόνο λήξης της ομολογίας T. Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι οι δύο αυτές τιμές για τις δύο ομολογίες είναι ίσες, δηλαδή έχουν το ίδιο πριμ κινδύνου και συνεπώς παρουσιάζουν την ίδια μεταβλητότητα. Η μεταβλητότητα αυτή πηγάζει από τον παράγοντα dW_t, που από την αρχή υποθέσαμε ότι ήταν ίδιος και στις δύο ομολογίες.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το λήμμα του Ito και συγκεκριμένα την παρακάτω σχέση:

$$dB(t,T) = B_r dr_t + B_t dt + \tfrac{1}{2} B_{rr} b(r_t,t)^2 \, dt .$$

Επίσης, έχουμε ήδη αναφέρει ότι

$$dr_t = a(r_t,t)dt + b(r_t,t)dW_t ,$$

ενώ προκύπτει ότι

$$dB(r_t,t) = \left[B_r a(r_t,t) + B_t + \tfrac{1}{2} B_{rr} b(r_t,t)^2 \right] dt + b(r_t,t) B_r dW_t .$$

Η παραπάνω ισότητα δεν είναι διαφορετική από την παρακάτω σχέση:

$$dB = m(B,t)Bdt + s\,(B,t)BdW_t .$$

Συνεπώς δεχόμαστε ότι

$$m(B,t)B = B_r a(r_t,t) + B_t + \tfrac{1}{2} B_{rr} b(r_t,t)^2 \qquad (4.1)$$

και

$$s\,(B,t)B = b(r_t,t)B_r .$$

Οπότε, το πριμ κινδύνου επιτοκίων μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{B[m(B,t) - r_t]}{b(r_t,t)} = l_t$$

και συνεπώς

$$m(B,t)B = r_t B + b(r_t,t) B_r l_t . \qquad (4.2)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (*4.1*) και (*4.2*), θα έχουμε:

$$B_r a(r_t,t) + B_t + \tfrac{1}{2} B_{rr} b(r_t,t)^2 - r_t B - b(r_t,t) B_r l_t = 0 \Rightarrow$$

$$B_r (a(r_t,t) - b(r_t,t) l_t) + B_t + \tfrac{1}{2} B_{rr} b(r_t,t)^2 - r_t B = 0 . \qquad (*)$$

Η (*) είναι μία μερική διαφορική εξίσωση για την τιμολόγηση μίας ομολογίας $B(t, T)$ χωρίς κίνδυνο και είναι γνωστή και ως εξίσωση της διάρθρωσης επιτοκίων. Η συνοριακή συνθήκη που χρησιμοποιούμε είναι η γνωστή

$$B(T,T)=1$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που έχουμε δεχτεί ένα μοντέλο για τα επιτόκια, με γνωστό συντελεστή τάσης και διάχυσης $a(r_t,t)$ και $b(r_t,t)$ αντίστοιχα, θα πρέπει επιπλέον να εκτιμήσουμε και το πριμ κινδύνου των επιτοκίων λ_t.

Μπορούμε να πάρουμε την ακραία περίπτωση όπου τα επιτόκια είναι σταθερά στο χρόνο, δηλαδή $r_t = r$. Τότε, στη στοχαστική διαφορική εξίσωση για τα επιτόκια r_t

$$dr_t = a(r_t,t)dt + b(r_t,t)dW_t,$$

θα είναι

$$a(r_t,t)=0 \text{ και } b(r_t,t)=0.$$

Επίσης, αφού δεν υφίσταται κίνδυνος επιτοκίων, δεν θα υπάρχει και πριμ κινδύνου, δηλαδή:

$$l_t = 0.$$

Οπότε η μερική διαφορική εξίσωση (*), που πιο απλουστευμένα γράφεται ως:

$$B_r(a-bl)+B_t+\tfrac{1}{2}B_{rr}b^2-r_tB=0$$

θα μετατραπεί ως εξής:

$$B_t + rB = 0,$$

έχοντας ως συνοριακή συνθήκη την $B(T,T)=1$. Η παραπάνω σχέση όμως δεν είναι άλλη από την απλή διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dB(t,T)}{dt}+rB(t,T)=0, \quad \text{όπου } B(T)=1.$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η γνωστή:

$$B(t,T)=e^{-r(T-t)}.$$

Μπορούμε επίσης να πάρουμε την περίπτωση όπου το πριμ κινδύνου των επιτοκίων είναι σταθερό

$$l(r_t,t)=l$$

και ταυτόχρονα τα επιτόκια ακολουθούν την επιστρεφόμενη στο μέσο στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = k(q-r_t)dt + s\,dW_t,$$

όπου W_t είναι η διαδικασία Wienner. Επιπλέον θεωρούμε ότι ο συντελεστής της μεταβλητότητας είναι σταθερός σ και γνωστός, όπως επίσης και οι άλλοι συντελεστές κ, θ και λ. Υπό αυτές τις συνθήκες, η μερική διαφορική εξίσωση για τις ομολογίες θα πάρει τη μορφή

$$B_r(k(q-r_t)-s\,l)+B_t+\tfrac{1}{2}B_{rr}b^2-r_tB=0.$$

Η παραπάνω σχέση είναι και γνωστή ως το μοντέλο του Vasicek, ο οποίος το εισήγαγε το 1977. Το μοντέλο του Vasicek θα εξετασθεί πιο διεξοδικά παρακάτω.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της διάρθρωσης επιτοκίων (*), μπορούμε να τιμολογήσουμε μία σειρά από παράγωγα προϊόντα που εξαρτώνται από την πορεία των επιτοκίων (Gibson κ.α., 2001). Στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς C μίας ομολογίας $B(t, T)$ με χρονική στιγμή λήξης $T_C < T$ και τιμή εξάσκησης K, η μερική διαφορική εξίσωση θα είναι:

$$C_r(a(r_t,t)-b(r_t,t)\,l_t)+C_t+\tfrac{1}{2}C_{rr}b(r_t,t)^2-r_tC=0,$$

με συνοριακή συνθήκη την

$$C(T_C)=\max(B(t,T_C)-K,0).$$

Στην περίπτωση μίας ανταλλαγής *swap* S ενός σταθερού επιτοκίου r έναντι ενός κυμαινόμενου επιτοκίου $\widetilde{r}$, με λήξη τη χρονική στιγμή T, θα είναι

$$S_r(a(r_t,t)-b(r_t,t)\,l_t)+S_t+\tfrac{1}{2}S_{rr}b(r_t,t)^2-r_tS+(\widetilde{r}-r)=0,$$

με συνοριακή συνθήκη την

$$S(0)=0.$$

Στην περίπτωση ενός επιτοκιακού υπερ-καλύματος *cap* με επιτόκιο r_{cap} και χρόνο λήξης T, θα έχουμε

$$cap_r(a(r_t,t)-b(r_t,t)\,l_t)+cap_t+\tfrac{1}{2}cap_{rr}b(r_t,t)^2-r_tcap+\min(r,r_{cap})=0,$$

με συνοριακή συνθήκη την

$$cap(T)=\max(r(T)-r_{cap},0).$$

Τέλος, στην περίπτωση ενός επιτοκιακού υπο-καλύματος *fl* με επιτόκιο r_{fl} και χρόνο λήξης T, θα έχουμε

$$fl_r(a(r_t,t)-b(r_t,t)\,l_t)+fl_t+\tfrac{1}{2}fl_{rr}b(r_t,t)^2-r_tfl+\max(r,r_{fl})=0,$$

με συνοριακή συνθήκη την

$$fl(T)=\max(r_{fl}-r(T),0).$$

4.3 Κατηγορίες μοντέλων διάρθρωσης επιτοκίων

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφέρουμε κάποιες κατηγορίες μοντέλων για τη διάρθρωση επιτοκίων σε σχέση με τη διάρκεια, ανάλογα με τα κριτήρια που τις καθορίζουν. Έτσι, ανάλογα με το πλαίσιο που εξετάζουμε τα επιτόκια, χωρίζουμε τα μοντέλα σε συνεχή ή διακριτό χρόνο. Η πείρα μέχρι τώρα έχει δείξει πως τα συνεχή μοντέλα είναι προτιμότερα, αφού η θεωρία που τα πλαισιώνει, δηλαδή ο στοχαστικός λογισμός, προσφέρει μεγαλύτερες δυνατότητες για πιο εμπεριστατωμένα αποτελέσματα μέσα από πιο κατάλληλες υποθέσεις και λύσεις. Το μειονέκτημα που ενδεχομένως παρουσιάζουν σε σύγκριση με τα μοντέλα σε διακριτό χρόνο, έγκειται στην πολυπλοκότητα των μαθηματικών πράξεων και στη θεωρητική επιτήδευση.

Ανάλογα με το αντικείμενο κάθε μοντέλου, υπάρχουν οι κατηγορίες των μοντέλων για τις τιμές ομολογιών, των επιτοκίων και αυτών της καμπύλης απόδοσης. Ορισμένα μοντέλα για τη διάρθρωση των επιτοκίων περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά των τιμών των ομολογιών. Παρ’ όλα αυτά, δεν προτιμούντα επειδή τα αποτελέσματα που διεξάγουν, δεν βοηθούν στην πληρέστερη κατανόηση της διάρθρωσης των επιτοκίων. Κάποια μοντέλα ασχολούνται με τη στοχαστική εξέλιξη συγκεκριμένων επιτοκίων, κυρίως βραχυπρόθεσμων. Τέτοια μοντέλα είναι τα μοντέλα Vasicek, CIR κ.α. που θα εξετάσουμε παρακάτω. Όπως είδαμε σε προηγούμενες ενότητες, τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην υπόθεση ότι η μελλοντική εξέλιξη του επιτοκίου δεν εξαρτάται από την μέχρι τώρα πορεία του στο χρόνο, αλλά αποκλειστικά από την τρέχουσα τιμή του. Το πρόβλημα τιμολόγησης εκφράζεται με μία μερική διαφορική εξίσωση, όπως και είδαμε. Τέλος, κάποια μοντέλα προσεγγίζουν τη διάρθρωση επιτοκίου μέσα από το σύνολο των αποδόσεων όλων των μελλοντικών και προωθητικών επιτοκίων. Τα μοντέλα αυτά δεν προτιμούνται λόγω της ιδιαίτερης πολυπλοκότητάς τους.

Πολλά μοντέλα υποστηρίζουν πως η διάρθρωση επιτοκίων εξαρτάται μόνο από ένα παράγοντα, ενώ άλλα βασίζονται σε παραπάνω από ένα παράγοντα. Τα περισσότερα μοντέλα για ένα παράγοντα θεωρούν ότι καταλυτικό ρόλο για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίων παίζουν τα βραχυπρόθεσμα, στιγμιαία επιτόκια. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα μοντέλα Merton, Vasicek, CIR, Hull & White κ.α. Συνήθως, είναι προτιμότερο να οδηγούμαστε σε ένα μόνο παράγοντα από ότι σε πολλούς για περισσότερη απλούστευση και ευκολότερη κατανόηση. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η εξέλιξη των επιτοκίων κινείται με ένα τρόπο μόνο, αλλά κυρίως ότι μία πηγή αβεβαιότητας είναι αρκετή για την ερμηνεία αυτής της εξέλιξης.

Τέλος, σε θεωρητικό επίπεδο τα μοντέλα διαχωρίζονται σε αυτά που ικανοποιούν την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους και σε αυτά που απορρέουν από την ισορροπία στην αγορά. Στην πρώτη περίπτωση, βασική προϋπόθεση για την περιγραφή ενός μοντέλου και συνεπώς της στοχαστικής εξέλιξης των επιτοκίων είναι η τήρηση της αρχής του μη-βέβαιου κέρδους όπως έχει περιγραφεί και σε προηγούμενες ενότητες. Τέτοια μοντέλα είναι για παράδειγμα τα μοντέλα Vasicek, Dothan κ.α. Αντίθετα, τα μοντέλα ισορροπίας ξεκινούν από την περιγραφή της αγοράς και περιλαμβάνοντας τη χρησιμότητα του επένδυτη, υποθέτουν ισορροπία στην αγορά και διεξάγουν συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των επιτοκίων στο χρόνο, του πριμ κινδύνου και λοιπών τιμών χρεογράφων. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα μοντέλα Merton, CIR κ.α. Στην ουσία, ο διαχωρισμός είναι πολύ λεπτός, αφού για να είναι σε ισορροπία η αγορά, θα πρέπει να αποκλείονται κερδοσκοπικές ευκαιρίες και να ισχύει η αρχή του μη-βέβαιου κέρδους κατά την τιμολόγηση προϊόντων.

4.4 Το μοντέλο Merton

Συνοπτικά, μία ανασκόπηση των ιδιοτήτων του μοντέλου Merton μπορεί να βρεθεί στην εργασία των R.Gibson κ.α. (2001) "*Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature*". Σύμφωνα με το μοντέλο Merton, ο οποίος το εισήγαγε το 1973, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν τη στοχαστική διαδικασία:

$$dr_t = mdt + s\,dW_t,$$

όπου μ και σ είναι σταθερές ποσότητες και W_t είναι η διαδικασία Wienner. Δηλαδή ακολουθούν την κίνηση Brown με τάση. Έπίσης, για το μοντέλο Merton, το πριμ κινδύνου είναι σταθερό $\lambda_t = \lambda$.

Η λύση στην παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι:

$$r_t = r_s + mt + s\int_s^t dW_s \quad \text{για } t \geq s.$$

Συνεπώς, γνωρίζοντας την πορεία τους μέχρι τη χρονική στιγμή s, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την κανονική κατανομή και συγκεκριμένα:

$$r_t | F_s \sim N(r_s + (t-s)m, (t-s)s^{\,2}).$$

Όπως παρατηρούμε, δεν υπάρχουν περιορισμοί για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της κατανομής, οπότε τα επιτόκια μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Δηλαδή, το μοντέλο παρουσιάζει ασυνέπεια σε σχέση με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

Για την τιμολόγηση μιας ομολογίας $B(t,T)$, χρησιμοποιούμε την εξίσωση της διάρθρωσης επιτοκίων (*), αντικαθιστώντας όπου $\alpha(r_t, t) = \mu$, $b(r_t, t) = \sigma$ και $\lambda_t = \lambda$, δηλαδή:

$$\frac{\partial B}{\partial r}(m - l\,s) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}s^2 - r_t B = 0$$

με συνοριακή συνθήκη τη $B(T, T) = 1$. Η λύση της εξίσωσης θα είναι:

$$B(t,T) = \exp\left[-(T-t)r_t - \frac{(T-t)^2(m - l\,s)}{2} + \frac{(T-t)^3 s^2}{6}\right].$$

Συμπερασματικά, η τιμή της ομολογίας είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου λήξης T. Δηλαδή, όσο πιο μεγάλο χρονικό διάστημα αφορά η ομολογία, τόσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της. Αυτό όμως υποδηλώνει μία επιπλέον ασυνέπεια. Οι τιμές των ομολογιών με άπειρο χρόνο λήξης, θα αυξάνονται προς το άπειρο.

Σύμφωνα με το μοντέλο Merton, η διάρθρωση επιτοκίων θα είναι:

$$R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} = r_t + \frac{(T-t)(m - l\,s)}{2} - \frac{(T-t)^2 s^2}{6}, \qquad (4.3)$$

δηλαδή οι μεταβολές στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια εκφράζονται με παράλληλες κινήσεις στη διάρθρωση επιτοκίων. Επίσης, για τα επιτόκια με άπειρη διάρκεια μέχρι τη λήξη έχουμε:

$$R(t,\infty) \equiv \lim_{T\to\infty} R(t,T) = -\infty.$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (*4.3*) σε σχέση με το χρόνο λήξης T, έχουμε:

$$\frac{\partial R(t,T)}{\partial T} = \frac{(m - l\,s)}{2} - \frac{(T-t)s^2}{3}. \qquad (4.4)$$

Η σχέση (*4.4*) μας δίνει την κλίση της διάρθρωσης των επιτοκίων. Παρατηρούμε ότι αν $\mu > \lambda\sigma$, η διάρθρωση επιτοκίων παρουσιάζει καμπύλη σχεδόν επίπεδη με ελαφριά κύρτωση (*humped*), με μέγιστο το σημείο

$$\frac{3(m - l\,s)}{2s^2}.$$

Αν $\mu \leq \lambda\,\sigma$, η διάρθρωση επιτοκίων είναι φθίνουσα. Οπότε σε καμία περίπτωση η διάρθρωση επιτοκίων δεν έχει θετική κλίση.

Για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς $C(t)$ με χρόνο εξάσκησης T_C και τιμή εξάσκησης K, πάνω σε μία ομολογία με μηδενικό κίνδυνο και χωρίς κουπόνια κατά τη διάρκειά της από t έως T_B με $T_B \leq T_C$, έχουμε:

$$C(t) = B(t,T_B)N(d_1) - KB(t,T_C)N(d_1 - s_B^2),$$

όπου

$$d_1 = \frac{1}{s_B}\ln\left(\frac{B(t,T_B)}{KB(t,T_C)}\right) + \frac{s_B}{2}$$

$$s_B^2 = s^2(T_B - T_C)^2(T_C - t).$$

4.5 Το μοντέλο Vasicek

Όπως είδαμε και πιο πάνω, σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την επιστρεφόμενη στο μέσο στοχαστική διαδικασία

$$dr_t = k(q - r_t)dt + s\,dW_t,$$

η οποία είναι η επιστρεφόμενη στο μέσο διαδικασία με γενική μορφή

$$dr_t = k(q_t - r_t)dt + s r_t^b\,dW_t,$$

θέτοντας $\beta = 0$. Δηλαδή, τα επιτόκια ακολουθούν τη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Οπότε, όταν τα επιτόκια βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο από το θ, έχουν την τάση να μειώνονται και αντίστροφα όταν βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο από το θ, αυξάνονται. Επίσης, σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek, το πριμ κινδύνου λ είναι σταθερό.

