Πρόλογος

Η εξάρτηση έχει αρχίσει να διαδραματίζει ολοένα και σημαντικότερο ρόλο στον κόσμο των κινδύνων, κυρίως μέσω της ισχυρής παρουσίας της σε τομείς όπως η ασφάλιση, ο αναλογισμός, οι χρηματοοικονομικές δραστηριότητες, κλπ. Ενώ η ανεξαρτησία μπορεί να ορισθεί μόνο με έναν τρόπο, η εξάρτηση μπορεί να διατυπωθεί με απεριόριστους τρόπους. Ως εκ τούτου, επικρατεί η υπόθεση της ανεξαρτησίας αφού η τεχνική ή μαθηματική επεξεργασία της είναι εύκολη και διαφανής. Παρ 'όλα αυτά, στις εφαρμογές η εξάρτηση είναι ο κανόνας και η ανεξαρτησία η εξαίρεση.

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των κινδύνων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον τομέα της ασφάλισης και των αναλογιστικών μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, η βάση της ασφάλισης στηρίζεται στο γεγονός της ανάληψης πολλών μικρών και ανεξάρτητων κινδύνων μεταξύ τους, κάνοντας χρήση των δύο θεμελιώδει νόμων της στατιστικής και των πιθανοτήτων, το νόμο των μεγάλων αριθμών και το κεντρικό οριακό θεώρημα. Σε ένα χαρτοφυλάκιο ανεξάρτητων κινδύνων, κάποιος από τους κινδύνους μπορεί να αντισταθμίστεί από άλλους, δεδομένου ότι η απώλεια από ένα συμβόλαιο (policy) μπορεί να αντισταθμιστεί με πιο ευνοϊκά αποτελέσματα από τα υπόλοιπα. Επιπλέον, υποθέτοντας ανεξαρτησία είναι πολύ βολικό, γιατί ως επί το πλείστον, τα στατιστικά στοιχεία που συγκεντρώνονται δίνουν πληροφορίες για τις περιθώριες κατανομές των εξεταζόμενων κινδύνων, καθώς και άλλων ποσοτήτων ευνοικών για τη δημιουργία χρήσιμων συμπερασμάτων. Επίσης, με την ανεξαρτησία είναι μαθηματικά πολύ πιο εύκολο ο ορισμός και ο υπολογισμός εννοιών για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας κάποιων κινδύνων. Πιο συγκεκριμένα, στο ατομικό και το συλλογικό μοντέλο, καθώς και στη θεωρία χρεοκοπίας, υποθέτουμε ότι τα εξεταζόμενα μεγέθη είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Μερικές φορές οι προυποθέσεις αυτής της υπόθεσης δεν πληρούνται, για παράδειγμα, υπάρχει προφανής εξάρτηση μεταξύ των κινδύνων θνησιμότητας ενός παντρεμένου ζευγαριού, των κινδύνων για σεισμό μεταξύ των γειτονικών σπιτιών, καθώς και μεταξύ διαδοχικών πληρωμών που απορρέουν από ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο ζωής, όχι μόνο αν οι πληρωμές να σταματήσουν ή ξεκινήσουν σε περίπτωση θανάτου, αλλά και σε περίπτωση τυχαίας έντασης ανατοκισμού των τόκων.

Η σύγκριση των κινδύνων μεταξύ τους, αποτελεί την ουσία του επαγγέλματος του αναλογιστή. Ο αναλογιστής πρέπει να είναι σε θέση να εκφράσει τις προτιμήσεις του μεταξύ τυχαίων μελλοντικών κερδών και ζημιών. Η εργασία αυτή προσφέρει μαθηματικές έννοιες και τα εργαλεία που χρειάζονται για να επιτευχθεί αυτό, αντλώντας σημαντικά αποτελέσματα της παγκόσμιας non-life αναλογιστικής βιβλιογραφίας και δημιουργώντας αριθμητικές εφαρμογές ώστε η θεωρία αυτή να γίνει κατανοητή και χρήσιμη. Κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της αναλογιστικής θεωρίας των εξαρτώμενων κινδύνων. Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται και αναλύονται οι σημαντικότερες στοχαστικές διατάξεις μετξύ δύο μεταβλητών, όπως η απλή στοχαστική διάταξη, η διάταξη βαθμίδας κινδύνου, η διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, οι σκεδαστικές διατάξεις, οι διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας καθώς και οι διατάξεις παχιάς ουράς. Επίσης γίνεται εκτενής αναφορά στις βασικότερες κατανομές αξιοπιστίας ή γήρανσης. Στα Κεφάλαια 2 και 3 παρουσιάζονται εφαρμογές των στοχαστικών διατάξεων για μεμονωμένους κινδύνους κυρίως για την απλή στοχαστική διάταξη, την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, την στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και τις διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας. Επίσης, δίνονται εφαρμογές των στοχαστικών διατάξεων σε σύνθετα χαρτοφυλάκια *Poisson* κάνοντας χρήση των απλών στοχαστικών διατάξεων και των ιδοτήτων τους. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται και αναλύονται οι έννοιες της συμμονοτονίας και των πολυμεταβλητών στοχαστικών διατάξεων. Παρουσιάζονται οι πολυμεταβλητές απλές στοχαστικές διατάξεις, οι orthant διατάξεις, οι πολυμεταβλητές διατάξεις βαθμίδας κινδύνου καθώς και οι πολυμεταβλητές διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η θεωρία των εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών. Δίνεται έμφαση στα μέτρα συμφωνίας και ειδικότερα στο συντελεστή συσχέτισης του *Pearson,* τον συντελεστή συσχέτισης τάξης του *Kendall,* και τον συντελεστή συσχέτισης τάξης του *Spearman*. Παρουσίαζονται κάποιες εφαρμογές από τα οικονομικά και χρηματοοικονομικά μαθηματικά μέσω των οποίων γίνεται εύκολα αντιληπτή η εξάρτηση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται και αναλύονται έννοιες θετικής εξάρτησης, κυρίως της θετικής εξάρτησης ανακοπής ζημίας, της στοχαστικής διάταξης συσχέτισης και της *supermodular* διάταξης. Τέλος, παρουσιάζονται τα στοχαστικά φράγματα σε αθροίσματα εξαρτημένων κινδύνων και κάποιες εφαρμογές αυτών στο χώρο του αναλογισμού.

Σε κάθε περίπτωση η αναλυόμενη θεωρία απαρτίζεται από πλήθος θεωρημάτων και προτάσεων, αναγκαίων για τον πλήρη ορισμό, κατανόηση και παρουσίαση αυτής.

Περιεχόμενα

4. Συμμονοτονία και πολυδιάστατες στοχαστικές διατάξεις

5. Θεωρία εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών

1

Θεωρία στοχαστικών διατάξεων δύο τυχαίων μεταβλητών

1.1 Εισαγωγή

Οι στοχαστικές διατάξεις τις τελευταίες δύο δεκαετίες αποτελούν σημαντικό και αναπόσπαστο κομμάτι στην έρευνα για πολλούς κλάδους επιστημών, όπως τα ασφαλιστικά μαθηματικά, την θεωρία αξιοπιστίας, την στατιστική, την επιδημιολογία και άλλες επιστήμες. Η χρήση των στοχαστικών διατάξεων οδηγεί σε χρήσιμες προσεγγιστικές μεθόδους και φράγματα (bounds) σε διάφορες καταστάσεις, όπου τα ρεαλιστικά στοχαστικά μοντέλα είναι πολύ σύνθετα για να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα στα ασφαλιστικά μαθηματικά και τον αναλογισμό όπου θα εστιάσουμε ιδιαίτερα, οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στην θεωρία ωφελιμότητας για κάποιο τυχαίο κίνδυνο ή κέρδος, όπου κάποιος (decision maker) πρέπει να λάβει αποφάσεις οι οποίες περιέχουν ρίσκο και οδηγούν σε διαφορετικά οικονομικά αποτελέσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι βασικές στοχαστικές διατάξεις, ξεκινώντας από την απλή στοχαστική διάταξη $\prec_{ST}$ 2 τυχαίων μεταβλητών, η οποία βασίζεται στην σύγκριση των συναρτήσεων κατανομής των 2 τυχαίων αυτών μεταβλητών. Ακολουθούν οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου, οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας και οι σκεδαστικές διατάξεις. Στη συνέχεια περιγράφονται οι κατανομές αξιοπιστίας ή γήρανσης και ο τρόπος που συνδέονται με τις στοχαστικές διατάξεις. Τέλος, αναλύονται οι διατάξεις κυρτότητας και ανακοπής ζημιάς οι οποίες επιτρέπουν τη στοχαστική σύγκριση μεταβλητών με διαφορετική διασπορά καθώς και οι διατάξεις παχιάς ουράς.

Τα συγγράμματα που έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως για την ανάπτυξη και ανάλυση των παραπάνω εννοιών είναι τα εξής:

- Comparison Methods for Stochastic Models and Risks των A.Muller και D.Stoyan
- Actuarial Theory for Dependent Risks, Measures, Orders and Models των Michel Denuit, Jan Dhaene, Marc Goovaerts και Rob Kaas.

1.2 Στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών

Η στοχαστική διάταξη (ST) αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο το οποίο επιτρέπει αφ'ενός την σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ διαφορετικών τυχαίων καταστάσεων και αφ'ετέρου την αναζήτηση εκείνου του κινδύνου ο οποίος είναι περισσότερο ελκυστικός μεταξύ άλλων. Ο ευκολότερος τρόπος προκειμένου να ταξινομηθούν αυτά τα ζημιογόνα ενδεχόμενα είναι μέσω του υπολογισμού κάποιων μέτρων κινδύνων και εν συνεχεία η αξιολόγηση αυτών.
Οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των μερικών διατάξεων (partial order). Παρατίθεται ο ορισμός της μερικής διάταξης.

Ορισμός 1.1
Η διμελής σχέση $\prec$ σε ένα αυθαίρετο σύνολο S ονομάζεται μερική διάταξη αν και μόνο αν ισχύει:

i. Αντανακλαστικότητα (reflexivity) : $x \prec x \quad \forall x \in S$
ii. Μεταβατικότητα (transitivity) : αν $x \prec y$ και $y \prec z$ τότε $x \prec z$
iii. Αντισυμμετρία (antisymmetry) : αν $x \prec y$ και $y \prec x$ τότε $x = y$

Στην περίπτωση που το σύνολο S περιλαμβάνει τις συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) για τις πραγματικές τιμές των τ.μ., τότε αυτή η μερική διάταξη ονομάζεται στοχαστική διάταξη.

□

Η πιο συνήθης σύγκριση πιθανοτικών μέτρων δύο κινδύνων είναι η σύγκριση των σ.κ. τους. Αν $F_X(t) > F_Y(t)$ τότε η τ.μ. X παίρνει μικρές τιμές με πιο μεγάλη πιθανότητα απ΄ότι η τ.μ. Y, ή αντίστροφα η τ.μ. X παίρνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα απ΄ότι η Y.

Ορισμός 1.2
Η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς την στοχαστική διάταξη, δηλαδή $X \prec_{ST} Y$, αν :

$$F_X(t) > F_Y(t), \quad \forall t > 0$$

ή

$$\overline{F}_X(t) < \overline{F}_Y(t), \quad \forall t > 0, \qquad \text{όπου} \quad \overline{F_X}(t) = \Pr(X > t)$$

□

Γράφουμε $X \prec_{ST} Y$, αλλά στη πραγματικότητα ισχύει $F_X \prec_{ST} F_Y$. Όταν ένας κίνδυνος X είναι μικρότερος από έναν κίνδυνο Y ως προς την στοχαστική διάταξη, τότε η στοχαστική διάταξη ισχύει και για τις σ.κ. των κινδύνων αυτών.

Στην περίπτωση αυτή, η από κοινού σ.κ. των X και Y είναι συνήθως αδιάφορη, εξετάζονται μόνο οι περιθώριες συναρτήσεις των μεταβλητών.

Παρατήρηση 1.3
Για τ.μ. *X* και *Y*, με σ.κ. F_X και F_Y αντίστοιχα, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i. $X \prec_{ST} Y$
ii. Υπάρχει ένας πιθανοτικός χώρος (Ω,Α,Ρ) ο οποίος περιλαμβάνει τις τ.μ. $\hat{X}$ και $\hat{Y}$ με σ.κ. F_X και F_Y έτσι ώστε $\hat{X}(\omega) \le \hat{Y}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$.

Με άλλα λόγια, αν $X \prec_{ST} Y$ τότε $X \prec_{ST} \hat{Y}$ για κάθε $\hat{Y}$ με την ίδια περιθώρια σ.κ. με την *Y*.

□

Πρόταση 1.3.1
Ισχύει $X \prec_{ST} Y$ αν και μόνο αν υπάρχουν μεταβλητές $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ τέτοιες ώστε $X =_d \tilde{X}$, $Y =_d \tilde{Y}$ και $\Pr(\tilde{X} \le \tilde{Y}) = 1$.

□

Παρατήρηση 1.4
Αν ισχύει $X \prec_{ST} Y$ τότε ισοδύναμα $E\left(f_X(x)\right) \le E\left(f_Y(x)\right)$ για κάθε αύξουσα συνάρτηση *f* για την οποία υπάρχει η μέση τιμή. Αντίστοιχα θα ισχύει και $f_X < f_Y$ για κάθε αύξουσα συνάρτηση *f*.

□

Η παρακάτω πρόταση αναφέρεται στην διάταξη των ροπών δύο τ.μ. *X,Y* όταν η *X* είναι στοχαστικά μικρότερη από την *Y*.

Πρόταση 1.5
Έστω *X* και *Y* τ.μ. όπου η κάθε μία τ.μ. έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε:

i. $X \prec_{ST} Y \Rightarrow E(X) \le E(Y)$
ii. $X \prec_{ST} Y$ και $E(X)=E(Y)$, τότε $X =_d Y$.
iii. $X \prec_{ST} Y \Rightarrow E(X^n) \le E(Y^n)$ (X,Y μη-αρνητικές τ.μ.)

□

Σε κάποιους επιστημονικούς κλαδους αντί για την συνηθισμένη στοχαστική διάταξη, χρησιμοποιείται η μηχανική διάταξη (engineer's order) η οποία βασίζεται στην σύγκριση των μέσων τιμών των μεταβλητών, δηλαδή η τ.μ. *X* είναι μικρότερη από την *Y* ως προς τους μέσους αν *E(X) ≤ E(Y)*.

1.2.1 Στοχαστικές διατάξεις και αναλογιστική επιστήμη

Ακολουθούν βασικά θεωρήματα των απλών στοχαστικών διατάξεων (ST) τα οποία είναι πολύ χρήσιμα στην αναλογιστική επιστήμη και την μοντελοποιήση των κινδύνων.

Πρόταση 1.6
Αν ισχύει $F_n \prec_{ST} G_n \ \forall n$, και οι ακολουθίες F_n και G_n συγκλίνουν κατά κατανομή στις *F* και *G* αντίστοιχα, τότε $F \prec_{ST} G$.

□

Πρόταση 1.7
Έστω *X,Y,Θ* τ.μ. τέτοιες ώστε: $(X/\Theta=\theta) \prec_{ST} (Y/\Theta=\theta) \quad \forall\theta\in\Omega_\Theta$, τότε: $X \prec_{ST} Y$ όπου Ω_Θ ο παραμετρικός χώρος της τ.μ. *Θ*.

□

Πρόταση 1.8
Έστω $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \prec_{ST} Y_i$ i=1,........,n και $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση, τότε θα ισχύει:

$$\Psi\left(X_1,\ldots,X_n\right) \prec_{ST} \Psi\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)$$

□

Πρόταση 1.9
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \prec_{ST} Y_i$ i=1,........,n, τότε:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

□

Πρόταση 1.10
Έστω $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \prec_{ST} Y_i$ i=1,........,n και οι τ.μ *M, N* ανέξάρτητες από τις X_i, Y_i, τότε θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{M} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{M} Y_i$$

Αν $M \prec_{ST} N$, τότε: $\sum_{i=1}^{M} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{N} Y_i$.

□

Στον αναλογισμό και στην διαχείριση κινδύνων μία πολύ σημαντική έννοια η οποία έχει αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk, VaR). Η έννοια αυτή συνδέεται με το ερώτημα: σε ένα χαρτοφυλάκιο πόσο ζημιά περιμένουμε σε μία μέρα, ένα μήνα, ενα χρόνο κλπ και με ποιά πιθανότητα; Η χρήση του *VaR* αποτελεί το βασικό στοιχείο με βάση το οποίο υπολογίζεται η έκθεση σε κίνδυνο. Σε γενικές γραμμές το *VaR* είναι η κεφαλαιακή απαίτηση με πολύ μεγάλο βαθμό βεβαιότητας πχ 99.95%, η οποία είναι αναγκαία για την βιωσιμότητα της ασφαλιστικής εταιρείας ή ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού.
Προκειμένου να γίνει η σύγκριση μεταξύ δύο κινδύνων *X,Y*, είναι αναγκαία η εξέταση της έννοιας του *VaR*.

Ορισμός 1.11
Έστω κίνδυνος *X* και ένα επίπεδο πιθανότητας $p \in [0,1]$ τότε, η αξία σε κίνδυνο *VaR[X;p]* είναι το *100p* ποσοστημόριο της κατανομής του κινδύνου *X*.

$$\mathrm{VaR[X;p]} = F_X^{-1}(p)$$

□

Θεώρημα 1.12
Έστω *X,Y* τ.μ, αν ισχύει $\mathrm{X} \prec_{ST} Y$ τότε:

$$\mathrm{VaR[X;p]} \leq \mathrm{VaR[Y;p]}$$

□

Η στοχαστική αυτή υπεροχή προκύπτει από την αντίστροφη σχετική συνάρτηση κατανομής, αφού $x \to VaR[X;F_Y(x)]$. Δεν είναι τίποτα άλλο από το *VaR* του *X* για p=$F_Y(x)$.

Η αντίστροφη σχετική συνάρτηση κατανομής $\Phi_{\mathrm{X,Y}}$ ορίζεται ως:

$$\Phi_{\mathrm{X,Y}}(t) = Y^{-1}(X(t))$$

και συνδέεται άμεσα με το QQ-plot γράφημα, το οποίο δημιουργείται σχεδιάζοντας τα ποσοστημόρια $G^{-1}(p)$ και $F^{-1}(p)$ για $p \in [0,1]$.

Παρατήρηση 1.13
Για δύο τ.μ. *X* και *Y*, ισχύει $\mathrm{X} \prec_{ST} Y$ αν και μόνο αν:

$$VaR[X;F_Y(x)] \leq x \Leftrightarrow$$
$$F_X^{-1}[F_Y(x)] \leq x \Leftrightarrow$$
$$F_Y(x) \leq F_X(x)$$

□

1.3 Διατάξεις βαθμίδας κινδύνου

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτούνται έννοιες περισσότερο πολύπλοκες από τις απλές στοχαστικές διατάξεις.
Έστω ένα πρόβλημα όπου κάποιος θέλει να αγοράσει ένα μηχάνημα έχοντας να επιλέξει μεταξύ δύο μηχανημάτων με υπολοιπόμενους χρόνους ζωής X και Y αντίστοιχα. Αν ισχύει $X \prec_{ST} Y$ και η τιμή των μηχανημάτων αυτών είναι η ίδια, τότε θα επιλέξει το δεύτερο μηχάνημα εφ'όσον δεν πρόκειται για παράλογο άτομο. Αν όμως θέλει να αγοράσει ένα μηχάνημα που ήδη μετράει ένα χρόνο παλαιότητας, οι νέοι υπολοιπόμενοι χρόνοι ζωής θα είναι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$, όπου $\Pr(\tilde{X} > t) = \Pr(X > 1 + t / X > 1)$ και αντίστοιχα και για την $\tilde{Y}$. Το ερώτημα είναι ποιό μηχάνημα θα επιλεγεί στην περίπτωση αυτή;

Οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου (Hazard Rate order, HR) επικεντρώνονται στην μελέτη των ποσοτήτων (X-t/X>t) και (Y-t/Y>t). Οι διατάξεις αυτές βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην αντασφάλιση, αφού η τ.μ. Z = X-t/X>t αναπαριστά το ποσό που πλήρωσε ο αντασφαλιστής σε ένα συμβόλαιο stop loss δεδομένου ότι η ζημιά είχε φθάσει το όριο t.
Επιπλέον, αυτές οι διατάξεις έχουν εφαρμογή και στις ασφαλίσεις ζωής, δεδομένου οτι οι τ.μ. X και Y αναπαριστούν τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής ομάδας ασφαλισμένων. Ο συμβολισμός $X \prec_{HR} Y$ σημαίνει ότι οι ασφαλισμένοι της 2ης ομάδας θα ζήσουν περισσότερο από εκείνους της 1ης.

Ορισμός 1.14
Η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου $X \prec_{HR} Y$ αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i. $\left(X / X > t\right) \prec_{ST} \left(Y / Y > t\right) \qquad \forall t \geq 0$

ii. η συνάρτηση $t \rightarrow \dfrac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$ είναι μη φθίνουσα

iii. $\bar{F}_X(u)\bar{F}_Y(w) > \bar{F}_X(w)\bar{F}_Y(u) \qquad \forall u < w$

□

Αν θεωρήσουμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι διακριτές τότε έχουμε την παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.15
Έστω $X \prec_{HR} Y$, τότε από τον Ορισμό 1.14(iii) ισχύει:

$$\Pr(X > u)\Pr(Y > w) > \Pr(X > w)\Pr(Y > u) \qquad \forall u < w$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\Pr(X>u)}{\Pr(X>w)} > \frac{\Pr(Y>u)}{\Pr(Y>w)} \qquad \text{Έστω:} \qquad \begin{array}{l} u = w = n \\ u = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ w = n \end{array}$$

τότε:
$$\frac{\Pr(X=n)}{\Pr(X>n)} \geq \frac{\Pr(Y=n)}{\Pr(Y>n)}$$

□

Η βαθμίδα κινδύνου (hazard rate) ή βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής ορίζεται ως:

$$r_X(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Pr(X < t+\epsilon \,/\, X > t)}{\epsilon} = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} = -\frac{d}{dt}\left[\ln(\overline{F}_X(t))\right], \qquad \overline{F}_X(t) > 0$$

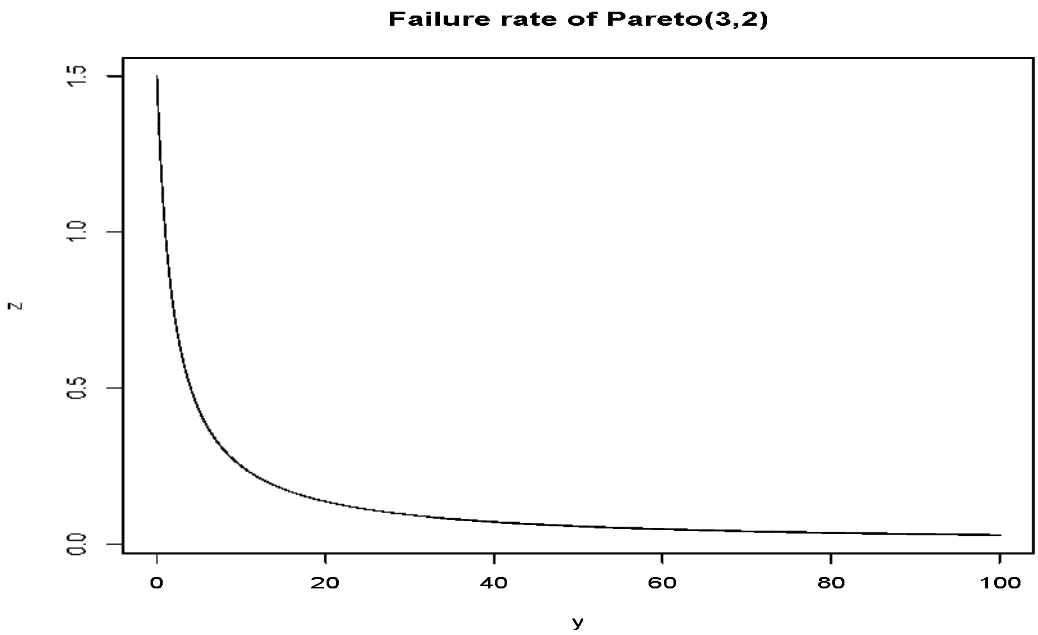
<u>Εφαρμογή 1:</u> Έστω η τ.μ. *X~Pareto(α,θ).* Τότε θα ισχύουν:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0$$

$$F_X(x) = 1 - \frac{\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha}}$$

$$r_X(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)} - \frac{\alpha}{x+\theta}$$

Για συγκεκριμένες τιμές των α,θ, δηλαδή για α=3 και θ=2 τότε παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Πρόταση 1.16
Αν οι τ.μ. *X* και *Y* είναι συνεχείς, τότε:

i. $X \prec_{HR} Y \Leftrightarrow r_Y(t) < r_X(t)$, $\forall t$

ii. $X \prec_{HR} Y \Leftrightarrow g(X) \prec_{HR} g(Y)$ για κάθε αύξουσα συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

iii. $X \prec_{HR} Y \Rightarrow X \prec_{ST} Y$

□

Ορισμός 1.17
Η τ.μ. *X* είναι μικρότερη από την τ.μ. *Y* ως προς την διάταξη της αντίστροφης βαθμίδας κινδύνου ($X \prec_{RH} Y$) αν :

i. η συνάρτηση $t \to \dfrac{F_Y(t)}{F_X(t)}$ είναι μη-φθίνουσα

ii. $(X / X < t) \prec_{ST} (Y / Y < t)$ $\forall t > 0$

□

1.4 Διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας

Στν ενότητα αυτή θα αναλυθούν οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio order, LR).

Ορισμός 1.18
Η τ.μ. *X* είναι μικρότερη από την τ.μ. *Y* ως προς την διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας ($X \prec_{LR} Y$) αν και μόνο αν:

i. Η συνάρτηση $t \to \dfrac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ είναι αύξουσα

ii. $(X / a < X < b) \prec_{ST} (Y / a < Y < b)$, $\forall a < b \in \mathbb{R}$

□

Ο Ορισμός 1.18 ισχύει τόσο για συνεχείς κατανομές, όσο και για διακριτές και μικτές κατανομές.

Πρόταση 1.19
Ισχύει $X \prec_{LR} Y$ αν και μόνο αν το γράφημα P-P plot είναι κυρτό (convex).

□

Οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας είναι στοχαστικά πιο ισχυρές από τις διατάξεις της βαθμίδας αποτυχίας και τις απλές στοχαστικές διατάξεις, δηλαδή:

$$X \prec_{LR} Y \Rightarrow X \prec_{HR} Y \Rightarrow X \prec_{ST} Y .$$

Παρατήρηση 1.20

Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες

i. $X \prec_{LR} Y$

ii. $\Pr(X \in V)\Pr(Y \in U) \le \Pr(X \in U)\Pr(Y \in V)$, *U=[a,b]* και *V=[c.d], a<b<c<d.*

iii. $(X / X \in A) \prec_{ST} (Y / Y \in A)$ για όλα τα ενδεχόμενα A με $\Pr(X \in A) > 0$ και $\Pr(Y \in A) > 0$.

iv. $(X / X \in A) \prec_{LR} (Y / Y \in A)$ για όλα τα ενδεχόμενα A με $\Pr(X \in A) > 0$ και $\Pr(Y \in A) > 0$.

□

1.4.1 Στοχαστικές διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας και αναλογιστική επιστήμη

Ακολουθούν βασικά θεωρήματα των διατάξεων του λόγου πιθανοφάνειας (LR) τα οποία είναι πολύ χρήσιμα στην αναλογιστική επιστήμη και την μοντελοποίηση των κινδύνων.

