ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
στη Χρηματοοικονομική Ανάλυση για
Στελέχη Επιχειρήσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ»

ΙΩΑΝΝΑ ΤΖΙΟΥΜΠΑ

Επιβλέπων Καθηγητής : Δημήτριος Βολιώτης

Επιτροπή : Νικόλαος Εγγλέζος & Μιχάλης Ανθρωπέλος

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών στη Χρηματοοικονομική Ανάλυση για Στελέχη Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Πειραιώς και ιδιαίτερα στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Βολιώτη για τη συνεργασία και τη συνεχή καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της Διπλωματικής Εργασίας .

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικειμενικός σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι μέσω της θεωρίας των παιγνίων , η οποία αποτελεί μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της μικροοικονομικής θεωρίας, να αναλυθούν τα στρατηγικά υπερμετρικά παίγνια και η συμπληρωματικότητα τους. Αρχικά, πραγματοποιήθηκε ανάλυση της χρησιμότητας των υπερμετρικών παιγνίων και των οικονομικών εφαρμογών τους. Στη συνέχεια , μελετήθηκε η στρατηγική συμπληρωματικότητα και γενικές έννοιες, ορισμοί και συμβολισμοί που αναπτύσσονται γύρω από αυτή τη θεωρία αλλά και η ανάλυση των παιγνίων και των υπερμετρικών παιγνίων. Επίσης αναπτύχθηκαν τα σημαντικότερα υποδείγματα του ολιγοπωλίου που βασίζονται σε συγκεκριμένες συμπεριφορές των επιχειρήσεων και πως εμπίπτουν στη θεωρία των παιγνίων. Τέλος , παρουσιάστηκε μία σειρά από υποδείγματα και παίγνια συντονισμού, τα οποία αποδεικνύονται ότι είναι υπερμετρικά παίγνια και βασίζονται στα πιο βασικά θεωρήματα της ανάλυσης αυτής.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΟΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

(ECONOMIC APPLICATIONS OF SUPERMODULAR GAMES)

Εισαγωγή

Η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων αποτελεί μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές στην μικροοικονομία, η οποία μελετάει τη στρατηγική συμπεριφορά των επιχειρήσεων στην αγορά μίας οικονομίας. Ασχολείται με την επιλογή της καλύτερης ή άριστης στρατηγικής σε καταστάσεις σύγκρουσης. Η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων μπορεί να βοηθήσει μία επιχείρηση να προσδιορίσει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αν μειώσει τις τιμές των προϊόντων της δεν θα ξεκινήσει πόλεμος τιμών. Επίσης, μπορεί να βοηθήσει μία εταιρεία ώστε να αυξήσει τη δυναμικότητά της στο να αποτραπεί η είσοδος νέων επιχειρήσεων στο συγκεκριμένο κλάδο της αγοράς.

Η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο στην μελέτη και παρακολούθηση των στρατηγικών παιγνίων. Τα στρατηγικά παίγνια (strategic games) είναι καταστάσεις όπου συμμετέχουν δύο ή περισσότεροι παίκτες και με βάση τη στρατηγική που ακολουθούν προσπαθούν να επιτύχουν το κλείσιμο συμφωνιών ή τη διευθέτηση συγκρούσεων.

Η στρατηγική σκέψη αποτελεί ένα από τα βασικότερα στοιχεία των στρατηγικών παιγνίων και έχουν ιδιαίτερη σημασία στις αλληλεπιδράσεις ενός παίκτη με τον υπόλοιπο κόσμο, έχοντας ως δεδομένο ότι υπάρχουν και άλλοι παίκτες οι οποίοι έχουν σκοπό να ακολουθήσουν την ίδια στρατηγική. Μέσω αυτής της θεωρίας , αναλύεται η λήψη στρατηγικών αποφάσεων σχετικά με την αλληλεπίδραση τους μεταξύ των παικτών αλλά και την επιρροή της σε διάφορους τομείς της οικονομίας και την συμπεριφορά των επιχειρήσεων μέσα σε αυτή.

Η συμπεριφορά κάθε παίκτη αλλά και η ορθολογική του δράση περιλαμβάνει τη διαδικασία της προετοιμασίας της εφαρμογής μίας στρατηγικής, τη γνώση του σκοπού της αλλά και τους περιορισμούς που έχει και τέλος την επιλογή της άσκησης της στρατηγικής με τον καλύτερα υπολογισμένο τρόπο, βάση των κριτηρίων που έχει ορίσει ο ίδιος. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων αποτελεί την επιστημονική τεκμηρίωση της ορθολογικής συμπεριφοράς σε καταστάσεις αλληλεπίδρασης. Σκοπός της άσκησης της παραπάνω θεωρίας είναι η βέλτιστη άσκηση στρατηγικών σε διάφορα προβλήματα και καταστάσεις που διέπουν την οργανωμένη αγορά σε μία οικονομία.

1.1 Η ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Τα στρατηγικά παίγνια χρησιμοποιούνται και συναντώνται στην προσωπική ζωή ,στο εργασιακό περιβάλλον, στην πολιτική, στην κοινωνία αλλά πρωτίστως στην οικονομία. Η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων έχει σκοπό αρχικά να εξηγήσει την κατάσταση που αλληλεπιδρούν οι αποφάσεις των παικτών με διαφορετικούς σκοπούς ώστε να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η συγκεκριμένη κατάσταση. Επίσης , σε καταστάσεις όπου υπάρχουν πολλαπλοί λήπτες αποφάσεων, των οποίων οι αλληλεπιδράσεις τους ασκούνται με στρατηγική, η θεωρία έχει σκοπό να προβλέψει τις δράσεις που θα αναλάβουν οι λήπτες των αποφάσεων και των αποτελεσμάτων που ενδέχεται να προκύψουν. Η θεωρία μπορεί να βοηθήσει ένα παίκτη αναφορικά με μελλοντικές αλληλεπιδράσεις επισημαίνοντας του ποιες στρατηγικές είναι πιθανόν να επιφέρουν θετικά αποτελέσματα και ποιες υπάρχει πιθανότητα να αποφέρουν το αντίθετο αποτέλεσμα.

Παρόλα αυτά, η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων δεν έχει πάντα άριστη λειτουργικότητα. Ένα αποτέλεσμα για να εξηγηθεί, προϋποθέτει τη σωστή κατανόηση των κινήτρων και της συμπεριφοράς των παικτών. Η προσέγγιση που ακολουθείται αποτελείται από το πλαίσιο της ορθολογιστικής επιλογής των ανεξάρτητων παικτών και η ισορροπία της αλληλεπίδρασης τους. Υπάρχει πιθανότητα οι παίκτες και οι αλληλεπιδράσεις τους να μη συμμορφώνονται σε αυτό το πλαίσιο. Επίσης , η ανάλυση υποθέτει ότι οι παίκτες σκέφτονται ορθολογιστικά για να μεγιστοποιήσουν τους στόχους τους , ενώ στην πραγματικότητα δεν μπορεί ο κάθε παίκτης να εκτιμήσει και να λειτουργήσει στην τύχη. Ο κίνδυνος αυτός μειώνεται όσο όλο και περισσότεροι παίκτες δίνουν έμφαση στην στρατηγική αλληλεπίδραση και παίρνουν αποφάσεις μέσω των στρατηγικών τους επιλογών.

1.2 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων βρίσκει εφαρμογή σε διαφορετικούς τύπους και μορφές της οικονομίας. Παρακάτω παραθέτουμε μία μορφή της αγοράς, το **μονοπώλιο (monopoly pass-through)**, έναν από τους σημαντικότερους δείκτες σε μία οικονομία ,τη **θεωρία του καταναλωτή (consumer theory)** , και τέλος τη **θεωρία της ανάπτυξης (growth theory)**, στα οποία εφαρμόζεται η θεωρία των υπερμετρικών παιγνίων. Σε κάθε περίπτωση θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Topkis ,ώστε να επιτευχθεί αποτελεσματικότερη ανάλυση.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Α΄ Περίπτωση : Μονοπώλιο (Monopoly Pass-Through)

Έστω μια μονοπωλιακή επιχείρηση με σταθερή τιμή μονάδας c με τιμή χρέωσης p η οποία ανήκει στο διάστημα [c,∞] και έστω η άμεση συνάρτηση ζήτησης D. Η συνάρτηση κέρδους είναι :

$$\Pi(p, c)=(p-c)D(p) \text{ ,όπου } p\in[c,\infty]$$

Για να επαληθεύσουμε άμεσα τις αύξουσες διαφορές της συνάρτησης κέρδους, έχουμε $\partial^2\Pi(p, c)/\partial p\partial c=-D'(p)$, το οποίο είναι θετικό ≥ 0 αν ισχύει $D'(p)\leq 0$. Επειδή το εφικτό σύνολο [c,∞] έχει τη μορφή του θεωρήματος του Topkis , υποθέτουμε ότι $D'(p)\leq 0$ το οποίο είναι ξεκάθαρο ότι οι ακραίες επιλογές της βέλτιστης τιμής p* αυξάνονται μέσα στο c.

Παρακάτω παραθέτουμε έναν εναλλακτικό τρόπο για να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Όσο η βέλτιστη τιμή παραμένει αμετάβλητη σε μία μονότονη μετατροπή, μπορούμε ισοδύναμα να υπολογίσουμε

$$\log \Pi(p, c)=\log (p-c) +\log D(p) \text{ , όπου ισχύει } p\in[c,\infty]$$

Όσο ισχύει $\partial^2\Pi(p, c)/\partial p\partial c=(p-c)^{-2}\geq 0$, το επιθυμητό μονοτονικό αποτέλεσμα εξακολουθεί και ισχύει. Παρατηρούμε ότι το D δεν χρειαζόταν να μειωθεί για να διατηρηθεί η τιμή του.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Στη συνέχεια, παραθέτουμε συγκριτικά στατιστικά αποτελέσματα για μία μη μονότονη συνάρτηση με τον απλό τρόπο χρήσης στη διαφοράς της μεταβλητής. Ορίζουμε ως οριακό κόστος (marginal cost) τη συνάρτηση mΔp-c και δίνουμε παρακάτω ισοδύναμα με τη διαφορά στη μεταβλητής :

$$\log\Pi(m ,c)=\log(m)+\log(D+ c)$$

Η τελευταία μεταβλητή παρατηρούμε ότι εμφανίζει φθίνουσες διαφορές στο (m, c) αν η συνάρτηση D είναι log-κοίλη. Επειδή το σύνολο των περιορισμών είναι το $[0,\infty)$, ακολουθεί το θεώρημα του Topkis όπου οι μέγιστες και οι ελάχιστες επιλογές από το οριακό κόστος m*(c) μειώνονται στο c ή, ισοδύναμα , οι ακραίες επιλογές του p* έχουν κλίση ≤ 1. Παρόλα αυτά, το p* παίρνει τιμές η κλίση του στο διάστημα [0,1] και είναι συνεχής και μονής αποτιμήσεως.

Β΄ Περίπτωση: Η Θεωρία του Καταναλωτή (Consumer Theory)

Έστω ένα πρόβλημα με τον καταναλωτή να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του $U(\chi_1,\chi_2)$ από την κατανάλωση δύο αγαθών χ_1 και χ_2 στις τιμές τους αντιστοίχως p_1 και p_2 και εισόδημα του καταναλωτή m. Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες της αγοράς είναι τέτοιες όπου το αγαθό χ_1 είναι ένα κανονικό αγαθό ή η ζήτηση για το προιόν χ_1 αυξάνεται βάση του εισοδήματος m.Το πρόβλημα έγκειται στο $\max\{U(x_1+x_2) : p_1x_1 + p_2x_2=m\}$. Αν η χρησιμότητα U αυξηθεί στο x_2, τότε επιλύουμε με τον περιορισμό του x_2 και το εισάγουμε στη συνάρτηση:

$$\max \{U(x_1,(m-p_1x_{1)}/p_2) : x_1 \in [0,m/p_1]\}$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Υποθέτουμε ότι η χρησιμότητα U είναι ομαλή και έχει αύξουσες διαφορές στο (χ_1 ,m) αν και μόνο αν η παρόμοια συνάρτηση:

$$\mathbf{p_2\, U_{21}(x_1,x_2) - pU_{22}\,(x_1,x_2) \geq 0,} \text{ όπου ισχύει για κάθε } x_1,x_2 \geq 0$$

Βάση του θεωρήματος του Topkis , προκύπτει ότι το αγαθό χ_1 είναι κανονικό αγαθό. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα προκύπτει αν το εισόδημα εκφράζεται σε διακριτές μονάδες.

Γ΄ Περίπτωση : Η Θεωρία της Ανάπτυξης (Growth Theory)

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα βέλτιστο μοντέλο ανάπτυξης με πιθανότητες αυξήσεως των αποδόσεων. Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας u για την οποία ισχύει u΄$>$0 και u΄΄$<$0 , η συνάρτηση παραγωγής f είναι τέτοια ώστε να ισχύει f΄$>$0 και το προεξοφλητικό επιτόκιο να είναι το δ και να ανήκει στο διάστημα (0,1). Με y_t να υποδηλώνει το δηλωθέν εισόδημα , ισχύει:

$$\max \sum_{t=1}^{2} u(x-y_t), \text{ η οποία υπόκειται σε } x_{t+1}=f(y_t) \text{ και } y_t \in [0,x_t]$$

Στο διπλό διάστημα της συνάρτησης $V_{2,}$ ικανοποιείται:

$$V_2(x)=\max\{u(x-y) + \delta u[f(y)] : y \in [0,x]$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι η μέγιστη συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να είναι κοίλη στο y ,άρα το y* μπορεί να είναι πολλαπλών τιμών. Επειδή η μέγιστη συνάρτηση έχει αύξουσες διαφορές στο διάστημα (x,y) , ακολουθεί το γεγονός ότι οι βέλτιστες αποταμιεύσεις y*(x) αυξάνονται στο x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{O}

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

STRATEGIC COMPLEMENTARY

Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει γενικές έννοιες και ορισμούς σχετικές με την παρούσα προοπτική στη θεωρία των παιγνίων και τη συμπληρωματικότητα τους. Η θεωρία στο παρών κεφάλαιο χρησιμοποιείται στις εφαρμογές που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια. Για μία σειρά από προβλήματα βελτιστοποίησης όπου η αντικειμενική συνάρτηση και ένα σύνολο περιορισμών εξαρτώνται από μία παράμετρο, η συγκριτική στατιστική ασχολείται με την εξάρτηση των βέλτιστων λύσεων για την παράμετρο και η μονότονος συγκριτική στατιστική ασχολείται με τις βέλτιστες λύσεις, διαφορετικές μονοτονικά με την παράμετρο. Η μονότονος συγκριτική στατιστική είναι το κύριο θέμα που εξετάζεται στο παρών κεφάλαιο αναφορικά με τη θεωρία των παιγνίων και τη συμπληρωματικότητα τους.

2.1 ΔΙΚΤΥΩΤΑ ΚΑΙ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σχετικά με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης (ή της ελαχιστοποίησης) μίας πραγματικής αξίας f(x) επί x σε ένα σύνολο X, η συνάρτηση f(x) είναι μία αντικειμενική συνάρτηση, όπου x είναι μία μεταβλητή απόφασης, το σύνολο X των εφικτών τιμών για τη μεταβλητή απόφασης x είναι το περιοριστικό σύνολο και $\mathbf{argmax_{x \in X} f(x)}$ και

argmin_{xEX} (f(x):xEX) όπου και τα δύο χαρακτηρίζουν το σύνολο των βέλτιστων λύσεων. Επίσης, ορίζουμε **argmin_{xEX}f(x)** και **argmin(f(x):xEX)** ως **argmax_{xEX}(-f(x))**. Η εστίαση στη μονότονη συγκριτική στατιστική περιλαμβάνει τη συλλογή των παραμετρικών προβλημάτων βελτιστοποίησης : maximize f(x,t) όπου xES_t για κάθε παράμετρο t που περιλαμβάνεται σε ένα σύνολο παραμέτρων T, όπου το x είναι η μεταβλητή απόφασης, το περιοριστικό σύνολο S_t είναι ένα υποσύνολο του X και εξαρτάται από τον χρόνο t και η αντικειμενική συνάρτηση f(x,t) εξαρτάται από τον χρόνο t. Η παράμετρος t από το σύνολο T εμφανίζεται με το συμβολισμό του συνόλου των βέλτιστων αποτελεσμάτων, όπου **argmax_{xESt}f(x)** και **argmax(f(x, t):xES_t).**

Η μονότονη συγκριτική στατιστική θεωρεί ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύνολο των βέλτιστων λύσεων **argmax_{xESt}f(x)** αυξάνεται με την παράμετρο t και μπορεί να γίνει επιλογή της βέλτιστης λύσης x_t με **argmax_{xESt}f(x)** για κάθε t που ανήκει στο T, έτσι ώστε το x_t αποτελεί μία αύξουσα συνάρτηση του t (αυτό ισχύει καθώς t΄≤t΄΄ , από το οποίο συνεπάγεται ότι $x_{t}\leq x_{t''}$).

