Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν Σ Τ Η Ν Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Σ Τ Ι Κ Η Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Κ Α Ι Δ Ι Ο Ι Κ Η Τ Ι Κ Η Κ Ι Ν Δ Υ Ν Ο Υ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ – ΕΠΙΒΑΡΥΝΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗ ΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ ΈΝΑΝΤΙ ΤΡΙΤΩΝ ΣΤΟΝ ΚΛΑΔΟ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ

Μάρκος Ν. Τρικούππης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2012

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Κ Α Ι   Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α   Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν   Σ Τ Η Ν   Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Σ Τ Ι Κ Η   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η   Κ Α Ι   Δ Ι Ο Ι Κ Η Τ Ι Κ Η   Κ Ι Ν Δ Υ Ν Ο Υ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ – ΕΠΙΒΑΡΥΝΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗ ΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ ΈΝΑΝΤΙ ΤΡΙΤΩΝ ΣΤΟΝ ΚΛΑΔΟ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ

Μάρκος Ν. Τρικούππης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2012

Έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. 5η/11-04-2011 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Βρόντος Σπυρίδων (Επιβλέπων)

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος.

- Νεκτάριος Μιλτιάδης.

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η ιστορία των ανθρώπων και των αυτοκινήτων τους είναι μια από τις μεγαλύτερες σχέσεις πάθους των τελευταίων δύο αιώνων. Το πρώτο αυτοκίνητο (ατμοκινούμενο) θεωρείται ότι το κατασκεύασε ο Nicolas Joseph Cugnot περίπου το 1769, σύμφωνα με την Britannica (http://www.britannica.com/EBchecked/topic/145966/Nicolas-Joseph-Cugnot), το οποίο ήταν ασταθές και ανετράπη χτυπώντας σε ένα τοίχο (Εικόνα 1), αποτελώντας έτσι και το πρώτο ατύχημα με αυτοκινούμενο όχημα στην ιστορία. Κάποιοι υποστηρίζουν ότι το πρώτο τροχαίο ατύχημα μεταξύ δύο αυτοκινήτων έγινε όταν ο συνολικός αριθμός ήταν μόλις 7 και δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε τι έγινε όταν η πρωτοποριακή γραμμή παραγωγής του Henry Ford άρχισε το 1908 να παράγει τα *Model T* (μέχρι το 1927 πουλήθηκαν συνολικά 15,5 εκ. αυτοκίνητα). Σύμφωνα με την Global Economic Research (http://www.gbm.scotiabank.com/English/bns_econ/bns_auto.pdf) το 2011 πουλήθηκαν συνολικά στον κόσμο 58.890.000 αυτοκίνητα (φορτηγά και επιβατικά).

Εικόνα 1 - Η σύγκρουση του αυτοκινήτου του Nicolas Joseph Cugnot σε ένα πέτρινο τοίχο – Πηγή http://philippe.boursin.perso.sfr.fr/cugnot.htm

Μια από τις χειρότερες συνέπειες της χρήσης των αυτοκινήτων είναι τα ατυχήματα και οι απώλειες ανθρώπινων ζωών. Υπολογίζεται ότι 1.200.000 θάνατοι ετησίως οφείλονται σε αυτοκινητιστικά δυστυχήματα (το 2007 ήταν 1.237.797 σύμφωνα με τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας http://apps.who.int/ghodata/?vid=51210#). Όλα τα παραπάνω είναι μόνο ενδείξεις για το πόσο σημαντική είναι η ασφάλιση αυτοκινήτου και τον καθοριστικό ρόλο που έπαιξε στην ανάπτυξη της σημερινής κοινωνίας. Η ασφάλιση Αστικής Ευθύνης έχει ως συνέπεια γίνει υποχρεωτική στις περισσότερες αναπτυγμένες χώρες, και οι αναλογιστές από όλο τον κόσμο έρχονται αντιμέτωποι με το πρόβλημα σχεδιασμού ενός τιμολογίου όπου θα κατανέμει δίκαια το βάρος των απαιτήσεων μεταξύ των ασφαλισμένων.

Η θεμελιώδης αρχή της ασφάλισης βασίζεται στον σχηματισμό ενός *pool* στο οποίο οι ασφαλισμένοι τοποθετούν τους κινδύνους τους. Εάν όλοι αυτοί οι κίνδυνοι δεν είναι ίσοι μεταξύ τους, είναι δίκαιο να ζητήσουμε από κάθε μέλος να πληρώσει ένα ασφάλιστρο το οποίο είναι ανάλογο στο μέγεθος του κινδύνου που τοποθετεί μέσα στο *pool*. Όταν κατασκευάζεται ένα τιμολόγιο, είναι σημαντικό να εκτιμάται ο υποβόσκων κίνδυνος του κάθε ασφαλισμένου έτσι ώστε το κόστος των ζημιών να διανέμεται δίκαια. Η βασική αποστολή ενός αναλογιστή στον σχεδιασμό ενός νέου τιμολογίου είναι να το κάνει όσο το δυνατόν πιο δίκαιο, με το να διαχωρίζει τα ασφαλιστήρια σε ομοιογενείς κλάσεις, με αποτέλεσμα οι ασφαλισμένοι που ανήκουν στην ίδια κλάση να πληρώνουν το ίδιο ασφάλιστρο. Στην Ασφάλιση Αστικής Ευθύνης αυτοκινήτου, οι κατηγορικές μεταβλητές – *a priori* μεταβλητές – που χρησιμοποιούνται για το διαχωρισμό/ κατηγοριοποίηση των κινδύνων σε κλάσεις, συνήθως περιλαμβάνουν την ηλικία και το φύλο του ασφαλισμένου, τον τύπο και την χρήση του αυτοκινήτου, καθώς και την πόλη διαμονής.

Αν μπορούσαν όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν τον κίνδυνο να ανιχνευτούν, μετρηθούν και εισαχθούν στην τιμολόγηση, τότε οι κλάσεις θα ήταν ομοιογενείς. Μεταβολές στα αποτελέσματα γύρω από την μέση τιμή θα υπάρχουν μόνο λόγω τυχαίων παραγόντων και δεν θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην επαναξιολόγηση του ασφαλίστρου. Δεν είναι άδικο να βάζεις τον ασφαλισμένο που δεν έχει καμία ζημιά να βοηθάει τους άλλους, αν όλοι τους είναι, εξίσου εκτεθειμένοι στον κίνδυνο: αυτή είναι και η βασική αρχή της ασφάλισης. Αλλά αυτό το συμπέρασμα δεν είναι πλέον λογικό εάν στην τιμολόγηση δεν έχουν περιληφθεί σημαντικές παράμετροι, η ιδιαίτερη σημασία των οποίων αναγνωρίζεται από την κοινή λογική και εμπειρία: οδηγικές ικανότητες όπως ακρίβεια στην κρίση, ταχύτητα των αντανακλαστικών, επιθετικότητα στο τιμόνι, γνώση του Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας (Κ.Ο.Κ.) και το εάν πίνει και οδηγεί (*drinking behavior*), δεν λαμβάνονται υπόψη στην τιμολόγηση ασφάλισης Αστικής Ευθύνης αυτοκινήτου, *a priori*, μιας και αυτές οι μεταβλητές δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν με ένα τρόπο έτσι ώστε να συμφέρει οικονομικά, με αποτέλεσμα οι κλάσεις να είναι ακόμα πιο ανομοιογενείς. Δύο έφηβες, που οδηγούν τον ίδιο τύπο αυτοκινήτου στην ίδια πόλη, μπορεί να εκτίθενται σε πολύ διαφορετικά μοτίβα ατυχήματος (*accident patterns*), λόγω της διαφοράς στην οδηγική συμπεριφορά. Έτσι προκύπτει η ιδέα να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις διαφορές αυτές *a posteriori*, με το να προσαρμόζουμε το ασφάλιστρο σύμφωνα με το ατομικό ιστορικό ζημιών.

Τιμολόγια που επιβάλουν κυρώσεις στους ασφαλισμένους που είναι υπεύθυνοι για ένα ή περισσότερα ατυχήματα με πρόσθετη επιβάρυνση ασφαλίστρου, και ανταμείβουν τους ασφαλισμένους που δεν έχουν κάποια ζημιά με έκπτωση, είναι τώρα σε ισχύ σε πολλές χώρες. Ο βασικός τους στόχος, εκτός του να ενθαρρύνουν τους ασφαλισμένους να οδηγούν πιο προσεχτικά, είναι να αξιολογούν καλύτερα τον ατομικό κίνδυνο, έτσι ώστε όλοι να πληρώσουν, μακροπρόθεσμα, ένα ασφάλιστρο που να ανταποκρίνεται στην δικιά τους συχνότητα απαιτήσεων. Ανάλογα με την χώρα, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναφέρουν: *no-claim discounts, experience-rated premiums, personalized premiums, merit-rating systems, driving penalty points*. Σε πολλές Ευρωπαϊκές και Ασιατικές χώρες η ορολογία που έχουν υιοθετήσει είναι *Bonus-Malus Systems* (BMS).

Η μελέτη ενός καλύτερου και πιο δίκαιου BMS είναι και ο σκοπός αυτής της εργασίας.

Παρά το γεγονός ότι το BMS χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των ασφαλίστρων για την μεικτή ασφάλιση (στην μεικτή ασφάλιση καλύπτονται και ιδίες ζημιές) ή για ειδικούς τύπους αυτοκινήτων που δεν αναφέρονται στην παρούσα μελέτη, είναι εύκολο οι ειδικές αυτές περιπτώσεις να αναλυθούν βάση των αποτελεσμάτων/ μοντέλων που θα αναπτύξουμε.

Για να αποφύγουμε αναρίθμητες επαναλήψεις, οι λέξεις ασφαλισμένος, ασφαλιζόμενος και οδηγός, χρησιμοποιούνται εναλλακτικά στην συνέχεια. Το ίδιο συμβαίνει και με τις λέξεις ασφαλιστής, ασφαλιστική εταιρεία και εταιρεία καθώς και ατύχημα, απαίτηση και ζημιά. Ατύχημα σημαίνει οποιοδήποτε ατύχημα με υπαιτιότητα του ασφαλισμένου το οποίο ενεργοποιεί την αύξηση του ασφαλίστρου στο BMS. Να σημειωθεί ότι διαφορετικές χώρες δίνουν διαφορετική έννοια στον όρο «ατύχημα». Αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις οποιοδήποτε αυτοκινητιστικό ατύχημα στο οποίο ο ασφαλισμένος οδηγός είναι τουλάχιστον εν μέρει υπεύθυνος οδηγεί σε προσαύξηση, σε κάποιες χώρες οι ζημιές πρέπει να υπερβαίνουν ένα δεδομένο ποσό ή το ποσοστό υπαιτιότητας στο ατύχημα πρέπει να υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο.

Σ' αυτήν την διπλωματικής εργασίας θα δούμε στο $1^{ο}$ κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στα BMS και την Ασφάλιση αυτοκινήτου. Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα Markovian BMS, στο $3^{ο}$ κεφάλαιο το Βέλτιστο BMS, ενώ στο $4^{ο}$ κεφάλαιο το Markovian – Βέλτιστο French BMS. Στο $5^{ο}$ κεφάλαιο θα γίνει εφαρμογή σε δεδομένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συστήματα τιμολόγησης στην Ασφάλιση αυτοκινήτου

1.1 Ασφάλιση Αυτοκινήτων

Σύμφωνα με τους Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., & Walhin, J.-F. (2007), η ασφάλιση περιουσίας και ευθύνης στα αυτοκίνητα διαχωρίζεται γενικότερα σε κάλυψη για ιδίες ζημιές και ευθύνης προς τρίτους. Η κάλυψη για ιδίες ζημιές παρέχει κάλυψη στην περίπτωση που το όχημα του ασφαλισμένου είναι υπεύθυνο για το ατύχημα και προστατεύει αυτόν και την ιδιοκτησία του. Η κάλυψη Αστικής Ευθύνης παρέχει προστασία στην περίπτωση που το όχημα του ασφαλισμένου προκάλεσε ζημιά σε τρίτους, οι οποίοι θα απαιτήσουν τα έξοδα τους από τον ασφαλισμένο. Η κάλυψη για ιδίες ζημιές μπορεί να περιλαμβάνει τραυματισμό του ιδίου του ασφαλισμένου και προνόμια όπως ιατροφαρμακευτικά έξοδα, αποζημίωση θανόντος και συμπληρωματικές καλύψεις.

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως η ασφάλιση Αστικής Ευθύνης είναι υποχρεωτική στις περισσότερες χώρες προκειμένου να επιτραπεί σ' ένα όχημα να κυκλοφορήσει στους δημόσιους δρόμους. Η υποχρεωτική ασφάλιση Αστικής Ευθύνης των αυτοκινήτων αντιπροσωπεύει ένα αξιόλογο μέρος των ετήσιων ασφαλίστρων στους κλάδους κατά ζημιών, στις αναπτυγμένες χώρες. Αυτό το μερίδιο των ασφαλίστρων γίνεται ακόμα πιο σημαντικό αν συμπεριληφθούν και τα ασφάλιστρα από την κάλυψη για ιδίες ζημιές, τέτοια όπως ιατρικά έξοδα, κάλυψη κατά ανασφάλιστων ή υπασφαλισμένων αυτοκινήτων (*collision and other than collision insurance*). Επιπροσθέτως, οι ασφαλιστικές εταιρείες διατηρούν μεγάλες τράπεζες δεδομένων που συγκεντρώνουν τα χαρακτηριστικά των ασφαλισμένων καθώς και το ιστορικό ζημιών. Η οικονομική σημαντικότητα και η διαθεσιμότητα λεπτομερών πληροφοριών εξηγεί γιατί ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας των αναλογιστών για ασφαλίσεις κατά ζημιών, είναι αφιερωμένο σ' αυτό το είδος ασφάλισης.

1.2 Σύστημα Επιβαρύνσεων VS Σύστημα Μη Ευθύνης

Η ασφάλιση ευθύνης παρέχει κάλυψη στον ασφαλισμένο εάν, ως οδηγός του ασφαλισμένου οχήματος, ζημιώσει περιουσία τρίτου. Εάν ο ασφαλισμένος εναχθεί για σωματική βλάβη ή υλική ζημιά από αμέλεια, η εταιρεία θα παρέχει νομική προστασία στον ασφαλισμένο. Εάν ο ασφαλισμένος κριθεί ένοχος, η εταιρεία θα πληρώσει, εκ μέρους του ασφαλισμένου, ζημιές για τις οποίες θα του αποδοθεί ευθύνη.

Στο σύστημα επιβαρύνσεων (*tort system*), η ασφαλιστική εταιρεία αποζημιώνει την ζημιά εάν πιστεύει ότι ο ασφαλισμένος είναι υπαίτιος του ατυχήματος ή εάν ο τρίτος μηνύσει τον ασφαλισμένο και αποδείξει ότι ήταν υπαίτιος του ατυχήματος. Είναι περιττό να πούμε, ότι ένα μεγάλο μέρος των εσόδων από τα ασφάλιστρα, καταναλώνεται σε αμοιβές δικηγόρων, έξοδα δικαστηρίων και σε διαχειριστικά έξοδα των ασφαλιστικών εταιρειών για την διαχείριση τέτοιων υποθέσεων. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο πολλά δικαστήρια στην Βόρια Αμερική έχουν υιοθετήσει ένα ασφαλιστικό σύστημα αυτοκινήτων μη ευθύνης (*no fault system*). Αλλά ακόμα και σε ένα αμιγές περιβάλλον μη ευθύνης, η αστυνομία ρωτάει τον οδηγό εάν ήταν υπαίτιος (ή τον βαθμό μέχρι τον οποίο ο οδηγός έχει ευθύνη) επειδή όταν υπάρχει υπαιτιότητα, επέρχεται αύξηση στα ασφάλιστρα, στην επόμενη ανανέωση του συμβολαίου.

1.3 Δημιουργία Τιμολογίου

Η τιμολόγηση του ατομικού κινδύνου βασισμένη στο κόστος είναι βασική αρχή στην αναλογιστική τιμολόγηση. Η τιμή που χρεώνεται στον ασφαλισμένο είναι η αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών εξόδων που σχετίζονται με την ασφαλιστική κάλυψη. Η προσέγγιση με το καθαρό ασφάλιστρο ορίζει την τιμή ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου ως την αναλογία του εκτιμώμενου κόστους όλων των μελλοντικών ζημιών που θα κληθεί να καλύψει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο σε όλη την διάρκεια του, συν τα έξοδα.

Η τιμολόγηση των ασφαλίσεων κατά ζημιών είναι βασισμένη στην κατανομή της συχνότητας των ζημιών και στην κατανομή του μεγέθους των ζημιών. Η συχνότητα των ζημιών ορίζεται ως το πλήθος των πραγματοποιηθεισών ζημιών ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο. Η έκθεση στον κίνδυνο μετριέται σε αυτοκινητο-έτη (*car-years*) για την Αστική

Ευθύνη αυτοκινήτου προς τρίτους. Ο μέσος όρος του μεγέθους της ζημιάς είναι η μέση τιμή της πληρωμής ανά πραγματοποιηθείσα ζημιά. Κάτω από ήπιες συνθήκες, το καθαρό ασφάλιστρο είναι το γινόμενο του μέσου όρου του πλήθους των ζημιών επί της μέσης τιμής του μεγέθους των ζημιών.

Στην ασφάλιση ευθύνης, ο διακανονισμός των μεγάλων ζημιών συνήθως απαιτεί χρόνια. Πολλά από τα δεδομένα που είναι διαθέσιμα για τα ατυχήματα των τελευταίων ετών θα είναι γι’ αυτό το λόγο ελλιπή, από την στιγμή που το κόστος των πιο πρόσφατων ζημιών δεν θα είναι γνωστό. Σ’ αυτήν την περίπτωση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν συντελεστές εξέλιξης ζημιών προκειμένου να υπολογίσουμε το τελικό εκτιμώμενο κόστος (βλέπε επίσης Renshaw (1989), Verrall (1991) και Wright (1990)). Το αναμενόμενο μέγεθος της ζημιάς είναι τότε βασισμένο στα δεδομένα των δηλωθεισών ζημιών. Σε αντιδιαστολή με τα δεδομένα των πληρωθεισών ζημιών (τα οποία είναι καθαρά αντικειμενικά, απεικονίζουν τις πραγματικές πληρωμές που έγιναν από την εταιρεία), τα δεδομένα των δηλωθεισών ζημιών εμπεριέχουν υποκειμενική εκτίμηση των αποθεμάτων. Ο αναλογιστής θα πρέπει να αναλύσει προσεκτικά τις μεγάλες απαιτήσεις, δεδομένου ότι απεικονίζουν ένα σημαντικό μέρος των ετήσιων εξόδων της εταιρείας.

1.4 Κατηγοριοποίηση Κινδύνων

Οι περισσότερες αναπτυγμένες χώρες χρησιμοποιούν αρκετές κατηγορικές μεταβλητές, προκειμένου να διαφοροποιήσουν το ασφάλιστρο μεταξύ των ασφαλισμένων για την Αστική Ευθύνη αυτοκινήτου. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών των μεταβλητών είναι η ηλικία, το φύλο, το επάγγελμα του οδηγού, η πόλη διαμονής και ο τύπος και η χρήση του αυτοκινήτου. Πιο εξειδικευμένες μεταβλητές, όπως η οικογενειακή κατάσταση του οδηγού και το αν καπνίζει ή όχι, ή ακόμα το χρώμα του αυτοκινήτου, έχουν χρησιμοποιηθεί από κάποιες χώρες. Αυτές οι μεταβλητές ονομάζονται μεταβλητές τιμολόγησης *a priori*, από την στιγμή που μπορούν να καθοριστούν προτού ο ασφαλισμένος ξεκινήσει να οδηγεί. Ο κύριος σκοπός τους είναι να κατηγοριοποιούν τους ασφαλισμένους σε ομοιογενείς κλάσεις. Στις μέρες μας, έχει γίνει εξαιρετικά δύσκολο για τις ασφαλιστικές εταιρείες να διατηρήσουν *cross subsidies* μεταξύ διαφορετικών ειδών κινδύνου σε μια ανταγωνιστική αγορά. Εάν, για παράδειγμα, αποδειχθεί ότι οι γυναίκες οδηγοί προκαλούν σημαντικά λιγότερα ατυχήματα από τους άντρες οδηγούς και μια εταιρεία αγνοήσει αυτήν την παράμετρο και χρεώσει ένα μέσο ασφάλιστρο σε όλους τους ασφαλισμένους ανεξάρτητα του φύλου, τότε οι περισσότερες ασφαλισμένες γυναίκες θα μπουν στον πειρασμό να πάνε σε άλλη εταιρεία, η οποία θα προσφέρει καλύτερο ασφάλιστρο στις γυναίκες οδηγούς. Σε αυτήν την περίπτωση η πρώτη ασφαλιστική εταιρεία θα μείνει με δυσανάλογο το πλήθος των ασφαλισμένων αντρών και μη αρκετά έσοδα από ασφάλιστρα για να πληρώσει τις ζημιές.

Για να αποφευχθούν κενά σε μια ανταγωνιστική αγορά, οι αναλογιστές θα πρέπει να σχεδιάσουν μια τιμολογιακή δομή, η οποία θα διανέμει δίκαια το βάρος των απαιτήσεων μεταξύ των ασφαλισμένων. Τα ασφαλιστήρια διαχωρίζονται σε κλάσεις με όλους τους ασφαλισμένους που ανήκουν στην ίδια κλάση να πληρώνουν το ίδιο ασφάλιστρο. Κάθε φορά που κάποιος ανταγωνιστής προσθέσει μια ακόμα παράμετρο στην τιμολόγηση, ο αναλογιστής οφείλει να χρησιμοποιήσει αυτόν τον διαχωρισμό για να μην κινδυνέψει να χάσει τους καλούς οδηγούς αναφορικά με αυτήν την παράμετρο. Αυτό δικαιολογεί γιατί χρησιμοποιούνται τόσες πολλές παράμετροι από τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Σε μια ελεύθερη αγορά, οι ασφαλιστικές εταιρείες είναι αναγκασμένες να χρησιμοποιούν μια τιμολογιακή δομή που να συνδέει το ασφάλιστρο με τον κίνδυνο όσο το δυνατόν εγγύτερα, ή τουλάχιστον όσο τον δυνατόν πιο κοντά στην τιμολογιακή δομή των ανταγωνιστών. Αυτό έχει ως συνέπεια την χρησιμοποίηση όλων των διαθέσιμων κατηγορικών μεταβλητών που συσχετίζονται με τον κίνδυνο, από την στιγμή που αν αποτύχεις να το κάνεις αυτό, σημαίνει ότι θυσιάζεις την πιθανότητα να μην επιλεγείς έναντι των ανταγωνιστών σου και υφίστασαι τον κίνδυνο να υπομείνεις την αντεπιλογή από αυτούς. Είναι λοιπόν ο ανταγωνισμός μεταξύ των εταιρειών αυτός που οδηγεί στον όλο και μεγαλύτερο διαχωρισμό του χαρτοφυλακίου και όχι η αναλογιστική επιστήμη. Αυτή η τάση, της όλο αυξανόμενης κατηγοριοποίησης των κινδύνων συχνά προκαλεί κοινωνικές διαταραχές: οι κακοί οδηγοί (ή ακριβέστερα, οδηγοί που μοιράζονται το χαρακτηριστικό του κακού οδηγού) δεν βρίσκουν κάλυψη με μια λογική τιμή και μπαίνουν στον πειρασμό να οδηγούν ανασφάλιστοι. Να σημειωθεί επίσης ότι ακόμα και αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του τιμολογιακού παράγοντα και του κινδύνου που καλύπτεται από την ασφαλιστική εταιρεία, μπορεί να μην υπάρχει αιτιώδης συνάφεια μεταξύ του παράγοντα και του κινδύνου. Η απαίτηση από τις ασφαλιστικές εταιρείες να καθιερώσουν μια τέτοια αιτιώδη συνάφεια προκειμένου να τους επιτραπεί η χρησιμοποίηση ενός παράγοντα τιμολόγησης, είναι θέμα αμφισβήτησης και αντιπαράθεσης.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες ασφάλισης περιουσίας και ευθύνης σε αυτοκίνητα χρησιμοποιούν πλάνα κατηγοριοποίησης προκειμένου να δημιουργήσουν κλάσεις κινδύνων. Μεταβλητές κατηγοριοποίησης που χρησιμοποιούνται για να διαχωρίσουν τους κινδύνους σε κλάσεις ονομάζονται *a priori* μεταβλητές (δεδομένου ότι η τιμή τους μπορεί να καθοριστεί πριν ο ασφαλισμένος ξεκινήσει να οδηγεί). Το ασφάλιστρο για την κάλυψη Αστικής Ευθύνης αυτοκινήτου συχνά ποικίλει σε σχέση με το που παρκάρεται το όχημα, την χρήση του αυτοκινήτου (χρησιμοποιείται για την οδήγηση από και προς την δουλειά ή επαγγελματική χρήση) και κάποια ατομικά χαρακτηριστικά (π.χ. ηλικία, φύλο, επάγγελμα, και οικογενειακή κατάσταση του βασικού οδηγού του οχήματος, αν δεν απαγορεύεται από την νομοθεσία ή τους ρυθμιστικούς κανόνες). Εάν ο ασφαλισμένος παραποιήσει οποιαδήποτε από αυτές τις κατηγορικές μεταβλητές στην αίτηση του, αποτελεί προϋπόθεση για την μη κάλυψη του σε περίπτωση ζημιάς. Υπάρχει λοιπόν ένα ισχυρό κίνητρο για την ακριβή δήλωση των χαρακτηριστικών του κινδύνου.

