ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΜΑΚΗΣ

Μελέτη του προβλήματος των κίβδηλων νομισμάτων με χρήση δένδρων αποφάσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Για το Π.Μ.Σ.

"ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2010

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΜΑΚΗΣ

Μελέτη του προβλήματος των κίβδηλων νομισμάτων με χρήση δένδρων αποφάσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Για το Π.Μ.Σ.

"ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"

Επιβλέπων: Π. Τσικούρας

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Α. Σαπουνάκης	Ε. Φούντας	Π. Τσικούρας
Καθηγητής	Καθηγητής	Αναπληρωτής Καθηγητής

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή μελετάται το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων.

Υπάρχει ένας δεδομένος αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων κάποια είναι κίβδηλα. Διατίθεται μία ζυγαριά η οποία δείχνει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή αν τα νομίσματα που ζυγίζονται στις δύο πλευρές της είναι ίσου βάρους. Σκοπός του προβλήματος είναι να βρεθούν τα κίβδηλα νομίσματα, χρησιμοποιώντας τη ζυγαριά, με το μικρότερο δυνατό αριθμό ζυγισμάτων.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές εκδοχές του προβλήματος. Για παράδειγμα, μπορεί το κίβδηλο νόμισμα να είναι ένα, δύο ή και περισσότερα όποτε και ακολουθείται εντελώς διαφορετική τεχνική επίλυσης στην κάθε περίπτωση.

Με το πρόβλημα αυτό έχουν ασχοληθεί διάφοροι ερευνητές. Για παράδειγμα, με το πρόβλημα του ενός κίβδηλου νομίσματος έχουν ασχοληθεί οι L. Halbeisen και N. Hungerbühler [3], με το πρόβλημα των δύο κίβδηλων οι I. Bosnajak και R. Tosic [1,10]. Με γενικότερες περιπτώσεις και άλλες παραλλαγές του προβλήματος έχουν ασχοληθεί οι C. A. B. Smith [9], L. Pyber [7], M. Gardner [2], T. Pappas [6], C.W. Raine [8] καθώς και αρκετοί άλλοι.

Στις διάφορες περιπτώσεις που αντιμετωπίσαμε στη διατριβή αυτή, χρησιμοποιούνται τα δένδρα αποφάσεων για την εύρεση του ελάχιστου αριθμού ζυγισμάτων που θα χρειαστούν για να εντοπιστούν τα κίβδηλα νομίσματα. Μελετάται αναλυτικά η περίπτωση όπου έχουμε ένα κίβδηλο νόμισμα και διάφορες υποπεριπτώσεις αυτής. Μελετάται επίσης η περίπτωση όπου στο πρόβλημα έχουμε δύο κίβδηλα νομίσματα. Την εργασία αυτή έρχεται να συμπληρώσει μία εφαρμογή ηλεκτρονικού υπολογιστή η οποία οπτικοποιεί το πρόβλημα που εξετάζουμε.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Αναπληρωτή Καθηγητή Π. Τσικούρα για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια αυτής της διατριβής. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Καθηγητές Α. Σαπουνάκη και Ε. Φούντα.

Πειραιάς 19 Ιανουαρίου 2010

Γεώργιος Κουμάκης

Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι βασικοί ορισμοί σχετικά με τα γραφήματα και τα δένδρα. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στο πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων και μελετάται αναλυτικά η περίπτωση που έχουμε ένα μόνο κίβδηλο νόμισμα. Αυτό το κεφάλαιο αποτελείται από τέσσερις ενότητες στις όποιες περιγράφονται αναλυτικά τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις του προβλήματος με ένα κίβδηλο νόμισμα. Πιο συγκεκριμένα αντιμετωπίζονται οι εξής περιπτώσεις :

- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων το ένα είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα .

- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων ένα είναι κανονικό και γνωστό, και ψάχνουμε να βρούμε αν το κίβδηλο είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων ένα είναι κανονικό και γνωστό, και ψάχνουμε να βρούμε αν υπάρχει κίβδηλο, ποιο είναι αυτό και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων ψάχνουμε να βρούμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η πιο σύνθετη περίπτωση, κατά την οποία έχουμε δύο κίβδηλα νομίσματα στο πρόβλημα. Αυτό το κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο ενότητες όπου μελετώνται αντίστοιχα δύο διαφορετικές περιπτώσεις του προβλήματος με δύο κίβδηλα νομίσματα. Πιο συγκεκριμένα αντιμετωπίζονται οι εξής περιπτώσεις:

- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων τα δύο είναι ελαφρύτερα από τα υπόλοιπα.

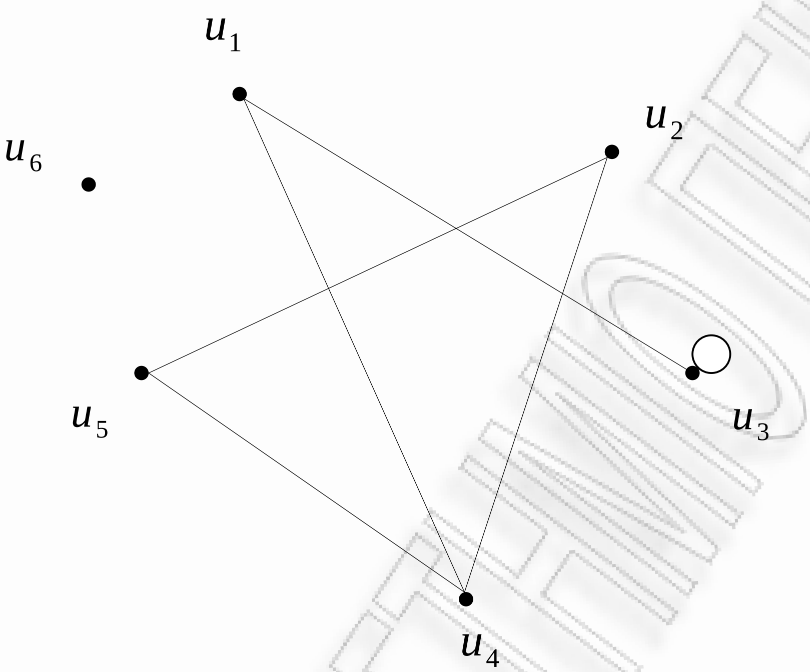
- Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων, εκ των οποίων τα δύο είναι κίβδηλα και γνωρίζουμε ότι ένα είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα και το άλλο βαρύτερο.

Τέλος, η εργασία συνοδεύεται από μία εφαρμογή σε ηλεκτρονικό υπολογιστή που κάνει επίδειξη των διαφόρων περιπτώσεων του προβλήματος που αναλύονται στην εργασία.

Περιεχόμενα

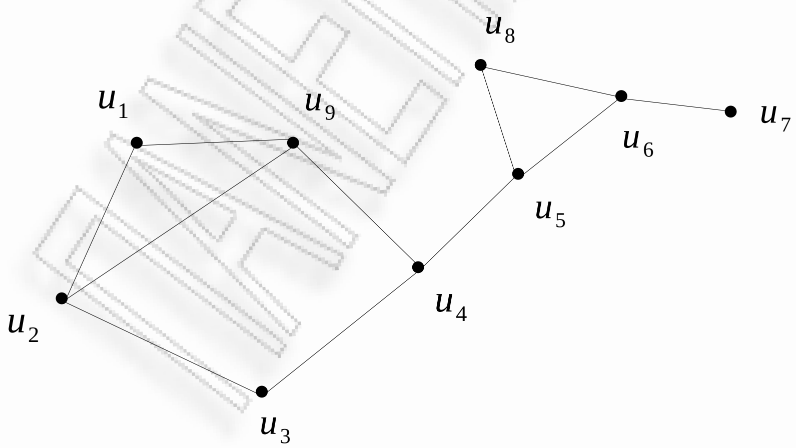
1.0 Ορισμοί

Γράφημα Δεσμών : Κάθε δυάδα G = (V (G),E(G)) ή (X,E) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και E είναι ένα σύνολο από μη διατεταγμένα ζεύγη {x,y},x,y ∈ X ονομάζεται γράφημα δεσμών ή απροσανατόλιστο γράφημα. Ένα γράφημα δεσμών έχει κόμβους και δεσμούς τα οποία είναι και τα στοιχεία του X και του E αντίστοιχα. Αν x και y ταυτίζονται τότε έχουμε έναν βρόχο (για παράδειγμα, βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Ένα γράφημα δεσμών

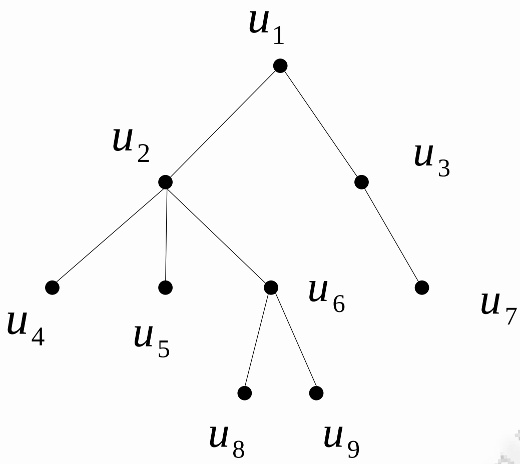
Συνεκτικό γράφημα δεσμών : Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν για οποιουσδήποτε δυο κόμβους του, υπάρχει μονοπάτι που τους ενώνει (για παράδειγμα, βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών

Ισομορφισμός : Τα γραφήματα δεσμών G = (X,E) και G' = (X',E') ονομάζονται ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση f : X → X' με {x,y} ∈ E ⇔ { f(x), f(y) } ∈ E'.

Δένδρο :Ένα συνεκτικό και παράλληλα άκυκλο γράφημα δεσμών ονομάζεται δένδρο (για παράδειγμα, βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Ένα δένδρο

Μέγεθος ενός δένδρου T με ρίζα, ονομάζεται ο αριθμός των δεσμών του και συμβολίζεται με s(T). Το δένδρο που δεν έχει κανένα δεσμό ονομάζεται **κενό δένδρο** και συμβολίζεται με 0 ενώ το δένδρο που έχει ένα μόνο δεσμό συμβολίζεται με 1.

Βαθμός ενός κόμβου u σε ένα γράφημα λέγεται το πλήθος των δεσμών του G των οποίων ο u είναι άκρο και συμβολίζεται με d(u).

Φύλλα αποκαλούνται οι κόμβοι ενός δένδρου με βαθμό 1. Φαίνονται στο σχήμα 3 οι κόμβοι u_4, u_5, u_7, u_8, u_9

Ιδιότητες δένδρου :

1) Το G είναι συνεκτικό.

2) Το G είναι άκυκλο.

3) |X| = |E| + 1.

4) Αν ενώσουμε δυο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους δημιουργούμε γράφημα με ένα ακριβώς κύκλο.

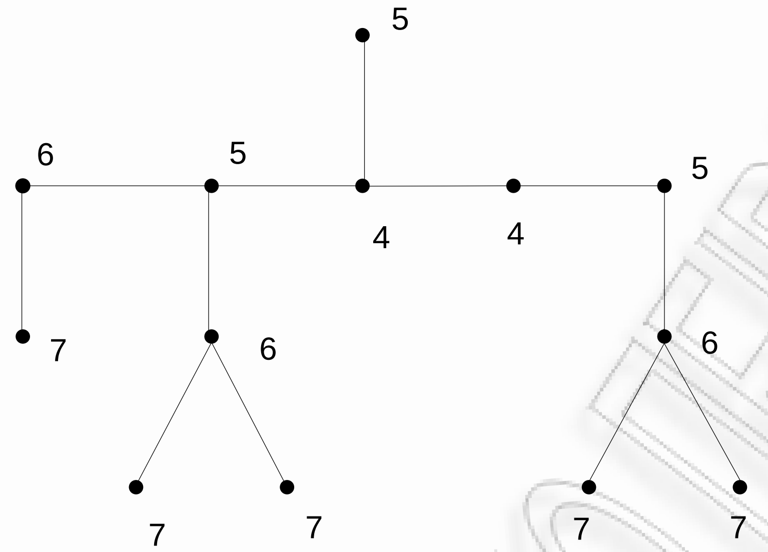
Απόσταση d(u,v) μεταξύ δυο κόμβων u,v μιας συνιστώσας G ονομάζεται το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των διαδρομών που τους συνδέουν.

Εκκεντρότητα ενός κόμβου : Η εκκεντρότητα e(u) ενός κόμβου u δίνεται από τη σχέση :

$$e(u) = \max_{v \in X(G)} d(u,v)$$

Κεντρικός κόμβος είναι ο κόμβος που παρουσιάζει την ελάχιστη εκκεντρότητα. Μπορεί να υπάρχουν και περισσότεροι κεντρικοί κόμβοι (βλ. Σχήμα 4). Το σύνολο όλων των κεντρικών κόμβων ονομάζεται κέντρο του γραφήματος. Ειδικά για τα δένδρα ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα, βλ. Σχήμα 4.

<u>Πρόταση 1:</u> Το κέντρο ενός δένδρου αποτελείται από έναν ή δυο κόμβους , οι όποιοι είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους.



Σχήμα 4: Οι εκκεντρότητες των κόμβων ενός δέδνρου

Κλαδί ενός δένδρου T σε ένα κόμβο του u λέγεται κάθε μεγιστικό υπόδενδρο του T που έχει το u για φύλλο.

Βάρος κλαδιού ονομάζεται ο αριθμός των δεσμών του.

Βάρος κόμβου ονομάζεται το μέγιστο βάρος των κλαδιών στον κόμβο αυτό.

Κεντροειδής κόμβος ονομάζεται κάθε κόμβος με ελάχιστο βάρος.

Κεντροειδές δένδρου ονομάζεται το σύνολο των κεντροειδών κόμβων του.

<u>Πρόταση 2:</u> Το κεντροειδές ενός δένδρου αποτελείται από ένα ή δυο συνδεδεμένους κόμβους

Δένδρο με ρίζα ονομάζεται ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη ρίζα του δένδρου). Έστω r η ρίζα του δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους T - r λέγονται υπόδενδρα της ρίζας και θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα.

Οι παρακάτω ορισμοί αναφέρονται σε δένδρα με ρίζα (βλ. Σχήμα 5).

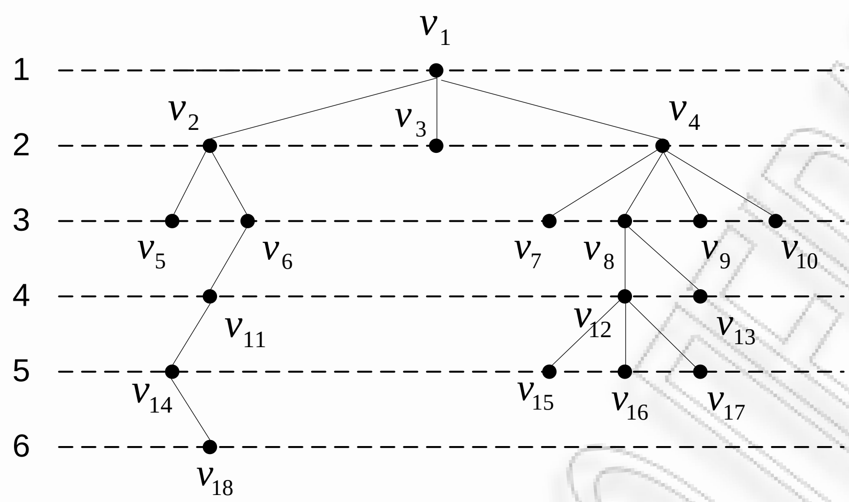
Το **Επίπεδο l ενός κόμβου** ορίζεται αναδρομικά ως εξής: l(r) = 1 και αν στο (μοναδικό) r - v μονοπάτι (r,...,u,v) έχουμε l(u) = i, τότε l(v) = i +1. Σε αυτή την περίπτωση ο u λέγεται γονέας του v και το v λέγεται παιδί του u. Παιδιά που έχουν το ίδιο γονέα λέγονται αδέλφια.

Πρόγονος / Απόγονος : Αν υπάρχει στο δένδρο T διαδρομή από έναν κόμβο v_1 σε έναν κόμβο v_k, η οποία χρησιμοποιεί κόμβους με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το v_1 είναι πρόγονος του v_k και το v_k είναι απόγονος του v_1.

Φύλλο / Ενδιάμεσος κόμβος: Ένας κόμβος χωρίς παιδιά λέγεται φύλλο. Αν έχει παιδιά λέγεται ενδιάμεσος.

Βαθμός : Βαθμός ενός κόμβου u ενός δένδρου ονομάζεται ο αριθμός των παιδιών του και συμβολίζεται με δ(u).

Ύψος (ή βάθος) ενός δένδρου λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.



Σχήμα 5: Ένα δένδρο με ρίζα

Παράδειγμα: Στο δένδρο του σχήματος 5 έχουμε:

Το v_{11} είναι παιδί του v_6 και άρα το v_6 είναι γονέας του v_{11}.
Τα v_5,v_6 είναι αδέλφια.
Το v_2 είναι πρόγονος των v_5, v_6, v_{11}, v_{14}, v_{18}.
Το v_{15} είναι απόγονος των v_1, v_4, v_8, v_{12}.
Το v_{11} είναι ενδιάμεσος κόμβος.
Το ύψος του δένδρου είναι 6.
Τα φύλλα του δένδρου είναι τα v_5, v_{18}, v_3, v_7, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{15}, v_{16}, v_{17}.

Υπόδενδρο : Έστω r η ρίζα ενός δένδρου Τ. Τα δένδρα του δάσους Τ - r λέγονται υπόδενδρα της ρίζας r και θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα. Η έννοια των υποδένδρων ενός οποιουδήποτε κόμβου ορίζεται ανάλογα.

Διατεταγμένο δένδρο : Ένα δένδρο με ρίζα, όπου η διάταξη των υποδένδρων κάθε κόμβου του είναι σημαντική ονομάζεται διατεταγμένο δένδρο. Η αλλαγή της σχετικής θέσης των υπόδενδρων οποιουδήποτε κόμβου του μπορεί να δημιουργήσει μη ισόμορφο διατεταγμένο δένδρο.

k-δένδρο : Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κόμβος επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά λέγεται k-δένδρο.

Δένδρα αποφάσεων : Είναι τα δένδρα που χρησιμοποιούνται για να διευκολύνουν την έρευνα και διερεύνηση περιπτώσεων και για να μοντελοποιήσουν τη λογική των αλγορίθμων. Είναι τα k-δένδρα των οποίων κάθε εσωτερική κορυφή παριστάνει μια ερώτηση για την οποία πρέπει να αποφασίσουμε. Οι δυνατές απαντήσεις παριστάνονται από τους δεσμούς που συνδέουν τον κόμβο με τους κόμβους του επόμενου επιπέδου. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας παριστάνονται από τα φύλλα του δένδρου.

<u>*Πρόταση 3*</u> : Το ύψος h ενός κ-δένδρου με l φύλλα είναι τουλάχιστον $\log_k l + 1$.

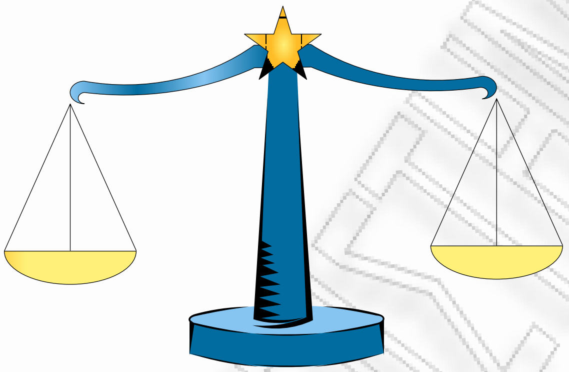
2.0 Εισαγωγή στο πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων

Μια εφαρμογή των δένδρων αποφάσεων είναι το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί με διάφορες παραλλαγές. Παρακάτω θα περιγράψουμε αναλυτικά αυτές τις παραλλαγές και θα δημιουργήσουμε τα δένδρα αποφάσεων για κάθε μία από αυτές.

2.1 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων το ένα είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα

Η πιο απλή περίπτωση του προβλήματος των κίβδηλων νομισμάτων είναι η ακόλουθη.

Έχουμε ένα δεδομένο αριθμό νομισμάτων n, μία ζυγαριά η οποία σε ένα ζύγισμα μπορεί να μας δείξει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή αν τα νομίσματα που ζυγίζονται είναι ίσου βάρους (βλ. εικόνα 1) και γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ένα και μοναδικό νόμισμα είναι κίβδηλο και είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα. Φυσικά η περίπτωση του να είναι βαρύτερο από τα υπόλοιπα είναι ανάλογη. Ψάχνουμε να βρούμε το μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων που απαιτείται για να βρεθεί το κίβδηλο νόμισμα. Στην ανάλυση των διαφόρων περιπτώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τα δένδρα αποφάσεων.



Εικόνα 1: Η ζυγαριά του προβλήματος των κίβδηλων νομισμάτων

Το δένδρο απόφασης είναι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

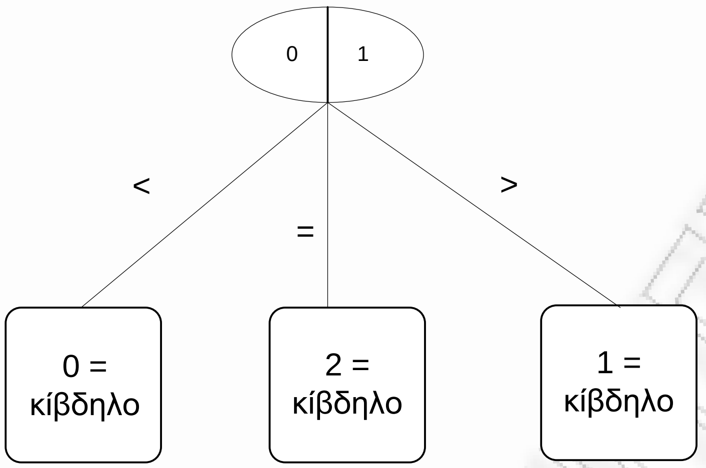
< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

2.1.1. Για n = 3

Στην περίπτωσή μας, όπου έχουμε τρία νομίσματα και γνωρίζουμε ότι ακριβώς ένα είναι κίβδηλο, και μάλιστα ελαφρύτερο, το δένδρο απόφασης έχει ως εξής:



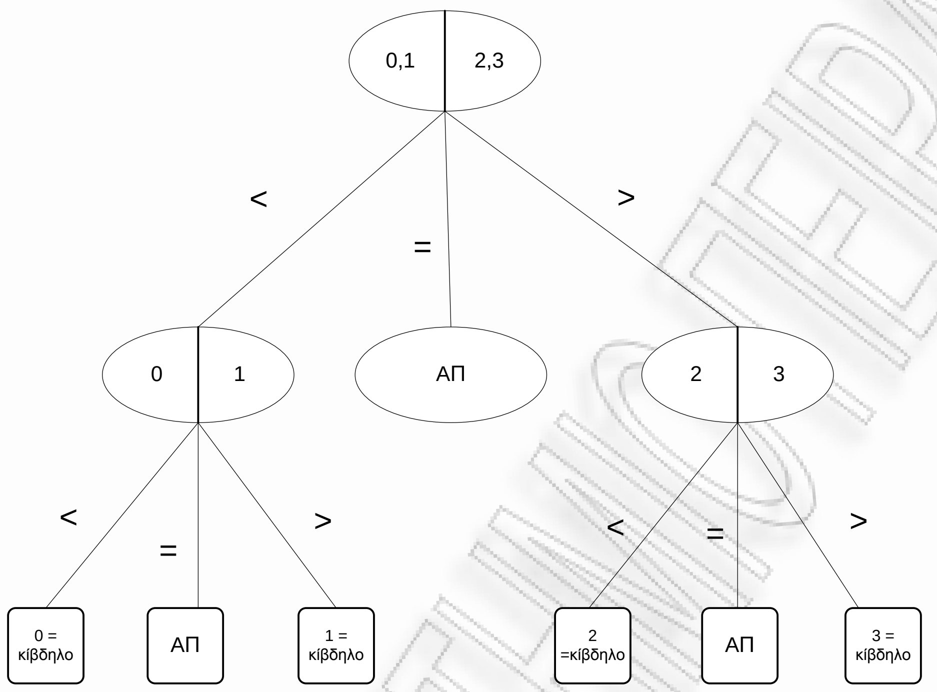
Σχήμα 6: Το δένδρο απόφασης της περίπτωσης n = 3

Ζυγίζουμε αρχικά το νόμισμα 0 με το νόμισμα 1. Αν ισορροπήσουν σημαίνει πως το νόμισμα 2, το οποίο αφήσαμε εκτός ζυγαριάς, είναι αυτό που ψάχνουμε. Αν η ζυγαριά γύρει προς το 0 τότε το νόμισμα 1 είναι αυτό που ψάχνουμε ενώ αν γύρει προς το 1 τότε το νόμισμα 0 είναι το κίβδηλο.

Άρα, στην τετριμμένη αυτή περίπτωση, θα χρειαστεί τουλάχιστον 1 ζύγισμα για να βρεθεί το κίβδηλο νόμισμα.

2.1.2. Για n = 4

Χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε στο 2.1.1. παραθέτουμε το δένδρο απόφασης έχοντας τέσσερα νομίσματα εκ των οποίων ακριβώς ένα είναι κίβδηλο (ελαφρύτερο).

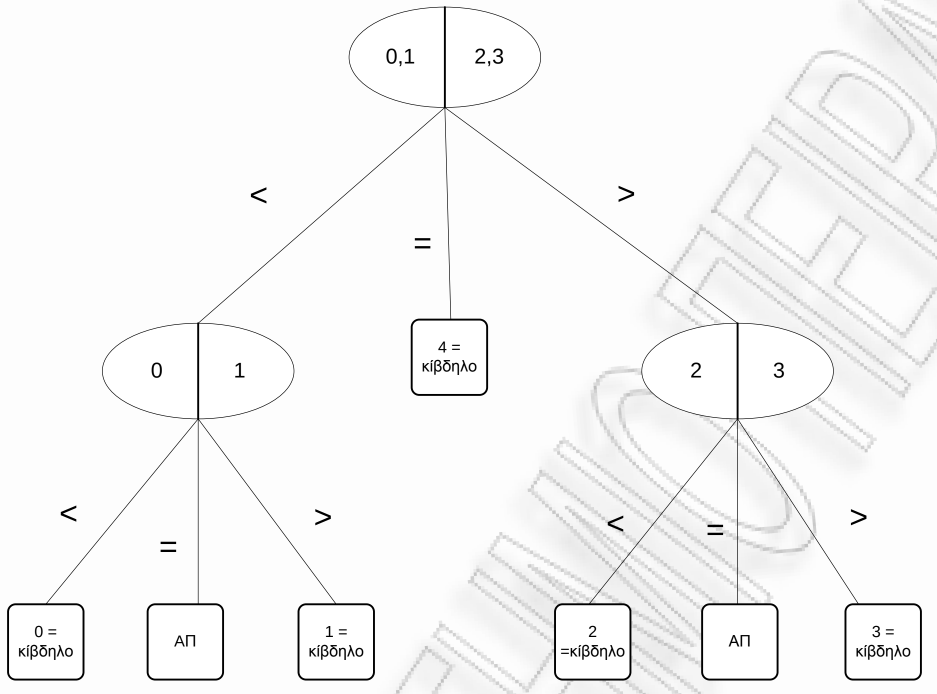


Σχήμα 7: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο. Η συντομογραφία "ΑΠ" σημαίνει αδύνατη περίπτωση και θα χρησιμοποιείται από δω και στο εξής στα δένδρα αποφάσεων.

