



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ. ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η συσχέτιση του
πλεονάσματος πριν και μετά τη
χρεοκοπία

Αρθρογράφος:
Πέτρος Χ. ΓΑΛΑΝΑΚΗΣ

Επιβλέπων:
Δρ. Κωνσταντίνος
ΠΟΛΙΤΗΣ

Πειραιάς
Μάρτιος 2012



UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
MSc IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MSc THESIS

The correlation of the surplus prior to and at the ruin

Author:
Petros Ch. GALANAKIS

Supervisor:
Dr. Konstadinos
POLITIS

Piraeus
March 2012

σε κάποιον ροετ...

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Πρόλογος

Καλώς ή κακώς, η παρούσα εργασία έφτασε στο τέλος της. Ο χρόνος θα δείξει, αν είναι μια χρήσιμη μελέτη ή μια ακόμη εργασία που θα “σαπίζει” στα ράφια της βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, που υποβλήθη μόνο για την απόκτηση κάποιου Ακαδημαϊκού τίτλου.

Συνάμα, μαζί με αυτό το τέλος έφτασε και το τέλος ενός ταξιδιού προς αυτό που αποκάλεσε, πριν από περίπου 2500 χρόνια, ο Αριστοτέλης ως “ υπέρτατον αγαθόν ”, τη γνώση. Εν έτει 2011, σε μια κοινωνία η οποία αποστρέφεται προς αυτό το αγαθό, η απόκτηση κάποιου Ακαδημαϊκού τίτλου είναι μάλλον μια συνηθισμένη και χωρίς νόημα ουτοπία.

Ωστόσο η διαδικασία απόκτησης κάθε Ακαδημαϊκού τίτλου δεν παύει να είναι, σύν τοις άλλοις, ένα ταξίδι προς τη μόνη κεντροφόρο δύναμη που κάνει τη Γη να γυρίζει.

Μετά το σύντομο “ εγκώμιο ” προς την γνώση, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Πολίτη, που υπήρξε “ συνοδοιπόρος ” σε αυτό το ταξίδι, καθώς και στον αιώνιο συνοδοιπόρο της γνώσης και της ζωής, τον Μέγα Δάσκαλο. Όπου θα ήθελα και να του αφιερώσω το παρόν έργο ως ελάχιστο φόρο τιμής σε όλα αυτά που μου έχει προσφέρει.

Περίληψη

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας είναι η συσχέτιση του ελλείμματος και του πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία ή αλλιώς ΣΣΕΠ, όπως και θα αναφέρεται συντομογραφικά. Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση που οι απαιτήσεις μιας ασφαλιστικής επιχείρησης ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, τότε οι αυτές οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Το γεγονός αυτό φαίνεται να έχει μια φυσική ερμηνεία, καθότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας των κινδύνων παρουσιάζει διπλή μονοτονία. Αφού η εν λόγω κατανομή ακολουθεί, επίσης, την Εκθετική κατανομή με άμεση συνέπεια το υπόδειγμα να υπόκειται στην 'αμνήμονα' ιδιότητα.

Τι συμβαίνει, όμως, όταν η κατανομή των κινδύνων και κατ' επέκταση η κατανομή ισορροπίας ανήκει αποκλειστικά και μόνο σε μια κλάση γήρανσης; Ένα παράδειγμα που απαντά στο εν λόγω ερώτημα είναι η περίπτωση που οι κίνδυνοι ακολουθούν τη κατανομή Γάμμα, η οποία για παράμετρο μορφής μικρότερη της μονάδας ($n < 1$) ανήκει στην κλάση γήρανσης *DFR* και όταν είναι μεγαλύτερη της μονάδας ($n > 1$), τότε ανήκει στην κλάση γήρανσης *IFR*.

Μια ακόμα πιο πολύπλοκη περίπτωση που παρουσιάζεται στο παρόν έργο, είναι η περίπτωση που η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας αλλάζει μονοτονία στον θετικό ημιάξονα. Αυτή η εκδοχή πραγματοποιείται όταν οι κίνδυνοι ακολουθούν μια μίξη *IFR* κατανομών, όπως είναι η μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα διαπιστώνεται, συν τοις άλλοις, ότι η Εκθετική κατανομή δεν είναι η μόνη συνεχής κατανομή κατα την οποία οι μη ελλειμματικές τυχαίες μεταβλητές ελλείμματος και πλεονάσματος παρουσιάζουν στοχαστική ανεξαρτησία.

Ακριβολογώντας, στην παρούσα εργασία υπολογίζεται και μελετάται ο ΣΣΕΠ για μια 'πλειάδα' κατανομών κινδύνων (που ανήκουν σε διαφορετική κλάση γήρανσης) στο κλασικό υπόδειγμα της Θεωρίας Χρεοκοπίας. Επίσης μελετώνται οι προκαταρκτικές συναρτήσεις που συντελούν στον υπολογισμό του ΣΣΕΠ, καθώς και η μονοτονία των βαθμίδων αποτυχίας των υπό εξέταση κατανομών, αφού όπως διαπιστώνεται παίζει καθοριστικό ρόλο στο πρόσημο που λαμβάνει η συνδιακύμανση.

Η παρούσα μελέτη περιέχει εκτός από τα Περιεχόμενα και τη Βιβλιογραφία, Γλωσσάρι στατιστικών και αναλογιστικών όρων καθώς και Περιεχόμενα συντομογραφιών και συμβολο - συναρτήσεων. Η μελέτη καθίσταται εφικτή δια μέσου της βοήθειας του αλγεβρικού προγράμματος Maple, όπως και παρατίθενται οι αντίστοιχοι κώδικες.

Abstract

For the classical model with Poisson arrivals of Risk Theory, we study the covariance and correlation of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin, given that ruin occurs. When the claim sizes are exponentially distributed it is known that these two variables are stochastically independent.

This seems to have a reasonable explanation, due to the fact that the failure rate of equilibrium distribution is not only an increasing but also a decreasing function, at the same time. Since that distribution is Exponential too, as a result the classic model of Risk Theory is bound in "memoryless" property of the Exponential distribution.

What happens, however, when the severity distribution only belongs to one aging class? An example, which responds to that question, is the case in which severity distribution is the Gamma. Then for shape parameter below one ($n < 1$), then the failure rate of equilibrium is only increasing. So, that distribution belongs to IFR old age class. However, if the shape parameter is above one ($n > 1$), then it is decreasing. So, both severity and equilibrium distribution belong to the DFR class.

A more advanced example, which is considered in the present work, is the case in which the failure rate changes its monotonicity on the positive axis. This occurs when the severity distribution is a mixture of IFR distributions under some instances, such as mixture of Exponential and Gamma distributions with shape parameter longer the two ($n > 2$).

In that example it is observed that the Exponential distribution is not the only distribution in which the two random variables (deficit and surplus) are stochastically independent.

In order to be more clear, in this master's thesis we study the correlation between the proper random variables of deficit and surplus (SSEP) for a variety of severity distributions which belong to different aging classes class. It is also studied both the elementary functions of SSEP and the monotonicity of failure rate of severity distributions, since it is proved that the sign of covariance depends on monotonicity of failure rate.

Apart from an Index and Bibliography, a Glossary of statistical and actuarial terms and an Index for symbol-functions are included as well. Most of the calculations are made via the mathematical software Maple and some examples of the codes are presented.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	v
Κατάλογος Πινάκων	viii
0 Εισαγωγή	1
0.1 Από τον Lundberg ... στον Gerber	1
0.2 Η δομή της εργασίας	2
1 Το πιθανοθεωρητικό υπόβαθρο	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Τυχαίες μεταβλητές	6
1.2.1 Κατανομή τυχαίων μεταβλητών	6
1.2.2 Ροπές k -τάξης	9
1.2.3 Μετασχηματισμοί Laplace	10
1.3 Διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές	12
1.3.1 Κατανομή τυχαίου δείγματος	13
1.3.2 Περιθώριες κατανομές	13
1.3.3 Δεσμευμένες κατανομές	14
1.3.4 Συσχέτιση και Συνδιακύμανση	15
1.4 Στοχαστικές διαδικασίες	16
1.4.1 Στοχαστικές ανελίξεις Poisson	16
2 Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας	19
2.1 Εισαγωγή	19
2.2 Γενικότητες	20
2.2.1 Η διαδικασία του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο	20
2.2.2 Υποθέσεις του κλασικού υποδείγματος	21
2.2.3 Εξίσωση Lundberg και συντελεστής προσαρμογής	22
2.2.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας	25
2.3 Η γενίκευση του υποδείγματος της κλασικής Θεωρίας Χρεοκοπίας	

2.3.1	Η συνάρτηση Gerber-Shiu	28
2.3.2	Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg	30
2.3.3	Η ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση	31
2.3.4	Κάποια μέτρα κινδύνου	33
3	Η βαθμίδα αποτυχίας	37
3.1	Κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί	37
3.2	Κάποιες ζημιοκατανομές	39
3.2.1	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	40
3.2.2	Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	43
3.2.3	Κατανομή Γάμμα	45
3.2.4	Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής	47
3.2.5	Μίξη Εκθετικής και δύο κατανομών Γάμμα	53
4	Το προοίμιο του συντελεστή συσχέτισης ($u = 0$)	57
4.1	Κάποιοι βασικοί ορισμοί	57
4.2	Το πρόσημο της συνδιακύμανσης	61
4.3	Η μελέτη των βασικών μεγεθών του ΣΣΕΠ εν απουσία αρχικού αποθέματος	62
4.3.1	Εκθετική κατανομή	64
4.3.2	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	65
4.3.3	Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	68
4.3.4	Γάμμα κατανομή	69
4.3.5	Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής	71
4.3.6	Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών	75
5	Το προοίμιο του συντελεστή συσχέτισης όταν υπάρχει αρχικό απόθεμα	79
5.1	Η μελέτη των βασικών μεγεθών της ΣΣΕΠ παρουσία αρχικού αποθέματος	80
5.1.1	Εκθετική κατανομή	80
5.1.2	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	82
5.1.3	Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	84
5.1.4	Γάμμα κατανομή	85
5.1.5	Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής	88
5.1.6	Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών	91
6	Ο συντελεστής Συσχέτισης μεταξύ ελλείμματος και πλεονάσματος (ΣΣΕΠ)	95
6.1	Ο ΣΣΕΠ με μηδενικό αρχικό απόθεμα	95
6.1.1	Εκθετική κατανομή	96

6.1.2	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	96
6.1.3	Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	97
6.1.4	Γάμμα κατανομή	98
6.1.5	Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής	100
6.1.6	Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών	101
6.2	Ο ΣΣΕΠ παρουσία αρχικού αποθέματος	103
6.2.1	Εκθετική κατανομή	103
6.2.2	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	104
6.2.3	Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	106
6.2.4	Γάμμα κατανομή	107
6.2.5	Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής	109
6.2.6	Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών	110
6.3	Ο ΣΣΕΠ με κάποιο προεξοφλητικό παράγοντα χωρίς αρχ. απόθεμα	111
6.3.1	Εκθετική κατανομή	113
6.3.2	Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών	114
6.3.3	Γάμμα κατανομή	115
A	Σύμβολα και Συναρτήσεις	119
B	Αναλυτική παρουσίαση της υπολογιστική διαδικασίας του Κε- φαλαίου 4	123
Γ	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για μίξη δύο Εκθετικών κατανομών .	133
Δ	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για μίξη τριών Εκθετικών κατανομών	143
Ε	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για Γάμμα κατανομή ζημιών	155
Στ	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής ζημιών	161
Z	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών ζημιών	143
H	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για Εκθετικές αποζημιώσεις με $\delta > 0$	183
Θ	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για μίξη δύο Εκθετικών κατανομών με $\delta > 0$	185
I	Ο υπολογισμός του ΣΣΕΠ για Γάμμα κατανομή ζημιών με $\delta > 0$	189
	Ευρετήριο	191
	Βιβλιογραφία	193

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Η διαδικασία της ΣΑΠ	23
2.2	Η επίλυση του συντελεστή προσαρμογής	24
2.3	Η επίλυση του συντελεστή προσαρμογής για Εκθετικές αποζημιώσεις	25
2.4	Η επίλυση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg	32
3.1	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$ (αριστερά) και $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1-a)\mathcal{E}(4)$ (δεξιά), συναρτήσει της τιμής x	42
3.2	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/6)\mathcal{E}(1/2) + (1/3)\mathcal{E}(1/5) + (1/2)\mathcal{E}(1/10)$ (αριστερά) και $F = (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$ (δεξιά), συναρτήσει της τιμής x	44
3.3	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$, συναρτήσει της τιμής x	47
3.4	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1-a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(1/2, \beta)$, συναρτήσει του ορίσματος x	52
3.5	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1-a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(2, \beta)$, συναρτήση της παρατήρησης x	52
3.6	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1-a)\mathcal{E}(1) + a\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήση της παρατήρησης x	53
3.7	Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που $F = (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(1/2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(1/4, 1)$, συναρτήσει του ορίσματος x	54
3.8	Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει της τιμής x	55
4.1	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος όταν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, συναρτήση της παραμέτρου β	65
4.2	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $F \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a	68
4.3	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, συναρτήση της παραμέτρου n	71

4.4	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1 - a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου n	75
4.5	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1 - a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a	76
4.6	Η συνδιακύμανση όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1 - a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου σχήματος n και βαρύτητας a	77
5.1	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1 - a)\mathcal{E}(4)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	84
5.2	Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος και του ελλείμματος όταν $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1 - a)\mathcal{E}(4)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	85
5.3	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim 1/6\mathcal{E}(3) + 1/3\mathcal{E}(2) + 1/3\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	86
5.4	Η συνδιακύμανση μεταξύ του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/3)\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	87
5.5	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	88
5.6	Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$ και $\beta > 0$, με $\beta = 1$ (αριστερά) και $\beta = 3$ (δεξιά), συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	89
5.7	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1) + (1 - a)\mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	91
5.8	Η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1) + (1 - a)\mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	92
5.9	Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	93
5.10	Η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	94
6.1	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1 - a)\mathcal{E}(1/5)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας	98

6.2	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, συναρτήσει της παραμέτρου μορφής n	100
6.3	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1 - a)\mathcal{E}(\beta)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a και παραμέτρου μορφής n	102
6.4	Ο ΣΣΕΠ συναρτήσει της παραμέτρου μορφής n (αριστερά) και της παραμέτρου βαρύτητας a (δεξιά), όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1 - a)\mathcal{E}(\beta)$	103
6.5	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1 - a)\mathcal{E}(4)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	105
6.6	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	107
6.7	Ο ΣΣΕΠ, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u (αριστερά) και της παραμέτρου κλίμακας β (δεξιά), στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$	109
6.8	Ο ΣΣΕΠ, συναρτήσει των u και β , όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$	110
6.9	Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1 - a)\mathcal{G}(n, \beta)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	111
6.10	Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u	112

Κατάλογος Πινάκων

6.1	Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim a\varepsilon(2) + (1-a)\varepsilon(4)$	105
6.2	Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim (1/6)\varepsilon(3) + (1/3)\varepsilon(2) + (1/2)\varepsilon(5)$	106
6.3	Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$	108
6.4	Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (2, \beta)$, για $\delta > 0$	117

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

0.1 Από τον Lundberg ... στον Gerber

Η επιστήμη των ασφαλίσεων διακρίνεται σε δύο κλάδους ανάλογα με τον τρόπο που υπολογίζονται τα ασφάλιστρα και τα αποθεματικά της ασφαλιστικής εταιρίας. Ειδικότερα διακρίνεται στον κλάδο Ζωής (Life Insurance) και στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων (General Insurance ή Non - Life Insurance).¹

Για τα μαθηματικά των Γενικών Ασφαλίσεων, παρά το γεγονός ότι φαίνεται να έχουν μακρά ιστορία, μόλις το 1747 σε μια εργασία του Carbyn Morris γίνεται μια πρώτη προσπάθεια μαθηματικής προσέγγισης. Η συγκεκριμένη εργασία αφορούσε στη μελέτη της 'πιθανότητας του κινδύνου' και της οικονομικής επίδρασης του κινδύνου αυτού για έναν ασφαλιστή.

Το 1859, ο Carl Bremiker θα ασχοληθεί με την 'κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων', καθώς και με το αναγκαίο περιθώριο ασφαλείας. Τα δύο αυτά θέματα έχουν μείζονα χαρακτήρα στη Θεωρία της Χρεοκοπίας, αλλά και γενικότερα στη Θεωρία των Κινδύνων.

Ωστόσο, ο πατέρας της Θεωρίας των Κινδύνων, όπως δικαιωματικά αποκαλείται ο Σουηδός μαθηματικός Philip Lundberg έμελλε να θέσει τα θεμέλια και να ορίσει το 'μονοπάτι' στο οποίο μέχρι σήμερα βαδίζουν όλοι οι ερευνητές που ασχολούνται με το συγκεκριμένο πεδίο. Δημιούργημα του Σουηδού μαθηματικού ήταν 'το κλασικό υπόδειγμα της Θεωρίας της Χρεοκοπίας'. Το εν λόγω υπόδειγμα παρουσιάστηκε στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής και έφερε τον τίτλο "On the Theory of Reinsurance".

Το κλασικό υπόδειγμα της Θεωρίας Χρεοκοπίας κάνει ευρεία χρήση στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι όλα αυτά τα χρόνια η ανάπτυξη αυτού του πεδίου της Θεωρίας Πιθανοτήτων έδωσε μια μεγάλη ώθηση στη γιγαντιαία ανάπτυξη της Αναλογιστικής επιστήμης, γενικότερα. Μεγάλος πρεσβευτής αυτής της

¹Στην παρούσα μελέτη θα επικεντρωθούμε κυρίως στον δεύτερο κλάδο ασφαλίσεων

προσπάθειας υπήρξε ο στατιστικός Harald Cramer.

Καρπός της τελευταίας ανάπτυξης είναι η γενίκευση του κλασικού υποδείγματος της Θεωρίας Χρεοκοπίας από τους Δρ. Gerber & Shiu . Αυτό πραγματοποιήθηκε το έτος 1998 στο άρθρο "On the time value of Ruin".

Κλείνοντας αυτή της σύντομη ιστορία της Θεωρίας των Κινδύνων, θα λέγαμε ότι καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη αυτής της επιστήμης δεν έπαιξαν μόνο τα σπουδαίες εργασίες των Cramer και Kolmogorov, αλλά και η ίδια η κοινωνία. Άλλωστε σε τέτοιου είδους επιστήμες (κοινωνικές) ο ερευνητής εμπνέεται από την δομή και τα χαρακτηριστικά της κοινωνίας, με τον ίδιο τρόπο που ο μαθηματικός λαμβάνει ερεθίσματα από την Φύση.

Έτσι το όλο και πιο πολύπλοκο σύστημα της κοινωνίας, που έχει άμεσα αντίκτυπο στην Οικονομία και φυσικά στην Ασφάλιση, οδηγεί τα στελέχη της εκάστοτε ασφαλιστικής εταιρείας να εφαρμόσουν νέα και πιο ευέλικτα εργαλεία των μαθηματικών προκειμένου να κάνουν ασφαλείς προβλέψεις σε ένα 'χαοτικό' περιβάλλον. Σε αντίθεση με τα 'πειράματα' της παρούσας εργασίας που υπόκεινται σε ένα 'αιτιοκρατικό περιβάλλον' (deterministic environment).

0.2 Η δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία, θα λέγαμε, ότι χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο αποτελείται από τα Κεφάλαια 1, 2 και εν μέρει από το 3. Ενώ το δεύτερο μέρος αποτελείται από τα Κεφάλαια 3 έως 6, όπου και παρουσιάζεται η μελέτη του ΣΣΕΠ (συντελεστής συσχέτισης ελλείμματος και πλεονάσματος, βλ. Παρατήρηση 4.1).

Αναλυτικότερα δε:

Στο **πρώτο Κεφάλαιο**, γίνεται μια εν τάχει θεωρητική επισκόπηση στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Ειδικότερα παρουσιάζονται συναρτήσεις που περιγράφουν μια μονοδιάστατη και διδιάστατη τυχαία μεταβλητή, όπως είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας, η μαθηματική ελπίδα, η διασπορά και ο μετασχηματισμός Laplace. Επίσης παρουσιάζεται η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας και η συσχέτιση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών.

Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται επίσης μια θεωρητική επισκόπηση, αυτή τη φορά, στην Θεωρία Χρεοκοπίας. Εδώ, παρουσιάζεται το λεγόμενο κλασικό υπόδειγμα, καθώς και η γενίκευσή του. Έννοιες όπως, πλεόνασμα, έλλειμμα, ΣΑΠ (στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος), πιθανότητα χρεοκοπίας και από κοινού κατανομή ελλείμματος - πλεονάσματος, είναι μόνο μερικές έννοιες που παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο Κεφάλαιο.

Για την περίπτωση που δεν υπάρχει αρχικό αποθεματικό και προεξοφλητικός παράγοντας, αποδεικνύεται (βλ. Πρόταση 4.2) ότι η βαθμίδα αποτυχίας της

τυχαίας μεταβλητής της κατανομής ισορροπίας παίζει μείζονα και καθοριστικό ρόλο στο πρόσημο που λαμβάνει ο ΣΣΕΠ. Για το λόγο αυτό, στο **Κεφάλαιο 3**, παρουσιάζονται κάποιες έννοιες από την Θεωρία Αξιοπιστίας, καθώς και η μελέτη των βαθμίδων αποτυχίας των κατανομών που χρησιμοποιούνται για την εύρεση του ΣΣΕΠ. Η Εκθετική κατανομή, η κατανομή Γάμμα και η μίξη αυτών είναι κατανομές για τις οποίες η βαθμίδα αποτυχίας μελατάται.

Στο **Κεφάλαιο 4**, όπως προϋποθέτει και ο τίτλος που φέρει, παρουσιάζονται αναλυτικές αλγεβρικές εκφράσεις των προκαταρκτικών συναρτήσεων που συντελούν στον υπολογισμό του απώτερου στόχου μας, που δεν είναι άλλος από τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ. Οι εν λόγω προκαταρκτικές συναρτήσεις, δεν είναι άλλες από την συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών του ελλείμματος και του πλεονάσματος, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής του ελλείμματος και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος. Επίσης, η ανάλυση σε αυτό το Κεφάλαιο πραγματοποιείται απουσία αρχικού αποθέματος ($u = 0$) και προεξοφλητικού παράγοντα ($\delta = 0$).

Απεναντίας, στο **Κεφάλαιο 5** πραγματεύονται όλα αυτά που αναφέρθηκαν για το Κεφάλαιο 4, με μόνη διαφορά ότι οι προκαταρκτικές συναρτήσεις αναπαράγονται παρουσία αρχικού αποθέματος ($u \geq 0$).

Συνέχεια των Κεφαλαίων 4 και 5 είναι το **Κεφάλαιο 6**, το οποίο αφιερώνεται στη σπουδή του ΣΣΕΠ. Στο ίδιο Κεφάλαιο περιέχεται, επίσης, μια Ενότητα στην οποία μελετάται ο ΣΣΕΠ υπό τις προϋποθέσεις που δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα, ενώ υπάρχει προεξοφλητικός παράγοντας. Στην εν λόγω Ενότητα γίνεται ιδιαίτερη μνεία στην γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, καθώς η αναπαγωγή του συντελεστή συσχέτισης επιτυγχάνεται δια μέσου της θετικής ρίζας της προαναφερθείσας ισότητας (εξίσωση Lundberg).

Επί της ουσίας, ο ΣΣΕΠ παρουσία προεξοφλητικού παράγοντα είναι μια γενίκευση του αντίστοιχου συντελεστή απουσίας προεξοφλητικού παράγοντα.

Η παράθεση της υπολογιστικής διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να εξαχθούν όλα τα αλγεβρικά αποτελέσματα, τόσο για τις προκαταρκτικές συναρτήσεις του ΣΣΕΠ όσο και του ίδιου του ΣΣΕΠ κρίνεται αναγκαία. Για το λόγο αυτό τα **Παραρτήματα Α** έως **Ι** αφιερώνονται σε αυτό το σκοπό.

Για την ακρίβεια, στο **Παραρτήματα Α** παρουσιάζονται διάφοροι Πίνακες, στους οποίους εμπεριέχονται κάποιες συντομεύσεις και σύμβολα που χρησιμοποιούνται στο κείμενο, καθώς και κωδικογραφήσεις συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στον κώδικα του αλγεβρικού προγράμματος Maple.

Στα εναπομείναντα Παραρτήματα, παρουσιάζονται αμειγώς οι κώδικες για τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ για κάθε περίπτωση κατανομής κινδύνων.

Κεφάλαιο 1

Το πιθανοθεωρητικό υπόβαθρο

1.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία Πιθανοτήτων αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι των μαθηματικών, το οποίο ασχολείται με τη πρόβλεψη τυχαίων φαινομένων. Κάποια από τα βασικά εργαλεία της είναι: τα ενδεχόμενα, οι τυχαίες μεταβλητές και οι στοχαστικές ανελίξεις, οι οποίες αποτελούν οικογένειες τυχαίων μεταβλητών.

Ως μαθηματικό θεμέλιο, η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι απαραίτητη για πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες. Φαινόμενα όπως η θνησιμότητα, φυσικές καταστροφές και άλλα τέτοια γεγονότα, που αφορούν σε μια μελλοντική κατάσταση ήταν και είναι μερικά από τα αντικείμενα μελέτης για πολλούς ερευνητές σε κάθε περίοδο της ιστορίας του ανθρώπινου είδους.

Όσον αναφορά στην επιστήμη του Αναλογισμού, η Θεωρία Πιθανοτήτων αποτελεί το βασικό λίθο αυτής. Σε όλα σχεδόν τα προβλήματα του Αναλογισμού και κυρίως σε αυτά που θέλουμε να έχουμε μια ξεκάθαρη απάντηση, υπάρχει μεγάλος βαθμός τυχειότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι Αναλογιστικές οντότητες που παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον, όπως η κατανομή ενός τυχαίου αθροίσματος, η πιθανότητα έλευσης ενός καταστροφικού γεγονότος, η πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα τέτοια θέματα παρουσιάζουν μεγάλη μεταβλητότητα, με αποτέλεσμα την ανικανότητα υπολογισμών χωρίς τη χρήση βασικών εργαλείων της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Η μεταβλητότητα φαίνεται να ακολουθεί τους νόμους της τύχης: άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι τα υποδείγματα που έχουν σχεδιαστεί για να περιγράψουν και να προβλέψουν μια κατάσταση, περιέχουν τυχαίες μεταβλητές που συνήθως έχουν άμεση σχέση με το χρόνο. Με άλλα λόγια αυτά τα υποδείγματα δεν είναι τίποτε άλλο από στοχαστικά.

Στο παρόν Κεφάλαιο θα γίνει λόγος για τέτοιου είδους εργαλεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικών διαδικασιών, τα οποία απαιτούνται για τη

μελέτη του γενικευμένου κλασικού υποδείγματος που εισήγαγαν οι Gerber & Shiu. Θα αναφερθούμε εν συντομία σε αυτά τα εργαλεία αλλά θα κάνουμε μια εκτενή αναφορά σε ζητήματα με μείζονα ρόλο στη διαδικασία υπολογισμού του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ ελλείμματος και πλεονάσματος: όπως είναι η ελλειματική τυχαία μεταβλητή, ο συντελεστής συσχέτισης και οι στοχαστικές ανελίξεις.

1.2 Τυχαίες μεταβλητές

Είναι πολύ χρήσιμο να αναφέρουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων που χαρακτηρίζουν μια κατανομή. Αρχικά, **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ.), έστω Z ονομάζεται μια μετρήσιμη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχειώδες συμβάν $\omega \in \Omega$, έναν αριθμό $Z(\omega)$. Αυτή καλείται **διακριτή τυχαία μεταβλητή**, αν το πεδίο τιμών (Π.Ο.) αυτής περιέχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών¹. Αντιθέτως, αυτή καλείται **συνεχής τυχαία μεταβλητή** αν λαμβάνει ένα άπειρο και μη αριθμήσιμο πλήθος αριθμών².

Εμείς θα επικεντρωθούμε αποκλειστικά και μόνο στη περίπτωση που η τ.μ. Z είναι συνεχής και μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Ακριβέστερα, θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η τ.μ. Z λαμβάνει τιμές σε ένα σύνολο τιμών, το οποίο ορίζεται στο θετικό ημιάξονα (άλλωστε στην Αναλογιστική επιστήμη η απαίτηση ή ο κίνδυνος είναι μη αρνητική τ.μ.).

1.2.1 Κατανομή τυχαίων μεταβλητών

Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις που περιγράφουν την κατανομή F μιας τ.μ. που συμβολίζεται πάλι με Z . Αλλά ας δούμε κάποιους Ορισμούς για αυτές τις συναρτήσεις.

Ορισμός 1.1 *Ας συμβολίσουμε με $f_Z(x)$ ή $f(x)$ στη περίπτωση που δεν υπάρχει σύγχυση, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) της τ.μ. Z , τότε αυτή καλείται μη ελλειματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (proper density function) της τ.μ. Z , αν*

$$f(x) \geq 0, \quad (1.1)$$

και παράλληλα

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.2)$$

¹ Αν ορίσουμε με x τις τιμές που λαμβάνει η τ.μ., τότε $x = 0, 1, 2, \dots$

² Θα πρέπει $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, όπου D το Π.Ο της.

Ορισμός 1.2 Αν $f(\bullet)$ η σ.π.π. της τ.μ. Z , όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.1, τότε η συνάρτηση

$$\begin{aligned} F_Z(x) \equiv F(x) &= \mathbb{P}[Z \leq x] \\ &= \int_0^x f(x)dx, \end{aligned} \quad (1.3)$$

καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της τ.μ. Z .

Κατόπιν στην επόμενη Πρόταση παρατίθενται κάποιες ιδιότητες για την σ.κ. της τ.μ. Z .

Πρόταση 1.1 Αν $F(\bullet)$ η σ.κ. της τ.μ. Z , όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.2, τότε για την συνάρτηση αυτή θα πρέπει να ισχύει

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, για κάθε τιμή της x ,
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$,
3. η $F(\bullet)$ είναι μή φθίνουσα συνάρτηση,
4. η $F(\bullet)$ είναι συνεχής συνάρτηση εκ δεξιών, δηλαδή

$$F(x+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Απόδ. Βλ. οποιοδήποτε βιβλίο σχετικό με τη Θεωρία Πιθανοτήτων. ■

Μια ακόμη σημαντική συνάρτηση είναι η συνάρτηση επιβίωσης ή δεξιά ουρά της κατανομής μιας τ.μ.. Η εν λόγω συνάρτηση είναι η συμπληρωματική συνάρτηση της σ.κ. που είδαμε στον Ορισμό 1.2.

Ορισμός 1.3 Αν $F(\bullet)$ η σ.κ. και $f(\bullet)$ η σ.π.π. μιας τ.μ. Z , όπως αυτές ορίστηκαν στους Ορισμούς 1.1 και 1.2 αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(x)dx, \quad (1.4)$$

καλείται συνάρτηση επιβίωσης (σ.ε.π.) ή δεξιά ουρά της κατανομής F της τ.μ. Z .

Όπως και προηγουμένως, στην επόμενη Πρόταση παρατίθενται κάποιες ιδιότητες για την συνάρτηση που ορίστηκε στον τελευταίο Ορισμό.

Πρόταση 1.2 Για την σ.ε.π. της τ.μ. Z , η οποία ορίστηκε στον Ορισμό 1.3, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $0 \leq \bar{F}(x) \leq 1$, για κάθε τιμή της x ,
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) = F(\infty) = 0$,
3. $\bar{F}(0+) = 1$,
4. η \bar{F} είναι μη αύξουσα συνάρτηση.

Απόδ. Βλ. οποιοδήποτε βιβλίο σχετικό με την Θεωρία Πιθανοτήτων. ■

Στο σημείο αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο να εισάγουμε την έννοια της ελλειμματικής κατανομής.

Ορισμός 1.4 Η τ.μ. Z καλείται ελλειμματική, αν για την σ.π.π. αυτής ισχύει η (1.1) και αντί της (1.2) η ανισότητα

$$\int_0^{\infty} f(x) dx < 1. \quad (1.5)$$

Είναι κατανοητό ότι η συνάρτηση $F(\bullet)$, θα πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο που ορίζεται (στην παρούσα μελέτη στο \mathbb{R}_+).

Ακολουθεί, τώρα, ένα Παράδειγμα το οποίο επεξηγεί τους τελευταίους Ορισμούς περί ελλειμματικής και μη κατανομής.

Παράδειγμα 1.1 Έστω η συνάρτηση $f(\bullet)$ με

$$f(x) = a e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

με $a, \beta > 0$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} a e^{-\beta x} dx \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx \\ &= -\frac{a}{\beta} e^{-\beta x} \Big|_0^{\infty} \\ &= -0 + \frac{a}{\beta} = \frac{a}{\beta}. \end{aligned}$$

Από το τελευταίο αποτέλεσμα

1. αν $a = \beta$, τότε $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ και ως εκ τούτου $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$,

2. αν $a < \beta$, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4 η τ.μ. Z έχει ελλειμματική κατανομή, και τέλος
3. αν $a > \beta$, τότε η συνάρτηση $f(\bullet)$ δεν ανήκει καν στις συναρτήσεις πυκνότητας.

Το ερώτημα που γεννάται στο παρόν Παράδειγμα είναι πώς θα δημιουργήσουμε μια νέα μη ελλειμματική κατανομή βασιζόμενοι στην υπάρχουσα ελλειμματική κατανομή. Η απάντηση είναι εύκολη, καθότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{\int_0^{\infty} f(x)dx}$$

είναι μη ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, αφού

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(x)dx &= \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{\int_0^{\infty} f(x)dx} dx \\ &= \frac{\int_0^{\infty} f(x)dx}{\int_0^{\infty} f(x)dx} = 1, \end{aligned}$$

και βεβαίως τότε η συνάρτηση $g(\bullet)$ είναι η πυκνότητα της Εκθετικής κατανομής.

1.2.2 Ροπές k - τάξης

Μερικά συνοπτικά χαρακτηριστικά (έστω πάλι μιας τ.μ. Z) μπορεί να ευρεθούν από τη μελέτη συγκεκριμένων ποσοτήτων που υπολογίζονται από την σ.π.π. της εν λόγω μη αρνητικής τ.μ.. Η ροπή k - τάξης είναι μια τέτοια ποσότητα και υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^k] = p_k &= \int_0^{\infty} x^k f(x)dx \\ &= k \int_0^{\infty} x^{k-1} \bar{F}(x)dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για $k = 1$, η σχ. (1.6) υπολογίζει την αναμενόμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα (όπως και θα αναφέρεται στην παρούσα μελέτη) της τ.μ. Z . Ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μαθηματικής ελπίδας δίνεται στην Πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 1.3 Αν $F(\bullet)$ η σ.κ. και $\bar{F}(\bullet)$ η σ.επ. της τ.μ. Z , όπως αυτές ορίστηκαν στους Ορισμούς 1.2 και 1.3 αντίστοιχα, τότε η μαθηματική έκφραση

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \int_0^{\infty} (1 - \mathbb{P}[X \leq x]) dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \\ &= \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx,\end{aligned}\tag{1.7}$$

υπολογίζει την μαθηματική ελπίδα.

Απόδ. Είναι προφανές ότι για $k = 1$ στην σχ. (1.6) παράγεται το αποτέλεσμα της 1.7. ■

Για $k = 2$, στην (1.6) λαμβάνουμε τη δεύτερη ροπή, η οποία είναι χρήσιμη για την εύρεση της διασποράς ή διακύμανσης.

Ορισμός 1.5 Αν $\mathbb{E}[Z^k]$, η k -στη ροπή της τ.μ. Z , τότε η σχέση

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[Z] &= \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}[Z])^2 \\ &= \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}^2[Z].\end{aligned}\tag{1.8}$$

υπολογίζει την διακύμανση της τ.μ. Z και στην ουσία εκφράζει το μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή.

Η διασπορά ανήκει στη κατηγορία μέτρων που αποκαλούνται **μέτρα διασποράς**, σε αντίθεση με τη μαθηματική ελπίδα που ανήκει στη κατηγορία με τα **μέτρα θέσεως**. Ενώ η μαθηματική έκφραση

$$\sqrt{\mathbb{V}[Z]} = \sqrt{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}^2[Z]},\tag{1.9}$$

ορίζει την **τυπική απόκλιση**.

1.2.3 Μετασχηματισμοί Laplace

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση διαφορικών και ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων είναι η κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει ο λεγόμενος μετασχηματισμός Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, έστω $f(t)$ συμβολίζεται συχνά με $\mathcal{L}\{f\}$, αν και στη παρούσα εργασία θα συμβολίζεται ως $\hat{f}(s)$. Ακριβέστερα, ας δούμε τον επόμενο Ορισμό.

Ορισμός 1.6 Αν $f(\bullet)$ η σ.π.π. της τ.μ. Z , όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.1, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{f(t)\} = \hat{f}(s) &= \mathbb{E}[e^{-tZ}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx,\end{aligned}\quad (1.10)$$

οπου, s μια πραγματική παράμετρος, ορίζει τον μετασχηματισμό Laplace (μτσχ. Laplace) της σ.π.π. της τ.μ. Z .

Βασικές υποθέσεις που διέπουν τη συνάρτηση $f(\bullet)$ της (1.10), είναι οι ακόλουθες:

1. η συνάρτηση $f(\bullet)$ θα πρέπει να είναι τμηματικά συνεχής στο κλειστό διάστημα $0 \leq t \leq A$, και παράλληλα
2. να είναι εκθετικά φραγμένη, δηλαδή να υπάρχουν σταθεροί φυσικοί αριθμοί $k, c > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(t)| \leq ke^{ct}, \quad M \leq t \leq 0.$$

Αν ισχύουν οι προηγούμενες προϋποθέσεις και υπάρχει ο μτσχ. Laplace, τότε για $s > t$ ισχύει:

1. $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$, και
2. η συνάρτηση $s\hat{f}(s)$ είναι φραγμένη σε κάθε περιοχή που ορίζεται.

Επιπλέον, αν ορίσουμε με $\hat{F}(\bullet)$ το μτσχ. Laplace της σ.επ. της τ.μ. Z , τότε

$$\begin{aligned}\hat{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} (e^{-sx})' \bar{F}(x) dx \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sx} \bar{F}(x) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} (-f(x)) dx \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \bar{F}(x) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \hat{f}(s) \\ &= \frac{1 - \hat{f}(s)}{s},\end{aligned}\quad (1.11)$$

μιας και $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \bar{F}(x) = 0$, από τη βασική συνθήκη που διέπει τις δεξιές ουρές αδιακρίτως κατανομής (βλ. συνθήκη 2 της Πρότασης 1.2).

Για περισσότερες πληροφορίες (γενικά) περί ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Κεφάλαιο 7 του βιβλίου 'Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις' (Σταυρακάκης, 1997), αλλά και ειδικότερα για μτσχ. Laplace στο βιβλίο 'Αναλογιστικά μαθηματικά' (Κουτσόπουλος, 1999). Το Παράδειγμα που ακολουθεί είναι μέρος του πρώτου συγγράμματος.

Παράδειγμα 1.2 Έστω μια τ.μ. Z , η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta > 0$.

Χρησιμοποιώντας τη σχ. (1.10), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \beta e^{-\beta x} dx \\ &= \beta \int_0^{\infty} e^{-(s+\beta)x} dx \\ &= -\frac{\beta}{s+\beta} e^{-(s+\beta)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{\beta}{s+\beta}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Ενώ από την (1.11) και με την βοήθεια της (1.12), για τον μτσχ. Laplace της σ.ε.π., θα έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{F}(s) &= \frac{1 - \frac{\beta}{s+\beta}}{s} \\ &= \frac{1}{s+\beta}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

1.3 Διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Στη παρούσα Ενότητα θα αναφερθούμε στις βασικές σχέσεις που συνδέουν δύο τ.μ. διατυπώνοντας μαθηματικές εκφράσεις για το **τυχαίο διάνυσμα** (τ.δ.), έστω $\underline{Z}' = [X, Y]$, το οποίο όπως βλέπουμε έχει δύο διαστάσεις στο χώρο και για το λόγο αυτό καλείται **διδιάστατη τυχαία μεταβλητή**. Αυτή η διδιάστατη τ.μ. διακρίνεται σε συνεχή και διακριτή³. Πάλι, εδώ θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που οι τ.μ. X, Y είναι συνεχείς και μη αρνητικές.

³ Αυτό εξαρτάται από τη κατανομή που ακολουθούν οι επιμέρους τ.μ. του δείγματος.

1.3.1 Κατανομή τυχαίου δείγματος

Ο επόμενοι δύο Ορισμοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς που είδαμε στην μονοδιάστατη περίπτωση (βλ. Ορισμό 1.1 και 1.2, αντίστοιχα).