Είναι πρακτικό να επιτευχθεί *a priori* κατηγοριοποίηση με την βοήθεια των γενικευμένων μοντέλων παλινδρόμησης. Η μέθοδος μπορεί να περιγραφεί εν συντομία ως ακολούθως: Επιλέγεται μια κλάση κατηγοριοποίησης κινδύνου ως κλάση βάσης. Συνήθως έχει την μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο. Το ασφάλιστρο αυτού του κελιού καλείται ασφάλιστρο βάσης. Ορίζονται άλλες κλάσεις με βάση μια πληθώρα από μεταβλητές κατηγοριοποίησης του κινδύνου, όπως η περιοχή κτλ. Για κάθε μια από τις μεταβλητές κατηγοριοποίησης του κινδύνου, υπάρχει ένας παράγοντας διαφοροποίησης (*vector of differentials*) με την κλάση βάσης, η οποία τίθεται πάντα 100%.

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (*Generalized Linear Models* ή GLM) αναπτύχθηκαν από τους Nelder & Wedderburn (1972). Αυτοί οι συγγραφείς ανακάλυψαν ότι τα μοντέλα παλινδρόμησης με μια κατανομή απόκριση (*response*) ανήκουν στην *Εκθετική* οικογένεια κατανομών και μοιράζονται κοινές ιδιότητες. Μέλη αυτής της οικογένειας κατανομών είναι, η *Κανονική*, η *Διωνυμική*, η *Poisson*, η *Γάμμα* και η *Inverse Gausian* κατανομή, οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως από αναλογιστές προκειμένου να δημιουργήσουν ένα μοντέλο για το πλήθος των ζημιών ή το μέγεθος τους.

Αποτελεσματικοί αλγόριθμοι είναι διαθέσιμοι στα περισσότερα στατιστικά πακέτα για να εκτιμήσουν τις παραμέτρους της παλινδρόμησης με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας.

1.5 Σύστημα *Pay-As-You-Drive*

Κάθε χιλιόμετρο που διανύεται από ένα όχημα μεταφέρει κίνδυνο στην ασφαλιστική εταιρεία: συνεπώς το συνολικό κόστος της κάλυψης αυξάνεται χιλιόμετρο, χιλιόμετρο. Γι' αυτόν τον λόγο αρκετοί συγγραφείς, περιλαμβανομένου του Butler (1993) πρότειναν να χρεώνεται ένα ασφάλιστρο ανά διανυόμενο χιλιόμετρο: θα πρέπει να υιοθετηθεί το αυτοκινητο-χιλιόμετρο (*car-kilometer*) ως μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο αντί του αυτοκινητο-έτη (*car-years*) που χρησιμοποιείται μέχρι πρότινος. Ασφαλιστικές εταιρείες αυτοκινήτων υιοθετούν ένα καινούργιο σύστημα το οποίο ονομάζεται «*pay as you drive*» (ή για συντομία PAYD). Στο σύστημα PAYD, ο οδηγός πληρώνει για το κάθε χιλιόμετρο που διανύει ένα ασφάλιστρο που ποικίλει από ένα υψηλότερο όταν οδηγεί σε πολυσύχναστους δρόμους τις ώρες αιχμής, σε ένα χαμηλότερο για το επαρχιακό δίχτυο.

Αρκετές ασφαλιστικές εταιρείες (για παράδειγμα αναφέρουμε την Norwich Union http://www.norwichunion.com/pay-as-you-drive) έχουν πλέον αρχίσει να προσφέρουν ασφάλιση αυτοκινήτου σύμφωνα με το σύστημα PAYD, μετά από τις επιτυχείς δοκιμές που περιελάμβανε χιλιάδες οδηγούς. Με το σύστημα PAYD, παρέχεται στους οδηγούς μια συσκευή *Global Positioning System* (GPS) με χάρτες για το αυτοκίνητο, η οποία δίνει την δυνατότητα στην ασφαλιστική εταιρεία να υπολογίσει το ασφάλιστρο για κάθε ταξίδι, βασισμένο στην ώρα, το είδος του δρόμου και την απόσταση που διανύθηκε. Ένα «μαύρο κουτί» εγκαθίσταται στο αυτοκίνητο και λαμβάνει σήμα σύμφωνα με την τεχνολογία των GPS προκειμένου να προσδιορίσει την τρέχουσα θέση του οχήματος, ταχύτητα, ώρα και κατεύθυνση που οδηγήθηκε. Στην συνέχεια το μαύρο κουτί δρα σαν ένα ασύρματο *modem* για να μεταδώσει αυτά τα δεδομένα, μέσω ενός κλασικού δικτύου κινητής τηλεφωνίας, στην ασφαλιστική εταιρεία. Η εταιρεία στέλνει ένα μηνιαίο λογαριασμό στον πελάτη της βασισμένο στην χρήση του αυτοκινήτου, περιλαμβανομένης της ώρας, το είδος του δρόμου και της απόστασης που διανύθηκε. Στην συνέχεια ιστορικά δεδομένα προσφέρουν λεπτομερή πληροφόρηση για το πώς, πότε και πού χρησιμοποιήθηκε το αυτοκίνητο και αν τα ατυχήματα και οι απαιτήσεις μπορούν να αναγνωριστούν με κάποιες συγκεκριμένες παραμέτρους. Επιπρόσθετα, το μαύρο κουτί εντοπίζει παραβιάσεις του ορίου ταχύτητας και γενικότερα την επιθετικότητα πίσω από το τιμόνι. Η συνήθεια να οδηγάς επικίνδυνα θα μπορούσε να συνεπάγεται υψηλότερο ασφάλιστρο για την ασφάλιση αυτοκινήτου, αυξάνοντας έτσι την ασφάλεια στους δρόμους. Σε αντίθεση με τα στατικά μέτρα κινδύνου, τέτοια όπως η ηλικία του οδηγού, τα δυναμικά μέτρα, η ταχύτητα, η ώρα και η τοποθεσία, χρησιμοποιούνται για να δώσουν την καλύτερη δυνατή εκτίμηση του κινδύνου.

Η γενίκευση του συστήματος PAYD αναμένεται επίσης να αλλάξει την συμπεριφορά τον οδηγών. Όπως η βενζίνη, η ασφάλιση αγοράζεται βάση του τρόπου οδήγησης, και οι άνθρωποι σκέπτονται το κόστος της ασφάλισης σε συνάρτηση με την πραγματική χρήση του αυτοκινήτου. Αρκετές μελέτες στην Βόρεια Αμερική επιδεικνύουν ότι το σύστημα PAYD θα μπορούσε να μειώσει την οδήγηση κατά ένα ποσοστό παραπάνω από το 10%. Το σύστημα τιμολόγησης PAYD αναμένεται να μειώσει την κυκλοφοριακή συμφόρηση και την μόλυνση (δεδομένου ότι οι πολυσύχναστοι δρόμοι έχουν συνήθως το υψηλότερο ασφάλιστρο).

1.6 Εμπειρική Τιμολόγηση (*Experience Rating*)

Το νομοθετικό περιβάλλον παρουσιάζει πολλές διαφορές, από την απόλυτη ελευθερία (όπως στο Ηνωμένο Βασίλειο, που κάθε εταιρεία είναι ελεύθερη να σχεδιάσει το δικό της BMS) στο υποχρεωτικό σύστημα (όπως στην Σουηδία, που όλες οι εταιρείες είναι υποχρεωμένες να χρησιμοποιήσουν το ίδιο BMS ορισμένο από την κυβέρνηση), και σε πολλές ενδιάμεσες καταστάσεις (όπως για παράδειγμα στην Δανία, που οι ασφαλιστικές εταιρείες εφαρμόζουν BMS με χαλαρούς κανόνες). Προφανώς η προσέγγιση στον σχεδιασμό ενός BMS εξαρτάται από τον νομοθέτη. Εάν ο τρόπος τιμολόγησης έχει επιβληθεί από την κυβέρνηση και κάθε εταιρεία είναι υποχρεωμένη να τον χρησιμοποιήσει, δεν υπάρχει καμία εμπορικής φύσεως πίεση να συνδεθεί το ασφάλιστρο με τον κίνδυνο με το να χρησιμοποιείται κάθε δυνατή σχετική πληροφορία.

Η τάση που οδηγεί σε όλο και περισσότερους παράγοντες κατηγοριοποίησης έχει οδηγήσει τις εποπτικές αρχές να εξαιρέσουν από την τιμολόγηση συγκεκριμένους κινδύνους, αν και είναι σημαντικά συσχετισμένοι με τις ζημιές. Πολλές από τις πολιτείες των ΗΠΑ σκέπτονται να απαγορεύσουν κατηγοριοποίηση βάσει στοιχείων που είναι πέρα από τον έλεγχο του ασφαλισμένου, όπως είναι το φύλο και η ηλικία. Η ανεπάρκεια που θα εμφανιστεί στο *a priori* σύστημα τιμολόγησης, μπορεί να διορθωθεί με την χρήση του ιστορικού ζημιών για τον επαναπροσδιορισμό του ασφαλίστρου. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την αντίληψη του δικαίου: το *a priori* σύστημα τιμολόγησης τιμωρεί άτομα που «μοιάζουν» με κακούς οδηγούς (ακόμα και αν στην πραγματικότητα είναι εξαιρετικοί οδηγοί, οι οποίοι δεν θα προκαλέσουν ποτέ ατύχημα) ενώ το εμπειρικό τιμολογιακό σύστημα χρησιμοποιεί το ατομικό ιστορικό ζημιών για να ρυθμίσει το ασφάλιστρο. Τα αναλογιστικά μοντέλα αξιοπιστίας δημιουργούν ισορροπία μεταξύ της πιθανότητας να είναι ένας οδηγός άτυχος (ο οποίος υπέστη ζημιά) και της πιθανότητας να είναι πραγματικά κακός οδηγός (ο οποίος θα πρέπει να υποστεί αύξηση στα ασφάλιστρα που πληρώνει στην ασφαλιστική εταιρεία για κάλυψη). Φαίνεται δίκαιο να διορθώσουμε την ανεπάρκεια του *a priori* συστήματος χρησιμοποιώντας ένα ικανό εμπειρικό τιμολογιακό σύστημα, ένα τέτοιο σύστημα «εγκλήματος και τιμωρίας» ίσως θα ήταν πιο αποδεκτό από τους ασφαλισμένους από ένα φαινομενικά αυθαίρετο το *a priori* σύστημα κατηγοριοποίησης.

Στην ασφάλιση ζωής η χρήση πολύ περιορισμένου αριθμού μεταβλητών (ηλικία, φύλο, αν καπνίζει ή όχι, επάγγελμα, χαρακτηριστικά για την υγεία) πάντα θεωρείτο ότι είναι επαρκές για να είναι δίκαιο για τους ασφαλισμένους και να αποφεύγεται η αντεπιλογή. Δεν είναι όμως το ίδιο στην ασφάλιση αυτοκινήτου. Παρά την χρήση πολλών *a priori* μεταβλητών, παρατηρείται ακόμα ανομοιογενής οδηγική συμπεριφορά σε κάθε μία από τις κλάσεις τιμολόγησης. Επίσης, πολλοί από τους σημαντικούς παράγοντες δεν μπορούν να ληφθούν υπόψη στο *a priori* σύστημα κατηγοριοποίησης κινδύνων. Σκεφτείτε για παράδειγμα τις ικανότητες κάθε οδηγού, την ακρίβεια στην κρίση, την επιθετικότητα στο τιμόνι, την ταχύτητα των αντανακλαστικών, το εάν πίνει και οδηγεί ή τον σεβασμό στον Κ.Ο.Κ., είναι επίσης πολύ σημαντικά στο να επηρεάζουν τον αριθμό των ατυχημάτων (αλλά δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν με ένα τρόπο έτσι ώστε να συμφέρει οικονομικά). Συνεπώς οι κλάσεις τιμολόγησης είναι ακόμα αρκετά ανομοιογενείς παρά την χρήση πολλών κατηγορικών μεταβλητών. Αυτή η ανομοιογένεια μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω τυχαίας επίδρασης στο στατιστικό μοντέλο. Είναι λογικό να πιστεύουμε ότι τα κρυφά χαρακτηριστικά γίνονται εν μέρει γνωστά από τον αριθμό των ζημιών που δηλώθηκαν από τον ασφαλισμένο. Πράγματι, αρκετές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε όλο τον κόσμο (μεταξύ άλλων Lemaire, 1977b και Lemaire, 1985 κεφ. 7 & 8) έδειξαν ότι ο σημαντικότερος παράγοντας για την πρόβλεψη των μελλοντικών ζημιών δεν είναι η ηλικία, το φύλο, το μοντέλο του αυτοκινήτου ή το επάγγελμα αλλά το ιστορικό των προηγούμενων ζημιών. Αυτό είχε ως επακόλουθο την ιδέα που ήρθε στα μέσα της δεκαετίας του ’50, να επιτραπεί η προσαρμογή του ασφαλίστρου, *a posteriori*, μετά από την παρατήρηση του ιστορικού ζημιών του ασφαλισμένου. Από την άποψη αυτή, το να επιτρέπεται να χρησιμοποιείται το ιστορικό των ζημιών στα τιμολογιακά μοντέλα απορρέει από μια εξωγενή εξήγηση της συνεχής συσχέτισης για διαχρονικά δεδομένα. Σε αυτήν την περίπτωση, η συσχέτιση είναι εμφανής και είναι αποτέλεσμα της αποκάλυψης των κρυμμένων χαρακτηριστικών στα χαρακτηριστικά του κινδύνου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνεχής συσχέτιση του ιστορικού ζημιών μπορεί ακόμα να λάβει και μια ενδογενή εξήγηση. Σ' αυτό το πλαίσιο, η ιστορία του κάθε ατόμου τροποποιεί τον κίνδυνο τον οποίο εκπροσωπεί. Αυτός ο μηχανισμός ονομάζεται «αληθής μετάδοση» (*true contagion*) που παραπέμπει στην επιδημιολογία. Για παράδειγμα, ένα τροχαίο ατύχημα μπορεί να αλλάξει την οπτική του κινδύνου που ελλοχεύει πίσω από το τιμόνι και να ελαττώσει τον κίνδυνο να αναφέρει μια καινούργια ζημιά στο μέλλον. Τα εμπειρικά τιμολόγια προσφέρουν επίσης και κίνητρα για προσεκτική οδήγηση και θα πρέπει να προκαλούν αρνητική μετάδοση. Παρ' όλα αυτά, η κύρια ερμηνεία για την ασφάλιση αυτοκινήτου είναι εξωγενής, από την στιγμή που η θετική μετάδοση (ασφαλισμένοι που δήλωσαν ζημιές στο παρελθόν είναι πιο πιθανό να κάνουν ζημιές στο μέλλον) παρατηρείται πάντα για το πλήθος των απαιτήσεων, ενώ η πραγματική μετάδοση θα έπρεπε να είναι αρνητική.

1.7 Συστήματα Εκπτώσεων – Επιβαρύνσεων

Σε πολλές Ευρωπαϊκές και Ασιατικές χώρες, όπως επίσης και στην Βόρεια Αμερική, οι ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούν την εμπειρική τιμολόγηση προκειμένου να συσχετίσουν τα ασφάλιστρα με το ατομικό ιστορικό ζημιών στην ασφάλιση αυτοκινήτου. Ένα τέτοιο σύστημα τιμωρεί τον ασφαλισμένο οδηγό υπαίτιο για ένα ή παραπάνω ατυχήματα, με μια επιβάρυνση στο ασφάλιστρο (*malus*) και επιβραβεύει τους ασφαλισμένους χωρίς καμία ζημιά με μια έκπτωση (*bonus*). Τέτοιες πρακτικές ονομάζονται *no-claim discounts, experience-rated premiums, personalized premiums, merit-rating systems* ή BMS, τιμωρώντας τους ασφαλισμένους – υπαίτιους για ένα ή περισσότερα ατυχήματα με ένα επασφάλιστρο (*malus*) και ανταμείβοντας τους ασφαλισμένους χωρίς καμία ζημιά με έκπτωση (*bonus*). Ο βασικός τους στόχος – εκτός του να ενθαρρύνουν τους ασφαλισμένους να οδηγούν με περισσότερη προσοχή – είναι να αξιολογούν καλύτερα τον ατομικό κίνδυνο, έτσι ώστε όλοι να πληρώσουν, μακροπρόθεσμα, ένα ασφάλιστρο που θα ανταποκρίνεται στην ατομική τους συχνότητα απαιτήσεων.

Στο Ηνωμένο Βασίλειο δίνονται εκπτώσεις για έτη χωρίς ζημιά από το 1910. Εκείνη την εποχή σκοπός τους ήταν να λειτουργήσει ως κίνητρο για να ανανεώσουν το ασφαλιστήριο με την ίδια εταιρεία, παρά ως ανταμοιβή για την συνετή οδήγηση. Η πρώτη θεωρητική αντιμετώπιση του BMS έγινε από την καινοτόμα δουλειά του Grenander (1957a, b). Το πρώτο ASTIN (Actuarial STudies In Non-life insurance) συνέδριο που πραγματοποιήθηκε στην Γαλλία το 1959 ήταν αποκλειστικά αφιερωμένο στις ασφαλίσεις *no-claim discounts*, με ιδιαίτερη αναφορά στην κλάδο τον αυτοκινήτων.

Υπάρχουν διάφορα BMS που χρησιμοποιούνται ανά τον κόσμο. Ένα τυπικό παράδειγμα ενός *no-claim bonus* στο Ηνωμένο Βασίλειο είναι το παρακάτω:

- Ένα έτος χωρίς ζημιά → έκπτωση 25%
- Δύο έτη χωρίς ζημιά → έκπτωση 40%
- Τρία έτη χωρίς ζημιά → έκπτωση 50%
- Τέσσερα έτη χωρίς ζημιά → έκπτωση 60%

Οι οδηγοί κερδίζουν ένα ακόμα χρόνο έκπτωσης για κάθε έτος που δεν δηλώνουν ζημιά με δική τους υπαιτιότητα μέχρι τα τέσσερα χρόνια που είναι το μέγιστο, αλλά χάνουν την έκπτωση δύο ετών κάθε φορά δηλώνουν μια ζημιά που είναι υπαίτιοι. Σε ένα τέτοιο σύστημα, η μέγιστη έκπτωση επιτυγχάνεται σε μόλις λίγα χρόνια και πλειονότητα των ώριμων οδηγών έχουν την μέγιστη έκπτωση.

Η κλίμακα των *bonus-malus* αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό επιπέδων, το κάθε ένα με τον δική του σχετικότητα (ή το σχετικό ασφάλιστρο). Το ποσό που πληρώνεται από τον ασφαλισμένο, είναι τότε το γινόμενο του ασφαλίστρου βάσης με την σχετικότητα που αντιστοιχεί στο επίπεδο της κλίμακας που καταλαμβάνει. Οι νέοι ασφαλισμένοι έχουν πρόσβαση από ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Μετά από κάθε έτος, το ασφαλιστήριο κινείται πάνω ή κάτω βάσει των μεταβατικών κανόνων του BMS. Εάν ένα BMS είναι σε ισχύ, όλα τα ασφαλιστήρια που ανήκουν στην ίδια τιμολογιακή ομάδα διαχωρίζονται σύμφωνα με το επίπεδο που καταλαμβάνουν στην κλίμακα των *bonus-malus*. Από αυτήν την άποψη, ο μηχανισμός των *bonus-malus* μπορεί να θεωρηθεί ως εξευγενισμός του *a priori* διαχωρισμού της αξιολόγησης του κινδύνου κάθε κλάσης κινδύνου, σ' ένα αριθμό από υποκατηγορίες σύμφωνα με το ατομικό ιστορικό ζημιών.

Παρόλα αυτά η ιδέα ενός BMS έχει αρκετά μειονεκτήματα. Κάποιοι αναλογιστές έχουν απορρίψει την ιδέα της *a posteriori* τιμολόγησης στρέφοντας την ιδέα της έκπτωσης μέρους του ασφαλίστρου σε ένα καλό (ή απλά τυχερό) οδηγό, αντίθετο στην βασική ιδέα της ασφάλισης, δεδομένου ότι αντιτίθεται σε μερικές από της θεμελιώδεις αρχές:

- **Εγγυημένη οικονομική σταθερότητα στους ασφαλισμένους.** Ο ασφαλισμένος είναι προστατευμένος από απαιτήσεις Αστικής Ευθύνης με αντάλλαγμα την πληρωμή ενός συγκεκριμένου ασφαλίστρου, μικρό σχετικά με το πιθανό ποσό μιας απαίτησης. Η βασική αρχή της ασφάλισης, η οποία βασίζεται στην αντικατάσταση μιας τυχαίας μεταβλητής (το συνολικό ποσό της απαίτησης) με μια σταθερά (το ασφάλιστρο) αποδυναμώνεται σημαντικά από την τιμολόγηση του BMS από την στιγμή που μια τυχαία μεταβλητή αντικαθίσταται τώρα από μια άλλη τυχαία μεταβλητή με μικρότερη διασπορά.

- **Συνεργασία και αλληλοϋποστήριξη.** Οι ασφαλισμένοι που δεν έχουν καμία ζημιά έρχονται να βοηθήσουν τους άτυχους.
- **Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών.** Ένα ασφαλιστήριο από μόνο του χάνεται στην μεγάλη μάζα ενός χαρτοφυλακίου. Θεωρητικά, δεν είναι σημαντικό για την εκτίμηση του ασφαλίστρου, αν κάποιο συγκεκριμένο ασφαλιστήριο έχει ζημιά ή όχι, από την στιγμή που η ζημιά είναι πραγματοποίηση μια τυχαίας μεταβλητής. Συνεπώς, υπάρχει μια σίγουρη παράβαση της θεμελιώδους ιδέας της ασφάλισης όταν το ασφάλιστρο εξαρτάται από τα αποτελέσματα του καθένα.

Μπορεί τα μειονεκτήματα του BMS να είναι αρκετά αλλά επειδή τα πλεονεκτήματα, μαζί με την ευνοϊκή αντίδραση του κόσμου, υπερτερούν, όλες σχεδόν οι αναπτυγμένες χώρες έχουν πλέον εισαγάγει ένα BMS. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να έχει πολλές διαφορές, από χώρα σε χώρα.

Το BMS μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας αλυσίδες Markov (*conditional*) δεδομένου ότι κατέχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα απώλειας μνήμης, η οποία μπορεί να περιγραφεί εν συντομία ως ακολούθως: η γνώση του σημερινού επιπέδου και το πλήθος των ζημιών του τρέχοντος έτους επαρκεί για να αποφασίσουμε το επίπεδο στο οποίο μεταφέρεται το συμβόλαιο. Με άλλα λόγια, το BMS ικανοποιεί την διάσημη ιδιότητα Markov: το μέλλον (το επίπεδο για το έτος $t+1$) εξαρτάται από το παρόν (το επίπεδο για το έτος t και το πλήθος των ζημιών που αναγγέλθηκαν κατά την διάρκεια του έτους t) και όχι το παρελθόν (το ιστορικό ζημιών και το επίπεδο που καταλάμβανε κατά την διάρκεια των ετών $1, 2, \ldots, t-1$). Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την βέλτιστη σχετικότητα χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά κριτήρια, βασισμένα σε σταθερή ή πρόσκαιρη κατανομή. Όπως αναφέρει ο Lemaire (1995).