2.1.3. Για n = 5

Παρακάτω παραθέτουμε το δένδρο απόφασης για πέντε νομίσματα εκ των οποίων ένα είναι κίβδηλο.

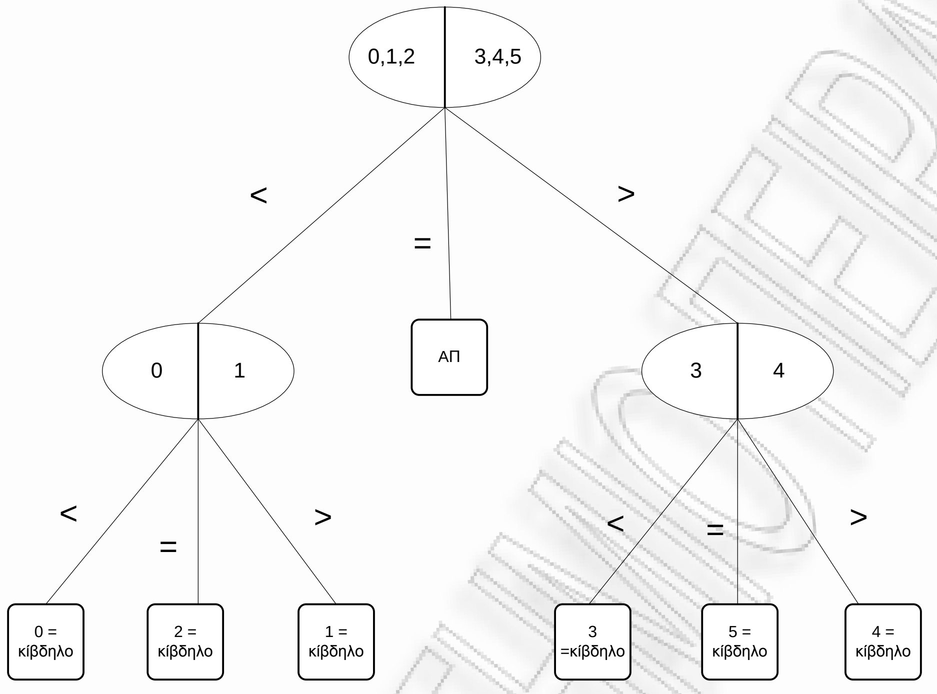


Σχήμα 8: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

Παρατηρούμε εδώ ότι το Σχήμα 8 είναι ακριβώς ίδιο με το Σχήμα 7 με τη μόνη διαφορά ότι αν ισορροπήσουν τα τέσσερα πρώτα νομίσματα στο πρώτο ζύγισμα ξέρουμε αμέσως ότι το κίβδηλο είναι αυτό που αφήσαμε απ' έξω στο πρώτο ζύγισμα. Κατά συνέπεια, καταλαβαίνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση χρειαζόμαστε τουλάχιστον 2 ζυγίσματα για να βρούμε τη λύση του προβλήματος.

2.1.4. Για n = 6

Παρακάτω θα δούμε το δένδρο απόφασης για έξι νομίσματα εκ των οποίων ακριβώς ένα είναι κίβδηλο (ελαφρύτερο).

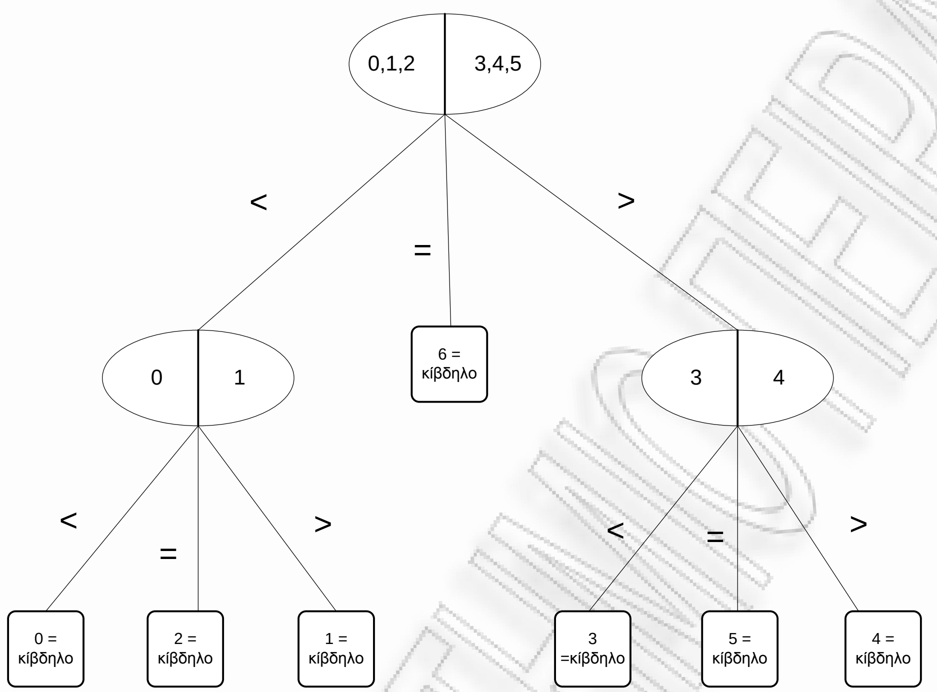


Σχήμα 9: Το δένδρο απόφασης για n = 6.

Εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε το λιγότερο 2 ζυγίσματα για να ανακαλύψουμε το κίβδηλο και στην περίπτωση των 6 νομισμάτων. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε, δεν υπάρχει περίπτωση να ανακαλύψουμε το κίβδηλο με ένα και μόνο ζύγισμα σε αντίθεση με την περίπτωση των 5 νομισμάτων.

2.1.5. Για n = 7

Συνεχίζοντας για επτά συνολικά νομίσματα, έχουμε το παρακάτω δένδρο απόφασης.

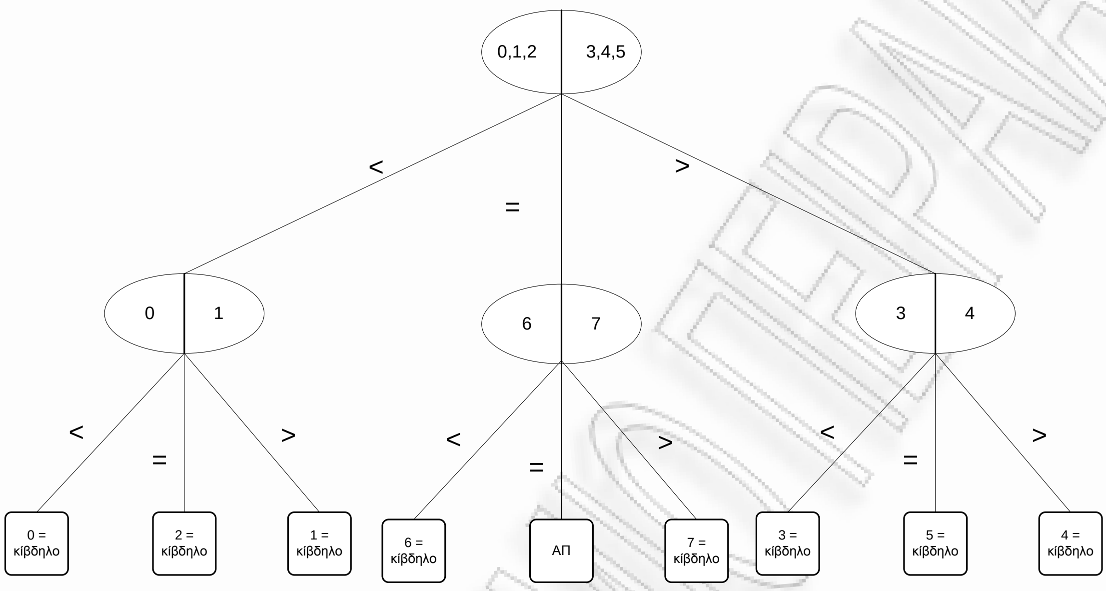


Σχήμα 10: Το δένδρο απόφασης για n = 7.

Παρατηρούμε την ομοιότητα του σχήματος 10 με το προηγούμενο (Σχήμα 9) με τη διαφορά ότι αν ισορροπήσουν τα 6 πρώτα στο πρώτο ζύγισμα, καταλαβαίνουμε αμέσως ότι το νόμισμα 6 είναι αυτό που ψάχνουμε. Δηλαδή, υπάρχει πάλι πιθανότητα να βρούμε το κίβδηλο με ένα και μόνο ζύγισμα, χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο που απεικονίζεται στα δένδρα.

2.1.6. Για n = 8

Για οκτώ νομίσματα το δένδρο απόφασης είναι το ακόλουθο.

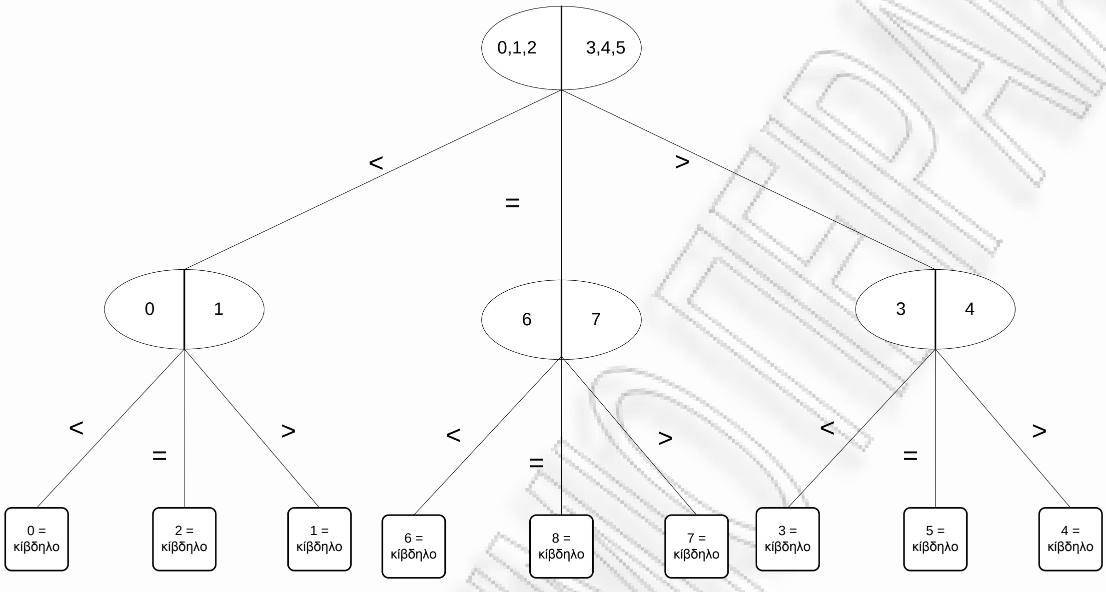


Σχήμα 11: Το δένδρο απόφασης για n = 8.

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε ξανά τουλάχιστον 2 ζυγίσματα για να ανακαλύψουμε το κίβδηλο.

2.1.7. Για n = 9

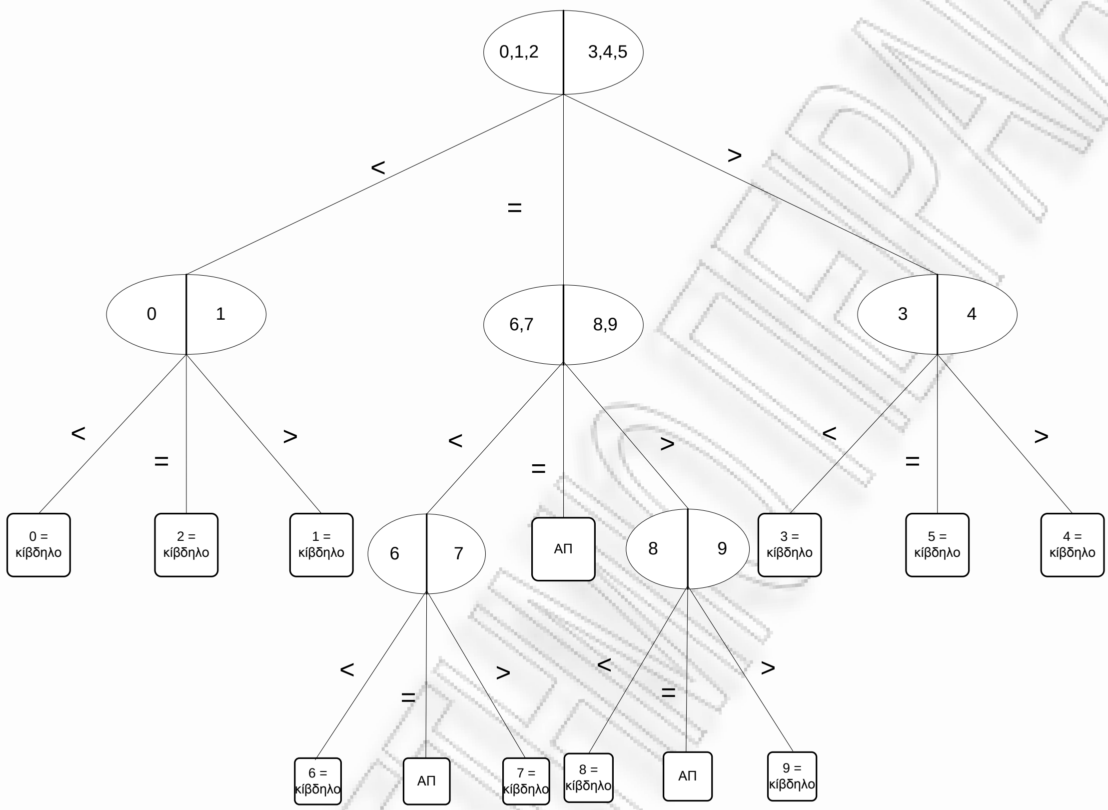
Το δένδρο για εννέα συνολικά νομίσματα, όπως θα δούμε είναι το ίδιο με αυτό στο Σχήμα 11 με μία μικρή διαφορά, στην περίπτωση ισορροπίας στο δεύτερο ζύγισμα.



Σχήμα 12: Το δένδρο απόφασης για n = 9.

2.1.8. Για n = 10

Για δέκα νομίσματα το δένδρο απόφασης έχει ως εξής :

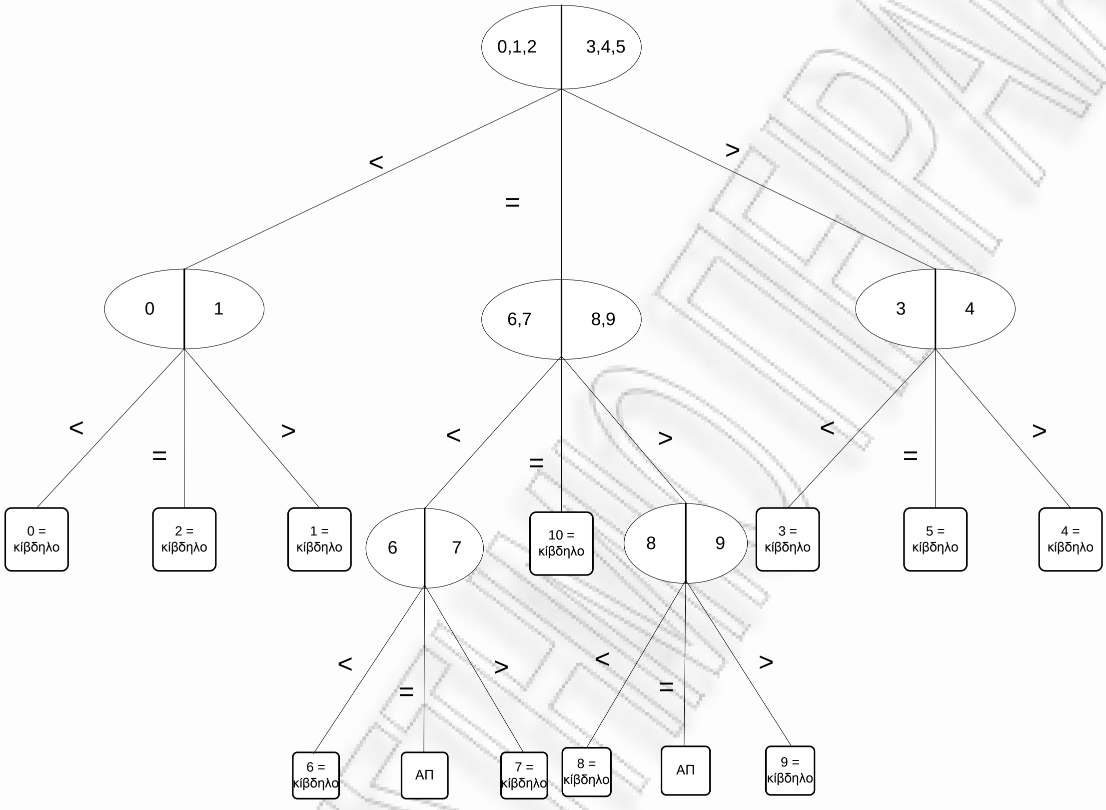


Σχήμα 13: Το δένδρο απόφασης για n = 10.

Όπως παρατηρούμε, από αυτό το n και μετά χρειαζόμαστε 3 τουλάχιστον ζυγίσματα για να έχουμε αποτέλεσμα.

2.1.9. Για n = 11

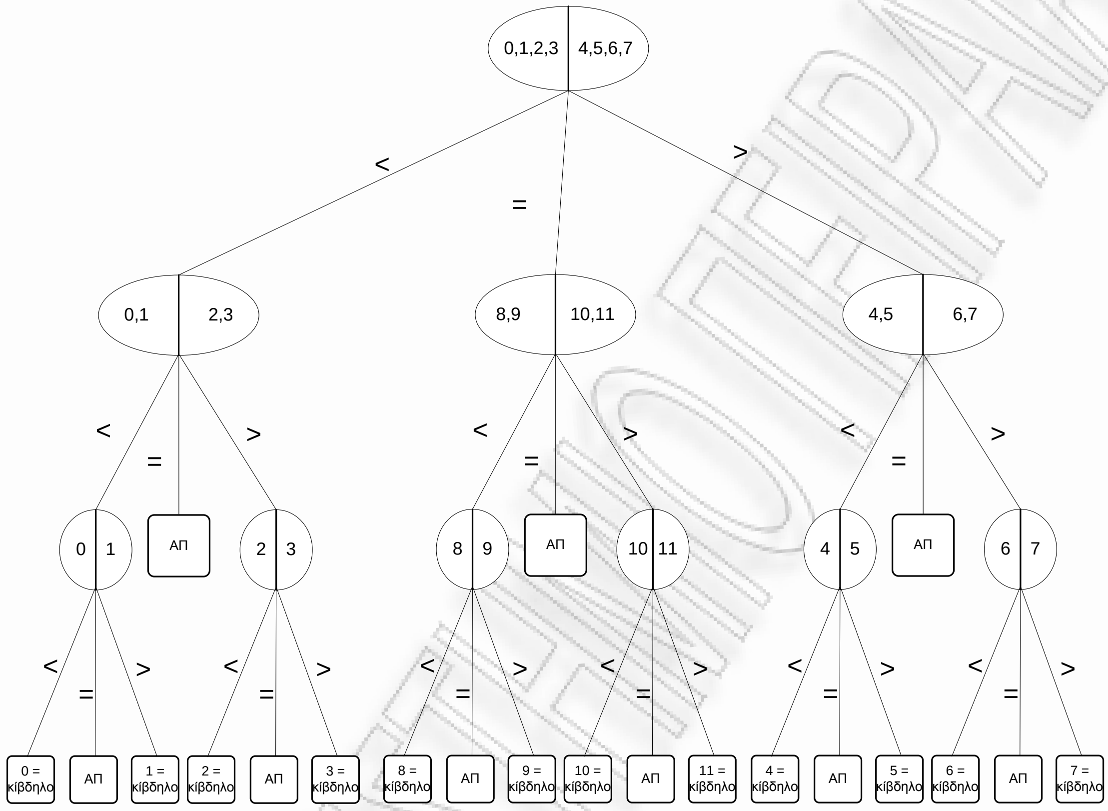
Όπως θα δούμε στο επόμενο δένδρο απόφασης και για έντεκα νομίσματα θα χρειαστούμε 3 ζυγίσματα.



Σχήμα 14: Το δένδρο απόφασης για n = 11.

2.1.10. Για n = 12

Παρακάτω θα αναλύσουμε την περίπτωση των δώδεκα νομισμάτων όπου θα χρειαστούμε ξανά, τουλάχιστον 3 ζυγίσματα.



Σχήμα 15: Το δένδρο απόφασης για n = 12.

Πρόταση 4: Γενικότερα ισχύει ότι: 3^n είναι ο μεγαλύτερος αριθμός νομισμάτων από τα οποία ένα ελαφρύτερο μπορεί να εντοπιστεί χρησιμοποιώντας την ζυγαριά n φορές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής:

Για n = 1, η πρόταση ισχύει και πράγματι για 3 νομίσματα θα χρησιμοποιήσουμε τη ζυγαριά μία φορά.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n = k˙ θα δείξουμε ότι ισχύει για n = k + 1.

Πράγματι

$$3^{\kappa+1} = 3 \cdot 3^{\kappa}$$

Τα χωρίζουμε σε τρείς ομάδες των 3^{κ} νομισμάτων. Διαλέγουμε δύο από τις ομάδες αυτές και τις ζυγίζουμε. Αν ισορροπήσουν τότε ψάχνουμε για το ελαφρύ στην τρίτη ομάδα. Δεδομένου ότι αυτή περιέχει 3^{κ} νομίσματα, η υπόθεση της επαγωγής μας δίνει ότι χρειάζονται το πολύ k ακόμα ζυγίσματα (δηλαδή συνολικά k+1 ζυγίσματα) για να βρούμε το ελαφρύτερο.

Αλλιώς, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής για την ελαφρύτερη από τις δύο ομάδες, k επιπλέον ζυγίσματα (δηλαδή συνολικά k+1 ζυγίσματα) αρκούν για την εύρεση του ελαφρύτερου νομίσματος και για την περίπτωση αυτή.

Παρατηρήσεις :

- Η μεθοδολογία που εφαρμόζεται βάσει της παραπάνω πρότασης είναι η εξής: Σε κάθε σκέλος της ζυγαριάς βάζουμε $\lceil \boldsymbol{n/3} \rceil$ νομίσματα, στο αρχικό ζύγισμα. Για παράδειγμα,

- αν έχουμε n = 9, τοποθετούμε στο αριστερό και δεξί σκέλος της ζυγαριάς από 3 νομίσματα και κρατάμε 3 έξω. Αν ισορροπήσει η ζυγαριά τότε με ένα ακόμη ζύγισμα βρίσκουμε το κίβδηλο. Αν δεν ισορροπήσει η ζυγαριά ξανά με ένα ακόμη ζύγισμα βρίσκουμε το κίβδηλο.
- αν έχουμε n = 20, τοποθετούμε στο αριστερό και δεξί σκέλος της ζυγαριάς από 7 νομίσματα και κρατάμε 6 έξω. Για 7 νομίσματα χρειαζόμαστε επιπλέον 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο, άρα συνολικά 3. Αν ισορροπήσει η ζυγαριά τότε με δύο ακόμη ζυγίσματα στα 6, βρίσκουμε το κίβδηλο (δηλαδή πάλι συνολικά 3).
- αν έχουμε n = 25, τοποθετούμε στο αριστερό και δεξί σκέλος της ζυγαριάς από 9 νομίσματα και κρατάμε 7 έξω. Για 9 νομίσματα χρειαζόμαστε επιπλέον 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο, άρα συνολικά 3. Αν ισορροπήσει η ζυγαριά τότε με δύο ακόμη ζυγίσματα στα 7, βρίσκουμε το κίβδηλο (δηλαδή πάλι συνολικά 3).

- Αν συνεχίσουμε με αυτή τη μεθοδολογία, θα διαπιστώσουμε ότι στα n= 28 θα χρειαστούμε άλλο ένα ζύγισμα για να ανακαλύψουμε το κίβδηλο, δηλαδή 4 συνολικά.

2.2 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων ένα είναι κανονικό και γνωστό, και ψάχνουμε να βρούμε αν το κίβδηλο είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα

Αυτή είναι μία πιο δύσκολη περίπτωση του προβλήματος. Έχουμε ένα πεπερασμένο και γνωστό αριθμό νομισμάτων (έστω n), μία ζυγαριά, ένα επιπλέον νόμισμα 0 το οποίο είναι κανονικό και γνωρίζουμε ότι ένα από τα υπόλοιπα n νομίσματα είναι κίβδηλο αλλά με τη διαφορά πλέον, ότι δεν ξέρουμε αν το κίβδηλο νόμισμα είναι πιο ελαφρύ ή πιο βαρύ από τα υπόλοιπα. Ψάχνουμε να βρούμε τον μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων για να βρεθεί το κίβδηλο νόμισμα και να αποφασίσουμε αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο, χρησιμοποιώντας την ζυγαριά. Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα δένδρα αποφάσεων.