Ορισμός 1.7 Η συνάρτηση $f_{XY}(x, y)$ ή $f(x, y)$ αν δεν υπάρχει σύγχυση, καλείται από κοινού μη ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (α.σ.π.π.) ή από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X και Y αν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες

$$f(x, y) \geq 0, \quad (1.14)$$

και

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = 1. \quad (1.15)$$

Ορισμός 1.8 Αν με $F(x, y)$, συμβολίσουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) ή από κοινού κατανομή των τ.μ. X και Y , τότε η συνάρτηση αυτή ορίζεται από την αλγεβρική έκφραση

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \\ &= \int_0^x \int_0^y f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ωστόσο, η κατανομή του τ.δ. Z' δύναται να είναι μια ελλειμματική διδιάστατη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.9 Αν η α.σ.π.π. $f(x, y)$ του τ.δ. Z , ικανοποιεί την σχέση

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy < 1, \quad (1.17)$$

καθώς επίσης και την (1.14), τότε η κατανομή του τ.δ. Z καλείται ελλειμματική κατανομή. Ενώ η συνάρτηση $f(x, y)$, ονομάζεται από κοινού ελλειμματική πυκνότητα πιθανότητας αυτής της τ.μ..

1.3.2 Περιθώριες κατανομές

Οι σ.π.π. των τ.μ. X, Y υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy, \quad (1.18)$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx, \quad (1.19)$$

όπου κάθε μια από αυτές τις συναρτήσεις καλείται περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή περιθώρια πυκνότητα. Οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής μπορούν να ευρεθούν με ποικίλους τρόπους. Ενδεικτικά, η περιθώρια κατανομή της τ.μ. X υπολογίζεται από την σχέση

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad (1.20)$$

ενώ της Y , από την σχέση

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y). \quad (1.21)$$

Οι τ.μ. X, Y προκειμένου να είναι στοχαστικά ανεξάρτητες ή απλά ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύουν, τόσο για την από κοινού συνάρτηση κατανομής, όσο και για την από κοινού πυκνότητα οι αλγεβρικές εκφράσεις

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \quad (1.22)$$

και

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad (1.23)$$

για όλα τα $x, y \geq 0$.

1.3.3 Δεσμευμένες κατανομές

Στην Ενότητα 1.3.1 ορίστηκε ως $f(x, y)$, η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X, Y . Βασιζόμενοι σε αυτή τη συνάρτηση, η **δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της τ.μ. X , δοθείσης της τ.μ. Y^4 , ορίζεται από την σχέση

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1.24)$$

Ενώ, αν παράλληλα οι υπό μελέτη τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε

$$(1.24) \stackrel{(1.23)}{\Rightarrow} f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \quad (1.25)$$

για κάθε τιμή του ζεύγους (x, y) .

⁴Εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A , υπό την προϋπόθεση ότι συμβαίνει το ενδεχόμενο B

1.3.4 Συσχέτιση και Συνδιακύμανση

Η πλέον ενδιαφέρουσα, από θεωρητικής και εφαρμοσμένης πλευράς από κοινού κεντρική ροπή δύο τ.μ., έστω X και Y , είναι η συνδιακύμανση και η οποία εκφράζει τον βαθμό που οι δύο τ.μ. σχετίζονται.

Ορισμός 1.10 Έστω δύο τ.μ. X, Y με αντίστοιχες μαθηματικές ελπίδες $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ και $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$, τότε η μαθηματική έκφραση

$$\begin{aligned}\text{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y],\end{aligned}\quad (1.26)$$

υπολογίζει την συνδιακύμανση των δύο εν λόγω τ.μ..

Εαν υποθέσουμε ότι οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, τότε

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y],$$

το οποίο ισοδυναμεί με

$$\text{Cov}[X, Y] = 0.$$

Επίσης, ένα μέτρο που εξετάζει την ύπαρξη συσχέτισης αλλά και το πώς σχετίζονται δύο τυχαίες μεταβλητές, είναι ο συντελεστής συσχέτισης.

Ορισμός 1.11 Αν η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ εκφράζει την συνδιακύμανση δύο τ.μ. X, Y , όπως αυτή ορίζεται στον Ορισμό 1.10 και $\mathbb{V}[X], \mathbb{V}[Y]$ οι διασπορές αυτών των τ.μ., τότε από την μαθηματική έκφραση

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}},\quad (1.27)$$

υπολογίζεται ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τ.μ. X και Y .

Αποδεικνύεται δε ότι ο άνωθεν συντελεστής παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών -1 και 1 , δηλαδή

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1,\quad (1.28)$$

ή ισοδύναμα

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1.\quad (1.29)$$

Ανάλογα με το πρόσημο που έχει ο συντελεστής της (1.27) μπορούμε να 'αντλήσουμε' πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για την ενδεχόμενη σχέση που έχουν οι δύο υπό εξέταση τυχαίες μεταβλητές. Αναφορικά με τα προηγούμενα, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. αν $\rho_{X,Y} > 0$, τότε οι τ.μ. X και Y είναι θετικά συσχετισμένες ή έχουν **θετική συσχέτιση**⁵,
2. αν $\rho_{X,Y} = 0$, τότε αυτές δεν έχουν καμία γραμμική σχέση μεταξύ τους ή απλά είναι **ασυσχέτιστες**,
3. τέλος, αν $\rho_{X,Y} < 0$, αυτό σημαίνει **αρνητική συσχέτιση**⁶ μεταξύ των δύο τυχαίων μεταβλητών.

1.4 Στοχαστικές διαδικασίες

Οι στοχαστικές ανελίξεις έχουν μια ευρεία εφαρμογή σε πολλούς κλάδους της επιστήμης των Μαθηματικών λόγω των σημαντικών ιδιοτήτων τους. Έτσι και στην Αναλογιστική επιστήμη που προσβλέπουμε στην κατασκευή υποδειγμάτων που να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν γίνεται στην πραγματικότητα (ώστε να γίνουν ασφαλείς προβλέψεις και εκτιμήσεις), η χρήση στοχαστικών διαδικασιών ή ανελίξεων θεωρείται αναγκαία.

Στον επόμενο Ορισμό εισάγεται η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης.

Ορισμός 1.12 Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, έστω $\{Z(t) : t \in T\}$ ονομάζεται στοχαστική διαδικασία ή στοχαστική ανέλιξη ή απλά ανέλιξη όταν για κάθε $t \in T$ η $Z(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αυτή η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται διακριτού χρόνου, αν το σύνολο δεικτών T λαμβάνει διακριτές τιμές και συνεχούς χρόνου αν το σύνολο των δεικτών T είναι συνεχές.

1.4.1 Στοχαστικές ανελίξεις Poisson

Πρίν δούμε τις στοχαστικές ανελίξεις Poisson, ας ορίσουμε πρώτα μια μεγαλύτερη ομάδα ανελίξεων που είναι οι Μαρκοβιανές.

Ορισμός 1.13 Η πιθανότητα

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_t = x \mid Z_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}, \dots, Z_{t_0} = x_0] \\ = \mathbb{P}[Z_t = x \mid Z_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}], \quad \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \end{aligned}$$

εκφράζει την Μαρκοβιανή ανέλιξη για την ανέλιξη $\{Z(t), t \geq 0\}$, σε συνεχή χρόνο.

Όπως αφήσαμε να εννοηθεί, οι ανελίξεις Poisson είναι μια ειδική περίπτωση των Μαρκοβιανών ανελίξεων. Στον επόμενο Ορισμό περιγράφεται αυτή η κατηγορία.

⁵ Αυτό σημαίνει ότι όταν αυξάνεται η μια από τις δύο μεταβλητές, αναμένουμε και αύξηση της άλλης.

⁶ Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι ενώ αυξάνεται η μια, αναμένουμε μείωση της άλλης.

Ορισμός 1.14 Αν ορίσουμε με $\{N(t), t \geq 0\}$, μια στοχαστική ανέλιξη η οποία εκφράζει τον αριθμό εμφάνισης ενδεχομένων (είναι στην ουσία μια απαριθμητρία εμφάνισης τυχαίων γεγονότων) στο κλειστό διάστημα $[0, t]$, τότε για την ανέλιξη θα ισχύει:

1. $N(0) = 0$ και για $t \leq s$, τότε $N(t) \leq N(s)$,
2. σε ένα πολύ μικρό διάστημα, έστω h , μπορεί να υπάρξει άφιξη ενός μόνο γεγονότος, δηλαδή

$$\mathbb{P}[N(t+h) = n+k | N(t) = n] = \begin{cases} \lambda h + o(h), & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & k = 0 \\ o(h), & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

3. $\forall t < s$, η προσαύξηση $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της $N(t)$.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των ανελιξεων Poisson είναι ότι αν $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ (όπου λ εκφράζει την ένταση της ανέλιξης), τότε οι ενδιάμεσοι χρόνοι για την άφιξη ενός ενδεχομένου ακολουθούν μια κατανομή, έστω W , η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Για να γίνουμε πιο σαφείς, αν

$$Y_1 = \min\{t : N(t) = 1\}$$

$$Y_2 = \min\{t : N(t) = 2\}$$

⋮

⋮

⋮

⋮

$$Y_k = \min\{t : N(t) = k\},$$

είναι οι ακριβείς χρόνοι έλευσης κάθε ενδεχομένου, και παράλληλα

$$W_1 = Y_1$$

$$W_2 = Y_2 - Y_1$$

⋮

⋮

⋮

$$W_k = Y_k - Y_{k-1},$$

είναι οι χρόνοι μεταξύ των εμφανιζόμενων ενδεχομένων, τότε οι τ.μ. $W_i, i = 1, 2, \dots, k$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και έχουν ίδια κατανομή με τη τ.μ. W , για την οποία $W \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι ο χρόνος

μέχρι την άφιξη του k ενδεχομένου (δηλαδή η τ.μ. Y_k) ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους k, λ αφού η ακόλουθη τ.μ.

$$\begin{aligned} Y_k &= W_1 + W_2 + \dots + W_k \\ &= \sum_{j=1}^k W_j, \end{aligned}$$

είναι το άθροισμα k ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., οι οποίες ακολουθούν Εκθετική κατανομή (βλ. Θεώρημα 3.4).

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Εισαγωγή

Η πολυσύνθετη λειτουργία μιας ασφαλιστικής επιχείρησης οδήγησε στην ανάπτυξη της Θεωρίας Χρεοκοπίας. Η Θεωρία Χρεοκοπίας αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο της Αναλογιστικής επιστήμης, όπου κύριος στόχος της είναι να συμβάλει και να εξασφαλίσει την αρμονική λειτουργία της επιχείρησης. Από μαθηματική σκοπιά, ένα από τα κυρίαρχα αντικείμενα μελέτης αυτής είναι η εύρεση της πιθανότητας να συμβεί χρεοκοπία.

Τα πρώτα βήματα που γίνονται προκειμένου να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μοντελοποίηση: τόσο του ύψους ζημιών που έχουν ήδη καταγραφεί από την ασφαλιστική εταιρεία, όσο και του αριθμού άφιξης αυτών στη μονάδα του χρόνου. Όμως, ο αριθμός εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει άμεση σχέση με το χρόνο. Έτσι η χρήση υποδειγμάτων που βασίζονται σε στοχαστικές ανελίξεις είναι αναγκαία.

Ωστόσο, η χρεοκοπία μιας επιχείρησης δεν εξαρτάται μόνο από τις προαναφερθείσες τυχαίες μεταβλητές, αλλά από μια πλειάδα παραμέτρων που κάνει το έργο του Αναλογιστή αρκετά δυσχερές. Για το λόγο αυτό, πολλές φορές ο Αναλογιστής υποχρεούται να κάνει παραδοχές και υποθέσεις που ίσως απέχουν πολύ από την πραγματικότητα (παρ' όλα αυτά η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ένα πολύ καλό μέτρο για τον Ασφαλιστή, όταν έχει να αντιμετωπίσει ένα μεγάλο πλήθος ασφαλιστρών λόγω του νόμου των μεγάλων αριθμών).

Στο Κεφάλαιο αυτό πρόκειται να γίνει μια μικρή επισκόπηση σε αυτές τις ποσότητες όπως είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα, το έλλειμμα, η συσσωρευμένη απώλεια κ.ο.κ.. Συνάμα, θα παρουσιαστεί το κλασικό υπόδειγμα όπως αυτό εισήχθη από τον Philip Lundberg και κατόπιν η γενίκευση του από

τους H. Gerber και E. Shiu.

2.2 Γενικότητες

2.2.1 Η διαδικασία του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο

Κάθε επιχείρηση πέρα από τα επαρκή κεφάλαια που θα πρέπει να κατέχει για την αποτελεσματική δράση των φιλοδοξιών της, θα πρέπει να έχει επιπλέον και ένα περιθώριο κεφαλαίου για την αντιμετώπιση δυσμενών καταστάσεων που ενδέχεται να συμβούν μελλοντικά. Αυτές οι πολύ απρόσμενες καταστάσεις πιθανόν να προκληθούν, είτε από τη πραγματοποίηση πολύ υψηλών ασφαλισμένων κινδύνων (κινδύνων, δηλαδή, που η εταιρεία έχει ασφαλίσει και κατ' επέκταση έχει την υποχρέωση να διαχειριστεί και να αποζημιώσει σε περίπτωση έλευσης τους), είτε από επενδυτικά λάθη (η περίπτωση αυτή δεν λαμβάνεται υπόψη στο κλασικό υπόδειγμα και έτσι δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία).

Το κεφάλαιο, που αναφέρθηκε άνωθεν, καλείται **απόθεμα** ή **αρχικό αποθεματικό** και στόχος του είναι να συμβάλει στην έυρυθμη λειτουργία της επιχείρησης. Το αρχ. απόθεμα στην παρούσα εργασία θα συμβολίζεται ως u .

Ορισμός 2.1 Η διαδικασία του πλεονάσματος είναι η στοχαστική ανέλιξη

$$U(t) = u + P(t) + I(t) - S(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

όπου:

- u , συμβολίζει το αρχικό απόθεματικό ($U(0) = u$),
- $P(t)$, είναι το συνολικό ύψος των ασφαλίσεων που έχει λάβει η ασφαλιστική εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$,
- $I(t)$, μια ανέλιξη προσόδου στο διάστημα $[0, t]$, και
- $S(t)$, η ανέλιξη του συνολικού ύψους ζημιών στο διάστημα $[0, t]$.

Η διαδικασία κατά την οποία η σ.α. της (2.1) γίνεται αρνητική ονομάζεται 'χρεοκοπία'. Ενώ ο χρόνος συμβάντος αυτού του γεγονότος καλείται **χρόνος χρεοκοπίας** και συμβολίζεται ως T .

Δηλαδή

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\}, & \text{αν συμβεί χρεοκοπία} \\ \inf\{t : U(t) \geq 0\}, & \text{αν δεν συμβεί χρεοκοπία.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ορισμός 2.2 (i) Η τ.μ. $|U(T)|$ εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν κατά την στιγμή χρεοκοπίας T , και θα αναφέρεται ως έλλειμμα τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας T .

(ii) Η τ.μ. $U(T-)$ εκφράζει το ύψος του πλεονάσματος ακριβώς πριν την έλευση του καταστροφικού κινδύνου, και θα αναφέρεται ως πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

2.2.2 Υποθέσεις του κλασικού υποδείγματος

Έστω $Z_i, i = 1, 2, 3, \dots$ η τ.μ. που εκφράζει το ύψος της απαίτησης που προκλήθηκε από την έλευση του i ζημιογόνου ενδεχομένου. Οι Z_i θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και κατανέμονται ισόνομα με την τ.μ. Z . Τότε η συσσωρευμένη απώλεια ορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} S(t) &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{N(t)} \\ &= \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \end{aligned}$$

όπου, $N(t)$ είναι μια επίσης σ.α., η οποία συμβολίζει τον αριθμό ζημιών που εισέρχονται στην ασφαλιστική εταιρεία (αφίξεις) μέχρι την χρονική στιγμή t . Η σ.α. $N(t)$ καλείται επίσης **απαριθμητρία ζημιών** ή απλά **απαριθμητρία**.

Επίσης για την στοχαστική ανέλιξη $S(t)$ ισχύει

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}$$

Στη κλασική Θεωρία Χρεοκοπίας θεωρείται ότι η απαριθμητρία ζημιών είναι μια ανέλιξη Poisson. Δηλαδή γίνεται η υπόθεση ότι

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t), \quad \lambda > 0, t \geq 0$$

όπου, t ο χρόνος και η παράμετρος λ στην ουσία συμβολίζει τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων ζημιών στη μονάδα του χρόνου.

Επομένως, εύκολα βλέπουμε ότι $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ και $\mathbb{V}[(N(t))] = \lambda t$ (για περισσότερες πληροφορίες περί σ.α. Poisson, βλ. §1.4.1)

Μια επίσης βασική υπόθεση είναι ότι τα ασφάλιστρα που λαμβάνει η ασφαλιστική εταιρεία έχουν μια γραμμική σχέση με το χρόνο· παράλληλα αυτά θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τον αναμενόμενο ύψος ζημιών. Απλούστερα υποθέτουμε ότι

$$P(t) = ct, \tag{2.3}$$

όπου, c είναι μια θετική σταθερά η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$ct \geq E(S(t))$$

ή

$$ct \geq \lambda p_1 t,$$

όπου $p_1 = \mathbb{E}[Z]$. Για την ακρίβεια, θα πρέπει

$$c = (1 + \theta)\lambda p_1, \quad (2.4)$$

όπου, θ μια σταθερή παράμετρος που καλείται **συντελεστής επιβάρυνσης** και η οποία για να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία θα πρέπει να είναι (αυστηρά) θετική (για την απόδειξη βλ. Dickson, 2005).

Τέλος, υποθέτουμε ότι στο κλασικό υπόδειγμα οι μοναδικές εισροές της εταιρείας είναι τα ασφάλιστρα που λαμβάνει ως αντίτιμο για την ανάληψη του κινδύνου. Παράλληλα οι μοναδικές εκροές (έξοδα) είναι οι αποζημιώσεις των κινδύνων.

Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$I(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Αναφορικά με τα τελευταία, παραθέτουμε την επόμενη Παρατήρηση η οποία είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 2.1.

Παρατήρηση 2.1 Λαμβάνοντας υπόψη τον Ορισμό 2.1, καθώς επίσης και τις βασικές υποθέσεις που διέπουν το κλασικό υπόδειγμα της Θεωρίας Χρεοκοπίας (σχ. (2.3), (2.4) και (2.5)), η σ.α.

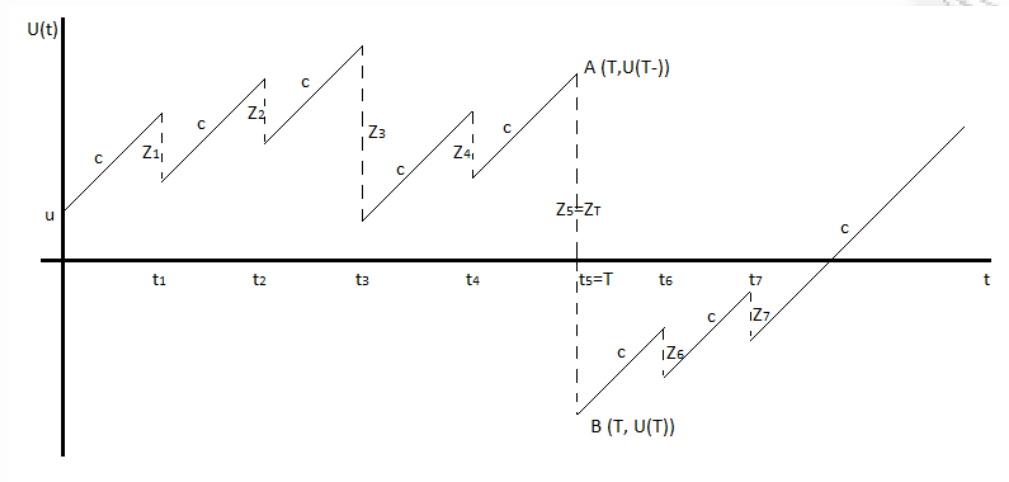
$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

καλείται **στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος στο κλασικό υπόδειγμα** και θα αναφέρεται (συντομογραφικά) ως ΣΑΠ.

Το Σχήμα 2.1, παρουσιάζει μια πιθανή πορεία της ΣΑΠ, όπως αυτή ορίστηκε στην ανωτέρω Παρατήρηση (Παρατήρηση 2.1). Είναι φανερό ότι η ΣΑΠ αυξάνεται με κλίση c και μειώνεται κάθε φορά που πραγματοποιείται ζημιά.

2.2.3 Εξίσωση Lundberg και συντελεστής προσαρμογής

Μια πολύ σημαντική παράμετρος, η οποία συνδέεται με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία, είναι ο **συντελεστής προσαρμογής R** . Αυτή η παράμετρος



Σχήμα 2.1: Η διαδικασία της ΣΑΠ

με τη σειρά της έχει άμεση σχέση με τον συντελεστή θ . Αναλυτικότερα ο συντελεστής R ικανοποιεί την λεγόμενη **εξίσωση Lundberg**, η οποία ορίζεται από την σχέση

$$1 + (1 + \theta) p_1 r = M_Z(r), \quad (2.7)$$

όπου, $M_Z(r) = \mathbb{E} [e^{rZ}]$ η ρηγ. της τ.μ. Z με $-\infty < r < \gamma$, $\gamma > 0$.

Η (2.7) αποδεικνύεται ότι έχει το πολύ μια θετική ρίζα, η οποία μπορούμε να πούμε ότι είναι το σημείο τομής των καμπυλών $\varepsilon_1 : y = M_Z(r)$ και $\varepsilon_2 : y = 1 + (1 + \theta) p_1 r$. Δηλαδή ο συντελεστής R είναι το σημείο τομής μιας αύξουσας, με τα κοίλα προς τα άνω συνάρτησης ($M'_Z(r) > 0$ και $M''_Z(r) > 0$) και μιας επίσης αύξουσας, συνάρτησης με κλίση $(1 + \theta) p_1$ (βλ. Dickson, 2005).

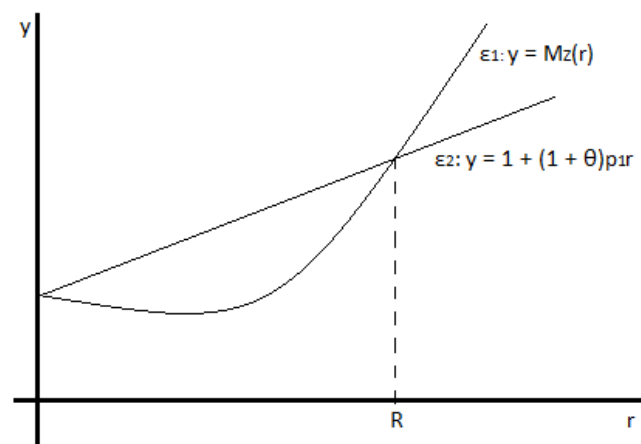
Στο Σχήμα 2.2, αναπαριστώνται γραφικώς τα όσα ειπώθηκαν για την επίλυση του συντελεστή R από δύο αύξουσες καμπύλες ε_1 και ε_2 .

Παράδειγμα 2.1 Ας υποθέσουμε ότι οι ζημιές ακολουθούν την Εκθετική κατανομή. Δηλαδή, έστω $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, $\beta > 0$, τότε είναι γνωστό ότι

$$M_Z(r) = \frac{\beta}{\beta - r},$$

και με χρήση της (1.7) προκύπτει

$$p_1 = \frac{1}{\beta}.$$



Σχήμα 2.2: Η επίλυση του συντελεστή προσαρμογής

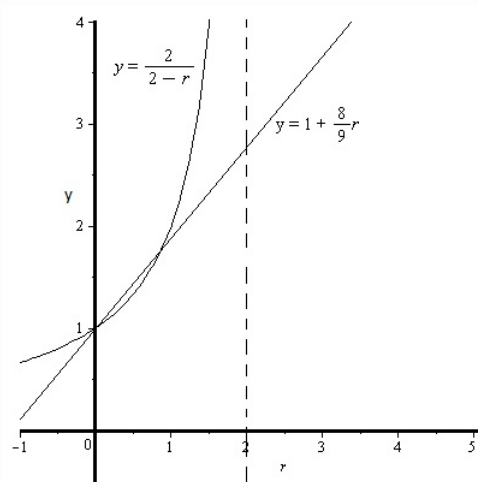
Τότε κάνοντας χρήση της (2.7) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 1 + (1 + \theta) \frac{1}{\beta} r &= \frac{\beta}{\beta - r} \\
 \Leftrightarrow (1 + \theta) \frac{r}{\beta} &= \frac{\beta}{\beta - r} - 1 \\
 \Leftrightarrow (1 + \theta) \frac{r}{\beta} &= \frac{r}{\beta - r} \\
 \Leftrightarrow (1 + \theta)(\beta - r)r &= \beta r \\
 \Leftrightarrow (\beta - r + \theta\beta - \theta r)r &= \beta r \\
 \Leftrightarrow \theta\beta r - (1 - \theta)r^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow [(\theta\beta - (1 - \theta)r)]r &= 0 \\
 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ή} \quad r &= \frac{\theta\beta}{1 - \theta}.
 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής προσαρμογής όταν οι κίνδυνοι ακολουθούν την Εκθετική κατανομή είναι

$$R = \frac{\theta\beta}{1 - \theta}. \quad (2.8)$$

Αν υποθέσουμε, δηλαδή, ότι $\beta = 2$ και $\theta = \frac{7}{9}$, τότε $R = \frac{7}{8}$. Το Σχήμα 2.3 παρουσιάζει την λύση του συντελεστή προσαρμογής κάτω από τις τελευταίες υποθέσεις.



Σχήμα 2.3: Η επίλυση του συντελεστή προσαρμογής για Εκθετικές αποζημιώσεις

2.2.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Όπως ήδη έχει ειπωθεί (βλ. §2.2.1), ως χρεοκοπία νοείται μια δυσμενής κατάσταση κατά την οποία το αποθεματικό της εταιρείας γίνεται αρνητικό. Βασικό αντικείμενο της Θεωρίας Χρεοκοπίας είναι ο ακριβής υπολογισμός αυτής της πιθανότητας. Ακριβέστερα, αν T είναι η χ.σ. στην οποία συμβαίνει χρεοκοπία για πρώτη φορά (βλ. σχ. (2.2)), τότε η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου ορίζεται από την σχέση

$$\psi(u) = \mathbb{P}[T < \infty | U(0) = u],$$

ενώ η πιθανότητα να μην συμβεί χρεοκοπία, από την σχέση

$$\begin{aligned} \delta(u) &= 1 - \psi(u) \\ &= \mathbb{P}[T = \infty | U(0) = u]. \end{aligned}$$

Στις τελευταίες σχέσεις βλέπουμε ότι ενυπάρχουν τα ενδεχόμενα $\{T < \infty\}$, το οποίο σημαίνει ότι συμβαίνει χρεοκοπία κάποια στιγμή στο μέλλον, εν αντιθέσει με το $\{T = \infty\}$, το οποίο υποδηλώνει ότι δεν συμβαίνει χρεοκοπία.

Αφού παραθέσαμε τους μαθηματικούς Ορισμούς της πιθανότητας να συμβεί χρεοκοπία και μη για το κλασικό υπόδειγμα, μπορούμε να αναφέρουμε και να διατυπώσουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως αυτή εισήχθη από τον Philip Lundberg.

Το 1903 ο θεμελιωτής της κλασικής Θεωρίας Χρεοκοπίας, υποστήριξε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν η απαριθμητρία $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ είναι μια σ.α. Poisson

με παραμέτρους λ και t , τα ασφάλιστρα είναι σταθερά στη μονάδα του χρόνου και δεν υπάρχουν άλλα έσοδα πλὴν των ασφαλίσεων, τότε η πιθανότητα $\psi(u)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης τύπου Volterra δευτέρας τάξης (γενικά περί ανανεωτικών εξισώσεων βλ. Σταυρακάκης, 1999).

Η ανανεωτική εξίσωση που χρησιμοποίησε ο Σουηδός μαθηματικός (από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας) είναι

$$\begin{aligned} \psi(u) = & \underbrace{\int_0^\infty f_W(t) \left\{ \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x) f_Z(x) dx \right\} dt}_{\text{εμφανίζεται ζημιά, αλλά δεν προκαλεί χρεοκοπία}} \\ & + \underbrace{\int_0^\infty f_W(t) \mathbb{P}[Z > u+ct] dt}_{\text{συμβαίνει χρεοκοπία}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

και

$$\delta(u) = \int_0^\infty f_W(t) \left\{ \int_0^{u+ct} \delta(u+ct-x) f_Z(x) dx \right\} dt, \quad (2.10)$$

όπου, $f_Z(\bullet)$ και $f_W(\bullet)$ οι πυκνότητες των τ.μ. των κινδύνων Z και των ενδιάμεσων χρόνων W αντίστοιχα.

Όπως είδαμε και στην §1.4.1, όταν η απαριθμητρία είναι μια σ.α. Poisson, τότε οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Εκθετική κατανομή (δηλαδή αν $T_i \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, τότε $W \sim \mathcal{E}(\lambda)$).

Επιλύοντας την (2.9), προκύπτει (απόδ. Dickson, 2005)

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-x) f_e(x) dx + \frac{1}{1+\theta} \bar{F}_e(u), \quad (2.11)$$

όπου

$$\bar{F}_e(x) = \frac{1}{p_1} \int_x^\infty \bar{F}_Z(y) dy,$$

η σ.ε.π. της κατανομής ισορροπίας της τ.μ. L_1 ή Z_e που αντιστοιχεί στην κατανομή των αποζημιώσεων F της τ.μ. Z . Η κατανομή αυτή έχει σ.π.π.

$$f_e(x) = \frac{1}{p_1} \bar{F}_Z(x).$$

Κάνοντας χρήση μετασχηματισμών Laplace στην (2.11) προκύπτει

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(s) &= \frac{1}{1+\theta} \hat{\psi}(s) \hat{f}_e(s) + \frac{1}{1+\theta} \hat{\bar{F}}_e(s) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{1+\theta} \hat{f}_e(s)\right) \hat{\psi}(s) &= \frac{1}{1+\theta} \hat{\bar{F}}_e(s) \\ \Leftrightarrow \hat{\psi}(s) &= \frac{\frac{1}{1+\theta} \hat{\bar{F}}_e(s)}{1 - \frac{1}{1+\theta} \hat{f}_e(s)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βλέπουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δεν είναι τίποτε άλλο από τη δεξιά ουρά μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι

$$Y = L_1 + L_2 + \dots + L_M,$$

όπου, $M \sim \mathcal{G}(p)$ με $p = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

Παράδειγμα 2.2 Ας δούμε την περίπτωση που οι κίνδυνοι ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, δηλαδή $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, $\beta > 0$. Τότε

$$\hat{f}_e(s) = \frac{\beta}{s + \beta},$$

και

$$\hat{F}_e(s) = \frac{1}{s + \beta},$$

οι μεταχ. Laplace της σ.π.π. και της σ.ε.π. της κατανομής ισορροπίας L_1 (βλ. Παράδειγμα 1.2), καθώς $L_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$, αφού

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \frac{1}{p_1} \bar{F}_Z(x) \\ &= \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \\ &= \beta e^{-\beta x}. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.1) και τις τελευταίες σχέσεις, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(s) &= \frac{\frac{1}{1+\theta} \frac{1}{s+\beta}}{1 - \frac{1}{1+\theta} \frac{\beta}{s+\beta}} \\ &= \frac{1}{(1+\theta)(s+\beta) - \beta} \\ &= \frac{1}{s + \theta s + \theta\beta} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \frac{1}{s + \frac{\theta\beta}{1+\theta}}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

και εφαρμόζοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην (2.13), τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν την Εκθετική

κατανομή είναι

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u} \\ &= \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}.\end{aligned}$$

2.3 Η γενίκευση του υποδείγματος της κλασικής Θεωρίας Χρεοκοπίας

Οι Gerber και Shiu στα τέλη του προηγούμενου αιώνα, κατάφεραν να γενικεύσουν το κλασικό υπόδειγμα χρεοκοπίας εισάγοντας στην πιθανότητα χρεοκοπίας μια μη αρνητική διδιάστατη συνάρτηση (συνάρτηση ποινής), η οποία για κατάλληλα ορίσματα παράγει ένα πλήθος εξαγόμενων συναρτήσεων.

Στην παρούσα Ενότητα, θα μας απασχολήσουν τρεις έννοιες: ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν την έλευση του καταστρεπτικού ενδεχομένου¹ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας (ή το αποθεματικό ακριβώς μετά την έλευση του καταστρεπτικού ενδεχομένου). Επίσης, θα παραχθούν συναρτήσεις και αναλυτικές εκφράσεις που περιγράφουν μόνο τις δύο τελευταίες ποσότητες, καθώς μέσω αυτών η παρούσα εργασία διεκπεραιώνεται.

2.3.1 Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Όπως ήδη έχει οριστεί, συμβολίζουμε με $U(T-)$ το πλεόνασμα της εταιρείας ακριβώς πριν την έλευση του καταστρεπτικού ενδεχομένου (πλεόνασμα), και με $|U(T)|$ το πλεόνασμα ακριβώς μετά την έλευση του καταστρεπτικού ενδεχομένου (έλλειμμα). Τότε η συνάρτηση

$$\phi_\delta(u) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} \omega(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right], \quad (2.14)$$

ονομάζεται **προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu** ή **αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής**. Η δείκτρια $I(T < \infty) = 1$ εκφράζει το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία, εν αντιθέση του $I(T < \infty) = 0$, να μην συμβεί χρεοκοπία. Ενώ ($\delta > 0$) είναι ένας προεξοφλητικός παράγοντας. Η δύο διαστάσεων μη αρνητική συνάρτηση $\omega(x, y)$ που υπεισέρχεται στην (2.14)

¹Ονομάζεται εκείνο το ενδεχόμενο το οποίο προκαλεί την χρεοκοπία και συνήθως συμβολίζεται ως Z_T .

ονομάζεται **συνάρτηση ποινής** και για διάφορα ορίσματα προκύπτουν σημαντικές ποσότητες για τη συνάρτηση $\phi_\delta(u)$.

Αναφορικά με τα τελευταία, παραθέτουμε μερικές περιπτώσεις της συνάρτησης ποινής.

(i) Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$, τότε οδηγούμαστε στην πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\phi_{\delta=0} \equiv \psi(u) = \mathbb{E} \left[I(T < \infty) \mid U(0) = u \right],$$

(ii) για $\delta > 0$ και $w(x, y) = 1$, προκύπτει ο μτσχ. Laplace του χρόνου χρεοκοπίας στο σημείο δ ή προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\phi_\delta \equiv \bar{K}_\delta(u) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u \right],$$

(iii) Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(U(T-) = x)I(|U(T)| = y)$, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, την στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u) &\equiv f_\delta(x, y|u) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x) I(|U(T)| = y) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]. \end{aligned}$$

(iv) Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(U(T-) = x)$, προκύπτει η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα της τ.μ. του πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u) &\equiv f_{1\delta}(x|u) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} I(U(T-) = x) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]. \end{aligned}$$

(v) Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(U(T-) = y)$, παράγεται η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα της τ.μ. του πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u) &\equiv f_{2\delta}(y|u) \equiv g(u, y) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]. \end{aligned}$$

(vi) Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = e^{-\rho|U(T)|}$, παράγεται ο μτσχ. Laplace της περιθώριας τ.μ. του ελλείμματος, τη στιγμή της χρεοκοπίας στο σημείο ρ (λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, βλ. (2.17)), δηλαδή

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &\equiv \hat{g}(u, \rho) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\delta T - \rho|U(T)|} I(T < \infty) \mid U(0) = u \right].\end{aligned}$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, για $\delta = 0$ η περίπτωση (vi) συμπίπτει με την περίπτωση (i), καθότι $\delta = 0 \Rightarrow \rho = 0$.

2.3.2 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg, αποτελεί μια γενίκευση της (2.7) και η ρίζα αυτής παίζει κεντρικό ρόλο σε κάθε συνάρτηση που παράγεται από οποιοδήποτε όρισμα στη συνάρτηση ποινής.

Για να γίνουμε πιο σαφείς, έστω δύο καμπύλες

$$\varepsilon_1 : y = \delta + \lambda - c\xi, \quad (2.15)$$

και

$$\varepsilon_2 : y = \lambda \hat{f}_Z(\xi). \quad (2.16)$$

Το σημείο τομής, των δύο τελευταίων καμπυλών, ορίζει την **γενικευμένη εξίσωση Lundberg**, δηλαδή

$$\delta + \lambda - c\xi = \lambda \hat{f}_Z(\xi), \quad (2.17)$$

όπου $\delta, \delta \geq 0$, ένας προεξοφλητικός παράγοντας, λ η ένταση της ανελίξεως Poisson, ξ ένας μη αρνητικός αριθμός και $\hat{f}_Z(\xi)$ ο μτσχ. Laplace της τ.μ. Z (υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει).

Η (2.17), αποδεικνύεται (βλ. Gerber - Shiu, 1997(α) ή Dickson, 2005) ότι έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα. Αφού η καμπύλη της (2.16) είναι φθίνουσα συνάρτηση με τα κοίλα προς τα άνω (καθώς $\hat{f}'_Z(\xi) = -\int_0^\infty e^{-\xi x} x f_Z(x) dx > 0$ και $\hat{f}''(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x} x^2 f_Z(x) dx > 0$), ενώ η καμπύλη της (2.15) έχει αρνητική κλίση ($-c$) και στο σημείο $\xi = 0$ έχει τιμή $\delta + \lambda \geq \lambda = \lambda \hat{f}_Z(0)$.

Το γεγονός αυτό, φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα 2.4. Τέλος, η (2.17), βλέπουμε ότι για $\delta = 0$, ανάγεται στην εξίσωση του Lundberg που είδαμε στην (2.7).

Παράδειγμα 2.3 Ας δούμε, πάλι, την περίπτωση που οι ζημιές ακολουθούν την Εκθετική κατανομή (από Παράδειγμα που παρατίθεται στο Gerber - Shiu, 1998) με παράμετρο β , $\beta > 0$. Στο Παράδειγμα 1.2 είδαμε ότι

$$\hat{f}_Z(s) = \frac{\beta}{\beta + s},$$

άρα από την (2.17) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \delta + \lambda - c\rho &= \lambda \frac{\beta}{\beta + \rho} \\ \Leftrightarrow (\delta + \lambda - c\rho)(\beta + \rho) &= \lambda\beta \\ \Leftrightarrow \delta\beta + \delta\rho + \lambda\beta + \lambda\rho - \beta c\rho - c\rho^2 &= \lambda\beta \\ \Leftrightarrow c\rho^2 - (\delta + \lambda - \beta c)\rho - \delta\beta &= 0, \end{aligned}$$

επομένως, η λύση της τελευταίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\rho = \frac{(\delta + \lambda - \beta c) \pm \sqrt{(\delta + \lambda - \beta c)^2 + 4\delta\beta c}}{2c}. \quad (2.18)$$

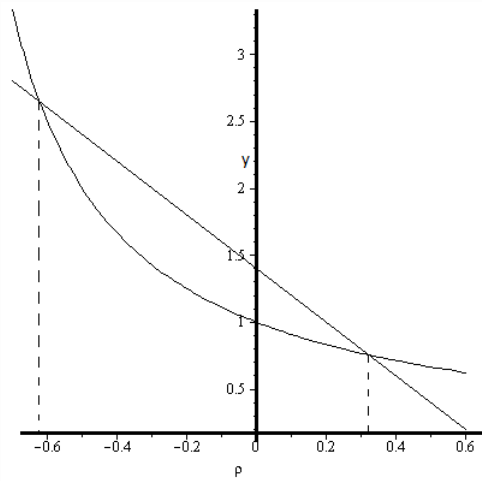
Αν εξετάσουμε την περίπτωση που $\beta = 1$, $\lambda = 1$ και $\delta = 0.4$ τότε προκύπτει $\rho = -0.621$ ή $\rho = 0.321$ (προφανώς η αρνητική ρίζα απορρίπτεται).

2.3.3 Η ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση

Στη παρούσα Ενότητα θα μελετήσουμε και θα διερευνήσουμε κάποια σημαντικά μέτρα κινδύνων, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στην §2.3.1. Αρχικά θα παρουσιαστεί η θεμελιώδης ανανεωτική εξίσωση σε αντιστοιχία με την ανανεωτική εξίσωση της σχ. (2.9) και κατόπιν πρόκειται να παρουσιαστούν εξαγόμενες αναλυτικές εκφράσεις για τα προαναφερθέντα μέτρα συναρτήσεως άλλων μέτρων κινδύνων.

Έτσι, αν ορίσουμε ως $f(x, y, t|u)$ την από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα των μεταβλητών πλεονάσματος $U(T-)$, ελλείμματος $|U(T)|$ και του χρόνου χρεοκοπίας T για αρχικό κεφάλαιο u , $u \geq 0$, τότε η ποσότητα $f(x, y, t|u)dx dy dt$ εκφράζει την πιθανότητα, τη στιγμή της χρεοκοπίας το πλεόνασμα να είναι

$$u + x \leq U(T-) \leq u + x + dx,$$



Σχήμα 2.4: Η επίλυση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg

και το έλλειμμα

$$u - y - dy \leq U(T) \leq u - y.$$

Η πυκνότητα $f(x, y, t|u)$ είναι πράγματι ελλειμματική καθότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y, t|u) dx dy dt &= \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u) \\ &= \psi(u) < 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Είναι πασιφανές ότι αν η χρεοκοπία είναι βέβαιη ($\psi(u) = 1$), τότε η τελευταία πυκνότητα είναι μη ελλειμματική (βλ. §1.3.1).

