

Μέτρηση και Διαχείριση Κινδύνου με τη Χρήση
του Μοντέλου CAVIAR

31 Ιανουαρίου 2011

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Εισαγωγή στη Μέτρηση Κινδύνου	3
1.2	Η Τραπεζική Κρίση του 2008	12
1.3	Συνοπτική Παρουσίαση της εργασίας	16
2	Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο	17
2.1	Περιγραφή της Παλινδρόμησης με τη βοήθεια των Ποσοστημορίων . . .	17
2.2	Ποσοστημόρια, Τάξεις και Βελτιστοποίηση	25
2.3	Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο	29
3	Ανάλυση του μοντέλου CAViaR	34
3.1	Εισαγωγή Μοντέλου	34
3.2	Μοντέλα Αξίας σε Κίνδυνο	36
3.3	Μοντέλο CAViaR	40
3.4	Παράμετροι Μοντέλου CAViaR	43
3.5	Έλεγχος των Μοντέλων Ποσοστημορίων	46
4	Εναλλακτικά Μοντέλα υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο	51

4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Ιστορική Προσομοίωση	53
4.3	Πλήρως Παραμετρικό Μοντέλο Θέσης και Βαθμίδος	54
4.4	Πλήρως Παραμετρικό Μοντέλο Δυναμικής Ανατροφοδότησης	57
4.5	Θεωρία Ακραίων Τιμών	59
4.6	Άλλες προσεγγίσεις	63
5	Εμπειρικά Αποτελέσματα	65
5.1	Εφαρμογή των μοντέλων σε πραγματικά δεδομένα	65
5.2	Ανάλυση μετοχών του δείκτη Dow Jones	71
6	Παράρτηματα	87
6.1	Παράρτημα Α - Υποθέσεις	87
6.2	Παράρτημα Β - Αποδείξεις	90

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στη Μέτρηση Κινδύνου

Η μέτρηση του κινδύνου της αγοράς είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας για την μελλοντική αξία ενός χαρτοφυλακίου, δηλαδή ένα μέτρο της αβεβαιότητας της μελλοντικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου, δηλαδή του κέρδους και της ζημίας του. Ο θεμελιώδης σκοπός του μέτρου αυτού είναι να συνοψίσει το ενδεχόμενο να υπάρχει απόκλιση από τον στόχο που έχει οριοθετηθεί ή την αναμενόμενη τιμή που περιμένουμε. Για τον καθορισμό της διασποράς ενός χαρτοφυλακίου αποδόσεων, πρέπει να γνωρίζουμε την δυνατότητα που έχουν οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων που το απαρτίζουν να διαφέρουν μεταξύ τους καθώς επίσης και το κατά πόσο η μεταβολή της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου μπορεί να επηρεάσει την τιμή ενός άλλου. Η μεταβλητότητα και η συσχέτιση μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, αλλά είναι επαρκή μόνο όταν το περιουσιακό στοιχείο ή οι αποδόσεις του έχουν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Όταν οι αποδόσεις δεν έχουν πολυ-

μεταβλητή κανονική κατανομή (ή πολυμεταβλητή κατανομή Student's t), τότε είναι ακατάλληλη η χρήση της μεταβλητότητας και της συσχέτισης για να απεικονίσουν την αβεβαιότητα στην μελλοντική αξία του χαρτοφυλακίου (Studer, G. and L'othi, H.-J. (1997)).

Ακολουθώντας τα βήματα των μεγάλων διεθνών τραπεζών και της νομοθεσίας κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990, σχεδόν όλα τα οικονομικά ιδρύματα χρησιμοποιούν την Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk ή VaR) ως μέτρο μέτρησης του κινδύνου. Αυτή η σχεδόν παγκόσμια χρήση της Αξίας σε Κίνδυνο ως μέτρο κινδύνου έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις. Πολλοί επιστήμονες στην ακαδημαϊκή κοινότητα διαφωνούν όσον αφορά αυτό το εργαλείο μέτρησης του κινδύνου διότι δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου, γεγονός που τα καθιστά αντίθετο ως προς την αρχή της διαφοροποίησης του κινδύνου και συνεπώς της θεμελίωσης της μοντέρνας θεωρίας χαρτοφυλακίων. Επιπροσθέτως, υπάρχει ένα στενά συσχετισμένο μέτρο κινδύνου, η υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (CVaR). Είναι απλό να εκτιμηθεί η υπο συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο εφόσον έχει υπολογιστεί η Αξία σε Κίνδυνο, γι' αυτό έχει προταθεί η χρήση της υπο συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο αντί της Αξίας σε Κίνδυνο (Szegf, G. (2004)).

Τα χαρακτηριστικά που καθιστούν την Αξία σε Κίνδυνο ένα αποτελεσματικό μέτρο κινδύνου είναι τα εξής:

- Ανταποκρίνεται στο ποσό που μπορεί να χαθεί με κάποια επιλεγμένη πιθανότητα.
- Μετρά τον κίνδυνο των παραγόντων που εμπεριέχουν τον κίνδυνο καθώς επίσης και της ευαισθησία αυτών.
- Μπορεί να συγκριθεί ανάμεσα σε διαφορετικές αγορές και σε διαφορετικούς βαθμούς εκθέσεων σε κίνδυνο.

- Είναι ένα μέτρο το οποίο εφαρμόζεται σε όλες τις δραστηριότητες και σε όλους τους τύπους κινδύνων παγκοσμίως.
- Μπορεί να μετρηθεί σε οποιοδήποτε επίπεδο, από μια ατομική συναλλαγή ή για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλη την επιχείρηση, καλύπτοντας όλους τους κινδύνους της εταιρίας συνολικά.
- Όταν υπολογίζεται, για να βρεθεί η συνολική Αξία σε Κίνδυνο για πολύ μεγάλα χαρτοφυλάκια, ή αναλύεται για να απομονώσει στοιχεία κινδύνων που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τύπους κινδύνων, λαμβάνει υπόψη τις εξαρτήσεις μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού ή του χαρτοφυλακίου.

Η Αξία σε Κίνδυνο είναι ένα ποσοτικό μέτρο του Κινδύνου της Αγοράς (Market Risk), το οποίο προσπαθεί αντικειμενικά να συνδυάσει την ευαισθησία ενός χαρτοφυλακίου σε μεταβολές της Αγοράς και της πιθανότητας που έχει κάθε μεταβολή να συμβεί. Είναι μια προσέγγιση του κινδύνου, η οποία συμπεριλαμβάνει το σύνολο των παραγόντων που μπορεί να προκαλέσουν ζημιές και καταλήγει σε ένα και μόνο νούμερο που αντιπροσωπεύει την συνολική ενδεχόμενη ζημιά σε δυσμενείς συνθήκες της αγοράς. Τα παραπάνω καθιστούν την Αξία σε Κίνδυνο ως ένα εξαιρετικά εύχρηστο εργαλείο, ένα βολικό σημείο αναφοράς και γι' αυτό είναι ευρέως διαδεδομένη η χρήση του ως μέτρο κινδύνου. Η Αξία σε Κίνδυνο αναφέρεται σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο T και ορίζεται ως το κατώτερο επίπεδο ζημιάς η οποία αναμένεται να προκύψει κάτω από απότομες διακυμάνσεις της αγοράς κατά τη διάρκεια της χρονικής αυτής περιόδου. Αν υποθέσουμε ότι μια τέτοια κατάσταση βίαιων μεταβολών των τιμών έχει 1% πιθανότητα να συμβεί, τότε η ημερήσια Αξία σε Κίνδυνο είναι η ελάχιστη ζημιά η οποία έχει 1% πιθανότητα να προκύψει κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (κατά τη διάρκεια

μιας συνεδρίασης της αγοράς). Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι: Με 99% πιθανότητα η ημερήσια ζημιά θα είναι μικρότερη από την Αξία σε Κίνδυνο.

Σχηματικά, η Αξία σε Κίνδυνο αντιστοιχεί στο σημείο της κατανομής του κέρδους/ζημίας, για το οποίο ισχύει:

$$Pr(P/L \leq VaR) \leq \alpha \Leftrightarrow Pr(P/L \geq VaR) = 1 - \alpha$$

όπου το P/L είναι η συντομογραφία για το Profit/Loss που θεωρείται τυχαία μεταβλητή.

Η Αξία σε Κίνδυνο έχει δύο βασικές παραμέτρους:

- Το επίπεδο σημαντικότητας α , το οποίο συνήθως καθορίζεται να είναι 5% ή 1%.
- Τον ορίζοντα κινδύνου, όπου συμβολίζεται με h και είναι μια χρονική περίοδος, που παραδοσιακά μετράται σε εργάσιμες ημέρες και όχι σε ημερολογιακές ημέρες.

Πολύ συχνά το επίπεδο σημαντικότητας α , οριοθετείται από εξωτερικούς παράγοντες, όπως είναι η νομοθεσία που επιβάλλεται στις Τράπεζες. Σύμφωνα με τις οδηγίες της Βασιλείας II (Basle Committee on Banking Supervision, 2005, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework), οι τράπεζες οι οποίες χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα Αξίας σε Κίνδυνο για την αξιολόγηση του κινδύνου της αγοράς και της κεφαλαιακής επάρκειας, θα πρέπει να υπολογίζουν την αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 1\%$, δηλαδή με ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης. Ένας οργανισμός αξιολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας μιας εταιρίας, θα προσαρμόσει το επίπεδο σημαντικότητας α και το διάστημα εμπιστοσύνης $(1-\alpha)$ για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, ανάλογα με το μέγεθος της εταιρίας (για παράδειγμα 0.03% επίπεδο σημαντικότητας ή 99.97% διάστημα εμπι-

στοσύνης). Αν υπάρχει έλλειψη κατάλληλης νομοθεσίας το επίπεδο σημαντικότητας ή το διάστημα εμπιστοσύνης της αξίας σε κίνδυνο, θα εξαρτηθεί από την συμπεριφορά των κινδύνων ανά χρήστη. Όσο πιο συντηρητικός είναι ο χρήστης (Τράπεζα - Ασφαλιστική Εταιρία), τόσο πιο χαμηλό θα είναι το επίπεδο σημαντικότητας α , άρα τόσο πιο ψηλό το διάστημα εμπιστοσύνης που θα εφαρμοστεί.

Ο ορίζοντας κινδύνου είναι η περίοδος όπου μετράμε τη πιθανή απώλεια. Οι κίνδυνοι αξιολογούνται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ανάλογα με την ρευστότητα τους. Ωστόσο, για να αξιολογηθεί η κεφαλαιακή επάρκεια από τους νομοθέτες και τους οργανισμούς αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, πρέπει να υπάρχει ένας και μόνο χρονικός ορίζοντας κινδύνου, όπως για παράδειγμα ένας χρόνος ή ένας μήνας, για να αξιολογήσουν όλους τους κινδύνους στο σύνολό τους. Για παράδειγμα, κάτω από τη νομοθεσία που έχει επιβληθεί από την Επιτροπή της Βασιλείας II (Basle Committee on Banking Supervision, 2005, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework), ο χρονικός ορίζοντας κινδύνου της αξίας σε κίνδυνο είναι αυτός των δέκα ημερών. Κατά την απουσία εσωτερικών ή εξωτερικών περιορισμών (π.χ. νομοθεσίας) ο χρονικός ορίζοντας κινδύνου της αξίας σε κίνδυνο θα πρέπει να αναφέρεται στη χρονική περίοδο κατά την οποία αναμένουμε να είμαστε εκτεθειμένοι στον κίνδυνο. Μια έκθεση σε κίνδυνο ενός περιουσιακού στοιχείου που εμπεριέχει ρευστότητα, μπορεί να αντισταθμιστεί πλήρως πιο γρήγορα από την έκθεση σε κίνδυνο ενός περιουσιακού στοιχείου που δεν έχει μεγάλη ρευστότητα. Επίσης, ο χρόνος που χρειάζεται για να απομακρυνθεί ένας κίνδυνος, εξαρτάται από το μέγεθος της έκθεσης σε κίνδυνο καθώς και τη ρευστότητα της αγοράς. Ορισμένες από τις πιο ρευστές τοποθετήσεις βρίσκονται σε κύρια διεθνή νομίσματα και μπορούν να αντισταθμιστούν εξαιρετικά γρήγορα, συνήθως μέσα σε λίγες ώρες, ακόμη και σε

περιόδους κρίσης. Από την άλλη πλευρά, οι ιδιωτικές τοποθετήσεις δεν έχουν υψηλή ρευστότητα, πράγμα που σημαίνει πως δεν υπάρχει προσφορά σε μία αγορά, οπότε ο μόνος τρόπος για να πωληθεί το προϊόν είναι να τεθεί σε ιδιωτικές διαπραγματεύσεις με άλλη τράπεζα.

Όταν οι συναλλασσόμενοι ρευστών τοποθετήσεων ενεργούν υπό των ορίων της Αξίας σε Κίνδυνο (για παράδειγμα 1% Αξία σε Κίνδυνο ή 5% Αξία σε Κίνδυνο), απαιτούν σε πραγματικό χρόνο εκτιμήσεις για την Αξία σε Κίνδυνο των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου τους, έτσι ώστε να μπορέσουν να αξιολογήσουν την επίδραση οποιονδήποτε προτεινόμενων συναλλαγών στο τρέχον επίπεδο της Αξίας σε Κίνδυνο. Όσο πιο έντονος είναι ο κίνδυνος, τόσο μικρότερη είναι η χρονική περίοδος κατά την οποία πρέπει να αξιολογηθεί ο κίνδυνος, άρα τόσο μικρότερος είναι ο ορίζοντας κινδύνου για το μοντέλο που εκτιμά την Αξία σε Κίνδυνο. Οι κίνδυνοι ρευστότητας τείνουν να εξελίσσονται ραγδαία και θα είναι δύσκολο να παρουσιαστούν οι δυναμικές αυτών των κινδύνων μακροπρόθεσμα. Επίσης, οι αγορές τείνουν να χάνουν ρευστότητα κατά τη διάρκεια περιόδων με μεγάλη μεταβλητότητα. Ως εκ τούτου, ο ορίζοντας κινδύνου θα πρέπει να μεγαλώνει καθώς μετράται η Αξία σε Κίνδυνο σε συνθήκες μεγάλης μεταβλητότητας.

Ο εκτιμητής κινδύνου συχνά αξιολογεί μόνο τους κινδύνους που προέρχονται από αγορές που εμπεριέχουν ρευστότητα, αρχικά τουλάχιστον για ημερήσιο ορίζοντα κινδύνου. Έπειτα αυτό θα επεκταθεί σε δέκα ημερών ορίζοντα κινδύνου, όταν χρησιμοποιείται εσωτερικό μοντέλο εκτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο για να αξιολογηθεί το Ελάχιστο Κεφάλαιο Κινδύνου που απαιτείται από τον νόμο, και σε μεγαλύτερο ορίζοντα (π.χ. 1 έτος) για εσωτερική κατανομή των κεφαλαίων.

Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται επίσης από την εφαρμογή του μοντέλου μέ-

τρησης της Αξίας σε Κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα:

- Η Αξία σε Κίνδυνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αξιολογηθεί η πιθανότητα να είναι αφερέγγυα μια επιχείρηση-εταιρία, ή να αθετήσει τις υποχρεώσεις της. Αυτό εξαρτάται από την κεφαλαιοποίηση της εταιρίας και τον κίνδυνο που ενέχουν οι τοποθετήσεις της σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, για παράδειγμα έξι μηνών ή ενός χρόνου. Οι οργανισμοί ελέγχου πιστοληπτικής ικανότητας (όπως είναι οι SP, Moody's) ανταμείβουν με υψηλό συντελεστή μόνο τις εταιρίες εκείνες που παρουσιάζουν μια πολύ μικρή πιθανότητα αθέτησης, όπως π.χ. 0.03% για τον επόμενο χρόνο, και τις αξιολογούν με βαθμό AA (Basel Committee on Banking Supervision (2006) International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework). Άρα, οι εταιρίες που στοχεύουν για να πετύχουν αξιολόγηση AA, πρέπει να παρέχουν ένα διάστημα εμπιστοσύνης 99.97% για τον επόμενο χρόνο.
- Οι Εποπτικές αρχές που επιθεωρούν την απαιτούμενη κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζών, συνήθως επιτρέπουν να αξιολογείται το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιώντας ένα εσωτερικό μοντέλο Αξίας σε Κίνδυνο, με την προϋπόθεση ότι έχουν εγκρίνει το μοντέλο αυτό και ότι συγκεκριμένες ποσοτικές απαιτήσεις έχουν εξασφαλιστεί. Σε αυτή την περίπτωση ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης πρέπει να εφαρμοστεί στο μοντέλο Αξίας σε Κίνδυνο, για να αξιολογηθούν πιθανές ζημιές κάτω από ένα χρονικό ορίζοντα δύο εβδομάδων.
- Όταν οριοθετούνται τα όρια συναλλαγών βάση του μοντέλου της Αξίας σε Κίνδυνο, οι εκτιμητές κινδύνου μπορούν να πάρουν χαμηλότερο διάστημα εμπιστοσύνης και μικρότερο ορίζοντα κινδύνου. Για παράδειγμα, ο εκτιμητής μπορεί να

επιτρέπει στους συναλλασσόμενους να λειτουργούν κάτω απο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ και Αξία σε Κίνδυνο μίας ημέρας. Σε αυτή τη περίπτωση είναι κατα 95% σίγουρος ότι οι συναλλασσόμενοι δεν θα υπερβούν την Αξία σε Κίνδυνο μίας ημέρας, ενώ οι ανοιχτές τοποθετήσεις τους μένουν χωρίς εκτίμηση. Παρακολουθώντας τους συναλλασσόμενους και τις ζημιές τους που υπερβαίνουν αυτό το όριο της Αξίας σε Κίνδυνο, μπορεί να δοθεί περισσότερη προσοχή στους συναλλασσόμενους που υπερβαίνουν το όριο αυτό συχνά.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια εισαγωγή των μοντέλων που υπολογίζουν την Αξία σε Κίνδυνο. Υπάρχουν βασικά τρεις τύποι μοντέλων Αξίας σε Κίνδυνο, όπου είναι οι εξής:

1. Το μοντέλο της Αξίας σε Κίνδυνο με αποδόσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή, στο οποίο υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποδόσεων ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή και τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου έχουν γραμμική σχέση.
2. Το μοντέλο ιστορικής προσομοίωσης, το οποίο χρησιμοποιεί ιστορικά δεδομένα για να εκτιμήσει την Αξία σε Κίνδυνο, αλλά προβαίνει σε ελάχιστες υποθέσεις σχετικά με το παράγοντα κινδύνου της κατανομής των αποδόσεων.
3. Το μοντέλο προσομοίωσης με τη μέθοδο του Monte Carlo της Αξίας σε Κίνδυνο, το οποίο στη πιο βασική του μορφή, πραγματοποιεί παρόμοιες υποθέσεις με εκείνες του γραμμικού μοντέλου Αξίας σε Κίνδυνο με αποδόσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Είναι εύκολο να υπολογιστεί η Αξία σε Κίνδυνο όταν έχουμε προκαθορίσει την κατανομή των αποδόσεων, αλλά για να κατασκευάσουμε την κατανομή αυτή χρειάζεται σημαντική προσπάθεια. Οι διαφορές μεταξύ των τριών αυτών μοντέλων Αξίας σε Κίνδυνο βρίσκονται στο τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε την κατανομή των αποδόσεων. Επίσης, και οι τρεις παραπάνω προσεγγίσεις μπορούν να αναπτυχθούν και να γενικευτούν, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Το πλαίσιο του μοντέλου Monte Carlo είναι πιο ευέλικτο από τα άλλα δύο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μεγάλη ποικιλία, βάση των παραγόντων κινδύνου της κατανομής των αποδόσεων.

Για να συνοψίσουμε τα κύρια πλεονεκτήματα κάθε προσέγγισης, έχουμε ότι:

1. Το γραμμικό μοντέλο Αξίας σε Κίνδυνο με αποδόσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή παρουσιάζει ευκολία στη χρήση του.
2. Η ιστορική προσομοίωση της Αξίας σε Κίνδυνο δεν κάνει καμία υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων.
3. Το μοντέλο Monte Carlo είναι πιο ευέλικτο, και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο χαρτοφυλακίου, όπως είναι τα χαρτοφυλάκια όπου τα περιουσιακά στοιχεία που το απαρτίζουν δεν παρουσιάζουν γραμμική σχέση.

Επιπροσθέτως, για να συνοψίσουμε τους κύριους περιορισμούς της κάθε μεθόδου, έχουμε τα εξής:

- Το γραμμικό μοντέλο Αξίας σε Κίνδυνο με αποδόσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή περιορίζεται σε γραμμικά χαρτοφυλάκια και μπορεί να γενικευτεί για την Student's t κατανομή ή μιας μίξης μεταξύ κανονικής και Student's t κατανομής.

- Η ιστορική προσομοίωση της Αξίας σε Κίνδυνο υποθέτει ότι όλη η μελλοντική πιθανή διακύμανση των αποδόσεων έχει καταγράψει εμπειρικά στο παρελθόν. Αυτό επιβάλλει πολύ αυστηρές, συχνά εκτός πραγματικότητας, απαιτήσεις για τα δεδομένα.
- Το μοντέλο Monte Carlo είναι υπολογιστικά πιο έντονο και σύμφωνα με τις μεθόδους που χρησιμοποιείται μπορεί να ελαχιστοποιήσει τα σφάλματα που προκύπτουν.

1.2 Η Τραπεζική Κρίση του 2008

Πριν αρχίσουμε να περιγράψουμε την σημαντικότητα εύρεσης ενός κατάλληλου εργαλείου μέτρησης Κινδύνων, θα ήταν χρήσιμο να περιγράψουμε με λίγα λόγια την κρίση που υπέστη ο Τραπεζικός τομέας το 2008. Όπως είναι φυσικό, υπάρχει ένα έναυσμα για όλες τις οικονομικές κρίσεις, και για αυτή τη περίπτωση η πρώτη ρωγμή εμφανίστηκε με την κρίση των ενυπόθηκων δανείων στην Τραπεζική Αγορά της Αμερικής. Κατά τη διάρκεια των ετών 2004 - 2006 όλες οι χρηματιστηριακές αγορές ανά την υφήλιο παρουσίασαν ανάπτυξη καθώς το κόστος των πιστώσεων έφτασε το χαμηλότερο σημείο όλων των εποχών. Οι νέοι τρόποι τιτλοποίησης δανείων σήμαιναν ότι η πιστοληπτική ικανότητα του αντισυμβαλλόμενου δεν λαμβάνονταν υπόψη και έπαιζε μικρό ρόλο στην προμήθεια του πωλητή. Οι Ευρωπαϊκές Τράπεζες και οι επενδυτές σε χώρες που συνέβαιναν τα παραπάνω, παρέμεναν σε χαμηλά επίπεδα ρευστότητας όλα αυτά τα χρόνια με αποτέλεσμα να αναγκαστούν να αγοράσουν υποχρεώσεις εξασφαλισμένου χρέους (Collateralized debt obligations : CDO) και παρόμοια νέα προϊόντα. Οι κύριοι πωλη-

τές εκείνης της περιόδου ήταν οι πέντε μεγαλύτερες επενδυτικές Τράπεζες : Goldman Sachs, Morgan Stanley, Merrill Lynch, Lehman Brothers και η Bear Stearns . Ακόμα και οι Τράπεζες λιανικής πώλησης άρχισαν να βασίζονται στο να τιτλοποιούν τα δάνεια τους και να επιλέγουν βραχυχρόνια επένδυση μέσω της Διατραπεζικής Αγοράς αντί να βασίζονται στις καταθέσεις.

Η πλήρης έκταση της σημερινής οικονομικής κρίσης ξεκίνησε αρχικά να ξεδιπλώνεται στις αρχές του Σεπτεμβρίου του 2008, όπου πτωχέυσαν οι τρεις από τις πέντε μεγαλύτερες επενδυτικές Τράπεζες της Αμερικής καθώς επίσης και ο Αμερικανικός ασφαλιστικός γίγαντας AIG ο οποίος, σαν τους τεράστιους χρηματοπιστωτικούς ομίλους ετερογενών δραστηριοτήτων Fannie Mae και Freddie Mac λίγους μήνες νωρίτερα, διεσώθησαν από κυβέρνηση των ΗΠΑ. Η κερδοσκοπική ανοιχτή πώληση στις δύο κυριότερες επενδυτικές τράπεζες, Goldman Sachs και Morgan Stanley, εξαπλώθηκε και στις τράπεζες λιανικής πώλησης διαφόρων χωρών οι οποίες είχαν ενεργή συμμετοχή σε κεφαλαιαγορές μετά την κατάργηση της συμφωνίας Glass - Steagall το 1999, η οποία όριζε ή την αγορά υποχρεώσεων εξασφαλισμένου χρέους ή τη χρησιμοποίηση διαπραγμάτευσης για τον ίδιο λογαριασμό παραγωγών για να αυξηθούν τα κέρδη (Carol Alexander, Market Risk Analysis vol.4 - VaR models, page 33). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι τρεις μεγαλύτερες τράπεζες της Ισλανδίας να αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους και κάποιες άλλες αποταμιευτικές σε άλλες χώρες να χάσουν τα κεφάλαιά τους. Τότε η μεταβλητότητα των αποθεμάτων του τραπεζικού τομέα επεκτάθηκε και στην ενέργεια, στα βασικά προϊόντα και σχετικά αποθέματα, και μετετρέπη σε φόβους σχετικά με τη μειωμένη ζήτηση για πετρέλαιο και πρώτες ύλες με την έναρξη μιας παγκόσμιας ύφεσης.

