ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Το πρόβλημα της ισορροπίας Nash σε κοινοβουλευτικές συμμαχίες

Στυλιανός Θ. Δρακάτος

Επιβλέπων
Καθηγητής Ε. Χ. Φούντας

Πειραιάς, Απρίλιος 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Το πρόβλημα της ισορροπίας Nash σε κοινοβουλευτικές συμμαχίες

Στυλιανός Θ. Δρακάτος

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Ευάγγελος Φούντας Καθηγητής	Γιώργος Τσιχριντζής Καθηγητής	Μαρία Βίρβου Καθηγήτρια

Πειραιάς, Απρίλιος 2012

Στυλιανός Θ. Δρακάτος
(ΑΜ: ΜΠΠΛ 06004)

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου διατριβής, η οποία υλοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους οι οποίοι συνέβαλαν στην περάτωση της με τις γνώσεις τους και τις συμβουλές τους.

Συγκεκριμένα οφείλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και πρόεδρο του τμήματος πληροφορικής κ. Ευάγγελο Φούντα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναλαμβάνοντας την εποπτεία της διατριβής μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα, κ. Παναγιώτη Καμπισιούλη για την καθοδήγηση, τις συμβουλές και την υποστήριξη του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής. Επιπλέον τον ευχαριστώ για τις πολύτιμες συμβουλές και κατευθύνσεις που μου έδωσε, και γενικότερα την καθοδήγηση που μου παρείχε.

Ακόμη θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους του καθηγητές που είχα στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα, διότι με βοήθησαν να αποκομίσω όσο το δυνατόν περισσότερες γνώσεις σχετικά με την επιστήμη μου αλλά και γενικότερα για τη ζωή μου.

Τέλος ευχαριστώ όλους εκείνους που ήταν δίπλα μου σε όλη αυτή την προσπάθεια παρέχοντας απεριόριστη ψυχολογική υποστήριξη και κατανόηση.

Ευρεία Περίληψη

Η θεωρία παιγνίων είναι η μελέτη ενός κλάδου των μαθηματικών που επιτρέπει την μελέτη των βέλτιστων στρατηγικών σε καταστάσεις σύγκρουσης. Η πρώτη αναφορά έγινε τον 18^{ο} αιώνα, αλλά η ουσιαστική ανάπτυξη αποδίδεται στον Ούγγρο φυσικό John Von Neumann στις αρχές του 19^{ου}.

Ένα παιχνίδι ασχολείται με την απαίτηση της λήψης αποφάσεων σε περιπτώσεις όπου δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί αντίπαλοι εμπλέκονται σε συνθήκες ανταγωνισμού και συγκρουόμενων συμφερόντων. Περιλαμβάνει επίσης τους παίκτες, που θεωρούνται αυτόνομη μονάδα λήψης αποφάσεων, παρότι δεν ελέγχουν όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παιγνίου. Παίκτης μπορεί να θεωρηθεί ένα άτομο, μία επιχείρηση ακόμα και ένα κράτος.

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους τα παίγνια διακρίνονται, βάσει του αριθμού των παικτών που συμμετέχουν σε αυτά. Αν λοιπόν συμμετέχουν δύο παίκτες τα παίγνια ονομάζονται «παίγνια δύο παικτών» , ενώ εάν συμμετέχουν n παίκτες έχουμε τα «παίγνια n παικτών» , όπου n>2. Η παρουσία τριών ή περισσοτέρων παικτών οδηγεί περαιτέρω και στην δυνατότητα σχηματισμού συνασπισμών. Όπου μια ομάδα από δύο ή περισσότερους παίκτες ενώνουν τα ενδιαφέροντα τους και εναρμονίζουν τις στρατηγικές τους. Έτσι έχουμε «παίγνια με ή άνευ συνεργασίας». Η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις αποτελεί ένα ακόμη κριτήριο του παιγνίου, χαρακτηρίζοντας έτσι «δυναμικά» τα παίγνια όπου η σειρά λήψης αποφάσεων παίζει ρόλο και «στατικά» παίγνια, όπου η σειρά με τη οποία ο παίκτης παίρνει τις αποφάσεις, δεν έχει σημασία. Παίγνια «μηδενικού αθροίσματος» ονομάζονται τα παίγνια δύο παικτών, όπου η αμοιβή του ενός είναι ίση με την απώλεια του άλλου και προέρχεται από αυτή. Ενώ στα παίγνια «γενικού μη μηδενικού αθροίσματος», υπάρχουν συνήθως στοιχεία ανταγωνισμού όσο και συνεργασίας.

Σε κάθε διαφορετική περίπτωση παιχνιδιού οι παίκτες έχουν ένα σύνολο από διαθέσιμες στρατηγικές. Η στρατηγική για ένα παίκτη είναι το σύνολο των εναλλακτικών τρόπων δράσης που λαμβάνει για κάθε αποτέλεσμα που προκύπτει. Η πρώτη διάκριση των στρατηγικών έχει να κάνει με τις «αμιγείς» στρατηγικές στις οποίες ο παίκτης από την αρχή του παιγνίου πρέπει να έχει αποφασίσει, τι επιλογές θα κάνει ακόμα και στην περίπτωση που ποτέ δεν θα κλιθεί να τις εφαρμόσει. Η στρατηγική «maximin» έχει να κάνει με την δυνατότητα του παίκτη A να επιλέγει πάντα το μέγιστο (maximum) των ελαχίστων (minimum) στοιχείων των σειρών του πίνακα πληρωμών και αντίστοιχα η «minimax» στρατηγική έχει να κάνει με την επιλογή του παίκτη B να επιλέξει την ελάχιστη δυνατή ζημιά. «Κυρίαρχη» στρατηγική χαρακτηρίζεται εκείνη για την οποία ένας παίκτης κυριαρχεί έναντι των υπολοίπων για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών. Πολλές φορές δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί σημείο ισορροπίας με χρήση αμιγών στρατηγικών. Για αυτόν τον λόγο οι παίκτες ακολουθούν μικτές στρατηγικές, επιλέγουν δηλαδή τις εναλλακτικές στρατηγικές τους με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

Στους βασικούς θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων ανήκει ο John Nash ο οποίος εισήγαγε στα παίγνια την ιδέα της ισορροπίας η οποία χρησιμοποιείται πλέον ευρέως σε όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης. Το θεώρημα που διατύπωσε ο Nash και έγινε γνωστό σε όλο τον κόσμο αναφέρει πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις πιο συμφέρουσες για αυτούς ενέργειες, γνωρίζοντας και τις επιλογές των αντιπάλων τους. Οι παίκτες σκέφτονται τι μπορεί να διαλέξει ο αντίπαλος τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά των άλλων και επιλέγουν την στρατηγική τους σύμφωνα με αυτό. Δηλαδή η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την καλύτερη αντίδραση(απόκριση) στην στρατηγική του άλλου παίκτη. Αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία Nash.

Από τα πιο γνωστά και σημαντικά παίγνια στην ιστορία της θεωρίας παιγνίων αποτελούν το παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου, η μάχη των φύλλων όπως και το κλασσικό παιχνίδι κυριαρχίας "Risk Dominance".

Summary

Game theory is a branch of applied mathematics, used in social and political sciences, biology and medicine, even in philosophy and psychology. Originally developed as a model of making decisions in situations of competition or conflict, and achieved worldwide recognition in the early 1940's, by the applications in financial sector made by mathematician John von Neumann and by the economist Oskar Morgenstern, in theirs' book entitled "Theory of Games and Economic Behavior ". Since then Game theory began spreading widely in many industries with significant applications with most important event the seven Nobel prizes, including the one to famous John Nash.

Game theory allows the study, analysis and making decisions in situations of conflict of interest. So in the case of economic interests, game theory was the basis for the study of oligopoly problems, bilateral monopoly and others. Besides its applications in Economics, the games offered many in the study of political and strategic problems, giving in that way solutions to many daily problems.

This work will try to present characteristics and strategies of the games through applications and examples, making a further analysis on possible parliamentary alliances created by the independent election of government weakness.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η Θεωρία παιγνίων είναι ένας κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που χρησιμοποιείται στις κοινωνικές και πολιτικές επιστήμες, στη βιολογία και την ιατρική, ακόμη και στη φιλοσοφία και την ψυχολογία . Αρχικά αναπτύχθηκε ως ένα μοντέλο λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις ανταγωνισμού ή σύγκρουσης και έτυχε παγκόσμιας αναγνώρισης στις αρχές της δεκαετίας του 1940, από τις εφαρμογές στον κλάδο των οικονομικών που πραγματοποίησαν ο μαθηματικός John von Neumann και ο οικονομολόγος Oskar Morgenstern στο σύγγραμμά τους με τίτλο “Theory of Games and Economic Behavior”.
Έκτοτε ξεκίνησε η ευρύτατη εξάπλωσή της σε πολλούς κλάδους με αξιόλογες εφαρμογές κι αυτό πιστοποιείται από την απονομή επτά βραβείων Nobel σε μελετητές, μεταξύ των οποίων και ο περίφημος John Nash.

Η θεωρία παιγνίων επιτρέπει την μελέτη, ανάλυση και την λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις συγκρούσεως συμφερόντων. Έτσι στην περίπτωση των οικονομικών συμφερόντων, η θεωρία παιγνίων αποτέλεσε την βάση για την μελέτη προβλημάτων ολιγοπωλίου, διμερούς μονοπωλίου και πολλών άλλων. Εκτός των εφαρμογών στην Οικονομική, τα παίγνια προσέφεραν πολλά και στην μελέτη των πολιτικών και στρατηγικών προβλημάτων, αφού έννοιες όπως χρησιμότητα, προτίμηση, συνεργασία μπορούν να περιγραφούν με την γλώσσα των μαθηματικών και να δώσουν σαφή κριτήρια για την λήψη των αποφάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων

2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Η θεωρία παιγνίων θεμελιώθηκε από τους Neumann και Morgenstern και μπορεί να οριστεί ως η συστηματική μελέτη μαθηματικών μοντέλων διαδραστικής λήψης αποφάσεων. Ως παίγνιο (game) μπορεί να θεωρηθεί η κατάσταση εκείνη, κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενους στόχους επιλέγουν τρόπους ενέργειας που δημιουργούν συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης. Στοιχεία του παιγνίου είναι οι παίκτες, οι κανόνες που διέπουν το παίγνιο, οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκεια του παιγνίου και η αξιολόγηση των διάφορων αποτελεσμάτων.

Η θεωρία παιγνίων παρέχει γενικές - αναλυτικές τεχνικές και εργαλεία που μας βοηθούν να κατανοήσουμε τα φαινόμενα που παρατηρούνται όταν δύο ή περισσότερες οντότητες αλληλεπιδρούν, καθώς λαμβάνουν αποφάσεις. Τις οντότητες αυτές τις ονομάζουμε παίκτες. Κάθε παίκτης έχει στην διάθεση του έναν αριθμό, πεπερασμένο ή άπειρο, επιλογών, που αναφέρονται ως στρατηγικές. Τα αποτελέσματα ενός παιγνίου διατυπώνονται ως συναρτήσεις απώλειας ή συναρτήσεις κέρδους ή αμοιβής, μια για κάθε παίκτη, που όμως επηρεάζονται από τις αποφάσεις των άλλων παικτών.

Ένα παίγνιο χαρακτηρίζεται από μια συλλογή κανόνων που το διέπουν και που είναι γνωστοί σε όλους τους παίκτες. Οι κανόνες αυτοί ορίζουν τι μπορεί και τι δεν μπορεί να κάνει ένας παίκτης. Οι ίδιοι κανόνες ορίζουν επίσης και τις αμοιβές ή απώλειες που απορρέουν από τις επιλογές των παικτών.

Μία κίνηση είναι ένα σημείο του παιγνίου στο οποίο οι παίκτες πρέπει να κάνουν επιλογές ανάμεσα στις διαθέσιμες κάθε φορά. Ο παίκτης (player) θεωρείται αυτόνομη μονάδα λήψης της απόφασης, παρότι δεν ελέγχει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παιγνίου. Στη θεωρία παιγνίων ο παίκτης μπορεί να είναι ένα άτομο, μία επιχείρηση , ακόμη και ένα κράτος. Έχει σαφή αντικειμενικό σκοπό, τον οποίο προσπαθεί να πετύχει, αλλά και σαφή πλαίσια δράσης που καθορίζονται από τους κανόνες του παιγνίου αλλά και από το σύνολο των πόρων και των μέσων που διαθέτει.

Κάθε παίκτης λοιπόν έχει κάποιους στόχους και καλείται να λάβει κάποια απόφαση που θα τον βοηθήσει να επιτύχει τους στόχους αυτούς. Όμως το πόσο επωφελείται τελικά ο κάθε παίκτης δεν εξαρτάται μόνο από την απόφαση που θα λάβει ο ίδιος, αλλά εν γένει και από τις αποφάσεις όλων των υπολοίπων παικτών. Ένα παίγνιο λοιπόν ορίζεται (α) από το σύνολο των παικτών, (β) το σύνολο των ενεργειών για κάθε παίκτη, δηλαδή το σύνολο των αποφάσεων που μπορεί να πάρει ο κάθε παίκτης και (γ) την ωφέλεια που έχει κάθε παίκτης για κάθε συνδυασμό ενεργειών.

Γενικά όταν μελετάμε ένα παίγνιο, υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης δεν επιλέγει απαραίτητα μία μόνο από τις διαθέσιμες ενέργειες του, αλλά είναι ελεύθερος να επιλέξει οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των ενεργειών του. Μια τέτοια κατανομή πιθανότητας ονομάζεται στρατηγική. Με τον όρο στρατηγική περιγράφεται το σύνολο των επιλογών που κάνει ο παίκτης από την αρχή μέχρι το τέλος του παιγνίου.

Ένας παίκτης είναι λογικός όταν λαμβάνει τις αποφάσεις του με βάση την επίτευξη των προσωπικών του στόχων. Στην θεωρία παιγνίων υποθέτουμε ότι ο στόχος κάθε παίκτη είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής μιας προσωπικής συνάρτησης ωφέλειας, η οποία εξαρτάται όχι μόνο από την απόφαση του ίδιου του παίκτη αλλά εν γένει και από τις αποφάσεις των άλλων παικτών. Ένας παίκτης είναι ευφυής όταν γνωρίζει τα πάντα σχετικά με το παίγνιο στο οποίο εμπλέκεται και έχει την ικανότητα να αξιοποιεί τις γνώσεις τους ώστε να εξάγει έλλογα συμπεράσματα. Η θεωρία παιγνίων λοιπόν αποτελεί μια συλλογή μοντέλων και αναλυτικών εργαλείων που μας βοηθά να κατανοήσουμε την διαδικασία διαδραστικής λήψης αποφάσεων από ένα σύνολο λογικών και ευφυών παικτών, κάθε ένας από τους οποίους ενεργεί εγωιστικά, προσπαθεί δηλαδή να επιτύχει κάποιους προσωπικούς του στόχους.

Η σπουδαιότερη και περισσότερο αναγνωρισμένη έννοια λύσης στην θεωρία παιγνίων είναι η ισορροπία Nash. Πρόκειται για ένα συνδυασμό στρατηγικών, μία για κάθε παίκτη, όπου δεν υπάρχει παίκτης που να μπορεί να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του αν αλλάξει την στρατηγική του. Με άλλα λόγια σε μια ισορροπία Nash κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλειά του, δοθέντων των στρατηγικών των άλλων παικτών. Αυτή η σημαντική έννοια ισσοροπίας προτάθηκε από τον Nash, ο οποίος μάλιστα απέδειξε ότι κάθε παίγνιο (με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών) έχει τουλάχιστον μια τέτοια ισορροπία.

2.2 Ιστορική Αναδρομή

Η πρώτη γνωστή αναφορά στη Θεωρία Παιγνίων έγινε τον 18ο αιώνα (1838) από τον Γάλλο οικονομολόγο Augustin Cournot ο οποίος κατάφερε να αναλύσει ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόπο παρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίας παιγνίων.
Οστόσο η ουσιαστική της ανάπτυξη αποδίδεται στον Ούγγρο φυσικό και μαθηματικό, John von Neumann, ο οποίος το 1928 απέδειξε ότι τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος έχουν πάντα λύση και ότι η απώλεια ενός παίκτη είναι ίση με το κέρδος του δεύτερου. Καθοριστική στην μετέπειτα ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων ήταν η δημοσίευση του βιβλίου “Theory of Games & Economic Behavior”, το 1944, από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1950 ο Αμερικανός μαθηματικός και οικονομολόγος John Nash εισήγαγε μια ισορροπία για παιχνίδια μη-μηδενικού αθροίσματος, γνωστή σαν ισορροπία Nash. Πρόκειται για μια κατάσταση, από την οποία κανέναν παίκτη δεν τον συμφέρει να απομακρυνθεί, δεδομένων των επιλογών των αντιπάλων τους. Η ζωή του έγινε θέμα ταινίας, όχι μόνο για όλα όσα προσέφερε στη θεωρία παιγνίων, αλλά και επειδή έπασχε από σύνδρομο καταδίωξης και σχιζοφρένειας από την ηλικία των 29 ετών.

Από εκείνο το σημείο και μετά η θεωρία παιγνίων είχε αλματώδη ανάπτυξη και άρχισε να εφαρμόζεται σε όλους τους τομείς και τις πολιτικές επιστήμες, ενώ πληθώρα ερευνητικών πειραμάτων ξεκίνησαν προσπαθώντας να βρουν λύση σε όλο και περισσότερα προβλήματα. Το 1965 ο Reinhard Selten μελέτησε τα δυναμικά παίγνια(αυτά που εξελίσσονται στο χρόνο) εισάγοντας την έννοια της ισορροπίας στα υποπαίγνια (subgame perfect equilibrium) και της ισορροπίας τρεμάμενου χεριού(trembling hand perfect equilibrium), ενώ το 1975 ο John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του John Nash και μελέτησε παίγνια μη-πλήρους πληροφόρησης.

Για τις εργασίες τους, οι τρεις αυτοί άνθρωποι τιμήθηκαν αργότερα, το 1994, με το βραβείο Νόμπελ της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών. Τη δεκαετία του 1970 άρχισε να εφαρμόζεται και στον κλάδο της βιολογίας, σαν αποτέλεσμα της εργασίας του John Maynard Smith σχετικά με την έννοια της “εξελικτικά σταθερής στρατηγικής”(evolutionary stable strategy).

Στα τέλη της δεκαετίας του 1990 η θεωρία παιγνίων εφαρμόστηκε στον σχεδιασμό δημοπρασιών. Πάνω σε αυτό ασχολήθηκαν διάφοροι επιστήμονες για την κατανομή δικαιωμάτων χρήσης του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος στη βιομηχανία των κινητών τηλεπικοινωνιών.

Το 2005 ο Αμερικανός επιστήμονας Tomas Schelling και ο Γερμανός θεωρητικός παιγνίων Robert Aumann κέρδισαν το βραβείο Νόμπελ για τις Οικονομικές επιστήμες “επειδή εμπλούτισαν την αντίληψη μας σχετικά με τις έννοιες του ανταγωνισμού και της συνεργασίας μέσω της παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης ”. Τους ακολούθησαν το 2007 οι Roger Myerson, Leonid Hurwicz και Eric Maskin “για τη θεμελίωση της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών”.

2.3 Εφαρμογή στην καθημερινότητα

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, η θεωρία παιγνίων έχει μεγάλη γκάμα εφαρμογών. Θα λέγαμε πως όλα έχουν άμεση σχέση με την θεωρία παιγνίων αφού συναντάμε εφαρμογές στην οικονομία, στις επιχειρήσεις, στην πληροφορική, στις τηλεπικοινωνίες, στην πολιτική, στην κοινωνιολογία, στη βιολογία και φυσικά στην καθημερινή μας ζωή.Μια σύγχρονη μαθηματική θεωρία μπορεί να αναλύσει κάθε είδος αναμέτρησης , από την ντάμα και το σκάκι μέχρι τα τυχερά παιχνίδια ή έναν πυρηνικό πόλεμο, και να προβλέψει τον νικητή.

Οι οικονομολόγοι εδώ και πολύ καιρό χρησιμοποιούν τη θεωρία παιγνίων(έχοντας ως υλικά υποστήριξης τα πέντε βραβεία Νόμπελ στα οικονομικά) ώστε να αναλύσουν διάφορους κλάδους όπως για παράδειγμα τη βιομηχανική οργάνωση(industrial organization), το σχεδιασμό μηχανισμών(mechanism design) με υποκλάδο τις δημοπρασίες, τις συμφωνίες, τα ολιγοπώλια, τα μονοπώλια, (ο Γάλλος μαθηματικός Κουρνό το 1838 έγραψε το πρώτο μοντέλο δυοπωλίου) τα συστήματα για να μπορεί κάποιος να ψηφίσει και πολλά ακόμα. Οι έρευνες αυτές για να πραγματοποιηθούν εστιάζουν στην ισορροπία που υπάρχει στα παιχνίδια, την οποία θα σχολιάσουμε παρακάτω.

Επιπρόσθετα παίζει σημαντικό ρόλο στην παγκόσμια διπλωματία και στις πολεμικές στρατηγικές, επηρεάζοντας τη μοίρα των διαφόρων χωρών ακόμη και αν δεν είναι άμεσα ορατή.

Χρησιμοποιείται όμως και στην Πολιτική Οικονομία και ειδικά στη θεωρία της συλλογικής δράσης (Collective action), όπου εξηγεί ενδεχόμενα συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Αυτό βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με τον ρόλο του κράτους και των θεσμών σε θέματα συνεργασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η παροχή δημόσιων αγαθών και η φορολογία.