Χρεοκοπία, όπως είπαμε συμβαίνει όταν η ΣΑΠ, για πρώτη φορά λαμβάνει αρνητική τιμή. Αυτό το γεγονός θα συμβεί όταν $x > u + ct$, άρα για $x < u + ct$ θα έχουμε

$$f(x, y, t|u) = 0.$$

Από το γεγονός αυτό και βασιζόμενοι στον πολλαπλασιαστικό τύπο, η συνάρτηση $\phi_\delta(u)$ μπορεί κάλλιστα να αναλυθεί από μια ανανεωτική εξίσωση ως

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u) = & + \underbrace{e^{-(\delta+\lambda)h} \phi_\delta(u + ch)}_{\text{δεν εμφανίζεται απαίτηση}} \\ & + \underbrace{\int_0^h \left\{ \int_0^{u+ct} \phi_\delta(u + ct - x) f_Z(x) dx \right\} e^{-(\delta+\lambda)t} dt}_{\text{εμφανίζεται απαίτηση αλλά δεν συμβαίνει χρεοκοπία}} \\ & + \underbrace{\int_0^h \left\{ \int_{u+ct}^x w(u + ct, x - u - ct) f_Z(x) dx \right\} e^{-(\delta+\lambda)t} dt}_{\text{συμβαίνει χρεοκοπία}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

όπου $h > 0$ και $(0, h)$ το διάστημα κατά το οποίο η πιθανότητα να μην εμφανιστεί ζημιά είναι $e^{-\lambda h}$, ενώ η πιθανότητα να υπάρξει απαίτηση στο διάστημα $(t, t + dt)$ είναι $\lambda e^{-\lambda t} dt$.

Στην τελευταία σχέση για $h = 0$, $\phi_\rho(u) = e^{-\rho u} \phi(u)$ και παραγωγίζοντας ως προς u , προκύπτει

$$c\phi'_\rho(u) = + (\delta + \lambda - c\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} f_Z(x) dx - \lambda e^{-\rho u} \gamma(u), \quad (2.21)$$

όπου, $\gamma(u) = \int_0^\infty w(u, y) f_Z(u+y) dy$. Επίσης η ποσότητα $\delta + \lambda - c\rho$, η οποία παρατηρείται στο δεξιό μέλος της (2.21) είναι το αριστερό μέλος της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, που περιγράφεται στην (2.17).

2.3.4 Κάποια μέτρα κινδύνου

Στην τελευταία Ενότητα είδαμε την γενικευμένη ανανεωτική (ελλειμματική) εξίσωση στην οποία υπεισέρχεται η συνάρτηση ποινής. Σε αυτή την Ενότητα θα παρουσιάσουμε μερικά μέτρα κινδύνων, τα οποία παράγονται για κατάλληλα ορίσματα της συνάρτησης ποινής.

Σημαντικότερο ρόλο στην ανάλυση που θα αναπτυχθεί για τη σχέση μεταξύ των τ.μ. $U(T-)$, $|U(T)|$ δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία $\{T < \infty\}$ παίζει η από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητα αυτών των τυχαίων μεταβλητών, η οποία παράγεται θέτοντας στην συνάρτηση ποινής $w(x, y) = I(U(T-) = x) I(|U(T)| = y)$.

Ορισμός 2.3 Η από κοινού (ελλειμματική) προεξοφλημένη πυκνότητα πιθανότητα των τ.μ. του ελλείματος $|U(T)|$ και πλεονάσματος $U(T-)$, ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$f_\delta(x, y|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_\delta(x, y, t|u) dt. \quad (2.22)$$

Για την ακρίβεια, οι καθηγητές Gerber και Shiu (βλ. Gerber-Shiu, 1998) απέδειξαν ότι η πυκνότητα του Ορισμού 2.3 μπορεί να υπολογιστεί μέσω της περιθώριας προεξοφλημένης πυκνότητας της τ.μ. του πλεονάσματος και της τ.μ. των κινδύνων Z .

Ακριβέστερα,

$$f_\delta(x, y|u) = f_{1\delta}(x|u) \frac{f_Z(x+y)}{1 - F_Z(x)}, \quad x, y > 0, \quad (2.23)$$

όπου, $f_\delta(x|u)$ η περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. $U(T)$ και η οποία προκύπτει για συνάρτηση ποινής $I(U(T) = x)$. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η συνάρτηση

αυτή εκφράζει την αναμενόμενη παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας, τη στιγμή που το απόθεμα 'αγγίζει' το σημείο x . Το πρόβλημα της συνάρτησης $f_\delta(x, y|u)$ έγγειται στην έτερη συνάρτηση $f_{1\delta}(x|u)$ και αυτό διότι η τελευταία παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά όταν $u > 0$ (για $x \geq u$ και για $x < u$).

Πρόταση 2.1 Η προεξοφλημένη περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$, υπολογίζεται από την σχέση

$$f_{1\delta}(x|u) = \begin{cases} f_{1\delta}(x|0) \frac{e^{\rho u} - \hat{g}_\delta(u, \rho)}{1 - \hat{g}_\delta(0, \rho)}, & \text{αν } x > u \geq 0 \\ f_{1\delta}(x|0) \frac{e^{\rho x} \hat{g}_\delta(u - x, \rho) - \hat{g}_\delta(u, \rho)}{1 - \hat{g}_\delta(0, \rho)}, & \text{αν } 0 < x \leq u. \end{cases} \quad (2.24)$$

όπου

$$f_{1\delta}(x|0) = \frac{\lambda}{c} (1 - F_Z(x)). \quad (2.25)$$

Απόδ. Βλ. Gerber-Shiu, 1998. ■

Πρόταση 2.2 Η από κοινού προεξοφλημένη (ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. του ελλείμματος και πλεονάσματος, υπολογίζεται από την σχέση

$$f_\delta(x, y, |u) = \begin{cases} f_\delta(x, y|0) \frac{e^{\rho u} - \hat{g}_\delta(u, \rho)}{1 - \hat{g}_\delta(0, \rho)}, & \text{αν } x > u \geq 0 \\ f_\delta(x, y|0) \frac{e^{\rho x} \hat{g}_\delta(u - x, \rho) - \hat{g}_\delta(u, \rho)}{1 - \hat{g}_\delta(0, \rho)}, & \text{αν } 0 < x \leq u, \end{cases} \quad (2.26)$$

όπου

$$f_\delta(x, y|0) = \frac{\lambda}{c} e^{-\delta x} f_Z(x + y). \quad (2.27)$$

Απόδ. Η σχ. (2.26) είναι άμεση συνέπεια των σχ. (2.23) και (2.24). ■

Ας μελετήσουμε, τώρα, την περίπτωση που δεν υπάρχει προεξοφλητικός παράγοντας ($\delta = 0$). Για $\delta = 0$, τότε όπως έχουμε προαναφέρει $\rho = 0$ και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \hat{g}(u, 0) &= \mathbb{E} \left[e^{-0T - 0|U(T)|} I(T < \infty) \mid U(0) = u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[I(T < \infty) \mid U(0) = u \right] = \psi(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.4 Στο Παράδειγμα 2.2 μελετήσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας δοθέντος αρχ. κεφαλαίου u , στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$.

Προέκυψε ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}.$$

Από την τελευταία σχέση και την (2.25), για $\delta = 0$ όταν $c = (1+\theta)\frac{\lambda}{\beta}$, προκύπτει

$$f(x|0) = \frac{1}{1+\theta} \beta e^{-\beta x}, \quad (2.28)$$

οπότε η (2.24) (για $\delta = 0$) γίνεται

$$f(x|u) = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta} \beta e^{-\beta x} \frac{1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}}{1 - \frac{1}{1+\theta}}, & \text{αν } x > u \geq 0 \\ \frac{1}{1+\theta} \beta e^{-\beta x} \frac{e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}(u-x)} - e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}}{1 - \frac{1}{1+\theta}} \frac{1}{1+\theta}, & \text{αν } 0 < x \leq u. \end{cases} \quad (2.29)$$

Επομένως, η περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα της τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$, όταν το αρχ. απόθεμα είναι u και οι ζημιές ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, είναι

$$f(x|u) = \begin{cases} \frac{\beta e^{-\beta x}}{\theta} \left(1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}\right), & \text{αν } x > u \geq 0 \\ \frac{\beta e^{-\beta x}}{\theta(1+\theta)} \left(e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}x} - 1\right) e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}, & \text{αν } 0 < x \leq u. \end{cases} \quad (2.30)$$

Από την σχέση

$$\frac{f_Z(x+y)}{F_Z(x)} = \beta e^{-\beta y},$$

και την (2.26), προκύπτει

$$f(x, y|u) = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\theta} e^{-\beta(x+y)} \left(1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}\right), & \text{αν } x > u \geq 0 \\ \frac{\beta^2}{\theta(1+\theta)} e^{-\beta(x+y)} \left(e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}x} - 1\right) e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}u}, & \text{αν } 0 < x \leq u, \end{cases} \quad (2.31)$$

η από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα των τ.μ. $U(T-)$, $|U(T)|$ (για αρχ. απόθεμα ίσο με u).

Τέλος, η περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα της τ.μ. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, βρίσκεται αρκεί να ολοκληρώσουμε την (2.31) ως προς x .

Δηλαδή

$$\begin{aligned} g(u, y) &= \int_0^{\infty} f(x, y|u) dx \\ &= \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta y} f(x|u) dx \\ &= f_Z(y) \psi(u) \\ &= \frac{\beta}{1+\theta} e^{-\beta y} e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta} u}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Κεφάλαιο 3

Η βαθμίδα αποτυχίας

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η εύρεση του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών του πλεονάσματος και του ελλείμματος (δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία) για ποικίλλες κατανομές κινδύνων. Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο, το πρόσημο αυτού του συντελεστή επίσης ποικίλλει (είναι αρνητικό, θετικό και μηδέν για διάφορες κατανομές). Το γεγονός αυτό εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της κατανομής κινδύνων, και για την ακρίβεια έχει άμεση σχέση με την συμπεριφορά της βαθμίδα αποτυχίας (αν δηλαδή είναι αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή) της κατανομής ισορροπίας.

Έτσι, θεωρούμε χρήσιμο να παρουσιάσουμε τις κατανομές κινδύνων που χρησιμοποιούνται για την μελέτη του συντελεστή συσχέτισης, καθώς και τις αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας τους. Για την ακρίβεια πρόκειται να μελετηθεί η Εκθετική, η μίξη δύο και τριών Εκθετικών, η Γάμμα, η μίξη μιας Εκθετικής και μιας Γάμμα, η μίξη δύο Εκθετικών και μιας Γάμμα και τέλος η μίξη δύο Γάμμα και μιας Εκθετικής κατανομής.

3.1 Κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή της υπό μελέτη μη αρνητικής τ.μ. είναι F και έχει σ.κ. $F(\bullet)$, η οποία σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2 υπολογίζεται από την σχέση

$$F(x) = \int_0^x dF(w), \quad (3.1)$$

με βασικές υποθέσεις

$$F(0-) = 0, F(+\infty) = 1$$

τότε μπορούμε να διατυπώσουμε τον επόμενο Ορισμό από τη Θεωρία Αξιοπιστίας (Reliability Theory).

Ορισμός 3.1 Για μια συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(\bullet)$, η συνάρτηση

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \log \bar{F}(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad (3.2)$$

ονομάζεται βαθμίδα αποτυχίας (*failure rate* ή *hazard rate*) και εκφράζει τον ρυθμό κατά τον οποίο αποτυγχάνει μια μονάδα.

Αντικείμενο μελέτης, άρα, είναι η συνάρτηση $r(\bullet)$. Ο διαχωρισμός των κατανομών κινδύνων γίνεται με βάση την μονοτονία αυτής της συνάρτησης στον θετικό ημιάξονα. Οι κλάσεις που ανήκει η εκάστοτε κατανομή καλείται 'κλάση γήρανσης'. Ο επόμενος Ορισμός είναι διαφωτιστικός.

Ορισμός 3.2 Μια μη διακριτή τ.μ. Z , με κατανομή F ανήκει στην κλάση γήρανσης *IFR* (*DFR*) αν¹ η βαθμίδα αποτυχίας $r(t)$ της κατανομής είναι αύξουσα (φθίνουσα) για $t \geq 0$, τ.ω. $F(t) < 1$.

Στην περίπτωση $r(t) = c$ (σταθερός θετικός αριθμός), τότε η συνάρτηση $r(\bullet)$ είναι ταυτόχρονα φθίνουσα και αύξουσα με άμεσο αποτέλεσμα $Z \in IFR$ και $Z \in DFR$ στον ίδιο χρόνο. Είναι προφανές ότι σε αυτή την κλάση ανήκει η Εκθετική κατανομή, αφού αν

$$f(x) = \beta e^{-\beta x},$$

η σ.π.π. της εν λόγω κατανομής, τότε η συνάρτηση

$$\bar{F}(x) = e^{-\beta x},$$

παριστάνει την σ.επ. αυτής της κατανομής και κατα συνέπεια η βαθμίδα αποτυχίας (κάνοντας χρήση της (3.2)), θα είναι

$$r(t) = \beta, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

Η τελευταία σχέση μας υποδηλώνει ότι

$$\frac{\bar{F}(t_1 + t_2)}{\bar{F}(t_2)} = \bar{F}(t_1). \quad (3.4)$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο, συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 Αν υποτεθεί ότι για κάποιο $t > 0$, $0 < F(t) < 1$, τότε η μόνη σ.κ. που ικανοποιεί την (3.4), είναι η κατανομή $\bar{F}(x) = e^{-\beta x}$.

¹Η "λέξη" αυτή είναι πιστή μετάφραση της συντόμευσης iff, που σημαίνει αν και μόνο αν.

Απόδ. Βλ. Gertsbakh, 1989. ■

Το τελευταίο Θεώρημα αποδεικνύει ότι η Εκθετική κατανομή είναι η μόνη μη διακριτή κατανομή² που έχει σταθερή συνάρτηση $r(\bullet)$. Για τον λόγο αυτό αποκαλείται ως κατανομή με 'έλλειψη' μνήμης (memoryless distribution).

Ένα παραστατικό παράδειγμα που κατανοείται πλήρως η έννοια της έλλειψης μνήμης μιας κατανομής, είναι η εφαρμογή της βαθμίδας αποτυχίας στον κλάδο των Ασφαλίσεων Ζωής. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι ο υπολοιπόμενος χρόνος ενός ατόμου ακολουθεί την Εκθετική κατανομή, τότε το άτομο αυτό παραμένει αγέραστο, με τη πάροδο του χρόνου αλλά όχι και αθάνατο.

3.2 Κάποιες ζημιοκατανομές

Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή του παρόντος, στην παρούσα Ενότητα πρόκειται να μελετηθεί η βαθμίδα αποτυχίας, για κατανομές που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα Κεφάλαια. Προτού, όμως γίνει αυτό, ας δούμε δύο Θεωρήματα τα οποία είναι ιδιαίτερος χρηστικά για την θεωρητική απόδειξη της κλάσης γήρανσης που ανήκει η Εκθετική και η Erlang κατανομή (κατανομή Γάμμα για ακέραια τιμή της παραμέτρου κλίμακας).

Θεώρημα 3.2 (Βαθμίδα αποτυχίας της συνέλιξης) Αν για δύο συνεχείς κατανομές F_1 και F_2 , οι οποίες ανήκουν στην κλάση IFR , τότε η συνέλιξη (convolution) H αυτών, που δίνεται από την σχέση

$$H(x) = \int_0^{\infty} F_1(x-w)dF_2(w),$$

ανήκει επίσης στην κλάση γήρανσης IFR ($H \in IFR$).

Απόδ. Βλ. Barlow & Proschan, 1996. ■

Θεώρημα 3.3 (Βαθμίδα αποτυχίας της μίξης) Αν οι μη διακριτές κατανομές F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ανήκουν στην κλάση γήρανσης DFR , τότε η μίξη κατανομών G , που δίνεται από το άθροισμα

$$G(x) = \sum_1^n a_i F_i(x),$$

με $a_i \geq 0$, που ικανοποιούν την σχέση $\sum_1^n a_i = 1$, ανήκει (επίσης) στην κλάση κατανομών DFR ($G \in DFR$).

²Τονίζεται εντόνως η συνέχεια της Εκθετικής κατανομής, καθώς η Γεωμετρική κατανομή λειτουργεί επίσης με έλλειψη μνήμης και 'αντικαθιστά' την εν λόγω κατανομή στην διακριτή περίπτωση.

Απόδ. Βλ. Barlow & Proschan, 1996. ■

Παρατήρηση 3.1 Αν οι μη διακριτές κατανομές F_i , στο Θεώρημα 3.3, ήταν *IFR*: δεν συνεπάγεται (κατ' ανάγκη) ότι και η μίξη κατανομών G ανήκει στην κλάση *IFR*.

Παραθέτουμε τώρα δύο Προτάσεις, που βασίζονται στα Θεωρήματα 3.2 και 3.3 αντίστοιχα. Ενώ η αλγεβρική τους υπόσταση παρατίθεται στις επόμενες Υπό-ενότητες.

Πρόταση 3.1 Έστω τ.μ. $Z_i, i = 1, 2, \dots, n$, για τις οποίες $Z_i \sim \mathcal{E}(\beta_i)$. Τότε η τ.μ. $W \sim \sum_{i=1}^n a_i Z_i$, με $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, ανήκει στην κλάση *DFR* ($W \in \text{DFR}$).

Απόδ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, η Εκθετική κατανομή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας $r_i(t) = \beta_i$. Έτσι η τ.μ. Z_i ανήκει και στις δύο κλάσεις κατανομών.

Επομένως $Z_i \in \text{DFR}$. Όμως σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3, η μίξη κατανομών *DFR* είναι επίσης *DFR*. ■

Το ακόλουθο Θεώρημα είναι καταλυτικό προκειμένου να αποδειχθεί η επόμενη Πρόταση που σχετίζεται με την κλάση γήρανσης, που ανήκει η Erlang κατανομή.

Θεώρημα 3.4 Αν για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Z_i ισχύει $Z_i \sim \mathcal{E}(\beta)$, για $i = 1, 2, \dots, n$, τότε για την κατανομή του αθροίσματος ισχύει $\sum_i Z_i \sim \mathcal{G}(n, \beta)$.

Απόδ. (δια μέσω συνελίξεων) Βλ. οποιαδήποτε βιβλίο σχετικό με τη Θεωρία Πιθανοτήτων. ■

Πρόταση 3.2 Έστω οι μη διακριτές τ.μ. $Z_i, i = 1, 2, \dots, n$, οι οποίες είναι ισόνομα κατανομημένες με την τ.μ. Z , για την οποία $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε η τ.μ. $W \sim \sum Z_i$, ανήκει στην κλάση γήρανσης *IFR*.

Απόδ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, η τ.μ. Z_i είναι *IFR*. Έτσι, βασιζόμενοι στο Θεώρημα 3.4 η τ.μ. $W \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, είναι *IFR*. ■

3.2.1 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Αν η μη διακριτή τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη δύο Εκθετικών κατανομών, τότε η σ.π.π. $f(\bullet)$ της κατανομής F , είναι της μορφής

$$f(x; a, \beta, \gamma) = a \beta e^{-\beta x} + (1 - a) \gamma e^{-\gamma x}, \quad x > 0, \quad (3.5)$$

όπου $a \in [0, 1]$. Η ακόλουθη Πρόταση σχετίζεται με την βαθμίδα αποτυχίας αυτής της κατανομής.

Πρόταση 3.3 Αν $Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1-a)\mathcal{E}(\gamma)$, τότε $\forall a \in [0, 1]$ και $\beta, \gamma > 0$, η βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ υπολογίζεται από την σχέση

$$r(x; a, \beta, \gamma) = \frac{a\beta e^{-\beta x} + (1-a)\gamma e^{-\gamma x}}{a e^{-\beta x} + (1-a)e^{-\gamma x}}. \quad (3.6)$$

Απόδ. Η απόδειξη της (3.6) είναι προφανής, αφού λαμβάνοντας υπόψη την (3.5) και κάνοντας χρήση της (1.4), τότε για την εύρεση της σ.επ. της τ.μ. Z θα έχουμε

$$\bar{F}(x) = a e^{-\beta x} + (1-a)e^{-\gamma x}$$

Τέλος, διαιρώντας την (3.5) με την άνωθεν σχέση, όπως υποδεικνύεται στον Ορισμό 3.1, προκύπτει το αποτέλεσμα στην (3.6). ■

Εφαρμογή 3.1 Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$.

Θέτοντας στην (3.6) όπου $\beta = 1/2$ και $\gamma = 1/5$, τότε η βαθμίδα αποτυχίας διαμορφώνεται ως

$$r\left(x; a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2} a e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{5} (1-a) e^{-\frac{1}{5}x}}{a e^{-\frac{1}{2}x} + (1-a) e^{-\frac{1}{5}x}}. \quad (3.7)$$

Η συνάρτηση $r(\bullet)$ της σχ. (3.7) έχει αρνητική πρώτη παράγωγο (ως προς x). Το γεγονός αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 3.1 (αριστερά), στο οποίο παρουσιάζεται το γράφημα της εν λόγω συνάρτησης για τρεις τιμές της παραμέτρου βαρύτητας a .

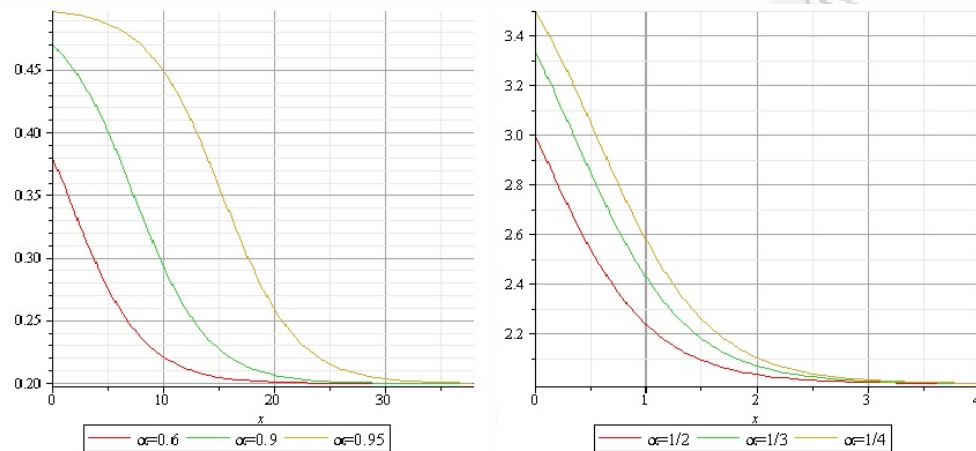
Εφαρμογή 3.2 Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1-a)\mathcal{E}(4)$.

Υπό την προϋπόθεση ότι $\beta = 2$ και $\gamma = 4$, τότε η (3.6) γίνεται

$$r(x; a, 2, 4) = \frac{2a e^{-2x} + 4(1-a) e^{-4x}}{a e^{-2x} + (1-a) e^{-4x}}. \quad (3.8)$$

Στο Σχήμα 3.1 (δεξιά) παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση της (3.8) για τρεις τιμές της παραμέτρου a , συναρτήσει της τιμής x .

Και από τα δύο γραφήματα του Σχήματος 3.1 παρατηρείται ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή των παραμέτρων β και γ , τόσο πιο απότομα φθίνει η συνάρτηση $r(\bullet)$, $\forall a \in [0, 1]$. Σε αντίθεση με μικρές τιμές αυτών, όπου φθίνει εξαιρετικά αργά και έχει πολύ μικρή τιμή. Φαίνεται δε να τείνει στη τιμή 2 για μεγάλες τιμές του ορίσματος x .



Σχήμα 3.1: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$ (αριστερά) και $Z \sim a\mathcal{E}(2) + (1-a)\mathcal{E}(4)$ (δεξιά), συναρτήσει της τιμής x

Παρατήρηση 3.2 Η τ.μ. Z είναι DFR , δηλαδή έχει φθίνουσα συνάρτηση $r(\bullet)$. Αυτό φαίνεται τόσο από τα δύο γραφήματα του Σχήματος 3.1, αλλά και αλγεβρικά, καθώς αποδείχθηκε θεωρητικά (για μια συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών, στην οποία εντάσσεται η παρούσα κατανομή) στην Πρόταση 3.1.

Για τις ανάγκες της επόμενης Παρατήρησης, έστω ότι $Z \sim aZ_1 + (1-a)Z_2$, όπου $Z_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$ και $Z_2 \sim \mathcal{E}(\gamma)$, με αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας $r_1(x) = \beta$ και $r_2(x) = \gamma$ (βλ. σχ. (3.3)).

Παρατήρηση 3.3 Είναι προφανές (από το Σχήμα 3.1) ότι η συνάρτηση $r(\bullet)$ είναι αύξουσα ως προς την παράμετρο βαρύτητας a , όταν $\beta > \gamma$ και φθίνουσα όταν $\beta < \gamma$.

Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι όταν μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου a , τότε δίνεται περισσότερο έμφαση στην τ.μ. Z_1 από ότι στην Z_2 . Έτσι αν $\beta > \gamma$, τότε δίνεται έμφαση στη κατανομή με την υψηλότερη βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ με αποτέλεσμα να αυξάνεται η συνάρτηση $r(\bullet)$ της μίξης αυτών.

Παρατήρηση 3.4 Γενικότερα, για την μίξη δύο Εκθετικών κατανομών βλέπουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας, πέραν το ότι είναι φθίνουσα ως προς x ($Z \in DFR$), στρέφει παράλληλα τα κοίλα προς τα κάτω (αρνητική δεύτερη παράγωγος).

Ωστόσο στο Σχήμα 3.1 (αριστερά) και για $a > 0.9$ βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο 'χάνει' την ισχύ του. Για την ακρίβεια, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (θετική δεύτερη παράγωγος) μέχρι το σημείο $x = 15$ και κατόπιν προς τα κάτω.

3.2.2 Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών

Αν η μη διακριτή κατανομή $F = a_1\mathcal{E}(\beta_1) + a_2\mathcal{E}(\beta_2) + (1 - a_1 - a_2)\mathcal{E}(\beta_3)$, όπου $0 \leq a_1 + a_2 \leq 1$, τότε θα λέμε ότι η τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη τριών εκθετικών κατανομών με σ.π.π. που υπολογίζεται από την σχέση

$$f(x; a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = a_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + a_2\beta_2 e^{-\beta_2 x} + (1 - a_1 - a_2)\beta_3 e^{-\beta_3 x}, \quad (3.9)$$

όπου για το διάνυσμα που εμπεριέχει τις παραμέτρους κλίμακας ισχύει

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) > 0.$$

Πρόταση 3.4 Αν $F = a_1\mathcal{E}(\beta_1) + a_2\mathcal{E}(\beta_2) + (1 - a_1 - a_2)\mathcal{E}(\beta_3)$, τότε $\forall \beta > 0$, η βαθμίδα αποτυχίας της τ.μ. Z περιγράφεται από την μαθηματική έκφραση

$$\begin{aligned} r(x; a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \\ &= \frac{a_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + a_2\beta_2 e^{-\beta_2 x} + (1 - a_1 - a_2)\beta_3 e^{-\beta_3 x}}{a_1 e^{-\beta_1 x} + a_2 e^{-\beta_2 x} + (1 - a_1 - a_2) e^{-\beta_3 x}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Απόδ. Η σ.π.π. της τ.μ. Z απεικονίζεται αλγεβρικά στην (3.9). Έτσι με την βοήθεια της (1.4), η σ.ε.π. θα είναι

$$\bar{F}(x) = a_1 e^{-\beta_1 x} + a_2 e^{-\beta_2 x} + (1 - a_1 - a_2) e^{-\beta_3 x}.$$

Επομένως, έχοντας όλες τις προαπαιτούμενες συναρτήσεις για τον υπολογισμό της $r(\bullet)$ (βλ. Ορισμό 3.1), βρίσκεται η (3.10). ■

Ας εξετάσουμε, στο σημείο αυτό, δύο Εφαρμογές της Προτάσεως 3.4.

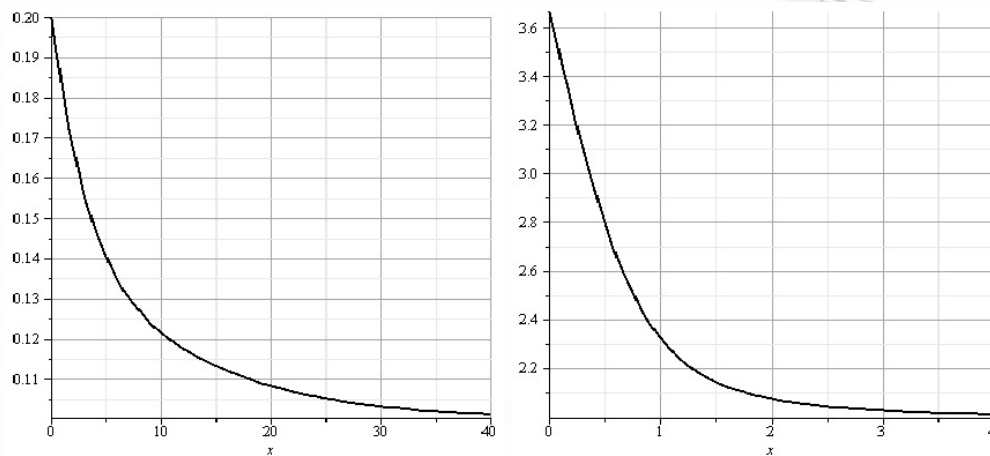
Εφαρμογή 3.3 Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/6)\mathcal{E}(1/2) + (1/3)\mathcal{E}(1/5) + (1/2)\mathcal{E}(1/10)$.

Κάνοντας της αναγκαίες αντικαταστάσεις στην (3.10), προκύπτει

$$r\left(x; \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{12} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{5}x} + \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{10}x}}{\frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{5}x} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{10}x}}. \quad (3.11)$$

Η γραφική παράσταση της (3.11) παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1 (αριστερά). Είναι εμφανής η φθίνουσα πορεία της $r(\bullet)$, καθώς και ότι στρέφει τα 'κοίλα' προς τα κάτω.

Εφαρμογή 3.4 Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$.



Σχήμα 3.2: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/6)\mathcal{E}(1/2) + (1/3)\mathcal{E}(1/5) + (1/2)\mathcal{E}(1/10)$ (αριστερά) και $F = (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$ (δεξιά), συναρτήσει της τιμής x

Αντικαθιστώντας στην (3.10) τις αντίστοιχες μαθηματικές τιμές, προκύπτει το αποτέλεσμα

$$r\left(x; \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 3, 2, 5\right) = \frac{\frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{5}{2}e^{-5x}}{\frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-5x}}. \quad (3.12)$$

Στο Σχήμα 3.1 (δεξιά) παρουσιάζεται η 'εικόνα' της (3.12).

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις δύο τελευταίες Εφαρμογές, και ειδικότερα από τα γραφήματά τους (Σχήμα 3.1), θα λέγαμε ότι είναι όμοια με αυτά που εξήχθησαν στην Ενότητα 3.2.1 (Μίξη δύο εκθετικών κατανομών). Κύριο χαρακτηριστικό, και εδώ, είναι ότι για μεγάλες τιμές του διανύσματος β , η $r(\bullet)$ φθίνει απότομα στο 0, σε αντίθεση με μικρές τιμές του β που τείνει εξαιρετικά αργά στο εν λόγω σημείο.

Παρατήρηση 3.5 Στην Πρόταση 3.1 αποδείχθηκε ότι η k -τάξης, $k = 1, 2, \dots$, μίξη Εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση DFR. Έτσι η κατανομή F , στην παρούσα περίπτωση ($k = 3$), αναμένεται (όπως και διαπιστώθηκε) να ανήκει στην κλάση γήρανσης DFR.

3.2.3 Κατανομή Γάμμα

Κάνοντας την υπόθεση ότι $F = \mathcal{G}(n, \beta)$, τότε η σ.π.π. της τ.μ. Z , $f(\bullet)$ θα είναι της μορφής

$$f(x; n, \beta) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0, \quad (3.13)$$

όπου, $\Gamma(\bullet)$ η συνάρτηση Γάμμα που ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad n > 0. \quad (3.14)$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $\Gamma(n) = (n-1)!$ και η εν λόγω κατανομή λέγεται Erlang.

Ας δούμε τώρα την επόμενη Πρόταση, η οποία περιγράφει την βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Erlang.

Πρόταση 3.5 Αν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, τότε $\forall \beta > 0$ και $n \in \mathbb{Z}$, η βαθμίδα αποτυχίας υπολογίζεται από την σχέση

$$r(x; n, \beta) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\beta^n x^{n-1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}}. \quad (3.15)$$

Απόδ. Αν η συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση $\bar{F}(\bullet)$ εκφράζει την σ.επ. της τ.μ. Z , τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4

$$\bar{F}(x) = \bar{V}^{*n}(x),$$

όπου, $\bar{V}^{*n}(\bullet)$ η σ.επ. της n -στη συνέλιξη μιας μεταβλητής V , η οποία γράφεται ως $K = V_1 + V_2 + \dots + V_n$, με $V_i \sim \mathcal{E}(\beta)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Άρα κάνοντας χρήση της (1.4), και με την βοήθεια της (3.13), θα έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{V}^{*n}(x) &= -\frac{1}{\beta} \int_x^{\infty} \frac{\beta^n}{(n-1)} y^{n-1} (e^{-\beta y})' dy \\ &= \frac{1}{\beta(n-1)} x^{n-1} e^{-\beta x} + \frac{1}{\beta} \int_x^{\infty} \frac{\beta^n}{(n-1)} (n-1) y^{n-2} e^{-\beta y} dy \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)} x^{n-1} e^{-\beta x} + \int_x^{\infty} \frac{\beta^{n-1}}{(n-2)} y^{n-2} e^{-\beta y} dy \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)} x^{n-1} e^{-\beta x} + \bar{V}^{*(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Στην άνωθεν, τελευταία αναδρομική σχέση θέτουμε $n = 1, n = 2$ έως n και προσθέτοντας διαδοχικά τις παραστάσεις που βρέθηκαν, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\bar{F}(x) = \bar{V}^{*n}(x) = e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}. \quad (3.16)$$

Τέλος, διαιρώντας την (3.13) με την τελευταία σχέση, προκύπτει η (3.15). ■

Πρόταση 3.6 Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ. Z_1 και Z_2 , με αντίστοιχες κατανομές F_1 και F_2 , για τις οποίες $F_1 = \mathcal{E}(\beta)$ και $F_2 = \mathcal{G}(n, \beta)$, τότε για τις βαθμίδες αποτυχίας $r_1(x)$ και $r_2(x)$ των δύο αυτών κατανομών, ισχύει

$$r_2(x) \leq r_1(x) = \beta, \quad \forall x \geq 0, n = 2, 3, \dots \text{ και } \beta > 0. \quad (3.17)$$

Απόδ. Στην Πρόταση 3.2 είδαμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που η κατανομή είναι Erlang ανήκει στην κλάση *IFR*. Δηλαδή, στην προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση $r_1(x)$ είναι αύξουσα ως προς το όρισμα x . Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το τοπικό μέγιστο της τελευταίας συνάρτησης είναι μικρότερο ή ίσο από την τιμή β .

Η συνάρτηση $r_2(x)$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή της καθώς $x \uparrow \infty$. Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} r_2(x) &= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}} \\ &= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{1 + \beta x + \frac{1}{2} (\beta x)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (\beta x)^{n-1}} \\ &= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{\frac{1}{(n-1)!} (\beta x)^{n-1}} \\ &= \beta^n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{(\beta x)^{n-1}} = \beta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

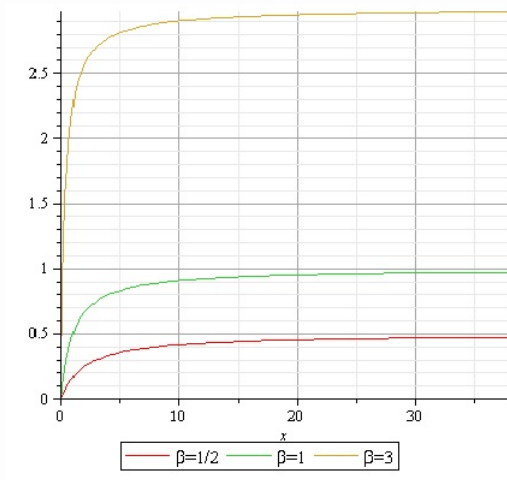
Εφαρμογή 3.5 Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που $F = \mathcal{G}(2, \beta)$.

Η σχ. (3.15), για $n = 2$ γίνεται

$$r(x; 2, \beta) = \frac{x\beta^2}{1 + \beta x}. \quad (3.18)$$

Η βαθμίδα αποτυχίας που απεικονίζεται στην (3.18), είναι γνησίως αύξουσα (ως προς x) και παράλληλα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\frac{d}{dx} r(x; \beta) = \frac{\beta^2}{(1 + \beta x)^2} > 0,$$



Σχήμα 3.3: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$, συναρτήσει της τιμής x

και

$$\frac{d^2}{dx^2}r(x; \beta) = -2\frac{\beta^4}{(1 + \beta x)^3} < 0.$$

Επίσης για $x = 0$, τότε $r(0; \beta) = 0, \forall \beta > 0$. Το Σχήμα 3.3 παρουσιάζει την πορεία της $r(\bullet)$ της σχ. (3.15) για τρεις τιμές της β . Είναι οφθαλμοφανές (και στην παρούσα περίπτωση) ότι καθώς $\beta \uparrow \infty$, τότε $r \uparrow \infty$ (αύξουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο κλίμακας β).

Η συνάρτηση $r(x; 2, 1)$ αυξάνει απότομα από το σημείο $x = 0$ έως το $x = 10$ και εν συνεχεία σταθεροποιείται. Αντιθέτως η $r(x; 2, 3)$ αυξάνει ακόμα πιο απότομα από το σημείο $x = 0$ και σταθεροποιείται πιο αργά σε σχέση με την συνάρτηση $r(x; 2, 1)$.

Παρατήρηση 3.6 Για $n = 2$, η συνάρτηση $r(\bullet)$ είδαμε ότι είναι αύξουσα· άρα $F \in IFR$. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, η Γάμμα κατανομή, για $n > 1$ ανήκει στην κλάση IFR , ως συνέλιξη κατανομών που ανήκουν στην κλάση γήρανσης IFR (Εκθετικές κατανομές).

3.2.4 Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής

Αν η παράμετρος a , εκφράζει τον συντελεστή βαρύτητας με $0 \leq a \leq 1$, τότε η σ.π.π. της τ.μ. Z , θα είναι της μορφής

$$f(x; a, \beta, n) = (1 - a)\beta e^{-\beta x} + a\frac{\beta^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\beta x}, \quad x > 0, \quad (3.19)$$

και για λόγους συντομίας θα αναφέρουμε ότι η κατανομή F της τ.μ. Z περιγράφεται από την ισότητα $F = (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(n, \beta)$.

Ας δούμε, τώρα, την επόμενη Πρόταση στην οποία σκιαγραφείται η βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ της τ.μ. Z , για τρεις τιμές της παραμέτρου σχήματος n .

Πρόταση 3.7 (i) Αν $Z \sim (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(1/2, \beta)$, τότε $\forall \beta > 0$ και $a \in [0, 1]$, η βαθμίδα αποτυχίας της τ.μ. Z δίνεται από την σχέση

$$r(x; a, n, \beta) \Big|_{n=1/2} = \frac{(1 - a) \beta e^{-\beta x} + \frac{a \sqrt{\beta} e^{-\beta x}}{\sqrt{x} \sqrt{\pi}}}{(1 - a) e^{-\beta x} + a \bar{G}(x; \frac{1}{2}, \beta)}, \quad (3.20)$$

όπου γενικά

$$\bar{G}(x; n, \beta) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} \int_x^\infty t^{n-1} e^{-\beta t} dt, \quad (3.21)$$

η σ.ε.π. μιας κατανομής Γάμμα με παραμέτρους n και β . Στην ειδική περίπτωση δε που $\beta = 1$, τότε η (3.21) γίνεται

$$\begin{aligned} \bar{G}(x; n, 1) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= 1 - \Gamma(x; n). \end{aligned}$$

όπου, $\Gamma(x; n)$ η μη πλήρης συνάρτηση Γάμμα (βλ. Κουτσόπουλος Κ, 1998).

(ii) Αν $Z \sim (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(2, \beta)$, τότε $\forall \beta > 0$ και $a \in [0, 1]$, η βαθμίδα αποτυχίας είναι

$$r(x; a, n, \beta) \Big|_{n=2} = \frac{(1 - a) \beta + a x \beta^2}{1 + a x \beta}. \quad (3.22)$$

(iii) Αν $Z \sim (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(3, \beta)$, τότε $\forall \beta > 0$ και $a \in [0, 1]$, η βαθμίδα αποτυχίας υπολογίζεται από την σχέση

$$r(x; a, n, \beta) \Big|_{n=3} = \frac{2(1 - a) \beta + a x^2 \beta^3}{2 + 2 a x \beta + a \beta^2 x^2}. \quad (3.23)$$

Απόδ. (i) Για $n = 1/2$ η σ.π.π. της (3.19), γίνεται

$$f(x) = (1 - a) \beta e^{-\beta x} + a \frac{\sqrt{\beta} e^{-\beta x}}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}, \quad (3.24)$$

αφού, από την (3.14) με κατάλληλη αντικατάσταση θα έχουμε

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt,$$

και αντικαθιστώντας όπου \sqrt{t} με w άρα $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dw \Leftrightarrow dt = 2\sqrt{t}dw$, ενώ τα όρια του ολοκληρώματος παραμένουν ως έχουν.