Η λύση στην παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι η

$$r_t = q + (r_s - q)e^{-k(t-s)} + s_r\int_s^t e^{-k(t-s)}dW_u\,, \text{ για } t \geq s.$$

Συνεπώς, δεδομένης της πορείας τους μέχρι τη χρονική στιγμή s, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αυτό υποδηλώνει και το γεγονός ότι ο εκθέτης β είναι ίσος με το μηδέν. Έτσι,

$$r_t|F_s \sim N\left(q + (r_s - q)e^{-k(t-s)}, \frac{s_r^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})\right).$$

Το ότι τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια κατανέμονται κανονικά υποδηλώνει ότι μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές, γεγονός που είναι ασύμφωνο με την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

Στο βιβλίο του R. Rebonato "*Interest Rate Option Models*" (Wiley, 1998) μπορεί να βρει κανείς αναλυτικά τη διαδικασία για την τιμολόγηση των ομολογιών σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek. Παίρνουμε αρχικά την επιστρεφόμενη στο μέσο εξίσωση για τα επιτόκια και θεωρούμε

$$dr = k(q - r)dt + sr^b dW_t = m_r dt + s_r dW_t .$$

Η δυναμική συμπεριφορά στο χρόνο (*dynamics*) για την ομολογία $B(t, T)$, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{dB}{B} = m_B(r,t,T)dt + s_B(r,t,T)dW_t \qquad (4.5)$$

και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito, έχουμε αναλυτικά

$$\frac{dB}{B} = \frac{1}{B}\left[\frac{\partial B}{\partial r}m_r + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}s_r^2\right]dt + \frac{1}{B}\left[\frac{\partial B}{\partial r}s_r\right]dW_t$$

$$= \left[\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial r}k(q - r) + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}(sr^b)^2\right]dt + \left[\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial r}sr^b\right]dW_t . \qquad (4.6)$$

Συνεπώς δεχόμαστε ότι

$$s_B(r,t,T) = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial r}sr^b . \qquad (4.7)$$

Για το συντελεστή μ_B (r, t, T) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορισμού του πριμ κινδύνου $\lambda(r, t)$

$$m_B(r,t,T) = r + l(r,t)s_B(r,t,T) . \qquad (4.8)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας τη σχέση (*4.7*) στην (*4.8*), έχουμε

$$m_B(r,t,T) = r + l(r,t)\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial r}sr^b . \qquad (4.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (*4.9*) και (*4.6*) και εξισώνοντας, έχουμε

$$rB + l(r,t)\frac{\partial B}{\partial r}sr^b = \frac{\partial B}{\partial r}k(q - r) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}(sr^b)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{(sr^b)^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (k(q - r) - l(r,t)sr^b)\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0 . \qquad (4.10)$$

Η εξίσωση (*4.10*) δίνει την τιμολόγηση για την ομολογία $B(t, T)$. Για το μοντέλο Vasicek θέτουμε $\beta = 0$ και θεωρούμε το πριμ κινδύνου σταθερο, δηλαδή $\lambda(r, t) = \lambda$. Συνεπώς η σχέση (*4.10*) θα μετατραπεί ως εξής:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{s^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}+(k(q-r)-l\,s)\frac{\partial B}{\partial r}-rB=0\,.$$

Δεδομένης της γνωστής συνοριακής συνθήκης $B(t,\ T) = 1$ και συνυπολογίζοντας τη σχέση για τις ομολογίες

$$B(t,T)=E_t[e^{-\int_t^T r_s ds}],$$

η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$B(t,T)=a(t,T)e^{-b(t,T)r_t}, \qquad (4.11)$$

όπου

$$b(t,T)=\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}$$

$$a(t,T)=\exp\left[\frac{(b(t,T)-T+t)(k^2q-s^2/2)}{k^2}-\frac{s^2b(t,T)^2}{4k}\right].$$

Η διάρθρωση των επιτοκίων σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek εκφράζεται με τη σχέση

$$R(t,T)=-\frac{1}{T-t}\ln a(t,T)+\frac{1}{T-t}b(t,T)r_t\,.$$

Παρατηρούμε ότι αν είναι γνωστές οι παράμετροι *κ*, *θ* και *σ*, η διάρθρωση επιτοκίων καθορίζεται από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια r_t. Μάλιστα, η διάρθρωση επιτοκίων είναι γραμμική συνάρτηση των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων r_t. Εντούτοις, όπως αναφέρεται στην εργασία των R.Gibson κ.α. (2001) αλλά και σε πολλά βιβλία που αναφέρονται σε μοντέλα για τη διάρθρωση των επιτοκίων όπως το “*Implementing Derivative Models*” των L. Clewlow και C. Strickland (Wiley, 1998), για τα επιτόκια με άπειρη διάρκεια μέχρι τη λήξη, παρατηρούμε ότι δεν εξαρτώνται από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Πιο συγκεκριμένα:

$$R(t,\infty)\equiv\lim_{T\to\infty}R(t,T)=q-\frac{l\,s}{k}-\frac{s^2}{2k^2}\,.$$

Για την τιμολόγηση δικαιωμάτων αγοράς $C(t)$ και πώλησης $P(t)$ με τιμή εξάσκησης K και χρόνο εξάσκησης T_C και T_P αντίστοιχα, ομολογιών με μηδενικό κίνδυνο και χωρίς άλλα κουπόνια κατά τη διάρκειά της από t εώς T_B, έχουμε τις σχέσεις:

$$C(t)=B(t,T_B)N(d_1)-KB(t,T_C)N(d_1-s_B)$$
$$P(t)=KB(t,T_P)N(s_B-d_1)-B(t,T_B)N(-d_1),$$

όπου

$$d_1 = \frac{1}{s_B} \ln\left(\frac{B(t, T_B)}{KB(t, T_C)} \right) + \frac{s_B}{2}$$

$$s_B^2 = \frac{1}{2} \frac{s^2}{k^3} (1 - e^{-2k(T_C - t)})(1 - e^{-k(T_B - T_C)})^2 .$$

Τέλος, μπορούμε να τιμολογήσουμε τα παραπάνω δικαιώματα και για ομολογίες οι οποίες αποφέρουν εισόδημα σε μορφή χρηματοροών έστω c_1, c_2,…, c_n τις χρονικές στιγμές T_1, T_2,...,T_n. Εξετάζουμε την περίπτωση του δικαιώματος αγοράς μίας τέτοιας ομολογίας. Έστω r^* το επιτόκιο πάνω στο οποίο εξισώνεται η τιμή της ομολογίας με την τιμή εξάσκησης K του δικαιώματος, και $B'(T_C, T_i)$ η τιμή μίας ομολογίας χωρίς κουπόνια (που πληρώνει € 1 το χρόνο T_i, $i = 1,\ldots,n$) το χρόνο T_C λήξης του δικαιώματος όταν $r_T = r^*$. Το χρόνο T_C η εξόφληση του δικαιώματος θα είναι

$$\max\left[0, \sum_{i=1}^{n} c_i B(T_C, T_i) - K \right].$$

Το δικαίωμα θα ασκηθεί στην περίπτωση που $r < r^*$. Επίσης η ομολογία χωρίς κουπόνια που λήγει το χρόνο T_i αξίζει περισσότερο από την ποσότητα $c_i B'(T_C, T_i)$ το χρόνο T_C στην περίπτωση που $r < r^*$. Έτσι, η εξόφληση του δικαιώματος υπολογίζεται

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \max[0, B(T_C, T_i) - B'(T_C, T_i)] .$$

Δηλαδή δεν είναι τίποτα άλλο από το άθροισμα n δικαιωμάτων αγοράς ομολογιών χωρίς κουπόνια.

Παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για περισσότερη κατανόηση. Έστω για το μοντέλο Vasicek ότι $\kappa = 0{,}20$, $\theta = 0{,}15$ και $\sigma = 0{,}03$ με αρχική τιμή για το ετήσιο επιτόκιο να είναι 15%. Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K = € 81 και χρόνο εξάσκησης $T_C = 3$ έτη, πάνω σε μία ομολογία που θα λήξει σε $T_B = 6$ έτη. Η ομολογία πληρώνει κουπόνι αξίας € 10 κάθε έτος και κεφάλαιο € 100 κατά τη λήξη. Στο τέλος των τριών ετών, η ομολογία μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα τριών ομολογιών που δεν πληρώνουν κουπόνι. Αν το επιτόκιο τη στιγμή εκείνη είναι r, η αξία της ομολογίας θα είναι:

$$10a(3,4)e^{-b(3,4)r} + 10a(3,5)e^{-b(3,5)r} + 110a(3,6)e^{-b(3,6)r} .$$

Υπολογίζοντας τις τιμές $\alpha(t, T)$ και $b(t, T)$ έχουμε:

$$10 \cdot 0{,}9862 e^{-0{,}9063 r} + 10 \cdot 0{,}9495 e^{-1{,}6484 r} + 110 \cdot 0{,}8968 e^{2{,}2559 r} .$$

Η τιμή του επιτοκίου r^* για το οποίο εξισώνεται η τιμή της ομολογίας με την τιμή εξάσκησης K του δικαιώματος, υπολογίζεται $r^* = 0{,}18096$. Με το επιτόκιο r^*, οι αξίες των τριών ομολογιών με μηδενικό κουπόνι που απαρτίζουν την ομολογία που φέρει κουπόνι υπολογίζονται 8,3703, 7,0461 και 65,5839. Συνεπώς, το δικαίωμα αγοράς της ομολογίας που φέρει κουπόνι είναι το άθροισμα των παρακάτω τριών δικαιωμάτων αγοράς ομολογιών με μηδενικό κουπόνι:

1. Ένα τριετές δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 8,3703 σε μία ομολογία με μηδενικό κουπόνι που πληρώνει € 10 και λήγει σε 4 έτη.
2. Ένα τριετές δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 7,0461 σε μία ομολογία με μηδενικό κουπόνι που πληρώνει € 10 και λήγει σε 5 έτη.
3. Ένα τριετές δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 65,5839 σε μία ομολογία με μηδενικό κουπόνι που πληρώνει € 110 και λήγει σε 6 έτη.

Για τον υπολογισμό της αξίας του τελευταίου δικαιώματος, υπολογίζουμε αρχικά από τη σχέση (*4.11*) τις τιμές των ομολογιών $B(0,3) = 0{,}6393$ και $B(0,\ 6) = 0{,}4125$. Επίσης, υπολογίζουμε για την ομολογία $\sigma_B = 0{,}0895$, $d_1 = 0{,}9275$ με τιμή εξάσκησης $K = 65{,}5839$ και ποσό € 110. Έτσι, η αξία του τρίτου δικαιώματος θα είναι $C_3 = 3{,}8492$. Παρομοίως υπολογίζονται τα δύο πρώτα δικαιώματα αγοράς $C_1 = 0{,}1884$ και $C_2 = 0{,}2959$. Έτσι η τιμή του εν λόγω δικαιώματος θα είναι

$$C = 0{,}1884 + 0{,}2959 + 3{,}8492 = 4{,}3335\,.$$

4.6 Το μοντέλο Dothan

Το μοντέλο που εισήγαγε ο U. L. Dothan το 1978 βασίζεται στο μοντέλο του Vasicek και λεπτομέρειες για τις ιδιότητες που παρουσιάζει μπορεί να βρει κανείς στην εργασία των R.Gibson κ.α. (2001), αλλά και στο βιβλίο του S. Neftci "*An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*" (Academic Press, 2000). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν τη Γεωμετρική κίνηση Brown:

$$dr_t = s r_t dW_t$$

και πριμ κινδύνου $\lambda = 0$. Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι παρόμοιο με αυτό της θεωρίας των προσδοκιών: τα αναμενόμενα επιτόκια ισούνται με τα στιγμιαία βραχυπρόθεσμα επιτόκια.

Δεδομένης της πορείας που σημειώνουν μέχρι τη χρονική στιγμή $s \leq t$, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν τη Λογαριθμοκανονική κατανομή:

$$r_t \big| F_s \sim Ln(r_s, e^{s^2(t-s)} - 1)$$

και συνεπώς δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές. Η διάρθρωση επιτοκίων σύμφωνα με το μοντέλο Dothan είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου μέχρι τη λήξη. Επίσης είναι αύξουσα, κοίλη συνάρτηση των επιτοκίων r_t, ενώ φθίνουσα και κυρτή της διακύμανσης σ^2. Επιπλέον, έχει δειχθεί ότι για το μοντέλο του Dothan ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} r_t = 0,$$

με αποτέλεσμα να είναι ακατάλληλο να εκφράσει τη μακροχρόνια συμπεριφορά των επιτοκίων, όπως επίσης να τιμολογήσει ομολογίες ή παράγωγα προϊόντα.

4.7 Το μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross

Η πλήρης ανάλυση του μοντέλου των Cox-Ingersoll-Ross (CIR) βρίσκεται στις εργασίες τους "*A re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates*" (1981), "*An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*" (1985) και "*A Theory of the Term Structure of Interest Rates*" (1985). Μια συνοπτική εικόνα του μοντέλου μπορεί κανείς να βρει στην εργασία των R.Gibson κ.α. (2001) καθώς επίσης και σε βιβλία για την ανάλυση της διάρθρωσης των επιτοκίων όπως το "*Interest Rate Option Models*" (Wiley, 1998) του R. Rebonato.

Σύμφωνα με το μοντέλο CIR, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν τη στοχαστική διαδικασία τετραγωνικής ρίζας (*square root process*):

$$dr_t = k(q - r)dt + s\sqrt{r_t}\,dW_t. \qquad (4.12)$$

Δηλαδή είναι η επιστρεφόμενη στο μέσο στοχαστική διαδικασία με τη γενική μορφή

$$dr_t = k(q_t - r_t)dt + s r_t^b\, dW_t,$$

όπου θέτουμε β = ½. Επίσης, το πριμ κινδύνου είναι $l_t = l\sqrt{r_t}/s$. Παρατηρούμε ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο τείνει να μηδενιστεί όταν $\sigma^2 > 2\kappa\theta$, ενώ στην περίπτωση που $\sigma^2 \leq 2\kappa\theta$ τα επιτόκια τείνουν να αυξάνονται. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση αποκλείονται τα αρνητικά επιτόκια.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Cox-Ingersoll-Ross, το μοντέλο έχει τις εξής ιδιότητες:

- Αποκλείονται τα αρνητικά επιτόκια.
- Αν το επιτόκιο τείνει στο μηδέν, μπορεί κατά συνέπεια να γίνει θετικό.
- Η απόλυτη διακύμανση των επιτοκίων αυξάνεται όταν το επιτόκιο αυξάνεται.
- Υπάρχει ασυμπτωτική κατανομή για τα επιτόκια.

Η λύση στη στοχαστική διαφορική εξίσωση (*4.12*) είναι η παρακάτω

$$r_t = q + (r_s - q)e^{-k(t-s)} + s e^{-k(t-s)} \int_s^t e^{k(u-s)} \sqrt{r_u}\, dW_u \,, \quad \text{για } t \geq s.$$

Δεδομένου της πορείας τους μέχρι τη χρονική στιγμή s, τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την παρακάτω κατανομή:

$$f(r_t | r_s) = c e^{-u-v} \left(\frac{u}{v} \right)^{q/2} I_q \left[2\sqrt{uv} \right],$$

όπου

$$c = \frac{2k}{s^2 (1 - e^{-k(s-t)})},$$
$$u = c r_t e^{-k(s-t)},$$
$$v = c r_s,$$
$$q = \frac{2kq}{s^2} - 1$$

και η $I_q(\cdot)$ είναι η συνάρτηση *Bessel* πρώτου τύπου και τάξης q. Έτσι, στην ουσία τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την χ^2 κατανομη με $2q$+2 βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο $2u$:

$$r_t | F_s \sim c^2 (2cr_s, 2q - 2, 2u).$$

Συνεπώς, η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής υπολογίζονται ως εξής:

$$E(r_s | r_t) = q + (r_t - q)e^{-k(s-t)}$$
$$Var(r_s | r_t) = r_t \left(\frac{s^2}{k} \right) (e^{-k(s-t)} - e^{-2k(s-t)}) + q \left(\frac{s^2}{2k} \right) (1 - e^{-k(s-t)})^2.$$

Παρατηρούμε ότι όταν το κ τείνει προς το άπειρο, η μέση τιμή τείνει προς το θ, ενώ η διακύμανση τείνει προς το μηδέν. Από την άλλη, όταν το κ τείνει προς το μηδέν, η μέση τιμή τείνει στην τρέχουσα τιμή των επιτοκίων και η διακύμανση τείνει στην ποσότητα $s^2 r_t (s - t)$.

Για την τιμολόγηση ομολογιών $B(t, T)$ σύμφωνα με το μοντέλο CIR, ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με αύτην που περιγράφηκε για το μοντέλο Vasicek. Έτσι, χρησιμοποιούμε τη σχέση (*4.10*) και θέτουμε β = ½ και $l_t = l\sqrt{r_t}/s$ και οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\frac{s^2 r}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + k(q-r)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial t} - l\,r\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0,$$

με συνοριακή συνθήκη $B(T, T) = 1$. Άρα οι τιμές των ομολογιών εξαρτώνται μόνο από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια *r*. Η λύση στην παραπάνω στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση είναι:

$$B(t,T) = a(t,T)e^{-b(t,T)r}$$

όπου

$$a(t,T) = \left[\frac{2ge^{(k+l+g)(T-t)/2}}{(g+k+l)(e^{g(T-t)}-1)+2g}\right]^{2kq/s^2},$$

$$b(t,T) = \frac{2(e^{g(T-t)}-1)}{(g+k+l)(e^{g(T-t)}-1)+2g},$$

$$g = \sqrt{(k+l)^2 + 2s^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η τιμή της ομολογίας είναι κυρτή φθίνουσα συνάρτηση των επιτοκίων και αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Επίσης είναι κοίλη αύξουσα συνάρτηση του πριμ κινδύνου λ καθώς επίσης της διακύμανσης των επιτοκίων σ^2. Δηλαδή, μεγαλύτερες τιμές για το λ ή/και το σ^2 υποδηλώνουν μεγαλύτερη αβεβαιότητα για το μέλλον, γεγονός που εκφράζεται με υψηλότερη τιμή για την ομολογία.