Πρόταση 1.21

Αν ισχύει $X \prec_{LR} Y$, τότε:

$$g(X) \prec_{LR} g(Y) \qquad \text{για κάθε αύξουσα συνάρτηση } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

□

Στη συνέχεια θα παρουσιασθούν κάποιες προτάσεις οι οποίες συνδέονται με την κυρτότητα και ειδικότερα με το πότε μία τ.μ. είναι λογαριθμικά κοίλη. Ακολουθεί ο ορισμός μιας λογαριθμικά κοίλης τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.22

Μία τ.μ. X έχει λογαριθμικά κοίλη (log-concave) συνάρτηση πυνκότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x)$ στο διάστημα *(a,b)* αν και μόνο αν η συνάρτηση $\ln f_X(x)$ είναι κοίλη συνάρτηση στο διάστημα *(a,b),* δηλαδή αν ισχύει:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln f_X(x)) < 0 .$$

□

Πρόταση 1.23
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (α.ι.τ.μ.) με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π. έτσι ώστε $X_i \prec_{LR} Y_i$, i=1,2,……,n. Τότε θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \prec_{LR} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

□

Πρόταση 1.24
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π., τότε

$$\left(X_i \,/\, \sum_{j=1}^{m} X_j = s_1 \right) \prec_{LR} \left(X_i \,/\, \sum_{j=1}^{m} X_j = s_2 \right), \qquad \text{όπου } s_1 < s_2$$

□

1.5 Σκεδαστικές διατάξεις

Οι σκεδαστικές διατάξεις (Dispersive Order, DISP) διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Doksum το 1969 ως διατάξεις κλίμακας (scale). Ακολουθούν βασικά χαρακτηριστικά των σκεδαστικών διατάξεων.

Ορισμός 1.25
Η τ.μ. *X* είναι μικρότερη από την τ.μ. *Y* ως προς της σκεδαστική διάταξη ($X \prec_{DISP} Y$) αν και μόνο αν ισχύουν:

i. $F_X^{-1}(t) - F_X^{-1}(s) < G_Y^{-1}(t) - G_Y^{-1}(s) \qquad 0 < s < t < 1$
ii. $X =_d \Phi(Y)$ όπου *Φ* αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε $\Phi(y) - \Phi(x) < y - x$ x<y
iii. $|Y - Y_1|$ όπου *Φ* αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε $\Phi(y) - \Phi(x) \geq y - x$ x<y

□

Αν ισχύει $X \prec_{DISP} Y$ και $Y \prec_{DISP} X$, τότε:

$$Y =_d X + c$$

Οι συνθήκες(ii) και (iii) του Ορισμού 1.25 ισχύουν μόνο αν οι τ.μ. *X* και *Y* είναι συνεχείς.

Πρόταση 1.26
Έστω X , X_1 και Υ , Y_1 ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.. Αν ισχύει $X \prec_{DISP} Y$ τότε $|X - X_1| \prec_{ST} |Y - Y_1|$, έτσι ώστε $\Pr(|X - X_1| > z) \le \Pr(|Y - Y_1| > z)$, $z \ge 0$.

□

Με άλλα λόγια, αν η τ.μ. *Y* είναι περισσότερο διασκορπισμένη (dispersed) από την τ.μ. *X*, τότε η απόλυτη απόσταση $|Y - Y_1|$ μεταξύ των δύο ανεξάρτητων απεικονίσεων της *Y*, είναι μεγαλύτερη ως προς την στοχαστική διάταξη από εκείνη των ανεξάρτητων απεικονίσεων της *X*.

Είναι ξεκάθαρο ότι $X \prec_{DISP} Y \Rightarrow X \prec_{ST} Y$.

1.5.1 Σκεδαστικές διατάξεις και αξία σε κίνδυνο

Ορισμός 1.27
Η τ.μ. *X* είναι μικρότερη από την τ.μ. *Y* ως προς της σκεδαστική διάταξη ($X \prec_{DISP} Y$) αν και μόνο αν

i. $(X - VaR[X;p])_+ \prec_{ST} (Y - VaR[Y;p])_+$ 0<p<1
ii. $VaR[X;p_2] - VaR[X;p_1] < VaR[Y;p_2] - VaR[Y;p_1]$ $0 < p_1 < p_2 < 1$
iii. $r_Y(VaR[Y;p]) < r_X(VaR[X;p])$ 0<p<1

□

1.6 Κατανομές αξιοπιστίας ή γήρανσης

Οι κατανομές αξιοπιστίας ή γήρανσης (Lifetime distributions and notions of ageing) παίζουν σημαντικό ρόλο στον αναλογισμό και ειδικότερα στην ανάλυση επιβίωσης, τις ασφαλίσεις ζωής τη θεωρία χρεοκοπίας και αλλού. Ας θεωρήσουμε την μη-αρνητική τ.μ. *X*, η οποία μπορεί να αναπαριστά τον χρόνο ζωής ενός ατόμου σε ότι αφορά τις ασφαλίσεις ζωής είτε τον χρόνο μέχρι την επόμενη αποζημίωση στην θεωρία χρεοκοπίας. Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας $r_X(t)$ ισούται με:

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)}, \quad t \ge 0 .$$

Οι κατανομές αξιοπιστίας συνδέονται άμεσα με την βαθμίδα αποτυχίας.

1.6.1 Κατανομές *IFR/DFR*

Ορισμός 1.28
Μια τ.μ. *X* (ή η αντίστοιχη κατανομή της) έχει την ιδιότητα *IFR* (Increasing Failure Rate, IFR) αν η βαθμίδα αποτυχίας της $r_X(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς *t*. Αντίστοιχα, μία τ.μ. *X* (ή η αντίστοιχη κατανομή της) έχει την ιδιότητα *DFR* (Decreasing Failure Rate, DFR) αν η βαθμίδα αποτυχίας της $r_X(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς *t*.

Με άλλα λόγια, αν $X \in IFR$ τότε η βαθμίδα αποτυχίας της αντίστοιχης κατανομής αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Αν $X \in DFR$, τότε η βαθμίδα αποτυχίας του ατόμου μειώνεται όσο αυξάνεται η ηλικία του. Μία τ.μ. *X* με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας ($r_X(t) = r$) είναι και *IFR* και *DFR*.

□

<u>Εφαρμογή 2</u>: Η μόνη συνεχής κατανομή με την ιδιότητα αυτή είναι η εκθετική κατανομή. Δηλαδή, έστω $X \sim Exp(b)$, τότε:

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{be^{-bx}}{e^{-bx}} = b \qquad\qquad b>0$$

επομένως η *X* είναι και *IFR* και *DFR* κατανομή.

□

<u>Εφαρμογή 3</u>: Ιδιαίτερη ενδιαφέρον παρουσιάζει και η *Weibull* κατανομή. Έστω μια τ.μ. *X* ~ *Weibull(γ,θ)* με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{\gamma}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}$, $x \geq 0$. Τότε η τ.μ. *X* θα έχει βαθμίδα αποτυχίας $r_X(x) = \frac{\gamma}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma-1}$.

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- <u>γ<1:</u> Τότε η τ.μ. *X* θα έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, επομένως $X \in DFR$.
- <u>γ=1:</u> Τότε η τ.μ. *X* θα έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, επομένως $X \in DFR$ και $X \in IFR$ δηλαδή η X είναι και IFR και DFR κατανομή.
- <u>γ>1:</u> Τότε η τ.μ. *X* θα έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, επομένως $X \in IFR$.

□

Ας θεωρήσουμε *n*-άτομα με χρόνους ζωής που περιγράφονται από τις ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$. Είναι φανερό ότι ο συνολικός χρόνος ζωής όλων των ατόμων περιγράφεται από την τ.μ. *S*, όπου $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Πρόταση 1.29
Αν $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \in IFR$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n$, τότε για την τ.μ. S θα ισχύει: $S \in IFR$.

Δεν ισχύει το ίδιο και για τις *DFR* κατανομές. Δηλαδή, έστω και πάλι ότι η τ.μ. $X \sim Exp(b)$, τότε η τ.μ. $S \sim Gamma(n,b)$. Η εκθετική κατανομή είναι *DFR* κατανομή, δεν ισχύει το ίδιο όμως και για την n-συνέλιξή της την τ.μ. *S*, αφού:

$$r_S(t) = \frac{\dfrac{b^n t^{n-1} e^{-bt}}{\Gamma(n)}}{\displaystyle\int_t^\infty \frac{b^n x^{n-1} e^{-bx}}{\Gamma(n)} dx} = \frac{t^{n-1} e^{-bt}}{\displaystyle\int_t^\infty x^{n-1} e^{-bx}\, dx} = \frac{1}{\displaystyle\int_t^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^{n-1} e^{-b(x-t)}\, dx} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty \left(1+\frac{u}{t}\right)^{n-1} e^{-bu}\, du}$$

για n>1 τότε $S \in IFR$
n<1 τότε $S \in DFR$
n=1 τότε $S \sim Exp(b)$ όπου είναι και IFR και DFR κατανομή.

□

Παρατήρηση 1.30
Αν $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \in IFR$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ και $X_i \sim F_{X_i}$ τότε δεν είναι απαραίτητο ότι η μίξη $b_1 F_{X_1} + b_2 F_{X_2} + \ldots\ldots + b_n F_{X_n} \in IFR$, $0 < b_1, b_2 \ldots\ldots\ldots b_n < 1$.

□

<u>Εφαρμογή 4</u>: Έστω η τ.μ. $Y \sim f_Y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}\left(2e^{-2t}\right)$, t>0 μία μίξη εκθετικών όπου η εκθετική κατανομή όπως έχουμε δει έχει την ιδιότητα IFR, τότε:

$$\bar{F}_Y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$$

$$r_Y(t) = \frac{\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}\left(2e^{-2t}\right)}{\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t}} = \frac{e^t + 4}{e^t + 2} \Rightarrow$$

$$r_Y'(t) = \frac{-2e^t}{\left(e^t + 2\right)^2} < 0$$

Επομένως $Y \in DFR$.

Αντιθέτως αν $F_{X_i} \in DFR$ τότε η μίξη των F_{X_i} ως προς οποιαδήποτε μικτική κατανομή διακριτή ή συνεχής, έχει την ιδιότητα *DFR*.

□

Πρόταση 1.31
Αν *E(X) = μ* τότε ισχύουν:

i. $X \in IFR \Rightarrow \overline{F}_X(t) \geq e^{-\frac{t}{\mu}} \qquad 0 \leq t \leq \mu$

ii. $X \in DFR \Rightarrow \overline{F}_X(t) \leq e^{-\frac{t}{\mu}} \qquad 0 \leq t \leq \mu$

□

1.6.2 Κατανομές *NBU/NWU* και *NBUE/NWUE*

Αυτές οι κλάσεις κατανομών ορίζουν έννοιες γήρανσης που βασίζονται στον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής ενός ατόμου. Με τον όρο <<υπολοιπόμενος χρόνος ζωής>> ενός ατόμου ηλικίας x, θα αναφερόμαστε στην τ.μ. *T(x)* όπου:

$$T(x) = X - x / X > x \qquad x \geq 0$$

Ιδιότητες του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής *T(x)*:

$$F_{T(x)}(t) = \Pr(T(x) \leq t) = 1 - \frac{\overline{F}_X(t+x)}{\overline{F}_X(x)} = {}_t q_x$$

$$\overline{F}_{T(x)}(t) = \Pr(T(x) \geq t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{\overline{F}_X(t+x)}{\overline{F}_X(x)} = {}_t p_x$$

$$e_X^0 = E(T(x)) = \int_0^\infty \overline{F}_{T(x)}(t)\,dt$$

Συνήθως, είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορισθεί με μέγιστη ακρίβεια η κατανομή του χρόνου ζωής ενός ανθρώπου ή ενός συστήματος. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται οι κατανομές *NBU* και *NWU* καθώς και οι *NBUE* και *NWUE*. Οι κλάσεις των κατανομών αυτών βρίσκουν μία πληθώρα εφαρμογών στον αναλογισμό, την βιοστατιστική την θεωρία αξιοπιστίας κλπ. Για παράδειγμα, αν κάποιος εισαχθεί στο νοσοκομείο για μία πολύ σοβαρή επέμβαση, μετά την εγχείρηση ο χρόνος ζωής του ανήκει στην κατανομή *NWU* για κάποιο μικρο χρονικό διάστημα το οποίο θεωρείται κρίσιμο για την ζωή του, ενώ με το πέρας του διαστήματος αυτού ο χρόνος ζωής του είναι *NBU*.

Ορισμός 1.32

i. Ο χρόνος ζωής X ενός ατόμου ηλικίας x έχει την ιδιότητα <<καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο>> (New Better than Used, NBU) αν και μόνο αν ισχύει:

$$\bar{F}_{T(x)}(t) \leq \bar{F}_X(t) \qquad \forall x \geq 0,\ t \geq 0$$

τότε $X \in NBU$.

ii. Ο χρόνος ζωής X ενός ατόμου ηλικίας x έχει την ιδιότητα <<χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο>> (New Worsed than Used, NWU) αν και μόνο αν ισχύει:

$$\bar{F}_{T(x)}(t) \geq \bar{F}_X(t) \qquad \forall x \geq 0,\ t \geq 0$$

τότε $X \in NWU$.

□

Πρόταση 1.33

i. Αν μία τυχαία μεταβλητή X είναι *NBU,* τότε:

$$\bar{F}_X(x+y) \leq \bar{F}_X(x)\bar{F}_X(y) \qquad \forall x > 0 \text{ και } \forall y > 0$$

ii. Αν μία τυχαία μεταβλητή X είναι *NWU,* τότε:

$$\bar{F}_X(x+y) \geq \bar{F}_X(x)\bar{F}_X(y) \qquad \forall x > 0 \text{ και } \forall y > 0$$

□

Ορισμός 1.34

i. Ο χρόνος ζωής X ενός ατόμου ηλικίας x έχει την ιδιότητα <<καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή>> (New Better than Used in Expectation, NBUE) αν και μόνο αν ισχύει:

$$E(T(x)) \leq E(X), \qquad \forall x \geq 0$$

τότε $X \in NBUE$.

ii. Ο χρόνος ζωής X ενός ατόμου ηλικίας x έχει την ιδιότητα <<χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή>> (New Worsed than Used in Expectation, NWUE) αν και μόνο αν ισχύει:

$$E(T(x)) \geq E(X), \qquad \forall x \geq 0$$

τότε $X \in NWUE$.

□

Πρόταση 1.35

i. Αν $X \in NBU \Rightarrow X \in NBUE$
ii. Αν $X \in NWU \Rightarrow X \in NWUE$

Απόδειξη:
Από την σχέση (i) του Ορισμού 1.34 έχουμε, αν $X \in NBU$ τότε:

$$\begin{aligned} &\overline{F}_{T(x)}(t) \le \overline{F}_X(t) \Leftrightarrow \\ &\int_0^\infty \overline{F}_{T(x)}(t)\,dt \le \int_0^\infty \overline{F}_X(t)\,dt \Leftrightarrow \\ &E(T(x)) \le E(X) \end{aligned}$$

επομένως $X \in NBUE$.

Ομοίως και στην 2η περίπτωση.

□

1.6.3 Στοχαστική εξάρτηση και κατανομές γήρανσης

Στη συνέχεια δίνουμε κάποια αποτελέσματα που παρουσιάζουν τη σχέση ανάμεσα στις παραπάνω κλάσεις κατανομών και τις κυριότερες στοχαστικές διατάξεις που παρουσιάστηκαν νωρίτερα.

1.6.3.1 *IFR/DFR*

Πρόταση 1.36
Ο χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικίας x είναι *IFR* αν και μόνο αν:

- $[X - t/X > t] \prec_{ST} [X - s/X > s]$ $\quad t \le s$
- $[X - s/X > s] \prec_{HR} [X - t/X > t]$ $\quad t \le s$
- $X_t \prec_{HR} X$ $\quad \forall t$
- $X_t \prec_{HR} X_s$ $\quad s < t$
- $X_t \prec_{ST} X_s$ $\quad s < t$
- $X_t \prec_{DISP} X_s$ $\quad s < t$
- $X_t \prec_{DISP} X$ $\quad \forall t$
- η $\overline{F}_X$ είναι λογαριθμικά κοίλη.

Αντίστοιχα, ο χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικίας x είναι *DFR* αν και μόνο αν:

- $[X-s/X>s] \prec_{ST} [X-t/X>t] \qquad t \le s$
- $[X-t/X>t] \prec_{HR} [X-s/X>s] \qquad t \le s$

□

1.6.3.2 *NBU/NWU και NBUE/NWUE*

Πρόταση 1.37

i. Μία τυχαία μεταβλητή *X* είναι *NBU* αν και μόνο αν:

$$[X-s/X>s] \prec_{ST} X \qquad \forall s>0$$

ii. Μία τυχαία μεταβλητή *X* είναι *NWU* αν και μόνο αν:

$$X \prec_{ST} [X-s/X>s] \qquad \forall s>0$$

□

Με κάθε τ.μ. *X*, συνδέεται η τ.μ. X_e με σ.κ. F_{X_e} η οποία ονομάζεται κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution) ή στάσιμη ανανεωτική κατανομή (stationary renewal distribution), και εκφράζει το μέγεθος της 1ης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, όποτε και αν συμβεί αυτή η πτώση, παίζοντας μ'αυτό τον τρόπο πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία χρεοκοπίας. Η τ.μ. X_e έχει πυκνότητα την συνάρτηση:

$$f_e(x)=\frac{\overline{F}_X(x)}{E(X)}\ , \qquad x \ge 0$$

Πρόταση 1.38
Ο χρόνος ζωής *X* ενός ατόμου ηλικίας x με πεπερασμένη μέση τιμή *E(X)* είναι *NBUE* αν και μόνο αν $X_e \prec_{ST} X$. Αντίστοιχα η τ.μ. *X* είναι *NWUE* αν και μόνο αν $X \prec_{ST} X_e$

Δηλαδή: $\quad X \in NBUE \Rightarrow \overline{F}_e(x) \le \overline{F}_X(x)\,, \qquad x \ge 0$

$\qquad\qquad X \in NBWE \Rightarrow \overline{F}_e(x) \ge \overline{F}_X(x)\,, \qquad x \ge 0$

□

Εφαρμογή 5: Μεγάλο ενδιαφέρον για αυτή την κλάση κατανομών παρουσιάζει η κατανομή Pareto. Έστω ότι μία τ.μ. $X \sim Pareto(\alpha,\theta)$. Είδαμε ότι ισχύουν:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^{c}}{(x+\theta)^{c+1}}, \quad x \geq 0$$

$$\overline{F}_X(x) = \frac{\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha}}$$

Επίσης για την κατανομή ισορροπίας της Pareto θα ισχύουν:

$$f_e(x) = \frac{1}{E(X)}\left[1 - F_X(x)\right] = \frac{\alpha - 1}{\theta}\frac{\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{(\alpha-1)\theta^{\alpha-1}}{(x+\theta)^{(\alpha-1)+1}}, \quad x > 0$$

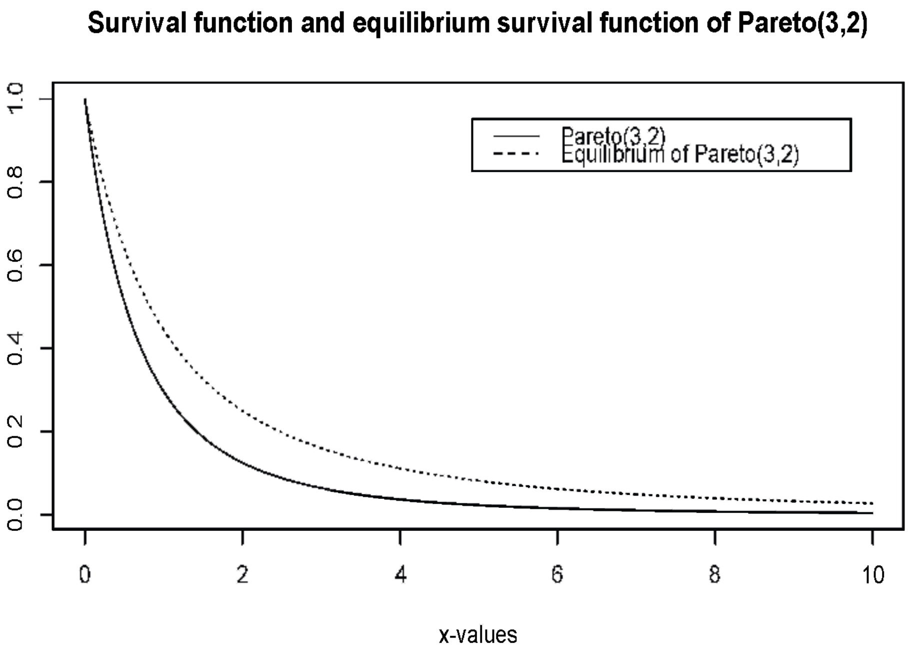
Επομένως $X_e \sim Pareto(\alpha-1,\theta)$, άρα $\overline{F}_e(x) = \dfrac{\theta^{\alpha-1}}{(x+\theta)^{\alpha-1}}$, $x > 0$.

Από την Πρόταση 1.38 συμπαιρένεται ότι $\overline{F}_e(x) \geq \overline{F}_X(x)$ άρα $X \in NWUE$. Πιο συγκεκριμένα για α=3 και θ=2, τότε:

$$\overline{F}_e(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\overline{F}_X(x) = \frac{8}{(x+2)^3}$$

Επίσης, θα έχουμε και το παρακάτω διάγραμμα.



□

1.7 Διατάξεις κυρτότητας και ανακοπής ζημιάς (Convex order and stop loss order)

Οι διατάξεις κυρτότητας και ανακοπής ζημίας (Convex order and stop loss order) επικεντρώνονται στην διακύμανση των εξεταζόμενων τυχαίων μεταβλητών (κινδύνων). Έστω μία κατάσταση στην οποία οι δύο τ.μ. Χ και Υ με την ίδια μέση τιμή περιγράφουν τις αποδόσεις δύο επικίνδυνων επενδύσεων, τότε ένα άτομο το οποίο αποστρέφεται τον κίνδυνο (risk averter) θα επιλέξει εκείνη την επένδυση με τιν μικρότερη διασπορά.
Στην παράγραφο αυτή γίνεται η υπόθεση ότι η μέση τιμή της εκάστοτε μεταβλητής υπάρχει και είναι πεπερασμένη.

1.7.1 Διατάξεις κυρτότητας

Ορισμός 1.39
Έστω οι τ.μ. *X,Y,* τότε η *X* είναι μικρότερη από την *Y* ως προς την διάταξη με βάση την κυρτότητα $X \prec_{SL=} Y$ αν $E(u(X)) < E(u(Y))$ για κάθε κυρτή συνάρτηση $u(\bullet)$ για την οποία η μέση τιμή της είναι πεπερασμένη.

□

Πρόταση 1.40

i. $X \prec_{SL=} Y \Rightarrow E(X^n) < E(Y^n)$

ii. $X \prec_{SL=} Y \Rightarrow E\left[(X - E(X))^n\right] < E\left[(Y - E(Y))^n\right]$
για $n = 2 \Rightarrow Var(X) \leq Var(Y)$

iii. Αν $X \prec_{SL=} Y$ και $Var(X) = Var(Y)$ τότε $X =_d Y$

□

Πρόταση 1.41
Αν ισχύει $X \prec_{SL=} Y$, τότε:

$$\min\{Y\} < \min\{X\} \text{ και } \max\{Y\} > \max\{X\}$$

Σαν αποτέλεσμα η τ.μ. *Y* έχει μεγαλύτερο εύρος από την τ.μ. *X.*

□

Πρόταση 1.42

i. Αν η τ.μ. *Z* είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. *X,Y* τότε:

$$X \prec_{SL=} Y \Rightarrow X+Z \prec_{SL=} Y+Z$$

ii. Αν ισχύει $(X/\Theta=\theta) \prec_{SL=} (Y/\Theta=\theta)$ $\quad \forall\theta \in \Omega_\Theta$,όπου Ω_Θ ο παραμετρικός χώρος της τ.μ. *Θ*.

Τότε:

$$X \prec_{SL=} Y$$

□

1.7.2 Διατάξεις ανακοπής ζημιάς

Οι απλές στοχαστικές διατάξεις συγκρίνουν το μέγεθος των τυχαίων μεταβλητών και οι διατάξεις κυρτότητας συγκρίνουν την μεταβλητότητα των μεταβλητών αυτών. Οι διατάξεις ανακοπής ζημίας συνδέουν τις στοχαστικές διατάξεις και τις διατάξεις κυρτότητας. Με άλλα λόγια η έννοια ''μικρότερη''στις διατάξεις αυτού του τύπου σημαίνει ότι η συγκεκριμένη τ.μ. είναι ταυτόχρονα μικρότερη τόσο σε μέγεθος όσο και σε διακύμανση.

Ορισμός 1.43
Έστω οι τ.μ. *X,Y*, τότε η *X* είναι μικρότερη από την *Y* ως προς την διάταξη με βάση την ανακοπή ζημίας ($X \prec_{SL} Y$) αν

$$\pi_X(t) \leq \pi_Y(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

όπου $\pi_X(t) = E\left[(X-t)_+\right] = \int_t^\infty \overline{F}_X(u)\,du$

□

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό στην αναλογιστική μοντελοποίηση, αφού δίνει την δυνατότητα να δημιουργηθούν μοντέλα για τις συνολικές ζημιές από τα οποία προκύπτουν άνω φράγματα για τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς (stop-loss premiums).

Πρόταση 1.44

i. Αν η τ.μ. *Z* είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. *X,Y* τότε:

$$X \prec_{SL} Y \Rightarrow X+Z \prec_{SL} Y+Z$$

ii. Αν ισχύει $(X / \Theta = \theta) \prec_{SL} (Y / \Theta = \theta)$ $\forall \theta \in \Omega_{\Theta}$, όπου Ω_{Θ} ο παραμετρικός χώρος της τ.μ. *Θ*.

Τότε:

$$X \prec_{SL} Y$$

iii. Αν ισχύει $X \prec_{SL} Y$, τότε υπάρχει τ.μ. *Ζ* έτσι ώστε $X \prec_{ST} Z \prec_{SL=} Y$

Οι διατάξεις κυρτότητας και οι διατάξεις ανακοπής ζημίας παρουσιάζουν πάρα πολλές ομοιότητες. Η επόμενη σχέση παρουσιάζει το πώς συνδέονται αυτές οι δύο διατάξεις.

$$X \prec_{SL=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ X \prec_{SL} Y \end{cases}$$

□

1.7.3 Εφαρμογές στην θεωρία ωφελιμότητας

Σύμφωνα με την θεωρία ωφελιμότητας, ένα άτομο το οποίο αποστρέφεται τον κίνδυνο έχει αύξουσα και κοίλη συνάρτηση ωφελιμότητας (u(x), u'(x)>0, u''(x)<0) και έστω αρχικό πλούτο w. Για κινδύνους *X,Y* αν ισχύει $X \prec_{SL=} Y$ ή $X \prec_{SL} Y$, τότε θα έχουμε $E(u(w - X)) \geq E(u(w - Y))$ με αποτέλεσμα να επιλέγεται ο κίνδυνος *X* έναντι του *Y*.

Πρόταση 1.45
Έστω οι τ.μ. *X,Y* με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε θα ισχύει:

$$X \prec_{SL} Y \Leftrightarrow E(u(X)) \leq E(u(Y))$$

ή

$$X \prec_{SL=} Y \Leftrightarrow E(u(X)) \leq E(u(Y))$$

□

Η παραπάνω σχέση ισχύει για όλες τις αύξουσες και κυρτές συναρτήσεις $u(\bullet)$ για τις οποίες υπάρχει η μέση τιμή. Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση ωφελιμότητας (σ.ω.) $u(x) = x^n$. $n > 0, x > 0$ και οι τ.μ. *X* και *Y* όπου αναπαριστούν το κέρδος από 2 επενδύσεις Α και Β αντίστοιχα. Αν ισχύει $X \prec_{SL} Y$ ή $X \prec_{SL=} Y$ τότε $E(u(X)) \leq E(u(Y))$ με αποτέλεσμα κάποιος ο οποίος είναι κινδυνόφιλος και δεν αποστρέφεται τον κίνδυνο να επιλέξει την επένδυση Β η οποία εκφράζεται από την τ.μ. *Y*.