Στη βιολογία η θεωρία παιγνίων έχει χρησιμοποιηθεί για να κατανοήσουμε διάφορα φαινόμενα. Πρωτοχρησιμοποιήθηκε για να εξηγήσει την εξέλιξη(και την σταθερότητα) της αναλογίας 1 προς 1 στα φύλα. Ο Ronald Fisher (1930) πρότεινε ότι αυτή η αναλογία είναι αποτέλεσμα εξελικτικών δυνάμεων που δρουν μεμονωμένα, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν τον αριθμό των εγγονιών! Συμπληρωματικά οι επιστήμονες προσπάθησαν να εξηγήσουν την εμφάνιση της επικοινωνίας στα ζώα, ενώ ανέλυσαν και την επιθετική συμπεριφορά τους.

Είναι ξεκάθαρο ότι μπορούμε να αναφέρουμε άπειρες εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων σε διάφορους τομείς ακόμη και στην καθημερινότητα μας, από τα πιο πολύπλοκα έως τα πιο απλά όπως για παράδειγμα πιο αυτοκίνητο να αγοράσουμε, πως θα αξιοποιήσουμε τον ελεύθερο χρόνο μας ακόμα και το είδος των ενδυμάτων που θα επιλέξουμε.

2.4 Βασικές έννοιες

Θεμέλιο λίθο στην θεωρία παιγνίων αποτελούν τα βασικά χαρακτηριστικά του παιγνίου. Ως στοιχεία του παιγνίου θεωρούνται το σύνολο των παικτών, το σύνολο των πιθανών ενεργειών που θα πραγματοποιήσουν οι παίκτες(οι στρατηγικές τους), οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, τα αποτελέσματα που μπορεί να αποκομίσει ο παίκτης για κάθε ενέργεια του, καθώς επίσης και οι προτιμήσεις των παικτών με βάσει τα αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα που μπορεί να αποκομίσει ο παίκτης (outcome), εξαρτάται από τις στρατηγικές που θα ακολουθήσει και από τις αποδόσεις που μπορεί να λάβει. Η απόδοση (payoff), είναι η αριθμητική αποτίμηση των στόχων του, η χρησιμότητα που θα αποκτήσει όταν το παιχνίδι θα τελειώσει.

Με τον όρο στρατηγική ορίζουμε το σύνολο των κανόνων σχετικά με το ποια επιλογή πρέπει να ακολουθήσει ο παίκτης, ποιες είναι οι επιλογές του στο κάθε παίγνιο ξεχωριστά, έχοντας όμως υπόψη του και όλες τις κινήσεις του αντιπάλου.

Μια διάκριση που μπορεί να γίνει στις στρατηγικές είναι σε αμιγείς “pure” και μικτές “mixed” στρατηγικές. Μια αμιγής(καθαρή) στρατηγική είναι εκείνη στην οποία κάθε μία από τις δυνατές επιλογές που έχει ο παίκτης επιλέγεται στο ακέραιο. Αντίθετα μικτή είναι η στρατηγική η οποία περιλαμβάνει συνδυασμό επιλογών, από τις οποίες τουλάχιστον μία επιλέγεται με μη ακέραιες τιμές. Οι μεικτές στρατηγικές δηλαδή καθορίζουν ότι η στρατηγική που θα διαλέξει ο παίκτης θα επιλεγεί τυχαία από το σύνολο των καθαρών στρατηγικών που έχει, με κάποια πιθανότητα. Επομένως μια μικτή στρατηγική είναι μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις καθαρές στρατηγικές που έχει ο παίκτης.

Ένα παίγνιο στο οποίο οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα, μπορεί να απεικονιστεί ως “κανονική”(normal) ή “στρατηγική”(strategic) μορφή χρησιμοποιώντας έναν πίνακα ο οποίος συσχετίζει τις στρατηγικές των παικτών με τις αποδόσεις που θα έχουν.

Ένα στρατηγικό παιχνίδι είναι ένα μοντέλο όπου έχουμε Ν παίκτες, καθένας από τους οποίους διαλέγει μόνο μία στρατηγική, η οποία δεν αλλάζει. Σε ένα στρατηγικό παιχνίδι υπάρχουν διάφορες συμπεριφορές παικτών:

- Το παιχνίδι παίζεται μόνο μία φορά.
- Κάθε παίκτης “ξέρει” το παιχνίδι(κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις κινήσεις και τις αποδόσεις του παιχνιδιού).
- Οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Ένας ορθολογικός παίκτης είναι ένας παίκτης που παίζει εγωιστικά, θέλοντας να μεγιστοποιήσει το κέρδος του στο παιχνίδι, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζει πως και οι αντίπαλοι του είναι ορθολογιστές.
- Όλοι οι παίκτες διαλέγουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα χωρίς όμως να γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων παικτών.

A \ B	β1	β2
α1	5, 5	-100, 4
α2	0, 1	0, 0

Πίνακας 2.4.1 Παίγνιο κυριαρχίας κινδύνου “Risk Dominance”

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την κανονική μορφή των παιγνίων, παραθέτουμε το παρακάτω παίγνιο. Το συγκεκριμένο παίγνιο είναι δύο γραμμών επί δύο στηλών και έχουμε δύο παίκτες, τον Α και τον Β. Ο Α παίκτης ονομάζεται “παίκτης γραμμής”, ενώ ο Β “παίκτης στήλης”. Οι επικεφαλίδες των στηλών και των γραμμών είναι οι στρατηγικές του κάθε παίκτη. Η πρώτη στρατηγική επιλογή του Α παίκτη είναι η πρώτη γραμμή, η οποία ονομάζεται α1, ενώ η δεύτερη στρατηγική του είναι η (α2) . Ομοίως για τον παίκτη Β η πρώτη στρατηγική επιλογή του είναι η πρώτη στήλη, δηλαδή η (β1) , ενώ η δεύτερη στρατηγική του είναι η δεύτερη στήλη, η β2. Στα κελιά του κάθε πίνακα υπάρχουν αριθμοί που δείχνουν το κέρδος (όφελος, payoff) κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Το πρώτο νούμερο σε κάθε κελί αντιστοιχεί στον παίκτη γραμμής, ενώ το δεύτερο ανήκει στον παίκτη στήλης.

Το παιχνίδι ξεκινάει και οι παίκτες διαλέγουν ταυτόχρονα μία στρατηγική. Το κελί που αντιστοιχεί στο σημείο τομής των δύο επιλογών δείχνει το κέρδος που έχουν οι δύο παίκτες. Αν για παράδειγμα, ο Α παίκτης διαλέξει την πρώτη στρατηγική επιλογή (α1) και ο Β επίσης την πρώτη (β1) τότε το κέρδος τους θα είναι 5 μονάδες για τον καθένα.

Οι παίκτες πριν πάρουν κάποια απόφαση και διαλέξουν ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν, κοιτάνε ποια στρατηγική πραγματικά τους ωφελεί, με ποια θα έχουν το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος ότι και να κάνει ο αντίπαλος τους. Σε αυτό το σημείο η επιλογή γίνεται με βάση την κυριαρχία των στρατηγικών.

Μια στρατηγική λέμε ότι είναι κυρίαρχη “dominant” εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών έχει το μεγαλύτερο όφελος σε σχέση με τις υπόλοιπες. Είναι πάντα καλύτερη ότι και να κάνει ο άλλος παίκτης αφού έχει το μεγαλύτερο κέρδος σε σχέση με τις άλλες εναλλακτικές επιλογές του. Αντιθέτως μια στρατηγική χαρακτηρίζεται ως κυριαρχούμενη “dominated” όταν υπάρχει κάποια άλλη στρατηγική που είναι πάντα καλύτερη ότι και να κάνει ο άλλος παίκτης.

Στο παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε πως για τον Β παίκτη η στρατηγική (β1) κυριαρχεί της στρατηγικής (β2) , αφού (5>4)και (1>0), δηλαδή αν ο Α παίκτης διαλέξει την (α1) στρατηγική, ο Β θα επιλέξει την (β1) και το ίδιο θα κάνει αν ο Α διαλέξει την (α2). Επομένως η καλύτερη κίνηση του είναι να επιλέξει την (β1) στρατηγική.

Για τις στρατηγικές του παίκτη Α όμως δεν παρατηρούμε το ίδιο. Αυτό γιατί αν ο Α ξέρει πως ο Β θα επιλέξει την (β1) στρατηγική, τον συμφέρει να διαλέξει την (α1), αφού (5>0) εάν όμως ο Β διαλέξει την (β2), ο Α δεν θα επιλέξει πάλι την (α1) αλλά την (α2) αφού (-100<0). Επομένως για τον Α παίκτη καμιά στρατηγική δεν κυριαρχεί της άλλης.

Αν κάποιος παίκτης έχει κυρίαρχη στρατηγική την ακολουθεί και τότε το παιχνίδι έχει λύση κυρίαρχης στρατηγικής. Όπως είδαμε όμως είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχουν πάντα κυρίαρχες στρατηγικές αλλά να υπάρχουν ασθενείς κυριαρχίες.

Μια στρατηγική κυριαρχεί ασθενώς "weakly dominates" εάν για κάθε μία από τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη έχει τουλάχιστον ίση απολαβή για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των υπολοίπων παικτών και καλύτερη απολαβή για τουλάχιστον έναν συνδυασμό στρατηγικών των άλλων παικτών. Όλες οι άλλες εναλλακτικές στρατηγικές ονομάζονται ασθενώς κυριαρχούμενες "weakly dominated strategy". Στο παραπάνω παίγνιο η στρατηγική (α1) κυριαρχεί ασθενώς της α2 αφού (5>-100) και (0=0).

Ο συνδυασμός των στρατηγικών που επιλέχθηκαν από κάθε παίκτη μας δίνει την έννοια της ισορροπίας "equilibrium". Η ισορροπία στο παίγνιο δηλαδή προέρχεται από τις καλύτερες στρατηγικές μία για κάθε παίκτη στο παιχνίδι. Στο παράδειγμα μας η ισορροπία βρίσκεται στο κελί (α1,β1) δηλαδή στη λύση (5, 5) αφού η καλύτερη επιλογή για τον Α παίκτη είναι η α1, για τον Β παίκτη η β1 και η τομή τους είναι το κελί (α1, β1).

Για να βρούμε αυτήν την ισορροπία εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη τότε επιλέγεται, όπως αναφέραμε και παραπάνω. Σε περίπτωση όμως που δεν υπάρχει, ο περιορισμός των κυριαρχούμενων στρατηγικών "dominated" μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων κυριαρχούμενων στρατηγικών, οι οποίες με τη σειρά τους θα απαλειφθούν κι αυτές. Ξεκινώντας το παιχνίδι διαγράφονται μία μια οι ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές από τις επιλογές του παίκτη και αυτό συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί μόνο μία στρατηγική για κάθε παίκτη.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών "Iterated Elimination of Dominated Strategies, IEDS". Η διαδικασία αυτή είναι απολύτως λογική αφού και οι παίκτες είναι λογικοί και γνωρίζουν πως και οι αντίπαλοι τους είναι λογικοί γεγονός που δείχνει ότι κανένας από αυτούς δεν θα επιλέξει μια στρατηγική η οποία είναι ασθενώς κυριαρχούμενη. Αν απαλείψουμε μόνο κυριαρχούμενες στρατηγικές, η σειρά της απαλοιφής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Ο κίνδυνος υπάρχει μόνο αν απαλείψουμε με λάθος σειρά ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, οδηγώντας μας σε λάθος αποτέλεσμα. Σωστή σειρά θεωρείται η ταυτόχρονη απαλοιφή για όλους τους παίκτες σε κάθε γύρο.

Η σημαντικότερη έννοια ισορροπίας στη θεωρία παιγνίων είναι η ισορροπία Nash που θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάλυση παιγνίων

3.1 Ταξινόμηση παιγνίων

Τα παίγνια ταξινομούνται συχνά σε διάφορα είδη μέσω ποικίλων κριτηρίων. Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες κατηγορίες. Αρχικά ένα βασικό κριτήριο, βάσει του οποίου μπορούμε να ταξινομήσουμε ένα παίγνιο είναι ο αριθμός των παικτών που συμμετέχουν. Αν λοιπόν συμμετέχουν δύο παίκτες τα παίγνια ονομάζονται «παίγνια δύο παικτών» , ενώ εάν συμμετέχουν n παίκτες έχουμε τα «παίγνια n παικτών» , όπου n>2. Η παρουσία δύο παικτών είναι η ελάχιστη απαίτηση για να έχουμε φαινόμενα ανταγωνισμού και συνεργασίας. Η παρουσία τριών ή περισσοτέρων παικτών οδηγεί περαιτέρω και στην δυνατότητα σχηματισμού συνασπισμών. Όπου μια ομάδα από δύο ή περισσότερους παίκτες ενώνουν τα ενδιαφέροντα τους και εναρμονίζουν τις στρατηγικές τους. Έτσι έχουμε «παίγνια με ή άνευ συνεργασίας», μια ταξινόμηση που βασίζεται στο κατά πόσο οι παίκτες πριν παίξουν το παίγνιο μπορούν να μορφώσουν συνασπισμούς και να επιτύχουν δεσμευτικές συμφωνίες για τις στρατηγικές.

Ακόμη μπορούμε να ταξινομήσουμε τα παίγνια σύμφωνα με το εάν η σειρά που λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο ή όχι. Έτσι έχουμε τα «δυναμικά» παίγνια όπου η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο και τα «στατικά» παίγνια, στα οποία η σειρά με τη οποία ο παίκτης παίρνει τις αποφάσεις, δεν έχει σημασία.

Επιπλέον, ο αριθμός στρατηγικών ταξινομεί τα παίγνια σε «πεπερασμένα» και σε «μη πεπερασμένα» ή σε απειροπαίγνια. Επειδή οι αμοιβές ή οι απώλειες δύο παικτών, με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών, μπορούν να διαταχθούν σε πίνακες ή μήτρες, τα παίγνια αυτά είναι γνωστά ως μητρικά ή πινακοπαίγνια.

Ένας άλλος τρόπος ταξινόμησης των παιγνίων είναι ως προς τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων αμοιβής ή απώλειας. Έτσι σε παίγνια δύο παικτών, όπου η αμοιβή του ενός είναι ίση με την απώλεια του άλλου και προέρχεται από αυτή, οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και οποιαδήποτε συνεργασία είναι ανέφικτη. Τα παίγνια αυτά ονομάζονται παίγνια «μηδενικού αθροίσματος» αφού το άθροισμα των αμοιβών είναι μηδενικό.

Στα παίγνια γενικού μη μηδενικού αθροίσματος, υπάρχουν συνήθως στοιχεία ανταγωνισμού όσο και συνεργασίας. Έχουμε δύο ακραίες περιπτώσεις. Στην ειδική περίπτωση παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και η αμοιβή του ενός σημαίνει απώλεια για τον άλλον, ενώ στην ειδική περίπτωση παιγνίων σταθερής διαφοράς, οι παίκτες πρέπει να συνεργασθούν διότι είτε κερδίζουν είτε χάνουν μαζί.

Τέλος υπάρχει και μια ακόμη κατηγορία παιγνίων η οποία καθορίζεται από το εάν ο κάθε παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές. Πιο συγκεκριμένα, εάν ο παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές (π.χ ή την 1 ή την 2,…) λέμε ότι ο παίκτης παίζει με καθαρή στρατηγική, οπότε και αυτού του είδους τα παίγνια ονομάζονται παίγνια «καθαρής στρατηγικής». Στην αντίθετη περίπτωση, οπού ο κάθε παίκτης είναι δυνατόν να επιλέξει έναν συνδυασμό στρατηγικών, λέμε ότι έχουμε παίγνια «μικτής στρατηγικής».

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι περιγραφής και ανάλυσης των παιγνίων. Λέμε ότι το παίγνιο είναι σε εκτεταμένη μορφή όταν οι κανόνες που διέπουν το παίγνιο περιγράφεται μέσω ενός δένδρου, του δένδρου παιγνίου, όπου οι κινήσεις δηλώνονται ως κλάδοι και οι παίκτης που έχει σειρά για να κάνει μια κίνηση ως κορυφή ή κόμβος. Παριστάνονται επίσης, οι πληροφορίες και οι επιλογές που είναι στην διάθεση των παικτών, όπως και οι τελικές αμοιβές ή απώλειες όλων των παικτών στο τέλος του «παιξίματος».

Ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή είναι τέλειας πληροφόρησης εάν δεν γίνονται ταυτόχρονες κινήσεις και για κάθε κίνηση όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις επιλογές που έγιναν σε όλες τις προηγούμενες κινήσεις, έστω και αν οι κινήσεις ήταν τυχαίες. Το σκάκι είναι παράδειγμα παιγνίου τέλειας πληροφόρησης, ενώ το πόκερ δεν είναι. Η εκτεταμένη μορφή των παιγνίων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάπτυξη προγραμμάτων υπολογιστών που παίζουν επιτραπέζια παιχνίδια, όπως σκάκι και τάβλι.

Ένας δεύτερος τρόπος περιγραφής παιγνίου απαιτεί την θεώρηση όλων των δυνατών στρατηγικών κάθε παίκτη και γίνεται μέσω της δήλωσης των αμοιβών ή απωλειών των παικτών, οι οποίες είναι αποτέλεσμα όλων των εναλλακτικών συνδυασμών των στρατηγικών που επιλέγουν. Έτσι, π.χ. τα πεπερασμένα παίγνια δύο παικτών περιγράφονται συνήθως με την βοήθεια δύο μητρών (πινάκων) και τότε μιλάμε για τα διμητρικα παίγνια ή διπινακοπαίγνια. Οι μήτρες αυτές παρουσιάζουν μέσω των στοιχείων τους την αμοιβή ή την απώλεια των παικτών κάθε ζεύγους στρατηγικών, όπου οι στρατηγικές του ενός αντιστοιχούν στις γραμμές των πινάκων, ενώ οι στρατηγικές του άλλου στις στήλες.

Δεν είναι απαραίτητο να περιγράψουμε ένα παίγνιο αποκλειστικά με την βοήθεια μητρών. Εάν, π.χ ο αριθμός των στρατηγικών του κάθε παίκτη δεν είναι πεπερασμένος, τότε οι στρατηγικές αυτές θα μπορούσαν να περιγραφούν σαν στοιχεία κάποιου συνόλου, ενώ οι αμοιβές ή οι απώλειες των παικτών θα μπορούσαν να εκφρασθούν σαν πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων των στρατηγικών. Όταν η περιγραφή ενός παιγνίου γίνεται με αυτό τον τρόπο λέμε ότι το παίγνιο είναι σε κανονική μορφή. Σε αυτή την μορφή, ο δυναμικός χαρακτήρας των παιγνίων υποβαθμίζεται. Έχουμε δηλαδή παίγνια ενός «παιξίματος», όπου οι παίκτες ενεργούν μόνο μια φορά και χωρία κάποια εξαρτώμενη σειρά αποφάσεων. Παίγνια με αυτή την μορφή είναι με άλλα λόγια στατικά. Τα παίγνια σε κανονική μορφή είναι συνήθως πιο κατάλληλα στην περιγραφή περίπλοκων πραγματικών εφαρμογών της αγοράς, της οικονομίας κ.α. Είναι επίσης πιο κατάλληλα για την θεωρητική και αλγοριθμική μελέτη, ιδίως στην περίπτωση που τα σύνολα των στρατηγικών δεν είναι πεπερασμένα.

3.1.1. Παίγνια δύο παικτών

Για να πετύχει το στόχο του ο παίκτης ακολουθεί μία στρατηγική. Με τον όρο στρατηγική περιγράφεται το σύνολο των επιλογών που κάνει ο παίκτης από την αρχή μέχρι το τέλος του παιγνίου. Η στρατηγική που θα υιοθετήσει μπορεί να είναι αμιγής ή και μεικτή.

Αμιγής στρατηγική (pure strategy) είναι εκείνη, στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις δυνατές επιλογές του στο ακέραιο, δηλαδή με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, ενώ δεν επιλέγει καμιά από τις υπόλοιπες.

Αντίθετα, η μικτή στρατηγική (mixed strategy) περιλαμβάνει συνδυασμό στρατηγικών, καθεμία από τις οποίες επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας. Όπως προαναφέρθηκε, μία κατηγορία παιγνίων είναι τα παίγνια σταθερού αθροίσματος δύο παικτών. Δηλαδή για οποιοδήποτε συνδυασμό στρατηγικών των παικτών το άθροισμα των ανταμοιβών τους είναι μια σταθερά c, θετική ή αρνητική. Όταν η τιμή της σταθεράς είναι θετική, οι παίκτες μοιράζονται κάποια ανταμοιβή, ενώ όταν είναι αρνητική επιβαρύνονται με κάποιο κόστος. Όταν η τιμή της σταθεράς είναι ίση με το μηδέν (c =0), τότε μιλάμε για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών. Σε αυτό, το κέρδος του ενός παίκτη είναι ίσο με τη ζημία του συμπαίκτη του. Αντίθετα, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε πρόκειται για παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος. Ένα παίγνιο δύο παικτών περιγράφεται συνήθως με ένα πίνακα αποτελεσμάτων ή πληρωμών ή ανταμοιβών (payoff matrix), δηλαδή ένα πίνακα που δείχνει το αποτέλεσμα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών των παικτών.

3.1.1.1 Παράδειγμα παιγνίου δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παιγνίου δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Η κατηγορία αυτών των παιγνίων παρότι δεν είναι τόσο διαδεδομένη όσο τα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος, παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον. Ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό των παιγνίων που παρουσιάζονται είναι πως είναι συμμετρικά. Ένα παίγνιο καλείται συμμετρικό αν για τον πίνακα πληρωμών του ισχύει η σχέση

$$a_{i,j}= -a_{j,i},\ i=1,2,....,m,\ j=1,2,....,n$$

όπου $a_{i,j}$ είναι το στοιχείο του πίνακα της i-σειράς και της j-στήλης. Κάθε συμμετρικό παίγνιο είναι δίκαιο, έχει δηλαδή τιμή παιγνίου μηδέν, και οι στρατηγικές maximin και minimax είναι ίδιες.

