## Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

**Μεταπτυχιακή Διατριβή**

| | |
|---|---|
| Τίτλος Διατριβής | **Ειδικά Θέματα Βελτιστοποίησης** |
| Ονοματεπώνυμο Φοιτητή | **Σπυρίδων Κορδολαίμης** |
| Πατρώνυμο | **Ανδρέας** |
| Αριθμός Μητρώου | **ΜΠΠΛ / 09025** |
| Επιβλέπων | **Ευάγγελος Φούντας, Καθηγητής** |

Ημερομηνία Παράδοσης **Νοέμβριος 2011**

Μεταπτυχιακή Διατριβή

**Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή**

| | | |
|---|---|---|
| (υπογραφή) | (υπογραφή) | (υπογραφή) |
| Ε. Φούντας<br>Καθηγητής | Γ. Τσιχριντζής<br>Καθηγητής | Π.Γ. Τσικούρας<br>Καθηγητής |

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

# 1. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## 1.1 Στόχοι και σκοποί

Σε αυτό το κεφάλαιο:

- ❖ θα εισαγάγουμε στα προβλήματα βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζουν τους εξισωτικούς περιορισμούς,
- ❖ θα δηλώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα Lagrange που δίνει τις απαραίτητες προϋποθέσεις για μια λύση σε αυτά τα προβλήματα,
- ❖ θα εξετάσουμε πού το θεώρημα Lagrange δεν εφαρμόζεται και γιατί,
- ❖ θα χρησιμοποιήσουμε αυτό για να αναπτύξουμε μια μέθοδο που λύνει προβλήματα βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς.

## 1.2 Συμπεράσματα

Αφού εργαστείτε μέσω αυτού του κεφαλαίου, θα πρέπει να είστε σε θέση:

- ➢ να γράφετε την τυποποιημένη μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς,
- ➢ να αναγνωρίζετε πώς ορισμένα προβλήματα μπορούν να ξαναγραφούν σε τυποποιημένη μορφή,
- ➢ να δηλώσετε το θεώρημα Lagrange,
- ➢ να καταλάβετε τη σημασία των περιορισμών από την άποψη της ερμηνείας του υπολογισμού της μεθόδου των Lagrangean πολλαπλασιαστών,
- ➢ να καταλάβετε το ρόλο των τιμών-σκιών(shadow prices) που εφαρμόζονται από τους Lagrangean πολλαπλασιαστές,
- ➢ να εφαρμόσετε τη διαδικασία cookbook της §5.10 και να λύσετε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με τους εξισωτικούς περιορισμούς.

## 1.3 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης όταν βρισκόμαστε αντιμέτωποι με τους περιορισμούς υπό μορφή ισοτήτων. Ο βασικός τρόπος για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι το θεώρημα Lagrange, το οποίο θα εισαχθεί στην §5.6. Αφού εισαγάγουμε σε αυτό, θα εξετάσουμε πού μπορεί να χρησιμοποιηθεί επιτυχώς, και πού να αναλυθεί. Μετά από αυτό, αναπτύσσουμε μια διαδικασία cookbook για προβλήματα βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς και εξετάζουμε μερικά παραδείγματα.

Εντούτοις, προτού να μπορέσουμε να εισαγάγουμε το θεώρημα, πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε την τυποποιημένη διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησής μας. Μέσω του κινήτρου, θα ακολουθήσουμε αρχικά μία ανακριβή, αν και φαινομενικά αποδεκτή, προσέγγιση σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Από εκεί, κινούμαστε προς μια επίσημη μελέτη αυτού του τύπου προβλήματος βελτιστοποίησης, που εισάγει την τυποποιημένη μορφή.

## 1.4 Δήλωση του προβλήματος

Υιοθετούμε αρχικά μια σκόπιμα αποδεχτή μέθοδο σε ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης, και βλέπουμε όπου αυτό αποτυγχάνει.

### 1.4.1 Παράδειγμα : Λανθασμένο ξεκίνημα - άμεση αντικατάσταση

Ας εξετάσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $f(x,y,) = x^2 - y^2$ στον κύκλο μονάδων, δηλ. σε εκείνα τα σημεία (x,y) έτσι ώστε $x^2 + y^2$. Ίσως φαίνεται ένα λογικό βήμα να αντικαταστήσουμε, για παράδειγμα, το y ως προς x, όπου δίνει :

$$y^2 = 1 - x^2 =\wedge> \ y = \sqrt{1-x^2}$$

Σε αυτό το σημείο, τα προειδοποιητικά όργανα θα πρέπει να ηχούν στο κεφάλι σας δεδομένου ότι η εισαγωγή μιας τετραγωνικής ρίζας φέρνει πολλές ασάφειες. Παραδείγματος χάριν, πρέπει αυθαίρετα να απομακρύνουμε έναν βραχίονα του κύκλου, για να είμαστε καθορισμένοι με σαφήνεια. Θα πρέπει έτσι, να είμαστε ήδη προσεκτικοί σε οποιαδήποτε λύση κι αν μας προσφέρει η μέθοδος αυτή. Συνεχίζοντας με την προσέγγισή μας, ξαναγράφουμε τη συνάρτηση f ως προς x για να πάρουμε μια νέα συνάρτηση και να βελτιστοποιήσουμε :

$$\mathbf{h(x) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1, \ \ x \in [-1,1].}$$

Από τις πρώτου-όρου (first-order) παραγωγές, βρίσκουμε το μοναδικό κρίσιμο σημείο :

$$\boldsymbol{h'(x) = 4x \Rightarrow x = 0}$$

Αυτό παράγει μια βέλτιστη αξία του $h(0) = -1$.

Δεδομένου ότι το x = 0 βρίσκεται μέσα στο διάστημα [-1,1], μπορούμε να απευθυνθούμε στους (second-order) δεύτερου-όρου του θεωρήματος 4.5 και να εξετάσουμε :

$$\boldsymbol{h'' = 4 > 0}$$

Ως εκ τούτου το μόνο κρίσιμο σημείο που έχουμε βρει είναι το ελάχιστο της συνάρτησης h.

Αναλύοντας τώρα πίσω στο αρχικό μας πρόβλημα, τα μόνα κρίσιμα σημεία που έχουμε βρει είναι τα (0, - 1) και (0, 1) που παράγουν μια ελάχιστη τιμή - 1 για τη συνάρτηση f.

Αντιμέτωποι με αυτό το αποτέλεσμα, θα πρέπει φυσικά να υποβάλουμε στον εαυτό μας κάποια ερωτήματα :

**1.** Αναμένουμε να έχουμε εκεί ένα μέγιστο στο πρόβλημα; (Ίσως θα έπρεπε να έχουμε υποβάλει πρωτύτερα αυτήν την ερώτηση.)

**2.** Εάν υπάρχει ένα, γιατί δεν θα μπορούσαμε να το βρούμε χρησιμοποιώντας τους first και second-order όρους;

**3.** Πώς μπορούμε να αλλάξουμε την προσέγγισή μας για να αποφύγουμε τέτοιες παραλείψεις;

Η πρώτη ερώτηση προσεγγίζεται φυσικότερα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Weierstrass. Αρχικά, σημειώνουμε ότι η f είναι η διαφορά μεταξύ των δύο τετραγωνικών όρων, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, αλλά και σε οποιοδήποτε υποσύνολο γενικά του $\mathbb{R}^2$. Η περιοχή είναι ο κύκλος μονάδων, και καθορίζεται έτσι από την άποψη τόσο μιας συνεχούς συνάρτησης όσο και μιας ισότητας. Έχοντας τώρα ως δεδομένο ένα προηγούμενο αποτέλεσμα, μπορούμε με βεβαιότητα να συμπεραίνουμε ότι αυτό είναι κλειστό. Είναι επίσης μη κενό (non-empty), δεδομένου ότι περιέχει τουλάχιστον τα σημεία (0,1) και (0,-1). Κατά συνέπεια, το θεώρημα του Weierstrass μας λέει ότι αυτή η συνεχής συνάρτηση επιτυγχάνει και τις μέγιστες αλλά

και τις ελάχιστες τιμές της στο μη-κενό, συμπαγή κύκλο μονάδων. Έχουμε καθορίσει ήδη παραπάνω την ελάχιστη τιμή, αλλά η μέθοδός μας αυτή απέτυχε εξ ολοκλήρου ακόμη και όταν προτείναμε να εμφανίζεται ένα μέγιστο.
Αφότου έχουμε εισαχθεί στη διαδικασία cookbook, θα λύσουμε κατάλληλα αυτό το πρόβλημα ούτως ώστε να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε ότι οι μέγιστες τιμές επιτυγχάνονται για x = - 1 και x = 1. Προσδοκώντας λοιπόν το αποτέλεσμα αυτό, μπορούμε να δώσουμε μια απάντηση για τη δεύτερη ερώτηση την οποία και θέσαμε παραπάνω : το γεγονός δηλαδή ότι η αληθινή λύση δεν βρίσκεται στο εσωτερικό διάστημα [-1,1] αλλά στα άκρα του.

Η απάντηση στην τελευταία μας ερώτηση θα εξεταστεί λεπτομερώς στα επόμενα τμήματα. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι για να την προσεγγίσουμε. Αφενός μεν, μπορούμε να αλλάξουμε το πρόβλημά μας έτσι ώστε οποιεσδήποτε τέτοιες λύσεις ορίου προκύπτουν να αποτελούν εσωτερικά σημεία μιας πολύ μεγαλύτερης περιοχής : οι όποιες όπως αποδεικνύεται τελικά αυτές που μας δίνει η μέθοδος των Lagrangean πολλαπλασιαστών. Αφετέρου δε, όπου αντιμετωπίζουμε ακόμα τις λύσεις ορίου στο τροποποιημένο πρόβλημα, πρέπει να εξετάσουμε αυτά τα σημεία χωριστά. Μπορούμε, παραδείγματος χάριν, να αξιολογήσουμε τη συνάρτηση που μεγιστοποιείται σε αυτά τα πρόσθετα σημεία και να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της γύρω από αυτά.

Πράγματι εάν είχαμε δοκιμάσει αυτήν την τελευταία προσέγγιση για την παραπάνω ερώτηση, θα έπρεπε πρώτα να έχουμε συνειδητοποιήσει ότι ο υπολογισμός θα ήταν από μόνος του ανεπαρκής για να χαρακτηρίσει τη συμπεριφορά της συνάρτησης h στα σημεία x = - 1 και x = 1. Έπειτα θα το είχαμε αξιολογήσει σε αυτά τα σημεία για να λάβουμε μια κοινή τιμή στο 1. Τέλος, εάν εξετάζουμε τις μικρές τιμές μακριά από τα σημεία x = - 1 και x = 1, π.χ. για μικρό ε > 0 τότε :

$$\mathbf{h(\pm(1-\varepsilon)) = 2(1-\varepsilon)^2 - 1 = 1 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2 = 1 - 2\varepsilon(2-\varepsilon)}, \text{ Όπου } \mathbf{2\varepsilon(2-\varepsilon) > 0}$$

Δεδομένου τώρα ότι αυτό είναι αυστηρά λιγότερο όταν h (±l) = 1, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα τελικά σημεία είναι μέγιστες τιμές. Επιστρέφοντας στο αρχικό μας πρόβλημα, θα υποστηρίζαμε ότι η συνάρτηση f επιτυγχάνει τις μέγιστες τιμές της στα σημεία (-1,0) και (1,0).

## 1.5 Η τυποποιημένη μορφή

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στο $\mathbb{R}^n$ ενδιαφέρεται για την εύρεση των μέγιστων ή ελάχιστων τιμών κάποιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ άνω του συνόλου $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Εάν οι περιορισμοί καθορίζονται από την άποψη των ισοτήτων $g_i\ (x) = 0$ για κάποιες συναρτήσεις $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i = 1,…, k, τότε καλούμε το πρόβλημα, πρόβλημα βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς στο $\mathbb{R}^n$.

Σε αυτό το πλαίσιο :

- η συνάρτηση f καλείται αντικειμενική συνάρτηση.
- το σύνολο D καλείται σύνολο περιορισμού, και
- οι συναρτήσεις $g_i$, i = 1,…, k , καλούνται εξισωτικοί περιορισμοί.

Η τυποποιημένη μορφή του περιορισμού που τίθεται για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς είναι :

$$\boldsymbol{D = U \cap [x \in \mathbb{R}^n \,|g_i\ (x) = 0,\ i = 1,\dots,k]}$$

Εδώ το U είναι ένα ανοικτό σύνολο, και είναι συνήθως όλο το $\mathbb{R}^n$.

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, είναι συχνά χρησιμότερο να καταγραφθεί αυτό πλήρως ως :

$$\max \quad f(x),$$

$$\text{s.t.} \quad gi(x)=0, \qquad i=1,...,k.$$

### 1.5.1 Παράδειγμα

Στο παράδειγμα αυτό, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $f\,(x,y) = x^2 - y^2$, την οποία περιορίζουμε για να ενεργήσουμε επάνω στον κύκλο μονάδων. Αυτό μας δίνει το σύνολο περιορισμού :

$$D = \mathbb{R}^2 \cap (x,y \in \mathbb{R}\ |x^{2-}y^2\text{-}1) = 0,$$

Κατά συνέπεια, με τυποποιημένο έντυπο, το πρόβλημά μας γράφεται ως εξής :

$$\max \quad f(x) = x^2 - y^2, \; x \in U$$

$$\text{μ.π.} \quad g_1(x) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ή, στη συμπαγή μορφή :

$$\max \quad f(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$\text{όταν} \quad x \in \mathbb{R}^2 \cap (x,y \in \mathbb{R} \,|x^2 + y^2 - 1 = 0)$$

## 1.6 Το Θεώρημα Lagrange

Έστω ότι $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ και $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots, k$ με $C^1$ συναρτήσεις όπου U ένα ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε :

1. $x^*$ είναι ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο της f στο σύνολο

$$\boldsymbol{D = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|g_i(x) = 0, I = 1,\ldots,k\}},$$

2. και τα παράγωγα $Dg_i\ (x^*)$, $i$=1,…,$k$ από ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων.

Έπειτα εμφανίζονται $\lambda_i^*$, $i = 1,\ldots,k$ έτσι ώστε

$$\boldsymbol{Df\,(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* Dg_i\ (x^*) = 0} \quad (5.1)$$

Τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν καθ' όλη τη διάρκεια του κεφαλαίου θα τείνουν να εξετάσουν **Α)** τους περιορισμούς και **Β)** τα κοινά λάθη κατά την χρησιμοποίηση της θεωρίας.

### 1.6.1 Απαραίτητοι εναντίον ικανοποιητικών όρων

Το θεώρημα Lagrange μπορεί και παρέχει όλους εκείνους τους απαραίτητους αλλά μη ικανοποιητικούς όρους που απαιτούνται για να βρεθούν τα ακρότατα. Εντούτοις, από μόνο του δεν είναι σε θέση να εγγυηθεί την ύπαρξη των λύσεων στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τι θα μπορούσε όμως έπειτα να πάει στραβά; Κατ' αρχάς, σημειώστε τι δηλώνει το θεώρημα : εάν υπάρξει μια σφαιρική λύση και οι περιορισμοί ικανοποιούν σε αυτό το σημείο, κατόπιν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το σφαιρικό βέλτιστο θα προκύψει ως λύση στις Lagrange εξισώσεις. Έτσι, εάν δεν υπάρξει καμία σφαιρική λύση, η μέθοδος Lagrangean φυσικά και δεν θα αποδώσει. Στο παράδειγμα 5.2 εξετάζουμε μια περίπτωση όπου δεν εμφανίζεται κανένα σφαιρικό μέγιστο ή ελάχιστο, αλλά όπου και αν οι περιορισμοί κρατούν μπορεί να βρεθεί μια λύση στις Lagrange εξισώσεις.

### 1.6.2 Παράδειγμα : Εύρεση του ολικού μεγίστου

$$\max \quad f(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$\text{μ.π.} \quad g\{x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Οι περιορισμοί λοιπόν όπως βλέπουμε κρατούν παντού, δεδομένου ότι έχουμε τη συνάρτηση $Dg(x,y) = (1,1)$. Οι Lagrangean εξισώσεις με τη σειρά τους είναι οι εξής :

$$2x - \lambda = 0, \quad (5.2)$$

$$2y - \lambda = 0, \quad (5.3)$$

$$x + y - 1 = 0, \quad (5.4)$$

Οι εξισώσεις (5.2) και (5.3) θέτοντας x = y, και μαζί με την εξίσωση (5.4) παράγει τη λύση :

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f(x^*, y^*) = 0$$

Επομένως, όπως πολύ καλά μπορούμε να δούμε από το αποτέλεσμα που προκύπτει από την προηγούμενη σχέση, έχουμε μόνο **«ένα»** και **«μοναδικό»** σημείο, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι ένα τοπικό ελάχιστο. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι απεριόριστη άνω και κάτω στη γραμμή x + y = 1 από μια πολύ απλή (και σαφή) αντικατάσταση :

$$\boldsymbol{f(x, 1\text{-}x) = x^3 - (1\text{-}x)^3 = 2x^3 - 1 + 3x - 3x^2} \rightarrow \pm\infty$$

καθώς $\boldsymbol{x} \rightarrow \pm\infty$

Κατά συνέπεια, ούτε οι περιορισμοί ή η ύπαρξη μιας λύσης στις Lagrange εξισώσεις δεν μπορούν να ενεργήσουν ως εγγύηση στην ύπαρξη μιας σφαιρικής λύσης. Κάποιος πρέπει πάντα να βάζει κάποια προκαταρκτική ανάλυση στο πρόβλημα προτού να εφαρμοστεί ο υπολογισμός. Πράγματι, αυτό θα είναι το πρώτο βήμα στη διαδικασία cookbook μας.

### 1.6.3 Τοπικά εναντίον σφαιρικά βέλτιστων σημείων

Εδώ αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι το θεώρημα 5.1 μπορεί να πει μόνο για τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα. Άλλες μέθοδοι πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να αποφασίσουν εάν τέτοια σημεία είναι επίσης σφαιρικά μέγιστα ή ελάχιστα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι όλα τα σφαιρικά μέγιστα (ή ελάχιστα) είναι επίσης τοπικά μέγιστα (ή ελάχιστα) και πρέπει έτσι να ικανοποιήσουν τους όρους του θεωρήματος Lagrange. Εντούτοις, το θεώρημα μπορεί να παρέχει πολλές λύσεις, όχι όμως για όλα που είναι σφαιρικά μέγιστα. Ακόμα, ένα πρόβλημα μπορεί να μην έχει κανένα σφαιρικό μέγιστο ή ελάχιστο αλλά μόνο τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

### 1.6.4 Παράδειγμα : Η κυβική συνάρτηση.

$$\mathbf{f\ (x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1}$$

όπου έχει τα στάσιμα σημεία της στο x = 1 και στο x = 2. Στο x = - 1 τώρα, έχουμε την $f''(-1) = -3$, ούτως ώστε αυτό να μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα τοπικό μέγιστο. Τέλος, στο x = 2, έχουμε την $f''(2) = 3$, έτσι ώστε αυτό να μπορεί να είναι ένα τοπικό ελάχιστο.

Εντούτοις, η συνάρτηση f είναι απεριόριστη άνω και κάτω, παρατηρώντας την $\boldsymbol{f(x)} \to \pm\infty$ καθώς $\boldsymbol{x} \to \pm\infty$, αντίστοιχα.

## 1.7 Απόδειξη του θεωρήματος Lagrange

Η απόδειξη του θεωρήματος Lagrange μπορεί να θεωρείται ότι είναι δύσκολη, καλώντας το Implicit Θεώρημα Συνάρτησης προκειμένου να λάβει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Συμπεριλαμβάνεται βέβαια εδώ, όχι απλά και μόνο προς χάριν της πληρότητας, αλλά και για να επεξηγήσει την ανάγκη των περιορισμών ως προς την χρησιμοποίηση της Lagrangean μεθόδου. Εδώ, οι περιοριστικές συνθήκες απαιτούνται ρητά για να λάβουν μια λύση για τις Lagrangean εξισώσεις. Κατά κάποιον άλλο τρόπο, η μέθοδος Lagrangean δεν μας λέει τίποτα για ένα σημείο στο οποίο οι περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν να κρατήσουν. Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης σε τέτοια σημεία πρέπει να καθοριστεί από τα άλλα μέσα.

Υποθέστε ότι $x^*$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο (μια παρόμοια απόδειξη ισχύει για ένα τοπικό μέγιστο).

Αρχικά, εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}^n$ και ήμαστε αντιμέτωποι για $k \leq n$ εξισώσεις περιορισμού. Για ότι ακολουθεί, θα ήταν χρήσιμο να αναλύσουμε την περιοχή $\mathbb{R}^n$ σε δύο υποπεριοχές $\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{R}^{n-k}$.

Κατά συνέπεια κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ γίνεται $x = (y,z)$, όπου $y = (x_{1,\ldots,}x_k) \in \mathbb{R}^k$ και $z = (x_{k-1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Ειδικότερα, η λύση μας $x^* \in \mathbb{R}^n$ γίνεται $( y^*,x^* )$.

Κρατώντας αυτήν την διάσπαση στις μεταβλητές, θα γράψουμε :

$$Df_y\left(y,z\right)=\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x_1},\dots,\frac{\vartheta f}{\vartheta x_k}\right),\quad Df_z\left(y,z\right)=\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x_{k+1}},\dots,\frac{\vartheta f}{\vartheta x_n}\right),$$

έτσι ώστε $Df\,(y,z) = \big(Df_y\,(y,z),\, Df_z\,(y,z)\big)$

Ομοίως, μπορούμε να αναλύσουμε και το $Dg\,(y,z)$ σε $Dg_y\,(y,z)$

$$Dg_y\left(y,z\right)=\begin{pmatrix}\frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_1} & \cdots & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\vartheta g_k}{\vartheta x_k} & \cdots & \frac{\vartheta g_k}{\vartheta x_k}\end{pmatrix}$$

και για $Dg_z\,(y,z)$

$$Dg_z\left(y,z\right)=\begin{pmatrix}\frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_{k+1}} & \cdots & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_{n-k}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\vartheta g_k}{\vartheta x_{k+1}} & \cdots & \frac{\vartheta g_k}{\vartheta x_{n-k}}\end{pmatrix}$$

Τέλος, θα χρειαστεί να παρουσιάσουμε και την ύπαρξη των $\lambda_i^*$, $i = 1,\dots,k$, τα οποία ικανοποιούν τους first-order όρους για τις Lagrangean εξισώσεις.

Εδώ θα είναι χρήσιμο να δειχτούν αυτοί ως $1{\times}k$ διάνυσμα $\lambda = (\lambda_{1,\dots,}\lambda_{\kappa})$. Κατά συνέπεια, με αυτήν την notational στενογραφία, ο στόχος μας μπορεί τώρα να γραφτεί ως απόδειξη της ύπαρξης του $\lambda^*$ έτσι ώστε :

$$\boldsymbol{Df_y\,(y^*, z^*) + \lambda^*\, Dg_y\,(y^*, z^*) = 0} \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{Df_z\,(y^*, z^*) + \lambda^*\, Dg_z\,(y^*, z^*) = 0} \quad (5.6)$$

Σε αυτό το σημείο, σημειώνουμε ότι στις περιπτώσεις που οι περιοριστικές συνθήκες κρατούν στο $x^* = (\ y^*, z^*\ )$, έχουμε ότι τα διανύσματα που αποτελούν την $k \times k$ μήτρα $Dg_y(\ y^*, z^*\ )$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έτσι ώστε αυτή η μήτρα να είναι πλήρους τάξης και επομένως να χαρακτηρίζεται ως μετατρέψιμη.

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα πρέπει να απευθυνθούμε στο Implicit Θεώρημα Συνάρτησης. Αυτό δεν είναι ένα απλό θεώρημα, που είτε αποδέχεται είτε αποδεικνύεται, και πριν το αποδεχτούμε (χωρίς απόδειξη) θα προσπαθήσουμε να ξεκινήσουμε με την εισαγωγή του. Υποθέστε ότι μας δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Για κάποιο $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$ μπορούμε να εξετάσουμε το **«επίπεδο συνόλου» (level set)** ή contour

$$C(x^*,y^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = f(x^*,y^*)\}$$

Τώρα, για οποιοδήποτε σημείο (x, y) σε αυτό το περίγραμμα, μπορούμε να αναμένουμε ότι η x-μεταβλητή καθορίζεται σιωπηρά από την τιμή της στο περίγραμμα(contour) και η y-μεταβλητή από την αντίστοιχή της.

Για συγκεκριμένο παράδειγμα, εξετάστε τη γραμμή $x + y = 1$. Σαφώς, αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός περιγράμματος της συνάρτησης $f(x,y)=x+y$, που καθορίζεται από το σημείο (1, 0). Για οποιοδήποτε σημείο σε αυτήν την γραμμή, μπορούμε να εξετάσουμε τη συνάρτηση :

$$\mathbf{h(y) = f(1,0) - y}\ ,$$

και σημειώνουμε ότι έχουμε : $\boldsymbol{f(h(y),y) = f(1,0)}$

Αυτό είναι μια μάλλον απλή περίπτωση, όπου για f δίνεται μια ακριβή μορφή, έτσι ώστε να μπορούμε να καθορίσουμε τη συνάρτηση h. Εντούτοις, στην κατάσταση που μπορεί να μην έχουμε πολλές πληροφορίες για την f, μπορούμε να κάνουμε ακόμα μια αξίωση ότι κάποια συνάρτηση h καθορίζεται τουλάχιστον σιωπηρά (εν τούτοις ίσως όχι ρητά);

Το Implicit Θεώρημα Συνάρτησης λέει ότι αυτό συμβαίνει, αλλά με ορισμένους περιορισμούς. Γενικεύοντας την παραπάνω ερώτηση, το Implicit Θεώρημα Συνάρτησης ρωτά εάν, λαμβάνοντας υπόψη μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $n > m$, αυτό είναι δυνατό να εκφράσει την τιμή μερικών μεταβλητών στην περιοχή από την άποψη των υπόλοιπων μεταβλητών σε ένα δεδομένο σύνολο επιπέδων; Η απάντηση είναι ότι αυτό μπορεί να είναι δυνατό, αν και μπορούμε να περιμένουμε μόνο $x, y, z$ μια τοπική αντιπροσώπευση στην καλύτερη περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σημείωσή μας, γυρίζουμε τώρα σε μια δήλωση (χωρίς απόδειξη) :

## 1.8 Θεώρημα Συνάρτησης Implicit

Έστω p : $U \rightarrow \mathbb{R}^{m}$ με μία $C^1$ συνάρτηση και U ένα ανοιχτό υποσύνολο στο $\mathbb{R}^{k+m}$. Υποθέτουμε ότι για κάποια σημεία $(x^*,y^*) \in U$, $Dp_y\ (x^*, y^*)$ είναι μετατρέψιμο και $p\ (x^*, y^*) = c$. Τότε εμφανίζεται ένα γειτονικό $V \subset \mathbb{R}^k$ για $x^*$, και η συνάρτηση $h : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε :

**1.** $(x,h(x)) \in U$ για όλα τα $x \in V$,
**2.** $h\ (x^*) = y^*$ και
**3.** $p\ (x,h(x)) = c$ για όλα τα $x \in V$.

Το παράγωγο του h για οποιοδήποτε $x \in U$ μπορεί να ληφθεί μέσω του κανόνα αλυσίδων :

$$\boldsymbol{Dh(x) = (Dp_y\,(x,y))^{-1} \times Dp_x\,(x,y)}$$

Στη συνέχεια, παίρνουνε το Implicit Θεώρημα Συνάρτησης για την δεδομένη κατάσταση που επικρατεί, δηλαδή όπου $p=g$, $m=n-k$ και $c=0$ (ο οποίος είναι ένας περιορισμός που ισχύει για τη $g(x)=0$). Ενώ το $Dg_y(y,z)$ παραμένει ακόμα μετατρέψιμο στο βέλτιστο σημείο $(y^*, z^*)$, παρατηρούμε ότι εκεί εμφανίζεται **A)** ένα ανοικτό σύνολο $V \in \mathbb{R}^{n-k}$ και **B)** η $C^1$συνάρτηση $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ έτσι ώστε :

- $z^* \in V$
- $h\ (z^*) = y^*$
- $g\ (h(z),z) = 0$ για όλα τα $z \in V$

Στην πραγματικότητα, διαφοροποιώντας την εξίσωση περιορισμού που δίνεται στην τελευταία γραμμή όσον αφορά το z, έχουμε :

$$\mathbf{0=}\boldsymbol{Dg_y\,(h(z),z)} \times \boldsymbol{Dh(z)+Dg(h(z),z)} \times \mathbf{1}$$

Μετατρέποντας την $Dg_y$ στο $(y^*,z^*)$ μας δίνει :

$$\boldsymbol{Dh(z^*)=-(Dg_y(y^*,z^*))^{-1}} \times \boldsymbol{Dg_z(y^*,z^*)} \quad (5.7)$$

Ανακαλούμε ότι πρέπει να βρούμε ένα $\lambda^*$ που λύνει τις εξισώσεις (5.5) και (5.6). Η εκτίμηση της εξίσωσης (5.5) πρέπει να προτείνει :

$$\boldsymbol{\lambda^* = Df_y\,(y^*,z^*\,)} \times \boldsymbol{(Dg_y(y^*,z^*))^{-1}} \quad (5.8)$$

Post-multiplying(πολλαπλασιαστών) Dgy $(y^*,z^*)$ δίνει μια έκφραση για Dfy $(y^*,z^*)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5.5). Ισχύει το ίδιο για την (5.6);

Ανάλογα με το ποιος είναι ο τρόπος με τον οποίο λάβαμε το $\lambda^*$, θα χρειαστεί να εξετάσουμε τη συνάρτηση $f\,(h(z),z)$. Δεδομένου ότι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι αυτή έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το $x^* = (y^*, z^*)$, κατόπιν, από τους first-order όρους του θεωρήματος 4.3, το παράγωγο πρέπει να είναι ισούται με μηδέν (0) στο $z^*$. Δηλαδή χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδων :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{Df_y(y^*,z^*)} \times \boldsymbol{Dh(z^*)} \times \boldsymbol{Df_z(y^*,z^*)} \times \mathbf{1}$$

Εντούτοις, έχουμε ήδη μια έκφραση για το $Dh\,(z^*)$στην εξίσωση (5.7), η οποία, με την παραπάνω αντικατάσταση, παράγει :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{-Df_y(y^*,z^*)} \times \boldsymbol{(Dg_y(y^*,z^*))^{-1}} \times \boldsymbol{Dg_z(y^*,z^*)} + \boldsymbol{Df_z(y^*,z^*)}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφρασή μας για $\lambda^*$ από την εξίσωση (5.8), έχουμε :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{-\lambda^* Dg_z(y^*,z^*)} + \boldsymbol{Df_z(y^*,z^*)}$$

η όποια είναι πράγματι η επιθυμητή εξίσωση (5.6).