1.8 Διατάξεις παχιάς ουράς

Στα χρηματοοικονομικά όταν πρέπει να επιλεγούν δύο πιθανοί κίνδυνοι (ζημιές) συνήθως επιλέγεται εκείνος με την μικρότερη μέση τιμή. Αν όμως αυτοί έχουν την ίδια μέση τιμή, τότε βασικό ρόλο για την επιλογή εκείνου του κινδύνου παίζει η διασπορά του. Αυτή η θεωρία διάταξης των κινδύνων σχετικά με την μέσης τιμή και την διασπορά τους, αποτελεί την βάση για το μοντέλο CAPM στα οικονομικά και χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

Ακολουθούν οι διατάξεις παχιάς ουράς (Thicker-Tailed orders, tt) ως ένα είδος διάταξης μεταξύ των κινδύνων το οποίο κυρίως βασίζεται στην μέση τιμή τους.

Ορισμός 1.46
Έστω οι τ.μ. *X,Y*, τότε η *X* είναι μικρότερη από την *Y* ως προς την διάταξη με βάση την παχιά ουρά $X \prec_{tt} Y$, αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- *E(X)=E(Y).*
- Υπάρχει ένας αριθμός x_0 έτσι ώστε: $\Pr(X < x_0) < \Pr(Y < x_0)$ για μικρές τιμές του x με $x< x_0$ και $\Pr(X < x_0) > \Pr(Y < x_0)$ για $x>x_0$. Με άλλα λόγια υπάρχει ένας αριθμός x_0 στον οποίο οι αθροιστικές σ.κ. των τυχαίων μεταβλητών *X,Y* τέμνονται μία φορά.

□

Πρόταση 1.48
Αν οι σ.π.π. των τ.μ. *X,Y* τέμνονται δύο φορές, τότε οι αθροιστικές σ.κ. τους τέμνονται μόνο μία.
Έστω *X,Y* κίνδυνοι με *E(X)=E(Y)* και όχι ισόνομοι. Αν υπάρχουν διαστήματα I_1, I_2 , I_3 με $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [0,\infty)$ και το I_2 βρίσκεται ανάμεσα στα I_1 και I_3 έτσι ώστε να ισχύει $f_X(x) < f_Y(x)$ για τα διαστήματα I_1 και I_3 και $f_X(x) > f_Y(x)$ για το διάστημα I_2 τότε οι αθροιστικές σ.κ. των τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y* τέμνονται μία μόνο φορά.

□

2
Εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων

2.1 Εισαγωγή

Σχεδόν όλες οι ανθρώπινες οικονομικές δραστηριότητες σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με την έννοια του κινδύνου. Στους κλάδους των χρηματοοικονομικών και των αναλογιστικών μαθηματικών οι κίνδυνοι αυτοί είναι αλληλένδετα συνδεδεμένοι με έναν οικονομικό παράγοντα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η σύγκριση και η διάταξη των κινδύνων να παίζει πολύ σημαντικό ρόλο ειδικότερα στους κλάδους αυτούς.
Στην αναλογιστική βιβλιογραφία σαν κίνδυνος ορίζεται μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει την ενδεχόμενη οικονομική απώλεια είτε από κάποιο φυσικό γεγονός (ασθένεια, σεισμός πλημμύρα κ.ο.κ), είτε από τον ανθρώπινο παράγοντα (τροχαίο ατύχημα, τρομοκρατική ενέργεια κ.ο.κ.), είτε από την άσκηση οικονομικής δραστηριότητας. Επίσης, ο κίνδυνος δεν είναι το οποιοδήποτε ζημιογόνο γεγονός, αλλά η οικονομική συνέπεια αυτού του ζημιογόνου γεγονότος.
Στην παρούσα εργασία, οι κίνδυνοι οι οποίοι θα περιγράφονται, θα έχουν γνωστή κατανομή προκειμένου να γίνει εύκολα αντιληπτή η θεωρία.

Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν κάποιες βασικές εφαρμογές των θεωρημάτων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 1.

2.2 Εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων σε μονοδιάστατους κινδύνους

Εφαρμογή 1: Στην παράγραφο 1.3 έγινε αναφορά στο πρόβλημα που δημιουργείται όταν κάποιος έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο μηχανήματα με διαφορετικούς τυχαίους υπολοιπόμενους χρόνους ζωής τις τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Αν ισχύει $X \prec_{ST} Y$ και η τιμή των δύο αυτών μηχανημάτων είναι η ίδια, τότε θα επιλέξει εκείνο το μηχάνημα με τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής που περιγράφεται από την τ.μ. Y.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $X \sim U(0,4)$ και $Y \sim f_Y(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{8}, & 2 < x < 4 \end{cases}$,

τότε για την τ.μ. X ισχύει :

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, 0 \le x \le 4 \Rightarrow$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} \Rightarrow \qquad \overline{F_X}(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Επίσης για την τ.μ. Y ισχύει:

$$Y \sim f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 < x < 1 \\ \frac{1}{4}, 1 < x < 2 \\ \frac{1}{8}, 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$F_Y(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x, 0 < x < 1 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}x, 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{8}x, 2 < x \le 4 \end{cases} \Rightarrow \qquad \overline{F_Y}(x) := \begin{cases} 1-\frac{1}{2}x, 0 < x < 1 \\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}x, 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}x, 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Θα γίνει σύγκριση της ουράς των συναρτήσεων επιβίωσης των τ.μ. *X* και *Y* προκειμένου να ελεγχθεί η απλή στοχαστική διάταξη (ST) μεταξύ των μεταβλητών αυτών.

Για $0 \le x \le 1$:

$$\overline{F_Y}(x) \le \overline{F_X}(x)$$

Για $1 < x \le 2$:

$$\overline{F_Y}(x) \le \overline{F_X}(x)$$

Για $2 < x \le 4$:

$$\overline{F_Y}(x) \le \overline{F_X}(x)$$

Παρατηρείται πως $\overline{F_Y}(x) \le \overline{F_X}(x) \ \ \forall x \in [0,4]$, επομένως με βάση τον Ορισμό 1.2 θα ισχύει $Y \prec_{ST} X$ οδηγώντας έτσι τον υποψήφιο αγοραστή να επιλέξει τελικώς το μηχάνημα με υπολοιπόμενη διάρκεια ζωής την τ.μ. *X* στηριζόμενος στην απλή στοχαστική διάταξη.

Έστω ότι το ίδιο άτομο θέλει να αγοράσει ένα μηχάνημα και έχει να επιλέξει μεταξύ 2 τα οποία είναι μεταχειρισμένα ενός έτους με υπολοιπόμενους χρόνους ζωής τις τ.μ. X^* και Y^* αντίστοιχα, έτσι ωστε:

$$\overline{F_{X^*}}(x) = \Pr(X^* > x) = \Pr(X > 1 + x / X > 1)$$

και

$\overline{F_{Y^*}}(x) = \Pr(Y^* > x) = \Pr(Y > 1 + x / Y > 1)$, αντίστοιχα για την τ.μ. *Y*.

Τότε, για την τ.μ. *X* θα ισχύει:

$$\overline{F_{X^*}}(x) = \Pr(X^* > x) = \Pr(X > 1 + x / X > 1) = \frac{\Pr(X > 1 + x, X > 1)}{\Pr(X > 1)} = \frac{\Pr(X > 1 + x)}{Pr(X > 1)} = 1 - \frac{x}{3}, 0 \le x \le 3$$

Επομένως, $X^* \sim U(0,3)$. Ομοίως για την τ.μ. *Y* θα ισχύει:

$$\overline{F_{Y^*}}(x) = \Pr(Y^* > x) = \Pr(Y > 1 + x / X > 1) = \frac{\Pr(Y > 1 + x, Y > 1)}{\Pr(Y > 1)} = \frac{\Pr(Y > 1 + x)}{Pr(Y > 1)} =$$

$$= \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \frac{x}{2}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{3}{4} - \frac{x}{4}, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

Για $0 \leq x \leq 1$:

$$\overline{F_{Y^*}}(x) \leq \overline{F_{X^*}}(x)$$

Για $1 < x \leq 2$:

$$\overline{F_{Y^*}}(x) \leq \overline{F_{X^*}}(x)$$

Για $2 < x \leq 3$:

$$\overline{F_{Y^*}}(x) \leq \overline{F_{X^*}}(x)$$

Επομένως θα ισχύει $Y^* \prec_{ST} X^* \quad \forall x \in [0,3]$ οδηγώντας έτσι τον υποψήφιο αγοραστή να επιλέξει τελικώς το μηχάνημα με υπολοιπόμενη διάρκεια ζωής την τ.μ. X^*.

Αν δινόταν κάποια διαφορετική κατανομή (A.Muller and D.Stoyan, 2002) για την τ.μ. *Y*.θα μπορούσε να ίσχυε $X^* \prec_{ST} Y^*$.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα άλλο παράδειγμα όπου $X \sim U(0,3)$ και

$$Y \sim f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{3}, & 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

Τότε με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε ότι $X \prec_{ST} Y$ με αποτέλεσμα ο ενδιαφερόμενος αγοραστής να καταλήξει στο μηχάνημα με υπολοιπόμενη διάρκεια ζωής την τ.μ. *Y*.
Επίσης, για την τ.μ. X^* συμπεραίνεται ότι $X^* \sim U(0,2)$ και η τ.μ. Y^* έχει πυκνότητα

$$f_{Y^*}(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{5}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

, καταλήγωντας στο συμπέρασμα ότι $Y^* \prec_{ST} X^*$ επιλέγοντας έτσι το μηχάνημα με υπολοιπόμενη διάρκεια ζωής την τ.μ. X^*.

Μέσω του παραδείγματος αυτού, ανακύπτει ένα βασικό ζήτημα. Πρέπει να ισχύουν εκείνες οι προϋποθέσεις οι οποίες διασφαλίζουν ότι η στοχαστική διάταξη διατηρείται σε όλα τα μηχανήματα για κάθε ηλικία x όταν $(X / X > x) \prec_{ST} (Y / Y > x)$. Όπως αναφέρθηκε στον Ορισμό 1.14, αν ισχύει

$(X / X > x) \prec_{ST} (Y / Y > x)$, $\forall x \geq 0$ τότε $X \prec_{HR} Y$ και σαν συνέπεια $r_Y(x) \leq r_X(x)$, όπου $r_X(x)$: βαθμίδα αποτυχίας της τ.μ. *X*.

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή όπου $X \sim U(0,4)$ και

$$Y \sim f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{4}, & 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{8}, & 2 < x \leq 4 \end{cases},$$

ισχύει:

$$r_X(x) = \frac{1}{4-x}, \qquad 0 < x < 4$$

και

$$r_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{3-x}, & 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{4-x}, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

Επομένως παίρνουμε ότι:

Για $0 \leq x \leq 1$:

$$r_X(x) \leq r_Y(x)$$

Για $1 < x \leq 2$:

$$r_X(x) \leq r_Y(x)$$

Για $2 < x \leq 4$:

$$r_X(x) \leq r_Y(x)$$

Παρατηρείται πως $r_X(x) \leq r_Y(x)\ \ \forall x \in [0,4]$, επομένως με βάση την Πρόταση 1.16 θα ισχύει $Y \prec_{HR} X$ οδηγώντας έτσι τον υποψήφιο αγοραστή να επιλέξει τελικώς το μηχάνημα με υπολοιπόμενη διάρκεια ζωής την τ.μ. *X* στηριζόμενος στην στοχαστική διάταξη με βάση την βαθμίδα αποτυχίας.

□

Στη συνέχεια θα γίνει σύγκριση ορισμένων βασικών κατανομών στα αναλογιστικά μαθηματικά σε ότι αφορά κάποιες από τις στοχαστικές διατάξεις που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 1.

<u>Εφαρμογή 2:</u> Έστω $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ και $Y \sim Gamma(\beta,\mu)$. Θα γίνει στοχαστική σύγκριση των δύο αυτών κινδύνων σχετικά με την στοχαστική διάταξη με βάση την πιθανοφάνεια (LR), την ανακοπή ζημίας (SL) και την κυρτότητα (SL=).

Για την τ.μ. X ισχύει:

$$f_X(x)=\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad x>0$$

Και για την τ.μ. Y ισχύει:

$$f_Y(x)=\frac{\mu^{\beta}x^{\beta-1}e^{-\mu x}}{\Gamma(\beta)}, \qquad x>0$$

Για να ισχύει $X \prec_{LR} Y$, από τον Ορισμό 1.18 θα πρέπει η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f_Y(x)}{f_X(x)}$ να είναι αύξουσα ως προς την μεταβλητή x.
Δηλαδή:

$$h(x)=\frac{f_Y(x)}{f_X(x)}=\frac{\dfrac{\mu^{\beta}x^{\beta-1}e^{-\mu x}}{\Gamma(\beta)}}{\dfrac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}}=\frac{\Gamma(\alpha)\mu^{\beta}}{\Gamma(\beta)\lambda^{\alpha}}x^{\beta-\alpha}e^{-(\mu-\lambda)x}, \qquad x>0$$

και

$$\frac{dh(x)}{dx}=\frac{\Gamma(\alpha)\mu^{\beta}}{\Gamma(\beta)\lambda^{\alpha}}\left[(\beta-\alpha)x^{\beta-\alpha-1}e^{-(\mu-\lambda)x}-(\mu-\lambda)x^{\beta-\alpha}e^{-(\mu-\lambda)x}\right]$$

θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{dh(x)}{dx}>0,$$

οπότε συμπαιρένεται ότι $\alpha \le \beta$ και $\mu \le \lambda$ προκειμένου να ισχύει η στοχαστική διάταξη με βάση την πιθανοφάνεια $X \prec_{LR} Y$.

Για την *Gamma* κατανομή οι διαδικασίες είναι πιο σύνθετες σχετικά με τις διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας. Με σκοπό την απλοποίηση των πράξεων θα θεωρήσουμε ότι λ=1 και μ=1 αντίστοιχα, οπότε:

$$f_{\alpha}(x)=f_X(x)=\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad x>0$$

και

$$g_{\beta}(x) = f_{Y}(x) = \frac{x^{\beta-1}e^{-x}}{\Gamma(\beta)}, \qquad x>0$$

Από τον Ορισμό 1.44 στο Κεφάλαιο 1, για να ισχύει $X \prec_{SL} Y$ αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $E\left[(X-t)_{+}\right] \le E\left[(Y-t)_{+}\right]$.

Ξεκινώντας από την τ.μ. X θα έχουμε:

$$E_{\alpha}(I_t) = E_{\alpha}\left[(X-t)_{+}\right] = \int_{t}^{\infty}\left[1-F_{\alpha}(y)\right]dy = \int_{t}^{\infty} e^{-y}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{y^{j}}{j!}dy =$$
$$= \int_{t}^{\infty}\sum_{j=0}^{\alpha-1} e^{-y}\frac{y^{j}}{j!}dy = \sum_{j=0}^{\alpha-1}\int_{t}^{\infty} e^{-y}\frac{y^{j}}{j!}dy = \sum_{j=1}^{\alpha}\left[1-F_{j}(t)\right] = \sum_{j=1}^{\alpha} e^{-t}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{t^{k}}{k!} =$$
$$= e^{-t}\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{t^{k}}{k!} = e^{-t}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{j}\frac{t^{k}}{k!} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{j=k}^{\alpha-1}\frac{t^{k}}{k!} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{t^{k}}{k!}\sum_{j=k}^{\alpha-1}1 =$$
$$= e^{-t}\sum_{k=0}^{\alpha-1}(\alpha-k)\frac{t^{k}}{k!} = e^{-t}\sum_{j=1}^{\alpha}(\alpha-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

άρα, $$E_{\alpha}(I_t) = E_{\alpha}\left[(X-t)_{+}\right] = e^{-t}\sum_{j=1}^{\alpha}(\alpha-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

και ομοίως για την τ.μ. Y:

$$E_{\beta}(I_t) = E_{\beta}\left[(Y-t)_{+}\right] = e^{-t}\sum_{j=1}^{\beta}(\beta-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

$$E_{\alpha}(I_t) \le E_{\beta}(I_t) \Leftrightarrow$$
$$e^{-t}\sum_{j=1}^{\alpha}(\alpha-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \le e^{-t}\sum_{j=1}^{\beta}(\beta-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{\alpha}(\alpha-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \le \sum_{j=1}^{\beta}(\beta-j+1)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \Leftrightarrow \alpha \le \beta$$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει $\alpha \le \beta$ προκειμένου $X \prec_{SL} Y$.

Οι διατάξεις ανακοπής ζημίας και οι διατάξεις κυρτότητας, έχει αναφερθεί στην παράγραφο 1.7 ότι συνδέονται με την παρακάτω σχέση:

$$X \prec_{SL=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ X \prec_{SL} Y \end{cases}$$

όπου για την συγκεκριμένη εφαρμογή για λ=1 και μ=1 θα ισχύει:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}=\alpha$$
$$E(Y)=\frac{\beta}{\mu}=\beta$$

Άρα για να ισχύει η στοχαστική διάταξη με βάση την κυρτότητα (SL=) θα πρέπει *E(X)=E(Y)*, από όπου συμπαιρένεται ότι α=β και σαν αποτέλεσμα $X \prec_{SL=} Y$ δεδομένου ότι έχει αποδειχθεί ότι $X \prec_{SL} Y$.

□

<u>Εφαρμογή 3:</u> Έστω $X \sim Bin(2,\frac{1}{2})$ και $Y \sim Bin(3,p)$. Θα βρεθεί η ελάχιστη τιμή της πιθανότητας p προκειμένου η τ.μ. *Y* να είναι στοχαστικά μεγαλύτερη με βάση την ανακοπή ζημίας από την τ.μ. *Y*, δηλαδή $X \prec_{SL} Y$.

Με βάση τα δεδομένα ισχύει:

$$\Pr(X=x)=\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad x=0,1,2$$

$$\Pr(Y=x)=\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x}, \qquad x=0,1,2,3$$

$$E_X(I_t)=E\left[(X-t)_+\right]=\sum_{x=t+1}^{2}(x-t)\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$E_Y(I_t)=E\left[(Y-t)_+\right]=\sum_{x=t+1}^{3}(x-t)\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x}$$

Επειδή ισχύει $X \prec_{SL} Y$, τότε από τον Ορισμό 1.44 προκύπτει:

$$E\left[(X-t)_+\right]\le E\left[(Y-t)_+\right]\Leftrightarrow$$
$$\sum_{x=t+1}^{2}(x-t)\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \sum_{x=t+1}^{3}(x-t)\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x} \qquad (1)$$

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

i. t=0:

$$
\begin{aligned}
&(1) \Rightarrow \\
&\sum_{x=1}^{2} x\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \leq \sum_{x=1}^{3} x\binom{3}{x} p^{x}(1-p)^{3-x} \Leftrightarrow \\
&\frac{2}{4}+\frac{2}{4} \leq 3p(1-p)^{2}+6p^{2}(1-p)+3p^{3} \Leftrightarrow \\
&1 \leq 3p \Leftrightarrow \\
&p \geq \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

ii. t=1:

$$
\begin{aligned}
&(1) \Rightarrow \\
&\frac{1}{4} \leq \sum_{x=2}^{3}(x-1)\binom{3}{x} p^{x}(1-p)^{3-x} \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{4} \leq 3p^{2}(1-p)+2p^{3} \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{4} \leq 3p^{2}-p^{3} \Leftrightarrow \\
&p \geq 0.304547
\end{aligned}
$$

επομένως πρέπει να ισχύει $p \geq \frac{1}{3}$ προκειμένου $X \prec_{SL} Y$.

□

<u>Εφαρμογή 4:</u> Έστω η τ.μ. $X \sim Bin\left(3, \frac{1}{3}\right)$ και η τ.μ. $Y \sim Poisson(1)$. Οι δύο αυτές κατανομές έχουν την ίδια μέση τιμή αλλά όχι την ίδια διασπορά. Ποιά από τις δύο έχει πιο παχιά ουρά και επομένως ποιά κατανομή είναι πιο επιθυμητή από την άλλη;

Για την τ.μ. X ισχύει:

$$f_X(x)=\Pr(X=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}, \quad x=0,1,2,\ldots,3$$

$$E(X)=1$$

$$Var(X)=\frac{2}{3}$$

και αντίστοιχα για την τ.μ. *Y*:

$$f_Y(x) = \Pr(Y = x) = \frac{e^{-1}}{x!}, \quad \text{x=0,1,2,...}$$
$$\text{E(Y)=Var(Y)=1}$$

Διακρίνεται ότι η τ.μ. *Y* έχει μεγαλύτερη διασπορά από την τ.μ. *X*. Προκειμένου να γίνει χρήση του Ορισμού **1.47**, ορίζουμε την συνάρτηση *h(x)* ως:

$$h(x) = \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \frac{\binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}}{\frac{e^{-1}}{x!}} = \frac{\frac{2^{4-x}}{9x!(3-x)!}}{\frac{e^{-1}}{x!}} =$$
$$= \frac{2^{4-x}e}{9(3-x)!}, \quad \text{x=0,1,2,3}$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η *h(x)* είναι αύξουσα μέχρι μία τιμή του x και είναι φθίνουσα μετά το σημείο αυτό.

Επίσης, για x=1,2,3:

$$\frac{h(x)}{h(x-1)} = \frac{4-x}{3\frac{2}{3}} = \frac{4-x}{2} \le 1 \Leftrightarrow$$
$$x \ge 2$$

Αφού οι τ.μ. *X* και *Y* έχουν την ίδια μέση τιμή τότε οι σ.π.π τους θα τέμνονται δύο φορές με αποτέλεσμα οι αθροιστικές σ.κ. τους να τέμνονται μία φορά. Συμπαιρένεται πως $X \prec_{tt} Y$ επομένως η τ.μ. *Y (Poisson)* είναι πιο επικίνδυνη από την τ.μ. *X (Binomial)* σε ότι αφορά την διάταξη με τις παχιές ουρές (thicker-tailed orders).

□

3

Στοχαστικές διατάξεις στο συλλογικό πρότυπο κινδύνων

3.1 Εισαγωγή

Στον αναλογισμό και ειδικότερα στη θεωρία των κινδύνων, πολύ σημαντικό ρόλο παίζει η μελέτη της κατανομής της στοχαστικής ανέλιξης των συνολικών αποζημιώσεων *S(t)* ενός χαρτοφυλακίου ζημιών, η οποία είναι της μορφής: $S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, είτε για συνεχή είτε για διακριτό χρόνο *t*. Στο συλλογικό αυτό πρότυπο θεωρούμε ότι οι τ.μ. X_i, i=1,2,...., είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. καθώς και οι τ.μ. $X_i, N(t)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπου η οικογένεια τ.μ. $\{N(t)\}$ θεωρείται η στοχαστική ανέλιξη του πλήθους των ζημιών.

Η μελέτη των συνολικων αποζημιώσεων μίας περιόδου (συνήθως ενός ασφαλιστικού έτους) θεωρεί σταθερό το χρονικό διάστημα το οποίο εξετάζουμε, οπότε οι συνολικές αποζημιώσεις είναι της μορφής: $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ όπου $S = S(1)$ και $N = N(1)$ είναι μόνο τυχαίες μεταβλητές, αγνοώντας παράλληλα και την ενδεχόμενη επίδραση της διαχρονικής στοχαστικής διάρθρωσης του επιτοκίου.

Στο συλλογικό αυτό πρότυπο της μίας περιόδου, η τ.μ. *N* εκφράζει το τυχαίο πλήθος των αποζημιώσεων που θα προκύψουν μέσα σε μία μονάδα χρόνου στο χαρτοφυλάκιο και οι τ.μ. X_i, i=1,2,.... εκφράζουν το μέγεθος της *i*-αποζημίωσης του χαρτοφυλακίου αυτού.

Η πιο συνηθισμένη επιλογή για την τ.μ. *N,* είναι η κατανομή *Poisson*. Η *Poisson* επιλέγεται συχνά εξαιτίας των ιδιοτήτων της, οι οποίες προσδίδουν το πλεονέκτημα της απλοποίησης των υπολογιστικών διαδικασιών στη *σύνθετη Poisson* κατανομή (κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων).

Επιπλέον, αρκετά συχνά είναι χρήσιμη η σύγκριση χαρτοφυλακίων προσεγγίζοντάς τα με σύνθετες *Poisson* κατανομές. Παράλληλα, κάνοντας χρήση κάποιων ιδιοτήτων των στοχαστικών διατάξεων, είναι εφικτή η διάκριση ενός επικίνδυνου χαρτοφυλακίου συνολικών αποζημιώσεων *Poisson* από ένα διαφορετικό χαρτοφυλάκιο σύνθετης *Poisson*.

Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε κάποια παραδείγματα μίας σημαντικής ιδιότητας των στοχαστικών διατάξεων που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1, γνωστή ως διάταξη κλειστή κάτω από σύνθεση $\prec_\delta$ (closed under compounding) σε σύνθετα χαρτοφυλάκια, καθώς και κάποιες εφαρμογές της στη θεωρία χρεοκοπίας.

3.2 Διατύπωση του Συλλογικού Προτύπου

Θα θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο και το τυχαίο πλήθος, N, των αποζημιώσεων που θα προκύψουν μέσα σε μία μονάδα χρόνου (συνήθως ένα οικονομικό έτος, $t=1$). Η τ.μ. N και τα ισόνομα ύψη X_i, των επιμέρους αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες τ.μ. και θα ισχύει:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

όπου, οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_N$ είναι ισόνομες και οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_N,N$ ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τότε για τις συνολικές αποζημιώσεις θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
&E(S)=E(X)E(N)\\
&Var(S)=Var(X)E(N)+Var(N)\{E(X)\}^2\\
&M_S(t)=M_N\left(\ln\left(M_X(t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Αν η κατανομή της τ.μ. N φέρει το όνομα "•", η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S θα καλείται “σύνθετη • κατανομή”.

Για την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, χρησιμοποιούνται οι συνελίξεις και το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν η τ.μ. X_i είναι είτε συνεχής είτε διακριτή, τότε για $N>0$:

$$f_S(x)=\begin{cases}\{\Pr(N=0), & \text{x=0}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N=n)f_X^{*n}(x), & x>0\end{cases}$$

Ειδική περίπτωση όπου η τ.μ. S δεν είναι μικτή κατανομή, είναι όταν $X \sim Bin(n,p)$, όπου θα ισχύει:

$$f_S(x)=\sum_{n=x}^{\infty}\Pr(N=n)f_X^{*n}(x),\ x\ge 0.$$

ii. Αν η τ.μ. X_i είναι είτε διακριτή είτε συνεχής, τότε :

$$f_S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(N=n)f_X^{*n}(x),\ x>0.$$

Για κάθε περίπτωση ορίζεται αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής και η ροπογεννήτρια των συνολικών αποζημιώσεων, κάνοντας χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας.

Οι πιο συνηθισμένες επιλογές για το τυχαίο πλήθος αποζημιώσεων, N, είναι η κατανομή *Poisson* $(N\sim Poisson(\lambda))$ και η αρνητική διωνυμική κατανομή $(N\sim NBin(r,p))$. Η κατανομή *Poisson* επιλέγεται συχνά λόγω ορισμένων θεωρητικών πλεονεκτημάτων που προσδίδουν στη σύνθετη *Poisson* (S~CP) πρακτική υπεροχή. Το γεγονός όμως ότι η διασπορά της *Poisson* είναι ίση με το μέσο, αποτελεί μειονέκτημα στις περιπτώσεις που εμφανίζουν διασπορά μεγαλύτερη από το μέσο, όποτε η αρνητική διωνυμική αποτελεί καλύτερη επιλογή στις περιπτώσεις αυτές. Γενικά, η σύνθετη αρνητική διωνυμική είναι καταλληλότερη από μία σύνθετη *Poisson* όταν πρόκειται για χαρτοφυλάκια με αυξημένη θετική λοξότητα (Κουτσόπουλος, 1999).

