



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
Π.Μ.Σ: ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**Διπλωματική εργασία:**

*Προβλεπτική ικανότητα εναλλακτικών μοντέλων  
πρόβλεψης μεταβλητότητας και η συμβολή τους  
στη διαχείριση κινδύνου μετοχικών  
χαρτοφυλακίων*

**ΜΠΑΚΕΛΛΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ**

**Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Α. Πανοπούλου**

# Περιεχόμενα

## Πρόλογος

### 1 Μοντέλα πρόβλεψης μεταβλητότητας

|       |                                                                                 |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1   | Εισαγωγή                                                                        | 4  |
| 1.2   | Βασικά χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας στις χρηματοοικονομικές<br>χρονοσειρές | 5  |
| 1.3   | Δομή ενός μοντέλου                                                              | 6  |
| 1.4   | Βήματα κατασκευής ενός μοντέλου μεταβλητότητας                                  | 8  |
| 1.4.1 | Έλεγχος για ARCH effects                                                        | 8  |
| 1.5   | Μοντελοποίηση της μεταβλητότητας                                                | 9  |
| 1.5.1 | Μοντέλα ARCH                                                                    | 9  |
| 1.5.2 | Μοντέλα GARCH                                                                   | 12 |
| 1.5.3 | Μοντέλα EGARCH                                                                  | 15 |
| 1.5.4 | Μοντέλα GJR GARCH, TARARCH, APARCH                                              | 17 |
| 1.6   | Εκτίμηση μοντέλων                                                               | 20 |
| 1.7   | Έλεγχος μοντέλων                                                                | 22 |

### 2 Αξιολόγηση των προβλέψεων

|     |                                                                 |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Εισαγωγή                                                        | 23 |
| 2.2 | Προβλήματα αξιολόγησης προβλέψεων                               | 23 |
| 2.3 | Χρήση του $r_{t+s}^2$ σαν εκτιμητή του $\sigma_{t+s}$           | 24 |
| 2.4 | Χρήση του $\ln(r_{t+s}^2)$ σαν εκτιμητή του $\ln(\sigma_{t+s})$ | 26 |
| 2.5 | Diebold & Mariano τεστ                                          | 28 |

### 3 Αξία σε κίνδυνο (VaR)

|       |                                   |    |
|-------|-----------------------------------|----|
| 3.1   | Εισαγωγή                          | 32 |
| 3.2   | Αξία σε κίνδυνο (VaR)             | 32 |
| 3.3   | Εκτίμηση του VaR με μοντέλα GARCH | 35 |
| 3.3.1 | Αναμενόμενο έλλειμμα              | 38 |
| 3.3.2 | VaR χαρτοφυλακίου                 | 39 |

|          |                                                               |    |
|----------|---------------------------------------------------------------|----|
| 3.4      | <i>Backtesting</i>                                            | 39 |
| 3.4.1    | <i>Unconditional Coverage test</i>                            | 40 |
| 3.4.2    | Έλεγχος ανεξαρτησίας των παραβιάσεων                          | 42 |
| 3.4.3    | <i>Conditional Coverage test</i>                              | 43 |
| 3.5      | Σύγκριση μοντέλων VaR με το <i>Diebold &amp; Mariano</i> τεστ | 44 |
| <b>4</b> | <b>Εμπειρική ανάλυση</b>                                      |    |
| 4.1      | Εισαγωγή                                                      | 45 |
| 4.2      | Εφαρμογές σε χρηματιστηριακούς δείκτες                        | 45 |
| 4.2.1    | Δείκτης S&P 500                                               | 46 |
| 4.2.2    | Δείκτης Dax                                                   | 57 |
| 4.2.3    | Δείκτης Ftse 100                                              | 68 |
| 4.2.4    | Δείκτης Cac 40                                                | 75 |
| 4.2.5    | Δείκτης Nikkei 225                                            | 82 |
| 4.2.6    | Δείκτης Dow Jones                                             | 88 |