Τελικά οι κυβερνήσεις αντέδρασαν αυξάνοντας την προστασία των καταθέσεων,

μειώνοντας τα επιτόκια δανεισμού και παράγοντας επιπλέον ρευστότητα. Σαν τελευταία λύση, προτάθηκαν σχέδια για μερική εθνικοποίηση τραπεζών, τα οποία περιλαμβάνουν ανώτατα όρια στις αποδοχές των διοικητικών στελεχών και των εμπόρων, καθώς επίσης και απαγορεύσεις στις ανοιχτές πωλήσεις για επιτευχθεί η ανακοπή της κατολίσθησης των τιμών των μετοχών. Οι ρυθμιστικές αρχές αγνόησαν τους αντί - μονοπωλιακούς νόμους καθώς οι προβληματικές τράπεζες είχαν θιγεί από τις μεγάλες τράπεζες λιανικής πώλησης με μεγάλη ρευστότητα. Ο τραπεζικός τομέας έχει πλέον μεταφερθεί σε ολιγοπωλιακό ανταγωνισμό, με μερικά τεράστια συγκροτήματα επιχειρήσεων όπως η JP Morgan που κυριαρχούσε στην αγορά. Δοθέντος της αδιανόητης απειλής ότι θα καταρρεύσει το παγκόσμιο τραπεζικό σύστημα κατά την οποία ο γενικός πληθυσμός θα χάσει τις οικονομίες του, οι περισσότερες κυβερνήσεις έχουν τώρα θέσει ανώτατα όρια ασφάλισης καταθέσεων (Basle Committee on Banking Supervision, 2005, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework).

Το ερώτημα που γεννάται αυτή τη στιγμή είναι το εξής: Τι γίνεται με την οικονομική διαχείριση του κινδύνου και της διαχείρισης του κινδύνου αγοράς, και πιο συγκεκριμένα, ποιες μεταρρυθμίσεις είναι αναγκαίες να πραγματοποιηθούν τώρα; Πρέπει να γίνει μια θεμελιώδης διάκριση μεταξύ των διαχειριστών κινδύνου και των αναλυτών κινδύνου. Ένας καλός διαχειριστής κινδύνου θα πρέπει να είναι έμπειρος στην λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας, και γι' αυτό το λόγο χρειάζεται να είναι καλά ενημερωμένος για τις βασικές οικονομικές αρχές στις οποίες στηρίζεται η διαμόρφωση των τιμών στις κεφαλαιαγορές. Επίσης, οι διαχειριστές κινδύνου, όπως όλοι οι διαχειριστές, θα πρέπει να λογοδοτήσουν για τις πράξεις τους. Δυστυχώς, το αντίθετο συμβαίνει συνήθως. Σε περίπτωση που μια τράπεζα αντιμετωπίζει προβλήματα λόγω κακής διαχείρισης, τότε

τα ανώτερα στελέχη και διευθυντές μπορούν να αποχωρήσουν για να ενταχθούν σε άλλη επιχείρηση - εταιρία, συχνά με εγγυημένα μόνους που φτάνουν υψηλά επίπεδα αποδοχών.

Οι αναλυτές κινδύνου χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα για να μετρήσουν τον κίνδυνο, και για να τιμολογήσουν μη ρευστά προϊόντα χρησιμοποιούν την τιμολογιακή θεωρία που αποκλείει την ύπαρξη κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο. Οι υποθέσεις που γίνονται για να εφαρμοστούν αυτά τα μοντέλα χρειάζονται συνεχή παρακολούθηση και επανεξέταση έτσι ώστε να βρεθούν ακόμη καλύτερα μοντέλα εκτίμησης. Με περισσότερη εμπιστοσύνη λοιπόν στα μοντέλα μέτρησης κινδύνου, τότε θα μπορέσει να καταπολεμηθεί κατάλληλα η επόμενη οικονομική κρίση, όταν και αν αυτή εμφανιστεί. Είναι ξεκάθαρο ότι το κλειδί για την εξέλιξη αποτελεσματικών μοντέλων κινδύνου για τα οικονομικά ιδρύματα, είναι η καλύτερη εκπαίδευση σε θέματα ποσοτικής ανάλυσης κινδύνου.

Κάθε οικονομική κρίση έχει καταστροφικές επιδράσεις στην παγκόσμια οικονομία και οι επιδράσεις αυτές με τη συνέχειά τους έχουν δυσμενές επιδράσεις στα νοικοκυριά. Μπορούμε να υποθέσουμε και να ισχυριστούμε παράλληλα ότι αυτές οι κρίσεις μπορούν να αποφευχθούν, αλλά μόνο όταν οι οικονομικοί αναλυτές και οι εκτιμητές κινδύνου αποκτήσουν τις κατάλληλες γνώσεις και τις ικανότητες που πραγματικά χρειάζονται για να ασκήσουν κατάλληλα στο επάγγελμά τους. Η πρόσφατη κρίση έδειξε ότι υπάρχει μια άμεση ανάγκη για να αναπτυχθεί και να αλλάξει ολόκληρη οικονομική βιομηχανία και πιο συγκεκριμένα το επάγγελμα του εκτιμητή κινδύνου.

Μία πολύ σημαντική αλλαγή είναι να αρχίσει η κατάλληλη εκπαίδευση των εκτιμητών σε θέματα κινδύνου, ώστε να κατανοήσουν πραγματικά τους κινδύνους στους οποίους υπόκεινται οι τράπεζες ή οι οικονομικοί οργανισμοί που εργάζονται, όσο αυτο

βέβαια είναι δυνατό. Ο κίνδυνος αποτελεί μία μαθηματική έννοια διότι είναι ένα μέτρο αβεβαιότητας και γι αυτό το λόγο οι εκτιμητές κινδύνου ή τουλάχιστον, οι απλοί αναλυτές, πρέπει να κατανοούν μαθηματικά πρώτα για να μπορέσουν στη συνέχεια να κατανοήσουν τον κίνδυνο. Υπάρχουν δύο παγκόσμιοι οικονομικοί οργανισμοί διαχειριστών κινδύνου, ο Professional Risk Managers' International Association (PRMIA) και ο Global Association of Risk Professionals (GARP) όπου παρέχουν εκπαίδευση σε θέματα διαχείρισης και εκτίμησης του κινδύνου.

1.3 Συνοπτική Παρουσίαση της εργασίας

Η εργασία αυτή έχει την ακόλουθη δομή. Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφουμε συνοπτικά την παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο όπως αυτή έχει εισαχθεί από τους Koenker και Basset (1978). Στο Κεφάλαιο 3 θα περιγράψουμε τα 4 κύρια μοντέλα CAViaR που είναι τα Adaptive, Symmetric Absolute Value, Asymmetric Slope και το Indirect GARCH(1,1). Στο Κεφάλαιο 4 θα περιγράψουμε συνοπτικά άλλα μοντέλα μέτρησης της Αξίας σε κίνδυνο και τέλος, στο Κεφάλαιο 5 θα χρησιμοποιήσουμε πραγματικές τιμές τριών μεγάλων δεικτών, όπως είναι οι Dow Jones, FTSE και ο DAX καθώς επίσης και ορισμένες από τις μετοχές του Dow Jones για να υπολογίσουμε την Αξία σε Κίνδυνο για δυο διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας (1% και το 5%).

Κεφάλαιο 2

Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο

2.1 Περιγραφή της Παλινδρόμησης με τη βοήθεια των Ποσοστημορίων

Η παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο, σύμφωνα με την εργασία των Koenker και Bassett (1978), μπορεί να θεωρηθεί ως η φυσική εξέλιξη της κλασσικής εκτίμησης των ελαχίστων τετραγώνων της πολλαπλής παλινδρόμησης, στην εκτίμηση ενός συνόλου μοντέλων με δεσμευμένες συναρτήσεις ποσοστημορίων. Μεγάλη σημασία δίνεται στην εκτίμηση της παλινδρόμησης της διαμέσου η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα των απόλυτων καταλοίπων. Οι λοιπές δεσμευμένες συναρτήσεις ποσοστημορίων υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας ένα μη συμμετρικό σταθμισμένο άθροισμα των απόλυτων καταλοίπων. Το σύνολο των συναρτήσεων εκτίμησης των ποσοστημορίων, παρέχει μια ολοκληρωμένη άποψη για την επίδραση των ανεξάρτητων μεταβλητών στα μέτρα θέσης, βαθμίδος και μορφής της κατανομής της εξαρτημένης μεταβλητής (για περισσότερα

παραπέμπουμε στην εργασία των R.Koenker and K.F.Halloch (2000)).

Στην ανάλυση της παλινδρόμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η συνάρτηση του δεσμευμένου μέσου, δηλαδή η συνάρτηση που περιγράφει κατά πόσο ο υπό συνθήκη μέσος των y μεταβάλλεται με το διάνυσμα των ανεξάρτητων μεταβλητών x , μας παρέχει (περίπου) ότι χρειάζεται να γνωρίζουμε για τη σχέση μεταξύ του y και του x . Μία σημαντική υπόθεση στην ανάλυση αυτή είναι ότι το σφάλμα της μέτρησης έχει ακριβώς την ίδια κατανομή για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x . Αναφερόμαστε στο μοντέλο αυτό, ως ένα μοντέλο καθαρής μεταβολής της μέσης τιμής, αφού υποθέτει ότι το x επιδρά μόνο στην μέση τιμή της δεσμευμένης κατανομής του y , και όχι της βαθμίδος του ή της μορφής κατανομής του. Αν αυτό πραγματικά συμβαίνει, τότε θα είμαστε πλήρως ικανοποιημένοι με ένα μοντέλο εκτίμησης της συνάρτησης του δεσμευμένου μέσου, συμπληρωμένου ίσως με έναν εκτιμητή της δεσμευμένης διασποράς του y γύρω από το μέσο.

Στην εφαρμοσμένη στατιστική έχει επικρατήσει η άποψη ότι το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης σχετίζεται με τις εκτιμήσεις των μεθόδων των ελαχίστων τετραγώνων. Οι Mosteller και Tukey το 1977 είχαν χαρακτηριστικά πεί ότι, αυτό που παράγει η καμπύλη παλινδρόμησης είναι μια καλή περίληψη των μέσων της κατανομής που αντιστοιχούν στα στοιχεία της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε παρακάτω, και να υπολογίσουμε πολλές διαφορετικές καμπύλες παλινδρόμησης που αντιστοιχούν στα διάφορα ποσοστιαία σημεία της κατανομής και άρα να πάρουμε μια πιο λεπτομερή εικόνα των δεδομένων μας. Συνήθως αυτό δεν γίνεται και γι' αυτό η παλινδρόμηση συχνά δίνει μια ατελής εικόνα των δεδομένων. Όπως ο μέσος δίνει μια ατελής εικόνα μιας κατανομής, έτσι και η καμπύλη παλινδρόμησης δίνει αντίστοιχα μια ατελής εικόνα για ένα σύνολο κατανομών.

Στο σημείο αυτό, θα εξηγήσουμε εν συντομία πως τα συνηθισμένα ποσοστημόρια, και κατά συνέπεια τα ποσοστημόρια της παλινδρόμησης, μπορούν να καθοριστούν ως η λύση της απλής ελαχιστοποίησης του σταθμισμένου αθροίσματος των απόλυτων καταλοίπων. Έστω λοιπόν, ότι ένας μαθητής πάρει βαθμό που ανήκει στο τ -ποσοστημόριο μιας τυποποιημένης εξέτασης αν αποδώσει καλύτερα από το ποσοστό τ του δείγματος των μαθητών που έχουν επιλεχθεί, και χειρότερα από το ποσοστό $(1-\tau)$. Άρα, οι μισοί μαθητές αποδίδουν καλύτερα από τον διάμεσο μαθητή και οι άλλοι μισοί χειρότερα. Ομοίως, τα τεταρτημόρια χωρίζουν τον πληθυσμό σε τέσσερα τμήματα με ίσα ποσοστά σε σχέση με τον πληθυσμό του κάθε τμήματος. Η παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο προσπαθεί και ψάχνει τρόπους για να επεκτείνει αυτές τις ιδέες για την εκτίμηση των δεσμευμένων συναρτήσεων - μοντέλων των ποσοστημορίων, κατά τα οποία τα ποσοστημόρια των δεσμευμένων κατανομών της μεταβλητής απόκρισης εκφράζοντας ως συναρτήσεις των παρατηρηθέντων ανεξάρτητων μεταβλητών. Για να επιτευχθεί όλο αυτό, θα πρέπει να βρεθεί ένας νέος τρόπος για να καθοριστούν τα ποσοστημόρια.

Τα ποσοστημόρια και οι τάξεις τους, συνήθως υπολογίζονται από τη διάταξη ή την ταξινόμηση των τιμών του πληθυσμού ή του δείγματος που εξετάζεται. Μπορούν όμως να καθοριστούν και από τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Όπως μπορούμε να καθορίσουμε τον δειγματικό μέσο ως τη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων, έτσι μπορούμε να καθορίσουμε τη διάμεσο ως τη λύση του προβλήματος της ελαχιστοποίησης των απόλυτων καταλοίπων. Τι συμβαίνει με τα άλλα ποσοστημόρια; Επεκτείνοντας την παραπάνω λογική μπορούμε να δούμε ότι για τα υπόλοιπα ποσοστημόρια θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - \xi)$$

όπου ορίζουμε την συνάρτηση $\rho_{\tau}(u) = u(\tau - I(u < 0))$, για κάποιο ποσοστημόριο $\tau \in (0, 1)$.

Έχοντας επιτύχει στον ορισμό των μη δεσμευμένων ποσοστημορίων ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι εύκολο να ορίσουμε τα δεσμευμένα ποσοστημόρια με ανάλογο τρόπο. Η παλινδρόμηση όπως εφαρμόζεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, μας δείχνει τον τρόπο που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Έστω λοιπόν ότι έχουμε τυχαίο δείγμα y_1, y_2, \dots, y_n , τότε λύνουμε την:

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$$

και παίρνουμε τον δειγματικό μέσο, έναν εκτιμητή του μη δεσμευμένου πληθυσμιακού μέσου $E(Y)$. Αν τώρα αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή μ με μία παραμετρική συνάρτηση $\mu(x, \beta)$ και λύσουμε

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu(x_i, \beta))^2$$

λαμβάνουμε μία εκτίμηση για τη δεσμευμένη αναμενόμενη συνάρτηση $E(Y|x)$.

Στην παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο εργαζόμαστε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Για να λάβουμε μια εκτίμηση της δεσμευμένης συνάρτησης της διαμέσου, απλά αντικαθιστούμε τη μεταβλητή ξ που βρίσκεται στη πρώτη σχέση που καταγράψαμε παραπάνω,

με την παραμετρική συνάρτηση $\xi(x_i, \beta)$, και θέτουμε το τ να είναι ίσο με $1/2$.

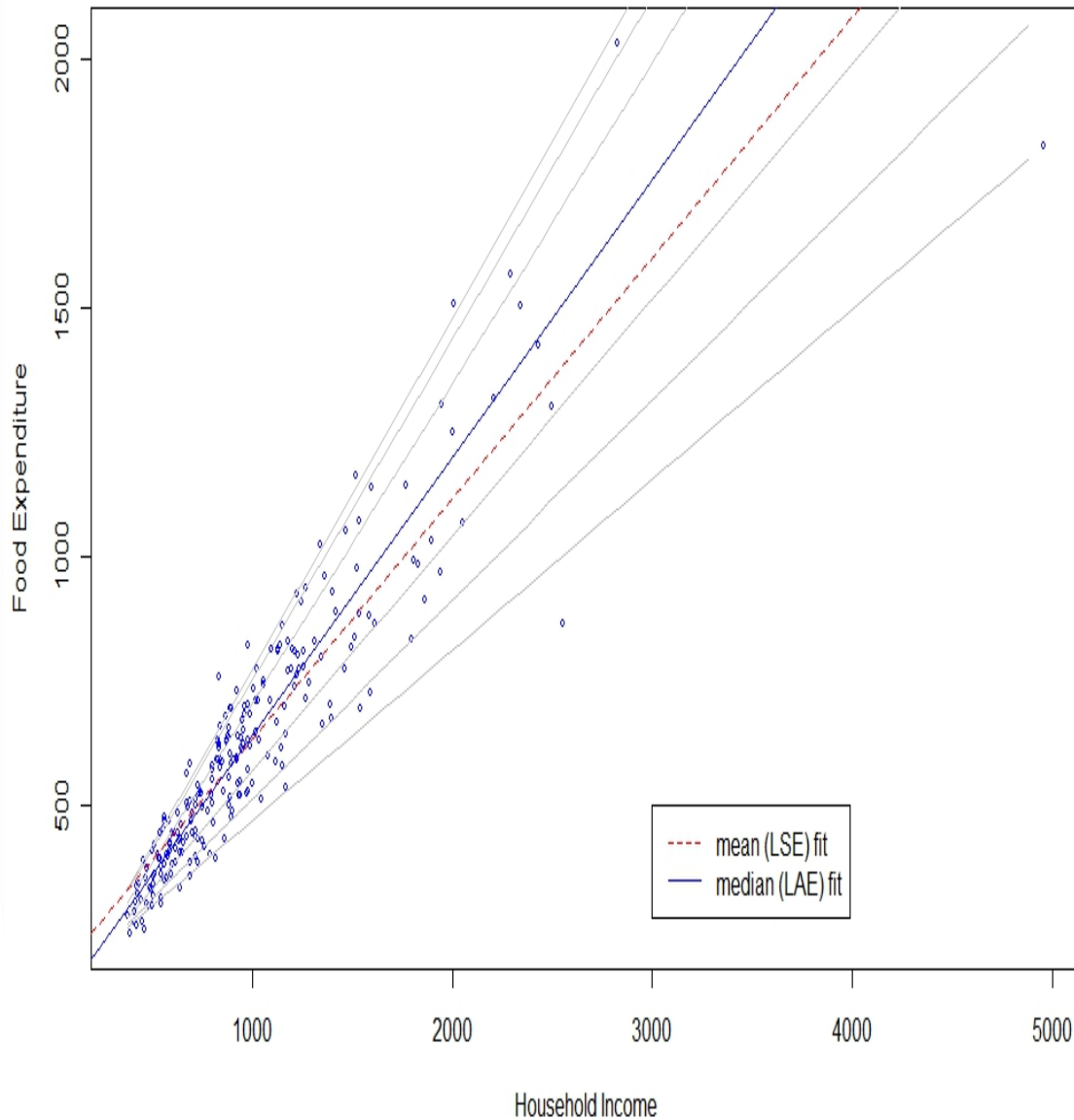
Ιδέες σαν και αυτή είχαν προταθεί στα μέσα του 18ου αιώνα από τον Boscovich και εν συνεχεία ερευνήθηκαν από τους Laplace και Edgeworth, μεταξύ άλλων. Για να λάβουμε εκτιμήσεις των άλλων σταθμισμένων συναρτήσεων ποσοστημορίων, απλά αντικαθιστούμε τις απόλυτες τιμές με τη συνάρτηση $\rho_\tau(\cdot)$ και στη σχέση του προβλήματος ελαχιστοποίησης λύνουμε

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum \rho_\tau(y_i - \xi(x_i, \beta))$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, όταν το $\xi(x, \hat{\beta}(\tau))$ διατυπωθεί ως μία γραμμική συνάρτηση των παραμέτρων, μπορεί να λυθεί πολύ αποτελεσματικά μέσω μεθόδων γραμμικού προγραμματισμού.

Θα δούμε τις βασικές ιδέες της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο, με την εφαρμογή ενός εμπειρικού παραδείγματος, χρησιμοποιώντας την ανάλυση του Engel (το 1987) που αφορά τη σχέση μεταξύ των εξόδων ενός νοικοκυριού για τρόφιμα και του εισοδήματος του νοικοκυριού. Στο γράφημα που φαίνεται στο Σχήμα 2.1, απεικονίζονται τα δεδομένα από 235 νοικοκυριών της Ευρώπης, ατόμων που ανήκουν στην εργατική τάξη. Στο γράφημα, απεικονίζονται οι εκτιμώμενες γραμμές της παλινδρόμησης ποσοστημορίων που αντιστοιχούν στα ποσοστημόρια $\tau \in (0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95)$. Η γραμμή της διαμέσου για $\tau=0.5$ υποδεικνύεται από τη διακεκομμένη γραμμή και η γραμμή της εκτίμησης των ελαχίστων τετραγώνων υποδεικνύεται από τη γραμμή με τις τελίτσες.

Το γράφημα αποκαλύπτει καθαρά την τάση της διασποράς των εσόδων του νοικοκυριού για φαγητό να αυξάνει καθώς το εισόδημα του νοικοκυριού αυξάνει. Επίσης, η απόσταση των γραμμών των παλινδρομήσεων ποσοστημορίων αποκαλύπτει ότι η δε-



Σχήμα 2.1: Γράφημα διασποράς και η προσαρμογή της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο των δεδομένων του Engel για την κατανάλωση φαγητού με βάση το εισόδημα ενός νοικοκυριού. Το δείγμα προέρχεται από 235 νοικοκυριά. Στο γράφημα απεικονίζονται με γκρι χρώμα οι γραμμές της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο (0.05, 0.1, 0.25, 0.75, 0.90, 0.95), η προσαρμογή της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο στη διάμεσο φαίνεται με σκούρα μπλέ γραμμή και τέλος, η εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων φαίνεται με την διακεκομμένη κόκκινη γραμμή.

σμευμένη κατανομή των εξόδων για φαγητό είναι λοξή προς τα αριστερά: η στενότερη απόσταση των ανώτερων ποσοστημορίων υποδεικνύει υψηλή πυκνότητα αυτών και δεξιά ουρά, ενώ η πιο πλατιά απόσταση των χαμηλών ποσοστημορίων υποδεικνύει χαμηλή πυκνότητα αυτών και μακριά αριστερή ουρά.

Η προσαρμογή του δεσμευμένου μέσου και της διαμέσου είναι αρκετά διαφορετική σ' αυτό το παράδειγμα, γεγονός που μπορεί να εξηγηθεί μερικώς από την ασυμμετρία της δεσμευμένης πυκνότητας και μερικώς από την έντονη επίδραση που ασκήθηκε από την προσαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων από τα δυο ακραία σημεία με υψηλό εισόδημα και χαμηλά έξοδα για φαγητό. Συμπερασματικά λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι η προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων παρέχει μία φτωχή εκτίμηση του δεσμευμένου μέσου για τα πιο φτωχά νοικοκυριά του δείγματος.

Έχει παρατηρηθεί περιστασιακά το εσφαλμένο εγχείρημα να επιτευχθεί παλινδρόμηση ανάλογη της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο όταν συμπύξουμε την εξαρτημένη μεταβλητή σε υποσύνολα σύμφωνα με την κατανομή τους, και εφαρμόσουμε έπειτα τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σε αυτά τα υποσύνολα. Είναι προφανές, ότι αυτή η μορφή μετατροπής της εξαρτημένης μεταβλητής θα παράγει φτωχά αποτελέσματα στο παράδειγμα που αναφέραμε παραπάνω. Γενικά, τέτοιες στρατηγικές είναι καταδικασμένες να αποτύχουν για πάρα πολλούς λόγους, όπως αυτοί αναλύθηκαν λεπτομερώς από τον Hackman (1979). Είναι συνεπώς άξιο να αναφερθεί ότι ακόμα και για τα ακραία ποσοστημόρια, όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία εφαρμογής της παλινδρόμησης με τη βοήθεια των ποσοστημορίων. Κάθε παλινδρόμηση που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1 καθορίζεται μόνο από ένα ζεύγος από τις παρατηρήσεις του δείγματος, αλλά όλες οι n παρατηρήσεις χρειάζονται για να καθοριστεί ποιο ζεύγος παρατηρήσεων θα επιλεγεί. Με p παραμέτρους που αναμένεται

να εκτιμηθούν, τότε p σημεία καθορίζουν την προσαρμογή.

Αντίθετα, συμπύσσοντας (ή τμηματοποιώντας) το δείγμα σε υποσύνολα που καθορίζονται σύμφωνα με τις επεξηγηματικές μεταβλητές που το απαρτίζουν, τότε αυτή η ενέργεια αποτελεί μια αξιόπιστη επιλογή. Πράγματι, τέτοιου είδους εφαρμογές μπορεί κάποιος να συναντήσει στις μη παραμετρικές εφαρμογές της παλινδρόμησης στα ποσοστημόρια. Στις πιο ακραίες περιπτώσεις, έχουμε p κελιά που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ρυθμίσεις του διανύσματος της ανεξάρτητης μεταβλητής x , πράγμα που σημαίνει πως η παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο απλά υπολογίζει τα μονομεταβλητά ποσοστημόρια για κάθε ένα από αυτά τα κελιά. Σε μεσαίες περιπτώσεις, μπορεί να είναι καλύτερο να προβάλλουμε τις εκτιμήσεις των κελιών αυτών πάνω σε ένα πιο γραμμικό μοντέλο (παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων αποσχόλησαν τους Chamberlain(1994) και Knight, Basset, Tam (2000)).

Μια άλλη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί η εξής: αντί να εκτιμηθούν γραμμικά τα μοντέλα ποσοστημορίων, θα μπορούσε να εκτιμηθεί μια οικογένεια δίτιμων μοντέλων απόκρισης για την πιθανότητα ότι η εξαρτημένη μεταβλητή να υπερβεί κάποια προκαθορισμένα όρια. Αυτή η προσέγγιση αντικαθιστά την υπόθεση της γραμμικότητας των παραμέτρων των δεσμευμένων συναρτήσεων ποσοστημορίων με την υπόθεση ότι κάποιος μετασχηματισμός των διαφόρων πιθανοτήτων που υπερβαίνουν κάποια προκαθορισμένα όρια, όπως για παράδειγμα ο λογαριθμικός μετασχηματισμός, μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμική συνάρτηση στις παρατηρηθείσες μεταβλητές.