Το δένδρο απόφασης είναι και πάλι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

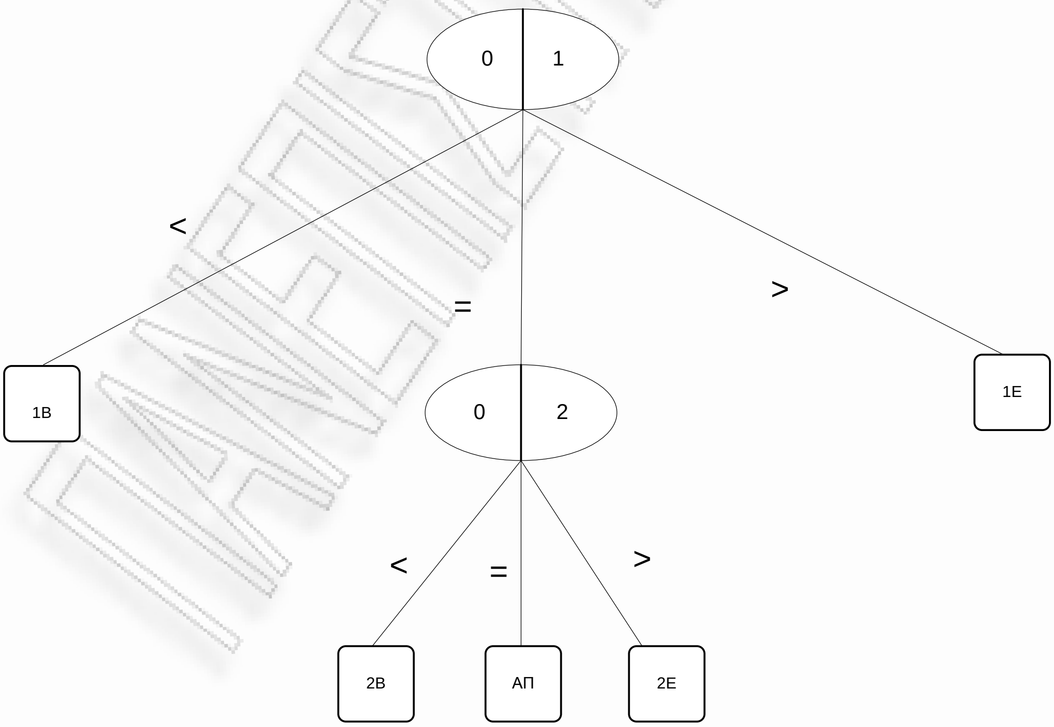
< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

2.2.1. Για n = 2

Το δένδρο στην περίπτωσή μας έχει ως εξής :

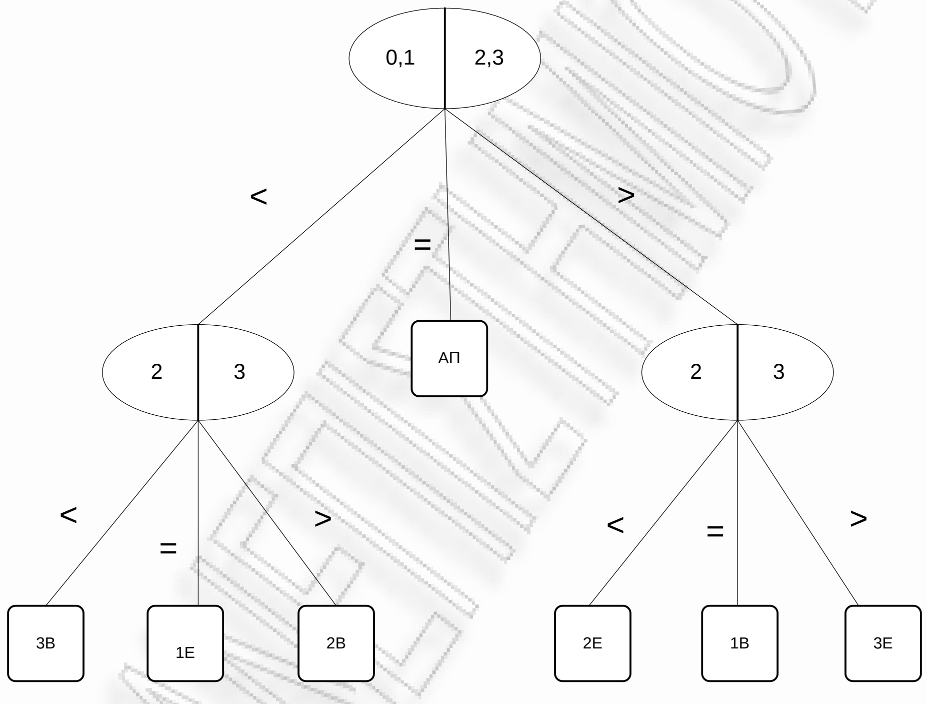


Σχήμα 16: Το δένδρο απόφασης για n = 2.

Αρχικά ζυγίζουμε το γνωστό καλό νόμισμα 0 με το νόμισμα 1. Αν το 0 είναι ελαφρύτερο συμπεραίνουμε αμέσως ότι το κίβδηλο είναι το νόμισμα 1 και είναι βαρύτερο. Αντιθέτως αν το 1 είναι ελαφρύτερο από το 0, τότε καταλαβαίνουμε ότι το κίβδηλο είναι πάλι το 1 αλλά είναι ελαφρύτερο αυτή τη φορά. Αν ισορροπήσουν στο αρχικό ζύγισμα τότε θα χρειαστούμε και ένα δεύτερο, στο οποίο θα ζυγίσουμε το νόμισμα 0 με το νόμισμα 2 και θα καταλάβουμε αν το κίβδηλο νόμισμα 2 είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από το 1.

2.2.2. Για n = 3

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας, θα εξετάσουμε την περίπτωση που έχουμε τρία νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό νόμισμα 0. Το δένδρο απόφασης θα είναι το παρακάτω :

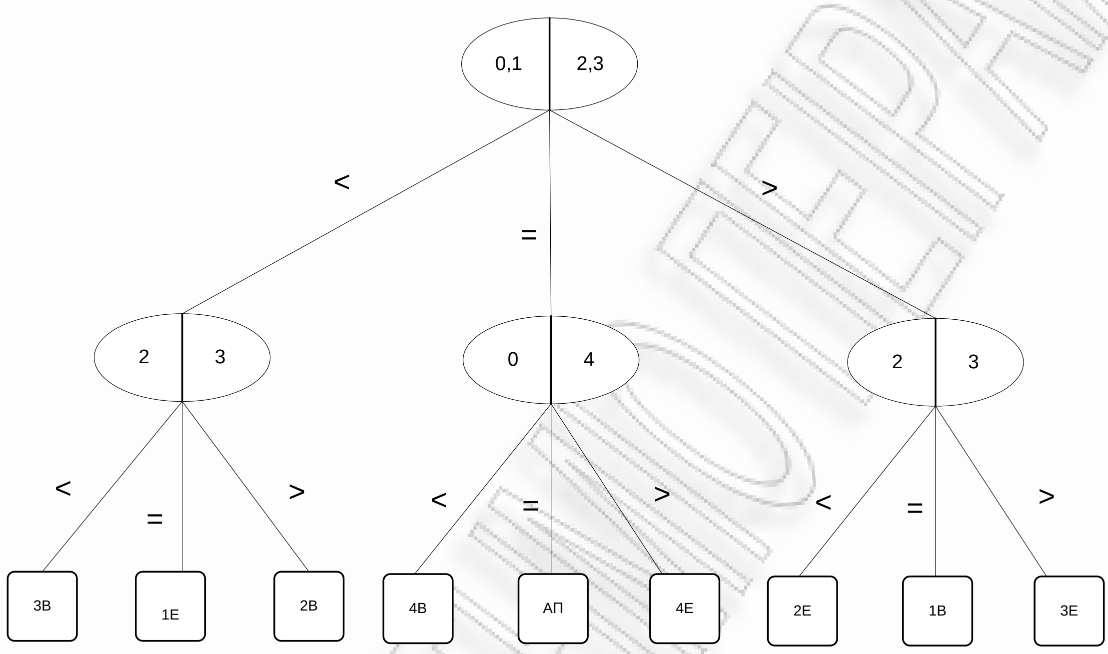


Σχήμα 17: Το δένδρο απόφασης για n = 3.

Όπως παρατηρούμε χρειαζόμαστε τουλάχιστον 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο και να διαπιστώσουμε αν είναι ελαφρύ ή βαρύ σε σχέση με τα υπόλοιπα.

2.2.3. Για n = 4

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τέσσερα νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό νόμισμα 0. Ακολουθεί το δένδρο απόφασης.

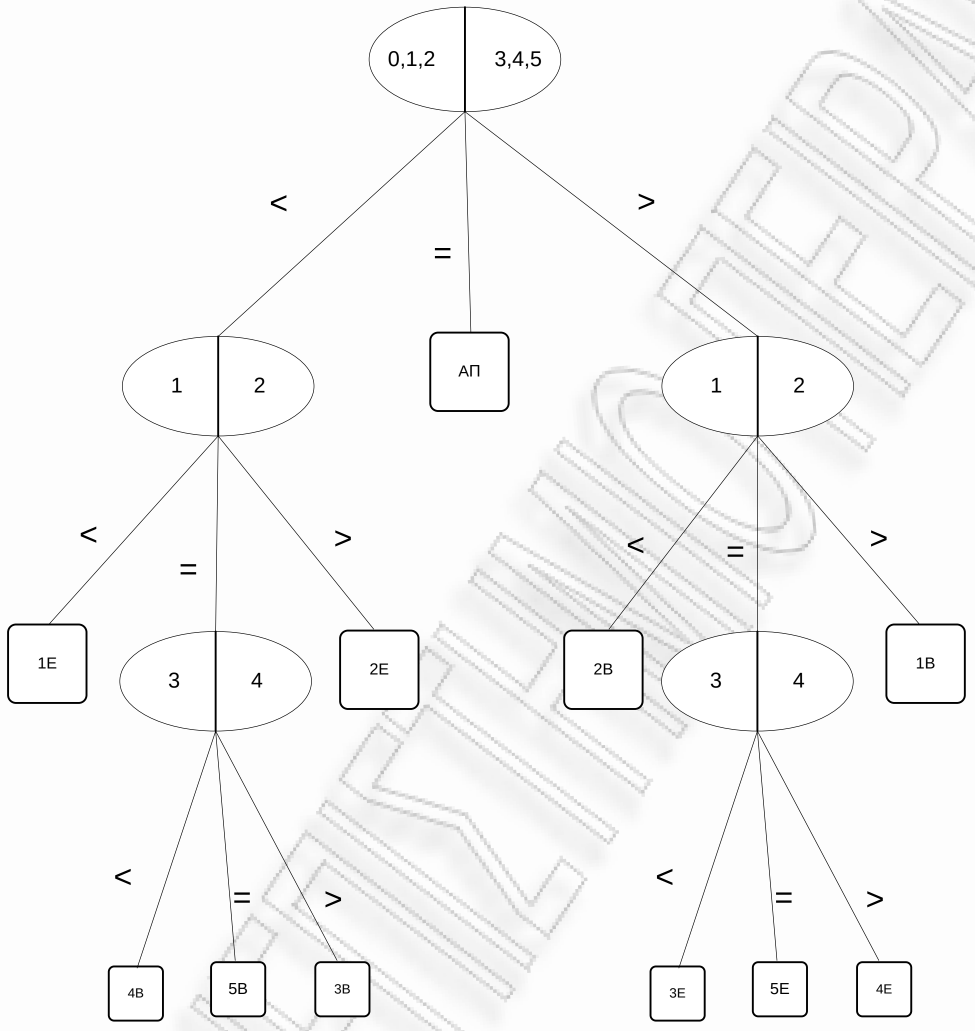


Σχήμα 18: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Βλέπουμε ότι το σχήμα είναι παρόμοιο με την προηγούμενη περίπτωση με μία διαφορά στην περίπτωση της ισότητας του πρώτου ζυγίσματος. Ξανά χρειαζόμαστε τουλάχιστον 2 ζυγίσματα για να εντοπίσουμε το κίβδηλο.

2.2.4. Για n = 5

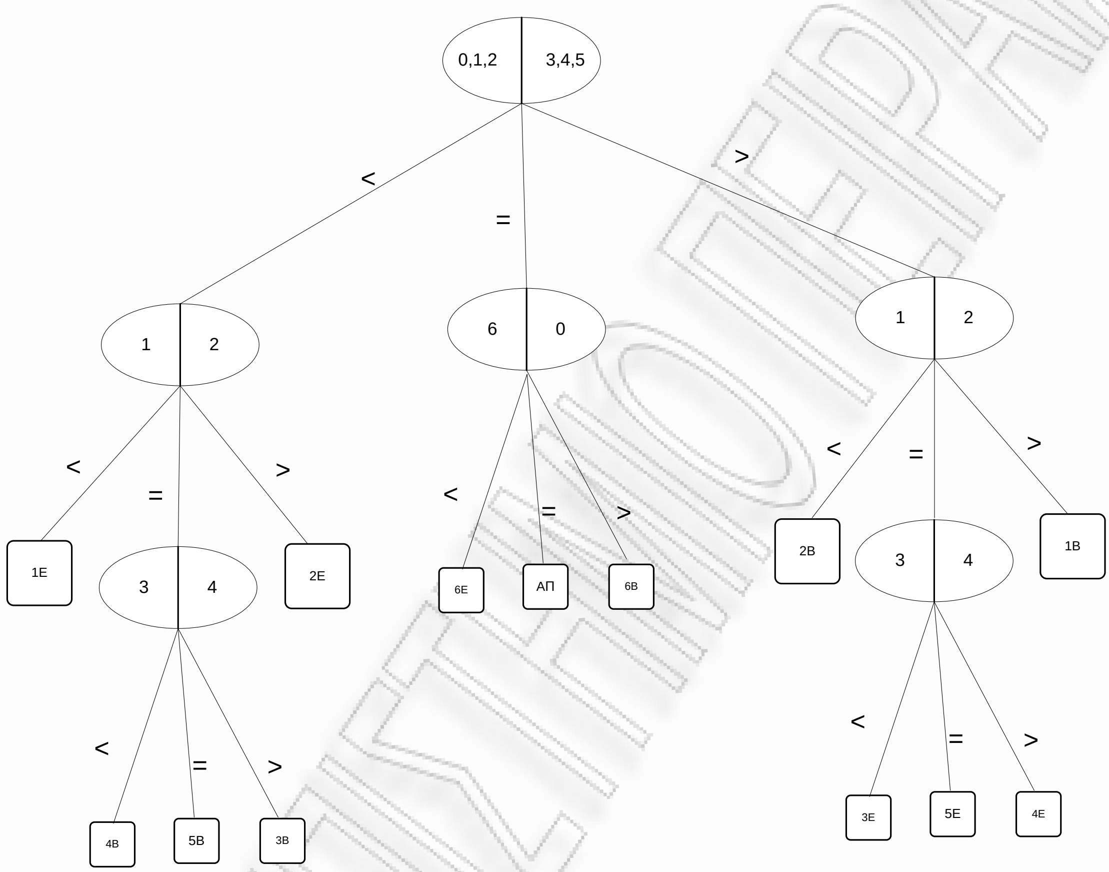
Εδώ έχουμε πέντε νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό νόμισμα 0. Όπως θα δούμε στο δένδρο απόφασης που ακολουθεί, θα χρειαστούμε τουλάχιστον 3 ζυγίσματα αυτή τη φορά.



Σχήμα 19: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

2.2.5. Για n = 6

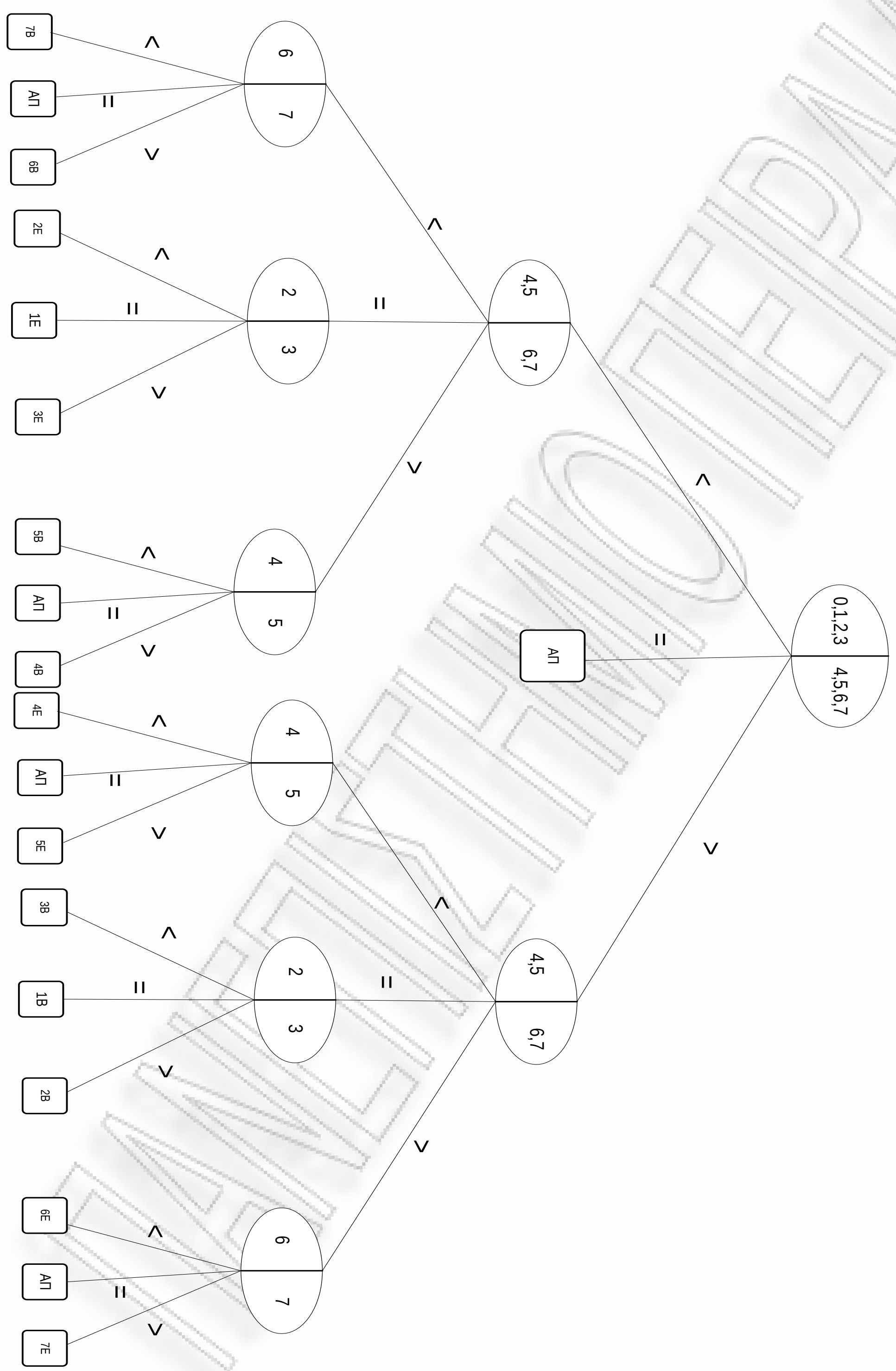
Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας προχωράμε στην περίπτωση που έχουμε έξι νομίσματα και ένα κανονικό νόμισμα 0. Ακολουθεί το δένδρο απόφασης.



Σχήμα 20: Το δένδρο απόφασης για n = 6.

Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι το σχήμα είναι ακριβώς ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση με τη μόνη διαφορά να βρίσκεται, στην περίπτωση της ισορροπίας του πρώτου ζυγίσματος. Τα ελάχιστα ζυγίσματα που θα χρειαστούμε είναι δύο, με την προϋπόθεση ότι είμαστε τυχεροί και αφήσουμε έξω από το πρώτο ζύγισμα το κίβδηλο νόμισμα. Έτσι θα χρειαστούμε το δεύτερο ζύγισμα μόνο για να καθορίσουμε αν αυτό είναι πιο βαρύ ή πιο ελαφρύ από τα υπόλοιπα. Σε κάθε άλλη περίπτωση θα χρειαστούμε τουλάχιστον τρία ζυγίσματα.

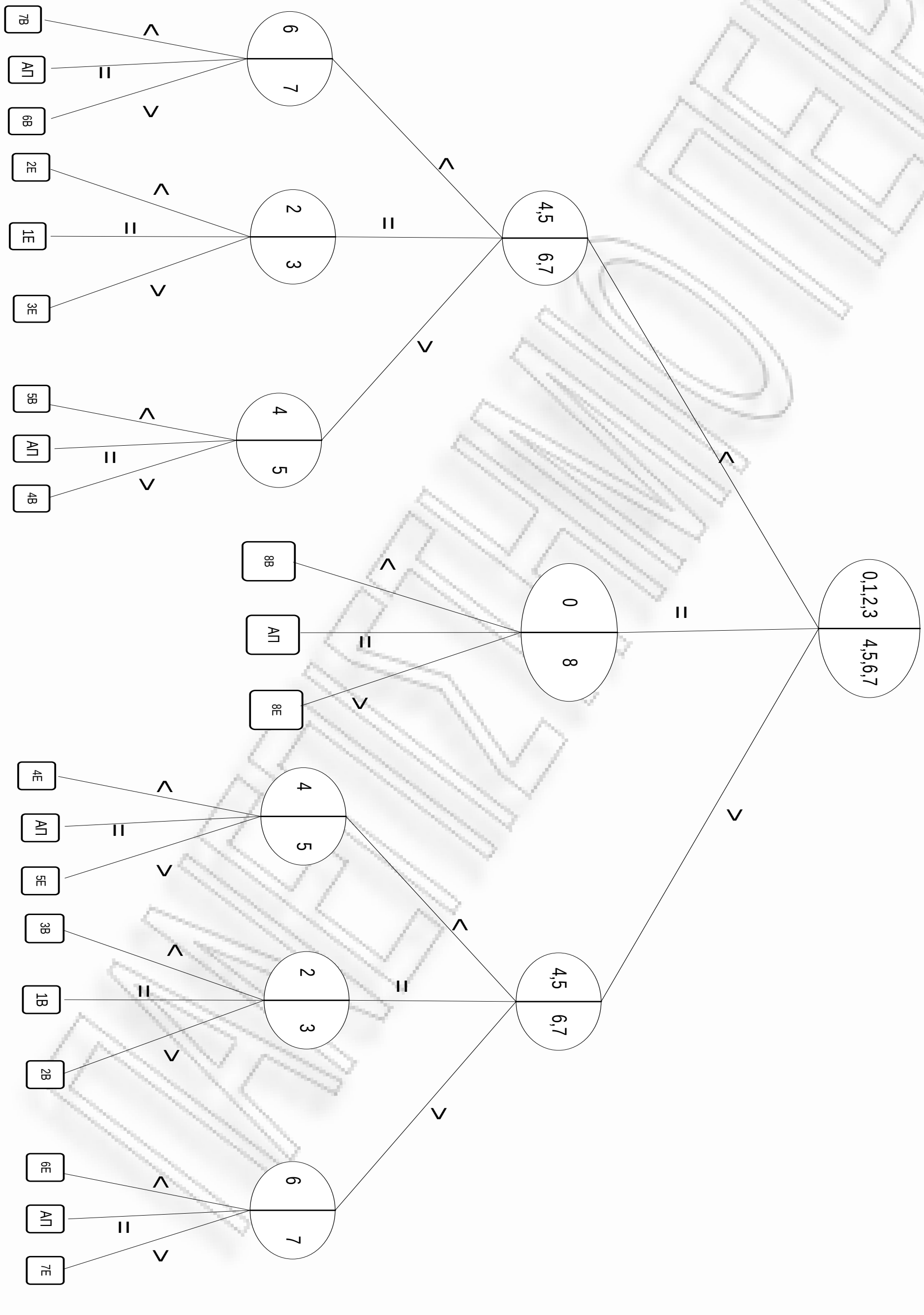
2.2.6. Για n = 7



Σχήμα 21: Το δένδρο απόφασης για n = 7.

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα τα πράγματα περιπλέκονται σε αυτή την περίπτωση που έχουμε 8 συνολικά νομίσματα (συμπεριλαμβανομένου και του 0-κανονικού). Ακολουθώντας την τακτική στα ζυγίσματα που περιγράφεται από το παραπάνω 3-δένδρο, αποτέλεσμα θα βρούμε είτε σε 2 ζυγίσματα είτε σε 3. Αυτό εξαρτάται από το πόσο τυχεροί είμαστε. Αν και μόνο αν, το νόμισμα 1 είναι το κίβδηλο θα μπορέσουμε να το εντοπίσουμε με 2 ζυγίσματα. Αν είναι οποιοδήποτε άλλο θα χρειαστούμε 3.

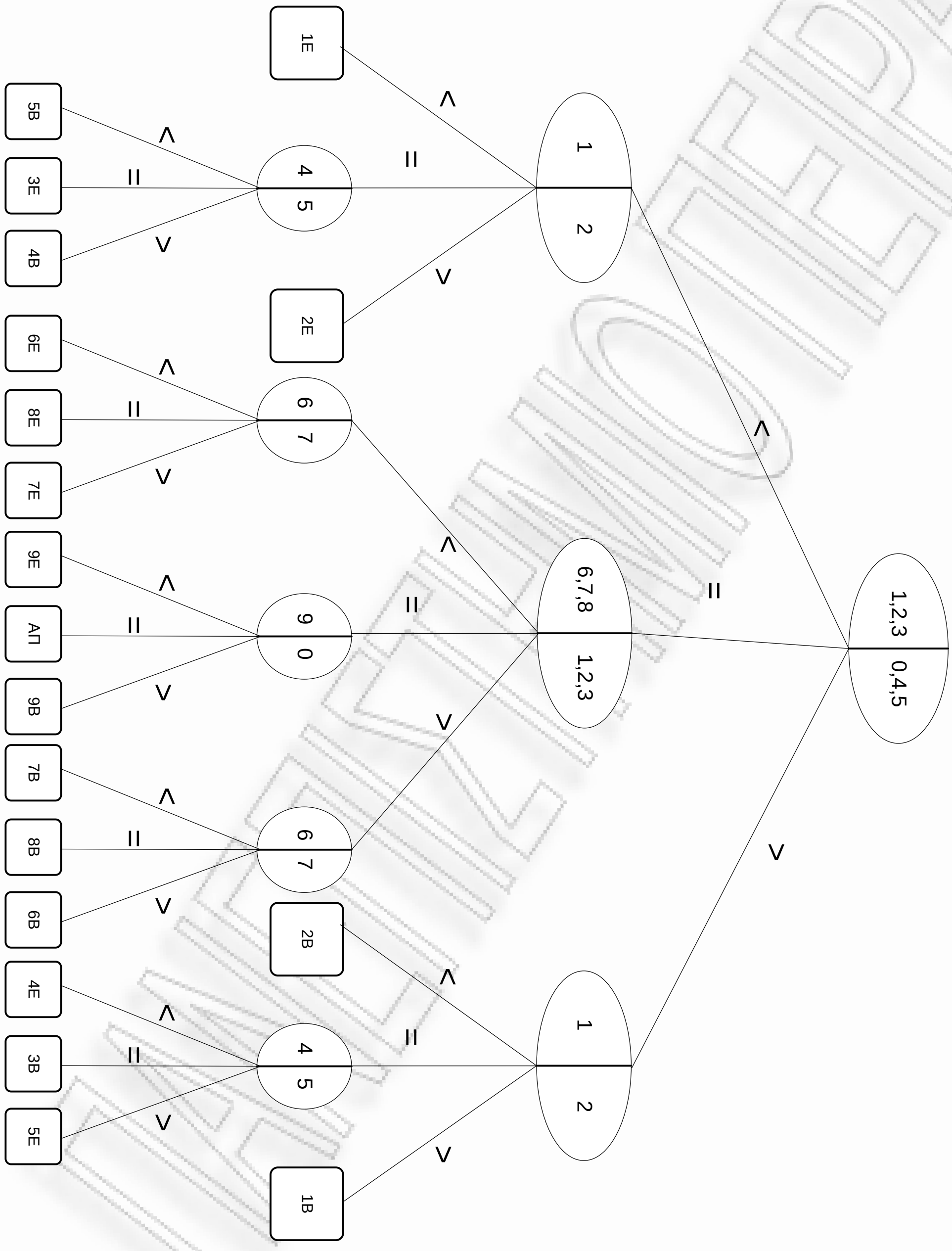
2.2.7. Για n = 8



Σχήμα 22: Το δένδρο απόφασης για n = 8.