Επομένως

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{w} e^{-w^2} 2w dw \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 w^2}} dw = 2\sqrt{\pi} \mathbb{P}[W > 0] \end{aligned}$$

όπου, $W \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ (κανονική κατανομή με μαθηματική ελπίδα $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = 1/2$). Και ως γνωστόν σύμφωνα με τις βασικές συνθήκες που διέπουν μια σ.π.π. (βλ. Ορισμό 1.2, και ειδικότερα σχ. (1.2)) θα έχουμε

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

λόγω συμμετρίας της Κανονικής κατανομής.

Για την εύρεση της σ.ε.π. αρκεί να ολοκληρώσουμε την σ.π.π. της σχ. (3.24) στο (x, ∞) . Άρα

$$\bar{F}(x) = (1-a)e^{-\beta x} + a\bar{G}\left(x; \frac{1}{2}, \beta\right). \quad (3.25)$$

Διαιρώντας τώρα την (3.24) με την τελευταία εξίσωση, προκύπτει το αποτέλεσμα που απεικονίζεται στην (3.20).

(ii) Για $n = 2$ η σχ. (3.19), γίνεται

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-a)\beta e^{-\beta x} + a\beta^2 x e^{-\beta x} \\ &= (1-a + a\beta x)\beta e^{-\beta x}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Στην σχ. (3.16) απεικονίζεται η σ.ε.π. για μια Γάμμα κατανομή, στην περίπτωση που $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 2$, η (3.16) γίνεται $V^{*2} = (1 + \beta x)e^{-\beta x}$. Έτσι η σ.ε.π. της Z υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= (1-a)e^{-\beta x} + a(1 + \beta x)e^{-\beta x} \\ &= (1 + a\beta x)e^{-\beta x}. \end{aligned}$$

Διαιρώντας τώρα την (3.26) με την τελευταία σχέση, προκύπτει το αποτέλεσμα της (3.22).

(iii) Η απόδειξη αυτής της σχέσης είναι όμοια με αυτή της (3.22). Δηλαδή, για $n = 3$ η (3.19) γίνεται

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-a)\beta e^{-\beta x} + a \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x} \\ &= (1-a+a\beta x)\beta e^{-\beta x}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

και αντιστοίχως $\bar{V}^3 = (1+\beta x + \frac{1}{2}\beta^2 x^2)$ (από την (3.16) και για $n = 3$). Έτσι, η σ.ε.π. θα είναι

$$\bar{F}(x) = \left(1 + a\beta x + \frac{1}{2}\beta^2 x^2\right) e^{-\beta x}.$$

Τέλος, διαιρώντας την (3.27) με την τελευταία σχέση, προκύπτει το αποτέλεσμα που φαίνεται στην σχ. (3.23). ■

Όπως θα δούμε στα επόμενα Κεφάλαια, η παράμετρος β δεν παίζει σημαντικό ρόλο στη τιμή του συντελεστή συσχέτισης. Οπότε, για λόγους ευκολίας ας θεωρήσουμε ότι η παράμετρος β έχει σταθερή τιμή και ίση με 1. Τότε η σχ. (3.22) γίνεται

$$r(x; a, 2, 1) = 1 - \frac{a}{1+ax},$$

και παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x προκειμένου να εξετασθεί η μονοτονία της, θα έχουμε

$$\frac{d}{dx} r(x; a, 2, 1) = \frac{a^2}{(1+ax)^2} > 0, \quad \forall a \in (0, 1].$$

Προφανώς, για $a = 0$ τότε $r'(x; 0, 2, 1) = 0$ και η $r(\bullet)$ είναι σταθερή και ίση με 1 ($\beta = 1$). Επίσης, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω αφού

$$\frac{d^2}{dx^2} r(x; a, 2, 1) = -\frac{a^3}{(1+ax)^3} < 0, \quad \forall a \in (0, 1].$$

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η μονοτονία της $r(\bullet)$ στην περίπτωση που $n > 2$ και αυτό διότι η εν λόγω συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Δηλαδή αλλάζει μονοτονία σε κάποιο σημείο, έστω x_0 .

Η σχ. (3.23) για $\beta = 1$ γίνεται

$$r(x; a, 3, 1) = 1 - 2a \frac{1-x}{2+2ax+ax^2},$$

και παραγωγίζοντάς την, προκύπτει

$$\frac{d}{dx}r(x; a, 3, 1) = -2 \frac{a}{2 + 2ax + ax^2} + 2 \frac{a(1+x)(2a + 2ax)}{(2 + 2ax + ax^2)^2}.$$

Εξισώνοντας, τώρα, την τελευταία σχέση με το 0 προκύπτουν δύο λύσεις

$$x = \left\{ \frac{-a + \sqrt{-a^2 + 2a}}{a}, -\frac{a + \sqrt{-a^2 + 2a}}{a} \right\}.$$

Έτσι η υπό συνθήκη ελαχιστοποίηση ($d^2/dx^2 r|_{x=x_0} > 0$) επιτυγχάνεται στο σημείο

$$x_0 = \frac{\sqrt{-a^2 + 2a}}{a} - 1.$$

Παρατήρηση 3.7 Η βαθμίδα αποτυχίας $r(x; a, n, \beta)$, που περιγράφεται στην Πρόταση 3.7 είναι:

1. σταθερή και ισούται με β ($Z \sim \mathcal{E}(\beta)$), όταν $n = 1$
2. γνησίως φθίνουσα ως προς x ($Z \in DFR$), όταν $n = 1/2$ και γενικά για κάθε $n < 1$ ως μίξη DFR κατανομών
3. γνησίως αύξουσα ως προς x ($Z \in IFR$), όταν $n = 2$
4. φθίνουσα στο διάστημα $[0, x_0)$ ($Z \in DFR$) και κατόπιν αύξουσα στο $[x_0, \infty)$ ($Z \in IFR$) με ελάχιστο στο $x_0 = \sqrt{2a - a^2}/a - 1$, στην περίπτωση που $n = 3$.

Στο Σχήμα 3.4 παρατίθεται η συνάρτηση $r(\bullet)$ της σχ. (3.20) για τρεις τιμές της παραμέτρου β με $a = 1/2$ (αριστερά) και για τρεις τιμές της παραμέτρου βαρύτητας a με $\beta = 10$. Ενώ, στο Σχήμα 3.5 απεικονίζεται η συνάρτηση της σχ. (3.22), για τις ίδιες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν για το Σχήμα 3.4.

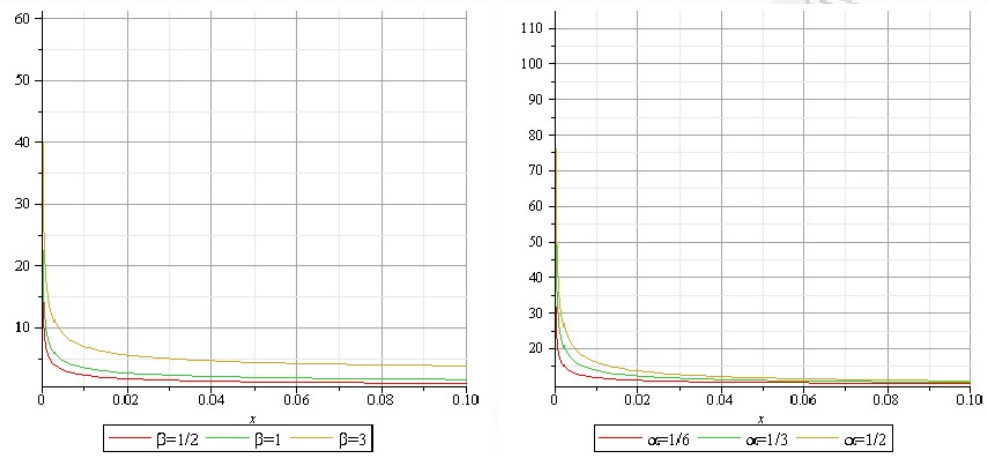
Είναι σαφές, και για τις δύο συναρτήσεις $r(\bullet)$, ότι καθώς $\beta \uparrow \infty$ τότε $r \uparrow \infty$ (για $a = 1/2$). Ωστόσο, καθώς $a \uparrow 1$ τότε $r(x; a, 1/2, 10) \uparrow \infty$.

Ενώ, στο Σχήμα 3.6 απεικονίζεται η συνάρτηση της (3.23) συναρτήσεως του ορίσματος x για τρεις τιμές της παραμέτρου βαρύτητας a και για παράμετρο κλίμακας $\beta = 1$. Είναι εμφανής η αλλαγή της μονοτονίας της εν λόγω βαθμίδας αποτυχίας. Επίσης η συνάρτηση $r(\bullet)$ είναι φθίνουσα ως προς την παράμετρο a , $\forall x \geq 0$.

Πριν κλείσουμε την παρούσα Ενότητα ας δούμε μια Παρατήρηση που ερμηνεύει τη φθίνουσα πορεία της συνάρτησης $r(\bullet)$ ως προς a , στην περίπτωση που $n > 1$. Για τις ανάγκες αυτής της Παρατήρησης θεωρούμε ότι

$$F = (1 - a)F_1 + aF_2,$$

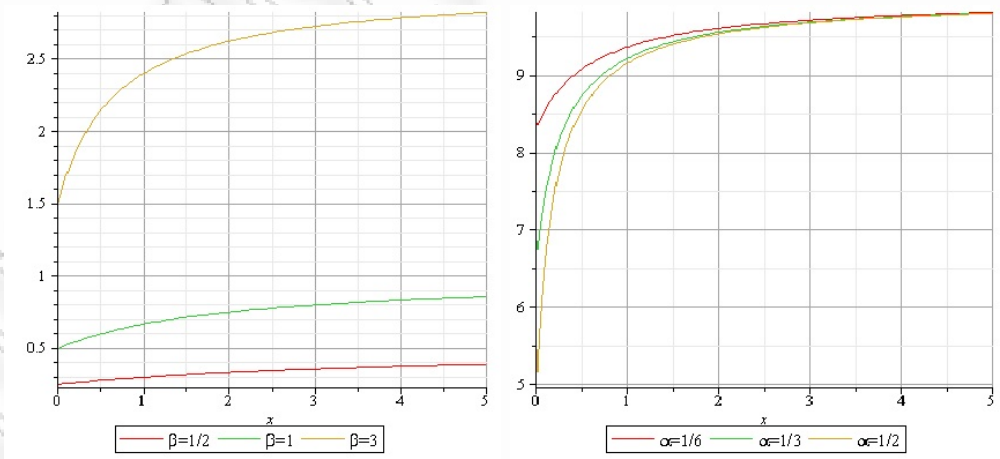
όπου, $F_1 = \mathcal{E}(\beta)$ και $F_2 = \mathcal{G}(n, \beta)$.



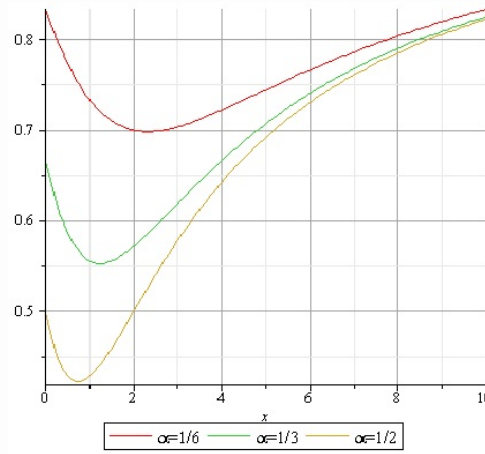
Σχήμα 3.4: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(1/2, \beta)$, συναρτήση του ορίσματος x

Παρατήρηση 3.8 Τόσο από το Σχήμα 3.5 (δεξιά), όσο και από το Σχήμα 3.6 παρατηρούμε ότι τα ποσά $r(\bullet)$ και a έχουν αντίστροφη πορεία.

Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς με την αύξηση της παραμέτρου βαρύτητας a , δίνεται περισσότερο έμφαση στην κατανομή F_2 . Όμως η F_2 έχει μικρότερη βαθμίδα αποτυχίας από την αντίστοιχη συνάρτηση της F_1 (βλ. Πρόταση 3.6).



Σχήμα 3.5: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1 - a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(2, \beta)$, συναρτήση της παρατήρησης x



Σχήμα 3.6: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $Z \sim (1-a)\mathcal{E}(1) + a\mathcal{G}(3,1)$, συναρτήσεως της παρατήρησης x

3.2.5 Μίξη Εκθετικής και δύο κατανομών Γάμμα

Στην παρούσα Παράγραφο, θα ασχοληθούμε με την μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας, στην περίπτωση που η κατανομή F ακολουθεί μια μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών. Θα δούμε ότι για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, παράγεται τότε $F \in IFR$ και άλλοτε $F \in DFR$.

Γενικά η σ.π.π. της τ.μ. Z , είναι της μορφής

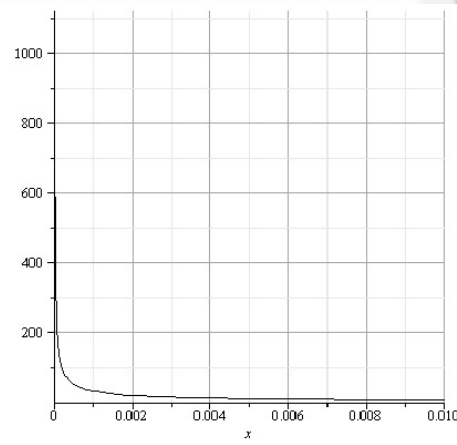
$$\begin{aligned}
 f(x; a_1, a_2, a_3, n_2, n_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \\
 &= a_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + a_2 \frac{\beta_2^{n_2} x^{n_2-1} e^{-\beta_2 x}}{\Gamma(n_2)} + a_3 \frac{\beta_3^{n_3} x^{n_3-1} e^{-\beta_3 x}}{\Gamma(n_3)}, \quad x > 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

και θα συμβολίζεται ως $F = a_1\mathcal{E}(\beta_1) + a_2\mathcal{G}(n_2, \beta_2) + a_3\mathcal{G}(n_3, \beta_3)$, με $\sum a_i = 1$.

Εφαρμογή 3.6 Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(1/2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(1/4, 1)$.

Στην προκειμένη περίπτωση η σ.π.π. της τ.μ. Z , θα είναι (με κατάλληλη αντικατάσταση των παραμέτρων στην (3.28))

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{x^{3/4}\pi} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt[4]{x}\sqrt{\pi} + x\pi^{3/2} + \sqrt{x}\pi}{x\pi^{3/2}} e^{-x},
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$



Σχήμα 3.7: Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που $F = (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(1/2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(1/4, 1)$, συναρτήσεως του ορίσματος x

με αντίστοιχη σ.ε.π.

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}\left(1 - \Gamma\left(x; \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \Gamma\left(x; \frac{1}{4}\right)\right),$$

και διαιρώντας την (3.30) με την τελευταία σχέση, προκύπτει

$$r(x) = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt[4]{x}\sqrt{\pi} + x\pi^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}\pi e^{-x}}{3 + e^{-x} - \Gamma\left(x; \frac{1}{2}\right) - 2\Gamma\left(x; \frac{1}{4}\right)} \frac{e^{-x}}{x\pi^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.30)$$

Παρατήρηση 3.9 Γενικά, στην περίπτωση που $n_1, n_2 < 1$, τότε η τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη τριών κατανομών που ανήκουν στην κλάση DFR . Άμεση συνέπεια αυτού, είναι ότι $F \in DFR$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.

Το Σχήμα 3.7 απεικονίζει την συνάρτηση $r(\bullet)$ της (3.30). Είναι ξεκάθαρο ότι $r \searrow x$ (όπου ο συμβολισμός αυτός, υποδεικνύει ότι η $r(\bullet)$ είναι γνησίως φθίνουσα, ως προς την τιμή x) και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

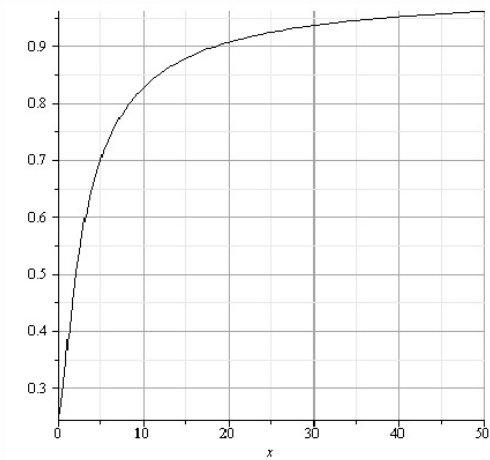
Εφαρμογή 3.7 Η βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση που $F = (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$.

Η (3.28) γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{4}(1 + x + x^2)e^{-x}, \quad (3.31)$$

με αντίστοιχη σ.ε.π. (σύμφωνα και με την (3.16) για $n = 2$ και $n = 3$)

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{4}(4 + 3x + x^2)e^{-x}.$$



Σχήμα 3.8: Η βαθμίδα αποτυχίας όταν $F = (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2,1) + (1/2)\mathcal{G}(3,1)$, συναρτήσει της τιμής x

Επομένως

$$r(x) = \frac{1 + x + x^2}{4 + 3x + x^2}. \quad (3.32)$$

Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση της σχ. (3.32) ως προς x , τότε

$$r'(x) = \frac{1 + 2x}{4 + 3x + x^2} - \frac{(1 + x + x^2)(3 + 2x)}{(4 + 3x + x^2)^2} > 0,$$

και άρα $r \nearrow x$ (όπου ο συμβολισμός αυτός, μας υποδεικνύει ότι η συνάρτηση $r(\bullet)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς x). Το Σχήμα 3.8 παρουσιάζει γραφικά το τελευταίο αποτέλεσμα για την βαθμίδα αποτυχίας.

Κεφάλαιο 4

Το προοίμιο του συντελεστή συσχέτισης ($u = 0$)

Όπως προϋποθέτει και ο τίτλος που φέρει το παρόν Κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με ποσότητες που οδηγούν στον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και του πλεονάσματος, δοθέντος του ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Πρόκειται, δηλαδή, να μελετηθούν συναρτήσεις όπως η διασπορά της τ.μ. του ελλείμματος τη στιγμή που συμβαίνει χρεοκοπία, η διασπορά της τ.μ. του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία και η συνδιακύμανση αυτών των δύο προαναφερθείσων τυχαίων μεταβλητών¹.

Ωστόσο πριν εξεταστούν αυτές οι ποσότητες, ας δούμε πρώτα πώς διαμορφώνεται το πρόσημο της συνδιακύμανσης για διάφορες κατανομές κινδύνων.

4.1 Κάποιοι βασικοί ορισμοί

Πριν προχωρήσουμε στη παράθεση Προτάσεων που σχετίζονται με την διακύμανση και τη συνδιακύμανση των δύο μεταβλητών που εξετάζουμε, καλό θα ήταν να δούμε κάποιους βασικούς Ορισμούς.

Ορισμός 4.1 Έστω τ.μ. X, Y που εκφράζουν η μιν X το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, και η δε Y το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία.

¹Οι αποδείξεις και η υπολογιστική διαδικασία για την εύρεση αυτών των ποσοτήτων παραλείπεται στο παρόν Κεφάλαιο. Παρ' όλα αυτά ο αναγνώστης δύναται να ανατρέξει στο Παράρτημα Β, προκειμένου να μελετήσει τον τρόπο απόδειξης της εκάστοτε Πρότασης ή της επίλυσης των Εφαρμογών.

Πληρέστερα στην παρούσα εργασία ορίζουμε τις τ.μ.

$$\begin{aligned} X &= U(T-)|\{T < \infty, U(0) = u\}, \\ Y &= |U(T)||\{T < \infty, U(0) = u\}. \end{aligned}$$

Έχουμε ορίσει ως $f(x, y|u)$, $x, y > 0$ την από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα των τ.μ. $U(T-)$ και $|U(T)|$ για αρχ. απόθεμα u , με $u \geq 0$. Για αυτή την πυκνότητα έχουμε δει ότι ισχύει

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^u f(x, y|u) dx + \int_u^\infty f(x, y|u) dx \right\} dy = \psi(u), \quad (4.1)$$

όπου βέβαια $\psi(u) < 1$, το οποίο συνάδει με την ιδιότητα που έχουμε αποδώσει σε αυτή την πυκνότητα (ελλειμματική σ.π.π.), βασιζόμενοι στον Ορισμό 1.9. Ενώ στην ακραία περίπτωση που $\psi(u) = 1$ (βέβαιη χρεοκοπία στο διηνεκές) η από κοινού πυκνότητα είναι μη ελλειμματική, βάσει του Ορισμού 1.1. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τις περιθώριες πυκνότητες αυτών των δύο.

Δηλαδή, από την σχ. (4.1), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|u) dx dy &= \int_0^\infty f(x|u) dx \\ &= \psi(u), \end{aligned} \quad (4.2)$$

για την περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα της $U(T-)$, και

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|u) dx dy &= \int_0^\infty g(u, y) dy \\ &= \psi(u), \end{aligned} \quad (4.3)$$

για την περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα της $|U(T)|$.

Ορισμός 4.2 (i) Η συνάρτηση $h_{XY}(x, y|u)$, παριστάνει την από κοινού (μη ελλειμματική) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ελλείμματος $|U(T)|$ και πλεονάσματος $U(T-)$, ή την από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X, Y για αρχικό κεφάλαιο ίσο με u .

(ii) Η συνάρτηση $h_X(x|u)$ εκφράζει την περιθώρια (μη ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητας του πλεονάσματος $U(T-)$, ή την περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. X .

(iii) Η συνάρτηση $h_Y(y|u)$ εκφράζει την περιθώρια (μη ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. του ελλείμματος $|U(T)|$, ή την περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. Y .

Αναφορικά με τον τελευταίο Ορισμό, θα έχουμε αλγεβρικά

$$\begin{aligned}
 h_{XY}(x, y|u) &= \frac{f(x, y|u)}{\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|u) dx dy} \\
 &= \frac{f(x, y|u)}{\psi(u)} \\
 &= \frac{\mathbb{E} \left[I(U(T-) = x) I(|U(T)| = y) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]}{\mathbb{E} \left[I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]} \\
 &= \mathbb{E} \left[I(U(T-) = x) I(|U(T)| = y) \mid I(T < \infty), U(0) = u \right],
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

επίσης

$$\begin{aligned}
 h_X(x|u) &= \frac{f(x|u)}{\int_0^\infty f(x|u) dx} \\
 &= \frac{f(x|u)}{\psi(u)} \\
 &= \frac{\mathbb{E} \left[I(U(T-) = x) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]}{\mathbb{E} \left[I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]} \\
 &= \mathbb{E} \left[I(U(T-) = x) \mid I(T < \infty), U(0) = u \right],
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

και τέλος, την έτερη μη ελλειμματική πυκνότητα

$$\begin{aligned}
 h_Y(y|u) &= \frac{f(y|u)}{\int_0^\infty f(y|u) dy} \\
 &= \frac{f(y|u)}{\psi(u)} \\
 &= \frac{\mathbb{E} \left[I(|U(T)| = y) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]}{\mathbb{E} \left[I(T < \infty) \mid U(0) = u \right]} \\
 &= \mathbb{E} \left[I(|U(T)| = y) \mid I(T < \infty), U(0) = u \right].
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Εναλλακτικά, κάνοντας χρήση της (2.11) ή της (1.19), μπορούμε να δούμε για τις δύο τελευταίες συναρτήσεις που απεικονίζονται στις (4.5) και (4.6) ότι

$$h_X(x|u) = \int_0^\infty h_{XY}(x, y|u) dy, \quad x > 0, u \geq 0,$$

και

$$h_Y(y|u) = \int_0^{\infty} h_{XY}(x, y|u) dx, \quad y > 0, u \geq 0.$$

Παρατήρηση 4.1 Αν X, Y τ.μ. που ορίστηκαν στον Ορισμό 4.1, τότε η συνάρτηση

$$\rho_{XY}(\bullet) = \frac{\text{Cov}[X, Y](\bullet)}{\sqrt{\text{V}[X](\bullet)}\sqrt{\text{V}[Y](\bullet)}} \quad (4.7)$$

ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και του πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία και συντομογραφικά θα αναφέρεται ως ΣΣΕΠ.

Στο σημείο αυτό θα ήταν καλό να παραθέσουμε ένα Παράδειγμα για την πληρέστερη κατανόηση των όσων έχουν ειπωθεί.

Παράδειγμα 4.1 Συνεχίζοντας το Παράδειγμα 2.4 και διαιρώντας κάθε σχέση με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία $\psi(u)$, τότε προκύπτει

$$h_X(x|u) = \begin{cases} \frac{\beta e^{-\beta x}}{\theta} \left((1 + \theta) e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}u} - 1 \right), & \text{αν } x > u \geq 0 \\ \frac{\beta e^{-\beta x}}{\theta} \left(e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}x} - 1 \right), & \text{αν } 0 < x \leq u, \end{cases} \quad (4.8)$$

η περιθώρια (μη ελλειμματική) πυκνότητα της τ.μ. πλεονάσματος $U(T-)$, ή απλά η πυκνότητα της τ.μ. X .

Επίσης από την σχ. (4.4) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} h_{XY}(x, y|u) &= \frac{f(x|u) f_Z(x+y)}{\psi(u) \bar{F}_Z(x)} \\ &= h_X(x|u) \frac{f_Z(x+y)}{\bar{F}_Z(x)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

και άρα

$$h_{XY}(x, y|u) = \begin{cases} \frac{\beta^2 e^{-\beta(x+y)}}{\theta} \left((1 + \theta) e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}u} - 1 \right), & \text{αν } x > u \geq 0 \\ \frac{\beta^2 e^{-\beta(x+y)}}{\theta} \left(e^{\frac{\theta\beta}{1+\theta}x} - 1 \right), & \text{αν } 0 < x \leq u, \end{cases} \quad (4.10)$$

η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X, Y .

Τέλος η περιθώρια πυκνότητα της Y βρίσκεται από την σχέση

$$\begin{aligned} h_Y(y|u) &= \int_0^\infty h_{XY}(x, y|u) dx \\ &= \int_0^\infty h_X(x|u) \frac{f_Z(x+y)}{\bar{F}_Z(x)} dx \\ &= f_Z(y) = \beta e^{-\beta y}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

αφού $\int_0^\infty h_X(x|u) dx = 1$ και

$$\frac{f_Z(x+y)}{\bar{F}_Z(x)} = f_Z(y), \quad (4.12)$$

όταν η κατανομή των κινδύνων είναι η Εκθετική.

4.2 Το πρόσημο της συνδιακύμανσης

Όπως σε πολλά ζητήματα της Θεωρίας των Κινδύνων, έτσι και στο πρόσημο της συνδιακύμανσης των τ.μ. X, Y 'εμπλέκεται' η κατανομή ισορροπίας (equilibrium) F_e της τ.μ. Z_e . Για την ακρίβεια η βαθμίδα αποτυχίας αυτής, έστω r_e παίζει μείζονα ρόλο στο πρόσημο της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$.

Πρόταση 4.1 Αν η κατανομή ισορροπίας F_e είναι $HNWUE$ ($HNBUE$), τότε

$$\text{Cov}[X, Y](0) \geq (\leq) 0. \quad (4.13)$$

Απόδ. Βλ. Psarrakos & Politis, 2011 (preprint). ■

Παρατήρηση 4.2 Στην Πρόταση 4.1, αναφέρονται οι κλάσεις γήρανσης $HNWUE$ και $HNBUE$, από τη Θεωρία Αξιοπιστίας. Επίσης από τη Θεωρία αξιοπιστίας γνωρίζουμε ότι, για την πρώτη κλάση γήρανσης ισχύει

$$IFR \subseteq HNBUE,$$

ενώ για την έτερη

$$DFR \subseteq HNWUE.$$

Η Παρατήρηση 4.2, στην ουσία μας υποδεικνύει ότι αν μια κατανομή ανήκει στην κλάση IFR , τότε θα ανήκει και στην κλάση $HNBUE$. Διαδοχικά, αν

μια κατανομή ανήκει στην DFR , τότε θα ανήκει και στην $HNWUE$ (οι κλάσεις DFR και IFR αναφέρονται στον Ορισμό 3.2).

Επομένως, άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1, καθώς και της Παρατήρησης 4.2, είναι η επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 4.2 Αν για την βαθμίδα αποτυχίας $r_e(\bullet)$, της κατανομής ισορροπίας F_e ισχύει

- (i) $r'_e(x) > 0$, τότε $Cov[X, Y](0) < 0$,
- (ii) $r'_e(x) < 0$, τότε $Cov[X, Y](0) > 0$,
- (iii) $r'_e(x) = 0$, τότε $Cov[X, Y](0) = 0$.

Απόδ. (i) Εφόσον $r'_e(x) > 0$, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2: $Z_e \in DFR$ και επομένως βάσει της Παρατήρησης 4.2, θα έχουμε $Cov[X, Y](0) < 0$. Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι υπο - περιπτώσεις (ii) - (iii). ■

Ένα άλλο αποτέλεσμα, που απέδειξαν οι Ψαρράκος και Πολίτης σχιαγραφείται στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 Αν CV_e , ο συντελεστής μεταβλητότητας της τ.μ. Z_e , ο οποίος ορίζεται από την σχέση $CV_e = \mu_e/\sigma_e$, τότε για $u = 0$ η συνδιακύμανση των τ.μ. X και Y , περιγράφεται από την αλγεβρική έκφραση

$$Cov[X, Y](0) = \frac{p_2^2}{8p_1^2} (CV_e^2 - 1), \quad (4.14)$$

όπου $p_k = \mathbb{E}[Z^k]$.

Απόδ. Βλ. Psarrakos & Politis, 2011 (preprint). ■

Παρατήρηση 4.3 Αξίζει να αναφερθεί ότι κανένα αποτέλεσμα για την συνδιακύμανση $Cov[X, Y]$ δεν υπολογίζεται μέσω της (4.14) του Θεωρήματος 4.1. Το Θεώρημα 4.1, παρατίθεται μόνο για λόγους επαλήθευσης των αποτελεσμάτων που πρόκειται να παρουσιαστούν αργότερα.

4.3 Η μελέτη των βασικών μεγεθών του ΣΣΕΠ εν απουσία αρχικού αποθέματος

Στην παρούσα Ενότητα, θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της συνδιακύμανσης μεταξύ των τ.μ. X , Y και της διακύμανσης της τ.μ. X για διάφορες κατανομές κινδύνων (στην περίπτωση που $u = 0$). Πριν, όμως ξεκινήσουμε αυτή τη σπουδή, ας δούμε δύο Προτάσεις που ισχύουν για κάθε κατανομή κινδύνων στην περίπτωση (αυστηρά) που $u = 0$.

Πρόταση 4.3 Για οποιαδήποτε κατανομή κινδύνων F της τ.μ. Z , οι τ.μ. X , Y είναι ισόνομες, όταν το αρχικό απόθεμα είναι μηδενικό ($u = 0$).

Απόδ. Η α.σ.π.π των τ.μ. $U(T-)$ και $|U(T)|$, για $u = 0$ και $\delta = 0$ ορίζεται (βλ. σχ. (2.26)) από την σχέση

$$f(x, y|0) = \frac{\lambda}{c} f_Z(x + y),$$

και ολοκληρώνοντας ως προς x ή ως προς y , για την εύρεση των περιθωρίων κατανομών, προκύπτει

$$\begin{aligned} f(x|0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} f_Z(x + y) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_x^{\infty} f_Z(w) dw = \frac{\lambda}{c} \bar{F}_Z(x), \end{aligned}$$

και ομοίως $f(y|0) = \frac{\lambda}{c} \bar{F}_Z(y)$. Οπότε καταλήγουμε στο κάτωθι συμπέρασμα:

$$U(T-) \stackrel{d}{=} |U(T)| \Rightarrow X \stackrel{d}{=} Y. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 4.4 Υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αρχ. αποθεματικό ($u = 0$) και για οποιαδήποτε κατανομή κινδύνων F , τόσο η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X , Y όσο και οι περιθώριες κατανομές αυτών είναι ανεξάρτητες του περιθωρίου ασφάλειας θ .

Απόδ. Είδαμε ότι η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X , Y για $u = 0$, βρίσκεται διαιρώντας την πυκνότητα $f(x, y|0)$ με την πιθανότητα $\psi(0)$. Έτσι λαμβάνοντας υπόψη ότι $c = (1 + \theta)\lambda p_1$, έχουμε

$$\begin{aligned} h_{XY}(x, y|0) &= \frac{f(x, y|0)}{\psi(0)} \\ &= \frac{1}{(1 + \theta)p_1} \frac{f_Z(x + y)}{\frac{1}{1 + \theta}} = \frac{1}{p_1} f_Z(x + y). \end{aligned}$$

Ομοίως μπορεί να προκύψει το γεγονός

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{1}{p_1} \bar{F}_Z(x). \quad \blacksquare$$

4.3.1 Εκθετική κατανομή

Η περίπτωση που οι κίνδυνοι ακολουθούν την Εκθετική κατανομή είναι η πιο απλή. Οι διάφορες ποσότητες που συντελούν στον υπολογισμό του ΣΣΕΠ έχουν την πιο απλή αλγεβρική μορφή από κάθε άλλη περίπτωση.

Ας υποθέσουμε ότι $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$. Δηλαδή, οι ζημιές έχουν πυκνότητα της μορφής

$$f_Z(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

όπου, β η παράμετρος κλίμακας.

Πρόταση 4.5 Αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε για $u = 0$

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και πλεονάσματος (αφού σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, οι δύο τ.μ. είναι ισόνομες), δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\text{Cov}[X, Y] = 0, \quad (4.15)$$

(ii) η διασπορά της τ.μ. του ελλείμματος ή του πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\mathbb{V}[X](\beta) = \mathbb{V}[Y](\beta) = \frac{1}{\beta^2}. \quad (4.16)$$

Απόδ. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι οι τ.μ. X, Y ακολουθούν επίσης την Εκθετική κατανομή (με την ίδια παράμετρο), αφού και με βάση το Παράδειγμα 4.1 (σχ. (4.8), για $u = 0$), προκύπτει

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \beta e^{-\beta x},$$

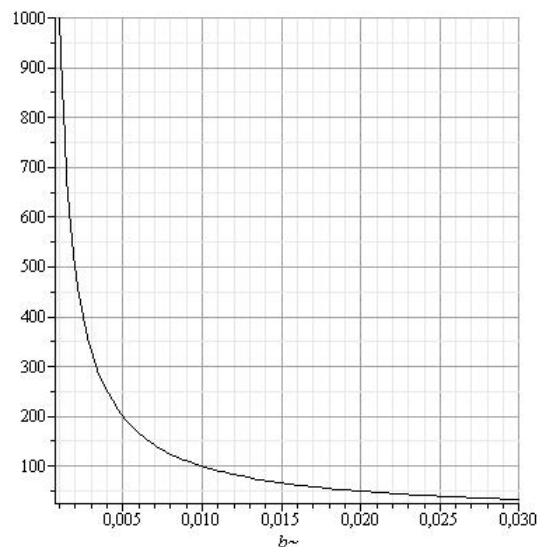
και για την α.σ.π.π.

$$\begin{aligned} h_{XY}(x, y|0) &= \beta^2 e^{-\beta(x+y)} \\ &= h_X(x)h_Y(y), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{1}{\beta} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Άμεσο συμπέρασμα της τελευταίας Πρότασης είναι ότι $\rho_{XY} = 0$, υπό την προϋπόθεση ότι $u = 0$. Όστόσο, παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε την συμπεριφορά της τυπικής απόκλισης της τ.μ. X ή Y .



Σχήμα 4.1: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος όταν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, συναρτήσει της παραμέτρου β

Στο Σχήμα 4.1, παρουσιάζεται η εν λόγω συνάρτηση ($\mathbb{V}[X]$ ή $\mathbb{V}[Y]$) συναρτήσει της παραμέτρου β και παρατηρείται ότι καθώς $\beta \uparrow \infty$, τότε $\sqrt{\mathbb{V}[X]} \downarrow 0$. Απεναντίας καθώς $\beta \downarrow 0$, τότε $\sqrt{\mathbb{V}[X]} \uparrow \infty$. Δηλαδή, $\sqrt{\mathbb{V}[X]} \searrow \beta$.

Το γεγονός ότι για Εκθετικές αποζημιώσεις οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες φαίνεται να έχει μια λογική ερμηνεία, καθώς η Εκθετική κατανομή λειτουργεί υπό την αμνήμονα ιδιότητα.

Παρατήρηση 4.4 Είναι γνωστό ότι αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta) \Leftrightarrow Z_e \sim \mathcal{E}(\beta)$, και άρα $r_e(x) = \beta$. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 (iii), θα έχουμε $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται άμεσα και από το Θεώρημα 4.1, αφού

$$\mathbb{E}[Z_e] = \mathbb{V}[Z_e] = \beta \Rightarrow CV_e = 1 \Leftrightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0.$$

4.3.2 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Στην παρούσα Παράγραφο, πρόκειται να εξεταστεί η περίπτωση που για τις αποζημιώσεις ισχύει: $Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1 - a)\mathcal{E}(\gamma)$. Η βαθμίδα αποτυχίας αυτής της κατανομής, μελετάται στην §3.2.1 και διαπιστώνεται ότι είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το όρισμα x . Ενώ η σ.π.π. της τ.μ. Z περιγράφεται στην (3.5).

Πρόταση 4.6 Αν για την τ.μ. των κινδύνων Z ισχύει $Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1-a)\mathcal{E}(\gamma)$, τότε $\forall a \in [0, 1], \beta, \gamma > 0$

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\text{Cov}[X, Y](a, \beta, \gamma) = \left(\frac{\beta - \gamma}{(1-a)\beta + \gamma a} \right)^2 \frac{a(1-a)}{\beta\gamma}, \quad (4.17)$$

(ii) η διασπορά της τ.μ. του ελλείμματος ή του πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X](a, \beta, \gamma) &= \mathbb{V}[Y](a, \beta, \gamma) = \\ &= \frac{(1-a)^2 \beta^4 + 2a\gamma(1-a)\beta^3 - 2a\gamma^2(1-a)\beta^2 + 2a\gamma^3(1-a)\beta + \gamma^4 a^2}{\gamma^2((-1+a)\beta - \gamma a)^2 \beta^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Απόδ. Βλ. Παράρτημα Β. ■

Η σχέση της Πρότασης 4.6 (i), θα λέγαμε ότι αποτελείται από ένα γινόμενο δύο ποσοτήτων, έστω A^2 και B . Η μεν πρώτη είναι

$$A = \frac{\beta - \gamma}{(1-a)\beta + \gamma a},$$

ενώ η δεύτερη

$$B = \frac{a(1-a)}{\beta\gamma},$$

και η οποία είναι μη αρνητική.

Ας δούμε τις κάτωθι δυνατές περιπτώσεις για το πρόσημο της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$ της (4.18).

1. για κάθε $a \in (0, 1)$ και $\beta \neq \gamma$, τότε $\text{Cov}[X, Y] > 0$
2. για $a = 0$ ή $a = 1$ και για κάθε $\beta, \gamma > 0$, τότε $B = 0 \Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0$
3. αν $\beta = \gamma$, τότε $A = 0 \Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0$.

Παρατήρηση 4.5 Διαπιστώθηκε ότι για κάθε παράμετρο, η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ της (4.17) είναι μη αρνητική. Το γεγονός αυτό είναι καταφανές, αφού αν η τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη δύο Εκθετικών κατανομών, τότε και η Z_e θα ακολουθεί μια μίξη δύο Εκθετικών κατανομών. Δηλαδή

$$Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1-a)\mathcal{E}(\gamma) \Rightarrow Z_e \sim a'\mathcal{E}(\beta) + (1-a')\mathcal{E}(\gamma).$$

Επι της ουσίας στην προηγούμενη συνεπαγωγή καθίσταται γνωστό, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 ότι

$$r_e \nearrow x \Rightarrow Z_e \in DFR \Rightarrow \text{Cov}[X, Y] \geq 0.$$

Εφαρμογή 4.1 Η συνδιακύμανση και η διακύμανση των τ.μ. X και Y , όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$.