2.2 Ποσοστημότητα, Τάξεις και Βελτιστοποίηση

Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφούν κάποια βασικά στοιχεία που αφορούν και συμβάλλουν στην εφαρμογή της παλινδρόμησης στα ποσοστημότητα. Πιο συγκεκριμένα, έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

όπου για κάθε $0 < \tau < 1$

$$Q_y(\tau) = F^{-1}(\tau) = \inf(x : F(x) \geq \tau)$$

καλείται το τ -οστό ποσοστημότητα της X . Η διάμεσος $F^{-1}(1/2)$ παίζει κεντρικό ρόλο στη περαιτέρω ανάλυση. Τα ποσοστημότητα μπορούν να προκύψουν από τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Έστω ότι η απώλεια περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$$

για κάποιο $\tau \in (0, 1)$, τότε ζητείται το u που ελαχιστοποιεί τη ζημιά. Αυτή είναι μια κλασική άσκηση (βλέπε π.χ. Ferguson (1967)). Οι Fox και Rubin (1964), οι οποίοι μελέτησαν την ορθότητα της εκτίμησης του ποσοστημότητας υπό αυτή τη συνάρτηση ζημιάς. Ψάχνουμε λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε τη

$$E\rho_\tau(X - \hat{x}) = (\tau - 1) \int_{-\infty}^{\hat{x}} (x - \hat{x})dF(x) + \tau \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - \hat{x})dF(x)$$

Παραγωγίζοντας ως προς \hat{x} , έχουμε ότι

$$(\tau - 1) \int_{-\infty}^{\hat{x}} dF(x) - \tau \int_{\hat{x}}^{\infty} dF(x) = 0 \Rightarrow F(\hat{x}) - \tau = 0 \Rightarrow F(\hat{x}) = \tau$$

Αφού η F είναι μονότονη, οποιοδήποτε στοιχείο του $\{x : F(x) = \tau\}$ ελαχιστοποιεί την αναμενόμενη απώλεια. Όταν έχουμε μοναδική λύση, τότε $\hat{x} = F^{-1}(\tau)$, διαφορετικά έχουμε ένα διάστημα τ-ποσοστημορίων από τα οποία το μικρότερο στοιχείο πρέπει να επιλεγθεί για να τηρήσουν την υπόθεση ότι η εμπειρική συνάρτηση των ποσοστημορίων είναι συνεχής από αριστερά.

Όταν η συνάρτηση κατανομής F αντικαθιστάται από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής

$$F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$$

επιλέγουμε το \hat{x} για την ελαχιστοποίηση της αναμενόμενης ζημιάς:

$$\int \rho_\tau(x - \hat{x}) dF_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(x_i - \hat{x})$$

και έτσι θα παράγουμε το τ-οστό δειγματικό ποσοστημόριο.

Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί η παραπάνω διαδικασία αρκεί να δώσουμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε την διακριτή τυχαία μεταβλητή Y που παίρνει τις τιμές 1,2,...,9 με την ίδια πιθανότητα και θέλουμε να βρούμε την διάμεσο της Y . Υποθέτουμε επίσης, $\tau = 0.5$ και $u=3$. Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω τύπο, θα έχουμε ότι η αναμενόμενη απώλεια υπολογίζεται από

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Αποτέλεσμα	36	29	24	21	20	21	24	29	36

$$\frac{\tau - 1}{9} \sum_{y_i < u} (y_i - u) + \frac{\tau}{9} \sum_{y_i \geq u} (y_i - u)$$

Πραγματοποιώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα (επειδή το $\tau/9$ είναι μια σταθερά, μπορεί να παραληφθεί από την παραπάνω αναμενόμενη συνάρτηση απώλειας)

$$\sum_{i=1}^2 -(i - 3) + \sum_{i=3}^9 (i - 3) = [(2 + 1) + (0 + 1 + 2 + \dots + 6)] = 24$$

Αν αυξήσουμε τώρα το u κατά μία μονάδα, το αποτέλεσμα της παραπάνω εξίσωσης θα μειωθεί κατά 3 μονάδες. Στη περίπτωση όμως που αυξήσουμε το u κατά δύο μονάδες, δηλαδή για $u = 5$, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι $\sum_{i=1}^4 -(i - 5) + \sum_{i=5}^9 (i - 5) = 20$. Αφού υπολογίσουμε την εξίσωση για όλες τις διακριτές τιμές της τυχαίας μεταβλητής Y καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $u = 5$ είναι η διάμεσος. Ο παραπάνω πίνακας παρουσιάζει για κάθε τιμή της u το αποτέλεσμα της εξίσωσης.

Με τον τρόπο αυτό εκφράσαμε το πρόβλημα της εύρεσης του δειγματικού ποσοστημορίου, που φαίνεται ότι είναι συνδεδεμένο με την έννοια της διατάξης των παρατηρήσεων του δείγματος ως τη λύση ενός απλού προβλήματος βελτιστοποίησης ή πιο συγκεκριμένα ελαχιστοποίησης. Στην πραγματικότητα έχουμε αντικαταστήσει την διαδικασία ταξινόμησης μέσω της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

Το πρόβλημα της εύρεσης του τ -οστού ποσοστημορίου, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - \xi)$$

και μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού εισάγωντας $2n$ βοηθητικές μεταβλητές $\{u_i, v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ οι οποίες αντιπροσωπεύουν το θετικό και αρνητικό μέρος των καταλοίπων. Αυτό παράγει ένα νέο πρόβλημα:

$$\min_{(\xi, u, v) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}_+^{2n}} \left[\tau \mathbf{1}'_n u + (1 - \tau) \mathbf{1}'_n v \mid \mathbf{1}'_n \xi + u - v = y \right]$$

όπου $\mathbf{1}_n$ αποτελεί ένα n -διάστατο διάνυσμα που έχει παντού μονάδες.

Η βελτιστοποίηση επιτυγχάνεται στο σημείο $(\hat{\xi})$, αν η συνάρτηση

$$R(\xi) = \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - \xi)$$

είναι μία αύξουσα συνάρτηση καθώς κινείται είτε από αριστερά είτε από δεξιά του $\hat{\xi}$. Αυτό απαιτεί τόσο η αριστερή όσο και η δεξιά παράγωγος, να είναι και οι δύο μη αρνητικές στο σημείο $\hat{\xi}$. Άρα,

$$R'(\xi, +1) = \lim_{h \rightarrow 0} (R(\xi + h) - R(\xi))/h = \sum_{i=1}^n (I(y_i < \xi + h) - \tau)$$

και

$$R'(\xi, -1) = \lim_{h \rightarrow 0} (R(\xi - h) - R(\xi))/h = \sum_{i=1}^n (\tau - I(y_i < \xi - h))$$

πρέπει και οι δύο να είναι μη αρνητικές, και άρα το μ ανήκει στο διάστημα (N^-, N^+) , όπου το N^+ είναι ο αριθμός των y_i που είναι μικρότερος ή ίσος του ξ και ο N^- είναι ο αριθμός των y_i που είναι αυστηρά μικρότερος του ξ . Όπου μ δεν είναι ακέραιος, υπάρχει μία μοναδική τιμή του ξ η οποία ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Αποκλείοντας δεσμούς στα στοιχεία του y_i , η τιμή που αναφέραμε προηγουμένως αντιστοιχεί σε μια μοναδική διατεταγμένη στατιστική. Όταν υπάρχουν δεσμοί, το ξ είναι ακόμη μοναδικό, αλλά μπορούν να είναι πολλά y_i ίσα με το ξ . Αν το μ είναι ακέραιος αριθμός, τότε το $\hat{\xi}_\tau$ βρίσκεται μεταξύ δυο γειτονικών διατεταγμένων στατιστικών. Είναι μοναδικό μόνο όταν οι διατεταγμένες στατιστικές ενώνονται με μία μοναδική τιμή. Συνήθως μπορούμε να απορρίψουμε την παρουσία τέτοιων δεσμών με πιθανότητα μηδέν.

2.3 Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο

Τα ποσοστημόρια εκφράζονται λοιπόν ως η λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης και συνεπώς με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να προβούμε στην εκτίμηση μοντέλου συναρτήσεων με δεσμευμένα ποσοστημόρια. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων προσφέρει ένα πρότυπο για την εξέλιξη αυτή. Γνωρίζοντας λοιπόν ότι ο δειγματικός μέσος λύνει το πρόβλημα

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \quad (2.1)$$

τότε, αν θέλουμε να εκφράσουμε τον δεσμευμένο μέσο του y δοθέντος του x ως $\mu(x) = x^T \beta$, τότε το β μπορεί να εκτιμηθεί λύνοντας την

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n (y_i - x^T \beta)^2 \quad (2.2)$$

Ομοίως, δεδομένου ότι το τ-οστό ποσοστημόριο $\hat{\alpha}(\tau)$ λύνει την

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - \alpha) \quad (2.3)$$

οδηγούμαστε στο να καθορίσουμε τη συνάρτηση του τ-οστού δεσμευμένου ποσοστημορίου ως την $Q_y(\tau|x) = x^T \beta(\tau)$ και στον καθορισμό του $\hat{\beta}(\tau)$ μέσω της

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - x^T \beta) \quad (2.4)$$

ακολουθώντας την εργασία των Koenker και Basset (1978).

Το πρόβλημα της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο που εκφράζει η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού,

$$\min_{(\beta, u, v) \in \mathbb{R}^p * \mathbb{R}_+^{2n}} \left[\tau \mathbf{1}_n^T u + (1 - \tau) \mathbf{1}_n^T v \mid X\beta + u - v = y \right]$$

όπου το X υποδηλώνει μια $n \times p$ μήτρα.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επεξηγήσουμε πως λειτουργούν τα ποσοστημόρια της παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας το παράδειγμα και τα δεδομένα του Boscovich που μελέτησε την ελλειπτικότητα της γης στα μέσα του 18ου αιώνα. Στο Σχήμα 2.2 φαίνονται οι λύσεις των παλινδρομήσεων στο ποσοστημόριο γι' αυτά τα δεδομένα. Λύνοντας την εξίσωση 2.4. για οποιοδήποτε τ του διαστήματος $(0, 0.21)$ δίνει ως μοναδική λύση τη γραμμή που περνά από τις πόλεις Κίτο και Ρώμη. Για $\tau=0.21$, η

λύση παρουσιάζει ένα άλμα, και για όλο το διάστημα $(0.21, 0.48)$ έχουμε την λύση που χαρακτηρίζεται από την γραμμή που περνά από τις πόλεις Κίτο και Παρίσι. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο $\tau=0.78$, όπου η λύση της γραμμής που περνά από την πόλη της Λαπωνίας και το Ακρωτήρι της Καλής Ελπίδας επικρατεί μέχρι $\tau=1$.

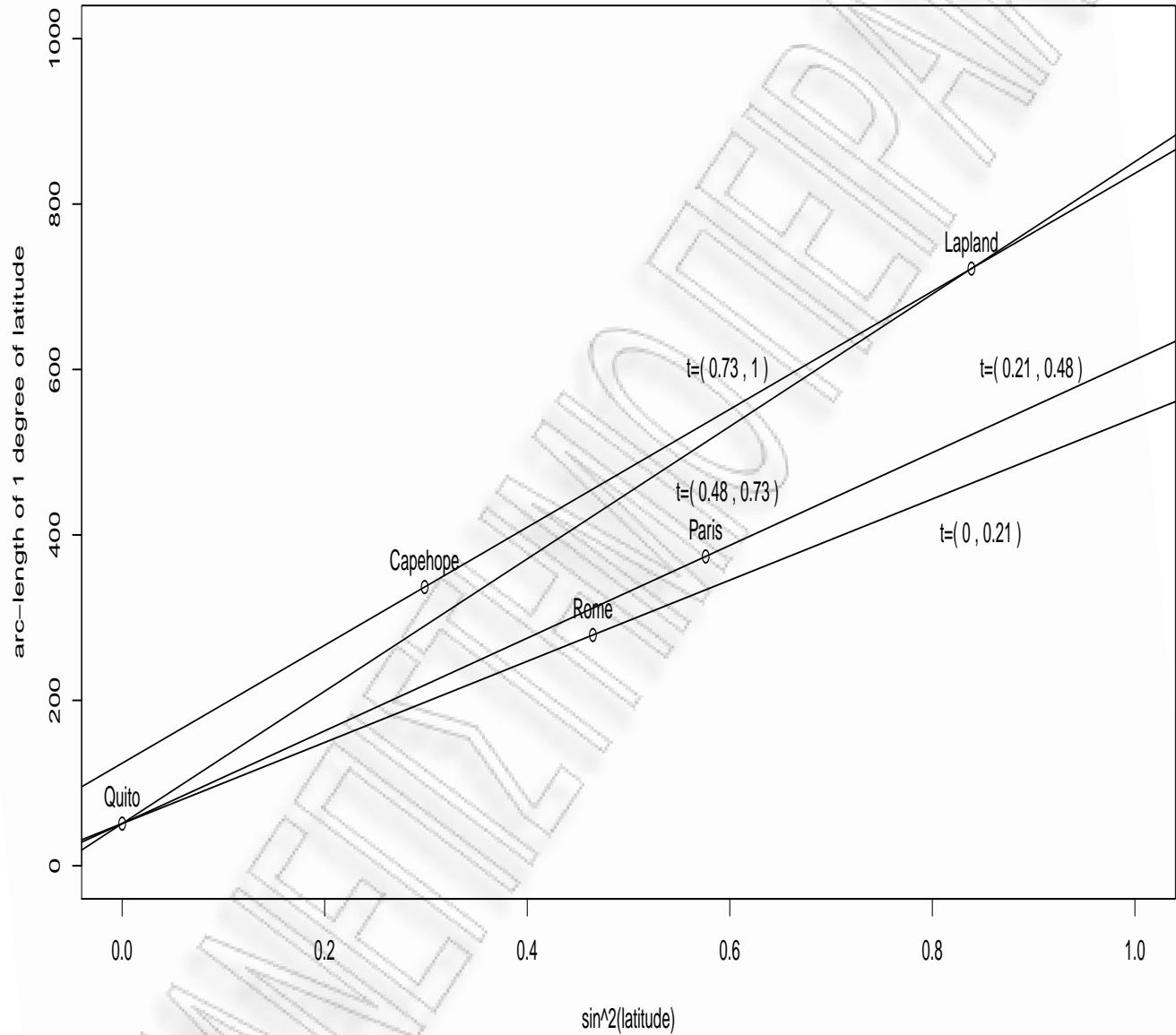
Σε αντίθεση με τα συνηθισμένα δειγματικά ποσοστημόρια τα οποία ισαπέχουν στο διάστημα $[0,1]$ με την κάθε ξεχωριστή διατεταγμένη στατιστική να καταλαμβάνει ένα διάστημα μήκους ακριβώς $1/n$, τα μήκη των διαστημάτων των λύσεων της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο για $\tau \in (0,1)$ εξαρτώνται από τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Τα ζεύγη των σημείων χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθούν οι γραμμικές συναρτήσεις των δεσμευμένων ποσοστημορίων.

Μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι οι εκτιμητές της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο πρέπει να αγνοούν τις πληροφορίες του δείγματος αφού εκείνες μπορούν να καθοριστούν από ένα μικρό υποσύνολο των παρατηρήσεων. Η άποψη αυτή παραβλέπει το προφανές γεγονός ότι όλες οι παρατηρήσεις συμμετέχουν στην εκτίμηση, στην οποία όμως επιλέγονται κάποιες βασικές παρατηρήσεις οι οποίες ασκούν περισσότερη βαρύτητα στο αποτέλεσμα.

Παρατηρούμε ότι η παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο έχει διατηρήσει μια σημαντική πτυχή των συνηθισμένων δειγματικών ποσοστημορίων η οποία είναι η εξής: μπορούμε να μεταβάλλουμε το διατεταγμένο δείγμα επάνω (ή κάτω) κατά τέτοιο τρόπο ώστε η θέση της διάμεσου να παραμείνει αμετάβλητη. Ομοίως, για παράδειγμα, να θέλαμε να αλλάξουμε τη θέση της Λαπωνίας προς τα επάνω, αυτό δεν θα επηρέαζε τις λύσεις που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.2 για οποιοδήποτε τ στο διάστημα $(0, 0.48)$.

Περισσότερα για την παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο μπορεί κανείς να μελετήσει την δουλειά των Koenker, R., Kevin F. Hallock και G. Bassett αναφορές των οποίων

Boscovitch Ellipticity of the Earth Example



Σχήμα 2.2: Ποσοστημόρια παλινδρόμησης για το παράδειγμα του Boscovitch . Μόνο τέσσερα από τα δέκα ζεύγη σημείων παρουσιάζουν λύσεις για την παλινδρόμηση στο ποσοστημόριο. Τα υποδιαστήματα απο (0,1) για τα οποία κάθε ένα από τα ζεύγη λύνει την εξίσωση 2.4 παρουσιάζονται στο σχήμα αυτό.

υπάρχουν στην βιβλιογραφία της εργασίας αυτής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση του μοντέλου CAViaR

3.1 Εισαγωγή Μοντέλου

Η σημαντικότητα ενός αποτελεσματικού μοντέλου εκτίμησης κινδύνου ποτέ δεν ήταν πιο μεγάλη. Οι πρόσφατες οικονομικές καταστροφές έχουν τονίσει τις απαιτήσεις για ακριβή μέτρα κινδύνου για τις οικονομικές οντότητες. Καθώς η φύση των κινδύνων έχει αλλάξει κατά καιρούς, οι μέθοδοι μέτρησης τους πρέπει να προσαρμοστούν στα σημερινά δεδομένα. Η χρήση των ποσοτικών μέτρων κινδύνου έχει γίνει ένα σημαντικό εργαλείο της διοίκησης των επιχειρήσεων. Αυτά τα μέτρα χρησιμοποιούνται για επενδυτικές αποφάσεις, αποφάσεις επίβλεψης, παρακολούθησης και μεταφορά του κεφαλαίου που εμπεριέχει κάποιο κίνδυνο. Στο συνεχώς εξελισσόμενο οικονομικό κόσμο, τα αποτελεσματικά μέτρα κινδύνου πρέπει να είναι πάρα πολύ ευαίσθητα ώστε να βγάζουν αντικειμενικές προβλέψεις και πρέπει να είναι εύκολο να εφαρμοστούν ακόμη και σε δύσκολες συνθήκες αγοράς.

Η Αξία σε Κίνδυνο έχει γίνει ένα συνηθισμένο μέτρο του κινδύνου της αγοράς και

εφαρμόζεται απο οικονομικά ιδρύματα. Η αξία σε κίνδυνο είναι μία εκτίμηση του πόσο μπορεί να χάσει ένα χαρτοφυλάκιο μέσα σε μία χρονική περίοδο, για ένα δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας ($\alpha=0.05$ ή 0.01). Η μεγάλη χρήση που έχει επιτύχει αυτό το μοντέλο οφείλεται κυρίως στο ότι η αξία σε κίνδυνο μειώνει τον κίνδυνο (αγοράς) που σχετίζεται με οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο στο ποσό της ζημιάς. Το σύνολο πολλών πολύπλοκων άσχημων αποτελεσμάτων σε μια τιμή, φυσικά αντιπροσωπεύει έναν κίνδυνο μεταξύ των αναγκών των διάφορων χρηστών του μοντέλου.

Παρόλη την απλότητα του, η μέτρηση της αξίας σε κίνδυνο είναι ένα απαιτητικό στατιστικό πρόβλημα και καμία απο τις μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Από τη στιγμή που η αξία σε κίνδυνο είναι απλά ένα συγκεκριμένο ποσοστημόριο των μελλοντικών τιμών του χαρτοφυλακίου, βασισμένο σε τωρινές πληροφορίες, και από τη στιγμή που η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου αλλάζει τυπικά στο χρόνο, το πρόβλημα είναι στο να βρεθεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για τον μεταβαλλόμενο χρόνο των υπό συνθήκη ποσοστημορίων. Το πρόβλημα είναι να προβλεφθεί η τιμή για κάθε περίοδο η οποία θα υπερβαίνει με πιθανότητα $(1-\theta)$ στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, όπου το $\theta \in (0, 1)$ και αντιπροσωπεύει το επίπεδο σημαντικότητας που σχετίζεται με την αξία σε κίνδυνο. Έστω $(y_t)_{t=1}^T$ ότι αποτελεί μια χρονοσειρά αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου και T είναι το μέγεθος του δείγματος. Θέλουμε να βρούμε την αξία σε κίνδυνο τη χρονική στιγμή t έτσι ώστε: $Pr(y_t < VaR_t | F_t) = \theta$, π.χ. $VaR_t = -5\%$, όπου F_t είναι η πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο τέλος του χρόνου t . Οποιαδήποτε λογική μεθοδολογία θα πρέπει να λύνει τα ακόλουθα τρία θέματα:

- να παρέχει έναν μαθηματικό τύπο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο τη χρονική στιγμή t ως μια συνάρτηση μεταβλητών που γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή $t-1$

και ένα σύνολο παραμέτρων που πρέπει να υπολογιστούν,

- να παρέχει μια διαδικασία για να εκτιμήσει το σύνολο των αγνώστων παραμέτρων, και
- να παρέχει έναν έλεγχο για την ποιότητα της εκτίμησης.

Σε αυτή τη διπλωματική απευθυνόμαστε και στα τρία παραπάνω θέματα και χρησιμοποιούμε το μοντέλο CAViaR: Conditional Autoregressive VaR δηλαδή την Υπό Συνθήκη Αυτοπαλινδρομη Αξία σε Κίνδυνο, η οποία προτάθηκε απο τους Engle και Manganeli (1999), χρησιμοποιώντας την Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο, όπως αυτή προτάθηκε απο τους Koenker και Bassett (1978). Επίσης, χρησιμοποιούμε ένα νέο έλεγχο, το Dynamic Quantile (DQ) test, το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα συνολικός έλεγχος καλής προσαρμογής για την εκτιμώμενη CAViaR διαδικασία (Chernozhukov (1999)).

3.2 Μοντέλα Αξίας σε Κίνδυνο

Η Αξία σε Κίνδυνο ή Δυνητική Ζημιά, όπως αναφέραμε προηγουμένως, αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1990 στην οικονομική βιομηχανία για να παρέχει στην διοίκηση έναν αριθμό (εκτίμηση), όπου εύκολα και γρήγορα θα μπορούσε να περιλαμβάνει πληροφορία σχετικά με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Σήμερα είναι μέρος της εργαλειοθήκης του κάθε διοικητή κινδύνου. Πράγματι, η Αξία σε Κίνδυνο μπορεί να βοηθήσει την διοίκηση να εκτιμήσει το κόστος της οικονομικής θέσης της σε όρους κινδύνου, επιτρέποντάς τους να διαχειριστούν τον κίνδυνο με έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο. Επίσης, η επιτροπή της Βασιλείας για στην επίβλεψη των τραπεζών

(1996) χρησιμοποιεί την Αξία σε Κίνδυνο για να απαιτήσει από τα οικονομικά ιδρύματα, όπως είναι οι τράπεζες και οι εταιρίες επενδύσεων, να διακρατούν κατάλληλα επίπεδα κεφαλαίου για να καλύψουν τους κινδύνους που προέρχονται από την αγορά, που προκύπτουν από την λειτουργία τους. Ωστόσο, αν ο υποκείμενος κίνδυνος δεν έχει εκτιμηθεί σωστά, αυτές οι απαιτήσεις μπορούν να οδηγήσουν τα οικονομικά ιδρύματα στην υπερεκτίμηση (ή υποτιμής) του κινδύνου της αγοράς, και γι' αυτό πρέπει να διακρατούν υπερβολικά υψηλά (ή χαμηλά) επίπεδα κεφαλαίων. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας αναποτελεσματικής διαχείρισης του κεφαλαίου μπορεί εν τέλει να οδηγήσει τις εταιρίες σε δραστηριότητες με λιγότερο απαγορευτικές οικονομικές ρυθμίσεις.

Τα ήδη υπάρχοντα μοντέλα υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο διαφέρουν σε πολλά σημεία. Παρόλα αυτά, όλα ακολουθούν μια κοινή δομή, που μπορεί να γραφεί εν συντομία χρησιμοποιώντας τα παρακάτω τρία σημεία:

- Το χαρτοφυλάκιο προσαρμόζεται με βάση τις τιμές των χρεογράφων όπως αυτές αποτιμώνται στην αγορά.
- Εκτιμάται η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.
- Εκτιμάται η Αξία σε Κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Οι βασικές διαφορές των μοντέλων μέτρησης Αξίας σε Κίνδυνο σχετίζονται με το δεύτερο σημείο. Οι μεθοδολογίες της Αξίας σε Κίνδυνο μπορούν να κατηγοριοποιηθούν αρχικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1. Μοντέλα παραγόντων όπως εκείνα των RiskMetrics (1996).
2. Μοντέλα χαρτοφυλακίων όπως εκείνα της Ιστορικής Προσομοίωσης.

Η Αξία σε Κίνδυνο υποθέτουμε ότι είναι ανάλογη με την υπολογισμένη τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου, όπου συχνά υποθέτουμε ότι τα στοιχεία που το απαρτίζουν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα μοντέλα χαρτοφυλακίου κατασκευάζουν ιστορικές αποδόσεις οι οποίες μιμούνται τις παλιές αποδόσεις του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Από αυτές τις ιστορικές αποδόσεις, η τρέχουσα Αξία σε Κίνδυνο υπολογίζεται για κάθε χρονική στιγμή βασισμένη σε ένα στατιστικό μοντέλο. Άρα, αλλαγές του κινδύνου ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου σχετίζονται με την ιστορική εμπειρία που μπορεί να αποκομιστεί από την πορεία της αξίας του ίδιου του χαρτοφυλακίου. Παρόλο που μπορεί να υπάρχουν προβλήματα στην κατασκευή των ιστορικών αποδόσεων, μια σημαντική ερώτηση για το μοντέλο είναι πώς θα προβλέψουμε τα ποσοστημόρια. Πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις έχουν εφαρμοστεί. Μερικοί πρώτα υπολόγισαν την μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου μέσω μοντέλων GARCH ή Εκθετικής Εξομάλυνσης (Exponential Smoothing) και μετά υπολόγισαν την Αξία σε Κίνδυνο από αυτά, υποθέτοντας συχνά κανονικότητα. Μια δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιεί την Ιστορική Προσομοίωση υπό την υπόθεση ότι οποιαδήποτε απόδοση σε μια συγκεκριμένη περίοδο έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί. Άλλοι, χρησιμοποίησαν την μεθοδολογία της Θεωρίας Ακραίων Τιμών στην εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο.