3.1.1.2 Παράδειγμα παιγνίου με νομίσματα

Δύο παίκτες κρατούν ο καθένας από ένα νόμισμα και το δείχνουν ταυτόχρονα. Αν και τα δύο νομίσματα "δείξουν" το ίδιο, δηλαδή και τα δύο κεφαλή ή και τα δύο γράμματα, ο παίκτης Α παίρνει και τα δύο νομίσματα, διαφορετικά τα παίρνει ο Β.

Είναι φανερό ότι το παίγνιο αυτό είναι δίκαιο, υπό την έννοια ότι κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει κάποιο πλεονέκτημα έναντι του άλλου. Ειδικά αν το παίγνιο παίζεται μία φορά κανείς από τους δύο δε μπορεί να εφαρμόσει μία καλή στρατηγική που θα βελτιώσει τη θέση του, ή θα κάνει κάποια λανθασμένη κίνηση που θα την επιδεινώσει.

Η κατάσταση ωστόσο αλλάζει αν το παίγνιο παιχτεί πολλές φορές. Παρότι το παίγνιο είναι συμμετρικό, και κανείς από τους δύο δε μπορεί να εφαρμόσει κάποια στρατηγική που θα του εξασφαλίσει κάποιο πλεονέκτημα, υπάρχει το ενδεχόμενο λάθος χειρισμού. Τέτοια περίπτωση είναι ο παίκτης Α να επιλέξει κάποιες συνεχόμενες φορές την κεφαλή του νομίσματος. Τότε ο παίκτης Β σαφώς θα αποκτήσει ένα πλεονέκτημα παίζοντας γράμματα.

Είναι ζήτημα απλής λογικής να αντιληφθεί κάποιος ότι πρέπει να παίζει 50 % κεφαλή και 50% γράμματα, κάνοντας έτσι την επιλογή του μη προβλέψιμη. Ένας τρόπος για να το κάνει αυτό είναι απλώς να στρίβει το νόμισμα, αντί να αποφασίζει κάθε φορά ποια πλευρά θα δείξει.

Τις παραπάνω λογικές διαπιστώσεις επιβεβαιώνει και μια πρόχειρη ματιά στον πίνακα πληρωμών του παιγνίου, απ' όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι το παίγνιο είναι συμμετρικό, και ότι οι αμιγείς στρατηγικές maximin και minimax δε δίνουν σταθερή λύση. Η λύση δίνεται με μικτή στρατηγική, που εύκολα υπολογίζεται ότι και για τους δύο παίκτες είναι η [1/2,1/2].

		Παίκτης Β	
		Κορώνα	Γράμματα
Παίκτης Α	Κορώνα	-1	1
	Γράμματα	1	-1

3.1.1 Πίνακας παιγνίου « κεφαλή-γράμματα »

3.1.2 Συνεργατικά και Ανταγωνιστικά παίγνια

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος που εξετάζονται αναλυτικά στις παρακάτω ενότητες επιτρέπουν την εύρεση καθολικά αποδεκτών λύσεων, που αφήνουν ικανοποιημένους και τους δύο παίκτες. Υπό αυτή την έννοια παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από τα πραγματικά προβλήματα της καθημερινότητας, που συνήθως δεν καταλήγουν σε αμοιβαία αποδεκτές λύσεις.

Αντίθετα στα παίγνια μη- μηδενικού αθροίσματος (non-zero sum games), ανεξαρτήτως πολυπλοκότητας, σπάνια υπάρχει κοινά αποδεκτή λύση. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν υπάρχει κάποια στρατηγική που να υπερέχει ξεκάθαρα έναντι των υπολοίπων ώστε να μπορεί να χαρακτηριστεί βέλτιστη, όπως επίσης και διότι τα οφέλη των παικτών δεν είναι δυνατόν να ποσοτικοποιηθούν και ως εκ τούτου να προσδιοριστούν με ακρίβεια.

Γενικά, σε ένα παίγνιο δύο παικτών υπάρχουν τόσο ανταγωνιστικά στοιχεία όσο και στοιχεία συνεργασίας των δύο πλευρών καθώς τα συμφέροντα μπορεί να είναι άλλοτε αντικρουόμενα και άλλοτε κοινά. Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δεν υπάρχει κανένα κοινό συμφέρον. Σε πλήρη αντιδιαστολή είναι τα παίγνια πλήρους συνεργασίας (cooperative games), όπου οι δύο παίκτες έχουν μόνο κοινά συμφέροντα. Τέτοια περίπτωση αποτελούν ο κυβερνήτης ενός αεροπλάνου και ο συντονιστής του πύργου ελέγχου, οι οποίοι ουσιαστικά «παίζουν» ένα παίγνιο πλήρους συνεργασίας με ένα κοινό στόχο, την προσγείωση του αεροπλάνου. Η επίλυση αυτών των παιγνίων είναι σχετικά εύκολη και απαιτεί τον αποδοτικό συνδυασμό των κινήσεων των δύο παικτών.

Όλα τα υπόλοιπα παίγνια δύο παικτών αποτελούν μία ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Παίγνια που συνδυάζουν ανταγωνιστικά στοιχεία και στοιχεία συνεργασίας είναι γενικά πιο πολύπλοκα, όμως και πιο ενδιαφέροντα καθώς συναντώνται πολύ πιο συχνά στην καθημερινή ζωή. Τέτοιες περιπτώσεις αποτελούν ένας πωλητής αυτοκινήτων που διαπραγματεύεται με έναν πελάτη. Και οι δύο επιθυμούν την ολοκλήρωση της αγοραπωλησίας, τους χωρίζει όμως το αντίτιμο. Άλλη παρόμοια περίπτωση μπορεί να αποτελεί η συγχώνευση δύο τραπεζών. Και στις δύο περιπτώσεις τα κίνητρα των δύο παικτών είναι πολύπλευρα.

Υπάρχουν ωστόσο και καταστάσεις, στις οποίες οι δύο παίκτες έχουν κοινά συμφέροντα, παρότι αυτά δεν είναι ορατά εκ πρώτης όψεως. Για δύο κράτη που βρίσκονται σε εμπόλεμη κατάσταση, κοινό συμφέρον μπορεί να αποτελεί η κατάπαυση του πυρός, καθώς και η μη χρήση τοξικών αερίων και πυρηνικών όπλων. Όπως λοιπόν εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς τα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος παρουσιάζουν μεγάλη συσχέτιση με την πραγματικότητα, και βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινότητας. Χαρακτηριστικά πεδία εφαρμογών τους αποτελούν οι πολιτικές επιστήμες, η οικονομία, η φιλοσοφία και η βιολογία, καθώς και η πληροφορική. Η κατανόηση τους ωστόσο απαιτεί εις βάθος ανάλυση και δε συμπλέει με τους σκοπούς της εργασίας.

3.1.2.1 Παίγνιο συνεργασίας

Το παίγνιο συνεργασίας αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παίγνιο δύο παικτών, όπου ο κάθε παίκτης έχει δύο επιλογές . Ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου είναι ο παρακάτω και για τις ανταμοιβές ισχύουν οι σχέσεις $A>C$ και $D>B$. Είναι λοιπόν φανερό ότι για να αποκομίσουν μεγαλύτερο όφελος οι δύο παίκτες πρέπει να συνεργαστούν.

	Ο παίκτης Β επιλέγει την στρατηγική 1	Ο παίκτης Β επιλέγει την στρατηγική 2
Ο παίκτης Α επιλέγει τη στρατηγική 1	(A, A)	(B, C)
Ο παίκτης Α επιλέγει τη στρατηγική 2	(C, B)	(D, D)

3.1.2 Γενικός πίνακας πληρωμών ενός παιγνίου συνεργασίας

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν δύο εταιρίες λογισμικού, οι οποίες πρέπει να επιλέξουν μεταξύ δύο τεχνολογιών για την παραγωγή του αντίστοιχου hardware. Αν αποφασίσουν να επιλέξουν δύο διαφορετικές τεχνολογίες και συνεπώς διαφορετικά προϊόντα, το καταναλωτικό κοινό θα βρεθεί σε σύγχυση και οι πωλήσεις θα είναι μικρότερες. Αν επιλέξουν κοινή τεχνολογία, θα υπάρξουν περισσότερες πωλήσεις και μεγαλύτερα κέρδη. Συνεπώς τα δύο ζεύγη ισορροπιών Nash του παιγνίου είναι τα (A,A) και (D,D).

3.1.2.2 Ανταγωνιστικό παίγνιο

Ένα χαρακτηριστικό παίγνιο ανταγωνισμού μη-μηδενικού αθροίσματος είναι το εξής. Δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα έναν ακέραιο αριθμό από το 0 έως το 3 και κερδίζουν ποσό ίσο με το μικρότερο αριθμό του ζεύγους. Ωστόσο ο παίκτης που επιλέγει το μεγαλύτερο αριθμό του ζεύγους χάνει δύο ευρώ, τα οποία κερδίζει ο αντίπαλος. Ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου είναι ο παρακάτω.

	Ο παίκτης Β επιλέγει '0'	Ο παίκτης Β επιλέγει 1'	Ο παίκτης Β επιλέγει 2'	Ο παίκτης Β επιλέγει 3'
Ο παίκτης Α επιλέγει '0'	0, 0	2, -2	2, -2	2, -2
Ο παίκτης Α επιλέγει '1'	-2, 2	1, 1	3, -1	3, -1
Ο παίκτης Α επιλέγει '2'	-2, 2	-1, 3	2, 2	4, 0
Ο παίκτης Α επιλέγει '3'	-2, 2	-1, 3	0, 4	3, 3

3.1.3 Γενικός πίνακας πληρωμών ενός ανταγωνιστικού παιγνίου

Το παίγνιο αυτό έχει μία και μοναδική ισορροπία Nash αμιγούς στρατηγικής, που είναι η επιλογή του 0 και από τους δύο παίκτες, και το ζεύγος ισορροπίας (0,0) απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα. Οποιαδήποτε άλλη επιλογή στρατηγικών από τους δύο παίκτες επιδέχεται

βελτιώσεως αν ο ένας από τους δύο αντιπάλους επιλέξει ένα μικρότερο ακέραιο αριθμό από τον αντίπαλό του.
Για παράδειγμα ας υποτεθεί ότι οι δύο παίκτες έχουν αρχικά επιλέξει και οι δύο τον αριθμό '2'. Είναι φανερό ότι ο παίκτης Α θα θελήσει να διαφοροποιήσει τη στρατηγική του επιλέγοντας τον αριθμό '1'(κυανό κελί), και αντίστοιχα, ο παίκτης Β λογικότατα θα θελήσει και αυτός να επιλέξει τον αριθμό '1' προκειμένου να αυξήσει το κέρδος του. Συνεπώς το ζεύγος (2,2), που απεικονίζεται με πράσινο χρώμα στον πίνακα πληρωμών, δεν αποτελεί ζεύγος ισορροπίας Nash καθώς και οι δύο παίκτες αποκομίζουν οφέλη διαφοροποιώντας τις στρατηγικές τους.

Ας υποτεθεί τώρα ότι το παίγνιο διαφοροποιούταν λίγο ώστε οι δύο παίκτες να κερδίζουν ποσό ίσο με τον κοινό αριθμό επιλογής, και σε διαφορετική περίπτωση τίποτα. Τότε θα παρουσιάζονταν τέσσερις ισορροπίες Nash {(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)} εκ των οποίων οι τρεις είναι ισχυρές και μία ασθενής.

3.1.3 Στρατηγικά και Δυναμικά παίγνια

Σύμφωνα με τη σειρά που παίρνονται οι αποφάσεις. Αν οι αντίπαλοι κινηθούν ταυτόχρονα επιλέγοντας μια στρατηγική στην αρχή του παιχνιδιού, χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι θα πράξει ο άλλος, τότε μιλάμε για "στατικό παίγνιο" ή "στρατηγικό παίγνιο" ή "παίγνιο σε κανονική μορφή". Στην αντίθεση περίπτωση έχουμε τα "δυναμικά παίγνια" ή "παίγνια σε εκτεταμένη μορφή" όπου οι παίκτες έχουν κάποια γνώση για τις προηγούμενες ενέργειες και έτσι η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις έχει σημασία.

3.1.4 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Τα απλούστερα παίγνια στρατηγικής με δύο πρόσωπα είναι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος (two persons zero-sum games). Σε αυτά τα κέρδη του ενός ισούνται με τις ζημιές του άλλου, ενώ πρόσωπα μπορεί να είναι και ολόκληρες ομάδες, των οποίων τα μέλη έχουν ένα και μόνο σκοπό, την αριστοποίηση του κοινού κέρδους.

Ως εκ τούτου παίγνια μηδενικού αθροίσματος ονομάζουμε, τα παίγνια εκείνα όπου η απώλεια του ενός παίκτη είναι η αμοιβή του άλλου, οπότε το άθροισμα τους είναι μηδέν. Φυσικά, τα ενδιαφέροντα των παικτών σ' ένα τέτοιο παίγνιο είναι εντελώς αντίθετα και βρίσκονται σε σύγκρουση. Επομένως, δεν υπάρχει περίπτωση συνεργασίας των παικτών.

3.1.4.1 Παράδειγμα παιγνίου με άρτιους και περιττούς αριθμούς

Οι παίκτες Α και Β ανακοινώνουν συγχρόνως έναν αριθμό. Αν και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι ή περιττοί, τότε ο Α πληρώνει στον Β μια χρηματική μονάδα, ενώ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις ισχύει το αντίθετο. Με βάση τους ανωτέρω κανόνες του παιγνίου προκύπτει ο επόμενος πίνακας κερδών του παίκτη Α.

		Παίκτης Β	
		α	π
Παίκτης Α	α	-1	1
	π	1	-1

3.1.4 Πίνακας κερδών παιγνίου

Όπου με α και π σημειώνονται οι τακτικές των Α,Β να ανακοινώνουν αντίστοιχα άρτιο και περιττό αριθμό. Είναι φανερό ότι ο πίνακας των κερδών του Β σχηματίζεται από αντίθετες τιμές του ανωτέρω πίνακα κερδών του Α.

3.1.4.2 Παράδειγμα παιγνίου “Πέτρα- Ψαλίδι -Χαρτί”

Πρόκειται για ένα πολύ γνωστό παίγνιο, που σίγουρα οι περισσότεροι θα έχουν παίξει στην παιδική τους ηλικία και είναι ευρέως διαδεδομένο σε όλη την υφήλιο. Από τις Η.Π.Α.(rock-paper-scissors) έως την Άπω Ανατολή, δηλαδή την Ιαπωνία (jan-ken-pon) και την Κίνα (ching-chang-wulla).

Δύο παίκτες κοιτάζονται κατάματα και σχηματίζουν με τα δάχτυλά τους ένα από τα τρία σχήματα που περιγράφονται. Μία γροθιά, που αντιστοιχεί στην πέτρα, το δείκτη και το μέσο παρατεταμένους, που συμβολίζουν το ψαλίδι και την παλάμη ανοικτή προς το έδαφος που συμβολίζει το χαρτί. Η πέτρα κερδίζει το ψαλίδι, καθώς μπορεί να το σπάσει, το ψαλίδι κερδίζει το χαρτί καθώς μπορεί να το κόψει, και το χαρτί κερδίζει την πέτρα, αφού μπορεί να τη σκεπάσει. Αν ανακοινώσουν το ίδιο αντικείμενο, τότε κανένας δεν κερδίζει. Ο νικητής κερδίζει 1€, ενώ σε περίπτωση ισοπαλίας, οι παίκτες δε δίνουν ούτε και παίρνουν νομίσματα.

Στο παίγνιο αυτό κανείς από τους δύο παίκτες δε μπορεί να θεωρηθεί ότι κάνει μία καλή ή κακή κίνηση όταν το παίγνιο παίζεται μία μόνο φορά. Όταν όμως το παίγνιο επαναληφθεί αρκετές φορές, οι παίκτες μπορούν να χαράξουν κάποια στρατηγική που θα τους εξασφαλίσει συγκριτικό πλεονέκτημα. Όπως εύκολα θα αντιληφθεί κάποιος, η βέλτιστη στρατηγική στο παίγνιο είναι η τυχαία επιλογή, καθώς κανένας από τους δύο παίκτες δεν έχει λόγο να προτιμήσει συγκεκριμένη επιλογή με δεδομένο ότι καθεμία από αυτές του δίνει ίδια πιθανότητα επιτυχίας. Τη διαπίστωση αυτή έρχεται να επιβεβαιώσει ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου.

		Παίκτης Β		
		Π	Ψ	Χ
	Π	0	1	-1
Παίκτης Α	Ψ	-1	0	1
	Χ	1	-1	0

3.1.5 Πίνακας πληρωμών παιγνίου "Πέτρα – Ψαλίδι- Χαρτί"

3.1.5 Παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος

Όπως προαναφέρθηκε, στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος, το όφελος του ενός παίκτη δεν ισοδυναμεί με τη ζημία του άλλου. Συνεπώς τα στοιχεία του πίνακα πληρωμών δεν είναι δυνατό να είναι ένας αριθμός, αλλά ένα ζεύγος αριθμών. Η γενική μορφή πίνακα πληρωμών ενός παιγνίου δύο παικτών, μη-μηδενικού αθροίσματος είναι η εξής:

		ΠΑΙΚΤΗΣ Β	
		B1	B2
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	A1	(a1, b1)	(a2, b2)
	A2	(a3, b3)	(a4, b4)

3.1.6 Γενικός πίνακας πληρωμών παιγνίου δύο παικτών μη-μηδενικού αθροίσματος

Το επόμενο βήμα είναι να προσδιοριστούν κάποια γενικά κριτήρια λήψης απόφασης. Για παράδειγμα, στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος ο παίκτης Α στόχευε στη μεγιστοποίηση του κέρδους του, και ο παίκτης Β στην ελαχιστοποίηση των απωλειών του, καθότι το όφελος του ενός ήταν η ζημία του άλλου. Στην περίπτωση μας όμως τα οφέλη των δύο παικτών είναι ανεξάρτητα και συνεπώς και οι δύο παίκτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους με γνώμονα το ατομικό τους όφελος.

Η παραπάνω διαπίστωση περιγράφεται από τον κανόνα της ορθολογικότητας (principle of rationality), που υπαγορεύει το εξής: «κάθε παίκτης αποσκοπεί στο μέγιστο δυνατό ίδιο όφελος».

Με απλά λόγια, ο κάθε παίκτης αποφασίζει για τη στρατηγική που θα ακολουθήσει, αδιαφορώντας για το όφελος ή τη ζημία του αντιπάλου του. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι ο παίκτης Α συμμετέχει σε ένα παίγνιο απέναντι σε έναν οποιοδήποτε αντίπαλο, με πίνακα πληρωμών

ΠΑΙΚΤΗΣ Α	A1	a1	a2
	A2	a3	a4

Και αντίστοιχα ο πίνακας πληρωμών για τον παίκτη Β διαμορφώνεται ως εξής:

ΠΑΙΚΤΗΣ Β	B1	b1	b2
	B2	b3	b4

Στόχος και των δύο παικτών είναι η μεγιστοποίηση του ατομικού τους οφέλους, συνεπώς και οι δύο θα ακολουθήσουν maximin στρατηγικές. Το ζεύγος τιμών που θα προκύψει από τις maximin στρατηγικές των δύο παικτών, ονομάζεται αμιγές ζεύγος τιμών του παιγνίου. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται εύκολα οι maximin στρατηγικές και τα αμιγή ζεύγη τιμών κάθε μη-μηδενικού παιγνίου. Ας αναφερθεί όμως και ένα αριθμητικό παράδειγμα που περιγράφει τα παραπάνω.

3.1.5.1 Βελτιστοποίηση κατά Paretto

Στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος υπάρχουν και συγκεκριμένες συνθήκες βελτιστοποίησης. Μία από αυτές είναι και η περίφημη βελτιστοποίηση Pareto, που φέρει την ονομασία της από τον διάσημο Ιταλό κοινωνιολόγο, οικονομολόγο και φιλόσοφο Fritz Wilfried Pareto, ο οποίος αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο για την εξέλιξη του πεδίου της μικροοικονομίας.

Ορισμός 1

Σε κάθε παίγνιο μη-μηδενικού αθροίσματος, το ζεύγος τιμών (a,b) θεωρείται βέλτιστο του (a’,b’), αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις :

$a > a'$ και $b \geq b'$, ή, $a \geq a'$ και $b > b'$

Για παράδειγμα, το ζεύγος (3,2) είναι βέλτιστο κατά Pareto καθενός από τα ζεύγη (1,2), (3,1) και (2,2). Το ζεύγος όμως ενός παιγνίου θεωρείται βέλτιστο κατά Pareto αν στο παίγνιο δεν υπάρχει κανένα άλλο ζεύγος με μεγαλύτερο όφελος για κάποιον από τους δύο παίκτες.

Στο παίγνιο μη-μηδενικού αθροίσματος του παρακάτω πίνακα, και τα δύο ζεύγη τιμών (2,3) και (1,5) είναι βέλτιστα κατά Pareto, διότι κάθε ένα από αυτά είναι βέλτιστο ενός τουλάχιστον ακόμη ζεύγους (των (2,2) και (0,3) αντίστοιχα σύμφωνα με την παραπάνω σχέση.