Κάνοντας κατάλληλες αντικαταστάσεις στην (4.17), θα έχουμε

$$\text{Cov}[X, Y] \left(a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = 90 \frac{a(1-a)}{(3a-5)^2}, \quad (4.19)$$

και από την (4.18), λαμβάνουμε

$$\mathbb{V}[X] \left(a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = \mathbb{V}[Y] \left(a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = \frac{261a^2 - 870a + 625}{(3a-5)^2}. \quad (4.20)$$

Η μεγιστοποίηση της μη αρνητικής συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$ της (4.19) επιτυγχάνεται στο σημείο $a = 5/7$ και είναι $9/4$. Αφού

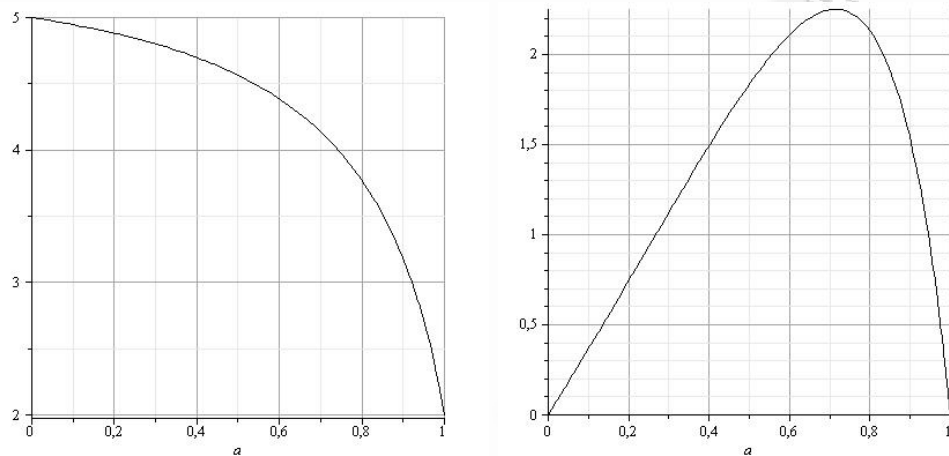
$$\frac{d}{da} \text{Cov}[X, Y] \left(a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = 0 \Rightarrow \frac{630a - 450}{(3a-5)^3} = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{7},$$

και άρα

$$\text{Cov}[X, Y] \left(\frac{5}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{4}.$$

Το γεγονός αυτό είναι εμφανές και στο Σχήμα 4.2, στο οποίο παρατίθενται δύο γραφήματα: το πρώτο γράφημα περιγράφει την τυπική απόκλιση της τ.μ. X (ή της τ.μ. Y καθώς είναι ισόνομες) και το δεύτερο την συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. X, Y συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a , όπως αυτές παρήχθησαν στην Εφαρμογή 4.1.

Γίνεται αντιληπτό ότι καθώς $a = 1$, τότε $\sqrt{\mathbb{V}[X]} = 2$ και $\text{Cov}[X, Y] = 0$, ενώ καθώς $a = 0$, τότε $\sqrt{\mathbb{V}[X]} = 5$ και $\text{Cov}[X, Y] = 0$. Το αποτέλεσμα για την συνδιακύμανση είναι αναμενόμενο, καθώς υπό αυτές τις δύο προϋποθέσεις η κατανομή των κινδύνων είναι η Εκθετική. Ο μηδενισμός της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$, ο οποίος επιτυγχάνεται κάτω από δύο διαφορετικές περιπτώσεις, δεν μας εκπλήττει καθώς υπό αυτές τις περιπτώσεις $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$ και όπως είδαμε στην Ενότητα 4.3.1, τότε $\text{Cov}[X, Y] = 0$.



Σχήμα 4.2: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $F \sim aE(1/2) + (1 - a)E(1/5)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a

4.3.3 Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που οι ζημιές ακολουθούν μια μίξη τριών Εκθετικών κατανομών. Γενικότερα, θα λέγαμε, ότι αναμένουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που εξήχθησαν στην προηγούμενη Ενότητα, και για τον λόγο αυτό δεν πρόκειται να κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στις εκάστοτε σχέσεις που ισχύουν.

Εφαρμογή 4.2 Η συνδιακύμανση και η διακύμανση, στην περίπτωση που $Z \sim a_1E(1/2) + a_2E(1/5) + (1 - a_1 - a_2)E(1/10)$.

Στο Παράρτημα Β, παρουσιάζεται όλη η υπολογιστική διαδικασία προκειμένου να υπολογιστούν οι συναρτήσεις $Cov[X, Y]$ και $V[X]$.

Έτσι, θα έχουμε

$$\begin{aligned} Cov[X, Y](a_1, a_2) &= \\ &= \frac{-1280 a_1^2 + (-2440 a_2 + 1280) a_1 - 1250 a_2^2 + 1250 a_2}{(8 a_1 + 5 a_2 - 10)^2}, \quad (4.21) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} V[X](a_1, a_2) &= V[Y](a_1, a_2) = \\ &= \frac{6656 a_1^2 + (-16640 + 9520 a_2) a_1 - 12500 a_2 + 10000 + 3125 a_2^2}{(8 a_1 + 5 a_2 - 10)^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Τόσο στην (4.21), όσο και στην (4.22) 'δεσπόζουν' οι όροι a_1, a_2 . Για λόγους ευκολίας, ορίζεται το διάνυσμα $\alpha = (a_1, a_2)$. Είναι προφανές ότι για $\alpha = (0, 0)$, τότε $Cov[X, Y] = 0$. Ενώ αν οι εν λόγω παραμέτροι ικανοποιούν την ισότητα $a_1 + a_2 = 1$, οδηγούμαστε στην κατανομή που εξετάστηκε στην §4.3.2.

Στην §3.2.1 μελετάται η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής των κινδύνων Z , η οποία ακολουθεί μίξη τριών Εκθετικών κατανομών. Είναι σαφές ότι εφόσον η τ.μ. Z ακολουθεί μίξη τριών Εκθετικών κατανομών, τότε και η τ.μ. Z_e θα ακολουθεί μίξη τριών Εκθετικών κατανομών με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων βαρύτητας σε σχέση με τις αντίστοιχες της αρχικής κατανομής.

Παρατήρηση 4.6 Η συνάρτηση $Cov[X, Y]$, της σχ. (4.22) είναι μη αρνητική και αυτό οφείλεται στην κλάση που ανήκει η κατανομή ισορροπίας της τ.μ. των κινδύνων Z ($Z_e \in DFR$).

4.3.4 Γάμμα κατανομή

Ιδιαίτερη προς εξέταση της συνάρτησης $Cov[X, Y]$ είναι η περίπτωση που η κλάση γήρανσης που ανήκει η κατανομή των κινδύνων, εξαρτάται από τη τιμή της παραμέτρου μορφής. Περί αυτού ο λόγος η κατανομή Γάμμα είναι μια τέτοια περίπτωση. Έτσι αν

$$f_Z(x) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

όπου, $\beta, n > 0$, και η παράμετρος σχήματος n δεν είναι απαραίτητως φυσικός αριθμός, τότε

1. αν $n < 1$, τότε $Z \in DFR \Leftrightarrow Z_e \in DFR$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 (i) αναμένεται $Cov[X, Y] > 0$,
2. αν $n = 1$, τότε $Z \sim \text{Expon.} \Leftrightarrow Z_e \sim \text{Expon.}$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 (iii) αναμένεται $Cov[X, Y] = 0$,
3. αν $n > 1$, τότε $Z \in IFR \Leftrightarrow Z_e \in IFR$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 (ii) αναμένεται $Cov[X, Y] < 0$.

Στην ακόλουθη Πρόταση, στην οποία παρουσιάζεται συν τοις άλλοις η συνάρτηση $Cov[X, Y]$, φαίνεται να ισχύουν όλα τα προαναφερθέντα αποτελέσματα των άνωθεν περιπτώσεων.

Πρόταση 4.7 Αν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, τότε $\forall n, \beta, \theta, \lambda > 0$

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$Cov[X, Y](n, \beta) = \frac{1}{12} \frac{(1 - n^2)}{\beta^2}, \quad (4.23)$$

(ii) η διασπορά της τ.μ. του ελλείμματος ή του πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\mathbb{V}[X](n, \beta) = \mathbb{V}[Y](n, \beta) = \frac{1}{12} \frac{(1+n)(5+n)}{\beta^2}. \quad (4.24)$$

Απόδ. Βλ. Παράρτημα Β. ■

Από την Πρόταση 4.7(i), φαίνεται ότι η συνάρτηση $\text{Cov}[XY]$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (ως προς την παράμετρο n), το οποίο μηδενίζεται στο σημείο $n = 1, \forall \beta > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η εν λόγω συνάρτηση, στο σημείο αυτό, τέμνει τον θετικό ημιάξονα με αποτέλεσμα να αλλάζει πρόσημο.

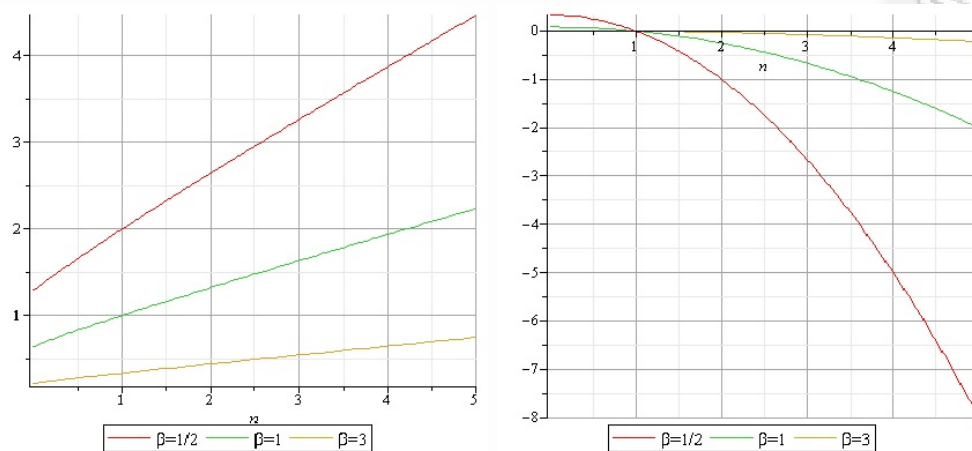
Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται δύο γραφήματα, το μεν 4.3 (αριστερά) παραθέτει την τετραγωνική ρίζα της (4.24), για τρεις τιμές της παραμέτρου κλίμακας β , ενώ το δε 4.3 (δεξιά) την πορεία της συνάρτησης που περιγράφεται στην (4.23) για τις ίδιες τιμές της θετικής παραμέτρου β .

Φαίνεται ότι η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς την παράμετρο n , που μηδενίζεται στο σημείο $n = 1$. Για την ακρίβεια για $n < 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] > 0, \forall \beta > 0$ και για $n > 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] < 0, \forall \beta > 0$. Επίσης η $\text{Cov}[X, Y]$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς β , δηλαδή καθώς $\beta \uparrow \infty$ τότε η $\text{Cov}[X, Y] \downarrow 0$.

Όπως το αντίθετο της συνάρτησης $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$ που είναι γνησίως αύξουσα ως προς την παράμετρο σχήματος n , παρατηρείται ότι καθώς $\beta \uparrow \infty$ τότε $\sqrt{\mathbb{V}[X]} \downarrow 0$.

Παρατήρηση 4.7 Η συμπεριφορά της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$, ερμηνεύεται από την συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας $r_e(\bullet)$. Δηλαδή, το γεγονός ότι για $n < 1$ είναι $\text{Cov}[X, Y] > 0$ οφείλεται στο γεγονός ότι $r_e \searrow x, \forall \beta > 0$ (στο ίδιο διάστημα), ενώ το ότι για $n > 1$ ισχύει $\text{Cov}[XY] < 0$, οφείλεται στο $r_e \nearrow x, \forall \beta > 0$ (στο ίδιο διάστημα). Τέλος, για $n = 1$ (Εκθετική κατανομή), λαμβάνουμε $\text{Cov}[XY] = 0$ διότι $r_e \nearrow x$ και ταυτόχρονα $r_e \searrow x, \forall \beta > 0$ (σταθερή τιμή της $r_e(\bullet)$). Παράλληλη προς την ευθεία $x = 0$, η οποία διέρχεται από το σημείο $y = \beta$.

Παρατήρηση 4.8 Στην Παρατήρηση 4.7, αναφέρεται η μονοτονία της $r_e(\bullet)$, η οποία είναι σύμφωνη με αυτή της $r(\bullet)$, της κατανομής F , που μελετήθηκε στην §3.2.3. Ωστόσο το ότι $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, δεν σημαίνει (κατα ανάγκη τουλάχιστον) ότι η Z_e θα ακολουθεί Γάμμα κατανομή. Παρ' όλα αυτά, παρατηρείται ότι η μονοτονία της $r_e(\bullet)$, είναι όμοια με αυτή της $r(\bullet)$.



Σχήμα 4.3: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, συνάρτησι της παραμέτρου n

4.3.5 Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής

Υπενθυμίζουμε ότι η σ.π.π. της τ.μ. Z , όπως φαίνεται και στην (3.19), είναι της μορφής

$$f_Z(x) = a \frac{\beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(n)} + (1-a) \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

με $\beta > 0$ και $0 \leq a \leq 1$.

Στην Πρόταση 3.7, παρουσιάζεται η βαθμίδα αποτυχίας αυτής της κατανομής και διαπιστώνεται ότι η μονοτονία της συγκεκριμένης συνάρτησης εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου μορφής n (βλ. τις περιπτώσεις της Παρατήρησης 3.7).

Πρόταση 4.8 Αν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1-a)\mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall n, \beta, \theta, \lambda > 0, a \in [0, 1]$ και $u = 0$ ισχύουν τα ακόλουθα

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δίνεται από την σχέση

$$\text{Cov}[X, Y](a, n, \beta) = \frac{1}{12} (1-n) a n \frac{(n^2 + 3n - 4)a - 2n + 4}{(1 + (n-1)a)^2 \beta^2}, \quad (4.25)$$

(ii) η διακύμανση της τ.μ. του πλεονάσματος ή του ελλείμματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X](a, n, \beta) &= \mathbb{V}[Y](a, n, \beta) = \\ &= \frac{1}{12} \frac{(n^2 + 4n + 12)(n-1)^2 a^2 + (4n^3 + 20n - 24)a + 12}{(1 + (n-1)a)^2 \beta^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Απόδ. Βλ. Παράρτημα Β. ■

Στο Σχήμα 6.3 (αριστερά) παρουσιάζεται η τετραγωνική ρίζα της σχ. (4.32), συναρτήσεως της παραμέτρου n , για τέσσερις τιμές της παραμέτρου βαρύτητας a . Και οι τέσσερις καμπύλες παρουσιάζουν μια φθίνουσα πορεία και απότομα μια αύξουσα (όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της a τόσο πιο μεγάλη κυρτότητα παρουσιάζει στο διάστημα $(0, 1)$). Το ότι διέρχονται από το σημείο $n = 1$, με τιμή $\sqrt{\text{Var}[X]} = 1$ ($\beta = 1$) δεν μας εκπλήσσει καθότι υπό την προϋπόθεση $n = 1$ ισχύει $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, $\forall a \in [0, 1]$.

Για $n < 1$, τώρα, η θετική συνάρτηση $\sqrt{\text{Var}[X]}$ είναι φθίνουσα ως προς την παράμετρο a . Αντιθέτως, για $n > 1$ η εν λόγω συνάρτηση παρουσιάζει μια αύξουσα πορεία. Επίσης, καθώς $a \downarrow 0$ τότε η $\sqrt{\text{Var}[X]}$ τείνει σε μια ευθεία, η οποία είναι παράλληλη της ευθείας $n = 0$.

Η επόμενη Παρατήρηση αφιερώνεται στην ερμηνεία της πορείας της σχ. (4.25), που έχει άμεση σχέση με αυτή της $r(\bullet)$ (βλ. Παρατήρηση 3.7).

Παρατήρηση 4.9 Από το Σχήμα 6.3 (δεξιά), αλλά και αλγεβρικά από την σχ. (4.25), μπορούμε να δούμε ότι:

1. για $n < 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] > 0$, $\forall a \in [0, 1]$ και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι $Z_e \in DFR$,
2. για $n = 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] = 0$, $\forall a \in [0, 1]$ και εξηγείται από το γεγονός ότι $Z_e \sim \mathcal{E}(\beta)$,
3. για $n > 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] < 0$, $\forall a \in [0, 1]$, αφού $Z_e \in IFR$.

Ένα επίσης πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, για την τιμή της $\text{Cov}[X, Y]$, είναι ότι όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου a , τόσο μεγαλώνει η $\text{Cov}[X, Y]$, κατ' απόλυτη τιμή για κάθε τιμή της $n > 0$.

Είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι το ίδιο συμβαίνει και στην βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ της τ.μ. Z , όπως σχολίασαμε και αιτιολογήσαμε στην Παρατήρηση 3.8.

Το Σχήμα 6.4 (αριστερά) απεικονίζει, επίσης, την συνάρτηση $\sqrt{\text{Var}[X]}$ της (4.32), συναρτήσεως της παραμέτρου a για διάφορες τιμές της παραμέτρου n αυτή τη φορά, με ' κρίσιμο ' σημείο το $n = 1$.

Για την ακρίβεια:

1. για $n < 1$, τότε η συνάρτηση $\sqrt{\text{Var}[X]}$ είναι φθίνουσα ως προς την παράμετρο βαρύτητας a και αύξουσα ως προς την παράμετρο σχήματος n ,
2. για $n > 1$, τότε η συνάρτηση $\sqrt{\text{Var}[X]} \searrow n$ και παράλληλα $\sqrt{\text{Var}[X]} \nearrow a$.

Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το Σχήμα 6.4 (δεξιά). Πριν δούμε, όμως, την ερμηνεία του συγκεκριμένου Σχήματος, ας εξετάσουμε αλγεβρικά την συνάρτηση $Cov[X, Y]$, γενικά για $n > 0$.

Έτσι, παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.25) ως προς a και εν συνεχεία εξισώνοντας το αποτέλεσμα που βρέθηκε με το 0, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} Cov[X, Y](a, n, \beta) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{(n-1)n(an^2 - \frac{1}{2}n - a + 1)}{\beta^2(an + 1 - a)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_o = \frac{1}{2} \frac{n-2}{n^2-1}, \quad \forall n \in (0, 1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Επομένως, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. για $n < 1$, τότε $Cov[X, Y] \nearrow a$ αφού το κρίσιμο σημείο a_o είναι τοπικό ελάχιστο ($d^2/da^2 Cov[X, Y]|_{a=a_o} > 0$),
2. για $n \rightarrow 1$, τότε $a_o \downarrow -\infty$ αφού $Cov[X, Y](a, 1, \beta) = 0$ ($\forall a \in [0, 1], \beta > 0$),
3. για $n \in (1, 2]$, τότε $Cov[X, Y] \searrow a$, αφού το κρίσιμο σημείο a_o είναι τοπικό μέγιστο ($d^2/da^2 Cov[X, Y]|_{a=a_o} < 0$),
4. για $n > 2$, τότε $a_o > 0$ και μάλιστα η συνάρτηση $Cov[X, Y]$ τέμνει τον ημιάξονα $0 - a$ δύο φορές. Στα σημεία

$$\begin{aligned} Cov[X, Y](a, n, \beta) = 0 \\ \Rightarrow a \in \left\{ 0, 2 \frac{n-2}{(n-1)(n+4)} \right\}, \quad \forall \beta > 0, \text{ και } n > 2. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.10 Για $n > 2$, η συνάρτηση $Cov[X, Y]$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 2(n-2)/(n^2+3n-4)]$ με τοπικό μέγιστο το a_o και παράλληλα θετικό πρόσημο. Ωστόσο στο διάστημα $(2(n-2)/(n^2+3n-4), 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στον θετικό ημιάξονα $0 - a$.

Αυτό οφείλεται στην φύση της βαθμίδας αποτυχίας $r(\bullet)$, αφού η εν λόγω συνάρτηση (αυστηρά) για $n > 2$ παρουσιάζει αύξουσα και κατόπιν φθίνουσα πορεία ως προς την παρατήρηση x (βλ. Παρατήρηση 3.7, και ειδικότερα Σχήμα 3.6).

Δηλαδή, υπό προϋποθέσεις, άλλοτε $Z \in IFR$ (άρα και $Z_e \in IFR$) και άλλοτε $Z \in DFR$ (άρα και $Z_e \in DFR$).

Στο Θεώρημα 4.1 παρατίθεται ένας εναλλακτικός και πιο σύντομος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης $Cov[X, Y]$, σε σχέση με την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθείται στην παρούσα εργασία. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος

αυτού, είναι ότι οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, όταν και μόνο όταν $CV_e = 0$ (πέραν της $r_e(x) = \beta$).

Η Εκθετική κατανομή, όπου όπως είδαμε στη §4.3.1 τηρεί απόλυτα αυτή την ανεξαρτησία, ικανοποιεί αυτή την συνθήκη, αφού

$$Z \sim \mathcal{E}(\beta) \Leftrightarrow Z_e \sim \mathcal{E}(\beta) \Rightarrow \mathbb{E}[Z_e] = \frac{1}{\beta} \text{ και } \mathbb{V}[Z_e] = \frac{1}{\beta^2} \Leftrightarrow CV_e = 1.$$

Ωστόσο, όπως 'εμπεριστατωμένα' τονίσαμε και στην Παρατήρηση 4.10, στοχαστική ανεξαρτησία των τ.μ. X, Y επιτυγχάνεται και σε περιπτώσεις που η κατανομή ισορροπίας Z_e δεν είναι αμνήμων. Αλλά ας δούμε την επόμενη Πρόταση, για να γίνουμε πιο διαφωτιστικοί.

Πρόταση 4.9 Υπό την προϋπόθεση ότι η τ.μ. των κινδύνων Z ακολουθεί την

$$\begin{aligned} Z &\sim 2 \frac{n-2}{(n-1)(n+4)} \mathcal{G}(n, \beta) + \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+4)} \mathcal{E}(\beta) \\ &\sim \frac{1}{(n-1)(n+4)} [2(n-2) \mathcal{G}(n, \beta) + n(n+1) \mathcal{E}(\beta)], \end{aligned}$$

τότε $\forall \beta > 0$ και $n > 2$, θα έχουμε το αποτέλεσμα

$$\text{Cov}[X, Y] = 0$$

Απόδ. Η απόδειξη θα γίνει κάνοντας χρήση της ισοδυναμίας του Θεωρήματος 4.1. Δηλαδή

$$\text{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow CV_e = 1.$$

Είναι γνωστό, από την Θεωρία των Κινδύνων (Κουτσόπουλος, 1998, σελ. 204), ότι

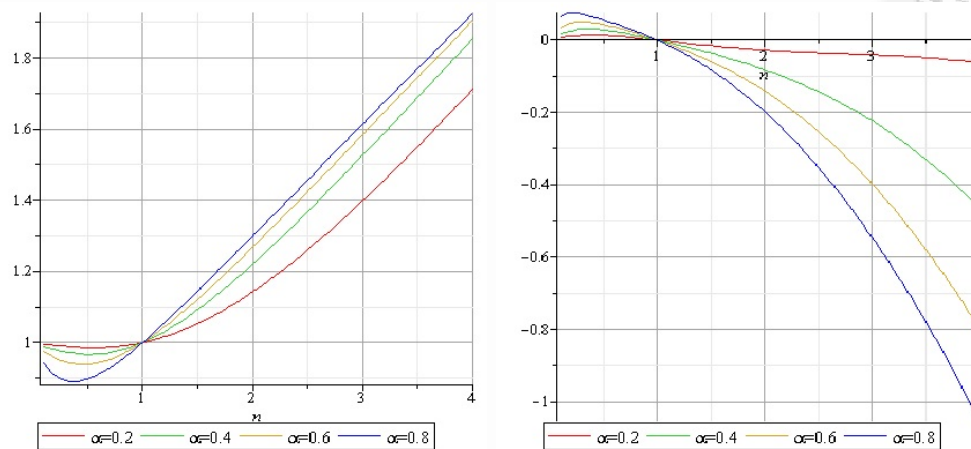
$$\mathbb{E}[Z_e^k] = \frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1}. \quad (4.27)$$

Έπίσης γενικά, για την τ.μ. Z , η k -τάξης ροπή υπολογίζεται από το άθροισμα

$$p_k = \frac{1}{(n-1)(n+4)} \left[2(n-2) \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n+j)}{\beta^k} + n(n+1) \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (1+j)}{\beta^k} \right]. \quad (4.28)$$

Επομένως, από την (4.28), θα έχουμε

$$\begin{aligned} k=1: & \quad p_1 = \frac{3n-1}{n+4} \frac{1}{\beta} \\ k=2: & \quad p_2 = \frac{2n(n+1)}{n+4} \frac{1}{\beta^2} \\ k=3: & \quad p_3 = \frac{2n(n+1)^2}{n+4} \frac{1}{\beta^3}. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.4: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1-a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου n

Ως εκ τούτου από την (4.27), λαμβάνουμε

$$k = 1 : \quad \mathbb{E}[Z_e] = \frac{1}{3\beta} (n + 1)$$

$$k = 2 : \quad \mathbb{E}[Z_e^2] = \frac{2}{9\beta^2} (n + 1)^2.$$

Άρα, κάνοντας χρήση της (1.8), θα έχουμε

$$\mathbb{V}[Z_e] = \frac{1}{9\beta^2} (n + 1)^2.$$

Τέλος, ο συντελεστής μεταβλητότητας της Z_e , θα είναι

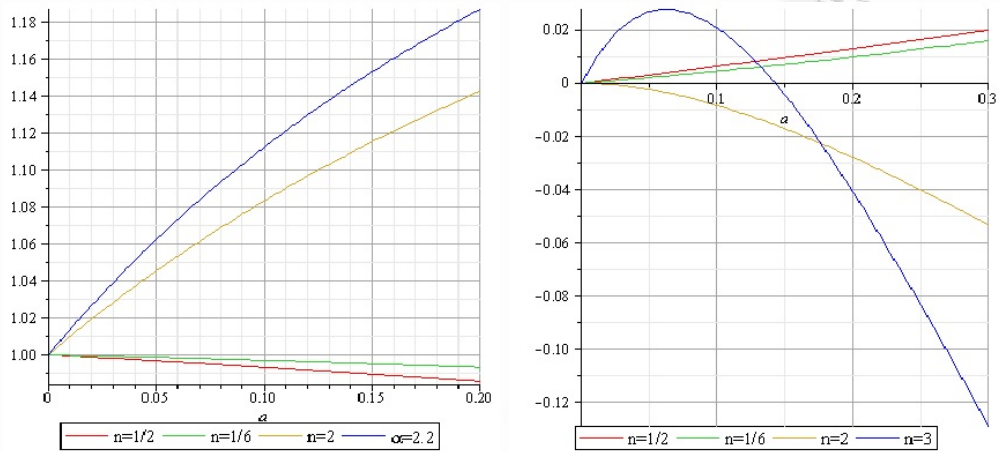
$$CV_e = 1 \Leftrightarrow \text{Cov}[X, Y] = 1. \quad \blacksquare$$

Τέλος, στο τριών διαστάσεων γράφημα που αριθμείται ως Σχήμα 4.6, παρατίθεται η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ συναρτήσει των παραμέτρων a, n για $\beta = 1$. Βλέπουμε ότι καθώς μεγαλώνουν οι παράμετροι a και n τόσο μεγαλώνει η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$, κατ' απόλυτη τιμή.

Η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ είναι, όπως αναμενόταν, κατά το πλείστον αρνητική, πλην της περιπτώσεως που η παράμετρος βαρύτητας a λαμβάνει μικρές τιμές (όπου και είναι θετική).

4.3.6 Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών

Πρίν κλείσουμε το παρόν Κεφάλαιο, ας δούμε δύο Παράδειγματα θεωρώντας (αυτή την φορά) ότι όλες οι παράμετροι είναι γνωστές και σταθερές. Ακριβέ-



Σχήμα 4.5: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και η συνδιακύμανση (δεξιά) όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1 - a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a

στερα θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις, από τις οποίες μπορούμε να παράγουμε, στη μεν πρώτη θετικό πρόσημο της $\text{Cov}[X, Y]$, και στη δεύτερη αρνητικό.

Θα παραθέσουμε, δίχως την υπολογιστική διαδικασία, τις συναρτήσεις $\text{Cov}[X, Y]$ και $\mathbb{V}[X]$. Ωστόσο ο αναγνώστης έχει πρόσβαση στους υπολογισμούς, στο Παράρτημα Β.

Η σ.π.π. καθώς και η βαθμίδα αποτυχίας αυτών, μελετώνται στην §3.2.5.

Εφαρμογή 4.3 Η συνδιακύμανση και η διακύμανση των X, Y , όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$.

Αρχικά ας εξετάσουμε την περίπτωση που η σ.π.π. της τ.μ. Z είναι της μορφής

$$f_Z(x) = 1/4 e^{-x} + 1/4 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} + 1/4 \frac{e^{-x}\sqrt{2}\Gamma(3/4)}{x^{3/4}\pi}.$$

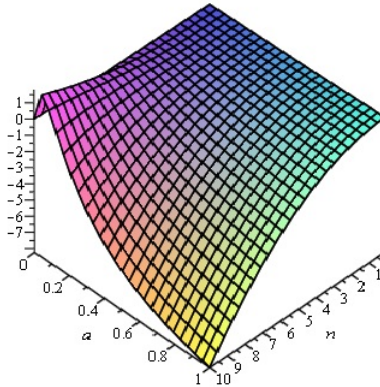
Έτσι, θα έχουμε

$$\text{Cov}[X, Y] = \frac{183}{1024}, \quad (4.29)$$

και παράλληλα

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{855}{1024}. \quad (4.30)$$

Παρατήρηση 4.11 Το θετικό πρόσημο της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$, στην περίπτωση που $n_1, n_2 < 1$, οφείλεται στο γεγονός ότι $r \searrow x$ (ως μίξη κατανομών DFR, βλ. Πρόταση 3.1 και ειδικότερα την Παρατήρηση 3.9).



Σχήμα 4.6: Η συνδιακύμανση όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, 1) + (1 - a)\mathcal{E}(1)$, συναρτήσει της παραμέτρου σχήματος n και βαρύτητας a

Εφαρμογή 4.4 Η συνδιακύμανση και η διακύμανση των τ.μ. X, Y , όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(1/2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(1/4, 1)$.

Αν, τώρα, η σ.π.π. της τ.μ. Z είναι

$$f_Z(x) = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{1}{4}x^2e^{-x}, \quad x > 0,$$

τότε

$$\text{Cov}[X, Y] = -\frac{31}{81}, \quad (4.31)$$

και

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{194}{81}. \quad (4.32)$$

Παρατήρηση 4.12 Στην (4.29) είναι εμφανές το αρνητικό πρόσημο στην συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μονοτονία της συνάρτησης $r(\bullet)$ της τ.μ. Z , αφού υπό τις ίδιες προϋποθέσεις $r \nearrow x$ (βλ. Εφαρμογή 3.7).

Κεφάλαιο 5

Το προοίμιο του συντελεστή συσχέτισης όταν υπάρχει αρχικό απόθεμα

Στο Κεφάλαιο 4, και ειδικότερα στην Παράγραφο 4.3, μελετήθηκαν εκτενώς οι προκαταρκτικές ποσότητες για τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ, στην περίπτωση που το αρχικό απόθεμα είναι μηδεν ($u = 0$). Παρατηρήθηκε ότι η παράμετρος που εκφράζει τον συντελεστής επιβάρυνσης (θ) είναι ανεξάρτητη αυτών των συναρτήσεων (βλ. Πρόταση 4.4) και παράλληλα οι τ.μ. του ελλείμματος και του πλεονάσματος δεσμεύοντας ως προς το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία (τ.μ. X και Y), είναι ισόνομα κατανομημένες (βλ. Πρόταση 4.3).

Ωστόσο με παρουσία αρχικού αποθέματος, οι προαναφερθείσες Προτάσεις 4.4 και 4.3 φαίνεται να μην έχουν ισχύ στην προκειμένη περίπτωση.

Στο παρόν Κεφάλαιο, πρόκειται να μελετηθούν αυτές οι προκαταρκτικές ποσότητες, στην περίπτωση που υπάρχει αρχικό απόθεμα. Ως επί το πλείστον η παράμετρος θ παίζει κεντρικό ρόλο στους υπολογισμούς μας και αυτό διότι η εν λόγω παράμετρος είναι αυτή που διατηρεί σε ομοιογένεια το χαρτοφυλάκιο κινδύνων του Αναλογιστή (βλ. Κουτσόπουλος, 1999, ασχ. 4/ σελ. 208).

Επιπρόσθετα, όμως, μπορούμε να πούμε ότι η παράμετρος θ εκφράζει το κέρδος που απαιτεί ο Αναλογιστής να έχει (βλ. βιβλίο της SOA, 2003, σελ. IV-121), αφού από (2.4) ο συντελεστής επιβάρυνσης επιβαρυνμένος με την τιμή 1, θα είναι

$$\begin{aligned} 1 + \theta &= \frac{c}{\lambda \mathbb{E}[Z]} \\ &= \frac{\text{ετήσια ασφάλιστρα}}{\text{αναμενόμενες ετήσιες απαιτήσεις}} \end{aligned}$$

ή

$$\theta = \frac{\text{αναμενόμενο ετήσια κέρδος}}{\text{αναμενόμενες ετήσιες απαιτήσεις}}.$$

Τέλος, στο παρόν Κεφάλαιο θεωρούνται δεδομένοι οι Ορισμοί της §4.1.

5.1 Η μελέτη των βασικών μεγεθών της ΣΣΕΠ παρουσία αρχικού αποθέματος

Όπως παρουσιάζεται στην Παράγραφο 4.2, είναι γνωστό ότι το πρόσημο της συνδιακύμανσης μεταξύ των τ.μ. X και Y εξαρτάται από την κλάση γήρανσης που ανήκει η κατανομή ισορροπίας Z_e των κινδύνων Z . Χώρις να λαμβάνεται υπόψη κάποια αυστηρή αλγεβρική απόδειξη, δεχόμαστε διαισθητικά ότι η κλάση γήρανσης που ανήκει η Z_e , είναι ίδια με την κλάση γήρανσης που ανήκει η κατανομή των κινδύνων Z .

Όλα αυτά, βεβαίως, ισχύουν στην περίπτωση που υπάρχει απουσία αρχ. αποθέματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξακρίβωση ισχύος των όσων ελέχθησαν για την περίπτωση $u = 0$, όταν αυτή τη φορά το αρχ. απόθεμα είναι μη αρνητικό.

Ως εκ τούτου στην περίπτωση που $u \geq 0$, και χωρίς κάποια αλγεβρική απόδειξη αναμένουμε

1. $Cov[X, Y] < 0$, όταν $Z \in DFR \Leftrightarrow Z_e \in DFR$,
2. $Cov[X, Y] > 0$, όταν $Z \in IFR \Leftrightarrow Z_e \in IFR$,
3. $Cov[X, Y] = 0$, όταν $Z \sim \text{Expon.} \Leftrightarrow Z_e \sim \text{Expon.}$,

ανεξαρτήτου τιμής παραμέτρου που υπόκειται το υπόδειγμα.

5.1.1 Εκθετική κατανομή

Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις που συντελούν τον ΣΣΕΠ, στην περίπτωση που οι κίνδυνοι είναι Εκθετικοί και $u = 0$ μελετήθηκαν στην §4.3.1. Η επόμενη Πρόταση παρουσιάζει αυτές τις ποσότητες για $u \geq 0$, αυτή τη φορά.

Πρόταση 5.1 Αν η κατανομή των κινδύνων $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall u \geq 0$ και $\beta, \lambda, \theta > 0$

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και του πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι

$$Cov[XY](u) = 0, \tag{5.1}$$

(ii) η διακύμανση της τ.μ. του πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X](u; \beta, \theta) &= \\ &= \frac{-(1+\theta)^2 e^{-2\frac{\beta u}{1+\theta}} - 2\beta u(1+\theta) e^{-\frac{\beta u}{1+\theta}} + \theta^2 + 2\theta + 2}{\beta^2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

(iii) η διακύμανση της τ.μ. του ελλείμματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι

$$\mathbb{V}[Y](\beta) = \frac{1}{\beta^2}. \quad (5.3)$$

Απόδ. Στο Παράδειγμα 4.1 έχουν υπολογιστεί οι σ.π.π. των τ.μ. X, Y .

Άρα

$$(1.7) \stackrel{(4.8)}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X] = \frac{-(1+\theta) e^{-\frac{\beta u}{1+\theta}} + \theta + 2}{\beta}, \quad (5.4)$$

με δεύτερη ροπή

$$(1.6) \text{ για } k=2 \stackrel{(4.8)}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X^2] = \frac{-2(1+\theta)(\theta+2+\beta u) e^{-\frac{\beta u}{1+\theta}} + 2\theta^2 + 6\theta + 6}{\beta^2},$$

και κάνοντας χρήση της (1.9) του Ορισμού 1.5 για την εύρεση της διακύμανσης της τ.μ. X , προκύπτει το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Αντιθέτως, κάνοντας χρήση της α.σ.π.π. της (4.10) των τ.μ. X, Y για τον υπολογισμό της μαθηματικής ελπίδας του γινομένου των δύο αυτών τ.μ., προκύπτει

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{-(1+\theta) e^{-\frac{\beta u}{1+\theta}} + \theta + 2}{\beta^2}. \quad (5.5)$$

Ενώ σύμφωνα με την σ.π.π. που απεικονίζεται στην (4.11) του ίδιου Παραδείγματος, είναι ξεκάθαρο ότι $Y \sim \mathcal{E}(\beta)$ και άρα $\mathbb{E}[Y] = 1/\beta$, $\mathbb{V}[Y] = 1/\beta^2$.

Τέλος

$$(1.26) \stackrel{(5.4);(5.5)}{\Rightarrow} \text{Cov}[X, Y] = 0. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 5.1 Είναι αξιοσημείωτο ότι στην περίπτωση που η κατανομή κινδύνων είναι η Εκθετική, τότε οι τ.μ. X, Y είναι ασυσχέτιστες $\forall u \geq 0$, όπως υποδεικνύει η Πρόταση 5.1(i). Αυτό, βεβαίως οφείλεται στο γεγονός $r_e(x) = \beta$, $\forall x \geq 0$.

5.1.2 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Υπενθυμίζουμε ότι η σ.π.π. στην περίπτωση που $Z \sim a\mathcal{E}(\beta_1) + (1-a)\mathcal{E}(\beta_2)$, με $0 \leq a \leq 1$, είναι

$$f_Z(x) = a\beta e^{-\beta x} + (1-a)\gamma e^{-\gamma x}, \quad x > 0.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας αυτής της κατανομής, μελετάται στην §3.2.1 και διαπιστώνεται ότι $r \searrow x$. Επομένως

$$r_e \searrow x \Leftrightarrow Z_e \in DFR,$$

και αναμένεται $\text{Cov}[X, Y] < 0, \forall u \geq 0$. Όπως θα δούμε στην επόμενη Εφαρμογή το γεγονός αυτό συμβαίνει.

Εφαρμογή 5.1 Η συνδιακύμανση και οι διακυμάνσεις των τ.μ. X και Y , στην περίπτωση που $Z \sim 1/2\mathcal{E}(2) + 1/2\mathcal{E}(4)$, $\forall u \geq 0$ και $\theta = 7/9$, $\lambda = 1$.

Σύμφωνα με το Παράρτημα Γ, στο οποίο παρουσιάζεται η υπολογιστική διαδικασία για την εν λόγω κατανομή, βρίσκεται ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του ελλείμματος και του πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\begin{aligned} \text{Cov}[XY](u) &= \\ &= -10e^{-\frac{1}{2}u} \frac{\left(\frac{241}{120}e^{\frac{1}{2}u} - \frac{11}{20}e^{3u} + \frac{2}{3}e^{2u} - 2\right)e^{\frac{7}{2}u} + \Theta_1(u)}{\left(1 + 14e^{\frac{5}{2}u}\right)\left(e^u + 14e^{\frac{7}{2}u}\right)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

όπου, $\Theta_1(u) = e^u \left(-\frac{29}{80}e^{\frac{1}{2}u} - \frac{169}{120}e^{3u} + e^{2u} + \frac{1}{3}\right)$.

Επίσης, η διακύμανση της τ.μ. του πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, είναι

$$\begin{aligned} \text{V}[X](u) &= \\ &= \frac{-26880e^{-\frac{1}{2}u} \left(u + \frac{5}{7}\right)e^{\frac{5}{2}u} - 6400 \left(e^{-\frac{1}{2}u}\right)^2 + \Theta_2(u)e^{-\frac{1}{2}u}}{144 \left(1 + 14e^{\frac{5}{2}u}\right)^2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_2(u) &= (1920 - 53760u)e^{\frac{9}{2}u} + 33844e^{\frac{11}{2}u} - 3491e^{\frac{1}{2}u} \\ &\quad - 25600e^{\frac{3}{2}u} - 25600e^{\frac{7}{2}u} + (-3840u + 22080)e^{2u} \\ &\quad - 1920t + 19372e^{3u} + 9600. \end{aligned}$$

Και τέλος, η διακύμανση της τ.μ. του ελλείμματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, υπολογίζεται από την σχέση

$$V[Y](u) = \frac{1}{16} \frac{-11e^{2u} + 12e^{\frac{9}{2}u} + 724e^{7u}}{\left(e^u + 14e^{\frac{7}{2}u}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Για λόγους σύγκρισης, υπολογίζονται επίσης οι αντίστοιχες προκαταρκτικές συναρτήσεις για τις περιπτώσεις που αντί για $a = 1/2$, έχουμε $a = 1/3$ και $a = 1/4$. Η συγκεκριμένη υπολογιστική διαδικασία για τις δύο αυτές κατανομές παραλείπονται, καθώς ο υπολογισμός είναι όμοιος με αυτόν της περίπτωσης που $a = 1/2$.

Στο Σχήμα 5.1 (αριστερά) απεικονίζεται η τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης της σχ. (5.7) μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις στις έτερες περιπτώσεις, $a = 1/2$ και $a = 1/3$, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u . Και οι τρεις καμπύλες έχουν αύξουσα πορεία και αλλάζουν κυρτότητα στο σημείο $u = 5$ (περίπου). Επίσης,

1. $\sqrt{V[X]} \nearrow a$, για μικρές τιμές της u ($u < 1$),
2. $\sqrt{V[X]} \searrow a$, για μεγάλες τιμές της u ($u > 3$).