Κατά την διάρκεια του 20ου αιώνα, οι περισσότερες Ευρωπαϊκές χώρες επέβαλλαν ένα ομοιόμορφο BMS σε όλες τις εταιρείες που δραστηριοποιούνταν στην επικράτεια τους. Το 1994, η Ευρωπαϊκή Ένωση θέσπισε ότι όλα τα κράτη μέλη θα πρέπει να εγκαταλείψουν το υποχρεωτικό BMS τους, ισχυρίζοντας ότι τέτοιου είδους συστήματα ελαττώνουν την ανταγωνιστικότητα μεταξύ των ασφαλιστικών εταιρειών και ήταν σε αντιδιαστολή με την ολοκληρωτική ελευθερία που εφαρμόστηκε από την Τρίτη Οδηγία (*Third Directive*). Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με την Τρίτη Οδηγία βλέπε http://europa.eu/legislation_summaries/other/l22028_en.htm. Από εκείνη την ημερομηνία και μετά, το Βέλγιο, για παράδειγμα, εγκατέλειψε το υποχρεωτικό σύστημα, αλλά όλες οι εταιρείες που δραστηριοποιούνται στο Βέλγιο χρησιμοποιούν ακόμα το πρότερο ομοιόμορφο σύστημα (με μικρές τροποποιήσεις για τους καλύτερους οδηγούς που καταλαμβάνουν τα χαμηλότερα επίπεδα της κλίμακας, κυρίως για λόγους μάρκετινγκ). Στις άλλες Ευρωπαϊκές χώρες, παρ' όλα αυτά, οι ασφαλιστικές εταιρείες ανταγωνίζονται με βάση το BMS. Τέτοιες περιπτώσεις είναι για παράδειγμα η Ισπανία και η Πορτογαλία.

Παρ' όλα αυτά, το υποχρεωτικό Γαλλικό σύστημα εξακολουθεί να ισχύει. Το Ευρωπαϊκό Δικαστήριο αποφάσισε το 2004 ότι και τα δύο, της Γαλλίας και του Λουξεμβούργου, υποχρεωτικά BMS δεν είναι αντίθετα στην απελευθέρωση της τιμολόγησης που επιβλήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Συνεπώς ο γαλλικός νόμος ακόμα επιβάλλει στις ασφαλιστικές εταιρείες που δραστηριοποιούνται στην Γαλλία ένα μοναδικό BMS. Αυτό το BMS δεν είναι βασισμένο σε κλίμακες. Το γαλλικό BMS χρησιμοποιεί την ιδέα αυξανόμενου-μειούμενου συντελεστή (*coefficient de réduction-majoration*). Λεπτομέρειες όμως θα δούμε στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

1.8 Αναλογιστική & Οικονομική Θεμελίωση του BMS

Το BMS επιτρέπει στα ασφάλιστρα να προσαρμόζονται για τους κρυφούς ατομικούς παράγοντες κινδύνου και να αυξάνει τα κίνητρα για την ασφάλεια στους δρόμους, λαμβάνοντας υπόψη το ιστορικό ζημιών. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί λόγω της ασύμμετρης πληροφόρησης μεταξύ της ασφαλιστικής εταιρείας και των ασφαλισμένων. Η ασύμμετρη πληροφόρηση προκύπτει στις ασφαλιστικές αγορές όταν οι εταιρείες αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να κρίνουν την επικινδυνότητα αυτών που αγοράζουν ασφαλιστική κάλυψη. Υπάρχουν κυρίως δύο πλευρές γι' αυτό το φαινόμενο: αντεπιλογή και ηθικός κίνδυνος. Πράγματι, το BMS ενθαρρύνει τους ασφαλισμένους να οδηγούν πιο προσεκτικά (δηλαδή, την αντιμετώπιση του ηθικού κινδύνου) και είναι μια απάντηση στην αντεπιλογή στην ασφάλιση αυτοκινήτων. Η αντεπιλογή προκύπτει όταν ο ασφαλισμένος έχει καλύτερη γνώση για την συμπεριφορά του όσον αφορά τον αριθμό των ατυχημάτων καθώς και τη δριμύτητα τους (*claim behaviour*) από την ασφαλιστική εταιρεία. Οι ασφαλισμένοι εκμεταλλεύονται τις πληροφορίες για την οδηγική τους συμπεριφορά, γνωστή σ’ αυτούς αλλά άγνωστη στους ασφαλιστές. Το BMS είναι ένας τρόπος για να αντισταθμιστεί μερικώς η έλλειψη γνώσης για τις οδηγικές ικανότητες των ασφαλισμένων. Στο γενικό πλαίσιο της υποχρεωτικής ασφάλισης Αστικής Ευθύνης προς τρίτους, η αντεπιλογή δεν είναι σημαντικό πρόβλημα σε σύγκριση με τον ηθικό κίνδυνο, όταν η ασφαλιστική εταιρεία χρεώνει παρόμοια ασφάλιστρα σε όλους τους ασφαλισμένους. Τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα σ’ ένα καθεστώς χωρίς κυβερνητικούς περιορισμούς, με τις ασφαλιστικές εταιρείες να χρησιμοποιούν πολλούς παράγοντες κατηγοριοποίησης του κινδύνου. Από την στιγμή που παρατηρείται μεγάλη ανομοιογένεια στην οδηγική συμπεριφορά μεταξύ των ασφαλισμένων που έχουν τις ίδιες *a priori* μεταβλητές, η αντεπιλογή δεν μπορεί να αποφευχθεί. Για όλες τις συναφείς καλύψεις, όπως για παράδειγμα στην μεικτή ασφάλιση, η αντεπιλογή παίζει πάντα έναν σημαντικό ρόλο.

Δεδομένης της αντεπιλογής με το ύφος των Rotschild και Stiglitz, δηλαδή ότι τα άτομα αποκαλύπτουν μερικώς τον υποβόσκοντα κίνδυνο μέσω του συμβολαίου που επιλέγουν, ένα τέτοιο γεγονός πρέπει να ληφθεί υπόψη όταν δομείται ένα ικανό εμπειρικό τιμολογιακό σύστημα. Παρουσία της μη παρατηρούμενης ανομοιογένειας, οι υψηλού κινδύνου ασφαλισμένοι θα διαλέξουν περισσότερες συμπληρωματικές καλύψεις και οι χαμηλού κινδύνου ασφαλισμένοι θα ενδιαφερθούν να σηματοδοτήσουν την ποιότητα τους, με το να επιλέξουν, για παράδειγμα, υψηλή απαλλαγή. Ένα καλό παράδειγμα είναι η αγορά μεικτής ασφάλισης. Είναι γνωστό ότι οι οδηγοί που αγοράζουν μεικτή ασφάλιση έχουν υψηλότερο δείκτη ζημιών από εκείνους που αγοράζουν μόνο την υποχρεωτική Αστική Ευθύνη – απόδειξη ότι οι ασφαλισμένοι γνωρίζουν περισσότερα για την οδηγική τους συμπεριφορά από τις ασφαλιστικές εταιρείες. Για τις ασφαλιστικές εταιρείες το BMS είναι η απάντηση στην αντεπιλογή και την ασύμμετρη πληροφόρηση αναφορικά με την οδηγική συμπεριφορά του ασφαλισμένου.

Παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον να συγκριθούν οι γνώμες των οικονομολόγων και των αναλογιστών για την εμπειρική τιμολόγηση. Στην οικονομική βιβλιογραφία, οι εκπτώσεις και οι επιβαρύνσεις, παρουσιάζονται κυρίως για την αντιμετώπιση της αναποτελεσματικότητας που προκύπτει από τον ηθικό κίνδυνο. Στην αναλογιστική βιβλιογραφία, ο κύριος σκοπός είναι να αξιολογηθεί καλύτερα ο ατομικός κίνδυνος, έτσι ώστε ο καθένας να πληρώσει, μακροπρόθεσμα, ένα ασφάλιστρο που να αντιστοιχεί στην δική του συχνότητα απαιτήσεων. Συνεπώς οι αναλογιστές ενδιαφέρονται περισσότερο για την αντεπιλογή παρά για τον ηθικό κίνδυνο.

1.9 Το Κόστος των Απαιτήσεων

Στην πλειοψηφία τους τα εν ισχύ BMS σε όλο τον κόσμο τιμωρούν το πλήθος των ατυχημάτων που δηλώνουν στην εταιρεία με υπαιτιότητα τους και όχι το ποσό. Ένα σοβαρό ατύχημα που περιλαμβάνει σωματικές βλάβες τιμωρείται με τον ίδιο τρόπο με ένα μικροατύχημα. Ο λόγος που βασίζουμε την κατηγοριοποίηση των κινδύνων στα αυτοκίνητα μόνο στην συχνότητα των ζημιών, είναι η μεγάλη καθυστέρηση στην πρόσβαση στο τελικό κόστος των σωματικών βλαβών και άλλων σοβαρών ζημιών. Μη υιοθετώντας το μέγεθος της ζημιάς στο BMS και στην *a priori* κατηγοριοποίηση των κινδύνων, απαιτείται μια αυτονόητη υπόθεση ανεξαρτησίας μεταξύ της τυχαίας μεταβλητής «πλήθος ζημιών» και «κόστος ζημιών», όπως επίσης και της πεποίθησης ότι το δεύτερο δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του οδηγού. Αυτό σημαίνει ότι η αναλογιστική πρακτική λαμβάνει υπόψη ότι το κόστος του ατυχήματος είναι κυρίως πέρα από τον έλεγχο του οδηγού: ένας προσεχτικός οδηγός μειώνει το πλήθος των ατυχημάτων, αλλά κατά κύριο λόγο δεν μπορεί να ελέγξει το κόστος του ατυχήματος (το οποίο εξαρτάται πολύ από το λάθος που το προκάλεσε).

Σύμφωνα με τους Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., & Walhin, J.-F. (2007), η επιβάρυνση που προκαλείται από την πλειοψηφία των BMS είναι ανεξάρτητη από το ποσό της ζημιάς, οι ασφαλισμένοι πρέπει να αποφασίσουν αν είναι καλύτερο ή όχι να δηλώσουν μια μικρή ζημιά (προκειμένου να αποφύγουν την αύξηση του ασφαλίστρου). Οι μικρές ζημιές είναι πιθανότερο να πληρωθούν από τον ίδιο τον ασφαλισμένο και να μην δηλωθούν στην εταιρεία. Το φαινόμενο αυτό, γνωστό ως «δίψα για μπόνους» (*bonus hunger*), περιορίζει το κόστος της διεκπεραίωσης των ζημιών από την στιγμή που οι μικρές απαιτήσεις δεν αναφέρονται στον ασφαλιστή (μείωση του διοικητικού φόρτου). Θα πρέπει επομένως να ληφθεί υπόψη ότι μόνο οι «σχετικά υψηλές» ζημιές δηλώνονται στην ασφαλιστική εταιρεία. Τα όρια της απαλλαγής που βαρύνουν τον ασφαλισμένο μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Lemaire.

Σε κάποια BMS παρ’ όλα αυτά, το να δηλώσεις μια «σοβαρή» ζημιά (συνήθως μια ζημιά με σωματικές βλάβες) συνεπάγεται μια μεγαλύτερη επιβάρυνση από το να δηλώσεις μια «μικρή» ζημιά (συνήθως μια ζημία με μόνο υλικές ζημιές). Στο σύστημα που ήταν σε ισχύει πριν το 1993 στην Ιαπωνία, οι ζημιές που περιλάμβαναν σωματικές βλάβες τιμωρούνταν με τέσσερα επίπεδα, ενώ ζημιές με μόνο υλικές ζημιές τιμωρούνταν με μόνο δύο επίπεδα.

Παρακάτω θα μελετήσουμε δύο κατηγορίες BMS τα Markovian και τα βέλτιστα. Στα Markovian θα ορίσουμε αναλυτικά τα μέτρα για την σύγκριση μεταξύ τους καθώς και τα στοιχεία που θα πρέπει να περιέχουν. Στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 θα δούμε τρία μοντέλα για το βέλτιστο BMS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Markovian BMS

2.1 Το BMS του Βελγίου

Το σύστημα τιμολόγησης του Βελγίου όπως περιγράφεται από το υπουργικό διάταγμα της 14 Απριλίου 1971 και αναφέρει ο Lemaire (1985).

Στο Βέλγιο ο τρόπος τιμολόγησης των ασφαλίστρων στην Αστική Ευθύνη αυτοκινήτων υπαγορευόταν από το υπουργικό διάταγμα της 14 Απριλίου 1971 (πριν από την απελευθέρωση της τιμολογιακής πολιτικής). Συνεπώς κάθε εταιρεία έπρεπε να χρησιμοποιεί τον τρόπο τιμολόγησης που περιγράφεται παρακάτω (επίσης επιβάλλονταν και οι γενικοί όροι των συμβολαίων). Το διάταγμα ορίζει δύο κατηγορίες οχημάτων:

- Αυτά που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά μετά την 1 Ιουλίου 1971 και
- Αυτά που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά πριν από την παραπάνω ημερομηνία

Η μέγιστη τιμολόγηση εφαρμοζόταν στην πρώτη κατηγορία, η οποία ονομάζεται «τιμολόγηση ανάλογη της δύναμης», η οποία περιείχε τρεις παράγοντες:

1. Την ιπποδύναμη του οχήματος. Επιπλέον του προκαθορισμένου ασφαλίστρου των 2.292 φράγκων, ο ασφαλισμένος πλήρωνε 84 φράγκα για κάθε ίππο έως τους 70 και 25 φράγκα επιπλέον για κάθε επιπλέον ίππο, μολονότι οι ίπποι πάνω από 250 αγνοούνταν. Αυτά τα ποσά ήταν συνδεδεμένα στο επίσημο κόστος διαβίωσης (για το πρώτο τρίμηνο του 1984, θα έπρεπε να το πολλαπλασιάσουν με το 2,27).
2. Το BMS. Το βασικό ασφάλιστρο τροποποιούταν ανάλογα με τον αριθμό των ζημιών κατά την διάρκεια του έτους, σύμφωνα με τους κανόνες μετάβασης του BMS όπως ορίστηκαν από το διάταγμα. Αυτό το σύστημα αποτελείτε από 18 κλάσεις όπως αναφέρονται στον πίνακα. Οι κανόνες μετάβασης επιτρέπουν την μείωση κατά μία κλάση για κάθε έτος χωρίς ζημιά και την τιμωρία του ασφαλισμένου κατά δύο κλάσεις για την πρώτη ζημιά και τρείς για κάθε επιπλέον ζημιά, που δηλώνονταν στην διάρκεια του ίδιου έτους. Δύο περιορισμοί θα πρέπει να γίνουν γι' αυτόν τον μηχανισμό: (1) οι κλάσεις 1 και 18 είναι το

χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο αντίστοιχα. (2) ο ασφαλισμένος που δεν δηλώνει ζημιά για τέσσερα συνεχή έτη και είναι σε κλάση μεγαλύτερη της 10, μεταφέρεται αυτόματα στην κλάση 10.

Πίνακας 1 - Το BMS του Βελγίου

Κλάση	Επίπεδο Ασφαλίστρου
18	200
17	160
16	140
15	130
14	120
13	115
12	110
11	105
10	100

Κλάση	Επίπεδο Ασφαλίστρου
9	100
8	95
7	90
6	85
5	80
4	75
3	70
2	65
1	60

Ο τελευταίος περιορισμός, μια μικρή αναγνώριση στους ασφαλισμένους που παλαιότερα θεωρούνταν ως «υψηλού κινδύνου», είναι πολύ δύσκολος από την μαθηματική του πλευρά, επειδή το σύστημα όπως περιγράφεται δεν αποτελεί πλέον μια αλυσίδα Markov (διαδικασία χωρίς μνήμη). Οι ασφαλιστικές εταιρείες θα πρέπει να αποθηκεύουν το ιστορικό ζημιών των ασφαλισμένων για τα προηγούμενα τέσσερα χρόνια αντί απλά μόνο της παρούσας κλάσης εάν δεν είχε επιβληθεί αυτός ο περιορισμός.

Όπως σε όλες τις Ευρωπαϊκές χώρες δεν είναι δυνατόν να διαγράψεις κάποια εφηβικά λάθη ακυρώνοντας το συμβόλαιο και πηγαίνοντας σε άλλη εταιρεία. Επιπλέον αυτού οι υποχρεωτικοί γενικοί όροι δεσμεύει τα δύο μέρη για δέκα χρόνια, ένας πιθανός ασφαλισμένος θα πρέπει να δώσει στην καινούργια εταιρεία μια βεβαίωση από την προηγούμενη, η οποία θα αναφέρει την κλάση του οδηγού.

3. Η χρήση του αυτοκινήτου. Οι οδηγοί των ΙΧ αυτοκινήτων – ασφαλισμένοι που χρησιμοποιούν το αυτοκίνητο τους μόνο προσωπικούς λόγους και οδηγούν από και προς την δουλεία – εισέρχονται στο BMS στην κλάση 6. Συνεπώς επωφελούνται έκπτωση 15%

σε σύγκριση με τους επαγγελματίες οδηγούς οι οποίες εισέρχονται στην κλάση 10 (η έκπτωση διαμορφώνεται στο 20% μετά από ένα έτος χωρίς ζημιά).

Επιπρόσθετα οι οδηγοί κάτω των 23 ετών θα πρέπει να πληρώσουν τα πρώτα 2.000 φράγκα για κάθε ζημιά.

Η τιμολογιακή πολιτική που εφαρμοζόταν στην δεύτερη κατηγορία, η οποία είναι, αυτοκίνητα που τέθηκαν για πρώτη φορά σε κυκλοφορία πριν την 1 Ιουλίου 1971, καλείτε «τιμολόγηση βάση των κυβικών», διέθετε τέσσερις παράγοντες κινδύνου:

1. Τα κυβικά εκατοστά (cc) της μηχανής του οχήματος. Στο προκαθορισμένο ασφάλιστρο των 4.293 φράγκων προσθέτονταν 1,96 φράγκα για κάθε cc έως τα 2.000 cc και 1,53 φράγκα για κάθε cc μεταξύ των 2.000 cc και των 5.000 cc (και αυτά τα ποσά ήταν συνδεδεμένα στο επίσημο κόστος διαβίωσης).
2. Το BMS.
3. Η χρήση του αυτοκινήτου επηρεάζει τα ποσά με τον ίδιο τρόπο που επηρεάζει αυτά της πρώτης κατηγορίας.
4. Τα «σπόρ» οχήματα είχαν ένα επιπλέον ασφάλιστρο της τάξεως του 40% επιπλέον του βασικού ασφαλίστρου των οχημάτων επαγγελματικής χρήσης.

Οι δύο παραπάνω τιμολογήσεις περιγράφουν τα επιτρεπτά μέγιστα όρια. Καμία οικονομική πολιτική ασφαλιστικής εταιρείας δεν μπορεί να τα υπερβεί. Το διάταγμα εισάγει επίσης και ένα κατώτατο όριο: καμία τιμολόγηση δεν μπορεί να είναι μικρότερη του 90% των μέγιστων ορίων.

Μια ιδιαιτερότητα του Βέλγικου συστήματος, είναι η ύπαρξη ενός «*pool*» εξαιρετικών κινδύνων. Εάν ένα οδηγό αρνηθούν να το καλύψουν 15 εταιρείες, μπορεί να απαιτήσει να ασφαλιστεί σ’ αυτό το *pool*, το οποίο διοικείτο από μια ομάδα από μεγάλες εταιρείες. Σ’ αυτήν την περίπτωση έχει την πιθανότητα να υποχρεωθεί να πληρώσει ένα πολύ μεγάλο ασφάλιστρο.

Για να ολοκληρώσουμε, να σημειωθεί ότι η κάλυψη που παρεχόταν από τις ασφαλιστικές εταιρείες ήταν απεριόριστη. Δεν επιτρεπόταν κανένας περιορισμός στο όριο ευθύνης της εταιρείας.

2.2 Εισαγωγή στα Markovian BMS

Όπως αναφέρει ο Lemaire (1985), αναρίθμητα BMS υπάρχουν σε ολόκληρο τον κόσμο, πολύ διαφορετικά μεταξύ τους, όλα τους μακράν από το βέλτιστο BMS που θα περιγράψουμε στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Για να μπορέσουμε να τα συγκρίνουμε, θα ορίσουμε δύο αποτελεσματικά μέτρα.

Εξ' ορισμού, μια ασφαλιστική εταιρεία χρησιμοποιεί ένα BMS όταν:

1. Τα ασφαλιστήρια μιας κλάσης τιμολόγησης (*tariff group*) μπορούν να χωριστούν σε πεπερασμένο αριθμό κλάσεων C_i $(i = 1, 2, \dots, s)$, έτσι ώστε το ετήσιο ασφάλιστρο να εξαρτάται μόνο από την κλάση.
2. Η κλάση για μια δεδομένη περίοδο ασφάλισης καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από την κλάση της προηγούμενης περιόδου και τον αριθμό των ζημιών που δηλώθηκαν κατά την διάρκεια της περιόδου.

Ένα τέτοιο σύστημα καθορίζεται από τρία στοιχεία:

1. Την κλίμακα των ασφαλίστρων $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$.
2. Την αρχική κλάση C_{i_0}.
3. Τους μεταβατικούς κανόνες, με άλλα λόγια, τους κανόνες οι οποίοι αποφασίζουν την μετάβαση από την μια κλάση σε μια άλλη, όταν είναι γνωστός ο αριθμός των ζημιών. Αυτοί οι κανόνες μπορούν να παρουσιαστούν ως ένας μετασχηματισμός T_k, τέτοιος ώστε $T_k(i) = j$, εάν το ασφαλιστήριο μεταφέρεται από την κλάση C_i στην κλάση C_j όταν έχουν δηλωθεί k ζημιές.

Οι T_k μπορούν να γραφτούν στην μορφή ενός πίνακα

$$T_k = \left(t_{ij}^{(k)}\right), \text{όπου}$$

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ T_k(i) = j \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}. \end{cases}$$

Η πιθανότητα ένα ασφαλιστήριο να μεταβεί από την C_i στην C_j μέσα σε μία περίοδο είναι ίση με

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\, t_{ij}^{(k)}.$$

Ισχύει

$$p_k(\lambda) = P[N(0, \lambda) = k].$$

Όπου $N(0, \lambda)$ είναι ο αριθμός των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα $(0, \lambda)$.

Προφανώς ισχύει, $p_{ij}(\lambda) \geq 0$ και

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(\lambda) = 1.$$

Ο πίνακας

$$M(\lambda) = \left(p_{ij}(\lambda)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k,$$

είναι ο πίνακας μετάβασης αυτής της αλυσίδας Markov. Εάν υποθέσουμε ότι η συχνότητα των ζημιών είναι σταθερή στο χρόνο, αυτή η αλυσίδα είναι ομοιογενής. Επομένως υποθέτουμε ότι το BMS σχηματίζει μια διαδικασία αλυσίδας Markov (χωρίς μνήμη). Το σύστημα του Βελγίου δεν είναι τέτοιου είδους (βλέπε ενότητα 2.1). Ο όρος 2 που αναφέρουμε παραπάνω δεν τηρείται. Εάν για παράδειγμα πάρουμε έναν ασφαλισμένο που ανήκει στην κλάση 15, η μεταβατική διαδικασία θα τον μεταφέρει στην κλάση 14 ή στην κλάση 10, ανάλογα με το εάν ένα ατύχημα έχει δηλωθεί στα τελευταία τρία χρόνια ή όχι. Ευτυχώς, υπάρχει τρόπος να την μετατρέψουμε σε Markovian, αυξάνοντας το s. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υποδιαιρέσουμε κάποιες κλάσεις προσθέτοντας ένα δείκτη ο οποίος θα μετράει τον αριθμό των συνεχόμενων ετών χωρίς ζημιά. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα BMS με 30 κλάσεις (Πίνακας 2).