Ομοίως με προηγούμενη περίπτωση, παρατηρούμε ότι το σχήμα είναι ίδιο με την 2.2.6., για n = 7, με τη μόνη διαφορά να βρίσκεται, στην ισότητα του αρχικού ζυγίσματος. Σε αυτή την περίπτωση ζυγίζουμε το νόμισμα 8, που είχαμε αφήσει απ' έξω στην αρχή με το κανονικό νόμισμα 0. Έτσι καταλαβαίνουμε αν το 8 είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

2.2.8. Για n = 9

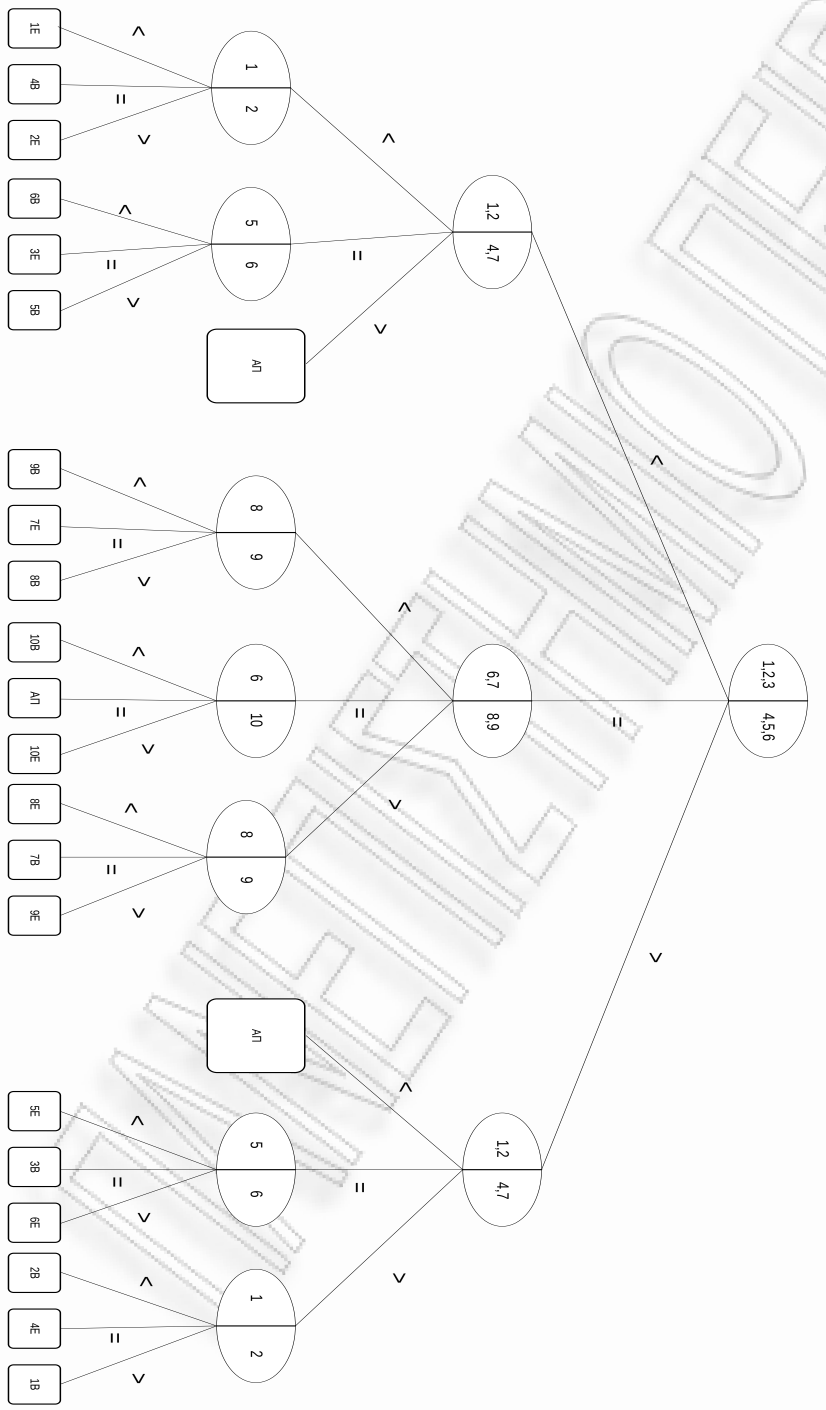


Σχήμα 23: Το δένδρο απόφασης για n = 9.

Στο σχήμα που μόλις παρουσιάσαμε παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον 3 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο νόμισμα.

2.2.9. Για n = 10

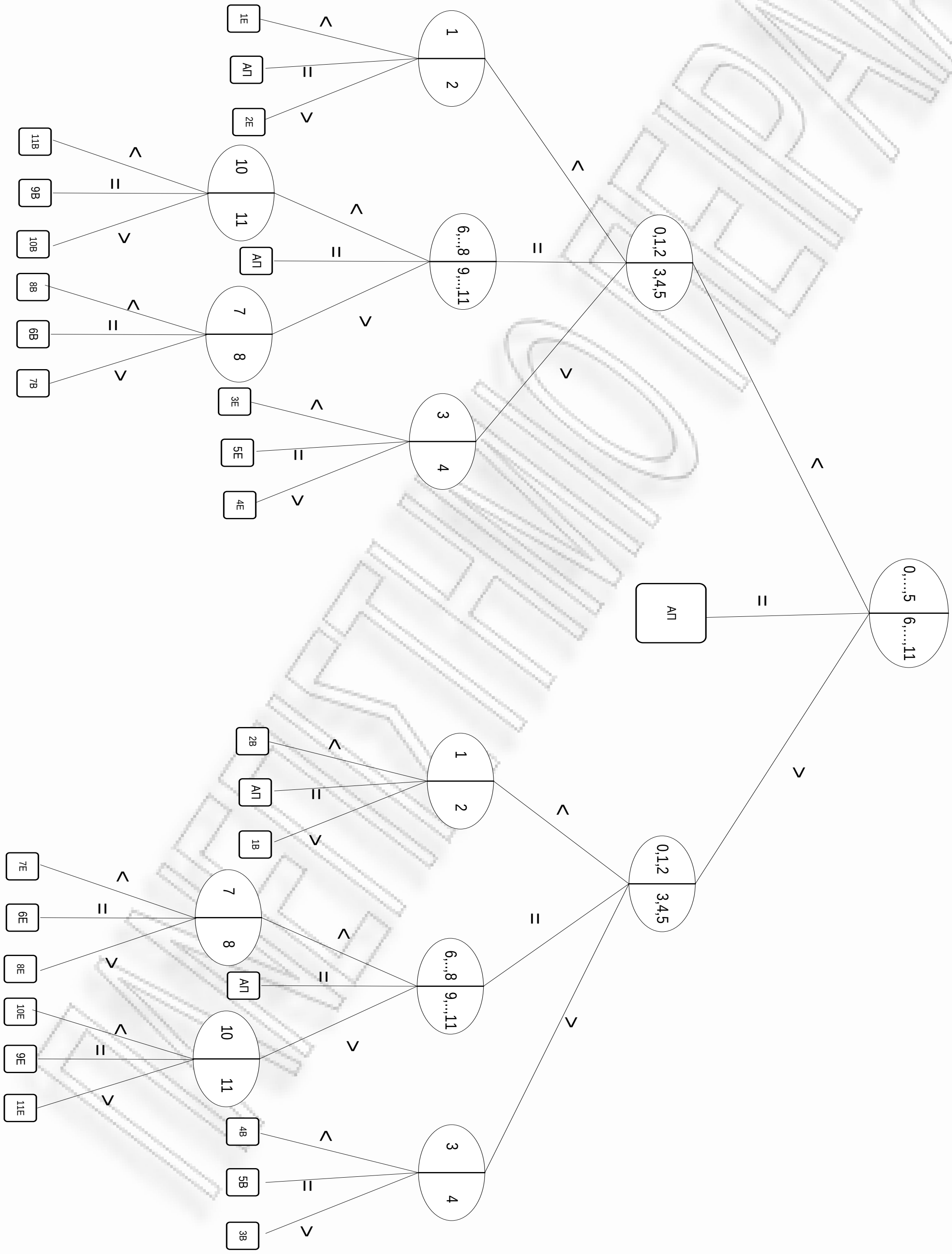
Παρακάτω θα δούμε το δένδρο απόφασης για n = 10.



Σχήμα 24: Το δένδρο απόφασης για n = 10.

2.2.10. Για n = 11

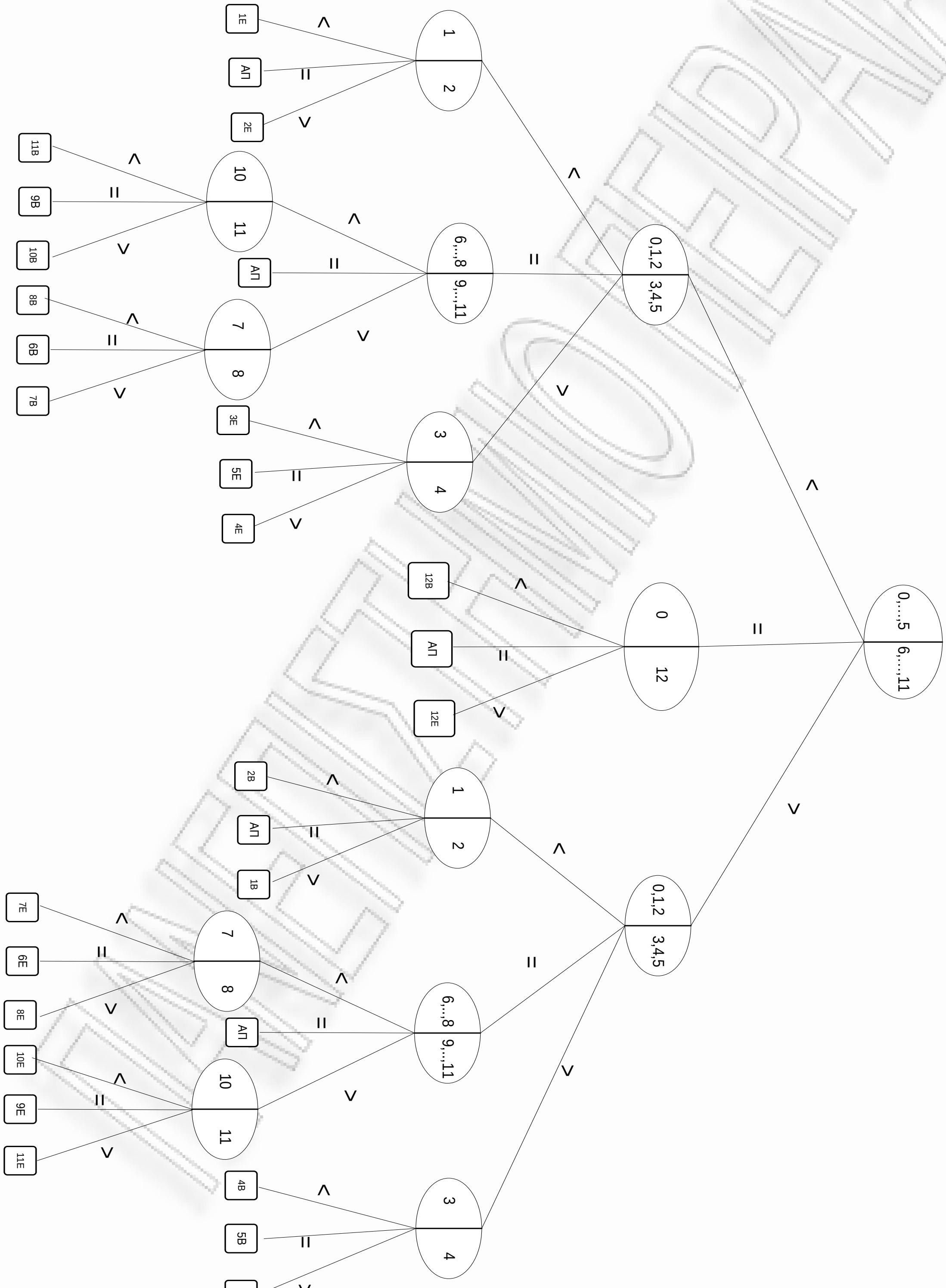
Ακολουθεί το δένδρο απόφασης για έντεκα νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό. Τα ζυγίσματα που θα χρειαστούμε είναι 3 ή 4, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που ακολουθούμε.



Σχήμα 25: Το δένδρο απόφασης για n = 11.

2.2.11. Για n = 12

Τέλος θα δούμε το δένδρο απόφασης με 12 νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό. Όπως θα παρατηρήσουμε οι ομοιότητες με την προηγούμενη περίπτωση είναι αρκετές.



Σχήμα 26: Το δένδρο απόφασης για n = 12.

2.3 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων ένα είναι κανονικό και γνωστό και ψάχνουμε να βρούμε αν υπάρχει κίβδηλο, ποιο είναι αυτό και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

Μία ακόμη δυσκολότερη περίπτωση του προβλήματος είναι αυτή που θα εξετάσουμε παρακάτω. Έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό νομισμάτων, μία ζυγαριά, ένα νόμισμα 0 το οποίο είναι κανονικό. Η διαφορά εδώ είναι ότι, πλέον δεν γνωρίζουμε αν ένα από τα n νομίσματα είναι κίβδηλο. Επίσης δεν γνωρίζουμε αν το κίβδηλο νόμισμα, στην περίπτωση που υπάρχει, είναι πιο ελαφρύ ή πιο βαρύ από τα υπόλοιπα. Ψάχνουμε να βρούμε τον μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων που θα χρειαστεί για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο, χρησιμοποιώντας την ζυγαριά. Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα δένδρα αποφάσεων.

Το δένδρο απόφασης είναι και πάλι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

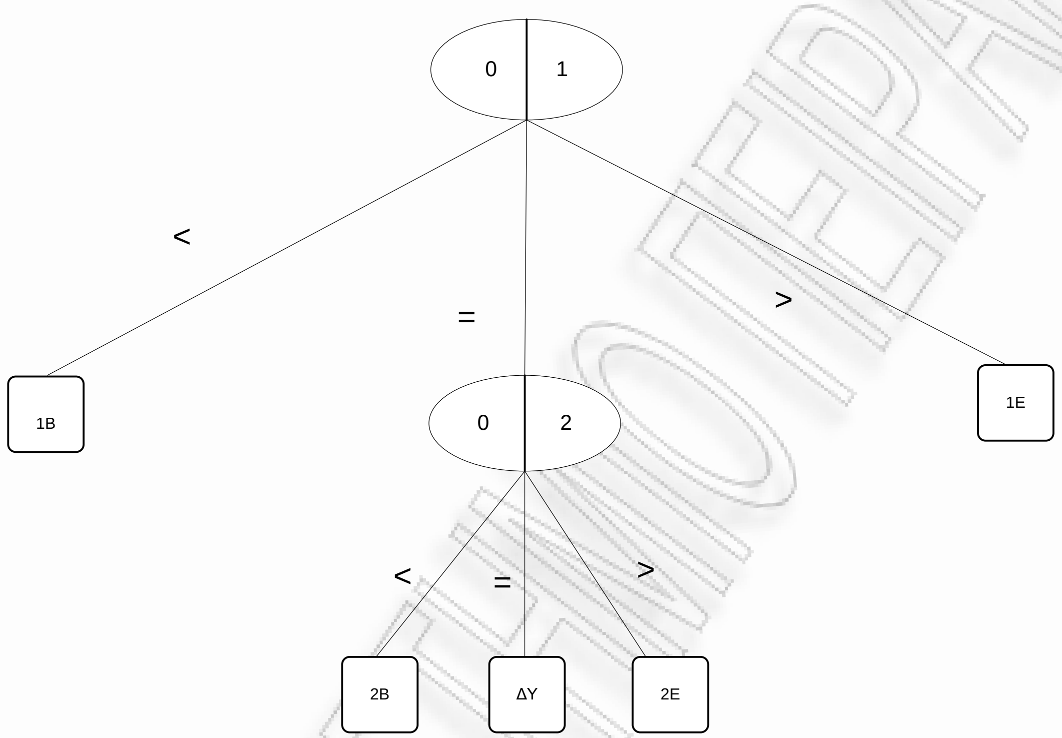
Υπάρχουν 2n+1 πιθανές τελικές απαντήσεις (φύλλα) στο δένδρο απόφασης για το παραπάνω πρόβλημα:

κ = όλα καλά, 1Β = το 1 είναι βαρύ, 1Ε = το 1 είναι ελαφρύ, 2Β = το 2 είναι βαρύ, 2Ε = το 2 είναι ελαφρύ ... nΒ = το n είναι βαρύ, nΕ = το n είναι ελαφρύ.

Άρα το ύψος του δένδρου και κατά συνέπεια, βάσει της πρότασης 1 το ύψος είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$ + 1, οπότε το πλήθος των δεσμών του δένδρου (δηλαδή των ζυγισμάτων) από τη ρίζα μέχρι κάποιο φύλλο σε μία τουλάχιστον περίπτωση είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$.

2.3.1. Για n = 2

Ακολουθεί το δένδρο απόφασης για την τετριμμένη περίπτωση όπου έχουμε τρία συνολικά νομίσματα. Το ένα από αυτά είναι το γνωστό κανονικό νόμισμα 0. Ψάχνουμε να βρούμε αν ένα από τα άλλα δύο είναι κίβδηλο και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα. Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε είναι παρόμοια με τις περιπτώσεις στην παράγραφο 2.2.

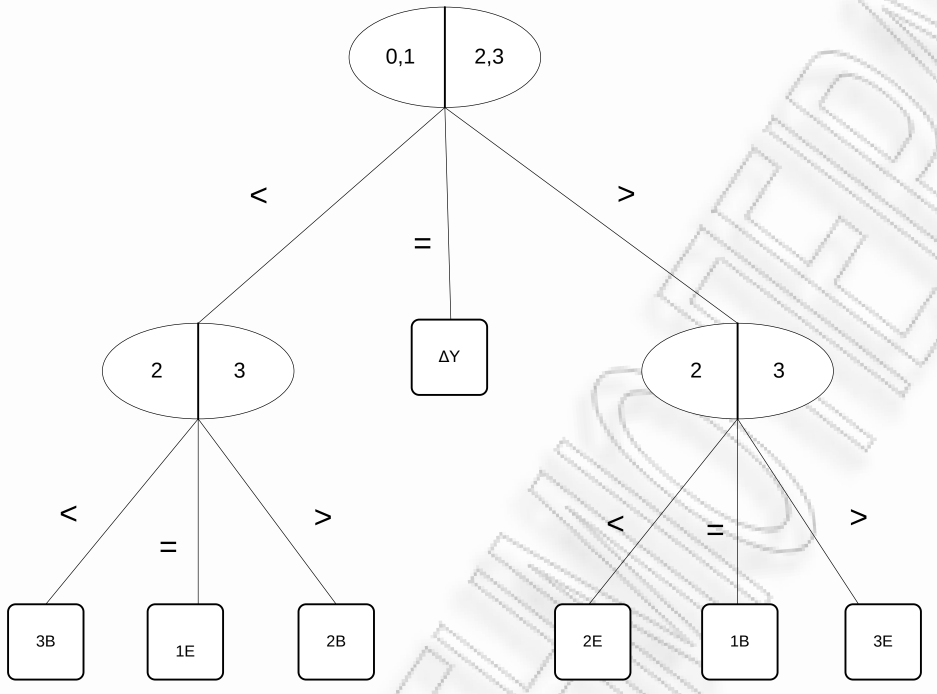


Σχήμα 27: Το δένδρο απόφασης για n = 2.

Παρατηρούμε ότι θα χρειαστούμε το πολύ 2 ζυγίσματα. Αν και στα 2 ζυγίσματα προκύψει ισορροπία της ζυγαριάς τότε δεν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα. Στο σχήμα συμβολίζεται με "ΔΥ" και αυτός ο συμβολισμός θα χρησιμοποιείται από δω και στο εξής.

2.3.2. Για n = 3

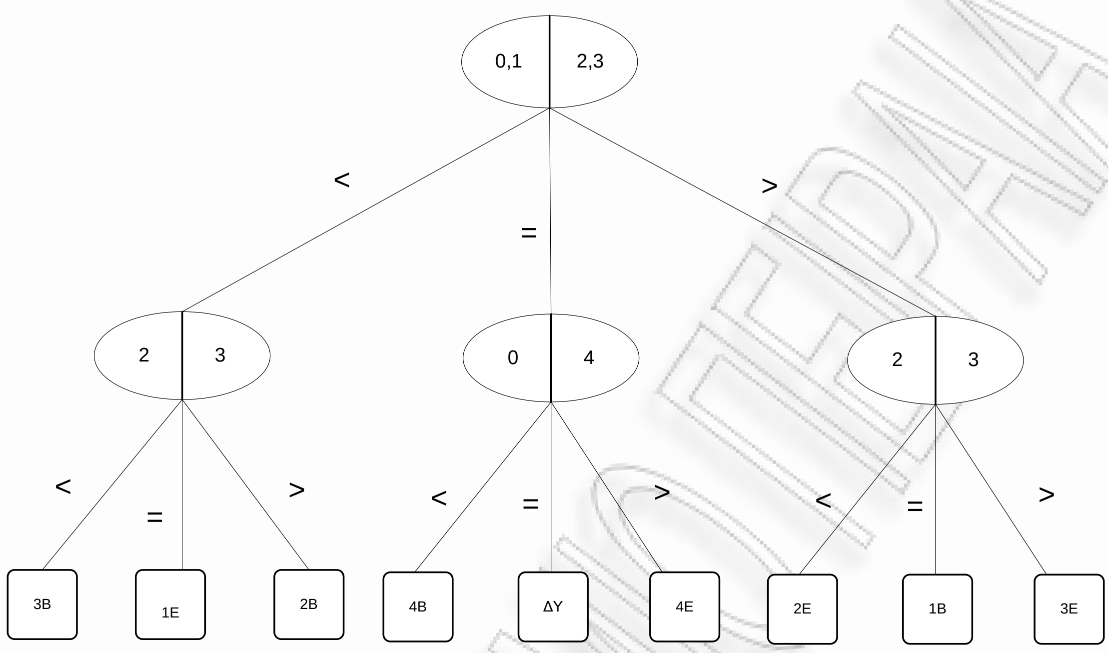
Στην περίπτωση που έχουμε τρία νομίσματα και ένα κανονικό νόμισμα 0, το δένδρο απόφασης είναι το εξής:



Σχήμα 28: Το δένδρο απόφασης για n = 3.

Πάλι παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε το πολύ 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο. Αν ισορροπήσει η ζυγαριά στο αρχικό ζύγισμα τότε δεν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα.

2.3.3. Για n = 4

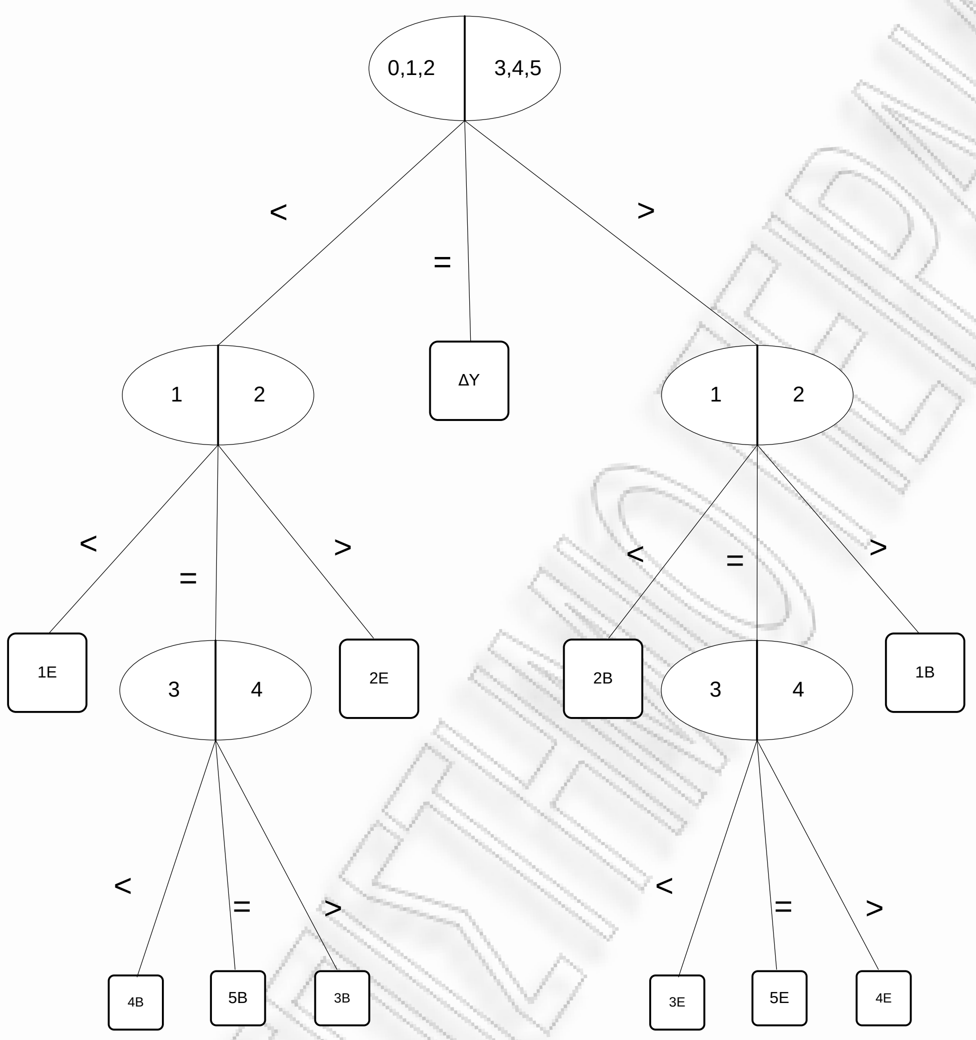


Σχήμα 29: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Στο παραπάνω σχήμα εξετάσαμε την περίπτωση οπού έχουμε τέσσερα νομίσματα. Και εδώ χρειαζόμαστε το πολύ δύο ζυγίσματα για να βρούμε τη λύση. Ξανά, αν και στα 2 ζυγίσματα έχουμε ισορροπία τότε δεν υπάρχει κίβδηλο.