Ένας από τους βασικότερους ορισμούς που θα χρησιμοποιηθεί για την επεξήγηση εννοιών στα παρακάτω κεφάλαια είναι αυτός του εσωτερικού γινομένου (**inner product**). Για ένα n-διάνυσμα $x=(x_{1,..........,}x_n)$ και ένα υποσύνολο I(1,……….,n) επιτρέπεται $x_1=(x_i$: iEI). Για τα σύνολα X΄ και X΄΄ ,X΄/X΄΄ υποδηλώνει το σύνολο των στοιχείων του X΄ που δεν περιλαμβάνονται στο σύνολο του X΄΄. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων πραγματικών αριθμών $x=(x_{1,............,}x_n)$ *και* $t=(t_{1,............,}t_n)$ είναι ***$t*x=\Sigma_{i=1}$ t_i*x_i*** *(ο ορισμός* αγνοεί τη συνήθη σύμβαση όπου το πρώτο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα σειρά και το δεύτερο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα στήλη). Εκτός από τον πραγματικό αριθμό 0, επιτρέπεται το σύμβολο 0 να υποδηλώνει ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία να είναι μηδέν και η διάσταση αυτού του μηδενικού διανύσματος να προκύπτει από το πλαίσιο.

2.2 ΜΕΡΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΤΑ

Η συγκεκριμένη ενότητα εισάγει και αναπτύσσει έννοιες και ιδιότητες που αφορούν **σύνολα** και **δικτυωτά**. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει ορισμούς, συμβολισμούς και βασικές ιδιότητες, ενώ το δεύτερο μέρος αναλύει τα χαρακτηριστικά της δομής των πλεγμάτων.

Ορισμοί, Συμβολισμοί και Βασικές Ιδιότητες

Σε μία **διμερή σχέση** (**binary relation**) **≤** σε ένα σύνολο Χ για όλα τα x' και x'' του Χ είτε ισχύει ότι $x' \leq x''$ είτε είναι ψευδής η σχέση $x' \leq x''$.Εάν ισχύει ότι $x' \leq x''$ και $x' \neq x''$, τότε ισχύει ότι $x' < x''$.Μία διμερής σχέση ≤ σε ένα σύνολο Χ θεωρείται **ανακλαστική (reflexive)** όταν $x \leq x'$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο Χ. **Αντισυμμετρική (antisymmetric)** θεωρείται μία διμερής σχέση εάν $x' \leq x''$ και $x'' \leq x'$ από τα οποία συνεπάγεται ότι $x' = x''$ για όλα τα x' και x'' που ανήκουν στο Χ, ενώ **μεταβατική (transitive)** ορίζεται όταν ισχύει $x' \leq x''$ και $x'' \leq x'''$ από τα οποία συνεπάγεται ότι $x' \leq x'''$ για κάθε x', x'' και x''' του Χ.

Ένα **μερικώς διατεταγμένο σύνολο (partially ordered set)** είναι ένα σύνολο Χ στο οποίο υπάρχει μία δυαδική σχέση ≤ η οποία είναι αντανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική. Εάν το σύνολο Χ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με διμερή σχέση ≤, τότε το **διπλό (dual)** είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο αποτελούμενο από το ίδιο σύνολο Χ με μία διμερή σχέση ≤΄ όπου $x' \leq' x''$ για κάθε x' και x'' του Χ αν και μόνο αν $x'' \leq x'$. Εάν x' και x'' είναι στοιχεία ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου Χ, $x' < x''$, και δεν υπάρχει x''' στο Χ με την ισότητα $x' < x''' < x''$, τότε x'' περιλαμβάνει το x' στο Χ. Τα

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

δύο στοιχεία x΄ και x΄΄ ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου είναι **ταξινομημένα** είτε x΄ ≤ x΄΄ ή x΄΄≤ x΄, διαφορετικά x΄και x΄΄ είναι **μη ταξινομημένα στοιχεία**. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι μία **αλυσίδα (chain)** εφόσον δεν περιλαμβάνει ένα μη ταξινομημένο ζεύγος από στοιχεία.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το X αποτελεί ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και είναι υποσύνολο του X΄. Εάν ισχύει ότι το x΄ είναι στοιχείο του X και x≤x΄(x΄≤x) για κάθε x που ανήκει στο X΄, τότε το x΄ αποτελεί το **άνω φράγμα (upper bound)** για το X΄. Εάν το x΄ του X΄ είναι ένα άνω όριο για το X΄, τότε το x΄ αποτελεί το **μεγαλύτερο όριο** (**greatest)** στοιχείο του X΄. Εάν το x΄ ανήκει στο X΄ και δεν υπάρχει κανένα x΄΄ στο X΄ με την σχέση x΄ < x΄΄ (x΄΄ < x΄), τότε χ΄ αποτελεί ένα **μέγιστο (maximal)** στοιχείο του X΄. Ένα μεγαλύτερο όριο είναι ένα μέγιστο x΄ στοιχείο.

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο μπορεί να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα μεγαλύτερο στοιχείο , αλλά μπορεί να έχει και απεριόριστο αριθμό μέγιστων στοιχείων. Τα διακριτά μέγιστα στοιχεία είναι μη ταξινομημένα. Εάν το σύνολο των άνω ορίων του X΄ έχει ένα μικρότερο όριο, τότε το μικρότερο άνω όριο του X΄ είναι το **supremum** του X΄ και συμβολίζεται **$\sup_x$(X΄)** εάν για το σύνολο του X δεν είναι σαφές το περιεχόμενό του ή **sup(X΄)** εάν για το σύνολο του X είναι σαφές το περιεχόμενό του. Ένα τουλάχιστον πρέπει να είναι σαφές σχετικά με το σύνολο X που εκφράζεται sup(X΄) όπως παρατίθεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι $X=R^1$, Y = [0,1)∪(2) και X΄=[0,1). Επίσης $\sup_x$(X΄)=1 ≠2=$\sup_Y$(X΄).

Εάν τα δύο στοιχεία, x΄ και x΄΄ , ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου X έχουν ένα μικρότερο άνω όριο στο X , τότε αυτό είναι το **πλέγμα** τους **(join)** και συμβολίζεται ως

$x' \vee x''$ ($x' \wedge x''$).Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο το οποίο αποτελείται από το πλέγμα και από κάθε ζεύγος στοιχείων είναι ένα **δικτυωτό (lattice).**

Παραθέτουμε παρακάτω ορισμένα **δικτυωτά (lattices)**:

- Η πραγματική γραμμή R^1 είναι ένα δικτυωτό με $x' \vee x''= \max \{x',x''\}$ και $x' \wedge x''=\min \{x', x''\}$ για κάθε x' και x'' που ανήκουν στο R^1.
- Κάθε αλυσίδα (chain) είναι ένα δικτυωτό.
- Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ,R^n είναι ένα δικτυωτό με $x' \wedge x''=(x'_1 \vee x_1'',\ldots\ldots,x_n' \vee x_n'')$ και $x' \wedge x''=(x_1' \wedge x_1'',\ldots\ldots, x_n' \wedge x_n'')$ για κάθε x' και x'' που ανήκουν στο σύνολο R^n.
- Το άμεσο προϊόν ενός δικτυωτό είναι ένα δικτυωτό. Εάν X_α είναι ένα δικτυωτό για κάθε α που ανήκει στο A, $x'=(x_\alpha' : \alpha \in A)$ και $x''=(x_\alpha'' : \alpha \in A)$ τα οποία $x_\alpha \in_A X_\alpha$ και $x_\alpha' \vee x_\alpha''$ και $x_\alpha' \wedge x_\alpha''$ τα οποία αποτελούν το πλέγμα και ανήκουν στο X_α για κάθε $\alpha \in A$ τότε $x' \vee x''=(x_\alpha' \vee x_\alpha'' : \alpha \in A)$ και $x' \wedge x''=(x_\alpha' \wedge x_\alpha'' : \alpha \in A)$, όπου $x_\alpha \in A X_\alpha$.

Όταν Χ΄ είναι ένα υποσύνολο ενός δικτυωτό Χ και Χ΄, περιλαμβάνει το πλέγμα και κάθε ζεύγος από στοιχεία του Χ΄ , τότε το Χ΄ είναι ένα **υποδικτυωτό (sublattice)** του Χ. Για κάθε δικτυωτό Χ, το $\mathcal{L}(X)$ συμβολίζει το σύνολο των μη κενών υποδικτυωτών (sublattices) του Χ. Όταν το Χ΄ είναι ένα υποδικτυωτό ενός δικτυωτού Χ, τότε το Χ΄ αποτελεί από μόνο του ένα δικτυωτό και στο Χ΄ το πλέγμα και κάθε ζεύγος στοιχείων είναι τα ίδια με το πλέγμα και κάθε ζεύγος ίδιων στοιχείων του Χ. Έαν το Χ είναι ένα lattice, το Χ΄ είναι ένα υποδικτυωτό του Χ , και το Χ΄΄ είναι ένα υποδικτυωτό του Χ΄, τότε το Χ΄΄ είναι ένα υποδικτυωτό του Χ. Όταν Χ και Χ΄ είναι δικτυωτά με την σειρά εκτέλεσης και Χ΄ είναι υποσύνολο του Χ , Χ΄ δεν είναι απαραίτητα υποδικτυωτό του Χ.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Τα παρακάτω αποτελούν **υποδικτυωτά παίγνια** (**sublattices)**:

- Όταν X= R^1, τότε κάθε υποσύνολο του X είναι ένα υποδικτυωτό του X.
- Όταν X είναι μία αλυσίδα, τότε κάθε υποσύνολο του X είναι ένα υποδικτυωτό του X.
- Όταν ένα υποσύνολο X του R^n έχει ως δεδομένο ότι x΄= (x_1΄,........,x_n΄) του X και x΄΄= (x_1΄΄,........,x_n΄΄) του X συνεπάγεται ότι (max{ x_1΄, x_1΄΄},………,max{ x_n΄, x_n΄΄}) και (min{ x_1΄, x_1΄΄},………,min{ x_n΄, x_n΄΄}) τα οποία ανήκουν στο X ,τότε X είναι ένα υποδικτυωτό του $R^{n.}$
- Όταν X_α είναι ένα δικτυωτό και X_α΄ είναι ένα υποδικτυωτό του X_α για κάθε α που ανήκει στο A τότε $x_{\alpha \in A}X_\alpha$΄ είναι ένα υποδικτυωτό του $x_{\alpha \in A}X_\alpha$.
- Όταν X είναι ένα δικτυωτό, τότε **[x΄,∞]=** {x : x∈ X, x΄≤ x} είναι ένα υποδικτυωτό του X για κάθε x΄ που ανήκει στο X ,**(-∞,x΄] =** { x : x∈ X, x≤ x΄} είναι ένα υποδικτυωτό του X για κάθε x ΄ που ανήκει στο X και **[x΄,x΄΄]=**{x : x∈ X, x΄≤ x,x≤x΄΄} είναι ένα υποδικτυωτό του X για όλα τα x΄ και x΄΄ του X. Τα παραπάνω διαστήματα αποτελούν τα **κλειστά διαστήματα (closed intervals)** του X.

Μία συνάρτηση f(x) από ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο X σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο Y είναι **αύξουσα (φθίνουσα)** όταν x΄≤ x΄΄ στο X και αυτό συνεπάγεται ότι f(x΄)≤ f(x΄΄)f(x΄΄)≤ f(x΄) στο Y. Μία συνάρτηση είναι **μονότονη** είτε όταν είναι αύξουσα είτε όταν είναι φθίνουσα. Μία συνάρτηση f(x) από ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο X σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο Y είναι **γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα)** εφόσον x΄≤ x΄΄ στο X το οποίο συνεπάγεται f(x΄)≤ f(x΄΄)f(x΄΄)≤ f(x΄) στο Y. Είναι συνηθισμένο στη θεωρία των lattice να χρησιμοποιούνται οι όροι **ισότονη** (**isotone)** και **αντίτονη** (**antitone)** από τους όρους **αύξουσα** και **φθίνουσα**.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Ο ορισμός **αύξουσα συνάρτηση** χρησιμοποιείται συνήθως για να επισημάνει αυτό που ορίζουμε ως **γνησίως αύξουσα**, αλλά στις συνεχείς συναρτήσεις αρμόζει η ορολογία της αύξουσας συνάρτησης. Ο όρος **μη φθίνουσα** δεν χρησιμοποιείται αντί του όρου αύξουσα ή ισotone καθώς επισημαίνει κατά πόσο αδύναμη είναι μία έννοια όταν το εύρος μίας συνάρτησης δεν είναι αλυσίδα.

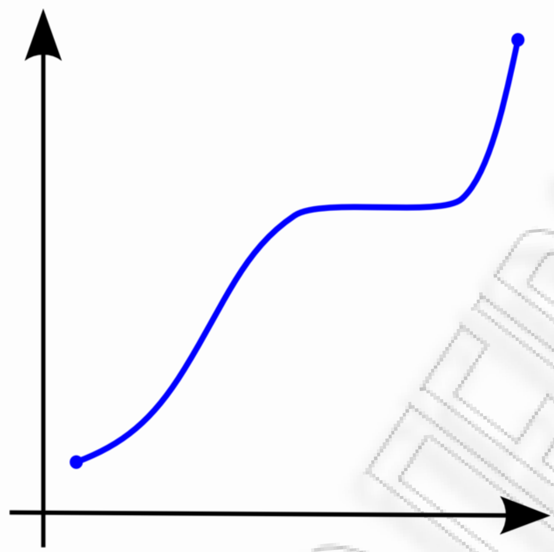
Όταν ορίζουμε f(x) μία συνάρτηση ενός συνόλου X από ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο Y τότε τα **επίπεδα συνόλων (level sets)** της συνάρτησης f(x) στο X είναι τα σύνολα $\{x{:}x\in X\ ,\ y \leq f(x)\}$ για κάθε y που ανήκει στο Y. Μία συνάρτηση f(x) από το σύνολο X ενός μερικού διατεταγμένος συνόλου Y είναι ένας **δείκτης γενικευμένων συναρτήσεων (generalized indicator function)** για ένα υποσύνολο X΄ από το X όταν:

f(x)={y΄΄ για κάθε x∈X΄

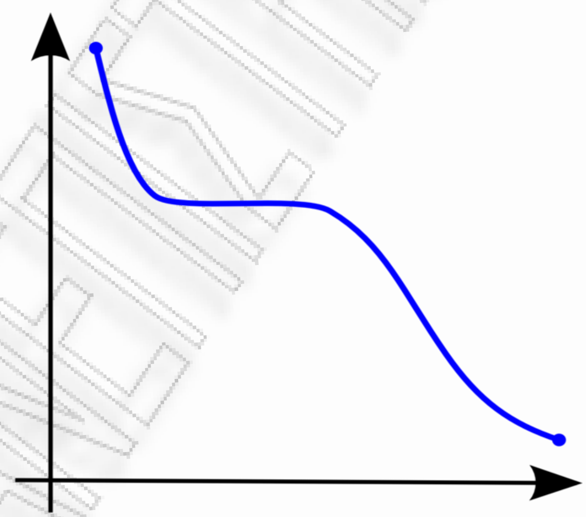
ή

f(x)={y΄ για κάθε x∈X΄ και x∉X΄

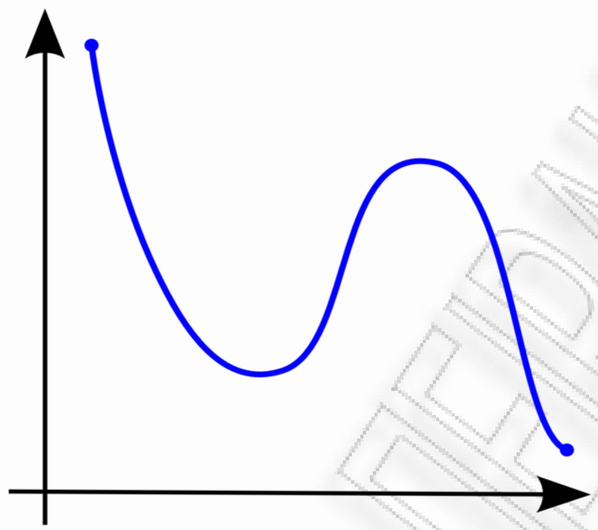
όπου $y' \leq y''$ του συνόλου Y ,αυτό ισχύει μόνο όταν επίπεδο συνόλου της συνάρτησης f(x) του X είναι X και X΄ και είναι πιθανό να αφορά ένα κενό σύνολο. Μία **γενικευμένη συνάρτηση** είναι ένας δείκτης γενικευμένης συνάρτησης με $Y=R^1$, y΄=0, και y΄΄= 1. Μία γενικευμένη συνάρτηση είναι ισοδύναμη με ένα δείκτη διανύσματος.



Σχήμα 1. Μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση. Είναι απολύτως αύξουσα στα αριστερά και δεξιά, ενώ μόνο η μη μείωση στη μέση.



Σχήμα 2. Μια μονότονη φθίνουσα συνάρτηση.