Η διάρθρωση των επιτοκίων περιγράφεται με τη σχέση:

$$R(t,T) = \frac{rb(t,T) - \ln a(t,T)}{T-t}$$

και η διάρθρωση επιτοκίων για χρόνο λήξης που τείνει στο άπειρο θα είναι

$$R(t,\infty) = \lim_{T\to\infty} R(t,\infty) = \frac{2kq}{g+k+l} \qquad (4.13)$$

Όταν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια βρίσκονται σε χαμηλότερα επίπεδα από αυτό της σχέσης (*4.13*), η διάρθρωση των επιτοκίων ανέρχεται. Αντίθετα, όταν βρίσκονται σε χαμηλότερα επίπεδα, η διάρθρωση των επιτοκίων κατέρχεται.

Για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς $C(t)$ με χρόνο λήξης T_C και τιμή εξάσκησης K, πάνω σε μία ομολογία $B(t, T_B)$ με χρόνο λήξης T_B, όπου $T_B \geq T_C \geq t$, σύμφωνα με το μοντέλο CIR χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$C(t) = B(t,T_B)c^2\left(2r^*[f+y+B(t,T_B-T_C)];\frac{4kq}{s^2},\frac{2f^2re^{g(T-t)}}{f+y+B(t,T_B-T_C)}\right)$$

$$-KB(t,T_C)c^2\left(2r^*[f+y];\frac{4kq}{s^2},\frac{2f^2re^{g(T-t)}}{f+y}\right),$$

όπου

$$g = \sqrt{(k+l)^2+2s^2},$$

$$f = \frac{2g}{s^2(e^{g(T-t)}-1)},$$

$$y = (k+l+g)/s^2,$$

$$r^* = \frac{\ln\left(\frac{a(t,T_B-T_C)}{K}\right)}{b(t,T_B-T_C)}.$$

Στην ουσία, το επιτόκιο r^* είναι το επιτόκιο για το οποίο θα ασκηθεί το δικαίωμα, δηλαδή:

$$K = B_{r^*}(t,T_B-T_C).$$

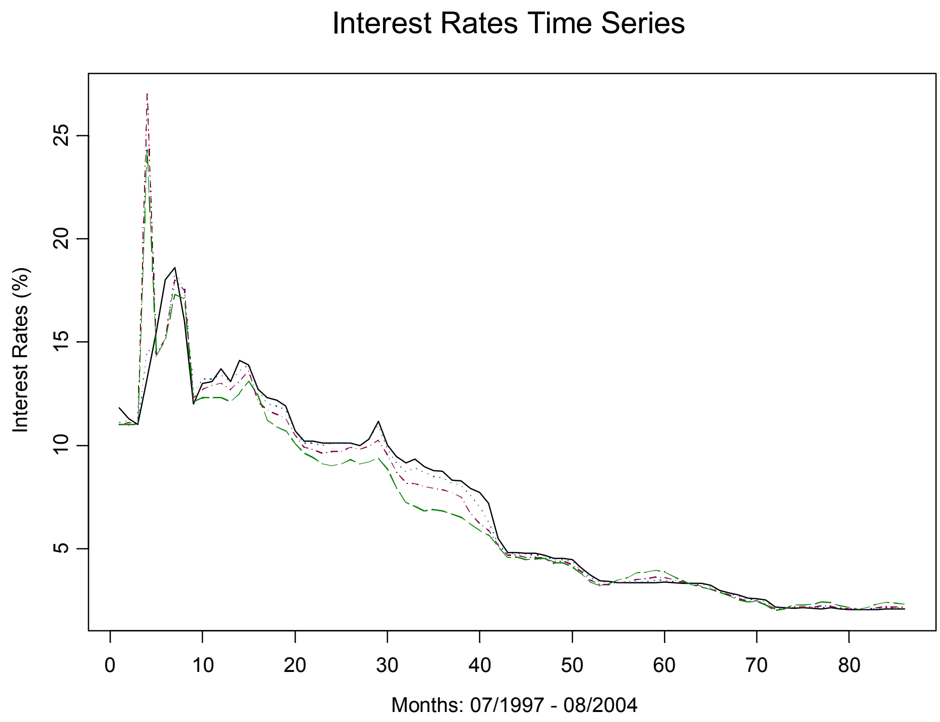
5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΟΚΙΩΝ

5.1 Εισαγωγή

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναπτύχθηκε εκτενώς η υπόθεση των προσδοκιών με τη θεωρία που πλαισιώνει την έννοια της διάρθρωσης των επιτοκίων. Οι ιδιότητες και οι προϋποθέσεις που απαιτεί ως θεωρία, συγκρίθηκαν με τις απαιτήσεις άλλων θεωριών, όπως αυτή του πριμ ρευστότητας, της τμηματικής θεωρίας και της θεωρίας των προτιμούμενων συνηθειών. Σε πρακτικό επίπεδο, έχουν γίνει αρκετές μελέτες για να ελεγχθεί η υπόθεση των προσδοκιών σε εμπειρικά δεδομένα. Στην ξένη βιβλιογραφία, υπάρχουν διαθέσιμες πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις και μεθοδολογίες ελέγχου της υπόθεσης των προσδοκιών. Στην εργασία αυτή γίνεται προσπάθεια ελέγχου με βάση τρεις συγκεκριμένες μεθόδους, που βασίζονται κυρίως στη δημιουργία ενός γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης και στην εκτίμηση των παραμέτρων του.

5.1.1 Τα δεδομένα

Τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει για την πραγματοποίηση της ανάλυσής μας, αφορούν επιτόκια καταθέσεων 1, 3, 6 και 12 μηνών, από τον Ιούλιο του 1997 μέχρι και τον Αύγουστο του 2004 (86 παρατηρήσεις). Μέχρι και το Δεκέμβριο του 2000, αφορούν διατραπεζικά επιτόκια (ATHIBOR) και από τον Ιανουάριο του 2001, διατραπεζικά επιτόκια προσφοράς στη ζώνη του ευρώ (EURIBOR). Πηγή εύρεσης των δεδομένων αποτελούν τα Στατιστικά Δελτία Οικονομικής Συγκυρίας που διατίθενται από την Τράπεζα της Ελλάδος. Αναλυτικά οι παρατηρήσεις των επιτοκίων δίνονται για κάθε περίοδο στο παράρτημα της εργασίας. Ακολουθεί το χρονοδιάγραμμα των επιτοκίων και των τεσσάρων διαρκειών:



Διάγραμμα *5.1*

Με τη μαύρη στέρεη γραμμή απεικονίζονται τα μηνιαία επιτόκια, με τη γαλάζια διακεκομμένη τα επιτόκια 3 μηνών, με τη μοβ διακεκομμένη τα επιτόκια 6 μηνών και με την πράσινη διακεκομμένη τα επιτόκια 6 μηνών. Όπως παρατηρούμε, τα επιτόκια και των τεσσάρων διαρκειών διαγράφουν σχεδόν παράλληλες πορείες, δηλαδή έχουν την ίδια περίπου συμπεριφορά μέσα στο χρόνο. Λίγο πριν τη δέκατη παρατήρηση (Ιανουάριος 1998), σημειώνεται μία έντονη άνοδος του επιπέδου όλων των επιτοκίων. Έπειτα, παρατηρείται μία σταθερά καθοδική πορεία για να καταλήξουν τα επιτόκια όλων των διαρκειών περίπου στο ίδιο επίπεδο της τάξης του 2 – 2,5%, τον Αύγουστο του 2004.

5.2 Έλεγχος της Υπόθεσης Προσδοκιών με χρήση Προωθητικών Επιτοκίων

Στην εργασία που δημοσίευσαν οι T.K.Y. Lee και Y.K. Tse (1991) "*Term Structure of Interest Rates in the Singapore Asian Dollar Market*", γίνεται ανάλυση διατραπεζικών επιτοκίων της Ασιατικής Αγοράς Δολλαρίων της Σιγκαπούρης, διάρκειας 1 και 3 μηνών και πραγματοποιείται έλεγχος για να διαπιστωθεί αν ισχύει η θεωρία των προσδοκιών, χρησιμοποιώντας τα προωθητικά επιτόκια της αγοράς. Βασιζόμενοι με τη σειρά τους στη προσέγγιση των Hansen και Hodrick (1980,1983), οι Lee και Tse, εφαρμόζουν ένα γραμμικό μοντέλο χρησιμοποιώντας ως εξαρτημένη μεταβλητή το σφάλμα εκτίμησης των μελλοντικών στιγμιαίων επιτοκίων, όπως υπολογίζεται με βάση τα προωθητικά επιτόκια. Ως ερμηνευτική μεταβλητή, όπως θα δούμε, θέτουν το πριμ των προωθητικών επιτοκίων (*forward premium*). Έπειτα, κάνουν ανάλυση χρησιμοποιώντας οικονομετρικές μεθόδους, όπως τα μοντέλα (ARCH), και τέλος απορρίπτουν την υπόθεση των προσδοκιών υπέρ της τμηματικής θεωρίας και της θεωρίας των προτιμούμενων συνηθειών.

Θέτοντας ως r_t και R_t τα επιτόκια διάρκειας 1 και 3 μηνών αντίστοιχα, οι Lee και Tse ορίζουν τα προωθητικά επιτόκια ως εξής:

$$f_t = (1+R_t)/(1+r_t) - 1 .$$

Επίσης, θέτοντας Φ_t την πληροφορία που είναι διαθέσιμη για την πορεία των επιτοκίων ως το χρόνο t, ορίζουν το πριμ διάρκειας:

$$T_t = f_t - E\left(r_{t+1} \middle| \Phi_t\right).$$

Επειδή η εκτίμηση $E\left(r_{t+1} \middle| \Phi_t\right)$ στην παραπάνω σχέση δεν υπολογίζεται άμεσα, δεν μπορεί να εφαρμοστεί ένα υπόδειγμα για το T_t. Παρ' όλα αυτά, αν χρησιμοποιηθεί η πληροφορία αυτή ορθολογικά, η εκτίμηση μπορεί να αντικατασταθεί με τα μελλοντικά μηνιαία επιτόκια.

Το σφάλμα εκτίμησης των μελλοντικών στιγμιαίων επιτοκίων ορίζεται ως:

$$y_t = r_{t+1} - f_t$$

και χρησιμοποιείται ως εξαρτημένη μεταβλητή στο παρακάτω γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης:

$$y_t = z_t' b + u_t , \tag{5.1}$$

όπου z_t είναι το διάνυσμα των ερμηνευτικών μεταβλητών και β το διάνυσμα των παραμέτρων του μοντέλου. Ως ερμηνευτική μεταβλητή, οι Lee και Tse επιλέγουν το πριμ των προωθητικών επιτοκίων:

$$x_t = f_t - r_t .$$

Επειδή η μεταβλητή x_t μπορεί να πάρει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές, οι Lee και Tse ορίζουν επίσης δύο ψευδομεταβλητές d_{1t} και d_{2t} για τις οποίες

$$d_{1t} = \begin{cases} 1 & an \quad x_t > 0 \\ 0 & an \quad x_t \leq 0 \end{cases}$$

και $d_{2t} = 1 - d_{1t}$. Οπότε, το γραμμικό μοντέλο (*4.1*) παίρνει τη μορφή:

$$y_t = b_0 + b_1 x_t d_{1t} + b_2 x_t d_{2t} + u_t .$$

5.2.1 Εφαρμογή στα δεδομένα

Παίρνοντας τα επιτόκια καταθέσεων διάρκειας 1 και 3 μηνών που έχουμε στη διάθεση μας για τα ελληνικά δεδομένα, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή $x_t = f_t - r_t$ παίρνει αποκλειστικά αρνητικές τιμές. Συνεπώς, είναι περιττή η χρήση των ψευδομεταβλητών d_{1t} και d_{2t}. Το γραμμικό μοντέλο που θα εκτιμήσουμε είναι:

$$y_t = b_0 + b_1 x_t + u_t. \tag{5.2}$$

Η σχετική εκτίμηση πραγματοποιείται με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου *S-PLUS*:

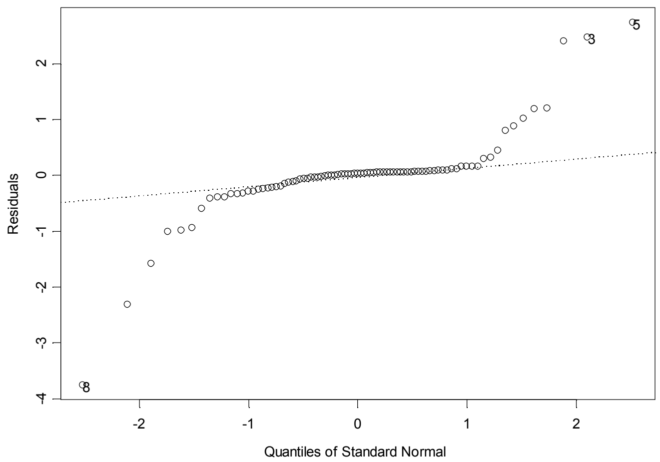
```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = yt ~ 1 + xt, data = leetsedata, na.action
        = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept)         xt
 -0.01125989 -0.9855155

Degrees of freedom: 85 total; 83 residual
1 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 0.7907818

Call: lm(formula = yt ~ 1 + xt, data = leetsedata, na.action
        = na.exclude)
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q   Max
 -3.758 -0.1513 0.02976 0.07103 2.737

Coefficients:
               Value Std. Error  t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.0113   0.1601    -0.0703   0.9441
         xt  -0.9855   0.0190   -51.8970   0.0000

Residual standard error: 0.7908 on 83 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9701
F-statistic: 2693 on 1 and 83 degrees of freedom, the p-value
is 0
1 observations deleted due to missing values

Correlation of Coefficients:
   (Intercept)
xt 0.8443

Analysis of Variance Table

Response: yt

Terms added sequentially (first to last)
          Df Sum of Sq  Mean Sq  F Value Pr(F)
       xt  1  1684.219 1684.219 2693.303     0
Residuals 83    51.903    0.625
```

Από την παραπάνω ανάλυση εκτιμούμε τις παραμέτρους του γραμμικού μοντέλου ως εξής:

$$\hat{b}_0 = -0{,}0113$$
$$\hat{b}_1 = -0{,}9855.$$

Το *p-value* για την εκτίμηση της παραμέτρου β_0 είναι 0,9441. Δηλαδή, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση ότι H_0: $\beta_0 = 0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\beta_0 \neq 0$. Επίσης, για την παράμετρο β_1, το αντίστοιχο *p-value* είναι μηδενικό, που σημαίνει ότι απορρίπτουμε την υπόθεση H_0: $\beta_1 = 0$ υπέρ της εναλλακτικής H_1: $\beta_1 \neq 0$. Συνεπώς, δεχόμαστε ότι η μεταβλητή $x_t = f_t - r_t$ επηρεάζει την εξαρτημένη μεταβλητή $y_t = r_{t+1} - f_t$.

Για να είναι συνεπείς και αξιόπιστες οι εκτιμήσεις που κάναμε, θα πρέπει να ελέγξουμε τα σφάλματα ως προς την κανονικότητα και την ανεξαρτησία τους. Με βάση τον διαγραμματικό έλεγχο *Q-Q Plot* (Διάγραμμα *5.2*), μπορούμε να ελέγξουμε αν τα σφάλματα προσαρμόζονται στην κανονική κατανομή:



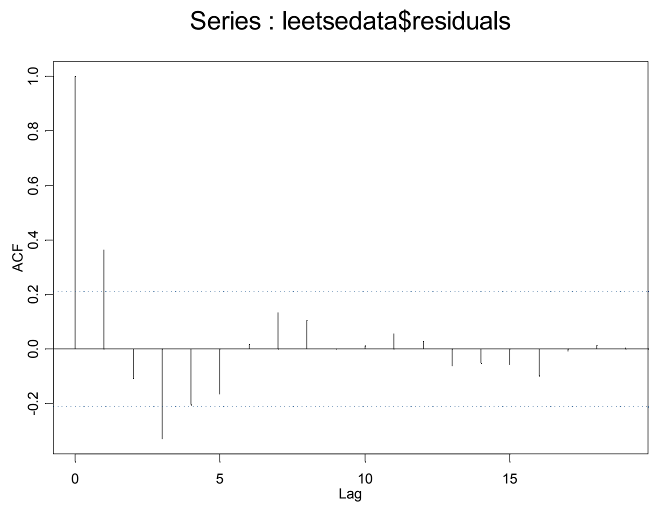
Διάγραμμα *5.2*

Από το Διάγραμμα *5.2*, παρατηρούμε ότι τα σημεία των σφαλμάτων, απέχουν κατά πολύ από την ευθεία των κανονικών δεδομένων, ιδίως στην αριστερή και δεξιά ουρά. Συνεπώς δεν μπορούμε να δεχτούμε την υπόθεση ότι τα σφάλματα προέρχονται από την κανονική κατανομή. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον απαραμετρικό έλεγχο Kolmogorov-Smirnov. Με βάση το στατιστικό πακέτο *S-PLUS* θα έχουμε:

```
One sample Kolmogorov-Smirnov Test of Composite
Normality

data:  residuals in leetsedata
ks = 0.2904, p-value = 0
alternative hypothesis:
  True cdf is not the normal distn. with estimated
parameters
sample estimates:
     mean of x standard deviation of x
 4.212317e-017               0.7860607
```

Έτσι, επειδή το *p-value* του ελέγχου είναι μηδενικό, απορρίπτουμε την υπόθεση της κανονικότητας των σφαλμάτων.