Παρατήρηση: Αν συγκρίνουμε τα σχήματα 27,28,29 με τα σχήματα 16,17,18 της περίπτωσης 2.2 θα παρατηρήσουμε εξαιρετική ομοιότητα. Η μόνη διαφορά είναι ότι όπου είχαμε "ΑΠ" στα σχήματα 16,17,18 τώρα έχουμε την περίπτωση "ΔΥ". Παρακάτω θα εξετάσουμε μερικές ακόμα περιπτώσεις για να δούμε αν το συμπέρασμα είναι γενικότερο και ισχύει και για μεγαλύτερα n.

2.3.4. Για n = 5

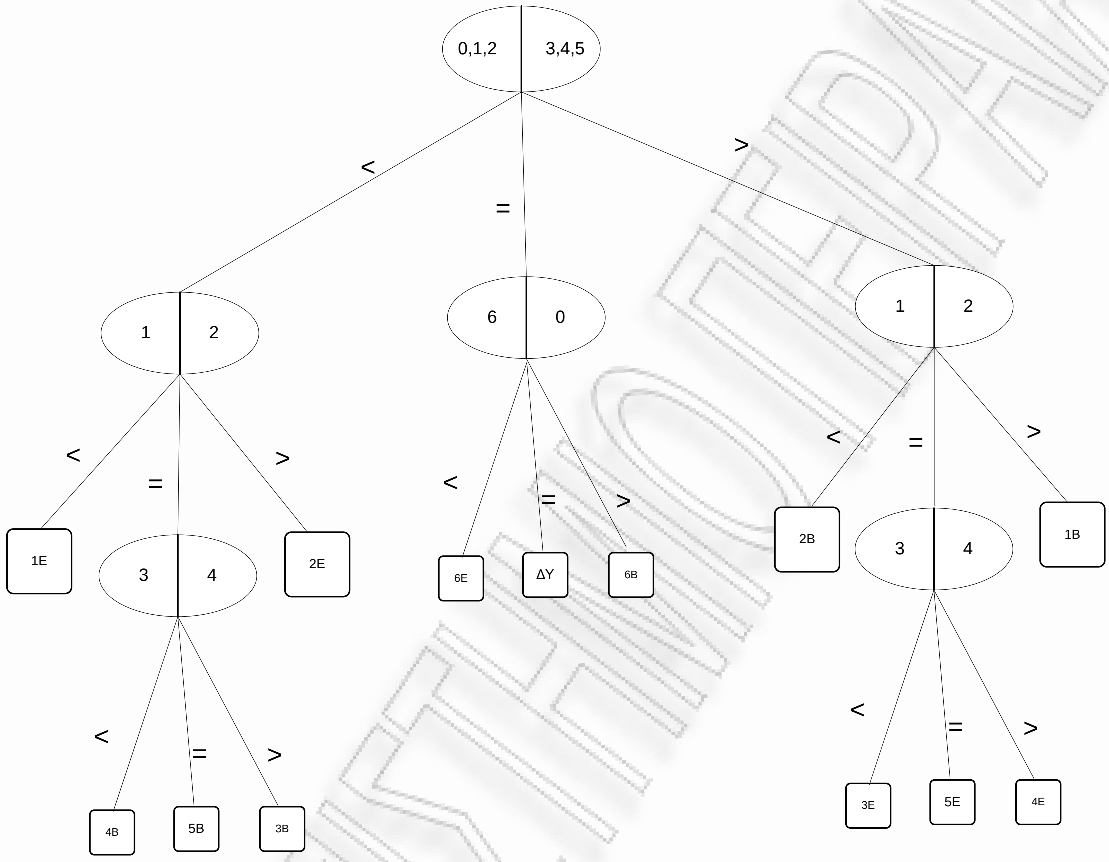


Σχήμα 30: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

Πλέον χρειαζόμαστε το πολύ 3 ζυγίσματα για να βρούμε αν υπάρχει κίβδηλο και ποιο είναι αυτό.

2.3.5. Για n = 6

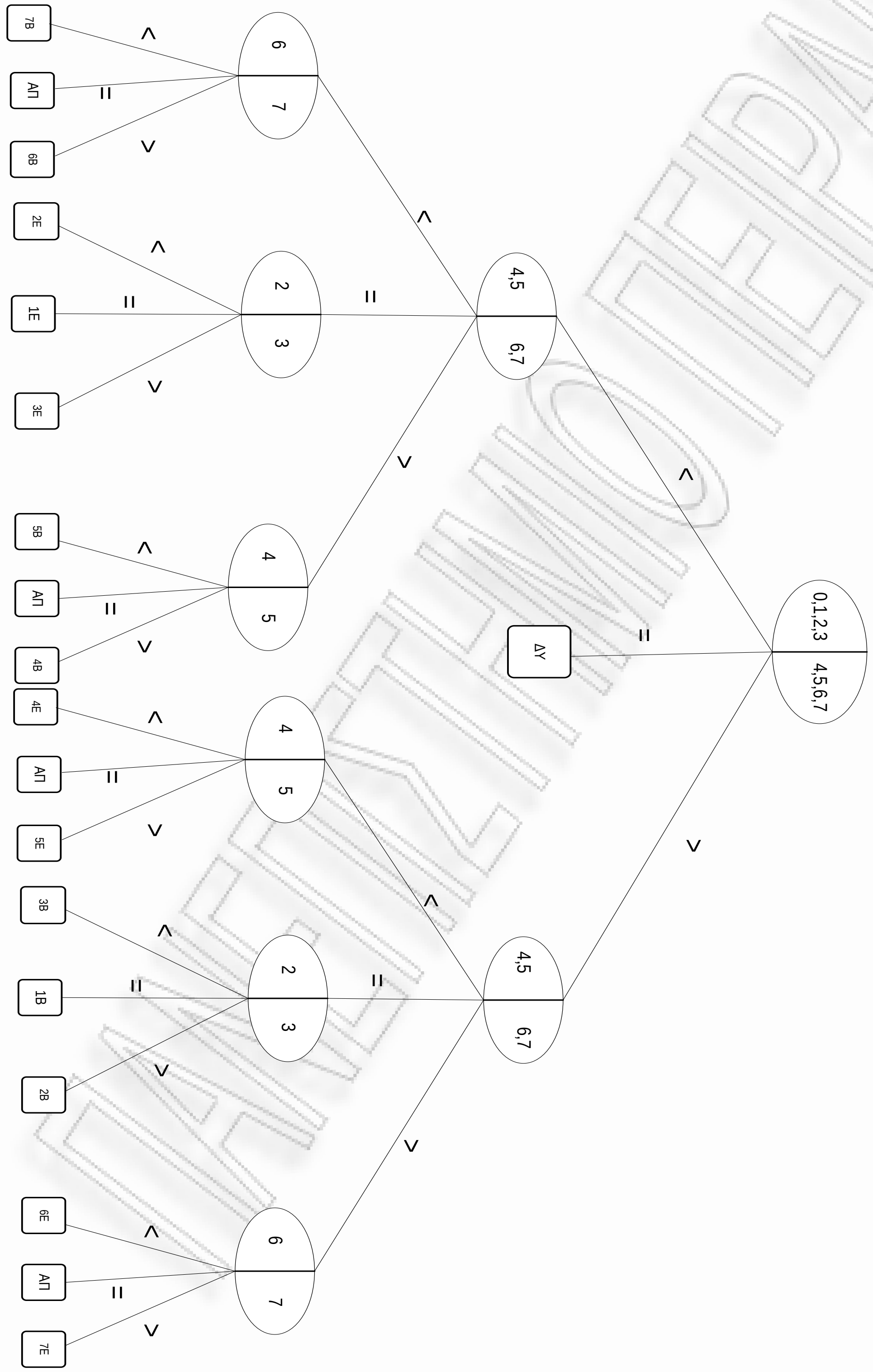
Ομοίως με πριν για n = 6. Τα σχήματα εξακολουθούν να έχουν την ίδια ομοιότητα με αυτά της περίπτωσης 2.2.



Σχήμα 31: Το δένδρο απόφασης για n = 6.

2.3.6. Για n = 7

Ακολουθεί το σχήμα για n = 7. Χρειαζόμαστε το πολύ 3 ζυγίσματα για να έχουμε αποτέλεσμα.

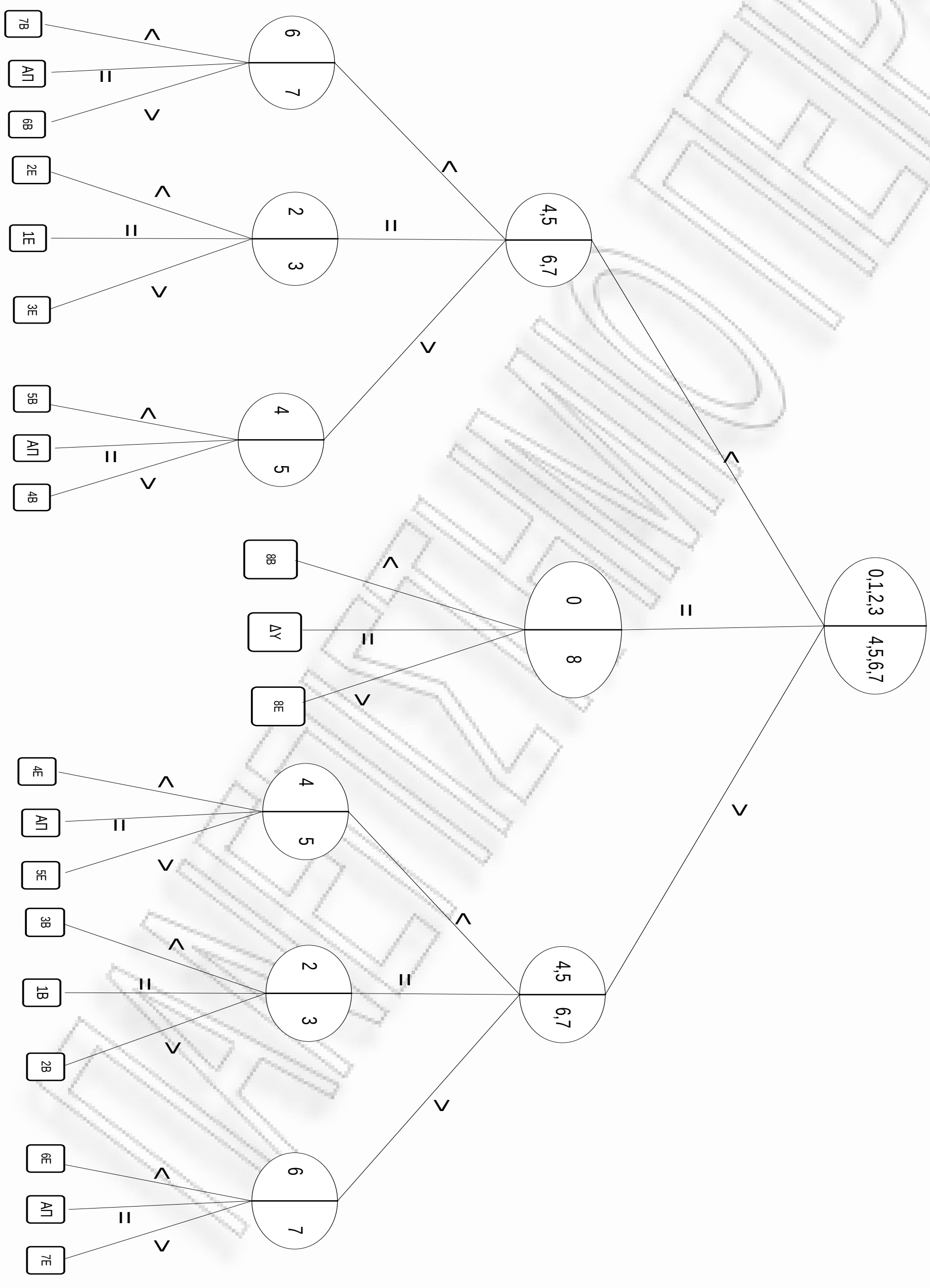


Σχήμα 32: Το δένδρο απόφασης για n = 7.

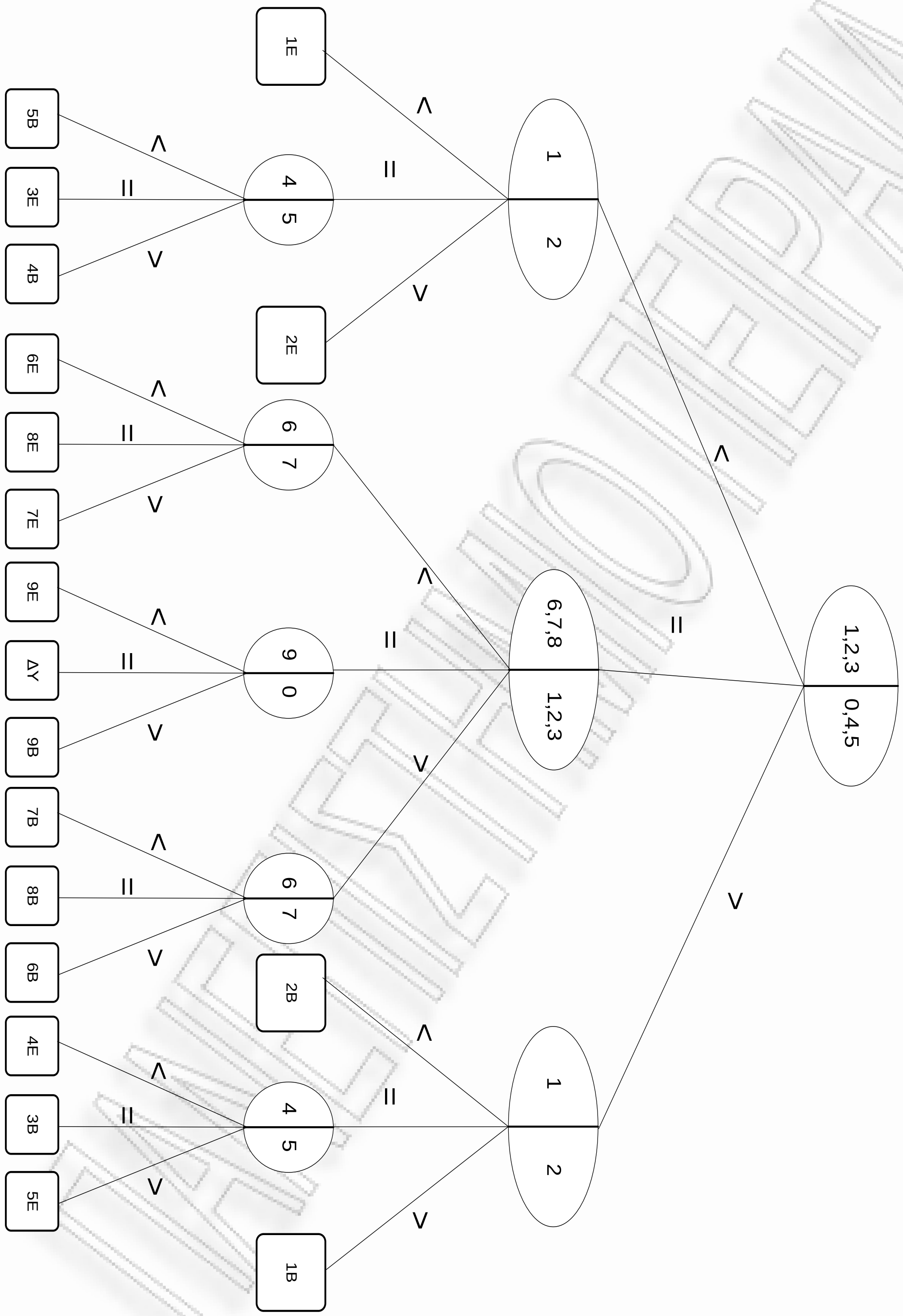
<u>Παρατήρηση:</u> Με την παρούσα μεθοδολογία προκύπτει το συμπέρασμα ότι, αν έχουμε ζυγό **συνολικό** αριθμό νομισμάτων μπορούμε με το πρώτο ζύγισμα να καταλάβουμε αν υπάρχει κίβδηλο ή όχι.

2.3.7. Για n = 8, n = 9 και n = 10

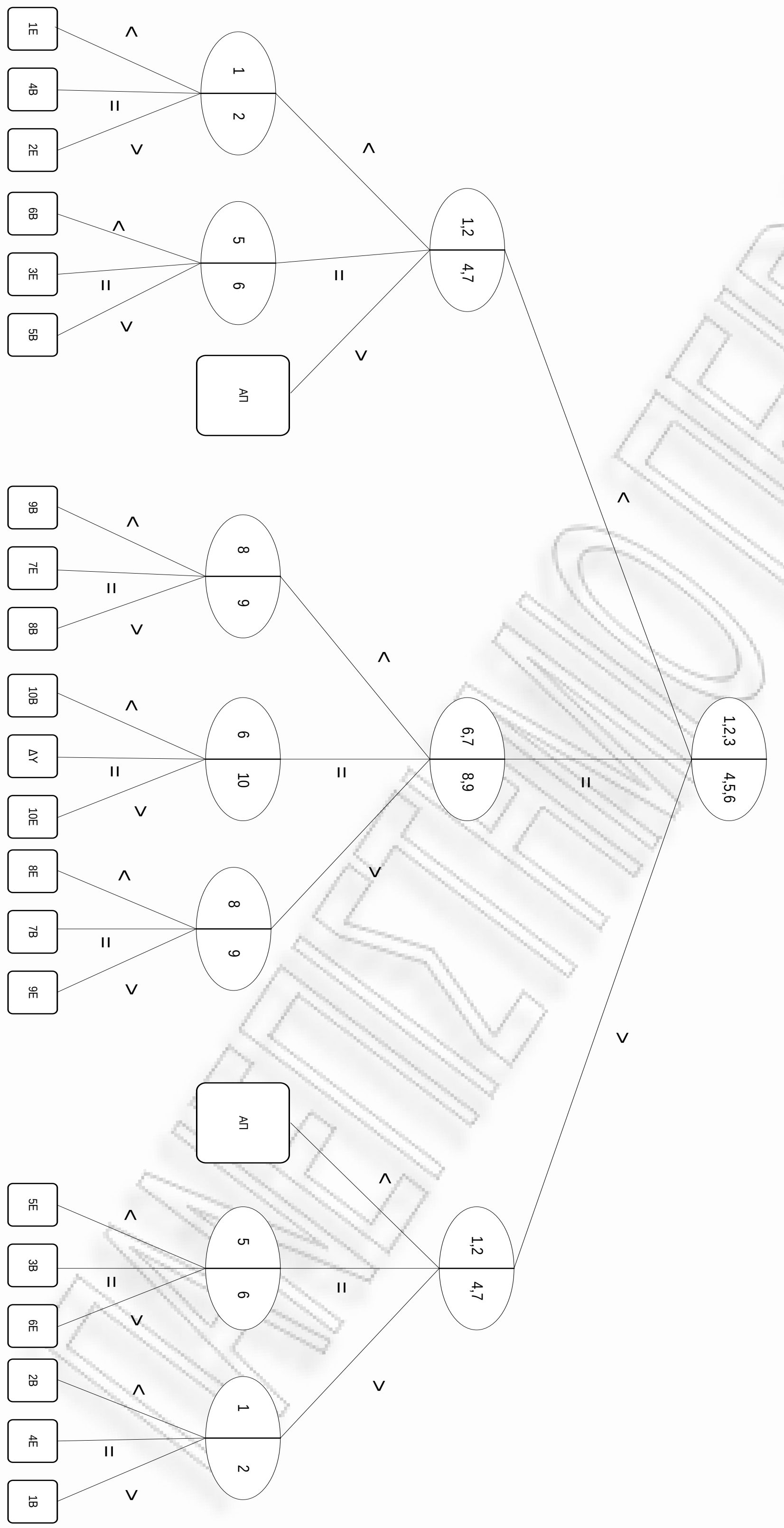
Ακολουθούν διαδοχικά τα δένδρα απόφασης για οκτώ, εννέα και δέκα νομίσματα και ένα γνωστό κανονικό νόμισμα 0.



Σχήμα 33: Το δένδρο απόφασης για n = 8.



Σχήμα 34: Το δένδρο απόφασης για n = 9.



Σχήμα 35: Το δένδρο απόφασης για n = 10.

Παρατήρηση:

Όσα νομίσματα και να έχουμε μπορούμε το πολύ με 2 ζυγίσματα να καθορίσουμε αν έχουμε κίβδηλο ή όχι. Αν ο συνολικός αριθμός νομισμάτων (N) είναι άρτιος και ζυγίζοντάς τα μισά - μισά, στο πρώτο ζύγισμα έχουμε ισορροπία, τότε και μόνο τότε, δεν έχουμε κίβδηλο. Αν ο συνολικός αριθμός νομισμάτων είναι περιττός τότε η μεθοδολογία είναι η εξής: Ζυγίζουμε τα N - 1 νομίσματα μισά - μισά, συμπεριλαμβανομένου υποχρεωτικά και του γνωστού κανονικού νομίσματος 0. Αν υπάρξει ισορροπία τότε ζυγίζουμε το κανονικό 0 με το νόμισμα που είχαμε αφήσει έξω κατά το πρώτο ζύγισμα. Αν υπάρξει ξανά ισορροπία στη ζυγαριά τότε και μόνο τότε, δεν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα.

2.4 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων ψάχνουμε να βρούμε αν υπάρχει κίβδηλο, ποιο είναι αυτό και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.

Η διαφορά με τις προηγούμενες είναι ότι δεν έχουμε το γνωστό κανονικό νόμισμα 0 στη διάθεσή μας. Ψάχνουμε να βρούμε τον μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων που θα χρειαστεί για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα, χρησιμοποιώντας τη ζυγαριά. Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε και την έννοια της αναδρομικότητας. Δηλαδή θα χρησιμοποιούμε σε δένδρα κομμάτια προηγούμενων δένδρων τα οποία είναι ακριβώς ίδια μεταξύ τους.

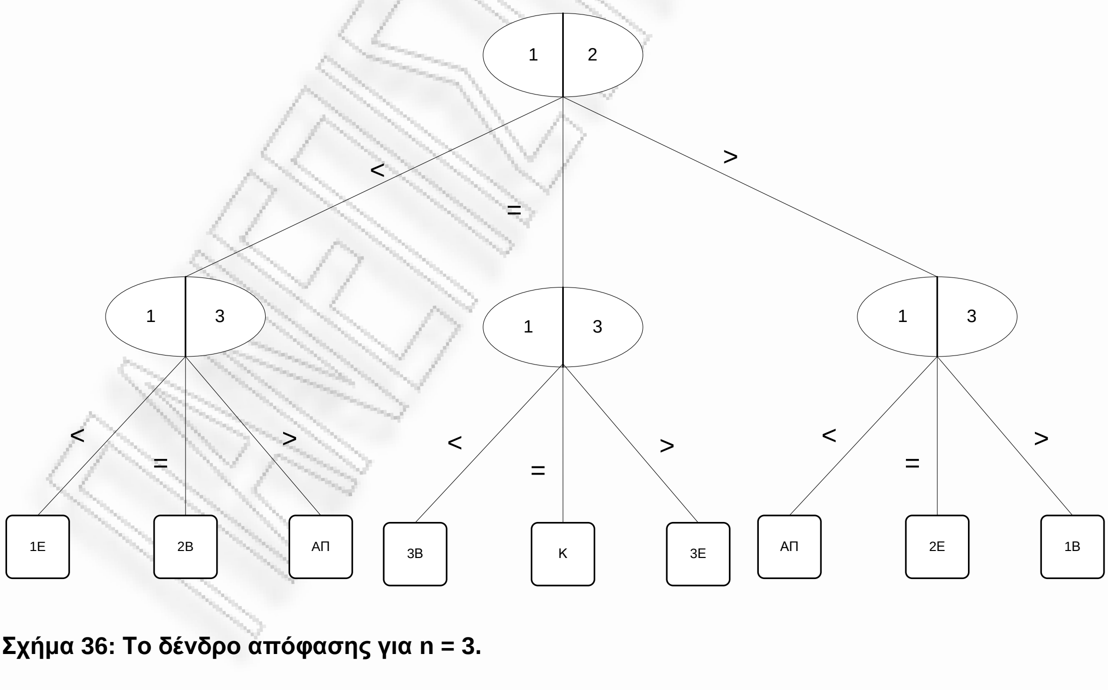
Το δένδρο απόφασης είναι και πάλι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

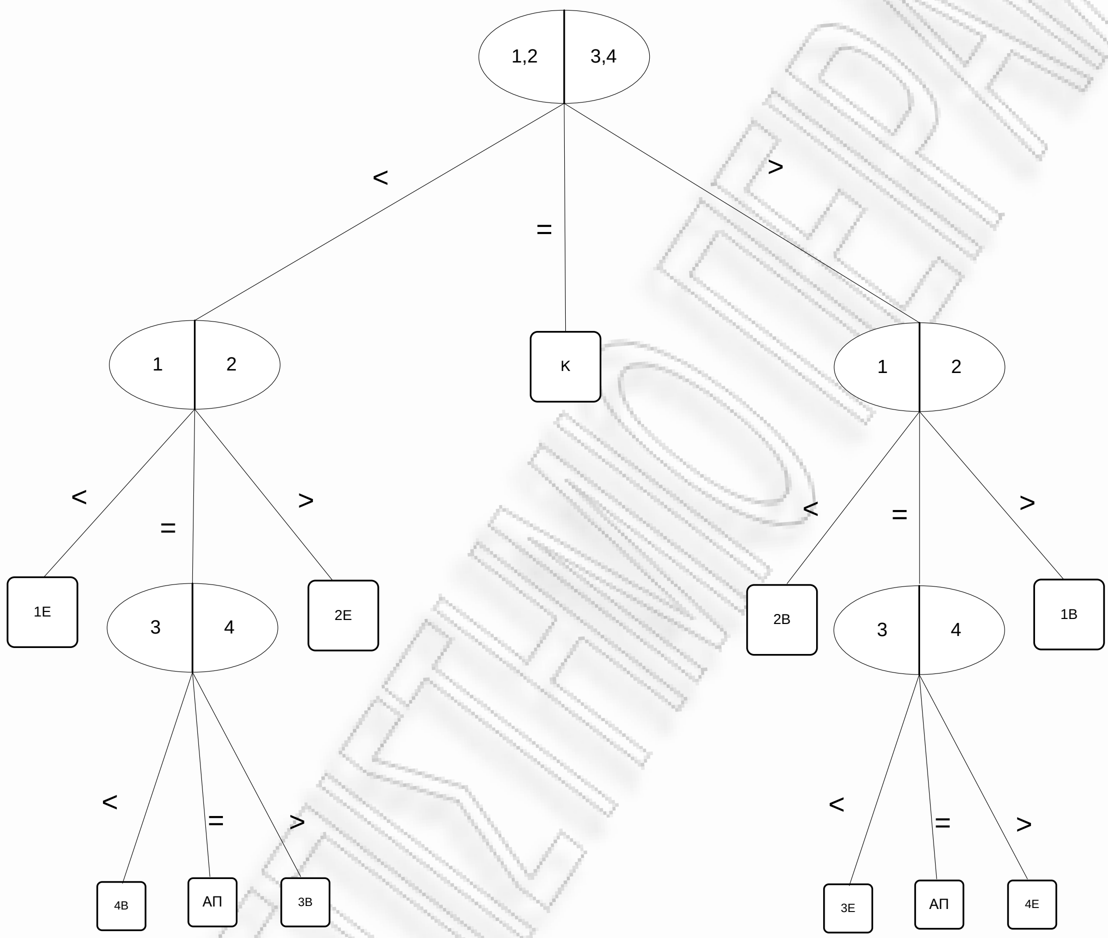
2.4.1. Για n = 3



Σχήμα 36: Το δένδρο απόφασης για n = 3.