Σχήμα 3. Μια συνάρτηση που δεν είναι μονότονη.

Όταν το X αποτελεί ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, X΄ είναι ένα υποσύνολο του X , και X∩[x,∞) είναι ένα υποσύνολο του X΄ για κάθε x του X, τότε X΄ αποτελεί ένα **αυξανόμενο σύνολο (increasing set)**. Ισοδύναμα, ένα υποσύνολο X΄ ενός μερικού διατεταγμένου συνόλου X αποτελεί ένα αυξανόμενο σύνολο του X για κάθε x που ανήκει στο X΄. Τα αυξανόμενα σύνολα χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν ιδιότητες των παραμετροποιημένων κατανομών των συναρτήσεων.

2.3 ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΚΤΥΩΤΟ

Η ενότητα που ακολουθεί μας εισάγει στις **υπερμετρικές** (**supermodular)** συναρτήσεις και σε μερικές από τις πιο βασικές τους ιδιότητες. Θα ορίσουμε τα χαρακτηριστικά των υπερμετρικών παιγνίων με αύξηση των διαφορών τους και τη συμπληρωματικότητα τους.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Υποθέτουμε ότι το X και το T αποτελούν μερικώς διατεταγμένα σύνολα και f(x,t) είναι μία πραγματική συνάρτηση ενός υποσυνόλου S του $X \times T$. Για κάθε t που ανήκει στο σύνολο T, επιτρέπει στο S_t να δηλώσει το τμήμα του S στο t. Αν το f(x,t΄΄) - f(x,t΄) αυξάνεται, μειώνεται, γνησίως αυξάνεται ή γνησίως μειώνεται στο x όταν $S_{t''} \cap S_{t'}$ για κάθε t΄< t΄΄ του T, στη συνέχεια η συνάρτηση f(x,t) αντιστοίχως αυξάνει τις διαφορές, μειώνει τις διαφορές, γνησίως αυξάνει τις διαφορές ή γνησίως μειώνει τις διαφορές στο διάστημα (x,t) του S. Οι συνθήκες που διαμόρφωσαν τους παραπάνω ορισμούς δεν τους διακρίνουν από τις πρώτες και δεύτερες μεταβλητές καθώς $f(x',t'') - f(x',t') \leq f(x'',t'') - f(x'',t')$ αν και μόνο αν $f(x'',t') - f(x',t') \leq f(x'',t'') - f(x',t'')$ και ομοίως για μία αυστηρή ανισότητα.

Υποθέτουμε ότι X_α είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο για κάθε α του συνόλου A, X είναι ένα υποσύνολο του $x_{\alpha \in A} X_\alpha$, ένα στοιχείο του x του X εκφράζεται ως $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$ όπου x_α ανήκει στο X_α για κάθε α που ανήκει στο A, και f(x) είναι μία συνάρτηση πραγματικής αξίας στο X. Αν , για κάθε α΄ και α΄΄ του A και για κάθε x_α' και x_α'' του X_α για όλα τα α του A \ {α΄ , α΄΄} , η συνάρτηση f(x) έχει αύξουσες διαφορές , φθίνουσες διαφορές , γνησίως αύξουσες διαφορές ή γνησίως φθίνουσες διαφορές στο διάστημα (x_α' , x_α'') στο τμήμα του X όταν $\{ x_\alpha' : \alpha \in A \setminus \{\alpha' , \alpha''\} \}$, τότε η συνάρτηση f(x) έχει αντιστοίχως **αύξουσες διαφορές , φθίνουσες διαφορές , γνησίως αύξουσες διαφορές , ή γνησίως φθίνουσες διαφορές** στο X. Αν η συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη στο R^n , τότε η συνάρτηση f(x) έχει αύξουσες διαφορές στο R^n αν και μόνο αν $\partial f(x) / \partial x_{i'}$, αυξάνεται στο $x_{i''}$, για όλα τα διακριτά στοιχεία i΄ και i΄΄ και όλα τα x. Αν η συνάρτηση f(x) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R^n , τότε η συνάρτηση f(x)

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

έχει αύξουσες διαφορές στο R^n αν και μόνο αν $\partial 2\, f(x)/\partial x_{i'}\, \partial x_{i''} \geq 0$ για κάθε διακριτό στοιχείο i΄ και i΄΄ και για όλα τα x.

Αυξάνοντας τις διαφορές είναι μία πολλή γνωστή κατάσταση για μία καμπύλη χρησιμότητας για το σύστημα των συμπληρωματικών προϊόντων Samuelson . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι μία συνάρτηση χρησιμότητας (ή αρνητική συνάρτηση κόστους) για ένα σύστημα με n προϊόντα των οποίων τα επίπεδα είναι $x=(x_1,\ldots\ldots x_n)$. Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε ότι το u_i υποδηλώνει το i-οστό διάνυσμα ανά μονάδα του R^n , $f(x + eu^i) – f(x)$ είναι μία πρόσθετη χρησιμότητα για ένα πρόσθετο e>0 μονάδες του προιόντος i. Η συνάρτηση χρησιμότητας f(x) έχει αύξουσες διαφορές αν και μόνο αν η καθαρή πρόσθετη χρησιμότητα για κάθε πρόσθετο ποσό κάθε προιόντος i΄ πάντα αυξάνεται σε κάθε επίπεδο για κάθε άλλο προόν i΄΄, αυτό είναι η σκοπιμότητα του περισσότερα προιόντα i πάντα αυξάνονται με το ποσό και είναι διαθέσιμο για κάθε άλλο προιον i΄΄. Ως εκ τούτου, μία συλλογή από προιόντα (ή δραστηριότητες ή άλλες μεταβλητές αποφάσεις ή παράμετροι) αποτελούν **συμπληρωματικά (complements)** και κάθε ζεύγος χαρακτηρίζεται ως **συμπληρωματικό (complementary)** αν τα προϊόντα έχουν μία συνάρτηση χρησιμότητας (ή αρνητική συνάρτηση κόστους) με αύξουσες συναρτήσεις. Αν το S είναι ένα σύνολο δραστηριοτήτων (ή άλλες μεταβλητές αποφάσεων ή παραμέτρους) οι οποίες είναι δυνητικά διαθέσιμες , g(x) είναι μία συνάρτηση χρησιμότητας (ή μία αρνητική συνάρτηση κόστους) στο σύνολο $\wp(S)$ έχοντας ένα υποσύνολο X με διαθέσιμες δραστηριότητες , f(x) ορίζεται στο διάστημα όπου $x_s \in \mathcal{S}\{0,1\}$ τέτοιο ώστε f(1(X))=g(x) για κάθε υποσύνολο X του S (όπου 1(X) είναι ένα διάνυσμα δείκτης του X) και η συνάρτηση f(x) αυξάνει τις διαφορές στο διάστημα $x_s \in \mathcal{S}\{0,1\}$, τότε τα στοιχεία του συνόλου S είναι **συμπληρωματικά** και κάθε ζεύγος χαρακτηρίζεται ως **συμπληρωματικό.** Αυτό αποτελεί ένα σύνολο συμπληρωματικών δραστηριοτήτων όταν η πρόσθετη χρησιμότητα που προκύπτει από τη διαθεσιμότητα κάθε πρόσθετης δραστηριότητας αυξάνεται με το σύνολο άλλων διαθέσιμων δραστηριοτήτων(όπου τα σύνολα των δραστηριοτήτων ταξινομούνται κατά σειρά καταχώρισης). Ο παρών ορισμός δεν είναι παρά ένα αριθμός από διαφορετικές έννοιες οι οποίες μπορεί να χρησιμεύσουν στην έννοια της συμπληρωματικότητας (complementarity).

Ερμηνείες και ορισμοί για τα **υποκατάστατα (substitutes)** είναι παρόμοιοι με αυτούς που είχαν αποδοθεί για τα συμπληρωματικά αλλά όσον αφορά τις συναρτήσεις χρησιμότητας (ή την αρνητική συνάρτηση κόστους) οι οποίες μειώνουν τις διαφορές από το να τις αυξάνει τις διαφορές.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι μία πραγματική συνάρτηση σε ένα lattice X . Αν

$$f(x') + f(x'') \leq f(x' \vee x'') + f(x' \wedge x'')$$

για κάθε x΄ και x΄΄ του X , τότε η συνάρτηση f(x) είναι ένα **υπερμετρικό** (**supermodular)** στο X. Αν

$$f(x') + f(x'') \leq f(x' \vee x'') + f(x' \wedge x'')$$

για κάθε μη ορισμένο x΄ και x΄΄ του X , τότε η συνάρτηση f(x) είναι **αυστηρά υπερμετρικό** (**strictly supermodular)** στο X. Αν η συνάρτηση - f(x) αποτελεί (strictly) supermodular τότε είναι **αυστηρά υπομετρικό (strictly submodular).** Μία συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα submodular και supermodular είναι ένας **εκτιμητής (valuation)**.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Το **Θεώρημα 2.1** , από τον Topkis, παρουσιάζει ότι από τη supermodularity συνεπάγεται αύξηση των διαφορών για μία συνάρτηση σε ένα sublattice από άμεσο προιόν των lattices.

Θεώρημα 2.2 *Αν X_{α} είναι ένα δικτυωτό για κάθε α που ανήκει στο σύνολο A, είναι ένα υπομετρικό του $x_{\alpha} \in A X_{\alpha}$ και f(x) είναι ένα αυστηρά υπερμετρικό (strictly supermodular) στο X , τότε f(x) έχει (strictly) αύξουσες διαφορές στο X.*

Το **Θεώρημα 2.2** είναι συμπληρωματικό του Θεωρήματος 4.1, παρουσιάζοντας ότι πάνω στο προιόν των πεπερασμένων δικτυωτών με αύξουσες διαφορές μαζί με τη υπερμετρικότητα σε κάθε στοιχείο που συνεπάγει τη υπερμετρικότητα.

Θεώρημα 2.3 *Αν X_I είναι ένα δικτυωτό για i=1,…….,n, f(x) έχει (γνησίως) αύξουσες διαφορές στο $x_{i=1}{}^{n}X_{i}$, και f(x) είναι (γνησίως) υπερμετρικό στο $x_{i'}$ του X_I , για κάθε x_i στο X_I για όλα τα $i \neq i'$ και για κάθε i΄=1,………,n, τότε f(x) είναι (γνησίως) υπερμετρικό στο $x_{i=1}{}^{n}X_{i}$.*

Πόρισμα 2.1 *Αν X_i είναι μία αλυσίδα για i=1,…….,n και f(x) έχει (γνησίως) αύξουσες διαφορές στο $x_{i=1}{}^{n}X_{i}$, τότε f(x) είναι γνησίως υπερμετρικό στο $x_{i=1}{}^{n}X_{i}$.*

Παράδειγμα 2.1 Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα **υπερμετρικών** (**supermodular)** συναρτήσεων.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Α)Αν το Χ είναι μία αλυσίδα, τότε κάθε μη πραγματική συνάρτηση στο Χ είναι ένας εκτιμητής (είναι ταυτόχρονα supermodular και submodular) . Γι' αυτό κάθε μη πραγματική συνάρτηση ενός υποσυνόλου R^n είναι ένας εκτιμητής.

Β)Αν Β είναι ένα σύνολο, το σύνολο $\wp(S)$ έχει ληφθεί με το σύνολο να καταχωρείται $\subseteq$, X είναι ένα υπομετρικό του $\wp(S)$ και f(x) είναι μία πραγματική συνάρτηση στο Χ έτσι ώστε $f(X') + f(X'') \leq f(X' \cup X'') + f(X' \cap X'')$ για όλα τα Χ΄ και Χ΄΄ στο σύνολο Χ, τότε η συνάρτηση f(x) είναι υπερμετρικό στο Χ. Για ένα σύνολο S , μία υπερμετρική συνάρτηση σε ένα υπομετρικό του $\wp(S)$ είναι ισοδύναμη με μία υπερμετρική συνάρτηση σε ένα υπομετρικό του $x_S \in S\{0,1\}$. Ωστόσο, για ένα πεπερασμένο σύνολο S, μία υπερμετρική συνάρτηση σε ένα υπομετρικό του $\wp(S)$ είναι ισοδύναμη με μία υπερμετρική συνάρτηση σε ένα υπομετρικό του R^S.

Γ)Η συνάρτηση $f(x) = x_1 x_2$ είναι υπερμετρικό στο R^2.

Δ)Για κάθε x και t στο R^n,$x^*t=\sum_{i=1}^{n} xiti$ είναι ένα υπερμετρικό στο (x,t) στο R^{2n}.

Ε)Αν $\alpha_i \geq 0$ για i=1,……….,n, η **Cobb-Douglas** συνάρτηση $f(x)=x^{a1}x^{a2}\ldots\ldots.x^{an}$ είναι υπερμετρικό στο x για $\{x : x \in R^n, x \geq 0\}$.

Ζ)Η συνάρτηση χρησιμότητας για **τέλεια συμπληρωματικά** **,**$f(x)=\min\{a_i x_i : i=1,\ldots\ldots\ldots.,n\}$ όπου $\alpha_i \geq 0$ ($\alpha_i \leq 0$) i=1,…….,n, είναι υπερμετρικά στο R^n. Γενικότερα,

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

αν $f_i(z)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο R^1 για i=1,……,n, τότε f(x)=min {$f(x_i)$:i=1,……,n} είναι υπερμετρική στο R^n. Επίσης, αν $α_i$ είναι στο R^1 για κάθε i=1,……,n, τότε f(S) =min $_{i\in S}a_i$ είναι ένα υπερμετρικό στο S για υποσύνολα του S με {1,………,n}.

Η)Η συνάρτηση f(x,z)=- $\sum_{i=1}^{n} \mid xi - zi \mid$ είναι μία υπερμετρική στο (x,z) στο R^{2n}.

Θ)Η συνάρτηση f(x,z)=- $|x\text{-}z|^2$=- $\sum_{i=1}^{n}(xi - zi)2$ είναι μία υπερμετρική στο (x,z) στο R^{2n}.

Ι)Αν Ν είναι ένα σύνολο,Q είναι ένα σταθερό υποσύνολο το Ν, $f_Q(S)$=1 για κάθε υποσύνολο S του Ν με το Q να είναι ένα υποσύνολο του S , και $f_Q(S)$=0 για κάθε υποσύνολο του S του Ν με Q/S , τότε $f_Q(S)$ είναι ένα υπερμετρικό στο S από τη συλλογή $\wp$(S) από όλα τα υποσύνολα του Ν.

Η **συμπληρωματικότητα (complementarity)** και η **υπερμετρικότητα (supermodularity)** παρουσιάζουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά.