Αντιθέτως, η τυπική απόκλιση του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, παρουσιάζει μια διαφορετική πορεία σε σχέση με την προαναφερθείσα θετική συνάρτηση. Δηλαδή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1 (δεξιά), ανεξαρτήτως του αρχ. αποθέματος u , είναι

$$\sqrt{V[Y]} \nearrow a$$

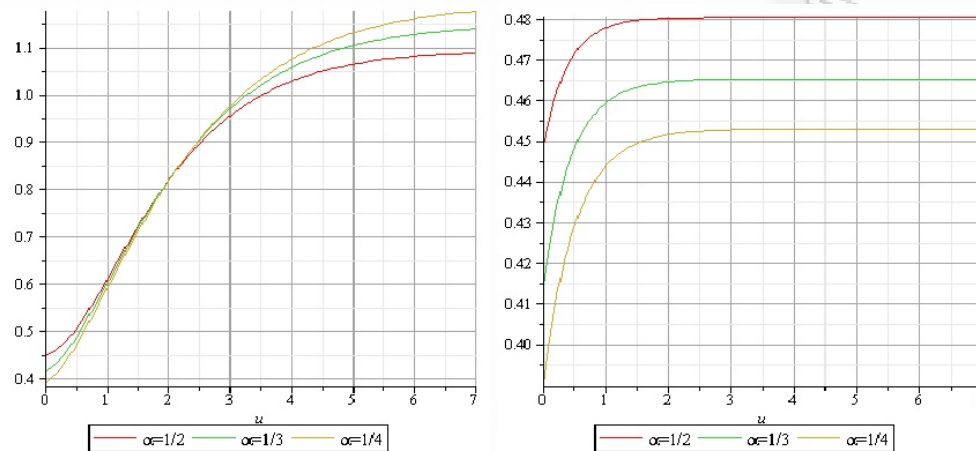
και παράλληλα ανεξαρτήτως της παραμέτρου βαρύτητας, είναι

$$\sqrt{V[Y]} \nearrow u$$

Τέλος, στο Σχήμα 5.2 παρατίθεται η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. X και Y , όπως αυτή παρουσιάζεται στη σχ. (5.6) μαζί με τις δύο αντίστοιχες συναρτήσεις για τις έτερες περιπτώσεις της παραμέτρου βαρύτητας a . Οι τρεις καμπύλες διαγράφουν πορεία στον θετικό ημιάξονα και διαπιστώνεται ότι $Cov[X, Y] \searrow a$, ανεξαρτήτως του αρχ. αποθέματος u .

Παρατήρηση 5.2 Το θετικό πρόσημο της συνάρτησης $Cov[X, Y]$, οφείλεται στην βαθμίδα αποτυχίας της τ.μ. Z_e . Αφού η συνάρτηση $r_e(\bullet)$ είναι φθίνουσα ως προς το όρισμα x (βλ. Σχήμα 3.1 (δεξιά)).

Ενώ το ότι οι ποσότητες $Cov[X, Y]$ και a έχουν αντίστροφη πορεία πιθανόν να οφείλεται στην βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$, αφού οι ποσότητες $r(\bullet)$ και a διαγράφουν επίσης αντίστροφη πορεία, όπως διαπιστώνεται και αιτιολογείται στην Παρατήρηση 3.2.



Σχήμα 5.1: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim aE(2) + (1-a)E(4)$, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u

5.1.3 Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών

Στην παρούσα Ενότητα θα θεωρήσουμε ότι η σ.ε.π. της τ.μ. Z είναι της μορφής

$$\bar{F}_Z(x) = \frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-5x}, \quad x > 0.$$

Δηλαδή είναι μια μίξη τριών Εκθετικών κατανομών και όπως είδαμε στο Σχήμα 3.2 (δεξιά) της Παραγράφου 3.2.2, η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει φθίνουσα πορεία ως προς το όρισμα x .

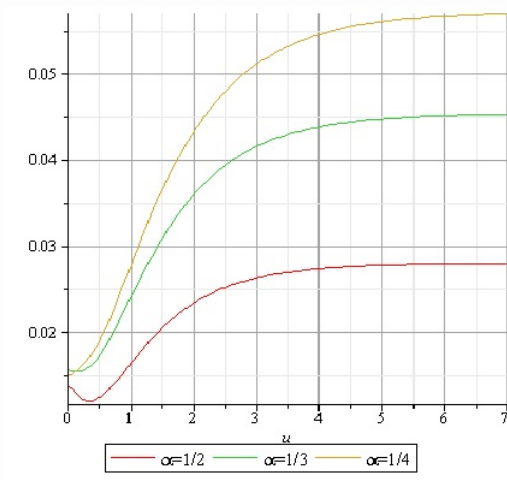
Στο Παράρτημα Δ παρουσιάζεται όλη η υπολογιστική διαδικασία μέχρι τον υπολογισμό των συναρτήσεων $Cov[X, Y]$, $V[X]$ και $V[Y]$, στην περίπτωση που η ένταση των ζημιών στη μονάδα του χρόνου είναι $\lambda = 1$ και ο συντελεστής επιβάρυνσης $\theta = 1$, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u .

Επίσης, υπολογίζονται οι αντίστοιχες τρεις προκαταρκτικές συναρτήσεις, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u στην περίπτωση που η παράμετρος θ αλλάζει τιμή (για $\theta = 1/5$ και $\theta = 1/3$). Ωστόσο η υπολογιστική διαδικασία για αυτές τις δύο υποπεριπτώσεις παραλείπεται, καθότι είναι όμοια με την περίπτωση $\theta = 1$.

Από το Σχήμα 5.3, στο οποίο αντανακλάται η τυπική απόκλιση της τ.μ. X (αριστερά) και της τ.μ. Y (δεξιά), είναι ξεκάθαρο ότι και οι έξι καμπύλες είναι γνησίως αύξουσες ως προς το αρχ. απόθεμα u . Επίσης, υπό την προϋπόθεση ότι $u = 0$, τότε

$$V[X] = V[Y] \approx 0.1787, \forall \theta > 0.$$

Τέλος οι συνάρτησεις $V[X]$ και $V[Y]$ φαίνεται να έχουν αύξουσα πορεία ως προς την παράμετρο θ για κάθε $u \geq 0$.



Σχήμα 5.2: Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος και του ελλείμματος όταν $Z \sim aE(2) + (1 - a)E(4)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

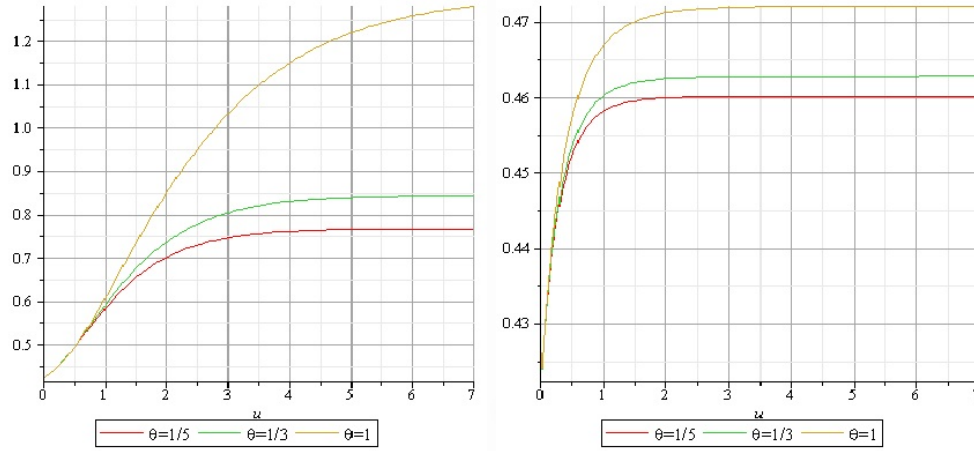
Παρατήρηση 5.3 Το γεγονός ότι $\mathbb{V}[X](0) = \mathbb{V}[Y](0), \forall \theta > 0$ δεν μας εκπλήσσει, αφού όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην Πρόταση 4.3 και 4.4, οι τ.μ. X και Y είναι ισόνομες και οι κατανομές τους ανεξάρτητες της παραμέτρου θ .

Όσον αφορά στο Σχήμα 5.4, στο οποίο απεικονίζεται η συνδιακύμανση μεταξύ των X και Y , φαίνεται ότι η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y](0) (\approx 0.01787)$ είναι ανεξάρτητη της θ και συμπίπτει με το σημείο τοπικού ελαχίστου, αφού η εν λόγω μη αρνητική συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς το αρχ. απόθεμα u .

5.1.4 Γάμμα κατανομή

Στην Πρόταση 3.5 παρουσιάζεται η βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ της τ.μ. Z (η οποία όπως προείπαμε έχει παρόμοια μονοτονία με αυτή της συνάρτησης r_e της τ.μ. Z_e), στην περίπτωση που $n = 2$ και $\beta > 0$. Στην προκειμένη περίπτωση είδαμε ότι $r \nearrow x$ και αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι: $\text{Cov}[X, Y] < 0$. Ας δούμε την επόμενη Εφαρμογή, η οποία περιγράφει τις προκαταρκτικές συναρτήσεις για τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ, όπως αυτές αντλήθηκαν από το αλγεβρικό πρόγραμμα Maple.

Εφαρμογή 5.2 Η συνδιακύμανση και οι διακυμάνσεις των τ.μ. X και Y , στην περίπτωση που $Z \sim (1/6)E(3) + (1/3)E(2) + 1/2E(5), \forall u \geq 0$ και $\theta > 0, \lambda = 1$.



Σχήμα 5.3: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim 1/6\mathcal{E}(3) + 1/3\mathcal{E}(2) + 1/3\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Στο Παράρτημα Δ, είναι ξεκάθαρο ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των μη ελλειμματικών τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος δίδεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y](u; \beta) &= \\ &= -\frac{5 \ 48 e^{\frac{11}{6} \beta u} + 8 e^{\beta u} + 9 e^{\frac{8}{3} \beta u} - 36 e^{\frac{13}{6} \beta u} - 24 e^{\frac{4}{3} \beta u}}{4 \beta^2 \left(6 e^{\frac{4}{3} \beta u} - e^{\frac{1}{2} \beta u} \right)^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ενώ η διακύμανση της τ.μ. X , είναι

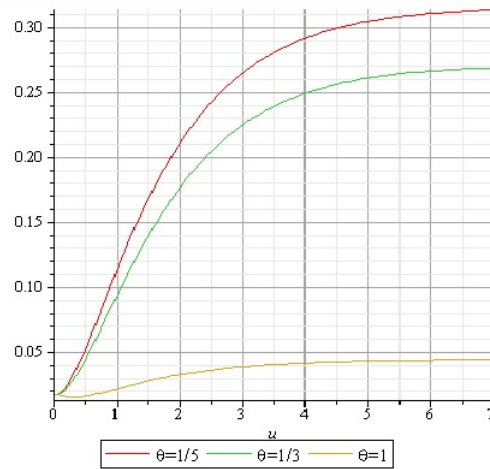
$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X](u; \beta) &= \\ &= \frac{1 - 5400 e^{\frac{25}{6} \beta u} - 3000 e^{\frac{10}{3} \beta u} - 1143 e^{\frac{14}{3} \beta u} + 5616 e^{\frac{23}{6} \beta u} + \Theta_3(u, \beta)}{4 \beta^2 \left(6 e^{\frac{4}{3} \beta u} - e^{\frac{1}{2} \beta u} \right)^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

όπου

$$\Theta_3(u, \beta) = 152 e^{3\beta u} + 3600 e^{\frac{11}{3} \beta u} e^{-2\beta u} - \left(360 e^{\frac{10}{3} \beta u} - 2160 e^{\frac{25}{6} \beta u} \right) \beta u,$$

και τέλος η διακύμανση της τ.μ. Y , είναι

$$\mathbb{V}[Y](u; \beta) = -\frac{1}{4} \frac{-207 e^{\frac{8}{3} \beta u} + 24 e^{\frac{11}{6} \beta u} + 8 e^{\beta u}}{\beta^2 \left(-6 e^{\frac{4}{3} \beta u} + e^{\frac{1}{2} \beta u} \right)^2}. \quad (5.11)$$



Σχήμα 5.4: Η συνδιακύμανση μεταξύ του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/3)\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των συναρτήσεων, που περιγράφονται στη τελευταία Εφαρμογή (Εφαρμογή 5.2), αν η θετική παράμετρος θ διπλασιαστεί. Έστω, δηλαδή, ότι ακολουθούμε ακριβώς τις ίδιες υποθέσεις με την εν λόγω Εφαρμογή, με μόνη διαφορά ότι $\theta^* = 2\theta$.

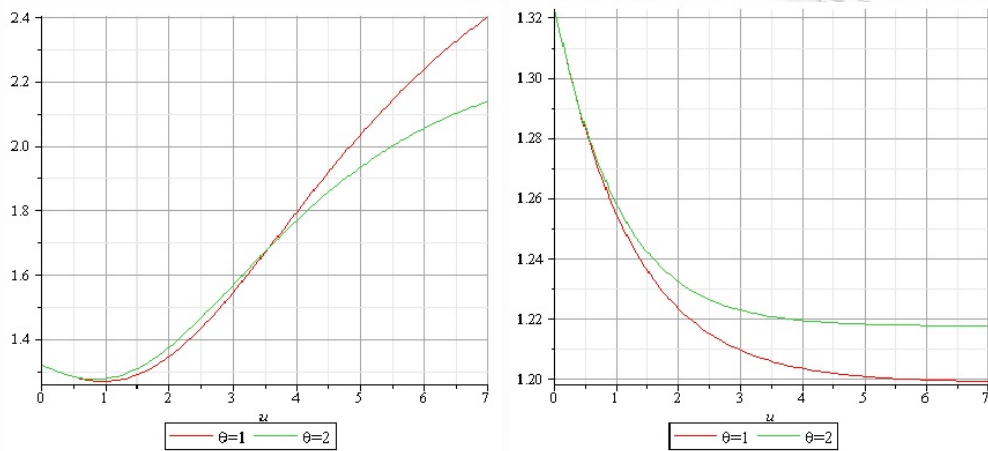
Η υπολογιστική διαδικασία είναι όμοια με αυτή που περιγράφεται στο Παράρτημα Δ, για την περίπτωση που $\theta = 1$.

Στο Σχήμα 5.5, απεικονίζεται η τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης της σχ. (5.10), στην περίπτωση που $\beta = 1$, για δύο τιμές της παραμέτρου θ . Βλέπουμε ότι οι δύο καμπύλες ξεκινούν από το ίδιο σημείο ($\sqrt{\mathbb{V}[X]} = 7/4$), φθίνουν έως το σημείο $u \approx 1$ και κατόπιν παρουσιάζουν αύξουσα μονοτονία, όσο μεγαλώνει το αρχ. απόθεμα u .

Επίσης αν συμβολίσουμε με $\mathbb{V}^*[X]$ την διακύμανση της τ.μ. X , στην περίπτωση που $\theta^* = 2\theta$, τότε

1. όταν $u < 3.5$, τότε $\mathbb{V}[X] \leq \mathbb{V}^*[X]$,
2. όταν $u \geq 3.5$, τότε $\mathbb{V}[X] \geq \mathbb{V}^*[X]$.

Αντιθέτως η συνάρτηση $\sqrt{\mathbb{V}[Y]}$, η οποία περιγράφεται στην εξίσωση (5.11), είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το αρχ. απόθεμα u , με τοπικό μέγιστο το σημείο $u = 0$ και μέγιστη τιμή $\sqrt{\mathbb{V}[Y]} = 7/4$ (αναμενόμενο αποτέλεσμα καθώς υπό την προϋπόθεση: $u = 0$, τότε οι τ.μ. X και Y είναι ισόνομα κατανομημένες). Επίσης, η τιμή της συνάρτησης $\sqrt{\mathbb{V}^*[Y]}$, είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συνάρτηση $\sqrt{\mathbb{V}^*[Y]}$, για $\theta = 1$, $\forall u \geq 0$.



Σχήμα 5.5: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Στο Σχήμα 5.6, περιγράφεται η πορεία της συνάρτησης της (5.9), στην περίπτωση που $\beta = 1$ (αριστερά) και $\beta = 3$ (δεξιά) για τις ίδιες τιμές της παραμέτρου θ . Η επόμενη Παρατήρηση δίνει μια διαισθητική εξήγηση για το πρόσημο που έχει η συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$ και παράλληλα της τιμής του, συγκριτικά για τις δύο τιμές της παραμέτρου κλίμακας β .

Παρατήρηση 5.4 Στην §3.2.3 και ειδικότερα στο Σχήμα 3.3, είδαμε ότι η συνάρτηση $r(\bullet)$ (άρα και r_e) είναι αύξουσα ως προς την παράμετρο β . Αυτό φαίνεται να εξηγεί την ανισότητα

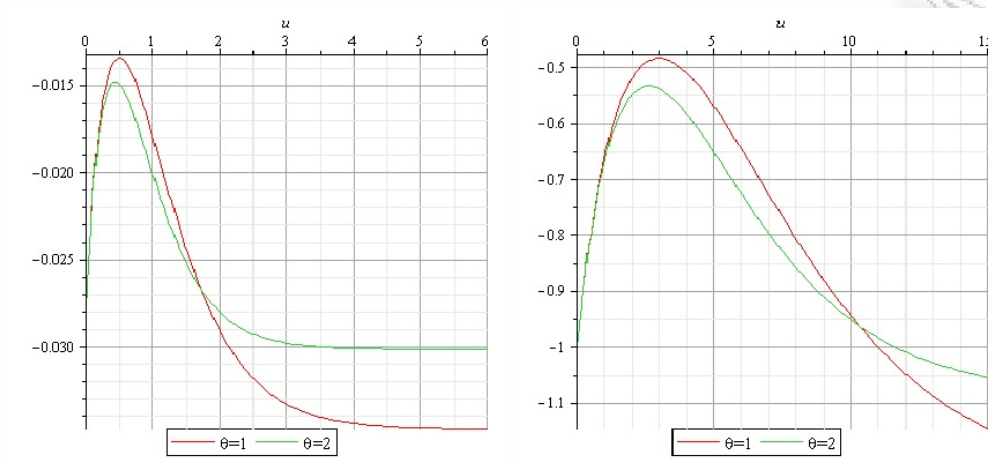
$$|\text{Cov}[X, Y](u, 1)| < |\text{Cov}[X, Y](u, 3)|, \quad \forall u \geq 0.$$

Επίσης είδαμε ότι $Z \in IFR$ (και άρα $Z_e \in IFR$) και άρα είναι αναμενόμενο το γεγονός ότι $\text{Cov}[X, Y] < 0, \forall u \geq, \beta > 0$.

5.1.5 Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των προκαταρκτικών συναρτήσεων στην περίπτωση που η κατανομή κινδύνων είναι μια μίκτη κατανομή, που οι εκατέρωθεν μίχτικές κατανομές ανήκουν στην κλάση γήρανσης IFR .

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1, η μίκτη κατανομή F , της τ.μ. Z δεν ανήκει κατ' ανάγκη στην κλάση γήρανσης IFR . Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού, είναι να μην αναμένουμε (κατ' ανάγκη) αρνητικό πρόσημο στην συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος.



Σχήμα 5.6: Η συνδιακύμανση του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$ και $\beta > 0$, με $\beta = 1$ (αριστερά) και $\beta = 3$ (δεξιά), συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Εφαρμογή 5.3 Η συνδιακύμανση και οι διακυμάνσεις των τ.μ. X και Y , στην περίπτωση που $Z \sim (1/2)\mathcal{E}(1) + (1/2)\mathcal{G}(2, 1)$ και $\theta = 5/3$, $\lambda = 1$.

Για την εύρεση των αναλυτικών τύπων των προκαταρκτικών συναρτήσεων, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u απαιτήθηκε η υπολογιστική διαδικασία που φαίνεται στο Παράρτημα Ε.

Στο εν λόγω Παράρτημα διαπιστώνεται ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \text{Cov}[XY](u) &= \\ &= \frac{1140 e^{\frac{1}{2}u} + 54 e^{-\frac{1}{4}u} - 17 e^{-u} + 200 e^{\frac{5}{4}u} - 960 e^{\frac{3}{4}u} - 384 + 48 e^{-\frac{3}{4}u}}{\left(e^{\frac{1}{2}u} - 10 e^{\frac{5}{4}u}\right) \left(e^{-\frac{3}{4}u} - 10\right)^2}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X](u) &= \\ &= \frac{-2304 - 230400 e^{\frac{3}{2}u} + 43200 u e^{\frac{5}{4}u} - 4320 u e^{\frac{1}{2}u} + \Theta_4(u)}{e^u \left(10 e^{\frac{3}{4}u} - 1\right)^2 \left(e^{-\frac{3}{4}u} - 10\right)^2}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

όπου

$$\begin{aligned}\Theta_4(u) &= 432000 e^{2u} + 73680 e^u - 1456 e^{\frac{1}{4}u} - 146 e^{-\frac{1}{2}u} + 46080 e^{\frac{3}{4}u} \\ &+ 1872 e^{-\frac{1}{4}u} + 76000 e^{\frac{5}{2}u} + 100800 e^{\frac{5}{4}u} - 33120 e^{\frac{1}{2}u} - 144000 u e^{2u} \\ &- 452800 e^{\frac{7}{4}u} + 144 u e^{-\frac{1}{4}u},\end{aligned}$$

και τέλος η διασπορά της τ.μ. του ελλείμματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι

$$\mathbb{V}[Y](u) = 2 \frac{68 e^{-u} - 4 e^{-\frac{7}{4}u} - e^{-\frac{5}{2}u}}{\left(10 e^{-\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{5}{4}u}\right)^2}. \quad (5.14)$$

Στην Παράγραφο 3.7, στην οποία μελετάται η βαθμίδα αποτυχίας της τ.μ. Z δείξαμε (βασιζόμενοι στο Σχήμα 3.6) ότι πέραν του ότι η συνάρτηση $r(\bullet)$ είναι αύξουσα ως προς το όρισμα x , είναι συνάμα γνησίως φθίνουσα ως προς την παράμετρο βαρύτητας a (βλ. Πρόταση 3.7).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση (γραφικά) της (5.12) με την αντίστοιχη συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$, αν μειώσουμε το συντελεστή βαρύτητας a . Με την μείωση της τιμής της παραμέτρου a , αναμένουμε αύξηση (κατά απόλυτη τιμή) της τιμής της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$, $\forall u \geq 0$.

Για τον λόγο αυτό επαναλαμβάνουμε την ίδια υπολογιστική διαδικασία, με αυτή που φαίνεται στο Παράρτημα Ε, με μόνη διαφορά ότι αντί για $a = 1/2$, θέτουμε $a = 1/6$. Η εν λόγω υπολογιστική διαδικασία παραλείπεται.

Γενικά, η συνάρτηση $\mathbb{V}[X]$ φαίνεται να αλλάζει μόνο μια φορά μονοτονία, στο σημείο $u \approx 1$ και μια φορά κυρτότητα, στο σημείο $u \approx 6$ (βλ. Σχήμα 5.7 (αριστερά)).

Αντιθέτως, η συνάρτηση $\mathbb{V}[Y]$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το αρχ. απόθεμα u , με τοπικό μέγιστο στο σημείο $u = 0$. Ενώ η συνάρτηση $\mathbb{V}[Y]$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς την παράμετρο a .

Στο σημείο αυτό ας δούμε την επόμενη Παρατήρηση, η οποία αφορά την συνάρτηση $\text{Cov}[X, Y]$.

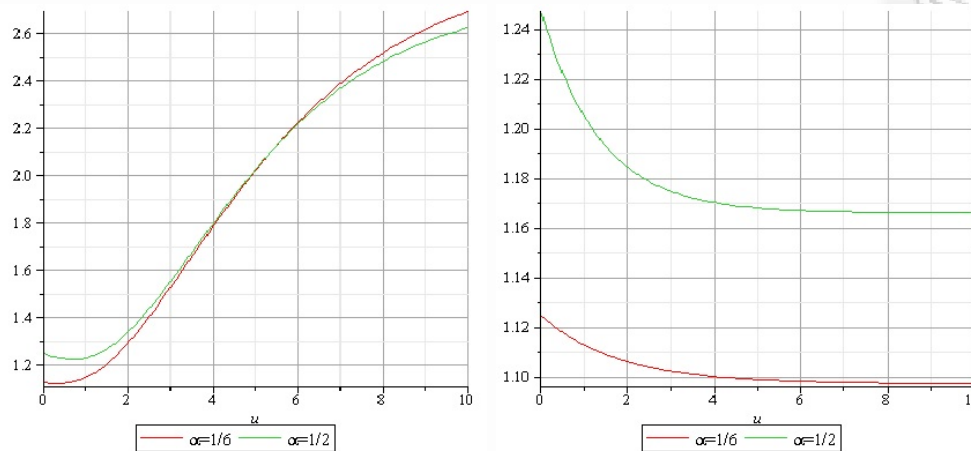
Παρατήρηση 5.5 Όπως ήταν αναμενόμενο, το πρόσημο της $\text{Cov}[X, Y]$ είναι αρνητικό, $\forall u \geq 0$ καθότι $Z \in IFR$ και παράλληλα παρατηρείται

$$|\text{Cov}[X, Y](u, 1/6)| < |\text{Cov}[X, Y](u, 1/2)|, \quad \forall u \geq 0,$$

καθότι όπως ήδη αναφέραμε

$$r(u; 1/6, 2, 1) \geq r(u; 1/2, 2, 1),$$

για τον συμβολισμό βλ. Πρόταση 3.7(ii).



Σχήμα 5.7: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim a \mathcal{E}(1) + (1-a) \mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

5.1.6 Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών

Στην παρούσα περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι

$$Z \sim 1/4\mathcal{E}(1) + 1/4\mathcal{G}(2, 1) + 1/2\mathcal{G}(3, 1),$$

και θα μελετήσουμε τις προκαταρκτικές συναρτήσεις για δύο τιμές της παραμέτρου θ ($\theta = 1/3$ και $\theta = 1$) και για $\lambda = 1$.

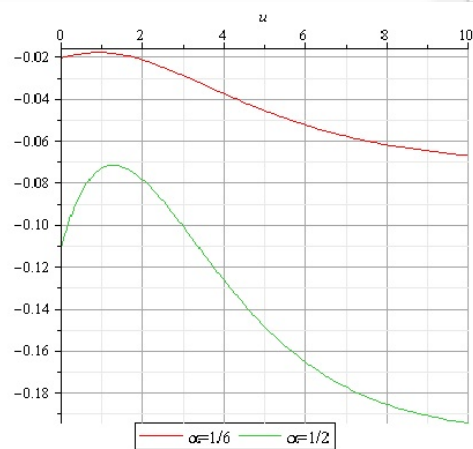
Οι εν λόγω συναρτήσεις, οι οποίες παράγονται συναρτήσει της u , είναι αρκετά δύσκλητες αλγεβρικά. Για τον λόγο αυτό δεν παρατίθενται.

Ωστόσο ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Παράρτημα Στ, στο οποίο βρίσκεται η υπολογιστική διαδικασία για $\theta = 1/3$ (η αντίστοιχη για $\theta = 1$ είναι όμοια αυτής, και έτσι παραλείπεται).

Τα Σχήματα που αφορούν στην πορεία των εν λόγω τριών προκαταρκτικών συναρτήσεων, είναι το Σχήμα 5.9 και το Σχήμα 5.10. Γενικά, θα λέγαμε ότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα Σχήματα αυτά είναι ανάλογα αυτών που είδαμε για την περίπτωση που: $Z \sim (1-a)\mathcal{E}(\beta) + a\mathcal{G}(2, \beta)$ (βλ. §5.1.5)

Για την ακρίβεια, σύμφωνα με το Σχήμα 5.9 (αριστερά), στο οποίο παρουσιάζεται η τυπική απόκλιση της τ.μ. X , συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u , η συνάρτηση $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$ είναι αρχικώς φθίνουσα, από το $u = 0$ μέχρι το $u \approx 1$ (στο οποίο παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο), και κατόπιν παρουσιάζει μια αύξουσα πορεία και παράλληλα αλλαγή κύρτωσης.

Παρατήρηση 5.6 Στο Σχήμα 5.9 (αριστερά), φαίνεται ότι η συνάρτηση $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$ φθίνει καθώς αυξάνεται το περιθώριο ασφαλείας θ , για μικρές τιμές της u ($u < 3.8$) εν αντιθέσει για μεγάλες τιμές της u .



Σχήμα 5.8: Η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. του πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim a \mathcal{E}(1) + (1 - a) \mathcal{G}(2, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Ωστόσο όπως ήταν αναμενόμενο από την Πρόταση 4.4 (στην οποία αποδεικνύεται ότι η κατανομή της τ.μ. X είναι ανεξάρτητη του περιθωρίου ασφάλειας θ και κατ' επέκταση και η τυπική της απόκλιση) οι δύο συναρτήσεις $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$ (για $\theta = 1/3$ και $\theta = 1$), έχουν την ίδια τιμή για $u = 0$.

Η συνάρτηση $\sqrt{\mathbb{V}[Y]}$, όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 5.10, είναι γνησίως φθίνουσα ως προς το αρχ. απόθεμα u , με παρατηρούμενο τοπικό μέγιστο, στο σημείο $A = (0, 1.507)$ (βλ. σχ. (4.32)).

Μια επίσης ιδιαίτερος σημαντική συνάρτηση είναι η $\text{Cov}[X, Y]$, καθώς το πρόσημο αυτής καθορίζει και το πρόσημο του $\Sigma\Sigma\text{E}\Pi$, που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 6. Για τον λόγο αυτό παράγεται το Σχήμα 5.10 και τα συμπεράσματα που 'γεννά' το εν λόγω Σχήμα αναλύονται στην επόμενη Παρατήρηση.

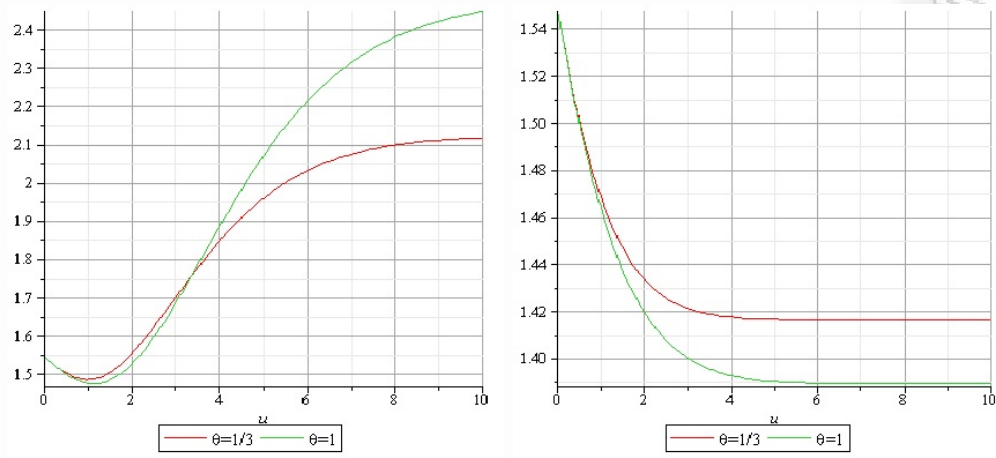
Παρατήρηση 5.7 Διακρίνουμε ξεκάθαρα (από το Σχήμα 5.10) ότι

$$\text{Cov}[X, Y] < 0, \quad \forall u \geq 0 \text{ και } \theta > 0,$$

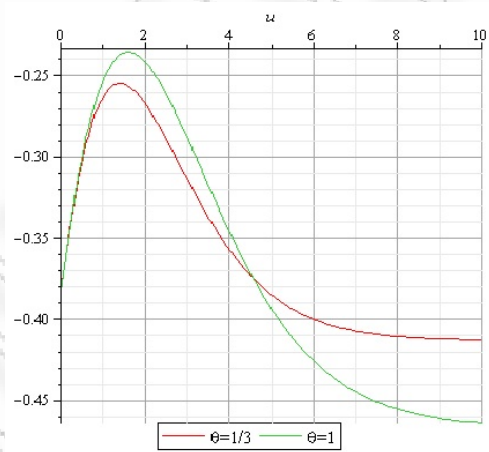
και τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι $Z \in IFR$ (και άρα $Z_e \in IFR$) (βλ. Εφαρμογή 3.6 και ειδικότερα το αντίστοιχο Σχήμα της, το 3.8).

Όπως συμβαίνει και στις έτερες συναρτήσεις $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$, $\sqrt{\mathbb{V}[Y]}$ όπου για $u = 0$, η παράμετρος θ δεν επιδρά στις εν λόγω συναρτήσεις, έτσι και εδώ οι δύο καμπύλες διέρχονται από το ίδιο σημείο $u = 0$, με $\text{Cov}[X, Y](0) = -0.3827$ (βλ. (4.31)).

Τέλος, η συνάρτηση $|\text{Cov}[X, Y]|$ διαγράφει αύξουσα πορεία ως προς την παράμετρο θ , για $u < 4.3$ και φθίνουσα πορεία ως προς την ίδια παράμετρο, για $u \geq 4.3$.



Σχήμα 5.9: Η τυπική απόκλιση του πλεονάσματος (αριστερά) και του ελλείμματος (δεξιά) όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u



Σχήμα 5.10: Η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. πλεονάσματος και ελλείμματος όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u .

Κεφάλαιο 6

Ο συντελεστής Συσχέτισης μεταξύ ελλείμματος και πλεονάσματος (ΣΣΕΠ)

Στα προηγούμενα δύο Κεφάλαια, μελετήσαμε ποσότητες που συντελούν στον υπολογισμό του ΣΣΕΠ. Δόθηκε περισσότερο έμφαση στο πρόσημο της συνάρτησης $\text{Cov}[X, Y]$, το οποίο και αιτιολογήθηκε δια μέσω της ανάλυσης που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3. Είναι σαφές ότι το πρόσημο της συνάρτησης $\rho_{XY}(\bullet)$ θα είναι ίδιο με αυτό της προαναφερθείσας, αφού ο παρονομαστής του ΣΣΕΠ είναι γινόμενο δύο θετικών συναρτήσεων (βλ. Παρατήρηση 4.1). Οπότε στο παρόν Κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε αμιγώς με τη τιμή και τη πορεία του ΣΣΕΠ.

Ακριβέστερα, το παρόν Κεφάλαιο διακρίνεται σε τρεις Ενότητες, στις οποίες μελετάται ο ΣΣΕΠ. Στην πρώτη Ενότητα δεν λαμβάνεται υπόψη το αρχικό απόθεμα u (στο Κεφάλαιο 4, έχουν αναλυθεί οι προκαταρκτικές συναρτήσεις), στη δεύτερη λαμβάνεται υπόψη το αρχικό αποθεματικό (στο Κεφάλαιο 5, έχουν δοθεί οι προκαταρκτικές συναρτήσεις) αυτή τη φορά και τέλος στην τρίτη μελετάται ο ΣΣΕΠ συναρτήσει του αρχ. αποθέματος και του προεξοφλητικού παράγοντα. Επίσης μελετώνται και οι προκαταρκτικές συναρτήσεις για αυτή την περίπτωση.

6.1 Ο ΣΣΕΠ με μηδενικό αρχικό απόθεμα

Στη παρούσα Ενότητα, θα διατυπώσουμε Προτάσεις που αφορούν τον ΣΣΕΠ για κάθε περίπτωση που εξετάστηκε στην §4.3. Προκειμένου να αποδειχθούν αυτές οι Προτάσεις γίνεται χρήση της σχέσης της Παρατήρησης 4.1.

6.1.1 Εκθετική κατανομή

Στην Ενότητα 4.3.1 παρουσιάζονται οι προκαταρκτικές συναρτήσεις του ΣΣΕΠ στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$. Διαπιστώνεται ότι $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

Πρόταση 6.1 Αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε για $u = 0$ και $\theta, \lambda > 0$ ο ΣΣΕΠ είναι

$$\rho_{XY}(u) \Big|_{u=0} = 0 \quad (6.1)$$

Απόδ. Από την Πρόταση 4.5(i), βλέπουμε ότι $\text{Cov}[X, Y] = 0$. Οπότε, κάνοντας χρήση της (4.7), προκύπτει $\rho_{XY}(u) = 0$. ■

Πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Δηλαδή, όση και αν είναι η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, η τιμή του ελλείμματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δεν θα επηρεαστεί.

6.1.2 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις, που συνθέτουν τον ΣΣΕΠ όταν η κατανομή των κινδύνων ακολουθεί μίξη δύο κατανομών, όπου η εκάστοτε βαθμίδα αποτυχίας αυτών των κατανομών είναι σταθερή, υπολογίζονται στην §5.1.2.

Πρόταση 6.2 Αν για την κατανομή F της τ.μ. των κινδύνων Z ισχύει $F = a\mathcal{E}(\beta) + (1-a)\mathcal{E}(\gamma)$, τότε $\forall a \in [0, 1]$, $\theta, \lambda > 0$ και $u = 0$ ο ΣΣΕΠ υπολογίζεται από την σχέση

$$\rho_{XY}(u; a) \Big|_{u=0} = \frac{\gamma a \beta (\beta - \gamma)^2 (1 - a)}{(1 - a)^2 \beta^4 + 2 \gamma a (1 - a) \beta^3 + \Theta_4(a, \beta)}. \quad (6.2)$$

όπου, $\Theta_4(a, \beta) = -2 a \gamma^2 (1 - a) \beta^2 + 2 a \gamma^3 (1 - a) \beta + \gamma^4 a^2$

Απόδ. Από τις (4.17), (4.18) και με την βοήθεια της (4.7), προκύπτει το αποτέλεσμα της (6.2). ■

Εφαρμογή 6.1 Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim a\mathcal{E}(1/2) + (1-a)\mathcal{E}(1/5)$, $\forall a \in [0, 1]$.

Θέτοντας στην (6.2), όπου $\beta = 1/2$ και $\gamma = 1/5$ προκύπτει το κάτωθι αποτέλεσμα

$$\rho_{XY} \left(0; a, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = 90 \frac{a(1-a)}{261a^2 - 870a + 625}. \quad (6.3)$$

Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση της (6.3), και έπειτα εξισώσουμε αυτή με το 0, τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \varrho(0; a) &= -90 \frac{-1+a}{-870a+625+261a^2} - 90 \frac{a}{-870a+625+261a^2} \\ &+ 90 \frac{a(-1+a)(522a-870)}{(-870a+625+261a^2)^2} = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{25}{29} \simeq 0.8620689, \end{aligned}$$

το οποίο και είναι τοπικό μέγιστο, καθότι

$$\left. \frac{d^2}{da^2} \varrho_{XY}(0; a) \right|_{a=25/29} = -\frac{7569}{2000} < 0,$$

με μέγιστη τιμή για τον ΣΣΕΠ

$$\varrho_{XY} \left(0; \frac{25}{29}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{58} \simeq 0.15517.$$

Το Σχήμα 6.1 φαίνεται επιβεβαιώνει τα ανωτέρω αλγεβρικά αποτελέσματα. Η συνάρτηση $\varrho_{XY}(\bullet)$ ξεκινάει από το σημείο $a = 0$ ($Z \sim \mathcal{E}(1/5)$), αυξάνει με σχετικά αργό ρυθμό ώσπου να μεγιστοποιηθεί στο σημείο $(25/29, 9/58)$. Εν συνεχεία φθίνει με απότομο ρυθμό μέχρι να μηδενιστεί για δεύτερη φορά, στο σημείο $a = 1$ ($Z \sim \mathcal{E}(1/2)$).

6.1.3 Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών

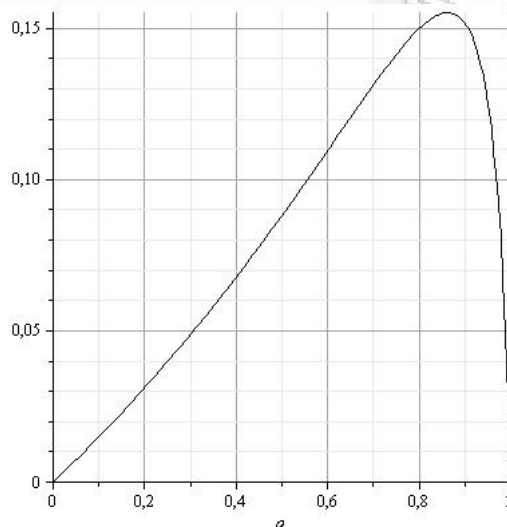
Ακολούθως, ας δούμε την περίπτωση που η τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη τριών Εκθετικών κατανομών. Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις μελετώνται στην Εφαρμογή 4.2.

Εφαρμογή 6.2 Ο ΣΣΕΠ υπό την προϋπόθεση ότι οι κίνδυνοι ακολουθούν την κατανομή $Z \sim a_1 \mathcal{E}(1/2) + a_2 \mathcal{E}(1/5) + (1 - a_1 - a_2) \mathcal{E}(1/10)$, $\forall \theta, \lambda > 0$ και $u = 0$.