Η απλή, τετριμμένη περίπτωση για n = 3, που χρειαζόμαστε 2 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο, θα μας χρειαστεί και παρακάτω για απλοποίηση της δουλειάς μας στα πιο σύνθετα δένδρα.

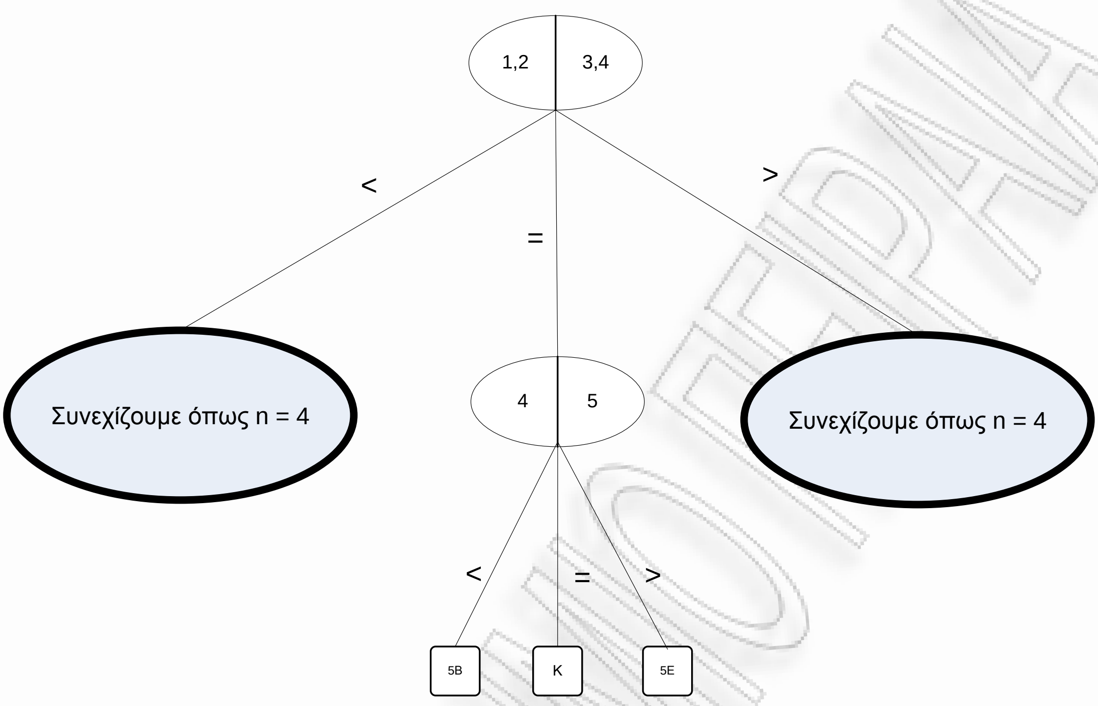
2.4.2. Για n = 4



Σχήμα 37: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε το πολύ 3 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο.

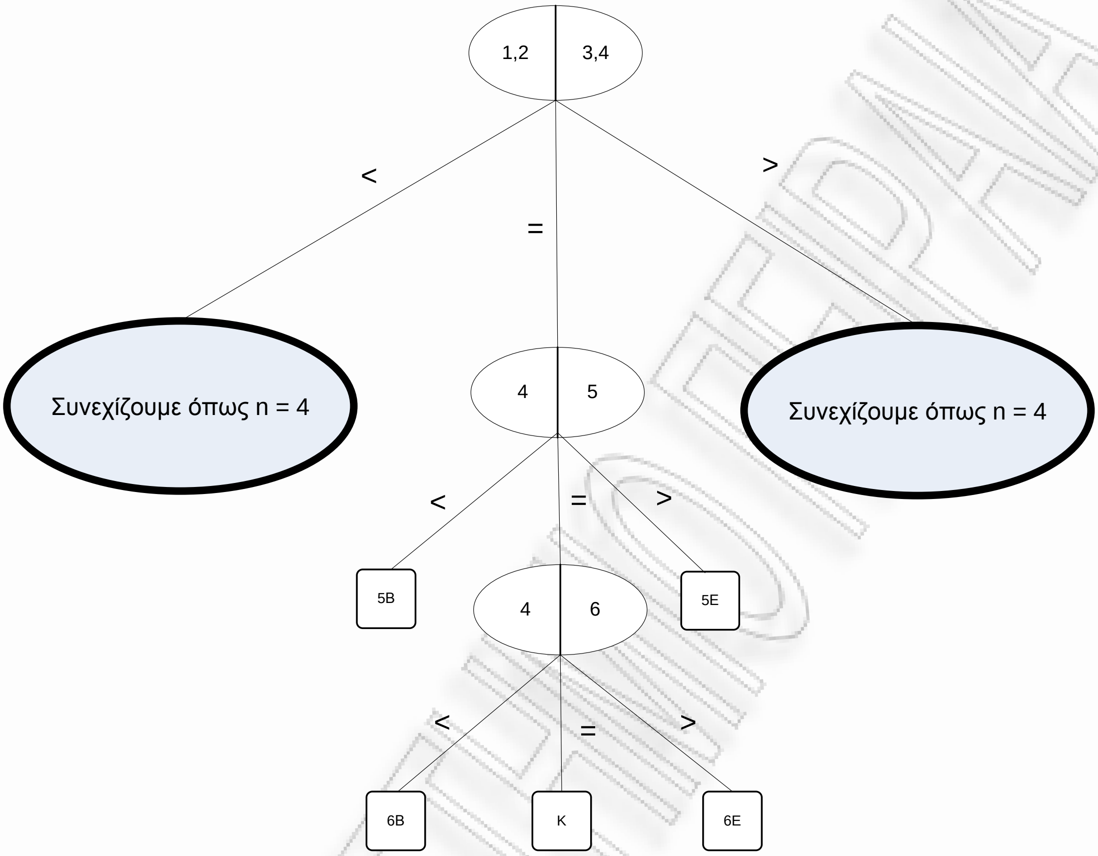
2.4.3. Για n = 5



Σχήμα 38: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

Σε αυτό το σχήμα εισάγουμε την έννοια της αναδρομικότητας. Αναλυτικότερα, αν κάνουμε το σχήμα για n = 5, θα παρατηρήσουμε ότι είναι παρόμοιο με αυτό για n = 4, με τη μόνη διαφορά να βρίσκεται στην ισορροπία του αρχικού ζυγίσματος. Έτσι δεν γράφουμε όλο το σχήμα αλλά μόνο ότι αλλάζει κάθε φορά, που στην περίπτωσή μας είναι η αρχική ισορροπία. Αν κατά το πρώτο ζύγισμα προκύψει ανισορροπία, ακολουθούμε **ακριβώς** την ίδια μεθοδολογία με την περίπτωση για n = 4 όπως και φαίνεται στο σχήμα. Έτσι λοιπόν θα χρειαστούμε το πολύ 3 ζυγίσματα και εδώ για να βρούμε το κίβδηλο (2 + το αρχικό για την περίπτωση αρχικής ανισορροπίας, και 2 συνολικά σε περίπτωση αρχικής ισορροπίας).

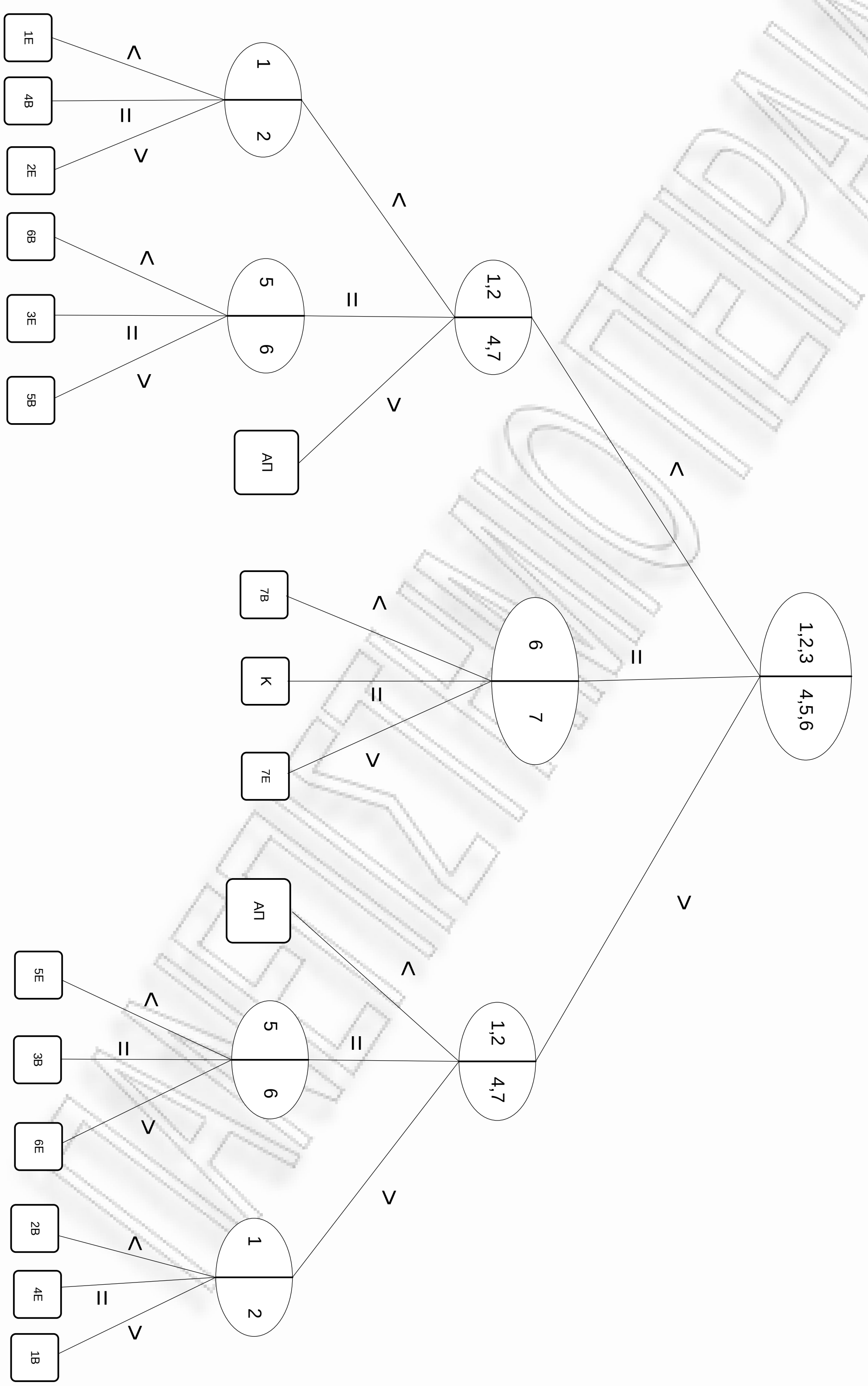
2.4.4. Για n = 6



Σχήμα 39: Το δένδρο απόφασης για n = 6.

Συνεχίζοντας με την ίδια μεθοδολογία βρίσκουμε ότι και εδώ θα χρειαστούμε το πολύ 3 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο.

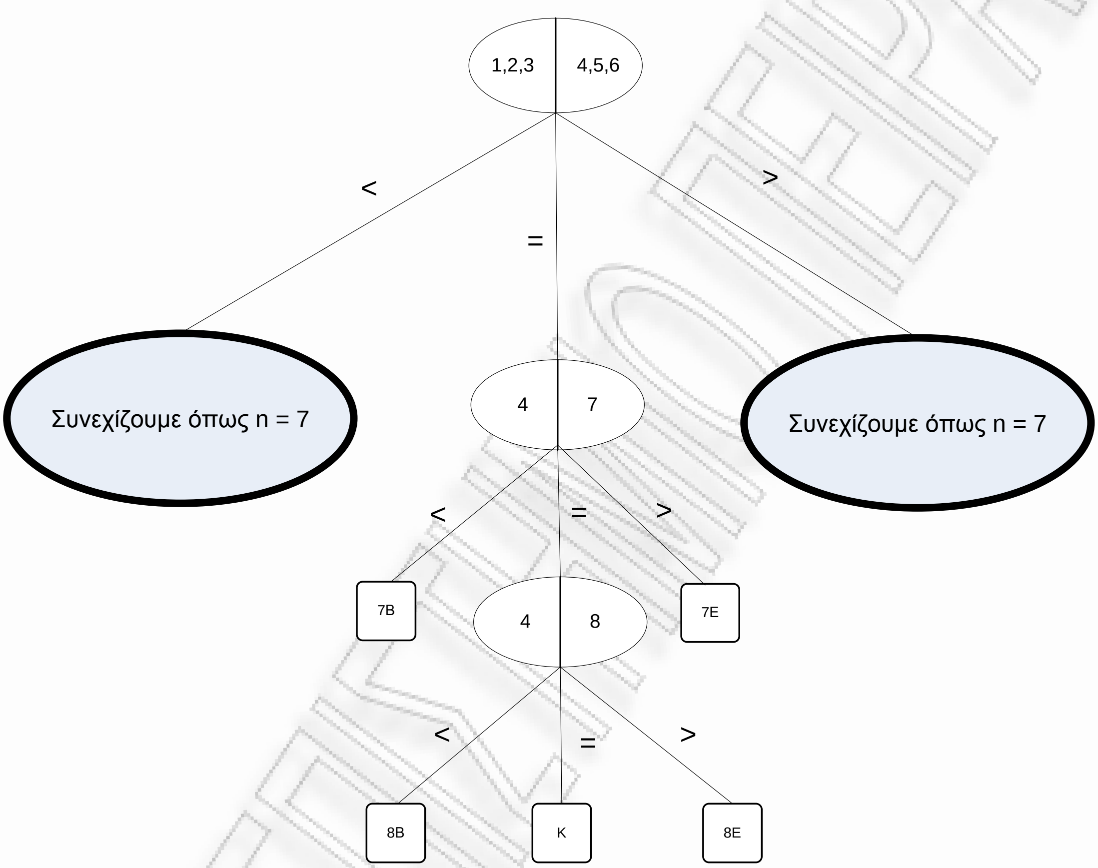
2.4.5. Για n = 7



Σχήμα 40: Το δένδρο απόφασης για n = 7.

Σε αυτή την περίπτωση δε θα χρησιμοποιήσουμε την αναδρομικότητα και θα χρειαστούμε 3 ζυγίσματα ξανά για να ανακαλύψουμε το κίβδηλο.

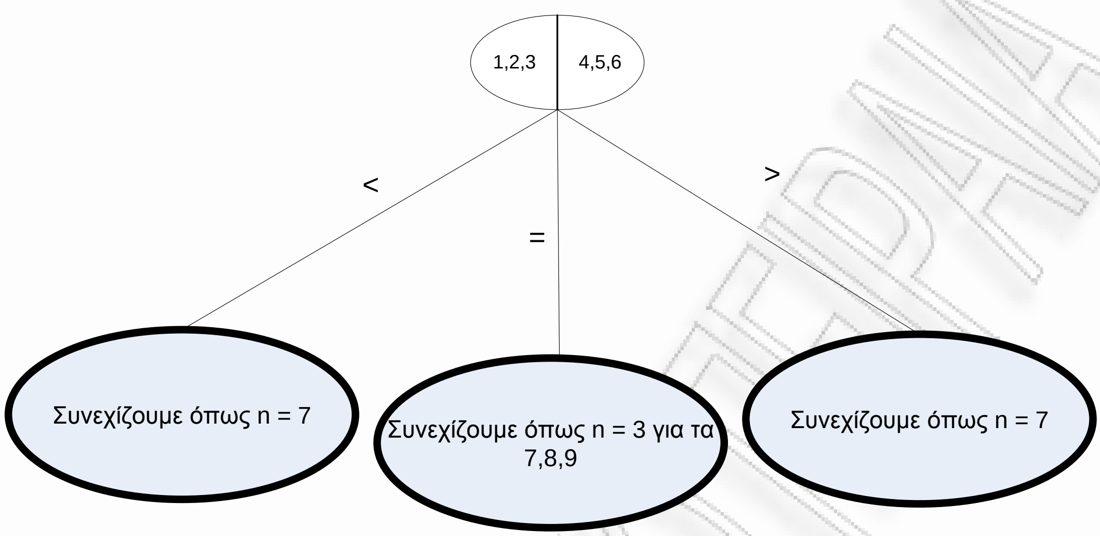
2.4.6. Για n = 8



Σχήμα 41: Το δένδρο απόφασης για n = 8.

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας παρατηρούμε ότι και για n = 8 χρειαζόμαστε το πολύ 3 ζυγίσματα. Αν έχουμε ανισορροπία στο αρχικό ζύγισμα τότε ακολουθούμε την διαδικασία που ακολουθήσαμε για n = 7, η οποία μας δίνει άλλα δύο ζυγίσματα (δηλαδή τρία συνολικά). Αν ισορροπήσουν στο αρχικό ζύγισμα θα χρειαστούμε πάλι δύο ζυγίσματα (τρία συνολικά).

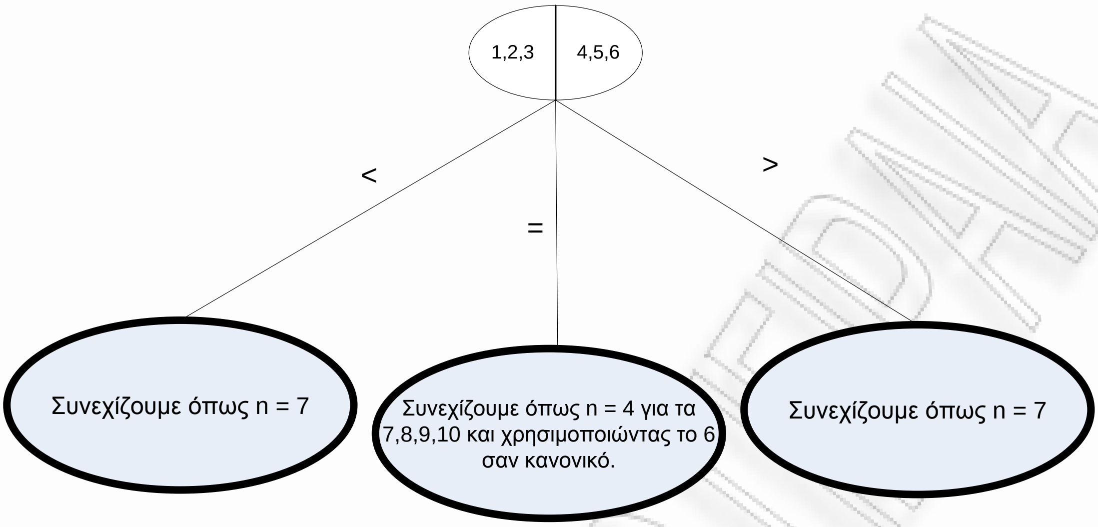
2.4.7. Για n = 9



Σχήμα 42: Το δένδρο απόφασης για n = 9.

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η αναδρομικότητα μας βοηθά να βγάλουμε το συμπέρασμά μας χωρίς ιδιαίτερο κόπο. Αν έχουμε αρχικά ανισορροπία, συνεχίζουμε το δένδρο όπως στο n = 7 και θα χρειαστούμε άλλα 2 ζυγίσματα (δηλαδή 3 συνολικά). Αν ισορροπήσουν στο πρώτο ζύγισμα, τότε ακολουθούμε τη μεθοδολογία της απλής περίπτωσης n = 3 για τα νομίσματα 7,8 και 9, όπου και χρειαζόμαστε άλλα 2 ζυγίσματα επίσης (δηλαδή ξανά 3 συνολικά).

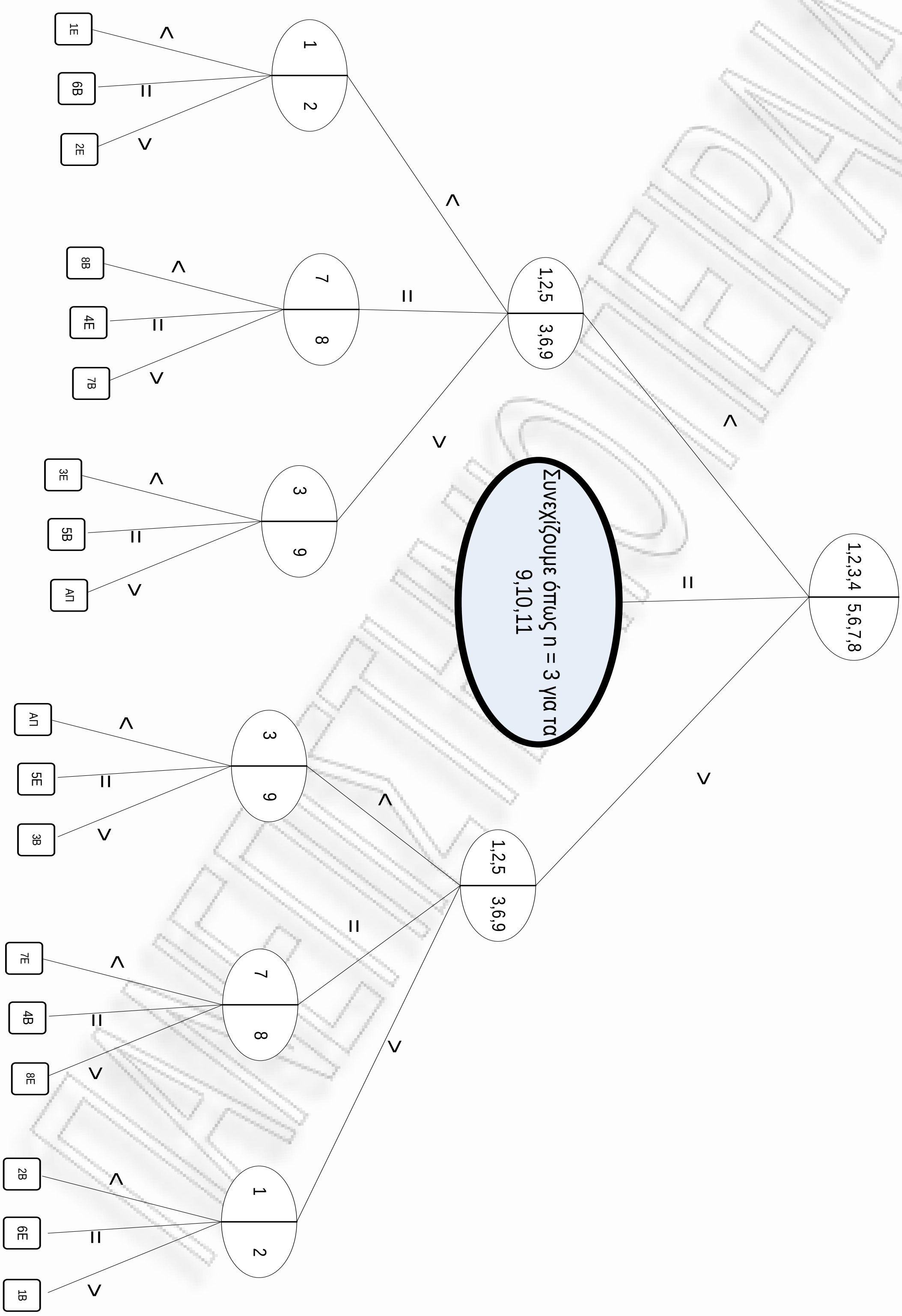
2.4.8. Για n = 10



Σχήμα 43: Το δένδρο απόφασης για n = 10.

Ομοίως και εδώ χρησιμοποιούμε την αναδρομικότητα. Στην περίπτωση ισορροπίας του αρχικού ζυγίσματος θα ζυγίσουμε τα 7,8,9 και 10 χρησιμοποιώντας και το νόμισμα 6 σαν κανονικό (προκύπτει από την ισορροπία του αρχικού ζυγίσματος) όπως το Σχήμα 29. Άρα θα χρειαστούμε άλλα 2 ζυγίσματα (δηλαδή 3 συνολικά). Στην περίπτωση αρχικής ισορροπίας θα συνεχίσουμε όπως το σχήμα 40 (για n = 7) και θα χρειαστούμε και πάλι δύο ακόμη ζυγίσματα.

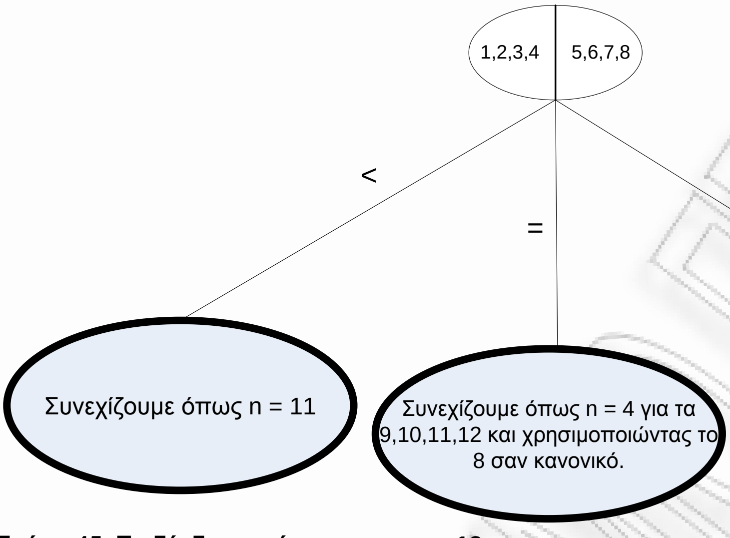
2.4.9. Για n = 11



Σχήμα 44: Το δένδρο απόφασης για n = 11.

Εδώ θα χρειαστούμε πάλι το πολύ 3 ζυγίσματα για να βρούμε το κίβδηλο, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία.