- Υψηλές οριακές αποδόσεις.

$$f(x \vee y) - f(x) \geq f(y) - f(x \wedge y)$$

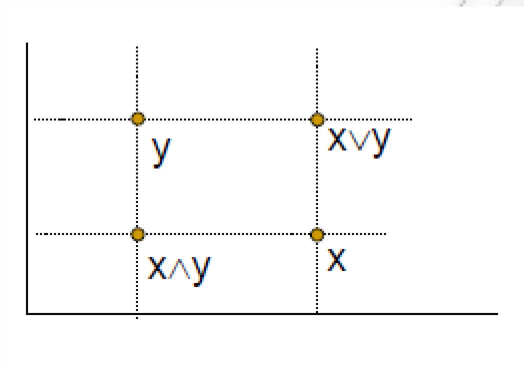
- Μη αρνητικές μικτές δεύτερες διαφορές.

$$[f(x \vee y) - f(x)] - [f(y) - f(x \wedge y)] \geq 0$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

- Για εύρυθμους στόχους ,οι μη αρνητικές μικτές διαφορές είναι:

$$(\partial^2 f)/(\partial x_i \partial x_j) \geq 0 \text{ για κάθε } x \neq j$$



Σχήμα 4. Συμπληρωματικότητα και Υπερμετρικότητα

Αν f(x) είναι μία συνάρτηση από ένα lattice X από ένα μερικώς ορισμένο σύνολο Y , η συνάρτηση f(x) είναι **οιονεί υπερμετρικά** (**quasisupermodular)** αν για όλα τα x΄ και x΄΄ στο X, f(x΄∧x΄΄)≤f(x΄) το οποίο συνεπάγεται f(x΄΄)≤ f(x΄∨ x΄΄) και f(x΄∧x΄΄)< f(x΄) συνεπάγεται ότι f(x΄΄)<f(x΄∨ x΄΄). Αν X,T, και Y είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα και f(x,t) είναι μία συνάρτηση από ένα υποσύνολο S όπου X*T στο Y , τότε f(x,t) ικανοποιεί την **ιδιότητα μονής διέλευσης (single crossing property)** στο (x,t) στο S αν, για όλα τα x΄ και x΄΄ στο X και t΄ και t΄΄ στο T με x΄< x΄΄, t΄< t΄΄ και { x΄, x΄΄}*{ t΄, t΄΄} είναι ένα υποσύνολο του S , f(x΄,t΄)≤ f(x΄΄,t΄΄) το οποίο συνεπάγεται f(x΄,t΄΄)≤ f(x΄,t΄΄) και f(x΄,t΄)< f(x΄΄,t΄) το οποίο συνεπάγεται f(x΄,t΄΄)< f(x΄΄,t΄΄). Αν τα X και T και Y είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα και f(x,t) είναι μία συνάρτηση από ένα υποσύνολο S του X*T μέσα στο Y , τότε η f(x,t) ικανοποιεί την **ιδιότητα αυστηρής μονής διέλευσης (strict single crossing property)** στο (x,t) του S αν , για όλα τα x΄ και x΄΄ στο X και t΄ και t΄΄ στο T με το να ισχύει η ανισότητα x΄< x΄΄, t΄< t΄΄ και { x΄, x΄΄}*{ t΄, t΄΄} αποτελεί ένα υποσύνολο του S , f(x΄,t΄)≤ f(x΄΄,t΄) το οποίο συνεπάγεται f(x΄,t΄΄)<f(x΄΄,t΄΄). Η ιδιότητα της μονής διέλευσης ανταποκρίνεται σε μία αριθμητική εκδοχή της συμπληρωματικότητας μεταξύ του x και του t με άποψη σε μία αριθμητική συνάρτηση χρησιμότητας f(x,t) , σε σχέση με το ότι αν το x΄΄ είναι αυστηρά αποδεκτό από το x΄ δίνοντας ότι t=t΄ όπου x΄< x΄΄ τότε το x΄΄ είναι αποδεκτό από το x΄ δεδομένου ότι t=t΄ όπου t<t΄΄, αυτό ισχύει αν είναι προτιμότερο να έχουμε περισσότερα από ένα στοιχεία δεδομένου ενός συγκεκριμένου επιπέδου για το δεύτερο στοιχείο, τότε θα εξακολουθεί να είναι αποδεκτό να έχουμε περισσότερα στοιχεία δεδομένου ενός μεγαλύτερου επιπέδου από το δεύτερο στοιχείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΠΑΙΓΝΙΑ ΚΑΙ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ (SUPERMODULAR GAMES)

Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στο ρόλο που διαδραματίζουν τα υπερμετρικά παίγνια και η συμπληρωματικότητά τους στα **στρατηγικά παίγνια (noncooperative games).**

Τα αποτελέσματα συμπεριλαμβάνουν πρωτίστως τα υπερμετρικά παίγνια, όπου η συνάρτηση κέρδους για κάθε παίκτη ξεχωριστά έχει ιδιότητες σχετικά με την υπερμετρικότητα και τις αύξουσες διαφορές αυτών.

3.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

Ένα **στρατηγικό παίγνιο (noncooperative game)**, είναι ένα τριπλό **(N,S,f_i: $i \in N$)** το οποίο συνιστά ένα σύνολο από παίκτες N, ένα σύνολο S που αποτελείται από κοινές μικτές στρατηγικές , και μία συλλογή από συναρτήσεις κέρδους $\{f_i : i\in N\}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση κέρδους $f_i(x)$ να ορίζεται στο σύνολο S για κάθε παίκτη Ι που ανήκει στο N. Εκτός εάν ορίζεται ρητώς διαφορετικά, το σύνολο των παικτών N θεωρείται ότι είναι πεπερασμένο και παίρνει τη μορφή $N=\{1,\ldots\ldots,n\}$ όπου $n=|N|$. (Στην περίπτωση όπου N

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

περιλαμβάνει απεριόριστο αριθμό παικτών, είναι υπό θεώρηση η μορφή του.) Η στρατηγική του παίκτη i είναι ένα m-διάνυσμα x= ($x_{1,.........,}x_n$). Ισχύει ότι m= $\sum_{i=1}^{n} mi$.

Μία **κοινή στρατηγική (joint strategy)** είναι ένα m-διάνυσμα x= ($x_{1,.........,}x_n$) αποτελούμενο από τις στρατηγικές x_i για κάθε ένα από τους n παίκτες. Για ένα γενικότερο σύνολο από παίκτες N, μία **κοινή στρατηγική (joint strategy)** παίρνει τη μορφή {x_i : i∈ N} όπου x_i αποτελεί μία στρατηγική ενός παίκτη i. Πιο συγκεκριμένα, η στρατηγική και η κοινή στρατηγική ορίζονται ως μία **καθαρή στρατηγική (pure strategy)** και μία **καθαρή κοινή στρατηγική (pure joint strategy)**.

Μία **μικτή στρατηγική (mixed strategy)** περιλαμβάνει την πιθανότητα κατανομής ενός συνόλου από όλες τις στρατηγικές για κάθε παίκτη, όπου κάθε παίκτης καθορίζει την πιθανότητα κατανομής και η τελική στρατηγική για τον παίκτη αυτό δημιουργείται τυχαία βάση της πιθανότητας της κατανομής.

Μία **κοινή μικτή στρατηγική (mixed joint strategy)** περιλαμβάνει την πιθανότητα κατανομής στο σύνολο όλων των κοινών στρατηγικών , όπου η τελική κοινή στρατηγική δημιουργείται τυχαία βάση της πιθανότητας κατανομής. Μόνο οι καθαρές στρατηγικές (pure strategies) και οι καθαρές κοινές στρατηγικές (pure joint strategies) και οι ορισμοί στρατηγική (strategy) και κοινή στρατηγική (joint strategy) ορίζονται ως **καθαρή στρατηγική (pure strategy)** και **καθαρή κοινή στρατηγική (pure joint strategy)**.

Το σύνολο των εφικτών κοινών στρατηγικών δίνεται στο υποσύνολο S του R^m (ή από $x_i \in_N R^{mi}$ για ένα γενικότερο σύνολο που αποτελείται από τους παίκτες N). Τα χαρακτηριστικά του συνόλου S σε κάθε παίγνιο μη συνεργασίας (N,S,f_i: i∈ N)

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

λαμβάνονται για να υποδηλώσουν το τμήμα εκείνο σε κάθε εφικτή κοινή στρατηγική x στα στοιχεία x_i για κάθε παίκτη i από το σύνολο N.

Η **συνάρτηση απόδοσης (payoff function)** για κάθε παίκτη i του συνόλου N είναι μία πραγματική συνάρτηση $f_i(x)$ ορίζεται στο σύνολο S έτσι ώστε για κάθε εφικτή κοινή στρατηγική x ο παίκτης i να αποδέχεται τη χρησιμότητα της συνάρτησης $f_i(x)$.

Για κάθε κοινή στρατηγική x και για κάθε παίκτη i, το $\mathbf{x_{-i}}$ δηλώνει ένα διάνυσμα των στρατηγικών με όλους τους παίκτες του N εκτός από τον παίκτη i. Για κάθε κοινή στρατηγική x, κάθε παίκτης i, και κάθε m_i-διάνυσμα y_i, το $\mathbf{(y_i,x_{-i})}$ δηλώνει την κοινή στρατηγική με διάνυσμα στρατηγικής x_i για τον παίκτη i που αντικαθίσταται από τον παίκτη y_i στη στρατηγική x και τα άλλα στοιχεία της στρατηγικής x παραμένουν αμετάβλητα. Τότε $x=(x_i,x_{-i})$ για κάθε κοινή στρατηγική x και για κάθε παίκτη i. Το σύνολο των εφικτών στρατηγικών για τον παίκτη i δίνεται από τις στρατηγικές x_{-i} για τους υπόλοιπους παίκτες και συμβολίζεται:

$$\mathbf{S_i(x_{-i})=\{y_i : (y_i, x_{-i}) \in S}$$

το οποίο $S_i(x_{-i})$ είναι ένα τμήμα του συνόλου S στο x_{-i} . Οι εφικτές στρατηγικές για κάθε παίκτη μπορεί να εξαρτάται στις στρατηγικές των άλλων παικτών. Για κάθε παίκτη i , επιτρέπεται:

$$\mathbf{S_{-i}=\{x_{-I} : S_i(x_{-i})\ \text{μη κενό}\}}$$

το οποίο αποτελεί μία συλλογή από όλα τα διανύσματα x_{-I} των στρατηγικών για τους παίκτες εκτός από τον παίκτη i καθώς υπάρχει μία στρατηγική y_i για τον παίκτη i με (y_i,x_{-i}) το οποίο είναι εφικτή κοινή στρατηγική, S_{-i} είναι η πρόβλεψη του S στους συντονιστές των στρατηγικών για όλους τους παίκτες εκτός του παίκτη i. Για κάθε παίκτη i,ισχύει:

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

$$\mathbf{S_i=\cup_{x_{-i}\in S_{-i}} S_i(x_{-i})}$$

το οποίο είναι το σύνολο των στρατηγικών για τον παίκτη i που είναι τα στοιχεία για κάθε εφικτή κοινή στρατηγική, S_i είναι η πρόβλεψη του S στους συντονιστές της στρατηγικής του παίκτη i. Σημειώνουμε ότι x_{-i} είναι στο R^{m-m}, (y_i, x_{-i}) είναι στο R^m , $S_i(x_{-i})$ είναι ένα υποσύνολο του R^m , S_{-i} είναι ένα υποσύνολο του R^{m-m}, και S_i αποτελεί ένα υποσύνολο του $R^m{}_i$. Για κάθε x του S, ορίζεται :

$$\mathbf{S(x) = (x_{i\in N} S_i(x_{-i}))\cap S}$$

Σημειώνουμε ότι $S= x_{i\in N}S_i$ αν και μόνο αν S(x) =S για κάθε x στο S.

Για κάθε διάνυσμα x_{-i} στο S_{-i} , η **συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης (best response correspondence)** για τον παίκτη i είναι το σύνολο:

$$\mathbf{Y_i(x_{-i})= argmax_{y_i\in S_i(x_{-i})} f_i(y_i,x_{-i})}$$

για όλες τις στρατηγικές οι οποίες είναι βέλτιστες για τον παίκτη i δίνοντας ότι x_{-i}. Για x_{-i} στο S_{-i} ,ένα στοιχείο του $Y_i(x_{-i})$ είναι η **βέλτιστη αντίδραση (best response)** δεδομένου του x_{-i} .Μία **βέλτιστη συνάρτηση αντίδρασης (best response function)** για τον παίκτη i είναι κάθε συνάρτηση στο S_{-i} το οποίο οριοθετεί κάθε x_{-i} στο $Y_i(x_{-i})$. Για κάθε εφικτή κοινή στρατηγική x στο S και κάθε y στο S(x), ορίζουμε:

$$\mathbf{g(y,x)=\Sigma_{i\in N} f_i(y_i,x_{-i})}$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Για κάθε εφικτή κοινή στρατηγική x στο S, η **βέλτιστη συνάρτηση αντίδρασης** είναι το σύνολο:

$$Y(x)=\mathrm{argmax}_{y\in S(x)}g(y,x)$$

για όλες τις εφικτές κοινές στρατηγικές τέτοιες ώστε η στρατηγική για κάθε παίκτη i είναι εφικτή δίνοντας x_{-i} και το σύνολο των εξοφλήσεων στους n παίκτες να μεγιστοποιείται δίνοντας για κάθε παίκτη i να λαμβάνει την εξόφληση το οποίο προέρχεται από την αποτελεσματικότητα της στρατηγικής του παίκτη i αντί του x_i στο x. Ένα στοιχείο του Y(x) για x του S αποτελεί μία **τέλεια εφικτή αντίδραση (best joint response)** δεδομένου του x. Μία **τέλεια εφικτή συνάρτηση αντίδρασης (best joint response function)** είναι οποιαδήποτε συνάρτηση στο S η οποία οριοθετεί κάθε x μέσα στο Y(x).

Αν $S=x_{i\in N}S_i$ για αυθαίρετο N (πεπερασμένο ή μη), τότε η **τέλεια εφικτή συνάρτηση αντίδρασης ((best joint response correspondence)** είναι ένα άμεσο προιόν των μεμονωμένων παικτών η τέλεια αντιστοιχία ανταπόκρισης και η **τέλεια εφικτή συνάρτηση αντίδρασης (best joint response function)** είναι οποιαδήποτε συνάρτηση στο S η οποία οριοθετεί κάθε εφικτή κοινή στρατηγική στο άμεσο προιόν με την τέλεια αντιστοιχία ανταπόκρισης των μεμονωμένων παικτών, η οποία είναι:

$$Y(x)= x_{i\in N}Y_i(x_{-i})= x_{i\in N}\mathrm{argmax}_{y_i\in S_i}f_i(y_i,x_{-i})$$

για κάθε x που ανήκει στο S. Αυτοί οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι με αυτούς όπου το N είναι πεπερασμένο και ισχύει $S(x) = x_{i\in N}S_i$. Τα στρατηγικά παίγνια (noncooperative games) επιτρέπουν στο σύνολο των εφικτών στρατηγικών για ορισμένους παίκτες να εξαρτώνται από τις στρατηγικές που επιλέγονται από άλλους παίκτες, ώστε το σύνολο S

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

των εφικτών κοινών στρατηγικών να μην οριοθετούνται να ανήκουν στο $x_{i\in N}S_i$. Η γενικότητα αυτής της μορφής του S μπορεί να επέλθει η απώλεια της γενικότητας σε μερικά σημεία, ιδιαιτέρως γιατί η κατανόηση του να έχεις την τέλεια εφικτή αντιστοιχία της ανταπόκρισης να ισούται με το άμεσο προιόν των μεμονωμένων παικτών με την τέλεια αντιστοιχία ανταπόκρισης όταν $S(x) = x_{i\in N}S_i$. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο με απεριόριστους παίκτες θα είναι πολύ δύσκολο να το διαχειριστεί καθώς η συνάρτηση g(y, x) χρησιμοποιείται στο να ορίζει την τέλεια εφικτή αντιστοιχία ανταπόκρισης Y(x) και τότε μπορεί η πραγματική ή είναι καλώς ορισμένη καθώς θα σχηματιστεί από ένα άπειρο άθροισμα. Η περίπτωση όπου το σύνολο των εφικτών κοινών στρατηγικών είναι ένα άμεσο προιόν των μεμονωμένων παικτών τα σύνολα των εφικτών στρατηγικών είναι συμβατά με το άπειρο πολλοί παίκτες καθώς η τέλεια κοινή αντιστοιχία ανταπόκρισης είναι το άμεσο προιόν των μεμονωμένων παικτών η τέλεια αντιστοιχία ανταπόκρισης. Επιπρόσθετα, η άθροιση στον ορισμό του g(y, x) αποτυγχάνει να διατηρήσει τις ιδιότητες της ημι-υπερμετρικότητας και τη μονή διασταύρωση της ιδιότητας από τη μεμονωμένη συνάρτηση εξόφλησης, παρόλα αυτά διαφυλάσσει την υπερμετρικότητα και αυξάνει τις διαφορές.

Η σημειογραφία x_{-1},$S_i(x_{-i})$, S_{-i} , S_i ,$Y_i(x_{-i})$, g(y,x) και Y(x) ορίζεται παρακάτω. Μία εφικτή κοινή στρατηγική αποτελεί ένα **σημείο ισορροπίας (equilibrium point)** αν ισχύει:

$$f_i(y_i,x_{-I}) \leq f_i(x) \text{ για κάθε } y_i \text{ στο σύνολο } S_i(x_{-i}) \text{ και για κάθε i που ανήκει στο N}$$

αυτό ισχύει, αν το x ανήκει στο S και x_i ανήκει στην τέλεια αντιστοιχία ανταπόκρισης $Y_i(x_{-i})$, για κάθε i. Δεδομένου ένα σημείο ισορροπίας , δεν υπάρχει εφικτή περιοχή για οποιοδήποτε παίκτη ώστε να βελτιώσει αυστηρά τη χρησιμότητα του αν οι στρατηγικές όλων των άλλων παικτών παραμένουν αμετάβλητες.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Ένα παίγνιο μη συνεργασίας (N,S,{f_i: i∈ N}) αποτελεί ένα **υπερμετρικό παίγνιο (supermodular game)** αν το σύνολο S των εφικτών μικτών στρατηγικών είναι ένα sublattice του R^m (ή του $x_{i\in N}R^{mi}$), η συνάρτηση κέρδους $f_i(y_i,x_{-i})$ είναι ένα υπερμετρικό παίγνιο του y_i στο S_i για κάθε x_{-i} στο S_{-I} και κάθε παίκτης i , και $f_i(y_i,x_{-i})$ έχει αύξουσες διαφορές στο (y_i,x_{-i}) στο S_i x S_{-I} για κάθε i. Αυτές οι υποθέσεις στη συνάρτηση κέρδους για κάθε παίκτη i συνεπάγουν ότι από κάθε παίκτη i το σημείο κάθε ζεύγους στοιχείων του παίκτη i η στρατηγική αποτελούν στοιχεία και κάθε στοιχείο του παίκτη i η στρατηγική είναι συμπληρωματική για κάθε στοιχείο της στρατηγικής καθενός παίκτη. Τα αποτελέσματα κάθε συνάρτησης κέρδους $f_i(y_i,x_{-i})$ για κάθε παίκτη i σε ένα υπερμετρικό παίγνιο ανταποκρίνονται στα αποτελέσματα της συνάρτησης.