## **Συμπεράσματα**

## **Βιβλιογραφία**

# Πρόλογος

Η μοντελοποίηση της μεταβλητότητας είναι σημαντικός παράγοντας στις χρηματοοικονομικές αγορές αφού χρησιμοποιείται ευρέως σε πληθώρα εφαρμογών, από την τιμολόγηση παραγώγων έως και τη διαχείριση περιουσιακών στοιχείων. Ιδιαίτερα στις μέρες μας που διανύουμε μια παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση, αν αναλογιστεί κανείς τη σπουδαιότητα της αξίας σε κίνδυνο (VaR) στη διαχείριση του κινδύνου αγοράς, εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η μοντελοποίηση της μεταβλητότητας (και κατ'επέκταση ο υπολογισμός του VaR) είναι μια περιοχή πολύ ενδιαφέρουσα για μελέτη και ενασχόληση. Η θεωρία γύρω από τη μεταβλητότητα έχει αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολυάριθμα μοντέλα. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μοντελοποίηση της μεταβλητότητας μέσω μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας, ο υπολογισμός του VaR και επίσης η αξιολόγηση των μοντέλων αυτών. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα κυριότερα μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (ARCH, GARCH, EGARCH, APARCH, GJR GARCH, ), στο δεύτερο τον έλεγχο Diebold και Mariano για τη σύγκριση δυο μοντέλων καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε κατά την αξιολόγηση των προβλέψεων της μεταβλητότητας, στο τρίτο τον τρόπο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο μέσω των μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας και την αξιολόγηση αυτών μέσω του ελέγχου Diebold και Mariano και του backtesting, τέλος στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο εφαρμόζουμε το θεωρητικό πλαίσιο όλων των προηγούμενων κεφαλαίων στους χρηματιστηριακούς δείκτες S&P 500, Dax, Ftse 100, Cac 40, Dow Jones, Nikkei 225.

Για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω από το ακαδημαϊκό περιβάλλον την καθηγήτρια και επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας Α. Πανοπούλου για την ευκαιρία που έδωσε να ασχοληθώ με ένα άκρως ενδιαφέρον θέμα εμπλουτίζοντας ταυτόχρονα τις γνώσεις μου και για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε στην πορεία της υλοποίησης της εργασίας. Από το φιλικό μου περιβάλλον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Γ. Τριπολιτάκη για την υλική βοήθεια που μου προσέφερε. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου και τη σύντροφο μου Π. Χεινοπώρου για την στήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια.

# Κεφάλαιο 1

## Μοντέλα πρόβλεψης μεταβλητότητας

### 1.1 Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση της μεταβλητότητας αποτελεί μία πολύ ενδιαφέρουσα περιοχή έρευνας τα τελευταία χρόνια. Το ενδιαφέρον αυτό βασίζεται κυρίως στη σημαντικότητα της μεταβλητότητας στις χρηματοοικονομικές αγορές. Χρησιμοποιείται ευρέως σε πληθώρα χρηματοοικονομικών εφαρμογών, από την τιμολόγηση παραγώγων έως τη διαχείριση κινδύνου και περιουσιακών στοιχείων.

Αυτό το μεγάλο φάσμα δραστηριοποίησης της μεταβλητότητας είχε σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη μοντέλων με στόχο τη μοντελοποίηση της. Τα πιο γνωστά μοντέλα είναι: αυτοπαλίνδρομα κινητού μέσου (ARMA), δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (ARCH), στοχαστικής μεταβλητότητας (SV). Εμείς στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με τα ARCH μοντέλα και λεπτομερείς αναφορές για τα μοντέλα αυτά υπάρχουν από τους Bera και Higgins (1995), Bollerslev (1994) and Diebold and Lopez (1995).

Έχει παρατηρηθεί ότι για μεγάλο αριθμό μοντέλων χρονοσειρών η μεταβλητότητα δεν παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, στοιχείο που αποτελεί το αντικείμενο μελέτης του κεφαλαίου αυτού. Τα μοντέλα ARMA υποθέτουν σταθερή διακύμανση ώστε να αδυνατούν να εξηγήσουν τις παρατηρούμενες αλλαγές της μεταβλητότητας, ιδίως σε χρηματοοικονομικά δεδομένα όπως οι δείκτες συναλλάγματος και αποδόσεις μετοχών.

Ο λόγος που καθιστά δύσκολη τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας είναι ότι δε μπορεί να εκτιμηθεί άμεσα. Παρόλο αυτά εμφανίζει κάποια βασικά

χαρακτηριστικά πάνω στα οποία στηρίζεται η ανάπτυξη της μοντελοποίησης της. Στην επόμενη ενότητα αναφέρονται τα βασικότερα από αυτά.

## **1.2 Βασικά χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές**

### *Βαριές Ουρές*

Έχει παρατηρηθεί ότι οι κατανομές που ακολουθούν χρηματοοικονομικές χρονοσειρές (όπως για παράδειγμα αποδόσεις μετοχών) έχουν πιο βαριές ουρές από την κανονική κατανομή. Το γεγονός αυτό αναφέρεται ως υπερβολική κύρτωση. Είναι γνωστό ότι για την τυποποιημένη κανονική κατανομή η τέταρτη ροπή είναι 3, ενώ για πολλές χρηματοοικονομικές χρονοσειρές μεγαλύτερη από 3. Έτσι επιλέγονται κατανομές μεγαλύτερες από την κανονική, όπως η Pareto και η Levy.