Πίνακας 2 – Το Βέλγικο BMS

Κλάση	Επίπεδο ασφαλίστρων	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$T_k(k \geq 6)$
18	200	17.1	18	18	18	18	18	18
17.0	160	16.1	18	18	18	18	18	18
17.1	160	16.2	18	18	18	18	18	18
16.0	140	15.1	18	18	18	18	18	18
16.1	140	15.2	18	18	18	18	18	18
16.2	140	15.3	18	18	18	18	18	18
15.0	130	14.1	17.0	18	18	18	18	18
15.1	130	14.2	17.0	18	18	18	18	18
15.2	130	14.3	17.0	18	18	18	18	18
15.3	130	10	17.0	18	18	18	18	18

Κλάση	Επίπεδο ασφαλίστρων	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$T_k(k \geq 6)$
14.0	120	13	16.0	18	18	18	18	18
14.1	120	13.2	16.0	18	18	18	18	18
14.2	120	13.3	16.0	18	18	18	18	18
14.3	120	10	16.0	18	18	18	18	18
13	115	12	15.0	18	18	18	18	18
13.2	115	12.3	15.0	18	18	18	18	18
13.3	115	10	15.0	18	18	18	18	18
12	110	11	14.0	17.0	18	18	18	18
12.3	110	10	14.0	17.0	18	18	18	18
11	105	10	13	16.0	18	18	18	18
10	100	9	12	15.0	18	18	18	18
9	100	8	11	14.0	17.0	18	18	18
8	95	7	10	13	16.0	18	18	18
7	90	6	9	12	15.0	18	18	18
6	85	5	8	11	14.0	17.0	18	18
5	80	4	7	10	13	16.0	18	18
4	75	3	6	9	12	15.0	18	18
3	70	2	5	8	11	14.0	17.0	18
2	65	1	4	7	10	13	16.0	18
1	60	1	3	6	9	12	15.0	18

2.3 Η Επάρκεια ενός συστήματος Εκπτώσεων – Επιβαρύνσεων (πηγή Loimaranta (1972))

Ας προσθέσουμε στους ορισμούς που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.2 αυτού του κεφαλαίου τον παρακάτω όρο 3. Υπάρχει μια έσχατη κλάση C_1 στην οποία όλα τα ασφαλιστήρια συσσωρεύονται μαζί μετά από ένα μεγάλο αριθμό ετών χωρίς ζημιές. Σ' αυτήν την περίπτωση η πιθανότητα $p_0(\lambda)$ να μην έχεις καμία ζημιά μέσα σ' ένα χρόνο είναι αυστηρά θετική, υπάρχει ένας αριθμός n_0, τέτοιος ώστε, για κάθε μία κλάση C_i

$$p_{i1}^{(n_0)}(\lambda) \geq p_0^{n_0}(\lambda) > 0,$$

όπου $p_{i1}^{(n_0)}(\lambda)$ είναι η πιθανότητα να μεταβείς από την C_i στην C_1 σε n_0 περιόδους. Αυτός ο όρος είναι αρκετός για να διασφαλίσει ότι η αλυσίδα Markov είναι κανονική.

Σ' αυτήν την περίπτωση, η κατανομή των πιθανοτήτων των κλάσεων μετατρέπεται σε μια σταθερή κατανομή, η οποία προκύπτει κανονικοποιώντας το αριστερό ιδιοδιάνυσμα (*eigenvector*) $\bar{A}(\lambda)$ του πίνακα μετάβασης $M(\lambda)$ (με την ιδιοτιμή (*eigenvalue*) 1).

$$\bar{A}(\lambda) = \bar{A}(\lambda) M(\lambda), \qquad (2\text{–}1)$$

$$\sum_{i=1}^{s} A_i(\lambda) = 1.$$

$A_i(\lambda)$ είναι η ασυμπτωτική πιθανότητα ότι το ασφαλιστήριο είναι στην κλάση C_i. Ας θεωρήσουμε ότι το $P_i^{(n)}(\lambda)$ είναι το συνολικό πληρωθέν ασφάλιστρο κατά την διάρκεια n ετών από έναν νέο ασφαλισμένο που άρχισε από την κλάση C_i. Η θεωρία των αλυσίδων Markov μας δίνει την αναμενόμενη τιμή της παρακάτω τυχαίας μεταβλητής

$$E\left[P_i^{(n)}(\lambda)\right] = P(\lambda)n + g_i(\lambda) + \varepsilon_{i,n},$$

όπου $\varepsilon_{i,n}$ εκθετικά τείνει στο μηδέν όταν το n τείνει στο άπειρο. Το $P(\lambda)$ είναι το μέσο ασυμπτωτικό ασφάλιστρο ανά περίοδο. Είναι ανεξάρτητο από την αρχική κλάση και μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} A_i(\lambda)\, b_i = \bar{A}(\lambda)\bar{b}.$$

Ο όρος $g_i(\lambda) + \varepsilon_{i,n}$ είναι το επιπρόσθετο ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο ασφαλισμένος (ή να πάρει) εάν αρχίσει από την κλάση C_i. Η τιμή του $g_i(\lambda)$ μπορεί να υπολογιστεί από τις αναδρομικές σχέσεις

$$g_i(\lambda) = b_i - P(\lambda) + \sum_{j=1}^{s} p_{ij}(\lambda)\, g_i(\lambda), \qquad i = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^{s} A_i(\lambda)\, g_i(\lambda) = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει προστεθεί γιατί οι άλλες είναι εξαρτημένες γραμμικά. Οι ποσότητες $A_i(\lambda)$, $P(\lambda)$ και $g_i(\lambda)$ εξαρτώνται, φυσικά, από τον αριθμό των ζημιών λ.

Ο βασικός σκοπός της καθιέρωσης ενός BMS είναι να μειωθεί το ασφάλιστρο για τους καλούς οδηγούς και να αυξηθεί για τους κακούς οδηγούς. Εάν υποτεθεί ανεξαρτησία μεταξύ του πλήθους και του μεγέθους των ζημιών, ο κίνδυνος μπορεί να μετρηθεί από το λ. Για να μπορέσουμε να κάνουμε το σύστημα αποδεκτό, το $P(\lambda)$ πρέπει να είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς το λ. Ιδανικά, αυτή η εξάρτηση θα έπρεπε να ήταν γραμμική: μια αύξηση $d\lambda/\lambda$ στην συχνότητα των ζημιών θα πρέπει να παράγει μια ίση μεταβολή, $dP(\lambda)/P(\lambda)$, στο ασφάλιστρο. Το σύστημα καλείται τέλεια επαρκές (*perfectly efficient*) εάν

$$\frac{d\lambda}{\lambda}\Big/\frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)} = 1.$$

Σαν γενικό κανόνα, ωστόσο, η μεταβολή στο ασφάλιστρο είναι μικρότερη από την μεταβολή στην συχνότητα των ζημιών. Ας ορίσουμε την επάρκεια ενός BMS με

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)}\Big/\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\,Log\,P(\lambda)}{d\,Log\,\lambda}. \tag{2–2}$$

Ο υπολογισμός της $\eta(\lambda)$ απαιτεί την γνώση του

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{s} \frac{dA_i(\lambda)}{d\lambda} b_i.$$

Η εξίσωση η οποία προσδιορίζει το $dA_i\,(\lambda)/d\lambda$ προκύπτει παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (2-1):

$$\frac{d\bar{A}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\bar{A}(\lambda)}{d\lambda} M(\lambda) + \bar{A}(\lambda)\frac{dM(\lambda)}{d\lambda},$$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{dA_i(\lambda)}{d\lambda} = 0.$$

που αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα από s ανεξάρτητες εξισώσεις με s αγνώστους.

Το $P(\lambda)$ είναι φραγμένο από πάνω από το $max_i\, b_i$. Επομένως, το $Log\,P(\lambda)$ τείνει – εάν είναι μονότονη – σε ένα πεπερασμένο όριο όταν το λ τείνει στο άπειρο και η επάρκεια – η παράγωγος του λογαρίθμου του $P(\lambda)$ – τείνει στο μηδέν. Η $\eta(\lambda)$ επίσης τείνει στο μηδέν με το λ, εκτός όταν $P(0) = 0$. Μεταξύ των δύο αυτών ορίων, η $\eta(\lambda)$ είναι γενικά θετική. Μια επάρκεια που είναι ίση με 1 σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$ είναι συνεπώς αδύνατη, αλλά ενδιαφερόμαστε κατά κύριο λόγο στις συνήθεις τιμές του λ $(0{,}05 \leq \lambda \leq 1)$.

Εάν, για συντομία, υποθέσουμε ξανά ότι η νομισματική μονάδα έχει επιλεγεί έτσι ώστε το κόστος κατά μέσο όρο να είναι ίσο με 1, η εξίσωση $P(\lambda) = \lambda$ υποδεικνύει ότι το ασφάλιστρο είναι ίσο με τον κίνδυνο – ότι το ασφάλιστρο που πληρώθηκε από έναν ασφαλισμένο είναι δίκαιο. Όταν το λ πηγαίνει από το μηδέν στο άπειρο, το ασφάλιστρο αυξάνεται από μία θετική τιμή $P(0)$ σε μια άπειρη $P(\infty)$. Η εξίσωση συνεπώς έχει μια τουλάχιστον λύση έτσι ώστε

$$P(\lambda_0) = \lambda_0.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ρίζα ως αρχική τιμή, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2-2). Για $\lambda < \lambda_0$, έχουμε

$$\int_{\lambda}^{\lambda_0} \eta(\lambda) d\, Log\, \lambda = \int_{\lambda}^{\lambda_0} d\, Log\, P(\lambda) = Log\, P(\lambda_0) - Log\, P(\lambda)$$

$$= Log\, \lambda_0 - Log\, P(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda_0} d\, Log\, \lambda + Log\, \lambda - Log\, P(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow Log\, P(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda_0} [1 - \eta(\lambda)] d\, Log\, \lambda + Log\, \lambda$$

$$\Leftrightarrow P(\lambda) = \lambda e^{\int_{\lambda}^{\lambda_0} [1-\eta(\lambda)] d\, Log\, \lambda}, \qquad \lambda \le \lambda_0.$$

Με τον ίδιο τρόπο, για $\lambda > \lambda_0$ παίρνουμε

$$P(\lambda) = \lambda e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} [1-\eta(\lambda)] d\, Log\, \lambda}, \qquad \lambda > \lambda_0.$$

Εάν $\eta(\lambda) < 1$, τα ολοκληρώματα στον εκθέτη είναι θετικά. Τότε $P(\lambda) > \lambda$ για $\lambda > \lambda_0$ και $P(\lambda) < \lambda$ για $\lambda < \lambda_0$. Η ρίζα λ_0 είναι μοναδική και μόνο ένας ασφαλισμένος με συχνότητα ζημιών λ_0 πληρώνει το σωστό ασφάλιστρο: ο καλύτερος κίνδυνος $(\lambda < \lambda_0)$ πληρώνει πάρα πολλά, ο χειρότερος κίνδυνος $(\lambda > \lambda_0)$ δεν πληρώνει αρκετά.

2.4 Μια Ακόμα Έννοια της Επάρκειας

Η έννοια της επάρκειας που παρουσιάζεται παραπάνω παρουσιάζει δύο μειονεκτήματα. Πρώτον, η $\eta(\lambda)$ ως μια ασυμπτωτική επάρκεια, η οποία είναι εφαρμοστέα μόνο όταν έχουμε φτάσει στο στάδιο της στασιμότητας. Παρά το γεγονός ότι μπορούμε θεωρητικά να φανταστούμε ένα ιδιάζων (*nonregular*) BMS για το οποίο δεν θα υπάρχει καμία στάσιμη κατανομή, η εισροή νέων ασφαλισμένων και οι γρήγορες μεταβολές στις οικονομικές συνθήκες κάνουν αδύνατο να φτάσουμε σε σημεία ισορροπίας.

Δεύτερον, η $\eta(\lambda)$ είναι μια έννοια η οποία είναι ίδια για όλους τους ασφαλισμένους. Θα ήταν προτιμότερο να ορίσουμε μια επάρκεια που να εξαρτάται από την κλάση εισόδου του ασφαλισμένου και κατόπιν να είναι δυνατόν ο διαχωρισμός μεταξύ των νέων οδηγών και των έμπειρων καθώς και των επαγγελματιών από τους μη.

Ας ορίσουμε ως $\nu_i(\lambda)$ τις αναμενόμενες εκπτώσεις όλων των πληρωμών που γίνονται από έναν ασφαλισμένο που είναι στην κλάση C_i στην αρχή της περιόδου, εισάγοντας μια εκπτωτική παράμετρο $\beta < 1$. Το διάνυσμα $\bar{\nu}(\lambda) = \big(\nu_1(\lambda), \nu_2(\lambda), \dots, \nu_s(\lambda)\big)$ θα πρέπει να ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\nu_i(\lambda) = b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\nu_{T_k(i)}(\lambda), \qquad i = 1, 2, \dots, s.$$

Θεώρημα: Αυτό το σύστημα των εξισώσεων έχει μια και μόνο μια λύση (βλέπε Lemaire (1985) σελ. 169-171).

Απόδειξη: Ας ορίσουμε τον μετασχηματισμό O ως $O\bar{\nu} = \bar{w}$, όπου

$$w_i(\lambda) = b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) w_{T_k(i)}(\lambda).$$

Ας επιλέξουμε ως μήκος του διανύσματος $\|\bar{\nu}\| = max_i|\nu_i|$

Έτσι έχουμε

$$\|O\bar{w} - O\bar{\nu}\| = \max_i \left| b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) w_{T_k(i)}(\lambda) - b_i - \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)\nu_{T_k(i)}(\lambda) \right|$$

$$= \max_i \left| \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \left(w_{T_k(i)}(\lambda) - \nu_{T_k(i)}(\lambda) \right) \right|$$

$$\leq \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \max_i \left| w_{T_k(i)}(\lambda) - \nu_{T_k(i)}(\lambda) \right| \leq \beta \max_j \left| w_j(\lambda) - \nu_j(\lambda) \right|,$$

ορίζαντας ως $j = T_k(i)$

$$\|O\bar{w} - O\bar{\nu}\| = \beta \|\bar{w} - \bar{\nu}\|.$$

Επομένως, η πράξη O είναι μια *contraction* και υπάρχει ένα και μόνο ένα σταθερό σημείο. Μπορούμε να ορίσουμε την επάρκεια $\mu_i(\lambda)$ σκεπτόμενοι όπως προηγουμένως, χρησιμοποιώντας την $\nu_i(\lambda)$ αντί της $P(\lambda)$.

$$\mu_i(\lambda) = \frac{\dfrac{d\nu_i(\lambda)}{\nu_i(\lambda)}}{\dfrac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\nu_i(\lambda)} \cdot \frac{d\nu_i(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\, Log\, \nu_i(\lambda)}{d\, Log\, \lambda}.$$

Η $\mu_i(\lambda)$ είναι η ελαστικότητα της αναμενόμενης έκπτωσης των πληρωμών σε συνάρτηση της συχνότητας των ζημιών. Αυτή η έννοια εξαρτάται από την αρχική κλάση και χρησιμοποιεί την αναμενόμενη τιμή των ασφαλίστρων κατά την διάρκεια και στο τέλος της ασφαλιστικής περιόδου. Έχει τις ίδιες ιδιότητες με την επάρκεια που ορίστηκε από τον Loimaranta (1972).

Η παράγωγος $d\nu_i(\lambda)/d\lambda$ μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{d\nu_i(\lambda)}{d\lambda} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{dp_k(\lambda)}{d\lambda} \nu_{T_k(i)}(\lambda) + p_k(\lambda) \frac{d\nu_{T_k(i)}(\lambda)}{d\lambda} \right].$$

Μια απόδειξη όπως προηγουμένως δείχνει ότι υπάρχει μια και μόνο μία λύση. Με την κατανομή *Poisson* για το πλήθος των ζημιών, το σύστημα των εξισώσεων μειώνεται στο

$$\frac{d\nu_i(\lambda)}{d\lambda} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left[\left(\frac{k}{\lambda} - 1 \right) \nu_{T_k(i)}(\lambda) + \frac{d\nu_{T_k(i)}(\lambda)}{d\lambda} \right].$$

Για τις πιο κοινές τιμές του λ, το $\mu_6(\lambda)$ παίρνει ακόμα χειρότερες τιμές από την $\eta(\lambda)$. Αυτό οφείλεται στην κακή επιλογή της C_6 ως αρχικής κλάσης. Αυτό υποδεικνύει ακόμα ένα πλεονέκτημα αυτής της έννοιας της επάρκειας, σε σχέση με αυτήν του Loimaranta (1972) – όταν κατασκευάζεται ένα καινούργιο σύστημα, μπορεί να επιλέγει ως αρχική κλάση, η κλάση που παρουσιάζει την μέγιστη επάρκεια.

Να σημειωθεί επίσης ότι, η σύγκριση μεταξύ των καμπύλων της επάρκειας των δύο BMS μπορεί να είναι δύσκολη, δεδομένου ότι η $\mu_i(\lambda)$ είναι συνάρτηση του λ. Η γνώση της συνάρτηση δομής του κινδύνου (*structure function*) κάνει δυνατή την επίλυση αυτού του προβλήματος με το να οριστεί μια παγκόσμια επάρκεια

$$\mu_i = \int_0^{\infty} \mu_i(\lambda)\, dU(\lambda).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βέλτιστο BMS

3.1 Εισαγωγή

Σ’ αυτό το κεφάλαιο, τρία διαφορετικά πιθανοθεωρητικά μοντέλα αναπτύσσονται για να αναπαραστήσουν την κατανομή του πλήθους των ζημιών σ’ ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Η κατανομή *Poisson* φαίνεται να περιγράφει καλά την συμπεριφορά ενός μεμονωμένου ασφαλισμένου. Παρόλα αυτά η *Poisson* δεν είναι κατάλληλη να περιγράψει το πλήθος των ζημιών σ’ ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Η *Αρνητική Διωνυμική* κατανομή μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Θα παρουσιαστεί και ακόμα μια κατανομή που ανήκει στην οικογένεια των διαδικασιών *mixed Poisson*.

Οι διαφορές των βέλτιστων με τα Markovian που είδαμε στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 είναι κυρίως ότι στα βέλτιστα χρησιμοποιείτε η Baysian θεωρία και η θεωρία κατανομών, επίσης οι εκτιμήσεις γίνονται με πιο βέλτιστο τρόπο. Λέγονται βέλτιστα διότι ελαχιστοποιούν την ζημία από την χρήση της εκτιμηθείσας παραμέτρου του κινδύνου αντί της πραγματικής.

3.2 Μοντέλο 1: Το Μοντέλο της *Poisson*. Ομοιογενές Χαρτοφυλάκιο

Το $N(t, t+\Delta t)$ θα υποδηλώνει το πλήθος των ζημιών στο χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t)$. Ας σχηματίσουμε τις τρεις παρακάτω υποθέσεις:

1. $P[N(t, t+\Delta t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \acute{o}\pi o\upsilon\ \lambda > 0$
2. $P[N(t, t+\Delta t) > 1] = o(\Delta t)$.
3. Αν τα τ και $\acute{\tau}$ είναι δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, τότε $P\big[N(\tau) = k\ \kappa\alpha\iota\ N(\acute{\tau}) = \acute{k}\big] = P[N(\tau) = k] \times P\big[N(\acute{\tau}) = \acute{k}\big]$.

(μια συνάρτηση $f(x)$ είναι $o(h)$ εάν $lim_{h\to 0} f(h)/h = 0$).

Η πρώτη ιδιότητα εννοεί ότι η πιθανότητα να γίνει ένα ατύχημα κατά την διάρκεια ενός μικρού διαστήματος $(t, t+\Delta t)$ αγνοώντας τους όρους υψηλότερης τάξης (*higher-order*), είναι ανάλογη της διάρκειας του διαστήματος. Επίσης, δεν εξαρτάται από την αρχή του διαστήματος. Η δεύτερη υπόθεση απαιτεί η πιθανότητα δύο ή περισσότερων ατυχημάτων σ' αυτό το χρονικό διάστημα να είναι αμελητέα. Η τρίτη απαιτεί το πλήθος των ατυχημάτων σε δύο ξένα μεταξύ τους διαστήματα να είναι ανεξάρτητα.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κατανομή *Poisson* ικανοποιεί αυτές τις τρεις ιδιότητες. Είναι γνωστό ότι αμοιβαία οι τρεις υποθέσεις υπονοούν ότι η κατανομή $\{p_k, k = 0,1,2, \ldots\}$ του πλήθους των ζημιών σ' ένα δοσμένο έτος, κατανέμεται σύμφωνα με την *Poisson* με παράμετρο λ:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Πράγματι, αν $p_k(t) = P[N(0,t) = k]$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &p_k(t + \Delta t) \\ &\quad = p_k(t)P[N(t, t + \Delta t) = 0] + p_{k-1}P[N(t, t + \Delta t) = 1] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k} p_{k-i}(t)P[N(t, t + \Delta t) = i] \\ &\quad = p_k(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] + p_{k-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k} p_{k-i}(t)o(\Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

για $k = 0,1,2, \ldots$ (ορίζοντας $p_{-1}(t) = 0$). Στην συνέχεια παίρνουμε

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Παίρνοντας το όριο για $\Delta t \to 0$,

$$\acute{p}_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \qquad k = 1,2, \ldots$$

$$\acute{p}_0(t) = -\lambda p_0(t), \qquad k = 0.$$

Οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις λύνονται αναδρομικά χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες τις $p_0(0) = 1$ και $p_k(0) = 0$ εάν $k > 0$, παίρνουμε:

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}.$$

Για μοναδιαίο χρονικό διάστημα, αυτό γίνεται:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Επομένως η *Poisson* είναι η μόνη κατανομή που επαληθεύει τις τρεις ιδιότητες. Συνεπώς, εάν λάβουμε υπόψη μας ότι η ακολουθία των ατυχημάτων των οδηγών επιβεβαιώνει τις τρεις ιδιότητες, δεν έχουμε καμία άλλη επιλογή από το να υιοθετήσουμε την *Poisson* για να μοντελοποιήσουμε την κατανομή του πλήθους των ζημιών ενός ασφαλισμένου.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της *Poisson* κατανομής είναι ίσες με λ. Η συντελεστής ασυμμετρίας *Pearson*, ορίζεται ως ο λόγος της τρίτης κεντρικής ροπής και της τρίτης δύναμης της τυπικής απόκλισης, δηλαδή $1/\sqrt{\lambda}$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Είναι πρακτικό να υποθέσουμε $\lambda = 0$ ως μια ειδική περίπτωση της κατανομής *Poisson*. Σ' αυτήν την εκφυλισμένη περίπτωση, καμία ζημιά δεν είναι δυνατή.

Να σημειωθεί ότι σ' αυτό το μοντέλο και σε κάθε άλλη περίπτωση που παρουσιάζεται σ' αυτό το κεφάλαιο, το λ θεωρείται σταθερό στο χρόνο. Αυτή η υπόθεση υποκρύπτει κριτική αναφορικά με το μοντέλο, από την στιγμή που δεν περιλαμβάνει την πιθανότητα βελτίωσης των οδηγικών ικανοτήτων.

Μια διαδικασία *Poisson* έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Εάν τα $(t_1, t_1 + h_1), (t_2, t_2 + h_2), \dots, (t_n, t_n + h_n)$ είναι ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, οι τυχαίες μεταβλητές:

$$N(t_1, t_1 + h_1), N(t_2, t_2 + h_2), \dots, N(t_n, t_n + h_n),$$

είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Η κατανομή του $N(t_i, t_i + h_i)$ είναι *Poisson* με παράμετρο το λh_i το οποίο δεν εξαρτάται από το t_i.

Εάν το πλήθος τον ζημιών ακολουθεί την *Poisson* με μέση τιμή λ, τότε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των ατυχημάτων είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες και κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο, με κοινή κατανομή την *Εκθετική* και μέση τιμή $1/\lambda$. Η *Εκθετική* κατανομή έχει την πολύ χρήσιμη ιδιότητα της «έλλειψης μνήμης». Εάν με W ορίσουμε τον χρόνο αναμονής μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών,

$$P(W > t + \Delta t | W > \Delta t) = \frac{P(W > t + \Delta t)}{P(W > \Delta t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda \Delta t}} = e^{-\lambda t}.$$

Η κατανομή του εναπομείναντα χρόνου μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς είναι πάντα η ίδια, ανεξάρτητα από το πόσος χρόνος έχει περάσει από την τελευταία ζημία. Μια διαδικασία *Poisson* είναι διαδικασία «μη μεταδοτική» (*noncontagious*, βλέπε Εμπειρική Τιμολόγηση (*Experience Rating*), σελ. 11), όπου οι ζημιές συμβαίνουν πλήρως τυχαία.

Όλες αυτές οι ιδιότητες μοιάζουν αρκετές για να μοντελοποιήσουμε την συμπεριφορά του πλήθους των ζημιών. Ενώ η ιδιότητα 1 εξαλείφει τις περιοδικές-εποχιακές συνέπειες και η ιδιότητα 3 αποκλείει οποιαδήποτε ικανότητα εκμάθησης από ένα ατύχημα, το σύνολο όλων των ιδιοτήτων της *Poisson* φαίνεται να παρέχει, τουλάχιστον, μια καλή προσέγγιση του φαινόμενου του ατυχήματος. Από την στιγμή που κανένα επιστημονικό μοντέλο δεν θα αναπαριστά τέλεια την ανθρώπινη συμπεριφορά, θα χρησιμοποιηθεί η *Poisson* στην παρούσα εργασία, για να μοντελοποιηθεί η κατανομή του πλήθους των ζημιών των ασφαλισμένων. Να σημειωθεί ότι η εποχικότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διαδικασία *time-nonhomogeneous Poisson*. *Nonhomogeneous birth* διαδικασία ή συνεχή μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αναπαραστήσουν την ικανότητα εκμάθησης.