Ένα παίγνιο μη συνεργασίας είναι ένα **οιονεί υπερμετρικό παίγνιο** (**quasisupermodular game)** αν το σύνολο S των εφικτών κοινών στρατηγικών είναι ένα sublattice του R^m (ή του $x_{i\in N}R^{mi}$) ,η συνάρτηση κέρδους $f_i(y_i,x_{-i})$ είναι οιονεί υπερμετρικό παίγνιο στο y_i του S_i για κάθε x_{-i} στο S_{-I} και κάθε παίκτης i, και $f_i(y_i,x_{-i})$ ικανοποιεί την ιδιότητα μονής διέλευσης στο (y_i,x_{-i}) στο S_i x S_{-I} για κάθε i.

Θεώρημα του Topkis. *Αν (N,S,{f_i: i∈ N}) είναι ένα υπερμετρικό παίγνιο (supermodular game), το σύνολο S των εφικτών κοινών στρατηγικών είναι μη κενό (nonempty) και μικρού μεγέθους , και η συνάρτηση κέρδους $f_i(y_i,x_{-i})$ είναι άνω ημισυνεχής στο y_i του $S_i(x_{-i})$ και κάθε i , τότε το σύνολο των σημείων ισορροπίας είναι ένα μη κενό ολοκληρωμένο lattice και το μέγιστο και το ελάχιστο σημείο που υφίσταται.*

Το παραπάνω θεώρημα του Topkis παρουσιάζει ένα σύνολο σημείων ισορροπίας για ένα υπερμετρικό παίγνιο (supermodular game) με κανονικές συνθήκες σε ένα μη κενό ολοκληρωμένο δικτυωτό και υφίσταται ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο σημείο. Ο Topkis δίνει ένα μέρος από το αποτέλεσμα για τον καθορισμό της ύπαρξης μερικών σημείων ισορροπίας και ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο σημείο ισορροπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Η ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των παιγνίων εξετάζει καταστάσεις στις οποίες υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ ενός μικρού αριθμού ατόμων ή επιχειρήσεων. Άρα σε οποιαδήποτε περίπτωση, αν ο αριθμός των ατόμων ή των επιχειρήσεων που συμμετέχουν είναι μικρός, εμείς χρησιμοποιούμε τα εργαλεία της θεωρίας των παιγνίων, προκειμένου να αναλύσουμε τη συγκεκριμένη κατάσταση, καθώς επίσης να βρούμε μία ισορροπία. Σε κάθε ένα από τα παίγνια πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη πώς συμπεριφέρονται οι άλλοι όταν παίρνουν τις αποφάσεις , αφού η ισορροπία εξαρτάται από τις αποφάσεις όλων μαζί.

Ένα στρατηγικό παιχνίδι είναι ένα μοντέλο όπου έχουμε Ν παίκτες, καθένας από τους οποίους διαλέγει μόνο μία στρατηγική, η οποία δεν αλλάζει. Σε ένα στρατηγικό παιχνίδι υπάρχουν διάφορες συμπεριφορές παικτών:

- Το παιχνίδι παίζεται μόνο μία φορά.
- Κάθε παίκτης “ξέρει” το παιχνίδι(κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις κινήσεις και τις αποδόσεις του παιχνιδιού).
- Οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Ένας ορθολογικός παίκτης είναι ένας παίκτης που παίζει εγωιστικά, θέλοντας να μεγιστοποιήσει το κέρδος του στο παιχνίδι, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζει πως και οι αντίπαλοι του είναι ορθολογιστές.
- Όλοι οι παίκτες διαλέγουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα χωρίς όμως να γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων παικτών.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Οι παίκτες πριν πάρουν κάποια απόφαση και διαλέξουν ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν, κοιτάνε ποια στρατηγική πραγματικά τους ωφελεί, με ποια θα έχουν το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος ότι και να κάνει ο αντίπαλος τους. Σε αυτό το σημείο η επιλογή γίνεται με βάση την κυριαρχία των στρατηγικών. Μια στρατηγική λέμε ότι είναι **κυρίαρχη (dominant)** , εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών έχει το μεγαλύτερο όφελος σε σχέση με τις υπόλοιπες. Είναι πάντα καλύτερη ότι και να κάνει ο άλλος παίκτης αφού έχει το μεγαλύτερο κέρδος σε σχέση με τις άλλες εναλλακτικές επιλογές του. Αντιθέτως, μια στρατηγική χαρακτηρίζεται ως **κυριαρχούμενη (dominated)** όταν υπάρχει κάποια άλλη στρατηγική που είναι πάντα καλύτερη, οτιδήποτε και να κάνει ο άλλος παίκτης. Αν κάποιος παίκτης έχει κυρίαρχη στρατηγική την ακολουθεί και τότε το παιχνίδι έχει λύση κυρίαρχης στρατηγικής. Όμως είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχουν πάντα κυρίαρχες στρατηγικές, αλλά να υπάρχουν ασθενείς κυριαρχίες. Μια στρατηγική **κυριαρχεί ασθενώς (weakly dominates)** εάν για κάθε μία από τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη έχει τουλάχιστον ίση απολαβή για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των υπολοίπων παικτών και καλύτερη απολαβή για τουλάχιστον έναν συνδυασμό στρατηγικών των άλλων παικτών. Όλες οι άλλες εναλλακτικές στρατηγικές ονομάζονται **ασθενώς κυριαρχούμενες (weakly dominated strategy)**.

Ο συνδυασμός των στρατηγικών από κάθε παίκτη μας δίνει την έννοια της **ισορροπίας (equilibrium**). Η ισορροπία στο παίγνιο δηλαδή, προέρχεται από τις καλύτερες στρατηγικές μία για κάθε παίκτη στο παιχνίδι. Για να βρούμε αυτήν την ισορροπία εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη τότε επιλέγεται. Σε περίπτωση όμως που δεν υπάρχει, ο περιορισμός των κυριαρχούμενων στρατηγικών “dominated” μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων κυριαρχούμενων στρατηγικών, οι οποίες με τη σειρά τους θα απαλειφθούν κι αυτές. Ξεκινώντας το παιχνίδι διαγράφονται μία μία οι ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές από τις επιλογές του παίκτη και αυτό συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί μόνο μία στρατηγική για κάθε παίκτη. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών “Iterated Elimination of Dominated Strategies, IEDS”.** Η διαδικασία αυτή είναι απολύτως, λογική αφού και οι παίκτες είναι λογικοί και γνωρίζουν πως και οι αντίπαλοι τους είναι λογικοί γεγονός που δείχνει ότι κανένας από αυτούς δεν θα επιλέξει μια στρατηγική η οποία είναι ασθενώς κυριαρχούμενη. Αν απαλείψουμε μόνο κυριαρχούμενες στρατηγικές, η σειρά της απαλοιφής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Ο κίνδυνος υπάρχει μόνο αν απαλείψουμε με λάθος σειρά ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, οδηγώντας μας σε λάθος αποτέλεσμα. Σωστή σειρά θεωρείται η ταυτόχρονη απαλοιφή για όλους τους παίκτες σε κάθε γύρο. Η σημαντικότερη έννοια ισορροπίας στη θεωρία παιγνίων είναι η **ισορροπία Nash** που θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

4.1 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Τα παίγνια μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες με βάση διάφορα είδη κριτηρίων. Εδώ θα προσπαθήσουμε να τα χωρίσουμε σε κάποιες κατηγορίες. Έτσι λοιπόν έχουμε τους εξής διαχωρισμούς:

- **Σύμφωνα με τον αριθμό των παικτών που παίρνουν μέρος**. Αν υπάρχουν δύο παίκτες τότε ονομάζονται **"παίγνια δύο παικτών"**, ενώ αν οι παίκτες είναι περισσότεροι(έστω n), τότε έχουμε **"παίγνια n παικτών"**. Υπάρχει φυσικά και η περίπτωση που υπάρχει μόνο ένας παίκτης έχοντας σαν αντίπαλο του "τη φύση". Τα παίγνια αυτά βέβαια θεωρούνται πως ανήκουν στην πρώτη κατηγορία των παιγνίων με δύο παίκτες.
- **Σύμφωνα με τη δυνατότητα συνεργασίας**. Οι παίκτες (δύο ή περισσότεροι) πριν παίξουν το παίγνιο έχουν τη δυνατότητα να συνεργαστούν και να κάνουν συμφωνίες μεταξύ τους για τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν. Αυτά ονομάζονται **συνεργατικά παίγνια (cooperative games)** σε αντίθεση με τα παίγνια όπου ο παίκτης παίρνει τις αποφάσεις χωρίς να συνεννοηθεί με τους άλλους, τα οποία ονομάζονται **στρατηγικά παίγνια (non cooperative games)**.

  Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά των αποδοχών τους. Όταν το κέρδος ενός παίκτη είναι ίσο με την απώλεια του αντιπάλου του, το παίγνιο ονομάζεται

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

“παίγνιο μηδενικού αθροίσματος”(zero-sum games). Σε αυτά τα παίγνια το άθροισμα των αμοιβών είναι ίσο με μηδέν με αποτέλεσμα η συνεργασία για τους παίκτες να είναι ανέφικτη. Αντίστοιχα υπάρχουν **“παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος”(non zero-sum games)** στα οποία το άθροισμα των αμοιβών είναι διάφορο του μηδενός. Το κέρδος κάποιου δεν σημαίνει απαραίτητα τη ζημιά κάποιου ανταγωνιστή, και οι δύο μπορεί να κερδίσουν ή και να χάσουν αντίστοιχα.

- **Σύμφωνα με τη σειρά που παίρνονται οι αποφάσεις.** Αν οι αντίπαλοι κινηθούν ταυτόχρονα επιλέγοντας μια στρατηγική στην αρχή του παιχνιδιού, χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι θα πράξει ο άλλος, τότε μιλάμε για **“στατικό παίγνιο”** ή **“στρατηγικό παίγνιο”** ή **“παίγνιο σε κανονική μορφή”.** Στην αντίθεση περίπτωση έχουμε τα **“δυναμικά παίγνια”** ή **“παίγνια σε εκτεταμένη μορφή”** όπου οι παίκτες έχουν κάποια γνώση για τις προηγούμενες ενέργειες και έτσι η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις έχει σημασία. Στα παίγνια αυτά η αναπαράσταση γίνεται με τη βοήθεια δέντρου.
- **Σύμφωνα με τον αριθμό των στρατηγικών**. Τα παίγνια σε αυτήν την κατηγορία χωρίζονται σε **“πεπερασμένα”** και σε **“μη πεπερασμένα”.** Τα πεπερασμένα παίγνια τελειώνουν σε ένα μετρήσιμο αριθμό κινήσεων, σε αντίθεση με τα άλλα τα οποία διαρκούν για άπειρες κινήσεις και ο νικητής γίνεται γνωστός αφού όλες αυτές οι κινήσεις τελειώσουν.
- **Σύμφωνα με την πληροφόρηση που παρέχουν**. Λέμε ότι έχουμε **“παίγνια πλήρους πληροφόρησης”** όταν οι παίκτες είναι πλήρως ενημερωμένοι για τις κινήσεις των αντιπάλων. Έτσι μόνο τα δυναμικά παίγνια μπορεί να είναι παίγνια πλήρους πληροφόρησης, μιας και στα στατικά οι παίκτες δεν είναι ενημερωμένοι. Όταν οι παίκτες είναι μερικώς ενημερωμένοι λέμε ότι έχουμε **“παίγνια ατελούς πληροφόρησης”.**

4.2 Η ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ NASH

Στους βασικούς θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων ανήκει ο John Nash ο οποίος εισήγαγε στα παίγνια την ιδέα της ισορροπίας η οποία χρησιμοποιείται πλέον ευρέως σε όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης.

Το θεώρημα που διατύπωσε ο Nash και έγινε γνωστό σε όλο τον κόσμο αναφέρει πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις πιο συμφέρουσες για αυτούς ενέργειες, γνωρίζοντας και τις επιλογές των αντιπάλων τους. Οι παίκτες σκέφτονται τι μπορεί να διαλέξει ο αντίπαλος τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά των άλλων και επιλέγουν την στρατηγική τους σύμφωνα με αυτό. Δηλαδή η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την καλύτερη αντίδραση (απόκριση) στην στρατηγική του άλλου παίκτη. Αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία Nash. Ο παίκτης επιλέγει εκείνη από τις δικές του στρατηγικές, η οποία είναι η καλύτερη απάντηση στην στρατηγική που νομίζει ότι θα επιλέξει ο άλλος παίκτης. Επομένως κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να φύγει μονομερώς από αυτήν την ισορροπία που έχει δημιουργηθεί. Οι παίκτες καταλαβαίνουν πως βρίσκονται σε ισορροπία αν μια αλλαγή στις στρατηγικές από οποιονδήποτε από αυτούς, οδηγήσει σε χαμηλότερο κέρδος από αυτό που θα είχαν αν παρέμεναν στη σωστή στρατηγική.

Δεδομένου των επιλογών των αντιπάλων, ο παίκτης δεν έχει να κερδίσει κάποιο μεγαλύτερο όφελος και για αυτό δεν αλλάζει στρατηγική. Όπως είναι φανερό η θεωρία για την ισορροπία Nash, έχει δύο συνιστώσες: πρώτα κάθε παίκτης κάνει την επιλογή του βασιζόμενος στην ορθολογική απόφαση που προέρχεται από τις πεποιθήσεις του για το τι θα πράξει ο αντίπαλος και δεύτερον κάθε πεποίθηση του παίκτη για την επιλογή του αντιπάλου του είναι σωστή. Για να κατανοήσουμε πλήρως την έννοια της ισορροπίας Nash, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το πιο πάνω παίγνιο το οποίο παραθέτουμε πάλι για ευκολία.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Πίνακας 1.Παίγνιο κυριαρχίας κινδύνου "Risk Dominance"

	B1	**B2**
A1	5,5	-100,4
A2	0,1	0,0

Ξεκινώντας με τον Α παίκτη βρίσκουμε ποια στρατηγική θα επιλέξει σε συγκεκριμένη στρατηγική του αντιπάλου. Έστω ότι ο Α πιστεύει ότι ο Β θα επιλέξει την β1 στρατηγική. Τότε προφανώς θα επιλέξει εκείνη από τις δύο δικές του στρατηγικές που θα του δώσει το μεγαλύτερο όφελος. Η α1 θα του δώσει 5 μονάδες ωφέλειας, ενώ η α2 θα του δώσει 0 (όπως αναφέραμε και πιο πριν οι πρώτοι αριθμοί σε κάθε κελί αντιστοιχούν στον παίκτη γραμμής, δηλαδή στον Α). Άρα θα επιλέξει την α1 στρατηγική με κέρδος 5. Αυτό το νούμερο το κυκλώνουμε. Αν ο Α πιστεύει πως ο Β θα διαλέξει την β2 στρατηγική αυτός φυσικά θα προτιμήσει την α2 αφού το κέρδος του θα είναι μεγαλύτερο(-100<0), άσχετα αν πρόκειται για 0 μονάδες. ΄Υστερα από τις επιλογές του παίκτη Α, ο πίνακας παρουσιάζεται ως εξής:

Πίνακας 2.Πρώτο στάδιο του παιγνίου

	B1	**B2**
A1	5,5	-100,4
A2	0,1	0,0

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Ομοίως κάνουμε και για τον παίκτη Β. Αν αυτός νομίζει ότι ο Α θα επιλέξει την α1 στρατηγική, θα προτιμήσει την β1 στρατηγική που θα του δώσει κέρδος 5 μονάδες και όχι 4 μονάδες(οι δεύτεροι αριθμοί σε κάθε κελί είπαμε πως αναφέρονται στον παίκτη στήλης, δηλαδή στον Β). Αν ο Β νομίζει για τον Α πως θα ακολουθήσει την α2 στρατηγική, θα προτιμήσει και πάλι την β1 αφού θα έχει κέρδος 1 μονάδα αντί για 0 μονάδες. Αυτά τα νούμερα τα βάζουμε σε ένα μπλε τετράγωνο. Ύστερα και από τις επιλογές του Β παίκτη ο πίνακας έχει ως εξής:

Πίνακας 3.Δεύτερο στάδιο του παιγνίου

	B1	B2
A1	5,5	-100,4
A2	0,1	0,0

Η ισορροπία Nash υπάρχει όταν η καλύτερη απόκριση του παίκτη Α είναι ίδια με την καλύτερη απόκριση του παίκτη Β, όταν δηλαδή σε ένα κελί υπάρχουν οι επιλογές και των δύο παικτών. Αυτό είναι και το σημείο ισορροπίας. Στο παράδειγμα μας ισορροπία έχουμε στο κελί (α1, β1)=(5, 5). Υπάρχουν παιχνίδια που έχουν παραπάνω από μία ισορροπίες Nash, ενώ υπάρχουν και παιχνίδια χωρίς κανένα σημείο ισορροπίας Nash.