### *Πυκνώματα μεταβλητότητας*

Η μεταβλητότητα εμφανίζει πυκνώματα, δηλαδή μεγάλες τιμές της θα ακολουθούνται από επίσης μεγάλες τιμές ή μικρές τιμές από μικρές. Με άλλα λόγια η μεταβλητότητα θα παραμένει υψηλή για κάποιες χρονικές περιόδους και χαμηλή για άλλες.

### *Leverage Effects*

Η μεταβλητότητα αντιδρά διαφορετικά στη μεγάλη αύξηση ή τη μεγάλη μείωση της αξίας του περιουσιακού στοιχείου. Στοιχεία για το Leverage Effect μπορεί να βρει κανείς από τους: Nelson (1991), Gallant, Rossi και Tauchen (1992, 1993), Campbell και Kyle (1993) και Engle και Ng (1993).

*Είναι πεπερασμένη*

Οι τιμές της μεταβλητότητας κινούνται μέσα σε ένα καθορισμένο εύρος και δε συγκλίνει στο άπειρο. Αυτό στατιστικώς σημαίνει ότι η μεταβλητότητα είναι συχνά στάσιμη.

*Δεν εμφανίζει άλματα*

Η μεταβλητότητα εξελίσσεται στο χρόνο συνεχώς κατά κάποιο τρόπο ώστε σπάνια να παρατηρεί κανείς άλματα.

Για να έχουμε αξιόπιστες προβλέψεις μελλοντικών τιμών της μεταβλητότητας είναι αναγκαίο τα μοντέλα να λαμβάνουν υπόψη τις παραπάνω ιδιότητες.

### **1.3 Δομή ενός μοντέλου**

Η έννοια της ετεροσκεδαστικότητας είναι πολύ σημαντική για την εργασία μιας και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σ' αυτή ανήκουν στη κατηγορία μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας. Για το λόγο αυτό προσπαθούμε με ένα απλό παράδειγμα να δώσουμε τον ορισμό της ετεροσκεδαστικότητας.

Έστω  $\{r_t\}$  οι αποδόσεις του περιουσιακού στοιχείου και έστω ότι ακολουθούν το απλό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Το μοντέλο αυτό δηλώνει ότι η αναμενόμενη τιμή του  $r_t$  είναι ίση με  $\varphi_1 r_{t-1}$  συν μια σταθερά  $\varphi_0$ . Η σχέση αυτή δεν είναι ακριβής αλλά εξαρτάται από ένα σφάλμα  $\varepsilon_t$ . Το σφάλμα αυτό υποθέτουμε ότι έχει μηδενικό μέσο και μια

σταθερή τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, η οποία με τη σειρά της είναι η μέση τιμή του τετραγωνισμένου σφάλματος  $E[\varepsilon_t^2]$ . Καλούμε ομοσκεδαστικότητα την παραδοχή ότι το  $E[\varepsilon_t^2]$  είναι σταθερό και ετεροσκεδαστικότητα την παραδοχή ότι δεν είναι σταθερό.

Στα χρηματοοικονομικά μας ενδιαφέρει να κάνουμε προβλέψεις που βασίζονται στις πληροφορίες του παρελθόντος και του παρόντος. Έστω  $\{r_t\}$  οι αποδόσεις του περιουσιακού στοιχείου και έστω ότι ακολουθούν το μοντέλο

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} \quad (1)$$

Έστω επίσης ότι

$$\mu_t = E[r_t / F_{t-1}]$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t / F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 / F_{t-1}] \quad (2)$$

ο δεσμευμένος μέσος και η δεσμευμένη διασπορά αντίστοιχα όπου  $F_{t-1}$  το σύνολο της πληροφορίας ως τη χρονική στιγμή  $t-1$ . Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε ότι

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t / F_{t-1}) = \text{Var}(\varepsilon_t / F_{t-1}).$$

Η εξέλιξη του  $\sigma_t^2$  αποτελεί το αντικείμενο μελέτης των μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας.

Στη συνέχεια  $\varepsilon_t$  θα αναφέρουμε το σοκ της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $\sigma_t$  τη θετική τετραγωνική ρίζα του  $\sigma_t^2$ . Το μοντέλο του  $\mu_t$  στη σχέση (1) θα αναφέρεται ως εξίσωση του μέσου και το μοντέλο στη σχέση (2) ως εξίσωση της μεταβλητότητας του  $r_t$ .



## 1.4 Βήματα κατασκευής ενός μοντέλου μεταβλητότητας

Τέσσερα είναι τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας.