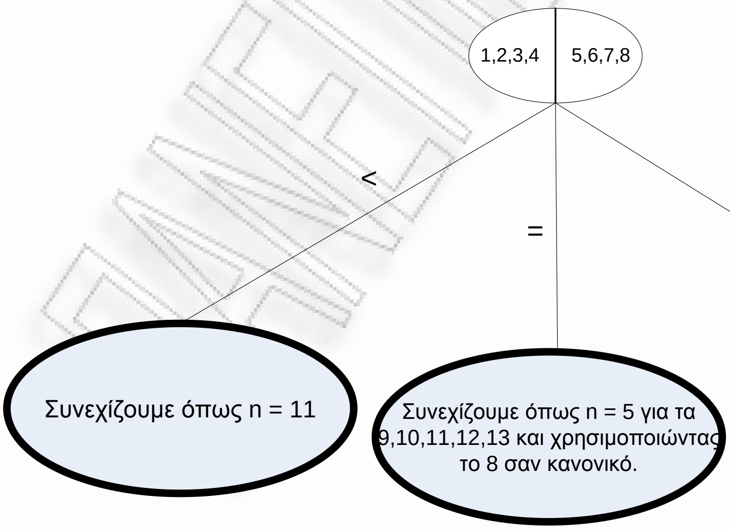
2.4.10. Για n = 12



Σχήμα 45: Το δένδρο απόφασης για n = 12.

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μεθοδολογία της αναδρομικότητας βρίσκουμε εύκολα ότι θα χρειαστούμε το πολύ 3 ζυγίσματα και εδώ για να βρούμε το κίβδηλο.

2.4.11. Για n = 13



Σχήμα 46: Το δένδρο απόφασης για n = 13.

Παρατηρούμε ότι από αυτό το σημείο και πέρα θα χρειαστούμε 4 ζυγίσματα για να ανακαλύψουμε το κίβδηλο καθώς αν ισορροπήσουν τα 8 πρώτα στο αρχικό ζύγισμα θα δουλέψουμε όπως στην περίπτωση n = 5 με ένα κανονικό νόμισμα (βλ. Σχήμα 30) όπου και χρειαζόμαστε 3 ζυγίσματα ακόμη (δηλαδή 4 συνολικά), ενώ σε περίπτωση ανισορροπίας θα συνεχίσουμε όπως στην περίπτωση n = 11 (Σχήμα 44).

3.0 Το πρόβλημα των δύο κίβδηλων νομισμάτων

Παρακάτω θα αναλύσουμε το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων στην περίπτωση που έχουμε δύο κίβδηλα νομίσματα. Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ίδια με αυτή που ακολουθήσαμε και στις προηγούμενες παραγράφους, χρησιμοποιώντας δηλαδή τα δένδρα αποφάσεων και μελετώντας διάφορες περιπτώσεις του προβλήματος.

3.1 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων τα δύο είναι ελαφρύτερα από τα υπόλοιπα

Έχουμε ένα δεδομένο αριθμό νομισμάτων n, μία ζυγαριά η οποία σε ένα ζύγισμα μπορεί να μας δείξει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή αν τα νομίσματα που ζυγίζονται είναι ίσου βάρους (βλ. εικόνα 1) και γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι δύο νομίσματα είναι κίβδηλα και ελαφρύτερα από τα υπόλοιπα. (Η περίπτωση όπου και τα δύο κίβδηλα νομίσματα είναι βαρύτερα από τα υπόλοιπα είναι ανάλογη). Ψάχνουμε, όπως και πριν, να βρούμε το μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων που απαιτείται, για να βρεθούν τα κίβδηλα νομίσματα. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τα δένδρα αποφάσεων..

Παρατήρηση : Για διευκόλυνση του προβλήματος θα υποθέσουμε ότι τα δύο κίβδηλα και ελαφρά νομίσματα είναι ίδιου βάρους μεταξύ τους.

Το δένδρο απόφασης είναι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

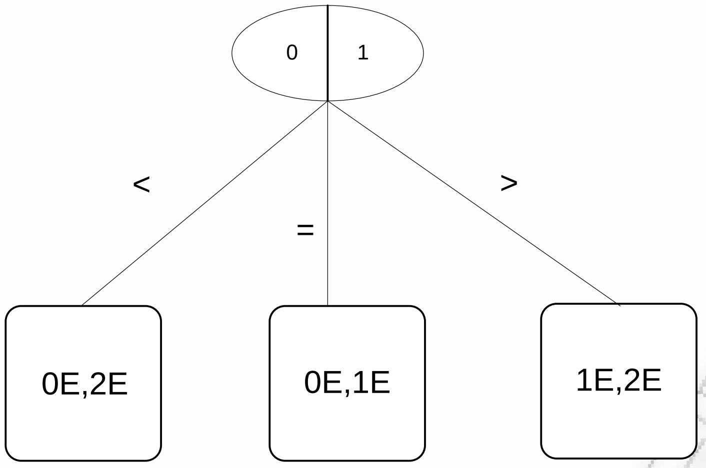
< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

3.1.1. Για n = 3

Σε αυτή την τετριμμένη περίπτωση έχουμε συνολικά τρία νομίσματα και γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι τα δύο από αυτά είναι κίβδηλα και ελαφρύτερα από το άλλο. Το δένδρο απόφασης που περιγράφει τη διαδικασία ζυγισμάτων που θα ακολουθήσουμε φαίνεται παρακάτω.

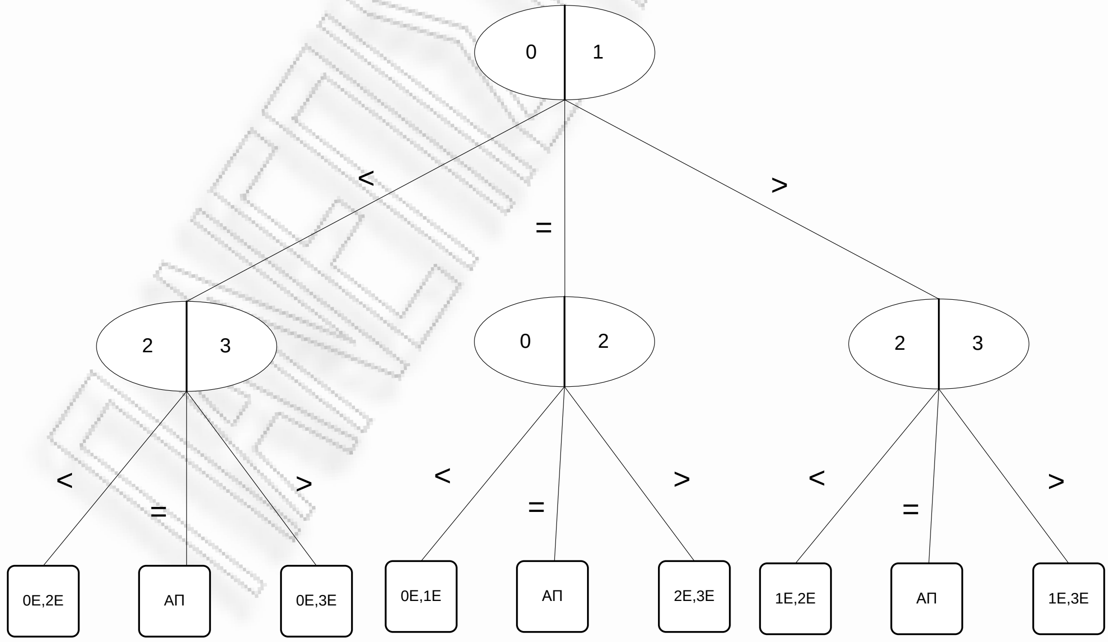


Σχήμα 47: Το δένδρο απόφασης για n = 3.

Παρατηρούμε ότι θα χρειαστούμε ένα μόνο ζύγισμα για να εξάγουμε το συμπέρασμά μας. Υπενθυμίζουμε ότι, χρειαστήκαμε ένα μόνο ζύγισμα και στην αντίστοιχη περίπτωση n = 2 όπου είχαμε ένα κίβδηλο νόμισμα.

3.1.2. Για n = 4

Παρακάτω θα δούμε το σχήμα με το δένδρο απόφασης για n = 4.

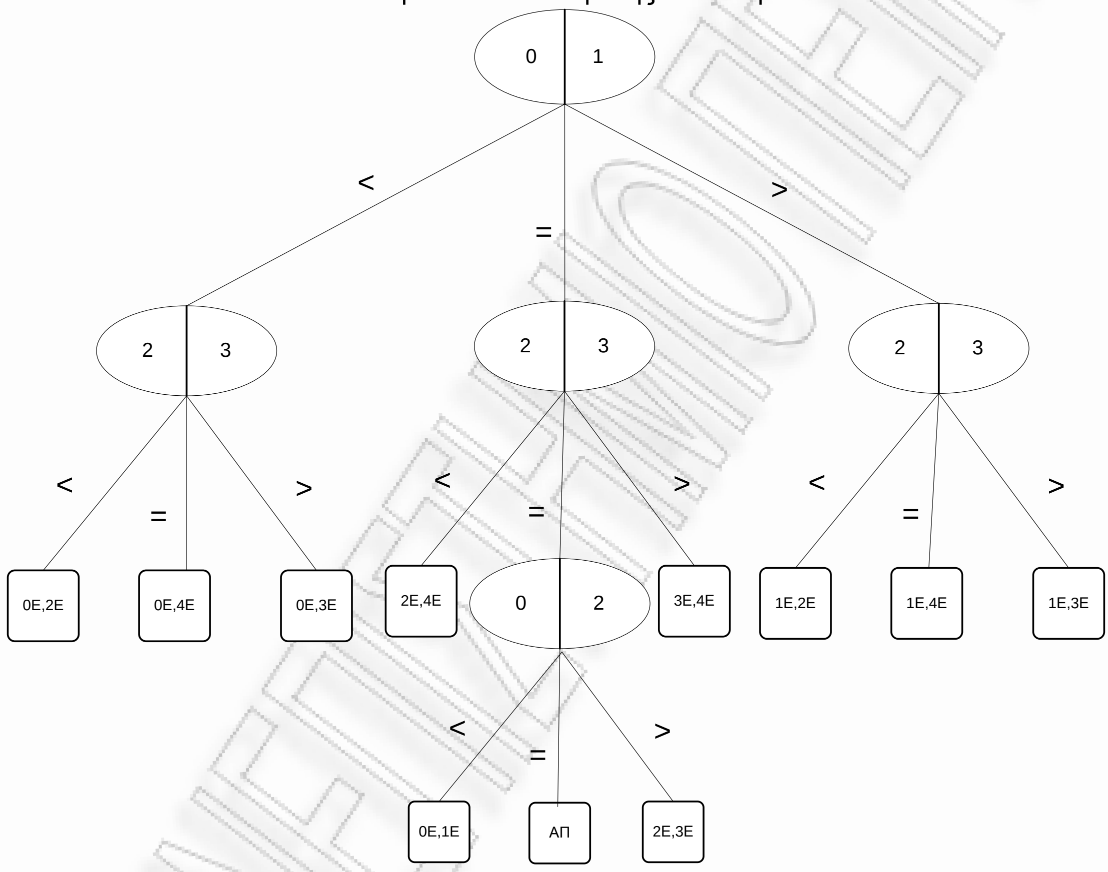


Σχήμα 48: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο ζυγίσματα για να βρούμε τα κίβδηλα νομίσματά. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι, η μεθοδολογία μας είναι διαφορετική σε σύγκριση με αυτή που ακολουθούσαμε στην περίπτωση που είχαμε ένα κίβδηλο νόμισμα. Στο πρώτο ζύγισμα, μας συμφέρει να ζυγίσουμε δύο μόνο νομίσματα και όχι και τα τέσσερα μαζί για να επιτύχουμε λύση του προβλήματος με δύο συνολικά ζυγίσματα. Στην άλλη περίπτωση θα χρειαζόμασταν τρία ζυγίσματα.

3.1.3. Για n = 5

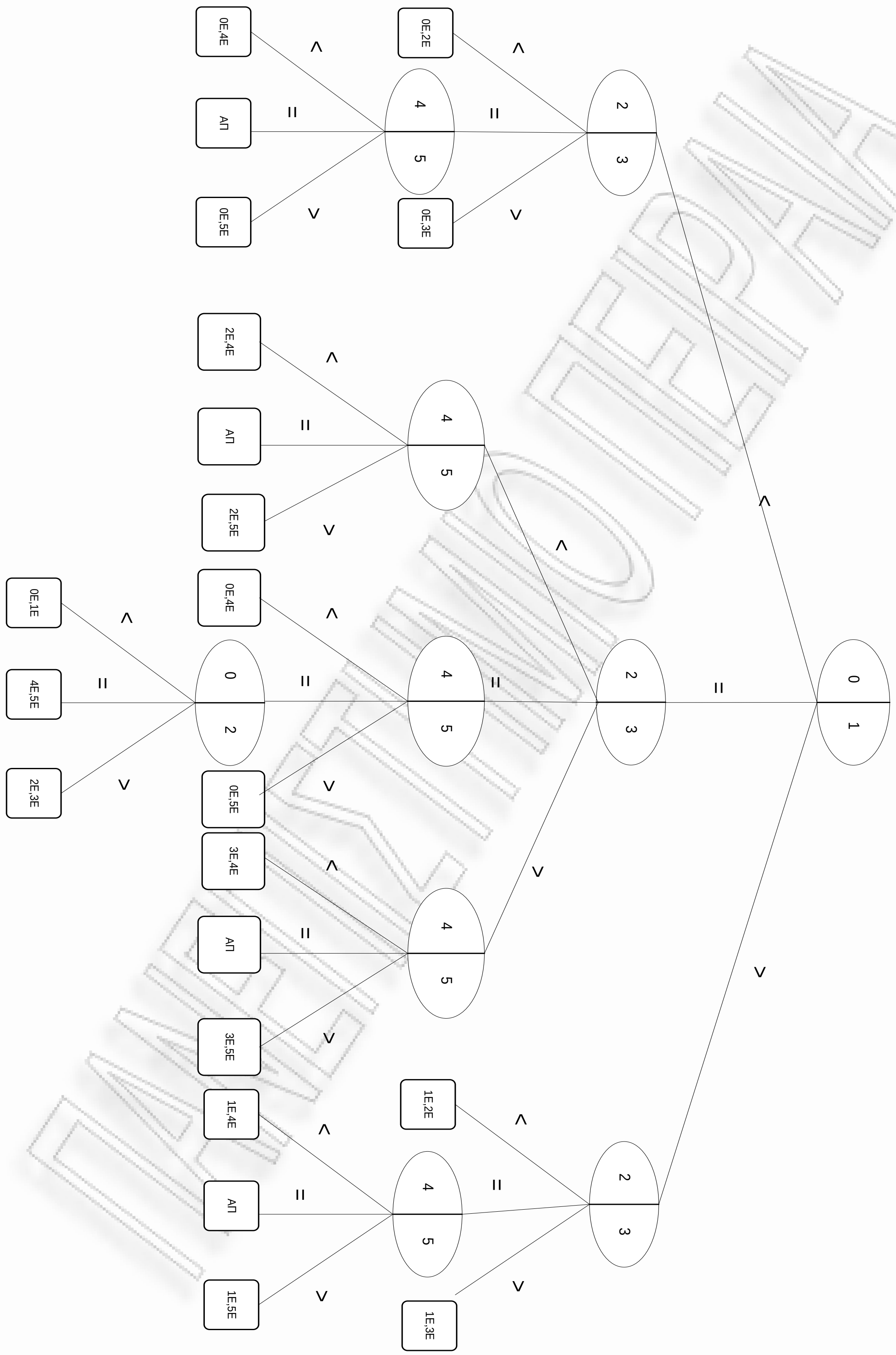
Ακολουθεί το δένδρο απόφασης για n = 5.



Σχήμα 49: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

3.1.4. Για n = 6

Ακολουθεί το δένδρο απόφασης για n = 6.



Σχήμα 50: Το δένδρο απόφασης για n = 6.

Παρατηρούμε ότι για n = 5 χρειαζόμαστε το πολύ τρία ζυγίσματα ενώ για n = 6 χρειαζόμαστε το πολύ τέσσερα ζυγίσματα.

Παρατηρήσεις:

Όπως είδαμε, μελετώντας τις παραπάνω περιπτώσεις, τα σχήματα είναι αρκετά πιο περίπλοκα σε σύγκριση με αυτά όπου είχαμε ένα κίβδηλο νόμισμα και ελαφρύτερο. Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι ο αριθμός των τελικών καταστάσεων εξαρτάται από το n. Αναλυτικότερα, ο αριθμός των πιθανών αποδεκτών απαντήσεων (δηλαδή φύλλων του δένδρου που δεν είναι ΑΠ) ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών n ανά 2, δηλαδή ισούται με

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$\sum_{1}^{n-1} n$$

όπου n : ο συνολικός αριθμός νομισμάτων.

3.2 Δεδομένος συνολικός αριθμός νομισμάτων εκ των οποίων τα δύο είναι κίβδηλα και γνωρίζουμε ότι ένα είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα και το άλλο βαρύτερο.

Έχουμε ένα δεδομένο αριθμό νομισμάτων n, μία ζυγαριά η οποία σε ένα ζύγισμα μπορεί να μας δείξει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή αν τα νομίσματα που ζυγίζονται είναι ίσου βάρους (βλ. εικόνα 1) και γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι δύο νομίσματα είναι κίβδηλα. Αυτό που διαφοροποιεί αυτή την περίπτωση είναι ότι το ένα κίβδηλο είναι πιο ελαφρύ από τα υπόλοιπα και το άλλο πιο βαρύ. Ψάχνουμε, όπως και πριν, να βρούμε το μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων που απαιτείται, για να βρεθούν τα κίβδηλα νομίσματα. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τα δένδρα αποφάσεων.

Επισήμανση: Για απλούστευση της μελέτης του προβλήματος υποθέτουμε ότι όσο πιο ελαφρύ είναι το ένα κίβδηλο νόμισμα τόσο βαρύ θα είναι το άλλο. Αν δηλαδή βάλουμε και τα δύο στο ένα σκέλος της ζυγαριάς μαζί, και στο άλλο σκέλος τοποθετήσουμε δύο κανονικά νομίσματα τότε η ζυγαριά θα πρέπει να ισορροπήσει.

Το δένδρο απόφασης είναι ένα 3-δένδρο εφόσον κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα :

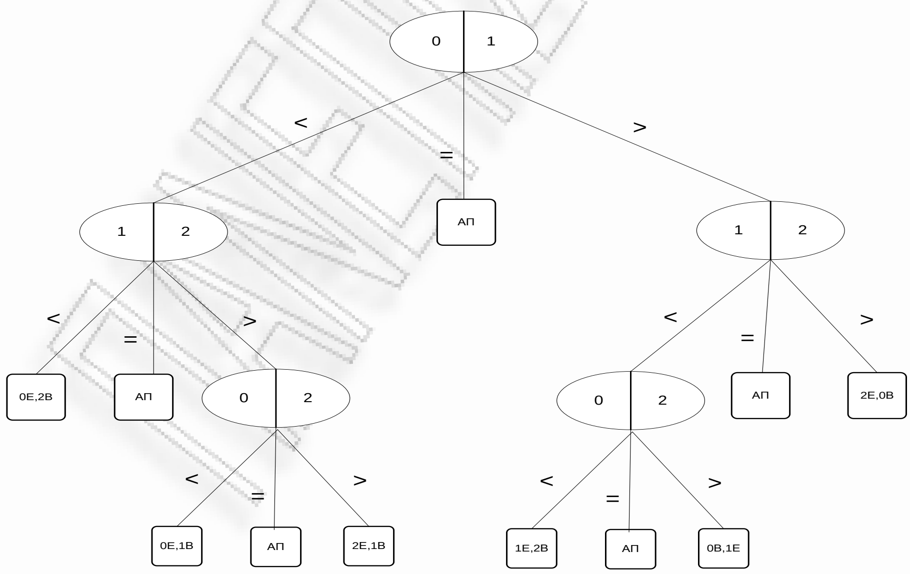
< : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι ελαφρύτερο.

= : τα δύο μέρη της ζυγαριάς έχουν το ίδιο βάρος.

> : το αριστερό μέρος της ζυγαριάς είναι βαρύτερο.

3.2.1. Για n = 3

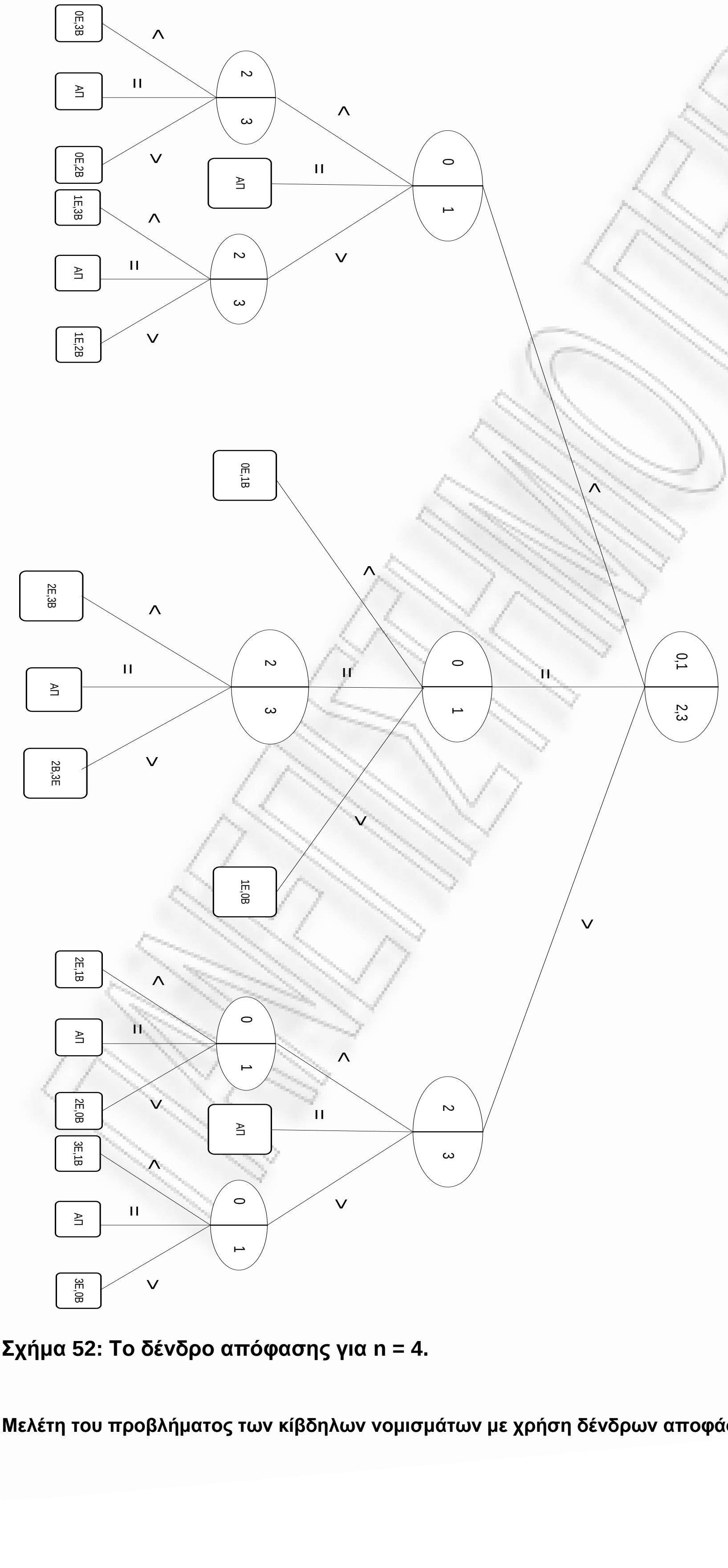
Παρακάτω θα δούμε το δένδρο απόφασης έχοντας τρία συνολικά νομίσματα εκ των οποίων το ένα είναι κανονικό, το άλλο ελαφρύτερο και το τρίτο βαρύτερο. Όπως θα παρατηρήσουμε, το δένδρο απόφασης είναι αρκετά πολύπλοκο ακόμα και για αυτή τη σχετικά απλή περίπτωση. Χρειαζόμαστε το πολύ τρία ζυγίσματα για να βρούμε τα κίβδηλα νομίσματα.



Σχήμα 51: Το δένδρο απόφασης για n = 3.

3.2.2. Για n = 4

Ακολουθεί το δένδρο απόφασης για τέσσερα συνολικά νομίσματα εκ των οποίων τα δύο είναι κανονικά, το ένα ελαφρύ και το άλλο βαρύ.

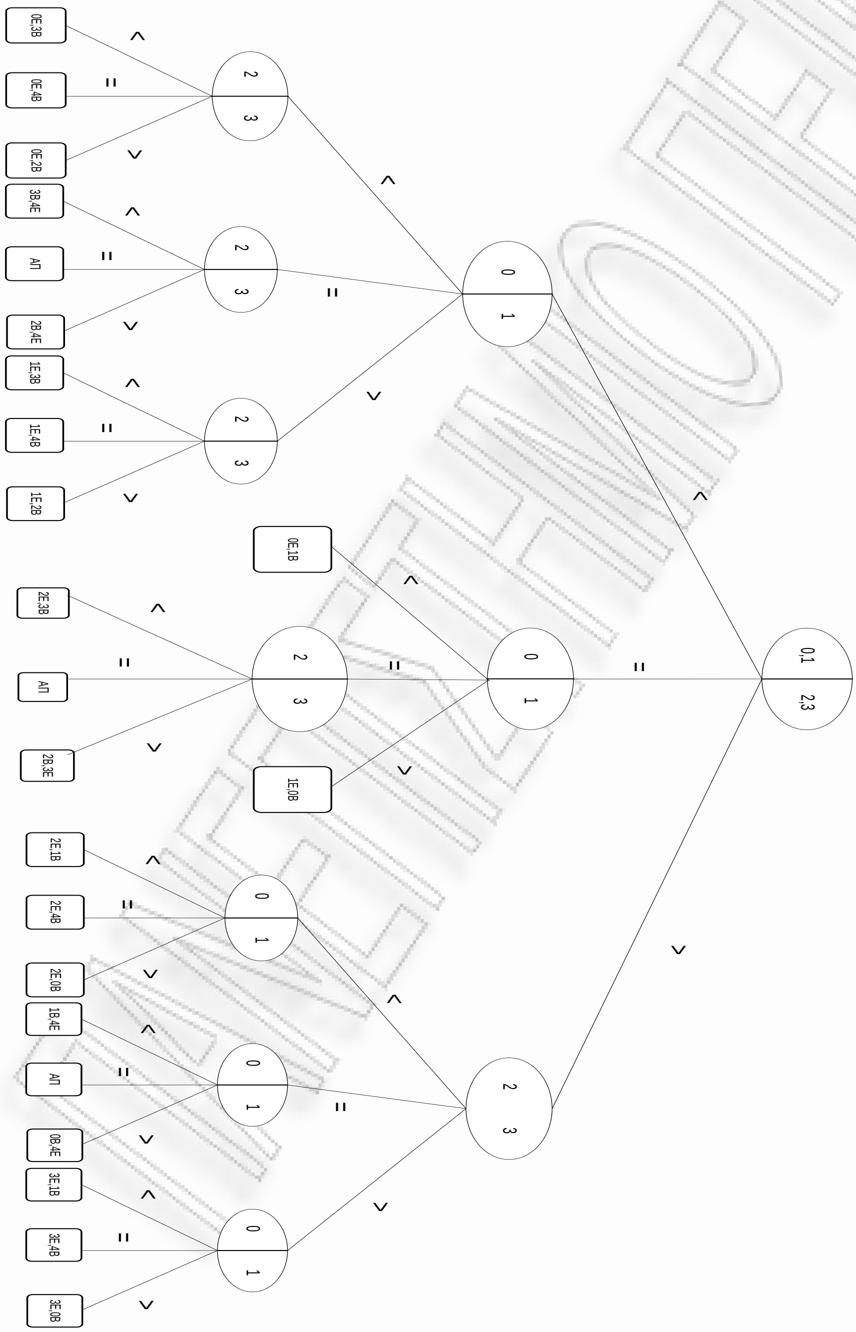


Σχήμα 52: Το δένδρο απόφασης για n = 4.