Η προσέγγιση της μεταβλητότητας υποθέτει ότι οι υπερβολικά αρνητικές αποδόσεις ακολουθούν την ίδια διαδικασία όπως και οι άλλες αποδόσεις, και ότι η κατανομή τους που χωρίζεται μέσω τυπικών αποκλίσεων, θα είναι ανεξάρτητη και ισόνομη, αν όχι κανονική. Η μέθοδος των κυλιόμενων ποσοστημορίων υποθέτει ότι, για δεδομένο χρονικό διάστημα, π.χ. ενός χρόνου, όλες οι αποδόσεις έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, αλλά μια απόδοση σε χρονικό διάστημα προγενέστερο του ενός έτους έχει μηδενική πιθανότητα να συμβεί. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η Αξία σε Κίνδυνο

ενός χαρτοφυλακίου θα πέσει δραματικά ακριβώς ένα χρόνο μετά απο μία άσχημη ημέρα κατά την οποία σημειώθηκε εξαιρετικά μικρή απόδοση, π.χ -10% ή -8%. Επίσης, αυτή η μεθοδολογία υπονοεί ότι η κατανομή των αποδόσεων δεν μεταβάλλεται στο χρόνο, τουλάχιστον στην περίοδο ενός έτους, διότι αλλιώς θα χρειαζόταν να ληφθεί υπόψη στο μοντέλο κυλιόμενων ποσοστημορίων περίοδος μεγαλύτερη του έτους. Μια σημαντική παραλλαγή της Ιστορικής Προσομοίωσης είναι η υβριδική προσέγγιση που παρουσιάστηκε απο τους Boudoukh, Richardson και Whitelaw (1998) που συνδυάζει μεταβλητότητα και ιστορική προσομοίωση, εφαρμόζοντας εκθετικά μειούμενα βάρη σε παρελθοντικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, τόσο η επιλογή των παραμέτρων όσο και της διαδικασίας υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο φαίνεται να βασίζεται σε εμπειρική τεκμηρίωση παρά σε στατιστική θεωρία.

Εφαρμογές εκτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο με τη θεωρία των Ακραίων Τιμών έχουν προταθεί πρόσφατα (π.χ. Danielson και de Vries (2000)). Η προσπάθεια εδώ είναι να παραχθούν αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την στατιστική θεωρία ακραίων τιμών, και δίνεται έμφαση στην ασυμπτωτική μορφή της ουράς της κατανομής, και όχι στη μοντελοποίηση όλης της κατανομής των αποδόσεων. Υπάρχουν δύο προβλήματα σε αυτήν την προσέγγιση. Πρώτον, ότι λειτουργεί για χαμηλά ποσοστημόρια. Όπως αποδείχθηκε απο τους Danielson και de Vries (2000) , η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ φτωχή σε επίπεδα σημαντικότητας (όπως είναι το 5%), διότι δεν είναι αρκετά ακραία. Δεύτερον, και πιο σημαντικό, αυτά τα μοντέλα υποθέτουν ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, γεγονός το οποίο δεν είναι συνεπές με τα χαρακτηριστικά των περισσοτέρων δεδομένων των χρεογράφων, και συνεπώς, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί να μην διαφέρει με βάση το σύνολο της πληροφορίας που εξετάζεται κάθε φορά. Πρόσφατα, οι McNeil και Frey (2000) πρότειναν την προσαρμογή ενός μοντέλου GARCH

στα δεδομένα των αποδόσεων και στη συνέχεια την εφαρμογή της Θεωρίας Ακραίων Τιμών για τα τυποποιημένα κατάλοιπα, τα οποία υποθέτουμε ότι είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

3.3 Μοντέλο CAViaR

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε μια άλλη προσέγγιση για την εκτίμηση των ποσοστημορίων. Αντί να μοντελοποιήσουμε ολόκληρη την κατανομή, θα μοντελοποιήσουμε κατ' ευθείαν το ποσοστημόριο. Το γεγονός ότι παρατηρείται ομαδοποίηση στη μεταβλητότητα των αποδόσεων των χρεογράφων μπορεί να μεταφραστεί ότι πιθανόν να υπάρχει αυτοσυσχέτιση και στα χαρακτηριστικά της κατανομής τους. Συνεπώς, η Αξία σε Κίνδυνο, η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με την τυπική απόκλιση της κατανομής, πρέπει να παρουσιάσει μια παρόμοια συμπεριφορά. Ένας φυσικός τρόπος να μοντελοποιήσουμε αυτό το χαρακτηριστικό είναι να χρησιμοποιήσουμε κάποιον τύπο αυτοσυσχέτισης. Προτείνεται συνεπώς, η Υπό Συνθήκη Αυτοπαλίνδρομη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Autoregressive Value at Risk).

Έστω ότι παρατηρούμε ένα διάνυσμα αποδόσεων χαρτοφυλακίου $y_t, t = 1, \dots, T$. Έστω θ η πιθανότητα που σχετίζεται με την Αξία σε Κίνδυνο, και x_t ένα διάνυσμα την χρονική στιγμή t εξωγενών μεταβλητών και β_θ ένα p -διάστατο διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων. Τέλος, έστω ότι το $f_t(\beta) \equiv f(x_{t-1}, \beta_\theta)$ υποδηλώνει τη χρονική στιγμή t το θ -ποσοστημόριο της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που παρουσιάστηκαν τη χρονική στιγμή $t-1$. Η γενική περιγραφή ενός CAViaR μοντέλου είναι η ακόλουθη:

$$f_t(\beta) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^q \gamma_i f_{t-i}(\beta) + \sum_{i=1}^p \alpha_i l(x_{t-i}, \phi)$$

όπου $\beta' = (\alpha', \gamma', \phi')$ και l είναι μία συνάρτηση πεπερασμένου αριθμού υστερήσεων των παρατηρηθέντων τιμών. Οι όροι αυτοσυσχέτισης $\gamma_i f_{t-i}(\beta)$, $i=1,2,\dots,q$ εξασφαλίζουν ότι το ποσοστημόριο μεταβάλλεται ομαλά στον χρόνο. Ο ρόλος του $l(x_{t-i}, \phi)$ είναι να συνδέσει το $f_t(\beta)$ με τις εξωγενείς μεταβλητές που ανήκουν στο σύνολο της πληροφορίας που έχουμε. Άρα, αυτός ο όρος έχει τον ίδιο ρόλο όπως έχει η καμπύλη επίδρασης της νέας πληροφορίας (News Impact Curve) για τα μοντέλα GARCH που εισήχθησαν από τους Engle και Ng (1993). Μια φυσική επιλογή για το x_{t-1} είναι οι αποδόσεις με παράγοντα υστέρησης. Πράγματι, περιμένουμε η Αξία σε Κίνδυνο να αυξάνει καθώς το y_{t-1} γίνεται πολύ αρνητικό, καθώς μία άσχημη ημέρα αυξάνει την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί άσχημη ημέρα την αμέσως επόμενη. Επίσης, οι πολύ καλές μέρες μπορούν να αυξήσουν την Αξία σε Κίνδυνο, καθώς αυξάνει η μεταβλητότητα. Συνεπώς η Αξία σε Κίνδυνο εξαρτάται συμμετρικά από την $|y_{t-1}|$.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα των διαδικασιών CAViaR με τα οποία θα ασχοληθούμε. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $(x)^+ = \max(x, 0)$, $(x)^- = -\min(x, 0)$

$$ADAPTIVE : VaR_t = VaR_{t-1} + \beta_1 \left([1 + \exp(G \times [y_{t-1} - VaR_{t-1}])]^{-1} - \theta \right)$$

όπου το G είναι κάποιος θετικός πεπερασμένος αριθμός. Καθώς το $G \rightarrow \infty$, ο τελευταίος όρος συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο $\beta_1(I(y_{t-1} \leq VaR_{t-1} - \theta))$, όπου $I(\cdot)$ η

δείκτρια συνάρτηση. Το παραπάνω μοντέλο ενσωματώνει τον ακόλουθο κανόνα: όποτε υπερβούμε την Αξία σε Κίνδυνο θα πρέπει άμεσα να αυξήσουμε το G, άλλα όταν δεν την υπερβούμε, θα πρέπει να μειώσουμε G πολύ ελαφρά. Αυτή η στρατηγική φανερά θα μειώσει τη πιθανότητα της ακολουθίας των παραβιάσεων και επίσης θα καθιστά απίθανο να συμβούν παραβιάσεις. Παρόλα αυτά, εξαρτάται λίγο απο τις αποδόσεις των χρεογράφων οι οποίες σχετίζονται με την Αξία σε Κίνδυνο. Αυξάνει την Αξία σε Κίνδυνο όμοια, ανεξάρτητα αν οι αποδόσεις υπερβαίνουν την Αξία σε Κίνδυνο σε μικρό ή μεγάλο βαθμό. Αυτό το μοντέλο έχει συντελεστή μονάδας στην υστέρηση της Αξίας σε Κίνδυνο.

Κάποια άλλα εναλλακτικά μοντέλα είναι:

$$SYMMETRIC\ ABSOLUTE\ VALUE : VaR_t = \beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1} + \beta_3 |y_{t-1}|$$

$$ASYMMETRIC\ SLOPE : VaR_t = \beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1} + \beta_3 (y_{t-1})^+ + \beta_4 (y_{t-1})^-$$

$$INDIRECT\ GARCH(1,1) : VaR_t = (\beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1}^2 + \beta_3 y_{t-1}^2)^{1/2}$$

Το πρώτο και το τρίτο μοντέλο αντιδρούν συμμετρικά σε παρελθοντικές αποδόσεις ενώ το δεύτερο μοντέλο επιτρέπει την αντίδραση στις θετικές και αρνητικές αποδόσεις να είναι διαφορετική. Και τα τρία μοντέλα επανέρχονται στο μέσο κατά την έννοια ότι ο συντελεστής της υστέρησης της Αξίας σε Κίνδυνο πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδας.

Το έμμεσο (Indirect) GARCH μοντέλο θα αποδοθεί σωστά αν τα εξεταζόμενα δεδομένα περιγράφονται απο ένα GARCH(1,1) μοντέλο με κατάλοιπα ανεξάρτητα και όμοια κατανομημένα. Ο τρόπος ορισμού του πρώτου και του δεύτερου μοντέλου θα

είναι συνεπής αν οριστούν απο μια διαδικασία GARCH κατα την οποία η τυπική απόκλιση, και όχι η διακύμανση, μοντελοποιείται συμμετρικά ή ασύμμετρα με ισόνομα και ανεξάρτητα κατάλοιπα. Αυτό το μοντέλο έχει εισαχθεί και υπολογιστεί από τους Taylor και Sewert (1988) και αναλυθεί απο τον Engle (2002). Οι τρόποι ορισμού των μοντέλων CAViaR είναι παρόλα αυτά πιο γενικοί απο εκείνη των μοντέλων GARCH. Πολλές μορφές κατανομών για τις οποίες δεν ισχύει η υπόθεση των όμοια κατανεμημένων και ανεξάρτητων καταλοίπων μπορούν να μοντελοποιηθούν κατά αυτόν τον τρόπο. Στην πραγματικότητα, αυτά τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις με σταθερή μεταβλητότητα, αλλά μεταβαλλόμενη κατανομή των καταλοίπων ή σε περιπτώσεις όπου και οι κατανομές αλλά και οι μεταβλητότητες των καταλοίπων να μεταβάλλονται.

3.4 Παράμετροι Μοντέλου CAViaR

Οι παράμετροι των μοντέλων CAViaR εκτιμούνται απο τη παλινδρομήση στο ποσοστημόριο, όπως αυτές εισήχθησαν απο τους Koenker και Bassett (1978). Οι συγγραφείς αυτοί έδειξαν δηλαδή, πως να επεκτείνουν την έννοια ενός δειγματικού ποσοστημορίου σε ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης. Θεωρείστε ένα δείγμα παρατηρήσεων y_1, y_2, \dots, y_T το οποίο γενικεύεται απο το μοντέλο:

$$y_t = x_t' \beta^0 + \epsilon_{\theta t}, \quad Quant_{\theta}(\epsilon_{\theta t} | x_t) = 0 \quad (3.1)$$

όπου το x_t είναι ένα p -διάστατο διάνυσμα παραγόντων και το $Quant_{\theta}(\epsilon_{\theta t} | x_t)$ είναι το δεσμευμένο ποσοστημόριο των $\epsilon_{\theta t}$ δοθέντος x_t . Έστω $f_t(\beta) \equiv x_t \beta$. Τότε στο θ -ποσοστημόριο η παλινδρόμηση ορίζεται από τα $\hat{\beta}$ για τα οποία:

$$\min_{\theta} \frac{1}{T} \left(\theta - I(y_t < VaR_t) \right) (y_t - VaR_t) \quad (3.2)$$

Τα ποσοστημόρια παλινδρόμησης συμπεριλαμβάνουν μια ειδική περίπτωση του μοντέλου Ελάχιστης Απόλυτης Απόκλισης (Least Absolute Deviation, LAD). Είναι ευρέως γνωστό ότι οι LAD εκτιμητές είναι περισσότερο ευσταθείς από τους εκτιμητές της μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων (OLS) όταν τα κατάλοιπα έχουν κατανομή με βαριά ουρά. Οι Koenker και Basset (1978) για παράδειγμα, χρησιμοποίησαν ένα απλό πείραμα Monte Carlo και έδειξαν πως η διακύμανση της διαμέσου συγκρινόμενη με τη διακύμανση του μέσου, είναι ελαφρώς υψηλότερη στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, αλλά είναι χαμηλότερη για οποιαδήποτε άλλη κατανομή εκτός της κανονικής.

Η ανάλυση των γραμμικών μοντέλων παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο έχουν επεκταθεί σε περιπτώσεις με ετεροσκεδαστικότητα (Koenker και Basset (1982)) και μη στατικά εξαρτημένα κατάλοιπα (Portnoy (1991)), μοντέλα χρονοσειρών (Bloomfield και Steiger (1983)) και λογοκριμένα μοντέλα παλινδρόμησης (Powel (1986) και Buchinsky και Hahn (1998)). Γενικεύσεις για την περίπτωση των αυτοσυσχετιζόμενων ποσοστημορίων έχουν προταθεί από τους Koenker και Zao (1996) και Koul και Saleh (1995). Αυτές οι προσεγγίσεις διαφέρουν από την προσέγγιση που προϋποθέτει όλες τις μεταβλητές να είναι παρατηρήσιμες και τα μοντέλα να είναι γραμμικά. Στην περίπτωση της μη γραμμικότητας, έχει προταθεί μια ασυμπτωτική θεωρία για τα μοντέλα με σειριακή ανεξαρτησία (αλλά όχι όμοια κατανομή) από τους Oberhofer (1982), Dupacova (1987), Powel (1991) και Jureckona, Prochazka (1993). Υπάρχει σχετικά λίγη βιβλιογραφία η οποία θεωρεί μη γραμμικές παλινδρομήσεις στο ποσοστημόριο στο πλαίσιο των χρονοσειρών. Η πιο σημαντική συνεισφορά είναι εκείνη του White (1994)

ο οποίος αποδουκνύει την συνέπεια των μη γραμμικών παλινδρομήσεων στα ποσοστημόρια, και για την περίπτωση της ισονομίας αλλά και στις περιπτώσεις στάσιμης εξάρτησης μεταβλητών, καθώς επίσης και από τον Weiss (1991), ο οποίος έδειξε συνέπεια, ασυμπτωτική κανονικότητα και ασυμπτωτική ισοδυναμία των ελέγχων των LM και Wald για τους εκτιμητές του LAD για μη γραμμικά μοντέλα. Τέλος, ο Mukherjee (1999) επεκτείνει την ιδέα της παλινδρόμησης και αυτοσυσχέτισης στα ποσοστημόρια στα μη γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών με την προϋπόθεση ότι τα κατάλοιπα είναι ισόνομα και ανεξάρτητα.

Θεωρείστε το μοντέλο

$$y_t = f(y_{t-1}, x_{t-1}, \dots, y_1, x_1; \beta^0) + \epsilon_{t\theta} \equiv f_t(\beta^0) + \epsilon_{t\theta}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

με $Quant_{\theta}(\epsilon_{t\theta} | \Omega_t) = 0$, όπου το $f_1(\beta^0)$ είναι κάποια δεδομένη αρχική συνθήκη, το x_t είναι ένα διάνυσμα εξωγενών μεταβλητών, το $\beta^0 \in R^p$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων που χρειάζεται να εκτιμηθούν και

$\Omega_t = (y_{t-1}, x_{t-1}, \dots, y_1, x_1; \beta^0)$ είναι η διαθέσιμη πληροφορία τη χρονική στιγμή t . Έστω $\hat{\beta}$ να είναι το διάνυσμα των παραμέτρων το οποίο ελαχιστοποιεί την σχέση (3.2).

Οι Engle και Manganelli (1999) γενικεύοντας τις εργασίες των Weiss (1991) και Powel (1984, 1986, 1991) δείχνουν ότι οι εκτιμητές έχουν τις ιδιότητες της κανονικότητας, της συνέπειας καθώς επίσης έδειξαν και τον τρόπο υπολογισμού του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Καταγράφουμε λοιπόν τα παρακάτω τρία Θεωρήματα:

Θεώρημα 1 (Συνέπεια) - Στο μοντέλο (3.3), κάτω από τις συνθήκες Σ0-Σ7 του Παραρτήματος Α, τότε $\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta^0$, όπου $\hat{\beta}$ είναι η λύση της (3.2)

Θεώρημα 2 (Ασυμπτωτική Κανονικότητα) - Στο μοντέλο (3.3), κάτω από τις συνθήκες ΑΥ1-ΑΥ4 του Παραρτήματος Α και τις συνθήκες του Θεωρήματος 1, έχουμε ότι $\sqrt{\frac{T}{\theta(1-\theta)}} A_T^{-1/2} D_T(\hat{\beta} - \beta^0) \xrightarrow{d} N(0, 1)$, όπου $A_T = E [T^{-1} \nabla' f(\beta^0) \nabla f(\beta^0)]$, $D_T = E [T^{-1} \nabla' f(\beta^0) H \nabla f(\beta^0)]$ όπου ο H είναι διαγώνιος πίνακας με $h_t(0|\Omega_t)$.

Θεώρημα 3 (Εκτίμηση πίνακα Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης) - Κάτω από τις συνθήκες των ΣΔ1-ΣΔ2 του Παραρτήματος Α και των συνθηκών που ισχύουν στα Θεωρήματα 1 και 2, τότε έχουμε $\hat{A} \xrightarrow{p} A_T$ και $\hat{D} \xrightarrow{p} D_T$, όπου $\hat{A}_T = T^{-1} \nabla' f(\hat{\beta}) \nabla f(\hat{\beta})$ και $\hat{D}_T = (2T\hat{c}_T)^{-1} \sum_{t=1}^T I \left(\left| y_t - f_t(\hat{\beta}) \right| < \hat{c}_T \right) \nabla' f_t(\hat{\beta}) \nabla f_t(\hat{\beta})$

3.5 Έλεγχος των Μοντέλων Ποσοστημορίων

Υπό την υπόθεση της ευστάθειας του μοντέλου (3.3) τότε η πιθανότητα $Pr(y_t < -VaR_t) = \theta, \forall t$. Αυτό ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι η ακολουθία των δείκτριων συναρτήσεων $\{I(y_t < VaR_t)\}_{t=1}^T$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη. Ως εκ τούτου, μια ιδιότητα που οποιαδήποτε εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο πρέπει να ικανοποιεί, είναι στο να παρέχει ένα φίλτρο για τον μετασχηματισμό μιας, πιθανώς, αυτοσυσχετισμένης και ετεροσκεδαστικής χρονοσειράς, σε μια ανεξάρτητη ακολουθία δεικτριων συναρτήσεων. Ένας φυσικός τρόπος για να εξεταστεί η εγκυρότητα του μοντέλου πρόβλεψης, είναι να εξεταστεί κατά πόσο η ακολουθία $\{I(y_t < VaR_t)\}_{t=1}^T \equiv \{I_t\}_{t=1}^T$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη, όπως αυτό έγινε για παράδειγμα από τους Granger, White, Kamstra (1989) και Christoffersen (1998). Παρόλο που αυτοί οι έλεγχοι μπορούν να εντοπίσουν την παρουσία αυτοσυσχέτισης στην ακολουθία των δεικτριων συναρτήσεων $\{I_t\}_{t=1}^T$, αυτό είναι μόνο ένας αναγκαίος, αλλά όχι επαρκής όρος για να αξιολογηθεί η απόδοση ενός μοντέλου ποσοστημορίων. Πράγματι δεν είναι δύσκολο να παραχθεί μια ακολου-

θία συνάρτησης $\{I_t\}_{t=1}^T$ από μία δεδομένη ακολουθία $\{y_t\}_{t=1}^T$. Αρκεί να καθορισθεί η ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{z_t\}_{t=1}^T$, τέτοιων ώστε :

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \theta \\ -1 & \text{με πιθανότητα } (1 - \theta) \end{cases} \quad (3.4)$$

Έπειτα, ορίζοντας ως $VaR_t = Kz_t$ για K μεγάλο, τότε θα έχουμε τα αποτελέσματα που επιθυμούμε. Παρατηρούμε ωστόσο, ότι όταν εμφανιστεί το z_t για πρώτη φορά, η πιθανότητα να υπερβεί το ποσοστημόριο είναι γνωστή και είναι ή σχεδόν μηδέν ή ένα. Άρα, οι μη δεσμευμένες πιθανότητες είναι γνωστές και μη συσχετισμένες, αλλά οι δεσμευμένες πιθανότητες με βάση το ποσοστημόριο δεν είναι. Αυτό το παράδειγμα είναι μία ακραία περίπτωση λανθασμένης μέτρησης των ποσοστημορίων. Οποιοσδήποτε θόρυβος εισάγεται μέσα στην εκτίμηση για τα ποσοστημόρια, θα αλλάξει τη δεσμευμένη πιθανότητα μιας παραβίασης δοθέντος της ίδιας της εκτίμησης.

Για αυτό το λόγο, κανένας από αυτούς τους ελέγχους δεν έχουν ισχύ απέναντι στη διαφορά που προκύπτει ανάμεσα στις δεσμευμένες και στις μη δεσμευμένες πιθανότητες και κανένας δεν μπορεί να επεκταθεί για να εξετάσει άλλες επεξηγηματικές μεταβλητές. Οι Engle και Manganelli (1999) πρότειναν έναν νέο έλεγχο ο οποίος μπορεί εύκολα να γενικευτεί για να ενσωματώσει μια ποικιλία εναλλακτικών. Κατ' αρχήν ορίζουμε

$$Hit_t(\beta^0) \equiv I(y_t < -VaR_t) - \theta$$

Η συνάρτηση $Hit_t(\beta^0)$ υποθέτει τιμή $(1-\theta)$ κάθε φορά που το y_t είναι μικρότερο από το ποσοστημόριο, και $-\theta$ διαφορετικά. Καταλαβαίνουμε συνεπώς ότι η αναμενόμενη τιμή του $Hit_t(\beta^0)$ είναι μηδέν. Επίσης, από τον ορισμό της συνάρτησης ποσοστημορίων,

η σταθμισμένη αναμενόμενη τιμή του $Hit_t(\beta^0)$, δοθέντος οποιασδήποτε πληροφορίας κατά τη χρονική στιγμή $t-1$, πρέπει επίσης να ισούται με μηδέν. Ειδικότερα, το $Hit_t(\beta^0)$ πρέπει να μην σχετίζεται με τις δικές του τιμές που παίρνει στο παρελθόν (lagged values) καθώς και με το VaR_t και πρέπει να έχει αναμενόμενη τιμή στο μηδέν. Αν το $Hit_t(\beta^0)$ ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις, τότε είναι σίγουρο ότι δεν θα υπάρξει καμία αυτοσυσχέτιση στις παραβιάσεις και δεν θα υπάρξει κανένα υπολογίσιμο λάθος όπως συμβαίνει στη σχέση (3.4). Αν είναι επιθυμητό να εξεταστεί κατά πόσο αυτή είναι η σωστή αναλογία παραβιάσεων για κάθε έτος, τότε αυτό μπορεί να μετρηθεί εξετάζοντας την συσχέτιση της συνάρτησης $Hit_t(\beta^0)$ μαζί με ετήσιες ψευτομεταβλητές. Αν υπάρχουν ενδείξεις ότι άλλες συναρτήσεις μπορούν να προσθέσουν πληροφορία (όπως αυτή που καταγράφεται σε παρελθοντικά δεδομένα), για παράδειγμα η συνάρτηση που εκτιμά τη μεταβλητότητα ενός GARCH μοντέλου, τότε και αυτές μπορούν να ενσωματωθούν στο παρελθοντικό μοντέλο.

Ας ορίσουμε λοιπόν με T τον αριθμό των παρατηρήσεων ενός δείγματος και N τον αριθμό των παρατηρήσεων εκτός του δείγματος. Επίσης, ας κάνουμε σαφή την εξάρτηση μεταξύ των σχετικών μεταβλητών με τον αριθμό των παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους δείκτες. Ένας φυσικός τρόπος για να δημιουργηθεί ένας έλεγχος είναι να εξεταστεί κατά πόσο η στατιστική συνάρτηση ελέγχου $X'_N(\hat{\beta}_T)Hit_N(\hat{\beta}_T)$ είναι στατιστικά σημαντική και σημαντικά διαφορετική του μηδενός, όπου $X_n(\hat{\beta}), n = T + 1, \dots, T + N$, είναι ακολουθία των $X_n(\hat{\beta})$ (που πιθανώς εξαρτώνται από το $\hat{\beta}$), και $Hit_N(\hat{\beta}) = [Hit_{T+1}(\hat{\beta}), \dots, Hit_{T+N}(\hat{\beta})]'$. Τότε η στατιστική συνάρτηση του Dynamic Quantile (DQ) ελέγχου θα δίνεται από:

$$DQ_0 \equiv \frac{Hit'_N(\hat{\beta}_T)X_N(\hat{\beta}_T) \left[X'_N(\hat{\beta}_T)X_N(\hat{\beta}_T) \right]^{-1} X'_N(\hat{\beta}_T)Hit_N(\hat{\beta}_T)}{\theta(1-\theta)} \xrightarrow{d} \chi_q^2$$

καθώς το $T \rightarrow \infty$ και $N \rightarrow \infty$ δοθέντος ότι $X'_N(\hat{\beta}_T)X_N(\hat{\beta}_T)$ είναι μη ιδιάζων. Το όριο για το $T \rightarrow \infty$ απαιτείται για να διασφαλιστεί ότι $\hat{\beta}_T \xrightarrow{p} \beta^0$. Τότε μια απλή εφαρμογή ενός κατάλληλου Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος θα παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ενώ αυτό το μέτρο αποδοτικότητας μπορεί να αποδειχθεί αρκετά χρήσιμο, όταν εφαρμοστεί για τα εντός του δείγματος δεδομένα, η κατανομή του επηρεάζεται από το γεγονός ότι το $Hit_T(\hat{\beta}_T)$ είναι μια συνάρτηση των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Έστω $M_T = (X'_T(\beta^0) - E[T^{-1}X'_T(\beta^0)H_T \nabla f_T(\beta^0)] D_T^{-1} \nabla' f_T(\beta^0))$, όπου H έχει καθοριστεί στο Θεώρημα 2. Το Θεώρημα 4 παρέχει τη σωστή κατανομή για το DQ έλεγχο του δείγματος.