(-2,3)	(1, 5)
(2, 2)	(0, 3)

Αντίθετα, στο παράδειγμα 2.7 το ζεύγος (3,5) αποτελεί και τη μοναδική βέλτιστη κατά Pareto τιμή του παιγνίου, καθώς επαληθεύει τη σχέση (2.14) στη σύγκριση με κάθε ένα από τα έτερα ζεύγη του πίνακα, (2,3), (2,2), (1,3).

3.1.5.2 Ισορροπία Nash

Στη θεωρία παιγνίων μία πολύ σημαντική παράμετρος επίλυσης ενός παιγνίου μη μηδενικού αθροίσματος με δύο ή περισσότερους παίκτες, αποτελεί η ισορροπία του Nash, που φέρει την ονομασία της από το διάσημο μαθηματικό και οικονομολόγο John Forbes Nash ο οποίος μάλιστα τιμήθηκε το 1994 με το βραβείο Nobel για αυτή του την πρόταση.

Η ισορροπία του Nash είναι μία κατάσταση στην οποία κάθε παίκτης έχει πληροφόρηση για τις στρατηγικές του αντιπάλων του, κανένας όμως εκ των παικτών δεν επωφελείται αν αλλάξει μόνο ο ίδιος στρατηγική. Αν λοιπόν όλοι οι παίκτες έχουν επιλέξει μία στρατηγική, και ενδεχόμενη αλλαγή στρατηγικής από έναν παίκτη-με ταυτόχρονη διατήρηση στρατηγικής από τους υπόλοιπους- δεν του αποφέρει όφελος , τότε το σύνολο των επιλεγμένων στρατηγικών και των αντίστοιχων τιμών συνιστούν μία ισορροπία Nash.

Με απλά λόγια, σε ένα παίγνιο μη-μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών, ο παίκτης Α και ο παίκτης Β βρίσκονται σε ισορροπία Nash, αν ο παίκτης Α επιλέγει την καλύτερη στρατηγική που μπορεί, λαμβάνοντας υπόψη του την επιλογή του παίκτη Β, και αντίστοιχα ο παίκτης Β επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική του, αξιολογώντας την επιλογή του παίκτη Α. Ομοίως περισσότεροι παίκτες βρίσκονται σε ισορροπία Nash εάν καθένας από αυτούς λαμβάνει την καλύτερη απόφαση που μπορεί, γνωρίζοντας τις επιλογές των αντιπάλων του.

Ωστόσο μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι μία ισορροπία Nash δεν αποφέρει απαραίτητα τα μεγαλύτερα οφέλη σε όλους τους παίκτες που συμμετέχουν, κι αυτό διότι δεν είναι πάντα βέλτιστη κατά Pareto. Σε πολλές περιπτώσεις, όλοι οι παίκτες μπορούν να αυξήσουν τα κέρδη τους αν καταφέρουν να συμφωνήσουν σε ένα σύνολο στρατηγικών, διαφορετικών από την ισορροπία Nash. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα λεγόμενα «καρτέλ», δηλαδή οι συμφωνίες ανάμεσα σε μεγάλους παίκτες της αγοράς για τον προσδιορισμό των τιμών καταναλωτικών αγαθών και υπηρεσιών, που οδηγεί σε μεγιστοποίηση των κερδών των παικτών.

Μετά τη λεκτική περιγραφή της ισορροπίας Nash, μπορούμε πλέον να δώσουμε και το μαθηματικό ορισμό της.

Ορισμός 2

Μία ισορροπία Nash ενός παιγνίου στρατηγικής G ={S_1 ,..., S_n, u_1 ,...,u_n} είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής { s_1^*, s_2^*, ..., s_n^* } τέτοιος ώστε για κάθε παίκτη i να ισχύει:

$$\mathbf{u_1\{ s_1^*,\ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*\ldots, s_n \} \geq u_i\{ s_1^*,\ldots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*\ldots, s_n \}}$$

για κάθε i s∈S .
Με S_1, S_2, …., S_n συμβολίζεται το σύνολο των στρατηγικών των n παικτών ενώ u_i είναι η συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i που είναι μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών u_i : S_1 x S_2 x….x S_n Το καρτεσιανό γινόμενο S_1 x S_2 x….x S_n είναι το σύνολο οριζόντων στρατηγικής του παιγνίου και τα στοιχεία του (s_1 , s_2 , …. , s_n) ονομάζονται ορίζοντες στρατηγικής.

Ο παραπάνω ορισμός στην ουσία απεικονίζει με μαθηματικό τρόπο όλα όσα λεκτικά περιγράφηκαν για την ισορροπία Nash. Η επιλογή δηλαδή από τον παίκτη i οποιασδήποτε άλλης στρατηγικής πλην της s_i^* , με ταυτόχρονη διατήρηση των στρατηγικών της ισορροπίας Nash από τους υπόλοιπους παίκτες, του προσφέρει απόδοση μικρότερη ή ίση από αυτήν της ισορροπίας.

Όταν στη σχέση ισχύει μόνο η ανισότητα, τότε μιλάμε για ισχυρή ισορροπία Nash, ενώ όταν ισχύει και η ισότητα πρόκειται για ασθενή ισορροπία Nash. Αυτό που επίσης πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ένα παίγνιο μπορεί να έχει ισορροπία Nash με χρήση είτε αμιγών είτε μικτών στρατηγικών.

Μάλιστα ο Nash απέδειξε ότι κάθε παίγνιο n παικτών έχει μία τουλάχιστον ισορροπία Nash εάν επιτρέπεται η χρήση μικτών στρατηγικών από τους παίκτες που συμμετέχουν σε αυτό.

3.1.5.3 Παράδειγμα του παιγνίου “Chicken Game”

Το “Chicken Game” είναι ένα πολύ σημαντικό παίγνιο που περιγράφει άριστα την κατάσταση ισχυρού ανταγωνισμού μεταξύ δύο παικτών. Η γενική αρχή του παιγνίου είναι πως ενώ ο κάθε παίκτης προσπαθεί να αποφύγει την υποταγή στον άλλον, εντούτοις το αποτέλεσμα που παρατηρείται σε περίπτωση που κανένας δεν υποχωρήσει είναι το χειρότερο και για τους δύο.

Την ονομασία του την οφείλει στην κινηματογραφική ταινία “Rebel without a Cause”, στην οποία δύο ατίθασοι νεαροί ο James Dean και ο Buzz Gunderson οδηγούν δύο αυτοκίνητα προς ένα γκρεμό. Όποιος από τους δύο εγκαταλείψει πρώτος το αυτοκίνητο του θεωρείται δειλός («κότα»), ενώ ο αντίπαλός του είναι νικητής και κερδίζει το θαυμασμό της Natalie Wood για χάρη της οποίας γίνεται η μονομαχία. Αν όμως κανένας από τους δύο δεν υποχωρήσει, τότε το τέλος είναι ολέθριο και για τους δυο.

Η παραπάνω ονομασία του παιγνίου χρησιμοποιείται συνήθως στις πολιτικές και οικονομικές επιστήμες, όπου μπορεί επίσης να αναφερθεί και ως “War of attrition” ή “Brinkmanship” . Στη βιολογία όμως, και σε άλλες ιατρικές κυρίως επιστήμες, το συναντάμε με την ονομασία “Hawk-Dove” (“Γεράκι-Περιστέρι”), χωρίς όμως άλλες ουσιαστικές διαφορές.

Στην πράξη παρουσιάζει ομοιότητα με το “Prisoner’s Dilemma” διότι και οι δύο παίκτες έχουν κίνητρο να αποκλίνουν από την αμοιβαία αποδεκτή λύση. Η διαφορά έγκειται στο κόστος απόκλισης από την ισορροπία Nash που στην περίπτωση του “Chicken Game” μοιάζει απαγορευτικό. Όπως αποδείχθηκε και πειραματικά αυτός είναι ο λόγος που ακόμη και όταν το παίγνιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές δεν παρατηρούνται συμπεριφορές αντεκδίκησης, και συχνά προτιμάται η χρήση μικτής στρατηγικής.

Εύκολα μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι το κέρδος του νικητή είναι ένα αίσθημα υπεροχής έναντι του αντιπάλου, και αντίστοιχα η ζημία για τον ηττημένο ένα αίσθημα ταπείνωσης, καταστάσεις που δύσκολα μπορούν να ποσοτικοποιηθούν, ώστε να προσδιοριστεί το μέγεθος της νίκης ή της ήττας.

Αυτό που ωστόσο προσδίδει ιδιαίτερο χαρακτήρα στο παίγνιο είναι το αποτέλεσμά του, όταν καμία από τις δύο πλευρές δεν υποχωρήσει. Και αυτό μπορεί να είναι ολέθριο καθώς μπορεί να ταυτιστεί με την απώλεια μιας ανθρώπινης ζωής, ή ακόμη και με τον αφανισμό ενός έθνους, αναλόγως ποιος θεωρείται ως παίκτης.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω θα θεωρήσουμε τον παρακάτω ενδεικτικό πίνακα πληρωμών “Chicken Game”.

		ΠΑΙΚΤΗΣ Β	
		ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ	ΕΠΙΘΕΣΗ
ΠΑΙΚΤΗΣ Β	ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ	(3, 3)	(2, 5)
	ΕΠΙΘΕΣΗ	(5, 2)	(1, 1)

3.1.7 Γενικός πίνακας πληρωμών παιγνίου “Chicken Game”

Από μία πρώτη ανάγνωση του πίνακα γίνεται αντιληπτό ότι δεν πρόκειται για παίγνιο συνεργασίας, αλλά για ανταγωνιστικό παίγνιο. Μάλιστα αποδεικνύεται εύκολα (www.wikipedia.org) ότι όλα τα ανταγωνιστικά παίγνια παρουσιάζουν δύο ισορροπίες Nash με χρήση αμιγούς στρατηγικής καθώς και μία ισορροπία Nash που επιτυγχάνεται με χρήση μικτής στρατηγικής από τον κάθε παίκτη. Στην περίπτωσή μας η ισορροπία Nash επιτυγχάνεται όταν ο κάθε παίκτης υποχωρεί με πιθανότητα 1/5.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι δύο ισορροπίες Nash αμιγούς στρατηγικής του παιγνίου, είναι και βέλτιστες κατά Paretto. Αυτή είναι και η σημαντική διαφορά του “Chicken Game” σε σχέση με το “Prisoner’s Dilemma”, όπου η ισορροπία Nash δεν ικανοποιεί το κριτήριο βελτιστοποίησης του Pareto.

		ΠΑΙΚΤΗΣ Β	
		ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ	ΕΠΙΘΕΣΗ
ΠΑΙΚΤΗΣ Β	ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ	(3, 3)	(0, 5)
	ΕΠΙΘΕΣΗ	(5, 0)	(1, 1)

3.1.8 Γενικός πίνακας πληρωμών παιγνίου “Prisoner’s Dilemma”

Επιχειρώντας μία σύγκριση μεταξύ αυτών των δύο πολύ σπουδαίων παιγνίων, μπορούμε να πούμε ότι και τα δύο προσφέρουν μία αμοιβαία αποδεκτή και συμβιβαστική λύση (ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ, ΥΠΟΧΩΡΗΣΗ), η οποία ενισχύεται υπό το φόβο των συνεπειών μίας αμοιβαία επιθετικής τακτικής (ΕΠΙΘΕΣΗ, ΕΠΙΘΕΣΗ).

Η διαφορά τους εντοπίζεται κυρίως στην αντίδραση του κάθε παίκτη, όταν ο αντίπαλός του αλλάξει στρατηγική. Υποθέτοντας ότι ο παίκτης Α διαφοροποιείται και επιλέγει τη στρατηγική της επίθεσης, η καλύτερη αντίδραση για τον παίκτη Β του “Prisoner’s Dilemma” είναι να επιτεθεί και αυτός, προσδοκώντας στο αποτέλεσμα (1,1) αντί του (5,0). Αντίθετα για τον παίκτη Β του “Chicken Game” η βέλτιστη επιλογή είναι η διατήρηση της στρατηγικής του προτιμώντας το αποτέλεσμα (5,2) από το (1,1). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το “Chicken Game” αποτρέπει τους παίκτες να λειτουργήσουν με το αίσθημα της εκδίκησης.

Οι εφαρμογές του παιγνίου στην καθημερινή ζωή είναι πολλές και σημαντικές. Ως αριθμητικό παράδειγμα θα μελετηθεί η «κρίση της Κούβας», η πρώτη και ίσως πλέον κρίσιμη στιγμή που η ανθρωπότητα βρέθηκε αντιμέτωπη με το φάσμα του πυρηνικού πολέμου.

3.2 Στρατηγικές

3.2.1 Αμιγείς Στρατηγικές

Αμιγής στρατηγική ενός παίκτη Α, είναι ένα πλήρες σχέδιο που προσδιορίζει μια επιλογή σε κάθε ένα από τα σύνολα πληροφόρησης, στην οποία ο παίκτης Α θα πρέπει να πάρει απόφαση στην περίπτωση που του ζητηθεί. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι ο παίκτης από την αρχή του παιγνίου πρέπει να έχει αποφασίσει, τι επιλογές θα κάνει ακόμα και στην περίπτωση που ποτέ δεν θα κλιθεί να τις εφαρμόσει.

Μια αμιγής στρατηγική είναι ένα πλήρες σχέδιο (πλήρες : από την αρχή μέχρι το τέλος του παιχνιδιού για όλες τις πιθανές εκδοχές του). Το παιχνίδι μπορεί να ακολουθήσει έναν συγκεκριμένο δρόμο, όμως υπάρχουν n διαθέσιμοι δρόμοι που θα μπορούσε να ακολουθήσει κανείς. Στους n αυτούς δρόμους που θα μπορούσε να ακολουθήσει ο παίκτης, πρέπει να έχει έτοιμη την απάντηση του την στιγμή μηδέν.

Απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση παιγνίων δύο παικτών αποτελεί ο πίνακας αποτελεσμάτων. Ο κάθε παίκτης μπορεί να πληροφορηθεί για τις ακριβείς ανταμοιβές που προκύπτουν από κάθε δυνατό συνδυασμό στρατηγικών των δύο παικτών. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για τον παίκτη Α που προκύπτουν από κάθε επιλογή των παικτών Α και Β. Οι τιμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν το κέρδος(ή ζημία) του παίκτη Α κι επομένως τη ζημία (ή κέρδος) του παίκτη Β.

		Σρατηγικές του παίκτη Β		
		B1	B1	B3
Στρατηγικές του παίκτη Α	A1	80	40	75
	A2	70	35	30

3.2.1 Πίνακας πληρωμών παιγνίου μη-μηδενικού αθροίσματος

Κατά τη διάρκεια του παιγνίου, οι παίκτες γνωρίζουν τόσο τις δικές τους στρατηγικές, όσο και τις στρατηγικές του αντιπάλου τους. Παρατηρώντας τα στοιχεία του πίνακα πληρωμών εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Α είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του, ενώ του Β η ελαχιστοποίηση των απωλειών του.

Ο παίκτης Α προτιμά να επιλέξει τη στρατηγική Α1 αντί της Α2, καθώς ακόμη και στη χειρότερη περίπτωση το πιθανό ελάχιστο κέρδος του θα είναι μεγαλύτερο σε σχέση με αυτό της στρατηγικής Α2. Αντίστοιχα, η βέλτιστη επιλογή του παίκτη Β είναι η στρατηγική Β2 διότι αυτή ελαχιστοποιεί τις απώλειές του.

Επομένως οι άριστες στρατηγικές των παικτών είναι για τον Α η Α1 και για τον Β η Β2. Οι δύο αυτές στρατηγικές συνθέτουν τη λύση, και καθορίζου την τιμή του παιγνίου (value of the game) που συμβολίζεται με το γράμμα V (για τον πίνακα 2.1 V = 40). Όταν η τιμή του παιγνίου λαμβάνει τιμή ίση με το μηδέν (V = 0), τότε το παίγνιο καλείται δίκαιο.

3.2.2 maximin και minimax στρατηγικές

Οι δύο αυτές στρατηγικές ουσιαστικά περιγράφουν όσα εφαρμόστηκαν στο παραπάνω παράδειγμα. Αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Α είναι η επίτευξη του μέγιστου κέρδους. Για το λόγο αυτό ο Α θα ακολουθεί τη στρατηγική maximin, δηλαδή θα επιλέγει πάντα το μέγιστο (maximum) των ελαχίστων (minimum) στοιχείων των σειρών του πίνακα πληρωμών.

Αντίστοιχα, αντικειμενικός σκοπός του Β είναι η ελάχιστη δυνατή ζημία. Έτσι ο Β θα ακολουθεί τη στρατηγική minimax, δηλαδή θα επιλέγει πάντα το ελάχιστο (minimum) τω μέγιστων (maximum) στοιχείων των στηλών.

Εάν σε ένα παίγνιο το στοιχείο του πίνακα πληρωμών της στρατηγικής maximin είναι το ίδιο με το στοιχείο της στρατηγικής minimax, το στοιχείο αυτό ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή σαγματικό σημείο (saddle point) και δίνει την τιμή του παιγνίου. Ισχύει δηλαδή η σχέση :

$$\mathbf{max_i\ min_j\ a_{ij} = min_j\ max_i\ a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n}$$

Το σημείο ισορροπίας σε ένα παίγνιο, εφόσον φυσικά υπάρχει, είναι πάντα το μικρότερο στοιχείο της σειράς και το μεγαλύτερο της στήλης στην οποία ανήκει. Σημείο ισορροπίας υπάρχει όταν κανένας από τους δύο παίκτες δεν επιθυμεί να αλλάξει τη στρατηγική του, ακόμη κι όταν γνωρίζει τη στρατηγική του αντιπάλου του.

Υπάρχουν ωστόσο και περιπτώσεις παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος όπου το σημείο $max_i\ min_j\ a_{ij}$ δεν είναι ίδιο με το σημείο $min_j\ max_i\ a_{ij}$. Τότε δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας, δηλαδή δεν επιτυγχάνεται σταθερή λύση με τη χρήση αμιγών στρατηγικών. Η επίλυση αυτών των παιγνίων γίνεται με τη χρήση μικτής στρατηγικής.

3.2.3 Κυρίαρχες και κυριαρχούμενες στρατηγικές

Μια στρατηγική s_i* λέγεται ότι κυριαρχεί (dominates) μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, όταν ισχύει:

$$\forall\ \mathbf{s_{-i}: u_i(s_i{*}, s_{-i}) > u_i(s_i^{\#}, s_{-i})}$$

Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* κυριαρχεί μιας στρατηγικής $s_i^{\#}$, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική s_i* έχει μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με την $s_i^{\#}$. Η στρατηγική $s_i^{\#}$ χαρακτηρίζεται ως κυριαρχούμενη στρατηγική (dominated strategy).

Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i λέγεται κυρίαρχη στρατηγική (dominant strategy), εάν ισχύει:

$$\forall\, s_i \neq s_i^*,\ \forall\, s_{-i}:\ u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* είναι κυρίαρχη στρατηγική, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική αυτή έχει τη μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i. Σε μια τέτοια περίπτωση, όλες οι εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i είναι κυριαρχούμενες.

Προφανώς ένας παίκτης που έχει κυρίαρχη στρατηγική, την ακολουθεί. Όταν κάθε παίκτης έχει μια κυρίαρχη στρατηγική, τότε το παιχνίδι έχει λύση κυρίαρχης στρατηγικής. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχουν πάντα κυρίαρχες στρατηγικές για κάθε παίκτη και είναι δυνατόν να μην έχει κανένας παίκτης κυρίαρχη στρατηγική.

Μια στρατηγική κυριαρχεί ασθενώς "weakly dominates" εάν για κάθε μία από τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη έχει τουλάχιστον ίση απολαβή για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των υπολοίπων παικτών και καλύτερη απολαβή για τουλάχιστον έναν συνδυασμό στρατηγικών των άλλων παικτών. Όλες οι άλλες εναλλακτικές στρατηγικές ονομάζονται ασθενώς κυριαρχούμενες "weakly dominated strategy".

Ο συνδυασμός των στρατηγικών που επιλέχθηκαν από κάθε παίκτη μας δίνει την έννοια της ισορροπίας "equilibrium". Η ισορροπία στο παίγνιο δηλαδή προέρχεται από τις καλύτερες στρατηγικές μία για κάθε παίκτη στο παιχνίδι.

Για να βρούμε αυτήν την ισορροπία εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη τότε επιλέγεται, όπως αναφέραμε και παραπάνω. Σε περίπτωση όμως που δεν υπάρχει, ο περιορισμός των κυριαρχούμενων στρατηγικών "dominated" μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων κυριαρχούμενων στρατηγικών, οι οποίες με τη σειρά τους θα απαλειφθούν κι αυτές. Ξεκινώντας το παιχνίδι διαγράφονται μία μια οι ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές από τις επιλογές του παίκτη και αυτό συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί μόνο μία στρατηγική για κάθε παίκτη.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών "Iterated Elimination of Dominated Strategies, IEDS". Η διαδικασία αυτή είναι απολύτως λογική αφού και οι παίκτες είναι λογικοί και γνωρίζουν πως και οι αντίπαλοι τους είναι λογικοί γεγονός που δείχνει ότι κανένας από αυτούς δεν θα επιλέξει μια στρατηγική η οποία είναι ασθενώς κυριαρχούμενη. Αν απαλείψουμε μόνο κυριαρχούμενες στρατηγικές, η σειρά της απαλοιφής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Ο κίνδυνος υπάρχει μόνο αν απαλείψουμε με λάθος σειρά ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, οδηγώντας μας σε λάθος αποτέλεσμα. Σωστή σειρά θεωρείται η ταυτόχρονη απαλοιφή για όλους τους παίκτες σε κάθε γύρο. Η σημαντικότερη έννοια ισορροπίας στη θεωρία παιγνίων είναι η ισορροπία Nash.