Έχουμε αναφέρει πως εκτός από τις καθαρές στρατηγικές έχουμε και τις μικτές. Είπαμε πως η επιλογή μικτής στρατηγικής ισοδυναμεί με το να επιλέξει ο παίκτης τυχαία μεταξύ συγκεκριμένων καθαρών στρατηγικών. Για παράδειγμα ,μπορούμε να πούμε πως ο παίκτης Α θα επιλέξει την α1 στρατηγική με πιθανότητα p ή την α2 με πιθανότητα p-1. Ο παίκτης δηλαδή που διαλέγει μικτή στρατηγική επιλέγει τις πιθανότητες καθεμιάς από τις καθαρές στρατηγικές που εμπεριέχονται στην συγκεκριμένη μικτή στρατηγική, αφήνοντας τα υπόλοιπα στην τύχη. Όσο και αν φαίνεται παράξενο υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή όπου οι παίκτες προτιμούν να χρησιμοποιήσουν μικτές στρατηγικές. Ο Nash κατάφερε επίσης να αποδείξει πως όλα τα πεπερασμένα παίγνια εμπεριέχουν τουλάχιστον ένα σύνολο μικτών στρατηγικών (μία ανά παίκτη) που συνιστά ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές(ΙΝΜΣ) Όταν υπάρχουν πολλές ισορροπίες Nash (σε καθαρές στρατηγικές), τη λύση δίνει η ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές. Ακόμη και αν δεν υπάρχει ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές, υπάρχει μία μοναδική ισορροπία σε μικτές στρατηγικές. Η ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές φαίνεται πιο ελκυστική πρόταση από την ισορροπία στις μικτές, αφού δεν χρειάζεται οι παίκτες να επιλέγουν στην τύχη.

Όμως από τη στιγμή που δεν υπάρχει ισορροπία σε κάθε παιχνίδι, η ισορροπία σε μικτές στρατηγικές αποκτάει μεγαλύτερη αξία αφού πλέον για κάθε παιχνίδι υπάρχει σίγουρα μία ισορροπία.

4.3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ

Το ολιγοπώλιο είναι μία μορφή της αγοράς στην οποία δραστηριοποιείται ένας μικρός αριθμός επιχειρήσεων, με κύριο χαρακτηριστικό την ισχυρή αλληλεξάρτηση μεταξύ των επιχειρήσεων. Ο κλάδος αυτός διακρίνεται στο **καθαρό ολιγοπώλιο (pure oligopoly)** και στο **διαφοροποιημένο ολιγοπώλιο (differentiated oligopoly).** Στον πλήρη ανταγωνισμό και στο μονοπώλιο δεν αντιμετωπίζονται προβλήματα μεταξύ των ανταγωνιστών-επιχειρήσεων. Στο ολιγοπώλιο, οι επιχειρήσεις κινούνται στην αγορά λαμβάνοντας στρατηγικές αποφάσεις.

Στην ολιγοπωλιακή αγορά, οι επιχειρήσεις έχουν ως πρωταρχικό σκοπό είτε τη μεγιστοποίηση των κερδών του κλάδου, είτε την αύξηση μεριδίου στην αγορά κάθε επιχείρηση ξεχωριστά. Οι επιχειρήσεις συμπεριφέρονται και αντιδρούν βάση των αποφάσεων που λαμβάνουν σε κάθε περίπτωση διαφορετικά.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Λόγω των διαφορετικών στρατηγικών αποφάσεων που λαμβάνουν οι επιχειρήσεις σε ένα ολιγοπωλιακό περιβάλλον, υπάρχουν διάφορα μοντέλα που βρίσκουμε σε αυτή την αγορά. Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλυθούν τα υποδείγματα του ολιγοπωλίου ,καθώς επίσης και η εφαρμογή των υπερμετρικών παιγνίων σε αυτά.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟΥ

Οι ολιγοπωλιακές επιχειρήσεις χαρακτηρίζονται από την ισχυρή αλληλεξάρτηση που έχουν μεταξύ τους και για αυτό το λόγο λαμβάνονται αποφάσεις από αυτές που αφορούν την εφαρμογή της βέλτιστης στρατηγικής. Η εφαρμογή της στρατηγικής έχει στόχο την πρόβλεψη των αντιδράσεων και των στρατηγικών που θα ακολουθήσουν οι υπόλοιπες.

Τα βασικότερα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν το ολιγοπώλιο:

- Το ολιγοπώλιο διακρίνεται για τον μικρό αριθμό των επιχειρήσεων που αποτελείται.

- Τα εμπόδια που αντιμετωπίζει μία επιχείρηση για να εισέλθει στο ολιγοπώλιο. Τα εμπόδια διακρίνονται σε φυσικά και νομικά. Τα φυσικά εμπόδια αφορούν ότι σχετίζεται με την υπόσταση της επιχείρησης, την οικονομία κλίμακας ,τη δυναμικότητα παραγωγής , την τεχνολογία κ.α. Τα νομικά εμπόδια αφορά την απαιτούμενη άδεια εκμεταλλεύσεως όταν είναι περιορισμένος ο αριθμός των επιχειρήσεων.
- Οι ολιγοπωλητές χαρακτηρίζονται από τον υψηλό βαθμό αλληλεξάρτησης μεταξύ τους. Στόχος των επιχειρήσεων είναι να προβλέπουν τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν οι ανταγωνιστικές επιχειρήσεις. Αυτός όμως ο στόχος χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα.
- Λόγω του μικρού αριθμού των επιχειρήσεων που χαρακτηρίζει το ολιγοπώλιο, επιδιώκουν να επέλθει συμφωνία μεταξύ τους.

4.4 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΟ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Ως ισορροπία σε μία επιχείρηση χαρακτηρίζουμε την κατάσταση εκείνη όπου ορίζουμε την τιμή και την ποσότητα παραγωγής και η επιχείρηση ανταποκρίνεται πλήρως στα χαρακτηριστικά των ανταγωνιστικών και μονοπωλιακών αγορών. Στο ολιγοπώλιο κάθε επιχείρηση ξεχωριστά δραστηριοποιείται βάση των κινήσεων των ανταγωνιστών της. Η ισορροπία Nash εφαρμόζεται στο ολιγοπώλιο και το δυοπώλιο.

Οι ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, συγκρίνονται μεταξύ τους για δύο μεταβλητές :

Α)η τιμή των προϊόντων της κάθε εταιρείας

Β)η ποσότητα παραγωγής από την επιχείρηση.

Η διαδικασία καθορισμού των δύο παραπάνω μεταβλητών καθορίζεται βάση των συνθηκών της αγοράς και των προβλέψεων για τις κινήσεις των ανταγωνιστικών επιχειρήσεων. Όταν μία επιχείρηση τιμολογεί πριν από μία άλλη, χαρακτηρίζεται ως ηγέτης τιμών (price leader) και αντιστοίχως η πρώτη στην παραγόμενη ποσότητα ονομάζεται ηγέτης ποσότητας(quantity leader). Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο να μην υπάρχει γνώση των κινήσεων των άλλων επιχειρήσεων, άρα υπάρχει η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονες κινήσεις.

Η παραπάνω κατάταξη δημιουργεί δύο διαφορετικούς τύπους στρατηγικών:

- **Ταυτόχρονος καθορισμός ποσότητας (Δυοπώλιο Cournot)**
- **Ταυτόχρονος καθορισμός τιμής (Bertrand Ολιγοπώλιο)**

Εκτός από την ανάλυση των δύο στρατηγικών, θα αναλυθεί στη συνέχεια και η εφαρμογή των υπερμετρικών παιγνίων υπό κανονικές συνθήκες στους δύο αυτούς τύπους αγορών.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

4.4.1ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (ΔΥΟΠΩΛΙΟ COURNOT)

Ο ταυτόχρονος καθορισμός ποιότητας σε δύο επιχειρήσεις αναφέρεται στην ταυτόχρονη προσπάθεια αυτών να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με την ποσότητα παραγωγής και τις προβλέψεις για την παραγόμενη ποσότητα από την άλλη επιχείρηση. Σύμφωνα με το υπόδειγμα Cournot , κάθε επιχείρηση κάνει πρόβλεψη σχετικά με την παραγόμενη ποσότητα από την ανταγωνίστρια επιχείρηση.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ COURNOT

Βάση του θεωρήματος Cournot, κάθε επιχείρηση δεδομένης της πρόβλεψης που έχει κάνει για την παραγόμενη ποσότητα της ανταγωνίστριας εταιρείας, επιλέγει στη συνέχεια την ποσότητα παραγωγής της, η οποία θα επιφέρει και τη μεγιστοποίηση των κερδών της. Οι επιχειρήσεις έχουν στόχο την ισορροπία στις προβλέψεις που κάνουν, την κατάσταση δηλαδή όπου οι εκτιμήσεις κάθε επιχείρησης για την παραγωγή της άλλης επιχείρησης που επιβεβαιώνονται.

Έστω επιχείρηση 1 η οποία προβλέπει ότι η επιχείρηση 2 θα παράγει y_2^e μονάδες παραγωγής, όπου e:αναμενόμενη παραγόμενη ποσότητα. Αν η επιχείρηση 1 παράγει y_1 μονάδες ποσότητας , τότε η αναμενόμενη ολική ποσότητα παραγωγής είναι $Y=y_1+y_2^e$. Η αναμενόμενη ποσότητας παραγωγής διαμορφώνει και την αντίστοιχη τιμή στην αγορά $p(Y)=p(y_1+y_2^e)$. Αυτό συνεπάγεται να προκύπτει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης των κερδών η οποία εμφανίζεται στην παρακάτω ισότητα:

$$\max \Pi_1=\max \{p(y_{1+}\, y_2^e)y_1-c(y_1)\}$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Για κάθε αναμενόμενη ποσότητα παραγωγής για την επιχείρηση 2 αντιστοιχεί και η βέλτιστη επιλογή ποσότητας y_1 για την επιχείρηση 1. Η συνάρτηση της σχέσης μεταξύ της αναμενόμενης ποσότητας παραγωγής της επιχείρησης 2 και της βέλτιστης επιλογής παραγόμενης ποσότητας της επιχείρησης 1 είναι η εξής:

$$\mathbf{y_1=f_1(y_2^e)}$$

Η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί τη συνάρτηση αντίδρασης, η οποία παραθέτει τη βέλτιστη επιλογή της μίας επιχείρησης βάση των προβλέψεων που έχει για την επιλογή της ανταγωνίστριας επιχείρησης. Η αντίστοιχη συνάρτηση για την επιχείρηση 2 που δίνει την βέλτιστη επιλογή ποσότητας της επιχείρησης 2 για τις προβλέψεις σχετικά με την παραγόμενη ποσότητα της επιχείρησης 1 είναι:

$$\mathbf{y_2=f_2(y_1^e)}$$

Κάθε επιχείρηση καθορίζει την ποσότητα παραγωγής βάση των εκτιμήσεων της για την παραγόμενη ποσότητα της ανταγωνίστριας επιχείρησης .

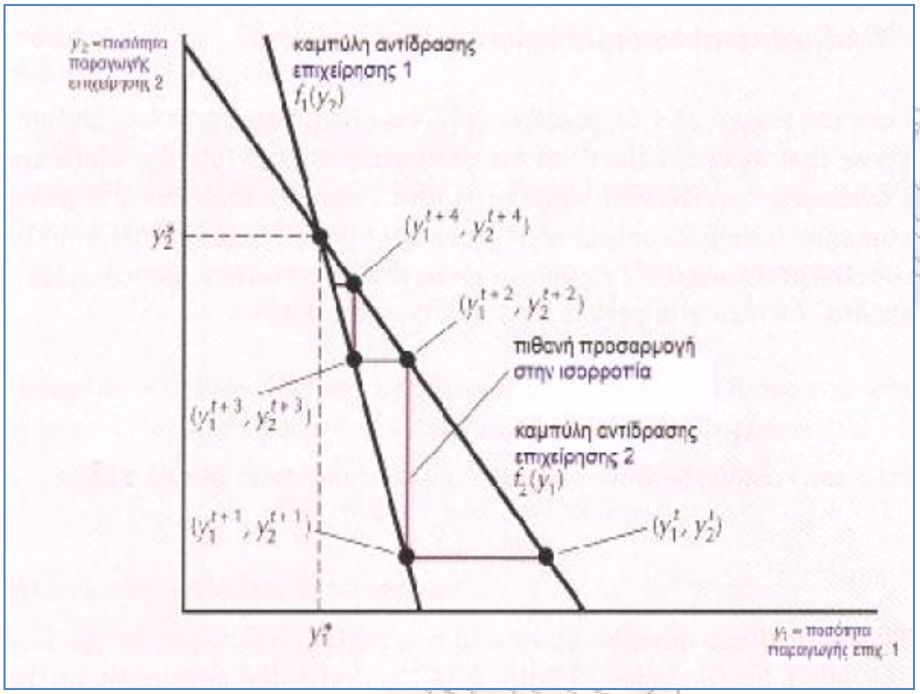
Έστω ο άριστος συνδυασμός ποσοτήτων (y_1*, y_2*) ώστε το άριστο επίπεδο ποσότητας παραγωγής για την επιχείρηση 1 , βάση της εκτίμησης της παραγόμενης ποσότητας της επιχείρησης 2, είναι το y_1* και το άριστο επίπεδο ποσότητας παραγωγής για την επιχείρηση 2 ,βάση της εκτίμησης για την επιχείρηση 1, είναι το y_2*. Οι επιλογές των παραγόμενων ποσοτήτων ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

$$y_1=f_1(y_2^e)$$

$$y_2=f_2(y_1^e)$$

Από τον συνδυασμό των επιπέδων παραγωγής επέρχεται η **ισορροπία Cournot.**

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ



Διάγραμμα 1.Η ισορροπία Nash στον ανταγωνισμό τιμών με διαφοροποίηση προϊόντος

Κατά την ισορροπία Cournot, κάθε επιχείρηση έχει ως πρωταρχικό στόχο την μεγιστοποίηση των κερδών της , βάση των εκτιμήσεων σχετικά με τον καθορισμό της ποσότητας της ανταγωνίστριας επιχείρησης και ότι οι προβλέψεις επιβεβαιώνονται κατά την ισορροπία Cournot. Κάθε επιχείρηση, επιλέγει την άριστη ποσότητα παραγωγής η οποία συμφωνεί με τις εκτιμήσεις της δεύτερης επιχείρησης. Στην ισορροπία Cournot, καμία επιχείρηση δεν έχει όφελος να μεταβάλλει την ποσότητα παραγωγής της από τη χρονική στιγμή που αποκαλύπτεται η παραγόμενη ποσότητα της άλλης επιχείρησης.

Η ισορροπία Cournot αποτελεί παράδειγμα της ισορροπίας Nash. Σύμφωνα με την ισορροπία Nash, κάθε επιχείρηση δραστηριοποιείται ώστε να φέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα για την ίδια ,δεδομένου των στοιχείων και πράξεων της ανταγωνίστριας επιχείρησης. Στην ισορροπία Cournot, κάθε δυοπωλητής παράγει την ποσότητα η οποία επιφέρει τη μεγιστοποίηση των κερδών της, πάντα σε συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας και καμία επιχείρηση δε μεταβάλλει την ποσότητα παραγωγής της.

4.4.2 ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ (ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ BERTRAND)

Μία επιπλέον προσέγγιση στο ολιγοπώλιο είναι αυτή κατά την οποία οι επιχειρήσεις ορίζουν τις τιμές στα προιόντα τους και στη συνέχεια η αγορά προσδιορίζει την ποσότητα που θα διοχετευτεί σε αυτή. Το υπόδειγμα που είναι κατάλληλο για την περιγραφή του είναι το υπόδειγμα Bertrand, το οποίο αναφέρεται στις επιχειρήσεις που ωθούν στην αγορά ίδιας φύσεως προϊόντα. Παρόλα αυτά, παρατηρείται ότι μεταξύ των επιχειρήσεων υπάρχει ανταγωνισμός και στην περίπτωση που προωθούν και διαφορετικού τύπου προϊόντα. Το συμπέρασμα είναι όμως ότι, και στις δύο περιπτώσεις, καταλήγουμε στην ισορροπία του Nash. Παρακάτω αναλύονται οι περιπτώσεις που προαναφέραμε ξεχωριστά.

ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ ΜΕ ΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΠΡΟΙΟΝΤΑ

Όπως προαναφέραμε, ανταγωνισμός μεταξύ των επιχειρήσεων μπορεί να προκύψει και όταν παράγουν ομοιογενή προϊόντα. Το υπόδειγμα Bertrand είναι αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε σε ολιγοπωλιακές επιχειρήσεις για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ισορροπία μεταξύ αυτών σε μία αγορά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε δεδομένο ότι η τιμή των προϊόντων της ανταγωνίστριας επιχείρησης είναι δεδομένη, σταθερή και υπάρχει συμφωνία μεταξύ των επιχειρήσεων σχετικά με τον καθορισμό των τιμών που θέτουν στα προϊόντα τους. Όπως και στο θεώρημα του Cournot, έτσι και στο υπόδειγμα του Bertrand, κάθε επιχείρηση πραγματοποιεί προβλέψεις σχετικά τώρα με την τιμή που ορίζει η ανταγωνίστρια επιχείρηση στα προϊόντα της. Μετά από αυτή την πρόβλεψη, καθορίζει και η ίδια τις τιμές αυτών. Βάση του υποδείγματος, ορίζουμε ένα

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

ζεύγος τιμών, με το οποίο πραγματοποιείται και πάλι μεγιστοποίηση των κερδών. Άρα οι επιχειρήσεις διακρίνονται για τη μεταξύ τους ανταγωνιστικότητα πλέον βάση των τιμών των προϊόντων που εισέρχονται στην αγορά και στη συνέχεια καθορίζουν την ποσότητα.