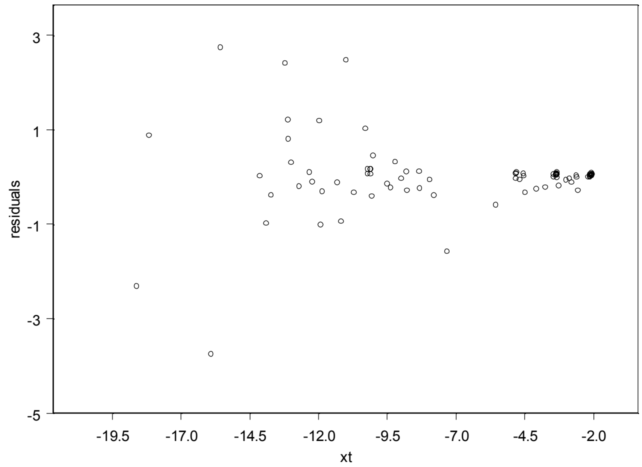
Για να ελέγξουμε την αυτοσυσχέτιση των σφαλμάτων, παίρνουμε το διάγραμμα των 20 πρώτων αυτοσυσχετίσεων (Διάγραμμα *5.3*):



Διάγραμμα *5.3*

Από το Διάγραμμα *5.3*, παρατηρούμε ότι οι αυτοσυσχετίσεις των σφαλμάτων είναι σε γενικές γραμμές στατιστικά ασήμαντες. Οπότε δεχόμαστε την υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα.

Επίσης, μπορούμε να πάρουμε το διάγραμμα διασποράς των σφαλμάτων (Διάγραμμα *5.4*), για να ελέγξουμε τη γενική συμπεριφορά των σφαλμάτων.



Διάγραμμα *5.4*

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει ισχυρή ένδειξη ετεροσκεδαστικότητας, αφού η διασπορά των σφαλμάτων μειώνεται σημαντικά καθώς αυξάνεται η μεταβλητή x_t. Για μικρές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, τα σημεία καταλαμβάνουν περισσότερο χώρο στο διάγραμμα, ενώ καθώς αυξάνεται η μεταβλητή, τα σημεία συσπειρώνονται γύρω από το μηδέν.

Έτσι, λόγω της μη-κανονικότητας των σφαλμάτων και της ετεροσκεδαστικότητας τους, οι εκτιμήσεις του γραμμικού μοντέλου (*5.2*) είναι ανακριβείς. Για την καταπολέμιση των προαναφερθέντων προβλημάτων θα πρέπει να γίνει ανάλυση με βάση ανεπτυγμένες οικονομετρικές μεθόδους όπως το εκτεταμένο μοντέλο ARCH-M, που χρησιμοποιούν οι Lee και Tse στην εργασία τους. Το οικονομετρικό αυτό μοντέλο επιτρέπει αυτοσυσχέτιση και ετεροσκεδαστικότητα στα σφάλματα. Μια τέτοια ανάλυση όμως, θα ξέφευγε από το σκοπό της παρούσας εργασίας.

5.3 Έλεγχος Παλινδρόμησης των Μακροπρόθεσμων Επιτοκίων

Μία εναλλακτική προσέγγιση για τον έλεγχο της υπόθεσης των προσδοκιών παρουσιάστηκε στην εργασία του P. Schotman (1997) "*Small sample properties of the regression test of the expectations model of the term structure*". Σύμφωνα με αυτήν, μπορούμε να ελέγξουμε αν ισχύει η υπόθεση των προσδοκιών για τα δεδομένα μας με βάση ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Για να ορίσει το μοντέλο αυτό, ο Schotman βασίστηκε στη γραμμική εκδοχή του μοντέλου των προσδοκιών του Shiller (1979):

$$R_t = (1+d)\sum_{i=0}^{\infty} d^i E_t[r_{t+i}] + c, \qquad (5.3)$$

όπου R_t είναι στην ουσία το μακροπρόθεσμο επιτόκιο, r_t το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, δ = $(1/1+\rho)$ είναι ένας παράγοντας προεξόφλησης για τον οποίο $0 < \delta < 1$, και c είναι ένα σταθερό πριμ κινδύνου. Από τη σχέση (*5.3*) προκύπτει ότι:

$$E_t[\Delta R_{t+1}] = r(S_t - c), \qquad (5.4)$$

όπου $S_t = (R_t - r_t)$ αποτελεί το εύρος μεταξύ μακροπρόθεσμου και βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Αν οι προσδοκίες είναι ορθολογικές, η ισότητα (*5.4*) έχει ως συνέπεια το παρακάτω μοντέλο παλινδρόμησης:

$$\Delta R_{t+1} = a + bS_t + n_{t+1}. \qquad (5.5)$$

Ελέγχουμε δηλαδή αν το εύρος μεταξύ μακροπρόθεσμου και βραχυπρόθεσμου επιτοκίου δίνει πληροφορίες για την πορεία των μακροπρόθεσμων επιτοκίων. Στο γραμμικό μοντέλο (*5.5*), θα πρέπει να ισχύει $\alpha < 0$ και $b > 0$, αφού $\rho > 0$ και $c > 0$. Παρ'όλα αυτά, σύμφωνα με εμπειρικές αναλύσεις που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν (Shiller κ.α. (1983), Mankiw (1986), Campbell και Shiller (1991)), έχει δειχθεί ότι η μεταβολή στα μακροπρόθεσμα επιτόκια τείνει να είναι αντίθετη με αυτή που προβλέπει η θεωρία, δηλαδή $b < 0$. Η αρνητική τιμή όμως του b, σύμφωνα με τη μελέτη του Mankiw, δεν είναι σχεδόν ποτέ στατιστικά σημαντική.

5.3.1 Ιδιότητες των Χρονοσειρών Βραχυπρόθεσμων και Μακροπρόθεσμων Επιτοκίων

Ο Schotman θεωρεί ότι τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την παρακάτω γενική διαδικασία:

$$\Delta r_t = c(L)e_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_{t-i}\ , \qquad (5.6)$$

όπου L είναι ο τελεστής υστέρησης, c_i είναι παράμετροι, και ε_t είναι ασυσχέτιστα σφάλματα με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (*5.6*) και (*5.3*), υπολογίζουμε το εύρος των επιτοκίων ως εξής:

$$S_t = R_t - r_t = \sum_{i=1}^{\infty} d^i E_t[\Delta r_{t+i}], \qquad (5.7)$$

όπου οι προβλέψεις για τα Δr_{t+i} υπολογίζονται από τη σχέση (*5.6*) ως:

$$E_t[\Delta r_{t+i}] = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j+i}\ . \qquad (5.8)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (*5.8*) στη σχέση (*5.7*), παίρνουμε την έκφραση του εύρους ως χρονοσειρά:

$$S_t = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d^i c_{i+j} e_{t-j} \,. \tag{5.9}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (*5.9*) για το εύρος και μέσα από τη σχέση (*5.6*), έχουμε για τα μακροπρόθεσμα επιτόκια:

$$\Delta R_t = c(d)e_t + (1+d)\sum_{j=1}^{\infty} c_j(d)e_{t-j} = g(L)e_t \,, \tag{5.10}$$

όπου $c_j(d) = \sum_{i=0}^{\infty} d^i c_{j+i}$ και $g(L)$ είναι συνάρτηση του $c(L)$. Σε πρακτικό επίπεδο, παρόμοια δυναμική συμπεριφορά παρουσιάζει το μοντέλο ARIMA (1,1,1):

$$\Delta r_t = q\Delta r_{t-1} + f e_{t-1} + e_t \,. \tag{5.11}$$

Το κομμάτι του Κινητού Μέσου παρίσταται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= q + f \\ c_j &= qc_{j-1} \,, \quad j > 1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Χρησιμοποιώντας έπειτα τις σχέσεις (*5.9*) και (*5.12*), μπορούμε να εκφράσουμε το εύρος ως μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτου βαθμού AR(1):

$$S_t = qS_{t-1} + \frac{d(q+f)}{1-dq} e_t \,, \tag{5.13}$$

ενώ από τη σχέση (*5.10*), μπορούμε να εκφράσουμε την πορεία των μακροπρόθεσμων επιτοκίων ως μία διαδικασία ARIMA(1,1,1) της μορφής:

$$\Delta R_t = q\Delta R_{t-1} + y n_{t-1} + n_t \,, \tag{5.14}$$

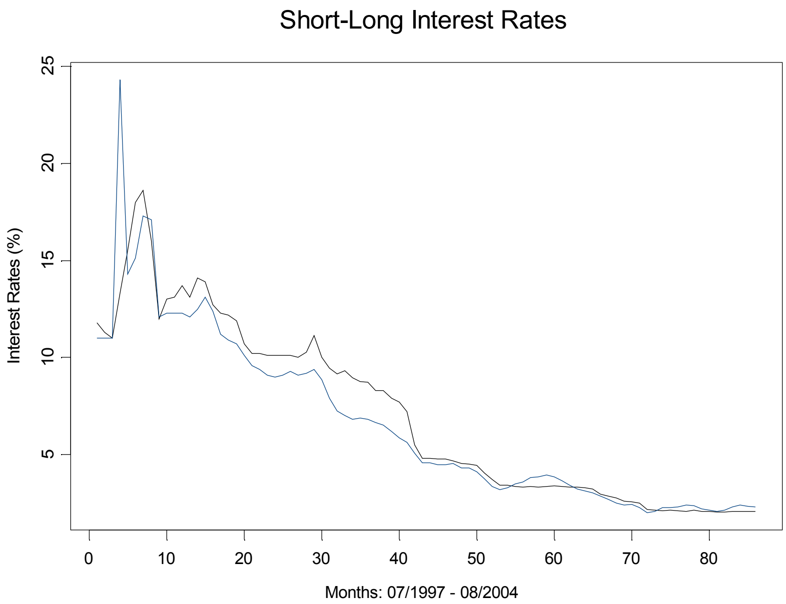
όπου στην ουσία:

$$\begin{aligned} n_t &= \frac{1+df}{1-dq} e_t \\ y &= \frac{f(1-dq) - d(q+f)}{1+df} . \end{aligned}$$

Ο Schotman, με την εμπειρική του μελέτη και βασιζόμενος στις παραπάνω ιδιότητες, οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι αν η διαδικασία των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων r_t πλησιάζει τη διαδικασία του τυχαίου περιπάτου (*random walk*), τότε δεν υπάρχουν πειστικές ενδείξεις κατά του μοντέλου παλινδρόμησης (*5.5*) για τον έλεγχο της υπόθεσης προσδοκιών.

5.3.2 Εφαρμογή στα Δεδομένα

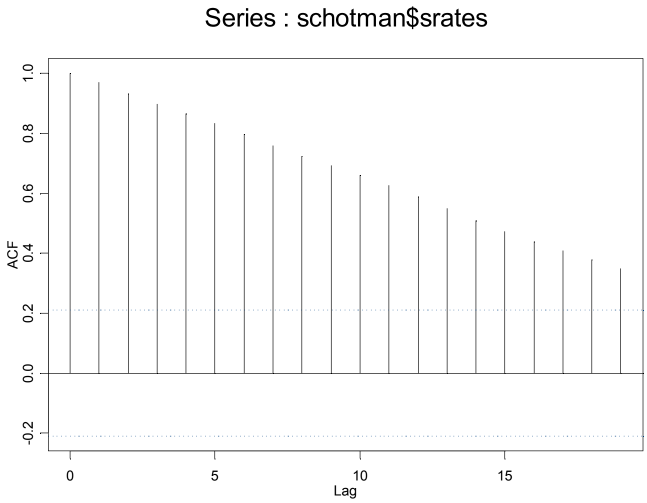
Θέτουμε ως βραχυπρόθεσμα, τα μηνιαία επιτόκια καταθέσεων και ως μακροπρόθεσμα, τα ετήσια επιτόκια. Στο Διάγραμμα *5.5*, φαίνεται η πορεία των βραχυπρόθεσμων (μαύρη γραμμή) και μακροπρόθεσμων (γαλάζια γραμμή) επιτοκίων από τον Ιούλιο του 1997 μέχρι και τον Αύγουστο του 2004.



Διάγραμμα *5.5*

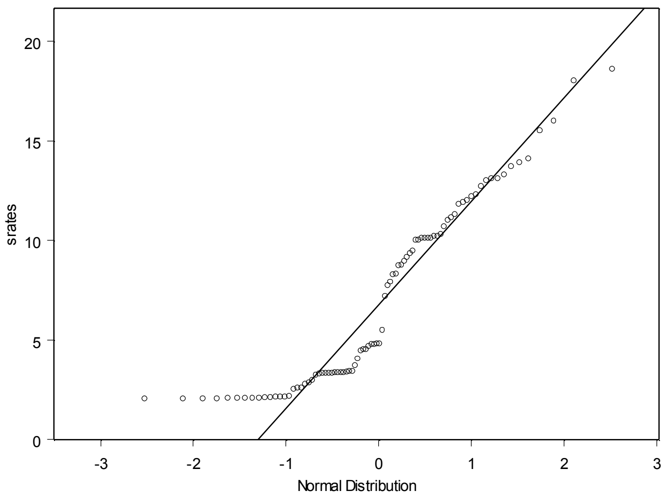
Και οι δύο χρονοσειρές των επιτοκίων τον Ιούλιο του 1997 ξεκινούν περίπου στο ίδιο επίπεδο του 11%. Παρατηρούμε ότι λίγο πριν τη $10^{η}$ παρατήρηση (Ιανουάριος 1998), και στις δύο περιπτώσεις παρουσιάζεται μία απότομη άνοδος του επιπέδου των επιτοκίων. Έπειτα, αρχίζει μία σταθερά καθοδική πορεία, για να καταλήξουμε τον Αύγουστο του 2004 γύρω στο 2% τόσο για τα βραχυπρόθεσμα όσο και για τα μακροπρόθεσμα επιτόκια. Παρουσιάζουν λοιπόν οι δύο ευθείες του Διαγράμματος *5.5*, περίπου παράλληλες πορείες στο χρόνο.

Από τη φθίνουσα πορεία των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, που εξετάσαμε παραπάνω, είναι φανερό, πως η χρονοσειρά έχει τάση και δεν πληρεί τις προϋποθέσεις της στασιμότητας, έτσι ώστε να θεωρηθεί λευκός θόρυβος. Στο Διάγραμμα *5.6*, παρουσιάζονται οι 20 πρώτες αυτοσυσχετίσεις της χρονοσειράς:



Διάγραμμα *5.6*

Από το Διάγραμα *5.6* (κορελόγραμμα), παρατηρούμε ότι οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν με πολύ αργό ρυθμό και είναι όλες τους στατιστικά σημαντικές, γεγονός που μας οδηγεί στην απόρριψη της υπόθεσης της στασιμότητας. Για να ελέγξουμε την υπόθεση αν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ακολουθούν την κανονική κατανομή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διαγραμματικό έλεγχο *Q-Q Plot* που ακολουθεί (Διάγραμμα *5.7*):



Διάγραμμα *5.7*

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα σημεία των δεδομένων έχουν πολύ φτωχή προσαρμογή στην ευθεία της κανονικής κατανομής. Όχι μόνο στην αριστερή και δεξιά ουρά, αλλά και στο κέντρο της ευθείας, η απόσταση είναι αρκετά μεγάλη ώστε να απορρίψουμε την υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων.

Επομένως, απορρίπτοντας τις υποθέσεις στασιμότητας και κανονικότητας στη χρονοσειρά των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, απορρίπτουμε και την περίπτωση να ακολουθούν τη διαδικασία του τυχαίου περιπάτου. Παρακάτω εφαρμόζουμε τα υποδείγματα χρονοσειρών (*5.11*), (*5.12*) για τα μηνιαία επιτόκια και το εύρος των επιτοκίων αντίστοιχα.

Προσαρμόζοντας το μοντέλο ARIMA (1,1,1) στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, σύμφωνα με το στατιστικό πακέτο *S-PLUS*, έχουμε:

```
***  ARIMA Model Fitted to Series schotman$srates ***

Call: arima.mle(x = schotman$srates, model = model, xreg =
xreg, max.iter = nlmin.max.iter, max.fcal =    nlmin.max.fcal)
Method:  Maximum Likelihood
Model :  1 1 1
Period:  1

Coefficients:
       AR : 0.17317
       MA : -0.26559

Variance-Covariance Matrix:
          ar(1)      ma(1)
ar(1) 0.06563061 0.05831908
ma(1) 0.05831908 0.06288713

Optimizer has  converged
Convergence Type: relative function convergence
AIC: 189.01341
```

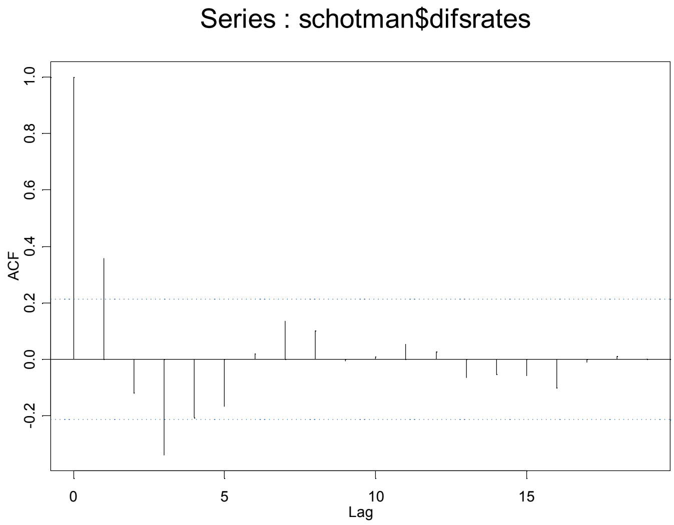
Από την παραπάνω ανάλυση εκτιμούμε τις παραμέτρους θ και φ ως εξής:

$$\hat{q} = 0{,}17317$$
$$\hat{f} = -0{,}26559.$$

Σύμφωνα με τον Schotman αν το άθροισμα $\theta + \varphi$ είναι κοντά στο μηδέν, η διαφορές Δr_t είναι ασυσχέτιστες. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

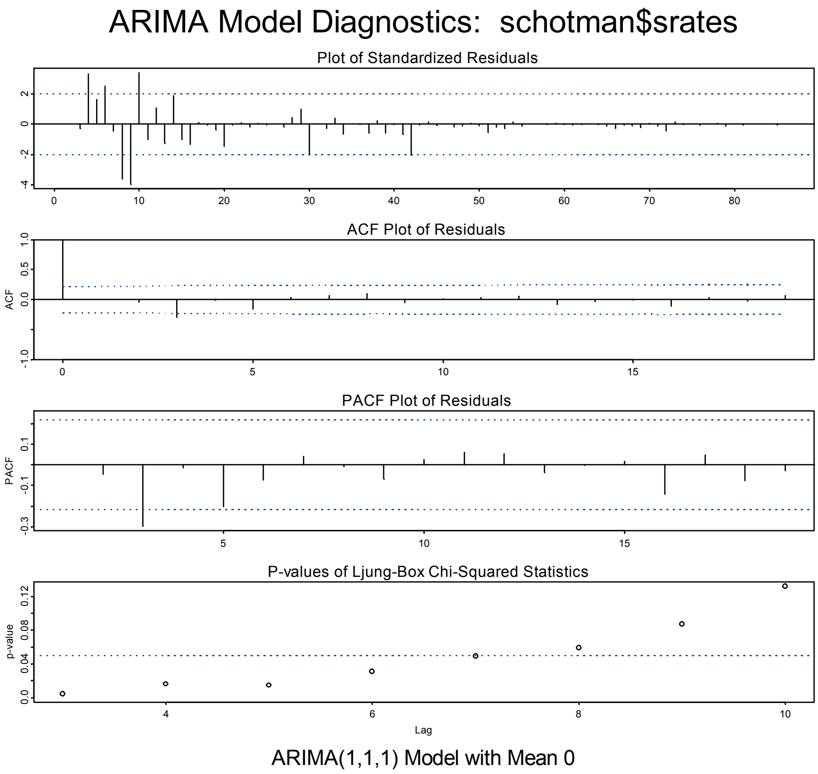
$$\hat{q} + \hat{f} = 0{,}17317 - 0{,}26559 = -0{,}09242\,.$$

Δηλαδή, το άθροισμα των παραμέτρων είναι αρκετά κοντά στο μηδέν. Στο Διάγραμμα *5.8*, παρουσιάζονται οι 20 πρώτες αυτοσυσχετίσεις της μεταβλητής Δr_t:



Διάγραμμα *5.8*

Όπως παρατηρούμε από το παραπάνω διάγραμμα, οι αυτοσυσχετίσεις ύστερα από τις δύο πρώτες είναι αρκετά κοντά στο μηδέν, και θεωρούνται στατιστικά ασήμαντες. Δηλαδή, οι διαφορές των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων Δr_t είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Όσον αφορά τα σφάλματα του μοντέλου, μπορούμε να πάρουμε τους διαγνωστικούς διαγραμματικούς ελέγχους του στατιστικού πακέτου (Διάγραμμα *5.9*).