Εξετάζοντας και πάλι τον προηγούμενο πίνακα, γίνεται αντιληπτό ότι η στρατηγική Α1 αποφέρει τα μέγιστα κέρδη στον παίκτη Α, ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη Β. Για το λόγο αυτό λέμε ότι η στρατηγική Α1 κυριαρχεί της στρατηγική Α2 ή ότι η Α2 είναι υποδεέστερη (κυριαρχούμενη) της Α1 . Αντίστοιχα, για τον παίκτη Β η στρατηγική Β1 είναι κυριαρχούμενη της Β2 καθώς οι απώλειες από αυτήν είναι μεγαλύτερες ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη Α. Όταν μία στρατηγική ενός είναι υποδεέστερη κάποιας άλλης, τότε μπορεί να αφαιρεθεί από τον πίνακα πληρωμών καθώς ο παίκτης δεν έχει κανένα λόγο να την επιλέξει.

Γενικός κανόνας είναι ότι μια σειρά είναι υποδεέστερη μιας άλλης, όταν όλα τα στοιχεία της είναι μικρότερα ή ίσα από τα αντίστοιχα στοιχεία της άλλης σειράς, ενώ μια στήλη είναι υποδεέστερη μιας άλλης στήλης , όταν όλα τα στοιχεία της είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τα αντίστοιχα στοιχεία της άλλης στήλης. Ο κανόνας της κυριαρχίας χρησιμοποιείται κυρίως όταν οι διαστάσεις του πίνακα πληρωμών είναι μεγάλες, και οδηγεί στη συρρίκνωσή του σε βαθμό που η βέλτιστη λύση μπορεί να προσδιοριστεί ευκολότερα.

3.2.4 Μικτές Στρατηγικές

Στην προηγούμενη ενότητα εξετάστηκαν παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, στα οποία οι παίκτες ακολουθούσαν αμιγή στρατηγική. Πολλές φορές όμως δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί σημείο ισορροπίας με χρήση αμιγών στρατηγικών. Για αυτόν τον τύπο παιγνίων, είναι πιθανό να επιτευχθεί μία σταθερή λύση αν οι παίκτες ακολουθήσουν μικτές στρατηγικές, δηλαδή επιλέγουν τις εναλλακτικές στρατηγικές τους με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

Ως ένα παράδειγμα χρήσης μικτών στρατηγικών, μπορεί να θεωρηθεί μία εταιρία στην οποία διοίκηση και εργαζόμενοι βρίσκονται σε διαπραγματεύσεις για τα συμβόλαια των δευτέρων. Ο πίνακας πληρωμών για τις δύο πλευρές παρουσιάζεται παρακάτω και τα στοιχεία του αντιστοιχούν στην αύξηση, σε λεπτά, που θα λάβουν οι εργαζόμενοι. Αποτελούν δηλαδή κέρδος για τους εργαζομένων και απώλειες για τη διοίκηση.

		Στρατηγικές των διοίκησης			
		B1	B2	B3	B4
Στρατηγικές των εργαζομένων	A1	75	105	65	45
	A2	70	60	55	40
	A3	80	90	35	50
	A4	95	100	50	55

3.2.2 Πίνακας πληρωμών παιγνίου διαπραγμάτευσης συμβολαίου

Αντικειμενικός σκοπός των εργαζομένων είναι η μεγιστοποίηση των κερδών τους, ενώ για τη διοίκηση η ελαχιστοποίηση των απωλειών. Επόμενο είναι λοιπόν οι εργαζόμενοι να ακολουθήσουν στρατηγική maximin και η διοίκηση στρατηγική minimax. Εφαρμόζοντας τη στρατηγική αυτή προκύπτει :

$$\mathbf{max_i\ min_j\ a_{ij} = 55 \neq 50\ min_j\ max_i\ a_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, 4\ , \quad j = 1, 2, 3\ , 4}$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι στο παίγνιο δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας. Υποθέτοντας ότι το συνδικάτο επιλέγει τη στρατηγική A_4, η διοίκηση αμέσως θα αποκριθεί αλλάζοντας τη στρατηγική B_4 με τη B_3 προκειμένου να ελαττώσει τις απώλειές της. Μόλις αντιληφθεί αυτήν την κίνηση της διοίκησης, το συνδικάτο θα επιλέξει τη στρατηγική A_1, κερδίζοντας έτσι 65 λεπτά. Αυτή η κίνηση πάλι θα προκαλέσει αλλαγή στρατηγικής από τη διοίκηση και επιλογή της B_4, προκειμένου να ελαχιστοποιήσει εκ νέου τις απώλειες. Τότε το συνδικάτο θα επιλέξει τη στρατηγική A_4 και η διαδικασία θα ξεκινήσει από την αρχή. Το παίγνιο θα καταλήξει επομένως σε έναν αέναο βρόχο. Η στρατηγική λοιπόν maximin (minimax) δεν οδηγεί σε σταθερή λύση καθώς μόνιμα ένας από τους δύο παίκτες θα είναι δυσαρεστημένος.

		Στρατηγικές των εργαζομένων				Ελάχιστο σειράς	
		B1	B2	B3	B4		
Στρατηγικές των εργαζομένων	A1	75	105	65	45	45	
	A2	70	60	55	40	40	
	A3	80	90	35	50	35	
	A4	95	100	**50**	**55**	50	(max)
Μέγιστο στήλης		95	105	65	55 (min)		

3.2.3 Κλειστός πίνακας βρόχος του κριτηρίου minimax (maximin)

Στον κλειστό βρόχο του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι οι μόνες στρατηγικές που συμμετέχουν είναι οι A1 και A4 για τον A και οι B3 και B4 για τον B. Αυτό επιβεβαιώνεται και με εφαρμογή του κανόνα της κυριαρχίας, οπότε οι υποδεέστερες στρατηγικές μπορούν να αφαιρεθούν και ο πίνακας πληρωμών να μετατραπεί στον 2x2 πίνακα.

		Στρατηγικές της Διοίκησης	
		B3	B4
Στρατηγικές των Εργαζομένων	A1	65	45
	A4	50	55

3.2.4 Ελαττωμένος πίνακας πληρωμών

Η μέθοδος της μικτής στρατηγικής θεωρεί ότι κάθε παίκτης πρέπει να προσδιορίσει την πιθανότητα με την οποία θα επιλέγει κάθε στρατηγική του, ώστε να μεγιστοποιήσει τοελάχιστο προσδοκώμενο κέρδος (ελαχιστοποιήσει τη μέγιστη προσδοκώμενη ζημία) ανεξάρτητα από τις επιλογές του αντιπάλου του.

Οι πιθανότητες με τις οποίες το συνδικάτο πρέπει να επιλέγει τις στρατηγικές A_1 και A_4, μπορούν να υπολογιστούν θεωρώντας ότι τα κέρδη στις δύο περιπτώσεις θα είναι τα ίδια ανεξάρτητα από την επιλογή της διοίκησης.

Αν για παράδειγμα η διοίκηση επιλέξει να ακολουθήσει τη στρατηγική B_3, τότε τα πιθανά κέρδη για το συνδικάτο θα είναι 65 και 50. Αν τώρα το συνδικάτο ακολουθεί τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα p, και συνεπώς τη στρατηγική A_2 με πιθανότητα (1-p), τότε το προσδοκώμενο κέρδος του συνδικάτου, που συμβολίζεται με $V(A,B_3)$, θα είναι :

$$V\,(A,B_3\,) = p \times 65 + (1-p) \times 50$$

Αντίστοιχα αν η διοίκηση ακολουθήσει τη στρατηγική B_4, το προσδοκώμενο κέρδος $V(A,B_4)$ θα είναι :

$$V(A,B_4\,) = p \times 45 + (1-p) \times 55$$

Για να βρεθεί η βέλτιστη μικτή στρατηγική του συνδικάτου, θα πρέπει το προσδοκώμενο κέρδος να είναι το ίδιο για κάθε στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει η διοίκηση. Πρέπει δηλαδή :

$$V(A,B_3) = V(A,B_4\,) \Rightarrow\ p \times 65 + (1-p) \times 50 = p \times 45 + (1-p) \times 55 \Rightarrow 25p = 5 \Rightarrow p = 0.2$$

Συνεπώς οι εργαζόμενοι πρέπει να ακολουθούν τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα 20% και τη στρατηγική A_4 με πιθανότητα 80%, ώστε να αποκομίζουν τα ίδια οφέλη ανεξάρτητα από την επιλογή της διοίκησης. Δηλαδή στις δέκα φορές που παίζεται το παίγνιο δύο φορές πρέπει να ακολουθούν τη στρατηγική A_1 και οκτώ φορές τη στρατηγική A_4. Το προσδοκώμενο κέρδος των εργαζομένων θα είναι :

$$V(A) = V(A,B_3\,) = V(A,B_3\,) = (0.2 \times 65) + (0.8 \times 50) = (0.2 \times 45) + (0.8 \times 55) = 53.0$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας ότι η διοίκηση επιλέγει τη στρατηγική B_3 με πιθανότητα q, και συνεπώς τη B_4 με πιθανότητα (1-q) προκύπτουν με ανάλογο τρόπο οι παρακάτω εξισώσεις:

$V(A_1 ,B) = q \times 65+ (1- q) \times 45$

$V(A_4 ,B) = q \times 50 + (1- q) \times 55$

$V(A_1,B) = V(A_4,B) \Rightarrow \ q \times 65 + (1- q) \times 45 = q \times 45 + (1- q) \times 55 \Rightarrow 25 q = 5 \Rightarrow q = 0.2$

Επομένως η διοίκηση πρέπει να ακολουθεί τη στρατηγική B_3 με πιθανότητα 40% και τη στρατηγική B_4 με πιθανότητα 60%, δηλαδή στις δέκα φορές που παίζεται το παίγνιο τις τέσσερις φορές θα επιλέγει τη B_3 και τις έξι φορές τη B_4. Οι προσδοκώμενες απώλειες της διοίκησης θα είναι :

$V(B) =V(B,A_1) =V(B,A_4) = (0.4 \times 65) +(0.6 \times 45)= (0.4 \times 50) + (0.6 \times 55) = 53.0$

Οι προσδοκώμενες απώλειες της διοίκησης είναι ίδιες με τα προσδοκώμενα κέρδη των εργαζομένων, κάτι αναμενόμενο αφού πρόκειται για παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Η τιμή V = 53 αποτελεί και την τιμή του παιγνίου. Αυτό βέβαια δε σημαίνει πως κάθε φορά που οι δύο πλευρές βρίσκονται σε διαπραγμάτευση οι εργαζόμενοι θα πετυχαίνουν αύξηση 53 λεπτών, αλλά ότι αν διοίκηση και εργαζόμενοι βρεθούν πολλές φορές σε διαπραγμάτευση το προσδοκώμενο κέρδος των εργαζομένων θα είναι 53, όσες και οι απώλειες της διοίκησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ισορροπία Nash

4.1 Η ζωή του John Nash

Στους βασικούς θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων ανήκει ο John Nash ο οποίος εισήγαγε στα παίγνια την ιδέα της ισορροπίας η οποία χρησιμοποιείται πλέον ευρέως σε όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης.

Ο Nash γεννήθηκε στη Δυτική Βιρτζίνια το 1928. Αν και ενδιαφερόταν για τα μαθηματικά, αποφάσισε να γίνει ηλεκτρολόγος μηχανικός όπως και ο πατέρας του. Όταν το 1945 γράφτηκε στο “Carnegie Institute of Technology” στο Pittsburgh αποφάσισε να γίνει χημικός μηχανικός, κάτι που στην πορεία δεν του άρεσε και έτσι επέστρεψε στα μαθηματικά με τα οποία ασχολήθηκε.

Όταν πήγε το 1948 στο “Princeton” ήταν ήδη ένας από τους κορυφαίους στην θεωρία παιγνίων και είχε ήδη ασχοληθεί με “προβλήματα συμφωνιών”, δηλαδή προβλήματα στα οποία οι παίκτες μοιράζονται κάποια κοινά συμφέροντα. Με τη φράση “αυτός ο άντρας είναι ιδιοφυία” περιέγραψε τον John Nash στους υπόλοιπους καθηγητές του Princeton University, ο καθηγητής R. L. Duffin.

Η σημαντικότερη του εργασία όμως ήταν εκείνη στην οποία ασχολήθηκε με την ισορροπία στη θεωρία παιγνίων και χάρη στην πολύτιμη συμβολή του πήρε το όνομα “Nash ισορροπία”. Ο Nash δημοσίευσε την ιδέα του για την ισορροπία αμέσως σε ηλικία 21 ετών! Μια δισέλιδη αναφορά έγινε το 1950 στο “Proceedings of the National Academy of Sciences”. Με τίτλο “Equilibrium Points in n-Person Games”, το άρθρο δημοσίευσε περιληπτικά την ύπαρξη λύσεων για παίγνια με ν παίκτες. Επέκτεινε την έρευνα του και μια μεγαλύτερη έκδοση δημοσιεύτηκε το 1951 στο “Annals of Mathematics” με τίτλο “Non-cooperative Games”.

Αν και δεν έτυχε ευρείας υποδοχής στην αρχή, η προσέγγιση του Nash για την θεωρία παιγνίων, τον οδήγησε στην απόκτηση του βραβείου Νόμπελ στα οικονομικά το 1994. Δεν υπάρχει όμως καμιά αμφιβολία ότι η ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων σε όλους τους τομείς έγινε εφικτή χάρη στην ανακάλυψη του Nash.
Ο Nash σκαρφίστηκε μια γενική "λύση" για όλα τα (πεπερασμένα) παίγνια και απέδειξε ότι κάθε τέτοιο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μια τέτοια λύση. Έτσι κατάφερε ένα μεγάλο χτύπημα στην απροσδιοριστία.

4.2 Ισορροπία Nash

Το θεώρημα που διατύπωσε ο Nash και έγινε γνωστό σε όλο τον κόσμο αναφέρει πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις πιο συμφέρουσες για αυτούς ενέργειες, γνωρίζοντας και τις επιλογές των αντιπάλων τους. Οι παίκτες σκέφτονται τι μπορεί να διαλέξει ο αντίπαλος τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά των άλλων και επιλέγουν την στρατηγική τους σύμφωνα με αυτό. Δηλαδή η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την καλύτερη αντίδραση(απόκριση) στην στρατηγική του άλλου παίκτη. Αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία Nash.

Ο παίκτης επιλέγει εκείνη από τις δικές του στρατηγικές, η οποία είναι η καλύτερη απάντηση στην στρατηγική που νομίζει ότι θα επιλέξει ο άλλος παίκτης. Επομένως κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να φύγει μονομερώς από αυτήν την ισορροπία που έχει δημιουργηθεί. Οι παίκτες καταλαβαίνουν πως βρίσκονται σε ισορροπία αν μια αλλαγή στις στρατηγικές από οποιονδήποτε από εκείνους, οδηγήσει σε χαμηλότερο κέρδος από αυτό που θα είχαν αν παρέμεναν στη σωστή στρατηγική. Δεδομένου των επιλογών των αντιπάλων, ο παίκτης δεν έχει να κερδίσει κάποιο μεγαλύτερο όφελος και για αυτό δεν αλλάζει στρατηγική.

Όπως είναι φανερό η θεωρία για την ισορροπία Nash, έχει δύο συνιστώσες: πρώτα κάθε παίκτης κάνει την επιλογή του βασιζόμενος στην ορθολογική απόφαση που προέρχεται από τις πεποιθήσεις του για το τι θα πράξει ο αντίπαλος και δεύτερον κάθε πεποίθηση του παίκτη για την επιλογή του αντιπάλου του είναι σωστή.

Για να κατανοήσουμε πλήρως την έννοια της ισορροπίας Nash, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το πιο πάνω παίγνιο το οποίο παραθέτουμε πάλι για ευκολία.

A \ B	β1	β2
α1	5, 5	-100, 4
α2	0, 1	0, 0

4.2.1 Πίνακας παιγνίου κυριαρχίας κινδύνου "Risk Dominance"

Ξεκινώντας με τον Α παίκτη βρίσκουμε ποια στρατηγική θα επιλέξει σε συγκεκριμένη στρατηγική του αντιπάλου. Έστω ότι ο Α πιστεύει ότι ο Β θα επιλέξει την β1 στρατηγική.

Τότε προφανώς θα επιλέξει εκείνη από τις δύο δικές του στρατηγικές που θα του δώσει το μεγαλύτερο όφελος. Η α1 θα του δώσει 5 μονάδες ωφέλειας, ενώ η α2 θα του δώσει 0 (όπως αναφέραμε και πιο πριν οι πρώτοι αριθμοί σε κάθε κελί αντιστοιχούν στον παίκτη γραμμής, δηλαδή στον Α). Άρα θα επιλέξει την α1 στρατηγική με κέρδος 5. Αυτό το νούμερο το κυκλώνουμε. Αν ο Α πιστεύει πως ο Β θα διαλέξει την β2 στρατηγική αυτός φυσικά θα προτιμήσει την α2 αφού το κέρδος του θα είναι μεγαλύτερο (-100<0), άσχετα αν πρόκειται για 0 μονάδες.

Ύστερα από τις επιλογές του παίκτη Α, ο πίνακας παρουσιάζεται ως εξής:

A \ B	β1	β2
α1	5, 5	-100, 4
α2	0, 1	0, 0

Πίνακας 4.2.2 Πρώτο στάδιο του παιγνίου

Ομοίως κάνουμε και για τον παίκτη Β. Αν αυτός νομίζει ότι ο Α θα επιλέξει την α1 στρατηγική, θα προτιμήσει την β1 στρατηγική που θα του δώσει κέρδος 5 μονάδες και όχι 4 μονάδες(οι δεύτεροι αριθμοί σε κάθε κελί είπαμε πως αναφέρονται στον παίκτη στήλης, δηλαδή στον Β). Αν ο Β νομίζει για τον Α πως θα ακολουθήσει την α2 στρατηγική, θα προτιμήσει και πάλι την β1 αφού θα έχει κέρδος 1 μονάδα αντι για 0 μονάδες. Αυτά τα νούμερα τα βάζουμε σε ένα μπλε τετράγωνο.

Ύστερα και από τις επιλογές του Β παίκτη ο πίνακας έχει ως εξής:

A \ B	β1	β2
α1	5, 5	-100, 4
α2	0, 1	0, 0

Πίνακας 4.2.3 Δεύτερο στάδιο του παιγνίου

Η ισορροπία Nash υπάρχει όταν η καλύτερη απόκριση του παίκτη Α είναι ίδια με την καλύτερη απόκριση του παίκτη Β, όταν δηλαδή σε ένα κελί υπάρχουν οι επιλογές και των δύο παικτών. Αυτό είναι και το σημείο ισορροπίας. Στο παράδειγμα μας ισορροπία έχουμε στο κελί (α1, β1)=(5, 5).

Υπάρχουν παιχνίδια που έχουν παραπάνω από μία ισορροπίες Nash, ενώ υπάρχουν και παιχνίδια χωρίς κανένα σημείο ισορροπίας Nash.

Έχουμε αναφέρει πως εκτός από τις καθαρές στρατηγικές έχουμε και τις μικτές. Είπαμε πως η επιλογή μικτής στρατηγικής ισοδυναμεί με το να επιλέξει ο παίκτης τυχαία μεταξύ συγκεκριμένων καθαρών στρατηγικών. Για παράδειγμα μπορούμε να πούμε πως ο παίκτης Α θα επιλέξει την α1 στρατηγική με πιθανότητα p ή την α2 με πιθανότητα p-1. Ο παίκτης δηλαδή που διαλέγει μικτή στρατηγική επιλέγει τις πιθανότητες καθεμιάς από τις καθαρές στρατηγικές που εμπεριέχονται στην συγκεκριμένη μικτή στρατηγική, αφήνοντας τα υπόλοιπα στην τύχη. Όσο και αν φαίνεται παράξενο υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή όπου οι παίκτες προτιμούν να χρησιμοποιήσουν μικτές στρατηγικές.

Ο Nash κατάφερε επίσης να αποδείξει πως όλα τα πεπερασμένα παίγνια εμπεριέχουν τουλάχιστον ένα σύνολο μικτών στρατηγικών (μία ανά παίκτη) που συνιστά ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές(ΙΝΜΣ) Όταν υπάρχουν πολλές ισορροπίες Nash (σε καθαρές στρατηγικές), τη λύση δίνει η ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Ακόμη και αν δεν υπάρχει ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές, υπάρχει μία μοναδική ισορροπία σε μικτές στρατηγικές.

Η ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές φαίνεται πιο ελκυστική πρόταση από την ισορροπία στις μικτές, αφού δεν χρειάζεται οι παίκτες να επιλέγουν στην τύχη. Όμως από τη στιγμή που δεν υπάρχει ισορροπία σε κάθε παιχνίδι, η ισορροπία σε μικτές στρατηγικές αποκτάει μεγαλύτερη αξία αφού πλέον για κάθε παιχνίδι υπάρχει σίγουρα μία ισορροπία.

4.2.1 Το δίλημμα του φυλακισμένου

Ένα από τα παράδοξα της ισορροπίας Nash που μπορεί να θεωρηθεί και σαν αδυναμία της είναι ότι σε κάποια παίγνια οι παίκτες έχουν μεγαλύτερο όφελος αν δεν διαλέξουν την ισορροπία Nash και διαλέξουν άλλη στρατηγική. Ενώ η ισορροπία Nash δίνει την ελκυστικότερη λύση για όλους τους παίκτες, οδηγώντας στο σημείο ισορροπίας, εντούτοις υπάρχουν κάποια διάσημα παίγνια που είναι εξαίρεση στον κανόνα. Κάποια από αυτά τα παίγνια χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα και θα αναλυθούν στη συνέχεια.