Για την εφαρμογή του συγκεκριμένου υποδείγματος, θεωρούμε δεδομένο ότι το προϊόν είναι ομοιογενές και στις δύο επιχειρήσεις. Η αγορά κινείται μέσω της διαπραγμάτευσης μεταξύ αγοραστή και πωλητή, όπου επέλθει συμφωνία με τον πωλητή του προϊόντος με τη χαμηλότερη τιμή. Διακρίνεται ανταγωνισμός μεταξύ των πωλητών ,λόγω της διαφορετικότητας των τιμών. Στο τέλος καταλήγουν να υπάρχουν οι πωλητές που έχουν μονοπώλιο στην αγορά, λόγω των πολύ χαμηλών τιμών τους και οι πωλητές που δεν διοχετεύουν καμία ποσότητα στην αγορά, λόγω των πολύ υψηλών τιμών τους. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο πωλητές και δεν διακρίνονται διαφορές στις τιμολογήσεις τους, ορίζουμε ότι ο κάθε πωλητής έχει το μισό μερίδιο της αγοράς.

Όταν επέρχεται μείωση της τιμής , η μία επιχείρηση έχει ως πρωταρχικό σκοπό να αυξήσει την ποσότητα που θα διοχετεύσει στην αγορά από την παραγόμενη ποσότητα και αύξηση των πωλήσεων της. Την ίδια πολιτική θα επιδιώξει να ακολουθήσει και η δεύτερη επιχείρηση. Επομένως , μέσω του ανταγωνισμού που προκύπτει, η κάθε επιχείρηση καθορίζει την τιμή της με οριακό κόστος ($p_1=p_2=MC$) και προκύπτει το συμπέρασμα της ισορροπίας Nash, όπου και η αγορά διανέμεται ισομερώς στις δύο επιχειρήσεις. Κατά την περίπτωση όπου η μία από τις δύο επιχειρήσεις θελήσει να πραγματοποιήσει αύξηση των τιμών της , τότε μειώνει αυτομάτως και το μερίδιο αγοράς της καθώς οι αγοραστές θα στραφούν στην ανταγωνίστρια επιχείρηση. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου θα μειώσει τις τιμές της, θα αυξήσει την ποσότητα πώλησης ,το οποίο συνεπάγεται όμως μείωση των κερδών της καθώς θα παραμείνει ίδιο το κόστος παραγωγής του προϊόντος.

Στο υπόδειγμα Bertrand, όταν επέρχεται η ισορροπία Nash, κάθε επιχείρηση ορίζει την τιμή του προϊόντος ίση με το οριακό κόστος και με αυτό τον τρόπο μηδενίζονται τα κέρδη της .Η ισορροπία κατά Nash επέρχεται όμως και όταν οι δύο επιχειρήσεις

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

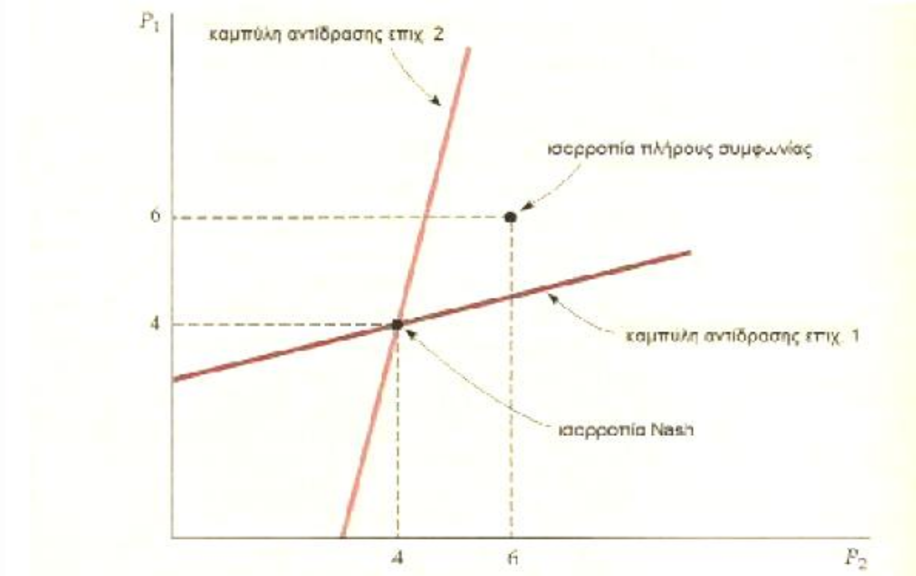
ορίζουν την ίδια τιμή, υψηλότερη από το οριακό κόστος ,ώστε να παρουσιάζουν κέρδος κάθε μία ξεχωριστά. Σε αυτή την περίπτωση, μειώνουν την τιμή του προιόντος και αυξάνουν τα κέρδη τους, τα οποία υπάρχει η πιθανότητα να διπλασιαστούν. Η πώληση που πραγματοποιείται με τιμή χαμηλότερη από αυτή που κυριαρχεί στον ανταγωνισμό μέχρι το σημείο όπου φθάνει να ισοδυναμεί με το οριακό κόστος, δημιουργεί το σημείο εκείνο που είναι σταθερό και πραγματικό και ορίζει την ισορροπία Nash. Το ακριβώς αντίθετο σημείο, δηλαδή όταν ξεπερνάει η τιμή το οριακό κόστος, δεν έχουμε ισορροπία.

Μέσω του υποδείγματος του Bertrand, παρόλο που διακρίνεται από την ισορροπία όταν έχουν κοινή τιμή οι επιχειρήσεις, δεν είναι πάντα εφικτό να καθορίσουμε την ποσότητα που προωθεί στην αγορά η καθεμία ξεχωριστά. Βάση του υποδείγματος, θεωρητικά οι δύο επιχειρήσεις έχουν ισόποσες πωλήσεις , χωρίς όμως να υποστηρίζεται πρακτικά.

ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΠΡΟΙΟΝΤΑ

Οι επιχειρήσεις σε μία αγορά, συνήθως διαφοροποιούν τα προϊόντα που προωθούν ώστε να υπάρχει έντονη ανταγωνιστικότητα μεταξύ τους. Η συνέπεια της παραπάνω διαφοροποίησης έχει ως αποτέλεσμα να μην καθορίζεται το μερίδιο αγοράς της κάθε επιχείρησης μόνο από την τιμή του προϊόντος ,αλλά και από τις διαφορές που διακρίνουν τα προϊόντα.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ



Διάγραμμα 2.Η ισορροπία Nash στον ανταγωνισμό τιμών με διαφοροποιημένα προϊόντα

Στον ανταγωνισμό με διαφοροποιημένα προϊόντα, η ποσότητα που κάθε επιχείρηση μπορεί να πωλήσει μειώνεται όταν γίνεται αύξηση των τιμών της , ενώ αυξάνεται όταν η ανταγωνίστρια επιχείρηση αυξάνει τις τιμές. Κατά την περίπτωση όπου οι δύο επιχειρήσεις καθορίσουν τις τιμές τους ταυτόχρονα και δεν πραγματοποιηθούν προβλέψεις , μπορούν να χρησιμοποιήσουν το υπόδειγμα του Cournot. Ο καθορισμός της τιμής, στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, γίνεται βάση της σταθερής τιμής που έχει ο ανταγωνιστής. Τα κέρδη της επιχείρησης 1 υπολογίζονται έσοδα μείον το σταθερό κόστος , δηλαδή p_1y_1 – FC(fixed cost), αντίστοιχα για την επιχείρηση 2 όπου ισχύει p_2y_2 – FC(fixed cost). Για να υπολογιστεί η τιμή p_1 και p_2 στις οποίες μεγιστοποιεί η κάθε επιχείρηση τα κέρδη της ,υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ τους. Όταν η επιχείρηση 1 αυξήσει κατά μικρό ποσοστό την τιμή της και παρουσιάζει μηδενικά κέρδη, τότε μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης 2. Όταν η επιχείρηση 2 διατηρήσει την τιμή της σταθερή, τότε μεγιστοποιεί η επιχείρηση 1 τα κέρδη της.

Η ισορροπία Nash επέρχεται στο σημείο όπου οι δύο καμπύλες των συναρτήσεων αντίδρασης τέμνονται. Στο σημείο αυτό, κάθε επιχείρηση διαπραγματεύεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, με την τιμή που έχει ορίσει η ίδια και ανταγωνιστής της ,χωρίς όμως να προτίθεται να πραγματοποιήσει την οποιαδήποτε αλλαγή στην τιμή της.

4.4.3 ΣΥΝΟΨΗ

Στο υπόδειγμα του καθορισμού ποσότητας (θεώρημα του Cournot), κάθε επιχείρηση επιλέγει ταυτόχρονα την παραγόμενη ποσότητα με στόχο να πραγματοποιήσουν μεγιστοποίηση των κερδών της , έχοντας ως δεδομένο τις εκτιμήσεις και τις προβλέψεις σχετικά με τις αντίστοιχες επιλογές της ανταγωνίστριας επιχείρησης. Μέσω της ισορροπίας Cournot, κάθε επιχείρηση επιθυμεί τη μεγιστοποίηση των κερδών , δεδομένων των ποσοτήτων παραγωγής της αντίπαλης επιχείρησης αλλά και επειδή δεν έχουν στόχο να μεταβάλλουν την παραγόμενη ποσότητα κάθε μία από αυτές. Κάθε επιχείρηση καταλαμβάνει ένα μικρό μερίδιο αγοράς, κάτι το οποίο συνεπάγεται ότι η τιμή του προιόντος πλησιάζει στο οριακό κόστος και επομένως ο κλάδος δεν θεωρείται ανταγωνιστικός.

Στο υπόδειγμα του Bertrand, του ταυτόχρονου καθορισμού τιμών, κάθε επιχείρηση καθορίζει την τιμή της ,εκτιμώντας πάντα τις αντίστοιχες κινήσεις της ανταγωνίστριας επιχείρησης . πραγματοποιείται ταυτόχρονη λήψη της απόφασης σχετικά με την τιμή του προιόντος και θεωρείται ως δεδομένη και σταθερή η τιμή του ανταγωνιστή. Η ισορροπία που πραγματοποιείται στο υπόδειγμα αυτό είναι η ισορροπία του ανταγωνισμού.

Αν και τα δύο πρότυπα έχουν παρόμοιες υποθέσεις και πραγματοποιούνται κάτω από παρεμφερή συνθήκες, συμπεραίνουμε ότι έχουν διαφορετικές επιπτώσεις. Από το υπόδειγμα του Bertrand, καταλήγουμε ότι το δυοπώλιο είναι αρκετό για να ωθήσει τις τιμές κάτω από το επίπεδο πρόσθετης δαπάνης και θα οδηγήσει τελικά σε ένα τέλειο ανταγωνισμό. Κατά την περίπτωση που είναι για τις επιχειρήσεις πιο εύκολο να τροποποιήσουν τις συνθήκες παραγωγής , τότε ιδανικό υπόδειγμα είναι του Bertrand, διαφορετικά όταν αντιμετωπίζονται δυσκολίες σε μια τέτοια αναπροσαρμογή, είναι πιο εφικτό και συνετό να γίνει εφαρμογή του θεωρήματος του Cournot.

4.5 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τρείς εφαρμογές και δύο θεωρήματα, τα οποία αναλύθηκαν θεωρητικά προηγουμένως, της οικονομικής θεωρίας των παιγνίων τα οποία αποδεικνύονται ότι αποτελούν υπερμετρικά παίγνια κάτω από φυσιολογικές συνθήκες .

Για να γίνει κατανοητή η παρακάτω ανάλυση, απαιτείται αρχικά να αναφέρουμε το θεώρημα του Topkis, σχετικά με τις αύξουσες διαφορές που εμφανίζονται στην υπερμετρικότητα.

Ο Topkis, παρακολουθώντας όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην παραμετροποιημένη οικογένεια βελτιστοποίησης των παραμέτρων, όπου A_S ανήκει στο A, με την πρόθεση που απορρέει σε επαρκείς όρους για το στόχο και ένα περιοριστικό σύνολο όπου αποδίδει βέλτιστες μονότονες λύσεις:

$$\mathbf{a^*(s)=argmax\ \{F(s,a) : a \in A_s\}}$$

Εξετάζουμε την παράμετρο και τα σύνολα, S και A, τα οποία είναι υποσύνολα του R, μία αντιστοιχία από το S στο A, το οποίο είναι το υποσύνολο των εφικτών αντιδράσεων όταν η παράμετρος είναι το s.

Μία συνάρτηση F: SXA→ R έχει αύξουσες διαφορές στο διάστημα (s,a) αν:

$$\mathbf{F(s',a')- F(s',a)\geq F(s\ ,a')- F(s\ ,a)} \text{ **όπου για κάθε** } \mathbf{a'>a\ ,s'>s,}$$

ή διαφορετικά , αν η διαφορά **F(. ,a΄)- F(. ,a)** είναι μία αύξουσα συνάρτηση. Η ιδιότητα αυτή δεν έχει διακρίσεις μεταξύ των δύο μεταβλητών ,όπου η παραπάνω συνάρτηση είναι ισοδύναμη με την :

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

F(s΄,a΄)- F(s, a΄)≥ F(s΄,a)- F(s ,a) όπου για κάθε a΄>a ,s΄>s.

Για τις συναρτήσεις που ανήκουν στο R^2 , οι αύξουσες διαφορές είναι ισοδύναμες με την υπερμετρικότητα , άρα οι δύο όροι μπορούν και εναλλάσσονται.

Έτσι προκύπτει ότι:

Αν F είναι μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, οι αύξουσες διαφορές είναι ισοδύναμες με το $\partial^2 F(s,a)/\partial a \partial s \geq 0$, *για όλα τα a και s.*

Απόδειξη *: οι αύξουσες διαφορές είναι ισοδύναμες με τη διαφορά* **F(. ,a΄)- F(. ,a),** *η οποία είναι μία αύξουσα συνάρτηση (όταν a΄>a), η οποία είναι ισοδύναμη με το* $\partial[F(s,a')-F(s,a)]/\partial s \geq 0$, *ή* $\partial^2 F(s,a')/\partial s \geq \partial F(s,a)/\partial s$, *το οποίο* $\partial F(s,a)/\partial s$ *αυξάνεται στο a ή* $\partial^2 F(s,a)/\partial a \partial s \geq 0$.

4.6 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στην οικονομία και τη θεωρία των παιγνίων, οι αποφάσεις που παίρνουν δύο ή περισσότεροι παίκτες ονομάζεται στρατηγική συμπληρωματικότητα όταν αυτές αλληλοσυμπληρώνονται και αποκαλούνται συμπληρωματικά υποκατάστατα, αν η μία απόφαση αντισταθμίζει την άλλη.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι παίκτες έχουν παρόμοιες επιλογές, είναι ατελώς ανταγωνιστικοί στην απόφαση που έχουν να πάρουν σχετικά με την παραγόμενη ποσότητα. Στη συνέχεια οι αποφάσεις που παίρνονται για την παραγωγή αφορούν τη στρατηγική συμπληρωματικότητα, καθώς όσο αυξάνεται η παραγωγή της μίας επιχείρησης αυξάνονται τα οριακά έσοδα των ανταγωνιστριών επιχειρήσεων , κάτι το οποίο δίνει κίνητρο στις άλλες επιχειρήσεις για μεγαλύτερη παραγωγή , και αντιστρόφως.

4.7 COORDINATION GAMES

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τρία διαφορετικά παίγνια τα οποία αναλύονται ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα για τον αποτελούν τελικά υπερμετρικά παίγνια ή όχι.

4.7.1THE BATTLE OF SEXES (Η ΜΑΧΗ ΤΩΝ ΦΥΛΛΩΝ)

Το παίγνιο **“battle of the sexes” (η μάχη των φύλων)** αποτελεί ένα από τα κλασσικά παιχνίδια στη θεωρία παιγνίων. Στην παραδοσιακή ανάλυση του παιχνιδιού , ένας άντρα και μια γυναίκα προσπαθούν να αποφασίσουν πως θα περάσουν το απόγευμα τους. Ο άντρας προτιμά να μείνουν σπίτι και να δούνε τον αγώνα που έχει στην τηλεόραση, ενώ η γυναίκα προτιμά να πάνε στην όπερα. Και οι δύο όμως θέλουν να κάνουν κάτι μαζί και όχι να μείνουν χώρια. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιλογές τους ως στρατηγικές, οπού οι γραμμές αντιστοιχούν στις επιλογές του άντρα και οι στήλες στις επιλογές της γυναίκας .