Διάγραμμα *5.9*

Παρατηρούμε λοιπόν ότι γενικά οι αυτοσυσχετίσεις των σφαλμάτων είναι στατιστικά ασήμαντες, αφού είναι σχεδόν όλες (εκτός από την πρώτη) πολύ κοντά στο μηδέν. Επίσης, βλέπουμε ότι τα *p-values* του ελέγχου Box-Ljung για το αν τα σφάλματα ακολουθούν τη διαδικασία του λευκού θορύβου, είναι μικρότερα από το επίπεδο σημαντικότητας 0,05 μέχρι την έβδομη υστέρηση (*lag*), ενώ από την έβδομη κι έπειτα το ξεπερνούν. Έτσι, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα παρουσιάζουν κάποια ετεροσκεδαστικότητα.

Προσαρμόζοντας το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτου βαθμού AR(1) για το εύρος των επιτοκίων (*5.13*), από το στατιστικό πακέτο *S-PLUS*, θα έχουμε:

```
***  ARIMA Model Fitted to Series schotman$spread ***
Call: arima.mle(x = schotman$spread, model = model, xreg = xreg,
max.iter = nlmin.max.iter, max.fcal =   nlmin.max.fcal)
Method:  Maximum Likelihood
Model :  1 0 0
Period:  1

Coefficients:
      AR : 0.27096

Variance-Covariance Matrix:
          ar(1)
ar(1) 0.01090098
Optimizer has  converged
Convergence Type: relative function convergence
AIC: 308.73129
```

Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω ανάλυση, η παράμετρος θ εκτιμήθηκε $\hat{q} = 0,27096$.
Σύμφωνα με την εργασία του Schotman, αν η παράμετρος θ εκτιμηθεί κοντά στη μονάδα, το μοντέλο ARIMA (1,1,1) θεωρείται ως το πιο απλό υπόδειγμα χρονοσειρών που εκφράζει τη συμπεριφορά των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Στη δική μας περίπτωση, η εκτίμηση του θ απέχει αρκετά από τη μονάδα, γεγονός που μας οδηγεί στην αναζήτηση διαφορετικού μοντέλου για την ανάλυση της χρονοσειράς των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων.

Από τα παραπάνω, μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι η διαδικασία των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων πλησιάζει τη διαδικασία του λευκού θορύβου. Μπορούμε να εφαρμόσουμε λοιπόν το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης (*5.5*) και να ελέγξουμε την υπόθεση των προσδοκιών μέσα από την επίδραση του εύρους των επιτοκίων στη διαδικασία των μακροπρόθεσμων επιτοκίων. Η αντίστοιχη ανάλυση από το στατιστικό πακέτο *S-PLUS* είναι:

```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = diflrates ~ 1 + spread, data = schotman,
       na.action = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept)    spread
   0.3698501 0.6372549

Degrees of freedom: 85 total; 83 residual
1 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 1.696894

Call: lm(formula = diflrates ~ 1 + spread, data = schotman,
       na.action = na.exclude)
Residuals:
    Min      1Q   Median     3Q   Max
 -13.67 -0.3991 -0.06426 0.6311 3.929

Coefficients:
             Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.3699 0.1914     1.9323  0.0567
     spread 0.6373 0.1251     5.0931  0.0000

Residual standard error: 1.697 on 83 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.2381
F-statistic: 25.94 on 1 and 83 degrees of freedom, the p-value is 2.168e-006
1 observations deleted due to missing values

Correlation of Coefficients:
       (Intercept)
spread 0.2744

Analysis of Variance Table

Response: diflrates

Terms added sequentially (first to last)
          Df Sum of Sq  Mean Sq  F Value         Pr(F)
   spread  1   74.6933 74.69332 25.94015 2.168082e-006
Residuals 83  238.9942  2.87945
```

Από την παραπάνω ανάλυση για το γραμμικό μοντέλο (*5.5*):

$$\Delta R_{t+1} = a + bS_t + n_{t+1},$$

οι εκτιμήσεις για τις παραμέτρους a και b είναι αντίστοιχα:

$$\hat{a} = 0{,}3699$$

$$\hat{b} = 0{,}6373.$$

Για τις εκτιμήσεις αυτές των παραμέτρων a και b έχουμε αντίστοιχα *p-values* 0,0567 και 0. Δηλαδή, για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0: $a = 0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $a \neq 0$, σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αφού 0,0567 > 0,050. Σε επίπεδο σημαντικότητας 10%, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση λόγω του ότι 0,0567 < 0,10. Επίσης, για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης H_0: $b = 0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $b \neq 0$, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αφού η τιμή του *p-value* είναι μηδενική.

Έτσι, αντίθετα με τα εμπειρικά αποτελέσματα που αναφέρονται στην εργασία του Schotman, όσον αφορά το πρόσημο της παραμέτρου b, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, παρατηρούμε ότι $b > 0$. Δηλαδή, το πόσο απέχουν τα βραχυπρόθεσμα με τα μακροπρόθεσμα επιτόκια επηρεάζει την πορεία των μακροπρόθεσμων επιτοκίων και έτσι δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση των προσδοκιών. Επίσης, η παράμετρος α εκτιμήθηκε θετική αντίθετα με τη θεωρία που απαιτεί $\alpha < 0$, εκτίμηση όμως, που όπως είδαμε, είναι στατιστικά ασήμαντη.

Γενικά , το γεγονός ότι έχουμε απορρίψει το μοντέλο χρονοσειρών ARIMA (1,1,1) ως το πιο απλό υπόδειγμα που εκφράζει τη συμπεριφορά των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, μας οδηγεί στο συμπέρασμα να απορρίψουμε την υπόθεση των προσδοκιών. Επίσης, εκτιμήθηκαν δύο διαφορετικές τιμές για την παράμετρο θ, κάνοντας τις αναλύσεις για τη χρονοσειρά των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων και τη χρονοσειρά του εύρους των επιτοκίων αντίστοιχα. Οι εκτιμήσεις αυτές θα έπρεπε να ταυτίζονταν, προκειμένου να προχωρήσουμε στην ανάλυση του γραμμικού μοντέλου (*5.5*), και συνεπώς να ελέγξουμε την υπόθεσης των προσδοκιών. Έτσι, η συγκεκριμένη μεθοδολογία ελέγχου δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί για τα δεδομένα.

5.4 Έλεγχος Παλινδρόμησης Εύρους Επιτοκίων

Ένας τρόπος για να ελέγξουμε αν έχει ισχύ η υπόθεση των προσδοκιών σε μία σειρά από εμπειρικά δεδομένα είναι και αυτός που προτείνουν οι S. Gerlach και F. Smets (1997) στην εργασία τους "*The term structure of Euro-rates: some evidence in support of the expectations hypothesis*", η οποία με τη σειρά της βασίζεται σε ανάλυση που έχει πραγματοποιήσει ο G. A. Hardouvelis (1994). Στην εργασία τους αυτή, οι Gerlach και Smets αναλύουν επιτόκια 1, 3, 6 και 12 μηνών για διάφορες χώρες της Ευρώπης και των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Εφαρμόζοντας ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης, τα συμπεράσματα που βγάζουν είναι ότι η υπόθεση των προσδοκιών ισχύει στις περισσότερες από τις Ευρωπαϊκές χώρες αντίθετα με τις Η.Π.Α. Επίσης, όπως και ο Hardouvelis, οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι όσο πιο προβλέψιμη είναι η πορεία των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, τόσο πιο καλή εφαρμογή έχει η υπόθεση των προσδοκιών.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιούμε ως βραχυπρόθεσμα επιτόκια, τα μηνίαια επιτόκια καταθέσεων και ως μακροχρόνια τα επιτόκια 3, 6 και 12 μηνών αντίστοιχα. Ορίζουμε ως $R_t^{(j)}$, το μακροχρόνιο επιτόκιο *j*-μηνών στο χρόνο *t*, $q_t^{(j)}$ ένα πιθανό σταθερό πριμ διάρκειας διάφορο του μηδενός για τους *j* μήνες και $E_t r_{t+i}$ την αναμενόμενη τιμή του μηνιαίου επιτοκίου για το χρόνο *t* + *i*, δεδομένης της πορείας τους μέχρι το χρόνο *t*. Συνεπώς, για τα δεδομένα που διαθέτουμε, έχουμε *j* = 3, 6 και 12. Όπως έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα, σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών, η απόδοση μίας επένδυσης *j* μηνών είναι ίση με την απόδοση της μηνιαίας επένδυσης, ανατοκισμένης *j* φορές, συν ένα πριμ διάρκειας. Δηλαδή:

$$(1+R_t^{(j)})^j = q_t^{(j)} \prod_{i=0}^{j-1} (1+E_t r_{t+i}/j). \qquad (5.15)$$

Γραμμικοποιώντας τη σχέση (*5.15*), έχουμε κατά προσέγγιση

$$R_t^{(j)} \approx q_t^{(j)} + \sum_{i=0}^{j-1} (E_t r_{t+i}/j), \qquad (5.16)$$

που στην ουσία είναι

$$(E_t r_{t+j-1} + E_t r_{t+j-2} + \ldots + r_t)/j \approx -q_t^{(j)} + R_t^{(j)}. \qquad (5.17)$$

Η σχέση (*5.17*) εκφράζει τη βασική αρχή πάνω στην οποία στηρίζεται η θεωρία των προσδοκιών. Ότι δηλαδή η αναμενόμενη απόδοση ανατοκίζοντας τα μηνιαία επιτόκια *j* φορές, θα είναι ίση με την απόδοση της επένδυσης πάνω στο μακροχρόνιο επιτόκιο των *j* μηνών. Έτσι, η υπόθεση των προσδοκιών μπορεί να ελεγχθεί αν ισχύει, εκτιμώντας το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης:

$$rs_t^{(j)} = a + b\,(R_t^{(j)} - r_t) + u_t, \qquad (5.18)$$

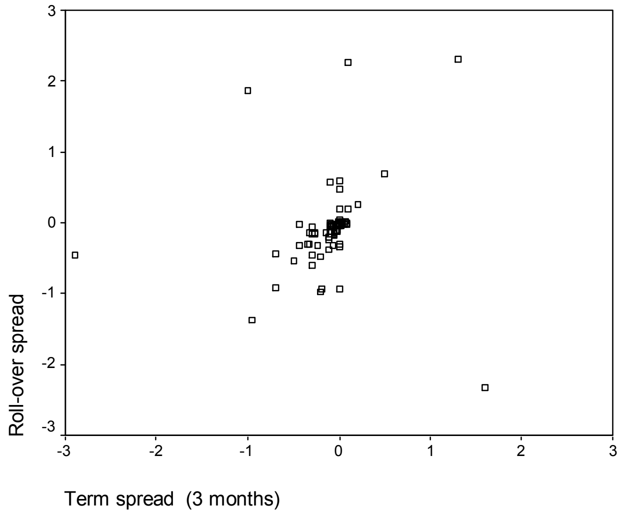
όπου

$$rs_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} (r_{t+i-1} - r_t)/j, \quad a = -q_t^{(j)} \quad \text{και} \quad u_t = \sum_{i=0}^{j-1} (r_{t+i} - E_t r_{t+i})/j + e_t.$$

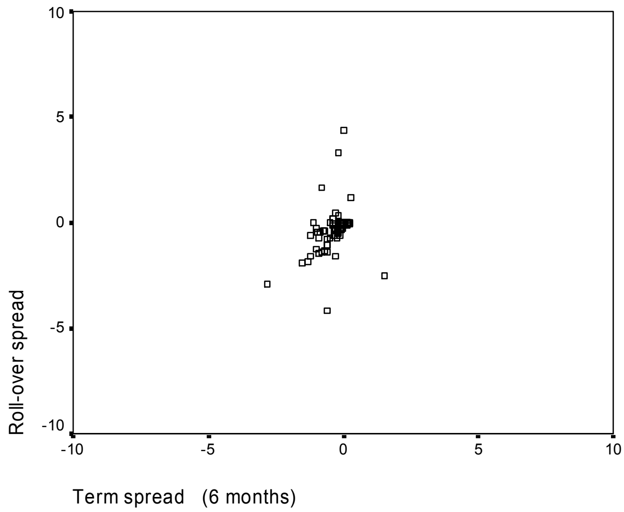
Για να ισχύει η υπόθεση των προσδοκιών, θα πρέπει $\beta = 1$. Έτσι, η θεωρία των προσδοκιών στην ουσία υποδηλώνει ότι το εύρος των επιτοκίων $(R_t^{(j)} - r_t)$ θα πρέπει να προβλέπει ένα σταθμισμένο μέσο της μελλοντικής αλλαγής των μηνιαίων επιτοκίων κατά τη διάρκεια των *j* μηνών $rs_t^{(j)}$. Όπως οι Gerlach και Smets, έτσι και εδώ θα υποθέσουμε ότι τα σφάλματα $r_{t+i} - E_t r_{t+i}$ είναι ασυσχέτιστα στο χρόνο, και ότι τα u_t δεν αποτελούν λευκό θόρυβο, αλλά μάλλον πως ακολουθούν τη διαδικασία του κινητού μέσου MA(*j*-1).

5.4.1 Εφαρμογή στα δεδομένα

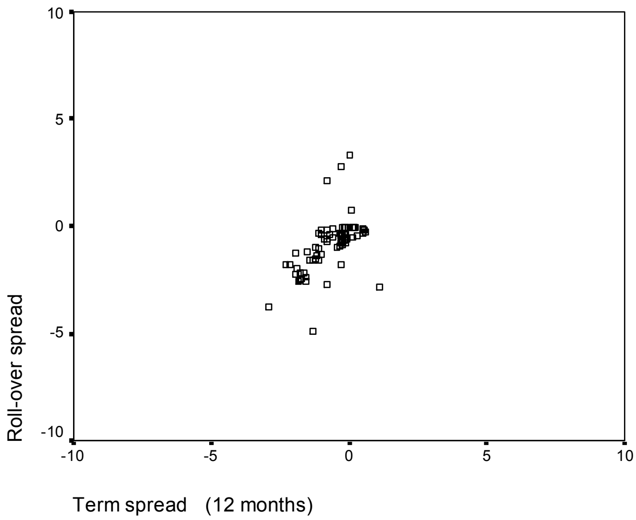
Πριν θέσουμε το μοντέλο παλινδρόμησης (*5.18*) στα δεδομένα μας για περίοδο 3, 6 και 12 μηνών, μπορούμε να δούμε τα διαγράμματα διασποράς μεταξύ των δύο μεταβλητών, δηλαδή της εξαρτημένης $rs_t^{(j)}$ (*roll-over spread*) και της ανεξάρτητης $(R_t^{(j)} - r_t)$, που δεν είναι τίποτα άλλο από τη διαφορά των μακροπρόθεσμων μείον τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια (*term spread*). Στα Διαγράμματα *5.10*, *5.11* και *5.12*, έχουμε τα διαγράμματα διασποράς για j = 3, 6 και 12 μήνες αντίστοιχα.



Διάγραμμα *5.10*



Διάγραμμα *5.11*



Διάγραμμα *5.12*

Για να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω διαγράμματα διασποράς σε σχέση με τη θεωρία των προσδοκιών, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν σφάλματα εκτιμήσεων και το πριμ διάρκειας είναι σταθερό. Για να ισχύει η υπόθεση των προσδοκιών, θα πρέπει τα σημεία να βρίσκονται σε μία ευθεία που να έχει κλίση ίση με ένα. Στο Διάγραμμα *5.10*, που αφορά μακροπρόθεσμα επιτόκια 3 μηνών, παρατηρούμε ότι τα περισσότερα σημεία είναι συγκεντρωμένα γύρω από μία ευθεία με κλίση ίση με ένα, αλλά υπάρχουν αρκετά σημεία τα οποία είναι αρκετά διάσπαρτα και μακριά από την ευθεία. Στα Διαγράμματα *5.11* και *5.12*, που αφορούν μακροπρόθεσμα επιτόκια 6 και 12 μηνών αντίστοιχα, τα σημεία έχουν καλύτερη προσαρμογή πάνω σε μία ευθεία με κλίση μονάδα, και δεν παρουσιάζουν τόσο έντονη διασπορά όσο στο Διάγραμμα *5.10*.