Το πιο γνωστό και σημαντικό παίγνιο στην ιστορία της θεωρίας παιγνίων είναι το παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου(Prisoner's dilemma).

Τον Ιανουάριο του 1950 οι Melvin Dresher και Merrill Flood επινόησαν το συγκεκριμένο παίγνιο και το χρησιμοποίησαν σαν παράδειγμα στο RAND Corporation. Αργότερα όταν παρουσιάστηκε αυτό το παράδειγμα σε ένα σεμινάριο στο Stanford University, ο Albert W. Tucker σκαρφίστηκε μία ιστορία πάνω στην οποία βάσισε όλη του την διάλεξη. Το παίγνιο αυτό έμεινε από τότε στην ιστορία κάνοντας την θεωρία παιγνίων γνωστή σε όλες τις κοινωνικές επιστήμες, ενώ και πάρα πολλοί μελετητές έχουν ασχοληθεί με αυτό γράφοντας διάφορα βιβλία .

Η ιστορία του Tucker έχει ως εξής: Δύο ύποπτοι για ένα έγκλημα συλλαμβάνονται από την αστυνομία και κρατούνται σε διαφορετικά κελιά, ώστε να μην έχουν μεταξύ τους επικοινωνία. Οι αστυνομικοί είναι σίγουροι για την ενοχή τους αλλά ελλείψει αποδεικτικών στοιχείων τους προσφέρουν μια συμφωνία: αν και οι δύο ομολογήσουν ότι διέπραξαν το έγκλημα θα καταδικαστούν μόνο σε τρία χρόνια φυλάκισης. Αν μόνο ο ένας ομολογήσει θα αφεθεί ελεύθερος ενώ ο άλλος που θα αρνηθεί θα φυλακιστεί για πέντε χρόνια. Τέλος, αν κανένας δεν ομολογήσει, και οι δύο θα περάσουνε έναν χρόνο στη φυλακή.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να παρουσιαστεί στον επόμενο πίνακα

A \ B	B1: confess	B2: not confess
A1: confess	3 χρόνια φυλακή	ελευθερία, 5 χρόνια
A2: not confess	5 χρόνια, ελευθερία	1 χρόνος φυλακή

Πίνακας 4.2.4 Το δίλημμα του φυλακισμένου(αρχική μορφή)

Το δίλημμα αυτό παίρνει τη μορφή του παρακάτω παιγνίου, όπου τα νούμερα είναι η ωφέλεια που αποκομίζει ο παίκτης .

A \ B	B1: confess	B2: not confess
A1: confess	1,1	5,0
A2: not confess	0,5	3,3

Πίνακας 4.2.5 Το δίλημμα του φυλακισμένου(τελική μορφή)

Το δίλημμα εμφανίζεται όταν κάποιος υποθέτει ότι και οι δύο φυλακισμένοι νοιάζονται μόνο για να ελαχιστοποιήσουν την ποινή τους. Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές επιλογές: είτε να ομολογήσει και να συνεργαστεί με την αστυνομία(confess), είτε να παραμείνει σιωπηλός (not confess). Για παράδειγμα το καλύτερο αποτέλεσμα για τον παίκτη Α είναι να ομολογήσει και ο παίκτης Β να μείνει σιωπηλός. Το επόμενο καλύτερο αποτέλεσμα για τον Α είναι να μη μιλήσει κανένας από τους δύο, ενώ το χειρότερο σενάριο είναι να μιλήσει ο Β ενώ ο Α θα παραμείνει σιωπηλός. Το αντίστοιχο ισχύει και για τον παίκτη Β. Είναι λοιπόν φανερό πως οτιδήποτε και να σκοπεύει να κάνει ο Β, ο παίκτης Α θα πρέπει να επιλέξει την πρώτη στρατηγική(να ομολογήσει δηλαδή), αφού έτσι θα έχει καλύτερα αποτελέσματα. Ομοίως ισχύει και για τον Β παίκτη ο οποίος θα προτιμήσει και αυτός να μη μιλήσει. Σε αυτό το σημείο υπάρχει το δίλημμα αφού από τον πίνακα φαίνεται πως οι παίκτες θα αποκομίσουν μεγαλύτερο όφελος αν και οι δύο επιλέξουν να μη μιλήσουν από το να τα ομολογήσουν όλα. . Έτσι η καλύτερη στρατηγική για τον καθένα ξεχωριστά, παράγει ένα αποτέλεσμα που δεν είναι καλό για την ομάδα, κάνοντας τα ατομικά κίνητρα να υπονομεύουν το κοινό συμφέρον .

Πρόκειται για ένα παιχνίδι όπου τα κέρδη προέρχονται από τη συνεργασία. Το καλύτερο αποτέλεσμα και για τους δύο παίκτες είναι να μη μιλήσουν στους αστυνομικούς . Παρόλα αυτά, κάθε παίκτης έχει ένα μεγάλο κίνητρο να γίνει προδότης. Οτιδήποτε και να κάνει ο ένας παίκτης, ο αντίπαλος προτιμάει να ομολογήσει. Έτσι το παίγνιο αυτό έχει μία μοναδική

Nash ισορροπία, μία κυρίαρχη στρατηγική, η οποία είναι η λύση (A1,B1)=(1,1), η από κοινού ομολογία.

Το παράδοξο του αποτελέσματος εξηγείται από το γεγονός ότι οι φυλακισμένοι βρίσκονται σε ξεχωριστά κελιά και δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους για να αποφασίσουν από κοινού τι θα κάνουν. Αν μπορούσαν να το συζητήσουν ίσως να έβλεπαν πως η καλύτερη λύση είναι να μη μιλήσει κανένας τους. Αλλά ακόμη και με μια προφορική συμφωνία οι φυλακισμένοι ίσως προσπαθήσουν να προδώσουν τον υποτιθέμενο αντίπαλο τους, προλαβαίνοντας τον από μια πιθανή προδοσία. Εδώ επέρχεται ο παράγοντας της αξιοπιστίας: υπάρχει μια έφεση προς συνεργασία με εκείνους που πιστεύουμε ότι έχουν αντίστοιχη έφεση να συνεργαστούν. Ανορθόδοξη επίσης είναι η απόφαση να προδώσουν ο ένας τον άλλον, μιας και η σιωπή αποτελεί ύψιστη τιμή σε τέτοιες κοινωνικές ομάδες.

Μια άλλη περίπτωση είναι οι δύο ύποπτοι να μην ομολογήσουν, μόνο αν έχουν ξαναπεράσει όλο αυτό και γνωρίζουν πως δεν πρόκειται να προδοθούν Αυτή η ισορροπία λέγεται "υπό-παιγνιακή τέλεια ισορροπία Nash" όπου οι φυλακισμένοι έχουν μάθει να μην καρφώνουν ο ένας τον άλλον και έτσι ελαχιστοποιούν την συλλογική ποινή τους.

Όταν το δίλημμα του φυλακισμένου αφορά πάνω από δύο πρόσωπα ονομάζεται free rider problem. Έχει την ίδια δομή με το δίλημμα του φυλακισμένου αφού και εδώ η κυρίαρχη ατομική στρατηγική υπερέχει της κοινής λογικής. Αφορά όλες τις περιπτώσεις δημοσίων αγαθών(όλοι τα εκμεταλλεύονται άσχετα αν έχουν πληρώσει γι' αυτά, όπως για παράδειγμα η καθαρή ατμόσφαιρα) όπου η πρόσβαση δεν μπορεί να περιοριστεί σε αυτούς που έχουν πληρώσει και στους άλλους, τους τζαμπατζήδες, οι οποίοι δεν συνεισφέρουν αλλά τα χρησιμοποιούν.

Το πιο διάσημο παιχνίδι στην ιστορία της θεωρίας παιγνίων μελετήθηκε εκτενέστατα από πάρα πολλούς ανθρώπους, ανάμεσα τους ο John Nash(που αναφέρθηκε παραπάνω) και ο Robert Axelrod. Στα τέλη της δεκαετίας του 70 ο Axelrod προσπάθησε να προσεγγίσει το πρόβλημα όταν αυτό επαναλαμβάνεται, αφού έτσι γίνεται πιο περίπλοκο και δεν είναι απόλυτα σαφές ποια στρατηγική είναι βέλτιστη. Έτσι λοιπόν οργάνωσε ένα πρωτάθλημα όπου κάλεσε θεωρητικούς των παιγνίων να δημιουργήσουν αλγορίθμους που να περιέχουν από μία στρατηγική και τους έβαλε να διαγωνιστούν για έναν καθορισμένο αριθμό γύρων. Οι "άπληστες" στρατηγικές έτειναν να έχουν άσχημη έκβαση, σε αντίθεση με τις πιο αλτρουιστικές που τα πήγαν καλύτερα. Νικητής αναδείχτηκε ο Anatol Rapoport που δημιούργησε τον πιο απλό αλγόριθμο, τον Tit for Tat, δηλαδή "μία σου και μία μου".

Πρόκειται για μία στρατηγική δεσμευμένης συνεργασίας όπου ο παίκτης ξεκινάει με συνεργασία, σαν κίνηση καλής θέλησης, και έπειτα αντιγράφει την στρατηγική που επέλεξε ο αντίπαλος στον προηγούμενο γύρο. Το πείραμα επαναλήφθηκε και για την περίπτωση όπου η ακολουθία των αγώνων μεταξύ των δύο παικτών θα τερματιζόταν τυχαία με νικητή πάλι τον ίδιο αλγόριθμο. Η "σοφία" αυτής της στρατηγικής έχει να κάνει με τον συνδυασμό αυστηρότητας απέναντι στους αποστάτες(αφού τους τιμωρείς άμεσα) αλλά και ηπιότητας(αφού μέσα σε έναν γύρο μπορείς να τον συγχωρήσεις).Τελικά φαίνεται πως αυτός που δεν συμπεριφέρεται εγωιστικά, είναι αυτός που κερδίζει.

Το δίλημμα του φυλακισμένου αν και φαίνεται άσχετο με την καθημερινότητα του ανθρώπου, μπορούμε να το διακρίνουμε παντού, σε όλα τα κοινωνικά φαινόμενα. Υπάρχει μια τεράστια βιβλιογραφία που το αναλύει και μάλιστα πολλοί πιστεύουν πως αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα της κοινωνικής ζωής. Οι εφαρμογές του λοιπόν στην καθημερινότητα ποικίλλουν από την οικονομία, την πολιτική και την κοινωνιολογία έως την εθνολογία και την εξελικτική βιολογία.

Στην πολιτική για παράδειγμα αυτό το παίγνιο χρησιμοποιείται για να επεξηγήσει το πρόβλημα που έχουν δύο κράτη με την απόκτηση όπλων. Υπάρχουν δύο στρατηγικές επιλογές για τα κράτη: είτε να αυξήσουν την στρατιωτική τους δύναμη και να αγοράσουν καινούριο εξοπλισμό, είτε να κάνουν μια συμφωνία έτσι ώστε να μειώσουν την χρησιμοποίηση όπλων. Κανένα κράτος δεν είναι βέβαιο ότι το άλλο θα κρατήσει την υπόσχεση του και επομένως και τα δύο κλίνουν στο να αγοράσουν τελικά τα όπλα. Παράδειγμα για αυτήν την περίπτωση αποτελεί η διαμάχη Αμερικής –Ρωσίας τη δεκαετία του 50 (όταν μελετήθηκε για πρώτη φορά το συγκεκριμένο παίγνιο) για την απόκτηση πυρηνικού εξοπλισμού.

Επίσης στον αθλητισμό πολλοί παλαιστές καταφεύγουν στο χάσιμο πολλών κιλών με σκοπό να διαγωνιστούν με ελαφρύτερους αντιπάλους, πηγαίνοντας στην μικρότερη κατηγορία. Αυτό μπορεί να το κάνουν πολλοί διαγωνιζόμενοι με αποτέλεσμα να υποβαθμίζεται ο συναγωνισμός. Ακόμη όμως και αν κάποιος διαγωνιζόμενος παραμείνει στο αρχικό του βάρος, είναι πολύ πιθανό να συναγωνιστεί κάποιον που έχει χάσει αρκετό βάρος.

Είναι φανερό πως σε κάθε συναλλαγή ή σύγκρουση ατομικών συμφερόντων που θίγει τους ανθρώπους, υπάρχει κάπου εκεί το δίλημμα του φυλακισμένου. Τα παραδείγματα ποικίλλουν από τα πολιτικά παζάρια και τους πλειστηριασμούς έως την συμπεριφορά των οδηγών στους δρόμους και την επιλογή δύο αντιμαχόμενων μερών για το αν θα χρησιμοποιήσουν δικηγόρους ή/ και θα καταφύγουν στα δικαστήρια για να λύσουν τις διαφορές τους. Το κοινό στοιχείο σε όλα αυτά τα παραδείγματα είναι ότι αν ο καθένας δράσει συνεργατικά θα υπάρξει το καλύτερο αποτέλεσμα. Δυστυχώς σχεδόν όλοι σκέφτονται μόνο το προσωπικό συμφέρον, με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε μη επιθυμητά αποτελέσματα.

4.2.2 Η μάχη των φύλων

Το παίγνιο “battle of the sexes” (η μάχη των φύλων) αποτελεί ένα από τα κλασσικά παιχνίδια στη θεωρία παιγνίων. Στην παραδοσιακή ανάλυση του παιχνιδιού, το οποίο χρονολογείται από τη δεκαετία του `50, ένας άντρα και μια γυναίκα προσπαθούν να αποφασίσουν πως θα περάσουν το απόγευμα τους. Ο άντρας προτιμά να μείνουν σπίτι και να δούνε τον αγώνα που έχει στην τηλεόραση, ενώ η γυναίκα προτιμά να πάνε στην όπερα. Και οι δύο όμως θέλουν να κάνουν κάτι μαζί και όχι να μείνουν χώρια.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιλογές τους ως στρατηγικές, οπού οι γραμμές αντιστοιχούν στις επιλογές του άντρα και οι στήλες στις επιλογές της γυναίκας.

A \ B	B1: sports	B2: opera
A1: sports	2,1	0,0
A2: opera	0,0	1,2

Πίνακας 4.2.6 Η μάχη των φύλων

Η μάχη των φύλων παρουσιάζει μια κατάσταση κατά την οποία το ζευγάρι πρέπει να συνεργαστεί, αν και έχουν διαφορετικές προτιμήσεις, αφού σε καμία περίπτωση δεν θέλουν να μείνουν χώρια. Πρόκειται για συνεργατικό και όχι ανταγωνιστικό παίγνιο. Εδώ μας ενδιαφέρει ο αντίπαλος να μάθει τη στρατηγική που πρόκειται να εφαρμόσουμε, γιατί μπορεί να τη χρησιμοποιήσει για κοινό μας όφελος.

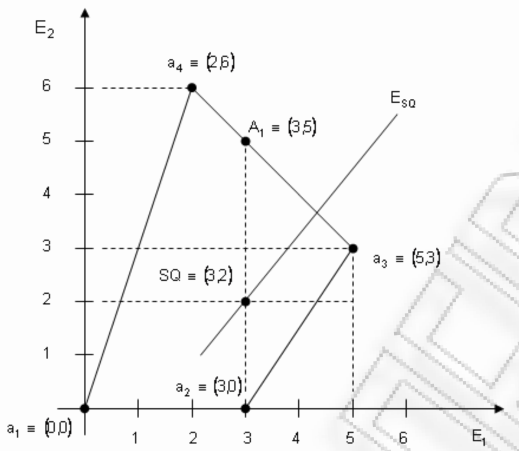
Αν και το παιχνίδι ανήκει στην κατηγορία των παιχνιδιών που παίζονται ταυτόχρονα, δεν είναι αναγκαίο για τους παίκτες να δράσουν έτσι. Το μόνο που απαιτείται είναι ο καθένας να δράσει χωρίς γνώση για το πώς θα πράξει ο άλλος. Αυτό επιτυγχάνεται αν οι παίκτες πάρουν την απόφαση τους χωρίς προηγουμένως να
έχουν μιλήσει. Είναι μη ρεαλιστικό να υποθέσουμε πως το ζευγάρι δεν θα το συζητήσει και δεν θα παιχτεί το ίδιο «έργο» πολλές φορές . Αν κάθε μέρα έχουν να πάρουν μια τέτοια απόφαση (επαναλαμβανόμενο παίγνιο) τότε σίγουρα ο ένας θα μπορεί να μαντέψει τις κινήσεις του άλλου.

Σημαντικό ρόλο σε αυτό το παιχνίδι έχει το ποιος θα παίξει πρώτος και θα ανακοινώσει την απόφαση του στο ταίρι του. Αν για παράδειγμα η γυναίκα έχει αγοράσει από πριν τα εισιτήρια για την όπερα, είναι πολύ πιθανό ο άντρας να πεισθεί και να επιλέξει από την αρχή να πάνε στην όπερα παρόλο που θα προτιμούσε τον αγώνα. Σε πάρα πολλά παιχνίδια(όχι σε όλα) αυτός που κινείται πρώτος έχει και το μεγαλύτερο πλεονέκτημα.

Εύκολα φαίνεται πως δεν υπάρχει κάποια κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν από τους δύο παίκτες. Βρίσκουμε όμως πως υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash στο συγκεκριμένο παίγνιο, η λύση (A1,B1)=(2,1) και η λύση (A2,B2)=(1,2). Αν και οι δύο επιλέξουν να δούνε αγώνα ο άντρας έχει όφελος 2 μονάδες και η γυναίκα 1 μονάδα, ενώ αν πάνε στην όπερα η γυναίκα έχει όφελος 2 μονάδες και ο άντρας 1.Σε αυτές τις δύο στρατηγικές κανένας δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει και να επιλέξει κάτι άλλο.

4.3 Σχήμα διαιτησίας κατά Nash

Έστω ότι ένας εξωτερικός σύμβουλος αναλαμβάνει τον σχεδιασμό και την υλοποίηση εσωτερικής έρευνας κλίματος σε μία εταιρία την οποία θα εξετάσει ανά τμήματα. Ο σύμβουλος σε συζήτηση με τον προϊστάμενο και τους τρείς εργαζόμενους του τμήματος έχει οδηγηθεί σε αδιέξοδο σχετικά με την γνώμη τους για τον βαθμό εργασιακής ικανοποίησης δίνοντας ο καθένας τον παρακάτω συνδυασμό και σε ένα από τα ακόλουθα αποτελέσματα ή συνδυασμό αυτών θα πρέπει να συμφωνήσουν $a_1 \equiv (0{,}0)$, $a_2 \equiv (3{,}0)$, $a_3 \equiv (5{,}3)$, $a_4 \equiv (2{,}6)$ ώστε να είναι δυνατή η ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων. Αν δεν συμφωνήσουν τότε θα πρέπει να αποδεχθούν σαν αποτέλεσμα το Nash $SQ \equiv (3{,}2)$. Θα πρέπει να βρεθεί η βέλτιστη λύση με τη βοήθεια του σχήματος διαιτησίας Nash, ώστε το αποτέλεσμα να είναι δίκαιο. Το πολύπλευρο απολαβών απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το σύνολο «διαπραγμάτευσης» μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το σημείο Nash, ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ορίζεται από τα σημεία (3,5), (5,3).



Σχήμα 5.1 Πολύπλευρο απολαβών

Σύμφωνα με την ισορροπία Nash το σημείο που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$f \equiv (x - x_0)(y - y_0),\ \ (x_0, y_0) \equiv (3,2)$$

δηλαδή την $f \equiv (x-3)(y-2)$, βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A_1 \equiv (3,5)$, $a_3 \equiv (5,3)$, που έχει εξίσωση: $y \equiv (-x+8)$, $3 \le x \le 5$.

Με αντικατάσταση στο γινόμενο που πρέπει να μεγιστοποιηθεί του $y \equiv (-x+8)$ προκύπτει:

$$(x-3)(-x+8-2) = -x^2 + 9x - 18$$

Το μέγιστο του τριωνύμου $g(x) = -x^2 + 9x - 18$, με $a = -1 \le 0$, είναι:

$$x = -\frac{b}{2a} = 4,5 \text{ και } y = 3,5.$$

Οπότε η βέλτιστη λύση κατά Nash είναι N(4,5 , 3,5). Ο σύμβουλος θα πρέπει να επιλέξει το πλησιέστερο προς το σημείο ισορροπίας κατά Nash, δυνατό αποτέλεσμα δηλαδή το $a_3 \equiv (5,3)$ ώστε να ορίσει βαθμό εργασιακής ικανοποίησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Κοινοβουλευτικές Συμμαχίες

5.1 Νορβηγία

Σε μια κοινοβουλευτική δημοκρατία με περισσότερα από δύο μεγάλα κόμματα, είναι αναμενόμενο ότι κανένα κόμμα δεν θα έχει την πλειοψηφία των εδρών στο κοινοβούλιο. Ως εκ τούτου, μια κυβέρνηση πλειοψηφίας θα πρέπει να αποτελείται από ένα συνασπισμό κομμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις όσων αφορά τη μελέτη των κοινοβουλευτικών συμμαχιών. Σαν παράδειγμα θα θεωρήσουμε τις βουλευτικές εκλογές του 1965 στην Νορβηγία, οι οποίες έδωσαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	ΚΟΜΜΑΤΑ	Αριθμός εδρών
A.	ΕΡΓΑΤΙΚΟΙ	68
B.	ΧΡΙΣΤΙΑΝΟΙ	13
C.	ΦΙΛΕΛΕΥΘΕΡΟΙ	18
D.	ΣΟΣΙΑΛΙΣΤΕΣ	18
E.	ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟΙ	31

Για τον σχηματισμό κυβέρνησης απαιτούνται 75 έδρες. Θα προσπαθήσουμε να προβλέψουμε τις πιθανές συμμαχίες που οδηγούν στον σχηματισμό κυβέρνησης συνασπισμού

[75:	68,	13,	18,	18,	31]
	A	B	C	D	E

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν πέντε συνασπισμοί οι οποίοι θεωρούνται τυπικά νικητές αφού έχουν καταφέρει να αποκτήσουν ένα σημαντικό αριθμό εδρών που τους εξασφαλίζει ταυτόχρονα την είσοδό τους στην βουλή. Δεδομένου ότι δεν θα ήταν επιθυμητό να έχουμε μεγάλο αριθμό κομμάτων συνεργασίας σε μία κυβέρνηση, επιχειρούμε να προβλέψουμε τους πιθανούς συνασπισμούς που μπορούν να προκύψουν από ενδεχόμενες συνεργασίες, καταλήγοντας στους παρακάτω : AB, AC, AD, AE, BCDE.