- 1) Αρχικά ορίζουμε μια εξίσωση για το μέσο (μοντελοποιούμε το μέσο) ελέγχοντας για σειριακή αυτοσυσχέτιση στα δεδομένα, και αν χρειάζεται επιλέγουμε κάποιο κατάλληλο μοντέλο (π.χ. AR) ώστε να εξαφανίσουμε κάθε γραμμική αυτοσυσχέτιση.
- 2) Ελέγχουμε για ARCH-effects χρησιμοποιώντας τα σφάλματα από την εξίσωση του μέσου. Δηλαδή ελέγχουμε αν υπάρχει εξάρτηση.
- 3) Ορίζουμε ένα μοντέλο δεσμευμένης μεταβλητότητας αν όντως υπάρχουν ARCH effects και εκτιμάμε από κοινού τις εξισώσεις του μέσου και της μεταβλητότητας.
- 4) Ελέγχουμε το μοντέλο που εφαρμόσαμε και κάνουμε διορθώσεις όπου χρειάζεται.

### 1.4.1 Έλεγχος για ARCH effects

Χρησιμοποιούμε τα τετραγωνισμένα κατάλοιπα  $\varepsilon_t^2$  για να ελέγξουμε την ύπαρξη δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας ή όπως αναφέρεται για ARCH-effects. Υπάρχουν δύο τεστ για το σκοπό αυτό. Το πρώτο είναι γνωστό ως Ljung-Box και έχει σαν μηδενική υπόθεση ότι ένας αριθμός από τις πρώτες υστερήσεις της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (ACF) της σειράς  $\varepsilon_t^2$  είναι μηδέν. Το δεύτερο τεστ είναι το Lagrange multiplier του Engle. Για δική μας διευκόλυνση στη παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε το Ljung-Box τεστ.

## 1.5 Μοντελοποίηση της μεταβλητότητας

### 1.5.1 Μοντέλα ARCH

Αποτελούν ένα θεμελιώδες εργαλείο για την ανάλυση της εξέλιξης της δεσμευμένης διακύμανσης με το χρόνο και δημιουργός τους είναι ο Engle (1982). Η βασική ιδέα είναι ότι το σοκ  $\varepsilon_t$  μιας χρονοσειράς αποδόσεων είναι σειριακά ασυσχέτιστο αλλά εξαρτημένο. Η εξάρτηση αυτή επιχειρείται να αποδοθεί ως συνάρτηση παλιών τιμών του σοκ. Συγκεκριμένα ένα ARCH(p) μοντέλο (τάξης p) ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

και ισχύουν οι εξής περιορισμοί ώστε η διακύμανση να είναι θετική:

$$\omega > 0 \text{ και } \alpha_i \geq 0 \text{ για } i > 0.$$

Η δεσμευμένη διακύμανση συμβολίζεται με  $\sigma_t^2$  και ισούται με

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t / F_{t-1}) = \text{Var}(\varepsilon_t / F_{t-1}).$$

*Ιδιότητες των μοντέλων ARCH*

1. Η πρώτη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των ARCH μοντέλων είναι η αδέσμευτη διακύμανση  $\bar{\sigma}_t^2$ . Υποθέτοντας ότι υπάρχει η  $\bar{\sigma}_t^2 = E[\sigma_t^2]$  έχουμε:

$$E[\sigma_t^2] = E[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2] =$$

$$\omega + \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\varepsilon_{t-2}^2] + \dots + \alpha_p E[\varepsilon_{t-p}^2] =$$

$$\omega + \alpha_1 E[\sigma_{t-1}^2] E[e_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\sigma_{t-2}^2] E[e_{t-2}^2] + \dots + \alpha_p E[\sigma_{t-p}^2] E[e_{t-p}^2] =$$

$$\omega + \alpha_1 E[\sigma_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\sigma_{t-2}^2] + \dots + \alpha_p E[\sigma_{t-p}^2] \Rightarrow$$

$$E[\sigma_t^2] - \alpha_1 E[\sigma_{t-1}^2] - \alpha_2 E[\sigma_{t-2}^2] - \dots - \alpha_p E[\sigma_{t-p}^2] = \omega \Rightarrow$$

$$E[\sigma_t^2] (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p) = \omega \Rightarrow$$

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p}$$

2. Μια δεύτερη εξίσου ενδιαφέρουσα ιδιότητα είναι ότι η κύρτωση των σοκ  $\varepsilon_t$  είναι αυστηρά μεγαλύτερη από τη κύρτωση κανονικής κατανομής. Έχουμε:

$$k = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = \frac{E[E_{t-1}[e_t^4] \sigma_t^4]}{E[E_{t-1}[e_t^2] \sigma_t^2]^2} = \frac{E[3\sigma_t^4]}{E[\sigma_t^2]^2} = 3 \frac{E[\sigma_t^4]}{E[\sigma_t^2]^2} \geq 3$$

γιατί  $E_t[e_t^4] = 3$  αφού κατανέμεται κανονικά το  $e_t$ , και  $\frac{E[\sigma_t^4]}{E[\sigma_t^2]^2} \geq 1$  αφού

$$\text{Var}[\sigma_t^2] = E[\sigma_t^4] - E[\sigma_t^2]^2 \geq 0.$$

#### Πλεονεκτήματα των μοντέλων ARCH

- 1) Η απλότητα στη χρήση τους
- 2) Η καλή προσαρμογή τους στην ιδιότητα της μεταβλητότητας να παρουσιάζει πικνώματα.