Για μακροπρόθεσμα επιτόκια 3 μηνών (j = 3), η μεταβλητή $rs_t^{(j)}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$rs_t^{(3)} = \sum_{i=1}^{3} (r_{t+i-1} - r_t)/3 = (r_{t+1} + r_{t+2} - 2r_t)/3 .$$

Η ανάλυση του γραμμικού μοντέλου (*5.18*) και η εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιείται με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου *S-PLUS*:

```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = spread ~ 1 + diafora, data = monthdata2,
      na.action = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept) diafora
 -0.09427339 0.18302

Degrees of freedom: 84 total; 82 residual
2 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 0.6696949

Call: lm(formula = spread ~ 1 + diafora, data = monthdata2,
      na.action = na.exclude)
Residuals:
    Min     1Q  Median      3Q   Max
 -2.936 -0.101 0.06228 0.09298 2.343

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.0943  0.0751    -1.2552  0.2130
    diafora  0.1830  0.1635     1.1193  0.2663

Residual standard error: 0.6697 on 82 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.01505
F-statistic: 1.253 on 1 and 82 degrees of freedom, the p-value is
0.2663
2 observations deleted due to missing values

Analysis of Variance Table

Response: spread

Terms added sequentially (first to last)
          Df Sum of Sq   Mean Sq  F Value    Pr(F)
  diafora  1   0.56191 0.5619062 1.252881 0.266271
Residuals 82  36.77628 0.4484912
```

Από την παραπάνω ανάλυση, παίρνουμε τις εξής εκτιμήσεις για τις παραμέτρους α και β:

$$\hat{a} = -0{,}0943$$
$$\hat{b} = 0{,}1830.$$

Η τιμή του *p-value* για την εκτίμηση της παραμέτρου α είναι 0,2130. Δηλαδή αποδεχόμαστε την αρχική υπόθεση H_0: $\alpha = 0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\alpha \neq 0$, αφού το *p-value* ξεπερνάει κατά πολύ το επίπεδο σημαντικότητας 0,05. Τα ίδια συμπεράσματα βγάζουμε για την παράμετρο β αφού το αντίστοιχο *p-value* είναι 0,2663 > 0,05, οπότε αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0: $\beta = 0$. Συνεπώς, δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι ισχύει η υπόθεση των προσδοκιών για μακροπρόθεσμα επιτόκια 3 μηνών.

Για διάρκεια $j = 6$ μήνες, η μεταβλητή $rs_t^{(j)}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$rs_t^{(6)} = \sum_{i=1}^{6} (r_{t+i-1} - r_t)/6 = (r_{t+1} + r_{t+2} + \ldots + r_{t+5} - 5r_t)/6.$$

Η αντίστοιχη ανάλυση με το στατιστικό πακέτο είναι:

```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = spread6 ~ 1 + diafora, data = monthdata6,
       na.action = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept)   diafora
  -0.2663057 0.2388857

Degrees of freedom: 81 total; 79 residual
5 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 1.021721

Call: lm(formula = spread6 ~ 1 + diafora, data = monthdata6,
       na.action = na.exclude)
Residuals:
   Min      1Q  Median     3Q   Max
 -3.79 -0.2304 0.05714 0.2486 4.666

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.2663  0.1141    -2.3342  0.0221
    diafora  0.2389  0.0695     3.4393  0.0009

Residual standard error: 1.022 on 79 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1302
F-statistic: 11.83 on 1 and 79 degrees of freedom, the p-value is
0.0009339
5 observations deleted due to missing values

Analysis of Variance Table

Response: spread6

Terms added sequentially (first to last)
          Df Sum of Sq  Mean Sq  F Value        Pr(F)
  diafora  1  12.34841 12.34841 11.82895 0.0009339399
Residuals 79  82.46925  1.04391
```

Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους α και β είναι:

$$\hat{a} = -0{,}2663$$

$$\hat{b} = 0{,}2389.$$

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, απορρίπτουμε την υπόθεση H_0: $\alpha = 0$, υπέρ της υπόθεσης H_1: $\alpha \neq 0$, αφού το *p-value* είναι 0,0221< 0,05. Επίσης απορρίπτουμε την αρχική υπόθεση H_0: $\beta = 0$, υπέρ της υπόθεσης H_1: $\beta \neq 0$, αφού το *p-value* είναι 0,0009< 0,05. Μπορούμε να υπολογίσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο ως εξής:

$$[\hat{b} \pm t_{n-2}(a/2)s(\hat{b})].$$

Έτσι, μπορούμε να δεχτούμε ότι ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για την παράμετρο β θα είναι το:

$$[0{,}101 \, , \, 0{,}377].$$

Από τη στιγμή που η μονάδα δεν βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης, δεν μπορούμε να αποδεχτούμε την υπόθεση H_0: $\beta = 1$. Μάλιστα η εκτίμηση της παραμέτρου β θεωρείται σχετικά μικρή και απέχει αρκετά από τη μονάδα. Συνεπώς, θα πρέπει να απορρίψουμε την υπόθεση των προσδοκιών και για τη διάρκεια των $j = 6$ μηνών.

Τέλος, για επιτόκια $j = 12$ μηνών, υπολογίζουμε τη μεταβλητή $rs_t^{(j)}$:

$$rs_t^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} (r_{t+i-1} - r_t)/12 = (r_{t+1} + r_{t+2} + \ldots + r_{t+11} - 11r_t)/12\,,$$

ενώ η εκτίμηση των παραμέτρων υπολογίζεται με βάση το στατιστικό πακέτο:

```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = spread12 ~ 1 + diafora12, data =
       monthdata12, na.action = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept) diafora12
   -0.664169 0.3576029

Degrees of freedom: 75 total; 73 residual
11 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 1.121507

Call: lm(formula = spread12 ~ 1 + diafora12, data =
       monthdata12, na.action = na.exclude)
Residuals:
    Min      1Q Median     3Q   Max
 -3.746 -0.3866 0.1123 0.4215 3.948

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.6642  0.1362    -4.8782  0.0000
  diafora12  0.3576  0.0837     4.2721  0.0001

Residual standard error: 1.122 on 73 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.2
F-statistic: 18.25 on 1 and 73 degrees of freedom, the p-value is
0.00005756
11 observations deleted due to missing values

Analysis of Variance Table

Response: spread12

Terms added sequentially (first to last)
          Df Sum of Sq  Mean Sq  F Value         Pr(F)
diafora12  1  22.95605 22.95605 18.25126 0.00005755746
Residuals 73  91.81786  1.25778
```

Έτσι, οι παράμετροι α και β εκτιμούνται ως εξής:

$$\hat{a} = -0{,}6642$$
$$\hat{b} = 0{,}3576.$$

Τα *p-values* και για τις δύο εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πολύ μικρά. Έτσι απορρίπτουμε σε επίπεδο σημαντικότητας 5% την υπόθεση ότι η παράμετρος είναι ίση με μηδέν, και στις δύο περιπτώσεις. Παρ'όλα αυτά το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο *β*, στη συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι:

$$[0{,}191\ ,\ 0{,}524].$$

Επομένως και για $j = 12$ μήνες, απορρίπτουμε την υπόθεση H_0: $\beta = 1$, αφού δεν συμπεριλαμβάνεται η μονάδα στο παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης. Συνεπώς, απορρίπτουμε και την υπόθεση των προσδοκιών.

Από την παραπάνω ανάλυση, δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι η θεωρία των προσδοκιών ερμηνεύει ικανοποιητικά τα δεδομένα μας. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η διάρκεια που αφορά τα μακροπρόθεσμα επιτόκια (από 3 σε 6 και 12 μήνες), τόσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της εκτίμησης της παραμέτρου *β* και τόσο πιο πολύ πλησιάζει τη μονάδα, δηλαδή τόσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο να αποδεχτούμε τη θεωρία των προσδοκιών. Οι Gerlach και Smets στην ανάλυση που είχαν κάνει για τα ελληνικά δεδομένα, και που αφορούσαν τιμές επιτοκίων από το Σεπτέμβριο του 1984 μέχρι και Δεκέμβριο του 1993, είχαν καταλήξει στο να αποδεχτούν ότι ισχύει η θεωρία των προσδοκιών. Αυτό τους το συμπέρασμα, όπως σχολιάζουν και οι ίδιοι, δεν σημαίνει απόλυτα ότι η θεωρία των προσδοκιών είναι και η μόνη σωστή για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίων. Πολύ σημαντικό ρόλο παίζει και το γενικότερο οικονομικό κλίμα καθώς επίσης οι μεταβολές στις οποίες υπόκειται από τη μία χρονική περίοδο στην άλλη.

5.5 Γενικά Συμπεράσματα

Από τις τρεις παραπάνω μεθοδολογίες ελέγχου της υπόθεσης των προσδοκιών, αυτή που περατώθηκε ήταν ο έλεγχος παλινδρόμησης του εύρους των επιτοκίων που προτείνουν οι Gerlach και Smets. Η μέθοδος αυτή υπερείχε σε σχέση με τις άλλες δύο λόγω της ευκολίας που παρουσίαζε στην εφαρμογή πάνω στα δεδομένα, καθώς επίσης της απλότητας των πράξεων που απαιτούσε. Ο έλεγχος της υπόθεσης των προσδοκιών με χρήση προωθητικών επιτοκίων που πρότιναν οι Lee και Tse, καθώς επίσης ο έλεγχος παλινδρόμησης μακροπρόθεσμων επιτοκίων του Schotman δεν είχαν την κατάλληλη εφαρμογή στα δεδομένα που είχαμε επιλέξει, γι'αυτό και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε δεν ήταν αξιόπιστα και αρκετά πειστικά στο να απορρίψουμε ή να αποδεχτούμε την υπόθεση των προσδοκιών.

Παρ' όλα αυτά, πραγματοποιόντας τον έλεγχο που προτείνουν οι Gerlach και Smets στην εργασία τους, οδηγούμαστε τελικά στο συμπέρασμα ότι η θεωρία των προσδοκιών δεν έχει ισχύ για τα δεδομένα μας. Οι ίδιοι οι Gerlach και Smets βγάζουν συμπεράσματα υπέρ της θεωρίας για τις περισσότερες χώρες που έχουν επιλέξει ως αντικείμενο ανάλυσης. Δέχονται επίσης ότι το γεγονός ότι δεν απορρίπτουν την υπόθεση των προσδοκιών, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η συγκεκριμένη θεωρία είναι η απόλυτα σωστή. Καταλήγουν ότι το λεγόμενο πριμ διάρκειας, είναι στην ουσία μία ποσότητα που μεταβάλλεται με το χρόνο, και δεν παραμένει σταθερή αντίθετα με αυτό που υποστηρίζει η θεωρία των προσδοκιών. Απλά, θεωρούν την επίδραση αυτής της μεταβλητής αμελητέα. Για τα ελληνικά δεδομένα και λόγω της συγκεκριμένης σταθερά καθοδικής πορείας που ακολουθούν τα τελευταία 6 περίπου χρόνια τα επιτόκια, το πριμ κινδύνου είναι φυσικό να παίζει σημαντικό ρόλο στη διάρθρωση των επιτοκίων. Έτσι, οδηγούμαστε στην απόρριψη της υπόθεσης των προσδοκιών, παρ'όλο που για παλαιότερη περίοδο, οι ίδιοι Gerlach και Smets την είχαν αποδεχτεί.

6. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΣΕ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

6.1 Εισαγωγή - Σύγκριση Μοντέλων

Σε θεωρητικό επίπεδο, έχει αναπτυχθεί τεράστια βιβλιογραφία για τη δημιουργία διαφορετικών μοντέλων και τη μεταξύ τους σύγκριση. Για παράδειγμα, η εργασία των R.Gibson, κ.α. (2001) "*Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature*", παρουσιάζει επιγραμματικά τις ιδιότητες πολλών μοντέλων και συγκρίνει σε κάποιο βαθμό τις θεωρητικές τους διαφοροποιήσεις.

Παρ'όλα αυτά, κατά πολύ μικρότερος είναι ο όγκος της βιβλιογραφίας που ασχολείται με τη σύγκριση των μοντέλων σε πρακτικό-εμπειρικό επίπεδο, με πραγματικά δεδομένα και υπό υπαρκτές συνθήκες. Στην εργασία των K. C. Chan, κ.α. (1992) "*An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*", γίνεται μια σημαντική προσπάθεια σύγκρισης οχτώ διαφορετικών μοντέλων με τη Γενικευμένη Μέθοδο των Ροπών. Βασιζόμενοι στην επιστρεφόμενη στο μέσο στοχαστική διαφορική εξίσωση για τα επιτόκια:

$$dr = (a + br)dt + s r^{g} dW \, , \qquad (6.1)$$

εκτιμούν τις παραμέτρους a, b και γ σε διακριτό χρόνο και έπειτα κάνουν έλεγχο για τους περιορισμούς που θέτει το κάθε μοντέλο. Έχοντας ως δεδομένα τις αποδόσεις μηνιαίων κρατικών ομολόγων, οδηγούνται στο συμπέρασμα πως καλύτερη προσαρμογή έχουν τα μοντέλα που παρουσιάζουν $\gamma \geq 1$ αντίθετα με αυτά που απαιτούν $\gamma < 1$. Δίνεται δηλαδή βαρύτητα στη μεταβλητότητα των επιτοκίων ως καθοριστικό παράγοντα για την προτίμηση ενός μοντέλου και όχι τόσο σε ιδιότητες-υποθέσεις των μοντέλων, όπως για παράδειγμα αυτή του αποκλεισμού αρνητικών επιτοκίων. Τα τέσσερα μοντέλα που περιγράφτηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο (Merton, Vasicek, Dothan και CIR) συμπεριλαμβάνονται στα οχτώ που ανέλυσαν οι Chan κ.α. Παρακάτω δίνονται τα τέσσερα μοντέλα με τη στοχαστική διαδικασία που υποθέτουν ότι ακολουθούν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια (ανέλιξη διάχυσης) και την αντίστοιχη στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ), που είναι ειδική περίπτωση της (*6.1*):

Μοντέλο	**Σ. Δ. Ε.**	**Ανέλιξη Διάχυσης**
Merton (1973)	$dr = \alpha dt + \sigma dW$	Κίνηση Brown με τάση
Vasicek (1977)	$dr = (\alpha + br)\, dt + \sigma dW$	Ornstein - Uhlenbeck
Dothan (1978)	$dr = \sigma r dW$	Γεωμετρική Κίνηση Brown
CIR (1985)	$dr = (\alpha + br)\, dt + \sigma\sqrt{r} dW$	Διαδικασία τετραγωνικής ρίζας

Πίνακας *6.1*

Ενώ οι περιορισμοί για τις παραμέτρους *α*, *b* και *γ* για κάθε μοντέλο δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μοντέλο	***α***	***b***	***γ***
Merton (1973)		0	0
Vasicek (1977)			0
Dothan (1978)	0	0	1
CIR (1985)			½

Πίνακας *6.2*

Έτσι, παίρνοντας τη σχέση (*6.1*) και θέτωντας τους κατάλληλους περιορισμούς του Πίνακα *6.2* για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, οδηγούμαστε στη δυναμική συμπεριφορά των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων που υποθέτει το κάθε μοντέλο (Πίνακας *6.1*).

Η σχέση (*6.1*) αφορά την περίπτωση που τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια κινούνται σε συνεχή χρόνο. Προσαρμόζοντας τη σχέση αυτή για διακριτό χρόνο, έχουμε:

$$r_{t+1} - r_t = a + br_t + e_{t+1}, \qquad (6.2)$$

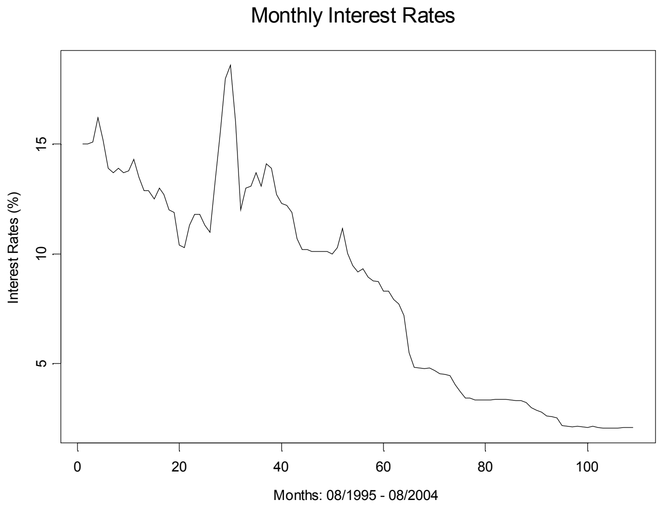
όπου

$$E[e_{t+1}] = 0 \quad \text{και} \quad E\left[e_{t+1}^2\right] = s^2 r_t^{2g}. \qquad (6.3)$$

Το υπόδειγμα αυτό σε διακριτό χρόνο επιτρέπει η διακύμανση να εξαρτάται άμεσα από το επίπεδο των επιτοκίων με τρόπο ανάλογο με το υπόδειγμα του συνεχούς χρόνου.