## 1.9 Οι περιοριστικές συνθήκες

Έχουμε ήδη δει στην απόδειξη του θεωρήματος Lagrange ότι αυτό είναι **«απαραίτητο»** για να καθορίσει τις λύσεις των εξισώσεων Lagrange. Κατά συνέπεια, εάν αυτό αποτύχει, δεν μας παρέχεται καμία απολύτως εγγύηση ότι η μέθοδος Lagrangean θα μπορέσει να παραγάγει κάποιο βέλτιστο σημείο.

### 1.9.1 Παράδειγμα : Οι περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν, οι Lagrangean εξισώσεις μένουν αδιάλυτες

min   f(x,y) = x2 + y2,

μ.π.   g(x,y)=y2-(x-l)3 = 0.

Η καμπύλη περιορισμού, χαρακτηρίζεται ως ένα **lemniscate**. Ένα γρήγορο γράφημα πρέπει να δείξει ότι εκείνο το $x \geq 1$ και ότι η καμπύλη έχει έναν ακιδωτό όταν x = 1.

Έχοντας ως δεδομένο το γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί την εξίσωση ενός κύκλου, υπάρχει μια πολύ εύκολη γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Προσπαθούμε δηλαδή, να καταφέρουμε βρούμε εκείνον τον κύκλο της μικρότερης ακτίνας, η οποία είναι κεντροθετημένη στην προέλευση και η οποία συναντά το lemniscate. Γραφικά, θα πρέπει να μπορούμε να δούμε ότι αυτό εμφανίζεται στο σημείο x = 1, ούτως ώστε ένα ελάχιστο να βρίσκεται στο σημείο (1, 0).

Εντούτοις, η συνάρτηση περιορισμού έχει την παράγωγο :

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} -3(x-1)^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

και έτσι $Dg(1,0) = (0,0)$, έτσι ώστε οι περιοριστικές συνθήκες να αποτυγχάνουν στο ελάχιστο. Πράγματι, εάν συνεχίσουμε με τον υπολογισμό, θα διαπιστώσουμε ότι οι εξισώσεις Lagrangean δεν παράγουν καμία λύση.

Το παραπάνω αποτελεί μια τετριμμένη περίπτωση δεδομένου ότι ενώ δεν μπορούμε να βρούμε οποιεσδήποτε λύσεις των εξισώσεων Lagrangean, μπορούμε φυσικά να εξετάσουμε εκείνα τα σημεία όπου οι περιοριστικές συνθήκες απέτυχαν και που ανακαλύπτουν έπειτα το σφαιρικό μας βέλτιστο.

### 1.9.2 Παράδειγμα : Οι περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν, οι Lagrangean εξισώσεις διαλύονται

$$\textbf{max} \quad f(x,y) = 2x+3y$$

$$\textbf{s.t}\ \mathrm{g(x,y)} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$

Το πρόβλημα με τη συνάρτηση περιορισμού εδώ είναι ότι το παράγωγο διάνυσμά του δεν είναι καθορισμένο με σαφήνεια κατά μήκος των αξόνων :

$$Dg\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

Στην πραγματικότητα, γεωμετρικά, μπορούμε πολύ εύκολα να καθορίσουμε ότι το μέγιστο βρίσκεται στον άξονα $x$ στο (25,0), παράγοντας την $f$ (25,0) = 50. Οι εξισώσεις Lagrangean μπορούν να προσφέρουν τη λύση στο (9,4), με τις παράγωγες $f$ (9,4) = 30, και έτσι είναι σαφές ότι αυτό δεν είναι μέγιστο. Κατά συνέπεια, ένα σφαιρικό βέλτιστο μπορεί να υπάρξει μέσα σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, αλλά σε περίπτωση που αυτό εμφανιστεί σε ένα σημείο όπου οι περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν, τότε δεν είμαστε καθόλου σε θέση να εγγυηθούμε ότι η μέθοδος Lagrangean θα μπορέσει να καταστήσει δυνατή την ανίχνευση ακόμη και του σημείου αυτού. Επομένως, απαιτείται να είμαστε σε θέση ούτως ώστε να διαχειριζόμαστε όλα τα σημεία της αποτυχίας των περιοριστικών συνθηκών χωριστά.

Τέλος, εξετάζουμε την κατάσταση όπου οι περιοριστικές συνθήκες βλέπουμε να κρατούν παντού, αλλά η μέθοδος Lagrangean μπορεί ακόμα να αποτύχει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει καμία λύση στο πρόβλημα.

**Άρα :** εν κατακλείδι είμαστε σε θέση να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως οι περιοριστικές συνθήκες που εξετάσαμε προηγουμένως, δεν μας εγγυώνται την ύπαρξη μίας και μόνο μίας λύσης.

### 1.9.3 Παράδειγμα

$$\max \quad f(x, y, z) = x2 + 2y - z2,$$

$$\mu.\pi \quad g_1(x,y,z) = 2x - y = 0,$$

$$g_2(x,y,z) = x + z - 6 = 0$$

Οι παραγωγές $Dg_1(x,y,z) = (2,-1,0)$ και $Dg_2(x,y,z) = (1,0,1)$ διαμορφώνουν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων για όλα τα $x,y,z$. Έτσι οι περιοριστικές συνθήκες κρατούν παντού. Δεδομένου ότι έχουμε δύο εξισώσεις περιορισμού, οι Lagrangean εξισώσεις θα έχουν δύο Lagrangean πολλαπλασιαστές, και έτσι βρισκόμαστε αντιμέτωποι με τις εξής πέντε Lagrangean εξισώσεις :

$$0 = 2x - y$$
$$0 = x + z - 6$$
$$0 = 2x + 2\lambda_1 + \lambda_2$$
$$0 = 2 - \lambda_1$$
$$0 = -2z + \lambda_2$$

Η τέταρτη εξίσωση μας δίνει σαφώς το $\lambda_1 = 2$, τα οποία μπορούμε έπειτα να αντικαταστήσουμε στην τρίτη εξίσωση που δίνει :

$$\mathbf{0 = 2x + 4 + 2\lambda_2}$$

Παρόλα αυτά, η ακύρωση του $\lambda_2$ με την πέμπτη εξίσωση μας δίνει :

$$\mathbf{0 = x + z + 2}$$

όποιος έρχεται σε αντίθεση με το $g_2(x,y,z) = 0$. Κατά συνέπεια, δεν υπάρχει καμία λύση που να υφίσταται στις εξισώσεις Lagrangean.

Δεδομένου λοιπόν ότι οι περιοριστικές συνθήκες μπορούν και κρατούν παντού, οποιαδήποτε σφαιρικά μέγιστα ή ελάχιστα πρέπει να εμφανιστούν ως λύση σε αυτές τις εξισώσεις. Πρέπει επομένως να καταφέρουμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υφίσταται υπάρχει κανένα βέλτιστο σημείο για αυτό το πρόβλημα.

Κατά συνέπεια, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί γιατί ενώ οι περιοριστικές συνθήκες συναντιούνται, και οι εξισώσεις Lagrangean είναι σε θέση να παραγάγουν τις λύσεις, αυτό δεν είναι σε θέση να μας παρέχει την εγγύηση ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης θα έχει ένα σφαιρικό μέγιστο ή ένα ελάχιστο. Για αυτό, πρέπει να απευθυνθούμε σε άλλα αποτελέσματα, όπως το θεώρημα Weierstrass.

## 1.10 Οι πολλαπλασιαστές Lagrangean

Εξετάστε τι θα μπορούσε να είχε συμβεί στην περίπτωση που θα αλλάζαμε έναν από όλους εκείνους τους εξισωτικούς περιορισμούς $g_1$, για κάποια $1 \leq j \leq k$, το οποίο μπορεί και κρατά όλες τις άλλες σταθερές. Αυτό θα μπορούσε κάλλιστα να επιφέρει ως αποτέλεσμα μια αλλαγή στη βέλτιστη τιμή του προβλήματος. Ο Lagrangean πολλαπλασιαστής $\lambda_j$ μπορεί και κωδικοποιεί το ποσοστό αλλαγής της βέλτιστης τιμής καθώς ο περιορισμός $g_j$ αλλάζει.

Στους οικονομικούς όρους, εκεί που η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί συνήθως ένα μέτρο του κέρδους το οποίο μεγιστοποιείται ή του κόστους ακόμα που ελαχιστοποιείται, ο πολλαπλασιαστής $\lambda_j$ μετρά το πόσο πρόθυμοι πρέπει να είμαστε να πληρώσουμε για μια αλλαγή μονάδων στον περιορισμό j.

Παραδείγματος χάριν, υποθέτουμε ότι σε κάποιο πρόβλημα μεγιστοποίησης - κέρδους, ο περιορισμός j αποτελεί έναν περιορισμό στις κύριες δαπάνες του προβλήματος μεγιστοποίησης-κέρδους. Εάν η τιμή του πολλαπλασιαστή που συνδέεται με αυτόν τον περιορισμό είναι $\lambda_j$, κατόπιν θα ήμαστε σε θέση να μην πληρώσουμε περισσότερο από $\lambda_j$ για να αυξήσουμε τον κύριο περιορισμό μας ανά μια μονάδα. Επομένως, εάν μας προσφερθεί η πιθανότητα να αγοράσουμε σε κάποια τιμή p μια **«χαλάρωση»** στον περιορισμό i από ένα ποσό c, έτσι ώστε τώρα να αντιμετωπίζουμε τον περιορισμό $g_j(x) + c = 0$, αντί του $g_j(x) = 0$, ασφαλώς και θα κάνουμε μόνο αυτό στην περίπτωση που η τιμή αντισταθμίζεται από την αύξηση στο μέγιστο κέρδος, δηλαδή εάν $\lambda_i c \geq p$.

Γι'αυτόν ακριβώς τον λόγο, ο Lagrangean πολλαπλασιαστής $\lambda_j$ καλείται επίσης και ως **τιμή σκιών** (shadow price) του περιορισμού j.

Για μια πιο αυστηρή προσέγγιση σε αυτό, υποθέστε ότι έχουμε ένα τοπικό βέλτιστο για βελτιστοποίηση στο $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υποκείμενο στους περιορισμούς

$g_i = 0, i = 1,\ldots,k$. Επιπλέον, υποθέστε ότι οι περιοριστικές συνθήκες κρατούν στο $x^*$, έτσι ώστε να υπάρχουν οι σχετικοί Lagrangean πολλαπλασιαστές $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$.

Θέλοντας να εξετάσουμε την επίδραση που δημιουργείται στη βέλτιστη λύση $x^*$ με το να προβαίνουμε σε αλλαγή της τιμής του, για παράδειγμα, του j-οστού περιορισμού από ένα πολύ μικρό ποσό $\varepsilon_j$, ούτως ώστε αντί να αντιμετωπίσουμε τον περιορισμό $g_j(x) = 0$, να αντιμετωπίζουμε τώρα τον περιορισμό $g_j(x) + \varepsilon_j = 0$.

Δεδομένου ότι ήταν όταν αποδείξαμε το θεώρημα Lagrange, η εργασία μας μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα πιο πολύ σε περίπτωση που εισάγουμε μερικές notational συμβάσεις. Ας γράψουμε **Α)** τις ισότητες περιορισμού, **Β)** τις ρυθμίσεις τους και **Γ)** τους πολλαπλασιαστές τους ως διανύσματα στο $\mathbb{R}^k$ έτσι ώστε :

$$g(x) = (g_1(x),\ldots,g_k(x)),\ \varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\ \&\ \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$$

Όταν εξετάζουμε σε διανυσματική μορφή, το πρόβλημά μας είναι να μπορέσουμε να βελτιστοποιήσουμε το $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ σαν ένα υποκείμενο στον περιορισμό $g(x) + \varepsilon = 0$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια, το $x^*$ αποτελεί τώρα ρητά μια συνάρτηση των σταθερών ε, και, προς χάριν απλότητας, θα υποθέσουμε ότι είναι αρκετά διαφοροποιημένο όσον αφορά το ε. Επιπλέον, οι πολλαπλασιαστές Lagrangean εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις συναρτήσεις περιορισμού, και ως εκ τούτου και από το ε. Οι first-order όροι διαβάζονται τώρα ως εξής :

$$\boldsymbol{Df\,(\,x^*(\varepsilon)\,) + \lambda^*(\varepsilon) \times Dg\,(\,x^*(\varepsilon)\,) = 0}$$

Εξετάζει τι ακριβώς συμβαίνει στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο βέλτιστο σημείο $f\,(x^*(\varepsilon))$, δεδομένου ότι αλλάζουμε το ε. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τον κανόνα αλυσίδων με σκοπό να διαφοροποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση όσον αφορά το ε στο βέλτιστο σημείο, παίρνουμε :

$$\boldsymbol{Df\,(\,x^*(\varepsilon)\,) \times Dx^*\,(\varepsilon)}$$

Από τις παραπάνω Lagrangean εξισώσεις, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτό ως :

$$\boldsymbol{-\,\lambda^*\,(\varepsilon)\,Dg(x^*(\varepsilon))\,Dx^*(\varepsilon)}$$

Τώρα, δεδομένου ότι το $x^*(\varepsilon)$ πρέπει να λύσει το πρόβλημα για τη διανυσματική εξίσωση $g(x)+\varepsilon$, πρέπει να έχουμε $g(x^*(\varepsilon))+\varepsilon = 0, i,e, g(x^*(\varepsilon))=-\varepsilon$.

Διαφοροποιώντας αυτό όσον αφορά το ε παράγει :

$$\boldsymbol{Dg(x^*(\varepsilon))\, Dx^*(\varepsilon) = -\,\mathrm{I}}$$

Βάζοντας αυτά τα τελευταία τρία αποτελέσματα μαζί, βλέπουμε αυτές τις διαφοροποιημένες $f(x^*(\varepsilon))$ παραγωγές :

$$\boldsymbol{Df\,(x^*(\varepsilon))\, Dx^*(\varepsilon) = -\,\lambda^*\,(\varepsilon)\, Dg(x^*(\varepsilon))\, Dx^*(\varepsilon) = -\,\lambda^*\,(\varepsilon) \times (-I) = \lambda^*\,(\varepsilon)}$$

Δηλαδή η οριακή αλλαγή στη βέλτιστη τιμή του προβλήματος λόγω μιας οριακής χαλάρωσης στους περιορισμούς είναι ο Lagrangean πολλαπλασιαστής.

## 1.11 Η *προσέγγιση* cookbook

**1.** Προτού να αρχίσετε τη μακροχρόνια διαδικασία για να βρείτε μια λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, πρέπει πρώτα να αναρωτηθείτε εάν μια τέτοια λύση υπάρχει ή όχι. Τις περισσότερες φορές, θα χρησιμοποιείτε το θεώρημα Weierstrass, εντούτοις κατά περιόδους αυτό μπορεί να μην είναι διαθέσιμο και να πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλα επιχειρήματα. Παραδείγματος χάριν, σε μερικές περιπτώσεις μια γεωμετρική ερμηνεία χρησιμοποιείται σ ένα επιχείρημα για να δείξει το λόγο που ένα πρόβλημα μπορεί ή όχι να έχει μια λύση.

**2.** Βρείτε τις παραγωγές $Dg_i\,(x), i = 1,\ldots,k,$ των συναρτήσεων περιορισμού και καθορίστε όλα εκείνα τα σημεία στο $D$ για το οποίο αυτά τα διανύσματα δεν είναι ανεξάρτητα, δηλ. βρείτε εκείνα τα σημεία στην περιοχή για την οποία οι περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν. Αυτά τα σημεία δεν μπορούν να ταξινομηθούν από τον υπολογισμό και πρέπει να εξεταστούν χωριστά.

**3.** Βρείτε την παράγωγο $Df\,(x)$ της αντικειμενικής συνάρτησης και γράψτε παρακάτω τις εξισώσεις Lagrangean :

$$\boldsymbol{g_i\,(x^*) = 0, i = 1,\ldots,k} \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \boldsymbol{Dg_i}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

**4.** Λύστε τις Lagrangean εξισώσεις για τα σημεία $x^* \in U$ και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_i^*, i = 1,\ldots,k$ $D$

Στο σημείο αυτό, έχετε όλα τα πιθανά σημεία στα οποία τα βέλτιστα μπορούν να εμφανιστούν: εκείνα τα σημεία στα οποία οι περιοριστικές συνθήκες απέτυχαν και εκείνα τα σημεία που ικανοποιούν τις Lagrange εξισώσεις. Επιπρόσθετα κανένα άλλο σημείο δεν μπορεί να είναι ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο του $f$ στο $D$.

**5.** Εάν ξέρετε από το βήμα 1 ότι πρέπει να υπάρξει ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο, κατόπιν μπορείτε απλά να αξιολογήσετε την αντικειμενική συνάρτηση σε όλα σας τα υποψήφια σημεία. Οποιοδήποτε σημείο που δίνει μια μέγιστη τιμή σε αυτό το σύνολο θα είναι ένα σφαιρικό μέγιστο για τη συνάρτηση. Ομοίως, οποιοδήποτε σημείο δίνει μια ελάχιστη τιμή σε αυτό το σύνολο θα είναι ένα σφαιρικό ελάχιστο. Εντούτοις, εάν δεν έχετε την δυνατότητα να εγγυηθείτε την ύπαρξη μιας λύσης στο βήμα 1, κατόπιν θα πρέπει να εργαστείτε λίγο περισσότερο. Ελέγξτε τα υποψήφια σημεία σας και δείτε που θα μπορούσαν ή δεν θα μπορούσαν να είναι σφαιρικά μέγιστα ή ελάχιστα αλλά και τους λόγους γι αυτό. Τέλος, εάν η εργασία σας στα βήματα 2-4 δεν έχει παραγάγει κανένα υποψήφιο σημείο, κατόπιν μπορείτε να καταλήξετε μόνο στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει κανένα μέγιστο ή ελάχιστο. Είναι ορθό να ελεγχθεί ότι αυτό συμβαίνει, βρίσκοντας τα συγκεκριμένα επιχειρήματα, για παράδειγμα, ως προς το γιατί η συνάρτηση είναι απεριόριστη. Εάν δεν έχετε την δυνατότητα να το κάνετε αυτό, είστε βέβαιοι ότι η επίλυσή σας ήταν σωστή;

**6.** Εάν κανένα υποψήφιο σημείο δεν αφήνεται από τα βήματα 2 και 4, αλλά απαιτήσατε στο βήμα 1 ότι ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο πρέπει να υπάρξει, τότε κάτι έχει πάει στραβά. Ελέγξτε την εργασία σας και βρείτε το λάθος.

### 1.11.1 Το θεώρημα Lagrangean

Η ύπαρξη των δεσμευτικών περιορισμών παράγει τα διάφορα όρια στην περιοχή της αντικειμενικής μας συνάρτησης στην οποία ο υπολογισμός μας, που είναι οι πρώτου και δευτερεύοντως διαταγής όροι (first-and second-order), καθίσταται ως

**«αναποτελεσματικός»**. Τα θεωρήματα δηλαδή 4.3 και 4.5 ισχύουν μόνο για τα εσωτερικά σημεία, και δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιηθούν σε οποιαδήποτε όρια που μπορούν να προκύψουν από τους περιορισμούς που χρησιμοποιούμε. Εντούτοις, ο υπολογισμός μάς προσφέρει μερικά πολύ ισχυρά εργαλεία ούτως ώστε να λύσει τα διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης που υπάρχουν, και παρά την πιθανότητα που υπάρχει να απορριφθούν, η διαδικασία **«cookbook»** είναι εκείνη που επιδιώκει να ξαναγράψει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς σε μια μορφή που επιτρέπει σε μας να καθίσταται δυνατή η χρησιμοποίησή του όσο περισσότερο μπορούμε. Αυτό βέβαια, γίνεται κατόπιν της ενσωμάτωσης των περιορισμών σε μια νέα αντικειμενική συνάρτηση, την $L : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ η οποία συχνά καλείται ως Lagrangean, όπου :

$$\boldsymbol{L\,(x,\lambda) = f\,(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i\,(x)} \qquad (5.11)$$

Οι first-order όροι της εξίσωσης αυτής παράγουν τις ακόλουθες Lagrangean εξισώσεις : [(5.9) & (5.10)]

$$\frac{\theta}{\theta\lambda_i}\boldsymbol{L\,(x^*,\lambda^*) = 0, i = 1,\ldots,k} \qquad (5.12)$$

$$\frac{\theta}{\theta x_i}\boldsymbol{L\,(x^*,\lambda^*) = 0, j = 1,\ldots,n} \qquad (5.13)$$

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα της βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς, αποτελεί τώρα κατά ένα πολύ μεγάλο μέρος ένα **«αβίαστο πρόβλημα βελτιστοποίησης»**.

Αυτό φυσικά, δεν αποτελεί κατεξοχήν ένα εξ' ολοκλήρου αβίαστο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ο υπολογισμός μας μπορεί ακόμα και να μην είναι επιτυχής όταν δεν μας επιτυγχάνει η εξίσωση Lagrangean, και αυτό μας εμφανίζεται στα σημεία εκείνα όπου οι όλες περιοριστικές συνθήκες αποτυγχάνουν.

# 2. ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

## 2.1 Εισαγωγή

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός αποτελεί μια μέθοδο βελτιστοποίησης η οποία μπορεί και μετασχηματίζει ένα σύνθετο πρόβλημα σε μια σειρά από απλούστερα προβλήματα (υπο-προβλήματα). Από μαθηματικής απόψεως επίσης, ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια τεχνική αντιμετώπισης προβλημάτων πολυσταδιακών αποφάσεων.

Έστω ότι σε κάποιο εργοστάσιο υπάρχει μια ομάδα στελεχών η οποία έχει επωμιστεί την σχεδίαση για την παραγωγή ενός προϊόντος από την αρχή μιας χρονικής περιόδου. Η υλοποίηση αυτού του προϊόντος περιγράφεται μέσω διαφόρων μεταβλητών οι οποίες μπορούν και εκφράζουν όλα τα χαρακτηριστικά του, λαμβάνοντας επίσης υπόψη και τις διάφορες συνιστώσες της παραγωγικής διαδικασίας, όπως είναι η θερμοκρασία, η δομή του ποιοτικού ελέγχου κ.λπ. Για κάθε χρονική στιγμή, οι μεταβλητές αυτές του προϊόντος, μπορεί να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή ή ακόμα και να εκφράζονται μέσω μιας συνάρτησης κατανομής πιθανότητας.

Οι μεταβλητές των παραγωγικών διαδικασιών κατά χρονικές περιόδους, έχουν τη δυνατότητα να μετασχηματίζονται με ένα συγκεκριμένο ( ντετερμινιστικό ) ή πιθανοκρατικό τρόπο. Στην περίπτωση κατά την οποία μέσα στο περιβάλλον του μετασχηματισμού των μεταβλητών υποδεικνύονται από εμάς τότε έχουμε τις ελεγχόμενες μεταβλητές. Αυτό το περιβάλλον μέσω του οποίου υλοποιούνται οι διάφοροι μετασχηματισμοί ισοδυναμεί με μία απόφαση. Αν είναι μια η απόφαση η οποία αφορά τη βελτιστοποίηση ενός προβλήματος για όλο το χρονικό διάστημα της μελέτης του, τότε λέμε ότι έχουμε τη διαδικασία αποφάσεων ενός σταδίου. Αντίθετα, εάν πάρουμε μια σειρά από αλληλοεξαρτώμενες αποφάσεις, τότε έχουμε μία πολυσταδιακή διαδικασία αποφάσεων.

Οι τεχνικές βελτιστοποίησης του Δυναμικού Προγραμματισμού εφαρμόζονται σε δυναμικά προβλήματα, τα οποία στις μεταβλητές τους περιλαμβάνουν και το χρόνο αλλά και σε μη δυναμικά προβλήματα.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μία γενική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων και χρησιμοποιείται όταν δεν μπορεί να διαμορφωθεί ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος ή όταν το μαθηματικό του μοντέλο είναι σύνθετο οπότε δεν μπορεί να επιλυθεί με αναλυτικές μεθόδους.

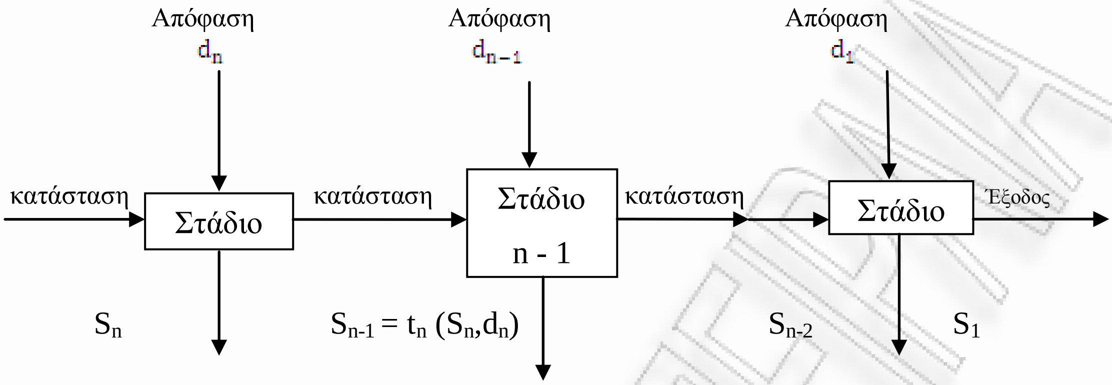
Οι διάφορες εφαρμογές του Δυναμικού Προγραμματισμού αφορούν προβλήματα βέλτιστης διαδρομής, προγραμματισμό επενδύσεων και παραγωγής, προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων και αντικατάστασης συντήρησης εξοπλισμού αντίστοιχα.

## 2.2 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

**<u>«Απαραίτητη»</u>** προϋπόθεση για να χρησιμοποιηθεί ο Δυναμικός Προγραμματισμός σε κάποιο πρόβλημα πρέπει να παρουσιάζονται τα εξής τρία χαρακτηριστικά :

- Να διαιρείται σε επιμέρους προβλήματα (υποπροβλήματα) τα οποία ονομάζονται στάδια. Σε κάθε στάδιο να λαμβάνεται μια **απόφαση (πολιτική)**.
- Σε κάθε στάδιο ενός προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού περιλαμβάνεται και ένας αριθμός **καταστάσεων**. Αυτές οι καταστάσεις μπορούν και μας περιγράφουν όλες εκείνες τις συνθήκες κάτω από τις οποίες βρίσκεται το πρόβλημά μας. (Σε κάθε στάδιο ο αριθμός των καταστάσεων μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος).
- Σε κάθε στάδιο τα αποτελέσματα της απόφασης μετασχηματίζουν την τρέχουσα κατάσταση σε μια κατάσταση ή οποία μπορεί και συνδέεται με το επόμενο στάδιο. Κάθε απόφαση περιγράφεται μέσω μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **<u>εξίσωση απόδοσης</u>**, γιατί σε όλο το σύνολο των λαμβανομένων αποφάσεων, αντιστοιχεί μία απόδοση ( όφελος ) σε κάθε απόφαση. Η συνάρτηση απόδοσης εξαρτάται από τη **<u>μεταβλητή απόφασης</u>** η οποία χαρακτηρίζει την **<u>απόφαση</u>** ( **<u>πολιτική</u>** ) κάθε σταδίου.