Η πρόβλεψη αυτή είναι γνωστή στις πολιτικές επιστήμες ως Riker size principle. Αν και σίγουρα υπάρχουν εξαιρέσεις, η αρχή του Riker θέτει τις βάσεις για να υποστηρίξει την θεωρία των πολιτικών συνασπισμών.

Γενικότερα υπάρχει μεγάλος αριθμός συνασπισμών που μπορούν να οδηγήσουν σε κυβέρνηση. Αν θέλουμε να κάνουμε μια πιο συγκεκριμένη πρόβλεψη για το ποιοι είναι αυτοί, υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι τους οποίους αναλύει η ιδέα του Riker. Πρώτον, αν υποθέσουμε ότι η κυβέρνηση αποτελείται σε αναλογία από τον αριθμό των ψήφων που τα κόμματα του κυβερνητικού συνασπισμού έχουν λάβει. Έτσι για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι ο συνασπισμός AB είναι εκείνος που σχηματίζει κυβέρνηση τότε ο A λαμβάνει ποσοστό 68/81 ενώ ο B 13/81. Εναλλακτικά εάν ο συνασπισμός της κυβέρνησης είναι ο AC τότε ο A λαμβάνει 68/86 και ο C 18/86. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο A συνασπισμός θα προτιμούσε το ποσοστό 68/81 αντί του 68/86, επομένως θα προτιμούσε ένα μικρότερο συνδυασμό ,όπως ο B, αντί για τον C.

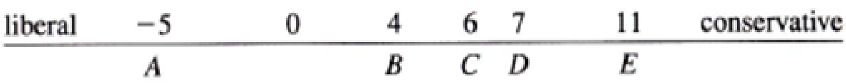
Σε γενικές γραμμές, τα μέρη επιθυμούν να συνεργάζονται με κόμματα που έχουν λάβει όσο το δυνατόν λιγότερους ψήφους, δεδομένου ότι αυτό μεγιστοποιεί το μερίδιό τους από τον συνασπισμό. Στο παράδειγμά μας, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε ότι ο συνδυασμός BCDE είναι η πιο πιθανή μορφή συνασπισμού, με την AB ως δεύτερη πιο πιθανή.

Ελάχιστος αριθμός συνδυασμών :	AB	AC	AD	AE	BCDE
Αριθμός εδρών :	81	86	86	99	80

Δεύτερον, αν υποθέσουμε ότι ο σχηματισμός κυβέρνησης καθιστά ισοδύναμα τα δύο μέλη που συνεργάζονται, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι όλα τα μέλη είναι εξίσου σημαντικά. Στην περίπτωση αυτή τα κόμματα μεγιστοποιήσουν το μερίδιό τους δημιουργώντας έναν συνασπισμό με όσο το δυνατόν λιγότερα μέλη. Θα μπορούσαμε να προβλέψουμε ότι οι συνδυασμοί AB, AC, AD, ή AE θα είναι πιο πιθανοί από ότι ο BCDE.

Δυστυχώς, οι δύο υποθέσεις της αρχής Ράικερ αντιφάσκουν μεταξύ τους στο παράδειγμά μας, και στην πραγματικότητα καμία από αυτές δεν βρίσκει πλήρη εφαρμογή στην πράξη. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχουν κόμματα που λόγω διαφορετικής ιδεολογίας θα ήταν πάρα πολύ δύσκολο να συνεργαστούν μεταξύ τους και να δημιουργήσουν κυβέρνηση συνεργασίας.

Το πιο σύνηθες μοντέλο πολιτικής ιδεολογίας, χρονολογείται από την περίοδο αμέσως μετά τη Γαλλική Επανάσταση, σε αυτό τοποθετούνται πολιτικά κόμματα σε ένα μονοδιάστατο συνεχές γράφημα από αριστερά προς τα δεξιά. Στο δικό μας παράδειγμα θα τοποθετήσουμε τα πέντε κόμματα της Νορβηγίας σε ένα αντίστοιχο γράφημα όπως αυτό δημιουργήθηκε από (Converse and Valen - 1971), σε σχέση με την πολιτικής που ακολουθούν σε οικονομικά θέματα.



Ο Robert Axelrod, πρότεινε ότι οι συνασπισμοί που διέπουν αυτή την μορφή τοποθέτησης θα πρέπει να συνδέονται, υπό την έννοια ότι θα πρέπει να περιέχουν όλα τα μέρη σε κάποιο διάστημα της γραμμής. Σε αυτό το παράδειγμα οι AB και BCDE αποτελούν τους ελάχιστους δυνατούς συνασπισμούς νίκης. Ο συνδυασμός AC, για παράδειγμα, δεν είναι συνδεδεμένος, δεδομένου ότι δεν περιλαμβάνεται μεταξύ των AB. Η πρόβλεψη ενός ελάχιστα συνδεδεμένου νικηφόρου συνασπισμού έχει έναν εύλογο βαθμό εμπειρικής στήριξης. Για παράδειγμα ο Axelrod, διαπίστωσε ότι περισσότερες από τις μισές από τις 108 κυβερνήσεις συνασπισμού που μελέτησε συνδέονταν.

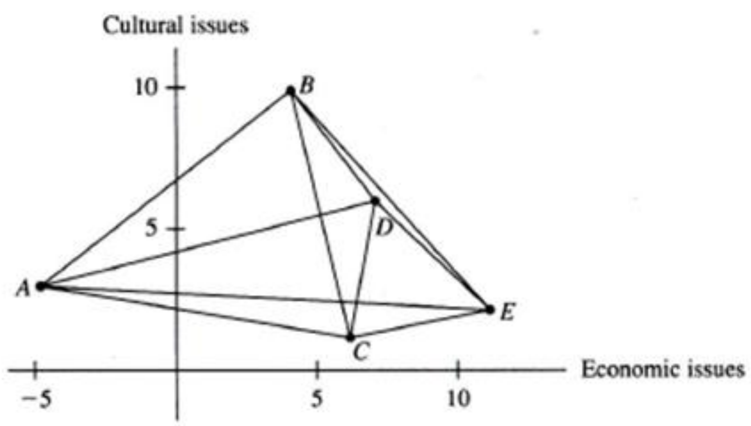
Πολλές φορές οι πολιτικές στρατηγικές των κομμάτων δεν ταυτίζονται ολοκληρωτικά με τις πολιτικές τους ιδεολογίες. Έτσι για παράδειγμα ένα κόμμα που είναι φιλελεύθερο σε κοινωνικά θέματα, μπορεί να ακολουθεί συντηρητικές πολιτικές στα οικονομικά. Για τον λόγο αυτό οι Converse και Valen παρουσίασαν ένα αντίστοιχο γράφημα έχοντας σαν βάση τις πολιτικές των κομμάτων της Νορβηγίας για τα πολιτιστικά θέματα της χώρας.

liberal	1	2	3	6	10	conservative
	C	*E*	*A*	*D*	*B*	

Εδώ οι AE και AD αποτελούν τους ελάχιστους δυνατούς συνασπισμούς νίκης.

Χρησιμοποιώντας ένα δισδιάστατο Καρτεσιανό σύστημα και με την βοήθεια της Ευκλείδειας απόστασης θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη σχετική ιδεολογική εγγύτητα των μερών.

$$d(A,B) = \sqrt{(-5-4)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{130} \approx 11.4$$
$$d(A,C) = \sqrt{(-5-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{125} \approx 11.2.$$



Έτσι παρατηρούμε ότι το κόμμα C είναι ελαφρώς πιο κοντά στο A από ότι στο κόμμα B. Κάθε συμβαλλόμενο μέρος επιθυμεί να είναι μέρος ενός συνασπισμού που θα υιοθετήσει ένα πρόγραμμα κοντά στο ιδεολογικό σημείο του κόμματός τού. Με την βοήθεια της θεωρίας παιγνίων μπορούμε να προβλέψουμε ποια κόμματα θα μπορούσαν να σχηματίσουν ένα κυβερνητικό συνασπισμό. Ωστόσο, σε ένα παιχνίδι όπου τα ενδιαφερόμενα μέρη χαρακτηρίζονται με βάση την ιδεολογία τους, το αντικείμενο των διαπραγματεύσεων δεν είναι το ποσοστό που αποκτά κάθε κόμμα στην κυβέρνηση. Αντίθετα τα μέρη διαπραγματεύονται για τις πολιτικές που θα ακολουθήσει η κυβέρνηση συνασπισμού.

5.2 Ελλάδα

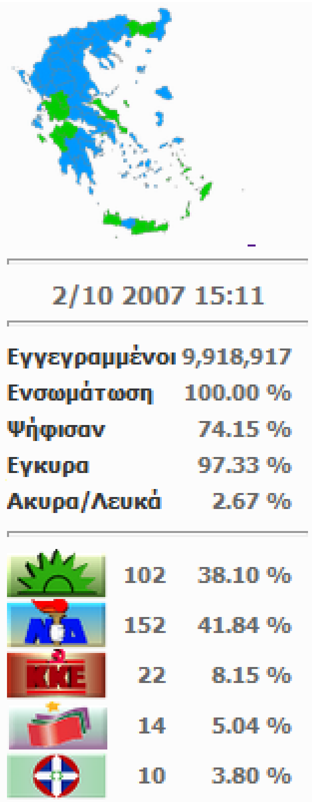
5.2.1 Εκλογές 2ας Οκτωβρίου 2007

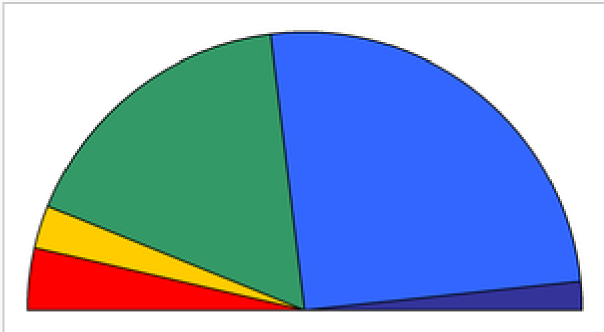
Οι κυβερνήσεις συνεργασίας στην ιστορική διαδρομή της Νεώτερης Ελλάδας, που προήλθαν έπειτα από την αδυναμία ανάδειξης αυτοδύναμης κυβέρνησης είναι ελάχιστες. Σε μια προσπάθεια να παρουσιάσουμε το Ελληνικό εκλογικό σύστημα θα χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία των βουλευτικών εκλογών του 2007, αλλά και το χαρακτηριστικό παράδειγμα των εκλογών του Ιουνίου και Νοεμβρίου του 1989.

Το απαιτούμενο ποσοστό που πρέπει να συγκεντρώσει ένα κόμμα ώστε να εκλέξει αυτόνομη κυβέρνηση ανέρχεται περίπου στο 42%. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αυτοδυναμία του κόμματος της Νέας Δημοκρατίας στις εκλογές του 2007, ήταν οριακή αλλά αρκετή για να της δώσει την αυτοδυναμία που απαιτείται για την δημιουργία νέας κυβέρνησης. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των κομμάτων που κατάφεραν να μπουν στην Βουλή, με το αντίστοιχο ποσοστό ψήφων αλλά και τον συνολικό αριθμό εδρών που το καθένα καταλαμβάνει.

Κόμμα	Αποτελέσματα 2007		
	Ποσοστό	Ψήφοι	Εδρες
ΠΑ.ΣΟ.Κ	38.10 %	2,727,279	102
Νέα Δημοκρατία	41.84 %	2,994,979	152
Κ.Κ.Ε.	8.15 %	583,750	22
ΣΥ.ΡΙΖ.Α	5.04 %	361,101	14
ΛΑ.Ο.Σ	3.80 %	271,809	10

Στην περίπτωσή μας, απαιτούμενος αριθμός εδρών για την δημιουργία κυβέρνησης είναι εκατόν πενήντα ένα έδρες. Βλέπουμε ότι ο αριθμός αυτός έχει επιτευχθεί στις εκλογές του 2007, αλλά στην περίπτωση που δεν ήταν επαρκής, το κόμμα με το μεγαλύτερο ποσοστό θα επέλεγε να συνεργαστεί με ένα κόμμα αντίστοιχης πολιτικής ιδεολογίας που όμως έχει μικρότερο ποσοστό, ώστε να διατηρήσει την υπεροχή του στην κυβέρνηση. Παρακάτω παραθέτεται ένας πίνακας με τα κυριότερα στατιστικά της εκλογικής αναμέτρησης όπως και ένα γράφημα κατανομής των εδρών.





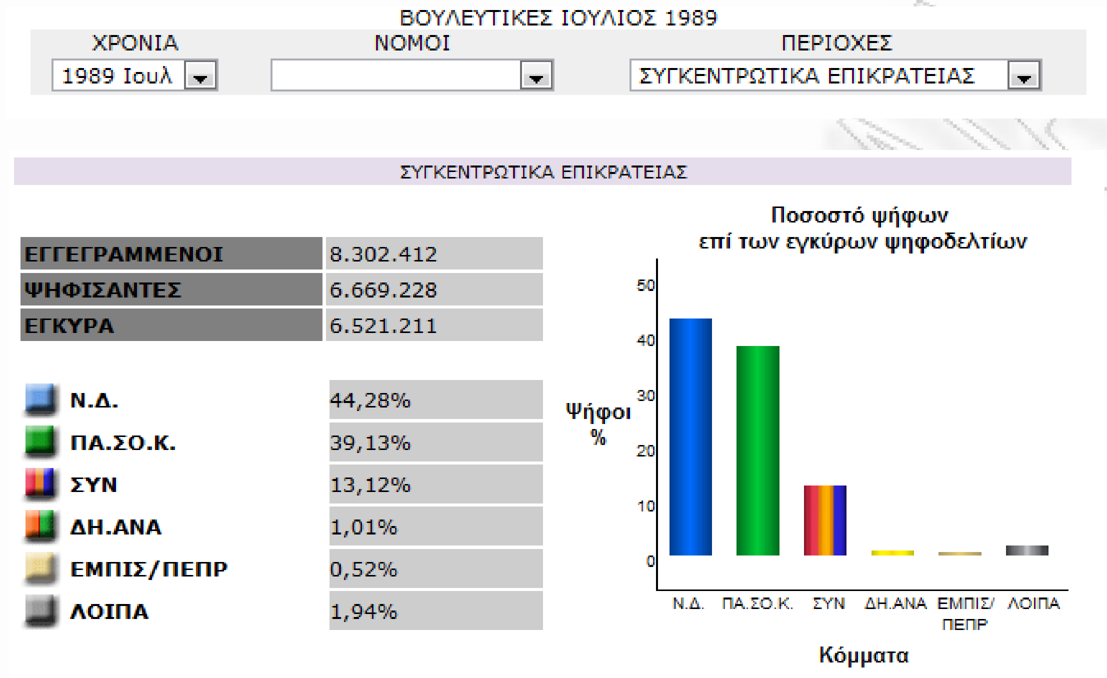
Η κατανομή των εδρών για τις βουλευτικές εκλογές του 2007.
- Νέα Δημοκρατία: 152 έδρες
- Πανελλήνιο Σοσιαλιστικό Κίνημα: 102 έδρες
- Κομμουνιστικό Κόμμα Ελλάδας: 22 έδρες
- Συνασπισμός Ριζοσπαστικής Αριστεράς: 14 έδρες
- Λαϊκός Ορθόδοξος Συναγερμός: 10 έδρες

5.2.2 Εκλογές 18ης Ιουνίου 1989

Για πρώτη φορά στη μεταπολίτευση έγιναν εκλογές μετά την ολοκλήρωση της τετραετίας, στις 18 Ιουνίου 1989. Η Νέα Δημοκρατία του Κωνσταντίνου Μητσοτάκη ήταν 1ο κόμμα και το ΠΑΣΟΚ του Ανδρέα Παπανδρέου 2ο, όμως δεν υπήρχε απόλυτη πλειοψηφία για κανέναν, άλλωστε το εκλογικό σύστημα ήταν αρκετά αναλογικό και τελικά φθάσαμε στη 'συγκυβέρνηση' ΝΔ- Συνασπισμού.

Με πρωτοβουλία του Κωνσταντίνου Μητσοτάκη και των ηγετών της Αριστεράς, Χαρίλαου Φλωράκη και Λεωνίδα Κύρκου, σχηματίζεται κυβέρνηση συνεργασίας μεταξύ της Νέας Δημοκρατίας και του ενιαίου, τότε, Συνασπισμού. Το νέο κυβερνητικό σχήμα υπό τον Τζαννή Τζαννετάκη είναι βραχύβιο κι έχει διπλό στόχο: τη δρομολόγηση των διαδικασιών της Κάθαρσης και την προετοιμασία αδιάβλητων εκλογών βάσει του ισχύοντος εκλογικού νόμου. Το σκεπτικό εκείνης της συνεργασίας ήταν ότι αν η χώρα οδηγείτο άμεσα σε νέα εκλογική αναμέτρηση, η παραπομπή για τυχόν σκάνδαλα θα ήταν αδύνατη, αφού αυτά θα παραγράφονταν.

Η ΝΔ με 44,3% των ψήφων κατέλαβε 145 έδρες, το ΠΑΣΟΚ με 39,1% 125 έδρες, ο Συνασπισμός με 13,1% 28 έδρες και από 1 έδρα κατέλαβαν η ΔΗΑΝΑ με 1% και ο ανεξάρτητος Μουσουλμάνος με 0,5%.



Αν προσπαθούσαμε να προβλέψουμε τις πιθανές συμμαχίες, της εκλογικής αναμέτρησης του Ιουνίου του 1989, τότε με την βοήθεια της θεωρίας παιγνίων και ξεκινώντας από τον παρακάτω πίνακα έχουμε :

	ΚΟΜΜΑΤΑ	**Αριθμός εδρών**
A.	Ν.Δ.	145
B.	ΠΑ.ΣΟ.Κ.	125
C.	ΣΥΝΑΣΠΙΣΜΟΣ	28
D.	ΔΗ.ΑΝΑ	1
E.	ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗ	1

Οι έδρες που απαιτούνται για τον σχηματισμό κυβέρνησης είναι 151, επομένως :

[151:	145,	125,	28,	1,	1]
	A	B	C	D	E

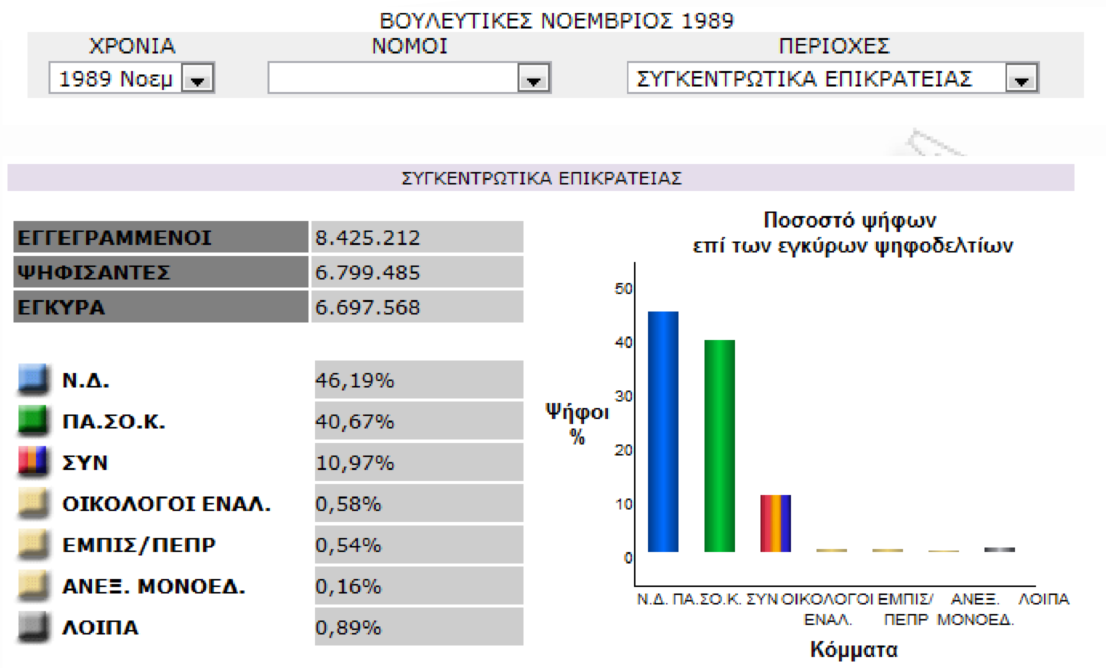
Παρατηρούμε λοιπόν ότι πιθανοί πολιτικοί συνδυασμοί για τον σχηματισμό κυβέρνησης αποτελούν οι AB, AC, BC, δεδομένου ότι δεν θα ήταν επιθυμητό να έχουμε μεγάλο αριθμό κομμάτων συνεργασίας σε μία κυβέρνηση. Επιπροσθέτως, τα μέρη επιθυμούν να συνεργάζονται με κόμματα που έχουν λάβει όσο το δυνατόν λιγότερους ψήφους, μεγιστοποιώντας το μερίδιό τους από τον συνασπισμό. Στον παρακάτω πίνακα, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε ότι ο συνδυασμός AC είναι η πιο πιθανή μορφή συνασπισμού, με την BC ως δεύτερη πιο πιθανή.