Θεώρημα 4 : (Dynamic Quantile Test) - Κάτω από τις προϋποθέσεις των ΔΠ2-ΔΠ4 του Παραρτήματος Α και των συνθηκών των Θεωρημάτων 1 και 2, τότε έχουμε: $T^{-1/2}X'_T(\hat{\beta})Hit_T(\hat{\beta}) \stackrel{d}{\sim} N(0, \theta(1-\theta)E(T^{-1}M_tM'_t))$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει και η προϋπόθεση ΔΠ1, τότε

$$DQ_1 \equiv \frac{T^{-1}Hit'_T(\hat{\beta})X_T(\hat{\beta})E(T^{-1}M_T M'_T)^{-1}X'_T(\hat{\beta})Hit_T(\hat{\beta})}{\theta(1-\theta)} \stackrel{d}{\sim} \chi_q^2. \text{ Επίσης, κάτω από τις συνθή-}$$

κες του Θεωρήματος 3, έχουμε $T^{-1}\hat{M}_T\hat{M}'_T \xrightarrow{p} E(T^{-1}M_T M'_T)$ όπου

$$\hat{M}_T = X'_T(\hat{\beta}) - \left\{ (2T\hat{c}_T)^{-1} \sum_{t=1}^T I\left(\left|y_t - f_t(\hat{\beta})\right| < \hat{c}_T\right) X'_t(\hat{\beta}) \nabla f_t(\hat{\beta}) \right\} \hat{D}_T^{-1} \nabla' f_t(\hat{\beta}).$$

Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα Β. Επίσης θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν το $X_T(\beta)$ περιέχει $m < q$ υστερήσεις του $Hit_{t-i}(\beta), i = 1, 2, \dots, m$ τότε τα $X_T(\beta), Hit_T(\beta), H_T$ και $\nabla f_T(\beta)$ δεν μπορούν να προσαρμοστούν, καθώς το $X_T(\beta)$ περιέχει μόνο $(T-m)$ στοιχεία. Εδώ σιωπηρά υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας,

ότι οι πίνακες (μήτρες) δημιουργούνται έτσι ώστε να μπορούν να προσαρμοστούν στα δεδομένα, διαγράφοντας τις πρώτες m -σειρές του $\nabla f_T(\beta)$ και $Hit_T(\beta)$ και τις πρώτες m -σειρές και στήλες του πίνακα H_T .

Σημειώστε ότι αν επιλεξουμε $X_T(\hat{\beta}) = \nabla f_T(\beta)$ τότε το $M_T = 0$, όπου 0 είναι μία (p,p) μηδενική μήτρα. Αυτό είναι συνεπές με το γεγονός $T^{-1/2}\nabla' f_T(\hat{\beta})Hit_T(\hat{\beta}) = o_p(1)$ από τις συνθήκες πρώτης τάξης του πλαισίου παλινδρόμησης στα ποσοστημόρια.

Ο DQ έλεγχος για τις παρατηρήσεις εντός του δείγματος, είναι ένας προσδιοριστικός έλεγχος για τη συγκεκριμένη διαδικασία που ακολουθούν τα μοντέλα CAViaR και μπορεί να γίνει πολύ χρήσιμος για σκοπούς επιλογής μοντέλων. Η πιο απλή μορφή του DQ ελέγχου για παρατηρήσεις εκτός του δείγματος, αντίθετα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους νομοθέτες για να εξετάσουν κατά πόσο οι εκτιμήσεις της Αξίας σε Κίνδυνο υποβάλλονται ή εφαρμόζονται από τα οικονομικά ιδρύματα, και κατά πόσο ικανοποιούν μερικές βασικές απαιτήσεις που πρέπει να έχουν όλοι οι καλοί εκτιμητές ποσοστημορίων, όπως είναι αυτό της αμεροληψίας, ανεξαρτησία των παραβιάσεων και ανεξαρτησία των εκτιμήσεων των ποσοστημορίων. Τα ωραιότερα χαρακτηριστικά του DQ ελέγχου για παρατηρήσεις εκτός του δείγματος είναι η απλότητά του και το γεγονός ότι δεν εξαρτάται από τη διαδικασία εκτίμησης, για την εφαρμογή του, η οποία είναι: ο εκτιμητής (είτε είναι ο νομοθέτης ή ο διοικητής κινδύνου) χρειάζεται μόνο μια ακολουθία της Αξίας σε Κίνδυνο και τις αντίστοιχες τιμές του χαρτοφυλακίου.

Κεφάλαιο 4

Εναλλακτικά Μοντέλα υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο

4.1 Εισαγωγή

Ανεξάρτητα από τις διάφορες κριτικές που έχουν ασκηθεί στην αξία σε κίνδυνο, οι νομοθετικές απαιτήσεις εστιάζονται κυρίως στην εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο. Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι, πέρα από την παρουσίαση των μοντέλων CAViaR, να παρουσιάσει και κάποιες εναλλακτικές προσεγγίσεις του υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο. Η εργασία των Bao, Lee και Saltoglu (2003, 2004) αφορά την πρόβλεψη της Αξίας σε Κίνδυνο με τη χρησιμοποίηση διαφορετικών δεδομένων, μοντέλων και κατανομών ζημιών. Η μελέτη του Pritsker (1997) που αφορά γενικευμένα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας GARCH και Mixed Normal GARCH

(MN-GARCH), μοντέλα που χρησιμοποιούν την Θεωρία των Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory: EVT), καθώς επίσης και μια ποικιλία μη παραμετρικών εκτιμητών της ουράς της κατανομής.

Μια εμπορική τράπεζα και ο ρυθμιστικός της φορέας (π.χ. νομοθέτης), ενδιαφέρεται για τον υπολογισμό της συνολικής Αξίας σε Κίνδυνο σε διαφορετικές δραστηριότητες. Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο θα πρέπει πρώτα να ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό του συνολικού κέρδους και ζημίας από τα δεδομένα, χρησιμοποιώντας ένα μονομεταβλητό μοντέλο πρόβλεψης. Μια εναλλακτική προσέγγιση οδηγεί στην κατασκευή πολυμεταβλητού μοντέλου Αξίας σε Κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο. Κατ' αρχήν, αυτό το μοντέλο έχει το προτέρημα στο ότι είναι ευαίσθητο ως προς την επιλογή του σεναρίου ανάλυσης για την δομή του κινδύνου που υπάρχει σε ένα χαρτοφυλάκιο. Ωστόσο, όπως έδειξαν οι Berkowitz και O'Brien (2002) σε μια πρόσφατη έρευνα χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα εμπορικών τραπεζών, τα μοντέλα Αξίας σε Κίνδυνο και τα δεδομένα κερδών και ζημιών, παρέχουν μια πτωχή εκτίμηση για τον κίνδυνο. Παρά το γεγονός ότι μεγάλες τράπεζες και άλλα οικονομικά ιδρύματα θα απαιτήσουν εν τέλει μια αξιόπιστη πολυμεταβλητή προσέγγιση για κάποιες δραστηριότητες, υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια μονομεταβλητή προσέγγιση είναι αρκετή (για παράδειγμα όταν η προσοχή επιγκεντρώνεται στη πρόβλεψη της συνολικής Αξίας σε Κίνδυνο). Στο παράδειγμα τους, οι Berkowitz και O'Brien (2002) υπέδειξαν ότι τα περίπλοκα μοντέλα δεν ήταν δυνατόν να υπερκεράσουν σε απόδοση ένα απλό μονομεταβλητό ARMA-GARCH μοντέλο. Επιπροσθέτως, το GARCH μοντέλο απεδείχθη ότι παρέχει λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα για τις προβλέψεις της Αξίας σε Κίνδυνο και συνεπώς δεν θα ήταν σωστό να εφαρμοστεί. Τα μονομεταβλητά μοντέλα είναι λοιπόν ένα χρήσιμο συμπλήρωμα πιο σύνθετων μοντέλων και μπορεί να επαρκούν για τη πρόβλεψη της Αξίας

σε Κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου. Συμπερασματικά, θα περιορίσουμε τη προσοχή μας στα μονομεταβλητά μοντέλα.

Για την εφαρμογή μονομεταβλητών μοντέλων στον υπολογισμό της Αξίας σε Κίνδυνο, πρέπει να βρεθεί μια ακριβής εκτίμηση ποσοστημορίων που σχετίζεται με την αριστερή ουρά της κατανομής των αποδόσεων σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία. Οι ήδη υπάρχουσες προσεγγίσεις για να πραγματοποιηθεί αυτή η εκτίμηση, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως ακολούθως : η Ιστορική Προσομοίωση χρησιμοποιεί ποσοστημόρια όπου βασίζονται στα διαθέσιμα παρελθοντικά δεδομένα, τα πλήρως παραμετρικά μοντέλα περιγράφουν ολόκληρη την κατανομή των αποδόσεων, συμπεριλαμβανομένης της δυναμικής της μεταβλητότητας, η Θεωρία Ακραίων Τιμών μελετά παραμετρικά μοντέλα που αφορούν τις ουρές των κατανομών των αποδόσεων και τέλος, η Παλινδρόμηση στο Ποσοστημόριο μοντελοποιεί απ' ευθείας ένα συγκεκριμένο ποσοστημόριο και όχι ολόκληρη την κατανομή των αποδόσεων.

Στη συνέχεια, θα παρέχουμε μια περιγραφή των μοντέλων των εναλλακτικών προσεγγίσεων που αναφέραμε πιο πάνω.

4.2 Ιστορική Προσομοίωση

Ο πιο απλός τρόπος υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο είναι να χρησιμοποιήσουμε την δειγματική εκτίμηση του ποσοστημορίου που βασίζεται στα ιστορικά δεδομένα, η οποία αναφέρεται ως Ιστορική Προσομοίωση. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της μεθόδου αυτής, με πολλά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Σε αυτή την εργασία, θα περιγράψουμε τον επικρατέστερο τρόπο, τον οποίο καλούμε Ιστορική Προσομοίωση (HS : Historical Simulation) και τον πιο αποτελεσματικό τρόπο, ο οποίος είναι η

Φιλτραρισμένη Ιστορική Προσομοίωση (FHS : Filtered Historical Simulation) .

Για την Ιστορική Προσομοίωση η εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο τη χρονική στιγμή $t+1$ δίνεται απο το εμπειρικό λ -ποσοστημόριο, $\hat{Q}(\cdot)$ ενός κυλιόμενου παραθύρου με w - παρατηρήσεις μέχρι τη χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$V\hat{a}R_{t+1} = -\hat{Q}_\lambda(r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-w+1})$$

Για παράδειγμα, για ένα δείγμα μεγέθους, ας πούμε $w=1000$ παρατηρήσεις, η εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο με 5% πιθανότητα, είναι απλά το αρνητικό της πεντηκοστής δειγματικής διατεταγμένης στατιστικής. Παρατηρούμε ότι, παρόλο που αγνοούμε το γεγονός ότι τα δεδομένα δεν είναι ανεξάρτητα και όμοια κατανομημένα, οι προβλέψεις που υπερβαίνουν τις ακραίες αποδόσεις που παρατηρούνται κατά τη διάρκεια των παρελθοντικών w - παρατηρήσεων, δεν είναι δυνατόν να παραχθούν με αυτή τη μέθοδο. Επίσης, οι εκτιμήσεις της Αξίας σε Κίνδυνο μπορούν να παρουσιάσουν άλματα, όταν μεγάλες αρνητικές αποδόσεις εμφανιστούν ή βρίσκονται έξω απο τον χρονικό ορίζοντα που έχουμε διαλέξει.

4.3 Πλήρως Παραμετρικό Μοντέλο Θέσης και Βαθμίδος

Τα πλήρως παραμετρικά μοντέλα στην κλάση της θέσης και βαθμίδος βασίζονται στην παραδοχή ότι οι αποδόσεις ανήκουν σε μια οικογένεια θέσης και βαθμίδος κατανομών πιθανότητας, της μορφής:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t,$$

όπου η μ_t και η σ_t είναι παράμετροι θέσης και βαθμίδος, και $z_t \sim f_z(\cdot)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, όπου f_z είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία μπορεί να έχει επιπλέον παράμετρους που καθορίζουν τη μορφή της (όπως είναι οι βαθμοί ελευθερίας στην κατανομή Student's t - κατανομή). Τα ARCH και GARCH μοντέλα, υποθέτουν ότι το z_t ακολουθεί την κανονική κατανομή, αλλά αυτή η παραδοχή γρήγορα αποδείχθηκε ανεπαρκής. Η αντικατάσταση της παραδοχής αυτής, με εκείνη που λέει ότι η z_t θα ακολουθεί κάποια κατανομή με βαριά ουρά και ασυμμετρία αποδείχθηκε ότι είναι ικανοποιητική.

Η πρόβλεψη της Αξίας σε Κίνδυνο ή Δυνητικής Ζημιάς σε h - μελλοντικές περιόδους, μπορεί να βασιστεί πάνω στην πληροφόρηση που υπάρχει τη χρονική στιγμή t και υπολογίζεται από τη σχέση: $V\hat{a}R_{t+h} = -\left(\hat{\mu}_{t+h} + \hat{\sigma}_{t+h}Q_\lambda(z)\right)$, όπου $Q_\lambda(z)$ είναι το λ - ποσοστημόριο που εισάγεται από την f_z . Οι προσεγγίσεις της Αξίας σε Κίνδυνο διαφέρουν ανάλογα με τις τιμές που θα πάρουν: η παράμετρος θέσης μ_{t+h} , βαθμίδος σ_{t+h} και η πυκνότητα f_z .

Στα υπό συνθήκη ομοσκεδαστικά παραμετρικά μοντέλα ο μεταβαλλόμενος στο χρόνο δεσμευμένος μέσος, πιθανόν μπορεί να ληφθεί από μια ARMA (p,q) διαδικασία (Αυτοπαλίνδρομη Κινητού Μέσου), και περιγράφεται από τη σχέση:

$$\mu_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j}$$

με $\sigma_t \equiv \sigma, t = 1, 2, \dots, T$. Αντίθετα, στα υπο συνθήκη ετεροσκεδαστικά παραμετρικά μοντέλα, η παράμετρος σ^2 είναι συνάρτηση των παρελθοντικών τιμών της χρονοσειράς που εξετάζεται. Η πιο γνωστή μοντελοποίηση πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ένα GARCH (r,s) μοντέλο, το οποίο γράφεται ως:

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s d_j \sigma_{t-j}^2$$

που εισήχθη από τον Bollerslev (1986) .

Στην εμπειρική ανάλυση που ακολουθεί, για την κατανομή της f_z υποθέτουμε ότι μπορεί να ακολουθεί τρεις διαφορετικές κατανομές : την κανονική, την Student's t με $\nu \in R_+$ βαθμούς ελευθερίας και την γενικευμένη ασύμμετρη Student's t κατανομή με πυκνότητα:

$$f(z; d, \nu, \theta) = C \left(1 + \frac{(-z\theta)^d}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{d}} I(z < 0) + C \left(1 + \frac{(\frac{z}{\theta})^d}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{d}} I(z \geq 0)$$

όπου $d, \nu, \theta \in R_+$ και $I(\cdot)$ η δείκτρια συνάρτηση, $C = \left[(\theta + \theta^{-1}) d^{-1} \nu^{1/d} B(d^{-1}, \nu) \right]^{-1}$ και το $B(\cdot, \cdot)$ υποδηλώνει την συνάρτηση $Beta(\alpha, \beta)$. Η ροπή r τάξεως για $0 \leq r < \nu d$ για τη γενικευμένη ασύμμετρη Student's t κατανομή είναι :

$$\frac{(-1)^r \theta^{-(r+1)} + \theta^{(r+1)} B\left(\frac{r+1}{d}, \nu - r/d\right)}{\theta^{-1} + \theta} \frac{B\left(\frac{r+1}{d}, \nu - r/d\right)}{B(1/d, \nu)} \nu^{r/d}$$

από την οποία η διακύμανση, η λοξότητα και η κύρτωση μπορούν να υπολογιστούν αν υπάρχουν. Η συνάρτηση κατανομής της Student's t κατανομής (που χρειάζεται για τον υπολογισμό της Αξίας σε Κίνδυνο) , δίνεται από την σχέση :

$$F(z) = \begin{cases} \frac{I_L(\nu, 1/d)}{1+\theta^2} & \text{αν } z \leq 0 \\ \frac{I_U(1/d, \nu)}{1+\theta^2} + (1+\theta^2)^{-1} & \text{αν } z > 0 \end{cases}$$

όπου $L = \nu / [\nu + (-z\theta)^d]$, $U = (z/\theta)^d / [\nu + (z/\theta)^d]$ και :

$$I_x(a, b) = \frac{B_x(a, b)}{B(a, b)} = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, (a, b > 0)$$

Τα μοντέλα τύπου GARCH σε συνδυασμό με τη Student's t κατανομή, συχνά παρουσιάζουν εξαιρετικά αποτελέσματα προβλέψεων. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τις εργασίες των Mittnik και Paoletta (2000), Giot και Laurent (2004) και τα αποτελέσματα αυτών.

4.4 Πλήρως Παραμετρικό Μοντέλο Δυναμικής Ανατροφοδότησης

Ένα εναλλακτικό παραμετρικό μοντέλο εκείνων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι να συνδυάσουμε τη δομή ενός μοντέλου GARCH με μία μίξη κανονικών κατανομών (μεταξύ δύο και τεσσάρων παραμέτρων), με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπεται η δυναμική ανατροφοδότηση ανάμεσα στα στοιχεία της κανονικής κατανομής. Πολλοί συγγραφείς έχουν αποδείξει ότι η μίξη κανονικών κατανομών προσαρμόζει την κατανομή των αποδόσεων των χρεογράφων αρκετά καλά (βλέπε για παράδειγμα Hass, Mittnik και Paoletta (2004α, 2004β)). Το μοντέλο αυτό έχει απήχηση και χρησιμο-

ποιείται από την πλειοψηφία των αναλυτών και διοικητών κινδύνου διότι έχει αποδειχθεί ότι αποδίδει αξιόπιστες προβλέψεις όσον αφορά την Αξία σε Κίνδυνο.

Πιο συγκεκριμένα, η χρονοσειρά ϵ_t μπορεί να γενικευτεί από ένα μειγμένο κανονικό GARCH(r,s) μοντέλο n - συνιστώσων (δηλαδή MixN - GARCH), αν η κατανομή του ϵ_t ακολουθεί μια μίξη n - κανονικών κατανομών με μηδενικό μέσο, δηλαδή :

$$\epsilon_t | F_{t-1} \rightarrow MN(\omega, \mu, \sigma_t^2)$$

όπου $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\sigma_t^2 = (\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{nt}^2)$ και η πυκνότητα της μίξης κανονικών κατανομών δίνεται από τη σχέση :

$$f_{MN}(y; \omega, \mu, \sigma_t^2) = \sum_{j=1}^n \omega_j \phi(y; \mu_j, \sigma_{jt}^2)$$

όπου ϕ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής, $\omega_j \in (0, 1)$ με $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ και για να διασφαλίσουμε τον μηδενικό μέσο, $\mu_n = -\sum_{j=1}^{n-1} (\omega_j / \omega_n) \mu_j$. Για τη διακύμανση του μοντέλου, την σ_t^2 , μπορούμε να πούμε ότι υπολογίζεται από την δομή ενός μοντέλου GARCH. Πιο συγκεκριμένα,

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^r \gamma_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \Psi_j \sigma_{t-j}^2$$

όπου $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in})$, $i = 0, 1, \dots, r$ είναι nx1 διανύσματα, και Ψ_j , $j = 1, 2, \dots, s$ είναι nxn πίνακες. Χρησιμοποιούμε τον περιορισμό ότι ο Ψ_j να είναι διαγώνιος, γεγονός που υπεδείχθη από τους Hass, Mittnik και Paoletta (2004,α) και συντελεί στην κατασκευή ενός μοντέλου περισσότερο εύχρηστου και με μεγαλύτερη ικανότητα πρό-

βλεψης.

Περισσότερα για το παραπάνω μοντέλο, σε γενικεύσεις του και στην εφαρμογή του σε πραγματικά δεδομένα, σας παραπέμπουμε στην εργασία των Keith Kuester, Stefan Mittnik και Marc S. Paolella (VaR Prediction: A Comparison of Alternative Strategies).

4.5 Θεωρία Ακραίων Τιμών

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών επικεντρώνεται στην ουρά της κατανομής των αποδόσεων της χρονοσειράς που εξετάζεται. Μια περιεκτική επισκόπηση του συγκεκριμένου μοντέλου, δόθηκε από τους Embrechts, Kluppelberg και Mikosch (1997) και του Christoffersen (2002). Σύμφωνα με τους συγγραφείς αυτούς, δίνεται έμφαση στη δεξιά ουρά της κατανομής, πράγμα που σημαίνει ότι αν η αριστερή ουρά της κατανομής παρουσιάζει ενδιαφέρον, τότε η ανάλυση της Θεωρίας Ακραίων Τιμών θα πρέπει να εφαρμοστεί στην απόλυτη τιμή των αρνητικών αποδόσεων. Έστω $X_t, t = 1, 2, \dots, T$ είναι μία σειρά ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και $M_T = \max(X_1, X_2, \dots, X_T)$. Αν υπάρχει σταθερά $c_T > 0$ και $d_T \in R$ τότε:

$$\frac{M_T - d_T}{c_T} \xrightarrow{d} H$$

όπου η H μια μη-εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής, τότε για $1 + \xi x > 0$, έχουμε

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right] & \text{αν } \xi \neq 0 \\ \exp\left[-\exp(-x)\right] & \text{αν } \xi = 0 \end{cases}$$

και όπου η H_ξ καλείται generalized extreme value (GEV) distribution .

Η παράμετρος ξ είναι πολύ σημαντική διότι επηρεάζει την συμπεριφορά της ουράς της $F(x)$. Για $\xi = 0$ οι ουρές φθίνουν με εκθετικό ρυθμό (όπως στην περίπτωση της κανονικής κατανομής), για $\xi < 0$ έχουν πεπερασμένο δεξιό άκρο στην ουρά τους και για $\xi > 0$ προκύπτουν κατανομές με βαριά δεξιά ουρά όπως η Pareto κατανομή.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση κατανομής του υπερβάλλοντος ποσού, δηλαδή του $Y = X - u$, της ανεξάρτητης και ισόνομης τυχαίας μεταβλητής X , έτσι ώστε:

$$F_u(y) = Pr(X - u \leq y | X > u), \quad y \geq 0$$

Για τις υπερβάσεις ενός κατώφλιου, όπως απεδείχθει και απο τον Pickands (1975) , μπορεί να εφαρμοστεί η γενικευμένη Pareto κατανομή (generalized Pareto distribution - GPD), όπου

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{αν } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}}, & \text{αν } \xi = 0 \end{cases}$$

με $y \geq 0$ αν $\xi \geq 0$ και $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ για $\xi < 0$, όπου β η παράμετρος βαθμίδος.

Στην τρέχουσα βιβλιογραφία υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι. Η πρώτη υποθέτει δεδομένα με βαριές ουρές και χρησιμοποιεί έναν εκτιμητή για την ουρά της κατανομής (βλέπε για παράδειγμα Danielsson, de Vries (2000)). Η δεύτερη, επικεντρώνεται στη μελέτη των κορυφών που παρουσιάζει το γράφημα της κατανομής των εξεταζόμενων δεδομένων σε σχέση με το κατώφλι που έχει οριοθετηθεί (peaks over thresholds - POT), χωρίς να υποθέτει δεδομένα με βαριές ουρές. Για δεδομένο κατώφλι $u = X_{k+1,T}$, το οποίο δίνεται από την $(k + 1)$ παρατήρηση του δείγματος που είναι διατεταγμένο με

φθίνουσα διάταξη, ορίζουμε:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u+y) + F(u)}{1 - F(u)}, y \geq 0$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και ως:

$$\bar{F}(u+y) = \bar{F}(u)\bar{F}(y)$$

όπου το $\bar{F}(u)$ μπορεί να υπολογιστεί από την συνάρτηση $\bar{F}_T(u) = k/T$ με το $F_T(u)$ να είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X . Για πολύ υψηλό κατώφλι:

$$\bar{F}_u(y) \approx 1 - G_{\xi, \hat{\beta}(u)}(y)$$

τέτοιο ώστε οι εκτιμήσεις των $\hat{\xi}, \hat{\beta}, 1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y)$ να παρέχουν μια εκτίμηση για το $\bar{F}_u(y)$.

Συνεπώς, η ουρά της κατανομής για το $X > u$ υπολογίζεται από την συνάρτηση:

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{k}{T} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}}$$

Την παραπάνω εξίσωση, αν την αντιστρέψουμε, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια εκτίμηση του ποσοστημορίου, δηλαδή:

$$\hat{x}_{p,k} = X_{k+1,T} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-p}{k/T} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

όπου $u = X_{k+1,T}$. Επιλέγοντας το κατώφλι u να είναι αρκετά υψηλό, τότε αυτό θα

μας οδηγήσει σε πολύ λίγες υπερβάσεις και άρα σε υψηλή διακύμανση για τον εκτιμητή, ενώ οι χαμηλές τιμές του u προκαλούν μεροληψία.