Μπορεί η *Poisson* να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει το πλήθος των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο; Ας υποθέσουμε ένα ομοιογενές χαρτοφυλάκιο, όπου το πλήθος των ζημιών για κάθε ένα από τους ασφαλισμένους ακολουθεί κατανομή *Poisson* με την ίδια παράμετρο λ. Εάν αυτό το μοντέλο ανταποκριθεί στα στατιστικά τεστ, τα ατυχήματα σ' ένα χαρτοφυλάκιο θα μπορεί να θεωρηθούν ότι εμφανίζονται τυχαία. Σ' αυτήν την περίπτωση, δεν υπάρχει λόγος να προτείνουμε ένα BMS. Όλοι οι ασφαλισμένοι που ανήκουν στην ίδια τιμολογιακή κλάση θα πρέπει να πληρώνουν το ίδιο, ανεξάρτητα από το ιστορικό ζημιών των προηγούμενων ετών.

3.2.1 Σχεδιασμός ενός βέλτιστου BMS

Όπως γίνεται σχεδόν σ' όλο των κόσμο, πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα BMS βασισμένο αποκλειστικά στο πλήθος των δηλωθεισών απαιτήσεων στην εταιρεία και όχι στο μέγεθός τους. Το καθαρό ασφάλιστρο που απαιτείται από τον ασφαλισμένο μπορεί ιδανικά να ταυτοποιηθεί από την δική του αλλά άγνωστη συχνότητα απαιτήσεων λ (με κλιμάκωση ώστε το μέσο κόστος μιας ζημίας να είναι μια νομισματική μονάδα).

Ακολουθούντες την καινοτόμα δουλεία των Bichsel (1964) και Bühlmann (1964), θεωρούμε έναν ασφαλισμένο που παρατηρείτε για t έτη και σημειώνουμε με k_j το πλήθος τον ατυχημάτων με ευθύνη του κατά το έτος j. Επομένως η πληροφορία που αφορά τον ασφαλισμένο είναι ένα διάνυσμα της μορφής $(k_1, k_2, \dots, k_t)$.

Οι παρατηρούμενες ποσότητες k_j είναι η πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής K_j, υποθέτεται ανεξαρτησία και ισονομία (δεν γίνεται καμία αλλαγή στην συχνότητα των απαιτήσεων με την πάροδο των ετών). Για κάθε μία ομάδα παρατηρήσεων $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$, ο οποίος είναι η βέλτιστη εκτίμηση του λ την χρονική στιγμή $t+1$.

Το πρόβλημα της απόφασης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: δεδομένου μιας σειράς από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $K_1, K_2, \dots, K_t, \dots$, καθορίζεται μια σειρά από συναρτήσεων $\lambda_{t+1} = \lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t), t = 0,1, \dots$, οι οποίες εκτιμούν το λ με βέλτιστο τρόπο και διαδοχικά.

Η κατασκευή ενός BMS μπορεί να παρασταθεί ως μια σειρά από στατιστικά παιχνίδια μεταξύ της φύσης και του αναλογιστή. Κάθε παιχνίδι καθορίσετε από την τριάδα:

$$\Gamma_{t+1} = (\Lambda_0, D_{t+1}, R_{t+1}),$$

όπου

Λ_0, είναι ο χώρος των στρατηγικών της φύσης, στο διάστημα $[0,\infty)$ και συνθέτεται από τις πιθανές τιμές της άγνωστης παραμέτρου λ.

D_{t+1}, είναι ο χώρος των στρατηγικών του αναλογιστή την χρονική στιγμή $t+1$, είναι μια κλάση από συναρτήσεις απόφασης (*decision functions*) $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$, οι οποίες συσχετίζουν κάθε διάνυσμα από παρατηρήσεις $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ σε ένα σημείο $\lambda_{t+1} \epsilon \Lambda_0$.

$R_{t+1} = R_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda)$, είναι η συνάρτηση κινδύνου του αναλογιστή την χρονική στιγμή $t+1$. Είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα της απαίτησης $F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda)$ το οποίο συνέβη όταν πήρε την απόφαση $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ ενώ η φύση είναι στην κατάσταση λ. Η συνάρτηση ζημίας $F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση της διαφοράς του λ_{t+1} από το λ. Έτσι

$$R_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda) = \mathbb{E}[F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda)] \sum F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda) P(k_1, k_2, \dots, k_t | \lambda),$$

και ορίζουμε με $\sum$ ως το άθροισμα όλου του ιστορικού ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ και ως $P(k_1, k_2, \dots, k_t | \lambda)$ την *t*-διάστασης κατανομή του πλήθους των απαιτήσεων για έναν ασφαλισμένο που χαρακτηρίζεται με ιστορικό ζημιών λ.

Το σύνολο των $\Gamma_t (t = 1,2, \dots)$ σχηματίζει ένα στατιστικό παιχνίδι

$$\Gamma = (\Lambda_0, D, R),$$

όπου $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_t \times \dots$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο του D_t και

$$R = R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots; \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} R_t(\lambda_t, \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}[F_t(\lambda_t, \lambda)],$$

είναι το σύνολο των αναμενόμενων απαιτήσεων του αναλογιστή.

Μια σειρά $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \dots)$ είναι βέλτιστη (*uniformly optimal*) εάν

$$R(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \dots; \lambda) \leq R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots; \lambda),$$

για κάθε τιμή του λ και για όλα τα $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots)$.

Σαν γενικότερο κανόνα, μια βέλτιστη (*uniformly optimal*) σειρά δεν υπάρχει. Το βέλτιστο BMS για ένα καλό οδηγό (χαμηλό λ) είναι πολύ διαφορετικό από το καλύτερο BMS για έναν κακό οδηγό (υψηλό λ). Μια εναλλακτική είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον μέσο κίνδυνο του αναλογιστή

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots) = \int_0^\infty R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots; \lambda) u(\lambda)\, d\lambda,$$

μια προσέγγιση κατάλληλη για την φύση του προβλήματος, από την στιγμή που έχουμε ήδη υποθέσει ότι το Λ είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας την $u(\lambda)$. Μια σειρά $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \dots)$ ορίζεται ως βέλτιστη εάν

$$R(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_t^*, \dots) = \inf_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots) \epsilon D} R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots).$$

Το θεώρημα των Wald και Wolfowitz (1951) μας επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι υπάρχει βέλτιστη λύση για κάθε περίπτωση.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes η *posterior* συνάρτηση δομής, δοσμένου του ιστορικού ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$, είναι ίσο με

$$u(\lambda | k_1, k_2, \dots, k_t) = \frac{P(k_1, k_2, \dots, k_t | \lambda) u(\lambda)}{\bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_t)},$$

όπου

$$\bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_t) = \int_0^\infty P(k_1, k_2, \dots, k_t | \lambda) u(\lambda)\, d\lambda,$$

είναι η συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων κατά την διάρκεια t έτη παρατήρησης του χαρτοφυλακίου.

Θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \int_0^\infty \sum F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda) P(k_1, k_2, \dots, k_t | \lambda) u(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \sum \int_0^\infty F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda) \bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_t) u(\lambda | k_1, k_2, \dots, k_t)\, d\lambda.$$

Από την στιγμή που η συνάρτηση των απαιτήσεων είναι μη αρνητική, έχουμε να ελαχιστοποιήσουμε, για κάθε t και για κάθε $(k_1, k_2, \dots, k_t)$,

$$\int_0^\infty F_{t+1}(\lambda_{t+1}, \lambda) u\, d\lambda,$$

η οποία είναι ο *a posteriori* κίνδυνος του Λ.

Μπορούν να βρεθούν διάφορες συναρτήσεις κινδύνου στην στατιστική βιβλιογραφία.

Είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις είναι μια αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του λάθους του αναλογιστή. Όταν $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) < \lambda$ ο ασφαλισμένος υποτιμολογείτε και η ασφαλιστική εταιρεία θα χάσει χρήματα. Όταν $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) > \lambda$ ο ασφαλισμένος υπερτιμολογείτε και η ασφαλιστική εταιρεία υπόκειται στον κίνδυνο να χάσει το ασφαλιστήριο. Όσο μεγαλύτερο είναι το λάθος του αναλογιστή, τόσο μεγαλύτερη είναι η ζημία της εταιρείας. Με σκοπό να τιμωρήσουμε τα μεγάλα λάθη, συνήθως υποθέτεται ότι η συνάρτηση ζημίας είναι μια κυρτή μη αρνητική συνάρτηση του λάθους. Η ζημία είναι μηδέν όταν δεν υπάρχει λάθος ($\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = \lambda$ ο αναλογιστής ορθά εκτίμησε την συχνότητα απαιτήσεων του ασφαλισμένου) και αυστηρά θετική διαφορετικά.

Η κλασική επιλογή στην μορφή μιας συνάρτησης ζημίας, είναι η τετραγωνική. Σ' αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο της ποσότητας

$$\int_0^\infty (\lambda_{t+1} - \lambda)^2 u(\lambda | k_1, k_2, \dots, k_t)\, d\lambda,$$

το οποίο μας οδηγεί στο

$$\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = \int_0^\infty \lambda u(\lambda | k_1, k_2, \dots, k_t)\, d\lambda,$$

Αυτή είναι η *a posteriori* πρόβλεψη του Λ, $\mathbb{E}(\Lambda | k_1, k_2, \dots, k_t)$. Η εταιρεία θα πρέπει επιβάλει στην ομάδα των ασφαλισμένων που υφίστανται ιστορικό ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ ένα καθαρό ασφάλιστρο ίσο με την *a posteriori* συχνότητα ζημιών. Εξ' ορισμού, ένα BMS που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας Baysian ανάλυση ονομάζεται βέλτιστο BMS.

Οι κατανομές *mixed Poisson* χρησιμοποιούνται ευρέως στην ασφαλιστική Θεωρία Κινδύνου ως πρότυπα παραμετρικά μοντέλα που περιγράφουν το πλήθος των ζημιών λόγω της ιδιαίτερης ερμηνείας των υποβόσκων συστατικών (βλέπε Willmot & Sundt, (1989b)). Π.χ. όταν το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο θεωρείτε ότι είναι ετερογενές τότε η *mixed* κατανομή αναπαριστά ένα μέτρο αυτής της ετερογένειας (βλέπε Bühlmann, (1970), Beard, R. E., Pentikäinen, T., & Pesonen, E. (1984)).

3.3 Μοντέλο 2: Το Μοντέλο της Αρνητικής Διωνυμικής. Ετερογενές Χαρτοφυλάκιο

Η απόρριψη του μοντέλου της *Poisson* μας δείχνει ότι η συμπεριφορά των ασφαλισμένων είναι ετερογενής. Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο που να εκφράζει τον διαφορετικό υποβόσκοντα κίνδυνο. Υποθέτουμε ότι η κατανομή $\{p_k(\lambda), k = 0,1,2,\dots\}$ του πλήθους των ζημιών για κάθε άτομο ακολουθεί *Poisson* κατανομή

$$p_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

της οποίας η παράμετρος λ διαφέρει από άτομο σε άτομο. Κάθε ασφαλισμένος χαρακτηρίζεται από την τιμή της παραμέτρου λ. Μ' αυτόν τον τρόπο, το λ θεωρείται η παρατηρούμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής Λ. Τα μοντέλα της *Αρνητικής Διωνυμικής* και της *Poisson - Inverse Gaussian* θεωρούνται συνεχείς κατανομές για το Λ. Για μεγάλα χαρτοφυλάκια, είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε την συνεχή προσέγγιση. Προς χάριν απλότητας, θα υποθέτουμε από εδώ και στο εξής ότι το Λ ακολουθεί συνεχή κατανομή στο διάστημα $[0,\infty)$. Οι συναρτήσεις μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν για διακριτές ή μεικτές κατανομές. Η συνάρτηση πυκνότητας της Λ θα αναφέρεται ως $u(\lambda)$ και θα καλείται συνάρτηση δομής του κινδύνου (*structure function*). Η κατανομή που συνεπάγεται για το πλήθος των ζημιών στο χαρτοφυλάκιο είναι:

$$p_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} u(\lambda)\, d\lambda, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

και καλείται κατανομή *mixed Poisson*. Ας επιλέξουμε για την κατανομή του Λ, που καλείται μεικτή κατανομή, την *Γάμμα* με παραμέτρους α και τ.

$$u(\lambda) = \frac{\tau^\alpha e^{-\tau\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \alpha, \tau > 0.$$

Η *Γάμμα* κατανομή είναι γνωστή και ως κατανομή *Pearson Type III*. Η μέση τιμή της είναι α/τ, η διακύμανση της είναι α/τ^2, η ασυμμετρία της είναι $2/\sqrt{\alpha}$ και η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της δίνεται από τον τύπο:

$$M(t) = \left(\frac{\tau}{\tau - t}\right)^\alpha, \qquad 0 \le t < \tau.$$

Όταν $\alpha = 1$, η *Γάμμα* μετατρέπεται σε *Εκθετική* κατανομή.

Παρακάτω αναφέρουμε μερικές ιδιότητες της συνάρτησης *Γάμμα*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt,$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!\ \textit{εάν το α είναι ακέραιος}.$$

Η κατανομή $\{p_k, k = 0,1,2,\dots\}$ του πλήθους των ζημιών στο χαρτοφυλάκιο προκύπτει με ολοκλήρωση:

$$p_k = \int_0^\infty p_k(\lambda)u(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{\tau^\alpha e^{-\tau\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\lambda$$
$$= \frac{\tau^\alpha}{k!\,\Gamma(\alpha)(1+\tau)^{k+\alpha}}\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\tau)}[\lambda(1+\tau)]^{k+\alpha-1}\,d[\lambda(1+\tau)]$$
$$= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}\frac{\tau^\alpha}{(1+\tau)^{k+\alpha}} = \binom{k+\alpha-1}{k}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^\alpha\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^k = \binom{k+\alpha-1}{k}p^\alpha q^k,$$

θέτοντας ως

$$p = \frac{\tau}{1+\tau}\ \kappa\alpha\iota\ q = 1-p = \frac{1}{1+\tau},$$

και ορίζοντας ως γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής (*generalized combinatorial coefficient*)

$$\binom{k+\alpha-1}{k} = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}.$$

Παίρνουμε μια *Αρνητική Διωνυμική* κατανομή, με μέση τιμή

$$\mu = \frac{\alpha}{\tau}, \tag{3–1}$$

και διακύμανση

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\tau}\left(1+\frac{1}{\tau}\right). \tag{3–2}$$

Η διακύμανση στην *Αρνητική Διωνυμική* είναι μεγαλύτερη της μέσης τιμής της, μια επιθυμητή ιδιότητα. (Εντούτοις όλες οι μεικτές κατανομές της *Poisson* έχουν αυτήν την ιδιότητα). Η συντελεστής ασυμμετρία είναι

$$\frac{2-\frac{\tau}{1+\tau}}{\sqrt{\frac{\alpha}{1+\tau}}}.$$

Η ροπογεννήτρια είναι

$$\left(\frac{\tau}{1+\tau-e^t}\right)^\alpha, \qquad t < ln(1+\tau).$$

Να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των πιθανοτήτων την *Αρνητικής Διωνυμικής* δεν απαιτεί τον πίνακα των συναρτήσεων *Γάμμα*. Η επαναλαμβανόμενη χρήση της ιδιότητας $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ μας δίνει την δυνατότητα της απλοποίησης των $\Gamma(k+\alpha)$ και $\Gamma(\alpha)$. Ο ευκολότερος τρόπος υπολογισμού των πιθανοτήτων της *Αρνητικής Διωνυμικής*, είναι να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο

$$p_{k+1} = \frac{k+\alpha}{(k+1)(1+\tau)}p_k,$$

αρχίζοντας από

$$p_0 = \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha}.$$

3.3.1 Σχεδιασμός ενός βέλτιστου BMS

Το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής* διαθέτει μια πολύ σημαντική ιδιότητα της στασιμότητας της συνάρτησης δομής του κινδύνου. Θα δείξουμε ότι εάν η *a priori* κατανομή της Λ είναι *Γάμμα* με παραμέτρους α και τ, στην συνέχεια και ότι η *a posteriori* κατανομή είναι επίσης *Γάμμα* αλλά με παραμέτρους $\tau + t$ και $\alpha + k$ όπου

$$k = \sum_{i=1}^{t} k_i,$$

είναι ο συνολικός αριθμός των απαιτήσεων του ασφαλισμένου. Η εμφάνιση k ατυχημάτων σε t έτη επιβάλει ενημέρωση των παραμέτρων της Γάμμα από α και τ σε $\alpha + k$ και $\tau + t$. Οι κατανομές *Poisson* και *Γάμμα* καλούνται συζυγές (*conjugate*) κατανομές. Ένας πίνακας από συζυγείς (*conjugate*) κατανομές μπορεί να βρεθεί στο Venter (1990).

Δεδομένου των υποθέσεων του μοντέλου, έχουμε

$$P(k_1, k_2, \dots, k_t|\lambda) = P(k_1|\lambda)P(k_2|\lambda) \dots P(k_t|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_1}}{k_1!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_t}}{k_t!} = \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{\prod_{j=1}^{t} k_j!}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bayes έχουμε,

$$u(\lambda|k_1, k_2, \dots, k_t) = \frac{P(k_1, k_2, \dots, k_t|\lambda)u(\lambda)}{\bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_t)} = \frac{\dfrac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{\prod_{j=1}^{t} k_j!}\dfrac{\tau^{\alpha}e^{-\tau\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^{\infty} \dfrac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{\prod_{j=1}^{t} k_j!}\dfrac{\tau^{\alpha}e^{-\tau\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{k+\alpha-1}e^{-(t+\tau)\lambda}}{\int_0^{\infty} \lambda^{k+\alpha-1}e^{-(t+\tau)\lambda}\, d\lambda} = \frac{(\tau+t)^{\alpha+k}\lambda^{\alpha+k-1}e^{-(\tau+t)\lambda}}{\int_0^{\infty} [\lambda(\tau+t)]^{\alpha+k-1}e^{-(\tau+t)\lambda}\, d[\lambda(\tau+t)]}$$

$$= \frac{(\tau+t)^{\alpha+k}\lambda^{\alpha+k-1}e^{-(\tau+t)\lambda}}{\Gamma(\alpha+k)},$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της *Γάμμα* με παραμέτρους $\alpha + k$ και $\tau + t$.

Συνεπώς, η εκτίμηση του μέσου της συχνότητας των ζημιών της ομάδας των ασφαλισμένων που υφίστανται ιστορικό ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ είναι

$$\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = \frac{\alpha + k}{\tau + t}.$$

Η απλούστερη μορφή αρχής υπολογισμού ασφαλίστρων για μία ασφαλιστική εταιρεία αποτελείται από την απαίτηση ο ασφαλισμένος να πληρώσει ένα καθαρό ασφάλιστρο συν μια επιβάρυνση ασφαλείας ανάλογη του καθαρού ασφαλίστρου. Είναι η αρχή της αναμενόμενης τιμής. Σ’ αυτήν την αρχή ο ασφαλισμένος ο οποίος υφίσταται ιστορικό ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ θα πρέπει να πληρώσει ασφάλιστρο ίσο με

$$P_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = (1+\alpha)\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = (1+\alpha)\frac{\alpha+k}{\tau+t}.$$

Τα BMS που ορίζονται με τον παραπάνω τύπο έχουν αρκετές σημαντικές ιδιότητες:

1. Το σύστημα είναι δίκαιο, με την έννοια την στατιστική *Bayesian*. Κάθε ασφαλισμένος θα πληρώσει, στην ανανέωση, ένα ασφάλιστρο ανάλογο της εκτιμώμενης συχνότητας απαιτήσεων, λαμβάνοντας υπόψη, μέσο της *Bayes* θεωρίας, όλες τις πληροφορίες που συλλέχθηκαν στο παρελθόν.
2. Το σύστημα είναι οικονομικά ισορροπημένο. Σε κάθε στάδιο αυτήν της διαδικασίας, η μέση τιμή του ατομικού ιστορικού ζημιών είναι ίση με την συνολική μέση τιμή, α/τ. Κάθε έτος, ο μέσος όρος όλων των ασφαλίστρων, που δίνουν όλοι οι ασφαλισμένοι, παραμένει σταθερός στο αρχικό επίπεδο α/τ. Το ποσό που λαμβάνει η ασφαλιστική εταιρεία, σε ένα κλειστό χαρτοφυλάκιο, είναι σταθερό. Σε καμία χρονική στιγμή δεν υπάρχει έλλειμμα ή κέρδος. Όπως έχει δείξει ο Lemaire (1995), αυτή η ιδιότητα δεν ικανοποιείτε ποτέ από ένα BMS στην πράξη, από την στιγμή που το μέσο επίπεδο ασφαλίστρου για όλα τα συστήματα μειώνεται τα πρώτα έτη ύπαρξης του συστήματος.

Η οικονομική σταθερότητα του BMS είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας της αναμενόμενης τιμής

$$\mathbb{E}_W[W] = \mathbb{E}_V\big[\mathbb{E}_W[W|V]\big].$$

Γι’ αυτή την περίπτωση, με τις προφανείς παρατηρήσεις

$$\mathbb{E}_\Lambda(\Lambda) = \mathbb{E}_{(k_1,k_2,\dots,k_t)}\big[\mathbb{E}_\Lambda[\lambda|k_1, k_2, \dots, k_t]\big].$$

Δεδομένης της σημαντικότητας αυτής της ιδιότητας, παρέχεται επίσης μια άμεση απόδειξη. Να σημειωθεί πάλι ότι $\sum$ είναι το άθροισμα όλου του δυνατού ιστορικού ζημιών $(k_1, k_2, \dots, k_t)$. Το αναμενόμενο εισόδημα της εταιρείας ανά ασφαλισμένο είναι:

$$\sum \lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)\bar{P}(k_1, k_2, \dots, k_t) = \int_0^\infty \sum \frac{a+k}{\tau+t} P(k_1, k_2, \dots, k_t|\lambda)u(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum \frac{a+k}{\tau+t}\frac{e^{-t\lambda}\lambda^k}{\prod_{j=1}^t k_j!}\right]u(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a}{\tau + t} \sum \frac{e^{-t\lambda} \lambda^k}{\prod_{j=1}^t k_j!} + \frac{1}{\tau + t} \sum \frac{\sum_i \ k_i \, e^{-t\lambda} \lambda^k}{\prod_{j=1}^t k_j!} \right] u(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a}{\tau + t} \sum \prod_{j=1}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_j}}{k_j!} + \frac{1}{\tau + t} \sum \sum\nolimits_i \ k_i \prod_{j=1}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_j}}{k_j!} \right] u(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a}{\tau + t} \prod_{j=1}^t \sum_{k_j=0}^\infty \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_j}}{k_j!} + \frac{1}{\tau + t} \sum \sum_{i=1}^t \frac{k_i e^{-\lambda} \lambda^{k_j}}{k_i!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k_j}}{k_j!} \right] u(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a}{\tau + t} + \frac{1}{\tau + t} t\lambda \right] u(\lambda) d\lambda = \frac{a}{\tau + t} \int_0^\infty u(\lambda) d\lambda + \frac{t}{\tau + t} \int_0^\infty \lambda u(\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{a}{\tau + t} + \frac{t}{\tau + t} \frac{\alpha}{\tau} = \frac{a}{\tau}.$$

3. Το ασφάλιστρο εξαρτάται μόνο από το k, τον συνολικό αριθμό ατυχημάτων που έχουν δηλωθεί. Δεν εξαρτάται από τον τρόπο που αυτά τα ατυχήματα κατανέμονται στα έτη. Αυτή η ιδιότητα δεν ικανοποιείται ποτέ από ένα BMS σε ισχύ. Σε όλα τα συστήματα, είναι ως προς το συμφέρον του ασφαλισμένου να συγκεντρώσει όλες τις απαιτήσεις του σε ένα και μόνο έτος. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα δύο οδηγούς στο Βέλγιο, Α και Β, με επαγγελματικά οχήματα, οι οποίοι άρχισαν την ασφάλιση τους από την κλάση 14. Αν υποθέσουμε ότι ο Α προκάλεσε πέντε ατυχήματα κατά την διάρκεια του πρώτου έτους, οκτώ στο δεύτερο έτος και κανένα για τα επόμενα εννέα χρόνια. Αν εφαρμόσουμε τους κανόνες του BMS το εντέκατο έτος θα βρίσκεται στην κλάση 10, με επίπεδο ασφαλίστρου 100. Αν υποθέσουμε ότι ο Β έχει μια απαίτηση το δεύτερος έτος, μια απαίτηση το έκτο έτος και καμία τα υπόλοιπα οκτώ. Τότε ο Β το εντέκατο έτος θα βρίσκεται στην κλάση 10, με επίπεδο ασφαλίστρου 100 και θα πληρώνει τα ίδια ασφάλιστρα με τον Α οδηγό που προκάλεσε συνολικά δεκατρία ατυχήματα.
4. Την χρονική στιγμή $t = 0$, όταν δεν υπάρχουν ακόμα πληροφορίες για τον κίνδυνο, όλοι οι νέοι ασφαλισμένοι θα πρέπει να πληρώσουν το ίδιο *a priori* ασφάλιστρο, το συνολικό μέσο $\lambda = \alpha/\tau$. Όσο το t μεγαλώνει, σταδιακά οι εκτιμήσεις των συχνοτήτων των απαιτήσεων θα διαφέρουν, έως ότου να γίνουν ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης όταν το t τείνει στο άπειρο. Όταν $t \to \infty, \lambda_{t+1}(k_1, k_2, \ldots, k_t) \to k/t$, τον πραγματικό κίνδυνο του συμβολαίου. Η διακύμανση της *a posteriori* κατανομής του Λ είναι

$$Var[\Lambda | k_1, k_2, \ldots, k_t] = \frac{a + k}{(\tau + t)^2},$$

το οποίο τείνει στο μηδέν όταν $t \to \infty$. Διάκριση μεταξύ των ασφαλισμένων είναι συνεπώς ασυμπτωτικά τέλεια (*asymptotically perfect*). Μακροπρόθεσμα, όλοι θα πληρώσουν ένα ασφάλιστρο που αντανακλά επακριβώς τον δικό τους κίνδυνο.