Στο ακόλουθο σχήμα δίδονται για μία πολυσταδιακή διαδικασία αποφάσεων, οι σχέσεις μεταξύ **κατάστασης**, **σταδίου**, και **απόφασης**.




Συνάρτηση Απόδοσης Συνάρτηση Απόδοσης Συνάρτηση Απόδοσης

$f_n = r_n (s_n,d_n)$ $f_{n-1} = r_{n-1} (s_{n-1},d_{n-1})$ $f_1 = r_1 (s_1,d_1)$

Σχήμα 1. Πολυσταδιακή Διαδικασία Αποφάσεων

Όπου n : είναι ο αριθμός των σταδίων

$s_n$ : είναι η κατάσταση εισόδου του σταδίου n, προερχόμενη από το στάδιο n + 1.

$d_n$ : είναι η απόφαση η οποία αντιστοιχεί στο στάδιο n.

$f_n = r_n (s_n,d_n)$ : είναι η συνάρτηση απόδοσης για το στάδιο n.

Έστω n στάδια στα οποία πρέπει να λάβουμε αποφάσεις. Αυτά τα n στάδια συνδέονται μέσω συναρτήσεων μετάβασης :

$$\mathbf{s_{n-1} = s_n \otimes d_n}$$

ή

(έξοδος σταδίου n) = (είσοδος σταδίου n) ⊗ (απόδοση σταδίου n)

Όπου εμφανίζεται το σύμβολο ⊗ εκφράζεται μια μαθηματική πράξη, όπως είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση.

Σε κάθε στάδιο υπάρχουν δύο είσοδοι :

**Α)** Η μεταβλητή της κατάστασης $s_n$ και **Β)** η μεταβλητή απόφασης $d_n$. Η μεταβλητή κατάστασης $s_n$, σαν μια κατάσταση εισόδου, είναι εκείνη που συνδέει το τρέχον στάδιο με το προηγούμενο. Για παράδειγμα, η τρέχουσα κατάσταση $s_n$, μας εφοδιάζει με όλες εκείνες τις συγκεκριμένες πληροφορίες, που χρειαζόμαστε ούτως ώστε να μπορέσουμε να ενημερωθούμε για όλες τις συνθήκες του προβλήματός μας, οι οποίες προέρχονται από n προηγούμενα στάδια. Η μεταβλητή απόφασης $d_n$ του n σταδίου, παράγει τις εξής δύο εξόδους :

**1.** Τη συνάρτηση απόδοσης : $r_n(s_n,d_n)$

**2.** Τη νέα μεταβλητή απόφασης : $s_{n-1}$

Η συνάρτηση απόδοσης η οποία εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής κατάστασης $s_n$, και της μεταβλητής απόφασης $d_n$, μας δίνει πληροφορίες οι οποίες είναι σχετικές με το επόμενο στάδιο (στάδιο n -1), και περιγράφονται μέσω της **συνάρτησης μετάβασης** : $s_{n-1} = t_n(s_n,d_n)$ (μετασχηματισμός κατάστασης). Όπου $t_n$ είναι μία **συνάρτηση μετασχηματισμού κατάστασης** της οποίας ο τύπος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

## 2.3 Ανάπτυξη μιας βέλτιστης πολιτικής

Η επίλυση ενός προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στην ***αρχή βελτιστοποίησης του Bellman :***

«Οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική μας απόφαση, για να καταφέρουμε να φτάσουμε στην τρέχουσα κατάσταση, η απόφαση εκείνη η οποία και θα μας οδηγήσει στο επόμενο στάδιο, πρέπει να είναι μία **άριστη απόφαση**».

Για την επίλυση ενός προβλήματος Δυναμικού Προγραμματισμού χρησιμοποιούμε την εξής αναδρομική σχέση :

$$f_n^*(\mathbf{s_n}) = \underset{d_n}{\mathbf{max/min}}\{\, \mathbf{r_n}\,(\mathbf{s_n},\mathbf{d_n}) \otimes f_{n-1}^*(\mathbf{s_{n-1}})\}$$

Όπου $s_{n-1} = t_n(s_n, d_n)$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο ⊗ δηλώνει μία μαθηματική πράξη όπως : πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμό ή διαίρεση.

## 2.4 Αλγοριθμική τεχνική επίλυσης προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.

Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος Δυναμικού Προγραμματισμού συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα :

**Βήμα 1$^o$**. Αρχικά, προσδιορίζουμε τις μεταβλητές αποφάσεων καθώς ωστόσο και την αντίστοιχη αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος για το οποίο και προσπαθούμε να αναζητήσουμε τη βέλτιστη λύση.

**Βήμα 2$^o$**. Στη συνέχεια, διαιρούμε το πρόβλημά μας σε έναν μεγαλύτερο αριθμό (υπο)προβλημάτων (δηλαδή σε περισσότερα στάδια). Καθορίζουμε έτσι τις μεταβλητές κατάστασης κάθε σταδίου, και τη συνάρτηση μετασχηματισμού σαν συνάρτηση της μεταβλητής απόφασης και της μεταβλητής κατάστασης του επόμενου σταδίου.

**Βήμα 3$^o$**. Κατόπιν, διαμορφώνουμε μία **αναδρομική σχέση** η οποία θα προσδιορίζει την άριστη πολιτική επίλυσης του προβλήματος. Δίδουμε την οπισθοδρομική ή την προδρομική μέθοδο επίλυσης.

**Βήμα 4$^o$**. Μετά, κατασκευάζουμε έναν «κατάλληλο» πίνακα στον οποίο εν συνεχεία καταγράφονται όλες οι τιμές της συνάρτησης απόδοσης για κάθε ένα στάδιο (ακολουθεί παράδειγμα) :

| $d_n$ / $s_n$ | $f_n(s_n, d_n)$ / $d_n$ | Βέλτιστη αναδρομική σχέση Απόδοσης $f_n^*(s_n)$ | Βέλτιστη Απόφαση $d_n^*$ |
|---|---|---|---|

**Βήμα 5ο**. Εν κατακλείδι, καθορίζουμε την βέλτιστη πολιτική που θα ακολουθήσουμε για κάθε ένα στάδιο ξεχωριστά.

**Παράδειγμα 1ο Πρόβλημα κατανομής δαπανών**

Μια εταιρεία αυτοκινήτων πρόκειται να διαφημίσει ένα καινούριο της μοντέλο αυτοκινήτου διαθέτοντας ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο γι' αυτό το σκοπό που αντιστοιχεί σε έξι χρηματικές μονάδες (χ.μ.). Η διαφήμιση αυτή πραγματοποιείται από τρεις διαφορετικές διαφημιστικές εταιρείες ξεχωριστά, καθεμία εκ των οποίων και προωθεί το αυτοκίνητο στην αγορά κατά διαφορετικό τρόπο, αλλά και για συγκεκριμένο ποσό διαφημιστικού κόστους. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίνονται όλες οι πιθανότητες προώθησης, του νέου μοντέλου αυτοκινήτου, για κάθε μια διαφημιστική εταιρεία ξεχωριστά και για διάφορα κόστη διαφήμισης τα οποία είναι τα εξής :

Πίνακας

| **Διαφημιστικό κόστος X σε χ.μ.** | **Πιθανότητα προώθησης του αυτοκινήτου για κάθε διαφημιστική εταιρεία** | | |
|---|---|---|---|
| | **$P_1(X)$ I** | **$P_2(X)$ II** | **$P_3(X)$ III** |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| 2 | 0,7 | 0,5 | 0,6 |
| 3 | 0,76 | 0,6 | 0,7 |
| 4 | 0,8 | 0,7 | 0,8 |
| 5 | 0,75 | 0,8 | 0,85 |
| 6 | 0,8 | 0,9 | 0,9 |

Να βρεθεί η κατανομή των έξι χρηματικών μονάδων και στις τρείς διαφημιστικές εταιρείες, ούτως ώστε να μεγιστοποιηθεί η προώθηση στην αγορά του αυτοκινήτου για όλη τη διαφημιστική εκστρατεία.

***Απάντηση* :**

Θεωρούμε λοιπόν τις τρεις διαφημιστικές εταιρείες ως τα τρία εκείνα στάδια του προβλήματός μας, οπότε έχω $x_n$ (n = 1, 2, 3) όπου και αποτελούν τις μεταβλητές απόφασης, οι οποίες και εκφράζουν το κεφάλαιο εκείνο που πρόκειται να πληρωθεί η εταιρεία n. Η πιθανότητα που υπάρχει, ούτως ώστε να προωθηθεί στην αγορά, του αυτοκινήτου, σαν το αποτέλεσμα της διαφημιστικής πολιτικής της κάθε εταιρείας εκφράζεται από τον τύπο :

$$\mathbf{P_n(X_n)}$$

Για την επίλυση του προβλήματός μας, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$\mathbf{f_n(X) = max\ \{P_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n)\}}$$

όταν $\sum_{j=1}^{n} x_j = 5$

Όταν λειτουργεί μόνο η εταιρεία Ι, τότε το ποσό των έξι χρηματικών μονάδων διατίθεται, αποκλειστικά σε αυτή :

$$f_1(0) = P_1(0) = 0$$

$$f_1(1) = P_1(1) = 0,6$$

$$f_1(2) = P_1(2) = 0,7$$

$$f_1(3) = P_1(3) = 0,76$$

$$f_1(4) = P_1(4) = 0,8$$

$$f_1(5) = P_1(5) = 0,75$$

$$f_1(6) = P_1(6) = 0,8$$

Κατόπιν, όλα αυτά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις, τοποθετούνται στη συνέχεια σε μία στήλη της διαφημιστικής εταιρείας Ι, (σχήμα 1). Εφόσον λοιπόν μας είναι γνωστές οι τιμές της $f_1(X)$, τότε είμαστε πλέον σε θέση να μπορέσουμε να καθορίσουμε και τις τιμές της $f_2(X)$ του σταδίου $n = 2$, ως εξής :

Αν $X = 0$, είναι $f_2(0) = 0$

Αν $X = 1$, είναι $f_2(1) = \max \{P_2(x_2) \bullet f_1(1 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(1)$, όταν $0 \le x_2 \le 1$, είναι :

$$f_2(1) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(1) = 0 \times 0{,}6 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(0) = 0{,}4 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0 και λαμβάνεται για $x_2 = 0$.

Οι τιμές της $f_2(2)$, όταν $0 \le x_2 \le 2$, είναι :

$$f_2(2) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(2) = 0 \times 0{,}7 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(1) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 \\ P_2(2) \times f_1(0) = 0{,}5 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,24 και λαμβάνεται για $x_2 = 1$.

Οι τιμές της $f_2(3)$, όταν $0 \le x_2 \le 3$, είναι :

$$f_2(3) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(3) = 0 \times 0{,}76 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(2) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28 \\ P_2(2) \times f_1(1) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3 \\ P_2(3) \times f_1(0) = 0{,}6 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,3 και λαμβάνεται για $x_2 = 2$.

Οι τιμές της $f_2(4)$, όταν $0 \le x_2 \le 4$, είναι :

$$f_2(4) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(4) = 0 \times 0{,}8 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(3) = 0{,}4 \times 0{,}76 = 0{,}304 \\ P_2(2) \times f_1(2) = 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35 \\ P_2(3) \times f_1(1) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36 \\ P_2(4) \times f_1(0) = 0{,}7 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,36 και λαμβάνεται για $x_2 = 3$.

Οι τιμές της $f_2(5)$, όταν $0 \le x_2 \le 5$, είναι :

$$f_2(5) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(5) = 0 \times 0{,}75 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(4) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32 \\ P_2(2) \times f_1(3) = 0{,}5 \times 0{,}76 = 0{,}38 \\ P_2(3) \times f_1(2) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42 \\ P_2(4) \times f_1(1) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42 \\ P_2(5) \times f_1(0) = 0{,}8 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,42 και λαμβάνεται για $x_2 = 3$.

Οι τιμές της $f_2(6)$, όταν $0 \le x_2 \le 6$, είναι :

$$f_2(6) = \max \begin{cases} P_2(0) \times f_1(6) = 0 \times 0{,}8 = 0 \\ P_2(1) \times f_1(5) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3 \\ P_2(2) \times f_1(4) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4 \\ P_2(3) \times f_1(3) = 0{,}6 \times 0{,}76 = 0{,}456 \\ P_2(4) \times f_1(2) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49 \\ P_2(5) \times f_1(1) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48 \\ P_2(6) \times f_1(0) = 0{,}9 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,49 και λαμβάνεται για $x_2 = 4$.

Τις διάφορες τιμές, που προκύπτουν παραπάνω από την $f_2(X)$, τις τοποθετούμε κατόπιν σε μία στήλη που ανήκει στην εταιρεία ΙΙ, (βλ. σχήμα 1). Έτσι και οι τιμές της $f_3(X)$ τώρα, μπορούν και υπολογίζονται πάρα πολύ εύκολα καθόσον μας είναι γνωστές όλες εκείνες οι απαραίτητες τιμές της $f_2(X)$ που μας χρειάζονται.

Άρα έχουμε :

Αν $X = 0$, είναι $f_3(0) = 0$ & Αν $X = 1$, είναι $f_3(1) = \max \{P_3(x_3) \times f_2(1 - x_3)\}$

Οι τιμές της $f_3(1)$, όταν $0 \le x_3 \le 1$, είναι :

$$f_3(1) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_2(1) = 0 \times 0 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(0) = 0,5 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0 και λαμβάνεται για $x_3 = 0$.

Οι τιμές της $f_3(2)$, όταν $0 \le x_3 \le 2$, είναι :

$$f_3(2) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_2(2) = 0 \times 0,24 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(1) = 0,5 \times 0 = 0 \\ P_3(2) \times f_2(0) = 0,6 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Οι τιμές της $f_3(3)$, όταν $0 \le x_3 \le 3$, είναι :

$$f_3(3) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_2(3) = 0 \times 0,3 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(2) = 0,5 \times 0,24 = 0,12 \\ P_3(2) \times f_2(1) = 0,6 \times 0 = 0 \\ P_3(3) \times f_2(0) = 0,7 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,12 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Οι τιμές της $f_3(4)$, όταν $0 \le x_3 \le 4$, είναι :

$$f_3(4) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_2(4) = 0 \times 0{,}36 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(3) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15 \\ P_3(2) \times f_2(2) = 0{,}6 \times 0{,}24 = 0{,}144 \\ P_3(3) \times f_2(1) = 0{,}7 \times 0 = 0 \\ P_3(4) \times f_2(0) = 0{,}8 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,15 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Οι τιμές της $f_3(5)$, όταν $0 \le x_3 \le 5$, είναι :

$$f_3(5) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_2(5) = 0 \times 0{,}42 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(4) = 0{,}5 \times 0{,}36 = 0{,}18 \\ P_3(2) \times f_2(3) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18 \\ P_3(3) \times f_2(2) = 0{,}7 \times 0{,}24 = 0{,}168 \\ P_3(4) \times f_2(1) = 0{,}8 \times 0 = 0 \\ P_3(5) \times f_2(0) = 0{,}85 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,18 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Οι τιμές της $f_3(6)$, όταν $0 \le x_3 \le 6$, είναι :

$$f_3(6) = \max \begin{cases} P_3(0) \times f_1(6) = 0 \times 0{,}49 = 0 \\ P_3(1) \times f_2(5) = 0{,}5 \times 0{,}42 = 0{,}21 \\ P_3(2) \times f_2(4) = 0{,}6 \times 0{,}36 = 0{,}216 \\ P_3(3) \times f_2(3) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21 \\ P_3(4) \times f_2(2) = 0{,}8 \times 0{,}24 = 0{,}192 \\ P_3(5) \times f_2(1) = 0{,}85 \times 0 = 0 \\ P_3(6) \times f_2(0) = 0{,}9 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,216 και λαμβάνεται για $x_3 = 2$.

Για n = 3, η μέγιστη τιμή που προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις είναι 0,216 όταν το $x_3 = 2$. Για το πρόβλημα δύο σταδίων τώρα, όταν έχουμε : 6 – 2 = 4, είτε $x_2 = 4^*$ γιατί το $\max f_2(4) = 0{,}49$. Για το πρόβλημα ενός σταδίου όταν 4 – 4 = 0 έχουμε $x_1 = 0$ γιατί $\max f_1(0) = 0$.

**<u>Τελικά</u> :** Όπως προκύπτει από όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, η μέγιστη τιμή την οποία και παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματός μας, είναι 0,216 για $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ και $x_3 = 2$.

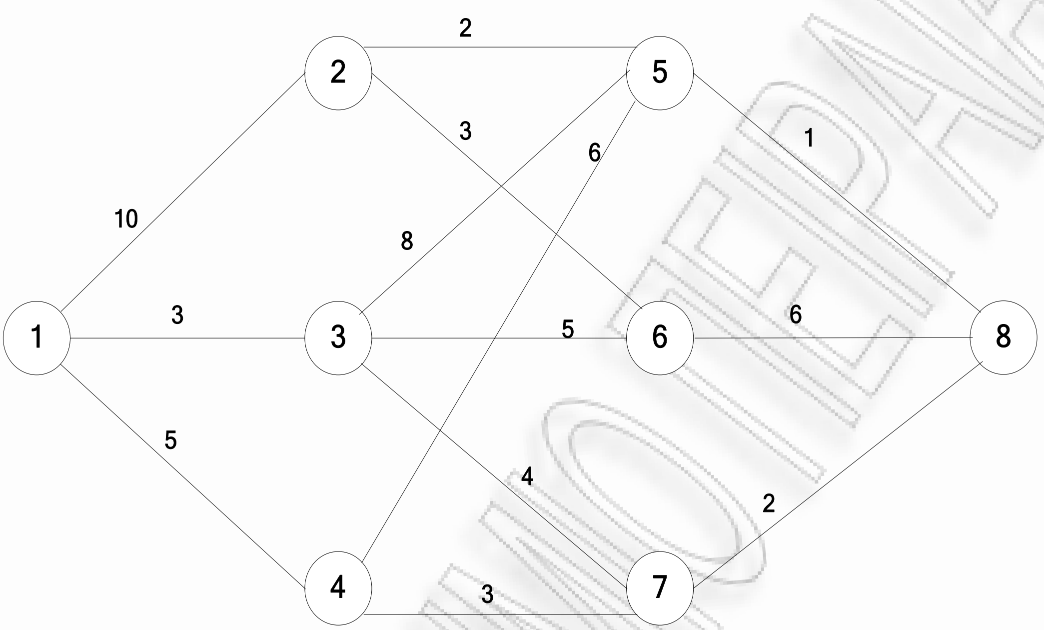
Στη συνέχεια ακολουθεί ο πίνακας αποτελεσμάτων (για τον οποίο έγινε λόγος παραπάνω) ο οποίος έχει ως εξής :

| **X** | **Εταιρεία I** | | **Εταιρεία II** | | **Εταιρεία III** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$x_1$** | **$f_1(X)$** | **$x_2$** | **$f_2(X)$** | **$x_3$** | **$f_3(X)$** |
| 0 | $0^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 0,7 | 1 | 0,24 | 1 | 0 |
| 3 | 3 | 0,76 | 2 | 0,3 | 1 | 0,12 |
| 4 | 4 | 0,8 | 3 | 0,36 | 1 | 0,15 |
| 5 | 5 | 0,75 | 3 | 0,42 | 1 | 0,18 |
| 6 | 6 | 0,8 | $4^*$ | 0,49 | $2^*$ | 0,216 |

Σχήμα 1

**Παράδειγμα 2ο Ελάχιστο μήκος**

Να ευρεθεί η διαδρομή με το ελάχιστο μήκος για το ακόλουθο γράφημα :




Σχήμα 1.1

***Απάντηση :***

Έστω ότι οι : $w_1$, $w_2$, $w_3$ και $w_4$ είναι εκείνες οι μεταβλητές καταστάσεως οι οποίες αντιστοιχούν στις στάθμες 1,2,3 και 4 του γραφήματός μας. Οπότε μας προκύπτουν οι : **Α)** την $U_1(W_1,W_2)$, **Β)** την $U_2(W_2,W_3)$ και **Γ)** την $U_3(W_3,W_4)$ δηλαδή οι συναρτήσεις των αποστάσεων των τμημάτων Ι , ΙΙ και ΙΙΙ αντίστοιχα. Μας ζητείται να ελαχιστοποιηθεί το ακόλουθο άθροισμα :

$$U_1(W_1,W_2) + U_2(W_2,W_3) + U_3(W_3,W_4)$$ (βλ. Σχήμα 1.2)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε τις : $f_1$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$ οι οποίες είναι αντίστοιχα εκείνες οι συναρτήσεις των άριστων πολιτικών των διαδρομών όπως και προκύπτουν από τα σύνολα {I}, {I, II}, και {I, II, III}. Η διαδικασία αρχής του Bellman έχει ως εξής :

**Τμήμα 1ο – Μέρος 1ο :**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_1(w2) = U_1\ (w1, w_2)$,

Για , $w_2 = 2$, έχουμε : $f_1(2) = 10$, άριστη πολιτική : (1, 2).

Για , $w_2 = 3$, έχουμε : $f_1(3) = 3$, άριστη πολιτική : (1, 3).

Για , $w_2 = 4$, έχουμε : $f_1(4) = 5$ με άριστη πολιτική (1, 4).

**Τμήμα 1ο – Μέρος 2ο :**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_{12}(w_3) = \min\{f_1(w_2) + U_2\ (w_2,w_3)\}$, όταν $w_2$ ανήκει στη στάθμη των κόμβων 2, 3 & 4

Για , $w_3 = 5$, έχουμε : $f_{12}\ (5) = \min\ \{\ f_1\ (\ 2\ ) + 2,\ \ f_1\ (\ 3\ ) + 8,\ f_1\ (\ 4\ ) + 6\} = \min\ \{\ 10 + 2,\ 3 + 8\ ,\ 5 + 5\} = 10$, με άριστη πολιτική (1, 4, 5).

Για , $w_3 = 6$, έχουμε : $f_{12}\ (6) = \min\ \{f_1\ (2) + 3 = \min\{10 + 3\} = 13$ με άριστη πολιτική (1, 2, 6)

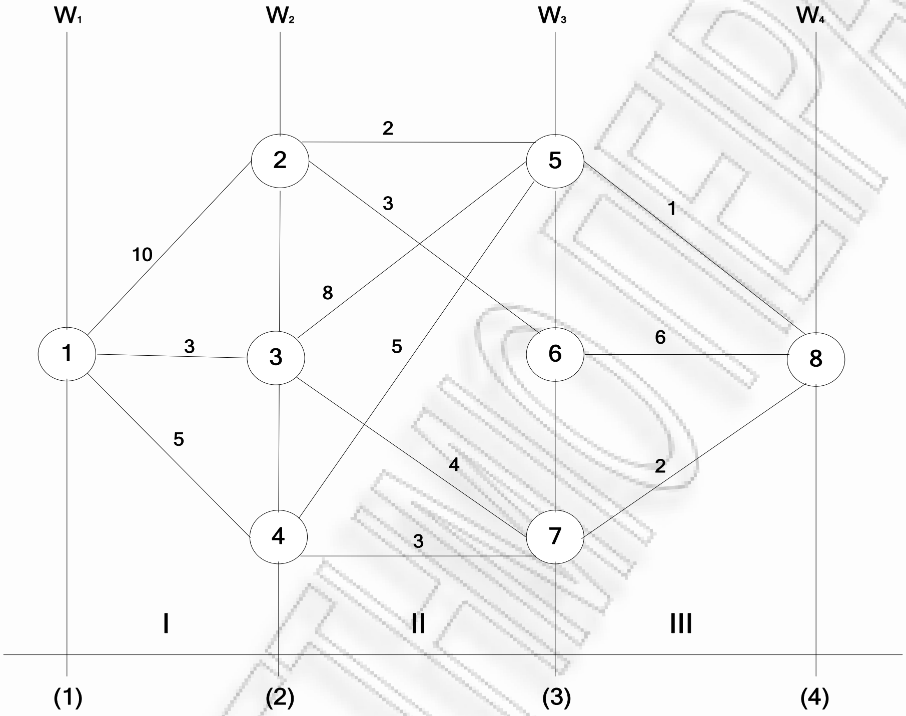
Για , $w_3 = 7$, έχουμε : $f_{12}\ (7) = \min\{f_1(3) + 4,\ \ f_1\ (4) + 3\} = \min\{\ 3 + 4,\ 5 + 3\} = 7$ με άριστη πολιτική (1, 3, 7).

**Τμήμα 1ο – Μέρος 3ο :**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_{13}(w_4) = \min\{f_{12}(w_3) + U_3(w_3,w_4)\}$

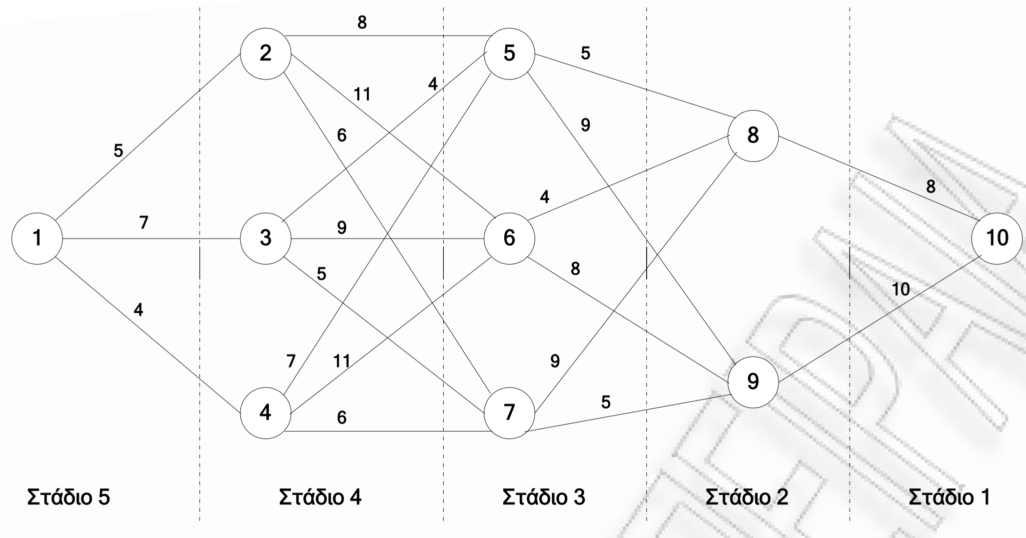
Για , $w_4 = 8$, έχουμε : $f_{13}(8) = \min\{f_{12}(5) + 1,\ f_{12}(6) + 6, f_{12}(7) + 2\} = \min\{10 + 1, 13 + 6, 7 + 2\} = 9$ με άριστη πολιτική (1, 3, 7, 8). Η άριστη πολιτική του προβλήματός μας όπως προκύπτει από τα παραπάνω είναι η (1, 3, 7, 8) με ελάχιστη τιμή 9.




Σχήμα 1.2

**Παράδειγμα 3ο Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής**

Έστω ότι υπάρχει ένας ταξιδιώτης ο οποίος επιθυμεί να ταξιδέψει με αφετηρία την πόλη 1 και προορισμό την πόλη 10, χρησιμοποιώντας το οδικό δίκτυο που υπάρχει στο ακόλουθο σχήμα μας. Στο δίκτυο αυτό, είναι **Α)** οι κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στις δέκα διαφορετικές πόλεις και **Β)** τα τόξα τα οποία αντιπροσωπεύουν τις χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των πόλεων του σχήματος. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή, την οποία πρέπει να επιλέξει ο ταξιδιώτης από την πόλη 1 για να φθάσει στην πόλη 10;




***Απάντηση:***

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει απαραιτήτως να καθορίσουμε : **Α)** τα διάφορα στάδια, **Β)** τις μεταβλητές αποφάσεων, **Γ)** τις μεταβλητές κατάστασης, **Δ)** τη συνάρτηση απόδοσης καθώς και **Ε)** τη συνάρτηση μετάβασης. Οπότε έχουμε :

$d_n$ = Μεταβλητή απόφασης του σταδίου n (n = 1, 2, 3, 4).

$s_n$ = Μεταβλητές κατάστασης οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε πόλη κάθε σταδίου.

$ds_{n,}d_n$ = Η απόσταση η οποία συνδέεται με τη μεταβλητή κατάστασης, $s_{n,}$ και τη μεταβλητή απόφασης $d_{n,}$ για το τρέχον n–οστό στάδιο.

$f_n(s_n, d_n)$ = Η συνολική ελάχιστη συνολική απόσταση για τα τελευταία n στάδια, δεδομένου ότι ο ταξιδιώτης ευρισκόμενος στην κατάσταση $s_n$ επιλέγει $d_n$ ως άμεσο προορισμό.