Αν για την τ.μ. N ισχύει $N\sim Poisson(\lambda)$ όπου, $\Pr(N=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!},\quad n=0,1,2,\ldots,$ $E(N)=Var(N)=\lambda$ και $M_N(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ τότε, για τις συνολικές αποζημιώσεις θα ισχύουν τα εξής:

$$E(S)=\lambda p_1$$
$$Var(S)=\lambda p_2$$
$$M_S(t)=e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

Με βάση την αναλογιστική βιβλιογραφία (Κουτσόπουλος 1999), θα παρουσιάσουμε δύο προτάσεις οι οποίες φανερώνουν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες της σύνθετης *Poisson* κατανομής, και θα χρησιμεύσουν στις εφαρμογές που θα αναπτύξουμε για τις στοχαστικές διατάξεις στο συλλογικό πρότυπο.

Πρόταση 3.1

Αν οι τ.μ. $S_i(\lambda_i,p_i(x))$ είναι ανεξάρτητες σύνθετες *Poisson* τ.μ., τότε η τ.μ. $\sum S_i$ είναι σύνθετη *Poisson* με $\lambda=\sum\lambda_i$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) $p(x)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\lambda_i p_i(x)$.

□

Η Πρόταση 3.1 προσφέρει την ευχέρεια υποδιαίρεσης ενός χαρτοφυλακίου σε “υποχαρτοφυλάκια” τα οποία εμφανίζουν ομοιγένεια ως προς το ύψος των X_i και στη συνέχεια την στοχαστική άθροιση των συνολικών αποζημιώσεων που προκύπτουν από τα επί μέρους υποχαρτοφυλάκια.

Πρόταση 3.2
Αν υπάρχουν διακριτά ύψη αποζημίωσης, δηλαδή $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και έστω $p(x_i) = \pi_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$ καθώς και $S \sim CP(\lambda, p(x_i) = \pi_i)$, τότε θα ισχύει το εξής σχέση:

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_m N_m$$

όπου N_i : το πλήθος των ζημιών με ύψος αποζημίωσης x_i , και ισχύει: $N_i \sim Poisson(\lambda p(x_i))$.

□

Μία σημαντική εφαρμογή της Πρότασης 3.2, είναι μία συντομευμένη διαδικασία υπολογισμού διακριτών συνελίξεων σύνθετων *Poisson* κατανομών η οποία ονομάζεται “εναλλακτική μέθοδος”. Η Πρόταση 3.2, δείχνει ότι μία σύνθετη *Poisson* με διακριτό *X*, μπορεί να παρασταθεί “εναλλακτικά” και ως $S = \sum_i x_i N_i$.

Πρόταση 3.3
Έστω σύνθετη κατανομή συνολικών αποζημιώσεων στην οποία η σ.π. του αριθμού των ζημιών ικανοποεί αναδρομική σχέση της μορφής $\pi(\kappa)$: $\kappa = 1,2,\ldots$

$$\pi(\kappa) = \left(\alpha + \frac{\beta}{\kappa}\right)\pi(\kappa - 1), \quad \kappa = 1,2,3,\ldots$$

(α και β σταθερές) και η σ.π. του ύψους της αποζημίωσης είναι $\Pr(X = iC) = p(i)$, $i = 1,2,3,\ldots,n$, (C σταθερά). Τότε η σ.π. των συνολικών αποζημιώσεων S ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$f_S(0) = \pi(0) \text{ αν } p(0) = 0, \text{ ή } f_S(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(\kappa)\{p(0)\}^k \text{ αν } p(0) > 0$$

και

$$f_S(j) = \frac{1}{1 - ap(0)} \sum_{i=0}^{M} \left(\alpha + \frac{\beta}{i}\right) p(i) f_S(j - i), \; j = 1,2,3,\ldots, \; M = \min(j,n)$$

□

Ειδικά για την κατανομή *Poisson,* οπότε $\alpha = 0$ και $\beta = \lambda$, τότε από την Πρόταση 3.3 μία άμεση αναδρομική σχέση που προκύπτει και χρησιμοποιείται για τον αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της σ.π των συνολικών αποζημιώσεων είναι η εξής:

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{i=1}^{x} ip(i) f_S(x-i), \quad x = 1,2,\ldots.$$

Οι κατανομές που ικανοποιούν την σχέση $\pi(\kappa) = \left(\alpha + \dfrac{\beta}{\kappa}\right)\pi(\kappa - 1), \quad \kappa = 1,2,3,\ldots$ είναι οι Poisson, η διωνυμική και η αρνητική διωνυμική. Οι τιμές των α και β για την κάθε κατανομή δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Κατανομή	α	β
Poisson(λ)	0	λ
Bin(m,p)	$-\frac{p}{q}$	$(m+1)\frac{p}{q}$
Nbin(r,q)	q	$(r-1)q$
Geo(q)	q	0

3.3 Εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων σε σύνθετα χαρτοφυλάκια

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε κάποιες εφαρμογές των ιδιοτήτων των στοχαστικών διατάξεων που αναλύθηκαν λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 1, πάνω στο συλλογικό πρότυπο και τη θεωρία χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 1: Έστω δύο ανεξάρτητα χαρτοφυλάκια ζημιών σύνθετης *Poisson* κατανομής S_1 και S_2, όπου:

$S_1 \sim CP(\lambda_1 = 4, f_X(x) = \frac{1}{5}, \text{ x=1,2,3,4,5}), \qquad S_2 \sim CP(\lambda_2 = 5, f_X(x) = \frac{1}{4}, \text{ x=2,3,4,5})$

δηλαδή,

$$S_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \quad \mathrm{N} \sim \mathrm{P}(4), \quad \mathrm{X} \sim f_X(x) = \frac{1}{5}, \; x = 1,2,3,4,5$$

και

$$S_2 = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_M, \quad \mathrm{M} \sim \mathrm{P}(5), \quad \mathrm{Y} \sim f_Y(x) = \frac{1}{4}, \; x = 2,3,4,5$$

Για να βρεθεί η στοχαστική διάταξη μεταξύ των χαρτοφυλακίων S_1 και S_2, με βάση τις Προτάσεις 1.9 και 1.10 αρκεί να δειχθεί ότι $X_i \prec_{ST} Y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ και στη συνέχεια αν $N \prec_{ST} M$ τότε προκύπτει $\sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{M} Y_i \Rightarrow S_1 \prec_{ST} S_2$.

Για το χαρτοφυλάκιο S_1 θα ισχύει:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ \frac{1}{5}, & 1 \le x<2 \\ \frac{2}{5}, & 2 \le x<3 \\ \frac{3}{5}, & 3 \le x<4 \\ \frac{4}{5}, & 4 \le x<5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{F_X}(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ \frac{4}{5}, & 1 \le x<2 \\ \frac{3}{5}, & 2 \le x<3 \\ \frac{2}{5}, & 3 \le x<4 \\ \frac{1}{5}, & 4 \le x<5 \\ 0, & x \ge 5 \end{cases}$$

και για το χαρτοφυλάκιο S_2 θα ισχύει:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \le x<3 \\ \frac{2}{4}, & 3 \le x<4 \\ \frac{3}{4}, & 4 \le x<5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{F_Y}(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 1, & 1 \le x<2 \\ \frac{3}{4}, & 2 \le x<3 \\ \frac{2}{4}, & 3 \le x<4 \\ \frac{1}{4}, & 4 \le x<5 \\ 0, & x \ge 5 \end{cases}$$

Παρατηρείται πως σε κάθε διάστημα ισχύει $\overline{F_X}(x) \le \overline{F_Y}(x)$, επομένως από τον Ορισμό 1.2 προκύπτει ότι $X_i \prec_{ST} Y_i$, επομένως θα ισχύει και $\sum_{i=1}^{n} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Στη συνέχεια,

$$f_N(x) = \Pr(N = x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}, \quad x=0,1,2,...$$

και

$$f_M(x) = \Pr(M = x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}, \quad x=0,1,2,...$$

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, οι στοχαστικές διατάξεις με βάση την πιθανοφάνεια (LR) είναι πιο ισχυρές από τις απλές στοχαστικές διατάξεις (ST), δηλαδή ισχύει ο εξής κανόνας $N \prec_{LR} M \Rightarrow N \prec_{ST} M$.

Συγκεκριμένα, κάνοντας χρήση του Ορισμού 1.19 τότε:

$$g(x)=\frac{f_M(x)}{f_N(x)}=\frac{\frac{5^x e^{-5}}{x!}}{\frac{4^x e^{-4}}{x!}}=\frac{1}{e}\left(\frac{5}{4}\right)^x \Rightarrow$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{e}\left(\frac{5}{4}\right)^x \ln\left(\frac{5}{4}\right)>0$$

Η *g(x)* είναι αύξουσα ως προς x, επομένως $N \prec_{LR} M \Rightarrow N \prec_{ST} M$. Έτσι σαν αποτέλεσμα προκύπτει $\sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{M} Y_i$, άρα $S_1 \prec_{ST} S_2$ δηλαδή το χαρτοφυλάκιο με την σύνθετη *Poisson* S_1 είναι λιγότερο επικίνδυνο από το χαρτοφυλάκιο με την σύνθετη *Poisson* S_2 με βάση την απλή στοχαστική διάταξη.

Επίσης, από την Πρόταση 3.3 προκύπτει:

$$f_{S_1}(0)=\Pr(N=0)=e^{-4}$$

$$f_{S_1}(x)=\frac{4}{x}\sum_{i=1}^{x} ip_1(i) f_{S_1}(x-i), \quad x=1,2,...$$

$$\text{όπου } p_1(x)=\frac{1}{5}, \quad x=1,2,3,4,5$$

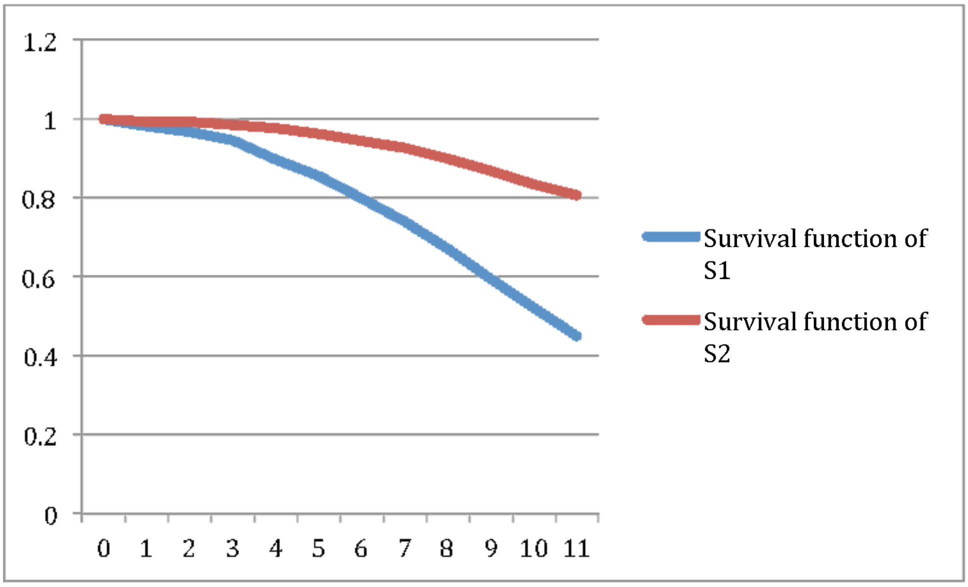
και

$$f_{S_2}(0)=\Pr(N=0)=e^{-5}$$

$$f_{S_5}(x)=\frac{5}{x}\sum_{i=1}^{x} ip_2(i) f_{S_2}(x-i), \quad x=1,2,...$$

$$\text{όπου } p_2(x)=\frac{1}{4}, \quad x=2,3,4,5$$

Το συμπέρασμά μας επαληθεύεται και από το παρακάτω σχεδιάγραμμα το οποίο απεικονίζει τις συναρτήσεις επιβίωσης του κάθε χαρτοφυλακίου ξεχωριστά:



□

<u>Εφαρμογή 2:</u> Έστω δύο ανεξάρτητα χαρτοφυλάκια ζημιών σύνθετης γεωμετρικής (Geo) κατανομής S_1 και S_2 με ισόνομα ύψη αποζημίωσης τις τ.μ. X και Y, όπου:

$$S_1 \sim CGeo(p_1 = \frac{1}{4}, \text{ X\~Exp(3)})$$

και

$$S_2 \sim CGeo(p_2 = \frac{1}{2}, \text{ X\~Exp(3)})$$

δηλαδή,

$$S_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \quad \mathrm{N} \sim Geo(\frac{1}{4}), \quad \mathrm{X} \sim Exp(3)$$

και

$$S_2 = X_1 + X_2 + \ldots + X_M, \quad \mathrm{M} \sim Geo(\frac{1}{2}), \quad \mathrm{X} \sim Exp(3)$$

Επειδή τα ύψη αποζημίωσης αυτών των χαρτοφυλακίων έχει θεωρηθεί ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που αναπαρίστανται με την τ.μ. *X*, προκειμένου να εξεταστεί ποιο από τα δύο χαρτοφυλάκια είναι πιο ελκυστικό σε σχέση με το άλλο, θα ερευνηθεί η στοχαστική διάταξη μόνο μεταξύ των μεταβλητών *N* και *M*.

Για την τ.μ. *N* ισχύει:

$$f_N(x) = \Pr(N = x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^x, \ \mathrm{x}=0,1,2,\ldots$$

και για την τ.μ. *M*:

$$f_M(x) = \Pr(M = x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x=0,1,2,...$$

Κάνοντας χρήση του Ορισμού 1.19 τότε:

$$g(x) = \frac{f_N(x)}{f_M(x)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{4}\right)^x \Rightarrow$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{4}\right)^x \ln\left(\frac{6}{4}\right) > 0$$

Σαν αποτέλεσμα η *g(x)* είναι αύξουσα ως προς x, επομένως από τον ορισμό θα ισχύει $M \prec_{LR} N \Rightarrow M \prec_{ST} N$. Συμπαιρένεται ότι $\sum_{i=1}^{M} X_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow S_2 \prec_{ST} S_1$ δηλαδή το χαρτοφυλάκιο με την σύνθετη γεωμετρική S_2 είναι λιγότερο επικίνδυνο από το χαρτοφυλάκιο με την σύνθετη γεωμετρική S_1 με βάση την απλή στοχαστική διάταξη.

Γενικά, όταν $N \sim Geo(p)$ και $X \sim Exp(b)$, για την ροπογεννήτρια των συνολικών αποζημιώσεων θα ισχύει:

$$M_S(z) = M_N\left\{\ln\left(M_X(z)\right)\right\} = \frac{p}{1-qM_X(z)} = \frac{p}{1-q\dfrac{b}{b-z}} =$$

$$= \frac{p(b-z)}{b-zqb} = \frac{p(b-z)}{pb-z} = p + q\frac{pb}{pb-z}$$

οπότε για την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S θα ισχύει:

$$f_S(x) = \begin{cases} p, & x=0 \\ (1-p)\left(pbe^{-pbx}\right), & x>0 \end{cases}$$

Πιο συγκεκριμένα, για την κατανομή συνολικών αποζημιώσεων S_1 θα ισχύει:

$$f_{S_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x=0 \\ (1-\frac{1}{4})\left(\frac{1}{4}3e^{-\frac{1}{4}3x}\right), & x>0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x=0 \\ \frac{9}{16}e^{-\frac{3}{4}x}, & x>0 \end{cases}$$

ή

$$F_{S_1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0\\ (1-\frac{1}{4})\left(1-e^{-\frac{1}{4}3x}\right), & x>0\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{3}{4}\left(1-e^{-\frac{3}{4}x}\right), & x>0\end{cases}$$

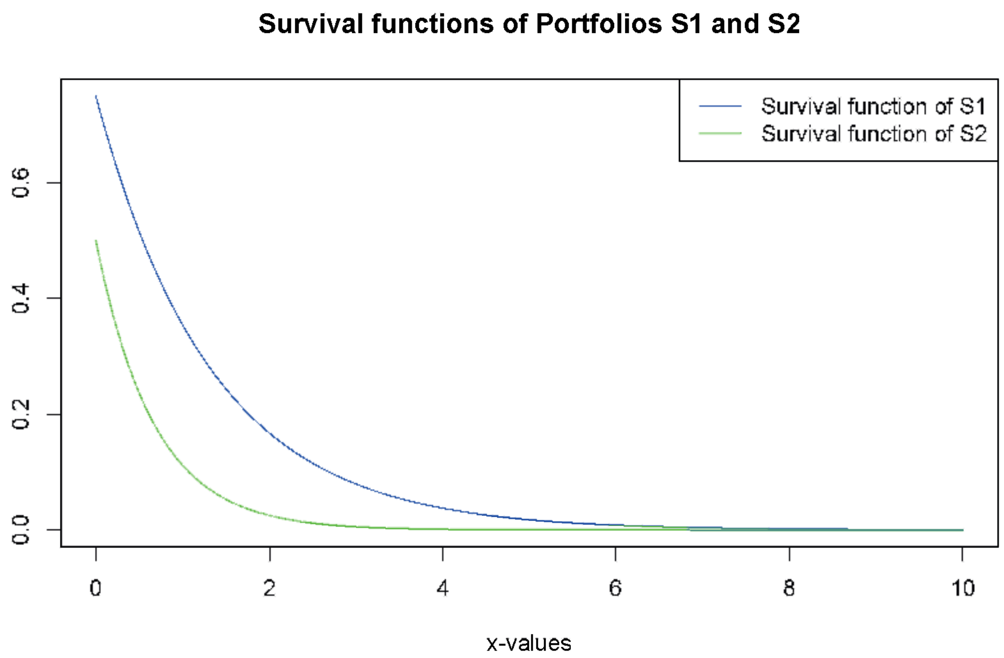
και για την κατανομή S_2:

$$f_{S_2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ (1-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2}3e^{-\frac{1}{2}3x}\right), & x>0\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}x}, & x>0\end{cases}$$

ή

$$F_{S_2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ (1-\frac{1}{2})\left(1-e^{-\frac{1}{2}3x}\right), & x>0\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}x}\right), & x>0\end{cases}$$

Το αποτέλεσμά μας παριστάνεται γραφικά και με το παρακάτω σχήμα για τις συναρτήσεις επιβίωσης των σύνθετων χαρτοφυλακίων S_1 και S_2:



□

Στο Κεφάλαιο 1 αναλύσαμε τις πιο βασικές στοχαστικές διατάξεις και τις ιδιότητες τους. Η σύγκριση μεταξύ μονοπαραμετρικών κινδύνων (αποζημιώσεων), είναι σε γενικές γραμμές πιο απλή και εύκολη στην εφαρμογή των ιδιοτήτων των στοχαστικών διατάξεων, σε αντίθεση με την σύγκριση σύνθετων χαρτοφυλακίων ζημιών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μαθηματική πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τα σύνθετα χαρτοφυλάκια.
Προκειμένου να γίνει η σύγκριση σύνθετων χαρτοφυλακίων, ένας εύστοχος προβληματισμός είναι η εύρεση μιας στοχαστικής διάταξης $\prec_{\delta}$ που διέπει τους κινδύνους του κάθε χαρτοφυλακίου ξεχωριστά, και στη συνέχεια η εφαρμογή της στα χαρτοφυλάκια συνολικά.
Πιο συγκεκριμένα, έστω στοχαστικά χαρτοφυλάκια ζημιών S_1 και S_2 όπου $S_1 = \sum_{i=1}^{N} X_i$ και $S_2 = \sum_{i=1}^{M} Y_i$, όπου οι τ.μ. X_i, Y_i, N, M είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και τα ύψη αποζημίωσης του κάθε χαρτοφυλακίου είναι ισόνομες τ.μ. . Το βασικό ερώτημα είναι, αν ισχύει $X_i \prec_{\delta} Y_i$ τότε θα πρέπει να εξεταστεί αν ισχύει παράλληλα $N \prec_{\delta} M$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{\delta} \sum_{i=1}^{M} Y_i$ ή πιο γενικά, αν $N \prec_{\delta'} M$ τότε $\sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{\delta'} \sum_{i=1}^{M} Y_i$. Τότε η διάταξη $\prec_{\delta}$ θα λέγεται 'διάταξη κλειστή κάτω από σύνθεση' (closed under compounding). Δεν πρόκειται για κάποια καινούργια διάταξη, αλλά για μία βασική ιδιότητα διατήρησης των στοχαστικών διατάξεων από μεμονωμένους κινδύνους σε στοχαστικά αθροίσματα κινδύνων. Όπως αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 1 (Πρόταση 1.10), η πιο απλή περίπτωση που συμβαίνει η παραπάνω ιδιότητα είναι η απλή στοχαστική διάταξη (ST). Παραθέτουμε στη συνέχεια μία ακόμα εφαρμογή σε σύθετα χαρτοφυλάκια, όπου διακρίνεται η ιδότητα της διάταξης κλειστής κάτω από σύνθεση.

<u>Εφαρμογή 3:</u> Έστω σύνθετα χαρτοφυλάκια αποζημιώσεων $S_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ και $S_2 = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_M$, όπου $X_i \sim Exp(3)$ και $Y_i \sim \frac{1}{3}Exp(1) + \frac{2}{3}Exp(3)$. Πιο συγκεκριμένα:

$$f_X(x) = 3e^{-3x}, \quad x \geq 0 \qquad \text{και} \qquad f_Y(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x}\right) + \frac{2}{3}\left(3e^{-3x}\right), \quad x \geq 0$$

Από τον Ορισμό 1.2 του Κεφαλαίου 1 θα έχουμε:

$$F_X(x) = 1 - e^{-3x}, \quad x \geq 0$$

και

$$F_Y(x) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-x}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3x}\right), \quad x \geq 0$$

όπου προκύπτει, $F_X(x) \leq F_Y(x)$, επομένως: $Y \prec_{ST} X$

Αν παράλληλα ισχύει και $M \prec_{ST} N$, τότε η απλή στοχαστική διάταξη παίρνει την ιδιότητα της διάταξης κλειστής υπό συνθήκη, αφού $\sum_{i=1}^{M} Y_i \prec_{ST} \sum_{i=1}^{N} X_i$.

$\square$

3.4 Εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες στη θεωρία χρεοκοπίας, και στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες εφαρμογές των στοχαστικών διατάξεων πάνω στο κομμάτι αυτό.

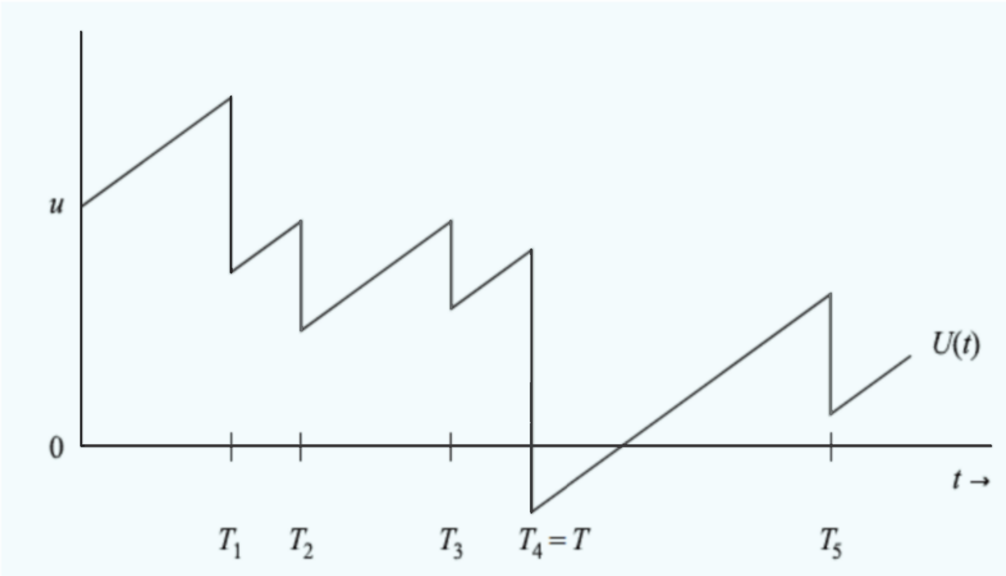
Ο κύριος στόχος της αναλογιστικής επιστήμης είναι η εξασφάλιση της λειτουργίας της ασφαλιστικής επιχείρισης, τόσο άμεσα όσο και στο μέλλον. Η διερεύνηση αυτού του ζητήματος, συνεπάγεται τη μετάβαση από τυχαίες μεταβλητές σε στοχαστικές ανελίξεις. Πέρα από τα επαρκή κεφάλαια για την αποτελεσματική άσκηση των δραστηριοτήτων της, μία επιχείριση πρέπει να κατέχει πρόσθετα κεφάλαια ή αποθέματα για την αντιμετώπιση απρόσμενων ζημιογόνων απαιτήσεων που θα μπορούσαν να θέσουν σε κίνδυνο τη λειτουργία της. Στην αναλογιστική ορολογία, αυτά τα πρόσθετα κεφάλαια ονομάζονται πλεόνασμα (surplus).

Η τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t, θα είναι $U(t)$. Το πλεόνασμα αποτελεί στοχαστική ανέλιξη, όπου ισχύει:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

όπου $S(t)$ είναι η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων, u είναι το αρχικό αποθεματικό και ct είναι το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $(0,t]$.

Η διαδικασία του πλεονάσματος περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα:



Πηγή: MART- UR, MAY 2010

Στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας, γίνεται η υπόθεση ότι $S(t) \sim CP(\lambda t, X)$, όπου προκύπτουν τα εξής χρήσιμα συμπεράσματα:

$$E(S(t)) = \lambda t p_1$$
$$Var(S(t)) = \lambda t p_2$$
$$c = (1+\theta)\lambda p_1$$
$$E(U(t)) = u + \theta \lambda t p_1$$
$$Var(U(t)) = \lambda t p_2$$

Στη θεωρία των κινδύνων, ''χρεοκοπία'' σημαίνει οτι κάποια τυχαία μελλοντική στιγμή T, έχουμε για πρώτη φορά πλεόνασμα αρνητικό $U(T) < 0$. Πρόκειται για τεχνική χρεοκοπία, κατά την οποία η επιχείριση μπορεί να συνάψει δάνειο ή να αυξήσει το μετοχικό της κεφάλαιο. Όπως είναι φυσικό, κυρίαρχο ρόλο παίζει η πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi(u)$ (ή μη χρεοκοπίας $\delta(u)$), όπου γενικά θα ισχύει:

$$\Psi(u) = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u)$$
$$\delta(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(T = \infty \mid U(0) = u)$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ασυμπτωτικά ισχύει $\Psi(u) < e^{-Ru}, \quad u > 0$, όπου R ο συντελεστής προσαρμογής ο οποίος για μία σύνθετη Poisson διαδικασία συνολικών αποζημιώσεων, ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$1 + (1+\theta) p_1 R = M_X(R)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τετριμμένη λύση $R=0$, ανεξάρτητα από το αν $\theta>0$ ή $\theta=0$. Αν $\theta>0$, τότε υπάρχουν και θετικές λύσεις, εκ των οποίων ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μικρότερη εξ'αυτών.

Αν το ύψος αποζημίωσης είναι εκθετικά κατανεμημένο, δηλαδή $X \sim Exp(b)$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται ακριβώς, πιο συγκεκριμένα θα ισχύει:

$$\Psi(u)=Ce^{-Ru}=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{b\theta}{1+\theta}u}, \quad u\geq 0.$$

Επίσης, αν το ύψος αποζημίωσης έχει σ.π.π. της μορφής $p(x)=\sum_i \alpha_i b_i e^{-b_i x}$ όπου $b_i>0$ και $\sum_i \alpha_i=1$, δηλαδή αποτελεί μίξη εκθετικών, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi(u)=\sum_i C_i e^{-r_i u}$$

όπου τα r_i, $i=1,2,\ldots,n$ είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής. Τα C_i προκύπτουν από την παρακάτω εξίσωση:

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{M_X(r)-1}{1+(1+\theta)p_1 r-M_X(r)}\right)=C_1\frac{r_1}{r_1-r}+C_2\frac{r_2}{r_2-r}+C_3\frac{r_3}{r_3-r}+\ldots+C_n\frac{r_n}{r_n-r}$$

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε ως L_1 το μέγεθος της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u (αν και όταν συμβεί τέτοια πτώση).