5. Το BMS που προτείνεται παραπάνω είναι μια ειδική περίπτωση γνωστή ως *credibility formula*, η οποία διατυπώνει ότι το καθαρό ασφάλιστρο διαφοροποιημένο από την εμπειρία (εδώ $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \ldots, k_t)$) θα πρέπει να μπει σε μια μορφή γραμμικού συνδιασμού του *a priori* ασφαλίστρου (εδώ α/τ) και των παρατηρήσεων (εδώ k/t):

$$\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \ldots, k_t) = z\frac{k}{t} + (1-z)\frac{\alpha}{\tau}, \qquad (0 \leq z \leq 1).$$

Πράγματι, εάν υποθέσουμε ότι

$$z = \frac{t}{\tau + t},$$

η *credibility formula* μειώνεται σε $(a+k)/(\tau+t)$. Ο *a posteriori* μέσος είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος του *a priori* ασφαλίστρου και των παρατηρήσεων. Η *credibility formula* είναι ακριβής για το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής*. Ο *credibility factor z*, το βάρος που δίνεται στο ιστορικό των απαιτήσεων του καθενός, είναι 0 όταν $t = 0$, το οποίο αυξάνει με τον χρόνο και ασυμπτωτικά τείνει στο 1 (κοίτα για παράδειγμα Venter (1990)).

3.4 Μοντέλο 3: Το Μοντέλο της *Poisson – Inverse Gaussian*

Σύμφωνα με τους Χατζηκωνσταντινίδη και Αντζουλάκο (2002) οι κατανομές *mixed Poisson* χρησιμοποιούνται ευρέως για να μοντελοποιηθεί το πλήθος των ζημιών όταν το χαρτοφυλάκιο είναι ετερογενές. Η μεικτή κατανομή αναπαριστά ένα μέτρο γι' αυτήν την ετερογένεια. Υπάρχουν αρκετοί (Willmot (1986, 1987), Venter (1991), Besson & Partrat (1992), Tremblay (1992) και Lemaire (1992)) που προτείνουν την μεικτή κατανομή *Poisson – Inverse Gaussian*. Σ' αυτό το μοντέλο, η κατανομή του *Λ* είναι μια *Inverse Gaussian* $IG(g,h)$ (βλέπε επίσης Holla (1967) και Sichel (1971)):

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h}\lambda^{3/2}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2}, \qquad g, h > 0.$$

Στην συνέχεια η *mixed Poisson* στην οποία θα καταλήξουμε ονομάζεται *Poisson – Inverse Gaussian*. Η μέση τιμή της είναι $m = g$, ενώ η διακύμανση της είναι $\sigma^2 = g(1+h)$. Οι πιθανότητες p_k μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά

$$p_0 = e^{\frac{g}{h}[1-(1+2h)^{1/2}]},$$
$$p_1 = g p_0 (1+2h)^{-1/2},$$
$$(1+2h)k(k-1)p_k = h(k-1)(2k-3)p_{k-1} + g^2 p_{k-2}, \qquad k = 2,3,\ldots$$

Οι εκτιμητές των g και h είναι

$$\hat{g} = \bar{x} \; και \; \hat{h} = \left(\frac{s^2}{\bar{x}}\right) - 1, \; (δεδομένου \; s^2 > \bar{x}). \qquad (3\text{–}3)$$

3.4.1 Σχεδιασμός ενός βέλτιστου BMS

Παρόμοια ανάπτυξη, μ’ αυτήν των προηγούμενων μοντέλων, μπορεί να γίνει και σ’ αυτό το μοντέλο. Σ’ αυτό το μοντέλο των *Poisson – Inverse Gaussian* η συνάρτηση δομής του κινδύνου είναι

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h}\lambda^{3/2}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2}.$$

Σύμφωνα με τους Besson – Partrat (1992) και Tremblay (1992), η *posterior* συνάρτηση δομής του κινδύνου, μετά από ιστορικό ζημιών $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ είναι

$$u(\lambda|k_1,k_2,\ldots,k_t) = \frac{P(k_1,k_2,\ldots,k_t|\lambda)u(\lambda)}{\int_0^\infty P(k_1,k_2,\ldots,k_t|\lambda)u(\lambda)\,d\lambda} = \frac{\frac{e^{-t\lambda}\lambda^k}{\Pi k_j!}\frac{g}{\sqrt{2\pi h}\lambda^{3/2}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2}}{\int_0^\infty \frac{e^{-t\lambda}\lambda^k}{\Pi k_j!}\frac{g}{\sqrt{2\pi h}\lambda^{3/2}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2}\,d\lambda}.$$

Μετά από απλοποιήσεις και διαγραφεί του ολοκληρώματος ως σταθερά κανονικοποίησης παίρνουμε,

$$u(\lambda|k_1,k_2,\ldots,k_t) \propto \frac{\lambda^k e^{-t\lambda}}{\lambda^{-3/2}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2} \propto \lambda^{k-\frac{3}{2}} e^{-\lambda\left(t+\frac{1}{2h}\right)} e^{-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{g^2}{2h}\right)} = \lambda^\alpha e^{-\frac{\lambda}{b}} e^{-\frac{c}{\lambda}},$$

ορίζοντας ως

$$\alpha = k - \frac{3}{2}, b = t + \frac{1}{2h}, c = \frac{g^2}{2h},$$
$$με \; \alpha = \nu - 1, b = 2\beta \; και \; c = \mu^2/2\beta, \qquad (3\text{–}4)$$

γίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της *Generalized Inverse Gaussian*, που συνήθως ορίζεται ως

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{\nu-1} e^{-\frac{\lambda}{2\beta}} e^{-\frac{\mu^2}{2\beta\lambda}}}{2\mu^\nu K_\nu\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}.$$

Το K_ν είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel του τρίτου είδους με δείκτη ν, η οποία ορίζεται ως

$$K_\nu(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{u}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,dx,$$

για όλα τα $u > 0$, $K_\nu(u)$ ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο ιδιότητες

$$K_{-\nu}(u) = K_\nu(u),$$

και

$$K_{\nu+1}(u) = \frac{2\nu}{u} K_\nu(u) + K_{\nu-1}(u).$$

Όπως η *Γάμμα* και η *Generalized Inverse Gaussian* κατανομή ανήκει στην οικογένεια των κατανομών που είναι συζυγείς (*conjugate*) με την *Poisson*. Μειώνεται στην *Inverse Gaussian* όταν $\nu = -1/2$. Η μέση τιμή της είναι

$$\mu \frac{K_{\nu+1}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{K_\nu\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} = \mu \frac{K_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{K_{k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)},$$

και σημειώνουμε

$$Q_k(u) = \frac{K_{k+\frac{1}{2}}(u)}{K_{k-\frac{1}{2}}(u)}.$$

Το *posterior* ασφάλιστρο, χρησιμοποιώντας την αρχή της αναμενόμενης τιμής, μειώνεται σε

$$P_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t) = (1+\alpha)\mu Q_k\left(\frac{\mu}{\beta}\right).$$

Οι δύο ιδιότητες της $K_\nu(u)$ υπονοούν ότι

$$Q_0(u) = 1,$$

και

$$Q_k(u) = \frac{2k-1}{u} + \frac{1}{Q_{k-1}(u)}.$$

Το βέλτιστο BMS που προκύπτει από το μοντέλο των *Poisson – Inverse Gaussian* δεν διαφέρει πολύ από το βέλτιστο BMS που προκύπτει από την *Αρνητική Διωνυμική* κατανομή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανάλυση του Γαλλικού BMS

4.1 Εισαγωγή

Πολλοί σημαντικοί παράγοντες δεν μπορούν να ληφθούν υπόψη *a priori* όταν τιμολογούνται προϊόντα Αστικής Ευθύνης αυτοκινήτων. Για παράδειγμα η ταχύτητα των αντανακλαστικών, η επιθετικότητα στο τιμόνι ή η γνώση του Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας (Κ.Ο.Κ.) είναι δύσκολο να ενσωματωθούν στην κατηγοριοποίηση των κινδύνων. Συνεπώς, οι τιμολογιακές κλάσεις είναι αρκετά ανομοιογενείς παρά την χρήση πολλών κατηγορικών μεταβλητών. Αυτή η υπολειπόμενη ανομοιογένεια προκαλεί συνήθως *overdispersion*: δεδομένα που περιλαμβάνουν πλήθος ζημιών παρουσιάζουν μεταβλητότητα που υπερβαίνει αυτή που μπορεί να περιγραφεί από τα μοντέλα της *Poisson* (θυμίζουμε ότι στην *Poisson* ισχύει: μέση τιμή = διακύμανση). Αυτό το φαινόμενο μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια τυχαία επίδραση σ' ένα στατιστικό μοντέλο.

Είναι εύλογο να πιστεύουμε ότι τα κρυφά χαρακτηριστικά αποκαλύπτονται μερικώς από το πλήθος των ζημιών που δηλώνονται από τον ασφαλισμένο. Γι' αυτό και η τροποποίηση του ασφαλίστρου είναι βασισμένη στο ιστορικό ζημιών του καθενός, προκειμένου να επαναφέρουμε την δικαιοσύνη μεταξύ των ασφαλισμένων. Από την άποψη αυτή, οι αποζημιώσεις προηγούμενων ζημιών σ' ένα μοντέλο τιμολόγησης προκύπτει από εξωγενή εξήγηση της αυτοσυσχέτισης για διαχρονικά δεδομένα. Σ' αυτή την περίπτωση, ο συσχετισμός είναι μόνο φαινομενικός και αποτέλεσμα της αποκάλυψης των κρυφών χαρακτηριστικών στα χαρακτηριστικά του κινδύνου.

Η *Θεωρία Αξιοπιστίας* (*credibility theory*) μπορεί να θεωρηθεί ως η τέχνη να συνδυάζεις διαφορετικές συλλογές στοιχείων για την απόκτηση ακριβούς συνολικής εκτίμησης. Στην ασφάλιση αυτοκινήτου, τεχνικές αξιοπιστίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αξιολογηθεί εκ νέου η ετήσια αναμενόμενη συχνότητα δεδομένου του ιστορικού ζημιών. Οι στατιστικές *Bayesian* προσφέρουν μια αποδεκτή διανοητική προσέγγιση στη *Θεωρία*

Αξιοπιστίας. Ωστόσο, οι μηχανισμοί αξιοπιστίας είναι δύσκολο να εφαρμοστούν στην πράξη και τα συστήματα *merit rating* που εφαρμόζονται από τις ασφαλιστικές εταιρείες είναι απλοποιημένες εκδοχές των συγκεκριμένων σχέσεων της *Θεωρία Αξιοπιστίας*.

Μια από τις εμπορικές απλοποιήσεις της *Θεωρίας Αξιοπιστίας* είναι γνωστή ως BMS. Όπως έχουμε αναφέρει και στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1, τα συστήματα αυτά λαμβάνουν τη μορφή μιας κλίμακας που αποτελείται από διάφορα επίπεδα. Οι ασφαλισμένοι μετακινούνται στο εσωτερικό της κλίμακας ανάλογα με τον αριθμό των ζημιών που αναφέρουν στην ασφαλιστική εταιρεία. Σε κάθε επίπεδο της κλίμακας επισυνάπτεται μια σχετικότητα (*relativity* δηλαδή, ένα ποσοστό, ή σχετικό ασφάλιστρο). Αυτές οι σχετικότητες εφαρμόζονται σε ένα ασφάλιστρο-βάση. Συνήθως, τα BMS μοντελοποιούνται μέσω μιας αλυσίδας *Markov*, γεγονός που καθιστά εύκολα τα μαθηματικά για τον αναλογιστή. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτά τα BMS μπορούν να βρεθούν σε Norberg (1976) και αναλυτικά σε Lemaire (1995).

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά το Γαλλικό BMS

Η Γαλλία αποτελεί εξαίρεση. Η γαλλική νομοθεσία επιβάλλει στις ασφαλιστικές εταιρείες που δραστηριοποιούνται στη Γαλλία ένα μοναδικό BMS. Αυτό το BMS δεν βασίζεται σε μια κλίμακα. Αντίθετα, το γαλλικό BMS χρησιμοποιεί την έννοια του συντελεστή αύξησης-μείωσης (*coefficient der΄eduction-majoration* στα γαλλικά, στο εξής χάριν συντομίας θα το αναφέρουμε ως CRM). Πιο συγκεκριμένα, το γαλλικό BMS συνεπάγεται επιβάρυνση 25% ανά απαίτηση και έκπτωση 5% για κάθε χρόνο χωρίς απαίτηση. Έτσι, κάθε ασφαλισμένος έχει ένα ασφάλιστρο βάσης και αυτό το ασφάλιστρο βάσης προσαρμόζεται ανάλογα με το πλήθος των απαιτήσεων που δηλώνονται στην ασφαλιστική εταιρεία, πολλαπλασιάζοντάς το κατά 1,25 κάθε φορά που ένα ατύχημα με υπαιτιότητά του ασφαλισμένου αναφέρεται στην εταιρεία και κατά 0,95 για κάθε χρονιά χωρίς αξίωση. Στην περίπτωση της κοινής ευθύνης, η αύξηση αυτή μειώνεται κατά το ήμισυ (12,5% αντί του 25%). Να σημειωθεί ότι οι αυξήσεις αυτές εφαρμόζονται στην προηγούμενη σχετικότητα: η πρώτη απαίτηση προκαλεί την αύξηση του ασφαλίστρου από 100 σε 125, η δεύτερη σε 156, η τρίτη σε 195, και ούτω καθεξής (όλοι οι αριθμοί στρογγυλοποιούνται προς τα κάτω). Οι επιβαρύνσεις είναι έτσι κυρτές ως προς το πλήθος των απαιτήσεων που έχουν δηλωθεί από τον οδηγό, διασφαλίζοντας ότι όσο περισσότερες απαιτήσεις αναφέρονται, τόσο περισσότερο επιβαρύνεται το ασφάλιστρο. Το υψηλότερο ποσοστό είναι 350 και το χαμηλότερο 50 (επιτυγχάνεται μετά από 13 συνεχόμενα έτη χωρίς απαίτηση). Σύμφωνα με το Γαλλικό ειδικό κανόνα «μπόνους» μετά από δύο συνεχόμενα έτη χωρίς απαίτηση, ο οδηγός πηγαίνει πίσω στο αρχικό επίπεδο 100%. Αυτός ο ειδικός κανόνας μπόνους είναι ιδιαίτερα γενναιόδωρος.

Το 1994, η Ευρωπαϊκή Ένωση αποφάσισε ότι όλες οι χώρες-μέλη έπρεπε να αποσύρουν το υποχρεωτικά BMS τους, όπως είδαμε στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Ωστόσο, το υποχρεωτικό Γαλλικό BMS είναι ακόμα σε ισχύ. Αρκετά παραδόξως, το Ευρωπαϊκό Δικαστήριο αποφάσισε το 2004 ότι τα υποχρεωτικά BMS της Γαλλίας και του Μεγάλου Δουκάτου του Λουξεμβούργου δεν ερχόντουσαν σε αντίθεση με την ελεύθερη τιμολόγηση που επιβάλλει η ευρωπαϊκή νομοθεσία. Αυτές οι δύο χώρες είχαν έτσι τη δυνατότητα να διατηρήσουν το ενιαίο BMS τους.

Παρακάτω θα δούμε ότι το πλαίσιο της *Θεωρίας Αξιοπιστίας* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση του Γαλλικού BMS. Συγκεκριμένα, η μεγαλύτερη ακρίβεια της Θεωρίας Αξιοπιστίας υιοθετείται για να εφαρμοστεί στους συντελεστές CRM: το καταφύγιο των αναλογιστών είναι μια δευτεροβάθμια συνάρτηση ζημίας, αλλά το σχήμα της πρόβλεψης της αξιοπιστία περιορίζεται εκ των προτέρων στη επιβληθείσα μορφή απ’ την γαλλική νομοθεσία. Σ’ αυτό το σημείο να πούμε ότι η προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε παρακάτω δεν είναι η μόνη δυνατή για τους συντελεστές CRM. Έχει αποδειχθεί από τον Kelle (2000) ότι το γαλλικό BMS αντιστοιχεί σε μια κλίμακα που αποτελείται από αρκετές εκατοντάδες επίπεδα (530 επίπεδα, για να είμαστε ακριβείς), που μπορεί να αναλυθεί σε αλυσίδα Markov σύμφωνα με τον Norberg (1976). Ο μεγάλος αριθμός των επιπέδων που απαιτείται οφείλεται στη μείωση της επιβάρυνσης στην περίπτωση ατυχήματος με κοινή ευθύνη, αναγκάζοντας τον συγγραφέα να εξετάσει το ζευγάρι (ο αριθμός των απαιτήσεων με όλη την ευθύνη, ο αριθμός των απαιτήσεων με μερική ευθύνη) για να κάνει τον υπολογισμό. Η μορφή του πίνακα μετάβασης είναι κάπως περίπλοκη και πιστεύουμε ότι η εναλλακτική λύση που θα αναπτύξουμε παρακάτω προσφέρει την κατάλληλη αντιμετώπιση των CRM.

4.2 Προσαρμογή του Γαλλικού BMS

4.2.1 Μοντελοποίηση της Συχνότητας των Ζημιών

Ας πάρουμε τυχαία έναν ασφαλισμένο από το χαρτοφυλάκιο. Ορίζουμε ως N_t το πλήθος των απαιτήσεων που δηλώνονται από τον ασφαλισμένο την χρονική περίοδο t. Υποθέτουμε ότι το N_t ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο $\lambda\Theta$ όπου Θ είναι ένας τυχαίος παράγοντας που εξηγεί την ανομοιογένεια στο χαρτοφυλάκιο. Υποθέτουμε ότι το Θ είναι θετική τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $E[\Theta] = 1$, έτσι ώστε $E[N] = \lambda$, το οποίο αντιπροσωπεύει την μέση ετήσια συχνότητα στο χαρτοφυλάκιο (ή στην κλάση του κινδύνου στην περίπτωση τμηματικού τιμολογίου). Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του N_t δίνεται από τον τύπο:

$$Pr[N_t = k|\Theta = \theta] = e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Η ανομοιογένεια που εμφανίζεται στο χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από την συνάρτηση δομής του κινδύνου (*structure function*) u. Τυπικά το u είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του Θ. Γι' αυτό η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της N_t δίνεται από τον τύπο:

$$Pr[N_t = k] = \int_0^{+\infty} Pr[N_t = k|\Theta = \theta]u(\theta)\, d\theta.$$

Επιπρόσθετα, υποτίθεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές $N_1, N_2, N_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, δοθέντος της κλίσης του κινδύνου Θ του ασφαλισμένου. Δεδομένου ότι το Θ είναι άγνωστο στην ασφαλιστική εταιρεία, αυτό επιφέρει σημαντική εξάρτηση μεταξύ των $N_t's$.

4.2.2 Συντελεστές CRM

Θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές CRM εξαρτώνται μόνο από το πλήθος των ζημιών που δηλώνονται και όχι από το μέγεθος τους. Γι' αυτό το λόγο το ασφάλιστρο βάσης θα είναι απλά λ, πολλαπλασιασμένο με μία σταθερά (ουσιαστικά το αναμενόμενο κόστος της ζημιάς).

Ας ορίσουμε ως ε_t τον συντελεστή έκπτωσης και ως δ_t τον συντελεστή επιβάρυνσης που ισχύει για έναν ασφαλισμένο που είναι ασφαλισμένος για t χρόνια. Τότε ο συντελεστής CRM για τα έτη από 1 έως t γράφεται:

$$r_{\delta_t,\varepsilon_t}(N_\circ, I_\circ, t) = (1 + \delta_t)^{N_\circ}(1 - \varepsilon_t)^{I_\circ},$$

με

$$N_\circ = \textstyle\sum_{j=1}^{t} N_j \ \textit{και}\ I_\circ = \sum_{j=1}^{t} I_j, \tag{4–1}$$

όπου I_j ορίζεται ως:

$$I_j = \begin{cases} 1, & ά\nu\ N_j = 0 \\ 0, & ά\nu\ N_j \geq 1 \end{cases}.$$

Με λόγια, $N_\circ$ είναι ο συνολικός αριθμός των ζημιών που δηλώθηκαν από τον ασφαλισμένο στην περίοδο $(0, t)$ και $I_\circ$ είναι το πλήθος των ετών στα οποία δεν δηλώθηκε καμία ζημιά στην ασφαλιστική εταιρεία. Να σημειωθεί ότι οι συντελεστές CRM εξαρτώνται από το t, έτσι ώστε οι εκπτώσεις και επιβαρύνσεις να αλλάζουν για κάθε διάστημα $(0, t)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Norberg (1976) έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους ε_t και δ_t. Δηλαδή θα ελαχιστοποιήσουμε τα τετράγωνα των διαφορών μεταξύ του πραγματικού ασφαλίστρου Θ και του ασφαλίστρου $r_{\delta_t,\varepsilon_t}$, που εφαρμόζεται στον ασφαλισμένο σύμφωνα με το Γαλλικού τύπου BMS. Συγκεκριμένα για τον ασφαλισμένο που παρατηρήθηκε για t χρόνια και έχει προκαλέσει $N_1, N_2, \ldots, N_t$ ζημιές, σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τα ε_t και δ_t έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$\Psi_t(\delta, \varepsilon) = \mathbb{E}\left[\left(\Theta - r_{\delta,\varepsilon}(N_\circ, I_\circ, t)\right)^2\right],$$

δεδομένων των παραμέτρων ε και δ. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να λύσουμε τις πρώτης τάξεως συνθήκες (*conditions*):

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\Psi_t(\varepsilon, \delta) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Psi_t(\varepsilon, \delta) = 0.$$

Πρόταση 1:

Ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\mathbb{E}\left[\left(\Theta - r_{\delta,\varepsilon}(N_\circ, I_\circ, t)\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta N_\circ (1+\delta)^{N_\circ - 1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}] = \mathbb{E}[N_\circ (1+\delta)^{2N_\circ - 1}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}],$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\Theta - r_{\delta,\varepsilon}(N_\circ, I_\circ, t)\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta I_\circ (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ - 1}] = \mathbb{E}[I_\circ (1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ - 1}].$$

Απόδειξη:

Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\mathbb{E}\left[\left(\Theta - r_{\delta,\varepsilon}(N_\circ, I_\circ, t)\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial \delta}\mathbb{E}[[\Theta - (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]^2] = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\mathbb{E}\big[[\Theta - (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\frac{\partial}{\partial \delta}\mathbb{E}\big[[\Theta - (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\big[[\Theta - (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\mathbb{E}\left[\left[-N_\circ(1+\delta)^{N_\circ - 1}\frac{\partial}{\partial \delta}(1+\delta)(1-\varepsilon)^{I_\circ}\right]\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\mathbb{E}\big[[-N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}][-N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[-\Theta N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}+(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[-\Theta N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]+\mathbb{E}[N_\circ(1+\delta)^{2N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]=\mathbb{E}[N_\circ(1+\delta)^{2N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}],$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\Theta-r_{\delta,\varepsilon}(N_\circ,I_\circ,t)\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathbb{E}[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]^2]=0 \Leftrightarrow$$
$$2\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\mathbb{E}\left[\left[-I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(1-\varepsilon)\right]\right]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]\big]\mathbb{E}\big[[I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}]\big]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\big[[\Theta-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}\big]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}-(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}]-\mathbb{E}[I_\circ(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ-1}]=0 \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[\Theta I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}]=\mathbb{E}[I_\circ(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ-1}].\ \blacksquare$$

Άρα τελικά έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\mathbb{E}[\Theta N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}]=\mathbb{E}[N_\circ(1+\delta)^{2N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}]\\ \mathbb{E}[\Theta I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}]=\mathbb{E}[I_\circ(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ-1}]\end{cases}. \qquad (4\text{–}2)$$

4.2.3 Υπολογισμός των CRM κατά τον χρόνο t

Ας ορίσουμε ως δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του τυχαίου ζεύγους $(N_\circ, I_\circ)$ δοθέντος ότι $\Theta=\theta$ ως:

$$\varphi(\xi_1,\xi_2|\theta)=\mathbb{E}\big[\xi_1^{N_\circ}\xi_2^{I_\circ}\big|\Theta=\theta\big].$$

Η υπόθεση ανεξαρτησίας των $N_1, N_2, \dots, N_t$ μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\varphi(\xi_1,\xi_2|\theta)=\prod_{j=1}^{t}\mathbb{E}\left[\xi_1^{N_i}\xi_2^{I_j}\middle|\Theta=\theta\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{t}\left(e^{-\lambda\theta}(\xi_2 - 1) + e^{-\lambda\theta(1-\xi_1)}\right) = \left(e^{-\lambda\theta}(\xi_2 - 1) + e^{-\lambda\theta(1-\xi_1)}\right)^t.$$

Πρόταση 2:

Μπορούμε να ξαναγράψουμε το σύστημα (4-2) ως:

$$\begin{cases} 2\mathbb{E}\left[\Theta\varphi^{(1,0)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\Theta)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_2^{(1,0)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\Theta)\right] \\ 2\mathbb{E}\left[\Theta\varphi^{(0,1)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\Theta)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_2^{(0,1)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\Theta)\right] \end{cases},$$

όπου

$$\varphi^{(x,y)}(a,b|\theta) = \frac{\partial^x \partial^y}{\partial s^x \partial t^y}\varphi(s,t|\theta)\bigg|_{s=a,\, t=b},$$

$$\varphi_2^{(x,y)}(a,b|\theta) = \frac{\partial^x \partial^y}{\partial s^x \partial t^y}\varphi(s^2,t^2|\theta)\bigg|_{s=a,\, t=b},$$

για $x, y \in \{0,1\}$.