#### Μειονεκτήματα των μοντέλων ARCH

- 1) Υποθέτουν ότι τα αρνητικά και θετικά σοκ έχουν την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα αφού αυτό είναι συνάρτηση των τετραγώνων των παλιών σοκ. Στην πραγματικότητα όμως αντιδρά διαφορετικά σε αρνητικά και θετικά σοκ.
- 2) Τα μοντέλα ARCH συνήθως υπερεκτιμούν τη μεταβλητότητα επειδή αργούν να ανταποκριθούν σε μεγάλα μεμονωμένα σοκ στις σειρές αποδόσεων.
- 3) Απλά παρέχουν ένα μηχανισμό για να περιγράψουν τη συμπεριφορά της δεσμευμένης διασποράς, δεν εξηγούν τι επιφέρει αυτή τη συμπεριφορά.

### Προβλέψεις με τα μοντέλα ARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα ARCH(1) μοντέλο και έχουμε:

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 \Rightarrow E_t[\sigma_{t+1}^2] = E_t[\omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2] = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές.

Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+2}^2] = E_t[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t+1}^2] = \omega + \alpha_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2].$$

Και χρησιμοποιώντας τη σχέση για πρόβλεψη μια χρονική περίοδο μπροστά που βρήκαμε πριν καταλήγουμε

$$E_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + \alpha_1 (\omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2).$$

Γενικά για πρόβλεψη  $s$  περιόδους μπροστά ισχύει:

$$E_t[\sigma_{t+s}^2] = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_1^i \omega + \alpha_1^s \varepsilon_t^2.$$

### 1.5.2 Μοντέλα GARCH

Αν και τα μοντέλα ARCH είναι πολύ απλά στη χρήση πολλές φορές για να περιγράψουν επαρκώς τη μεταβλητότητα μιας χρονοσειράς αποδόσεων απαιτούν μοντέλα μεγάλης τάξης ώστε να δημιουργείται η ανάγκη για την ύπαρξη εναλλακτικών μοντέλων πιο εύχρηστων. Ο Bollerslev (1986) πρότεινε μια εξέλιξη των μοντέλων ARCH τα λεγόμενα generalized ARCH (GARCH) μοντέλα. Ένα GARCH(P,Q) ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

Όπως και πριν ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί ώστε η διακύμανση να είναι θετική

$$\omega > 0, \alpha_p \geq 0 \text{ για } p > 0, \beta_q \geq 0 \text{ για } q > 0 \text{ και } \sum_{p=1}^P \alpha_p + \sum_{q=1}^Q \beta_q < 1.$$

Οι παράμετροι  $\alpha_p$  αναφέρονται ως ARCH παράμετροι ενώ οι  $\beta_q$  ως παράμετροι GARCH.

#### Ιδιότητες των μοντέλων GARCH

1. Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με πριν έχουμε για τη αδέσμευτη διακύμανση:

$$\begin{aligned}
E[\sigma_t^2] &= E[\omega + \sum_p \alpha_p \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_q \beta_q \sigma_{t-1}^2] = \\
&\omega + \sum_p \alpha_p E[\varepsilon_{t-1}^2] + \sum_q \beta_q E[\sigma_{t-1}^2] = \\
&\omega + \sum_p \alpha_p E[e_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2] + \sum_q \beta_q E[\sigma_{t-1}^2] = \\
&\omega + \sum_p \alpha_p E[e_{t-1}^2] E[\sigma_{t-1}^2] + \sum_q \beta_q E[\sigma_{t-1}^2] = \\
&\omega + \sum_p \alpha_p E[\sigma_{t-1}^2] + \sum_q \beta_q E[\sigma_{t-1}^2] \Rightarrow \\
E[\sigma_t^2] - \sum_p \alpha_p E[\sigma_{t-1}^2] - \sum_q \beta_q E[\sigma_{t-1}^2] &= \omega \Rightarrow \\
E[\sigma_t^2] (1 - \sum_p \alpha_p - \sum_q \beta_q) &= \omega \Rightarrow \\
E[\sigma_t^2] &= \frac{\omega}{(1 - \sum_p \alpha_p - \sum_q \beta_q)}
\end{aligned}$$

2. Όπως και στα μοντέλα ARCH παρατηρείται ότι η κύρτωση των σοκ  $\varepsilon_t$  είναι μεγαλύτερη από τη κύρτωση μιας κανονικής κατανομής. Για λόγους διευκόλυνσης περιοριζόμαστε σ'ένα GARCH(1,1). Η σχέση στην οποία τελικά καταλήγουμε είναι

$$k = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = 3 \frac{[1 - (\alpha_1 + \beta_1)]^2}{[1 - (\alpha_1 + \beta_1) - 2\alpha_1^2]} > 3.$$

### Πλεονεκτήματα των μοντέλων GARCH

Η καλή προσαρμογή τους στην ιδιότητα της μεταβλητότητας να παρουσιάζει πυκνώματα.