Ελάχιστος αριθμός συνδυασμών :	AB	AC	BC
Αριθμός εδρών :	270	173	153

5.2.3 Εκλογές 5ης Νοεμβρίου 1989

Η συγκυβέρνηση ΝΔ - Συνασπισμού λαμβάνει τέλος στις 7 Οκτωβρίου. Προκηρύσσονται εκλογές για τις 5 Νοεμβρίου 1989. Νικητής των εκλογών αναδεικνύεται και πάλι η ΝΔ (46,19%), χωρίς όμως να εξασφαλίζει και πάλι -για δεύτερη φορά- την απόλυτη πλειοψηφία στη Βουλή. Οι τρεις πολιτικοί αρχηγοί, Κ.Μητσοτάκης, Α.Παπανδρέου και Χ.Φλωράκης αποφασίζουν τη σύσταση οικουμενικής κυβέρνησης υπό τον ακαδημαϊκό, καθηγητή Ξ.Ζολώτα.

Παρά την ευρύτατη πλειοψηφία των 297 εδρών, που διέθετε στη Βουλή, η περίοδος της οικουμενικής κυβέρνησης Ζολώτα χαρακτηρίστηκε από ακυβερνησία, εξαιτίας της οποίας η χώρα απειλήθηκε από βαθιά οικονομική κρίση. Αυτή ήταν και η τελευταία κυβέρνηση συνεργασίας, που έμεινε γνωστή ως «οικουμενική κυβέρνηση», σχηματίστηκε το Νοέμβριο του 1989, με διάρκεια ζωής μέχρι τον Φεβρουάριο του 1990.



Θέλοντας να παρουσιάσουμε και σε αυτήν την εκλογική αναμέτρηση τους πιθανούς συνδυασμούς πολιτικών συμμαχιών για την δημιουργία κυβέρνησης, οδηγούμαστε στους παρακάτω πίνακες. Ο πρώτος πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό εδρών ανά πολιτική παράταξη βάση των επίσημων στοιχείων.

	ΚΟΜΜΑΤΑ	Αριθμός εδρών
A.	Ν.Δ.	148
B.	ΠΑ.ΣΟ.Κ.	128
C.	ΣΥΝΑΣΠΙΣΜΟΣ	22
D.	ΟΙΚΟΛΟΓΟΙ	1
E.	ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗ	1
F.	ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΣ	1

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και σε αυτήν την περίπτωση οι πιθανοί πολιτικοί συνδυασμοί για τον σχηματισμό κυβέρνησης αποτελούν οι AB, AC, BC, δεδομένου ότι δεν θα ήταν επιθυμητό να έχουμε μεγάλο αριθμό κομμάτων συνεργασίας σε μία κυβέρνηση. Αντιστοίχως με την προηγούμενη αναμέτρηση, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε ότι ο συνδυασμός AC είναι η πιο πιθανή μορφή συνασπισμού, με την BC ως δεύτερη πιο πιθανή, δεδομένου ότι το κόμμα A έχει συγκεντρώσει τον μεγαλύτερο αριθμό εδρών και συνεργάζεται με το κόμμα C, που έχει τον ελάχιστο απαιτητό αριθμό εδρών για κυβέρνηση συνεργασίας.

Ελάχιστος αριθμός συνδυασμών :	AB	AC	BC
Αριθμός εδρών :	276	170	160

Μελετώντας και τις δύο εκλογικές αναμετρήσεις παρατηρούμε ότι, τα κοινά τους στοιχεία είναι πάρα πολλά, αφού μόνο τρία κόμματα συγκεντρώνουν ένα ικανοποιητικό αριθμό εδρών, ενώ πρώτο κόμμα σε έδρες και στις δύο αναμετρήσεις αναδεικνύεται το ίδιο κόμμα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της πρώτης εκλογικής αναμέτρησης και με την βοήθεια του μοντέλο πολιτικής ιδεολογίας, τοποθετούμε τα κόμματα σε ένα μονοδιάστατο συνεχές γράφημα από αριστερά προς τα δεξιά, σε σχέση με τις πολιτικές τους ιδεολογίες. Βάση των δεδομένων του γραφήματος των (Converse and Valen - 1971), και αντιστοιχίζοντας στο δικό μας παράδειγμα τα κόμματα της εκλογικής αναμέτρησης του Ιουνίου 1989 αντί των κομμάτων της Νορβηγίας προκύπτει το ακόλουθο γράφημα :

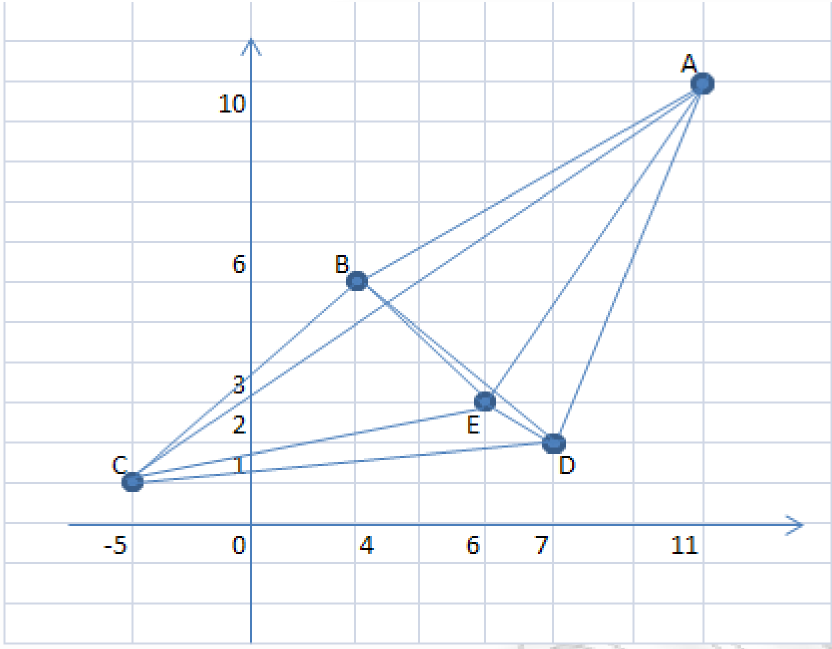
C		B	E	D	A
-5	0	4	6	7	11

O Robert Axelrod, πρότεινε ότι οι συνασπισμοί που διέπουν αυτή την μορφή τοποθέτησης θα πρέπει να συνδέονται, υπό την έννοια ότι θα πρέπει να περιέχουν όλα τα μέρη σε κάποιο διάστημα της γραμμής. Σε αυτό το παράδειγμα οι BC και ABDE αποτελούν τους ελάχιστους δυνατούς συνασπισμούς νίκης. Ο συνδυασμός AC, για παράδειγμα, δεν είναι συνδεδεμένος.

Λόγω του ότι πολλές φορές οι πολιτικές στρατηγικές των κομμάτων δεν ταυτίζονται ολοκληρωτικά με τις πολιτικές τους ιδεολογίες, ένα κόμμα που είναι φιλελεύθερο σε κοινωνικά θέματα, μπορεί να ακολουθεί συντηρητικές πολιτικές σε άλλα ζητήματα. Για τον λόγο αυτό οι Converse και Valen παρουσίασαν ένα αντίστοιχο γράφημα έχοντας σαν βάση τις πολιτικές των κομμάτων της Νορβηγίας για τα πολιτιστικά θέματα της χώρας. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του γραφήματος και τοποθετώντας τα Ελληνικά κόμματα της πρώτης εκλογικής αναμέτρησης ανάλογα με την πολιτική τους στα πολιτιστικά θέματα έχουμε :

C	D	E	B	A
1	2	3	6	10

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο συνδυασμός AB αποτελεί τον ελάχιστο δυνατό συνασπισμό νίκης. Χρησιμοποιώντας ένα δισδιάστατο Καρτεσιανό σύστημα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη σχετική ιδεολογική εγγύτητα των μερών.



Εκείνο που παρατηρούμε είναι ότι το κόμμα A και το κόμμα C παρόλο που δημιούργησαν κυβερνήσεις συνεργασίας σε δύο συνεχόμενες αναμετρήσεις εμφανίζονται εκ διαμέτρου αντίθετα στο γράφημά μας. Παρόλο που κάθε συμβαλλόμενο μέρος επιθυμεί να είναι μέρος ενός συνασπισμού που θα υιοθετήσει ένα πρόγραμμα κοντά στο ιδεολογικό σημείο του κόμματός του, κάτι τέτοιο φάνηκε να μην ισχύει για τις εκλογές του 1989 αφού τα κόμματα του συνασπισμού προέρχονταν από αντίθετες ιδεολογικά πολιτικές κατευθύνσεις. Ίσως τελικά αυτός να ήταν και ένας από τους λόγους που δύο συνεχείς πολιτικές συνεργασίες εμφάνισαν πολύ μικρή διάρκεια ζωής.

5.2.4 Εκλογές Μάιος 2012

Οι εκλογές του 1989 ήταν και οι τελευταίες όπου για τον σχηματισμό κυβέρνησης ήταν απαραίτητη η συνεργασία δύο κομμάτων. Από τότε όλες οι εκλογικές αναμετρήσεις, είτε οριακά είτε με μεγάλη πλειοψηφία ανέδειξαν αυτοδύναμη κυβέρνηση. Κάτι τέτοιο όμως δεν φαίνεται να συμβαίνει στις προγραμματισμένες για τον Μάιο του 2012 εκλογές. Οι δημοσκοπήσεις αν και παρουσιάζουν πολλά διαφορετικά αποτελέσματα, καταλήγουν σε ένα κοινό συμπέρασμα, κανένα κόμμα δεν φαίνεται μέχρι στιγμής να συγκεντρώνει τον απαραίτητο αριθμό ψήφων ώστε να το οδηγήσει σε αυτοδύναμη κυβέρνηση.

Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε μία από τις δημοσκοπήσεις, που παρουσιάζουν την πρόθεση ψήφου των ερωτηθέντων ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε τις πιθανές συμμαχίες που θα οδηγήσουν στον σχηματισμό κυβέρνησης.

Σύμφωνα με την εκτίμηση της πρόθεσης ψήφου με αναγωγή στις εκλογές τα αποτελέσματα της δημοσκόπησης δείχνουν δεκακομματική Βουλή κάτι πρωτοφανές για τα Ελληνικά δεδομένα, με τα εξής ποσοστά και τον αντίστοιχο αριθμό εδρών που καταλαμβάνουν στο κοινοβούλιο :

	ΚΟΜΜΑΤΑ	**Πρόθεση ψήφου**	**Αριθμός εδρών**
A.	Ν.Δ.	27%	121
B.	ΠΑ.ΣΟ.Κ.	13.5%	36
C.	Κ.Κ.Ε.	12.5%	33
D.	ΣΥ.ΡΙΖ.Α.	12%	32
E.	ΔΗΜ.ΑΡ.	11.5%	30
F.	ΛΑ.Ο.Σ.	5.5%	15
G.	Οικολόγοι Πράσινοι	3.5%	9
H.	Άρμα Πολιτών	3%	8
I.	Χρυσή Αυγή	3%	8
J.	ΔΗ.ΣΥ	3%	8

Μελετώντας τα ποσοστά που λαμβάνουν τα κόμματα παρατηρούμε ότι κανένα δεν μπορεί να συγκεντρώσει αυτοδυναμία κάτι που θα οδηγήσει σε κυβέρνηση συνεργασίας. Το κόμμα της Νέας Δημοκρατίας φαίνεται να συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ποσοστό, επομένως και τις περισσότερες έδρες, θα έχει λοιπόν και τον πρώτο λόγο για να αποφασίσει με ποιό κόμμα θα συνεργαστεί. Οι πιθανοί συνδυασμοί κομμάτων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα :

Ελάχιστος αριθμός συνδυασμών :	AB	AC	AD	AE
Αριθμός εδρών :	157	154	153	151

Οι συνδυασμοί AB, AC, AD και AE είναι οι πιθανότεροι συνδυασμοί από τους οποίους μπορεί να προκύψει μία κυβέρνηση συνεργασίας. Είναι εκείνοι οι συνδυασμοί από τους οποίους μπορεί να προκύψει έστω και οριακά ο ελάχιστος αριθμός εδρών που απαιτούνται για τον σχηματισμό κυβέρνησης. Πρωταρχικός σκοπός του κόμματος που συγκεντρώνει τις περισσότερες ψήφους είναι να συνεργαστεί με το πιο αδύνατο από τα διαθέσιαμα κόμματα. Το γεγονός όμως ότι τα κόμματα αυτά προέρχονται από διαφορετικές πολιτικές και ιδεολογικές κατευθύνσεις, καθιστά ακόμη και αδύνατο την συνεργασία κάποιων από αυτών. Προσπαθώντας να οδηγηθούμε σε ένα αποτέλεσμα που θα μας δώσει τους επικρτατέστερους πολιτικούς συνδυασμούς θα παραθέσουμε σε ένα γράφημα όλα τα κόμματα τοποθετώντας τα από αριστερά προς τα δεξιά. Θα επιχειρήσουμε με αυτόν τον τρόπο να δούμε κατά πόσο μπορούν να πραγματοποιηθούν όλοι οι παραπάνω συνδυασμοί.

Κ.Κ.Ε	ΔΗΜ.ΑΡ	ΣΥ.ΡΙΖ.Α	Οικολόγοι Πράσινοι	Άρμα Πολιτών	ΠΑ.ΣΟ.Κ	ΔΗ.ΣΥ	Ν.Δ	ΛΑ.Ο.Σ	Χρυσή Αυγή
C	**E**	**D**	**G**	**H**	**B**	**I**	**A**	**F**	**J**
33	30	32	9	8	36	8	121	15	8

Αυτό που μπορούμε να διακρίνουμε είναι ότι βάση της πολιτικής ιδεολογίας των κομμάτων, αλλάζουν και οι πιθανότητες συνεργασίας μεταξύ αυτών. Έτσι για παράδειγμα η συνεργασία της Νέας Δημοκρατιάς με το Κ.Κ.Ε θα ήταν σχεδόν αδύνατη. Ενώ περισσότερες πιθανότητες συγκεντρώνει η συνεργασία της Νέας Δημοκρατίας με κάποια από τα δύο κόμματα της αριστεράς που συγκεντρώνουν τον επιθυμητό αριθμό εδρών. Σίγουρα για την συνεργασία μεταξύ Νέας Δημοκρατιάς και ΠΑ.ΣΟ.Κ δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε ασφαλή συμπεράσματα. Παρόλο που την συγκεκριμένη χρονική στιγμή και λόγω των πολιτικών και εθνικών γεγονότων συνεργάζονται, παραμένουν οι δύο μεγάλοι αντίπαλοι των εκλογών.

Με την βοήθεια της θεωρίας παιγνίων θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τις περιπτώσεις εκείνες όπου η εκλογή της αυτοδύναμης κυβέρνησης δεν καθίσταται δυνατή. Σε μία εκλογική συνεργασία όμως, όπου οι παράγοντες που πρέπει να ορίσουμε είναι εκτός από μαθηματικοί, πολιτικοί και ιδεολογικοί τα αποτελέσματα μπορούν να ποικίλουν και να διαφοροποιούνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα

Στις μέρες μας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι όλα έχουν άμεση σχέση με την θεωρία παιγνίων αφού συναντάμε εφαρμογές στην οικονομία, στις επιχειρήσεις, στην πληροφορική, στις τηλεπικοινωνίες, στην πολιτική, ακόμη και στη βιολογία. Μια σύγχρονη μαθηματική θεωρία μπορεί να αναλύσει κάθε είδος αναμέτρησης , από την ντάμα και το σκάκι μέχρι τα τυχερά παιχνίδια ή έναν πυρηνικό πόλεμο, και να προβλέψει τον νικητή.

Με την συγκεκριμένη διπλωματική εργασία έγινε μια προσπάθεια να παρουσιαστεί η επιστήμη της θεωρίας παιγνίων. Προσπαθήσαμε μέσα από την διάκριση των παιγνίων να τα παρουσιάσουμε με αναλυτικά παραδείγματα της καθημερινής ζωής και μέσα από τις διάφορες στρατηγικές να μελετήσουμε τα πιθανά αποτελέσματα. Έγινε μία προσπάθεια να αναλυθεί η ισορροπία Nash με την βοήθεια γνωστών παιγνίων και να αναλύσουμε ταυτόχρονα οικονομικές εφαρμογές.

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των παιχνιδιών αλλά και τους παράγοντες που πρέπει να συνυπολογίσουμε για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα η θεωρία παιγνίων μας δίνει την δυνατότητα να οδηγηθούμε σε ασφαλής λύσεις και συμπεράσματα για θέματα που επιζητούν άμεση λύση.

Βιβλιογραφία

- Α.Χ. Παναγιωτοπούλου – Ε.Χ. Φούντα (2000), Μαθηματικά Οικονομικών Θεωριών και Διοικητικών Επιστημών
- http//:eclass.uop.gr/modules/document/file.php/TST125/O1%202ΙΑΛΕΞΕΙΣ/ΘΠ %2001%20Εισαγωγή.pdf
- Παναγοπούλου Ν. Παναγιώτα(2005), Μελέτη δρομολογήσεων και Συμφόρησης σε
- Δίκτυα με βάση τη Θεωρία Παιγνίων, διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών
- http//:el.wikipedia.org/wiki/θεωρία παιγνίων
- Παναγοπούλου Ν. Παναγιώτα(2008), Αλγοριθμική και εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών
- http//:eclass.uop.gr/modules/document/file.php/TST125/O1%202ΙΑΛΕΞΕΙΣ/ΘΠ %2001%20Εισαγωγή.pdf
- Παπαδόπουλος Γεώργιος (2011), Διπλωματική εργασία, Θεωρία παιγνίων και λήψη Διοικητικών αποφάσεων
- http//:focusmag.gr/articles/view-article.rx?oid=392222
- http//:www.uni-bonn.de/~sgeorgan/Paihnidia.ppt
- http//:giggle.ws
- Εμμανουήλ Πετράκης, Σημειώσεις Θεωρίας Παιγνίων, Καθηγητής τμήματος Οικονομικής Επιστήμης Πανεπιστημίου Κρήτης
- http//:el.wikipedia.org/wiki/θεωρία παιγνίων
- http//:www.pitt.edu/~jduffy/econ1200/lect1.pdf
- Mansour Yishay(2003), Computational Learning Theory, Lecture 1:March 2
- Οικονόμου Σ.Γεώργιος (1978),Θεωρία Παιγνίων, Ειδικός επιστήμονας ΑΠΘ
- http//:users.auth.gr/~kehagiat/Game theory
- http//:www.gametheory.net
- http://arielrubinstein.tau.ac.il/99/gt100.html#g1
- Hargreaves Heap P.Shaun and Varoufakis Yanis(1995), Game theory: A critical Introduction, London, Routledge
- Siegfried Tom (2006), A beautiful Math: John Nash, game theory and the Modern quest for a code of nature, Washington,D.C.,Joseph Henry Press
- Fisher Len Ph.D.(2008), Rock, Paper, Scissors: Game Theory in every day life, New York, Basic Books
- http//:balla.gr/default.asp?pid=69
- http//:www.gametheory.net/dictionary
- Osborne J.Martin (2002), An introduction to game theory, Oxford University Press
- http://arielrubinstein.tau.ac.il/99/gt100.html#g1
- Βαρουφάκης Γιάνης, Θεωρία Παιγνίων: Η θεωρία που φιλοδοξεί να ενοποιήσει τις κοινωνικές επιστήμες,Gutenberg
- http//:www.pitt.edu/~jduffy/econ1200/lect1.pdf
- Daskalakis Constantinos (2008), The Complexity of Nash Equilibria, Electrical

Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley

- Straffin D. Philip(1993), Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America
- Osborne J.Martin and Rubinstein Ariel (1998), A Course in Game Theory, London, The MIT Press Cambridge
- http//:en.wikipedia.org/wiki/Prisoner's_Dilemma
- http//:www.gametheory.net/lecture_Notes/Levent kockesen
- Gibbons Robert, Game Theory for Applied Economists, Princeton, New Jersey, Princeton University Press
- http://macedonia.uom.gr/~yrefanid/Courses/GameTheory/
- http//:weber.ucsd.edu/~bslantch/courses/gt/02-preferences_expected-utility.pdf
- Rasmusen Eric(2001), Games and Information:An introduction to Game Theory,fourth edition
- Βλαχοπούλου Αθανασία (2010), Μεταπτυχιακή εργασία, Εμπειρική προσέγγιση της Nash ισορροπίας
- Kaushik Basu (1994), "The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory", American Economic Review, 84, 2, 391-395.
- http://www.econlib.org/library/Enc
- http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm
- http://www.eia.doe.gov/emeu/iea
- http://www.fliiby.com/file/810911/94ns8juuik.html
- http://www.friendsofscience.org
- http://www.ilog.com/products/cplex
- http://www.ipcc.ch
- http://www.prisoners-dilemma.com/
- http://www.unfccc.int
- http://www.gametheory.net/lectures/lectures.pl?Format=PDF&highlight=PDF
- http://www.gametheory.net/
- http://plato.stanford.edu/entries/game-theory/#Behav
- http://openarchives.gr/
- http://artemis.cslab.ntua.gr/search/
- http://www.ekt.gr/info-serv/diglib/bases/digitize/hedi.htm
- http://www.sansimera.gr/articles/481
- http://ekloges-prev.singularlogic.eu/v2007/pages/index.html
- http://www.nooz.gr