Τότε θα ισχύουν τα εξής:

$$f_{L_1}(x)=\frac{1}{p_1}\left[1-P(x)\right]$$

$$M_{L_1}(z)=\frac{1}{zp_1}\left[M_X(z)-1\right]$$

$$E(L_1^k)=\frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1}$$

Η τ.μ. L_1 αρκετές φορές συναντάται στην αναλογιστική βιβλιογραφία και ως κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution).

Ο συντελεστής προσαρμογής μπορεί να βρεθεί και από την εξίσωση:

$$1+\theta=M_{L_1}(r).$$

Αν το ύψος αποζημίωσης ακολουθεί εκθετική κατανομή $(X \sim Exp(b))$, τότε και $L_1 \sim Exp(b)$.

Τέλος, θα ορίσουμε την τ.μ. L ως την μέγιστη σωρευτική απώλεια στο χρονικό διάστημα $(0,t]$, όπου θα ισχύει: $L = \max_{t\geq 0}\{S(t) - ct\}$. Η τ.μ. L θα είναι σύνθετη κατανομή, δηλαδή:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N, \qquad L_i: \text{α.ι.τ.μ.}$$

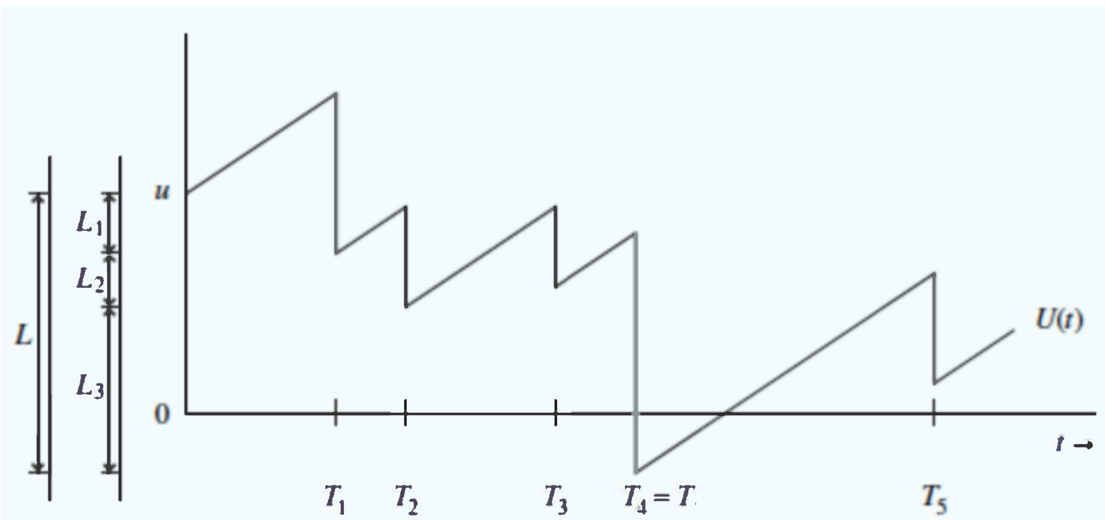
και N: ο αριθμός των πτώσεων κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, και $N \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$, οπότε:

$$f_L(x) = \begin{cases} \Pr(N=0) = \dfrac{\theta}{1+\theta}, & x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(N=n) f_{L_1}^{*n}(x), & x > 0 \end{cases}$$

καθώς και

$$\Pr(L > u) = \Psi(u)$$
$$\Pr(L < u) = 1 - \Psi(u) = \delta(u)$$

Γενικά, για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια L θα ισχύει το παρακάτω σχήμα:



Πηγή: MART- UR, MAY 2010

Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε μία εφαρμογή των στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία χρεοκοπίας, και συγκεκριμένα θα δουλέψουμε με την ιδιότητα της κλειστής διάταξης κάτω από σύνθεση (closed under compounding) για την οποία μιλήσαμε προηγουμένως.

Εφαρμογή 4: Έστω $X_i \sim Exp(3)$ και $Y_i \sim \frac{1}{3}Exp(1)+\frac{2}{3}Exp(3)$ και θ=0.5. Για τις σ.π.π. των μεταβλητών X και Y θα ισχύει:

$$f_X(x)=3e^{-3x}, \quad x\geq 0$$

και

$$f_Y(x)=\frac{1}{3}\left(e^{-x}\right)+\frac{2}{3}\left(3e^{-3x}\right), \quad x\geq 0$$

Σε ότι αφορά την στοχαστική διάταξη των δύο αυτών μεταβλητών, δείξαμε ότι:

$$Y \prec_{ST} X.$$

Σχετικά με τις κατανομές ισορροπίας των δύο αυτών μεταβλητών, θα έχουμε:

$$f_{X_e}(x)=3\left(1-1+e^{-3x}\right)=3e^{-3x}, \quad x\geq 0$$
$$F_{X_e}(x)=1-e^{-3x}, \quad x\geq 0$$
$$\overline{F}_{X_e}(x)=e^{-3x}, \quad x\geq 0$$

και

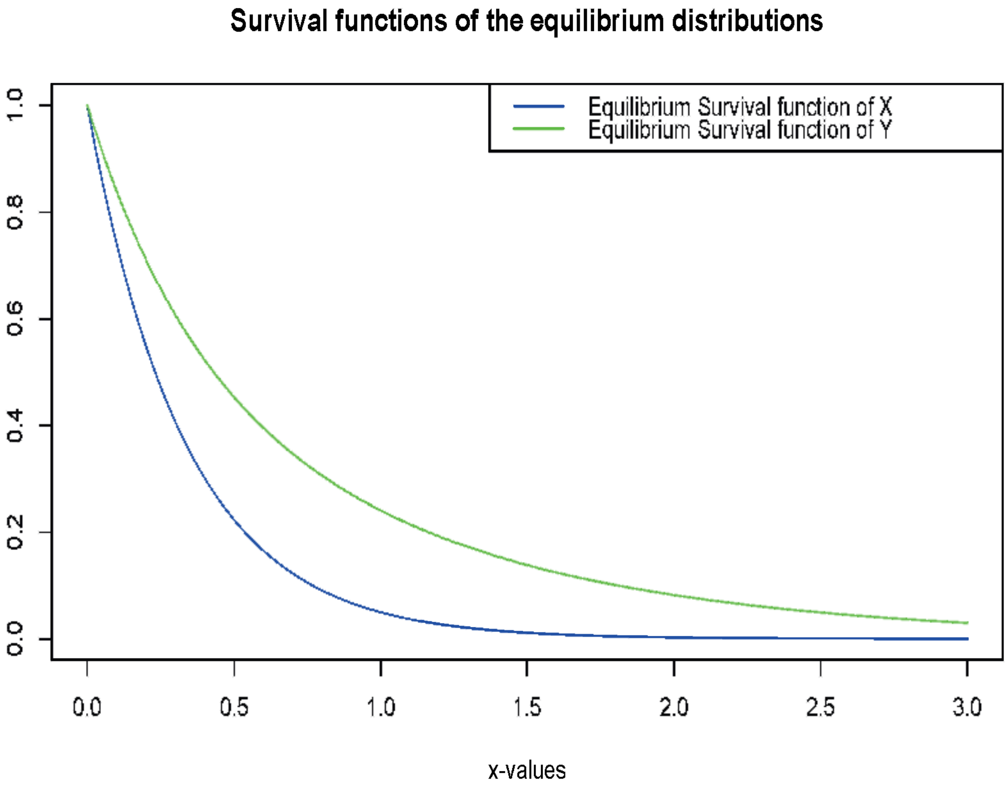
$$E(Y)=p_1=\frac{1}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\,dx+\frac{2}{3}\int_0^\infty x3e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3}1+\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$
$$F_Y(x)=\frac{1}{3}\int_0^x e^{-t}\,dt+\frac{2}{3}\int_0^x 3e^{-3t}\,dt=\frac{1}{3}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{2}{3}\left(1-e^{-3x}\right), \quad x\geq 0$$
$$\overline{F}_Y(x)=1-F_Y(x)=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{-3x}, \quad x\geq 0$$

Για την κατανομή ισορροπίας της τ.μ. Y, θα έχουμε:

$$f_{Y_e}(x)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{-3x}\right)=\frac{3}{5}e^{-x}+\frac{6}{5}e^{-3x}, \quad x\geq 0$$
$$F_{Y_e}(x)=\frac{3}{5}\int_0^x e^{-t}\,dt+\frac{6}{5}\int_0^x e^{-3t}\,dt=\frac{3}{5}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{2}{5}\left(1-e^{-3x}\right), \quad x\geq 0$$
$$\overline{F}_{Y_e}(x)=\frac{3}{5}e^{-x}+\frac{2}{5}e^{-3x}, \quad x\geq 0$$

Κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε ότι $\overline{F}_{X_e}(x)\leq \overline{F}_{Y_e}(x)$, οπότε σε συνδυασμό με τον Ορισμό 1.2 του Κεφαλαίου 1 θα ισχύει $X_e \prec_{ST} Y_e$ καταλήγοντας ότι η απλή στοχαστική διάταξη ST δεν διατηρείται και στις κατανομές ισορροπίας για την συγκεκριμένη εφαρμογή.

Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύεται και από το παρακάτω διάγραμμα για τις συναρτήσεις επιβίωσης της κατανομής ισορροπίας για την κάθε μεταβλητή αντίστοιχα.



Survival functions of the equilibrium distributions
Equilibrium Survival function of X
Equilibrium Survival function of Y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x-values

□

4
Συμμονοτονία και πολυδιάστατες στοχαστικές διατάξεις

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τις έννοιες της συμμονοτονίας (comonotonicity) μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, καθώς και με τις πολυδιάστατες στοχαστικές διατάξεις (multivariate stochastic orders) μεταξύ κατανομών ή διανυσμάτων.
Θα θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ το οποίο αποτελείται από n-τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στο δειγματικό χώρο Ω και $R_{X_1,\ldots,X_n}$ το σύνολο τιμών που μπορεί να λάβει η διατεταγμένη n-άδα $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$. Η κατανομή του τυχαίου αυτού διανύσματος $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$, χαρακτηρίζεται από την από κοινού συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του:

$$F_{\mathrm{X}}(x)=\Pr(\mathbf{X}<x)=\Pr(X_1<x,\ldots.,X_n<x)$$

ή από την από κοινού συνάρτηση επιβίωσής (σ.ε.) του:

$$\overline{F}_{\mathrm{X}}(x)=\Pr(\mathbf{X}>x)=\Pr(X_1>x,\ldots.,X_n>x)\,.$$

Σημειώνουμε πως η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι πάντοτε αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση ως προς κάθε μία από τις n-μεταβλητές της.

Επίσης, οι σ.κ. $F_i(x)=\Pr(X_i\le x)$ για $i=1,\ldots.,n$ ονομάζονται περιθώριες σ.κ. των τ.μ. X_i. Στην περίπτωση n=1, όπου δηλαδή υπάρχει μία μόνο μεταβλητή ισχύει: $\overline{F}_X(x)=1-F_X(x)$, η ιδιότητα αυτή όμως δεν ισχύει στην περίπτωση όπου υπάρχουν πολλές μεταβλητές.

Πιο συγκεκριμένα για n=2 θα έχουμε:

$$\overline{F}_X(x_1,x_2)=\Pr\left(X_1>x_1,X_2>x_2\right)=1-F_1(x_1)-F_2(x_2)+F_X(x_1,x_2)$$

το οποίο ισχύει για όλα τα x_1 και x_2. Ο αντίστοιχος τύπος για την σ.κ. ή την σ.ε. γίνεται αρκετά πολύπλοκος για n>2.

Όταν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ είναι διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x_1,\ldots,x_n)$, θα έχουμε:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{t_1,\ldots,t_n} f(t_1,\ldots,t_n)$$

όπου η άθροιση επεκτείνεται σε όλα τα $(t_1,\ldots,t_n)$ για τα οποία ισχύει $t_1 \le x_1, t_2 \le x_2, \ldots\ldots, t_n \le x_n$.

Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X_i, $1 \le i \le n$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X_i}(x_i)=\Pr(X_i = x_i)=\sum_{x_j, j\neq i} f(x_1,\ldots,x_n)$$

όπου η άθροιση γίνεται ως προς όλες τις άλλες μεταβλητές εκτός από την x_i.

Για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ ισχύουν οι εξής συνθήκες:

i. $f(x_1,\ldots,x_n)\ge 0$ για κάθε $(x_1,\ldots,x_n)\in R_{X_1,\ldots,X_n}$.

ii. $\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in R_{X_1,\ldots,X_n}} f(x_1,\ldots,x_n)=1$.

Επιπλέον, αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x_1,\ldots,x_n)$, θα έχουμε:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_n\ldots dt_2\,dt_1$$

και

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}.$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της X_i, $1 \le i \le n$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots x_{i-1},x_i,\ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_{i+1}\ldots dx_n.$$

Για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$, ισχύουν οι εξής συνθήκες:

i. $f(x_1,\ldots,x_n)\ge 0$ για κάθε $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathbb{R}$.

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n = 1$.

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ θα λέγονται ανεξάρτητες, αν για οποιαδήποτε υποσύνολα πραγματικών αριθμών $U_1,\ldots,U_n$ ισχύει:

$$\Pr\left(X_1 \in U_1, X_2 \in U_2, \ldots, X_n \in U_n\right) = \Pr\left(X_1 \in U_1\right)\Pr\left(X_2 \in U_2\right)\ldots\Pr\left(X_n \in U_n\right)$$

Η στοχαστική ανεξαρτησία *n*-τυχαίων μεταβλητών ελέγχεται μέσω κάποιας αναγκαίας και ικανής συνθήκης από τις επόμενες που ακολουθούν:

i. $F\left(x_1,\ldots,x_n\right) = F_{X_1}(x_1)\ldots\ldots F_{X_n}(x_n)$ για κάθε $x_1,\ldots,x_n$.
ii. $f\left(x_1,\ldots,x_n\right) = f_{X_1}(x_1)\ldots\ldots f_{X_n}(x_n)$ για κάθε $x_1,\ldots,x_n$.

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες, τότε:

i. οι τυχαίες μεταβλητές $W_1 = h_1(X_1),\ W_2 = h_2(X_2),\ldots\ldots,\ W_n = h_n(X_n)$ είναι ανεξάρτητες για οποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$.
ii. $E\left(X_1\ldots X_n\right) = E(X_1)\ldots\ldots E(X_n)$.

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν πολλές πολυδιάστατες κατανομές με τις ίδιες περιθώριες συναρτήσεις, οι οποίες επιδεικνύουν διάφορετικά είδη εξάρτησης μεταξύ των στοιχείων του διανύσματος. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να περιγραφεί με την χρήση ενός μαθηματικού εργαλείου που ονομάζεται copula.
Η copula είναι η σ.κ. ενός τυχαίου διανύσματος $U = \left(U_1,\ldots,U_n\right)$ του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο διάστημα (0,1). Δεδομένου μίας copula C και περιθώριων $F_1,\ldots,F_n$, διακρίνεται ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = C\left(F_1(x_1),\ldots\ldots,F_n(x_n)\right)$$

είναι μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις τις $F_1,\ldots,F_n$. Αν η F είναι συνεχής τότε η copula είναι μοναδική.

4.2 Συμμονοτονία

Θα συμβολίσουμε με $\Gamma(F_1,\ldots,F_n)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων κατανομής με περιθώριες τις $F_1,\ldots,F_n$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται κλάση Frechėt (Frechėt class) των $F_1,\ldots,F_n$. Για κάθε κατανομή ορισμένη σε μία κλάση Frechėt, υπάρχουν συγκεκριμένα άνω και κάτω φράγματα τα οποία ονομάζονται φράγματα Frechėt (Frechėt bounds). Αυτά παρουσιάζονται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.1
Έστω *F* μία συνάρτηση κατανομής με περιθώριες τις $F_1,\ldots,F_n$, τότε θα ισχύει:

$$F^{-}(x) \leq F(x) \leq F^{+}(x)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$, όπου:

$$F^{-}(x) = \max\left\{0, F_1(x_1) + \ldots. + F_n(x_n) - (n-1)\right\}$$

και

$$F^{+}(x) = \min\left\{F_1(x_1), \ldots., F_n(x_n)\right\}$$

Η F^{+} ονομάζεται άνω φράγμα Frechėt (upper Frechėt bound) και η F^{-} ονομάζεται κάτω φράγμα Frechėt (lower Frechėt bound).

□

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ένα τυχαίο σύνολο (set) στο $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο ορίζεται ως συμμονοτονικό στο υπερσύνολο $\mathbb{R}^n$, αν κάθε ένα από τα τυχαία διανύσματα μέσα σε αυτό είναι στοχαστικά διατεταγμένα ως προς τις συνιστώσες τους, με άλλα λόγια αν τα στοιχεία του ενός διανύσματος είναι τα αντίστοιχα στοιχεία του άλλου. Μία κατανομή είναι συμμονοτονική όταν το στήριγμά της (support) είναι συμμονοτονικό. Επίσης, ένα διάνυσμα είναι συμμονοτονικό όταν η κατανομή του είναι συμμονοτονική. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει κανείς στους Kaas, Goovaerts, Dhaene, Denuit (2009). Παραθέτουμε τον παρακάτω ορισμό σχετικά με την συμμονοτονία.

Ορισμός 4.2
Για ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$, ορίζουμε ένα συμμονοτονικό ισοδύναμο ως:

$$\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n) = \left(F_{X_1}^{-1}(U), \ldots\ldots, F_{X_n}^{-1}(U)\right)$$

όπου $U \sim Uniform(0,1)$.

□

Πρόταση 4.3
Για το τυχαίο διάνυσμα **Y** του Ορισμού 4.2 ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i. Το διάνυσμα **Y** έχει τις ίδιες περιθώριες με το διάνυσμα **X**, δηλαδή $Y_i \sim X_i \ , \ \forall i$.
ii. Η κατανομή του **Y** έχει συμμονοτονικό στήριγμα.
iii. Η απο κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής ισούται με το άνω φράγμα Frechét, δηλαδή:

$$Pr\left(Y_1 \le y_1, \ldots\ldots, Y_n \le y_n\right) = \min_{i=1,2,\ldots,n} \Pr\left(X_i \le y_i\right).$$

Απόδειξη:

i. $\Pr\left(Y_j \le y_j\right) = \Pr\left(F_{X_j}^{-1}(U) \le y_j\right) = \Pr\left(U \le F_{X_j}(y_j)\right) = F_{X_j}(y_j)$.

ii. Το στήριγμα του **Y** είναι είναι μία καμπύλη $\left\{\left(F_{X_1}^{-1}(u), \ldots\ldots, F_{X_n}^{-1}(u)\right)/ 0 < u < 1\right\}$ η οποία αυξάνει για όλα τα στοιχεία του. Αν $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ και $\left(z_1, \ldots, z_n\right)$ είναι 2 στοιχεία έτσι ώστε $F_{X_i}^{-1}(u) = y_i < z_i = F_{X_i}^{-1}(v)$ για κάποιο i, τότε πρέπει να ισχύει u<v με αποτέλεσμα $y_i < z_i$, ∀i=1,2,.....,n .

iii.

$$\begin{aligned} Pr\left(Y_1 \le y_1, \ldots\ldots, Y_n \le y_n\right) &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \le y_1, \ldots\ldots, F_{X_n}^{-1}(U) \le y_n\right) = \\ &= \Pr\left(U \le F_{X_1}(y_1), \ldots\ldots, U \le F_{X_n}(y_n)\right) = \\ &= \min_{i=1,2,\ldots,n} \Pr\left(X_i \le y_i\right). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.4
Το διάνυσμα **Y** του Ορισμού 4.2 έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$X_1 + \ldots\ldots + X_n \prec_{SL} Y_1 + \ldots\ldots + Y_n$$

□

Εφαρμογή 1: Έστω η τ.μ. X~Uniform στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$, Y~Beta(2,2) και Z~N(0,1). Τότε σύμφωνα με τους Kaas, Goovaerts, Dhaene, Denuit (2009) το στήριγμα της συμμονοτονικής κατανομής θα είναι:

$$\left\{\left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u), F_Z^{-1}(u)\right)/ 0 < u < 1\right\}.$$

□

Πρόταση 4.5
Έστω F η συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ η οποία σε όλο το πεδίο ορισμού της αυστηρά συνεχής. Επίσης, έστω:

$$(U_1,\ldots,U_n)=\Psi_F(X_1,\ldots,X_n)$$

όπου, ο μετασχηματισμός $\Psi_F:\mathbb{R}^n\to(0,1)^n$ ορίζεται ως:

$$\Psi_F(x_1,\ldots,x_n)=\left(F_1(x_1),F_{2|1}(x_2\mid x_1),\ldots..,F_{n|1,2,\ldots..,n-1}(x_n\mid x_1,\ldots.,x_{n-1})\right).$$

Τότε οι $U_1,\ldots,U_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα [0,1].

□

Μία βασική σημείωση είναι πως ο μετασχηματισμός της Πρότασης 4.4, είναι μόνο ένας από τους πολλούς που μπορούν να γίνουν μετατρέποντας τις τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ σε n-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (0,1).

4.3 Πολυδιάστατες στοχαστικές διατάξεις

Σε αντίθεση με τις ιδιότητες των στοχαστικών διατάξεων μεταξύ μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 1, υπάρχουν ξεχωριστές ιδιότητες που ισχύουν μόνο για τις πολυμεταβλητές στοχαστικές διατάξεις αυθαίρετα ορισμένες σε n-διαστάσεις. Περισσότερη ανάλυση σε βάθος για τις πολυμεταβλητές στοχαστικές διατάξεις μπορεί να βρει κάποιος στους Muller και Stoyan (2002).
Για την διατύπωση αυτών των ιδιοτήτων, θα χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο $K=\{k_1,\ldots,k_m\}\subset\{1,\ldots,n\}$ με $k_1<\ldots<k_m$ και ένα διάνυσμα $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Επιπλέον, θα ορίσουμε ως $x_K=\left(x_{K_1},\ldots,x_{K_m}\right)$ ένα υποδιάνυσμα του x, το οποίο περιέχει ως δείκτες τα στοιχεία του συνόλου K.

Ορισμός 4.6
Η στοχαστική διάταξη $\prec$ για τυχαία διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να έχει κάποια από τις παρακάτω ιδιότητες:

i. Ιδιότητα (MA): αν $X\prec Y\Rightarrow X_K\prec Y_K$, για κάθε $K\subset\{1,\ldots,n\}$.
ii. Ιδιότητα (ID): αν $X\prec Y\Rightarrow(X_K,X_L)\prec(Y_K,Y_L)$, για κάθε $K,L\subset\{1,\ldots,n\}$

iii. Ιδιότητα (IN): αν $X_i \prec Y_i$ για $i=1,2$ τότε $(X_1,X_2)\prec(Y_1,Y_2)$ αν τα X_1,X_2 και Y_1,Y_2 είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα.

□

4.3.1 Απλή στοχαστική διάταξη και orthant διάταξη

Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1, για μία μόνο μεταβλητή τα παρακάτω είναι ισοδύναμα σε ότι αφορά την απλή στοχαστική διάταξη $\prec_{ST}$:

- $E(f(X)) \le E(f(Y))$ για κάθε αύξουσα συνάρτηση *f*.
- $\overline{F}_X(t) \le \overline{F}_Y(t)$ για κάθε t.

Στην πολυμεταβλητή περίπτωση, οι τ.μ. X και Y αντικαθίστανται από τα διανύσματα **X** και **Y.** Δεν ισχύουν οι ιδιότητες που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, αλλά ισχύουν κάποιες άλλες οι οποίες θα αναλυθούν σε αυτή την παράγραφο.

Ορισμός 4.7
Έστω **X** και **Y** δύο τυχαία διανύσματα με τιμές στο $\mathbb{R}^n$, τότε τα **X** και **Y** είναι συγκρίσιμα με βάση την:

- Απλή στοχαστική διάταξη $\prec_{ST}$, δηλαδή $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$ αν ισχύει $E(f(\mathbf{X}))\le E(f(\mathbf{Y}))$ για κάθε αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.
- Άνω orthant διάταξη $\prec_{uo}$, δηλαδή $\mathbf{X}\prec_{uo}\mathbf{Y}$ αν ισχύει $\overline{F}_{\mathbf{X}}(t)\le\overline{F}_{\mathbf{Y}}(t)$ για κάθε t.
- Κάτω orthant διάταξη $\prec_{lo}$, δηλαδή $\mathbf{X}\prec_{lo}\mathbf{Y}$ αν ισχύει $F_{\mathbf{X}}(t)\ge F_{\mathbf{Y}}(t)$ για κάθε t.

□

Πρόταση 4.8
Αν ισχύει $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$, τότε:

$$\mathbf{X}\prec_{uo}\mathbf{Y} \text{ και } \mathbf{X}\prec_{lo}\mathbf{Y}.$$

□

Από την Πρόταση 4.8 συμπεραίνεται πως η απλή στοχαστική διάταξη, είναι στοχαστικά πιο ισχυρή από τη διάταξη orthant.

Παρατήρηση 4.9
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i. $\mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Y}$.
ii. $E(f(\mathbf{X})) \le E(f(\mathbf{Y}))$ για κάθε συνεχή και αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
iii. $E(f(\mathbf{X})) \le E(f(\mathbf{Y}))$ για κάθε διαφορίσιμη και αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
iv. $\Pr(\mathbf{X} \in U) \le \Pr(\mathbf{Y} \in U)$ για όλα τα άνω σύνολα U (upper sets U).
v. $\Pr(\mathbf{X} \in U) \le \Pr(\mathbf{Y} \in U)$ για όλα τα κλειστά άνω σύνολα U (closed upper sets U).
vi. Υπάρχουν τυχαία διανύσματα $\hat{\mathbf{X}}$ και $\hat{\mathbf{Y}}$, όπου $\hat{\mathbf{X}} =_{ST} \mathbf{X}$ και $\hat{\mathbf{Y}} =_{ST} \mathbf{Y}$ έτσι ώστε: $\Pr\left(\hat{\mathbf{X}} \le \hat{\mathbf{Y}}\right) = 1$.

□

Πρόταση 4.10
Έστω **X** και **Y** δύο τυχαία διανύσματα, αν ισχύει:

$$X_1 \prec_{ST} Y_1$$

και για $i = 2,3,.....,n$

$$\left[X_i \mid X_1 = x_1,....,X_{i-1} = x_{i-1}\right] \prec_{ST} \left[Y_i \mid Y_1 = y_1....,Y_{i-1} = y_{i-1}\right]$$

όταν $x_j \le y_j$ για κάθε $j = 1,....,i-1$, τότε $\mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Y}$.

□

Πρόταση 4.11
Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ με τις ίδιες περιθώριες κατανομές. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Y}$, τότε:

$$\mathbf{X} =_{ST} \mathbf{Y}$$

□

<u>Εφαρμογή 2:</u> Έστω ότι $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, όπου οι τ.μ. $X_1, X_2 Y_1, Y_2$ παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\}$ και παράλληλα για τα διανύσματα **X,Y** ισχύει $\Pr\left(\mathbf{X} = (1,0)\right) = \Pr\left(\mathbf{X} = (0,1)\right) = \frac{1}{2}$ και $\Pr\left(\mathbf{Y} = (0,0)\right) = \Pr\left(\mathbf{Y} = (1,1)\right) = \frac{1}{2}$.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7 θα ισχύει $\mathbf{X} \prec_{lo} \mathbf{Y}$ αν ισχύει $F_{\mathbf{X}}(t) \ge F_{\mathbf{Y}}(t)$ για κάθε $t = (t_1, t_2) \in [0,1] \times [0,1]$ και $\mathbf{X} \prec_{uo} \mathbf{Y}$ αν ισχύει $\overline{F}_{\mathbf{X}}(t) \le \overline{F}_{\mathbf{Y}}(t)$ για κάθε $t = (t_1, t_2) \in [0,1] \times [0,1]$ αντίστοιχα.