### Μειονεκτήματα των μοντέλων GARCH

Υποθέτουν ότι τα αρνητικά και θετικά σοκ έχουν την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα αφού είναι συνάρτηση των τετραγώνων των παλιών σοκ. Στην πραγματικότητα όμως είναι γνωστό ότι η μεταβλητότητα αντιδρά διαφορετικά σε αρνητικά και θετικά σοκ.

### Προβλέψεις με τα μοντέλα GARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα GARCH(1,1) μοντέλο και έχουμε:

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \Rightarrow E_t[\sigma_{t+1}^2] = E_t[\omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2] = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές.

Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+2}^2] = E_t[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] =$$

$$\omega + \alpha_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) E_t[\sigma_{t+1}^2]$$

$$\omega + (\alpha_1 + \beta_1) E_t[\sigma_{t+1}^2]$$

Και χρησιμοποιώντας τη σχέση για πρόβλεψη μια χρονική περίοδο μπροστά που βρήκαμε πριν καταλήγουμε

$$E_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)(\omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2)$$

Γενικά για πρόβλεψη  $s$  περιόδους μπροστά ισχύει:

$$E_t[\sigma_{t+s}^2] = \sum_{i=0}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^i \omega + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} (\alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2)$$

### 1.5.3 Μοντέλα EGARCH

Δεδομένου των αδυναμιών των ARCH και GARCH μοντέλων στο να μεταχειριστούν χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, ο Nelson (1991) πρότεινε το exponential GARCH (EGARCH) μοντέλο. Συγκεκριμένα με το μοντέλο αυτό επιτρέπει την ασύμμετρη επίδραση στη μεταβλητότητα από θετικές και αρνητικές αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων. Ένα EGARCH(P,Q) μοντέλο ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \left( \frac{|\varepsilon_{t-p}|}{|\sigma_{t-p}|} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \sum_{o=1}^O \gamma_o \frac{\varepsilon_{t-o}}{\sigma_{t-o}} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \ln(\sigma_{t-q}^2)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

Μια άλλη πιο εύχρηστη φόρμα του μοντέλου EGARCH(P,Q) είναι η παρακάτω:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \frac{|\varepsilon_{t-p}| + \gamma_p \varepsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \ln(\sigma_{t-q}^2)$$

Όπως φαίνεται από τη φόρμα αυτή το θετικό σοκ συνεισφέρει  $\alpha_i(1+\gamma_i) \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{|\sigma_{t-i}|}$

στο λογάριθμο της μεταβλητότητας ενώ ένα αρνητικό  $\alpha_i(1-\gamma_i) \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{|\sigma_{t-i}|}$



Το  $\gamma_i$  δηλώνει το leverage effect του  $\varepsilon_{t-i}$  και αναμένεται να είναι αρνητικό.

### Πλεονεκτήματα των μοντέλων EGARCH

Λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο του leverage effect.

### Μειονεκτήματα των μοντέλων EGARCH

Είναι πιο πολύπλοκα στη χρήση.

### Προβλέψεις με τα μοντέλα EGARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα EGARCH(1,1) μοντέλο χρησιμοποιώντας το δεύτερο τύπο και έχουμε:

$$E_t[\ln(\sigma_{t+1}^2)] = \omega + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} + \beta_1 \ln(\sigma_t^2)$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές. Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$\ln(\sigma_{t+2}^2) = \omega + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_{t+1}|}{\sigma_{t+1}} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t+1}}{\sigma_{t+1}} + \beta_1 \ln(\sigma_{t+1}^2) \Rightarrow$$

$$E_t[\ln(\sigma_{t+2}^2)] = \omega + \beta_1 E_t[\ln(\sigma_{t+1}^2)] = \omega + \beta_1 (\omega + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} + \beta_1 \ln(\sigma_t^2)) =$$

$$= \omega + \beta_1 \omega + \beta_1 (\alpha_1 \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} + \beta_1 \ln(\sigma_t^2)) =$$

$$= \omega(1 + \beta_1) + \beta_1 (\alpha_1 \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} + \beta_1 \ln(\sigma_t^2))$$

Γενικά για  $s$  χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\ln(\sigma_{t+s}^2)] = \sum_{i=0}^{s-1} \omega \beta_1^i + \beta_1^{s-1} (\alpha_1 \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} + \alpha_1 \gamma_1 \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} + \beta_1 \ln(\sigma_t^2)) .$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις επεκτάσεις των παραπάνω μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά είναι τα GJR GARCH, TARARCH, APARCH και στόχος τους είναι να ενσωματώσουν διάφορα εμπειρικά χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας.