$f_n^*(s_n)$ = Βέλτιστη διαδρομή (συντομότερη διαδρομή) όταν ο ταξιδιώτης ευρίσκεται στην κατάσταση $s_n$ και απομένουν περισσότερα από n στάδια για να φθάσει στον προορισμό του.

Προκειμένου να καταφέρουμε να βρούμε τη βέλτιστη διαδρομή, ξεκινάμε την επίλυση του προβλήματος αντίστροφα, δηλαδή υπολογίζουμε τις αποστάσεις μεταξύ των πόλεων ξεκινώντας από την πόλη 10 (= $x_1$), που είναι ο προορισμός μας και εφαρμόζουμε την οπισθοδρομική μέθοδο στην διαδρομή.

$X_5 \longrightarrow X_4 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$.

Ισχύει η αναδρομική σχέση :

$$f_n^* (s_n) = \min_{d_n} \{(ds_n, d_n) + f^*_{n-1} (d_n)\}.$$

με n = 1, 2, 3, 4

όπου $f_{n-1}^*$ $(d_n)$ είναι η βέλτιστη απόδοση για τα προηγούμενα στάδια.

**Στάδιο n = 2**

Εφαρμόζοντας την οπισθοδρομική μέθοδο, θεωρώντας ότι ο ταξιδιώτης ευρίσκεται στο στάδιο 2, υπολογίζουμε την ελάχιστη απόσταση της πόλης 10, από την κατάσταση $s_1 = 8$ (κορυφή 8) και την κατάσταση $s_1 = 9$ ( κορυφή 9) του σταδίου 2.

Είναι $d_{8,10} = 8$ και $d_{9,10} = 10$. Η βέλτιστη τιμή της $f_1^*$ $(s_1)$ είναι η ελάχιστη τιμή μεταξύ της $d_{8,10}$ και της $d_{9,10}$. Τα αποτελέσματα δίδονται στον πίνακα I.

Πίνακας I: Επίλυσης προβλήματος του σταδίου n = 1

| $d_1$ / $s_1$ | $f_1(s_1, d_1) = d_{s1}, d_1$ | **Ελάχιστη απόσταση $f_1^*(s)$** | **Βέλτιστη απόσταση $d_1$** |
|---|---|---|---|
| | **10** | | |
| 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 10 | 10 | 10 |

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε ένα στάδιο προς τα πίσω, δηλαδή θα μεταβούμε στο στάδιο 3. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι ο ταξιδιώτης μας ευρίσκεται στην κατάσταση $s_2$ = 5 (δηλαδή στην κορυφή 5). Από εκεί, μπορεί να επιλέξει είτε την $d_2$ = 8 (κορυφή 8), και να μεταβεί έτσι στην πόλη 8, είτε την $d_2$ = 9, να μεταβεί δηλαδή στην πόλη 9.

Η συνολική απόσταση της απόφασης είναι :

$d_{5,8} + f_1^*(8) = 5 + 8 = 13$ επιλέγει την κατάσταση $s$ = 8).

$d_{5,9} + f_1^*(9) = 9 + 10 = 19$ (επιλέγει την κατάσταση $s_1$ = 9).

Η συνάρτηση απόστασης για τον ταξιδιώτη από την απόσταση $s_2$ = 5 είναι :

$f_2(s_2) = \min(13,19) = 13$ (επιλέγει την κατάσταση $s_1$ = 8).

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε στη συνέχεια και την συνάρτηση απόστασης των ταξιδιωτών από τις καταστάσεις $s_2$ = 6 και $s_2$ = 7.

Από την κατάσταση $s_2$ = 6 :

$$f_2(6) = \min_{d_2 = 8,\,9} \begin{cases} d_{6,8} + f_1^*(8) = 4 + 8 = 12 \text{ (επιλέγει την κατάσταση } s_1 = 8) \\ d_{6,9} + f_1^*(9) = 8 + 10 = 18 \end{cases}$$

Από την κατάσταση $s_2$ $s_2$ = 7:

$$f_2(7) = \min_{d_2 = 8,\,9} \begin{cases} d_{7,8} + f_1^*(8) = 9 + 8 = 17 \\ d_{7,9} + f_1^*(9) = 5 + 10 = 15 \text{ (επιλέγει την κατάσταση } s_1 = 9). \end{cases}$$

Τα αποτελέσματα δίδονται στον πίνακα ΙΙ:

Πίνακας ΙΙ: Επίλυση προβλήματος σταδίου n = 3

| $d_2$ / $s_2$ | **$f_2(s_2, d_2) = ds_2{,}d_2 + f_1^*(s_2)$** | | **Ελάχιστη Απόσταση $f_2^*(s_2)$** | **Βέλτιστη Απόφαση $d_2$** |
|---|---|---|---|---|
| | **8** | **9** | | |
| 5 | 13 | 19 | 13 | 8 |
| 6 | 12 | 18 | 12 | 8 |
| 7 | 17 | 15 | 15 | 9 |

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε στο στάδιο 4. Για τον ταξιδιώτη ο οποίος ευρίσκεται στην κατάσταση $s_3 = 2, 3, 4$ έχουμε :

Από την κατάσταση $s_3 = 2$ :

$$f_3(2) = \min_{d_3 = 5, 6, 7} \begin{cases} d_{2,5} + f_2^*(5) = 8 + 13 = 21 \\ d_{2,6} + f_2^*(6) = 11 + 12 = 23 \\ d_{2,7} + f_2^*(7) = 6 + 15 = 21 \end{cases}$$

= 21 (επιλέγει την κατάσταση $s_2 = 5$ ή την κατάσταση $s = 7$).

Από την κατάσταση $s_3 = 3$ :

$$f_3(3) = \min_{d_3 = 5, 6, 7} \begin{cases} d_{3,5} + f_2^*(5) = 4 + 13 = 17 \\ d_{3,6} + f_2^*(6) = 9 + 12 = 21 \\ d_{3,7} + f_2^*(7) = 5 + 15 = 20 \end{cases}$$

= 17 (επιλέγει την κατάσταση $s_2 = 5$).

Από την κατάσταση $s_3 = 4$ :

$$f_3(4) = \underset{d_3 = 5,6,7}{m} \begin{cases} d_{4,5} + f_2^*(5) = 7 + 13 = 20 \\ d_{4,6} + f_2^*(6) = 11 + 12 = 23 \\ d_{4,6} + f_2^*(7) = 6 + 15 = 21 \end{cases}$$

= 20 (επιλέγει την κατάσταση $s_2 = 5$).

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, δίδονται αναλυτικά στον ακόλουθο πίνακα ΙΙΙ :

Πίνακας ΙΙΙ, Επίλυση προβλήματος σταδίου n = 4

| $d_3$ / $s_3$ | **$f_3(s_3,d_3) = ds_{3},d_3 + f_2^*(d_3)$** | | | **Ελάχιστη Απόσταση $f_3^*(S_3)$** | **Βέλτιστη Απόφαση $d_3$** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **5** | **6** | **7** | | |
| 2 | 21 | 23 | 21 | 21 | 5 ή 7 |
| 3 | 17 | 21 | 20 | 17 | 5 |
| 4 | 20 | 23 | 21 | 20 | 5 |

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και χωρίς να υπάρχει καμία απολύτως διαφοροποίηση θα συνεχίσουμε και για το επόμενο στάδιο (δηλαδή το στάδιο 5). Εδώ, για τον ταξιδιώτη μας που βρίσκεται στην κατάσταση $s_4 = 1$ θα έχουμε :

$$f_4(1) = \min_{d_4 = 2,3,4} \begin{cases} d_{1,2} + f_3^*(2) = 5 + 21 = 26 \\ d_{1,3} + f_3^*(3) = 7 + 17 = 24 \\ d_{1,4} + f_3^*(4) = 4 + 20 = 24 \end{cases}$$

= 24 (επιλέγει την κατάσταση s = 3 ή την κατάσταση $s_3 = 4$).

Τα αποτελέσματα δίδονται στον πίνακα IV.

Πίνακας IV Επίλυση προβλήματος σταδίου n = 5

| $s_4$ \ $d_4$ | $F_4(s_4,d_4) = ds_{4,}d_4 + f_3^*(d_4)$ | | | Ελάχιστη Απόσταση $f_3^*(s_3)$ | Βέλτιστη Απόφαση $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 | 26 | 24 | 24 | 24 | 3ή4 |

Στη συνέχεια, όλα τα βέλτιστα αποτελέσματα τα οποία βρήκαμε παραπάνω στα διάφορα στάδια, τα συνοψίζουμε αναλυτικά εδώ ως εξής :

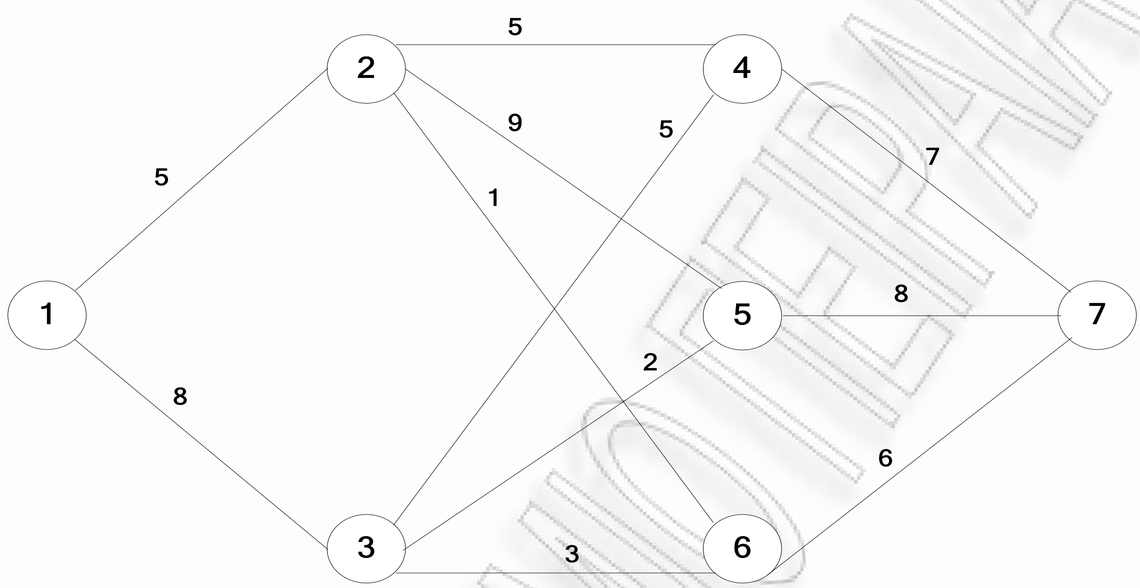
$$\textbf{Ακολουθία} \begin{cases} 10\ \ 8\ \ 5\ \ 3\ \ 1 \\ \\ 10\ \ 8\ \ 5\ \ 3\ \ 1 \end{cases}$$

$$\textbf{Αποστάσεις} \begin{cases} 8\ \ 5\ \ 4\ \ 7 = 24 \\ \\ 8\ \ 5\ \ 7\ \ 4 = 24 \end{cases}$$

**<u>Άρα</u> :** όπως πολύ καλά μπορούμε και διακρίνουμε από τα παραπάνω αποτελέσματα που προέκυψαν, οι πλέον βέλτιστες διαδρομές ελάχιστης απόστασης, είναι : **24km**.

**Παράδειγμα $4^o$**

Στο ακόλουθο γράφημα να ευρεθεί η διαδρομή ελάχιστου μήκους.




Σχήμα 1.3

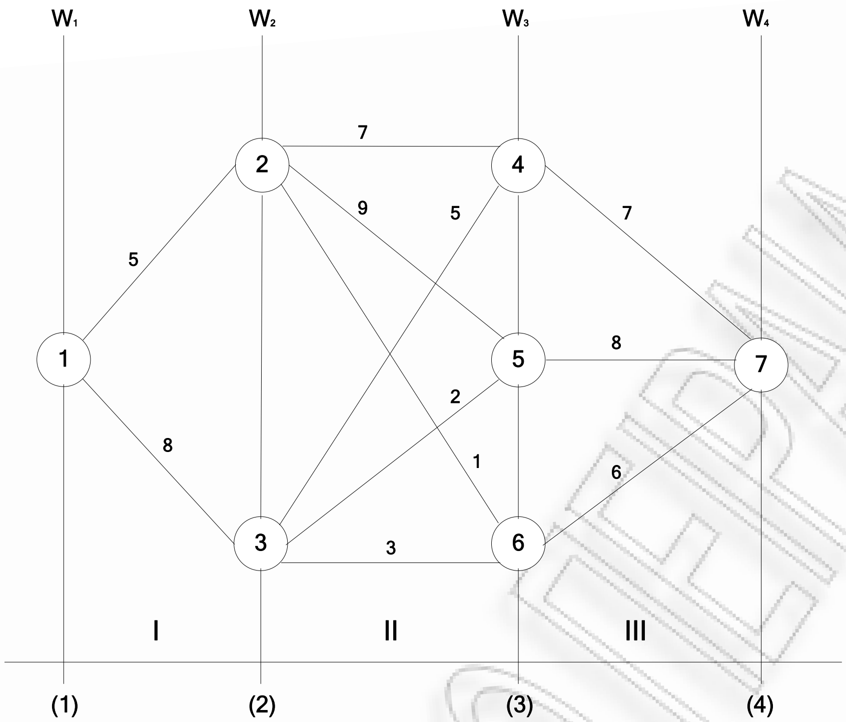
***Απάντηση :***

Έστω ότι $w_1$, $w_2$, $w_3$ και $w_4$ είναι οι μεταβλητές καταστάσεως οι οποίες αντιστοιχούν στις στάθμες 1, 2, 3, 4 του γραφήματος οι οποίες περιλαμβάνουν τους κόμβους : 1, (2, 3), (4, 5, 6) και 7 αντίστοιχα.

Είναι $U_1(W_1,W_2)$, $U_2(W_2,W_3)$ και $U_3(W_3,W_4)$, οι συναρτήσεις, αντίστοιχα, των τμημάτων I, II και III της διαδρομής. Ζητείται να ευρεθεί η ελάχιστη διαδρομή του αθροίσματος :

$$U_1(W_1,W_2) + U_2(W_2,W_3) + U_3(W_3,W_4) \text{ (βλ. Σχήμα 1.4)}$$

Αν $f_1$, $f_{12}$, $f_{13}$ είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις των άριστων πολιτικών των διαδρομών των συνόλων {I}, {I, II}, και {I, II, III} τότε η διαδικασία της αρχής του Bellman έχει ως εξής :




Σχήμα 1.4

**Τμήμα 1$^{\text{ο}}$ Μέρος 1$^{\text{ο}}$ :**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_1(w_2) = U_1(w_1, w_2)$, όταν $w_1$ ανήκει στη στάθμη του κόμβου 1

Για , $w_2 = 2$, έχουμε : $f_1(2) = 5$ με άριστη πολιτική (1, 2).
Για , $w_2 = 3$, έχουμε : $f_1(3) = 8$ με άριστη πολιτική (1, 3).

**Τμήμα 1$^{\text{ο}}$ – Μέρος 2$^{\text{ο}}$:**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_{12}(w_3) = \min \{f_1(w_2) + U_2(w_2,w_3)\}$, όταν η μεταβλητή κατάστασης $w_2$ ανήκει στη στάθμη των κόμβων 2 και 3.

Για $w_3 = 4$, έχουμε : $f_{12}(4) = \min \{f_1(2) + 7,\ f_1(3) + 5\} = \min \{5 + 7, 8 + 5\} = 12$ με άριστη διαδρομή (1, 2, 4).

Για $w_3 = 5$, έχουμε : $f_{12}(5) = \min\{f_1(2) + 9,\ f_1(3) + 2\} = \min\{5 + 9, 8 + 2\} = 10$ με άριστη πολιτική (1, 3, 5)

Για , $w_3 = 6$, έχουμε : $f_{12}(6) = \min\{f_1(2) + 1,\ f_1(3) + 3\} = \min\{5 + 1, 8 + 3\} = 6$ με άριστη πολιτική (1, 2, 6).

**Τμήμα 1$^o$ – Μέρος 3$^o$:**

Για το τμήμα αυτό έχουμε :

$f_{13}(w_4) = \min\{f_{12}(w_3) + U_3(w_3, w_4)\}$

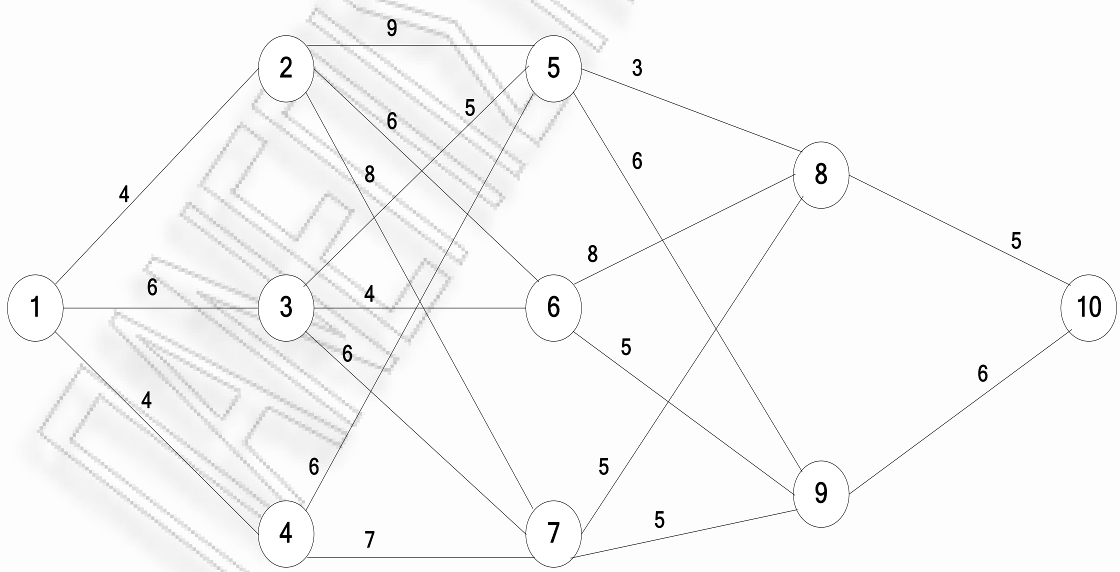
Για , $w_4 = 7$, έχουμε : $f_{13}(7) = \min\{f_{12}(4) + 7,\ f_{12}(5) + 8,\ f_{12}(6) + 6\}$

$= \min\{12 + 7, 10 + 8, 6 + 6\} = 12$, με άριστη πολιτική (1, 2, 6, 7).

Η άριστη πολιτική του προβλήματος είναι η (1, 2, 6, 7) με ελάχιστη τιμή 12.

**Παράδειγμα 5$^o$**

Να βρεθεί η διαδρομή με το ελάχιστο μήκος για το ακόλουθο γράφημα.

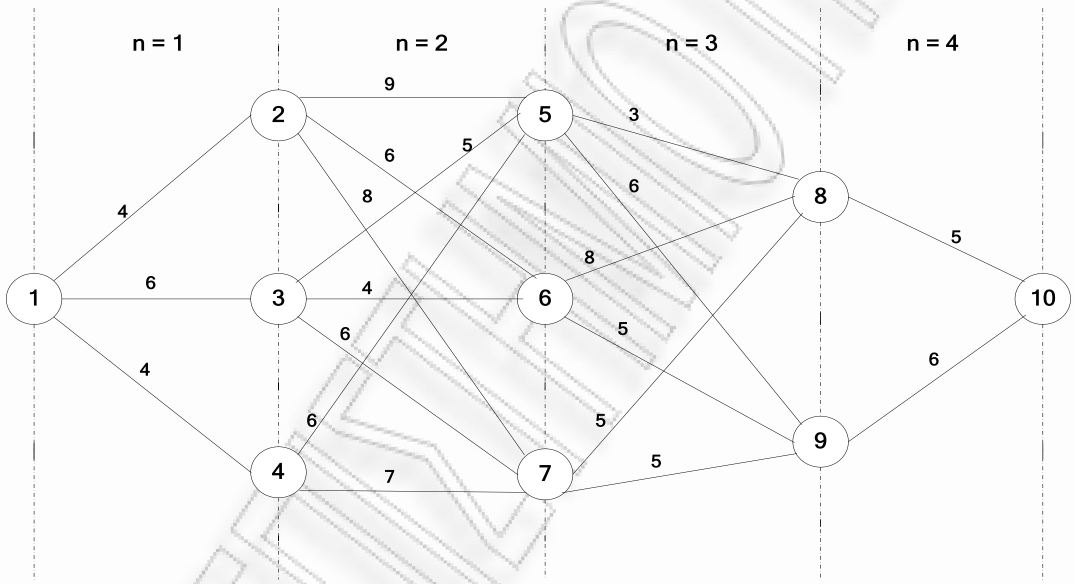



Σχήμα 1.5

***Απάντηση :***

Έστω n = 1, 2, 3, 4 τα στάδια του προβλήματος. Τον άμεσο προορισμό του σταδίου n εκφράζει η μεταβλητή απόφασης. Η μεταβλητή κατάστασης $s_n$ είναι ο κόμβος του γραφήματος στο n-οστό στάδιο. Είναι $ds_nx_n$, η απόσταση της μεταβλητής κατάστασης $s_n$ και της μεταβλητής απόφασης $x_n$. Είναι $f_n(s_n,x_n)$ η συνάρτηση την οποία θα ελαχιστοποιήσουμε. Αν $S_n$ και n είναι γνωστά τότε ορίζουμε με $x_n^*$ την τιμή της μεταβλητής απόφασης $x_n$ η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f_n(s_n, x_n)$.

Έστω $f_n^*$ $(s_n)$ είναι η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f_n(s_n, x_n)$.




Σχήμα 1.6

Χρησιμοποιούμε την οπισθοδρομική μέθοδο για την εύρεση της διαδρομής με το ελάχιστο μήκος. Θα προσδιοριστούν οι τιμές της $f_4^*(s_4)$, $f_3^*(s_3)$, $f_2^*(s_2)$ και $f_1^*(s_1)$.

Έστω ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση $s_8$ και $s_9$ του σταδίου n = 4. Είναι :

$s_8 = 5$ και $s_9 = 6$ ενώ ο κόμβος προορισμού είναι $s_{10} = 10$.

- Για το στάδιο n = 4 ισχύει :

| $x_4$ / $s_4$ | $F_4\,(s_4,x_4) = ds_{4},x_4$ | $f_4^*\,(s_4)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|---|
| | **10** | | |
| 8 | 5 | 5 | 10 |
| 9 | 6 | 6 | 10 |

Η ελάχιστη τιμή που προκύπτει για τη συνάρτηση $f_4\,(s_4,x_4)$ είναι η $f_4^*\,(s_4) = 5$, οπότε η απόφαση είναι η $x_4^* = 10$.

Για το στάδιο n = 3 ισχύει :

$$\mathbf{f_3\,(s_3,x_3) = ds_{3},x_3 + f_4^*\,(x_3)}$$

Είναι :

$f_3(5,8) = d_{5,8} + f_4^*\,(8) = 3 + 5 = 8$

$f_3(5,9) = d_{5,9} + f_4^*\,(9) = 6 + 6 = 12$

$f_3(6,8) = d_{6,8} + f_4^*\,(8) = 8 + 5 = 13$

$f_3(6,9) = d_{6,9} + f_4^*\,(9) = 5 + 6 = 11$

$f_3(7,8) = d_{7,8} + f_4^*\,(8) = 5 + 5 = 10$

$f_3(7,9) = d_{7,9} + f_4^*\,(9) = 5 + 6 = 11$

Συνοπτικά έχουμε :

| $x_3$ / $s_3$ | $f_3(s_3, x_3) = ds_{3,}x_3 + f_4^*(x_3)$ | | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|---|
| | **8** | **9** | | |
| 5 | 3 + 5 = 8 | 6 + 6 = 12 | 8 | 8 |
| 6 | 8 + 5 = 13 | 5 + 6 + 11 | 11 | 9 |
| 7 | 5 + 5 = 10 | 5 + 6 = 11 | 10 | 8 |

Για το στάδιο n = 2 ισχύει :

$$\mathbf{f_2(s_2,x_2) = ds_{2,}x_2 + f_3^*(x_2)}$$

Είναι :

$$f_2(2,5) = d_{2,5} + f_3^*(5) = 9 + 8 = 17$$

$$f_2(2,6) = d_{2,6} + f_3^*(6) = 6 + 11 = 17$$

$$f_2(2,7) = d_{2,7} + f_3^*(7) = 8 + 10 = 18$$

$$f_2(3,5) = d_{3,5} + f_3^*(5) = 5 + 8 = 13$$

$$f_2(3,6) = d_{3,6} + f_3^*(6) = 4 + 11 = 15$$

$$f_2(3,7) = d_{3,7} + f_3^*(7) = 6 + 10 = 16$$

$$f_2(4,7) = d_{4,7} + f_3^*(7) = 7 + 10 = 17$$

Συνοπτικά έχουμε :

| $x_2$ / $s_2$ | $f_2(s_2,x_2) = ds_2,x_2 + f_3^*(x_2)$ | | | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | **5** | **6** | **7** | | |
| 2 | 9 + 8 = 17 | 6 + 13 = 19 | 8 + 10 = 18 | 17 | 5 |
| 3 | 5 + 8 = 13 | 4 + 13 = 17 | 6 + 10 = 16 | 13 | 5 ή 6 |
| 4 | 6 + 8 = 14 | | 7 + 10 = 17 | 14 | 5 |

Για το στάδιο n = 1 ισχύει :

$$\mathbf{f_1 (s_1,x) = ds_1,x_1 + f_2^*(x_1)}$$

Είναι :

$$f_1(1,2) = d_{1,2} + f_2^*(2) = 4 + 17 = 21$$

$$f_1(1,3) = d_{1,3} + f_2^*(3) = 6 + 13 = 19$$

$$f_1(1,4) = d_{1,4} + f_2^*(4) = 4 + 14 = 18$$

Συνοπτικά έχουμε :

| $x_1$ / $s_1$ | $f_1(s_1,x_1) = ds_1,x_1 + f_2^*(x_1)$ | | | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | **3** | **4** | | |
| 1 | 4 + 17 = 21 | 6 + 13 = 19 | 4 + 14 = 18 | 18 | 4 |

- Αρχικά μεταβαίνουμε στον κόμβο 4 γιατί $x_1^* = 4$.

- <u>Πρόβλημα τριών σταδίων</u> : για $s_2 = 4$, έχουμε $x_2^* = 5$, οπότε από τον κόμβο 4 μεταβαίνουμε στον κόμβο 5.

- <u>Πρόβλημα δύο σταδίων</u> : για $s_3 = 5$, έχουμε $x_3^* = 8$, από τον κόμβο 5 μεταβαίνουμε στον κόμβο 8.

- <u>Πρόβλημα δύο σταδίων</u> : για $s_4 = 8$, έχουμε $x_4^* = 10$.

Η διαδρομή ελάχιστου μήκους είναι :

$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10.$

Με ελάχιστο μήκος $\mathbf{f_1^*(1) = 18}$.

**Παράδειγμα 6ο Πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους**

Στον πίνακα που παρατίθεται παρακάτω, δίδονται τα κέρδη όπως αυτά προβλέπονται σύμφωνα με τις επενδύσεις κεφαλαίων ύψους **Α)** 100, **Β)** 200, **Γ)** 300 και **Δ)** 400 χ.μ. αντίστοιχα στις επενδύσεις δραστηριότητες Α, Β, Γ και Δ :

| **Χ** | **Α** | **Β** | **Γ** | **Δ** |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 25 | 21 | 19 | 18 |
| 200 | 48 | 42 | 44 | 38 |
| 300 | 68 | 62 | 60 | 64 |
| 400 | 74 | 70 | 68 | 72 |

Ζητείται να γίνει επένδυση 400 χ.μ. με το μέγιστο κέρδος.

*Απάντηση :*

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να διαμορφώσουμε την αναδρομική σχέση σύμφωνα με την οποία θα επιλύσουμε το πρόβλημα. Έστω λοιπόν ένας τυχαίος επενδυτής, ο οποίος διαθέτει ένα κεφάλαιο X χ.μ. και το οποίο επιθυμεί να το επενδύσει σε επενδυτικές δραστηριότητες προσδοκώντας βέβαια και στις αντίστοιχες αποδόσεις. Κύριο μέλημα του επενδυτή είναι να μπορέσει να επενδύσει το κεφάλαιο του στις διάφορες επενδυτικές δραστηριότητες ούτως ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση αυτού.

Εφόσον η συνολική απόδοση των επενδυόμενων κεφαλαίων μας προκύπτει από το άθροισμα των αποδόσεων των αντίστοιχων επενδυτικών δραστηριοτήτων που υπάρχει στα διάφορα στάδια, είναι ότι εμφανές πρόκειται για ένα πρόβλημα n-σταδιακών διαδικασιών αποφάσεων. Έστω ότι η μεταβλητή της απόφασης $x_j$ εκφράζει το ποσό της επένδυσης στη j-οστή επενδυτική δραστηριότητα, και $r_j(x_j)$ η απόδοση της j-οστής δραστηριότητας. Η απόδοση $r_j(x_j)$ θα είναι συνάρτηση της ποσότητας του επενδυόμενου κεφαλαίου μας.