Παρόλο που η Θεωρία Ακραίων Τιμών είναι μια από τις υποψήφιες μεθόδους για να μοντελοποιήσουν την Αξία σε Κίνδυνο, η υπόθεσή της για ανεξαρτησία και ισονομία των τυχαίων μεταβλητών, είναι ακατάλληλη για τις περισσότερες αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου. Γι' αυτό τον λόγο η Θεωρία Ακραίων Τιμών μπορεί να εφαρμοστεί σε κατάλληλα φιλτραρισμένα δεδομένα. Οι συγγραφείς Diebold, Schuermann και Stroughair (1998) πρότειναν την προσαρμογή ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μοντέλου στα δεδομένα και έπειτα κατασκεύασαν και εκτίμησαν την ουρά των φιλτραρισμένων και τυποποιημένων καταλοίπων, $z_t = (r_t - \mu_t)/\sigma_t$, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο της Θεωρίας Ακραίων Τιμών. Με αυτό τον τρόπο παράγεται μια εκτίμηση για το τυποποιημένο ποσοστημόριο $Q_\lambda(z)$ και άρα για τον υπολογισμό της Αξίας σε Κίνδυνο έχουμε:

$$VaR_t = -(\mu_t + \sigma_t Q_\lambda(z))$$

Με έναν σωστό προσδιορισμό της δυναμικής των παραμέτρων θέσης και κλίμακας του μοντέλου και την εφαρμογή συνεπών εκτιμητών των παραμέτρων, τα κατάλοιπα του φιλτραρισμένου μοντέλου θα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, σύμφωνα με τις υποθέσεις των μοντέλων της Θεωρίας Ακραίων Τιμών.

4.6 Άλλες προσεγγίσεις

Υπάρχουν και άλλα μοντέλα που μπορούν να εκτιμήσουν την Αξία σε Κίνδυνο τα οποία είναι τα εξής:

1. Τα μακράς μνήμης -fractionally integrated GARCH models - FIGARCH τα οποία όσον αφορά την προβλεπτική τους ικανότητα, παρουσιάζουν μικτά αποτελέσματα. Ο Vilasuso (2002) έδειξε ότι το μοντέλο FIGARCH παρουσιάζει πολύ καλύτερες προβλέψεις σε σχέση με τα GARCH και IGARCH μοντέλα όταν αυτά χρησιμοποιούνται σε τιμές συναλλάγματος.
2. Τα Markov-switching GARCH μοντέλα. Όσον αφορά την προβλεπτική τους ικανότητα, αποδίδουν ομοίως με τα MixN-GARCH μοντέλα.
3. Οι Markov-switching multifractal processes . Αυτή η ειδική κατηγορία μοντέλων αποδίδει πολύ καλές εκτιμήσεις και εφαρμόζεται για μεσοπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες προβλέψεις.

Τρεις ακόμη κατηγορίες μοντέλων αξίζει να σημειωθούν για τη δυνατότητα πρόβλεψης της μεταβλητότητας που έχουν, και είναι τα εξής:

1. Μοντέλα Τεκμαρτής Μεταβλητότητας (Implied volatility models). Τα μοντέλα αυτά παρέχουν πολύ ανταγωνιστικές και αντιπροσωπευτικές προβλέψεις για την μεταβλητότητα.
2. Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας (Stochastic volatility models).
3. Πολυμεταβλητά GARCH μοντέλα (Multivariate GARCH models - MGARCH)

Για τα μοντέλα που αναφέραμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί κανείς να μελετήσει την εργασία των Keith Kuester, Stefan Mittnik και Marc S. Paoella η οποία είναι η Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies .

Κεφάλαιο 5

Εμπειρικά Αποτελέσματα

5.1 Εφαρμογή των μοντέλων σε πραγματικά δεδομένα

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε την χρησιμότητα των μοντέλων CAViaR θα πρέπει να κασκευάσουμε τη χρονοσειρά των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που μελετάμε με κατάλληλο τρόπο και να επιλέξουμε την συναρτησιακή μορφή που θα έχει το ποσοστημόριο. Πήραμε ένα δείγμα περίπου 5000 ημερήσιων τιμών των δεικτών, (λέμε περίπου διότι παρόλο που το έτος έχει 250 εργάσιμες ημέρες, ο κάθε δείκτης, για την χρονική περίοδο που μελετήσαμε, παρουσίασε διαφορετικά σύνολα ημερήσιων κλεισιμάτων), DAX, Dow Jones και FTSE και υπολογίσαμε τις ημερήσιες αποδόσεις ως εξής: λογαριθμίσαμε πρώτα τις τιμές κλεισίματος του δείκτη, έπειτα υπολογίσαμε την διαφορά της κάθε λογαριθμικής απόδοσης με την αμέσως προηγούμενή της και τέλος, το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάσαμε με το εκατό. Το εύρος του δείγματος είναι απο τις 3

Δεκεμβρίου του 1990 έως τις 30 Σεπτεμβρίου του 2010. Χρησιμοποιήσαμε το 85% των παρατηρήσεων του εκάστοτε δείγματος για να εκτιμήσουμε τα μοντέλα και το υπόλοιπο 15% για τον έλεγχο με τη χρήση των εκτός του δείγματος δεδομένα (out of sample test). Υπολογίσαμε την 1% και 5% ημερήσια Αξία σε Κίνδυνο χρησιμοποιώντας τα 4 μοντέλα CAViaR που αναφέραμε στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας μας. Οι εκτιμήσεις της Αξίας σε Κίνδυνο για 5% για τους τρεις παραπάνω δείκτες φαίνονται στους Πίνακες 5.1 και 5.2. Πιο συγκεκριμένα, στον πίνακα αυτόν καταγράφονται οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων, τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα και τα (μονόπλευρα) p-values, η τιμή της συνάρτησης ελαχιστοποίησης της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο (RQ), τη σχετική συχνότητα όπου η Αξία σε Κίνδυνο υπερβαίνει το ποσοστό που έχουμε υποθέσει (δηλαδή τις παραβιάσεις (Hits)) και τέλος, τα p-values του DQ ελέγχου (για τις τιμές εντός και εκτός του δείγματος). Για να υπολογίσουμε την Αξία σε Κίνδυνο με τα μοντέλα CAViaR, ορίζουμε το $f_1(\beta)$ να είναι το εμπειρικό ϑ - ποσοστημόριο των πρώτων 300 παρατηρήσεων. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο DQ για τα δεδομένα εκτός του δείγματος ήταν μία σταθερά, η πρόβλεψη της Αξίας σε Κίνδυνο, και οι πρώτες 4 υστερήσεις των παραβιάσεων. Για τον έλεγχο DQ για τα δεδομένα εντός του δείγματος, δεν συμπεριλάβαμε την σταθερά και την πρόβλεψη της Αξίας σε Κίνδυνο, διότι για μερικά μοντέλα παρουσιάστηκε συγγραμμικότητα με τον πίνακα των παραγώγων. Τα τυπικά σφάλματα και ο πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης για τον DQ έλεγχο για τα δεδομένα εντός του δείγματος, υπολογίστηκε με τέτοιο τρόπο όπως εκείνος περιγράφηκε στα Θεωρήματα 3 και 4. Η φόρμουλα υπολογισμού των \hat{D}_T και \hat{M}_T προήλθε χρησιμοποιώντας την εκτίμηση k-nearest neighbor με k=40 για 1% Αξία σε Κίνδυνο και k=60 για 5% Αξία σε Κίνδυνο.

Όσον αφορά τη συνάρτηση βελτιστοποίησης για τα παραπάνω μοντέλα, χρησιμο-

ποιήθηκε ο Nelder - Mead Simplex Algorithm και η μέθοδος quasi - Newton . Τα μοντέλα υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία. Δημιουργήσαμε n - διανύσματα χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη γεννήτρια τυχαίων αριθμών, μεταξύ του 0 και του 1. Υπολογίσαμε με την συνάρτηση παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο (RQ) για κάθε ένα από αυτά τα διανύσματα και επιλέξαμε τα m - διανύσματα που παρήγαγαν το πιο χαμηλό RQ κριτήριο ως αρχικές τιμές της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Για κάθε μια από αυτές τις αρχικές τιμές, τρέξαμε πρώτα τον αλγόριθμο Nelder - Mead . Έπειτα, τοποθετήσαμε τους βέλτιστους παράγοντες στον αλγόριθμο quasi - Newton και οι νέοι βέλτιστοι παράμετροι επιλέχθηκαν ως νέες αρχικές υποθέσεις για τον αλγόριθμο Nelder - Mead . Επαναλάβουμε την διαδικασία μέχρις ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης. Τέλος, επιλέξαμε το διάνυσμα που παρήγαγε το χαμηλότερο RQ κριτήριο.

Στα σχήματα από 5.1, 5.3 και 5.5 εμφανίζονται τα γραφήματα των μοντέλων CAViaR με την καμπύλη News Impact για το 1% Αξίας σε Κίνδυνο των δεικτών. Σημειώστε το κατά πόσο διαφέρουν τα μοντέλα Adaptive και Asymmetric Slope με τα άλλα δύο καθώς μελετάμε την καμπύλη News Impact . Πιο συγκεκριμένα, για τα Indirect GARCH και Absolute Value μοντέλα, οι παρελθοντικές αποδόσεις (είτε αρνητικές είτε θετικές) έχουν συμμετρική επίδραση στην Αξία σε Κίνδυνο. Στην περίπτωση του Adaptive μοντέλου, αντίθετα, εξετάζουμε το κατά πόσο οι παρελθοντικές τιμές των αποδόσεων υπερβαίνουν την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο ή όχι. Τέλος, η κοφτή διαφορά μεταξύ της επίδρασης των θετικών αποδόσεων και αρνητικών αποδόσεων στο μοντέλο Asymmetric Slope δείχνει ότι μπορεί να υπάρχουν σχετικές ασυμμετρίες στη συμπεριφορά του 1% ποσοστημορίου του χαρτοφυλακίου.

Επικεντρώνοντας τώρα την προσοχή μας στον Πίνακα 5.1, το πρώτο πράγμα που

παρατηρούμε είναι ότι συντελεστής του αυτοσυσχετιζόμενου όρου β_2 είναι πάντα στατιστικά σημαντικός (με $p\text{-value}=0$). Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει ότι το φαινόμενο της ομαδοποίησης της μεταβλητότητας είναι σχετικό με τις ουρές των κατανομών. Ένα δεύτερο ενδιαφέρον σημείο είναι η ακρίβεια που έχουν όλα τα μοντέλα, όσον αφορά τα ποσοστά των παραβιάσεων εντός του δείγματος (επειδή είναι πολύ κοντά στο ποσοστό της Αξίας σε Κίνδυνο που έχουμε οριοθετήσει, 1% ή 5%). Το γεγονός αυτό είναι εύλογο καθώς η αντικειμενική συνάρτηση της παλινδρόμησης στο ποσοστημόριο έχει καθοριστεί έτσι ώστε να επιτύχει αυτό το αποτέλεσμα. Τα αποτελέσματα για ποσοστό 1% της Αξίας σε Κίνδυνο έδειξαν ότι τα μοντέλα Symmetric Absolute Value, Asymmetric Slope και Indirect GARCH επιτυγχάνουν στο να περιγράψουν την εξέλιξη της αριστερής ουράς των τριών δεικτών που εξετάζουμε. Το συμπέρασμα αυτό προήλθε από το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των ελέγχων DQ για τα δεδομένα εντός του δείγματος (με βάση τα $p\text{-values}$) υπερβαίνουν το 1% επίπεδο σημαντικότητας, ενώ οι δείκτες DJ και FTSE αντέχουν και για 5% επίπεδο σημαντικότητας και για τα τέσσερα μοντέλα CAViaR . Η απόδοση του Adaptive μοντέλου είναι κατώτερη στα εκτός του δείγματος δεδομένα, παρόλο που τα ποσοστά των παραβιάσεων βρίσκονται σχετικά κοντά στο 1% (με εξαίρεση τον δείκτη FTSE που για επίπεδο σημαντικότητας 1% επιβιώνει του DQ τεστ για τα δεδομένα εκτός του δείγματος).

Στην περίπτωση του ποσοστού 5% της Αξίας σε Κίνδυνο έχουμε εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Όλα τα μοντέλα παρουσιάζουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για τις παραβιάσεις εντός του δείγματος γιατί οι τιμές τους προσεγγίζουν το ποσοστό του 5%. Αντίθετα, για τις παραβιάσεις των δεδομένων εκτός του δείγματος, μόνο το μοντέλο Adaptive κατάφερε να παρουσιάσει ποσοστα κοντά στο 5% για όλους τους εξεταζόμενους δείκτες (σημειώνουμε ότι και τα μοντέλα Indirect GARCH, Symmet-

ric Absolute Value παρουσιάζουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον δείκτη FTSE με τιμές κοντά στο ποσοστό 5%). Σημειώσαμε επίσης, ότι το Adaptive μοντέλο δεν απορρίπτεται από τους ελέγχους DQ σε επίπεδα σημαντικότητας 1% και 5% (συμπέρασμα που απορρέει από τα αντίστοιχα p-values των ελέγχων). Το μοντέλο Asymmetric Slope και για τους τρεις εξεταζόμενους δείκτες, μπορούμε να πούμε ότι παρέχει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για τα δεδομένα εντός του δείγματος, αλλά παρέχει μια πολύ φτωχή εκτίμηση για τα δεδομένα εκτός του δείγματος (με δυσκολία επιβιώνει ο δείκτης FTSE σε επίπεδο σημαντικότητας 1%). Η πτωχή απόδοση των δεδομένων εκτός του δείγματος για τα μοντέλα SAV, AS και Indirect GARCH και για τους δείκτες DAX και Dow Jones (σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$), μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι το τελευταίο μέρος του δείγματος (δηλαδή για το 15% των παρατηρήσεων που θέσαμε να είναι τα δεδομένα εκτός του δείγματος), χαρακτηρίζεται από μία ξαφνική ώθηση της μεταβλητότητας προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση και συμπίπτει μετά βίας με τα δεδομένα εκτός του δείγματος. Τέλος, είναι πολύ ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι στο μοντέλο AS ο συντελεστής του αρνητικού μέρους των στερημένων αποδόσεων για 1% Αξία σε Κίνδυνο για τον δείκτη FTSE δεν είναι στατιστικά σημαντικός, ενώ ο συντελεστής του θετικού μέρους των στερημένων αποδόσεων είναι στατιστικά σημαντικός. Διαφορετικά αποτελέσματα έχουμε για τον ίδιο δείκτη και το ίδιο μοντέλο για 5% Αξία σε Κίνδυνο. Εδώ και οι δυο συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί με p-values να προσεγγίζουν ή να είναι μηδέν. Αυτό υποδεικνύει την παρουσία σημαντικών ασύμμετρων επιδράσεων της Αξίας σε Κίνδυνο των παρελθοντικών αποδόσεων.

Το γεγονός ότι οι DQ ελέγχοι επιλέγουν διαφορετικά μοντέλα για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας, υποδεικνύει ότι η διαδικασία που διέπει την συμπεριφορά της

ουράς της κατανομής μπορεί να αλλάξει καθώς μετακινούμαστε έξω από την ουρά της κατανομής. Συγκεκριμένα, αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις υποθέσεις των μοντέλων GARCH και των RiskMetrics , αφού αυτές οι προσεγγίσεις υποθέτουν ότι η ουρά έχει την ίδια συμπεριφορά για όλες τις αποδόσεις. Ενώ τα μοντέλα GARCH μπορεί να είναι χρήσιμα για να περιγράψουν την εξέλιξη της μεταβλητότητας, τα αποτελέσματα της έρευνας μας, μας έδειξαν ότι μπορεί να παρέχουν μη ικανοποιητικά αποτελέσματα εκτίμησης όταν εφαρμόζονται στην ουρά των αποδόσεων.

Στο σημείο αυτό, είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι για την εφαρμογή των μοντέλων CAViaR και για την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας, χρησιμοποιήσαμε το μαθηματικό-στατιστικό πακέτο MATLAB και τους κώδικες που χρησιμοποίησαν οι Simone Manganelli και Robert Engle για την εκπόνηση της εργασίας τους με θέμα (CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles, 2004). Μπορεί κανείς να ανατρέξει στην ιστοσελίδα του Manganelli (www.simonemanganelli.org) και να βρεί αναλυτικά τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την δική τους έρευνα.

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα των δεικτών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

1% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE
Beta 1	0,277	0,127	0,068	0,148	0,210	0,023	0,400	0,130	0,059	0,865	0,377	1,088
<i>Standard Errors</i>	0,047	0,023	0,009	0,034	0,074	0,007	0,118	0,064	0,025	0,065	0,141	0,093
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,021	0,011	0,000	0,004	0,000
Beta 2	0,856	0,915	0,947	0,890	0,799	0,948	0,874	0,919	0,921			
<i>Standard Errors</i>	0,035	0,013	0,006	0,026	0,080	0,013	0,011	0,013	0,009			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,316	0,231	0,137	0,093	0,090	0,164	0,577	0,334	0,321			
<i>Standard Errors</i>	0,089	0,039	0,010	0,078	0,158	0,035	0,276	0,295	0,132			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,117	0,283	0,000	0,018	0,129	0,007			
Beta 4				0,304	0,693	0,060						
<i>Standard Errors</i>				0,057	0,306	0,043						
<i>P-values</i>				0,000	0,012	0,080						
RQ	166,86	136,28	109,07	164,19	129,53	105,76	168,24	135,72	107,43	190,49	144,50	129,11
Hits in-sample(%)	1,001	0,989	1,010	1,001	1,012	0,987	1,001	1,012	1,010	0,869	0,965	0,893
Hits out-of-sample(%)	2,128	2,000	1,729	2,128	3,467	1,729	1,329	2,667	1,463	1,197	1,733	1,064
DQ in-sample(p-values)	0,017	0,104	0,138	0,171	0,825	0,782	0,105	0,139	0,750	0,025	0,542	0,736
DQ out-of-sample(p-values)	0,004	0,024	0,117	0,017	0,000	0,002	0,919	0,000	0,753	0,000	0,000	0,039

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα των δεικτών για 5% Αξία σε Κίνδυνο

5% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE	DAX	DJ	FTSE
Beta 1	0,085	0,062	0,069	0,034	0,039	0,021	0,032	0,038	0,020	0,542	0,306	0,406
<i>Standard Errors</i>	0,011	0,011	0,006	0,007	0,014	0,005	0,019	0,011	0,006	0,074	0,037	0,047
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,000	0,052	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,915	0,929	0,920	0,927	0,923	0,937	0,911	0,920	0,901			
<i>Standard Errors</i>	0,016	0,015	0,006	0,011	0,037	0,007	0,007	0,006	0,003			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,165	0,121	0,168	0,034	0,008	0,167	0,232	0,147	0,247			
<i>Standard Errors</i>	0,027	0,017	0,009	0,039	0,034	0,010	0,381	0,122	0,053			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,193	0,403	0,000	0,271	0,114	0,000			
Beta 4				0,207	0,204	0,036						
<i>Standard Errors</i>				0,022	0,103	0,014						
<i>P-values</i>				0,000	0,024	0,005						
RQ	597,86	440,09	397,65	582,12	430,84	390,38	598,68	441,58	395,71	609,85	441,63	436,23
Hits in-sample(%)	5,002	4,967	4,980	5,026	4,991	4,980	4,979	5,061	4,956	4,767	4,614	4,416
Hits out-of-sample(%)	7,579	9,067	5,718	7,713	8,800	6,649	6,649	8,933	5,452	4,920	5,200	4,654
DQ in-sample(p-values)	0,008	0,025	0,602	0,049	0,434	0,060	0,006	0,004	0,489	0,822	0,107	0,714
DQ out-of-sample(p-values)	0,002	0,000	0,437	0,003	0,000	0,013	0,024	0,000	0,262	0,231	0,464	0,163

5.2 Ανάλυση μετοχών του δείκτη Dow Jones

Αφού αναλύσαμε στη προηγούμενη παράγραφο τρεις από τους μεγαλύτερους χρηματιστηριακούς δείκτες παγκοσμίως, στο σημείο αυτό θα προχωρήσουμε στην ανάλυση δώδεκα μετοχών που ανήκουν στον δείκτη Dow Jones. Πήραμε λοιπόν, όπως και προηγουμένως, ένα δείγμα από 4998 ημερήσιες τιμές κλεισίματος των μετοχών Bank of America, American Express Company, JP Morgan, Walt Disney, Boeing Co, Johnson and Johnson, Caterpillar, CSCO, Chevron Co, General Electric, Home Depot. Inc και Hewlett-Packard Co και υπολογίσαμε την διαφορά της κάθε λογαριθμικής απόδοσης με την αμέσως προηγούμενή της και τέλος, το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάσαμε με το εκατό. Το εύρος του δείγματος ήταν και εδώ από τις 3 Δεκεμβρίου του 1990 μέχρι τις 30 Σεπτεμβρίου του 2010. Χρησιμοποιήσαμε πάλι το 85% των παρατηρήσεων του εκάστοτε δείγματος για να εκτιμήσουμε τα μοντέλα και το υπόλοιπο 15% για τον έλεγχο των δεδομένων εκτός του δείγματος. Από τους πίνακες που ακολουθούν, καθώς και τα γραφήματα, θα εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την κάθε μετοχή. Σε πρώτο στάδιο θα αναλύσουμε τις πρώτες τρεις μετοχές, Bank of America, American

Express Company, JP Morgan, από τις δώδεκα που έχουμε επιλέξει και έπειτα, θα κάνουμε μια αναφορά και για τις υπόλοιπες.

Στα Σχήματα 5.7, 5.8 παρατηρούμε το γράφημα της Καμπύλης Νέας Επίδραση των μοντέλων CAViaR για τη μετοχή JP Morgan και τις εκτιμήσεις για 5% Αξία σε Κίνδυνο της μετοχής της Bank of America , αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι τα μοντέλα Adaptive και Asymmetric Slope διαφέρουν από τα άλλα δυο όταν πρόκειται για την Καμπύλη Νέας Επίδρασης. Για τα μοντέλα Indirect GARCH και Symmetric Absolute Value οι αποδόσεις του παρελθόντος (είτε θετικές είτε αρνητικές) έχουν συμμετρική επίδραση πάνω στην Αξία σε Κίνδυνο. Η έντονη ασυμμετρία που φαίνεται στο γράφημα της Καμπύλης Νέας Επίδρασης του μοντέλου Asymmetric Slope οφείλεται στο γεγονός ότι οι θετικές αποδόσεις μπορεί να έχουν μεγαλύτερη επίδραση πάνω στην εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο σε σχέση με τις αρνητικές. Όσον αφορά τα γραφήματα που παρουσιάζουν την Αξία σε Κίνδυνο για επίπεδο 5% της μετοχής της Bank of America , πρέπει να σημειώσουμε ότι εμφανίστικαν έντονες ακίδες για διαφορετικές χρονικές περιόδους με πιο σημαντική εκείνη της τραπεζικής κρίσης του 2008.

Επικεντρώνοντας τώρα την προσοχή μας στον Πίνακα 5.3 παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του αυτοπαλίνδρομου όρου β_2 είναι πάντα στατιστικά σημαντικός. Ένα δεύτερο σημαντικό στοιχείο, είναι ότι όλα τα μοντέλα παρουσίασαν ακρίβεια όσον αφορά τις παραβιάσεις (Hits) και για τα δύο επίπεδα Αξίας σε Κίνδυνο που έχουμε ορίσει για τα δεδομένα εντός του δείγματος. Τα αποτελέσματα για την Αξία σε Κίνδυνο σε επίπεδο 1% δείχνουν ότι για τα μοντέλα Symmetric Absolute Value , Asymmetric Slope οι τιμές των μετοχών JP Morgan και American Express Co κατάφεραν να αντέξουν τα DQ τεστ τόσο για τα εντός όσο και για τα εκτός του δείγματος δεδομένα. Στο μοντέλο Indirect GARCH μόνο η μετοχή της Bank of America άντεξε τα DQ τεστ

τόσο για τα εντός όσο και για τα εκτός του δείγματος δεδομένα, ενώ οι άλλες δύο μετοχές ανέξαν το τεστ μόνο για τα εντός του δείγματος δεδομένα. Τα αποτελέσματα του μοντέλου Adaptive είναι κατώτερα από τα άλλα τρία μοντέλα καθώς καμία μετοχή δεν άντεξε το DQ τεστ για τα δεδομένα εκτός του δείγματος, παρόλο που οι μετοχές των δύο τραπεζών άντεξαν για τα εντός του δείγματος δεδομένα.

Για επίπεδο 5% Αξίας σε Κίνδυνο παρουσιάστηκε μια διαφορετική εικόνα. Πιο συγκεκριμένα, σε όλα τα μοντέλα CAViaR είχαμε ικανοποιητικά αποτελέσματα για τα δεδομένα εντός του δείγματος, με εξαίρεση την μετοχή της Bank of America που απέτυχε το DQ τεστ για τα μοντέλα Asymmetric Slope και Adaptive. Επίσης, όλα τα μοντέλα παρουσιάζουν σχετική ακρίβεια για τις παραβιάσεις εντός του δείγματος με το Adaptive μοντέλο να υστερεί λιγάκι με τιμές κοντά στο 5%.