Απόδειξη:

Πράγματι ισχύει

$$\varphi^{(1,0)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial^1 \partial^0}{\partial s^1 \partial t^0}\varphi(s,t|\theta)\bigg|_{s=1+\delta,\, t=1-\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\varphi(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\mathbb{E}[(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}|\Theta=\theta]$$

$$= \mathbb{E}\left[N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}(1+\delta)(1-\varepsilon)^{I_\circ}\middle|\Theta=\theta\right] = \mathbb{E}[N_\circ(1+\delta)^{N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{I_\circ}|\Theta=\theta]$$

και

$$\varphi_2^{(1,0)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial^1 \partial^0}{\partial s^1 \partial t^0}\varphi(s^2,t^2|\theta)\bigg|_{s=1+\delta,\, t=1-\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\varphi[(1+\delta)^2, (1-\varepsilon)^2|\theta] = \frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\mathbb{E}[(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}|\Theta=\theta]$$

$$= \mathbb{E}\left[2N_\circ(1+\delta)^{2N_\circ-1}\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}(1+\delta)(1-\varepsilon)^{2I_\circ}\middle|\Theta=\theta\right]$$

$$= 2\mathbb{E}[N_\circ(1+\delta)^{2N_\circ-1}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}|\Theta=\theta].$$

Επίσης έχουμε

$$\varphi^{(0,1)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial^0 \partial^1}{\partial s^0 \partial t^1}\varphi(s,t|\theta)\bigg|_{s=1+\delta,\, t=1-\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\varphi(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\mathbb{E}[(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ}|\Theta=\theta]$$

$$= \mathbb{E}\left[I_\circ (1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ - 1}\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)\middle| \Theta = \theta\right] = \mathbb{E}[I_\circ(1+\delta)^{N_\circ}(1-\varepsilon)^{I_\circ-1}|\Theta=\theta],$$

και

$$\varphi_2^{(0,1)}(1+\delta, 1-\varepsilon|\theta) = \frac{\partial^0\partial^1}{\partial s^0 \partial t^1}\varphi(s^2, t^2|\theta)\Big|_{s = 1+\delta, t = 1-\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\varphi[(1+\delta)^2,(1-\varepsilon)^2|\theta] = \frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\mathbb{E}[(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ}|\Theta=\theta]$$

$$= \mathbb{E}\left[2I_\circ (1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ-1}\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)\middle| \Theta=\theta\right]$$

$$= 2\mathbb{E}[I_\circ(1+\delta)^{2N_\circ}(1-\varepsilon)^{2I_\circ-1}|\Theta=\theta]. \blacksquare$$

Πρόταση 3:

Μπορούμε να γράψουμε ξανά τις πρώτης τάξεως συνθήκες ως:

$$\int_0^\infty \theta^2\left(e^{\lambda\theta\delta} - \varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1} e^{\lambda\theta\delta}u(\theta)\,d\theta$$

$$= (1+\delta)\int_0^\infty \theta\left(e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)} + e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\right)^{t-1} e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}u(\theta)\,d\theta,$$

$$\int_0^\infty \theta\left(e^{\lambda\theta\delta} - \varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1} e^{-\lambda\theta}u(\theta)\,d\theta$$

$$= (1-\varepsilon)\int_0^\infty \left(e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)} + e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\right)^{t-1} e^{-\lambda\theta}u(\theta)\,d\theta.$$

Απόδειξη:

Πράγματι έχουμε

$$2\mathbb{E}\left[\theta\varphi^{(1,0)}(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_2^{(1,0)}(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right] \Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\varphi(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\varphi[(1+\delta)^2,(1-\varepsilon)^2|\Theta]\right] \Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[e^{-\lambda\theta}(1-\varepsilon-1) + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)]}\right]^t\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[e^{-\lambda\theta}[(1-\varepsilon)^2-1] + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]}\right]^t\right] \Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta t\left[-\varepsilon e^{-\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)]}\right]^{t-1}\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[-\varepsilon e^{-\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)]}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[t\left[e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon) + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]}\right]^{t-1}\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon) + e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]}\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$2t\mathbb{E}\left[\theta\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}\left[e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)]}\right]\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[-\lambda\theta[1-(1+\delta)]\right]\right]$$

$$=t\mathbb{E}\left[\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}\left[e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]}\right]\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}\left[-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]\right]\right]\Leftrightarrow$$

$$2t\mathbb{E}\left[\theta\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{\lambda\theta\delta}\lambda\theta\right]$$

$$=t\mathbb{E}\left[\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}\right]2\lambda\theta(1+\delta)\frac{\partial}{\partial(1+\delta)}(1+\delta)\right]\Leftrightarrow$$

$$2t\lambda\mathbb{E}\left[\theta^2\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{\lambda\theta\delta}\right]$$

$$=2t\lambda(1+\delta)\mathbb{E}\left[\theta\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}\right]\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty\theta^2\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{\lambda\theta\delta}u(\theta)d\theta$$

$$=(1+\delta)\int_0^\infty\theta\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}\right]u(\theta)d\theta,$$

και

$$2\mathbb{E}\left[\theta\varphi^{(0,1)}(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right]=\mathbb{E}\left[\varphi_2^{(0,1)}(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right]\Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\varphi(1+\delta,1-\varepsilon|\Theta)\right]=\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\varphi[(1+\delta)^2,(1-\varepsilon)^2|\Theta]\right]\Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\left[e^{-\lambda\theta}(1-\varepsilon-1)+e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)]}\right]^t\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\left[e^{-\lambda\theta}[(1-\varepsilon)^2-1]+e^{-\lambda\theta[1-(1+\delta)^2]}\right]^t\right]\Leftrightarrow$$

$$2\mathbb{E}\left[\theta t\left[e^{-\lambda\theta}(1-\varepsilon-1)+e^{\lambda\theta\delta}\right]^{t-1}\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\left[e^{-\lambda\theta}(1-\varepsilon-1)+e^{\lambda\theta\delta}\right]\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[t\left[e^{-\lambda\theta}[(1-\varepsilon)^2-1]+e^{-\lambda\theta(-2\delta-\delta^2)}\right]^{t-1}\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}\left[e^{-\lambda\theta}[(1-\varepsilon)^2-1]\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\lambda\theta(-2\delta-\delta^2)}\right]\right]\Leftrightarrow$$

$$2t\mathbb{E}\left[\theta\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{-\lambda\theta}\right]$$

$$=t\mathbb{E}\left[\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}e^{-\lambda\theta}2(1-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)\right]\Leftrightarrow$$

$$2t\mathbb{E}\left[\theta\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{-\lambda\theta}\right]=2t(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}e^{-\lambda\theta}\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty \theta\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{-\lambda\theta}u(\theta)d\theta$$

$$=(1-\varepsilon)\int_0^\infty\left[e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right]^{t-1}e^{-\lambda\theta}u(\theta)d\theta\,.\blacksquare$$

Αυτές οι εξισώσεις δεν διαθέτουν μια λύση κλειστού τύπου, όπως είναι η περίπτωση για τα συστήματα Markov (βλέπε π.χ. Norberg (1976)). Παρ 'όλα αυτά, μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά, χρησιμοποιώντας από την μία πλευρά έναν αριθμητικό αλγόριθμο ολοκλήρωσης και από την άλλη πλευρά είτε έναν αλγόριθμο που επιτρέπει την επίλυση αριθμητικά ένας συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων ή έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης, ανάλογα με τον τύπο της διαδικασίας που είναι διαθέσιμος.

4.2.4 Γενικό CRM

Να σημειωθεί ότι έχουμε επιτύχει μέχρι τώρα μια αριθμητική λύση για κάθε t: ελαχιστοποιώντας την $\Psi_t(\delta,\varepsilon)$ ως προς ε και δ μας δίνει την βέλτιστη λύση (ε_t,δ_t), για την περίοδο $(0,t)$. Ωστόσο θέλουμε να επιτύχουμε ένα μοναδικό ζεύγος συντελεστών CRM. Αυτά μπορούν να επιτευχθούν βάση του Borgan (1981). Για το σκοπό αυτό, ας ορίσουμε την ηλικιακή διάρθρωση (*age structure*) του χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, ορίζουμε ως A τον αριθμό των ετών που ο οδηγός καλύπτεται από την εταιρεία και ως $N_1,N_2,\ldots,N_A$ το ετήσιο πλήθος των απαιτήσεων που έχουν γνωστοποιηθεί από αυτόν τον ασφαλισμένο. Να σημειωθεί ότι το A είναι μια τυχαία μεταβλητή, επειδή επιλέξαμε έναν ασφαλισμένο τυχαία από το χαρτοφυλάκιο. Η ιδέα είναι να καθοριστούν στη συνέχεια τα ε και δ, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η $\mathbb{E}[\Psi_A(\varepsilon,\delta)]$. Η συνάρτηση παίρνει στη συνέχεια την ακόλουθη μορφή:

$$\Psi(\varepsilon,\delta)=\mathbb{E}[\Psi_A(\varepsilon,\delta)]=\sum_{t=1}^{\infty}\omega_t\Psi_t(\varepsilon,\delta)\ \text{όπου}\ \omega_t=Pr[A=t],$$

η οποία και θα ελαχιστοποιηθεί ως προς τις παραμέτρους ε και δ.

Χρησιμοποιώντας άλγεβρα καταλήγουμε εύκολα στην επίλυση του παρακάτω συστήματος:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\omega_t t\int_0^\infty \theta^2\left(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\right)^{t-1}e^{\lambda\theta\delta}u(\theta)\,d\theta$$

$$= (1+\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\omega_t t\int_0^{\infty}\theta\left(e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right)^{t-1}e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}u(\theta)d\theta,$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\omega_t t\int_0^{\infty}\theta\big(e^{\lambda\theta\delta}-\varepsilon e^{-\lambda\theta}\big)^{t-1}e^{-\lambda\theta}u(\theta)\,d\theta$$

$$= (1-\varepsilon)\sum_{t=1}^{\infty}\omega_t t\int_0^{\infty}\left(e^{\lambda\theta(2\delta+\delta^2)}+e^{-\lambda\theta}(\varepsilon^2-2\varepsilon)\right)^{t-1}e^{-\lambda\theta}u(\theta)\,d\theta.$$

Και πάλι, αυτό το σύστημα δεν καταλήγει σε κάποια λύση κλειστού τύπου, αλλά μπορεί να λυθεί αριθμητικά.Παρατήρηση: Να σημειωθεί εδώ ότι, έχουμε υπολογίσει έναν μέσο όρο αναφορικά με την ηλικιακή διάρθρωση του χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο χωρίζεται σε μια σειρά από κατηγορίες κινδύνων, ένας μέσος όρος σε σχέση με τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου (σε όρους των μεταβλητών κατάταξης) θα μπορούσε επίσης να υπολογιστεί. Αν κάποιες ερμηνευτικές μεταβλητές συσχετίζονται με το A, πρέπει να δοθεί προσοχή στο δεύτερο μέσο όρο.

4.2.5 Ανάλυση της Χρηματοοικονομικής Ισορροπίας του Γαλλικού BMS

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των σχετικότητων που σχετίζονται με Markovian BMS και λαμβάνεται μέσω του κριτήριου ελαχίστων τετραγώνων του Norberg είναι αυτό που κάνει το BMS χρηματοοικονομικά ισορροπημένο, δηλαδή τα έσοδα από ασφάλιστρα του ασφαλιστή δεν αυξάνονται ούτε μειώνονται στο πέρασμα του χρόνου (κατά μέσο όρο). Στην ενότητα αυτή, θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο ή όχι το Γαλλική BMS έχει αυτή την ιδιότητα.

Πιο συγκεκριμένα, από τη στιγμή τα ε_t και δ_t έχουν υπολογιστεί, θα θέλαμε να διαπιστώσουμε κατά πόσον η ισότητα:

$$\mathbb{E}\big[r_{\varepsilon_t,\delta_t}(N_\circ,I_\circ,t)\big]=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}Pr[N_\circ=x,I_\circ=y]r_{\varepsilon_t,\delta_t}(x,y,t)=1,$$

είναι αληθής, όπου $N_\circ$ και $I_\circ$ ορίζονται στην (4-1). Ο υπολογισμός του $\mathbb{E}\big[r_{\varepsilon_t,\delta_t}(N_\circ,I_\circ,t)\big]$ απαιτεί την γνώση της από κοινού κατανομής του τυχαίου ζευγαριού $(N_\circ,I_\circ)$.

Ας ορίσουμε ως $f(x,y|\theta)=Pr[N_1=x,I_1=y|\Theta=\theta]$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου ζευγαριού (N_1,I_1), δεσμευμένης ως προς $\Theta=\theta$ και $f^{\star(t)}(x,y|\theta)=Pr[N_\circ=x,I_\circ=y|\Theta=\theta]$ ως την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου ζευγαριού $(N_\circ,I_\circ)$, όπως ορίζεται στην (4-1), δεσμευμένης ως προς

$\Theta = \theta$. Στην συνέχεια σύμφωνα με τους Pitrebois, Denuit, & Walhin (2005) ισχύουν τα παρακάτω:

Για δεδομένο θ, ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικοί τύποι:

$$g^{\star(t)}(x,y|\theta) = f^{\star(t)}(x,t-y|\theta)\ για\ 0 \leq y \leq t\ και\ x > 0,$$

$$g^{\star(t)}(0{,}0|\theta) = e^{-\lambda\theta t},$$

$$f(x,0|\theta) = e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^x}{x!}\ για\ x > 0,$$

$$f(0{,}1|\theta) = e^{-\lambda\theta},$$

$$g^{\star(t)}(x,y|\theta) = e^{\lambda\theta}\sum_{u=1}^{x}\left(\frac{t+1}{y}-1\right)g^{\star(t)}(x-u,y-1|\theta)g(u,1|\theta)\ για\ y \geq 1\ και\ x \geq 1,$$

με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις παίρνουν την τιμή 0 όπου δεν ορίζονται.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την $f^{\star(t)}(x,y|\theta) = Pr[N_\circ = x, I_\circ = y]$, αρκεί να ολοκληρώσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f^{\star(t)}(x,y)$ ως προς την συνάρτηση δομής του κινδύνου (*structure function*) u, το οποίο έχει ως εξής:

$$f^{\star(t)}(x,y) = \int_0^\infty f^{\star(t)}(x,y|\theta)u(\theta)d\theta, \qquad x > 0, 0 \leq y \leq t.$$

Αυτές οι ποσότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί το $\mathbb{E}\left[r_{\varepsilon_t,\delta_t}(N_\circ, I_\circ, t)\right]$.

4.3 Μερική Ευθύνη (*Partial liability*)

4.3.1 Μειωμένη Επιβάρυνση και Μοντελοποίηση της Συχνότητας των Ζημιών

Το Γαλλικό BMS διαθέτει πολλούς ειδικούς κανόνες. Αυτή η ενότητα είναι αφιερωμένη στη μελέτη ενός από αυτούς. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το Γαλλικού δίκαιο, αν ο ασφαλισμένος είναι εν μέρει υπεύθυνος για το ατύχημα, τότε το ασφάλιστρο πολλαπλασιάζεται με 1,125 αντί για 1,25. Για να λάβουμε έναν τέτοιο κανόνα υπόψη, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε το τυχαίο ζευγάρι (N_{1t}, N_{2t}) όπου N_{1t} είναι το πλήθος των ατυχημάτων πλήρους ευθύνης κατά το έτος t και N_{2t} είναι το πλήθος των ατυχημάτων μερικής ευθύνης κατά τη διάρκεια του ίδιου έτους. Σαφώς, $N_{1t} + N_{2t}$ είναι ο συνολικός αριθμός των ατυχημάτων N_t που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Έστω q είναι η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να είναι μόνο εν μέρει υπεύθυνος για το ατύχημα που δήλωσε. Στην συνέχεια, ας υποθέσουμε ένα σύστημα *Bernoulli* για τους τύπους απαιτήσεων. Αυτό εξασφαλίζει ότι, δεδομένου του Θ, τα N_{1t} και N_{2t} είναι ανεξάρτητες και συμβαδίζουν με την κατανομή *Poisson*. Ειδικότερα έχουμε:

$$Pr[N_{1t} = k|\Theta = \theta] = e^{-\lambda\theta(1-q)} \frac{\left(\lambda\theta(1-q)\right)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

$$Pr[N_{2t} = k|\Theta = \theta] = e^{-\lambda\theta q} \frac{(\lambda\theta q)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

Οι τυχαίες μεταβλητές N_{1t} και N_{2t} είναι προφανώς εξαρτημένες εάν η κλίση του κινδύνου Θ είναι άγνωστη. Η από κοινού πιθανότητα για το τυχαίο ζεύγος (N_{1t}, N_{2t}) δίνεται από τον τύπο:

$$Pr[N_{1t} = k_1, N_{2t} = k_2] = \int_0^{+\infty} Pr[N_{1t} = k_1|\Theta = \theta] Pr[N_{2t} = k_2|\Theta = \theta] u(\theta)\, d\theta.$$

Αυτό είναι ένα μεικτό διμεταβλητό *Poisson* μοντέλο, για περισσότερα αναφορικά μ' αυτήν την κατανομή βλέπε Walhin (2001).

4.3.2 Υπολογισμοί των CRM κατά τον χρόνο t

Ας εξετάσουμε τώρα έναν ασφαλισμένο που καλύπτεται για t χρόνια. Εκτός από την παράμετρο δ_t που δίνει το μέγεθος της επιβάρυνσης σε περίπτωση ατυχήματος με πλήρη ευθύνη, έχουμε εισαγάγει την νέα παράμετρο γ_t που δίνει τη μειωμένη επιβάρυνση σε περίπτωση ατυχήματος με μερική ευθύνη. Τώρα ο συντελεστής CRM για το χρονικό διάστημα $(0, t)$ γράφεται:

$$r_{\delta_t,\gamma_t,\varepsilon_t}(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ}, t) = (1+\delta_t)^{N_{1\circ}} (1+\gamma_t)^{N_{2\circ}} (1-\varepsilon_t)^{I_{12\circ}},$$

με

$$N_{1\circ} = \sum_{j=1}^{t} N_{1j},$$

$$N_{2\circ} = \sum_{j=1}^{t} N_{2j},$$

$$I_{12\circ} = \sum_{j=1}^{t} I_j \ \ \mu\varepsilon\ I_j = \begin{cases} 1, & \acute{\alpha}\nu\ N_{1j} = N_{2j} = 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

Θα υποθέσουμε ότι $\delta_t = \alpha\gamma_t$ με το α να καθορίζεται από τον αναλογιστή. Το μέγεθος του α περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ένα ατύχημα με πλήρη ευθύνη τιμωρείται, σε σύγκριση με ένα ατύχημα με μερική ευθύνη. Στη συνέχεια, ο συντελεστής CRM παίρνει την μορφή:

$$r_{\gamma_t,\varepsilon_t}(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ}, t) = (1+\alpha\gamma_t)^{N_{1\circ}}(1+\gamma_t)^{N_{2\circ}}(1-\varepsilon_t)^{I_{12\circ}}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα ε_t και γ_t θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$\Psi_t(\gamma,\varepsilon) = \mathbb{E}\left[\left(\Theta - r_{\gamma,\varepsilon}(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ}, t)\right)^2\right],$$

ως προς τις παραμέτρους γ και ε.

Ας ορίσουμε $\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3|\theta) = \mathbb{E}\left[\xi_1^{N_{1^\circ}}\xi_2^{N_{2^\circ}}\xi_3^{I_{12^\circ}}\middle|\Theta=\theta\right]$ την δεσμευμένη πιθανογεννήτρια του τυχαίου διανύσματος $(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ})$ δοθέντος $\Theta=\theta$. Είναι σαφές ότι έχουμε:

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3|\theta) = \left(e^{-\lambda\theta}(\xi_3-1) + e^{\lambda\theta((1-q)\xi_1+q\xi_2-1)}\right)^t.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι πρώτης τάξεως συνθήκες είναι ως ακολούθως:

$$2\mathbb{E}_\Theta\left[\Theta\alpha\varphi^{(1,0,0)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta) + \Theta\varphi^{(0,1,0)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta)\right]$$
$$= \mathbb{E}_\Theta\left[\alpha\varphi_2^{(1,0,0)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta) + \varphi_2^{(0,1,0)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta)\right],$$

και

$$2\mathbb{E}_\Theta\left[\Theta\varphi^{(0,0,1)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta)\right] = \mathbb{E}_\Theta\left[\varphi_2^{(0,0,1)}(1+\alpha\gamma_t, 1+\gamma_t, 1-\varepsilon_t|\Theta)\right],$$

όπου

$$\varphi^{(x,y,z)}(a,b,c|\theta) = \frac{\partial^x\partial^y\partial^z}{\partial s^x\partial t^y\partial u^z}\varphi(s,t,u|\theta)\Big|_{s=a,t=b,u=c'}$$
$$\varphi_2^{(x,y,z)}(a,b,c|\theta) = \frac{\partial^x\partial^y\partial^z}{\partial s^x\partial t^y\partial u^z}\varphi(s^2,t^2,u^2|\theta)\Big|_{s=a,t=b,u=c'}$$

για $x,y,z\in\{0,1\}$. Και πάλι, μόνο αριθμητικά μπορεί να βρεθεί η λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

4.3.3 Χρηματοοικονομική Ισορροπία (*Financial equilibrium*)

Για να αναλύσουμε την χρηματοοικονομική ισορροπία του συστήματος θα πρέπει να ελεγχθεί αν η ισότητα:

$$\mathbb{E}\left[r_{\gamma_t,\varepsilon_t}(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ}, t)\right] = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty} Pr[N_{1\circ}=x, N_{2\circ}=y, I_{12\circ}=z]\, r_{\gamma_t,\varepsilon_t}(x,y,z,t) = 1,$$

είναι αληθής για τις βέλτιστες τιμές των γ_t και ε_t.

Η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(N_{1\circ}, N_{2\circ}, I_{12\circ})$ δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις σύμφωνα με τους Pitrebois, Denuit, & Walhin (2005).