Θα ξεχωρίσουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$(x,y)=\begin{cases}(0,\alpha), & 0<\alpha<1\\ (\alpha,0), & 0<\alpha<1\\ (0,1) & \\ (1,0) & \\ (1,\alpha), & 0<\alpha<1\\ (\alpha,1), & 0<\alpha<1\\ (\alpha,\beta), & 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1\end{cases}$$

Για $(x,y)=(0,\alpha),\quad 0<\alpha<1$, θα έχουμε:

$$F_{\mathrm{X}}(0,\alpha)=\Pr\left(X_1\le 0,X_2\le\alpha\right)=\Pr\left(X_1=0,X_2=0\right)=0$$
$$F_{\mathrm{Y}}(0,\alpha)=\Pr\left(\mathrm{Y}_1\le 0,\mathrm{Y}_2\le\alpha\right)=\Pr\left(\mathrm{Y}_1=0,\mathrm{Y}_2=0\right)=\frac{1}{2}$$

επομένως, $F_{\mathrm{X}}(0,\alpha)<F_{\mathrm{Y}}(0,\alpha)\Rightarrow \mathbf{X}\prec_{lo}\mathbf{Y}$. Επίσης,

$$\overline{F_{\mathrm{X}}}(0,\alpha)=\Pr\left(X_1>0,X_2>\alpha\right)=\Pr\left(X_1=1,X_2=1\right)=0$$
$$\overline{F_{\mathrm{Y}}}(0,\alpha)=\Pr\left(Y_1>0,Y_2>\alpha\right)=\Pr\left(Y_1=1,Y_2=1\right)=\frac{1}{2}$$

επομένως $\overline{F_{\mathrm{X}}}(0,\alpha)<\overline{F_{\mathrm{Y}}}(0,\alpha)\Rightarrow \mathbf{X}\prec_{uo}\mathbf{Y}$. Ομοίως για $(x,y)=(\alpha,0)$.

Για $(x,y)=(0,1)$, θα έχουμε:

$$F_{\mathrm{X}}(0,1)=\Pr\left(X_1\le 0,X_2\le 1\right)=\Pr\left(X_1=0,X_2=1\right)=\frac{1}{2}$$
$$F_{\mathrm{Y}}(0,1)=\Pr\left(\mathrm{Y}_1\le 0,\mathrm{Y}_2\le 1\right)=\Pr\left(\mathrm{Y}_1=0,\mathrm{Y}_2=1\right)=0$$

επομένως, $F_Y(0,1)<F_X(0,1)\Rightarrow \mathbf{Y}\prec_{lo}\mathbf{X}$. Επίσης,

$$\overline{F_{\mathrm{X}}}(0,1)=\Pr\left(X_1>0,X_2>1\right)=\Pr\left(X_1=1,X_2=0\right)=\frac{1}{2}$$
$$\overline{F_Y}(0,1)=\Pr\left(Y_1>0,Y_2>1\right)=\Pr\left(Y_1=1,Y_2=0\right)=0$$

επομένως, $\overline{F_Y}(0,1)<\overline{F_X}(0,1)\Rightarrow \mathbf{Y}\prec_{uo}\mathbf{X}$. Ομοίως για $(x,y)=(1,0)$.

Τέλος δίνοντας τυχαίες τιμές στα α και β , έστω $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, θα έχουμε:

$$F_X\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(X_1\le\frac{1}{2},X_2\le\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(X_1=0,X_2=0\right)=0$$
$$F_Y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(Y_1\le\frac{1}{2},Y_2\le\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(Y_1=0,Y_2=0\right)=\frac{1}{2}$$

Επομένως είναι φανερό ότι $F_X\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<F_Y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, άρα θα ισχύει: $\mathbf{X}\prec_{lo}\mathbf{Y}$

Επιπλέον,

$$\overline{F}_X\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(X_1>\frac{1}{2},X_2>\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(X_1=1,X_2=1\right)=0$$
$$\overline{F}_Y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(Y_1>\frac{1}{2},Y_2>\frac{1}{2}\right)=\Pr\left(Y_1=1,Y_2=1\right)=\frac{1}{2}$$

Επομένως είναι φανερό ότι $\overline{F}_X\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<\overline{F}_Y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, άρα θα ισχύει $\mathbf{X}\prec_{uo}\mathbf{Y}$.

Μέσα από την εφαρμογή αυτή φαίνεται πως είναι εφικτό να ισχύει $\mathbf{X}\prec_{uo}\mathbf{Y}$ και $\mathbf{X}\prec_{lo}\mathbf{Y}$ αλλά όχι $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$, δηλαδή δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 4.8. Πιο συγκεκριμένα αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$ για τα παραπάνω τυχαία διανύσματα, τότε εφ'όσον τα $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ έχουν τις ίδιες περιθώριες κατανομές. Από την Πρόταση 3.11 θα έπρεπε να έχουμε: $\mathbf{X}=_{ST}\mathbf{Y}$, δηλαδή τα $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ να έχουν την ίδια κατανομή, κάτι που δεν ισχύει.

□

Πρόταση 4.12
Αν για τα δύο τυχαία διανύσματα **X,Y** ισχύει $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$ και η $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση, τότε:

$$g(X)\le g(Y)$$

□

Ορισμός 4.13
Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ και $\mathbf{Y}=\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)$, τότε θα ισχύει:

a) $\mathbf{X}\prec_{UO}\mathbf{Y}$, αν και μόνο αν:

$$E(\prod_{i=1}^{n}f_i(X_i))\le E(\prod_{i=1}^{n}f_i(Y_i))$$

για κάθε μη-αρνητικές αύξουσες συνάρτησεις $f_1,\ldots,f_n$.

b) $\mathbf{X} \prec_{lo} \mathbf{Y}$, αν και μόνο αν:

$$E(-\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)) \le E(-\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i))$$

για κάθε μη-αρνητικές αύξουσες συνάρτησεις $f_1,\ldots,f_n$.

□

4.3.2 Διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας

Οι διατάξεις ανακοπής ζημίας καθώς και οι κυρτές διατάξεις, εκτός από την περίπτωση της μία μόνο μεταβλητής επεκτείνονται και στην πολυμεταβλητή θεωρία στοχαστικών διατάξεων. Παραθέτουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Ορισμός 4.14
Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ και $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$ με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε:

i. Το διάνυσμα **X** είναι μικρότερο από το **Y** ως προς την στοχαστική διάταξη της ανακοπής ζημίας, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{SL} \mathbf{Y}$ αν $E\left(f(\mathbf{X})\right) \le E\left(f(\mathbf{Y})\right)$ για κάθε αύξουσα και κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για την οποία οι μέσες τιμές των διανυσμάτων είναι πεπερασμένες.

ii. Το διάνυσμα **X** είναι μικρότερο από το **Y** ως προς τη στοχαστική διάταξη κυρτότητας, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{SL=} \mathbf{Y}$ αν $E\left(f(\mathbf{X})\right) \le E\left(f(\mathbf{Y})\right)$ για κάθε κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για την οποία οι μέσες τιμές των διανυσμάτων είναι πεπερασμένες.

□

Πρόταση 4.15

i. Ισχύει $\mathbf{X} \prec_{SL} \mathbf{Y}$ αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαία διανύσματα $\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}}$ με $\hat{\mathbf{X}} =_{ST} \mathbf{X}$ και $\hat{\mathbf{Y}} =_{ST} \mathbf{Y}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{Y}}|\hat{\mathbf{X}}\right] = \hat{\mathbf{X}}$.

ii. Ισχύει $\mathbf{X} \prec_{SL=} \mathbf{Y}$ αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαία διανύσματα $\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}}$ με $\hat{\mathbf{X}} =_{ST} \mathbf{X}$ και $\hat{\mathbf{Y}} =_{ST} \mathbf{Y}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{Y}}|\hat{\mathbf{X}}\right] \ge \hat{\mathbf{X}}$.

□

Σαν συνέπεια της Πρότασης 4.15, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.16

Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{SL} \mathbf{Y}$, τότε υπάρχει ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Z}$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Z} \prec_{SL} \mathbf{Y}.$$

Θα δοθεί η απόδειξη της Πρότασης 4.16 σύμφωνα με τους Muller και Stoyan (2002).

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\mathbf{X} \prec_{SL=} \mathbf{Y}$, τότε με βάση την Πρόταση 4.21(ii) υπάρχουν τυχαία διανύσματα $\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}}$ με $\hat{\mathbf{X}} =_{ST} \mathbf{X}$ και $\hat{\mathbf{Y}} =_{ST} \mathbf{Y}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{Y}}|\hat{\mathbf{X}}\right] \geq \hat{\mathbf{X}}$. Επίσης θα ορίσουμε ως $\mathbf{Z}=\mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{Y}}|\hat{\mathbf{X}}\right]$, επομένως $\mathbf{Z} \geq \hat{\mathbf{X}}$ και σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.20(i) και την Παρατήρηση 4.9(vi) καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.1, η συμμονοτονία αποτελεί την πιο ισχυρή ένδειξη θετικής εξάρτησης και το γεγονός αυτό μπορεί να συνδεθεί με τις διατάξεις ανακοπής ζημίας, έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.17

Έστω τα τυχαία συμμονοτονικά διανύσματα $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ και $\mathbf{Y} = \left(Y_1,\ldots,Y_h\right)$. Αν ισχύει $X_i \prec_{SL} Y_i$ για κάθε $i = 1,2,\ldots..,n$ τότε $E\left(f(\mathbf{X})\right) \leq E\left(f(\mathbf{Y})\right)$.

□

Μία συνάρτηση $f: R^k \to R$ ονομάζεται *supermodular* αν ισχύει:

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y)$$

για όλα τα $x, y \in R^k$, όπου $x \vee y$ είναι το μέγιστο ως προς τις συνιστώσες (componentwise maximum) και $x \wedge y$ είναι το ελάχιστο ως προς τις συνιστώσες (componentwise minimum) αντίστοιχα. Δηλαδή, ισχύει:

$$x \wedge y = \left(\min\left\{x_1, y_1\right\},\ldots..,\min\left\{x_n, y_n\right\}\right)$$

και

$$x \vee y = \left(\max\left\{x_1, y_1\right\},\ldots..,\max\left\{x_n, y_n\right\}\right).$$

Οι πολυμεταβλητές απλές στοχαστικές διατάξεις, συνδέονται άμεσα με τις διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας. Ο τρόπος με τον οποίο αυτές σχετίζονται παρουσιάζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.18

Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ και $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$, αν ισχύει $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$ τότε:

$$\Psi(\mathbf{X})\prec_{ST}\Psi(\mathbf{Y})$$

για κάθε supermodular συνάρτηση $\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

□

<u>Εφαρμογή 3:</u> Στο ατομικό μοντέλο στη θεωρία των κινδύνων, οι συνολικές ζημιές ενός χαρτοφυλακίου σε μία ασφαλιστική περίοδο (συνήθως 1 έτος) από n-συμβόλαια (ή κινδύνους), παρίστανται από την τ.μ. S, όπου:

$$S=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

όπου X_i είναι το μέγεθος της ζημιάς του i-συμβολαίου, $i=1,2,\ldots,n$. Θα θεωρήσουμε δύο χαρτοφυλάκια τα οποία περιγράφονται από το ατομικό μοντέλο μέσω των διανυσμάτων $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.19, αν ισχύει $\mathbf{X}\prec_{ST}\mathbf{Y}$ τότε θα ισχύει και:

$$\mathbf{X}\prec_{SL,=}\mathbf{Y}.$$

□

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται αποτελέσματα τα οποία συνδέουν την κανονική κατανομή και τις πολυμεταβλητές στοχαστικές διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας.

Θεώρημα 4.19

Έστω $\mathbf{X}\sim N(\mu,\sigma)$ και $\mathbf{Y}\sim N(\mu^*,\sigma^*)$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- $\mathbf{X}\prec_{SL}\mathbf{Y}$.
- $\mu=\mu^*$ και $\sigma^*-\sigma>0$.

□

4.3.3 Διατάξεις ανακοπής ζημίας και κυρτότητας ως προς τις συνιστώσες

Υπάρχει μία πιο ισχυρή διάταξη από την διάταξη ανακοπής ζημίας όταν $E(f(\mathbf{X}))\le E(f(\mathbf{Y}))$ για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή ως προς τις συνιστώσες της (componentwise). Για παράδειγμα, η συνάρτηση f μπορεί να είναι κυρτή σε κάθε ορισμά της ξεχωριστά διατηρώντας σταθερά τα υπόλοιπα ορίσματά της. Η πολυμεταβλητή αυτή διάταξη εισήχθηκε από τον Mosler το 1982, όπως αναφέρεται στο βιβλίο των Denuit et al (2005).

Ακολουθεί ο ορισμός μίας συνάρτησης f η οποία είναι κυρτή ως προς τις συνιστώσες της.

Ορισμός 4.20
Αν η f είναι δύο φορές διαφορίσιμη, τότε είναι κυρτή ως προς τις συνιστώσες της αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) \geq 0 \text{ για κάθε x και } i = 1,2,\ldots\ldots,n.$$

□

Κάθε κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή και ως προς τις συνιστώσες της αλλά υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες είναι κυρτές και ως προς τις συνιστώσες τους αλλά όχι κυρτές.

Ορισμός 4.21
Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, τότε:

i. Το διάνυσμα **X** είναι μικρότερο από το **Y** ως προς την στοχαστική διάταξη της ανακοπής ζημίας ως προς τις συνιστώσες, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{ccx} \mathbf{Y}$, αν $E\left(f(\mathbf{X})\right) \leq E\left(f(\mathbf{Y})\right)$ για κάθε κυρτή ως προς τις συνιστώσες συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για την οποία οι μέσες τιμές των διανυσμάτων είναι πεπερασμένες.

ii. Το διάνυσμα **X** είναι μικρότερο από το **Y** ως προς την κυρτή στοχαστική διάταξη ως προς τις συνιστώσες, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{iccx} \mathbf{Y}$,αν $E\left(f(\mathbf{X})\right) \leq E\left(f(\mathbf{Y})\right)$ για κάθε αύξουσα και κυρτή ως προς τις συνιστώσες συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για την οποία οι μέσες τιμές των διανυσμάτων είναι πεπερασμένες.

□

Πρόταση 4.22
Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, τότε:

i. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{ccx} \mathbf{Y}$, τότε $\mathbf{X} \prec_{SL} \mathbf{Y}$.
ii. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{iccx} \mathbf{Y}$, τότε $\mathbf{X} \prec_{SL=} \mathbf{Y}$.
iii. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{ccx} \mathbf{Y}$, τότε $\mathbf{X}_i \prec_{SL} \mathbf{Y}_i$.
iv. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{ccx} \mathbf{Y}$, τότε $Cov\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j\right) = Cov\left(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j\right)$ για κάθε $1 \leq i < j \leq n$.

□

4.3.4 Διατάξεις μεγίστης πιθανοφάνειας

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κανείς τις πολυμεταβλητές διατάξεις μεγίστης πιθανοφάνειας, αυτός που έχει επικρατήσει όμως είναι ο αύξων λόγος των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας, ο οποίος διατυπώνεται παρακάτω.

Ορισμός 4.23
Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}$ είναι μεγαλύτερο από το $\mathbf{X}$ ως προς την ασθενή διάταξη μεγίστης πιθανοφάνειας, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_r \mathbf{Y}$ αν τα $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ έχουν συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας κάτω από ένα μέτρο μ για τις οποίες ισχύει:

$$f_{\mathrm{X}}(t) f_{\mathrm{Y}}(s) \leq f_{\mathrm{X}}(s) f_{\mathrm{Y}}(t), \qquad \forall s \leq t$$

□

Εκτός από τον Ορισμό 4.23, υπάρχει ένας ακόμα πιο ισχυρός ορισμός για τις διατάξεις μεγίστης πιθανοφάνειας ο οποίος παρατίθεται παρακάτω.

Ορισμός 4.24
Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}$ είναι μεγαλύτερο από το $\mathbf{X}$ ως προς την ισχυρή διάταξη μεγίστης πιθανοφάνειας, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{tp} \mathbf{Y}$, αν τα $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ έχουν συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας κάτω από ένα μέτρο $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ για τις οποίες ισχύει:

$$f_{\mathrm{X}}(s) f_{\mathrm{Y}}(t) \leq f_{\mathrm{X}}(s \wedge t) f_{\mathrm{Y}}(s \vee t), \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}^n.$$

□

Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιείται μόνο ο Ορισμός 4.23 προκειμένου να ορίσει κάποιος τις πολυμεταβλητές διατάξεις μεγίστης πιθανοφάνειας και συμβολίζεται ως $\prec_{lr}$. Στην παρούσα εργασία δεν θα χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός αυτός, αλλά ο συμβολισμός $\prec_{tp}$ όπως δόθηκε στον Ορισμό 4.24 προκειμένου να αποφευχθεί σύγχυση.

Το κύριο μειονέκτημα του ασθενή ορισμού $\prec_r$ των πολυμεταβλητών διατάξεων μεγίστης πιθανοφάνειας, είναι ότι σε σχέση με τον ισχυρό ορισμό $\prec_{tp}$ δεν συνεπάγεται η απλή στοχαστική διάταξη $\prec_{ST}$ όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα.

Η παρακάτω εφαρμογή έχει δωθεί από τον Whitt και αναφέρεται στο βιβλίο των Denuit et al. (2005).

<u>Εφαρμογή 4:</u> Έστω τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ ορισμένα στο $\{0,1\}^2$ με $\Pr(\mathbf{X}=(0,0))=0.1$ και

$$\Pr(\mathbf{X}=(0,1))=\Pr(\mathbf{X}=(1,0))=\Pr(\mathbf{X}=(1,1))=0.3$$
$$\Pr(\mathbf{Y}=(0,0))=0.01, \quad \Pr(\mathbf{Y}=(1,0))=0.09$$

και

$$\Pr(\mathbf{Y}=(0,1))=\Pr(\mathbf{Y}=(1,1))=0.45$$

τότε, $\mathbf{X} \prec_{r} \mathbf{Y}$ για το σύνολο $A=\{(x_1,x_2):x_1 \geq 1\}$

και

$$\Pr(\mathbf{X}\in A)=0.6>0.54=\Pr(\mathbf{Y}\in A)$$

συμπεραίνοντας πως δεν ισχύει $\mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Y}$.

□

4.3.5 Διατάξεις βαθμίδας κινδύνου

Οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου βρίσκουν και εκείνες με τη σειρά τους εφαρμογή στην περίπτωση όπου υπάρχουν πολλές μεταβλητές.
Έστω $\mathbf{X}$ ένα μη-αρνητικό τυχαίο διάνυσμα έχοντας σ.π.π και έστω τα X_i μπορεί να παριστάνουν τυχαίους χρόνους ζωής. Για θετικό t η βαθμίδα κινδύνου εξαρτάται από εκείνα τα στοιχεία, X_i με $i \in I$, του $\mathbf{X}$ τα οποία έχουν αποτύχει μέχρι την χρονική στιγμή t και εκείνα που έχουν επιβιώσει , X_i με $i \in I^c$. Το I είναι ένα υποσύνολο του $\{1,......,n\}$ από στοιχεία που έχουν αποτύχει και το I^c το συμπλήρωμά του.

Η βαθμίδα κινδύνου του διανύσματος $\mathbf{X}$, για το στοιχείο k τη χρονική στιγμή t δεδομένου ότι τα στοιχεία στο I έχουν αποτύχει τις στιγμές x_I και τα στοιχεία του I^c έχουν επιζήσει το χρόνο t, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$r_{\mathbf{X},k|I}(t \mid x_I)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Pr\left(t<X_k \leq t+\varepsilon \mid \mathbf{X}_I = x_I; \mathbf{X}_{I^c} > t\mathbf{1}\right)$$

όπου **1** είναι ένα διάνυσμα το οποίο περιέχει μόνο τον αριθμό 1 σε όλα τα στοιχεία του, δηλαδή **1=**$(1,.....,1)$.

Ορισμός 4.25
Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}$ είναι μεγαλύτερο από το $\mathbf{X}$ ως προς την ισχυρή διάταξη βαθμίδας κινδύνου, δηλαδή $\mathbf{X} \prec_{HR} \mathbf{Y}$, αν τα $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ έχουν βαθμίδες κινδύνου $r_{\mathbf{X}}$ και $r_{\mathbf{Y}}$ αντίστοιχα, έτσι ώστε:

$$r_{\mathbf{X},k|J}(t \mid x_J) \geq r_{\mathbf{Y},k|I}(t \mid y_I), \qquad \forall k \in J^c$$

για όλα τα θετικά t όπου: $J \supseteq I, \quad 0 \leq x_I \leq y_I \leq t\mathbf{1}$ και $0 \leq x_J \leq t\mathbf{1}$.

□

Τέλος ισχύει η παρακάτω πρόταση η οποία φανερώνει την σχέση κάποιων πολυμεταβλητών στοχαστικών διατάξεων που αναλύθηκαν προηγουμένως.

Πρόταση 4.26
Ισχύει η εξής σχέση:

$$\mathbf{X} \prec_{lr} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \prec_{HR} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \prec_{ST} \mathbf{Y}.$$

□

5
Θεωρία εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών

5.1 Εισαγωγή

Η μελέτη της θετικής εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών ξεκίνησε το 1966 κυρίως από τον E.L. Lehmann, δίνοντας πολύ χρήσιμα αποτελέσματα για μια πληθώρα εφαρμογών στη στατιστική και τα μαθηματικά. Οι εφαρμογές στην αναλογιστική επιστήμη παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού μελετάται η τυχόν εξάρτηση μεταξύ διαφόρων κινδύνων, όπως για παράδειγμα η μεγάλη ή μικρή οικονομική ζημιά (ή κέρδος) ως συνέπεια ενός κινδύνου η οποία είναι πιθανό να συνδέεται με άλλους κινδύνους.
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα και εφαμογές που αφορούν την εξάρτηση τυχαίων μεταβλητών στη θεωρία κινδύνων τόσο για ζεύγη τυχαίων μεταβλητών όσο και στην πολυμεταβλητή περίπτωση (διανύσματα), κάνοντας χρήση βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων των στοχαστικών διατάξεων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και εισάγοντας παράλληλα νέες έννοιες, Η κεντρική ιδέα είναι η μελέτη της πιθανότητας να παίρνει μεγάλες (ή μικρές) τιμές για μικρές ή μεγάλες τιμές αντίστοιχα καθεμίας από τις εξαρτημένες αυτές μεταβλητές (ή διανύσματα) ή και το αντίστροφο. Θα αναλυθούν κάποια μέτρα αρμονίας (concordance measures) καθώς και έννοιες θετικής εξάρτησης. Ακόμα, θα δωθούν κάποιες εφαρμογές από τα χρηματοοικονομικά. Τέλος, θα παρουσιάσουμε άνω και κάτω φράγματα ανακοπής ζημίας (stop loss bounds) για κυρτές συναρτήσεις συσχετισμένων κινδύνων στα ασφαλιστικά μαθηματικά, όπου η μέση τιμή και διασπορά θα είναι γνωστές ποσότητες με βάση τις στοχαστικές διατάξεις .

Τα συγγράματα που έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως για την ανάπτυξη και ανάλυση των παραπάνω εννοιών είναι τα βιβλία των Denuit et al. (2005) και Kass et al. (2009).

5.2 Μέτρα αρμονίας

Αρμονία (concordance) παρατηρείται όταν τα ζευγάρια των τυχαίων μεταβλητών των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεταβάλλονται ταυτόχρονα προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ δυσαρμονία όταν μεταβάλλονται διαφορετικά. Πιο συγκεριμένα, ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 λέγεται αρμονικό όταν το ζευγάρι των παρατήρησεων με τη μεγαλύτερη τιμή για την X_1 έχει ταυτόχρονα και τη μεγαλύτερη τιμή για την X_2. Το ζευγάρι των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 θα λέγεται δυσαρμονικό, όταν το ζευγάρι των παρατηρήσεων με τη μεγαλύτερη τιμή για την X_1 έχει ταυτόχρονα και τη μικρότερη τιμή για την X_2. Επίσης, σύμφωνα με τους Michel Denuit et al. (2005), αν τα ζευγάρια (X_1, X_2) και (X_1^*, X_2^*) είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\Pr(\alpha\rho\mu o\nu\iota\alpha\varsigma) = \Pr\left[\left(X_1 - X_1^*\right)\left(X_2 - X_2^*\right) > 0\right]$$

και

$$\Pr(\delta\upsilon\sigma\alpha\rho\mu o\nu\iota\alpha\varsigma) = \Pr\left[\left(X_1 - X_1^*\right)\left(X_2 - X_2^*\right) < 0\right].$$

Ο Scarsini το 1994 εισήγαγε κάποιες ιδιότητες προκειμένου ένα μέτρο εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών να λέγεται μέτρο αρμονίας.
Η κύρια ιδέα των μέτρων αρμονίας είναι η εξής: δύο μεταβλητές X_1 και X_2 είναι αρμονικές μεταξύ τους, όταν μεγάλες τιμές για την X_1 αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές για την X_2. Η έννοια της αρμονίας είναι πολύ σημαντική για τη διαχείριση κινδύνων σε μεγάλα χαρτοφυλάκια ασφαλιστηρίων συμβολαίων ή χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων. Στα χαρτοφυλάκια αυτά ο κύριος κίνδυνος είναι η ταυτόχρονη εξαγορά των συμβολαίων από τους ασφαλισμένους ή ταυτόχρονη πτώση των τιμών των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων.
Τα μέτρα αρμονίας που θα αναλυθούν στην παράγραφο αυτή είναι οι συντελεστές συσχέτισης των Pearson, Kendall, Spearman, Gini και Blomqvist αντίστοιχα.
Κλείνοντας την παράγραφο αυτή θα παρουσιασθούν κάποιες συνθήκες για τα μέτρα αρμονίας για διμεταβλητά διακριτά δεδομένα.

Ακολουθούν οι ιδιότητες που εισήγαγε ο Scarsini προκειμένου να ισχύει ένα μέτρο αρμονίας.

Ορισμός 5.1
Η διμεταβλητή συνάρτηση $r(\bullet,\bullet)$ η οποία αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό σε κάθε ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2, αποτελεί μέτρο αρμονίας αν πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $r(X_1, X_2) = r(X_2, X_1)$.

ii. $-1 \le r(X_1, X_2) \le 1$.

iii. $r(X_1, X_2) = 1$ αν και μόνο αν οι X_1 και X_2 είναι συμμονοτονικές.

iv. Για κάθε $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αυστηρά μονότονη, τότε:

$$r(h(X_1), X_2) = \begin{cases} r(X_1, X_2), & \alpha\nu\ h' > 0 \\ -r(X_1, X_2), & \alpha\nu\ h' < 0 \end{cases}$$

□

Όπως έχει ήδη αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, η συμμονοτονία είναι ένδειξη ισχυρής θετικής εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών.

5.2.1 Συντελεστής συσχέτισης του Pearson

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson αποτελεί ένα μέτρο γραμμικής εξάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών και χρησιμοποιείται ευρύτατα τόσο στις πιθανότητες όσο και τη στατιστική.