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα μετοχών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

1% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM
Beta 1	0,063	0,285	0,117	0,019	0,139	0,014	0,494	1,839	0,328	0,879	0,782	1,678
<i>Standard Errors</i>	0,012	0,085	0,036	0,008	0,057	0,021	0,258	1,919	0,201	0,098	0,135	0,004
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,001	0,008	0,007	0,254	0,028	0,169	0,051	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,960	0,906	0,938	0,967	0,926	0,967	0,852	0,858	0,921			
<i>Standard Errors</i>	0,009	0,024	0,035	0,012	0,020	0,019	0,021	0,078	0,012			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,122	0,193	0,188	0,125	0,188	0,155	0,723	0,497	0,397			
<i>Standard Errors</i>	0,029	0,037	0,113	0,048	0,028	0,087	0,214	0,798	0,044			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,048	0,004	0,000	0,037	0,000	0,267	0,000			
Beta 4				0,055	0,133	0,054						
<i>Standard Errors</i>				0,038	0,066	0,038						
<i>P-values</i>				0,073	0,023	0,078						
RQ	203,13	250,92	275,78	203,54	249,43	275,76	217,98	259,48	284,79	224,51	277,48	309,98
Hits in-sample(%)	1,012	1,012	1,012	1,012	1,012	1,012	1,060	1,060	1,012	0,848	0,895	0,918
Hits out-of-sample(%)	2,133	1,467	1,467	2,400	1,467	1,467	1,733	1,467	2,000	3,067	2,133	1,600
DQ in-sample(p-values)	0,005	0,776	0,805	0,000	0,781	0,799	0,292	0,807	0,853	0,527	0,001	0,731
DQ out-of-sample(p-values)	0,008	0,084	0,087	0,001	0,067	0,096	0,267	0,002	0,005	0,000	0,001	0,000

Παρακάτω θα παρουσιαστούν οι πίνακες με τα αποτελέσματα των μετρήσεων καθώς επίσης και οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων μετοχών. Για λόγους ευκολίας στην παρουσίαση, οι πίνακες αποτελούνται από τρεις μετοχές. Τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων για κάθε πίνακα είναι ανάλογα με τα συμπεράσματα που δόθηκαν για τους τρεις δείκτες και τις τρεις μετοχές που αναλύσαμε.

Σχήμα 5.12: Γραφήμα της Walt Disney

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα μετοχών για 5% Αξία σε Κίνδυνο

5% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM	BoA	AEC	JPM
Beta 1	0,037	0,118	0,084	0,011	0,069	0,023	0,263	0,278	0,222	0,327	0,374	0,434
<i>Standard Errors</i>	0,008	0,021	0,012	0,010	0,034	0,010	0,175	0,098	0,135	0,063	0,056	0,067
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,117	0,022	0,008	0,066	0,002	0,050	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,958	0,917	0,923	0,960	0,922	0,927	0,821	0,873	0,871			
<i>Standard Errors</i>	0,012	0,025	0,021	0,012	0,024	0,012	0,031	0,018	0,026			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,090	0,144	0,155	0,110	0,168	0,164	0,386	0,274	0,298			
<i>Standard Errors</i>	0,026	0,052	0,051	0,033	0,040	0,029	0,785	0,213	0,364			
<i>P-values</i>	0,000	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,312	0,099	0,206			
Beta 4				0,041	0,076	0,118						
<i>Standard Errors</i>				0,014	0,039	0,026						
<i>P-values</i>				0,001	0,026	0,000						
RQ	762,79	902,96	945,93	761,31	897,30	946,01	801,51	933,15	972,63	788,96	931,95	996,73
Hits in-sample(%)	5,062	4,992	5,015	5,086	5,015	4,992	5,204	5,180	5,133	4,709	4,803	4,803
Hits out-of-sample(%)	5,867	6,133	5,200	5,467	6,400	4,933	6,667	6,800	5,600	6,533	5,333	5,200
DQ in-sample(p-values)	0,056	0,833	0,998	0,008	0,923	0,772	0,899	0,416	0,954	0,042	0,408	0,065
DQ out-of-sample(p-values)	0,921	0,270	0,946	0,481	0,050	0,935	0,023	0,037	0,878	0,000	0,188	0,027

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα μετοχών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

1% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J
Beta 1	0,232	1,671	0,117	0,108	1,494	0,014	2,095	3,236	0,328	0,790	0,868	1,678
<i>Standard Errors</i>	0,079	0,555	0,036	0,070	0,267	0,021	1,439	2,221	0,201	0,178	0,131	0,004
<i>P-values</i>	0,002	0,001	0,001	0,062	0,000	0,254	0,073	0,073	0,051	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,894	0,564	0,938	0,893	0,544	0,967	0,826	0,765	0,921			
<i>Standard Errors</i>	0,038	0,125	0,035	0,034	0,050	0,019	0,064	0,105	0,012			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,291	0,535	0,188	0,304	0,525	0,155	0,547	0,691	0,397			
<i>Standard Errors</i>	0,105	0,095	0,113	0,107	0,058	0,087	0,238	1,242	0,044			
<i>P-values</i>	0,003	0,000	0,048	0,002	0,000	0,037	0,011	0,289	0,000			
Beta 4				0,281	0,595	0,054						
<i>Standard Errors</i>				0,075	0,078	0,038						
<i>P-values</i>				0,000	0,000	0,078						
RQ	271,51	254,22	275,78	271,07	252,26	275,76	291,34	255,34	284,79	288,38	262,96	309,98
Hits in-sample(%)	0,989	1,012	1,012	1,036	1,012	1,012	1,036	1,012	1,012	0,965	0,848	0,918
Hits out-of-sample(%)	1,467	1,867	1,467	1,200	1,867	1,467	1,733	1,733	2,000	1,333	1,467	1,600
DQ in-sample(p-values)	0,791	0,803	0,805	0,800	0,794	0,799	0,836	0,810	0,853	0,804	0,714	0,731
DQ out-of-sample(p-values)	0,804	0,060	0,087	0,976	0,074	0,096	0,004	0,034	0,005	0,686	0,000	0,000

Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα μετοχών για 5% Αξία σε Κίνδυνο

5% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J	WD	BCo	J&J
Beta 1	0,022	0,067	0,084	0,015	0,035	0,023	3,232	0,214	0,222	0,266	0,300	0,434
<i>Standard Errors</i>	0,007	0,015	0,012	0,009	0,012	0,010	2,686	0,079	0,135	0,069	0,049	0,067
<i>P-values</i>	0,001	0,000	0,000	0,053	0,002	0,008	0,114	0,003	0,050	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,982	0,950	0,923	0,980	0,951	0,927	0,458	0,922	0,871			
<i>Standard Errors</i>	0,009	0,012	0,021	0,008	0,011	0,012	0,327	0,012	0,026			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,081	0,000	0,000			
Beta 3	0,031	0,087	0,155	0,047	0,104	0,164	0,438	0,127	0,298			
<i>Standard Errors</i>	0,017	0,017	0,051	0,017	0,022	0,029	0,284	0,076	0,364			
<i>P-values</i>	0,036	0,000	0,001	0,003	0,000	0,000	0,061	0,048	0,206			
Beta 4				0,014	0,053	0,118						
<i>Standard Errors</i>				0,010	0,020	0,026						
<i>P-values</i>				0,068	0,004	0,000						
RQ	888,86	848,43	945,93	885,97	846,83	946,01	939,16	867,81	972,63	908,52	877,39	996,73
Hits in-sample(%)	5,015	5,015	5,015	5,015	4,992	4,992	5,086	5,062	5,133	4,780	4,850	4,803
Hits out-of-sample(%)	6,133	4,933	5,200	5,867	5,067	4,933	7,600	6,267	5,600	5,600	5,733	5,200
DQ in-sample(p-values)	0,879	0,962	0,998	0,914	0,744	0,772	0,660	0,975	0,954	0,559	0,672	0,065
DQ out-of-sample(p-values)	0,253	0,354	0,946	0,424	0,077	0,935	0,001	0,132	0,878	0,054	0,016	0,027

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα μετοχών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

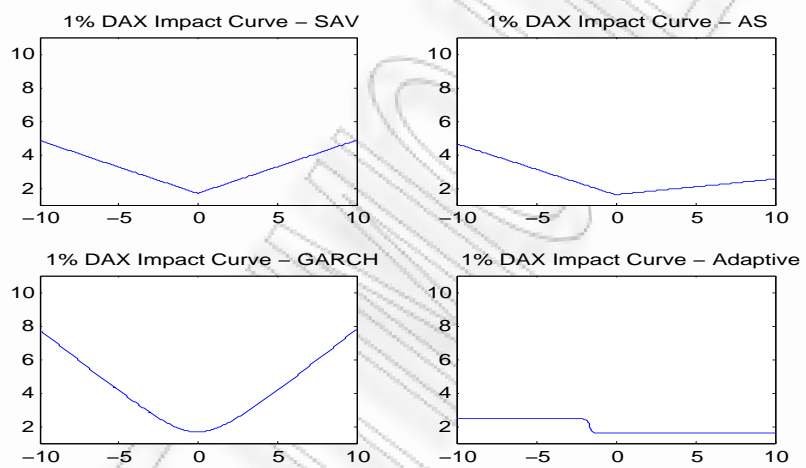
1% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE
Beta 1	0,617	0,247	0,067	0,170	0,309	0,268	10,581	3,349	1,412	0,783	0,959	0,385
<i>Standard Errors</i>	0,321	0,103	0,025	0,123	0,122	0,268	20,822	1,347	2,090	0,119	0,178	0,109
<i>P-values</i>	0,027	0,008	0,004	0,085	0,006	0,159	0,306	0,006	0,250	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,827	0,902	0,966	0,940	0,889	0,878	0,452	0,812	0,797			
<i>Standard Errors</i>	0,080	0,026	0,015	0,037	0,040	0,114	0,859	0,027	0,181			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,299	0,000	0,000			
Beta 3	0,256	0,255	0,083	0,145	0,316	0,295	0,885	0,689	0,552			
<i>Standard Errors</i>	0,117	0,069	0,029	0,078	0,095	0,228	0,387	0,471	1,127			
<i>P-values</i>	0,014	0,000	0,002	0,032	0,000	0,097	0,011	0,072	0,312			
Beta 4				0,037	0,087	-0,005						
<i>Standard Errors</i>				0,076	0,075	0,057						
<i>P-values</i>				0,315	0,122	0,468						
RQ	270,19	385,27	181,21	270,10	372,81	177,75	273,45	405,40	189,37	280,43	430,39	180,07
Hits in-sample(%)	1,012	1,012	1,012	0,989	0,989	0,989	1,012	1,036	1,012	0,895	0,895	0,965
Hits out-of-sample(%)	2,133	1,067	1,733	2,533	0,667	1,200	3,200	0,667	1,600	1,467	0,933	1,733
DQ in-sample(p-values)	0,033	0,829	0,795	0,136	0,746	0,712	0,161	0,763	0,842	0,724	0,084	0,727
DQ out-of-sample(p-values)	0,000	0,998	0,005	0,000	0,987	0,000	0,000	0,909	0,001	0,114	0,853	0,000

Πίνακας 5.8: Αποτελέσματα μετοχών για 5% Αξία σε Κίνδυνο

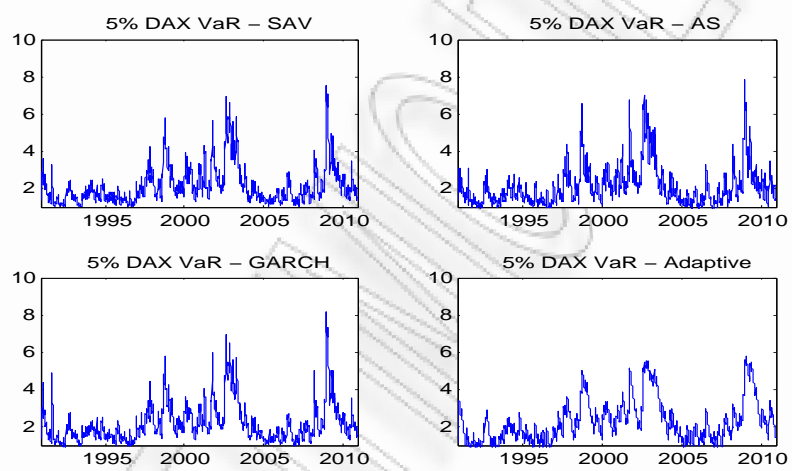
5% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE	CAT	CSC	CHE
Beta 1	0,013	0,067	0,123	0,001	0,050	0,188	4,344	0,013	1,498	0,176	0,346	0,116
<i>Standard Errors</i>	0,004	0,013	0,054	0,003	0,011	0,131	0,452	0,007	2,951	0,036	0,060	0,080
<i>P-values</i>	0,002	0,000	0,012	0,325	0,000	0,076	0,000	0,033	0,306	0,000	0,000	0,074
Beta 2	0,988	0,962	0,919	0,994	0,963	0,860	0,400	0,995	0,629			
<i>Standard Errors</i>	0,003	0,005	0,036	0,003	0,005	0,079	0,034	0,001	0,622			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,156			
Beta 3	0,023	0,055	0,094	0,018	0,065	0,203	0,479	0,006	0,194			
<i>Standard Errors</i>	0,004	0,007	0,040	0,004	0,007	0,052	0,114	0,489	0,223			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,495	0,192			
Beta 4				0,004	0,032	0,050						
<i>Standard Errors</i>				0,013	0,011	0,062						
<i>P-values</i>				0,371	0,002	0,207						
RQ	919,88	1294,30	651,03	918,77	1289,96	649,46	944,25	1342,79	667,77	930,18	1342,79	654,55
Hits in-sample(%)	4,992	4,992	5,015	4,968	5,015	5,015	5,039	4,992	5,039	4,850	4,780	4,968
Hits out-of-sample(%)	5,600	4,000	5,333	6,000	3,867	5,333	9,067	9,200	7,733	6,533	5,467	5,200
DQ in-sample(p-values)	0,055	0,142	0,669	0,004	0,617	0,293	0,624	0,212	0,211	0,060	0,107	0,990
DQ out-of-sample(p-values)	0,557	0,426	0,082	0,078	0,284	0,003	0,000	0,000	0,000	0,040	0,629	0,014

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα μετοχών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

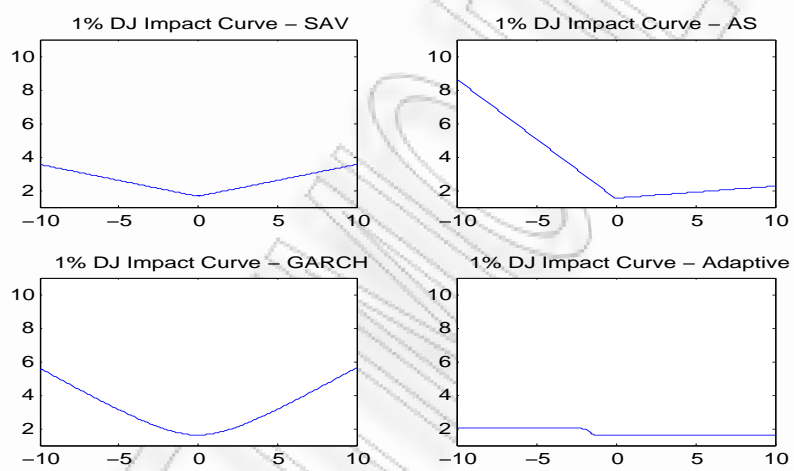
1% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	GE	HD	HP	GE	HD	HP	GE	HD	HP	GE	HD	HP
Beta 1	0,336	0,066	0,023	0,071	0,009	0,013	1,067	1,179	-0,016	1,340	1,309	0,958
<i>Standard Errors</i>	0,058	0,018	0,015	0,047	0,007	0,016	1,080	0,563	0,022	0,046	0,033	0,087
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,061	0,067	0,103	0,210	0,162	0,018	0,244	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,822	0,965	0,989	0,903	0,989	0,990	0,769	0,866	0,998			
<i>Standard Errors</i>	0,035	0,014	0,008	0,033	0,004	0,007	0,092	0,020	0,001			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,452	0,106	0,033	0,357	0,087	0,039	0,904	0,538	0,012			
<i>Standard Errors</i>	0,074	0,041	0,022	0,078	0,016	0,025	0,603	0,796	0,310			
<i>P-values</i>	0,000	0,005	0,065	0,000	0,000	0,057	0,067	0,249	0,485			
Beta 4				0,139	-0,027	0,014						
<i>Standard Errors</i>				0,065	0,008	0,026						
<i>P-values</i>				0,017	0,000	0,302						
RQ	194,69	254,41	366,42	191,45	248,09	365,61	207,01	274,63	377,77	217,11	281,09	387,35
Hits in-sample(%)	0,989	0,989	1,012	0,989	1,060	1,036	1,012	1,036	1,012	0,871	0,965	0,918
Hits out-of-sample(%)	2,000	1,200	1,200	1,733	1,200	1,200	2,400	1,200	3,600	1,333	1,200	1,067
DQ in-sample(p-values)	0,856	0,879	0,786	0,110	0,812	0,798	0,896	0,861	0,816	0,662	0,842	0,861
DQ out-of-sample(p-values)	0,037	0,042	0,100	0,000	0,005	0,074	0,003	0,598	0,000	0,067	0,072	0,050



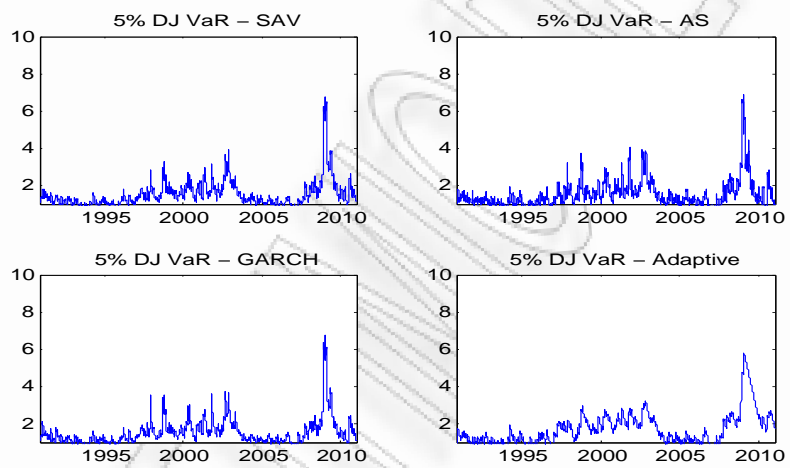
Σχήμα 5.1: Καμπύλη Νέας Επίδρασης των μοντέλων CAViaR για τον δείκτη DAX



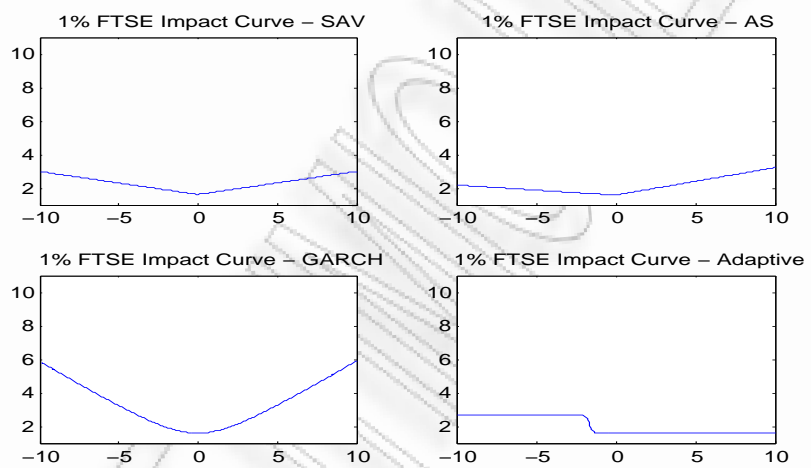
Σχήμα 5.2: Γραφήματα των μοντέλων CAViaR για 5% Αξία σε Κίνδυνο του δείκτη DAX



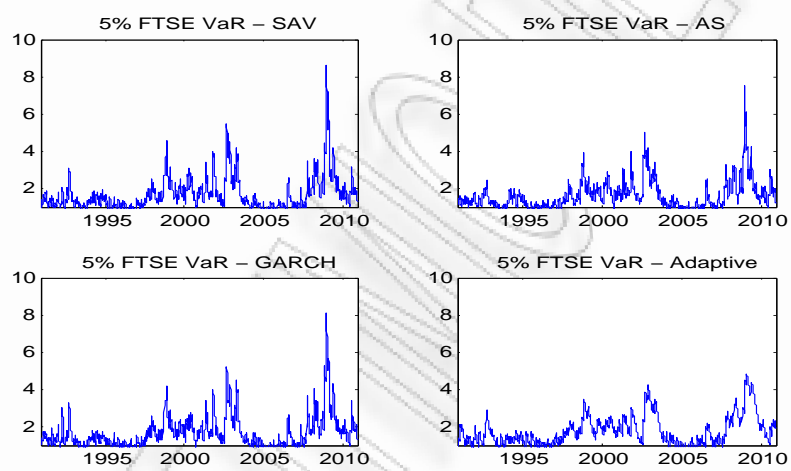
Σχήμα 5.3: Καμπύλη Νέας Επίδρασης των μοντέλων CAViaR για τον δείκτη Dow Jones



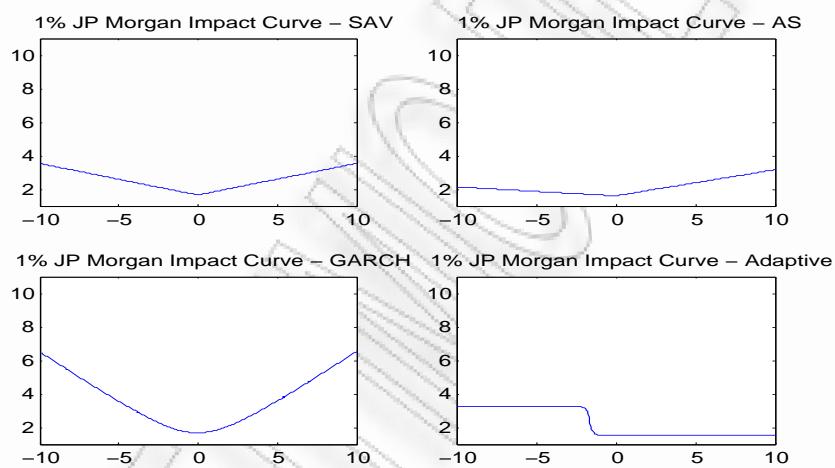
Σχήμα 5.4: Γραφήματα των μοντέλων CAViaR για 5% Αξία σε Κίνδυνο του δείκτη Dow Jones



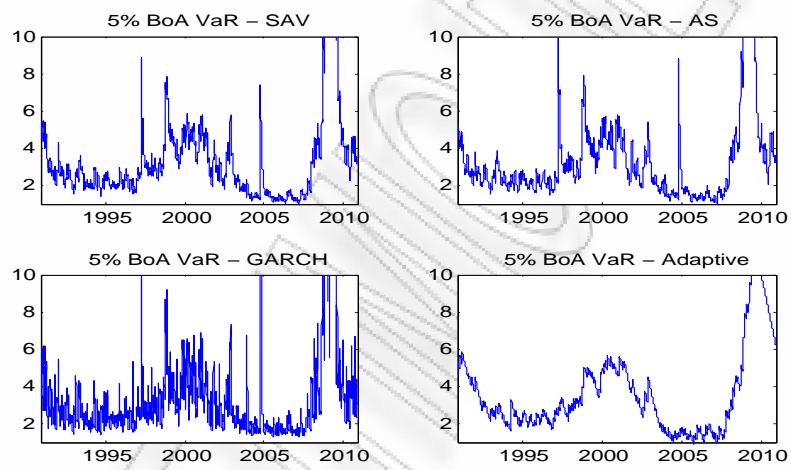
Σχήμα 5.5: Καμπύλη Νέας Επίδρασης των μοντέλων CAViaR για τον δείκτη FTSE



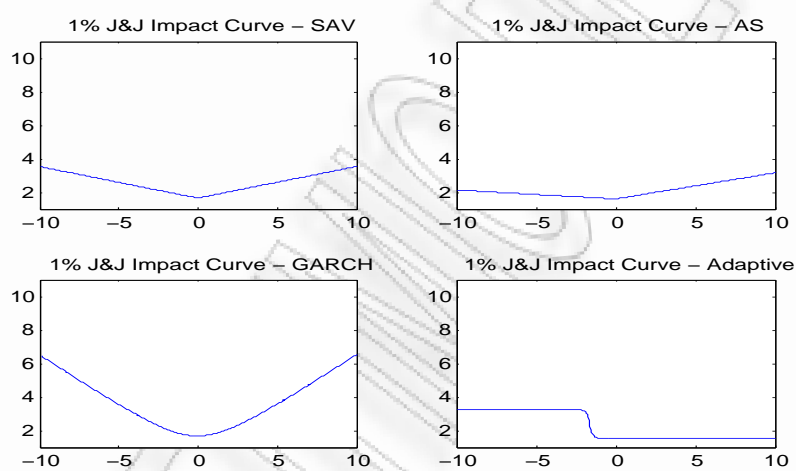
Σχήμα 5.6: Γραφήματα των μοντέλων CAViaR για 5% Αξία σε Κίνδυνο του δείκτη FTSE



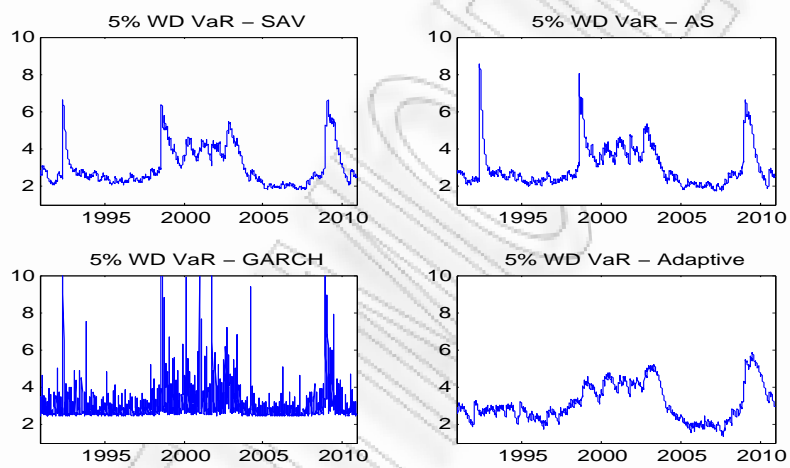
Σχήμα 5.7: Καμπύλη Νέας Επίδρασης των μοντέλων CAViaR για τη μετοχή της JP Morgan



Σχήμα 5.8: Γραφήματα των μοντέλων CAViaR για 5% Αξία σε Κίνδυνο τη μετοχή της Bank of America



Σχήμα 5.9: Καμπύλη Νέας Επίδρασης των μοντέλων CAViaR για τη μετοχή της Johnson and Johnson



Σχήμα 5.10: Γραφήματα των μοντέλων CAViaR για 5% Αξία σε Κίνδυνο τη μετοχή της Walt Disney

Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα μετοχών για 1% Αξία σε Κίνδυνο

5% Value at Risk	Symmetric Absolute Value			Asymmetric Slope			Indirect GARCH			Adaptive		
	GE	HD	HP	GE	HD	HP	GE	HD	HP	GE	HD	HP
Beta 1	0,055	0,042	0,020	0,063	0,019	0,009	1,286	0,019	0,021	0,298	0,225	0,314
<i>Standard Errors</i>	0,008	0,011	0,005	0,022	0,006	0,006	0,904	0,006	0,008	0,054	0,046	0,055
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,002	0,001	0,073	0,078	0,000	0,003	0,000	0,000	0,000
Beta 2	0,955	0,967	0,983	0,917	0,978	0,984	0,593	0,993	0,992			
<i>Standard Errors</i>	0,017	0,008	0,004	0,033	0,005	0,004	0,167	0,001	0,001			
<i>P-values</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
Beta 3	0,078	0,057	0,032	0,173	0,070	0,036	0,553	0,008	0,011			
<i>Standard Errors</i>	0,035	0,012	0,007	0,093	0,013	0,006	0,402	0,320	0,125			
<i>P-values</i>	0,012	0,000	0,000	0,032	0,000	0,000	0,084	0,491	0,466			
Beta 4				0,076	-0,004	0,019						
<i>Standard Errors</i>				0,036	0,010	0,011						
<i>P-values</i>				0,019	0,356	0,049						
RQ	713,59	923,96	1140,11	709,01	914,49	1139,83	750,18	948,15	1173,50	724,99	950,77	1159,23
Hits in-sample(%)	5,039	5,015	5,086	5,039	5,039	5,086	5,133	5,015	5,133	4,921	4,874	4,992
Hits out-of-sample(%)	6,133	5,467	4,267	6,267	5,467	4,267	7,333	8,133	5,867	5,467	4,933	4,800
DQ in-sample(p-values)	0,736	0,240	0,573	0,919	0,405	0,799	0,810	0,895	0,327	0,958	0,219	0,368
DQ out-of-sample(p-values)	0,175	0,383	0,143	0,037	0,200	0,062	0,002	0,000	0,014	0,333	0,398	0,118

Κεφάλαιο 6

Παραρτήματα

6.1 Παράρτημα Α - Υποθέσεις

Υποθέσεις Συνέπειας

Σ0. Έστω ότι (Ω, F, P) είναι ένας πλήρης χώρος πιθανότητας και $(\epsilon_{t\theta}, x_t)$, $t = 1, 2, \dots$ είναι τυχαίες μεταβλητές σε αυτόν το χώρο

Σ1. Η συνάρτηση $f_t(\beta) : \mathbb{R}^{n_t} \times B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε για κάθε $\beta \in B$, ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^p , $f_t(\beta)$ είναι μετρήσιμη δοθέντος της πληροφορίας που υπάρχει στον χώρο Ω_t και η $f_t(\beta)$ είναι συνεχής στο B , για $t = 1, 2, \dots$ για δεδομένη επιλογή επεξηγηματικών μεταβλητών $y_{t-1}, x_{t-1}, \dots, y_1, x_1$.