6.2 Τα δεδομένα

Τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεση μας είναι όπως και στην εφαρμογή των Chan κ.α. μηνιαία. Πιο συγκεκριμένα, είναι επιτόκια καταθέσεων ενός μηνός, από τον Αύγουστο του 1995 μέχρι και τον Αύγουστο του 2004 (109 παρατηρήσεις). Μέχρι και το Δεκέμβριο του 2000, αφορούν διατραπεζικά επιτόκια (ATHIBOR) και από τον Ιανουάριο του 2001, διατραπεζικά επιτόκια προσφοράς στη ζώνη του ευρώ (EURIBOR). Πηγή εύρεσης των δεδομένων αποτελούν τα Στατιστικά Δελτία Οικονομικής Συγκυρίας που διατίθενται από την Τράπεζα της Ελλάδος. Αναλυτικά οι παρατηρήσεις των επιτοκίων για κάθε μήνα δίνονται στο παράρτημα της εργασίας. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται γραφικά η πορεία των επιτοκίων:



Διάγραμμα *6.1*

Όπως παρατηρούμε, τα επιτόκια ξεκινούν τον Αύγουστο του 1995 σε ένα επίπεδο γύρω στο 15% και φθίνουν με σταθερό ρυθμό για να φτάσουν σε επίπεδο περίπου 2% τον Αύγουστο του 2004. Γύρω στην $30^η$ παρατήρηση της χρονοσειράς (Ιανουάριος 1998) παρουσιάζεται μία απότομη άνοδος στο 18,6%, όπου παρατηρείται και η μεγαλύτερη τιμή των επιτοκίων. Η καθοδική πορεία των επιτοκίων, από το σημείο αυτό είναι πιο έντονη και επιταχύνεται ιδιαίτερα από την $50^η$ περίπου παρατήρηση (Σεπτέμβριος 1999) και έπειτα.

6.3 Έλεγχος μοντέλων Vasicek, Merton και Dothan

Προσαρμόζοντας στις σχέσεις (*6.2*) και (*6.3*) τους περιορισμούς που θέτει το μοντέλο Vasicek για τις παραμέτρους *α*, *b* και *γ*, έχουμε:

$$r_{t+1} - r_t = a + br_t + e_{t+1} \Rightarrow r_{t+1} = a + (1+b)r_t + e_{t+1}, \qquad (6.4)$$

όπου

$$E[e_{t+1}] = 0 \quad \text{και} \quad E\left[e_{t+1}^2\right] = s^2 .$$

Έτσι, οδηγούμαστε στην ουσία σε ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτου βαθμού (AR(1)), με σταθερή διακύμανση σφαλμάτων σ^2.

Θέτοντας τους περιορισμούς του μοντέλου Merton για τις παραμέτρους *α*, *b* και *γ* στις σχέσεις (*6.2*) και (*6.3*), θα έχουμε:

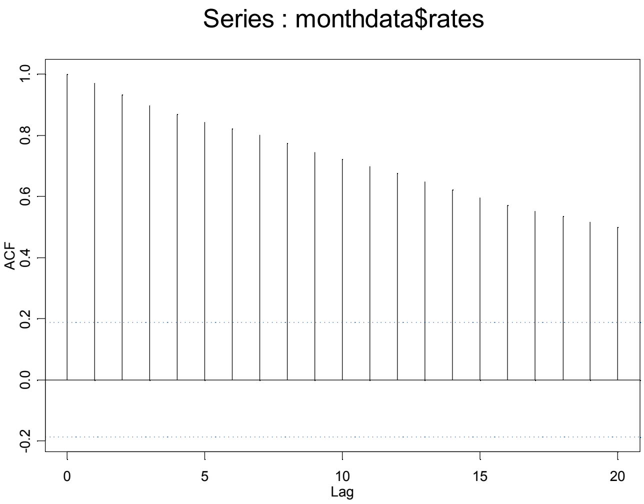
$$r_{t+1} - r_t = a + e_{t+1} \Rightarrow r_{t+1} = a + r_t + e_{t+1}, \qquad (6.5)$$

όπου

$$E[e_{t+1}] = 0 \quad \text{και} \quad E\left[e_{t+1}^{2}\right] = s^{2},$$

όπου και πάλι έχουμε να κάνουμε με ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτου βαθμού με σταθερή διακύμανση σφαλμάτων σ^2.

Για να εφαρμόσουμε το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο (*6.4*) στα δεδομένα μας, θα πρέπει η χρονοσειρά να είναι στάσιμη. Παρ' όλα αυτά, παρατηρούμε από το Διάγραμμα *6.1* ότι τα επιτόκια παρουσιάζουν μία ξεκάθαρα καθοδική τάση. Συνεπώς, απορρίπτουμε την υπόθεση της στασιμότητας για τη συγκεκριμένη χρονοσειρά. Επίσης, μπορούμε να εξετάσουμε το διάγραμμα των πρώτων 20 αυτοσυσχετίσεων (κορελόγραμμα) της χρονοσειράς, όπου παρατηρούμε ότι οι αυτοσυσχετίσεις δεν φθίνουν απότομα, όπως θα έπρεπε να γίνει για να θεωρηθεί η χρονοσειρά στάσιμη, αλλά παραμένουν στατιστικά σημαντικές (Διάγραμμα *6.2*):



Διάγραμμα *6.2*

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε πως το μοντέλο Vasicek δεν έχει την κατάλληλη προσαρμογή στα δεδομένα μας. Στα ίδια συμπεράσματα οδηγούμαστε και για το μοντέλο του Merton. Επειδή και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε να κάνουμε με ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτου βαθμού, είναι αδύνατο να πραγματοποιήσουμε την ανάλυση μας, λόγω της μη-στασιμότητας που παρουσιάζουν τα δεδομένα. Συνεπώς, απορρίπτουμε και το μοντέλο Merton ως μη κατάλληλο για την ερμηνεία της διάρθρωσης των επιτοκίων.

Αν θέσουμε στις αρχικές σχέσεις (*6.2*) και (*6.3*) τους περιορισμούς που επιβάλει το μοντέλο Dothan, θα έχουμε:

$$r_{t+1} - r_t = e_{t+1} \Rightarrow \Delta r_t = e_t,$$

όπου

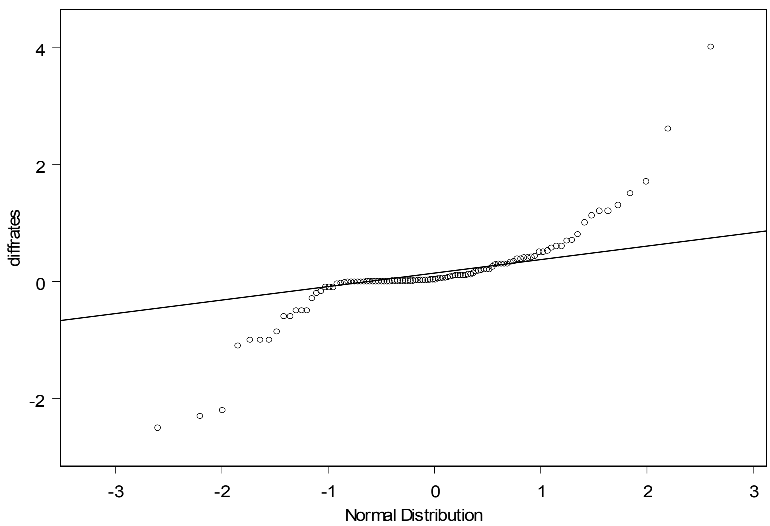
$$E[e_{t+1}] = 0 \;\; \text{και} \;\; E\left[e_{t+1}^{2}\right] = s^{2} r_t^{2} .$$

Δηλαδή, η διαφορά των επιτοκίων από τη μία χρονική στιγμή στην επόμενη θα ισούται με τα σφάλματα του μοντέλου. Επίσης, η διακύμανση των σφαλμάτων δεν θα είναι σταθερή, όπως στα μοντέλα Merton και Vasicek που εξετάσαμε, αλλά θα αυξάνεται καθώς θα αυξάνονται τα επιτόκια.

Για να ελέγξουμε την κανονικότητα των σφαλμάτων, μπορούμε να θέσουμε ως νέα μεταβλητή τις διαφορές Δr_t και να εφαρμόσουμε τον απαραμετρικό έλεγχο Kolmogorov-Smirnov μέσα από το στατιστικό πακέτο *S-PLUS*:

```
One sample Kolmogorov-Smirnov Test of Composite Normality

data:  diffrates in monthdata
ks = 0.2408, p-value = 0
alternative hypothesis:
  True cdf is not the normal distn. with estimated parameters
sample estimates:
 mean of x standard deviation of x
 0.1196296               0.7589502
```

Από την τιμή του *p-value*, που είναι μηδενική, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση της κανονικότητας των σφαλμάτων. Τα ίδια συμπεράσματα βγάζουμε από το *Q-Q Plot* που ακολουθεί:



Διάγραμμα *6.3*

Και από τον διαγραμματικό έλεγχο *6.3*, απορρίπτουμε την υπόθεση ότι η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για να ελέγξουμε την ανεξαρτησία των σφαλμάτων, κάνουμε έναν έλεγχο ροών, μέσω του στατιστικού πακέτου *SPSS*. Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Runs Test

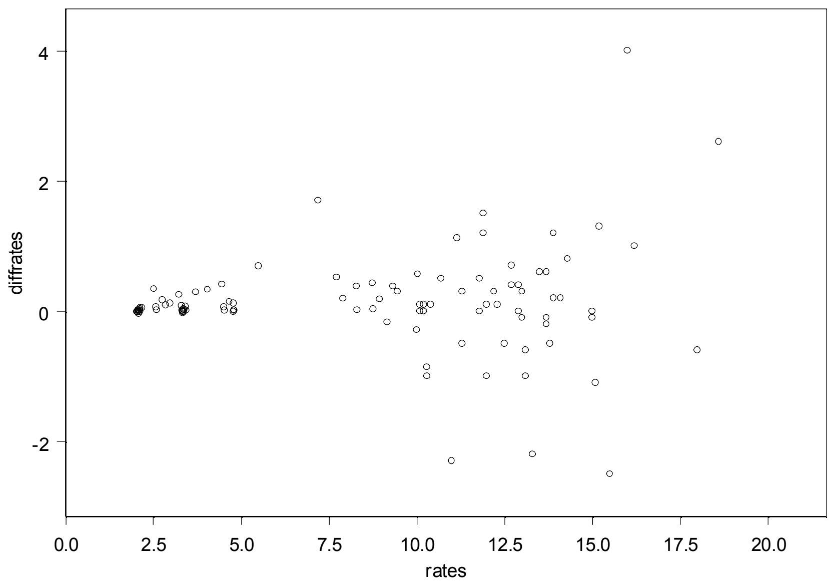
	DIFRATES
Test Value[a]	3,000E-02
Cases < Test Value	52
Cases >= Test Value	56
Total Cases	108
Number of Runs	45
Z	-1,922
Asymp. Sig. (2-tailed)	,055

a. Median

Πίνακας *6.3*

Παρατηρούμε ότι δεν απορρίπτουμε οριακά την υπόθεση της ανεξαρτησίας των σφαλμάτων σε επίπεδο σημαντικότητας 5% αφού η τιμή του *p-value* είναι 0,055 > 0,050.

Για να δούμε πως συμπεριφέρεται η διακύμανση της μεταβλητής Δr_t και συνεπώς των σφαλμάτων, παίρνουμε το διάγραμμα διασποράς (*scatter plot*) μεταξύ των σφαλμάτων και των επιτοκίων:



Διάγραμμα *6.4*

Παρατηρούμε ότι όταν τα επιτόκια βρίσκονται σε χαμηλά επίπεδα, τα σημεία συσσωρεύονται γύρω από το μηδέν, ενώ καθώς αυξάνονται τα επιτόκια, βρίσκονται όλο και πιο διάσπαρτα στο χώρο και η διακύμανσή τους μεγαλώνει. Δηλαδή, η υπόθεση του μοντέλου Dothan για τη διακύμανση ισχύει. Σε σύγκριση με τα μοντέλα Merton και Vasicek, θα μπορούσαμε να πούμε πως το μοντέλο Dothan έχει καταλληλότερη προσαρμογή στα δεδομένα μας.

6.3 Έλεγχος μοντέλου CIR

Οι περιορισμοί του μοντέλου CIR για τις παραμέτρους *α*, *b* και *γ* μετατρέπουν τις σχέσεις (*6.2*) και (*6.3*) ως εξής:

$$r_{t+1} - r_t = a + br_t + e_{t+1} \Rightarrow r_{t+1} = a + (1+b)r_t + e_{t+1}, \tag{6.6}$$

όπου

$$E[e_{t+1}] = 0 \quad \text{και} \quad E\left[e_{t+1}^2\right] = s^2 r_t. \tag{6.7}$$

Επομένως, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους *α* και *b* παίρνοντας τη σχέση (*6.6*) σαν ένα γραμμικό μοντέλο. Παρ' όλα αυτά, από τη σχέση (*6.7*), παρατηρούμε ότι η διακύμανση δεν είναι σταθερή, αλλά αυξάνεται καθώς αυξάνονται τα επιτόκια r_t. Έτσι, προκειμένου να κάνουμε το μοντέλο (*6.6*) ομοσκεδαστικό, για να πραγματοποιήσουμε την ανάλυση μας, διαιρούμε όλους τους παράγοντες με τη μεταβλητή $\sqrt{r_t}$. Έτσι, το μοντέλο (*6.6*) γίνεται:

$$\frac{r_{t+1}}{\sqrt{r_t}} = \frac{a}{\sqrt{r_t}} + \frac{(1+b)r_t}{\sqrt{r_t}} + \frac{e_t}{\sqrt{r_t}}. \tag{6.8}$$

Το νέο μοντέλο (*6.8*) είναι και αυτό ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης της μορφής:

$$r'_{t+1} = ar_{1t} + (1+b)r_{2t} + u_t, \tag{6.9}$$

όπου

$$r'_{t+1} = \frac{r_{t+1}}{\sqrt{r_t}}$$

$$r_{1t} = \frac{1}{\sqrt{r_t}}$$

$$r_{2t} = \sqrt{r_t}.$$

Ενώ για τα σφάλματα θα ισχύει:

$$u_t = \frac{e_t}{\sqrt{r_t}} \Rightarrow Var(u_t) = Var\left(\frac{e_t}{\sqrt{r_t}}\right) \Rightarrow Var(u_t) = \frac{s^2 r_t}{r_t} = s^2.$$

Δηλαδή, η διακύμανση για το μοντέλο (*6.9*) είναι σταθερή, γεγονός που εξασφαλίζει ομοσκεδαστικότητα. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων *α* και *b* που θα πραγματοποιήσουμε για το μοντέλο (*6.9*), ισοδυναμούν με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων *α* και *b* του αρχικού μοντέλου (*6.6*), αλλά με διαφορετική ερμηνεία. Για παράδειγμα, στο μοντέλο (*6.9*), δεν υπάρχει σταθερός όρος και φυσικά οι ερμηνευτικές μεταβλητές έχουν οριστεί διαφορετικά. Τα σχετικά αποτελέσματα από το στατιστικό πακέτο *S-PLUS* έχουν ως εξής:

```
*** Linear Model ***
Call:
lm(formula = ratess ~ ratesx1 + ratesx2, data =
      monthdata, na.action = na.exclude)

Coefficients:
 (Intercept)   ratesx1   ratesx2
    1.360446 -1.438855 0.7387682

Degrees of freedom: 108 total; 105 residual
1 observations deleted due to missing values
Residual standard error: 0.2127062

Call: lm(formula = ratess ~ ratesx1 + ratesx2, data =
      monthdata, na.action = na.exclude)
Residuals:
     Min       1Q   Median      3Q   Max
 -0.6439 -0.08953 -0.00725 0.05402 1.115

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.3604  0.5067     2.6849  0.0084
    ratesx1 -1.4389  0.5713    -2.5188  0.0133
    ratesx2  0.7388  0.0997     7.4133  0.0000

Residual standard error: 0.2127 on 105 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9461
F-statistic: 921.5 on 2 and 105 degrees of freedom, the p-value is 0
1 observations deleted due to missing values

Analysis of Variance Table

Response: ratess

Terms added sequentially (first to last)
           Df Sum of Sq  Mean Sq  F Value
  ratesx1   1  80.89572 80.89572 1787.991
  ratesx2   1   2.48646  2.48646   54.957
Residuals 105   4.75061  0.04524
                 Pr(F)
  ratesx1 0.000000e+000
  ratesx2 3.289691e-011
Residuals
```

Από την παραπάνω ανάλυση, εκτιμούμε τις παραμέτρους ως εξής:

$$\hat{a} = -1{,}4389$$

$$(1+\hat{b}) = 0{,}7388 \Rightarrow \hat{b} = -0{,}2612.$$

Οι εκτιμήσεις αυτές θεωρούνται στατιστικά σημαντικές αφού τα *p-values* για τις παραμέτρους a και b είναι αντίστοιχα 0,0133 και 0, δηλαδή κατά πολύ μικρότερα του επιπέδου σημαντικότητας 0,05.