Ορισμός 5.2

Για ένα τυχαίο ζεύγος μεταβλητών (X_1, X_2) με ορισμένες περιθώριες σ.κ. ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson r_P ορίζεται ως:

$$r_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}$$

όπου:

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E\left[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\right] = \\ &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \end{aligned}$$

□

<u>Εφαρμογή 1:</u> Μία ασφαλιστική εταιρεία βγάζει στην αγορά τρία νέα νοσοκομειακά προγράμματα, τα W_1, W_2, W_3. Έστω οι τ.μ. *X,Y,Z* όπου *X* η εισφορά για το W_1, *Y* για το W_2 και *Z=2-X-Y* η εισφορά για το W_3 με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}xy, & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ x + y \le 2 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

τότε για την τ.μ. *X* θα έχουμε

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{2-x}\frac{3}{2}xy\,dy=3x-3x^2+\frac{3}{4}x^3,\quad 0\le x\le 2$$

$$E(X)=\int_0^2 xf_X(x)\,dx=\int_0^2 x\left(3x-3x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{4}{5}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^2 x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^2 x^2\left(3x-3x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{4}{5}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left\{E(X)\right\}^2=\frac{4}{25}$$

Όμοια για την τ.μ. *Y* ισχύει:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{2-y}\frac{3}{2}xy\,dx=3y-3y^2+\frac{3}{4}y^3,\quad 0\le y\le 2$$

$$E(Y)=\int_0^2 xf_Y(x)\,dx=\int_0^2 x\left(3x-3x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{4}{5}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^2 x^2 f_Y(x)\,dx=\int_0^2 x^2\left(3x-3x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{4}{5}$$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-\left\{E(Y)\right\}^2=\frac{4}{25}$$

και

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{2-x}\frac{3}{2}x^2y^2\,dy\,dx=\frac{8}{15}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{8}{15}-\frac{16}{25}=-\frac{8}{75}$$

$$r_P(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=-\frac{2}{3}$$

Για τη συνδιακύμανση και το συντελεστή συσχέτισης των Y,Z παίρνουμε:

$$Cov(Y,Z)=Cov(Y,2-X-Y)=Cov(Y,-X)+Cov(Y,-Y)=$$
$$=-Cov(Y,X)-Var(Y)=-\frac{4}{75}$$

$$r_P(Y,Z)=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{Var(Y)}\sqrt{Var(Z)}}=-\frac{\sqrt{3}\sqrt{26}}{78}$$

Παρόμοια,

$$Cov(X,Z)=Cov(X,2-X-Y)=Cov(X,-X)+Cov(X,-Y)=$$
$$=-Cov(Y,X)-Var(X)=-\frac{4}{75}$$

Για την τ.μ. Z θα έχουμε,

$$Var(Z)=Var(2-X-Y)=Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=$$
$$=\frac{104}{75}$$

επομένως,

$$r_P(X,Z)=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Z)}}=-\frac{\sqrt{3}\sqrt{26}}{78}.$$

□

Για να έχει εφαρμογή ο Ορισμός 5.2, θα πρέπει οι διασπορές των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 να είναι πεπερασμένες. Το γεγονός αυτό αποτελεί βασικό ζήτημα προς εξέταση για τους αναλογιστές των γενικών ασφαλίσεων (non-life actuaries) στη μοντελοποίηση ζημιών με βαριά δεξιά ουρά.

Ένα ακόμα μειονέκτημα του συντελεστή συσχέτισης του Pearson, είναι οτι δεν παραμένει αναλλοίωτος κάτω από αύξουσες και μη-γραμμικές συναρτήσεις t_1 και t_2, δηλαδή γενικά ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$r_P\left(t(X_1),X_2\right)\neq r_P(X_1,X_2).$$

Αν οι συναρτήσεις t_1 και t_2 είναι γραμμικές τότε θα ισχύει:

$$r_P\left(b_1X_1+b_1,b_2X_2+b_2\right)=sign\left(b_1b_2\right)r_P\left(X_1,X_2\right)$$

όπου $b_1,b_2\neq 0$, $b_1,b_2\in\mathbb{R}$ και $sign(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson δεν αποτελεί απαραίτητα ένα ικανοποιητικό μέτρο για τη μελέτη της εξάρτησης δύο τ.μ., όταν η εξάρτηση αυτή δεν είναι γραμμική. Αν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε συνεπάγεται ότι είναι και ασυσχέτιστες αφού $r_P=0$ $\left(Cov(X_1,X_2)=0\right)$ Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συσχέτιση είναι μηδέν αλλά υπάρχει ισχυρή μη γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών.

Εφαρμογή 2: Έστω για την τ.μ. Y ισχύει $\Pr(Y=y)=\frac{1}{2},\ y=0,\frac{\pi}{2}$ και οι τ.μ. X_1 και X_2 ορίζονται από τις σχέσεις: $X_1=\sin Y$ και $X_2=\cos Y$. Για τις τ.μ. X_1 και X_2 θα έχουμε:

$$E(X_1)=E(\sin Y)=\sum_{y=0,\frac{\pi}{2}}\sin(y)\Pr(Y=y)=\frac{1}{2}$$

και

$$E(X_2)=E(\cos Y)=\sum_{y=0,\frac{\pi}{2}}\cos(y)\Pr(Y=y)=\frac{1}{2}$$

Τότε,

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=E(X_1X_2)-\frac{1}{4}=$$

$$=\sum_{x_1=0,\frac{\pi}{2}}\sum_{x_2=0,\frac{\pi}{2}}x_1x_2\Pr(X_1=x_1,X_2=x_2)-\frac{1}{4}=$$

$$=E(X_1)E(X_2)-\frac{1}{4}=0$$

Επομένως οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες, δεν είναι όμως και ανεξάρτητες αφού ισχύει η θεμελιώδης σχέση στην τριγωνομετρία $X_1^2+X_2^2=1$.

□

Εφαρμογή 3: Έστω R_M : η απόδοση της αγοράς *Μ* σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο (ημέρα, μήνας βδομάδα), και R_i : η απόδοση ενός υποκείμενου αξιογράφου-*i* την ίδια χρονική περίοδο. Έστω ότι έχουμε τις παρακάτω αποδόσεις για την αγορά και το συγκεκριμένο αξιόγραφο για 4 περιόδους, θα βρούμε το συντελεστή συσχέτισης του Pearson μεταξύ της αγοράς *Μ* και του υποκείμενου αξιογράφου-*i*.

R_m	Ri
4	8
2	4
2	2
4	2
$E(R_M)$= 3	**$E(R_i)$= 4**

Θα έχουμε,

$$\rho_{i,M}=\frac{Cov(R_i,R_m)}{\sqrt{Var(R_i)}\sqrt{Var(R_m)}},\qquad \text{όπου:}$$

$$Cov(R_i,R_m)=\frac{1}{3}\left[(4-3)(8-4)+(2-3)(4-4)+(2-3)(2-4)+(4-3)(2-4)\right]=$$
$$=\frac{4}{3}$$

$$Var(R_i)=\frac{1}{3}\left[(8-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(2-4)^2\right]=\frac{24}{3}$$

$$Var(R_m)=\frac{1}{3}\left[(4-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2\right]=\frac{4}{3}$$

Επομένως,

$$\rho_{i,M}=\frac{Cov(R_i,R_m)}{\sqrt{Var(R_i)}\sqrt{Var(R_m)}}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{24}{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

□

Στα "παραδοσιακά" οικονομικά μαθηματικά, το επιτόκιο έχει μία δεδομένη τιμή (είναι σταθερό κατά διαστήματα, ή σε όλη την εξεταζόμενη περίοδο). Η υπόθεση αυτή είναι αρκετά λογική εφ'όσον οι μεταβολές των επιτοκίων είναι αρκετά σπάνιες και το μέγεθος των μεταβολών σχετικά μικρό. Τις τελευταίες δεκαετίες όμως, τα επιτόκια εμφανίζουν μεγάλη πτητικότητα, με αποτέλεσμα οι μεταβολές αυτές να έχουν στοχαστικό χαρακτήρα κάνοντας επιτακτική την ανάγκη μελέτης του επιτοκίου ως τυχαία μεταβλητή. Περισσότερα σχετικά με τα στοχαστικά επιτόκια μπορεί να βρει κάποιος στον Kellison (1991).

Έστω η τ.μ. *I:* επιτόκιο της εξεταζόμενης περιόδου, και *V:* ο συντελεστής προεξόφλησης ως τ.μ.. Από τα οικονομικά μαθηματικά, ισχύει:
$V=\dfrac{1}{1+I}$. Επίσης, όταν το επιτόκιο αποτελεί τ.μ., μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι ποσότητες $(1+I)^t$ και V^t (συσσωρευμένη αξία και παρούσα αξία αντίστοιχα).

<u>Εφαρμογή 4:</u> Θα υποθέσουμε ότι το επιτόκιο είναι μία τ.μ. που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους 0.05 και 0.15, δηλαδή:

$I\sim Uni(0.05,0.15)$, τότε $f_I(i)=10$ όπου $0.05\le i\le 0{,}15$.

Θα μελετήσουμε τον συντελεστή του Pearson μεταξύ των μεταβλητών $1+I$ και V.

Για την πυκνότητα της τ.μ. V θα ισχύει,

$$F_V(u)=\Pr(V\le u)=\Pr\left(\frac{1}{1+I}\le u\right)=\Pr\left(\frac{1}{u}\le 1+I\right)=$$
$$=\Pr\left(I\ge\frac{1}{u}-1\right)=1-\Pr\left(I\le\frac{1}{u}-1\right)=$$
$$=1-F_I\left(\frac{1}{u}-1\right)$$

$$f_V(u)=\frac{d\left(1-F_I\left(\frac{1}{u}-1\right)\right)}{du}=\frac{10}{u^2},\qquad \frac{1}{1.15}\le u\le\frac{1}{1.05}$$

Από τον Ορισμό 5.2 θα έχουμε,

$$\rho_{1+I,V}=\frac{Cov(1+I,V)}{\sqrt{Var(1+I)}\sqrt{Var(V)}},\qquad \text{όπου:}$$

$$Cov(1+I,V)=E\big((1+I)V\big)-E(1+I)E(V)=1-E(1+I)E\left(\frac{1}{1+I}\right)$$

$$E(1+I)=1+E(I)=1.1$$
$$E(V)=E\left(\frac{1}{1+I}\right)=\int_{0.05}^{0.15}10\frac{1}{1+i}di=0.90971778$$

άρα,

$$Cov(1+I,V)=1-(1.1)(0.90971778)=-0.00068956$$

$$\sqrt{Var(1+I)}=\sqrt{Var(I)}=\sqrt{\frac{(0.15-0.05)^2}{12}}=0.028867513$$

και

$$E(V^2)=\int_{0.05}^{0.15}10\frac{1}{(1+i)^2}di=10\left(\frac{1}{1.05}-\frac{1}{1.15}\right)=0.82815735$$
$$\sqrt{Var(V)}=\sqrt{E(V^2)-\{E(V)\}^2}=0.02389374$$

επομένως,

$$\rho_{1+I,V}=-\frac{0.00068956}{(0.023897374)(0.028867513)}=-0.99957,$$

καταλήγοντας ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι σχεδόν τέλεια αρνητικά συσχετισμένες μεταξύ τους, γεγονός απολύτως φυσιολογικό.

□

Όπως διατυπώθηκε στον Ορισμό 5.1(ii) για τον συντελεστή συσχέτισης του Pearson θα ισχύει $-1 \le r_P\left(X_1, X_2\right) \le 1$. Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο ορίζει ένα πιο στενό διάστημα από το [-1,1] για το συντελεστή συσχέτισης του Pearson το οποίο εξαρτάται από τις περιθώριες κατανομές F_1, F_2 των τ.μ. X_1 και X_2 αντίστοιχα.

Πρόταση 5.3
Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2\right)$ ορισμένο στο $\Re_2^+\left(F_1, F_2\right)$ θα ισχύει,

$$r_P^{\min}\left(F_1, F_2\right) \le r_P\left(X_1, X_2\right) \le r_P^{\max}\left(F_1, F_2\right)$$

όπου για $U \sim Uni(0,1)$,

$$r_P^{\min}\left(F_1, F_2\right) = \frac{Cov\left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right)}{\sqrt{Var\left(X_1\right) Var\left(X_2\right)}}$$

και

$$r_P^{\max}\left(F_1, F_2\right) = \frac{Cov\left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right)}{\sqrt{Var\left(X_1\right) Var\left(X_2\right)}}$$

□

5.2.2 Συντελεστής συσχέτισης τάξης του Kendall

Σε γενικές γραμμές η συνδιακύμανση (covariance) δεν φανερώνει όλη την πληροφορία για τη δομή της εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών. Θα πρέπει να ληφθούν υπ'όψιν και άλλα μέτρα εξάρτησης όπως είναι οι συσχετίσεις τάξης (rank correlations). Ο συντελεστής συσχέτισης βαθμού (ή τάξης) του Kendall είναι ένα μη παραμετρικό μέτρο εξάρτησης το οποίο στηρίζεται στον αριθμό των αρμονιών και δυσαρμονιών μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών σε ένα δείγμα. Έχοντας ορίσει τις έννοιες αρμονίας και δυσαρμονίας, ακολουθεί ο παρακάτω ορισμός για το συντελεστή συσχέτισης τάξης του Kendall.

Ορισμός 5.4
Ο συντελεστής συσχέτισης τάξης του Kendall για ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών $\left(X_1, X_2\right)$ ορίζεται ως

$$r_K(X_1,X_2)=\Pr(αρμονιας)-\Pr(δυσαρμονιας).$$

□

Αν οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι συνεχείς τότε,

$$r_K(X_1,X_2)=2\Pr\left[(X_1-X_1^{'})(X_2-X_2^{'})>0\right]-1.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης βαθμού του Kendall έχει μία σημαντική ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία αν οι συναρτήσεις t_1 και t_2 είναι μη-φθίνουσες και συνεχείς τότε θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$r_K\left(t_1(X_1),t_2(X_2)\right)=r_K(X_1,X_2).$$

Αν οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, τότε $r_K(X_1,X_2)=0$. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται εύκολα αφού:

$$\begin{aligned}r_K(X_1,X_2)&=2\Pr\left[(X_1-X_1^{'})(X_2-X_2^{'})>0\right]-1=\\&=2\left\{\Pr\left(X_1-X_1^{'}>0,X_2-X_2^{'}>0\right)+\Pr\left(X_1-X_1^{'}<0,X_2-X_2^{'}<0\right)\right\}-1=\\&=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-1=0\end{aligned}$$

Όπως διατυπώθηκε στον Ορισμό 5.1(ii) για τον συντελεστή συσχέτισης βαθμού του Kendall θα ισχύει $-1\le r_K(X_1,X_2)\le 1$. Η μέγιστη τιμή 1 παρουσιάζεται όταν $X_2=t(X_1)$ για κάποια αύξουσα συνάρτηση *t* δηλαδή:

$$r_K\left(X_1,t(X_1)\right)=2\Pr\left[(X_1-X_1^{'})\left(t(X_1)-t(X_1^{'})\right)>0\right]-1=1.$$

Ομοίως, η ελάχιστη τιμή -1 παρουσιάζεται όταν $X_2=t(X_1)$ για κάποια φθίνουσα συνάρτηση *t*.

5.2.3 Συντελεστής συσχέτισης τάξης του Spearman

Ο συντελεστής συσχέτισης τάξης του Spearman για ένα τυχαίο ζεύγος συνεχών τ.μ. X_1 και X_2 ορίζεται σαν το συντελεστή συσχέτισης του Pearson για τα $F_1(X_1),F_2(X_2)$.

Ορισμός 5.5
Ο συντελεστής συσχέτισης βαθμού του Spearman για ένα τυχαίο ζεύγος συνεχών τ.μ. X_1 και X_2 ορίζεται ως:

$$r_S\left(X_1,X_2\right)=r_P\left(F_1(X_1),F_2(X_2)\right).$$

□

Ο συντελεστής συσχέτισης βαθμού του Spearman μπορεί και να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}r_S\left(X_1,X_2\right)&=3\Pr\left[\left(X_1-X_1^*\right)\left(X_2-X_2^*\right)>0\right]-1=\\&=3\left\{\Pr\left[\left(X_1-X_1^*\right)\left(X_2-X_2^*\right)>0\right]-\Pr\left[\left(X_1-X_1^*\right)\left(X_2-X_2^*\right)<0\right]\right\}\end{aligned}$$

όπου τα ζευγάρια $\left(X_1,X_2\right)$ και $\left(X_1^*,X_2^*\right)$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα με ανεξάρτητα στοιχεία καθώς και $X_1=_d X_1^*$, $X_2=_d X_2^*$.

Αντίστοιχα όπως και για το r_K, ο συντελεστής r_S παραμένει αναλλοίωτος κάτω από αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις t_1 και t_2, δηλαδή:

$$r_S\left(t_1\left(X_1\right),t_2\left(X_2\right)\right)=r_S\left(X_1,X_2\right).$$

Επίσης, αν οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, τότε $r_S\left(X_1,X_2\right)=0$.

Οι τιμές των r_S και r_K διαφέρουν μεταξύ τους. Η παρακάτω πρόταση δείχνει πως συνδέονται αυτοί οι δύο συντελεστές.

Πρόταση 5.6
Ισχύει:

$$\frac{3r_K-1}{2}\le r_S\le\frac{1+2r_K-r_K^2}{2},\quad \text{για } r_K\ge 0$$

και

$$\frac{r_K^2+2r_K-1}{2}\le r_S\le\frac{1+3r_K}{2},\quad \text{για } r_K\le 0.$$

□

5.3 Έννοιες θετικής εξάρτησης

Όταν τα παραπάνω μέτρα αρμονίας που αναλύθηκαν παίρνουν θετικές τιμές, τότε υπάρχει ένδειξη για θετική εξάρτηση μεταξύ των τ.μ. X_1 και X_2. Η θετική εξάρτηση μελετήθηκε εκτενώς αρχικά από τους Kimeldorf το 1987 και Sampson το 1989 και αργότερα από τους Pellerey και Semeraro το 2003. Στην ενότητα αυτή θα δοθούν οι έννοιες της θετικής τεταρτημοριακής εξάρτησης (Positive Quadrant Dependence, PQD), της θετικής εξάρτησης ανακοπής ζημίας (Positive Stop-Loss Dependence, PSLD), και τόσο της αθροιστικής εξάρτησης (Cumulative Dependence, CD) όσο και της orthant εξάρτησης για *n*-κινδύνους.

5.3.1 Θετική τεταρτημοριακή εξάρτηση

Ορισμός 5.7
Το τυχαίο ζευγάρι $\mathbf{X}=(X_1,X_2)$ έχει θετική τεταρτημοριακή εξάρτηση *(PQD)* αν ισχύει:

$$X_1 \prec_{ST} \left(X_1 / X_2 > x_2\right), \quad \forall x_2 \quad \text{έτσι ώστε } \overline{F}_2(x_2)>0$$

και

$$X_2 \prec_{ST} \left(X_2 / X_1 > x_1\right), \quad \forall x_1 \quad \text{έτσι ώστε } \overline{F}_1(x_1)>0 .$$

□

Πρόταση 5.8
Έστω το διάνυσμα $\mathbf{X}=(X_1,X_2)$ ορισμένο στο $\Re_2^+(F_1,F_2)$, τότε το ***X*** είναι *PQD* αν και μόνο αν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω συνθήκες:

i. $\overline{F}_{\mathrm{X}}(x_1,x_2) > \overline{F}_1(x_1)\overline{F}_2(x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.
ii. $F_{\mathrm{X}}(x_1,x_2) > F_1(x_1)F_2(x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.
iii. $\Pr\left[X_1 > x_1 \mid X_2 > x_2\right] > \overline{F}_1(x_1) \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overline{F}_2(x_2)>0$.
iv. $\Pr\left[X_2 > x_2 \mid X_1 > x_1\right] > \overline{F}_2(x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overline{F}_1(x_1)>0$.

□

Από την Πρόταση 5.8 συμπεραίνεται πως όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι θετικά τεταρτημοριακά εξαρτημένες μεταξύ τους, τότε οι τιμές τους μεγαλώνουν ή μικραίνουν ταυτόχρονα. Επίσης μέσω της πρότασης αυτής δίνεται και το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\min\left\{X_1^*,X_2^*\right\} \prec_{ST} \min\left\{X_1,X_2\right\} \text{ και } \max\left\{X_1,X_2\right\} \prec_{ST} \max\left\{X_1^*,X_2^*\right\}$$

όπου το ζευγάρι $\left(X_1^*, X_2^*\right)$ είναι μία ανεξάρτητη εικόνα του $\left(X_1, X_2\right)$, δηλαδή $X_1 =_d X_1^*$ και $X_2 =_d X_2^*$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
Η σχέση (1) δείχνει τη χρησιμότητα της θετικά τεταρτημοριακής εξάρτησης για μεγάλο πλήθος εφαρμογών, αφού μπορούν να βρεθούν φράγματα για τους *PQD* κινδύνους.

<u>Εφαρμογή 5:</u> Αρχικά ας θεωρήσουμε μία ομάδα *m*-ατόμων και θα συμβολίσουμε με x_i, $1 \le i \le m$, την ηλικία του *i*-ατόμου. Με το συμβολισμό $w = x_1 x_2 .....x_m$ ορίζουμε μία κατάσταση από κοινού ζωής η οποία επιβιώνει όσο καιρό επιβιώνουν όλα τα άτομα της ομάδας και πεθαίνει όταν τουλάχιστον ένα άτομο της ομάδας πεθάνει. Ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατάστασης *w*, $T(w)$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$T(w) = T(x_1 x_2 .....x_m) = \min\left\{T(x_1), T(x_2) ....., T(x_m)\right\}$$

Επίσης. με το συμβολισμό $z = \overline{x_1 x_2 .....x_m}$ ορίζουμε μία κατάσταση ζωής του τελευταίου επιζώντος, η οποία επιβιώνει όσο καιρό επιβιώνει τουλάχιστον ένα άτομο της ομάδας και πεθαίνει όταν πεθάνει και το τελευαταίο άτομο της ομάδας. Ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατάστασης *z*, $T(z)$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$T(z) = T\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right) = \max\left\{T(x_1), T(x_2) ....., T(x_m)\right\}$$

Έστω ότι το διάνυσμα $\mathbf{T} = \left(T(x_1), T(x_2) ....., T(x_m)\right)$ είναι *PQD.* Ακόμα, έστω ότι ισχύει

$$T^*(x_1 x_2 .....x_m) = \min\left\{T^*(x_1), T^*(x_2), ..., T^*(x_m)\right\}$$

και

$$T^*\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right) = \max\left\{T^*(x_1), T^*(x_2), ..., T^*(x_m)\right\}$$

Τότε θα έχουμε ότι:

$$T\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right) \prec_{ST} T^*\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right)$$

και

$$T^*(x_1 x_2 .....x_m) \prec_{ST} T(x_1 x_2 .....x_m)$$

Επίσης, για το ετήσιο καθαρό ασφάλιστρο θα ισχύει:

$$\ddot{\alpha}^*(x_1 x_2 .....x_m) \le \ddot{\alpha}(x_1 x_2 .....x_m)$$

και

$$\ddot{\alpha}\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right) \le \ddot{\alpha}^*\left(\overline{x_1 x_2 .....x_m}\right).$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τους υπολοιπόμενους χρόνους ζωής οι οποίοι είναι *PQD*, η υπόθεση της ανεξαρτησίας οδηγεί σε υποεκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου για την κατάσταση της από κοινού ζωής *w* και το αντίστροφο αποτέλεσμα για την κατάσταση ζωής του τελευταίου επιζώντος *z*. Περισσότερα αποτελέσματα σχετικά με αυτή την εφαρμογή μπορεί να βρει κάποιος στους Dhaene, Vanneste και Wolthuis (2000).

□

Πρόταση 5.9

Αν το διάνυσμα $\mathbf{X}=\left(X_1,X_2\right)$ είναι *PQD* τότε και το $\mathbf{Z}=\left(t_1\left(X_1\right),t_2\left(X_2\right)\right)$ θα είναι *PQD* για τις κάθε μη-φθίνουσες και συνεχείς συναρτήσεις t_1 και t_2.

<u>Απόδειξη:</u> Θα δωθεί η απόδειξη της Πρότασης 5.9 σύμφωνα με τους Denuit et al (2005).

$$\begin{aligned}\Pr\left[t_1\left(X_1\right)\le x_1,t_2\left(X_2\right)\le x_2\right]&=\Pr\left[X_1\le t_1^{-1}\left(x_1\right),X_2\le t_2^{-1}\left(x_2\right)\right]\ge\\&\ge\Pr\left[X_1\le t_1^{-1}\left(x_1\right)\right]\Pr\left[X_2\le t_2^{-1}\left(x_2\right)\right]=\\&=\Pr\left[t_1\left(X_1\right)\le x_1\right]\Pr\left[t_2\left(X_2\right)\le x_2\right]\end{aligned}$$

όπου καταλήγουμε στο ζητούμενο.

□

Οι κίνδυνοι οι οποίοι είναι θετικά τεταρτημοριακά εξαρτημένοι μεταξύ τους, είναι και θετικά συσχετισμένοι. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.10

Αν το διάνυσμα $\mathbf{X}=\left(X_1,X_2\right)$ είναι *PQD*, τότε:

$$r_P\left(X_1,X_2\right)>0$$
$$r_K\left(X_1,X_2\right)>0$$
$$r_S\left(X_1,X_2\right)>0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

□

5.3.2 Θετική εξάρτηση ανακοπής ζημίας

Στη συνέχεια θα εξεταστεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ των διατάξεων ανακοπής ζημίας και της θετικής εξάρτησης (*PSLD).*

Ορισμός 5.11
Οι κίνδυνοι X_1 και X_2 θα είναι θετικά εξαρτημένοι ως προς την ανακοπή ζημίας *(PSLD).* αν ισχύει:

$$X_1 \prec_{SL} \left[X_1 \mid X_2 > t_2\right] \text{ και } X_2 \prec_{SL} \left[X_2 \mid X_1 > t_1\right]$$

για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

□

Πρόταση 5.12
Οι X_1 και X_2 είναι *PSLD* αν και μόνο αν ισχύει:

$$E\left[\left(X_1 - t_1\right)_+ \mid X_2 > t_2\right] \geq E\left[\left(X_1 - t_1\right)_+\right]$$

και

$$E\left[\left(X_2 - t_2\right)_+ \mid X_1 > t_1\right] > E\left[\left(X_2 - t_2\right)_+\right]$$

για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

□

5.4 Μέτρηση και σύγκριση θετικής εξάρτησης

Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση και τη σύγκριση της εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών. Παράλληλα θα παρουσιάσουμε κάποιες στοχαστικές διατάξεις για τυχαία διανύσματα, οι οποίες αποτελούν ισχυρή ένδειξη θετικής εξάρτησης.
Με βάση τους Kimeldorf το 1987, Sampson το 1989 και Joe το 1997, υπάρχουν εννιά προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για μία στοχαστική διάταξη προκειμένου να αποτέλει ένα ικανοποιητικό μέτρο για τη μελέτη της εξάρτησης δύο τ.μ. όπως θα δούμε από την επόμενη πρόταση.

Ορισμός 5.13
Ο συμβολισμός $\prec$ αποτελεί διάταξη πολυμεταβλητής εξάρτησης αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, τότε:

$$\Pr\left(X_i \le x_i, X_j \le x_j\right) \le \Pr\left(Y_i \le y_i, Y_j \le y_j\right)$$

για κάθε $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ και $1 \le i < j \le n$.

ii. $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ *και* $\mathbf{Y} \prec \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X} \prec \mathbf{Z}$.

iii. $\mathbf{X} \prec \mathbf{X}$.

iv. $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ *και* $\mathbf{Y} \prec \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} =_d \mathbf{Z}$.

v. $\mathbf{X} \prec \left(F_1^{-1}(U), \ldots\ldots, F_n^{-1}(U)\right), \quad U \sim Uni(0,1)$.

vi. Αν $\mathbf{X}_n \prec \mathbf{Y}_n$ για κάθε n και $\mathbf{X}_n \to_d \mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_n \to_d \mathbf{Y}$ τότε: $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$.

vii. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, τότε:

$$\left(X_{\pi(1)}, \ldots\ldots, X_{\pi(n)}\right) \prec \left(Y_{\pi(1)}, \ldots\ldots, Y_{\pi(n)}\right)$$

για οποιαδήποτε μετάθεση π του $\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$.

viii. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, τότε:

$$\left(t(X_1), \ldots\ldots, t(X_n)\right) \prec \left(t(Y_1), \ldots\ldots, t(Y_n)\right)$$

για κάθε αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση *t.*

ix. Αν ισχύει $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, τότε:

$$\left(X_{i_1}, \ldots\ldots, X_{i_k}\right) \prec \left(Y_{i_1}, \ldots\ldots, Y_{i_n}\right)$$

για κάθε $1 \le i_1 < i_2 < \ldots\ldots < i_k \le n, \quad 2 \le k < n$.