Σ2. Οι όροι των καταλοίπων $\epsilon_{t\theta}$ δημιουργούν μια σταθερή διαδικασία η οποία αποτελεί προϋπόθεση για όλες τις πληροφορίες του παρελθόντος, με συνεχή δεσμευμένη πυκνότητα $h_t(\epsilon|\Omega_t)$ και απο κοινού συνεχή πυκνότητα $h_t^{\epsilon, \Omega}(\epsilon, y, x)$.

Σ3. Υπάρχει $h > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $h_t(0|\Omega_t) \geq h$

Σ4. $|f_t(\beta)| < K(\Omega_t)$ για κάθε $\beta \in B$ και για όλα τα t , όπου $K(\Omega_t)$ είναι μια

πιθανή στοχαστική συνάρτηση μεταβλητών που ανήκουν στο σύνολο της πληροφορίας που λαμβάνουμε, τέτοια ώστε $E\left(|K(\Omega_t)|^r\right) \leq K_0 < \infty, r > 1$ για κάποια σταθερά K_0 .

Σ5. $E\left(|\epsilon_{t\theta}|\right) < \infty$ για όλα τα t .

Σ6. $\left([\theta - I(y_t < f_t(\beta))][y_t - f_t(\beta)]\right)$, υπακούει τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

Σ7. Για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει ένα $\tau > 0$, τέτοιο ώστε αν $\|\beta - \beta^0\| \geq \delta$ και $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf T^{-1} \sum P\left(|f_t(\beta) - f_t(\beta^0)| > \tau\right) > 0$.

Ασυμπτωτικές Υποθέσεις Κανονικότητας

ΑΥ1. Η $f_t(\beta)$ είναι διαφορίσιμη στο B και για όλα τα β και γ σε έναν χώρο u_0 των β^0 , τέτοιον ώστε $\|\beta - \gamma\| \leq d$ για d πολύ μικρό και για όλα τα t , ισχύει:

1. $\|\nabla f_t(\beta)\| \leq F(\Omega_t)$ όπου το $F(\Omega_t)$ είναι κάποια πιθανή στοχαστική συνάρτηση μεταβλητών που ανήκουν στο σύνολο της πληροφορίας που λαμβάνουμε και $E\left(|F(\Omega_t)|^3\right) \leq F_0 < \infty$ για μία σταθερά F_0 .
2. Η $\nabla f_t(\beta)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz η οποία είναι η $\|\nabla f_t(\beta) - \nabla f_t(\gamma)\| \leq M \|\beta - \gamma\|$ όπου $M < \infty$.

ΑΥ2. Έστω ότι,

1. $h_t(\epsilon|\Omega_t) \leq N < \infty$ για κάθε t
2. $h_t(\epsilon|\Omega_t)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Lipschitz η οποία είναι η $|h_t(\lambda_1|\Omega_t) - h_t(\lambda_2|\Omega_t)| \leq L|\lambda_1 - \lambda_2|$ όπου $L < \infty$ για κάθε t .

ΑΥ3. Υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\beta \in B$ και T επαρκώς μεγάλο, τότε

$$\det\left(T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\nabla' f_t(\beta) \nabla f_t(\beta)]\right) > \delta$$

ΑΥ4. Το $([\theta - I(y_t < f_t(\beta))] \nabla' f_t(\beta))$ ικανοποιεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Υποθέσεις Εκτίμησης του Πίνακα Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης

ΣΔ1. $\hat{c}_T/c_T \xrightarrow{p} 1$, όπου η μη στοχαστική ακολουθία c_T ικανοποιεί $c_T = o(1)$ και $c_T^{-1} = o(T^{1/2})$.

ΣΔ2. $E(|F(\Omega_t)|^4) \leq F_1 < \infty$, για όλα τα t και για κάποια σταθερά F_1 , όπου $F(\Omega_t)$ έχει καθοριστεί στην υπόθεση ΑΥ1.

Υποθέσεις για τον έλεγχο Dynamic Quantile

ΔΠ1. Το $\lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1} M_T M_T')$ συγκλίνει σε έναν μη μοναδιαίο πίνακα, όπου

$$M_T = (X'(\beta^0) - E(T^{-1} X'(\beta^0) H \nabla f(\beta^0))) D_T^{-1} \nabla' f(\beta^0).$$

ΔΠ2. Το $X(\beta)$ είναι διαφορετικό στοιχείο από το $\nabla f(\beta)$, ισχύει $\|X_t(\beta)\| \leq W(\Omega_t)$, όπου $W(\Omega_t)$ είναι μια πιθανή στοχαστική συνάρτηση μεταβλητών που ανήκουν στο σύνολο της πληροφορίας που διαθέτουμε, $E(|W(\Omega_t)[F(\Omega_t)]|^2) < \infty$ και $F(\Omega_t)$ έχει οριστεί στην υπόθεση ΑΥ1.

ΔΠ3. Το $X_t(\beta)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Lipschitz η οποία είναι η $\|X_t(\beta) - X_t(\gamma)\| \leq S \|\beta - \gamma\|$ όπου $S < \infty$.

ΔΠ4. Η σχέση $([X_t'(\beta) - [T^{-1} X_t'(\beta) h_t(0|\Omega_t) \nabla f_t(\beta)] D_T^{-1} \nabla' f_t(\beta)] Hit_t(\beta))$ ικανοποιεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

6.2 Παράρτημα Β - Αποδείξεις

Απόδειξη Θεωρήματος 4. Προσαρμόσαμε την εξάρτηση των $\hat{\beta}_T, X_T(\beta)$ και $Hit_t(\hat{\beta})$ στο μέγεθος του δείγματος T . Κατά προσέγγιση η μη συνεχής συνάρτηση $Hit_t(\hat{\beta})$ με $Hit_t^\oplus(\hat{\beta}) = \left[1 + \exp(\hat{\epsilon}_t/\hat{c}_T)\right]^{-1} - \theta \equiv I^*(\hat{\epsilon}_t) - \theta$, όπου $\hat{\epsilon}_t \equiv y_t - f_t(\hat{\beta})$ και \hat{c}_T ορίστηκαν από την υπόθεση $\Sigma\Delta 1$. Έπειτα

$\nabla_\beta Hit_t^\oplus(\hat{\beta}) = \frac{1}{\hat{c}_T} \exp(\hat{\epsilon}_t/\hat{c}_T) \left[1 + \exp(\hat{\epsilon}_t/\hat{c}_T)\right]^{-2} \nabla f_t(\hat{\beta}) \equiv k_c(\hat{\beta}) \nabla f_t(\hat{\beta})$. Σημειώνεται ότι ο όρος k_c είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Λογιστικής κατανομής με μέσο μηδέν και παράμετρο \hat{c}_T . Στον πίνακα $\nabla_\beta Hit_t^\oplus(\hat{\beta}) = K(\hat{\beta}) \nabla f_t(\hat{\beta})$ σημειώνουμε ότι ο $K(\hat{\beta})$ είναι διαγώνιος πίνακας με είσοδο $k_c(\hat{\epsilon}_t)$. Ξαναγράφοντας τώρα τον έλεγχο DQ σε όρους της προηγούμενης προσέγγισης και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, γράφουμε ότι :

$$T^{-1/2} X'(\hat{\beta}) Hit^\oplus(\hat{\beta}) = T^{-1/2} X'(\hat{\beta}) \left[Hit^\oplus(\beta^0) + K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta) D_T^{-1} D_T (\hat{\beta} - \beta^0) \right]$$

όπου το D_T έχει καθοριστεί και ερμηνευτεί στο Θεώρημα 2, και το β κυμαίνεται μεταξύ των $\hat{\beta}$ και β^0 . Λύνοντας την παραπάνω σχέση, μπορεί να δειχθεί ότι

$$T^{-1/2} D_T (\hat{\beta} - \beta^0) = T^{-1/2} \nabla' f(\beta^0) Hit(\beta^0) + o_p(1)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην υπόθεση $\Sigma 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} T^{-1/2} X'(\hat{\beta}) Hit^\oplus(\hat{\beta}) &= T^{-1/2} X'(\hat{\beta}) \left[Hit^\oplus(\beta^0) - T^{-1} K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta) D_T^{-1} \nabla' f(\beta^0) Hit(\beta^0) \right] + o_p(1) \\ &= T^{1/2} \left[T^{-1} \left(X'(\beta^0) - T^{-1} X'(\beta^0) H \nabla f(\beta^0) D_T^{-1} \nabla' f(\beta^0) \right) Hit(\beta^0) + \right. \\ &\quad \left. + T^{-1} \left(X'(\hat{\beta}) Hit^\oplus(\beta^0) - X'(\beta^0) Hit^\oplus(\beta^0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + T^{-1} \left[\left(T^{-1} X'(\hat{\beta}) K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta) \right) - \left(T^{-1} X'(\beta^0) K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta^0) \right) \right] D_T^{-1} \nabla' f(\beta^0) Hit(\beta^0) + \right. \end{aligned}$$

$$+ T^{-1} \left(X'(\beta^0) Hit^\oplus(\beta^0) - X'(\beta^0) Hit(\beta^0) \right) + \\ + T^{-1} \left[\left(T^{-1} X'(\beta^0) K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta^0) \right) - \left(T^{-1} X'(\beta^0) H \nabla f(\beta^0) \right) \right] D_T^{-1} \nabla' f(\beta^0) Hit(\beta^0) + o_p(1)$$

Αφού οι όροι στις τελευταίες τέσσερις γραμμές είναι όλοι $o_p(1)$, η εφαρμογή ενός κατάλληλου κεντρικού οριακού θεωρήματος δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ότι οι τελευταίοι δύο όροι είναι $o_p(1)$, καθώς οι υπόλοιποι μπορούν εύκολα να ελεγχθούν χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις που αναφέραμε στο Παράρτημα Α, και πιο συγκεκριμένα τις ΑΥ1, ΔΠ2 και ΔΠ3.

Για να αποδείξουμε ότι $Hit^\oplus(\beta^0) \xrightarrow{p} Hit(\beta^0)$, αφού ισχύει $I^*(|\epsilon_{t\theta}|) = 1 - I^*(-|\epsilon_{t\theta}|)$, έχουμε για κάθε t :

$$\left| Hit^\oplus(\beta^0) - Hit(\beta^0) \right| = \left| I^*(|\epsilon_{t\theta}|) \left[I(\epsilon_{t\theta} \geq 0) - I(\epsilon_{t\theta} < 0) \right] \right| = \\ = I^*(|\epsilon_{t\theta}|) \left[I(|\epsilon_{t\theta}| \geq T^{-d}) + I(|\epsilon_{t\theta}| < T^{-d}) \right] \equiv C + D$$

όπου το d είναι ένας θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε $(\hat{c}_T T^d)^{-1} \rightarrow \infty$. Για D μπορούμε να σημειώσουμε ότι $Pr(I(|\epsilon_{t\theta}| < T^{-d}) = 1) = O_p(T^{-d}) = o_p(1)$. Για C μπορούμε να σημειώσουμε ότι το $I^*(|\epsilon_{t\theta}|)$ φθίνει στο $|\epsilon_{t\theta}|$. Άρα

$$C \equiv I^*(|\epsilon_{t\theta}|) I(|\epsilon_{t\theta}| \geq T^{-d}) \leq I^*(T^{-d}) = \left[1 + \exp\left((\hat{c}_T T^d)^{-1}\right) \right]^{-1} \rightarrow 0$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να δείξουμε ότι $T^{-1} X'(\beta^0) K(\hat{\beta}) \nabla f(\beta^0) \xrightarrow{p} T^{-1} X'(\beta^0) H \nabla f(\beta^0)$. Δείχνουμε πρώτα ότι $K(\hat{\beta}) \xrightarrow{p} K(\beta^0)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα Μέσης Τιμής στον κάθε ένα όρο του διαγωνίου πίνακα $K(\hat{\beta})$, παίρνουμε $k_c(\hat{\epsilon}_t) = k_c(\epsilon_{t\theta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} k_c(\epsilon_{t\theta} - \delta_t(\cdot; \beta))(\hat{\beta} - \beta^0)$ όπου $\delta(\cdot; \beta) \equiv f_t(\cdot; \beta) - f_t(\cdot; \beta^0)$ και το $\bullet\beta$ κυμαίνεται μεταξύ των $\hat{\beta}$ και β^0 . Αφού ισχύει $\left| \frac{\partial}{\partial \beta} k_c(\epsilon_{t\theta} - \delta_t(\cdot; \beta)) \right| < \infty$ και $(\hat{\beta} - \beta^0) = o_p(1)$

τότε έχουμε $k_c(\hat{\epsilon}_t) = k_c(\epsilon_{t\theta}) + o_p(1)$. Το μόνο που παραμένει τώρα ναδειχθεί είναι ότι $(T^{-1}X'(\beta^0)K(\beta^0)\nabla f(\beta^0)) - (T^{-1}X'(\beta^0)H\nabla f(\beta^0)) = o_p(1)$. Μπορούμε να γράψουμε και :

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[k_c(\epsilon_{t\theta}) - E(k_c(\epsilon_{t\theta})|\Omega_t) \right] X'_t(\beta^0) \nabla f_t(\beta^0) + \\ + T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[E(k_c(\epsilon_{t\theta})|\Omega_t) - h(0|\Omega_t) \right] X'_t(\beta^0) \nabla f_t(\beta^0)$$

Πρώτα δείχνουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του $k_c(\epsilon_{t\theta})$ δοθέντος Ω_t είναι ίσο με $h(0|\Omega_t)$.

Έστω $k(u) \equiv e^u [1 + e^u]^{-2}$, τότε

$$E[k_c(\epsilon_{t\theta})|\Omega_t] = \int_{-\infty}^{\infty} k(u) h_t(u\hat{c}_t|\Omega_t) du \\ = h_t(0|\Omega_t) + 1/2 h_t''(0|\Omega_t) \hat{c}_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(u) u^2 du + o(\hat{c}_T^2) \\ = h_t(0|\Omega_t) + o(\hat{c}_T^2)$$

όπου στην πρώτη ισότητα πραγματοποιήσαμε αλλαγή μεταβλητών, στην δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε την επέκταση του Taylor στο $h_t(u\hat{c}_T|\Omega_t)$ γύρω από το μηδέν, και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $k(u)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας με πρώτη ροπή ίση με το μηδέν και πεπερασμένη δεύτερη ροπή. Ως εκ τούτου, οι τελευταίοι όροι της σχέσης (A2) είναι μηδέν. Ο πρώτος όρος αναμένουμε να είναι μηδενικός. Αν επίσης, η διακύμανση του συγκλίνει στο μηδέν, τότε σύμφωνα με την ανισότητα του Chebychev

έχουμε:

$$\begin{aligned} & E \left[T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[k_c(\epsilon_{t\theta}) - E(k_c(\epsilon_{t\theta}) | \Omega_t) \right] X'_t(\beta^0) \nabla f_t(\beta^0) \right]^2 \\ &= E \left[T^{-2} \sum_{t=1}^T \left[k_c(\epsilon_{t\theta}) - E(k_c(\epsilon_{t\theta}) | \Omega_t) \right]^2 \left[X'_t(\beta^0) \nabla f_t(\beta^0) \right]^2 \right] \\ &\leq (T\hat{c}_T)^{-2} \sum_{t=1}^T E \left[J \left[X'_t(\beta^0) \nabla f_t(\beta^0) \right]^2 \right] T^{-1} \hat{c}_T^{-2} O_p(1) = o_p(1) \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει διότι όλα τα γινόμενα είναι μηδέν σύμφωνα με τον Νόμο των Επαναλαμβανόμενων Προσδοκιών, ο όρος J στην πρώτη ανισότητα είναι κάποιος πεπερασμένος αληθινός αριθμός, και οι υπόλοιποι όροι ακολουθούν τις συνθήκες ΔΠ2 και ΣΔ1 που ορίσαμε στο Παράρτημα Α. Τέλος, η απόδειξη του τελευταίου μέρους του Θεωρήματος αυτού είναι ανάλογη με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.

Βιβλιογραφία

- [Amemiya, T. 1982] , Two Stage Least Absolute Deviations estimators, *Econometrica*, 50:689 - 711
- [Basle Committee on Banking Supervision, 1996] , Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks
- [Basle Committee on Banking Supervision, 2005] , International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework
- [Basel Committee on Banking Supervision 2006] International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework (Comprehensive version). Available from <http://www.bis.org> (accessed August 2008).
- [Bloomfield,P. and W.L. Steiger, 1983] , *Least Absolute Deviations: Theory, Applications and Algorithms*, Boston: Birkhauser.
- [Berkowitz J. and J. O'Brien, 2002] , How Accurate are VaR models at Commercial Banks, *Journal of Finance* LVII: 1093-1111.
- [Bollerslev T. 1986] , Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31: 307-327.

- [Bollerslev T. and J.M. Wooldridge 1992] , A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, *Journal of Political Economy* 96:116-131.
- [Boudoukh,J., M. Richardson and R.F. Whitelaw 1998] , The Best of Both Worlds, *Risk*, 11:64 - 67
- [Buchinsky, M. and J. Hahn 1998] , An Alternative Estimator for the Censored Quantile Regression Model, *Econometrica*, 66: 653-71.
- [Carol Alexander 2008] , Market Risk Analysis vol4 , VaR Models
- [Chernozhukov, V. 1999] , Specification and Other Test Processes for Quantile Regression, mimeo, Stanford University.
- [Christoffersen, P. F. 1998] , Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review*, 39: 841-62.
- [Danielsson, J. and C.G. de Vries 2000] , Value-at-Risk and Extreme Returns, *Annales d'Economie et de Statistique*, 60: 239-70.
- [Diebold F.X., T. Schuermann and J.D. Strouhair 1998] , Pitfalls and Opportunities in the use of Extreme Value Theory in Risk Management, Working paper 98-10, University of Pennsylvania.
- [Dupacova, J. 1987] , Asymptotic Properties of Restricted L1-Estimates of Regression, in: Y. Dodge, eds., *Statistical Data Analysis Based on the L1-Norm and Related Methods*, North-Holland, Amsterdam.
- [Embrechts P. C. Kluppelberg and T. Mikosch 1997] , Modelling External Events for Insurance and Finance, Berlin: Springer.

- [Engle, R.R. 2002] , “New Frontiers for ARCH Models”, forthcoming *Journal of Applied Econometrics*
- [Engle, R. F. and V. Ng 1993] , Measuring and Testing the Impact of News On Volatility, *Journal of Finance*, 48: 1749-78.
- [Giot P. and S. Laurent 2004] , Modelling Daily VaR Using Realized Volatility and ARCH Type Models, *Journal of Empirical Finance* 11: 379-398.
- [Granger, C.W.J., H. White and M. Kamstra 1989] , Interval Forecasting. An Analysis Based Upon ARCH-Quantile Estimators, *Journal of Econometrics*, 40: 87-96.
- [Haas M., S. Mittnik and M.S. Paoletta 2004a] , Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Financial Econometrics*, 2: 211-250.
- [Huber, P.J. 1967] , The Behaviour of Maximum Likelihood Estimates under Non-standard Conditions, *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium*, 4: 221-33.
- [J.L. Horowitz and S. Lee 2004] , Nonparametric estimation of an Additive Quantile Regression Model
- [Jureckova, J. and B. Prochazka 1993] , Regression Quantiles and Trimmed Least Squares Estimators in Nonlinear Regression Models, *Journal of Nonparametric Statistics*, 3: 202-22.
- [K.Kuester, S.Mittnik and M.S. Paoletta 2005] , VaR Prediction: A Comparison of Alternative Strategies

- [Koenker, R. and Kevin F. Hallock, 2000] , Quantile Regression, An Introduction
- [Koenker, R. and G. Bassett 1978] , Regression Quantiles, *Econometrica*, 46: 33-50.
- [Koenker, R. and G. Bassett 1982] , Robust Tests for Heteroscedasticity Based on Regression Quantiles, *Econometrica*, 50: 43-61.
- [Koenker, R. and B.J. Park 1996] , An Interior Point Algorithm for Nonlinear Quantile Regression, *Journal of Econometrics*, 71: 265-83.
- [Koenker, R. and Q. Zhao 1996] , Conditional Quantile Estimation and Inference for ARCH models, *Econometric Theory*, 12: 793-813.
- [Kould, H.L. and A.K.E. Saleh 1995] , Autoregression Quantiles and Related Rank-Scores Processes, *The Annals of Statistics*, 23: 670-89.
- [McNeil, A.J. and R. Frey 2000] , Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, *Journal of Empirical Finance*, 7: 271-300.
- [Mittnik S. and M.S. Paoella 2000] , Conditional Density and VaR Prediction of Asian Currency Exchange rates, *Journal of Forecasting* 19: 313-333.
- [Mukherjee, K. 1999] , Asymptotics of Quantiles and Rank Scores in Nonlinear Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 20: 173-92.
- [Oberhofer, W. 1982] , The Consistency of Nonlinear Regression Minimizing the L1 Norm, *The Annals of Statistics*, 10: 316-19.

- [Pickands J. III 1975] , Statistical Inference Using Extreme order Statistics, *Annals of Statistics* 3:119-131.
- [Portnoy, S. 1991] , Asymptotic Behavior of Regression Quantiles in Non-stationary, Dependent Cases, *Journal of Multivariate Analysis*, 38: 100-13.
- [Powell, J. 1983] , The Asymptotic Normality of Two-Stage Least Absolute Deviations Estimators, *Econometrica*, 51: 1596-75.
- [Powell, J. 1984] , Least Absolute Deviations Estimation for the Censored Regression Model, *Journal of Econometrics*, 25: 303-25.
- [Powell, J. 1986] , Censored Regression Quantiles, *Journal of Econometrics*, 32: 143-55.
- [Powell, J. 1991] , Estimation of Monotonic Regression Models Under Quantile Restriction, in: *Nonparametric and Semiparametric Methods in Economics and Statistics*, Barnett et al., eds., Cambridge University Press.
- [R.F.Engle and S. Managanelli 2002] , CAViaR, Conditional Autoregressive VaR by Regression Quantiles
- [RiskMetrics 1996] , Technical Document, Morgan Guarantee Trust Company of New York.
- [Schwert, G.W.] , “Why does stock market volatility change over time?,” *Journal of Finance* 44 (1988), 1115 - 53.
- [Studer, G. and L’othi, H.-J. 1997] , Quadratic maximum loss for risk measurement of portfolios. Risklab report.

[Szegf, G. (ed.) 2004] Risk Measures for the 21st Century. John Wiley Sons, Ltd, Chichester.

[Taylor, Stephen J.] , Modelling Financial Time Series, John Wiley and Sons Ltd. (1986).

[van de Geer, S. 2000] , Empirical Processes in M-Estimation, Cambridge University Press.

[Wagner Piazza Gaglianone, L. Renato Lima and O. Linton 2008] ,Evaluating VaR models via Quantile Regression.

[Weiss, A. 1991] , Estimating Nonlinear Dynamic Models Using Least Absolute Error Estimation, *Econometric Theory*, 7: 46-68.

[White, H. 1980] , A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica*, 48: 817-38.

[White, H. 1994] , Estimation, Inference and Specification Analysis, Cambridge University Press.