#### 1.5.4 Μοντέλα GJR GARCH, TARARCH, APARCH

##### Μοντέλα GJR GARCH

Τα μοντέλα αυτά τα πρότειναν οι Glosten, Jagannathan και Runkle (1993) από τους οποίους πήραν και το όνομα τους. Αποτελεί επέκταση του κλασσικού μοντέλου GARCH ώστε να αποδίδει την ιδιότητα του leverage effect. Ένα GJR GARCH(P,O,Q) μοντέλο ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum_{o=1}^O \gamma_o \varepsilon_{t-o}^2 I_{(\varepsilon_{t-o} < 0)} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

όπου  $I$  είναι μια δείκτρια συνάρτηση με τιμές 1 αν  $\varepsilon_{t-1} < 0$  και 0 διαφορετικά.

Και εδώ έχουμε κάποιους περιορισμούς για τις παραμέτρους ώστε η διακύμανση να είναι θετική. Έτσι για ένα GJR GARCH(1,1,1) μοντέλο

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Πρέπει να ισχύουν  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 0$  και  $\beta_1 \geq 0$

##### Προβλέψεις με τα μοντέλα GJR GARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα GJR GARCH(1,1,1) μοντέλο:

$$E_t[\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \gamma_1 \varepsilon_t^2 I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t^2$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές.

Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$\sigma_{t+2}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t+1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t+1}^2 I_{(\varepsilon_{t+1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t+1}^2 \Rightarrow$$

$$E_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + \alpha_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2] + \gamma_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2] E_t[I_{(\varepsilon_{t+1} < 0)}] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] =$$

$$= \omega + (\alpha_1 + \gamma_1 E_t[I_{(\varepsilon_{t+1} < 0)}]) + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] =$$

$$= \omega + (\alpha_1 + \gamma_1 E_t[I_{(\varepsilon_{t+1} < 0)}]) + \beta_1 (\omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \gamma_1 \varepsilon_t^2 I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t^2).$$

Γενικά για  $s$  χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+s}^2] = \sum_{i=0}^{s-1} \omega (\alpha_1 + \gamma_1 E_t[I_{(\varepsilon_{t+i} < 0)}] + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \gamma_1 E_t[I_{(\varepsilon_{t+i} < 0)}] + \beta_1)^{s-1} (\alpha_1 \varepsilon_t^2 + \gamma_1 \varepsilon_t^2 I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t^2)$$

### Μοντέλα TARARCH

Το Threshold ARCH μοντέλο έχει την ίδια δομή με ένα GJR GARCH με μια όμως θεμελιώδη διαφορά. Στην εξίσωση της μεταβλητότητας αντί να μοντελοποιεί τη διακύμανση χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένα σοκ μοντελοποιεί την δεσμευμένη τυπική απόκλιση ως συνάρτηση των απολύτων τιμών προηγούμενων σοκ. Επίσης λαμβάνει υπόψη ασύμμετρες επιδράσεις χρησιμοποιώντας μια δείκτρια συνάρτηση παρόμοια με αυτή στα GJR GARCH μοντέλα. Ένα TARARCH(P,O,Q) μοντέλο ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p |\varepsilon_{t-p}| + \sum_{o=1}^O \gamma_o \varepsilon_{t-o} I_{(\varepsilon_{t-o} < 0)} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

Και για το TARARCH(1,1,1)

$$\sigma_t = \omega + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1 |\varepsilon_{t-1}| I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t-1}$$

ισχύει ο περιορισμός  $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 0$

### Προβλέψεις με τα μοντέλα TARARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα TARARCH(1,1,1) μοντέλο και έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+1}] = \omega + \alpha_1 |\varepsilon_t| + \gamma_1 \varepsilon_t I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές. Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$\sigma_{t+2} = \omega + \alpha_1 |\varepsilon_{t+1}| + \gamma_1 \varepsilon_{t+1} I_{(\varepsilon_{t+1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t+1} \Rightarrow$$

$$E_t[\sigma_{t+2}] = \omega + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}] = \omega + \beta_1 (\omega + \alpha_1 |\varepsilon_t| + \gamma_1 \varepsilon_t I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t) .$$

Γενικά για  $s$  χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+s}] = \sum_{i=0}^{s-1} \omega \beta_1^i + \beta_1^{s-1} (\alpha_1 |\varepsilon_t| + \gamma_1 \varepsilon_t I_{(\varepsilon_t < 0)} + \beta_1 \sigma_t)$$