Αν F θεωρήσουμε τη συνολική απόδοση των επενδύσεων, το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής :

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$$

όταν $X = \sum_{j=1}^{n} x_j$

και $x_j \geq 0 \ \forall \geq 1,2,\ldots,n$

Η μέγιστη τιμή της απόδοσης F εξαρτάται από το X και $r_j(x_j)$. Η μέγιστη απόδοση η οποία προκύπτει από την επένδυση της ποσότητας κεφαλαίου X σε n επενδυτικές δραστηριότητες εκφράζεται από την ακόλουθη συνάρτηση :

$$\mathbf{f_n(X) = maxF(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \quad (1.7)$$

Αν η ποσότητα του κεφαλαίου που πρόκειται να επενδύσουμε στη n-οστή επενδυτική δραστηριότητά μας, είναι $x_n$, με $0 \leq x_n \leq X$, τότε $(X - x_n)$ είναι εκείνο το κεφάλαιο που επενδύεται και στις υπόλοιπες επενδυτικές δραστηριότητές μας. Αν η απόδοση τώρα για τις n – 1 δραστηριότητες εκφράζεται μέσα από τη συνάρτηση $f_{n-1}(X - x_n)$, τότε :

$$\mathbf{f_{n-1}(X - x_n) = \Sigma_{j=1}^{n-1} r_j(x_j), x_j \geq 0}$$

Η συνολική απόδοση από τις n επενδυτικές δραστηριότητες, δίδεται :

$$\mathbf{f_n(X) = r_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n)} \qquad (1)$$

Το πρόγραμμα του Δυναμικού Προγραμματισμού συνίσταται στον καθορισμό της τιμής $x_n$ ούτως ώστε να μεγιστοποιείται η εξίσωση (1)

Γενικά το πρόβλημα εκφράζεται μέσω της ακόλουθης αναδρομικής σχέσης :

$$f_n(X) = \max \{r_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n)\}, \forall\ n = 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Για να καταφέρουμε να έχουμε τη βέλτιστη λύση θεωρούμε ότι $r_j(o) = 0$, για $j = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι, $f_n(0) = 0$, για $n = 1, 2, \ldots$, και $f_1(X) = r_j(X)$, αφού η $f_1(X)$ καθορίζει την $f_2(X)$ η οποία στη συνέχεια καθορίζει την $f_3(X)$ και , τελικά η $f_n(X)$ καθορίζεται από την $f_{n-1}(X)$.

| **X** | **Α: $r_1$(X)** | **Β: $r_2$(X)** | **Γ: $r_3$(X)** | **Δ: $r_4$(X)** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 25 | 21 | 19 | 18 |
| 200 | 48 | 42 | 44 | 38 |
| 300 | 68 | 62 | 60 | 64 |
| 400 | 74 | 70 | 68 | 72 |

Πίνακας κεφαλαίων, κερδών και επενδυτικών δραστηριοτήτων του προβλήματος

Για κάθε διάνυσμα ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) που ικανοποιεί τις περιοριστικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε :

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4}$$

όπου $x_i$ ανήκει { 0, 100, 200, 300, 400 }, i = 1, 2, 3, 4

είναι μια πολιτική του προβλήματος.

Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές της $f_1(X)$ οι οποίες μας είναι απαραίτητες για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τις τιμές της $f_2(X)$. Το κέρδος επένδυσης που προκύπτει στην επενδυτική δραστηριότητα Α είναι ίσο με μηδέν όταν για αυτήν την δραστηριότητα δε διατίθεται κανένα άλλο κεφάλαιο.

Οπότε έχουμε :

$$f_1(0) = r_1(0) = 0$$

$$f_1(100) = r_1(100) = 25$$

$$f_1(200) = r_1(200) = 48$$

$$f_1(300) = r_1(300) = 68$$

$$f_1(400) = r_1(400) = 74$$

Οι τιμές της $f_2(X)$ τώρα υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση (1- 9) αντικαθιστώντας σε αυτήν τις τιμές της $f_1(X)$.

Αν X = 0, είναι $f_2(0) = 0$

Αν X = 100, είναι $f_2(100) = \max \{r_2(x_2) + f_1(100 - x_2)\}$

Άρα :

Οι τιμές της $f_2(100)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 100$, είναι :

$$f_2(100) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(100) = 0 + 25 = 25 \\ r_2(1) + f_1(0) = 21 + 0 = 21 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 25, όταν $x_2 = 0$.

Αν $X = 200$, είναι $f_2(200) = \max \{r_2(x_2) + f_1(200 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(200)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 200$, είναι :

$$f_2(200) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(200) = 0 + 48 = 48 \\ r_2(100) + f_1(100) = 21 + 25 = 46 \\ r_2(200) + f_1(0) = 42 + 0 = 42 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 48 και αυτή προκύπτει για $x_2 = 0$.

Για $X = 300$, είναι $f_2(300) = \max \{r_2(x_2) + f_1(300 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(300)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 300$, είναι :

$$f_2(300) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(300) = 0 + 68 = 68 \\ r_2(100) + f_1(200) = 21 + 48 = 69 \\ r_2(200) + f_1(100) = 42 + 25 = 67 \\ r_2(300) + f_1(0) = 62 + 0 = 62 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 69 και προκύπτει για $x_2 = 100$.

Για X = 400, είναι $f_2(400) = \max \{r_2(x_2) + f_1(400 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(400)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 400$, είναι :

$$f_2(400) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(400) = 0 + 74 = 74 \\ r_2(100) + f_1(300) = 21 + 68 = 89 \\ r_2(200) + f_1(200) = 42 + 48 = 90 \\ r_2(300) + f_1(100) = 62 + 25 = 87 \\ r_2(400) + f_1(0) = 70 + 0 = 70 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 90 και προκύπτει για $x_2 = 200$.

Οι τιμές της $f_3(X)$, ανάλογα, προκύπτουν χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (1.9) :

Αν X = 0, ισχύει $f_3(0) = 0$

Αν X = 100, τότε είναι $f_3(100) = \max \{r_3(x_3) + f_2(100 - x_3)\}$

και $f_3(100) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(100) = 0 + 25 = 25 \\ r_3(1) + f_2(0) = 19 + 0 = 19 \end{cases}$

Η μέγιστη τιμή είναι 25 για $x_3 = 0$.

Αν X = 200, τότε $f_3(200) = \max \{r_3(x_3) + f_2(200 – x_3)\}$ &

$$f_3(200) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(200) = 0 + 48 = 48 \\ r_3(100) + f_2(100) = 19 + 25 = 44 \\ r_3(200) + f_2(0) = 44 + 0 = 44 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 48 και προκύπτει για $x_3 = 0$.

Αν $X = 300$, τότε $f_3(300) = \max \{r_3(x_3) + f_2(300 - x_3)\}$

$$f_3(300) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(300) = 0 + 69 = 69 \\ r_3(100) + f_2(200) = 19 + 48 = 67 \\ r_3(200) + f_2(100) = 44 + 25 = 69 \\ r_3(300) + f_2(0) = 60 + 0 = 60 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 69 και προκύπτει για $x_3 = 200$, όπως επίσης μπορεί να προκύψει για $x_3 = 0$.

Αν $X = 400$, τότε $f_3(400) = \max \{r_3(x_3) + f_2(400 - x_3)\}$

$$f_3(400) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(400) = 0 + 90 = 90 \\ r_3(100) + f_2(300) = 19 + 69 = 88 \\ r_3(200) + f_2(200) = 44 + 48 = 92 \\ r_3(300) + f_2(100) = 60 + 25 = 85 \\ r_3(400) + f_2(0) = 68 + 0 = 68 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή ισούται με 92 και προκύπτει για $x_3 = 200$.

Οι τιμές της συνάρτησης $f_4(X)$, προκύπτουν χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (1.9) :

Αν $X = 0$, ισχύει $f_4(0) = 0$

Αν $X = 100$, τότε είναι $f_4(100) = \max \{r_4(x_4) + f_3(100 – x_4)\}$

και $f_4(100) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(100) = 0 + 25 = 25 \\ r_4(1) + f_3(0) = 18 + 0 = 18 \end{cases}$

Η μέγιστη τιμή είναι 25 για $x_4 = 0$.

Αν $X = 200$, τότε $f_4(200) = \max\{r_4(x_4) + f_3(200 - x_4)\}$

&

$$f_4(200) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(200) = 0 + 48 = 48 \\ r_4(100) + f_3(100) = 18 + 25 = 43 \\ r_4(200) + f_3(0) = 38 + 0 = 38 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 48 και προκύπτει για $x_4 = 0$.

Αν $X = 300$, τότε $f_4(300) = \max\{r_4(x_4) + f_3(300 - x_4)\}$

&

$$f_4(300) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(300) = 0 + 69 = 69 \\ r_4(100) + f_3(200) = 18 + 48 = 66 \\ r_4(200) + f_3(100) = 38 + 25 = 63 \\ r_4(300) + f_3(0) = 64 + 0 = 64 \end{cases}$$

Συνεπώς, η μέγιστη τιμή για τη συνάρτηση $f_4(X)$ είναι 69 και προκύπτει για την περίπτωση όπου $x_4 = 0$.

Αν $X = 400$, τότε $f_4(400) = \max\{r_4(x_4) + f_3(400 - x_4)\}$

&

$$f_4(400) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(400) = 0 + 92 = 92 \\ r_4(100) + f_3(300) = 18 + 69 = 87 \\ r_4(200) + f_3(200) = 38 + 48 = 86 \\ r_4(300) + f_3(100) = 64 + 25 = 89 \\ r_4(400) + f_3(0) = 72 + 0 = 72 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 92 και προκύπτει για $x_4 = 0$.

Με τις τιμές των $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ και $f_4(X)$ για $x_1$, $x_2$, $x_3$ και $x_4$ κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα :

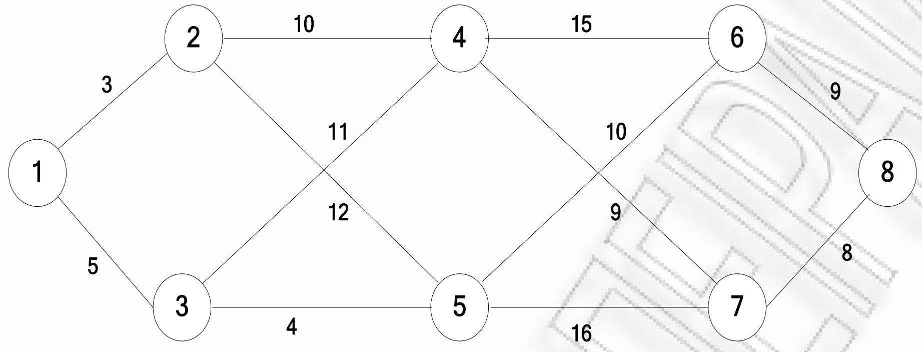
| **X** | **A** | | **B** | | **Γ** | | **Δ** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$x_1$** | **$f_1(X)$** | **$x_2$** | **$f_2(X)$** | **$x_3$** | **$f_3(X)$** | **$x_4$** | **$f_4(X)$** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 100 | 25 | 0 | 25 | 0 | 25 | 0 | 25 |
| 200 | $200^*$ | 48 | $0^*$ | 48 | 0 | 48 | 0 | 48 |
| 300 | 300 | 68 | 100 | 69 | 200 | 69 | 0 | 69 |
| 400 | 400 | 74 | 200 | 90 | $200^*$ | 92 | $0^*$ | 92 |

Το μέγιστο κέρδος 92 χ.μ. υλοποιείται στην επένδυση Δ για $x_4 = 0$. Έτσι, αν ένας επενδυτής επενδύσει 100 χ.μ. στην επενδυτική δραστηριότητα Δ τότε το κέρδος θα ισούται με 0 χ.μ.. Οπότε το ποσό των 92 χ.μ. θα προκύψει από τις διάφορες επενδυτικές δραστηριότητες Γ, Β και την Α. Το ποσό των 92 χ.μ. βρίσκεται στην επενδυτική δραστηριότητα Γ για $x_3 = 200$ το οποίο και μας αποδίδει 44 χ.μ.. Το υπόλοιπο ποσό (92 – 44) = 48 χ.μ. προκύπτει από τις υπόλοιπες δύο επενδυτικές δραστηριότητες, δηλαδή τη Β και την Α. Το υπόλοιπο ποσό βρίσκεται στην στήλη της επενδυτικής δραστηριότητας Β για $x_2 = 0$. Το υπόλοιπο ποσό, ο επενδυτής δεν προτίθεται να το επενδύσει στη δραστηριότητα Β, αλλά στη δραστηριότητα Α. Συνεπώς το υπόλοιπο ποσό 48 χ.μ. θα βρίσκεται στη στήλη της δραστηριότητας Α για $x_1 = 200$. Τελικά, η μέγιστη τιμή όπως αυτή προκύπτει για το κέρδος του επενδυτή ισούται με 92 χ.μ. για $x_4 = 0$, $x_3 = 200$, $x_2 = 0$ και $x_1 = 200$. Άρα, η βέλτιστη πολιτική ($200^*$, $0^*$, $200^*$, $0^*$) δείχνεται στον πίνακα με αστερίσκο.

**Παράδειγμα 7ο : Επίλυση ηλεκτρικού δικτύου**

Στο ακόλουθο σχήμα δίδεται εάν ηλεκτρικό δίκτυο παραγωγής και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Ο κόμβος (1) παριστάνει τη μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας (γεννήτρια) ενώ οι κόμβοι (2) μέχρι και (8) είναι τα κέντρα ηλεκτρικού φορτίου. Οι τιμές των τόξων σύνδεσης των κόμβων εκφράζουν ηλεκτρικές απώλειες.
(i) Να βρείτε τη βέλτιστη πολιτική με βάση την οποία, θα τροφοδοτείται το φορτίο του κόμβου (2) από τη μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας (1) με τις ελάχιστες ηλεκτρικές απώλειες.

(ii) Να βρείτε τη βέλτιστη πολιτική με βάση την οποία, θα τροφοδοτείται το φορτίο του κόμβου (8) με τις ελάχιστες ηλεκτρικές απώλειες, αλλά να τροφοδοτείται και το φορτίο του κόμβου (4).




***Απάντηση :***

Οι κόμβοι διαιρούνται σε πέντε διαφορετικά στάδια τα οποία δηλώνουμε με το δείκτη j. Για j = 0 υπάρχει μόνο ένας κόμβος, ο κόμβος 1. Για j = 4 υπάρχει μόνο ο κόμβος 8. Για j = 1, 2, 3 υπάρχουν δύο κόμβοι σε κάθε στάδιο. Σε κάθε βήμα, μελέτης, μετακινούμαστε από το στάδιο j στο στάδιο j + 1.

Σε κάθε κίνηση που πραγματοποιούμε επέρχεται μία αλλαγή στην κατάσταση του συστήματος την οποία δηλώνουμε με $x_j$, ενώ με $x_0$ δηλώνουμε την κατάσταση στη θέση του κόμβου 1. Η τιμή της κατάστασης $x_0$ είναι **«μοναδική»**, έστω $x_0 = 1$. Η κατάσταση $x_2$ έχει δύο πιθανές τιμές, την 2 και την 3, οι οποίες και αντιστοιχούν στους κόμβους του δεύτερου σταδίου. Κατόπιν καλούμε όλες εκείνες τις πιθανές εναλλακτικές διαδρομές από το ένα στάδιο στο άλλο, ως **«μεταβλητές απόφασης»** και τις συμβολίζουμε με $\delta_j$, μέσω της οποίας μετακινούμαστε από την κατάσταση $x_{j-1}$ στην κατάσταση $x_j$. Το κέρδος που έχουμε παίρνοντας την απόφαση $\delta_j$ το δηλώνουμε σαν $f_j(\delta_j)$, η οποία είναι η η συνάρτηση απόφασης. Σε αυτό το πρόβλημα αντιστοιχούμε το $\delta_j$ με το μήκος του τόξου, του γραφήματος, το οποίο όμως εκφράζει διάφορες απώλειες. Επίσης, εδώ, ισχύει το $f_j(\delta_j) = \delta_j$. Έστω ότι $T_j(x_j)$ είναι η ελάχιστη διαδρομή, από το $x_0$ σε κάθε κόμβο $x_j$.

(i) Για το πρόβλημα μας, ισχύει η αναδρομική σχέση :

$$T_j(x_j) = \min_{\delta_j} [\delta_j + T_{j-1}(x_{j-1})]$$

όπου $\delta_j$ είναι το τόξο σύνδεσης του σταδίου j – 1 με το στάδιο j.

Ισχύει $T_1(\delta_1) = \delta_1$. Οπότε $T_1(2) = 3$ και $T_1(3) = 5$.

Είναι :

$$T_2(x_2) = \min_{\delta_2} [\delta_2 + T_1(x_1)] = \quad \min [T_2(4), T_2(5)]$$

$$\begin{aligned} T_2(4) &= \min [10 + T_1(2), 11 + T_1(3)] \\ &= \min [10 + 3, 11 + 5] = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(5) &= \min [4 + T_1(3), 12 + T_1(2)] \\ &= \min [4 + 5, 12 + 3] = 9 \end{aligned}$$

Οπότε :

$$T_2(x_2) = \min [T_2(4), T_2(5)] = \min [13, 9] = 9$$

Στη συνέχεια έχουμε :

$$T_3(x_3) = \min_{\delta_2} [\delta_3 + T_2(x_2)] = \quad \min [T_3 (6), T_3 (7)]$$

$$\begin{aligned} T_3 (6) &= \min [15 + T_2(4), 10 + T_2(5)] \\ &= \min [15 + 13, 10 + 9] = 19 \end{aligned}$$

$T_3\,(7) = \min\,[9 + T_2\,(4),\ 16 + T_2\,(5)]$

$\quad\quad = \min\,[9 + 13,\ 16 + 9] = 22$

Οπότε έχουμε:

$T_3(x_3) = \min\,[T_3\,(6),\ T_3\,(7)] = \min\,[19,\ 22] = 19$

Στη συνέχεια έχουμε :

$$T_4(x_4) = \min_{\delta_3}\,[\delta_4 + T_3(x_3)] = \min\,[9 + T_6\,(6),\ 8 + T_3\,(7)]$$

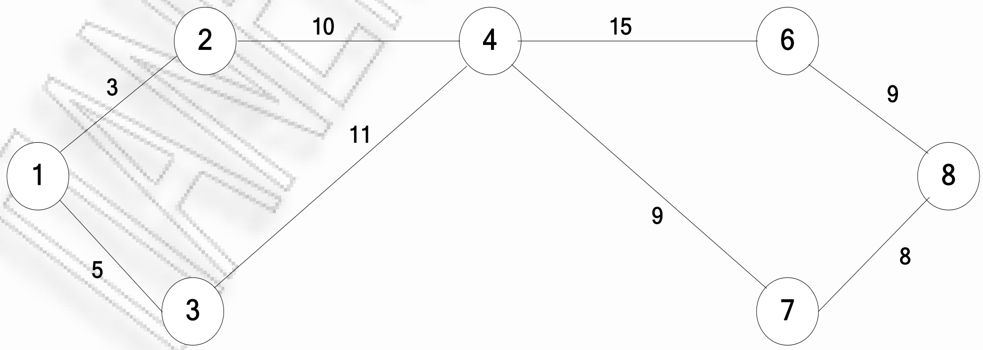
$$= \min\,[9 + 19,\ 8 + 22] = 28$$

Η ελάχιστη διαδρομή είναι :

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8$

και η τιμή των απωλειών είναι 28.

(ii) Πρέπει να περάσουμε από τον κόμβο 4. Τότε το σύστημα διαιρείται σε δύο ξεχωριστά προβλήματα αγνοώντας τον κόμβο 5 :



Για το πρώτο πρόβλημα ισχύει :

$T_1(\delta_1) = \delta_1,$

Οπότε έχουμε :

$T_1(2) = 3,\ T_1(3) = 5.$

Ισχύει :

$$T_2(x_2) = \min_{\delta_2} [\delta_2 + T_1(x_1)] = \min [T_2(4), T_2(5)]$$

$$T_2(4) = \min [10 + T_1(2), 11 + T_1(3)] = \min [10 + 3, 11 + 5] = 13$$

Για το δεύτερο πρόβλημα έχουμε :

$$T_3(x_3) = \min_{\delta_3} [\delta_3 + T_2(x_2)] = \min [T_3(6), T_3(7)]$$

$$= \min [13 + 15, 13 + 9] = 22$$

$$T_4(x_4) = \min_{\delta_3} [\delta_4 + T_3(x_3)] = \min [9 + T_3(6), 8 + T_3(7)]$$

$$= \min [9 + 28, 8 + 22] = 30$$

Η ελάχιστη διαδρομή είναι :

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8$

και η τιμή των απωλειών είναι 30.

Ένας άλλος τρόπος για να καταφέρουμε να επιλύσουμε το πρόβλημά μας (i) είναι η μέθοδος των **«πινάκων»**. Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο ορίζουμε τις εξής μεταβλητές :

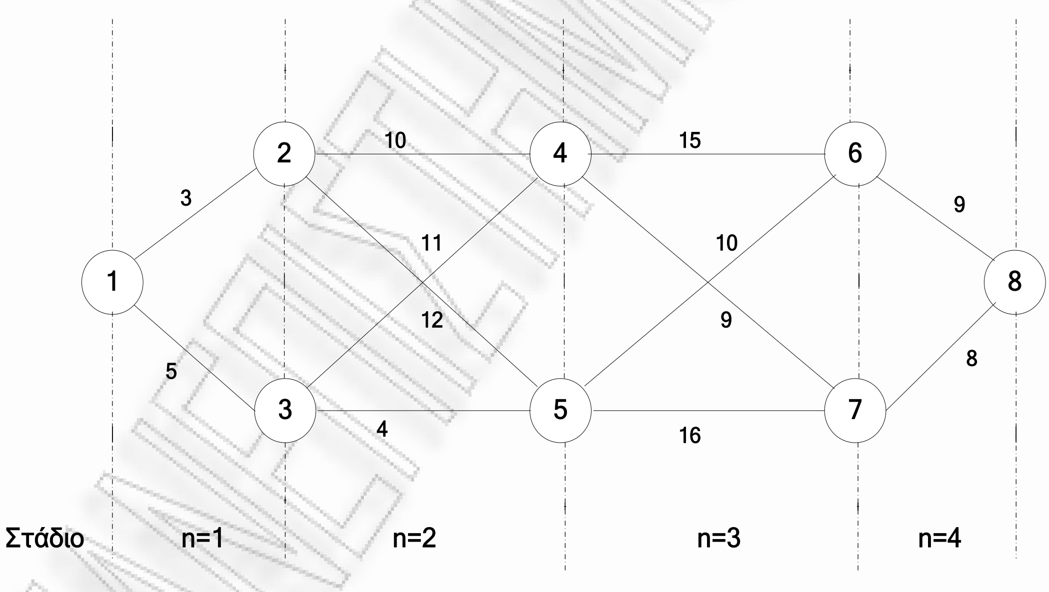
1) Τη μεταβλητή σταδίου n, η οποία σαν δείκτης μετράει σε ποιο στάδιο της διαδικασίας βρισκόμαστε. Για το πρόβλημα μας ισχύει n = 1, 2, 3, 4.

2) Τις μεταβλητές απόφασης $x_n$, του σταδίου n.

3) Τις μεταβλητές κατάστασης $s_n$ του σταδίου n. Η μεταβλητή κατάστασης $s_n$ εκφράζει τον κόμβο του σταδίου n.

4) Η απόσταση $\delta_{s_n x_n}$ μεταξύ της κατάστασης $s_n$ και της μεταβλητής απόφασης $x_n$.

5) Τη συνάρτηση $f_n(s_n, x_n)$ η οποία εκφράζει τη συνολική απόσταση των υπολοίπων σταδίων.




Ας υποθέσουμε τώρα ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση 6 ή στην κατάσταση 7 του σταδίου n = 4 και απαιτείται ένα ακόμα στάδιο για να φτάσουμε στο κέντρο φορτίου 8. Η λύση του προβλήματος που αντιστοιχεί στο στάδιο n = 4, δίδεται στον πίνακα 1.

Το στάδιο n = 4

| $x_4$ / $s_4$ | $f_4(s_4, x_4) = \delta s_4 x_4$ | **Ελάχιστη απόσταση - τιμή $f_4^*(s_4)$** | **Βέλτιστη απόσταση $x_4^*$** |
|---|---|---|---|
| | **8** | | |
| 6 | 9 | 9 | 8 |
| 7 | 8 | 8 | 8 |

Πίνακας 1

Στην κατάσταση όπου έχουμε το $s_4 = 6$, η τιμή της $f_4(s_4, x_4)$ είναι ίση με την απόσταση δ, δηλαδή την $\delta s_4 x_4 = 9$. Οπότε η ελάχιστη τιμή που πρόκειται να πάρει η συνάρτηση $f_4(s_4, x_4)$ ισούται με $f_4^*(s_4) = 9$, ενώ η βέλτιστη απόφαση που προκύπτει είναι η $x_4^* = 8$.

Για την κατάσταση $s_4 = 7$, η τιμή της συνάρτησης $f_4(s_4, x_4)$ είναι ίση με την απόσταση $\delta s_4 x_4 = 8$. Η ελάχιστη τιμή που προκύπτει τώρα για τη συνάρτηση $f_4(s_4, x_4)$ ισούται με την αντίστοιχη συνάρτηση $f_4^*(s_4) = 8$, καθώς επίσης και η βέλτιστη απόφαση ισούται με $x_4^* = 8$.

Η λύση του προβλήματος στο στάδιο n = 3 δίδεται στον πίνακα 2 :

Το στάδιο n = 3

| $x_3$ / $s_3$ | $f_3(s_3, x_3) = \delta s_3 x_3 + f_3^*(x_3)$ | | **Ελάχιστη απόσταση - τιμή $f_3^*(x_3)$** | **Βέλτιστη απόσταση $x_3^*$** |
|---|---|---|---|---|
| | **6** | **7** | | |
| 4 | 24 | 17 | 17 | 7 |
| 5 | 19 | 24 | 19 | 6 |

Πίνακας 2

Ας υποθέσουμε τώρα ότι βρισκόμαστε στο κέντρο του φορτίου 4 δηλαδή στην κατάσταση $s_3 = 4$. Για να είμαστε σε θέση να μεταβούμε στο κέντρο του φορτίου 8, μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε ανάμεσα στις εξής δύο καταστάσεις, την $x_3 = 6$ ή $x_3 = 7$.