Χρειαζόμαστε το πολύ τρία ζυγίσματα για να εντοπίσουμε τα κίβδηλα νομίσματα και να επισημάνουμε ποιο είναι το ελαφρύ και ποιο το βαρύ.

3.2.3. Για n = 5

Στην επόμενη σελίδα θα παρουσιάσουμε το δένδρο απόφασης για πέντε συνολικά νομίσματα. Όπως θα δούμε χρειαζόμαστε πάλι τρία ζυγίσματα για να εντοπίσουμε τα κίβδηλα νομίσματα. Όσο μεγαλώνει το n, παρόλο που δεν αυξάνεται ο μέγιστος αριθμός των ζυγισμάτων, στις περιπτώσεις που έχουμε εξετάσει, αυξάνεται πολύ η πολυπλοκότητα των δένδρων απόφασης.



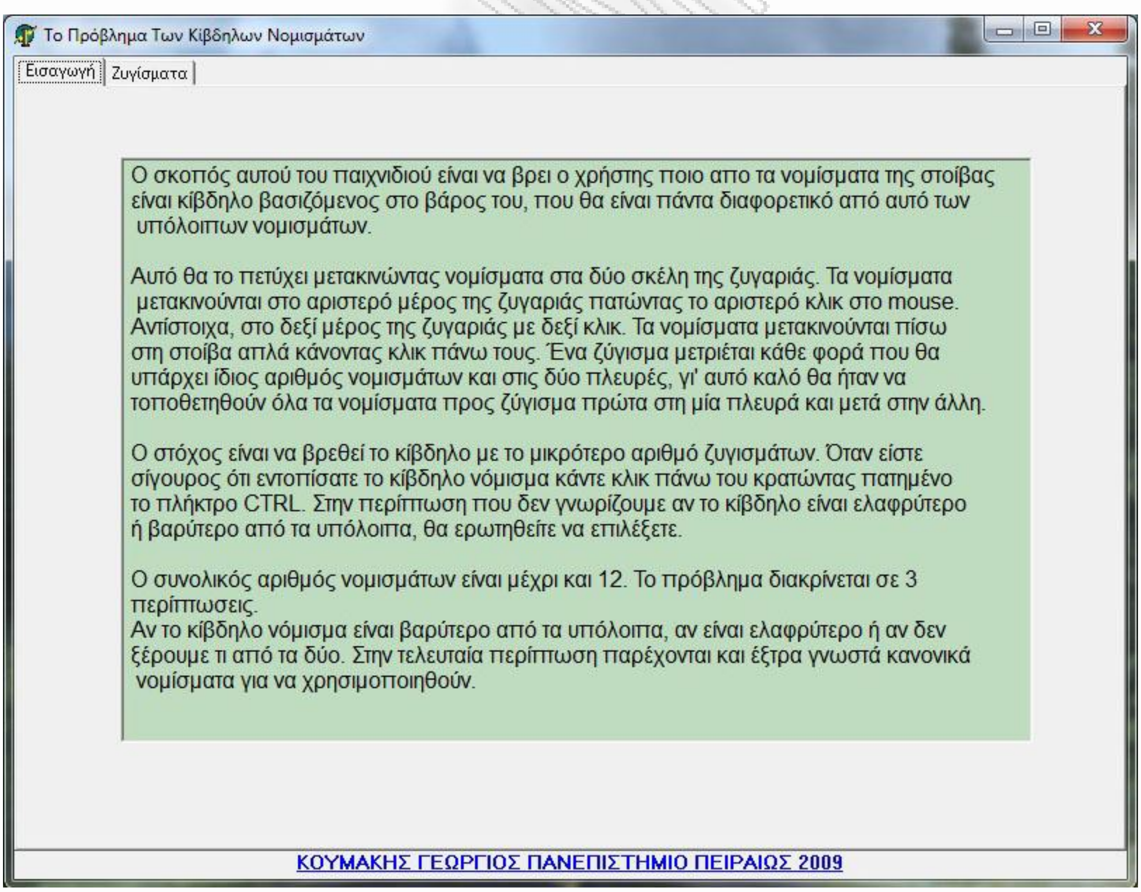
Σχήμα 53: Το δένδρο απόφασης για n = 5.

4.0 Επίδειξη εφαρμογής ηλεκτρονικού υπολογιστή

Την διατριβή αυτή έρχεται να ολοκληρώσει μία εφαρμογή σε ηλεκτρονικό υπολογιστή η οποία θα παρουσιαστεί αναλυτικά παρακάτω. Η εφαρμογή αυτή παρέχει στο χρήστη μία εικονική ζυγαριά, ίδιου τύπου με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία, και ζητά από αυτόν να εντοπίσει το κίβδηλο νόμισμα, με όσο το δυνατόν λιγότερα ζυγίσματα. Όταν ο χρήστης είναι σίγουρος ότι έχει εντοπίσει το κίβδηλο νόμισμα, εισάγει την επιλογή του στην εφαρμογή και παίρνει σαν απάντηση ένα μήνυμα για το σωστό ή το λάθος της επιλογής του.

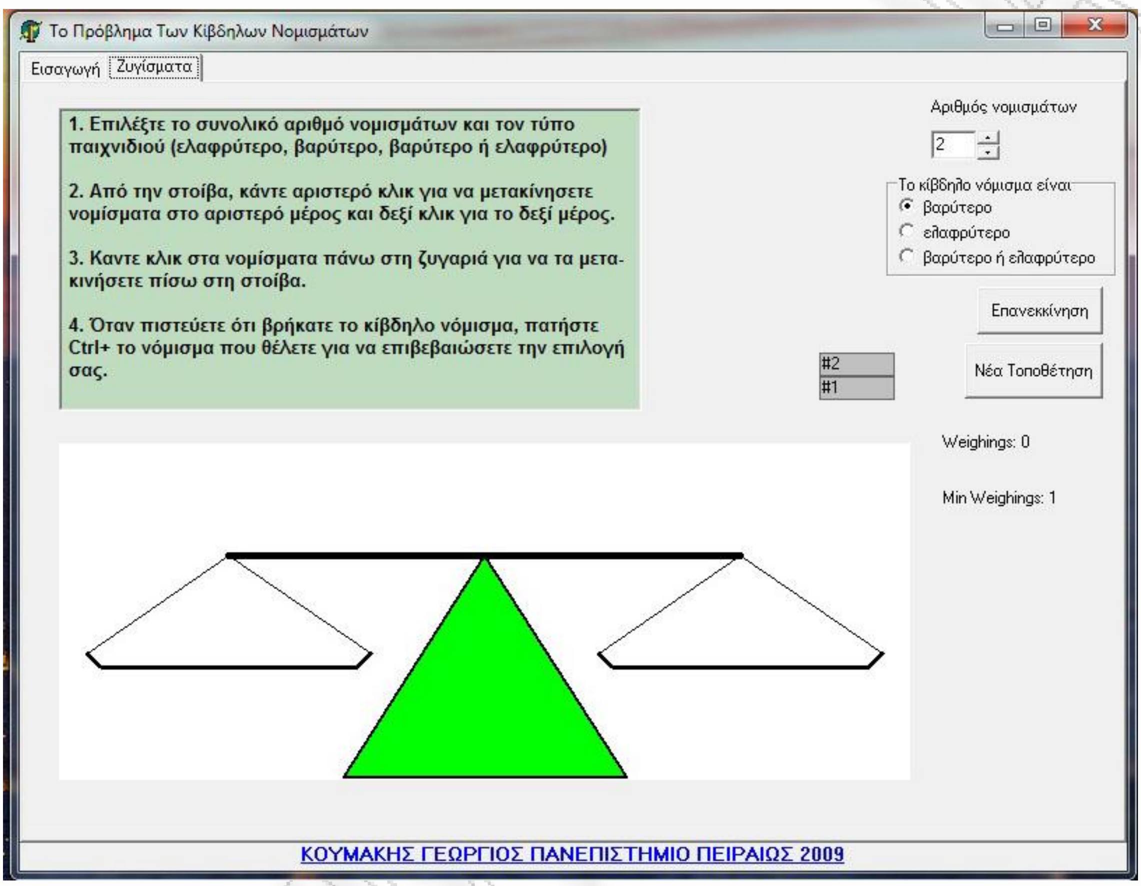
Η εφαρμογή αυτή είναι φτιαγμένη στη γλώσσα προγραμματισμού Delphi και για τη δημιουργία και τον έλεγχο της, χρησιμοποιήθηκε η σουίτα CodeGear RAD Studio 2009. Απαιτούμενο λειτουργικό σύστημα για την ορθή προβολή της είναι ένα εκ των Microsoft Windows XP, Microsoft Windows Vista, Microsoft Windows 7 είτε 32bit είτε 64bit. Η εφαρμογή βρίσκεται στο συνοδευτικό DVD της διατριβής με τη μορφή εκτελέσιμου αρχείου, με το όνομα "Counterfeit.exe"

Όταν ο χρήστης τρέξει το εκτελέσιμο αρχείο, η πρώτη οθόνη που θα δει είναι μία εισαγωγή στο πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων της εφαρμογής και μερικές οδηγίες για τον τρόπο λειτουργίας της, (βλ. Εικόνα 2). Αυτή η οθόνη δεν έχει κάποια λειτουργία, αλλά σκοπός της είναι, να δώσει στο χρήστη να καταλάβει ποιο είναι το πρόβλημα και βασικές πληροφορίες για το χειρισμό της εφαρμογής.



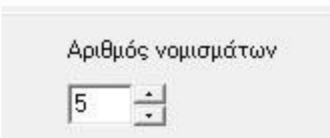
Εικόνα 2: Η καρτέλα "Εισαγωγή"

Το επόμενο βήμα του χρήστη είναι να κάνει κλικ στην επόμενη καρτέλα με το όνομα "Ζυγίσματα", ώστε να εμφανιστεί η κύρια οθόνη του προγράμματος, (βλ. Εικόνα 3).



Εικόνα 3: Η καρτέλα "Ζυγίσματα"

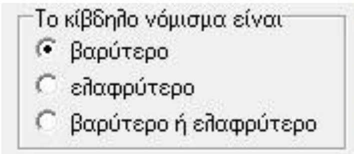
Πάνω αριστερά στην οθόνη αυτής της καρτέλας, δίνονται στον χρήστη αναλυτικές πλέον οδηγίες, για τον τρόπο που θα παίξει το παιχνίδι. Κατ' αρχάς ο χρήστης πρέπει να διαλέξει από πάνω δεξιά τον αριθμό νομισμάτων που επιθυμεί, (βλ. Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Επιλογή αριθμού νομισμάτων

Αμέσως μετά θα πρέπει να επιλέξει τον τύπου παιχνιδιού, (βλ. Εικόνα 5). Υπάρχουν διαθέσιμοι τρεις τύποι παιχνιδιού.

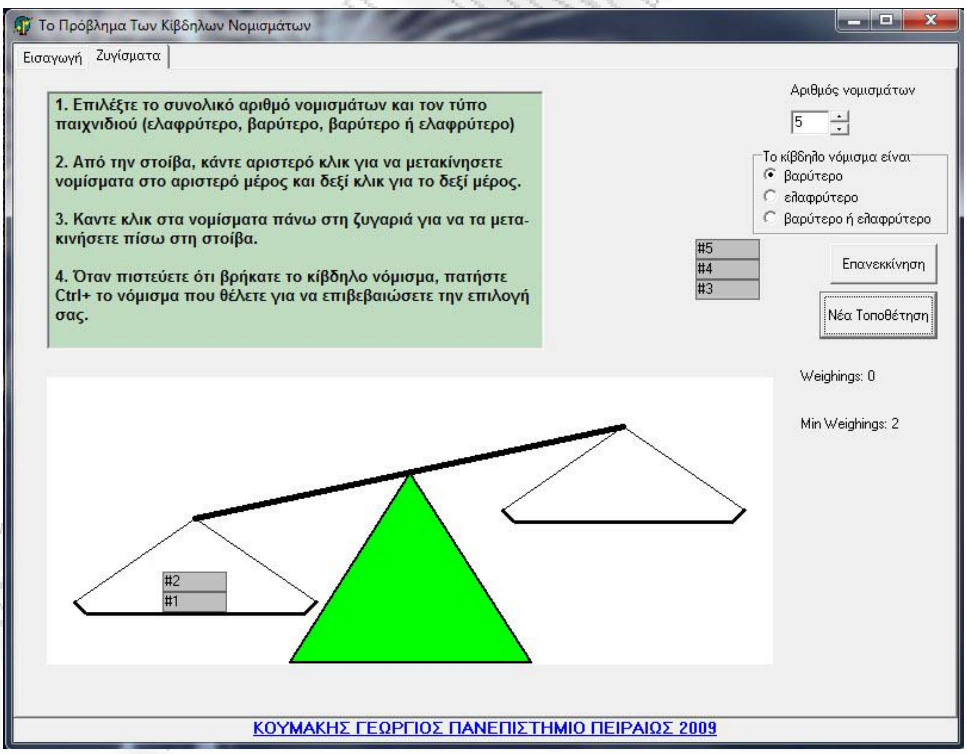
- Το κίβδηλο νόμισμα να είναι βαρύτερο από τα υπόλοιπα.
- Το κίβδηλο νόμισμα να είναι ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.
- Το κίβδηλο νόμισμα να είναι ή βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα.



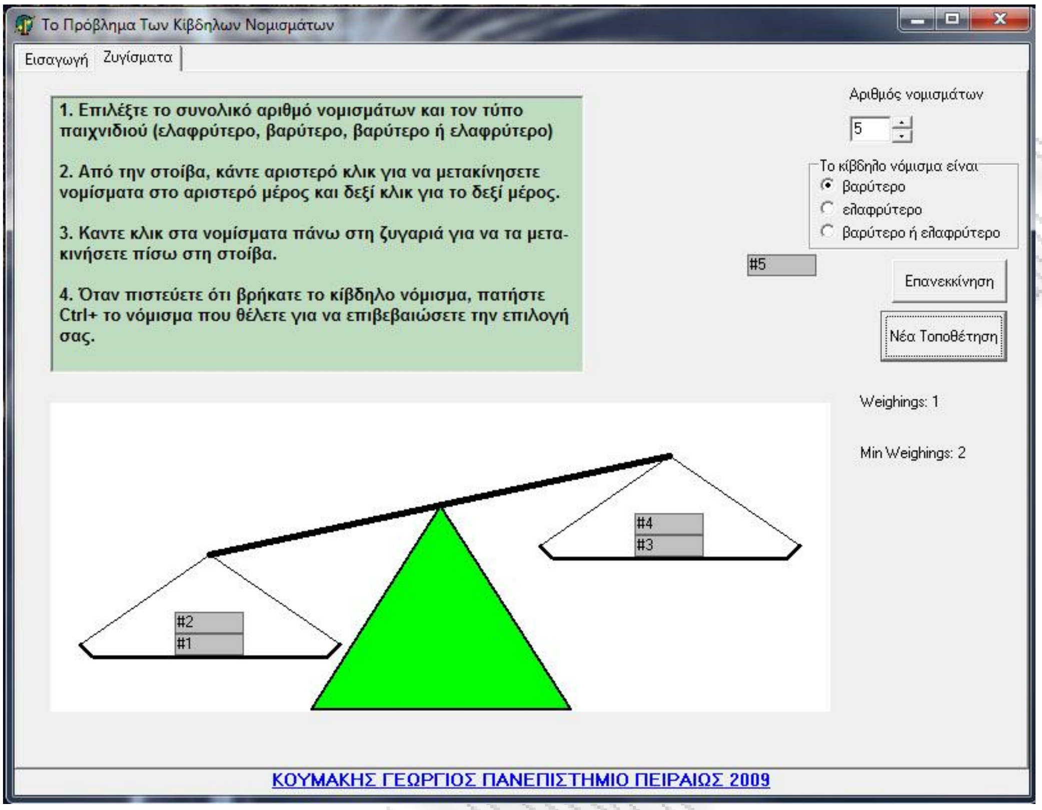
Εικόνα 5: Επιλογή τύπου παιχνιδιού

Εφόσον ο χρήστης έχει επιλέξει αριθμό νομισμάτων και τύπο παιχνιδιού, είναι έτοιμος να ξεκινήσει τα ζυγίσματα για να βρει ποιο από τα νομίσματα είναι κίβδηλο. Κάνοντας σε κάποιο νόμισμα της στοίβας αριστερό κλικ αυτό θα μετακινηθεί στην αριστερή πλευρά της ζυγαριάς. Κάνοντας δεξί κλικ θα μετακινηθεί στη δεξιά πλευρά της ζυγαριάς. Αν θελήσει να μετακινήσει κάποιο νόμισμα πίσω στη στοίβα τότε θα πρέπει να κάνει απλά κλικ επάνω του.

Ο σωστός τρόπος των ζυγισμάτων, είναι να τοποθετούνται πρώτα όλα τα νομίσματα προς ζύγιση, στη μία πλευρά της ζυγαριάς και μετά στην άλλη. Και ο λόγος είναι ότι, ένα ζύγισμα καταμετράται μόλις έχει τοποθετηθεί και στις δύο πλευρές ίσος αριθμός νομισμάτων.



Εικόνα 6: Τοποθέτηση νομισμάτων πρώτα αριστερά της ζυγαριάς

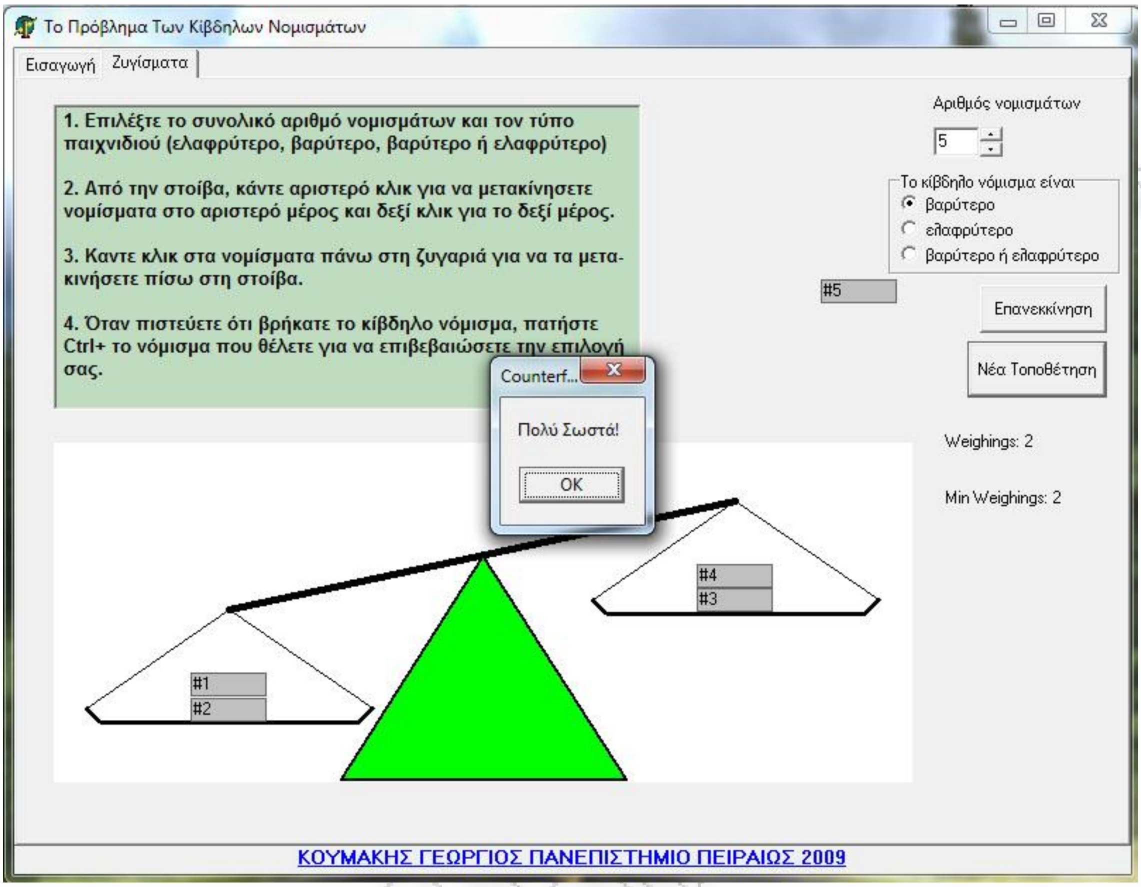


Εικόνα 7: Τοποθέτηση νομισμάτων δεξιά της ζυγαριάς

Όπως θα παρατηρήσουμε βλέποντας τις Εικόνες 6 και 7, μόλις τοποθετήσουμε στο δεξί σκέλος της ζυγαριάς τα νομίσματα #3 και #4 τότε ο δείκτης των ζυγισμάτων Weightings από 0 γίνεται 1. Δηλαδή καταμετρήθηκε ένα ζύγισμα. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι υπάρχει και ένας δείκτης "Min Weightings", που σε κάθε περίπτωση μας δείχνει πόσα είναι τα ελάχιστα ζυγίσματα που απαιτούνται για να βρεθεί το κίβδηλο, ανάλογα την περίπτωση που έχουμε επιλέξει.

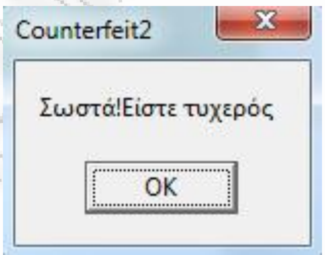
Όταν ο χρήστης, έχοντας τελειώσει με τα ζυγίσματα, είναι σίγουρος ότι έχει εντοπίσει το κίβδηλο πρέπει, ενώ έχει πατημένο το πλήκτρο Ctrl να κάνει κλικ πάνω στο νόμισμα που νομίζει ότι είναι το κίβδηλο. Ανάλογα με το αν είναι σωστή ή λάθος η επιλογή του, θα λάβει απαντητικό μήνυμα στην οθόνη με την επιβεβαίωση, (βλ Εικόνα 8).

Σημείωση : Κάθε φορά το κίβδηλο νόμισμα ορίζεται με τυχαίο τρόπο.



Εικόνα 8: Μήνυμα ορθής επιβεβαίωσης

Αν ο χρήστης βρει το κίβδηλο νόμισμα στην τύχη, δηλαδή με μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων από τον ελάχιστο "Min. Weightings", τότε θα λάβει το ακόλουθο απαντητικό μύνημα, (βλ. Εικόνα 9).

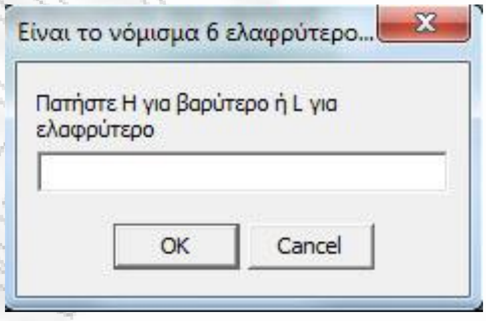


Εικόνα 9: Μήνυμα ορθής και "τυχερής" επιβεβαίωσης

Στην περίπτωση του "ελαφρύτερου ή βαρύτερου", παρέχονται στο χρήστη επιπλέον γνωστά κανονικά νομίσματα για να βοηθήσουν στην επίλυση του προβλήματος, (βλ. Εικόνα 10).

Εικόνα 10: Ένα επιπλέον κανονικό νόμισμα

Όταν ο χρήστης εδώ είναι σίγουρος για την επιλογή του κίβδηλου νομίσματος θα πρέπει να δηλώσει και αν αυτό είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα. Γι' αυτό, όταν πατήσει Ctrl + Νόμισμα, θα του εμφανιστεί το παρακάτω πλαίσιο διαλόγου, ρωτώντας τον αν αυτό που διάλεξε είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα υπόλοιπα, (βλ. Εικόνα 11).



Εικόνα 11: Πλαίσιο διαλόγου στην περίπτωση "βαρύτερο ή ελαφρύτερο"

Τελειώνοντας, πρέπει να συμπληρώσουμε ότι υπάρχουν ακόμη δύο λειτουργικά κουμπιά. Το κουμπί "Επανεκκίνηση" όπου ξεκινάει από την αρχή το τρέχον παιχνίδι και το κουμπί "Νέα Τοποθέτηση" όπου επιλέγει τυχαία νέο κίβδηλο νόμισμα. Επίσης, το παιχνίδι υποστηρίζει περιπτώσεις μέχρι και 12 συνολικά νομίσματα.

Βιβλιογραφία

[1] I. Bosnajak and R. Tosic, *Some new results concerning two counterfeit coins,* University of Novi Sad, Ser. Mat. 22, 1 (1992), 133-140.

[2] M. Gardner, *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, University of Chicago Press (1984), 29-33 and 106-109.

[3] L. Halbeisen and N. Hungerbühler, *The general counterfeit coin problem*, Discrete Math. 147 (1995), 139-150.

[4] D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference and Learning Algorithms,* Cambridge University Press (2003).

[5] M. Martelli and G. Gannon, *Weighing coins: Divide and conquer to detect a counterfeit*, College Mathematics Journal 28 (1997), 365-367.

[6] T. Pappas, *"Counterfeit Coin Puzzle"* in *The Joy of Mathematics,* Wide World Publ./Tetra San Carlos, CA (1989), 181-201.

[7] L. Pyber, *How to Find Many Counterfeit Coins,* Graphs and Combinatorics 2 (1986), 173-177.

[8] C.W. Raine, *Another approach to the twelve-coin problem,* Scripta Math., (1948), 66-67.

[9] C. A. B. Smith, *The Counterfeit Coin Problem*, Math. Gaz. 31 (1947), 31-39.

[10] R. Tosic, *Two Counterfeit Coins,* Discrete Math. 46 (1983), 295-298.