Πίνακας 4.Η μάχη των φύλων

0,0	**2,1**
1,2	**0,0**

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Η μάχη των φύλων παρουσιάζει μια κατάσταση κατά την οποία το ζευγάρι πρέπει να συνεργαστεί, αν και έχουν διαφορετικές προτιμήσεις, αφού σε καμία περίπτωση δεν θέλουν να μείνουν χώρια. Πρόκειται για συνεργατικό και όχι ανταγωνιστικό παίγνιο. Εδώ άλλους ενδιαφέρει ο αντίπαλος να μάθει τη στρατηγική που πρόκειται να εφαρμόσουμε, γιατί μπορεί να τη χρησιμοποιήσει για κοινό άλλους όφελος. Αν και το παιχνίδι ανήκει στην κατηγορία των παιχνιδιών που παίζονται ταυτόχρονα, δεν είναι αναγκαίο για άλλους παίκτες να δράσουν έτσι. Το μόνο που απαιτείται είναι ο καθένας να δράσει χωρίς γνώση για το πώς θα πράξει ο άλλους. Αυτό επιτυγχάνεται αν οι παίκτες πάρουν την απόφαση άλλους χωρίς προηγουμένως να έχουν μιλήσει. Είναι μη ρεαλιστικό να υποθέσουμε πως το ζευγάρι δεν θα το συζητήσει και δεν θα παιχτεί το ίδιο «έργο» άλλους φορές . Αν κάθε μέρα έχουν να πάρουν μια τέτοια απόφαση (επαναλαμβανόμενο παίγνιο) τότε σίγουρα ο άλλους θα μπορεί να μαντέψει άλλους κινήσεις του άλλου. Σημαντικό ρόλο σε αυτό το παιχνίδι έχει το ποιος θα παίξει πρώτος και θα

ανακοινώσει την απόφαση του στο ταίρι του. Αν για παράδειγμα η γυναίκα έχει αγοράσει από πριν τα εισιτήρια για την όπερα, είναι πολύ πιθανό ο άντρας να πεισθεί και να επιλέξει από την αρχή να πάνε στην όπερα παρόλο που θα προτιμούσε τον αγώνα. Σε πάρα πολλά παιχνίδια(όχι σε όλα) άλλους που κινείται πρώτος έχει και το μεγαλύτερο πλεονέκτημα.

Εύκολα φαίνεται πως δεν υπάρχει κάποια κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν από άλλους δύο παίκτες. Βρίσκουμε άλλους πως υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash στο συγκεκριμένο παίγνιο, η λύση (A1,B1)=(2,1) και η λύση (A2,B2)=(1,2). Αν και οι δύο επιλέξουν να δούνε αγώνα ο άντρας έχει όφελος 2 μονάδες και η γυναίκα 1 μονάδα, ενώ αν πάνε στην όπερα η γυναίκα έχει όφελος 2 μονάδες και ο άντρας 1.Σε αυτές άλλους δύο στρατηγικές κανένας δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει και να επιλέξει κάτι άλλο.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Το πιο σύνηθες μοντέλο του παιγνίου Battle of Sexes είναι ένα 2Χ2 παίγνιο, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι υπερμετρικό παίγνιο για την ακρίβεια, καθώς ισχύει :

$$\mathbf{F\ (s',\ a') - F\ (s',\ a) \geq F(s,\ a') - F(s,\ a)}$$

Από το οποίο προκύπτει 2-0>0-1 άρα 2+1>0+0=2>0, βάση του πίνακα που παρατίθεται παρακάτω.

Βάση του θεωρήματος του Topkis, μεγάλης τάξεως συντονισμένου τύπου παίγνια αποτελούν υπερμετρικά παίγνια (supermodular games).

4.7.2THE STAG HUNT (ΤΟ ΚΥΝΗΓΙ ΤΟΥ ΕΛΑΦΙΟΥ)

Το κάθε άτομο από μία ομάδα κυνηγών έχει δύο επιλογές : μπορεί να παραμείνει προσηλωμένος στο κυνήγι του ελαφιού ή μπορεί να πιάσει ένα λαγό. Αν όλοι οι κυνηγοί κυνηγήσουν το ελάφι, τότε θα το πιάσουν και θα το μοιραστούν εξίσου, αν οποιοσδήποτε κυνηγός αφιερώσει την ενέργεια του στο να πιάσει ένα λαγό, τότε το ελάφι θα ξεφύγει και ο λαγός θα ανήκει μόνο στον κυνηγό που αποσκίρτησε. Όλοι οι κυνηγοί προτιμούν μερίδιο από το ελάφι σε σχέση με τον λαγό.

Για τον κάθε παίκτη υψηλότερη διάταξη έχει το προφίλ ενεργειών όπου όλοι οι παίκτες επιλέγουν ελάφι, αμέσως μετά ακολουθεί οποιοδήποτε προφίλ στο οποίο επιλέγει λαγός και τέλος ακολουθεί οποιοδήποτε προφίλ στο οποίο επιλέγει ελάφι και άλλους ή περισσότεροι από άλλους παίκτες επιλέγουν λαγός.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν δύο παίκτες :

Πίνακας 5.Το κυνήγι του Ελαφιού

	Ελάφι	**Λαγός**
Ελάφι	**2,2**	**0,1**
Λαγός	**1,0**	**1,1**

Βάση του παραπάνω πίνακα, έχουμε ένα παίγνιο 2Χ2 το οποίο αποδεικνύουμε ότι αποτελεί ένα υπερμετρικό παίγνιο ως εξής :

$$F(s', a') - F(s', a) \leq F(s, a') - F(s, a),$$

Όπου αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία του πίνακα, προκύπτει ότι:

0-2<1-1 άρα 2>0 το οποίο ισχύει και αποδεικνύει το θεώρημα του Topkis.

4.7.3 ΠΑΙΓΝΙΟ ΓΕΡΑΚΙΟΥ-ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ (HAWK-DOVE)

Δύο παιδιά βρίσκουν ένα παγωτό. Καθένας τους έχει μία βασική επιλογή :είτε να αρπάξει ολόκληρο το παγωτό (στρατηγική γερακιού) είτε να μην το αρπάξει καθόλου (στρατηγική περιστεριού). Αν και οι δύο επιλέξουν την επιθετική συμπεριφορά (του γερακιού) , τότε θα έρθουν σε σύγκρουση και το παγωτό θα πέσει στο έδαφος με αποτέλεσμα να μην το εκμεταλλευτεί κανένας. Αν και οι δύο επιλέξουν την ήρεμη συμπεριφορά του περιστεριού, τότε θα μοιραστούν το παγωτό. Τέλος, αν ο ένας επιλέξει τη στρατηγική του γερακιού και ο άλλος του περιστεριού, τότε ο πρώτος παίρνει όλο το παγωτό και ο δεύτερος δεν παίρνει καθόλου και καταλήγει να έχει μηδενική ωφέλεια.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Τα παραπάνω αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα. Η απόδοση σε μονάδες ωφέλειας για την παίκτρια των σειρών , είναι ο πρώτος αριθμός και η απόδοση για τον παίκτη των στηλών, είναι ο δεύτερος .

Πίνακας 6.Γεράκι-Περιστέρι

	Γεράκι	**Περιστέρι**
Γεράκι	**-10,-10**	**90,0**
Περιστέρι	**0,90**	**50,50**

Είναι ολοφάνερο ότι και οι δύο παίκτες θα ωφεληθούν αν μπορέσουν να αποφύγουν την σύγκρουση (δηλαδή την ταυτόχρονη υιοθέτηση της επιθετικής συμπεριφοράς). Επομένως, προκύπτουν οφέλη από κάποιο είδος συνεργασίας ή τουλάχιστον ενός συντονισμού που τους απομακρύνει από τη σύγκρουση. Από την άλλη, το κίνητρο να δράσει κανείς επιθετικά είναι ισχυρό και αυτό ωθεί στην σύγκρουση.

Βάση του θεωρήματος του Topkis, για να αποδείξουμε ότι το παίγνιο είναι υπερμετρικό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα :

$$\mathbf{F\,(s', a') - F\,(s', a) \geq F(s, a') - F(s, a),}$$

όπου αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία του πίνακα, προκύπτει ότι 90-(-10)>50-0 και 100>50 άρα αποδεικνύεται εκ νέου ότι είναι ένα υπερμετρικό παίγνιο.

4.8 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΤΟ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ

4.8.1 ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ ΤΟΥ BERTRAND

Σε ένα διαγωνισμό τιμών με διαφορετικά προιόντα και γραμμικά κόστη , μία εταιρεία έχει τη συνάρτηση κέρδους i ,όταν η τιμή που χρεώνουν είναι p^i και της ανταγωνίστριας εταιρείας η προσφερόμενη τιμή είναι το διάνυσμα p^{-i} ,τότε έχουμε τη συνάρτηση:

$$\mathbf{F_i(p^i, p^{-i})=(p^i-c_i)D_i(p^i, p^{-i})}$$

Όπου το c_i, αποτελεί το μοναδιαίο κόστος και D_i είναι η συνάρτηση ζήτησης. Μπορούμε ξεκάθαρα να περιορίσουμε το διάστημα για την τιμή που θα εξετάσουμε στο $[c_i,\infty)$ για την επιχείρηση i , επειδή οι τιμές ανήκουν στο διάστημα $[0, c_i)$ τα οποία αποτελούν κυρίαρχες στρατηγικές. Επειδή οι μονότονες μετατροπές επιτρέπουν σε μία καλύτερη απάντηση αμετάβλητη και ισχύει ότι:

$$\mathbf{\log F_i(p^i, p^{-i})=\log (p^i-c_i)+\log D_i(p^i, p^{-i})}$$

ακολουθεί ότι το παιχνίδι είναι ένα **log-υπερμετρικό παίγνιο** αν το $\log D_i$ παρουσιάζει αύξουσες διαφορές στο διάστημα **(p^i, p^{-i})** , ή ισοδύναμα , χρησιμοποιώντας το μερικώς διασταυρούμενο τεστ αν, για όλα τα $j\neq i$, τότε:

$$\mathbf{D_i(p^i, p^j)[\partial^2 D_i(p^i, p^j)/ \partial p^i \partial p^j]-[\partial D_i(p^i, p^j)/ \partial p^i][\partial D_i(p^i, p^j)/ \partial p^j]\geq 0}$$

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Η τελευταία ιδιότητα παρουσιάζει μια διαισθητική και ακριβή ερμηνεία: Της επιχείρησης i η τιμή έχει ελαστικότητα ζήτησης η οποία αυξάνεται βάση των τιμών της ανταγωνίστριας επιχείρησης. Οι περισσότερες συναρτήσεις ζήτησης χρησιμοποιούνται στην βιομηχανική οικονομία και ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Επειδή ισχύει $\log(p^i-c_i)$ και παρουσιάζει αύξουσες διαφορές στο διάστημα (p^i,c_i), όπου το c αποτελεί ένα διάνυσμα μοναδιαίου κόστους, αν το $\log D_i$ έχει αύξουσες διαφορές , τότε το μέγιστο και το ελάχιστο σημείο ισορροπίας είναι μη αύξουσες συναρτήσεις του c ,οι οποίες αποτελούν τα υψηλότερα κόστη για κάθε υποσύνολο της επιχείρησης ,κάτι το οποίο συνεπάγεται όλων των επιχειρήσεων οι τιμές θα είναι υψηλότερες και πάντα αυτό θα μεταβιβάζεται στους καταναλωτές.

4.8.2 ΔΥΟΠΩΛΙΟ ΤΟΥ COURNOT

Σε ένα διαγωνισμό ομοιογενούς προϊόντος, αν η επιχείρηση i παράγει σε ένα επίπεδο τέτοιο ώστε το κόστος της να ορίζεται ως $C_i(q_i)$ και P είναι η αντίστροφη συνάρτηση της ζήτησης , τότε το κέρδος της επιχείρησης i είναι:

$$F_i(q_1, q_2)=q_1P(q_1 + q_2) - C_i(q_1)$$

Επειδή ισχύει P΄<0, τότε έχουμε :

$$\partial^2 F_i(q_1, q_2)/ \partial q_1 \partial q_2= P'(q_1 + q_2)+q_1 P''(q_1 + q_2)<0 \text{ για όλα τα } q_1 + q_2>0,$$

αν και μόνο αν ,

$$P'(z)+z P''(z)<0 \text{ για όλα τα } z>0,$$

τότε συνεπάγεται ότι το παίγνιο είναι ένα **submodular** αν στην τελευταία συνθήκη ισχύει αυτή η κατάσταση. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και σε n αριθμό επιχειρήσεων. Αν αξιοποιήσουμε σε πρωταρχικό ρόλο το θεώρημα του Cournot, ισχύει ότι για μία επιχείρηση το κέρδος της εξαρτάται αποκλειστικά στις εκροές της αλλά και στα έξοδα

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

των ανταγωνιστριών επιχειρήσεων. Κατά την περίπτωση όπου έχουμε δύο επιχειρήσεις (n=2), αν για την επιχείρηση 2 ισχύει $-q_2$ αντί για q_2, τότε υπό τη συνθήκη αυτή στη ζήτηση, έχουμε:

$$\partial^2 F_i(q_1, q_2)/ \partial q_1 \partial(-q_2)>0 \text{ όπου } i=1,2$$

έτσι ώστε το δυοπώλιο του Cournot να αποτελεί ένα **υπερμετρικό παίγνιο (supermodular game).** Το αντίστροφο αυτό τέχνασμα ισχύει για κάθε παιχνίδι με n=2 επιχειρήσεις σε ένα submodular παίγνιο , αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε τρεις και πάνω επιχειρήσεις ,γενικά όμως ένα submodular-n παικτών παίγνιο είναι ένα υπερμετρικό παίγνιο αν και μόνο αν n=2.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η θεωρία των παιγνίων είναι μία επιστήμη η οποία εξελίσσεται συνεχώς και με έντονους ρυθμούς. Αποτελεί ένα μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται στην καθημερινότητα των ανθρώπων, αλλά και πολύ περισσότερο στον κλάδο των επιχειρήσεων καθώς συμβάλλει στην ορθή λήψη των αποφάσεών τους για τη μεγιστοποίηση των κερδών τους.

Στις παραπάνω ενότητες αναλύσαμε τη συμπληρωματικότητα των στρατηγικών παιγνίων . Αρχικά, μελετήσαμε τη στρατηγική συμπεριφορά των επιχειρήσεων στην αγορά της οικονομίας, από όπου και προέκυψε ότι μέσω των στρατηγικών παιγνίων και των εφαρμογών τους οι επιχειρήσεις προσπαθούν να επιτύχουν το κλείσιμο συμφωνιών ή τη διευθέτηση συγκρούσεων.

Παρουσιάσαμε ορισμούς και γενικές έννοιες σχετικά με τη συμπληρωματικότητα των παιγνίων, τα υπερμετρικά και υπομετρικά παίγνια και αναπτύξαμε τις συναρτήσεις αυτών. Η ανάλυση των παραπάνω είχε ως στόχο την παρουσίαση ορισμένων δημοφιλών παιγνίων , τα οποία αποδείξαμε ότι αποτελούν υπερμετρικά παίγνια με αύξουσες διαφορές.

Παρατηρήθηκε ότι μέσω της συμπληρωματικότητας των στρατηγικών παιγνίων, μπορούμε να προβλέψουμε και να αναλύσουμε καταστάσεις αλλά και ταυτόχρονα να τις προσαρμόσουμε στο περιβάλλον το οποίο δραστηριοποιούμαστε, έχοντας ως βασικό στόχο την επίτευξη των βέλτιστων αποτελεσμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Amir Rabah, 1996, *Cournot oligopoly and the theory of supermodular games*. Games and Economic Behavior.

Amir Rabah, and Isabel Grilo. 2003, *On complementarity conditions in oligopoly* Bertrand. Economic Theory.

Barry J. Nalebuff and Adam M. Brandenburger. *Co-opetition*

Topkins, M. Donald.1998, *Submodularity and complementary*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Topkins, M. Donald.1978, *Minimizing a submodular function on a lattice*. Operations Research 26.

Osborne J. Martin, Ariel Rubinstein.1994, *A course in game theory*, MIT Cambridge.

Osborne J. Martin .2002, *An introduction to game theory,* Oxford University

Samuelson, Paul. 1974, Complementary. *Journal of Economics Literature*

Vives, Xavier. 1990, *Nash equilibrium with strategic complementarities .* Journal of Mathematical Economics

Fundenberg Drew, and Jean Tirole.1991, *Game Theory*, Cambridge

Tarski, Alfred,1955*. A lattice-theoretic fixed point theorem and its applications.* Pacific Journal of Mathematics

Βαρουφάκης Γιάνης, *Θεωρία Παιγνίων*, Gutenberg.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

http://ocw.mit.edu/terms.

www.gametheory.net

www.wikipedia.gr