Ισχύει :

$$\mathbf{f_3 (s_3, x_3) = \delta_{s_3 x_3} + f_4^* (x_3)}$$

Οπότε έχουμε :

$$f_3(4, 6) = \delta_{46} + f_4^*(6) = 15 + 9 = 24$$

$$f_3(4, 7) = \delta_{47} + f_4^*(7) = 9 + 8 = 17$$

$$f_3(5, 7) = \delta_{57} + f_4^*(7) = 16 + 8 = 24$$

$$f_3(5, 6) = \delta_{56} + f_4^*(6) = 10 + 9 = 19$$

**<u>Άρα</u> :** λύση του προβλήματος που αντιστοιχεί για το στάδιο n = 2, δίδεται στον πίνακα 3 που ακολουθεί παρακάτω :

Το στάδιο n = 2

| $x_2$ / $s_2$ | $\mathbf{f_2(s_2, x_2) = \delta_{s_2 x_2} + f_2^*(x_2)}$ | | **Ελάχιστη απόσταση - τιμή $f_2^*(x_2)$** | **Βέλτιστη απόσταση $x_2^*$** |
|---|---|---|---|---|
| | **4** | **5** | | |
| 2 | 27 | 31 | 27 | 4 |
| 3 | 28 | 23 | 23 | 5 |

Πίνακας 3

Για το στάδιο n = 2, ισχύει :

$$f_2(s_2, x_2) = \delta_{s_2 x_2} + f_3^*(x_2)$$

Οπότε έχουμε :

$$f_2(2, 4) = \delta_{24} + f_3^*(4) = 10 + 17 = 27$$

$$f_2(2, 5) = \delta_{25} + f_3^*(5) = 12 + 19 = 31$$

$$f_2(3, 4) = \delta_{34} + f_3^*(4) = 11 + 17 = 28$$

$$f_2(3, 5) = \delta_{35} + f_3^*(5) = 4 + 19 = 23$$

Η λύση του προβλήματος που αντιστοιχεί στο στάδιο n = 4 δίδεται στον πίνακα 4 :

| $x_1$ / $s_1$ | **$f_1(s_1, x_1) = \delta_{s_1 x_1} + f_2^*(x_1)$** | | **Ελάχιστη απόσταση - τιμή $f_1^*(x_1)$** | **Βέλτιστη απόσταση $x_1^*$** |
|---|---|---|---|---|
| | **2** | **3** | | |
| 1 | 30 | 28 | 28 | 3 |

Πίνακας 4

Για το στάδιο n = 2, ισχύει :

$$f_1(s_1, x_1) = \delta_{s_1 x_1} + f_2^*(x_1)$$

Οπότε έχουμε :

$$f_1(1, 2) = \delta_{12} + f_2^*(2) = 3 + 27 = 30$$

$$f_1(1, 3) = \delta_{13} + f_2^*(3) = 5 + 23 = 28$$

Όπως προκύπτει από τον πίνακα 4, βλέπουμε ότι αρχικά έχουμε επιλέξει τον κόμβο 4 (κέντρο του φορτίου) επειδή για $x_1^* = 3$, δηλαδή το τμήμα του δικτύου 1-3, και αυτό λόγω του ότι παρουσιάζει τις ελάχιστες απώλειες σε σχέση με το τμήμα δικτύου 1-2. Για το πρόβλημα τριών σταδίων τώρα, όταν $s_2 = 3$, προκύπτει ότι $x_2^* = 5$ που σημαίνει δηλαδή ότι το τμήμα του δικτύου 3-5 παρουσιάζει τις ελάχιστες απώλειες. Στο πρόβλημα των δύο σταδίων για $s_3 = 5$, έχουμε $x_3^* = 6$. Στο πρόβλημα ενός σταδίου για $s_4 = 6$, έχουμε $x_4^* = 8$. Οι ελάχιστες απώλειες του δικτύου εντοπίζονται στη διαδρομή :

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8.$

**Παράδειγμα 8$^o$ : Φαρμακευτική εταιρεία**

Έστω ότι υπάρχει μια μεγάλη πολυεθνική φαρμακευτική εταιρεία η οποία αναθέτει σε τρεις διαφορετικές ερευνητικές ομάδες (τις **Α**,**Β** και **Γ**) να κατασκευάσουν ένα αντιβιοτικό με σκοπό την αντιμετώπιση ενός ιού. Η πιθανότητα αποτυχίας των τριών ερευνητικών ομάδων είναι 0,35, 0,55 και 0,75 αντίστοιχα. Η πιθανότητα αποτυχίας και των τριών ερευνητικών ομάδων **συγχρόνως** προκύπτει από τη σχέση : **0,35 × 0,55 × 0,75 = 0,144**.

Μας ζητείται στη συνέχεια, να κατανεμηθούν δύο νέοι επιστήμονες στις τρεις ερευνητικές ομάδες ούτως ώστε να ελαχιστοποιηθεί το ποσοστό της πιθανότητας να αποτύχουν και οι τρείς ομάδες συγχρόνως. Στον ακόλουθο πίνακα δίδεται η πιθανότητα να αποτύχει η κάθε ομάδα, σε περίπτωση που 0, 1 ή 2 νέοι επιστήμονες προστεθούν σε αυτή.

| | | **Ομάδες** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Α** | **Β** | **Γ** |
| **Αριθμός νέων επιστημόνων** | 0 | 0,35 | 0,55 | 0,75 |
| | 1 | 0,15 | 0,35 | 0,45 |
| | 2 | 0,10 | 0,15 | 0,25 |

***Απάντηση :***

Η επίλυση της άσκησης γίνεται χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση :

$$\mathbf{f_n(X) = \min \{r_n(x_n) \times f_{n-1}(X - x_n)\}}$$

όπου :

$x_n$: είναι ο αριθμός των νέων επιστημόνων, οι οποίοι τοποθετούνται στη n-οστή ομάδα (η μέτρηση γίνεται από το τέλος). X είναι ο αριθμός των επιστημόνων που κατανέμονται συνολικά στις τελευταίες ομάδες.

$f_n(X)$: είναι η ελάχιστη πιθανότητα να αποτύχουν συγχρόνως και οι n τελευταίες ομάδες όταν διατίθενται X επιστήμονες.

$r_n(x_n)$: είναι η πιθανότητα αποτυχίας της n-οστής ομάδας όταν έχουν κατανεμηθεί σε αυτήν $x_n$ επιστήμονες.

Τα δεδομένα της άσκησης δίδονται στον ακόλουθο πίνακα Ι :

| **Αριθμός νέων επιστημόνων X** | **Ομάδες επιστημόνων** | | |
|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | **Γ** |
| | **Πιθανότητα αποτυχίας των ομάδων** | | |
| | $\mathbf{r_3(X)}$ | $\mathbf{r_2(X)}$ | $\mathbf{r_1(X)}$ |
| 0 | 0,35 | 0,55 | 0,75 |
| 1 | 0,15 | 0,35 | 0,45 |
| 2 | 0,10 | 0,15 | 0,25 |

Πίνακας Δεδομένων Ι

Για n = 1 έχουμε :

$$f_1(0) = r_1(0) = 0{,}75$$

$$f_1(1) = r_1(1) = 0{,}45$$

$$f_1(2) = r_1(2) = 0{,}25$$

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα θα τα τοποθετήσουμε σε μια στήλη του πίνακα ΙΙ η οποία αντιστοιχεί στην ομάδα Γ. Οι τιμές της συνάρτησης $f_2(X)$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (1) αντικαθιστώντας τις τιμές της $f_1(X)$.

Υπολογισμός των τιμών της $f_2(X)$, όταν $n = 2$ :

Αν $X = 0$, τότε $f_2(0) = 0{,}55$

Αν $X = 1$, είναι $f_2(1) = \min \{ r_2(x_2) \times f_1(1 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(1)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 1$, είναι :

$$f_2(1) = \min \begin{cases} r_2(0) \times f_1(1) = 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}24 \\ r_2(1) \times f_1(0) = 0{,}35 \times 0{,}75 = 0{,}26 \end{cases}$$

Η ελάχιστη τιμή είναι 0,24 και λαμβάνεται για $x_2 = 0$.

Αν $X = 2$, τότε $f_2(2) = \min \{ r_2(x_2) \times f_1(2 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(2)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 2$, είναι :

$$f_2(2) = \min \begin{cases} r_2(0) \times f_1(2) = 0{,}55 \times 0{,}24 = 0{,}13 \\ r_2(1) \times f_1(1) = 0{,}35 \times 0{,}45 = 0{,}15 \\ r_2(2) \times f_1(0) = 0{,}15 \times 0{,}75 = 0{,}11 \end{cases}$$

Η ελάχιστη τιμή είναι 0,11 και λαμβάνεται για $x_2 = 2$.

Εν συνεχεία εισάγουμε αυτές τις τιμές σε μια στήλη του πίνακα ΙΙ, η οποία και αντιστοιχεί στην ομάδα Β.

Υπολογισμός των τιμών της $f_3(X)$, όταν n = 3 :

Αν X = 0, τότε $f_3(0) = 0{,}35$

Αν X = 1, είναι $f_3(1) = \min \{ r_3(x_3) \times f_2(1 - x_3)\}$

Οι τιμές της $f_3(1)$, όταν $0 \leq x_3 \leq 1$, είναι :

$$f_3(1) = \min \begin{cases} r_3(0) \times f_2(1) = 0{,}35 \times 0{,}24 = 0{,}084 \\ r_3(1) \times f_2(0) = 0{,}15 \times 0{,}55 = 0{,}082 \end{cases}$$

Η ελάχιστη τιμή είναι 0,082 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Αν X = 2, τότε $f_3(2) = \min \{ r_3(x_3) \times f_2(2 - x_3)\}$

Οι τιμές της $f_3(2)$, όταν $0 \leq x_3 \leq 2$, είναι :

$$f_3(2) = \min \begin{cases} r_3(0) \times f_2(2) = 0{,}35 \times 0{,}11 = 0{,}038 \\ r_3(1) \times f_2(1) = 0{,}15 \times 0{,}24 = 0{,}036 \\ r_3(2) \times f_2(0) = 0{,}10 \times 0{,}55 = 0{,}055 \end{cases}$$

Η ελάχιστη τιμή είναι 0,036 και λαμβάνεται για $x_3 = 1$.

Εισάγουμε αυτές τις τιμές σε μια στήλη του πίνακα ΙΙ, η οποία αντιστοιχεί στην οποία στην ομάδα Α.

| **Αριθμός νέων επιστημόνων X** | **Ομάδες επιστημόνων** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Α** | | **Β** | | **Γ** | |
| | $x_3$ | $f_3(X)$ | $x_2$ | $f_2(X)$ | $x_1$ | $f_1(X)$ |
| 0 | 0 | 0,35 | 0 | 0,55 | 0 | 0,75 |
| 1 | 1 | 0,082 | $0^*$ | 0,24 | $1^*$ | 0,45 |
| 2 | $1^*$ | 0,036 | 2 | 0,11 | 2 | 0,25 |

Πίνακας ΙΙ, Τιμές των $f_1(X)$, $f_2(X)$ και $f_3(X)$

Οπότε η βέλτιστη λύση που προκύπτει είναι :

Για n = 3 και x = 2 η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,036 όταν το $x_3 = 1$. Για n = 2 και x = 2 – 2 = 0 η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με 0,24 όταν $x_2 = 0$. Τώρα για n = 1 και x = 1 – 0 = 1, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με 0,45. Εν τέλει, η κατανομή της πιθανότητας είναι $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ και $x_1 = 1$, δηλαδή, 1 στην ομάδα Γ, 0 στην ομάδα Β και 1 στην ομάδα Α.

**Παράδειγμα $9^{ο}$ Εξεταστική περίοδος**

Έστω ένας φοιτητής Α που προγραμματίζει να δώσει εξετάσεις στη σχολή του στην περίοδο του Φεβρουαρίου σε τρία μαθήματα, ενώ στη διάθεσή του έχει μόλις τρεις ημέρες. Ο φοιτητής, μπορεί κάλλιστα να μελετά μία ή δύο ή τρεις ημέρες για κάθε ένα μάθημα. Σας ζητείται να βρείτε εκείνον τον τρόπο, με τον οποίο ο φοιτητής θα καταφέρει να μεγιστοποιήσει τη συνολική βαθμολογία του και στα τρία μαθήματα που έχει να εξεταστεί. Επίσης, σας γνωστοποιείται το γεγονός ότι ο φοιτητής έχει εκτιμήσει ότι για διάφορες κατανομές του χρόνου του σε κάθε ένα μάθημα ξεχωριστά θα πάρει τους βαθμούς (με άριστα πάντα το βαθμό 5) που δίδονται στον πίνακα που ακολουθεί παρακάτω.

| **Ημέρες μελέτης** | **Βαθμολογία** | | |
|---|---|---|---|
| | **Μάθημα** | | |
| | **1** | **2** | **3** |
| 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 4 |

***Απάντηση :***

Η επίλυση της άσκησης γίνεται με τη χρήση της ακόλουθης αναδρομικής σχέσης :

$$\mathbf{f_n(X) = \max \{r_n(x_n) + f_{n+1}(X - x_n)\}, \; 0 \leq x_n \leq X}$$

όπου :

$x_n$: είναι ο αριθμός των ημερών που πρέπει να κατανέμει στο n-οστό μάθημα.

$f_n(X)$: είναι η μέγιστη συνολική βαθμολογία.

X : είναι ο αριθμός των ημερών, οι οποίες δεν έχουν, ακόμα, κατανεμηθεί.

Εφαρμόζουμε την αναδρομική σχέση (1) για κάθε στάδιο.

Για n = 3, ισχύει :

$$f_3(0) = r_3(0) = 1$$

$$f_3(1) = r_3(1) = 2$$

$$f_3(2) = r_3(2) = 4$$

$$f_3(3) = r_3(3) = 4$$

Για n = 2 :

Αν X = 0, τότε $f_2(0) = 2$

Αν X = 1, τότε $f_2(1) = \max \{ r_2(x_2) + f_3(1 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(1)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 1$, είναι :

$$f_2(1) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(1) = 2 + 2 = 4 \\ r_2(1) + f_3(0) = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 4 και λαμβάνεται για $x_2 = 0$.

Αν X = 2, τότε $f_2(2) = \max \{ r_2(x_2) + f_3(2 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(2)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 2$, είναι :

$$f_2(2) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(2) = 2 + 4 = 6 \\ r_2(1) + f_3(1) = 2 + 2 = 4 \\ r_2(2) + f_3(0) = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 6 και λαμβάνεται για $x_2 = 0$.

Αν X = 3, τότε $f_2(3) = \max \{ r_2(x_2) + f_3(3 - x_2)\}$

Οι τιμές της $f_2(3)$, όταν $0 \leq x_2 \leq 3$, είναι :

$$f_2(3) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(3) = 2 + 4 = 6 \\ r_2(1) + f_3(2) = 2 + 4 = 6 \\ r_2(2) + f_3(1) = 4 + 2 = 6 \\ r_2(3) + f_3(0) = 5 + 1 = 6 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 6 και λαμβάνεται για $x_2 = 1$.

Για n = 1 :

Αν X = 0, τότε $f_1(0) = 1$

Αν X = 1, τότε $f_1(1) = \max \{ r_1(x_1) + f_2(1 – x_1)\}$

Οι τιμές της $f_1(1)$, όταν $0 \leq x_1 \leq 1$, είναι :

$$f_1(1) = \max \begin{cases} r_1(0) + f_2(1) = 1 + 4 = 5 \\ r_1(1) + f_2(0) = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 5 και λαμβάνεται για $x_1 = 0$.

Αν Χ = 2, τότε $f_1(2) = \max \{ r_1(x_1) + f_2(2 - x_1)\}$

Οι τιμές της $f_1(2)$, όταν $0 \leq x_1 \leq 2$, είναι :

$$f_1(2) = \max \begin{cases} r_1(0) + f_2(2) = 1 + 6 = 7 \\ r_1(1) + f_2(1) = 2 + 4 = 6 \\ r_1(2) + f_2(0) = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 6 και λαμβάνεται για $x_1 = 1$.

Αν Χ = 3, τότε $f_1(3) = \max \{ r_1(x_1) + f_2(3 - x_1)\}$

Οι τιμές της $f_1(3)$, όταν $0 \leq x_1 \leq 3$, είναι :

$$f_1(3) = \max \begin{cases} r_1(0) + f_2(3) = 1 + 6 = 7 \\ r_1(1) + f_2(2) = 2 + 6 = 8 \\ r_1(2) + f_2(1) = 2 + 4 = 6 \\ r_1(3) + f_2(0) = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 8 και λαμβάνεται για $x_1 = 1$.

Στη συνέχεια, αφού πάρουμε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των τύπων, τα συγκεντρώνουμε στον παρακάτω πίνακα ως εξής :

| **Ημέρες μελέτης Χ** | **Βαθμολογία** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Μάθημα** | | | | | |
| | **1** | | **2** | | **3** | |
| | **$x_1$** | **$f_1(X)$** | **$x_2$** | **$f_2(X)$** | **$x_3$** | **$f_3(X)$** |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 5 | 0 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 6 | $0^*$ | 6 | $2^*$ | 4 |
| 3 | $1^*$ | 8 | 1 | 6 | 3 | 4 |

Πίνακας Αποτελεσμάτων

**<u>Άρα</u> :** όπως πάρα πολύ καλά μπορούμε να διαπιστώσουμε, αφού πρώτα μελετήσουμε σχολαστικά και τον πίνακα που μας παρατέθηκε παραπάνω, η **«άριστη λύση»** (η οποία έχει σημειωθεί με αστερίσκο στον πίνακα Αποτελεσμάτων) που προκύπτει είναι :

**n = 1**, για **X = 3**, **$x_1$ = 1**

**n = 2**, για **X = 3 – 1 = 2**, **$x_2$ = 0**

**n = 3**, για **X = 2 – 0 = 2**, **$x_3$ = 2**

# 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

## 3.1 Εισαγωγή

Σε πάρα πολλά προβλήματα, τα οποία αντιμετωπίζουμε με τον Δυναμικό Προγραμματισμό, οι μεταβλητές αποφάσεων τυγχάνουν πολλές φορές να είναι συνεχείς. Ένα τυχαίο παράδειγμα από αυτά είναι η συνάρτηση κόστους σε προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής και σε προβλήματα αποθήκευσης, η οποία και είναι μια συνεχής συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών αποφάσεων. Σε αυτή εδώ την ενότητα θα κληθούμε να χρησιμοποιήσουμε μια από τις διάφορες υπολογιστικές μεθόδους του Δυναμικού Προγραμματισμού, η οποία και ονομάζεται **«οπισθοδρομική μέθοδος»** και μας χρησιμεύει στην επίλυση κυρίως τέτοιων προβλημάτων.

## 3.2 Το δυναμικό πρόγραμμα ως μία περίπτωση μη γραμμικού προγράμματος

Αρκετές φορές έχουμε κάποιο Δυναμικό Πρόγραμμα το οποίο μας δίδεται με τη μορφή ενός μη γραμμικού Προγράμματος. Για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος, χρησιμοποιούμε πάντα τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και τις συνθήκες Kuhn-Tucker.

### 3.2.1 Παράδειγμα

Να επιλυθεί το ακόλουθο Δυναμικό πρόγραμμα :

$$\mathbf{Min f(x,y,z) = 12x + 7y + 8z + x^2 + 0{,}7y^2 + 0{,}6z^2 + 6(x - 22) + 6(x + y - 80)}$$

Όταν :

$x \geq 22$
$x + y \geq 80$
$x + y + z = 160$
και $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

***Απάντηση:***

Η εξίσωση Lagrange που προκύπτει για το παράδειγμα που μας δόθηκε παραπάνω στην εκφώνηση είναι :

$$\mathbf{L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z)}$$

Όπου φ(x,y,z) είναι η υπερτερούσα περιοριστική συνθήκη

$$\mathbf{\varphi = x + y + z - 160}$$

Η αναγκαία συνθήκη η οποία και πρέπει απαραιτήτως να θεωρείται **«δεδομένη»** ούτως ώστε να μπορέσει να έχει ελάχιστο η αντικειμενική συνάρτηση f(x,y,z) ενός παραδείγματος Δυναμικού Προγραμματισμού που καλούμαστε να επιλύσουμε, είναι η εξής :

$$\theta L/\theta x = 24 + 2x - \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\theta L/\theta y = 13 + 1{,}4y - \lambda = 0, \quad (2)$$

$$\theta L/\theta z = 8 + 1{,}\ 2z - \lambda = 0, \quad (3)$$

$$\theta L/\theta \lambda = -(x + y + z - 160) = 0, \quad (4)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) προκύπτει :

$$\left.\begin{array}{l} 2x = \lambda - 24 \\ y = \lambda - 13 / 1{,}4 \\ z = \lambda - 6 / 1{,}2 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

ή

$$\left.\begin{array}{l} x = (\lambda - 24) / 2 \\ y = \lambda - 13 / 1{,}4 \\ z = (\lambda - 6) / 1{,}2 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

και $x + y + z = (\lambda - 24) / 2 + \lambda - 13 / 1{,}4 + (\lambda - 6) / 1{,}2$ (6)

Η εξίσωση (6) με βάση την εξίσωση (4) γίνεται :

$$\mathbf{160 = (\lambda - 24) / 2 + \lambda - 13 / 1{,}4 + (\lambda - 6) / 1{,}2}$$

Οπότε $\lambda = 91$. Από τις εξισώσεις (5) προκύπτει ότι : $x = 34$, $y = 56$, $z = 75$, οι οποίες τιμές ικανοποιούν, συγχρόνως, και τις τρεις περιοριστικές συνθήκες.

Οι πιθανές συνθήκες για το ελάχιστο είναι :

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & \theta\varphi/\theta x & \theta\varphi/\theta y \\ \theta\varphi/\theta x & \theta^2 f/\theta x^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta x^2 & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y \\ \theta\varphi/\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta y^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta y^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3 < 0$$

$$
\Delta_3 = \begin{pmatrix}
0 & \theta\varphi/\theta x & \theta\varphi/\theta y & \theta\varphi/\theta z \\
\theta\varphi/\theta x & \theta^2 f/\theta x^2-\lambda\theta\varphi^2/\theta x^2 & \theta^2 f/\theta x\theta y-\lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta z-\lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta z \\
\theta\varphi/\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta y-\lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta y^2-\lambda\theta\varphi^2/\theta y^2 & \theta^2 f/\theta y\theta z-\lambda\theta^2\varphi/\theta z\theta y \\
\theta\varphi/\theta z & \theta^2 f/\theta x\theta z-\lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta z & \theta^2 f/\theta y\theta z-\lambda\theta^2\varphi/\theta z\theta y & \theta^2 f/\theta z^2-\lambda\theta\varphi^2/\theta z^2
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0.8
\end{pmatrix} = -\,7{,}7 < 0
$$

Επειδή η Δ3 και η Δ4 είναι αρνητικές, η δοσμένη αντικειμενική συνάρτηση έχει ελάχιστο. Η ελάχιστη τιμή που προκύπτει είναι :

**f(34, 56, 71) = 7876**.

Προτού καν εφαρμοστούν οι συνθήκες Kuhn-Tucker, είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι προέχει να μετασχηματίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση του δοσμένου παραδείγματος. Αν $z = 160 - x - y$ τοποθετηθεί στην τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης, θα έχουμε :

$$
f(x,y) = 12x + 7y + 8(160 - x - y) + x^2 + 0{,}7y^2 + 0{,}6(160 - x - y)^2 + 6(x - 22) + 6(x + y - 80) = 1{,}6x^2 - 176x + 1{,}3y^2 - 187y + 1{,}2xy + 16028.
$$

Εισάγοντας τις τεχνητές μεταβλητές $y_1,y_2$ και τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\lambda_1$, $\lambda_2$ μπορούμε να διαμορφώσουμε μια νέα συνάρτηση :

$$
L(x,y,y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2) = 1{,}6x^2 - 176x + 1{,}3y^2 - 187y + 1{,}2xy + 16028 - \lambda_1 [(x - 22) - y_1^2] - \lambda_2[(x + y-80) - y_2^2].
$$

Εφόσον η νέα συνάρτηση είναι κυρτή, η συνθήκη ικανή και αναγκαία για να έχει ελάχιστο είναι :

$$\theta L/\theta x = 3{,}2x - 176 + 1{,}2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad (1)^*$$
$$\theta L/\theta y = 2{,}6y - 187 + 1{,}2x - \lambda_2 = 0 \qquad (2)^*$$
$$x - 22 \geq 0 \qquad (3)^*$$
$$x + y - 80 \geq 0 \qquad (4)^*$$
$$\lambda_1(x - 22) = 0 \qquad (5)^*$$
$$\lambda_2(x + y - 80) = 0 \qquad (6)^*$$
$$\text{και } \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \qquad (7)^*$$

1. Αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 0$ οι εξισώσεις $(1)^*$ και $(2)^*$ γίνονται :

$$3{,}2x + 1{,}2y = 176$$
$$1{,}2x + 1{,}8y = 187$$

Έτσι x = 34, y = 56. Όταν z = 70 τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

**L(34, 56, 70) = 7783**

2. Αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 \neq 0$ τότε από τις εξισώσεις $(1)^*$, $(2)^*$ και $(6)^*$ προκύπτει :

$$3{,}2x - 176 + 1{,}2y = \lambda_2$$
$$1{,}2x - 187 + 2{,}6y = \lambda_2$$
$$x + y - 80 = 0$$

Είναι x = 30, y = 50 και $\lambda_2$ = - 20. Όταν z = 80 τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

**L(30, 50, 80) = 7888**

3. Αν $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = 0$, από τις εξισώσεις $(1)^*$, $(2)^*$ και $(5)^*$ προκύπτει :

$$3{,}2x - 176 + 1{,}2y = \lambda_1$$
$$1{,}2x - 187 + 2{,}6y = 0$$
$$x - 22 = 0$$

Οπότε για x = 19, y = 62 και z = 79, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει είναι :

**L(19, 62, 79) = 5653,5, είναι $\lambda_1 = -41$**

4. Αν $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 \neq 0$, από τις εξισώσεις $(5)^*$ και $(6)^*$ προκύπτει :

$$x - 22 = 0$$
$$x + y - 80 = 0$$

Είναι x = 22, y = 58 και z = 80 οπότε $\lambda_2 = -9{,}8$ και $\lambda_1 = -26{,}2$, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

**L(22, 58, 80) = 7989**

Η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει για x = 34, y = 56, και z = 70.

Επομένως, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης που προκύπτει από τα παραπάνω είναι :

**L(34, 56, 70) = 7783**

### 3.2.2 Παράδειγμα

Να επιλυθεί το ακόλουθο Δυναμικό πρόγραμμα :

$$Minf(x,y,z) = 10x + 5y + 6z + x^2 + 0{,}5y^2 + 0{,}4z^2 + 5(x - 20) + 5(x + y - 70)$$

Όταν :

$x \geq 20$

$x + y \geq 70$

$x + y + z = 154$

και $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

***Απάντηση :***

Η εξίσωση Lagrange του δοσμένου παραδείγματος είναι :

$$\mathbf{L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z)}$$

Όπου φ(x,y,z) είναι η υπερτερούσα περιοριστική συνθήκη

$$\mathbf{\varphi = x + y + z - 154}$$

Η αναγκαία συνθήκη για να έχει ελάχιστο ή αντικειμενική συνάρτηση f(x,y,z) ενός παραδείγματος είναι :

$\theta L/\theta x = 20 + 2x - \lambda = 0$ (1)

$\theta L/\theta y = 10 + y - \lambda = 0$ (2)

$\theta L/\theta z = 6 + 0,8z - \lambda = 0$ (3)

$\theta L/\theta \lambda = -(x + y + z - 154) = 0$ (4)

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) προκύπτει :

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \lambda - 20 \\ y &= \lambda - 10 \\ 0{,}8z &= \lambda - 6 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ή

$$\left.\begin{aligned} x &= (\lambda - 20) / 2 \\ y &= \lambda - 10 \\ z &= (\lambda - 6) / 0{,}8 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

και $x + y + z = (\lambda - 20) / 2 + \lambda - 10 + (\lambda - 6) / 0{,}8$ (6)

Η εξίσωση (6) με βάση την εξίσωση (4) γίνεται :

$$\mathbf{154 = (\lambda - 20) / 2 + \lambda - 10 + (\lambda - 6) / 0{,}8}$$

Οπότε $\lambda = 66$. Από τις εξισώσεις (5) έχουμε : $x = 23$, $y = 56$, $z = 75$, οι οποίες τιμές ικανοποιούν, συγχρόνως, και τις τρεις περιοριστικές συνθήκες.

Οι πιθανές συνθήκες για το ελάχιστο είναι :

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & \theta\varphi/\theta x & \theta\varphi/\theta y \\ \theta\varphi/\theta x & \theta^2 f/\theta x^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta x^2 & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y \\ \theta\varphi/\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta y^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta y^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & \theta\varphi/\theta x & \theta\varphi/\theta y & \theta\varphi/\theta z \\ \theta\varphi/\theta x & \theta^2 f/\theta x^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta x^2 & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta z - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta z \\ \theta\varphi/\theta y & \theta^2 f/\theta x\theta y - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta y & \theta^2 f/\theta y^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta y^2 & \theta^2 f/\theta y\theta z - \lambda\theta^2\varphi/\theta z\theta y \\ \theta\varphi/\theta z & \theta^2 f/\theta x\theta z - \lambda\theta^2\varphi/\theta x\theta z & \theta^2 f/\theta y\theta z - \lambda\theta^2\varphi/\theta z\theta y & \theta^2 f/\theta z^2 - \lambda\theta\varphi^2/\theta z^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = -5{,}6 < 0$$

Επειδή η Δ3 και η Δ4 είναι αρνητικές, η δοσμένη αντικειμενική συνάρτηση έχει ελάχιστο. Η ελάχιστη τιμή είναι :

**f(23, 56, 75) = 5367**

Πριν εφαρμοστούν οι συνθήκες Kuhn-Tucker είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση του δοσμένου παραδείγματος. Αν $z = 154 – x – y$ τοποθετηθεί στην τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης, θα έχουμε :

$$f(x,y) = 10x + 4y + 6(154 – x - y) + x^2 + 0{,}5y^2 + 0{,}4(154 – x – y)^2 + 5(x - 20) + 5(x + y - 70) = 1{,}4x^2 - 109{,}2x + 0{,}9y^2 - 119{,}2y + 0{,}8xy + 9960{,}4.$$

Εισάγοντας στη συνέχεια τις τεχνητές μεταβλητές $y_1,y_2$ καθώς και τους πολλαπλασιαστές Lagrange $\lambda_1$, $\lambda_2$ μπορούμε να διαμορφώσουμε πάλι από την αρχή μια εντελώς καινούρια συνάρτηση, η οποία θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$L(x,y,y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2) = 1{,}4x^2 - 109{,}2x + 0{,}9y^2 - 119{,}2y + 0{,}8xy + 9960{,}4 – \\ – \lambda_1 [(x - 20) - y_1^2] – \lambda_2[(x + y-70) - y_2^2].$$

Εφόσον η νέα συνάρτηση είναι κυρτή, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ελάχιστο είναι :

$\theta L/\theta x = 2{,}8x - 109{,}2 + 0{,}8y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ $(1)^*$

$\theta L/\theta y = 1{,}8y - 119{,}2 + 0{,}8x - \lambda_2 = 0$ $(2)^*$

$x - 20 \geq 0$ $(3)^*$

$x + y - 70 \geq 0$ $(4)^*$

$\lambda_1(x - 20) = 0$ $(5)^*$

$\lambda_2(x + y - 70) = 0$ $(6)^*$

και $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $(7)^*$

5. Αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 0$ οι εξισώσεις $(1)^*$ και $(2)^*$ γίνονται :

$$2{,}8x + 0{,}8y = 109{,}2$$
$$0{,}8x + 1{,}8y = 119{,}2$$

Έτσι x = 23, y = 56. Τότε z = 75 και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει είναι :

**L(23, 56, 75) = 5367**

6. Αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 \neq 0$ τότε από τις εξισώσεις $(1)^*$, $(2)^*$ και $(6)^*$ προκύπτει :

$$2{,}8x - 109{,}2 + 0{,}8y = \lambda_2$$
$$0{,}8x - 119{,}2 + 1{,}8y = \lambda_2$$
$$x + y - 70 = 0$$

Είναι x = 20, y = 50 και $\lambda_2$ = -13,2. Όταν z = 84 τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

**L(20, 50, 84) = 5426,4**

7. Αν $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = 0$, από τις εξισώσεις $(1)^*$, $(2)^*$ και $(5)^*$ προκύπτει :

$$2{,}8x - 109{,}2 + 0{,}8y = \lambda_1$$
$$0{,}8x - 119{,}2 + 1{,}8y = 0$$
$$x - 20 = 0$$

Οπότε για x = 37, y = 57 και z = 60, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει είναι :

**L(37, 57, 60) = 5653,5 είναι $\lambda_1$ = 40**

8. Αν $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 \neq 0$, από τις εξισώσεις $(5)^*$ και $(6)^*$ προκύπτει :

$$x - 20 = 0$$
$$x + y - 70 = 0$$

Άρα, όταν το x = 20, το y = 50 και το z = 84 θα έχουμε την $\lambda_2$ = -13,2 και την $\lambda_1$ = 0. Συνεπώς, η τιμή που θα προκύψει για την αντικειμενική μας συνάρτηση θα είναι η ακόλουθη :

**L(20, 50, 84) = 5426,4**

Η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης προκύπτει για x = 23, y = 56, και z = 75.