□

5.4.1 Διάταξη συσχέτισης

Η έννοια της διάταξης συσχέτισης (correlation order) εισήχθη για πρώτη φορά από τους Dhaene το 1996 και Goovaerts το 1997 και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο μέτρησης και σύγκρισης της θετικης εξάρτησης. Η κεντρική ιδέα ήταν να βρεθεί μία διάταξη μεταξύ των τυχαίων ζεύγων **X=**$\left(X_1, X_2\right)$ και **Y=**$\left(Y_1, Y_2\right)$ έτσι ώστε τα άθροισματα των στοιχείων τους να είναι διατεταγμένα με βάση την διάταξη ανακοπής ζημίας. Ακολουθεί ο ορισμός της διάταξης συσχέτισης.

Ορισμός 5.14

Το τυχαίο διάνυσμα **X=**$\left(X_1, X_2\right)$ είναι μικρότερο από το **Y=**$\left(Y_1, Y_2\right)$ ως προς τη στοχαστική διάταξη συσχέτισης, $\mathbf{X} \prec_{CORR} \mathbf{Y}$, αν ισχύει:

$$F_{\mathbf{X}}\left(x_1, x_2\right) \le F_{\mathbf{Y}}\left(x_1, x_2\right), \qquad \text{για όλα τα } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2.$$

□

Πρόταση 5.15
Αν για τα τυχαία διανύσματα **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$ ισχύει $\mathbf{X}\prec_{CORR}\mathbf{Y}$ τότε:

$$\mathbf{X}\prec_{CORR}\mathbf{Y}\Leftrightarrow\mathbf{X}\prec_{UO}\mathbf{Y}\Leftrightarrow\mathbf{X}\prec_{LO}\mathbf{Y}.$$

□

Οι συναρτήσεις supermodular και log-super modular έχουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και της θετικής εξάρτησης.

Πρόταση 5.16
Έστω τα τυχαία διανύσματα **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$, τότε:

$$\mathbf{X}\prec_{CORR}\mathbf{Y}\Leftrightarrow E\big(g(X)\big)\leq E\big(g(Y)\big),$$

για κάθε supermodular συνάρτηση *g*, για την οποία η μέση τιμή των διανυσμάτων **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$ αντίστοιχα, είναι πεπερασμένη.

□

Πρόταση 5.17
Έστω τα τυχαία διανύσματα **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$, τότε:

$$\mathbf{X}\prec_{CORR}\mathbf{Y}\Leftrightarrow E\big(g_1(X_1)g_2(X_2)\big)\leq E\big(g_1(Y_1)g_2(Y_2)\big)$$

για κάθε μη-φθίνουσες συνάρτησεις g_1,g_2, για τις οποίες η μέση τιμή των διανυσμάτων **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$ αντίστοιχα, είναι πεπερασμένη.

□

Πρόταση 5.18
Έστω τα τυχαία διανύσματα **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$, τότε:

$$\mathbf{X}\prec_{CORR}\mathbf{Y}\Leftrightarrow Cov\big(g_1(X_1)g_2(X_2)\big)\leq Cov\big(g_1(Y_1)g_2(Y_2)\big)$$

για κάθε μη-φθίνουσες συνάρτησεις g_1,g_2, για τις οποίες η συνδιακύμανση των διανυσμάτων **X**$=(X_1,X_2)$ και **Y**$=(Y_1,Y_2)$ αντίστοιχα, είναι πεπερασμένη.

□

Η πιο σημαντική ιδιότητα της διάταξης συσχέτισης $\prec_{CORR}$, είναι ότι μπορεί και συνδέει την έννοια της ανακοπής ζημίας μεταξύ των στοιχείων των δύο διανυσμάτων.

Πρόταση 5.19

Έστω τα τυχαία διανύσματα **X**=(X_1,X_2) και **Y**=(Y_1,Y_2) για τα οποία ισχύει $\mathbf{X} \prec_{CORR} \mathbf{Y}$, τότε:

i. $X_1+X_2 \prec_{SL=} Y_1+Y_2$
ii. $Y_1-Y_2 \prec_{SL=} X_1-X_2$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει τη συμπεριφορά του συντελεστή συσχέτισης του Pearson καθώς και των συντελεστών συσχέτισης βαθμού του Kendall και Spearman αντίστοιχα όταν ισχύει η διάταξη συσχέτισης.

Πρόταση 5.20

Έστω τα τυχαία διανύσματα **X**=(X_1,X_2) και **Y**=(Y_1,Y_2) για τα οποία ισχύει $\mathbf{X} \prec_{CORR} \mathbf{Y}$, τότε:

$$r_P(X_1,X_2) \le r_P(Y_1,Y_2),$$
$$r_K(X_1,X_2) \le r_K(Y_1,Y_2),$$
$$r_S(X_1,X_2) \le r_S(Y_1,Y_2).$$

□

Έστω τα ζευγάρια (M_1,M_2) και $(M_1^{\perp},M_2^{\perp})$ τα οποία αποτελούνται από ακέραιες τυχαίες μεταβλητές και έστω τα ζευγάρια (S_{M_1},S_{M_2}) και $(S_{M_1}^{\perp},S_{M_2}^{\perp})$ για τα οποία ισχύει:

$$S_{M_i}=\sum_{k=1}^{M_i} X_{ik}\,,\quad S_{M_i}^{\perp}=\sum_{k=1}^{M_i} X_{ik}^{\perp}\,,\ i=1,2$$

όπου οι $\{X_{i1},X_{i2},......\}$ και $\{X_{i1}^{\perp},X_{i2}^{\perp},......\}$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες ακολουθίες θετικά εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητες από τις τ.μ. M και $M^{\perp}$.

□

5.5 Στοχαστικά συσχετισμένα επιτόκια

Στα οικονομικά και χρηματοοικονομικά μαθηματικά, οι υποθέσεις ανεξαρτησίας και ισονομίας των ετήσιων επιτόκίων δεν είναι πολύ ρεαλιστικές. Προκειμένου να απαλαγούμε από την υπόθεση της ισοκατανομής των ετήσιων επιτοκίων δουλεύουμε επαγωγικά.

Πιο συγκεκριμένα, πολλές φορές απαιτείται η εύρεση της διασποράς της παρούσας αξίας ή της συσσωρευμένης αξίας κάποιας συγκεκριμένης ράντας όπου η αξία της είναι ένα άθροισμα γινομένων, όπως για παράδειγμα η αξία της ράντας Ζ, όπου $Z = X_1 + X_1X_2 + ... + X_1X_2...X_n$. Οι παράγοντες σε κάθε όρο αυτού του αθροίσματος θεωρούμε πως είναι ανεξάρτητοι, υπολογίζοντας ξεχωριστά τα $Var(X_1)$, $Var(X_1X_2),...,Var(X_1X_2....X_n)$, οι όροι όμως $X_1, X_1X_2, X_1X_2X_3,......, X_1X_2X_3....X_n$ δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους με αποτέλεσμα εκτός από τις διασπορές $Var(X_1)$, $Var(X_1X_2),...,Var(X_1X_2....X_n)$ να πρεπει να ληφθούν υπ'όψιν και οι συνδιακυμάνσεις των όρων αυτών. Αν οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ είναι και ισόνομες μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη διαδικασία και να συντομεύσουμε κατά πολύ τον υπολογισμό της διασποράς είτε της παρούσας αξίας είτε της συσσωρευμένης αξίας ραντών χάρη στο ακόλουθο Θεώρημα, που οφείλεται στον W. Feller το οποίο διατυπώνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.21

Αν οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $E(X) = A$ και $E(X^2) = B$ και έστω $Z = X_1 + X_1X_2 + X_1X_2X_3 + ... + X_1X_2X_3.......X_n$ τότε θα ισχύει:

$$Var(Z) = Var(X_1 + X_1X_2 + X_1X_2X_3 + ... + X_1X_2X_3.......X_n) =$$
$$= \frac{B+A}{B-A}\sum_{k=1}^{n} B^k - \frac{2B}{B-A}\sum_{k=1}^{n} A^k - \left\{\sum_{k=1}^{n} A^k\right\}^2.$$

□

Εφαρμογή 6: Έστω X_k ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές για $k = 1,2,....$ και $E(X) = \frac{2}{3}$, $E(X^2) = \frac{1}{2}$. Τότε από το Θεώρημα 5.21 και αφού για $n \to \infty$ οι σειρές του Θεωρήματος 5.21 συγκλίνουν θα έχουμε:

$$Var\left(\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = Var(X_1 + X_1X_2 + ... + X_1X_2X_3.......X_n + ...) =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}^2 =$$
$$= -7 + 12 - 4$$
$$= 1$$

□

5.5.1 Πρότυπα με συσχέτιση

Ειπώθηκε προηγουμένως ότι η υπόθεση της ανεξαρτησίας του επιτοκίου από περίοδο σε περίοδο δεν είναι ρεαλιστική. Το τρέχον επίπεδο των επιτοκίων επηρεάζεται από την πορεία τους κατά το σχετικά πρόσφατο παρελθόν, δηλαδή αν τα επιτόκια είναι υψηλά υπάρχει τάση να παραμείνουν υψηλά και όταν είναι χαμηλά, τείνουν να παραμένουν στο επίπεδο αυτό. Η εξάρτηση των επιτοκίων μιας περιόδου από εκείνα πρόσφατων περιόδων συνήθως αντιμετωπίζονται με τις χρονοσειρές, ή με τα αυτοπαλίνδρομα πρότυπα **AR** (Κουτσόπουλος, 2007).

Ως αυτοπαλίνδρομο πρότυπο 1ης τάξης ή **AR-1** είναι $\delta_m = (1-\kappa)\delta + \kappa\delta_{m-1} + \Lambda_m$, $0<\kappa<1$ και εκφράζει την ένταση ανατοκισμού της m-περιόδου συναρτήσει κάποιων ποσοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, από τις ποσότητες αυτές ορίζουμε ως δ μία 'τιμή πυρήνας' γύρω από την οποία διαταράσσονται τα επιτόκια μεσοπρόθεσμα. Το δ_{m-1} είναι η ένταση ανατοκισμού την αμέσως προηγούμενη περίοδο. Με την παράμετρο *κ*, $0<\kappa<1$, καθορίζεται το 'σχετικό βάρος' που αποδίδεται στο *δ* και στο δ_{m-1}. Επίσης, προκειμένου να ληφθούν και εντελώς τυχαίες διακυμάνσεις, θα ισχύει $\Lambda \sim N(0,\sigma^2)$.

Μετά από συνεχείς επαγωγικούς υπολογισμούς, καταλήγουμε στο αυτοπαλίνδρομο πρότυπο m-τάξης ή **AR-m**: $\delta_m = (1-\kappa^m)\delta + \kappa^m\delta_0 + \sum_{i=1}^{m}\kappa^{m-i}\Lambda_i$.

Εφ'όσον ισχύει *κ<1*, με την πάροδο του χρόνου (αύξηση του m), η επίδραση της τ.μ. δ_0 που ίσχυε στην αρχή των m-περιόδων φθίνει. Επιπλέον, οι παλαιότερες τ.μ. Λ_i επηρεάζουν λιγότερο την τιμή της δ_m.

Προκειμένου να βρεθεί η μαθηματική ελπίδα της συσσώρευσης από μία μονάδα, δηλαδή η ποσότητα $E\left(e^{\sum_{m=1}^{n}\delta_m}\right)$, πρέπει να αθροίσουμε τα δ_m. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\delta_m &= n\delta - \frac{\kappa-\kappa^{n+1}}{1-\kappa}(\delta-\delta_0) + \sum_{m=1}^{n}\frac{1-\kappa^m}{1-\kappa}\Lambda_{n-m+1} = \\ &= \alpha_n + \sum_{m=1}^{n}\beta_m\Lambda_{n-m+1}\end{aligned}.$$

Τότε θα ισχύει:

$$E\left(e^{\sum_{m=1}^{n}\delta_m}\right) = E\left(e^{\alpha_n + \sum_{m=1}^{n}\beta_m\Lambda_{n-m+1}}\right) = e^{\alpha_n}E\left(\prod_{m=1}^{n}e^{\beta_m\Lambda_{n-m+1}}\right),$$

Ισχύει όμως ότι $\Lambda \sim N(0,\sigma^2)$, επομένως $M_\Lambda(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$, οπότε:

$$E\left(e^{\sum_{m=1}^{n}\delta_m}\right)=e^{\alpha_n}\prod_{m=1}^{n}e^{\frac{1}{2}\sigma^2\beta_m^2}=e^{\alpha_n+\frac{1}{2}\sigma^2\sum_{m=1}^{n}\beta_m^2}.$$

5.6 Στοχαστικά φράγματα σε αθροίσματα εξαρτημένων κινδύνων

Πολλές φορές ο τρόπος με τον οποίο είναι εξαρτημένες οι τ.μ. μεταξύ τους, μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε άνω και κάτω φράγματα με βάση τη διάταξη κυρτότητας, σε αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών. Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε καταβολές μίας νομισματικής μονάδας στο τέλος κάθε έτους για τα επόμενα *n*-έτη. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο της *k*-περιόδου, I_k, αποτελεί τυχαία μεταβλητή, επομένως και η ένταση ανατοκισμού Δ_k θα είναι τυχαία μεταβλητή. Η παρούσα αξία μίας πληρωμής τη χρονική στιγμή *k* θα δίνεται από τον τύπο: $PV_k=W_k=e^{-(\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_k)}$. Η συνολική παρούσα αξία *S* όλων των πληρωμών, θα δίνεται από τον τύπο: $S=\sum_{k=1}^{n}W_k$. Αν υποθέσουμε ότι η ένταση ανατοκισμού Δ_k είναι οι λογαριθμικές αποδόσεις ενός αξιογράφου, τότε έχουμε την κίνηση *Brown*, με αποτέλεσμα οι μεταβλητές W_k να είναι *lognormal* και η μεταβλητή *S* να είναι το άθροισμα εξαρτημένων *lognormal* τ.μ.

Δεν είναι εύκολο να βρεθούν αναλυτικοί τρόποι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Αυτό που είναι εφικτό όμως, είναι η δημιουργία φραγμάτων με βάση την διάταξη κυρτότητας (SL=) για την τ.μ. S, αρκεί να να αντικατασταθεί το τυχαίο διάνυσμα $(W_1,W_2,\ldots)$ με το ισοδύναμο συμμονοτονικό του, με στοιχεία έστω $W_k^U=F_{W_k}^{-1}(U)$. Η διαδικασία αυτή, προυποθέτει ισχυρή εξάρτηση μεταξύ των στοιχείων του διανύσματος.

Πρόταση 5.22
Ένα κάτω φράγμα με βάση τη διάταξη κυρτότητας για το άθροισμα $S=X_1+X_2+\ldots+X_n$ είναι η ποσότητα $E(S\mid V)$ για κάθε τ.μ. *V*, δηλαδή ισχύει:

$$E(S)\prec_{SL=}E(S\mid V)\prec_{SL=}S$$

□

Με τον ίδιο συλλογισμό, μπορεί να βρεθεί και ένα άνω συμμονοτονικό φράγμα για το τυχαίο άθροισμα *S.*

Πρόταση 5.23

Έστω $(X_1,\ldots,X_n)$ τα στοιχεία ενός τυχαίου διανύσματος, και S το άθροισμα αυτών. Έστω $U \sim Uniform(0,1)$ και έστω S^U το άθροισμα των στοιχείων του συμμονοτονικού ισοδύναμου διανυσματος του $(X_1,\ldots,X_n)$ όπου:

$$S^U = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \ldots + F_{X_n}^{-1}(U).$$

Για κάθε τ.μ. V έστω $S^{U|V} = h(U,V)$, όπου θα ισχύει,

$$h(u,v) = F_{X_1|V=v}^{-1}(u) + \ldots + F_{X_n|V=v}^{-1}(u) \text{ με } 0 < u < 1.$$

Τότε θα ισχύει η παρακάτω στοχαστική ανισότητα:

$$E(S) \prec_{SL,=} E(S\,|\,V) \prec_{SL,=} S \prec_{SL,=} S^{U|V} \prec_{SL,=} S^U.$$

□

Προκειμένου αυτά τα φράγματα που παρουσιάστηκαν ανωτέρω να έχουν νόημα, θα πρέπει η κατανομή της τ.μ. V να είναι γνωστή, καθώς επίσης και εκείνες των τ.μ. X_k για $V = v$.

<u>Εφαρμογή 7:</u> Σύμφωνα με τους Kaas et al. (2009) θα βρούμε στοχαστικά φράγματα για το άθροισμα δύο κινδύνων με *lognormal* κατανομή. Έστω n=2, και W_1, W_2 ανεξάρτητες *N(0,1)* τυχαίες μεταβλητές με $X_1 = e^{W_1} \sim Lognormal(0,1)$ και $X_2 = e^{W_1} + e^{W_2} \sim Lognormal(0,2)$.

Θα έχουμε $S = X_1 + X_2$, και για την τ.μ. V θα γίνει η υπόθεση ότι $V = W_1 + W_2$. Για το κάτω φράγμα $E(S\,|\,V)$ θα ισχύει: $E(X_2\,|\,V) = e^V$, καθώς και $W_1\,|\,W_1 + W_2 = v \sim N\left(\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}\right)$.

Επομένως:

$E\left(e^{W_1}\,|\,W_1 + W_2 = v\right) = M\left(1; \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}\right)$, η ροπογεννήτρια της κατανομής στο σημείο 1.

Άρα καταλήγουμε, $E\left(e^{W_1}\,|\,V\right) = e^{\frac{1}{2}V + \frac{1}{4}}$, οπότε το κάτω φράγμα του θα είναι:

$$E(S\,|\,V) = E(X_1 + X_2\,|\,V) = e^{\frac{1}{2}V + \frac{1}{4}} + e^V.$$

Συνεχίζοντας, όταν $U \sim Uniform(0,1)$, η τ.μ. $S^U = e^Z + e^{Z\sqrt{2}}$ με $Z = \Phi^{-1}(U)$, όπου $Z \sim N(0,1)$, αποτελεί ένα συμμονοτονικό άνω φράγμα για την τ.μ. S.

□

Για ένα συμμονοτονικό κάτω φράγμα της *S*, χρησιμοποιούμε την δεσμευμένη μέση τιμή $E(S|V)$. Η δεσμευμένη τ.μ. *V*, πρέπει να έχει μία σχέση εξάρτησης με τα στοιχεία της *S*. Επίσης, πρέπει να συμπεριφέρεται όπως και η *S*, με την έννοια ότι η τιμή της ποσότητας $E(Var(S|V))$ είναι μικρή, ή ισοδύναμα η τιμή του $Var(E(S|V))$ είναι μεγάλη. Προκειμένου να υπολογίσουμε τους όρους του $E(S|V)$ χρειαζόμαστε της δεσμευμένη κατανομή ενός στοιχείου από ένα ζεύγος μεταβλητών κανονικής κατανομής. Είναι γνωστό από το Θεώρημα 5.4.8 των Bain & Engelhadt το 1992, ότι αν το ζεύγος (U,V) ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_U,\mu_V,\sigma_U^2,\sigma_V^2,\rho$, τότε για κάθε *v* θα ισχύει:

$$U|V=v \sim N\left(\mu_U+\rho\frac{\sigma_U}{\sigma_V}(v-\mu_V),\sigma_U^2\left(1-\rho^2\right)\right).$$

<u>Εφαρμογή 8:</u> Έστω X,Y ανεξάρτητες και ισόνομες $N(0,1)$ τ.μ., και $S=X+Y$. Επίσης, έστω $V=X+\alpha Y$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Θα βρεθεί η κατανομή του X δεδομένου $V=v$, το κάτω φράγμα $E(S|V)$, η κατανομή του συμμονοτονικού άνω φράγματος του *S*. Ακόμα, θα συγκριθούν οι διακυμάνσεις αυτών των ποσοτήτων.

Θα έχουμε,

$$S=X+Y\sim N(0,2)$$
$$V=X+\alpha Y\sim N\left(0,1+\alpha^2\right)$$

$$\rho_{X,V}=\frac{Cov(X,V)}{\sigma_X\sigma_V}=\frac{Cov(X,X)+Cov(X,\alpha Y)}{\sigma_X\sigma_{X+\alpha Y}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$S_l=E(X+Y|V)$$

και

$$S^{U|V}=F_{X|V}^{-1}(U)+F_{Y|V}^{-1}(U)$$

Επίσης, από το Θεώρημα 5.4.8 των Bain & Engelhadt το 1992 για τη δεσμευμένη κατανομή του X, θα ισχύει:

$$\left(\mu_X+\frac{\rho_{X,V}\sigma_X}{\sigma_V}(v-\mu_V),\sigma_X^2\left(1-\rho_{X,V}^2\right)\right)=N\left(\frac{v}{1+\alpha^2},\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right).$$

Θα έχουμε:

$$E(X|V)=\frac{V}{1+\alpha^2},$$

άρα,

$$F_{X|V}^{-1}(U) := E(X \mid V) + \frac{|\alpha|\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sim X, \text{ και}$$

$$E(Y \mid V) = \frac{\alpha V}{1+\alpha^2},$$

επομένως:

$$F_{Y|V}^{-1}(U) = E(Y \mid V) + \frac{\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sim Y.$$

Τέλος, θα έχουμε:

$$S_I \sim N\left(0, \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}\right)$$

και

$$S^{U|V} \sim N\left(0, \frac{(1+\alpha)^2 + (1+|\alpha|)^2}{1+\alpha^2}\right)$$

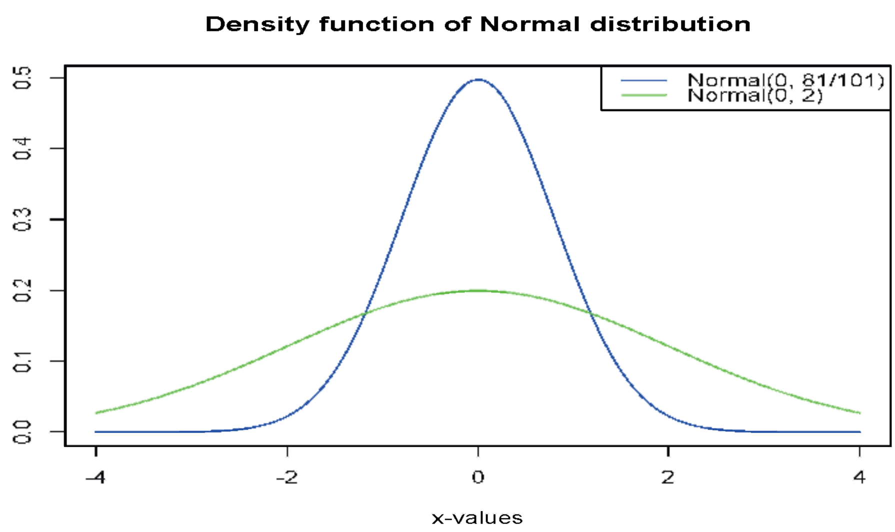
και για τις διακυμάνσεις θα ισχύει,

$$\sigma_{S_I}^2 = \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}, \qquad \sigma_{S^{U|V}}^2 = \frac{(1+\alpha)^2 + (1+|\alpha|)^2}{1+\alpha^2},$$

επομένως συμπεραίνεται πως $\sigma_{S^{U|V}}^2 > \sigma_{S_I}^2$.

Για διάφορες τιμές της μεταβλητής α θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

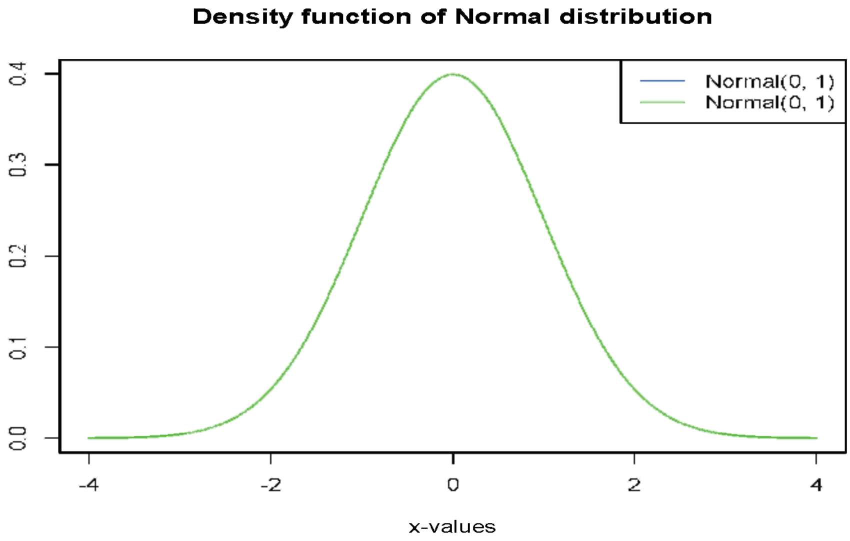
$\alpha = -10$: $\quad S_I \sim N\left(0, \frac{81}{101}\right)$, $\sigma_{S_I}^2 = \frac{81}{101}$ και $S^{U/V} \sim N(0,2)$, $\sigma_{S^{U/V}}^2 = 2$



$\alpha = 0:$ $\qquad S_l \sim N(0,1), \quad \sigma^2_{S_l} = 1$ και

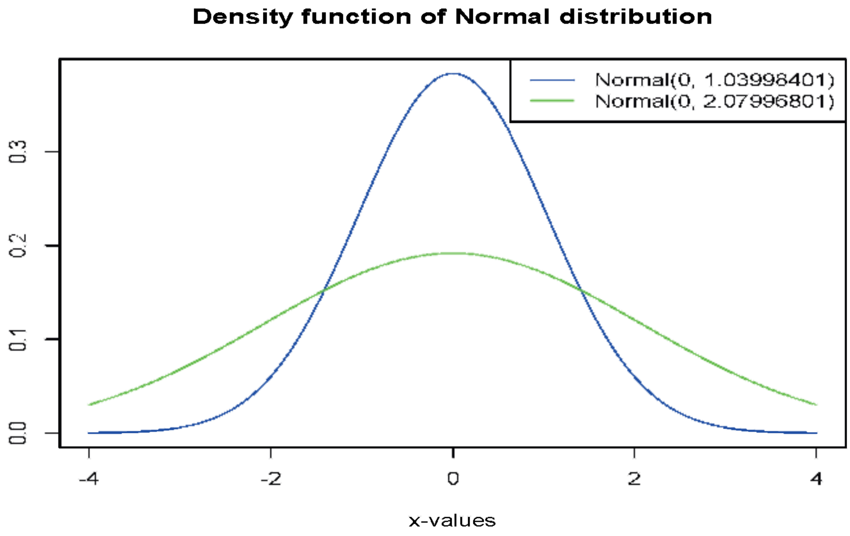
$S^{U/V} \sim N(0,1), \sigma^2_{S^{U/V}} = 1,$

οπότε βλέπουμε πως στην περίπτωση αυτή οι δύο κατανομές ταυτίζονται.



$\alpha = 50:$ $\qquad S_l \sim N(0,1.03998401), \quad \sigma^2_{S_l} = 1.03998401$ και

$S^{U/V} \sim N(0,2.07996801), \qquad \sigma^2_{S^{U/V}} = 2.07996801$



$\square$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ

- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kass, R., "Actuarial Theory for Dependent Risks", Wiley, 2005
- Kass, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., "Modern Actuarial Risk Theory, Using R", Springer, New York, 2009
- Klugman, S., A., Panjer, H., H., and Willmot, G., E., "Loss Models - From Data to Decisions", Wiley, 2008
- Muller, A. and Stoyan, D., "Comparison Methods for Stochastic Models and Risks", Wiley, 2002
- Kellison, S., G., "The Theory of Interest", Irwin McGraw-Hill, Georgia, 1991

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- Κουτσόπουλος, Κ., Ι., "Αναλογιστικά Μαθηματικά – Μέρος Ι, Θεωρία των Κινδύνων", Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999
- Κουτσόπουλος, Κ., Ι., "Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά", Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Αθήνα, 2007
- Πολίτης, Κ., "Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου: το συλλογικό πρότυπο και θεωρία χρεοκοπίας", Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, 2012
- Ζυμπίδης, Α., "Θεωρία Κινδύνων", Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα, 2008