Διαιρώντας τις (4.21) και (4.22), σύμφωνα με την (4.7), προκύπτει ο ζητούμενος συντελεστής

$$\begin{aligned} \varrho_{XY}(u; a_1, a_2) \Big|_{u=0} &= \\ &= 10 \frac{128 a_1 + 125 a_2 - 128 a_1^2 - 244 a_1 a_2 - 125 a_2^2}{-16640 a_1 - 12500 a_2 + 10000 + 6656 a_1^2 + \Theta_5(a_1, a_2)}, \quad (6.4) \end{aligned}$$

a	$(\%) \varrho_{XY}(0; a)$
0	0.0
0.1	1.4983
0.2	3.1207
0.3	4.8775
0.4	6.7763
0.5	8.8149
0.6	10.966
0.7	13.135
0.8	14.993
0.9	15.165
1.0	0.0



Σχήμα 6.1: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\xi(1/2) + (1-a)\xi(1/5)$, συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας

όπου, $\Theta_5(a_1, a_2) = 9520 a_1 a_2 + 3125 a_2^2$.

Η συνάρτηση $\varrho_{XY}(\bullet)$ που περιγράφεται στην (6.4) είναι μη αρνητική, αφού όπως επισημαίνεται και στην Παρατήρηση 4.6

$$\text{Cov}[X, Y] \geq 0.$$

6.1.4 Γάμμα κατανομή

Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, μελετώνται εκτενώς στην §4.3.4 και παρατηρείται ότι

1. για $n < 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] > 0 \Leftrightarrow \varrho_{XY} > 0$,
2. για $n = 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \varrho_{XY} = 0$,
3. για $n > 1$, τότε $\text{Cov}[X, Y] < 0 \Leftrightarrow \varrho_{XY} < 0$,

για κάθε παράμετρο κλίμακας $\beta > 0$ και παραμέτρους του υποδείγματος $\theta, \lambda > 0$.

Πρόταση 6.3 Αν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, τότε $\forall \theta, \lambda > 0$ και $u = 0$, ο ΣΣΕΠ υπολογίζεται από την μαθηματική έκφραση

$$\varrho_{XY}(u; n) \Big|_{u=0} = \frac{1-n}{5+n}, \quad (6.5)$$

Απόδ. Λόγω του ότι $X \stackrel{d}{=} Y$ (βλ. Πρόταση 4.3), τότε αρκεί να διαιρέσουμε την (4.23) με την (4.24). Έτσι καταλήγουμε, μετά από κάποιους υπολογισμούς, στην (6.5). ■

Παρατήρηση 6.1 Είναι οφθαλμοφανές από την τελευταία Πρόταση, ότι η συσχέτιση των τ.μ. X, Y δεν επηρεάζεται από την παράμετρο κλίμακας β .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αλγεβρική μελέτη του ανωτέρω δείκτη. Παραγωγίζοντας την μαθηματική έκφραση της (6.5), ως προς τη μοναδική εξαρτώμενη παράμετρο, n , θα έχουμε

$$\frac{d}{dn} \rho_{XY}(0; n) = -\frac{6}{(5+n)^2} < 0,$$

και επίσης, παραγωγίζοντας την τελευταία

$$\frac{d^2}{dn^2} \rho_{XY}(0; n) = -\frac{12}{(5+n)^3} < 0.$$

Ενώ, ο ΣΣΕΠ ικανοποιεί την βασική συνθήκη που είδαμε στην (1.28), ή αν προτιμά κανείς στην (1.29), αφού ασυμπτωτικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(0; n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n} = -1$$

η ελάχιστη τιμή, αφού $\rho_{XY} \searrow n$ και

$$\lim_{n \rightarrow 0} \rho(0; n) = \frac{1}{5}$$

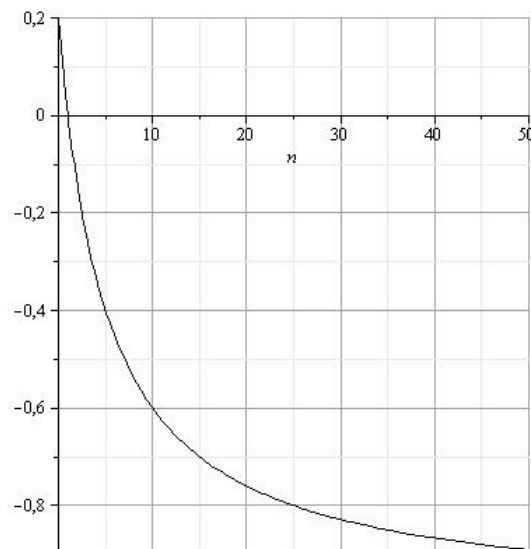
η μέγιστη τιμή του.

Παρατήρηση 6.2 Ο συντελεστής $\rho_{XY}(\bullet)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο μορφής n , ο οποίος στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, ασυμπτωτικά στο σημείο $n = 0$ και είναι ίσος με $1/5$ και ελάχιστη τιμή (επίσης, ασυμπτωτικά) στο $+\infty$ με αντίστοιχη τιμή -1 .

Τέλος τέμνει τον θετικό ημιάξονα (όπως ήταν αναμενόμενο) στο σημείο $n = 1$ ($Z \sim \mathcal{E}(\beta)$).

Η τελευταία Παρατήρηση μπορεί να διαπιστωθεί και γραφικά: στο Σχήμα 6.2 παρουσιάζεται το γράφημα του ΣΣΕΠ, καθώς επίσης και μερικές ενδεικτικές τιμές αυτού.

n	$(\%) \varrho_{XY}(0; n)$
0.1	17.647
0.3	13.214
0.5	9.0909
0.7	5.2632
0.9	1.6945
2	-14.286
4	-33.333
6	-45.455
8	-53.846
10	-60.000
12	-64.706
14	-68.421



Σχήμα 6.2: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$, συναρτήσεως της παραμέτρου μορφής n

6.1.5 Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής

Στην §4.3.5 περιγράφονται αλγεβρικός οι προκαταρκτικές συναρτήσεις, για τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ, που φαίνεται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.4 Αν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1 - a)\mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall \theta, \lambda > 0$ και $u = 0$ ισχύει

$$\varrho_{XY}(u; a, n) \Big|_{u=0} = - \frac{an(2an^2 + 6n - 7an - 4 + 4a + an^3 - 2n^2)}{2a^2n^3 + 5a^2n^2 + 20an - 20a^2n + \Theta_6(a, n)}. \quad (6.6)$$

όπου $\Theta_6(a, n) = a^2n^4 + 4an^3 - 24a + 12a^2 + 12$.

Απόδ. Διαιρώντας την (4.25), από την (4.32), προκύπτει εύκολα η (6.6). ■

Ο ΣΣΕΠ, που εκφράζεται από την (6.6) της Προτάσεως 6.4, είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου κλίμακας β . Αυτό οφείλεται στην απλοποίηση που επιτυγχάνεται από την διαίρεση της (4.25), από την (4.32). Είναι σαφές ότι αν οι δύο παράμετροι κλίμακας ήταν διαφορετικοί τότε κάτι τέτοιο δεν θα ίσχυε.

Η διδιάστατη συνάρτηση της (6.6), είναι ένα πηλίκο πολυωνύμων όπου το πρόσημό της επηρεάζεται μόνο από το πρόσημό του αριθμητή. Ο αριθμητής είναι ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, ως προς n με αντίστοιχο συντελεστή $-\alpha^2$, ενώ ο παρανομαστής είναι, επίσης, ένα τετάρτου βαθμού πολυώνυμο με συντελεστή α^2 .

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{XY}(0; a, n) &= -\frac{a^2 n^4}{a^2 n^4} \\ &= -1 < 0, \quad \forall a \in (0, 1].\end{aligned}$$

Η επόμενη Παρατήρηση, μελετά τις συνθήκες για τις οποίες οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Παρατήρηση 6.3 Όπως δηλώνεται και στην Πρόταση 6.1, όταν $Z \sim \mathcal{E}(\beta) \Rightarrow \rho_{XY}(0) = 0$ (η συνεπαγωγή είναι αυστηρή). Οπότε στην προκειμένη περίπτωση, η τ.μ. $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1-a)\mathcal{E}(\beta)$ γίνεται Εκθετική στην περίπτωση που ισχύει το ενδεχόμενο $\mathcal{A} = \{a = 0\} \cup \{n = 1\}$.

Ωστόσο η ισχύς του ενδεχομένου \mathcal{A} , δεν είναι η μοναδική περίπτωση που οδηγεί σε ασυσχέτιστες. Όπως αναλυτικά αιτιολογήσαμε στην Πρόταση 4.9, ανεξαρτησία επιτυγχάνεται, αν ισχύει το ενδεχόμενο

$$\mathcal{B} = \left\{ a = \frac{2(n-2)}{n^2 + 3n - 4} \right\} \cap \{n > 2\}.$$

Συνοψίζοντας, οι τ.μ. X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, αν συμβαίνει η ένωση $\mathcal{G} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Τόσο στο τριών διαστάσεων Σχήμα 6.3, όσο και στο Σχήμα 6.4 (δεξιά), φαίνεται να επισυνάπτεται αυτά που υπόκεινται στην Παρατήρηση 6.3.

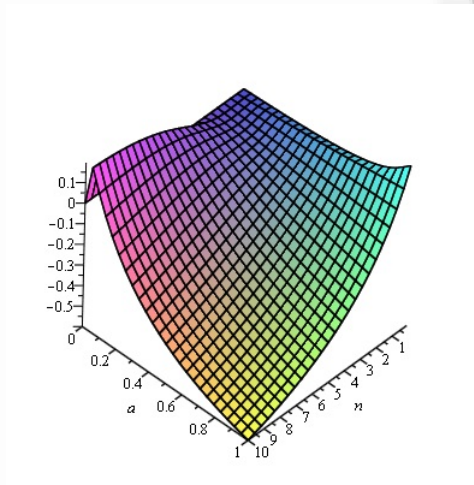
Ειδικότερα δε, στο Σχήμα 6.3, εικονίζεται η συνάρτηση της (6.6), συναρτήσεως των παραμέτρων a και n . Βλέπουμε, όπως ήταν και αναμενόμενο, ο ΣΣΕΠ να ξεκινά από το σημείο $a = 0$ (για οποιοδήποτε n), να καταγράφει αύξουσα πορεία και κατόπιν φθίνουσα, μηδενίζοντας έτσι στο σημείο που αληθεύει το ενδεχόμενο \mathcal{B} . Τέλος διαγράφει μια φθίνουσα πορεία, και ελαχιστοποιείται ασυμπτωτικά στο $n \uparrow \infty$, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου βαρύτητας $a \in [0, 1]$.

Ενώ στο Σχήμα 6.4 (δεξιά), απεικονίζεται ο ΣΣΕΠ, συναρτήσεως της παραμέτρου βαρύτητας a , για τέσσερις περιπτώσεις της παραμέτρου μορφής n . Αξιοπρόσεχτη είναι η πορεία της καμπύλης, για την οποία $n = 3$.

Τέλος, στο Σχήμα 6.4 (αριστερά), παρουσιάζεται η συνάρτηση $\rho_{XY}(\bullet)$, συναρτήσεως της παραμέτρου μορφής n , αυτή τη φορά, και για τέσσερις περιπτώσεις της παραμέτρου βαρύτητας a . Η αύξουσα πορεία της συνάρτησης $|\rho_{XY}|$ ως προς την παράμετρο βαρύτητας a είναι έκδηλη.

6.1.6 Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών

Στην §4.3.6 παρουσιάστηκαν δύο Εφαρμογές, στις οποίες εμπεριέχονται οι προκαταρκτικές ποσότητες, που πρόκειται να μελετηθούν στην παρούσα Παράγραφο.



Σχήμα 6.3: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1-a)\mathcal{E}(\beta)$, συναρτήσεως της παραμέτρου βαρύτητας a και παραμέτρου μορφής n

Αν συμβολίσουμε με $F = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_3$, την μίξη τριών κατανομών με τις επιμέρους μιστικές κατανομές να ακολουθούν

$$\begin{aligned} F_1 &= \mathcal{E}(\beta_1), \\ F_2 &= \mathcal{G}(n_1, \beta_2), \\ F_3 &= \mathcal{G}(n_2, \beta_3), \end{aligned} \quad (6.7)$$

τότε διαπιστώνεται ότι ανεξαρτήτως παραμέτρων κλίμακας $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) > 0$

1. αν $n_1, n_2 < 1$, τότε

$$r \searrow x \Leftrightarrow Z \in DFR \Leftrightarrow Z_e \in DFR \Leftrightarrow \text{Cov}[X, Y] > 0 \Leftrightarrow \rho_{XY} > 0,$$

ως μίξη DFR κατανομών, όπως αναμενόταν από το Θεώρημα 3.3,

2. ενώ αν $n_1, n_2 > 1$, τότε δεν συμβαίνει (κατ' ανάγκη)

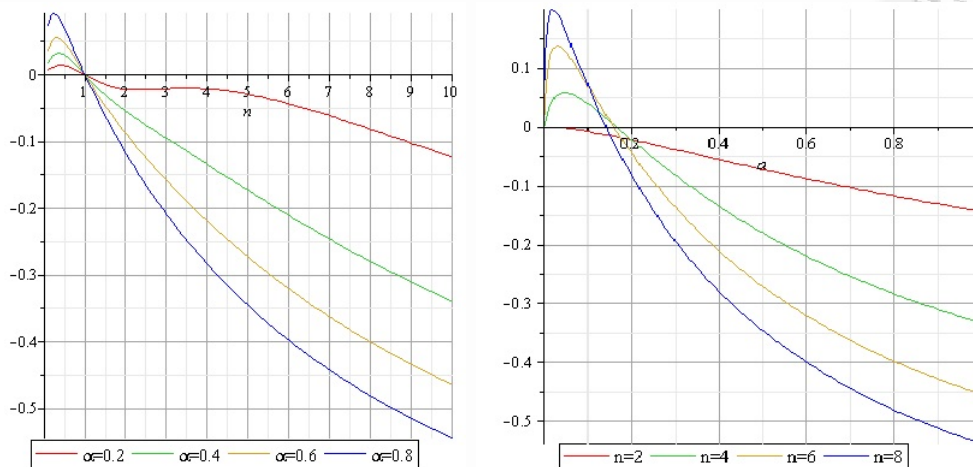
$$r \nearrow x \Leftrightarrow Z \in IFR \Leftrightarrow Z_e \in IFR \Leftrightarrow \text{Cov}[X, Y] < 0 \Leftrightarrow \rho_{XY} < 0,$$

σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.

Εφαρμογή 6.3 Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim 1/4\mathcal{E}(1) + 1/4\mathcal{G}(2, 1) + 1/2\mathcal{G}(3, 1)$, για $u = 0$.

Βασίζομενοι στις σχέσεις της Εφαρμοχής 4.3, και ειδικότερα διαιρώντας τις (4.31) και (4.30), προκύπτει

$$\rho_{XY}(u) \Big|_{u=0} = \frac{183}{855}. \quad (6.8)$$



Σχήμα 6.4: Ο ΣΣΕΠ συναρτήσει της παραμέτρου μορφής n (αριστερά) και της παραμέτρου βαρύτητας a (δεξιά), όταν $Z \sim a\mathcal{G}(n, \beta) + (1 - a)\mathcal{E}(\beta)$

Εφαρμογή 6.4 Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim (1/4)\mathcal{E}(1) + (1/4)\mathcal{G}(1/2, 1) + (1/2)\mathcal{G}(1/4, 1)$, για $u = 0$.

Ενεργώντας κατά τον ίδιο τρόπο με αυτόν της Εφαρμογής 6.1.6, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις της Εφαρμογής 4.4, θα έχουμε

$$\rho_{XY}(u) \Big|_{u=0} = -\frac{31}{194}. \quad (6.9)$$

6.2 Ο ΣΣΕΠ παρουσία αρχικού αποθέματος

Στο Κεφάλαιο 5, μελετήσαμε τις προκαταρκτικές συναρτήσεις, συναρτήσει του αρχικού αποθέματος u , που οδηγούν στον απώτερο στόχο της παρούσας μελέτης: το συντελεστή συσχέτισης ελλείμματος και πλεονάσματος.

Στη παρούσα Ενότητα πρόκειται, ως εκ τούτου, να διερευνηθεί ο εν λόγω συντελεστής, με κύρια παράμετρο το αρχικό απόθεμα u .

6.2.1 Εχθρική κατανομή

Στην §5.1.1, είδαμε και κατόπιν δώσαμε μια διαισθητική εξήγηση περί του γεγονότος: $\text{Cov}[X, Y] = 0$, στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$ και $u \geq 0$. Ας δούμε, λοιπόν, την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.5 Αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall u \geq 0$ και $\lambda, \theta > 0$, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των μη ελλειμματικών τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος

είναι

$$\rho_{XY}(u) = 0. \quad (6.10)$$

Απόδ. Άμεση συνέπεια της Προτάσεως 5.1, καθότι στην σχ. (5.1) βλέπουμε ότι $\text{Cov}[X, Y] = 0$, $\forall u \geq 0$, και έτσι κάνοντας χρήση της σχ. (1.26), προκύπτει το αναμενόμενο αποτέλεσμα: $\rho_{XY}(u) = 0$. ■

6.2.2 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Στην §6.1.2 μελετήσαμε τον ΣΣΕΠ, στην περίπτωση που $u = 0$ όταν η τ.μ. Z ακολουθεί μια μίξη δύο Εκθετικών κατανομών ($Z \sim a\mathcal{E}(\beta) + (1-a)\mathcal{E}(\gamma)$), συναρτήσει της παραμέτρου βαρύτητας a . Στην παρούσα Ενότητα θα υπολογίσουμε τον ίδιο συντελεστή για $u \geq 0$ και για τρεις τιμές της παραμέτρου a ($a = 1/2$, $a = 1/3$ και $a = 1/4$). Ωστόσο μόνο για την πρώτη περίπτωση παρατίθεται η υπολογιστική διαδικασία, στο Παράρτημα Β. Ας δούμε την επόμενη Εφαρμογή.

Εφαρμογή 6.5 Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (1/2)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(4)$, $\forall u \geq 0$, $\theta = 7/9$ και $\lambda = 1$.

Διαιρώντας την σχ. (5.6), από το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των σχ. (5.7) και (5.8), προκύπτει

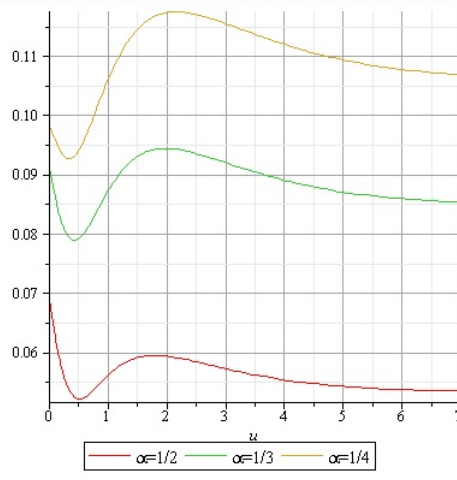
$$\begin{aligned} \rho_{XY}(u) &= \\ &= \frac{2e^{-\frac{1}{4}u} \left(87e^{\frac{1}{2}u} - 144e^{3u} + 132e^{\frac{11}{2}u} - 80 + 480e^{\frac{5}{2}u} - 240e^{2u} - 160e^{\frac{9}{2}u} \right)}{\sqrt{-11 + 12e^{\frac{5}{2}u} + 724e^{5u}} \sqrt{19372e^{3u} + 33844e^{\frac{11}{2}u} + \Theta_8(u)}}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_8(u) &= 22080e^{2u} + 1920e^{\frac{9}{2}u} - 3491e^{\frac{1}{2}u} + 9600 - 19200e^{\frac{5}{2}u} \\ &\quad - 3840ue^{2u} - 53760ue^{\frac{9}{2}u} - 1920u - 26880ue^{\frac{5}{2}u} - 25600e^{\frac{7}{2}u} \\ &\quad - 25600e^{\frac{3}{2}u} - 6400e^{-\frac{1}{2}u}. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6.2) της Προτάσεως 6.2 και αντικαθιστώντας, όπου a τις τρεις τιμές για τις οποίες υπολογίζεται ο ΣΣΕΠ και για $\beta = 2$, $\gamma = 4$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_{XY} \left(0; \frac{1}{2}, 2, 4 \right) &= \frac{2}{29}, \\ \rho_{XY} \left(0; \frac{1}{3}, 2, 4 \right) &= \frac{1}{11}, \end{aligned}$$



Σχήμα 6.5: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim a\varepsilon(2) + (1 - a)\varepsilon(4)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

και

$$\rho_{XY}\left(0; \frac{1}{6}, 2, 4\right) = \frac{10}{101}.$$

Τα τρία ανωτέρω αποτελέσματα φαίνονται και στην πρώτη Γραμμή του Πίνακα 6.1, στον οποίο δίνονται μερικές ενδεικτικές τιμές του ΣΣΕΠ.

Για μια πιο πληρέστερη εικόνα παρατίθεται, επίσης, το Σχήμα 6.5. Από το εν λόγω Σχήμα είναι ξεκάθαρο ότι καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου a , τότε μικραίνει η τιμή της συνάρτησης $\rho_{XY}(\bullet)$.

Πίνακας 6.1: Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim a\varepsilon(2) + (1 - a)\varepsilon(4)$

α	u	$\rho_{XY}(u)$	α	u	$\rho_{XY}(u)$	α	u	$\rho_{XY}(u)$
$\frac{1}{2}$	0	6.896	$\frac{1}{3}$	0	9.0839	$\frac{1}{4}$	0	9.838
	1	5.623		1	8.7371		1	10.596
	2	5.944		2	9.4997		2	11.709
	3	5.733		3	9.1596		3	11.558
	4	5.545		4	8.8809		4	11.194
	5	5.436		5	8.7066		5	10.943
	6	5.380		6	8.6069		6	10.777
7	5.354	7	8.5396	7	10.698			

6.2.3 Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών

Στην §5.1.3, μελετήσαμε (γραφικά) τις τρεις μη αρνητικές ποσότητες που οδηγούν στον υπολογισμό του ζητούμενου δείκτη, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u , για τρεις τιμές της παραμέτρου θ .

Υπενθυμίζουμε ότι η σ.επ. της τ.μ. Z , δίνεται από την αλγεβρική έκφραση

$$\bar{F}_Z(x) = \frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-5x}, \quad x > 0,$$

με βασικές υποθέσεις: $\lambda = 1$ και οι τρεις τιμές της θ είναι: $\theta = 1/5$, $\theta = 1/3$ και $\theta = 1$.

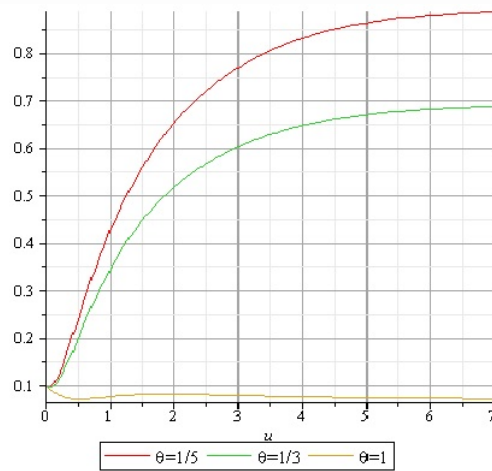
Στον Πίνακα 6.2 παρουσιάζονται κάποιες ενδεικτικές τιμές του ΣΣΕΠ (από $u = 0$ έως $u = 10$). Παρατηρούμε ότι η τιμή της $\rho_{XY}(\bullet)$ είναι πολύ μεγάλη στην περίπτωση που $\theta = 1/5$ (Στήλη 3^η) και πολύ μικρή στην περίπτωση που $\theta = 1$ (Στήλη 4^η). Ενώ στην πρώτη Γραμμή ($u = 0$) του ίδιου Πίνακα (Πίνακας 6.2), φαίνεται ότι οι τρεις τιμές του ΣΣΕΠ διαφέρουν ελαφρώς. Στην πραγματικότητα αυτές οι τιμές είναι ίσες και η διαφορά οφείλεται στην προσέγγιση μέχρι τον υπολογισμό του ΣΣΕΠ.

Το Σχήμα 6.6 περιγράφει επακριβώς τα τελευταία συμπεράσματα που εξήχθησαν από τον Πίνακα 6.2.

Παρατήρηση 6.4 Η ίδια τιμή του ΣΣΕΠ για $u = 0$, $\forall \theta > 0$, είναι άμεση συνέπεια της Παρατήρησης 5.3, αφού εφόσον οι τρεις προκαταρκτικές συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες της παραμέτρου θ (για $u = 0$), τότε η τελευταία παράμετρος δεν θα επηρεάζει την τιμή του ΣΣΕΠ.

Πίνακας 6.2: Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$

u	θ	$\rho_{XY}(u)$	θ	$\rho_{XY}(u)$	θ	$\rho_{XY}(u)$
0	$\frac{1}{3}$	10.002	$\frac{1}{5}$	9.991	1	10.001
1		34.660		42.717		7.922
2		51.837		65.182		8.540
3		60.198		76.766		8.427
4		65.537		83.728		8.846
5		67.029		86.019		8.195
6		67.359		86.651		8.299
7		67.236		86.465		8.026
8		70.185		90.277		8.169
9		69.528		89.467		8.450
10		68.741		88.669		8.555



Σχήμα 6.6: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (1/6)\mathcal{E}(3) + (1/3)\mathcal{E}(2) + (1/2)\mathcal{E}(5)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

6.2.4 Γάμμα κατανομή

Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$ μελετήθηκαν στην §5.1.4, για δύο περιπτώσεις της τιμής της παραμέτρου θ , συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u . Για την ακρίβεια οι συναρτήσεις της Εφαρμογής 5.2, χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση της κάτωθι Εφαρμογής.

Εφαρμογή 6.6 Ο ΣΣΕΠ, στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$, $\forall u \geq 0$, $\beta > 0$ και $\theta = 2$, $\lambda = 1$.

Στην προκειμένη περίπτωση, διαιρώντας την σχ. (5.9) με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου των σχ. (5.10) και (5.11), προκύπτει η δύο μεταβλητών, αυτή τη φορά, συνάρτηση

$$\rho_{XY}(u; \beta) = \frac{\left(-240 e^{\frac{11}{6}\beta u} - 40 e^{\beta u} - 45 e^{\frac{8}{3}\beta u} + 180 e^{\frac{13}{6}\beta u} + 120 e^{\frac{4}{3}\beta u}\right) e^{\beta u}}{\sqrt{207 e^{\frac{8}{3}\beta u} - 24 e^{\frac{11}{6}\beta u} - 8 e^{\beta u}} \sqrt{5400 e^{\frac{25}{6}\beta u} + 3000 e^{\frac{10}{3}\beta u} + \Theta_9(u, \beta)}} \quad (6.12)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_9(u, \beta) &= 1143 e^{\frac{14}{3}\beta u} - 5616 e^{\frac{23}{6}\beta u} - 2160 e^{\frac{25}{6}\beta u} \beta u + 360 e^{\frac{10}{3}\beta u} \beta u \\ &- 152 e^{3\beta u} - 3600 e^{\frac{11}{3}\beta u}. \end{aligned}$$

Πίνακας 6.3: Ο ΣΣΕΠ(%) όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$

u	$\theta = 1$		$\theta = 2$	
	$\rho_{XY}(u, 1)$	$\rho_{XY}(u, 3)$	$\rho_{XY}(u, 1)$	$\rho_{XY}(u, 3)$
0	-14.286	-14.286	-14.286	-14.286
1	-8.524	-9.424	-8.116	-8.621
2	-8.379	-10.012	-7.726	-9.737
3	-9.424	-9.813	-8.621	-9.563
4	-10.016	-9.858	-9.317	-9.374
5	-10.102	-9.807	-9.645	-9.299
6	-10.012	-9.919	-9.737	-9.263

Όπως βλέπουμε από την σχ. (6.12) της τελευταίας Εφαρμογής (Εφαρμογή 6.6), ο ΣΣΕΠ προβάλλεται ως μια διδιάστατη συνάρτηση, με κεντρική παράμετρο: το αρχ. απόθεμα u και δευτερεύουσα: την παράμετρο κλίμακας της τ.μ. Z , τη β .

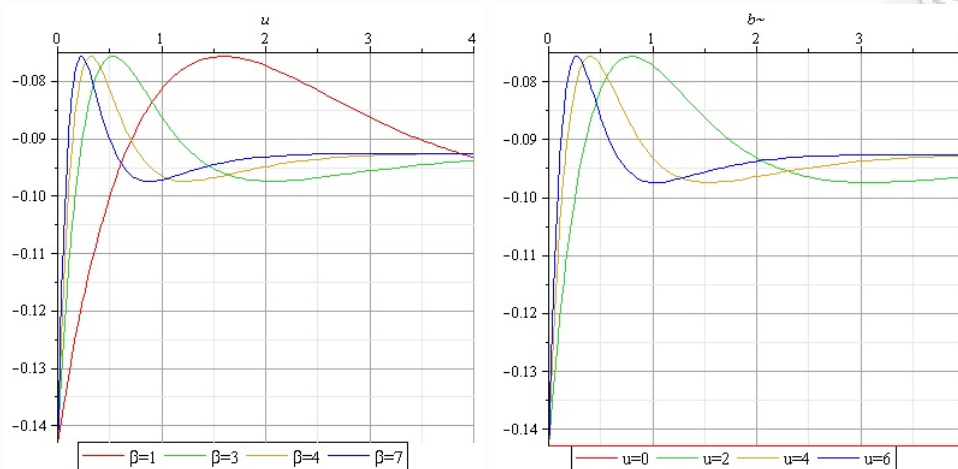
Η 1^η Γραμμή του Πίνακα 6.3 παραθέτει κάποιες τιμές της σχ. (5.9), στην περίπτωση που $u = 0$. Είναι εμφανές ότι η τιμή της συνάρτησης ρ_{XY} , είναι ίδια για κάθε συνδυασμό των u, β .

Παρατήρηση 6.5 Το γεγονός ότι $\rho_{XY}(0; \beta) \approx -14\%$, $\forall \beta > 0$ ήταν αναμενόμενο, καθώς κάθε παράγοντας της σχ. (6.12) είναι πολλαπλασιασμένος με το γινόμενο των παραμέτρων u και β . Έτσι για $u = 0$, έπεται $\beta u = 0$.

Άλλωστε, όπως επισημάναμε και στην Παρατήρηση 6.1, για $u = 0$, όχι μόνο ο ΣΣΕΠ δεν εξαρτάται από το περιθώριο ασφαλείας θ , αλλά ούτε και από την παράμετρο κλίμακας β .

Επίσης τόσο από τον Πίνακα 6.3, όσο και από τα Σχήματα 6.7 (αριστερά) (στο οποίο εικονίζεται η τιμή του ΣΣΕΠ για τέσσερις τιμές της παραμέτρου κλίμακας β , συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u) και 6.7 (δεξιά) (στο οποίο απεικονίζεται ο ΣΣΕΠ για διάφορες τιμές του αρχ. αποθέματος u , συναρτήσει της παραμέτρου β) προκύπτει ότι ο εν λόγω συντελεστής αυξάνει καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β . Πλήν (βεβαίως) της περιπτώσεως που $u = 0$, όπου όπως είπαμε δεν παίζει κανένα ρόλο στην εξέλιξη του (βλ. Παρατήρηση 6.5).

Τέλος, στο Σχήμα 6.8, παρουσιάζεται μια συλλογική εικόνα του ΣΣΕΠ. Για την ακρίβεια παρουσιάζεται η συνάρτηση $\rho_{XY}(\bullet)$, συναρτήσει των παραμέτρων εξάρτησής της (των u και β).



Σχήμα 6.7: Ο ΣΣΕΠ, συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u (αριστερά) και της παραμέτρου κλίμακας β (δεξιά), στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$

6.2.5 Μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής

Όπως φέρει και ο τίτλος της παρούσας Υπό - ενότητας, πρόκειται να παραθέσουμε και να ασχοληθούμε με την διερεύνηση του ΣΣΕΠ, στην περίπτωση που η τ.μ. των αποζημιώσεων Z ακολουθεί μια μίξη Εκθετικής και Γάμμα κατανομής.

Η μελέτη, ωστόσο, των προκαταρκτικών συναρτήσεων (συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u και για δύο τιμές της παραμέτρου βαρύτητας a) έχουν ήδη παρουσιαστεί και μελετηθεί στην §5.1.5. Όπως και στην εν λόγω Παράγραφο, έτσι και εδώ θα παραθέσουμε σε μορφή Εφαρμογής μόνο την αλγεβρική έκφραση ΣΣΕΠ, υπό την προϋπόθεση ότι $a = 1/2$ και θα δούμε την διαφορά (γραφικά) με την αντίστοιχη δείκτρια, για $a = 1/6$.

Εφαρμογή 6.7 Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (1/2) \mathcal{E}(1) + (1/2) \mathcal{G}(2, 1)$, $\forall u \geq 0$ και $\theta = 5/3$, $\lambda = 1$.

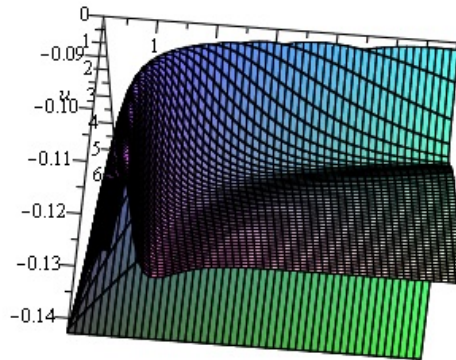
Από την Εφαρμογή 5.3, διαιρώντας την σχ. (5.12) με το γινόμενο της τετραγωνικής ρίζας των σχ. (5.13) και (5.14), προκύπτει

$$\rho_{XY}(u) = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{3}{8}u} \left(20e^{\frac{3}{2}u} - 96e^u + 116e^{\frac{3}{4}u} - 48e^{\frac{1}{4}u} + 17 \right)}{\sqrt{(936 + 72u) e^{\frac{1}{4}u} - (720u - 2160) e^u + \Theta_{10}(u)} \sqrt{68e^{\frac{9}{4}u} - 4e^{\frac{3}{2}u} - e^{\frac{3}{4}u}}}$$

(6.13)

όπου

$$\Theta_{10}(u) = 380e^{\frac{3}{2}u} - 2188e^{\frac{3}{4}u} - 1152e^{\frac{1}{2}u} - 73$$



Σχήμα 6.8: Ο ΣΣΕΠ, συναρτήσεως των u και β , όταν $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$

Στο Σχήμα 6.9, παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης της σχ. (6.13), συναρτήσεως του αρχ. αποθέματος u . Στο ίδιο γράφημα, όπως αναφέραμε, παρατίθεται και η πορεία του αντίστοιχου ΣΣΕΠ όταν ο συντελεστής βαρύτητας υπό - τριπλασιάζεται ($a = 1/6$). Είναι ξεκάθαρο ότι στην δεύτερη περίπτωση ($a = 1/6$), η τιμή του ΣΣΕΠ είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη της πρώτης ($a = 1/2$).

Το γεγονός αυτό, όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης $Cov[X, Y]$, οφείλεται στην βαθμίδα αποτυχίας $r(\bullet)$ (και άρα $r_e(\bullet)$) της τ.μ. Z (της τ.μ. Z_e). Αφού στην περίπτωση που $a = 1/2$, τότε η αύξουσα συνάρτηση $r(\bullet)$ (και άρα η $r_e(\bullet)$) είναι μεγαλύτερη, με αποτέλεσμα να είναι και η συνάρτησης $|e_{XY}(\bullet)|$, κατ' απόλυτη τιμή (βλ. Σχήμα 3.6 (δεξιά)).

6.2.6 Μίξη Εκθετικής και δύο Γάμμα κατανομών

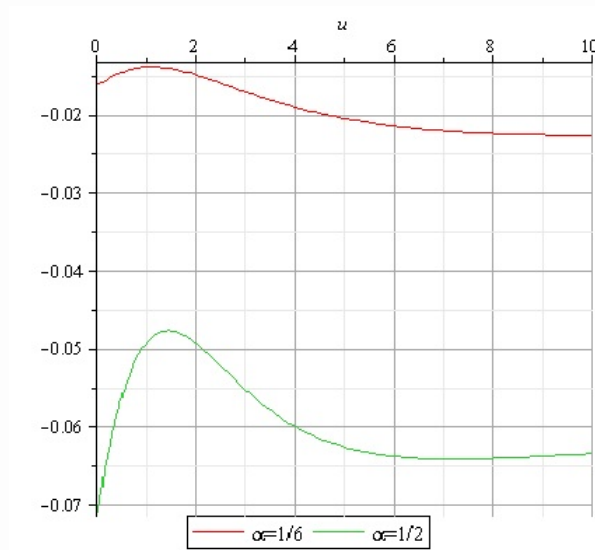
Όπως και στην §5.1.6, στην οποία παρουσιάζονται οι προκαταρκτικές συναρτήσεις, έτσι και εδώ η αλγεβρική πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης της ζητούμενης συνάρτησης δεν μας επιτρέπει να τον προβάλλουμε (αλγεβρικά), παρά μόνο γραφικά.

Ο ΣΣΕΠ, αναπαριστάμεται στο Σχήμα 6.10, στην περίπτωση που

$$Z \sim (1/4) \mathcal{E}(1) + (1/4) \mathcal{G}(2, 1) + (1/2) \mathcal{G}(3, 1),$$

με ένταση ζημιών $\lambda = 1$ και για δύο τιμές της παραμέτρου θ , η οποία εκφράζει το κέρδος που ' απαιτεί ' ο ασφαλιστής.

Στο ίδιο Σχήμα παρουσιάζονται και μερικές ενδεικτικές τιμές των δύο ΣΣΕΠ. Η διαφορά των τιμών της πρώτης Γραμμής του Πίνακα, οφείλεται στο σφάλμα



Σχήμα 6.9: Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim a\varepsilon(\beta) + (1-a)\mathfrak{G}(n, \beta)$, συναρτήσε του αρχ. αποθέματος u

προσέγγισης. Τέλος, το αρνητικό πρόσημο της συνάρτησης $\rho_{XY}(u)$, $\forall u \geq 0$ εξηγείται στην Παρατήρηση 5.7.

6.3 Ο ΣΣΕΠ με κάποιο προεξοφλητικό παράγοντα χωρίς αρχ. απόθεμα

Ως τώρα μελετήθηκε ο ΣΣΕΠ παρουσία αρχ. αποθέματος χωρίς προεξοφλητικό παράγοντα, όσο και οι προκαταρκτικές του συναρτήσεις, που οδηγούν στον υπολογισμό του εν λόγω συντελεστή. Στην ουσία έγινε μια προσπάθεια 'εχμείυσης' κλειστών και εύχρηστων αλγεβρικών μαθηματικών εκφράσεων, για μια πλειάδα κατανομών που αντιπροσωπεύουν και τις δύο κλάσεις γήρανσης.

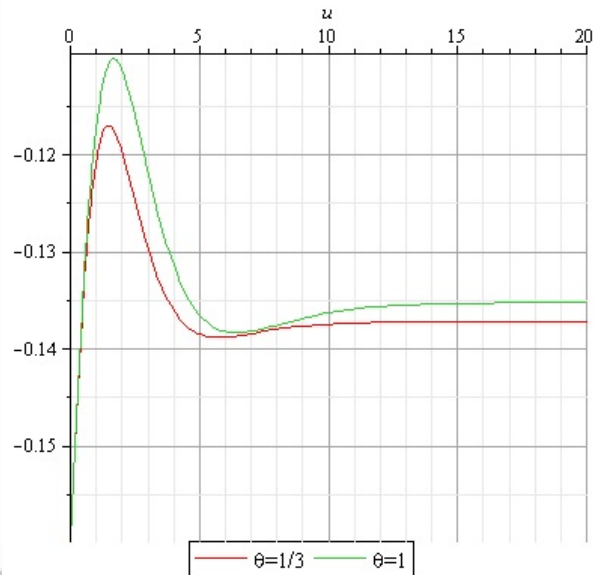
Όλα αυτά, βεβαίως, πραγματώθηκαν αποδεχόμενοι το γεγονός: $\delta = 0$. Όπου, δ παριστά την παράμετρο που εκφράζει το προεξοφλητικό παράγοντα, όπως αυτή (η παράμετρος) 'δεσπόζει' στις περισσότερες σχέσεις της §2.3

Ένα εύλογο ερώτημα που γεννάται στη παρούσα Ενότητα είναι το πως και το κατά πόσο θα επηρεαστούν οι προκαταρκτικές συναρτήσεις (και έπειτα ο ΣΣΕΠ) από την παρουσία του εν λόγω παράγοντα.

Ακριβέστερα στην παρούσα Ενότητα πρόκειται να μελετηθούν όλες εκείνες οι συναρτήσεις, από τις οποίες αποτελείται ο ΣΣΕΠ όταν $u = 0$ και $\delta > 0$.

Η σπουδή του ΣΣΕΠ πρόκειται να διεξαχθεί για τρεις κατανομές κινδύνων. Την Εκθετική, όπου αναμένεται να είναι ασυσχέτιστες οι δύο τ.μ. την μίξη δύο

u	θ	$\rho_{XY}(u)$	θ	$\rho_{XY}(u)$
0	$\frac{1}{3}$	-15.978	1	-15.985
1		-11.974		-11.656
2		-11.905		-11.126
3		-12.946		-12.153
4		-13.623		-13.138
5		-13.857		-13.626
6		-13.860		-13.818
7		-13.828		-13.820



Σχήμα 6.10: Ο ΣΣΕΠ, όταν $Z \sim (1/4) \mathcal{E}(1) + (1/4) \mathcal{G}(2, 1) + (1/2) \mathcal{G}(3, 1)$, συναρτήσει του αρχ. αποθέματος u

Εκθετικών κατανομών, όπου και αναμένεται θετική συσχέτιση και τέλος θα μελετηθεί ο ΣΣΕΠ υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή κινδύνων ακολουθεί την Γάμμα κατανομή με παράμετρο μορφής $n = 2$, όπου και αναμένεται αρνητική συσχέτιση.