Κάνοντας έλεγχο ροών για τα σφάλματα, ελέγχουμε την μεταξύ τους ανεξαρτησία. Τα σχετικά αποτελέσματα από το στατιστικό πακέτο *SPSS* είναι:

Runs Test

	RESID
Test Value[a]	-7,25E-03
Cases < Test Value	54
Cases >= Test Value	54
Total Cases	108
Number of Runs	41
Z	-2,707
Asymp. Sig. (2-tailed)	,007

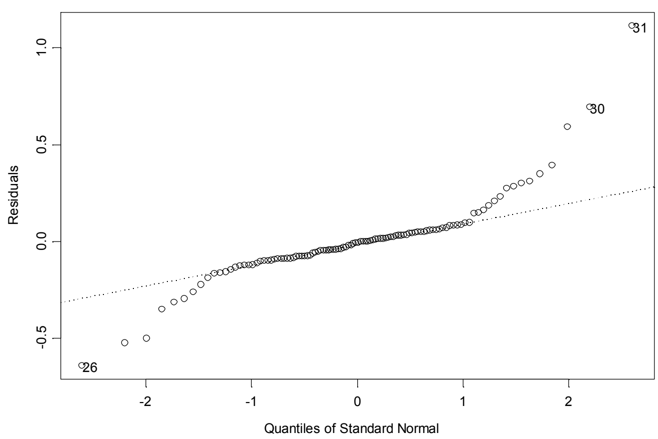
a. Median

Πίνακας *6.4*

Παρατηρούμε ότι το *p-value* είναι 0,007 κατά πολύ μικρότερο του επιπέδου σημαντικότητας 0,05. Έτσι απορρίπτουμε την υπόθεση ανεξαρτησίας των σφαλμάτων. Επιπλέον, κάνοντας έλεγχο κανονικότητας για τα σφάλματα του προσαρμοσμένου μοντέλου (*6.9*), με το απαραμετρικό τεστ Kolmogorov-Smirnov, έχουμε:

```
One sample Kolmogorov-Smirnov Test of Composite Normality

data:  residuals in monthdata
ks = 0.1877, p-value = 0
alternative hypothesis:
  True cdf is not the normal distn. with estimated
parameters
sample estimates:
      mean of x standard deviation of x
 -1.381354e-018               0.2107089
```

Δηλαδή, απορρίπτουμε την υπόθεση κανονικότητας των σφαλμάτων αφού το *p-value* είναι μηδέν. Ακολουθεί ο διαγραμματικός έλεγχος *Q-Q Plot*, που μας οδηγεί σε παρόμοια συμπεράσματα:



Διάγραμμα *6.5*

Τα σημεία των δεδομένων δεν έχουν τη σωστή προσαρμογή στην ευθεία της κανονικής κατανομής, ιδίως στην αριστερή και δεξιά ουρά. Οι αποστάσεις των σημείων είναι αρκετά μεγάλες ώστε να απορρίψουμε την αρχική υπόθεση ότι τα σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Το γεγονός ότι τα σφάλματα ούτε είναι ανεξάρτητα ούτε προέρχονται από την κανονική κατανομή, επηρεάζει τη συνέπεια και αξιοπιστία των εκτιμήσεων των παραμέτρων που πραγματοποιήσαμε. Συνεπώς, δεν μπορούμε να δεχτούμε το μοντέλο CIR ως το πιο κατάλληλο για τα δεδομένα μας.

6.4 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω ανάλυση, θα μπορούσαμε να πούμε πως την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα που έχουμε επιλέξει, την παρουσιάζει το μοντέλο Dothan σε σχέση με τα μοντέλα Merton, Vasicek και CIR. Στα ίδια συμπεράσματα είχαν οδηγηθεί περίπου και οι Chan κ.α. (1992), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αποτελεί γενικό κανόνα. Καθοριστικό ρόλο λοιπόν για την επιλογή ενός μοντέλου παίζει η παράμετρος γ, που μαρτυρεί τη σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας και του επιπέδου των επιτοκίων. Σε δεύτερη μοίρα έρχονται διάφορα άλλα κριτήρια, όπως το αν επιτρέπει το μοντέλο αρνητικά επιτόκια ή αν συγκαταλέγεται στην κατηγορία των μοντέλων που έχουν ως θεωρητική βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους ή την ισορροπία στην αγορά. Σύμφωνα με τους Chan κ.α., η θεωρητική επιτήδευση των μοντέλων που προέρχεται από την τήρηση της επιστροφής στο μέσο για τα επιτόκια, δεν είναι απαραίτητα αναγκαία σε εμπειρικό-πρακτικό επίπεδο. Πιο απλά, και λιγότερο γνωστά μοντέλα, όπως αυτό του Dothan, ενδεχομένως να έχουν καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Αποδέχοντας το μοντέλο Dothan ως το πιο κατάλληλο, συμπεραίνουμε πως για τα μηνιαία επιτόκια που έχουμε επιλέξει, η μεταβλητότητα αυξάνεται σημαντικά καθώς αυξάνονται και τα επιτόκια. Όπως είδαμε, κάτι τέτοιο ισχύει και για το μοντέλο CIR. Ο ρυθμός όμως αύξησης της μεταβλητότητας για το μοντέλο Dothan είναι πιο έντονος από αυτόν του μοντέλου CIR, γεγονός που ενδεχομένως να παίζει ρόλο στην επιλογή του ως πιο κατάλληλου μοντέλου, δεδομένης της πορείας των εν λόγω επιτοκίων.

Ενδεχομένως, αν μελετούσαμε και συγκρίναμε τα τέσσερα μοντέλα ως προς την προσαρμογή τους, πάνω σε επιτόκια μίας διαφορετικής οικονομίας, τότε τα συμπεράσματά μας θα ήταν διαφορετικά. Συνήθως, σε ανεπτυγμένες οικονομίες, οι χρονοσειρές των επιτοκίων, π.χ. για βραχυπρόθεσμες κρατικές ομολογίες, παρουσιάζουν στασιμότητα. Δηλαδή, τα επιτόκια κυμαίνονται στα ίδια περίπου επίπεδα καθ' όλη την περίοδο που εξετάζονται. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι για τα ελληνικά δεδομένα που έχουμε λάβει, υπάρχει σαφής καθοδική τάση, γεγονός που επηρεάζει άμεσα την προσαρμογή και καταλληλότητα των μοντέλων.

7. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή, παρουσιάστηκαν βασικές έννοιες που πλαισιώνουν θεωρητικά τη διάρθρωση επιτοκίων. Σκοπός ήταν να αποφευχθεί η έντονη θεωρητική επιτήδευση και να αποδοθούν με τρόπο κατανοητό και προσιτό έννοιες όπως η θεωρία των προσδοκιών, το πριμ διάρκειας, το πριμ ρευστότητας, η διακύμανση των επιτοκίων, η τιμολόγηση προϊόντων κ.α. Οι έννοιες αυτές παίζουν σημαντικό ρόλο στα πλαίσια μιας οικονομίας, καθώς καθορίζουν τη συμπεριφορά των επενδυτών, αντικατοπτρίζουν την κατάσταση του πληθωρισμού, αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για τις νομισματικές αρχές. Δεν θα πρέπει, δηλαδή, να θεωρηθεί η διάρθρωση επιτοκίων μία παρωχημένη θεωρία, αλλά ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας με πλούσιο και συνεχώς αυξανόμενο πρακτικό ενδιαφέρον, στο χώρο της χρηματοοικονομικής ανάλυσης.

Όσον αφορά το πρακτικό μέρος της εργασίας αυτής, σκοπός ήταν να εφαρμοστεί κομμάτι της θεωρίας σε πραγματικά δεδομένα. Το γεγονός ότι στην ουσία απορρίφθηκε η υπόθεση των προσδοκιών στο πέμπτο κεφάλαιο, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ισχύει απόλυτα μία από τις υπόλοιπες θεωρίες. Σημαντικό ρόλο για τέτοιου είδους συμπεράσματα παίζει ο υπολογισμός διαφόρων συνισταμένων, όπως το γενικό οικονομικό κλίμα και η επιτοκιακή πολιτική των αρχών μίας οικονομίας. Όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, καμία θεωρία για τη διάρθρωση επιτοκίων δεν ισχύει αποκλειστικά, αλλά όλες ρίχνουν το δικό τους φως στην ερμηνεία της συμπεριφοράς των επιτοκίων.

Επίσης, ο λόγος που παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν τέσσερα συγκεκριμένα μοντέλα για τη διάρθρωση των επιτοκίων, είναι ότι αυτά ήταν εύκολο να αποτελέσουν και αντικείμενο συγκριτικής μελέτης σε πρακτικό επίπεδο. Κοινά σημεία των μοντέλων όπως το ότι αφορούσαν και τα τέσσερα ένα παράγοντα (τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια) και παρουσίαζαν την ιδιότητα της επιστροφής στο μέσο, βοήθησε στη μεταξύ τους εμπειρική σύγκριση. Το γεγονός ότι στο έκτο κεφάλαιο επιλέχθηκε ως πιο κατάλληλο το μοντέλο του Dothan για τα συγκεκριμένα δεδομένα, δεν σημαίνει ότι αποτελεί και τη μόνη λύση. Υπάρχει τεράστια ποικιλία μεταξύ μοντέλων για τη διάρθρωση επιτοκίων που δεν παρουσιάστηκαν στη συγκεκριμένη εργασία γιατί θα ξέφευγε από τους σκοπούς της. Η επιλογή ενός τέτοιου μοντέλου είναι ένα ερώτημα που απασχολεί τους χρηματοοικονομικούς αναλυτές σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο.

Υπάρχει τεράστια βιβλιογραφία στο εξωτερικό που αναφέρεται στη διάρθρωση των επιτοκίων και στην ανάλυση θεωρητικών εννοιών και μοντέλων. Λόγω της εξάπλωσης της αγοράς των επιτοκιακών παραγώγων, όλο και περισσότεροι αναλυτές στρέφουν το ενδιαφέρον τους στην ερμηνεία της διάρθρωσης των επιτοκίων. Καθώς αποτελεί σημαντικό χρηματοοικονομικό εργαλείο, είναι ένα αντικείμενο μελέτης με συνεχή τρέχουσα εξέλιξη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Έτος	Μήνας	Διάρκεια Επιτοκίων			
		1 μηνός	3 μηνών	6 μηνών	12 μηνών
1995	Αύγ	15,00	-	-	-
	Σεπτ.	15,00	-	-	-
	Οκτ.	15,10	-	-	-
	Νοέμ.	16,20	-	-	-
	Δεκ.	15,20	-	-	-
1996	Ιαν.	13,90	-	-	-
	Φεβ.	13,70	-	-	-
	Μάρ.	13,90	-	-	-
	Απρ.	13,70	-	-	-
	Μάιος	13,80	-	-	-
	Ιούν.	14,30	-	-	-
	Ιούλ.	13,50	-	-	-
	Αύγ	12,90	-	-	-
	Σεπτ.	12,90	-	-	-
	Οκτ.	12,50	-	-	-
	Νοέμ.	13,00	-	-	-
	Δεκ.	12,70	-	-	-
1997	Ιαν.	12,00	-	-	-
	Φεβ.	11,90	-	-	-
	Μάρ.	10,40	-	-	-
	Απρ.	10,30	-	-	-
	Μάιος	11,30	-	-	-
	Ιούν.	11,80	-	-	-
	Ιούλ.	11,80	11,10	11,00	11,00
	Αύγ	11,30	11,20	11,10	11,00
	Σεπτ.	11,00	11,10	11,00	11,00
	Οκτ.	13,30	14,60	27,00	24,30
	Νοέμ.	15,50	14,50	14,40	14,30
	Δεκ.	18,00	15,10	15,20	15,10
1998	Ιαν.	18,60	18,40	18,00	17,30
	Φεβ.	16,00	17,60	17,50	17,10
	Μάρ.	12,00	12,50	12,30	12,10
	Απρ.	13,00	13,20	12,70	12,30
	Μάιος	13,10	13,20	12,90	12,30
	Ιούν.	13,70	13,40	13,00	12,30
	Ιούλ.	13,10	13,10	12,70	12,10
	Αύγ	14,10	13,60	13,10	12,50
	Σεπτ.	13,90	13,90	13,60	13,10
	Οκτ.	12,70	12,70	12,10	12,40

	Νοέμ.	12,30	12,00	11,70	11,20
	Δεκ.	12,20	11,90	11,50	10,90
1999	Ιαν.	11,90	11,70	11,30	10,70
	Φεβ.	10,70	10,70	10,50	10,10
	Μάρ.	10,20	10,10	9,90	9,60
	Απρ.	10,20	10,10	9,80	9,40
	Μάιος	10,10	10,00	9,60	9,10
	Ιούν.	10,10	10,10	9,70	9,00
	Ιούλ.	10,10	10,10	9,70	9,10
	Αύγ	10,10	10,10	9,90	9,30
	Σεπτ.	10,00	10,00	9,80	9,10
	Οκτ.	10,29	10,30	9,96	9,20
	Νοέμ.	11,15	10,96	10,25	9,39
	Δεκ.	10,03	9,82	9,54	8,85
2000	Ιαν.	9,46	9,13	8,69	7,92
	Φεβ.	9,16	8,72	8,17	7,24
	Μάρ.	9,33	8,90	8,14	7,03
	Απρ.	8,95	8,69	7,99	6,81
	Μάιος	8,77	8,50	7,92	6,88
	Ιούν.	8,74	8,41	7,84	6,81
	Ιούλ.	8,31	8,16	7,70	6,66
	Αύγ	8,29	8,06	7,48	6,51
	Σεπτ.	7,91	7,57	6,72	6,19
	Οκτ.	7,72	7,03	6,22	5,87
	Νοέμ.	7,20	6,25	5,86	5,64
	Δεκ.	5,50	5,20	5,14	5,08
2001	Ιαν.	4,81	4,77	4,68	4,58
	Φεβ.	4,80	4,76	4,67	4,59
	Μάρ.	4,78	4,71	4,58	4,47
	Απρ.	4,79	4,69	4,57	4,49
	Μάιος	4,67	4,64	4,57	4,53
	Ιούν.	4,53	4,45	4,35	4,31
	Ιούλ.	4,52	4,47	4,39	4,31
	Αύγ	4,46	4,35	4,22	4,11
	Σεπτ.	4,05	3,98	3,88	3,77
	Οκτ.	3,72	3,60	3,46	3,37
	Νοέμ.	3,43	3,39	3,26	3,20
	Δεκ.	3,42	3,34	3,26	3,30
2002	Ιαν.	3,35	3,34	3,34	3,48
	Φεβ.	3,34	3,36	3,40	3,59
	Μάρ.	3,35	3,39	3,50	3,82

	Απρ.	3,34	3,41	3,54	3,86
	Μάιος	3,37	3,46	3,62	3,95
	Ιούν.	3,38	3,46	3,59	3,87
	Ιούλ.	3,36	3,41	3,48	3,64
	Αύγ	3,33	3,35	3,38	3,44
	Σεπτ.	3,32	3,31	3,27	3,24
	Οκτ.	3,31	3,26	3,17	3,13
	Νοέμ.	3,23	3,12	3,04	3,02
	Δεκ.	2,98	2,94	2,89	2,87
2003	Ιαν.	2,86	2,83	2,76	2,71
	Φεβ.	2,77	2,69	2,58	2,50
	Μάρ.	2,60	2,53	2,45	2,41
	Απρ.	2,58	2,53	2,47	2,45
	Μάιος	2,52	2,40	2,32	2,26
	Ιούν.	2,18	2,15	2,08	2,01
	Ιούλ.	2,13	2,13	2,09	2,08
	Αύγ	2,12	2,14	2,17	2,28
	Σεπτ.	2,13	2,15	2,18	2,26
	Οκτ.	2,10	2,14	2,17	2,30
	Νοέμ.	2,09	2,16	2,22	2,41
	Δεκ.	2,13	2,15	2,20	2,38
2004	Ιαν.	2,08	2,09	2,12	2,22
	Φεβ.	2,06	2,07	2,09	2,16
	Μάρ.	2,04	2,03	2,02	2,06
	Απρ.	2,05	2,05	2,06	2,16
	Μάιος	2,06	2,09	2,14	2,30
	Ιούν.	2,08	2,11	2,19	2,40
	Ιούλ.	2,08	2,12	2,19	2,36
	Αύγ	2,08	2,11	2,17	2,30

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αρσένη, Α. (1997), Ομολογιακά Δάνεια, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων*.

Καπελλάκη, Ν. (2003), The predictive power of the term structure for real economic activity, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής*.

Ξένος – Γαβριέλης, Δ. (2003) Η αγορά των εταιρικών ομολόγων στην Ελλάδα, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής*.

Παπούλιας, Γ. (1993), *Χρηματοοικονομική Διοίκηση*, Εκδόσεις Παπούλια.

Ρόκας, Α. (1996), *Εμπορικές Εταιρίες*, Εκδόσεις Σάκκουλα.

Ξένη

Anthony, M., Biggs, N. (1996) *Mathematics for economics and finance: methods and modelling*, Cambridge University Press.

Boero, G., Torricelli, C. (1996) A comparative evaluation of alternative models of the term structure of interest rates, *European Journal of Operational Research,* **93**, 205-223.

Brealy, R.A., Myers, S.C. (1991) *Principles of corporate finance*, Mc Graw-Hill.

Brigham, E.F., (1971) *Readings in managerial finance, edited by Eugene F. Brigham*, Holt, Rinehart and Winston.

Brigham, E.F., Houston J.F. (1998) *Fundamentals of financial management*, The Dryden Press.

Brigham, E.F., Gapenski, L.C. (1997) *Financial management: theory and practice*, The Dryden Press.

Brown, S.J., Dybvig P.H. (1986) The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, **41**, 617-629.

Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.B. (1992), An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *The Journal of Finance*, **47**/**3**,1209-1227.

Chatfield, C. (1996) *The analysis of time series: an introduction*, Chapman & Hall.

Clewlow, L., Strickland, C. (1998) *Implementing derivative models*, Wiley.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1981) A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, **36**, 769-799.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1985a) An intertemporal general equilibrium model of asset pricing, *Econometrica*, **53**, 363-384.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1985b) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385-407.

Gerlach, S., Smets, F. (1997) The term structure of Euro-rates: some evidence in support of the expectations hypothesis, *Journal of International Money and Finance*, **16**/**2**, 305-321.

Gibson, R., Lhabitant, F.-S., Talay, D. (2001) Modelling the term structure of interest rates: a review of the literature, www.risklab.ch

Hull, J.C. (2000) *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall, Inc.

Khoury, S., Parsons, T. (1981) *Mathematical methods in finance and economics*, North-Holland.

Lee, T.K.Y., Tse, Y.K. (1991) Term structure of interest rates in the Singapore Asian Dollar market, *Journal of Applied Econometrics*, **6**, 143-152.

Lyuu, Y.-D. (2002) *Financial engineering and computation, principles, mathematics, algorithms*, Cambridge University Press.

Masera, R.S., (1972) *The term structure of interest rates, an expectations model tested on post-war Italian data*, Oxford University Press.

Neftci, S.N. (2000) *An introduction to the mathematics of financial derivatives*, Academic Press.

Peirson, G., Bird, R.G., Brown, R.L. (1985) *Business finance*, Mc Graw-Hill.

Rebonato, R. (1998), *Interest-rate option models*, Wiley.

Ross, S.A., Westerfield, R.W., Jaffe, J.F. (1996) *Corporate finance*, Irwin.

Schotman, P.C. (1997) Small sample properties of the regression test of the expectations model of the term structure, *Economics Letters*, **57**, 129-134.

Zivot, E., Wang, J. (2003) *Modelling financial time series with S-Plus*, Springer.