Για δοσμένο θ οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$g^{\star(t)}(x,y,z|\theta) = f^{\star(t)}(x,y,t-z|\theta)\ \gamma\iota\alpha\ 0 \le z \le t, \qquad x,y \ge 0\ \kappa\alpha\iota\ x+y>0,$$

$$g^{\star(t)}(0,0,0|\theta) = e^{-\lambda\theta t},$$

$$f(x,y,0|\theta) = e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^{x+y}(1-q)^x q^y}{x!\,y!}\ \gamma\iota\alpha\ x,y \ge 0\ \kappa\alpha\iota\ x+y>0,$$

$$f(0,0,1|\theta) = e^{-\lambda\theta},$$

$$g^{\star(t)}(x,y,z|\theta) = e^{\lambda\theta}\sum_{u=0}^{x}\sum_{v=0}^{y}\left(\frac{t+1}{z}-1\right)g^{\star(t)}(x-u,y-v,z-1|\theta)g(u,v,1|\theta),$$

$$\gamma\iota\alpha\ 1 \le z \le t, \qquad x,y \ge 0\ \kappa\alpha\iota\ x+y>z-1,$$

είναι αληθής με την προϋπόθεση ότι οι παραπάνω συναρτήσεις παίρνουν την τιμή 0 όπου δεν ορίζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογή σε δεδομένα

5.1 Εισαγωγή

Σ’ αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποιες εφαρμογές σε πραγματικά δεδομένα σε κάποια από τα μοντέλα που έχουμε αναλύσει στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε με την πιο απλή περίπτωση που είναι το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής* (το είδαμε στην ενότητα 3.3) και στην συνέχεια θα δούμε ένα πιο πολύπλοκό αυτό της *Poisson – Inverse Gaussian* (το είδαμε στην ενότητα 3.4). Στα παραρτήματα μπορούν να βρεθούν όλοι οι υπολογισμοί που έγιναν μέσω του υπολογιστικού πακέτου Maple.

Στον Πίνακας 3 παρακάτω παραθέτονται τα δεδομένα πάνω στα οποία θα στηριχτούν οι εφαρμογές που θα ακολουθήσουν.

Πίνακας 3 – Τα δεδομένα

k	n_k
0	601.841
1	79.127
2	9.506
3	1.534
4	364
5	124
6	88
Σύνολο	692.584

5.2 Εφαρμογή για το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής*

Πρώτα θα πρέπει να υπολογίσουμε την δειγματική μέση τιμή και την δειγματική διακύμανση σύμφωνα με τα παρακάτω

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} n_k} \sum_{k=0}^{4} k n_k = 0{,}152104,$$

$$s^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} n_k - 1} \sum_{k=0}^{4} (k-\bar{x})^2 n_k = 0{,}183408.$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις (3–1) και (3–2) ως προς τ και α για το δείγμα μας έχουμε

$$\hat{\tau} = \frac{\bar{x}}{s^2 - \bar{x}} = 4{,}858917,$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{s^2 - \bar{x}} = 0{,}739062.$$

Από την στιγμή που δεν ενδιαφερόμαστε για τις απόλυτες τιμές της $P_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ αλλά για τις διαφορές ανάμεσα στις κλάσεις, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα έτσι ώστε το ασφάλιστρο για έναν νέο ασφαλισμένο να είναι 100. Τότε το *posterior* ασφάλιστρο θα είναι ίσο με

$$\mathrm{P}'_{t+1}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \dots, \mathrm{k}_t) = \frac{100 \frac{\alpha + \mathrm{k}}{\tau + \mathrm{t}}}{\frac{\alpha}{\tau}} = 100 \frac{\tau(\alpha + \mathrm{k})}{\alpha(\tau + \mathrm{t})}.$$

Να σημειωθεί η απαλοιφή του παράγοντα $(1+\alpha)$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακας 4, ενώ στον Πίνακας 5 παρουσιάζονται οι ποσοστιαίες μεταβολές για τα έτη χωρίς απαίτηση και για την κλιμάκωση της επιβάρυνσης ανά τα έτη, κάθε φορά που γίνεται μια ακόμα απαίτηση.

Παρατηρούμε ότι από το πρώτο κιόλας έτος χωρίς ζημία δίνεται σημαντική έκπτωση στα ασφάλιστρα, της τάξεως του 17,1%. Στο δεύτερο έτος χωρίς απαίτηση μπορεί η έκπτωση να μειώνεται αλλά και πάλι είναι σημαντική (περίπου 14,6%). Το ίδιο μοτίβο ακολουθείται και στα υπόλοιπα έτη, όταν δεν υπάρχει ζημία. Να σημειωθεί ότι μετά από 5 χρόνια χωρίς απαίτηση το ασφάλιστρο πέφτει στο μισό. Στον αντίποδα παρατηρούμε ότι οι επιβαρύνσεις είναι πολύ μεγάλες. Στην πρώτη απαίτηση η επιβάρυνση ξεπερνάει το 95%. Δηλαδή με την πρώτη ζημία το ασφάλιστρο σχεδόν διπλασιάζεται. Από την δεύτερη απαίτηση και μετά η επιβάρυνση συνεχίζει να είναι σημαντική (περίπου 57,5%) αλλά μειώνεται αρκετά. Το ίδιο μοτίβο ακολουθούν οι επιβαρύνσεις όταν υπάρχουν επιπλέον απαιτήσεις. Αυτή η αυστηρότητα του βέλτιστου BMS οφείλεται στην οικονομική σταθερότητα που απαιτείται. Ο σταθμισμένος μέσος όρος όλων κελίων στην ίδια γραμμή είναι ίσος με 100. Η αυστηρότητα του BMS φαίνεται και από τα πόσα χρόνια χωρίς απαίτηση χρειάζονται για να διαγραφεί η επίδραση από μία ζημία, είναι περίπου εφτά.

Πίνακας 4 – Βέλτιστο BMS για το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής*

	k						
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100,00						
1	82,93	195,14	307,36	419,57	531,78	643,99	756,21
2	70,84	166,69	262,55	358,40	454,25	550,10	645,96
3	61,83	145,48	229,14	312,79	396,45	480,11	563,76
4	54,85	129,06	203,27	277,49	351,70	425,91	500,12
5	49,28	115,97	182,65	249,34	316,03	382,71	449,40
6	44,75	105,29	165,83	226,38	286,92	347,47	408,01
7	40,97	96,41	151,85	207,29	262,73	318,17	373,61

Πίνακας 5 – Ποσοστιαίες μεταβολές για το μοντέλο της *Αρνητικής Διωνυμικής*

	k						
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100,00						
1	-17,07%	95,14%	57,51%	36,51%	26,74%	21,10%	17,43%
2	-14,58%	101,00%	57,51%	36,51%	26,74%	21,10%	17,43%
3	-12,72%	105,36%	57,51%	36,51%	26,75%	21,10%	17,42%
4	-11,29%	108,73%	57,50%	36,51%	26,74%	21,10%	17,42%
5	-10,15%	111,43%	57,50%	36,51%	26,75%	21,10%	17,43%
6	-9,19%	113,66%	57,50%	36,51%	26,74%	21,10%	17,42%
7	-8,45%	115,44%	57,50%	36,51%	26,75%	21,10%	17,42%

5.3 Εφαρμογή για το μοντέλο της *Poisson – Inverse Gaussian*

Την δειγματική μέση τιμή και την δειγματική διακύμανση τις έχουμε ήδη υπολογίσει από την προηγούμενη εφαρμογή. Πρώτα υπολογίσουμε τα $\hat{g}$ και $\hat{h}$ σύμφωνα με τις εξισώσεις (3–3)

$$\hat{g} = \bar{x} = 0{,}152104,$$
$$\hat{h} = \left(\frac{s^2}{\bar{x}}\right) - 1 = 0{,}205807.$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις (3–4) ως προς $\hat{\beta}$ και $\hat{\mu}$ για το δείγμα μας έχουμε

$$\hat{\beta}_t = \frac{\hat{h}}{2\hat{h}t + 1},$$
$$\hat{\mu}_t = \frac{\hat{g}}{\sqrt{2\hat{h}t + 1}}.$$

Από την στιγμή που δεν ενδιαφερόμαστε για τις απόλυτες τιμές της $P_{t+1}(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ αλλά για τις διαφορές ανάμεσα στις κλάσεις, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα έτσι ώστε το ασφάλιστρο για έναν νέο ασφαλισμένο να είναι 100. Τότε το *posterior* ασφάλιστρο θα είναι ίσο με

$$\mathrm{P}_{t+1}^{\prime}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \ldots, \mathrm{k}_t) = \frac{100 \cdot \mu \cdot \mathrm{Q}_\mathrm{k}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{\bar{\mathrm{x}}}.$$

Να σημειωθεί η απαλοιφή του παράγοντα $(1 + \alpha)$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακας 6, ενώ στον Πίνακας 7 παρουσιάζονται οι ποσοστιαίες μεταβολές για τα έτη χωρίς απαίτηση και για την κλιμάκωση της επιβάρυνσης ανά τα έτη, κάθε φορά που γίνεται μια ακόμα απαίτηση.

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο BMS που προκύπτει από το μοντέλο της *Poisson – Inverse Gaussian* διαφέρει αρκετά από αυτό του μοντέλου της *Αρνητικής Διωνυμικής*. Μπορεί οι επιβαρύνσεις να έχουν μικρότερο μέγεθος αλλά διατηρούνται περισσότερο. Δηλαδή για την πρώτη απαίτηση η επιβάρυνση είναι περίπου 80%, για την δεύτερη είναι περίπου 81,6% και από την τρίτη αρχίζει να πέφτει (γίνεται περίπου 53,2%). Από την άλλη πλευρά οι εκπτώσεις είναι μικρότερες αλλά μειώνονται με μικρότερο ρυθμό. Η αυστηρότητα και αυτού του BMS φαίνεται από τα πόσα χρόνια χωρίς απαίτηση, χρειάζονται για να διαγραφεί η επίδραση από μία ζημία, είναι περίπου έξι. Είναι αρκετά, αλλά λιγότερα από αυτά του μοντέλου της *Αρνητικής Διωνυμικής*.

Πίνακας 6 – Βέλτιστο BMS για το μοντέλο της *Poisson – Inverse Gaussian*

	k						
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	84,17	180,02	326,91	500,93	685,11	873,01	1062,5
2	74,06	148,27	259,63	392,19	533,48	678,20	824,43
3	66,89	127,44	216,74	323,37	437,65	555,12	674,05
4	61,47	112,60	186,94	275,85	371,59	470,32	570,44
5	57,18	101,43	164,98	241,05	323,29	408,33	494,71
6	53,69	92,68	148,09	214,45	286,42	361,03	436,95
7	50,76	85,62	134,68	193,44	257,35	323,76	391,43

Πίνακας 7 – Ποσοστιαίες μεταβολές για το μοντέλο της *Poisson – Inverse Gaussian*

	k						
t	0	1	2	3	4	5	6
0	100						
1	-15,83%	80,02%	81,60%	53,23%	36,77%	27,43%	21,71%
2	-12,01%	76,16%	75,11%	51,06%	36,03%	27,13%	21,56%
3	-9,68%	72,08%	70,07%	49,20%	35,34%	26,84%	21,42%
4	-8,10%	68,34%	66,02%	47,56%	34,71%	26,57%	21,29%
5	-6,98%	65,01%	62,65%	46,11%	34,12%	26,30%	21,15%
6	-6,10%	62,08%	59,79%	44,81%	33,56%	26,05%	21,03%
7	-5,46%	59,47%	57,30%	43,63%	33,04%	25,81%	20,90%

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π.1 Η δομή των εντολών για την εφαρμογή 5.2

$> restart;$

$> for\ j\ from\ 0\ to\ 6\ do\ k[j] := j\ end\ do;$

$$k_0 := 0$$
$$k_1 := 1$$
$$k_2 := 2$$
$$k_3 := 3$$
$$k_4 := 4$$
$$k_5 := 5$$
$$k_6 := 6$$

$> for\ j\ from\ 0\ to\ 6\ do\ n[j] := 0\ end\ do;$

$$n_0 := 0$$
$$n_1 := 0$$
$$n_2 := 0$$
$$n_3 := 0$$
$$n_4 := 0$$
$$n_5 := 0$$
$$n_6 := 0$$

$> n[0] := 601841; n[1] := 79127; n[2] := 9506; n[3] := 1534; n[4] := 364; n[5] := 124; n[6] := 88;$

$$n_0 := 601841$$
$$n_1 := 79127$$
$$n_2 := 9506$$
$$n_3 := 1534$$
$$n_4 := 364$$
$$n_5 := 124$$
$$n_6 := 88$$

$$> x := \frac{1}{sum(n[t], t = 0..6)} sum(k[t] * n[t], t = 0..6);$$

$$x := 0.152104$$

$$> s2 := \frac{1}{sum(n[t], t = 0..6) - 1} sum((k[t] - x)^2 * n[t], t = 0..6);$$

$$s2 := 0.183408$$

$$> \tau := \frac{x}{s2 - x};$$

$$\tau := 4.858917$$

$$> \alpha := \frac{x^2}{s2 - x};$$

$$\alpha := 0.739062$$

$> for\ j\ from\ 1\ to\ 7\ do\ t[j] := j\ end\ do;$

$$t_1 := 1$$

$$t_2 := 2$$

$$t_3 := 3$$

$$t_4 := 4$$

$$t_5 := 5$$

$$t_6 := 6$$

$$t_7 := 7$$

$$> f := (i, j) \rightarrow \frac{100 * \tau * (\alpha + k[j-1])}{\alpha * (\tau + t[i])};$$

$$f := (i, j) \rightarrow \frac{100\tau(\alpha + k_{j-1})}{\alpha(\tau + t_i)}$$

$> Matrix(7, f);$

$$\begin{bmatrix} 82.93 & 195.14 & 307.36 & 419.57 & 531.78 & 643.99 & 756.21 \\ 70.84 & 166.69 & 262.55 & 358.40 & 454.25 & 550.10 & 645.96 \\ 61.83 & 145.48 & 229.14 & 312.79 & 396.45 & 480.11 & 563.76 \\ 54.85 & 129.06 & 203.27 & 277.49 & 351.70 & 425.91 & 500.12 \\ 49.28 & 115.97 & 182.65 & 249.34 & 316.03 & 382.71 & 449.40 \\ 44.75 & 105.29 & 165.83 & 226.38 & 286.92 & 347.47 & 408.01 \\ 40.97 & 96.41 & 151.85 & 207.29 & 262.73 & 318.17 & 373.61 \end{bmatrix}$$

Π.2 Η δομή των εντολών για την εφαρμογή 5.3

$> restart;$

$> for\ j\ from\ 0\ to\ 6\ do\ k[j] := \ j\ end\ do;$

$$k_0 := 0$$
$$k_1 := 1$$
$$k_2 := 2$$
$$k_3 := 3$$
$$k_4 := 4$$
$$k_5 := 5$$
$$k_6 := 6$$

$> for\ j\ from\ 0\ to\ 6\ do\ n[j] := \ 0\ end\ do;$

$$n_0 := 0$$
$$n_1 := 0$$
$$n_2 := 0$$
$$n_3 := 0$$
$$n_4 := 0$$
$$n_5 := 0$$
$$n_6 := 0$$

$> n[0] := \ 601841;\ n[1] := \ 79127;\ n[2] := \ 9506;\ n[3] := \ 1534;\ n[4] := \ 364; n[5] := \ 124; n[6] := \ 88;$

$$n_0 := 601841$$
$$n_1 := 79127$$
$$n_2 := 9506$$
$$n_3 := 1534$$
$$n_4 := 364$$
$$n_5 := 124$$
$$n_6 := 88$$

$> x := \dfrac{1}{sum(n[t], t\ =\ 0\,..\,6)} sum(k[t] * n[t], t\ =\ 0\,..\,6);$

$$x := 0.152104$$

$$> s2 := \frac{1}{sum(n[t], t\ =\ 0..6) - 1} sum((k[t]-x)^2 * n[t], t\ =\ 0..6);$$

$$s2 :=\ 0.183408$$

$$> g :=\ x;$$

$$g := 0.152104$$

$$> h := \left(\frac{s2}{x}\right) - 1;$$

$$h := 0.205807$$

$$> for\ j\ from\ 1\ to\ 7\ do\ b[j] := \frac{h}{2 * h * j + 1}\ end\ do;$$

$$b_1 :=\ 0.145796$$

$$b_2 :=\ 0.112881$$

$$b_3 :=\ 0.092090$$

$$b_4\ :=\ 0.077767$$

$$b_5\ :=\ 0.067300$$

$$b\ :=\ 0.059316$$

$$b_7\ :=\ 0.053025$$

$$> for\ j\ from\ 1\ to\ 7\ do\ \mu[j] := \frac{g}{sqrt(2 * h * j + 1)}\ end\ do;$$

$$\mu_1 :=\ 0.128022$$

$$\mu_2 :=\ 0.112647$$

$$\mu_3 :=\ 0.101746$$

$$\mu_4\ :=\ 0.093499$$

$$\mu_5\ :=\ 0.086980$$

$$\mu_6\ :=\ 0.081658$$

$$\mu_7\ :=\ 0.077206$$

$$> f\ :=\ (i,j) \rightarrow \frac{100 * \mu[i]}{x} * \frac{BesselK\left(k[j-1] + \frac{1}{2}, \frac{\mu[i]}{b[i]}\right)}{BesselK\left(k[j-1] - \frac{1}{2}, \frac{\mu[i]}{b[i]}\right)};$$

$$f\ :=\ (i,j) \rightarrow \frac{100\mu_i}{x} \frac{BesselK\left(k_{j-1} + \frac{1}{2}, \frac{\mu_i}{b_i}\right)}{BesselK\left(k_{j-1} - \frac{1}{2}, \frac{\mu_i}{b_i}\right)}$$

$$> Matrix(7, f);$$

$$\begin{bmatrix} 84.17 & 180.02 & 326.91 & 500.93 & 685.11 & 873.01 & 1062.5 \\ 74.06 & 148.27 & 259.63 & 392.19 & 533.48 & 678.20 & 824.43 \\ 66.89 & 127.44 & 216.74 & 323.37 & 437.65 & 555.12 & 674.05 \\ 61.47 & 112.60 & 186.94 & 275.85 & 371.59 & 470.32 & 570.44 \\ 57.18 & 101.43 & 164.98 & 241.05 & 323.29 & 408.33 & 494.71 \\ 53.69 & 92.68 & 148.09 & 214.45 & 286.42 & 361.03 & 436.95 \\ 50.76 & 85.62 & 134.68 & 193.44 & 257.35 & 323.76 & 391.43 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

Beard, R. E., Pentikäinen, T., & Pesonen, E. (1984). *Risk theory (3rd ed.).* London: Chapman & Hall.

Besson, J.-L., & Partrat, C. (1992). Trend et systèmes de Bonus-Malus. *ASTIN Bulletin* , σσ. 11-31.

Bichsel, F. (1964). Erfahrung-Tarifierung in der Motorfahrzeughaftplichtversicherung. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* , σσ. 119-129.

Borgan, Ø., Hoem, J. M., & Norberg, R. (1981). A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems. *Scandinavian Actuarial Journal* , σσ. 165-178.

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* New York: Springer Verlag.

Bühlmann, H. (1964). Optimale Pramienstufensysteme. *Mitteilungen der Vereinigung Schweize-rischer Versicherungsmathematiker* , σσ. 193-213.

Butler, P. (1993). Cost-based pricing of individual automobile risk transfer: Carmile exposure unit analysis. *Journal of Actuarial Practice 1* , σσ. 51-84 (with discussion).

Chadjiconstantinidis, S., & Antzoulakos, D. L. (2002). Moments of Compound Mixed Poisson Distributions. *Scandinavian Actuarial Journal, Issue 3* , σσ. 138-161.

Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., & Walhin, J.-F. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems.* Great Britain: John Wiley & Sons, Ltd.

Frangos, N. E., & Vrontos, S. D. (2001). Design of Optimal Bonus-Malus Systems With a Frequancy and a Severity Component On an Individual Basis in Automobile Insurance. *ASTIN Bulletin, Volume 31* , σσ. 1-22.

Grenander, U. (1957a). On the heterogeneity in non-life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* , σσ. 153-179.

Grenander, U. (1957b). Some remarks on bonus systems in automobile insurance. *Scandinavian* , σσ. 180-197.

Holla, M. S. (1967). On a Poisson-Inverse Gaussian Distribution. *Metrika* , σσ. 115-121.

Kelle, M. (2000). Modélisation du Système de Bonus Malus Français. *Bulletin Français d'Actuariat* , σσ. 45-64.

Lemaire, J. (1985). *Automobile Insurance: Actuarial Models.* USA: Kluwer Academic

Publishers.

Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Aytomobile Insurance.* Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Lemaire, J. (1992). Negative Binomial or Poisson-inverse Gaussian? *Proceedings of the 24th International Congress of Actuaries.* Montreal.

Lemaire, J. (1977b). Selection Procedures of Regression Analysis Applied to Automobile Insurance. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* , σσ. 143-160.

Loimaranta, K. (1972). Some Asymptotic Properties of Bonus Systems. *ASTIN Bulletin International Actuarial Association - Brussels, Belgium* , σσ. 233-245.

Nelder, J. A., & Wedderburn, R. W. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A 135* , σσ. 370-384.

Norberg, R. (1976). A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems. *Scandinavian Actuarial Journal* , σσ. 92-107.

Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J.-F. (2005). *An Actuarial Analysis of the French Bonus-Malus System.*

Renshaw, A. E. (1989). Chain ladder and interactive modelling (Claims reserving and GLIM). *Journal of the Institute of Actuaries 116* , σσ. 559-587.

Sichel, H. (1971). On a Family of Discrete Distributions Particularly Suited to Represent Long Tailed Frequency Data. *Proceedings of the 3rd Symposium on Mathematical Statistics.* Pretoria: N. Loubsher.

Tremblay, L. (1992). Using the Poisson Inverse Gaussian in Bonus-Malus Systems. *ASTIN Bulletin* , σσ. 97-106.

Venter, G. C. (1991). Effects of Variations from Gamma-Poisson Assumptions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* , σσ. 41-55.

Venter, G. G. (1990). Credibility. *In Foundations of Casualty Actuarial Science* , σσ. 375-484.

Verrall, R. J. (1991, 12 31). Chain ladder and maximum likelihood. *Journal of the Institute of Actuaries 118* , σσ. 489-499.

Wald, A., & Wolfowitz, J. (1951). Bayes Solutions of Sequential Decision Problems. *Annals of Mathematical Statistics 53* , σσ. 82-99.

Walhin, J.-F., & Paris, J. (2001). The Mixed Bivariate Hofmann Distribution. *Astin Bulletin* , σσ. 123-138.

Willmot, G. E. (1986). Mixed Compound Poisson Distributions. *ASTIN Bulletin* , σσ. 59-79.

Willmot, G. E. (1987). The Poisson-Inverse Gaussian distribution as an alternative to the Negative Binomial. *Scandinavian Actuarial Journal* , σσ. 113-127.

Willmot, G. E., & Sundt, B. (1989b). On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes. *Scandinavian Actuarial Journal, Issue 3* , σσ. 139-146.

Wright, T. S. (1990). A Stochastic Method for Claims Reserving in General Insurance. *Journal of the Institute of Actuaries 117* , σσ. 677-731.

Ιστολόγιο

- http://www.google.gr/
- http://www.komvos.edu.gr/dictionaries/dictadv/dictadvsea.htm
- http://translate.google.gr/?hl=el&tab=TT#
- http://en.wikipedia.org/wiki/Car
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%85%CF%84%CE%BF%CE%BA%CE%AF%CE%BD%CE%B7%CF%84%CE%BF
- http://www.scotiacapital.com/English/bns_econ/bns_auto.pdf
- http://inventors.about.com/od/cstartinventions/a/Car_History.htm
- http://philippe.boursin.perso.sfr.fr/cugnot.htm
- http://www.wordreference.com/
- http://www.actuaries.org/index.cfm?lang=EN&DSP=ASTIN&ACT=INDEX
- http://statistics.wharton.upenn.edu/documents/cv/Lemaire_cv.pdf
- http://www.uclouvain.be/isba
- http://europa.eu/legislation_summaries/other/l22028_en.htm
- http://research.brown.edu/research/profile.php?id=1106970076
- http://research.brown.edu/pdf/1106970076.pdf?nocache=1122769023
- http://poj.peeters-leuven.be/content.php?url=issue&journal_code=AST&issue=1&vol=22
- http://www.casact.org/dare/index.cfm?fuseaction=view&abstrid=3718
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CF%80%CE%AD%CF%81%CF%84%CE%BF%CE%BB%CF%84_%CE%9C%CF%80%CF%81%CE%B5%CF%87%CF%84
- http://isfaserveur.univ-lyon1.fr/~norberg/links/papers/SAJ-1981-Nonasymptotic-Criterion-Auto.pdf
- http://www.casact.org/library/astin/vol31no1/123.pdf
- http://www.springerlink.com/content/f52683284nn57145/
- http://www.jstor.org/pss/2344614
- http://en.wikipedia.org/wiki/Norwich_Union
- http://www.actuaries.org.uk/

- http://www.greek-language.gr/greekLang/index.html
- http://www.astynomia.gr/newsite.php?&lang=
- http://www.astynomia.gr/index.php?option=ozo_content&perform=view&id=5005&Itemid=86&lang=
- http://apps.who.int/ghodata/?vid=51210#