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει :

**L(23, 56, 75) = 5367**

## 3.3 Οπισθοδρομική Μέθοδος

### 3.3.1 Παράδειγμα : Προβλήματα αποφάσεων δύο σταδίων.

Μια εταιρία παραγωγής αγροτικών μηχανημάτων προγραμμάτιζε την παραγωγή 50 αγροτικών μηχανημάτων στο τέλος της πρώτου περιόδου και 70 αντίστοιχα, στο τέλος της δεύτερης περιόδου. Το κόστος παραγωγής των μηχανημάτων είναι $L(x) = 60x + 0{,}3x^2$. Όπου x ο αριθμός των παραγόμενων μηχανημάτων. Η εταιρία, με βάση τη δυνατότητα εγκαταστάσεων έχει τη δυνατότητα παραγωγής 110 αγροτικών μηχανημάτων. Αν η εταιρία επιλέγει να παράγει επιπλέον 50 μηχανήματα στην πρώτη περίοδο, κάθε επιπλέον μηχάνημα μεταφέρεται στην επόμενη περίοδο. Έστω 5 οι χρηματικές μονάδες η χρέωση για κάθε αγροτικό μηχάνημα το οποίο μεταφέρεται στη δεύτερη περίοδο. Να βρείτε τον αριθμό των αγροτικών μηχανημάτων τα οποία πρέπει να παράγει η εταιρία σε κάθε περίοδο με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Θεωρείστε ότι στην αρχή της πρώτης περιόδου δεν υπάρχει κάποια επιπλέον χρέωση.

***Απάντηση :***

Εφόσον το τελικό συνολικό μας κόστος αποτελείται **Α)** από το κόστος παραγωγής και **Β)** από το ύψος της επιπλέον χρέωσης, τότε πρόκειται αδιαμφισβήτητα για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του οποίου η αντικειμενική συνάρτησή είναι η ακόλουθη :

$$\mathbf{L\,(x,y) = 60x + 0{,}3x^2 + 60y + 0{,}3y^2 + (x\text{-}50)}$$

Όταν :

$x \geq 50$

$x + y \geq 110$

και $x \geq 0$, $y \geq 0$

όπου :

x : είναι αριθμός των παραγόμενων μηχανημάτων στην πρώτη περίοδο.
y : είναι αριθμός των παραγόμενων μηχανημάτων στην δεύτερη περίοδο.

Τα προβλήματα αυτά είναι μη γραμμικά και θα τα επιλύσουμε με την μέθοδο του Δυναμικού προγραμματισμού.

Ξεκινώντας από τη δεύτερη περίοδο, ο βέλτιστος αριθμός των παραγόμενων μηχανημάτων $y^*$ σε αυτή τη περίοδο, καθορίζεται από το ύψος της επιπλέον χρέωσης $W_2$, στην αρχή αυτής της περιόδου :

$$y^* = 70 - w_2 \quad (1)$$

Αν $L_2(w_2,y_2)$ είναι το συνολικό κόστος το οποίο αντιστοιχεί στη δεύτερη περίοδο, τότε έχουμε :

$$L_2(w_2,y_2) = 5w_2 + 60y + 0,3y^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $y^*$ της εξίσωσης (1) στην τιμή y της εξίσωσης (2), το συνολικό κόστος στην δεύτερη περίοδο γίνεται :

$$L_2(w_2,y^*) = 5\ w_2 + 60\ (70 - w_2) + 0,3(w_2^2) =$$
$$= 5670 - 97w_2 + 0,3w_2^2 \quad (3)$$

Εφόσον δεν θεωρούμε ότι υπάρχει κάποια επιπλέον χρέωση στην αρχή της πρώτης περιόδου, τότε το κόστος παραγωγής θα είναι και το μοναδικό-συνολικό κόστος αυτής της περιόδου το οποίο και προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο :

$$L_1(x) = 60x + 0,3x^2 \quad (4)$$

Το συνολικό κόστος στις δύο περιόδους, για την βέλτιστη παραγωγή της δεύτερης περιόδου είναι :

$$L(x,w_2,y^*) = L_1(x) + L_2(w_2,y^*) =$$
$$= 60x + 0,3x^2 + (5670 - 97w_2 + 0,3w_2^2) \quad (5)$$

Το ύψος της επιπλέον χρέωσης το οποίο εμφανίζεται στην αρχή της δεύτερης περιόδου καθορίζεται τόσο από την διαφορά της παραγόμενης ποσότητας όσο και της διαθέσιμης των αγροτικών μηχανημάτων της πρώτης περιόδου και προκύπτει από τον εξής τύπο :

$$w_2 = x – 50 \quad (6)$$

Η εξίσωση (5) με βάση την εξίσωση (6) γίνεται :

$$L(x,w_2,y^*) = 60x + 0,3x^2 + (5670 - 97(x - 50) + 0,3(x - 50)^2 \quad (7)$$

Στην τελευταία εξίσωση (7) το συνολικό κόστος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x.

Η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής x προκύπτει ως εξής :

$$dL/dx = -67 + 0,8x + 0$$

Οπότε $x^* = 56$

Εφόσον είναι : $d^2L/dx^2 = 1,2 \geq 0$

Η συνάρτηση συνολικού κόστους (7) έχει ένα ελάχιστο για x = 56. Έτσι, η βέλτιστη παραγωγή που προκύπτει για την πρώτη περίοδο είναι 56 αγροτικά προϊόντα, από την εξίσωση (6) παίρνουμε $w_2 = 6$, όταν $x = 56$, ενώ από την εξίσωση (1) έχουμε $y = 64$. Άρα το συνολικό κόστος είναι :

$$\mathbf{L\ (56{,}64) = 9.400}\ \text{Ευρώ.}$$

### 3.3.2 Παράδειγμα : Πρόβλημα αποφάσεων τριών σταδίων.

Θεωρούμε τώρα ότι η εταιρία παραγωγής αγροτικών μηχανημάτων του προηγούμενου παραδείγματος, προγραμματίζει την παραγωγή 90 μηχανημάτων στο τέλος της τρίτης περιόδου, ενώ το κόστος παραγωγής και η χρέωση παραμένουν αμετάβλητα.

***Απάντηση :***

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι :

$$\text{MinL}(x,y,z) = 50x + 0{,}2x^2 + 50y + 0{,}2y^2 + 50z + 0{,}2z^2 + 4(x - 40) + 4(x + y + z - 100).$$

Όταν :

$x \geq 40$
$x + y \geq 100$
$x + y + z = 190$
και $x \geq 0$, $y \geq 0$

Ξεκινώντας στην τρίτη περίοδο οπισθοδρομικά, ο βέλτιστος αριθμός παραγωγής μηχανημάτων σε αυτήν εδώ την περίοδο, $z^*$, δίδεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$z^* = 90 - w_3 \quad (1)$$

Όπου $w_3$ η χρέωση στην αρχή της τρίτης περιόδου. Το συνολικό κόστος στην τρίτη περίοδο $L_3(w_3,z)$ είναι :

$$L_3(w_3,z) = 5w_3 + 60z + 0,3z^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) με βάση την εξίσωση (1) γίνεται :

$$L_3(w_3,z^*) = 5w_3 + 60(90 - w_3) + 0,3(90 - w_3)^2 \quad (3)$$

Το συνολικό κόστος στη δεύτερη περίοδο είναι :

$$L_2(w_2,y) = 5w_2 + 60y + 0,3y^2 \quad (4)$$

όπου $w_2$ : είναι η χρέωση που έχουμε με το ξεκίνημα της δεύτερης περιόδου. Το συνολικό όμως κόστος στη δεύτερη και στην τρίτη περίοδο L23, προκύπτει από τον ακόλουθο :

$$L_{23}\,(w_2,y,w_3,z^*) = L_2(w_2,y) + L_3(w_3,z^*) =$$

$$= 5w_2 + 60y + 0,3y^2 + 7830 - 109w_3 + 0,3w_3^2 \quad (5)$$

Η χρέωση στην αρχή της τρίτης περιόδου είναι :

$$w_3 = w_2 + y - 70 \quad (6)$$

Η εξίσωση (5) με βάση την εξίσωση (6) γίνεται :

$$L_{23}\,(w_2,y,w_3,z^*) = 0,3w_2^2 + 0,6y^2 + 0,6w_2y - 146w_2 - 91y + 16480 \quad (7)$$

Η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής y στην εξίσωση (7) προκύπτει :

$$d\,L_{23}/dy = 1{,}2y + 0{,}6w_2 - 91 = 0$$

**ή** $1{,}2y = 91 - 0{,}6w_2$

**και** $y^* = 76 - 0{,}5w_2 \quad (8)$

Η εξίσωση (7) με βάση την εξίσωση (8) γίνεται :

$$L_{23}(w_2, y^*, z^*) = 0{,}15w_2^2 - 100w_2 + 13.030 \quad (9)$$

Το συνολικό κόστος στην πρώτη περίοδο είναι :

$$L_1(x) = 60x + 0{,}3x^2 \quad (10)$$

Στην πρώτη περίοδο δεν υπάρχει χρέωση. Το συνολικό κόστος των τριών πρώτων περιόδων $L_{123}$, είναι :

$$L_{123}(x, y^*, z^*) = L_1(x) + L_{23}(w_2, y^*, z^*) =$$

$$= 60x + 0{,}3x^2 + 0{,}15w_2^2 - 100w_2 + 13.030 \quad (11)$$

Η χρέωση στην αρχή της δεύτερης περιόδου είναι :

$$w_2 = x - 50 \quad (12)$$

Η εξίσωση (11) με βάση την (12), γίνεται :

$$L_{123}(x, y^*, z^*) = 60x + 0{,}3x^2 + 0{,}15(x - 50)^2 - 100(x - 50)$$

$$+ 13.030 = 0{,}45x^2 - 55x + 18405 \quad (13)$$

$$dL_{123}/dx = -0{,}9x - 55$$

Και $x^* = 61$, επειδή είναι :

$$D^2L_{123}/dx^2 = 0{,}9 \geq 0$$

Για την εξίσωση (13) προκύπτει ελάχιστο, όταν το $x = 61$. Από την εξίσωση (12), παίρνουμε την τιμή $w_2 = 11$, όταν το $x^* = 61$. Από την εξίσωση (8), προκύπτει ότι $y^* = 71$, στην περίπτωση που το $x^* = 61$. Από την εξίσωση (6) προκύπτει η τιμή $w_3 = 12$ και τέλος από την εξίσωση (1), προκύπτει ότι το $z^* = 78$ για $w_2 = 11$ , $y^* = 71$ και $w_3 = 12$ αντίστοιχα.

Το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει είναι :

**L(61, 71, 78) = 17.053** Ευρώ.

## 3.4 Παραδείγματα Δυναμικού Προγραμματισμού

### Άσκηση 1η

Ένας χρηματοοικονομικός όμιλος διαθέτει κεφάλαιο οκτώ (8) εκατομμυρίων Ευρώ και επιθυμεί να αγοράσει τέσσερις βιοτεχνίες οι οποίες παράγουν τυποποιημένα προϊόντα. Στο ακόλουθο πίνακα δίδονται :

(Α) Το κόστος εξαγοράς $C_j$

(Β) Μ αξία $\rho_j$ την οποία μπορεί να αποκτήσει ο χρηματοοικονομικός όμιλος από τη βιοτεχνία j , j = 1, 2, 3, 4.

| Βιοτεχνία | Κόστος Αγοράς $C_j$ | Αξία Pj |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 10 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 5 | 4 |

Από τα δεδομένα, μας γνωστοποιείται επίσης ότι τα κόστη αγοράς αντιστοιχούν σε εκατομμύρια ευρώ. Ζητείται οπότε η βέλτιστη πολιτική του χρηματοοικονομικού ομίλου.

***Απάντηση :***

Έστω $x_T$ είναι η μεταβλητή κατάστασης η οποία αντιστοιχεί στο διαθέσιμο κεφάλαιο αγοράς σε μία χρονική περίοδο Τα = 4, 3, 2, 1. Η μεταβλητή απόφασης $\sigma_T$ εκφράζει τη δυνατότητα αγοράς ή όχι στην περίοδο Τ.

Αν $w_T$ (χ) είναι η μέγιστη αξία η οποία προκύπτει, στην περίπτωση που Τα ημέρες πριν το τέλος έχω στη διάθεσή μου κεφάλαιο x, τότε η μαθηματική διατύπωση εκφράζεται από την παρακάτω σχέση :

$$W_T(x) = \max \{f\sigma_{T-1}(x), \rho_T + W_{T-1}(x - \rho_T)\}, \text{ όταν } T = 4, 3, 2, 1, \text{ με } x \geq \rho_T$$

$$W_T(x) = W_{T-1}(x), \text{ όταν } T = 4, 3, 2, 1, \text{ με } x \leq \rho_T$$

$$W_0(x) = 0$$

Για Τ = 1 είναι :

$$W_1(x) = \max \begin{cases} 0 \text{ αν } x \leq 6 \text{ Δεν αγοράζει} \\ 10 \text{ αν } x = 7, 8 \text{ αγοράζει} \end{cases}$$

Για T = 2 είναι :

$$W_2(x) = \max \begin{cases} W_1(x) \text{ αν } x \leq 1 \\ \max \{ W_1(x), 4 + W_1(x - 2), \text{ αν } x \geq 2. \end{cases}$$

Οπότε έχουμε :

$$W_2(x) = \begin{cases} 0, \text{ αν } x \leq 1 \text{ Δεν Αγοράζει} \\ \max \{0_j, (4 + 0)\} = 4 \text{ αν } 2 \leq x \leq 6 \text{ Αγοράζει} \\ \max \{10, (4 + 0)\} = 10 \text{ αν } x = 7, 8 \text{ Δεν αγοράζει} \end{cases}$$

Για T = 3 είναι :

$$W_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ αν } x = 0 \\ \max \{W_2(x), 3 + W_2(x\text{-}1)\}, \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Τότε είναι :

$$W_2\,(5) = \begin{cases} 0 \text{ αν } x = 0 \text{ Δεν αγοράζει.} \\ \max \{0, (3 + 0)\} = 3, \text{ αν } x = 1 \text{ Αγοράζει.} \\ \max\{4, (3 + 0)\} = 4 \text{ αν } x = 2 \text{ Αγοράζει.} \\ \max \{4, (3 + 4)\} = 7 \text{ αν } x = 3, 4, 5, 6 \text{ Αγοράζει.} \\ \max \{10, (3 + 4)\} = 10 \text{ αν } x = 7 \text{ Δεν Αγοράζει .} \\ \max \{10, (10 + 3)\} = 13 \text{ Αγοράζει.} \end{cases}$$

Για T = 4 είναι :

$$\mathbf{W_4(x) = \max \{W_3(8), 8 + W_3(3)\} = \max \{13, (8 + 7)\} = 15 \text{ Αγοράζει.}}$$

**Συμπέρασμα :**

Η βέλτιστη πολιτική που θα πρέπει να ακολουθήσει ο χρηματοοικονομικός όμιλος είναι ο ακόλουθος :

$$8 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

Συνεπώς, εκείνο το στοιχείο το οποίο είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε από την εξέταση όλων των προαναφερόμενων στοιχείων, είναι το γεγονός ότι ο εν λόγω χρηματοοικονομικός όμιλος έχει την οικονομική δυνατότητα (εφόσον το θελήσει) να αγοράσει τις βιοτεχνίες 4, 3, 2 με συνολικό κέρδος για το όμιλο, δεκαπέντε εκατομμύρια ευρώ (15.000.000 €).

**Άσκηση 2η**

Μία βιοτεχνία ρούχων κατανέμει πέντε μονάδες ενός μοντέρνου ρούχου στα τέσσερα καταστήματα της (I, II , III, IV). Τα αναμενόμενα κέρδη από την κατανομή των μονάδων δίδονται στον ακόλουθο πίνακα.

| **X** | **I** | **II** | **III** | **IV** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 6 | 6 | 5 |

Ζητείται η μεγιστοποίηση του κέρδους της βιοτεχνίας.

***Απάντηση :***

Για να μπορέσουμε να επιλύσομε την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$\mathbf{f_n(x) = max\ \{r_n(x_n)+f_{n-1}(x-x_n)\},\ 0 \leq x_n \leq x}$$

ο πίνακας της άσκησης είναι :

| **X** | **I,$r_1$(x)** | **II,$r_2$(x)** | **III,$r_3$(x)** | **IV,$r_4$(x)** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 6 | 6 | 5 |

Οπότε, για να καταστήσουμε εφικτή την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης, γενικά, θεωρούμε ότι για $r_j = 0$, $j = 1,\ldots..,n$. Συνεπώς έχουμε την $f_n(0) = 0$, για $n = 1, 2\ldots\ldots$, και την $f_1(x) = r_1(x)$. Αυτό προκύπτει λόγω του ότι για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε την τιμή της $f_2(x)$ απαιτείται, εκ των προτέρων, να υπολογίσουμε την $f_1(x)$. Στη συνέχεια ακολουθούν οι υπολογισμοί της $f_1(x)$ και της $f_2(x)$ αντίστοιχα :

Υπολογισμός της $f_1(x)$ είναι :

$$f_1(0) = r_1(0) = 0$$

$$f_1(1) = r_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = r_1(2) = 3$$

$$f_1(3) = r_1(3) = 4$$

$$f_1(4) = r_1(4) = 5$$

Υπολογισμός της $f_2(x)$

Είναι :

Εάν $f_2(0)$ αν $X = 0$

Αν $X = 1$, είναι $f_2(1) = \max \{r_2(x_2) + f_1(1 - x_2)\}$, $0 \leq x_2 \leq 1$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(1) = 0 + 2 = 2 \\ r_2(1) + f_1(0) = 3 + 0 = 3 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 3 για $x_2 = 1$.

Αν $X = 2$, τότε είναι $f_2(2) = \max \{ r_2(x_2) + f_1(2 - x_2)\}$, $0 \leq x_2 \leq 2$

$$f_2(2) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(2) = 0 + 3= 3 \\ r_2(1) + f_1(1) = 3 + 2 = 5 \\ r_2(2) + f_1(0) = 5 + 0 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 5 και αυτή προκύπτει για $x_2 = 1$ ή $x_2 = 2$

Αν $X = 3$, είναι $f_2(3) = \max \{r_2(x_2) + f_1(3 - x_2)\}$, $0 \leq x_2 \leq 3$

$$f_2(3) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(3) = 0 + 4 = 4 \\ r_2(1) + f_1(2) = 3 + 3 = 6 \\ r_2(2) + f_1(1) = 5 + 2 = 7 \\ r_2(3) + f_1(0) = 6 + 0 = 6 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 6 και προκύπτει για $x_2 = 1$.

Αν $X = 4$, είναι $f_2(4) = \max \{r_2(x_2) + f_1(4 - x_2)\}$, $0 \le x_2 \le 4$.

$$f_2(4) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(4) = 0 + 5 = 5 \\ r_2(1) + f_1(3) = 3 + 4 = 7 \\ r_2(2) + f_1(2) = 5 + 3 = 8 \\ r_2(3) + f_1(1) = 6 + 2 = 8 \\ r_2(4) + f_1(0) = 6 + 0 = 6 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 8 και προκύπτει για $x_2 = 2$ ή $x_2 = 3$.

Υπολογισμός της $f_3(x)$

Είναι $f_3(0)$ αν $X = 0$,

Αν $X = 1$, τότε είναι $f_3(1) = \max \{r_3(x_3) + f_2(1 - x_3)\}$, $0 \le x_3 \le 1$

και $f_3(1) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(1) = 0 + 3 = 3 \\ r_3(1) + f_2(0) = 3 + 0 = 3 \end{cases}$

Η μέγιστη τιμή είναι 3 για $x_3 = 0$ ή $x_3 = 1$.

Αν $X = 2$, τότε $f_3(2) = \max \{ r_3(x_3) + f_2(2 - x_3)\}$, $0 \le x_3 \le 2$

$$f_3(2) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(2) = 0 + 5 = 5 \\ r_3(1) + f_2(1) = 3 + 3 = 6 \\ r_3(2) + f_2(0) = 4 + 0 = 4 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 6 και προκύπτει για $x_3 = 1$.

Αν $X = 3$, τότε $f_3(3) = \max \{r_3(x_3) + f_2(3 - x_3)\}$, $0 \leq x_3 \leq 3$

$$f_3(3) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(3) = 0 + 6 = 6 \\ r_3(1) + f_2(2) = 3 + 5 = 8 \\ r_3(2) + f_2(1) = 4 + 3 = 7 \\ r_3(3) + f_2(0) = 5 + 0 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 8 και προκύπτει για $x_3 = 1$.

Αν $X = 4$, τότε $f_3(4) = \max \{r_3(x_3) + f_2(4 - x_3)\}$, $0 \leq x_3 \leq 4$ είναι :

$$f_3(4) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(4) = 0 + 8 = 8 \\ r_3(1) + f_2(3) = 3 + 6 = 9 \\ r_3(2) + f_2(2) = 4 + 5 = 9 \\ r_3(3) + f_2(1) = 5 + 3 = 8 \\ r_3(4) + f_2(0) = 6 + 0 = 6 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 9 και προκύπτει για $x_3 = 2$.

Υπολογισμός της $f_4(x)$

Αν $X = 0$, τότε $f_4(0) = 0$

Αν $X = 1$, τότε είναι $f_4(1) = \max \{r_4(x_4) + f_3(1 - x_4)\}$, $0 \leq x_4 \leq 1$

και $f_4(1) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(1) = 0 + 3 = 3 \\ r_4(1) + f_3(0) = 4 + 0 = 4 \end{cases}$

Η μέγιστη τιμή είναι 4 για $x_4 = 1$.

Αν $X = 2$, τότε $f_4(2) = \max \{r_4(x_4) + f_3(2 - x_4)\}$, $0 \le x_4 \le 2$

&

$$f_4(2) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(2) = 0 + 6 = 6 \\ r_4(1) + f_3(1) = 4 + 3 = 7 \\ r_4(2) + f_3(0) = 5 + 0 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 7 και προκύπτει για $x_4 = 1$.

Αν $X = 3$, τότε $f_4(3) = \max \{r_4(x_4) + f_3(3 - x_4)\}$, $0 \le x_4 \le 3$

&

$$f_4(3) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(3) = 0 + 8 = 8 \\ r_4(1) + f_3(2) = 4 + 6 = 10 \\ r_4(2) + f_3(1) = 5 + 3 = 8 \\ r_4(3) + f_3(0) = 5 + 0 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 10 και προκύπτει για $x_4 = 1$.

Αν $X = 4$, τότε $f_4(4) = \max \{r_4(x_4) + f_3(4 - x_4)\}$, $0 \le x_4 \le 3$

&

$$f_4(4) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(4) = 0 + 9 = 9 \\ r_4(1) + f_3(3) = 4 + 8 = 12 \\ r_4(2) + f_3(2) = 5 + 6 = 11 \\ r_4(3) + f_3(1) = 5 + 3 = 8 \\ r_4(4) + f_3(0) = 5 + 0 = 5 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 12 και προκύπτει για $x_4 = 1$.

Στη συνέχεια προβαίνουμε στη διαμόρφωση του πίνακα που ακολουθεί, μέσω και του οποίου είμαστε σε θέση να προσπαθήσουμε να αναζητήσουμε την πλέον βέλτιστη πολιτική που μας χρειάζεται για το επιθυμητό αποτέλεσμα :

| **X** | **I** | | **II** | | **III** | | **IV** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$X_1$** | **$f_1(x)$** | **$X_2$** | **$f_2(x)$** | **$X_3$** | **$f_3(x)$** | **$X_4$** | **$f_4(x)$** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0,1 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 1,2 | 5 | 1 | 6 | 1 | 7 |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 6 | 1 | 8 | 1 | 10 |
| 4 | 4 | 5 | 2,3 | 8 | 1,2 | 9 | 1 | 12 |

Όπως πάρα πολύ σωστά μπορούμε να διακρίνουμε από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, το εν λόγω πρόβλημα το οποίο και μας απασχολεί είναι τεσσάρων σταδίων ( δηλαδή n = 4 ).

Οπότε, είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι οι **«βέλτιστες εναλλακτικές»** λύσεις είναι οι ακόλουθες :

**Λύση 1η :**

**n = 1**, για **x = 4, $x_1^*$ = 1**

**n = 2**, για **x = 4 – 1 = 3, $x_2^*$ = 1**.

**n = 3**, για **x = 3 – 1 = 2, $x_3^*$ = 1**.

**n = 4**, για **x = 2 – 1 = 1, $x_4^*$ = 1**.

**Λύση 2η :**

**n = 1**, για **x = 4**, $\mathbf{x_1^* = 1}$

**n = 2**, για **x = 4 – 1 = 3**, $\mathbf{x_2^* = 1}$.

**n = 3**, για **x = 3 – 1 = 2**, $\mathbf{x_3^* = 2}$.

**n = 4**, για **x = 2 – 2 = 0**, $\mathbf{x_4^* = 0}$.

Συνεπώς, το μέγιστο κέρδος που προκύπτει ισούται με **12**.

**Άσκηση 3η**

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα φορτηγό πλοίο το οποίο επιθυμούμε να το φορτώσουμε με τρία διαφορετικά είδη φορτίων το φορτίο 1, το φορτίο 2 και το φορτίο 3. Το μέγιστο βάρος το οποίο είναι σε θέση να μεταφέρει το φορτηγό πλοίο κάθε φορά, το καθορίζουμε εξ' αρχής στις πέντε μονάδες βάρους συνολικά. Συνεπώς για το κάθε φορτίο υφίσταται αντίστοιχα ένα βάρος, $w_i$, και μια αξία $V_i$ τα οποία και δίδονται στον ακόλουθο πίνακα :

| **I** | $\mathbf{w_i}$ | $\mathbf{V_i}$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 70 |
| 2 | 3 | 90 |
| 3 | 1 | 40 |

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα Δυναμικού Προγραμματισμού, μας ζητείται να βρούμε μια βέλτιστη πολιτική φορτώσεως.

***Απάντηση :***

Για την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι απαραίτητο να οριστούν :

W : Το μέγιστο δυνατό φορτίο το οποίο μπορεί να μεταφέρει το πλοίο.

n : Το σύνολο των ειδών φορτίου τα οποία μεταφέρονται

$V_i$ : Η αξία κάθε είδους φορτίου (i = 1, 2, 3,…..n).

$W_i$ : Το βάρος σε μονάδες βάρους, κάθε είδους φορτίου i.