Η διαίσθηση που έχουμε για το πρόσημο του ΣΣΕΠ οφείλεται στην μονοτονία της βαθμίδα αποτυχίας $r_e(\bullet)$ της τ.μ. Z_e . Χώρις αυτό να καθίσταται βέβαιο αποτέλεσμα.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην παράθεση Προτάσεων, που σκιαγραφούν τον ΣΣΕΠ για τις τρεις εν λόγω ζημιοκατανομές, ορίζουμε, σε αντιδιαστολή των τ.μ. X και Y , τις τ.μ. X_δ και Y_δ .

Ορισμός 6.1 Ορίζονται τ.μ. X_δ και Y_δ , που εκφράζουν η μιν X_δ το προεξοφλητικό πλεόνασμα, ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπία, δοθέντος ότι συμβεί χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό απόθεμα. Η δε Y_δ εκφράζει το προεξοφλητικό έλλειμμα, ακριβώς μετά τη στιγμή της χρεοκοπία, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό απόθεμα.

Αλγεβρικά, δηλαδή, ο άνωθεν Ορισμός περιγράφεται ως

$$\begin{aligned} X_\delta &= e^{-\delta} U(T-) | U(0) = 0, \\ Y_\delta &= e^{-\delta} |U(T)| | U(0) = 0, \end{aligned}$$

Επομένως, πρωταρχικός στόχος είναι η εύρεση της α.σ.π.π. των τ.μ. X_δ, Y_δ .

6.3.1 Εκθετική κατανομή

Έχει αναφερθεί ότι

$$Z \sim \mathcal{E}(\beta) \Leftrightarrow Z_e \sim \mathcal{E}(\beta) \Leftrightarrow r_e = \beta \Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0,$$

Ισχύει, άραγε το ίδιο και για τις τ.μ. X_δ και Y_δ (βλ. Ορισμό 6.1); Η απάντηση είναι καταφατική, όπως φαίνεται και στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.6 Αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall \beta, \delta, \theta, \lambda > 0$ και $u = 0$ ισχύουν τα ακόλουθα

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των προεξοφλημένων τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι

$$\text{Cov}[X_\delta, Y_\delta] = 0, \quad (6.14)$$

(ii) η διασπορά της προεξοφλημένης τ.μ. του πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι

$$\mathbb{V}[X_\delta](\beta, \rho) = \frac{1}{(\beta + \rho)^2}, \quad (6.15)$$

όπου, ρ η θετική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης του Lundburg, όπως αυτή απεικονίζεται στην (2.18), του Παραδείγματος 2.3.

(iii) η διασπορά της τ.μ. της προεξοφλημένης τ.μ. του ελλείμματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία υπολογίζεται από την σχέση

$$\mathbb{V}[Y_\delta](\beta) = \frac{1}{\beta^2}. \quad (6.16)$$

Απόδ. Βλ. Παράρτημα Θ ■

Παρατήρηση 6.6 Ο όρος που 'δεσπόζει' στην (6.15) είναι η συνάρτηση ρ . Αυτή με την σειρά της εξαρτάται από τις παραμέτρους β, θ και λ . Για $\delta = 0$, τότε

$$\rho = 0 \Rightarrow \mathbb{V}[X_{\delta=0}] = \mathbb{V}[X] = 1/\beta^2.$$

Έτσι για $\delta = 0$, η Πρόταση 6.6 συμπίπτει με την Πρόταση 4.5.

Άμεση συνέπεια της Προτάσεως 6.6, είναι η επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 6.7 Αν $Z \sim \mathcal{E}(\beta)$, τότε $\forall \beta, \delta, \theta, \lambda > 0$ και $u = 0$, ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των προεξοφλημένων τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία είναι

$$\rho_{X_\delta Y_\delta} = 0. \quad (6.17)$$

Απόδ. Η (6.17) προκύπτει από το γεγονός της (6.14), σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1. ■

6.3.2 Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών

Στις Παραγράφους 6.1.2 και 4.3.2 σκιαγραφείται ο ΣΣΕΠ και οι προκαταρκτικές του συναρτήσεις αντίστοιχα, όταν $u, \delta = 0$, στην περίπτωση που

$$Z \sim aE(\beta) + (1 - a)E(\gamma).$$

Βρέθηκε, επίσης, ότι $\text{Cov}[X, Y] > 0$, και αυτό οφείλεται στην μελέτη που περιγράφεται στην §3.2.1, ότι δηλαδή $Z_e \in DFR$.

Πρόταση 6.8 Αν $Z \sim aE(\beta) + (1 - a)E(\gamma)$, τότε $\forall \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda > 0$ και $a \in [0, 1]$ ισχύουν τα ακόλουθα

(i) η συνδιακύμανση μεταξύ των προεξοφλημένων τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_\delta, Y_\delta](a, \beta, \gamma, \rho) &= \\ &= \left(\frac{\beta - \gamma}{(1 - a)\beta + a\gamma + \rho} \right)^2 \frac{a(1 - a)}{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

(ii) η διασπορά της προεξοφλημένης τ.μ. του πλεονάσματος, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι

$$\begin{aligned} \text{V}[X_\delta](a, \beta, \gamma, \rho) &= \\ &= \frac{2(\beta - \gamma)^2 \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \beta\rho + \rho\gamma + \rho^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \right) a^2 - \Theta_{11}(a, \beta, \gamma, \rho) + (\rho + \beta)^4}{\left(((\beta - \gamma)a - \beta - \rho)(\rho + \gamma)(\rho + \beta) \right)^2}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

όπου $\Theta_{11}(a, \beta, \gamma, \rho) = 4(\beta - \gamma) \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \beta\rho + \rho\gamma + \rho^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \right) (\rho + \beta)a$.

(ii) η διασπορά της τ.μ. της προεξοφλημένης τ.μ. του ελλείμματος, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \text{V}[Y_\delta](a, \beta, \gamma, \rho) &= \\ &= \frac{2(1 - a)(\gamma a + \rho)\beta^3 + ((2\gamma^2 - \rho^2)a^2 - 2a\gamma^2 + \rho^2)\beta^2 + \Theta_{12}(a, \beta, \gamma, \rho)}{\beta^2 \left(-(1 - a)\beta - \gamma a - \rho \right)^2 \gamma^2}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_{12}(a, \beta, \gamma, \rho) &= -2\gamma a(\rho - \gamma)(\rho + \gamma)(1 - a)\beta \\ &\quad - ((\rho - \gamma)a - 2\rho)a(\rho + \gamma)\gamma^2 \\ &\quad + (1 - a)^2\beta^4. \end{aligned}$$

Απόδ. Βλ. Παράρτημα Ι. ■

Ο όρος ρ , της Πρότασης 6.8 είναι μια αρκετά πολύπλοκη αλγεβρική σταθερά και για το λόγο αυτό δεν παρατίθεται. (όπως επίσης δεν παρατίθεται και η μαθηματική έκφραση του $\Sigma\Sigma\text{E}\Pi$). Αναφέρεται απλώς όψι ο όρος ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης (ως προς s)

$$(2.17) \Rightarrow \lambda + \delta - cs - \lambda \left(a \frac{\beta}{\beta + s} + (1 - a) \frac{\gamma}{\gamma + s} \right) = 0. \quad (6.21)$$

Αξίζει το κόπο να συγκρίνει κανείς την (6.18), με την (4.17) της Πρότασης 4.3.2. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο σχέσεων, είναι ο όρος ρ . Όπου (όπως ήταν αναμενόμενο) γίνεται μηδέν υπό την προϋπόθεση ότι $\delta = 0$.

6.3.3 Γάμμα κατανομή

Στην Παράγραφο 3.2.3 μελετήθηκε γενικά η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Γάμμα, με παραμέτρους n, β . Ειδικότερα δε, στην Εφαρμογή 3.5 αποσπαστήκε το γεγονός ότι όταν η κατανομή των κινδύνων έχει παράμετρο μορφής ίση με 2, τότε η βαθμίδα αποτυχίας αυτής είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το όρισμα x (βλ. Παρατήρηση 3.6).

Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι και η βαθμίδα αποτυχίας της Z_e , θα είναι αύξουσα. Οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.2, αναμένεται αρνητική συσχέτιση μεταξύ των τ.μ. X_δ και Y_δ .

Εφαρμογή 6.8 Οι προκαταρκτικές συναρτήσεις του $\Sigma\Sigma\text{E}\Pi$ και ο $\Sigma\Sigma\text{E}\Pi$, στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(2, \beta)$, $\lambda, \theta, \beta > 0$ και $u = 0$.

Η υπολογιστική διαδικασία για τον υπολογισμό του $\Sigma\Sigma\text{E}\Pi$ παρατίθεται στο Παράρτημα Κ. Έτσι

$$\text{Cov}[X_\delta, Y_\delta](\beta, \rho) = -\frac{1}{(\rho + 2\beta)^2}, \quad (6.22)$$

και

$$\mathbb{V}[X_\delta](\beta, \rho) = \frac{6\beta\rho + 7\beta^2 + \rho^2}{(\rho + 2\beta)^2(\rho + \beta)^2}, \quad (6.23)$$

και

$$\mathbb{V}[Y_\delta](\beta, \rho) = \frac{8\beta\rho + 7\beta^2 + 2\rho^2}{\beta^2(\rho + 2\beta)^2}. \quad (6.24)$$

Τέλος, παρουσιάζεται η συνάρτηση $\Sigma\Sigma\Pi$, η οποία είναι το προκύπτον αποτέλεσμα της διαίρεσης της (6.22), από το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των (6.23) και (6.24).

Ως εκ τούτου

$$\varrho_{X_\delta Y_\delta}(\beta, \rho) = -\frac{\beta(\beta + \rho)}{\sqrt{\rho^2 + 6\beta\rho + 7\beta^2}\sqrt{2\rho^2 + 8\beta\rho + 7\beta^2}}. \quad (6.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην ουσία, η τιμή του συντελεστή συσχέτισης εξαρτάται μόνο από την τιμή του ρ . Αυτή με την σειρά της εξαρτάται από ένα μεγάλο πλήθος παραμέτρων, συν της παραμέτρου κλίμακας β .

Αναφέραμε ότι η τιμή ρ είναι η θετική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Δηλαδή αν $\hat{f}_Z(s) = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^2$, ο μτσχ. Laplace της τ.μ. των κινδύνων Z , τότε από την σχ. (2.17) προκύπτει

$$\delta + \lambda - c\rho - \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + \rho}\right)^2 = 0,$$

και η επίλυση οδηγεί στο τριτοβάθμιο πολυώνυμο

$$c\rho^3 - (\lambda + \delta)\rho^2 + (c\beta^2 + 2\beta c - 2(\lambda + \delta)\beta)\rho - \delta\beta^2 = 0. \quad (6.26)$$

Στην Πρόταση 6.3, σκιαγραφείται ο $\Sigma\Sigma\Pi$ στην περίπτωση που $Z \sim \mathcal{G}(n, \beta)$ και για $u = 0$: διαπιστώθηκε ότι είναι σταθερός (για δεδομένο, $n = 2$) και ίσος με $-1/7$, ανεξαρτήτως παραμέτρου κλίμακας β . Το γεγονός αυτό, όπως βλέπουμε, μπορεί κάλλιστα να αντληθεί και από την (6.25), αφού καθώς $\delta = 0$, τότε $\rho = 0$ και άρα η σχ. (6.25) γίνεται

$$\begin{aligned} \varrho_{X_0 Y_0}(\rho, \beta) \Big|_{\rho=0} &= -\frac{\beta^2}{\sqrt{7\beta^2}\sqrt{7\beta^2}} \\ &= -\frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Γενικότερα, όμως μπορούμε να πούμε ότι για $\delta > 0$, τότε η τιμή του $\Sigma\Sigma\Pi$ δεν φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά. Ο Πίνακας 6.4 παρουσιάζει μερικές ενδεικτικές τιμές του $\Sigma\Sigma\Pi$, για διάφορες τιμές των παραμέτρων θ , δ και β , ενώ $\lambda = 4$. Φαίνεται ότι η τιμή αυτού είναι πλησίον (όχι ίση) με αυτή της περιπτώσεως που $\delta = 0$.

Πίνακας 6.4: Ο ΣΣΕΠ όταν $Z \sim (2, \beta)$, για $\delta > 0$

$\delta(\%)$	$\theta = 0.3$			$\theta = 0.8$		
	β	$\rho(\%)$	$\varrho_{X_\delta Y_\delta}(\%)$	β	$\rho(\%)$	$\varrho_{X_\delta Y_\delta}(\%)$
1	0.5	0.01137	-14.28571	0.5	0.00782	-14.28571
3	0.5	0.03414	-14.28571	0.5	0.02346	-14.28571
9	0.5	0.10271	-14.28570	0.5	0.07052	-14.28571
1	3	0.32227	-14.28571	3	0.18776	-14.28571
3	3	0.97188	-14.28568	3	0.56488	-14.28570
9	3	2.96249	-14.28543	3	1.70917	-14.28562

Παράρτημα

A Σύμβολα και Συναρτήσεις

Για την καλύτερη ανάγνωση της εργασίας, θεωρείται αναγκαία η ύπαρξη του παρόντος Παραρτήματος. Σε αυτό το Παράρτημα, ο αναγνώστης έχει την δυνατότητα εύρεσης πλήρης περιγραφής συντομογραφιών και συμβολό - συναρτήσεων.

Η παρουσίαση, γίνεται σε μορφή Πινάκων και κάθε ένας από αυτούς περιέχει ομοειδή στοιχεία. Πολύ σημαντική είναι η Στήλη που φέρει την ετικέτα 'Κώδικας' και αυτό γιατί εκεί περιέχονται σύμβολα που χρησιμοποιούνται στο αλγεβρικό πρόγραμμα Maple, που παρουσιάζεται στα επόμενα Παραρτήματα.

Αρχικά, ας δούμε κάποιες συντομογραφίες που βρίσκονται εντός του κείμενου.

Συντομογραφίες	Ερμηνεία
α.σ.κ.	Από κοινού συνάρτηση κατανομής
α.σ.π.π	Από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητα
μσχ.	Μετασχηματισμός
σ.π.π.	Συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητα
σ.κ.	Συνάρτηση κατανομής
σ.επ.	Συνάρτηση επιβίωσης
σ.α.	Στοχαστική ανέλιξη
ΣΑΠ	Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος
ΣΣΕΠ	Συντελεστής συσχέτισης, μεταξύ των μη ελλειμματικών τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος
τ.μ.	Τυχαία μεταβλητή
τ.δ.	Τυχαίο διάνυσμα
τ.ω.	Τέτοιο ώστε
σχ.	Σχέση

Στον επόμενο Πίνακα, παρουσιάζονται κάποιες γνωστές συνεχείς και διακριτές κατανομές, μαζί με τις αντίστοιχες παραμέτρους τους.

Κείμενο	Κώδικας	Ερμηνεία
β, γ	b	Παράμετρος κλίμακας
n	n	Παράμετρος μορφής
a	a ή A	Συντελεστής βαρύτητας
μ	-	Μέση τιμή
σ	-	Τυπική απόκλιση
λ	l	Η ένταση της σ.α. Poisson
$\mathcal{G}(p)$	-	Γεωμετρική κατανομή, με πιθανότητα αποτυχίας p
$\mathcal{P}(\lambda)$	-	Κατανομή Poisson, με παράμετρο λ
$\mathcal{E}(\beta)$	-	Εκθετική κατανομή, με παράμετρο β
$\mathcal{G}(n, \beta)$	-	Γάμμα κατανομή, με παραμέτρους β και n
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	-	Κανονική κατανομή, με παραμέτρους μ και σ

Ακολούθως, παρουσιάζονται κάποιοι μαθηματικοί και μη συμβολισμοί, που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στο κείμενο.

Σύμβολα	Ερμηνεία
$(1) \Leftrightarrow (2)$	Χρησιμοποιείται για να εκφράσει ότι από την σχ. (1), μπορούμε να οδηγηθούμε στην (2), αλλά και το αντίστροφο
$(1) \Rightarrow (2)$	Χρησιμοποιείται για να εκφράσει ότι από την σχ. (1), μπορούμε να οδηγηθούμε στην (2), αλλά όχι αντίστροφα
\uparrow	Υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε συνάρτηση ή παράμετρος, τείνει σε έναν αριθμό από τα αριστερά
\downarrow	Υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε συνάρτηση ή παράμετρος, τείνει σε έναν αριθμό από τα δεξιά
\nearrow	Υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε συνάρτηση είναι αύξουσα
\searrow	Υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε συνάρτηση είναι φθίνουσα
\sim	Υποδηλώνει την ακολουθεία, ενώ στον κώδικα την μη αρνητικότητα των παραμέτρων
\bullet	Οποιαδήποτε παράμετρος ή σύνολο παραμέτρων
\blacksquare	Υποδηλώνει την ολοκλήρωση κάποιας απόδειξης Θεωρήματος ή Προτάσεως

Όλες οι τ.μ., καθώς και οι πραγματοποιήσεις αυτών, περιγράφονται στον ακόλουθο Πίνακα.

Κειμένο	Κώδικας	Ερμηνεία
t	-	Χρόνος
u	t	Το αρχικό αποθεματικό
c	c	Η τιμή του ασφαλιστρού
θ	m ή $theta$	Το περιθώριο ασφαλείας
δ	d	Ο προεξοφλητικός παράγοντας
T	-	Χρονική στιγμή, κατά την οποία συμβαίνει χρεοκοπία
Z	Z	Κατανομή της τ.μ. των απαιτήσεων
Z_T	-	Το ζημιογόνο γεγονός, που προκαλεί την χρεοκοπία
Z_e	-	Κατανομή ισορροπίας της τ.μ. Z
$U(t)$	-	Η ΣΑΠ, κατά τη χρονική στιγμή t
$U(T-)$	-	Το πλεόνασμα, την χρονική στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία
$ U(T) $	-	Το έλλειμμα, την χρονική στιγμή ακριβώς μετά την χρεοκοπία, κατά απόλυτη τιμή
F	-	Υποδηλώνει την κατανομή της τ.μ. Z
X	X	Η τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία ¹
Y	Y	Η τ.μ. του ελλείμματος $ U(T) $, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία
X_δ	X	Η τ.μ. του προεξοφλημένου πλεονάσματος $U(T-)$, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία ²
Y_δ	Y	Η τ.μ. του προεξοφλημένου ελλείμματος $ U(T) $, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία
x	x	Παρατηρούμενη τιμή της τ.μ. X ή X_δ ³
y	y	Παρατηρούμενη τιμή της τ.μ. Y ή Y_δ

Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες συμβολό - συναρτήσεις. Πολυ σημαντικός Πίνακας, προκειμένου να αποκοδικοποιηθούν οι 'ετικέτες' συναρτήσεων, που χρησιμοποιούνται στα επόμενα Παραρτήματα.

Κειμένο	Κώδικας	Ερμηνεία
$f_Z(\bullet)$	$fz(\bullet)$	Η σ.π.π. της τ.μ. Z
$F_Z(\bullet)$	$Fz(\bullet)$	Η σ.κ. της τ.μ. Z
$\bar{F}_Z(\bullet)$	$Fzdex(\bullet)$	Η σ.επ. της τ.μ. Z
$\hat{f}_Z(\bullet)$	$Laplacefz(\bullet)$	Ο μτσχ. Laplace της σ.π.π. της τ.μ. Z
$\hat{\bar{F}}_Z(\bullet)$	$LaplaceFzdex(\bullet)$	Ο μτσχ. Laplace της σ.επ. της τ.μ. Z
p_k	$p(k)$	Η k -στη ροπή της τ.μ. Z
$f_e(\bullet)$	$fequil(\bullet)$	Η σ.π.π. της κατανομής ισορροπίας Z_e , της τ.μ. Z
$F_e(\bullet)$	$Fequil(\bullet)$	Η σ.κ. της κατανομής ισορροπίας Z_e , της τ.μ. Z
$\bar{F}_e(\bullet)$	$Fequildex(\bullet)$	Η σ.επ. της κατανομής ισορροπίας Z_e , της τ.μ. Z
$\hat{f}_Z(\bullet)$	$Laplacefz(\bullet)$	Ο μτσχ. Laplace της σ.π.π. της τ.μ. Z
$\hat{f}_e(\bullet)$	$Laplacefequildex(\bullet)$	Ο μτσχ. Laplace της σ.π.π. της τ.μ. Z_e
$\hat{\bar{F}}_e(\bullet)$	$LaplaceFequildex(\bullet)$	Ο μτσχ. Laplace της σ.επ. της τ.μ. Z_e
$\psi(\bullet)$	$psi(\bullet)$	Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές
$f(x, y u)$	$f(x, y, t)$	Η α.σ.π.π. των τ.μ. $U(T-)$ και $ U(T) $, για αρχ. απόθεμα u
$f(x u)$	$f(x, t)$	Η σ.π.π. της τ.μ. $U(T-)$, για αρχ. απόθεμα u
$g(u, y)$	$g(t, y)$	Η σ.π.π. της τ.μ. $ U(T-) $, για αρχ. απόθεμα u
$h_{XY}(\bullet)$	$hxy(\bullet)$	Η α.σ.π.π. των τ.μ. X και Y
$h_X(\bullet)$	$hx(\bullet)$	Η σ.π.π. της τ.μ. X
$h_Y(\bullet)$	$hy(\bullet)$	Η σ.π.π. της τ.μ. Y
$P[A]$	-	Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο $\{A\}$
$E[X]$	$ElpidaX$	Η μαθηματική ελπίδα της τ.μ. X ή X_δ
$E[XY]$	$ElpidaXY$	Η μαθηματική ελπίδα του γινομένου X και Y ή των X_δ και Y_δ
$E[X^2]$	$ElpidaX2$	Η δεύτερη ροπή της τ.μ. X
$V[X]$	$VarX$	Η διασπορά της τ.μ. X
$Cov[X, Y](\bullet)$	$CovXY(\bullet)$	Η συνδιακύμανση μεταξύ των τ.μ. X και Y , συναρτήσεως της ή των παραμέτρων \bullet
$\rho_{XY}(\bullet)$	$rhoXY(\bullet)$	Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τ.μ. X και Y , συναρτήσεως της ή των παραμέτρων \bullet

Β Αναλυτική παρουσίαση της υπολογιστική διαδικασίας του Κεφαλαίου 4

Σκοπός του παρόντος Παραρτήματος είναι η μαθηματική τεκμηρίωση και η αναλυτική απόδειξη των Προτάσεων, καθώς και η επίλυση των Εφαρμογών του Κεφαλαίου 4.

Απόδειξη Προτάσεως 4.6 (Μίξη δύο Εκθετικών κατανομών)

Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα των ζημιών είναι της μορφής

$$f_Z(x) = a\beta e^{-\beta x} + (1-a)\gamma e^{-\gamma x}, \quad x > 0, \quad (\text{B1})$$

όπου βεβαίως, $0 \leq a \leq 1$.

Άρα η ροπή k -τάξης της κατανομής ζημιών είναι

$$(1.6) \stackrel{(B1)}{\Rightarrow} p_k = a \frac{1}{\beta^k} \Gamma(1+k) + (1-a) \frac{1}{\gamma^k} \Gamma(1+k),$$

όπου γενικά για κάθε ακέραιο αριθμό, έστω ν , ισχύει

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu) &= (\nu-1)! \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-2)(\nu-1) \end{aligned}$$

Η τιμή του ασφαλιστρου, από (2.4) θα είναι

$$c = (1+\theta) \lambda \left(\frac{a}{\beta} + \frac{1-a}{\gamma} \right),$$

ενώ λαμβάνοντας υπόψη την σχ. (2.26), για $u = 0$ προκύπτει η από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα του ελλείμματος - πλεονάσματος εν απουσία αρχ. αποθέματος

$$f(x, y|0) = \frac{1}{1+\theta} \frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{1-a}{\gamma}} (a\beta e^{-\beta(x+y)} + (1-a)\gamma e^{-\gamma(x+y)}), \quad (\text{B2})$$

ενώ διαιρώντας την (B2) με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με μηδενικό απόθεμα ($\psi(0) = 1/(1+\theta)$), με σκοπό να υπολογιστεί η από κοινού μη ελλειμματική πυκνότητα ελλείμματος - πλεονάσματος, τότε

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{1-a}{\gamma}} (a\beta e^{-\beta(x+y)} + (1-a)\gamma e^{-\gamma(x+y)}),$$

Έτσι, η μαθηματική ελπίδα του γινομένου των τ.μ. X και Y είναι

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{(1-a)\beta^3 + a\gamma^3}{(\beta\gamma)^2((1-a)\beta - a\gamma)}.$$

Παράλληλα, οι περιθώριες μη ελλειμματικές πυκνότητες του πλεονάσματος και του ελλείμματος, βρίσκονται αρκεί να ολοκληρωθεί η πυκνότητα της (B2) ως προς y και x αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα

$$h_X(x|0) = -\frac{\gamma\beta(ae^{-\beta x} + (1-a)e^{-\gamma x})}{(1-a)\beta - \gamma},$$

και

$$h_Y(y|0) = -\frac{\gamma\beta(ae^{-\beta y} + (1-a)e^{-\gamma y})}{(1-a)\beta - \gamma},$$

με αντίστοιχες μαθηματικές ελπίδες και δεύτερες ροπές

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{(1-a)\beta^2 + a\gamma^2}{\beta\gamma((1-a)\beta + a\gamma)}.$$

και

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 2 \frac{(1-a)\beta^3 + a\gamma^3}{(\beta\gamma)^2((1-a)\beta + \gamma a)}.$$

Έτσι η συνδιακύμανση των μεταβλητών X , Y , καθώς επίσης και οι αντίστοιχες διασπορές θα είναι

$$\text{Cov}[X, Y] = \left(\frac{\beta - \gamma}{(1-a)\beta + \gamma a} \right)^2 \frac{a(1-a)}{\beta\gamma}.$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] &= \\ &= \frac{(1-a)^2\beta^4 + 2a\gamma(1-a)\beta^3 - 2a\gamma^2(1-a)\beta^2 + 2a\gamma^3(1-a)\beta + \gamma^4a^2}{\gamma^2((-1+a)\beta - \gamma a)^2\beta^2}. \end{aligned}$$

Επίλυση της Εφαρμογής 4.2 (Μίξη τριών Εκθετικών κατανομών)

Η υπολογιστική διαδικασία είναι όμοια με αυτή της περίπτωσης που οι ζημιές

ακολουθούν την μίξη δύο Εκθετικών κατανομών. Δηλαδή αν η σ.π.π. των ζημιών είναι

$$f_Z(x) = \frac{1}{2} a_1 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{5} a_2 e^{-\frac{1}{5}x} + \frac{1}{10} (1 - a_1 - a_2) e^{-\frac{1}{10}x},$$

όπου $0 \leq a_1 + a_2 \leq 1$, τότε η ροπή k -τάξης της τ.μ. Z είναι

$$p_k = 2^k a_1 \Gamma(1+k) + 5^k a_2 \Gamma(1+k) + 10^k (1 - a_1 - a_2) \Gamma(1+k),$$

ενώ η τιμή του ασφαλιστρού υπολογίζεται από την σχέση

$$c = (1 + \theta) \lambda (-8 a_1 - 5 a_2 + 10),$$

και λαμβάνοντας υπόψη την σχ. (2.26), για $u = 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα

$$f(x, y|0) = \frac{\frac{1}{2} a_1 e^{-\frac{1}{2}(x-y)} + \frac{1}{5} a_2 e^{-\frac{1}{5}(x-y)} + \frac{1}{10} (1 - a_1 - a_2) e^{-\frac{1}{10}(x-y)}}{(1 + \theta) (10 - 8 a_1 - 5 a_2)}$$

η από κοινού (ελλειμματική) πυκνότητα ελλείμματος - πλεονάσματος για $u = 0$, και άρα η από κοινού (μη ελλειμματική) των τ.μ. X, Y είναι

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{\frac{1}{2} a_1 e^{-\frac{1}{2}(x-y)} + \frac{1}{5} a_2 e^{-\frac{1}{5}(x-y)} + \frac{1}{10} (1 - a_1 - a_2) e^{-\frac{1}{10}(x-y)}}{10 - 8 a_1 - 5 a_2}$$

Έτσι, η μαθηματική ελπίδα του γινομένου των τ.μ. X και Y είναι

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{992 a_1 + 875 a_2 - 1000}{8 a_1 + 5 a_2 - 10}.$$

Παράλληλα, η περιθώριες μη ελλειμματικές πυκνότητες των τ.μ. X και Y θα είναι

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{a_1 e^{-\frac{1}{2}x} + a_2 e^{-\frac{1}{5}x} + (1 - a_1 - a_2) e^{-\frac{1}{10}x}}{8 a_1 + 5 a_2 - 10}$$

με αντίστοιχες μαθηματικές ελπίδες

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{96 a_1 + 75 a_2 - 100}{8 a_1 + 5 a_2 - 10},$$

και δεύτερες ροπές

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 2 \frac{992 a_1 + 875 a_2 - 1000}{8 a_1 + 5 a_2 - 10}.$$

Έτσι η συνδιακύμανση των μεταβλητών X και Y , καθώς επίσης και οι αντίστοιχες διασπορές θα είναι

$$\text{Cov}[X, Y] = \frac{-1000 + 992 a_1 + 875 a_2}{8 a_1 + 5 a_2 - 10} - \frac{(-100 + 96 a_1 + 75 a_2)^2}{(8 a_1 + 5 a_2 - 10)^2},$$

και

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = 2 \frac{-1000 + 992 a_1 + 875 a_2}{8 a_1 + 5 a_2 - 10} - \frac{(-100 + 96 a_1 + 75 a_2)^2}{(8 a_1 + 5 a_2 - 10)^2}. \quad \blacksquare$$

Απόδειξη Προτάσεως 4.7 (Gamma κατανομή ζημιών)

Η σ.π.π. των ζημιών είναι

$$f_Z(x) = \frac{\beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(n)},$$

με πρώτη ροπή $p_1 = n/\beta$ και $c = (1 + \theta) \lambda/\beta$.

Η α.σ.π.π. των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος θα είναι

$$f(x, y|0) = \frac{\beta^{n+1} (x + y)^{n-1} e^{-\beta(x+y)}}{(1 + \theta) n \Gamma(n)},$$

και επομένως η α.σ.π.π. των τ.μ. X και Y , είναι

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{\beta^{n+1} (x + y)^{n-1} e^{-\beta(x+y)}}{n \Gamma(n)}.$$

Έτσι, η μαθηματική ελπίδα του γινομένου των προαναφερθείσων τ.μ. θα είναι

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{6} \frac{(1 + n)(2 + n)}{\beta^2}.$$

Παράλληλα, η περιθώριες μη ελλειμματικές πυκνότητες των X, Y θα είναι

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{\beta \Gamma(n, \beta x)}{n \Gamma(n)},$$

με αντίστοιχες μαθηματικές ελπίδες και δεύτερες ροπές

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2} \frac{1 + n}{b},$$

και

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{3} \frac{(1+n)(2+n)}{\beta^2}.$$

Έτσι καταλήγουμε στα προσδοκόμενα αποτελέσματα

$$\text{Cov}[X, Y] = \frac{1}{6} \frac{(1+n)(2+n)}{\beta^2} - \frac{1}{4} \frac{(1+n)^2}{\beta^2},$$

και

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{1}{3} \frac{(1+n)(2+n)}{\beta^2} - \frac{1}{4} \frac{(1+n)^2}{\beta^2}. \quad \blacksquare$$

Απόδειξη Προτάσεως 4.8 (Μίξη Εκθετικής και Gamma κατανομής)

Αναφέραμε ότι

$$f_Z(x) = \frac{a \beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(n)} + (1-a) \beta e^{-\beta x},$$

τότε η πρώτη ροπή θα είναι

$$p_1 = \frac{an + 1 - a}{\beta},$$

και έτσι το ασφάλιστρο, c υπολογίζεται ως

$$c = \frac{(1+\theta) \lambda (an + 1 - a)}{\beta}.$$

Από το γεγονός ότι $\psi(0) = 1/(1+\theta)$ και

$$f(x, y|0) = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{(1+\theta)(an + 1 - a)} \left(\frac{a \beta^n (x+y)^{n-1}}{\Gamma(n)} + (1-a) \beta \right),$$

η α.σ.π.π. των τ.μ. X και Y , θα είναι

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{an + 1 - a} \left(\frac{a \beta^n (x+y)^{n-1}}{\Gamma(n)} + (1-a) \beta \right),$$

ενώ ολοκληρώνοντας την άνωθεν πυκνότητα ως προς x ή ως προς y προκειμένου να εξαχθεί η περιθώρια σ.π.π. των τ.μ. Y ή X , λαμβάνουμε

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{\beta e^{-\beta x}}{a n + 1 - a} \left(\frac{a e^{\beta x} \Gamma(n, \beta x)}{\Gamma(n)} + (1 - a) \right),$$

όπου, $\Gamma(n, \beta x) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\beta x} dx$.

Αφού βρέθηκαν οι πυκνότητες των υπό μελέτη τ.μ.: μπορούμε εύκολα να βρούμε και τις ροπές που απαιτούνται προκειμένου να οδηγηθούμε στο θεμιτό αποτέλεσμα.

Έτσι

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{6} \frac{3 a n^2 + 2 a n + a n^3 - 6 a + 6}{\beta^2 (a n + 1 - a)}$$

και

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2} \frac{a n + a n^2 - 2 a + 2}{\beta (a n + 1 - a)},$$

με δεύτερη ροπή

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{3} \frac{3 a n^2 + 2 a n + a n^3 - 6 a + 6}{\beta^2 (a n + 1 - a)}.$$

Επομένως

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{1}{3} \frac{3 a n^2 + 2 a n + a n^3 - 6 a + 6}{\beta^2 (a n + 1 - a)} - \frac{1}{4} \frac{(a n + a n^2 - 2 a + 2)^2}{\beta^2 (a n + 1 - a)^2},$$

και

$$\text{Cov}[XY] = \frac{1}{6} \frac{3 a n^2 + 2 a n + a n^3 - 6 a + 6}{\beta^2 (a n + 1 - a)} - \frac{1}{4} \frac{(a n + a n^2 - 2 a + 2)^2}{\beta^2 (a n + 1 - a)^2}. \quad \blacksquare$$

Επίλυση Εφαρμογής 4.3 (Μίξη Εκθετικής και δύο Gamma κατανομών)

Έχουμε

$$f_Z(x) = \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{x^{\frac{3}{4}}\pi} e^{-x},$$

τότε η μαθηματική ελπίδα, θα είναι $p_1 = 1/2$. Έτσι το ασφάλιστρο υπολογίζεται ως

$$c = \frac{1}{2} (1 + \theta) \lambda.$$

Άρα η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X, Y υπολογίζεται από την σχέση

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{1}{2} e^{-x-y} + \frac{1}{2} \frac{e^{-x-y}}{\sqrt{x+y}\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-x-y}\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{(x+y)^{\frac{3}{4}}\pi},$$

και ολοκληρώνοντας ως προς y ή x , προκύπτει

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} \frac{e^{-x} (e^x \sqrt{\pi} - e^x \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}))}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) e^{-x} e^x \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi},$$

Για λόγους επαλήθευσης, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty h_{XY}(x, y|0) dx dy = 1.$$

και επίσης

$$\int_0^\infty h_X(x|0) dx = \int_0^\infty h_Y(y|0) dy = 1.$$

Οπότε $\mathbb{E}[XY] = 57/64$ και $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 27/32$. Ενώ $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 99/64$ και κατ' επέκταση

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{855}{1024},$$

και

$$\operatorname{Cov}[XY] = \frac{183}{1024}. \quad \blacksquare$$

Επίλυση της Εφαρμογής 4.4 (Μίξη Εκθετικής και δύο Gamma κατανομών)

Εφόσον

$$f_Z(x) = \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x},$$

τότε η μαθηματική ελπίδα θα είναι $p_1 = 9/4$. Έτσι το ασφάλιστρο

$$c = \frac{9}{4}(1 + \theta) \lambda.$$

Άρα, η από κοινού σ.π.π., των τ.μ. X και Y υπολογίζεται από την έκφραση

$$h_{XY}(x, y|0) = \frac{1}{9} e^{-x-y} + \frac{1}{9} (x+y) e^{-x-y} + \frac{1}{9} (x+y)^2 e^{-x-y},$$

και ολοκληρώνοντας ως προς y ή x , προκύπτει

$$h_X(x|0) = h_Y(x|0) = \frac{1}{9} e^{-x} + e^{-x} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} x \right) + \frac{1}{9} (2 + 2x + x^2) e^{-x}.$$

Για λόγους επαλήθευσης, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_{XY}(x, y|0) dx dy = 1,$$

και επίσης

$$\int_0^{\infty} h_X(x|0) dx = \int_0^{\infty} h_Y(y|0) dy = 1.$$

Οπότε $\mathbb{E}[XY] = 25/9$ και $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 16/9$. Ενώ $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 50/9$ και κατ' επέκταση

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{194}{81},$$

τέλος

$$\text{Cov}[XY] = -\frac{31}{81}. \quad \blacksquare$$

Ευρετήριο

- από κοινού μη ελλειμματική πυκνότητα πιθανότητα ελλείμματος και πλεονάσματος, 58
- από κοινου προεξοφλημένη πυκνότητα των τ.μ. ελλείμματος και πλεονάσματος, 34
- απαριθμήτρια ζημιών, 21
- αρχικό απόθεμα, 20
- βαθμίδα αποτυχίας, 38
- μίξης κατανομών *DFR*, 39
- συνέλιξης κατανομών *IFR*, 39
- διακύμανση, 10
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή από κοινού συνάρτηση κατανομής, 13
- από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
- ελλειμματική, 13
- μη ελλειμματική, 13
- δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, 14
- στοχαστική ανεξαρτησία, 14
- εξίσωση Lundberg, 23
- γενικευμένη εξίσωση Lundberg, 30
- κλάση γήρανσης
- DFR*, 38
- IFR*, 38
- μαθηματική ελπίδα, 10
- μετασχηματισμός Laplace, 11
- περιθώρια μη ελλειμματική πυκνότητα ελλείμματος, 58
- πλεονάσματος, 58
- πιθανότητα χρεοκοπίας, 25
- προεξοφλημένη περιθώρια (ελλειμματική) πυκνότητα πιθανότητα της τ.μ. του πλεονάσματος $U(T-)$, 34
- προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu, 28
- προεξοφλητικό έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, 112
- προεξοφλητικό πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, 112
- χρόνος χρεοκοπίας, 20
- στοχαστική ανέλιξη, 16
- Poisson, 17
- Μαρκοβιανή, 16
- πλεονάσματος, 22
- συνάρτηση
- επιβίωσης, 7
- κατανομής, 7
- πυκνότητας πιθανότητας
- ελλειμματική, 8
- μη ελλειμματική, 6
- συνάρτηση ποινής, 28
- συνδιακύμανση, 15
- ελλείμματος και πλεονάσματος εν απουσία αρχ. αποθέματος, 62
- συντελεστής επιβάρυνσης, 22
- συντελεστής προσαρμογής, 22

συντελεστής συσχέτισης, 15
αρνητική συσχέτιση, 16
ελλείμματος και πλεονάσματος δο-
θέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπί-
α, 60
θετική συσχέτιση, 16
στοχαστική ανεξαρτησία, 16
συσσωρευμένη απώλεια, 21

τυπική απόκλιση, 10
τυχαία μεταβλητή
διακριτή, 6
ελλείμματος, 21
δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπί-
α, 57
πλεονάσματος, 21
δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπί-
α, 57
συνεχής, 6

Βιβλιογραφία

- [1] Κουτσόπουλος Κ., ' Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία των Κινδύνων ', Μέρος 1, 1999, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [2] Dickson D., "Insurance Risk and Ruin", 2005, Cambridge University.
- [3] Κούτρας Μ., ' Εισαγωγή στις Πιθανότητες ', Τόμος 1, 2004, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη.
- [4] Κούτρας Μ., ' Εισαγωγή στις Πιθανότητες ', Τόμος 2, 2004, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη.
- [5] Κάκουλλος Θ., ' Αναλογισμός - Θεωρία Κινδύνου και Πιθανότητες ', Τόμος 1, 1995, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [6] Κάκουλλος Θ., ' Στοχαστικές ανελίξεις ', 1987, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [7] Σταυρακάκης Ν., ' Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις ', Τόμος 1, 1995, Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- [8] Gerber H. & Shiu E., "The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin and the deficit of ruin", 1997, Mathematics and Economics, 21, 129-137.
- [9] Gerber H. & Shiu E., "On the time value of ruin", 1998, North American Actuarial Journal, 2, 48-78.
- [10] Politis K. & Psarrakos G., "The covariance between the surplus prior to and at ruin in the classical risk model", 2011, preprint.
- [11] Barlow R. & Proschan F., "Mathematical Theory of Reliability", 1996, Siam.
- [12] Gertsbakh B., "Statistical Reliability Theory", 1989, Marcel Dekker.