$X_i$ : ο αριθμός των κομματιών κάθε είδους φορτίου i τα οποία φορτώνονται στα πλοία.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματός μας ούτως ώστε να μπορέσει να μεγιστοποιηθεί, εκφράζεται με την ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση :

$$f = \max \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad (1)$$

Με περιοριστικές συνθήκες :

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W \\ X_i = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad I = 1, 2, 3 \ldots\ldots, n \end{cases} \quad (2)$$

Πρόκειται λοιπόν όπως πολύ καλά μπορούμε να διαπιστώσουμε, για ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού, το οποίο και θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε χρησιμοποιώντας κάποιες από όλες εκείνες τις μεθόδους του Δυναμικού προγραμματισμού που έχουμε διδαχτεί. Όλες εκείνες οι αποφάσεις τις οποίες και καλούμαστε να πάρουμε, οφείλουν να είναι σύμφωνες με την αρχή του Bellman, να είναι δηλαδή κάθε φορά οι **«βέλτιστες αποφάσεις»**. Συνεπώς, για το είδος i το οποίο έχει βάρος $W_i$, αποφασίζουμε εν τέλει να φορτώσουμε το φορτηγό πλοίο με $X_i$ κομμάτια. Αυτή όμως η απόφαση, θα πρέπει να ικανοποιεί πλήρως το γεγονός ότι είναι σε θέση να μεγιστοποιεί την αξία του φορτίου για όλο το υπόλοιπο$_i$ του βάρους που απομένει, δηλαδή το $w\text{-}x_iw_i$, του οποίου η μέγιστη αξία προκύπτει από τη συνάρτηση $f_{i+1}(w\text{-} x_iw_i)$ και την αξία του φορτίου $x_iv_i$ το οποίο φορτώνουμε στο πλοίο. Η αντικειμενική λοιπόν συνάρτηση του προβλήματός μας, όπως αυτή προκύπτει είναι η ακόλουθη :

$$\mathbf{f_i(w) = max_{x_i}\{ x_iv_i + f_{i+1}(w\text{-} w_ix_i)\},}$$

Με $i = 1, 2, 3,\ldots,n - 1$ $\begin{cases} x_i = 0,1,\ldots\ldots, [\frac{w}{wi}] \\ w = 0, 1, 2,\ldots, w \end{cases}$

Για $n = 3$ και $w = 0, 1,\ldots.., 5$ είναι :

$$\mathbf{f_3(w) = v_3x \text{ με } x_3 = [\tfrac{w}{wn}]}$$

Οπότε έχουμε :

$f_3(0) = 40 \times 0 = 0$

$f_3(1) = 40 \times 1 = 40$

$f_3(2) = 40 \times 2 = 80$

$f_3(3) = 40 \times 3 = 120$

$f_3(4) = 40 \times 4 = 160$

$f_3(5) = 40 \times 5 = 200$

Για n = 3 και w = 0, 1,….., 5 έχουμε :

$$\mathbf{f_2(w) = max_{x2} \{ v_2x_2 + f_3(w\text{-}w_2x_2)\},}$$

όταν $x_2$ =0, 1,….., $[\frac{w}{3}]$.

Έχουμε :

$f_2(0) = \max \{90 \times 0 + f_3(0)\} = 0$

$f_2(1) = \max \{90 \times 0 + f_3(1)\} = 40$

$f_2(2) = \max \{90 \times 0 + f_3(2)\} = 80$

$f_2(3) = \max \{90 \times 0 + f_3(3), 90 \times 1 + f_3(0)\} = \max \{120, 90\} = 120$

$f_2(4) = \max \{90 \times 0 + f_3(4), 90 \times 1 + f_3(1)\} = \max \{160, 130\} = 160$

$f_2(5) = \max \{90 \times 0 + f_3(5), 90 \times 1 + f_3(2)\} = \max \{200, 170\} = 200$

Για n = 1 έχουμε :

$$\mathbf{f_1(w) = max_{x1} \{v_1x_1 + f_2(w - w_1x_1)\},}$$

όταν $x_1$ =0, 1,….., $[\frac{w}{2}]$.

Η εξίσωση η οποία ενδιαφέρει, για n=1 είναι :

$f_1(5) = \max_{\chi 1} \{70 \bullet 0 + f_2(5), 70 \bullet 1 + f_2(3), 70 \bullet 2 + f_2(1)\} =$

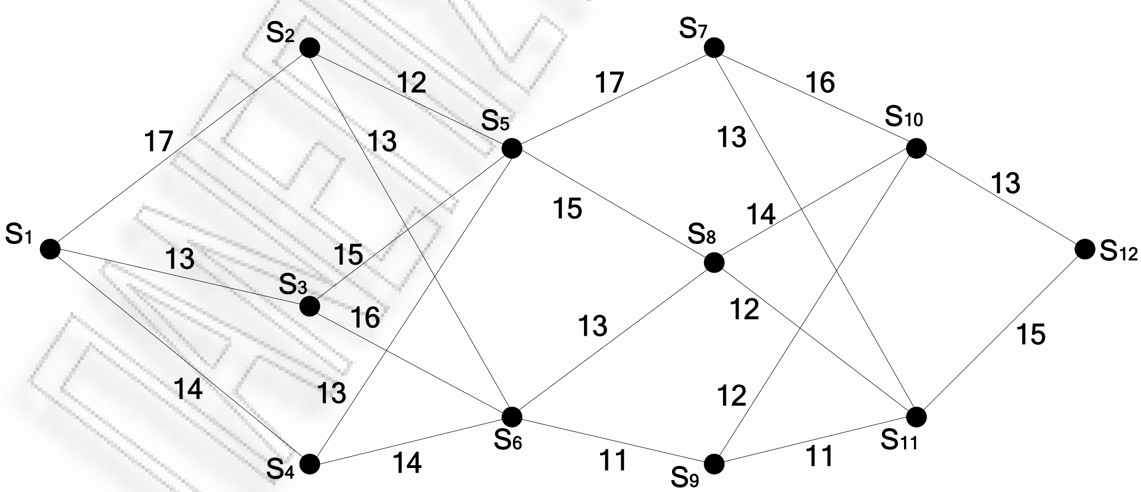
$= \max \{200, 190, 180\} = 200.$

**<u>Συμπέρασμα:</u>**

Η μέγιστη αξία που προκύπτει για το φορτίο μας είναι 200. Η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι από το φορτίο 1 να φορτώσουμε 2 κομμάτια, από το φορτίο 2 να φορτώσουμε 0 κομμάτια και από το φορτίο 3 να φορτώσουμε 1 κομμάτι.

**Άσκηση 4η**

Στο ακόλουθο δίκτυο δίδονται οι δρόμοι που συνδέουν δώδεκα πόλεις μεταξύ τους. Έστω ότι $S_1$ η αρχική πόλη, όπου θεωρείται ως αφετηρία, και $S_{12}$ η τελική πόλη, που θεωρείται ως προορισμός μας. Όλοι οι δρόμοι, θεωρούνται μονόδρομοι, με κατεύθυνση προς τη φορά του βέλους που απεικονίζεται και συνδέουν τις ενδιάμεσες πόλεις $S_2$, $S_3S_4$, $S_5$, $S_6$, $S_7$, $S_8$, $S_9$, $S_{10}$, και $S_{11}$ μεταξύ τους. Κάθε δρόμος στο δίκτυο χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό ο οποίος εκφράζει το χρόνο σε λεπτά της ώρας, διέλευσης του. Μας ζητείται να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος ο οποίος απαιτείται για να καταφέρουμε να ταξιδέψουμε από την πόλη αφετηρία $S_1$, μέχρι την πόλη προορισμό μας $S_{12}$.

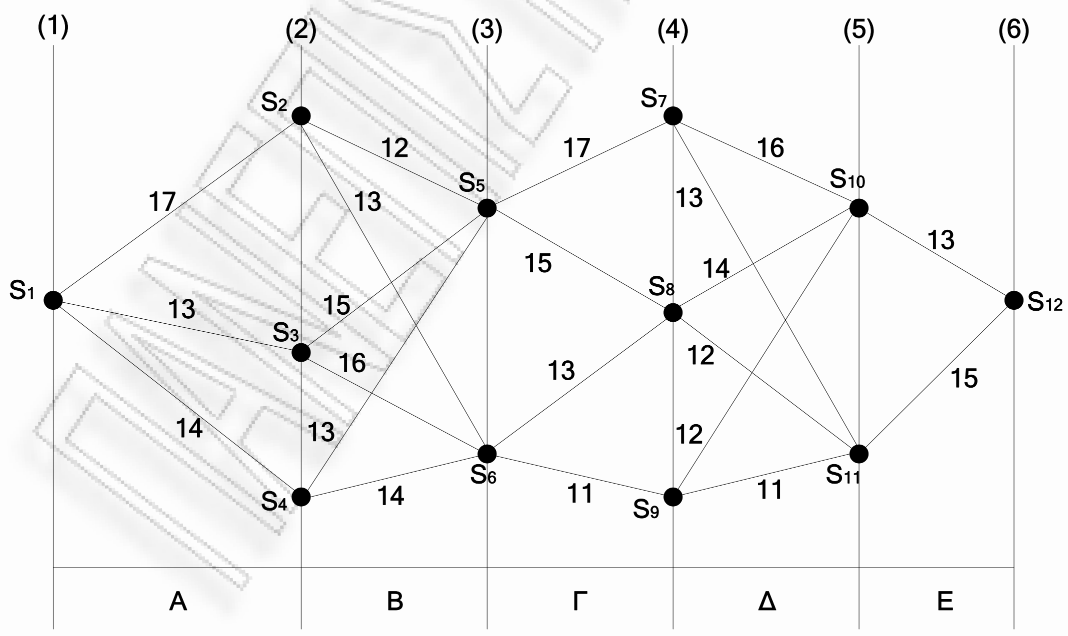


***Απάντηση*** **:**

Όπως είναι ευρέως γνωστό, όταν έχουμε ένα Δυναμικό πρόγραμμα, θα πρέπει υπάρχει αντίστοιχα ένα επιμέρους πρόβλημα (υπό-πρόβλημα). Με κάθε στάδιο συνδέεται ένα σύνολο μεταβλητών, οι ***«μεταβλητές καταστάσεως»*** καθώς και μια επιλογή αποφάσεων. Κάθε μια απόφαση, έχει ως αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό μεταβλητών αποφάσεων. Κάθε κανόνας λήψης αποφάσεων ονομάζεται *«πολιτική»*. Από τα προαναφερόμενα, προκύπτει ότι, με τον όρο ***«βέλτιστη πολιτική»,*** ονομάζουμε κάθε εκείνη πολιτική η οποία είναι σαφέστατα σε θέση να βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση των μεταβλητών καταστάσεως.

Η βέλτιστη λύση των Δυναμικών Προγραμμάτων επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας την ***Αρχή του Bellman*** :

**«Μια βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα, ότι οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι εναπομένουσες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μία βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση, η οποία προέρχεται από την πρώτη απόφαση»**.



Έστω ότι οι $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, και η $S_6$, είναι οι μεταβλητές των καταστάσεων οι οποίες και αντιστοιχούν στα διάφορα στάδια 1, 2, 3, 4, 5, και 6 του δικτύου μας αντίστοιχα. Επίσης έχουμε τις $W_1(S_1,S_2)$, $W_2(S_2,S_3)$, $W_3(S_3,S_4)$, $W_4(S_4,S_5)$ και $W_5(S_5,S_6)$, όπου είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις των χρόνων για τα τμήματα Α, Β, Γ, Δ και Ε της διαδρομής που πρόκειται να ακολουθήσουμε.

Ζητείται να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος :

$$\mathbf{W_1(S_1,S_2) + W_2(S_2,S_3) + W_3(S_3,S_4) + W_4(S_4,S_5) + W_5(S_5,S_6)}$$

Κάθε ένα διάνυσμα από τα $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, και $S_6$ ξεχωριστά, αποτελεί και μία πολιτική του προβλήματός μας. Αν οι $f_1$, $f_{12}$ , $f_{13}$, $f_{14}$, και $f_{15}$ είναι αντίστοιχα, εκείνες οι συναρτήσεις των βέλτιστων πολιτικών των συνόλων {Α}, {Α,Β}, {Α,Β,Γ}, {Α,Β,Γ,Δ} και {Α, Β, Γ, Δ, Ε}, τότε η αρχή του «Bellman» δίδεται στα ακόλουθα βήματα :

**Βήμα 1$^{o}$ :**

Τμήμα Α. Σε αυτό το τμήμα αντιστοιχεί η συνάρτηση :

$$\mathbf{f_1(S_2) = W_1(S_1,S_2)\ \text{με}\ S_1 \in \{S_1\}}$$

Οι αντίστοιχες, βέλτιστες υπό-πολιτικές μας είναι :

| $f_1$ | Βέλτιστες υπό-πολιτικές |
|---|---|
| 17 | $(S_1,S_2)$ |
| 13 | $(S_1,S_3)$ |
| 14 | $(S_1,S_4)$ |

**Βήμα 2ο :**

Τμήμα Α-Β. Σε αυτό το τμήμα αντιστοιχεί η συνάρτηση :

$$\mathbf{f_{12}(S_3) = min\ \{f_1(S_2) + w_2(S_2,S_3)\}\ με\ S_2 \in \{S_2,S_3,S_4\}}$$

Για $S_3 = S_5$ είναι :

$f_{12}(S_5) = \min\{17 + 12, 13 + 15, 14 + 13\} = 27$

Για $S_3 = S_6$ είναι :

$f_{12}(S_6) = \min\{17 + 13, 13 + 16, 14 + 14\} = 28$.

Οι αντίστοιχες βέλτιστες υπό-πολιτικές είναι :

| $f_{12}$ | Βέλτιστες υπό-πολιτικές |
|---|---|
| 27 | $(S_1, S_4, S_5)$ |
| 28 | $(S_1, S_4, S_6)$ |

**Βήμα 3ο :**

Τμήμα Α-Γ. Σε αυτό το τμήμα αντιστοιχεί η συνάρτηση :

$$\mathbf{f_{13}(S_4) = min\ \{f_{12}(s_3) + w_3(S_3,S_4)\}\ με\ S_3 \in \{S_5,S_6\}}$$

Για $S_4 = S_7$ είναι :

$f_{13}(S_7) = \min\{27 + 17\} = 44$.

Για $S_4 = S_8$ είναι :

$f_{13}(S_8) = \min\{27 + 15, 28 + 13\} = 41$.

Για $S_4 = S_9$ είναι :

$f_{13}(S_9) = \min\{28 + 11\} = 39.$

Οι αντίστοιχες βέλτιστες υπό-πολιτικές είναι :

| **$f_{13}$** | **Βέλτιστες υπό-πολιτικές** |
|---|---|
| 44 | $(S_1, S_4, S_5, S_7)$ |
| 41 | $(S_1, S_4, S_6, S_8)$ |
| 39 | $(S_1, S_4, S_6, S_9)$ |

**Βήμα 4ο :**

Τμήμα Α-Δ. Σε αυτό το τμήμα αντιστοιχεί η συνάρτηση :

$$\mathbf{f_{14}(S_5) = \min\{f_{13}(s_4) + w_4(S_4,S_5)\}\ \text{με}\ S_4 \in \{S_7, S_8, S_9\}}$$

Για $S_5 = S_{10}$ είναι :

$f_{14}(S_{10}) = \min\{44 + 16, 41 + 14, 39 + 12\} = 51.$

Για $S_5 = S_{11}$ είναι :

$f_{14}(S_{11}) = \min\{44 + 13, 41 + 12, 39 + 11\} = 50.$

Οι αντίστοιχες βέλτιστες υπό-πολιτικές είναι :

| **$f_{14}$** | **Βέλτιστες υπό-πολιτικές** |
|---|---|
| 51 | $(S_1, S_4, S_6, S_9, S_{10})$ |
| 50 | $(S_1, S_4, S_6, S_9, S_{11})$ |

**Βήμα 5ο :**

Τμήμα Α-Ε. Σε αυτό το τμήμα αντιστοιχεί η συνάρτηση :

$$\mathbf{f_{15}(S_6) = \min \{f_{14}(s_5) + w_5(S_5,S_6)\}\ \text{με}\ S_5 \in \{S_{10},S_{11}\}}$$

Για $S_6 = S_{12}$ είναι :

$f_{15}(S_{12}) = \min \{ 51 + 13, 50 + 15\} = 64$.

**Άρα**, η βέλτιστη πολιτική του προβλήματός μας είναι η $\{S_1, S_4, S_6, S_9, S_{10}, S_{12}\}$ με ελάχιστη τιμή 64.

**Άσκηση 5η**

Έστω ότι υπάρχει ένας χρηματοοικονομικός όμιλος ο οποίος και επενδύει διάφορα κεφάλαια, ήτοι 0, 1, 2, 3, 4 εκατομμύρια χρηματικών μονάδων σε βασικά προϊόντα Α, Β, Γ και Δ. Τα κέρδη όπως αυτά προβλέπονται ότι θα προκύψουν δίδονται στον ακόλουθο πίνακα :

| **X** | **A** | **B** | **Γ** | **Δ** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,25 | 0,21 | 0,19 | 0,18 |
| 2 | 0,48 | 0,42 | 0,44 | 0,38 |
| 3 | 0,68 | 0,62 | 0,60 | 0,64 |
| 4 | 0,74 | 0,70 | 0,68 | 0,72 |

Μας ζητείται να γίνει μια επένδυση 4 εκατομμυρίων χρηματικών μονάδων, ούτως ώστε να καταφέρουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος.

***Απάντηση* :**

Το εν λόγω πρόβλημα επιλύεται χρησιμοποιώντας τη γενική αναδρομική σχέση :

$$\mathbf{f_n(x) = max\ \{r_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\}},\ \text{για}\ \mathbf{0 \le x_n \le x}$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ και την $f_4(x)$.

**Υπολογισμός της $f_1(x)$**

Είναι :

$$f_1(0) = r_1(0) = 0$$

$$f_1(1) = r_1(1) = 0{,}25$$

$$f_1(2) = r_1(2) = 0{,}48$$

$$f_1(3) = r_1(3) = 0{,}68$$

$$f_1(4) = r_1(4) = 0{,}74$$

**Υπολογισμός της $f_2(x)$**

Εάν $f_2(0)$ τότε $X = 0$

Αν $X = 1$, είναι $f_2(1) = \max\ \{r_2(x_2) + f_1(1 - x_2)\},\ 0 \le x_2 \le 1$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(1) = 0 + 0{,}25 = 0{,}25 \\ r_2(1) + f_1(0) = 0{,}21 + 0 = 0{,}21 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,25 για $x_2 = 0$.

Αν X = 2, τότε είναι $f_2(2) = \max\{r_2(x_2) + f_1(2 - x_2)\}$, $0 \le x_2 \le 2$

&

$$f_2(2) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(2) = 0 + 0,48 = 0,48 \\ r_2(1) + f_1(1) = 0,21 + 0,25 = 0,46 \\ r_2(2) + f_1(0) = 0,42 + 0 = 0,42 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,48 και αυτή προκύπτει για $x_2 = 0$.

Αν X = 3, είναι $f_2(3) = \max\{r_2(x_2) + f_1(3 - x_2)\}$, $0 \le x_2 \le 3$

&

$$f_2(3) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(3) = 0 + 0,68 = 0,68 \\ r_2(1) + f_1(2) = 0,21 + 0,48 = 0,69 \\ r_2(2) + f_1(1) = 0,42 + 0,25 = 0,67 \\ r_2(3) + f_1(0) = 0,62 + 0 = 0,62 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,69 και προκύπτει για $x_2 = 1$.

Αν X = 4, είναι $f_2(4) = \max\{r_2(x_2) + f_1(4 - x_2)\}$, $0 \le x_2 \le 4$

&

$$f_2(4) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_1(4) = 0 + 0,74 = 0,74 \\ r_2(1) + f_1(3) = 0,21 + 0,68 = 0,89 \\ r_2(2) + f_1(2) = 0,42 + 0,48 = 0,90 \\ r_2(3) + f_1(1) = 0,62 + 0,25 = 0,87 \\ r_2(4) + f_1(0) = 0,70 + 0 = 0,70 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 90 και προκύπτει για $x_2 = 2$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε στη συνέχεια και τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

**Υπολογισμός της $f_3(x)$**

Είναι $f_3(0)$ αν $X = 0$,

Αν $X = 1$, τότε είναι $f_3(1) = \max\{r_3(x_3) + f_2(1 - x_3)\}$, $0 \le x_3 \le 1$

&

$$f_3(1) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(1) = 0 + 0{,}25 = 0{,}25 \\ r_3(1) + f_2(0) = 0{,}19 + 0 = 0{,}19 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,25 για $x_3 = 0$.

Αν $X = 2$, τότε $f_3(2) = \max\{r_3(x_3) + f_2(2 - x_3)\}$, $0 \le x_3 \le 2$

$$f_3(2) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(2) = 0 + 0{,}48 = 0{,}48 \\ r_3(1) + f_2(1) = 0{,}19 + 0{,}25 = 0{,}44 \\ r_3(2) + f_2(0) = 0{,}44 + 0 = 0{,}44 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,48 και προκύπτει για $x_3 = 0$.

Αν $X = 3$, τότε $f_3(3) = \max\{r_3(x_3) + f_2(3 - x_3)\}$, $0 \le x_3 \le 3$

&

$$f_3(3) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(3) = 0 + 0{,}69 = 0{,}69 \\ r_3(1) + f_2(2) = 0{,}19 + 0{,}48 = 0{,}67 \\ r_3(2) + f_2(1) = 0{,}44 + 0{,}25 = 0{,}69 \\ r_3(3) + f_2(0) = 0{,}60 + 0 = 0{,}60 \end{cases}$$

Οπότε, όπως καλά μπορούμε να διακρίνουμε, η μέγιστη τιμή που παίρνουμε είναι το 0,69 και προκύπτει για την περίπτωση που το $x_3 = 2$, καθώς επίσης μπορεί να προκύψει και στην περίπτωση που το $x_3 = 0$.

Αν $X = 4$, τότε $f_3(4) = \max \{r_3(x_3) + f_2(4 - x_3)\}$

&

$$f_3(4) = \max \begin{cases} r_3(0) + f_2(4) = 0 + 0{,}90 = 0{,}90 \\ r_3(1) + f_2(3) = 0{,}19 + 0{,}69 = 0{,}88 \\ r_3(2) + f_2(2) = 0{,}44 + 0{,}48 = 0{,}92 \\ r_3(3) + f_2(1) = 0{,}60 + 0{,}25 = 0{,}85 \\ r_3(4) + f_2(0) = 0{,}68 + 0 = 0{,}68 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,92 και προκύπτει για $x_3 = 2$.

**Υπολογισμός της $f_4(x)$**

Αν $X = 0$, τότε $f_4(0) = 0$

Αν $X = 1$, τότε είναι $f_4(1) = \max \{r_4(x_4) + f_3(1 – x_4)\}$

&

$$f_4(1) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(1) = 0 + 0{,}25 = 0{,}25 \\ r_4(1) + f_3(0) = 0{,}18 + 0 = 0{,}18 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,25 για $x_4 = 0$.

Αν $X = 2$, τότε $f_4(2) = \max\{r_4(x_4) + f_3(2 - x_4)\}$ είναι :

$$f_4(2) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(2) = 0 + 0{,}48 = 0{,}48 \\ r_4(1) + f_3(1) = 0{,}18 + 0{,}25 = 0{,}43 \\ r_4(2) + f_3(0) = 0{,}38 + 0 = 0{,}38 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,48 και προκύπτει για $x_4 = 0$.

Αν $X = 3$, τότε $f_4(3) = \max\{r_4(x_4) + f_3(3 - x_4)\}$

&

$$f_4(3) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(3) = 0 + 0{,}69 = 0{,}69 \\ r_4(1) + f_3(2) = 0{,}18 + 0{,}48 = 0{,}66 \\ r_4(2) + f_3(1) = 0{,}38 + 0{,}25 = 0{,}63 \\ r_4(3) + f_3(0) = 0{,}64 + 0 = 0{,}64 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,69 και προκύπτει για $x_4 = 0$.

Αν $X = 4$, τότε $f_4(4) = \max\{r_4(x_4) + f_3(4 - x_4)\}$

&

$$f_4(4) = \max \begin{cases} r_4(0) + f_3(4) = 0 + 0{,}92 = 0{,}92 \\ r_4(1) + f_3(3) = 0{,}18 + 0{,}69 = 0{,}87 \\ r_4(2) + f_3(2) = 0{,}38 + 0{,}48 = 0{,}86 \\ r_4(3) + f_3(1) = 0{,}64 + 0{,}25 = 0{,}89 \\ r_4(4) + f_3(0) = 0{,}72 + 0 = 0{,}72 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή είναι 0,92 και προκύπτει για $x_4 = 0$.

Στη συνέχεια, διαμορφώνοντας τον ακόλουθο πίνακα των $x_1$, $x_2$, $x_3$ και $x_4$ σε αντιστοιχία πάντα με τις συναρτήσεις $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ και την $f_4(X)$ εντοπίζουμε την βέλτιστη λύση του προβλήματός.

.

| **X** | **A** | | **B** | | **Γ** | | **Δ** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$x_1$** | **$f_1(X)$** | **$x_2$** | **$f_2(X)$** | **$x_3$** | **$f_3(X)$** | **$x_4$** | **$f_4(X)$** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 0 | 0,25 | 0 | 25 |
| 2 | $2^*$ | 0,48 | $0^*$ | 0,48 | 0 | 0,48 | 0 | 48 |
| 3 | 3 | 0,68 | 1 | 0,69 | 2 | 0,69 | 0 | 69 |
| 4 | 4 | 0,74 | 2 | 0,90 | $2^*$ | 0,92 | $0^*$ | 92 |

**Άρα**, η βέλτιστη πολιτική του προβλήματος είναι (**2**,**0** **2**,**0**) με μέγιστη τιμή κέρδους **0,92** εκατομμύρια χρηματικές μονάδες.

# 4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τεχνικές βελτιστοποίησης Ροβιθάκης, Γεώργιος. **Εκδότης:** Τζιόλα Οκτώβριος, 2007

Μαθηματική θεωρία βελτιστοποίησης Συλλογικό έργο, Du, DingZhu, Pardalos, Panos M., Wu, Weili **Εκδότης:** Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών 2005

Αριθμητική ανάλυση Παραδείγματα, ασκήσεις και θέματα εξετάσεων Γεωργίου, Δημήτρης Α. **Εκδότης:** Κλειδάριθμος Ιανουάριος, 2009

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων Καραμπετάκης, Νικόλαος **Εκδότης:** Ζήτη Φεβρουάριος, 2009

A Handbook of Real Variables Steven G.,Krantz **Εκδότης:** Birkhauser Boston Inc 2003

Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators Sorin G.,Gal **Εκδότης:** World Scientific Publishing Co Pte Ltd 2009

Abelian Functions H.F.,Baker **Εκδότης:** Cambridge University Press 1995

Optimization Jan,Brinkhuis, Vladimir M.,Tikhomirov **Εκδότης:** The University Press Group Ltd 2005

Polynomial Operator Equations in Abstract Spaces and Applications I.K.,Argyros **Εκδότης:** Taylor & Francis Inc 1998

Optimization Jan,Brinkhuis, Vladimir M.,Tikhomirov **Εκδότης:** The University Press Group Ltd 2005

An Introduction to Complex Analysis Wolfgang,Tutschke **Εκδότης:** Taylor & Francis Ltd 2004

Combinatorial Optimization W.J.,Cook, William H.,Cunningham, W. R.,Pulleybank, A.,Schriver **Εκδότης:** John Wiley and Sons Ltd 1997

Numerical Optimization Jorge,Nocedal, Stephen,Wright **Εκδότης:** Springer-Verlag New York Inc. 2006

Dynamic Optimization Morton I.,Kamien, Nancy L.,Schwartz **Εκδότης:** Elsevier Science & Technology 1991

Optimal Interprocedural Program Optimization J.,Knoop **Εκδότης:** Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG 1998

Optimization Jan,Brinkhuis, Vladimir M.,Tikhomirov **Εκδότης:** The University Press Group Ltd 2005

Applied Dynamics Programming for Optimization of Dynamical Systems Rush D.,Robinett, David G.,Wilson, G. Richard,Eisler, John E.,Hurtado **Εκδότης:** Society for Industrial & Applied Mathematics,U.S. 2005

Iterative Dynamic Programming Rein,Luus **Εκδότης:** Taylor & Francis Inc 2005

Dynamic Programming Art,Lew, Holger,Mauch **Εκδότης:** Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG 2006

Dynamic Programming Richard E.,Bellman **Εκδότης:** The University Press Group Ltd 2010

Introduction to Applied Optimization Urmila,Diwekar **Εκδότης:** Kluwer Academic Publishers 2003

Mathematics of Optimization Giorgio,Giorgi, Angelo,Guerraggio, J.,Thierfelder **Εκδότης:** Elsevier Science & Technology 2004

Optimization Techniques in Statistics Jagdis.,h SRustagi **Εκδότης:** Elsevier Science & Technology 2004