### Μοντέλα APARCH

Τα asymmetric power ARCH τα πρότειναν οι Ding, Engle, Granger (1993) και είναι μια τροποποίηση των δύο προηγούμενων μοντέλων παραμετροποιώντας τη μη γραμμικότητα στη δεσμευμένη διακύμανση. Ένα APARCH(P,O,Q) ορίζεται ως εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^{\max(P,O)} \alpha_j (|\varepsilon_{t-p} + \gamma_j |\varepsilon_{t-p}|)^\delta + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^\delta$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

Για να ικανοποιείται ότι η δεσμευμένη διακύμανση δεν είναι αρνητική έχουμε τους εξής περιορισμούς  $\omega > 0$ ,  $\alpha_k \geq 0$ , και  $-1 \leq \gamma_j \leq 1$ .

### Προβλέψεις με τα μοντέλα APARCH

Για την ευκολότερη κατανόηση δουλεύουμε με ένα APARCH(1,1,1) μοντέλο και έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+1}^\delta] = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_t| + \gamma_1 |\varepsilon_t|)^\delta + \beta_1 \sigma_t^\delta$$

αφού τη χρονική στιγμή  $t$  όλες οι ποσότητες του δεξιού μέρους είναι γνωστές. Για 2 χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$\sigma_{t+2}^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{t+1}| + \gamma_1 |\varepsilon_{t+1}|)^\delta + \beta_1 \sigma_{t+1}^\delta \Rightarrow$$

$$E_t[\sigma_{t+2}^\delta] = \omega + \beta_1 \omega + \beta_1 (\alpha_1(|\varepsilon_t| + \gamma_1 |\varepsilon_t|)^\delta + \beta_1 \sigma_t^\delta).$$

Γενικά για  $s$  χρονικές περιόδους μπροστά έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+s}^\delta] = \sum_{i=0}^{s-1} \omega \beta_1^i + \beta_1^{s-1} (\alpha_1(|\varepsilon_t| + \gamma_1 |\varepsilon_t|)^\delta + \beta_1 \sigma_t^\delta)$$

## 1.6 Εκτίμηση μοντέλων

Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων  $\theta$ , όπου  $\theta$  συμπεριλαμβάνει και τις παραμέτρους της εξίσωσης του μέσου και τις παραμέτρους της εξίσωσης της μεταβλητότητας. Ενδεικτικά εδώ παραθέτουμε την εκτίμηση ενός GARCH(1,1) μοντέλου. Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας και για  $T$  ανεξάρτητες παραμέτρους έχουμε:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_s r_{t-s}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

$$f(r; \theta) = \prod_{t=1}^T (2\pi\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

$$l(r; \theta) = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}$$

Και για  $\mu_t = 0$  έχουμε

$$l(r; \theta) = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}$$

Επομένως η συνθήκη μεγιστοποίησης είναι

$$\frac{\partial l(r; \theta)}{\partial \sigma_t^2} = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2\sigma_t^2} + \frac{r_t^2}{2\sigma_t^4} = 0$$

Όμως οι παράμετροι του μοντέλου είναι οι  $\omega$ ,  $\alpha_1$  και  $\beta_1$  και όχι το  $\sigma_t^2$ . Όστε

$$\frac{\partial l(r; \theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial l(r; \theta)}{\partial \sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta_i}$$

και

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} = 1 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_1} = \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_1} = \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \beta_1}$$

## 1.7 Έλεγχος μοντέλων

Για ένα καλά ορισμένο μοντέλο τα τυποποιημένα σοκ (κατάλοιπα) είναι:

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}.$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει την επάρκεια του εφαρμοσμένου μοντέλου εξετάζοντας τη σειρά  $\{\bar{\varepsilon}_t\}$ . Συγκεκριμένα με το τεστ Ljung Box για τις σειρές  $\{\bar{\varepsilon}_t\}$  και  $\{\bar{\varepsilon}_t^2\}$  ελέγχουμε την επάρκεια της εξίσωσης του μέσου και την ισχύ της εξίσωσης της μεταβλητότητας αντίστοιχα. Η ασυμμετρία, η κύρτωση και διάφορα γραφήματα (για παράδειγμα QQ plot) των  $\{\bar{\varepsilon}_t\}$  χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της υπόθεσης της κατανομής.

## **Κεφάλαιο 2**

### **Αξιολόγηση των προβλέψεων**

#### **2.1 Εισαγωγή**

Σκεπτόμενος κανείς το ρόλο του κινδύνου για τη λήψη αποφάσεων στα χρηματοοικονομικά θέματα μπορεί εύκολα να καταλάβει το λόγο που καταβάλλεται όλη αυτή η προσπάθεια για την ανάπτυξη μοντέλων μεταβλητότητας. Η αφθονία των μοντέλων που έχουν παρουσιαστεί από τον Engle (1982) ως και σήμερα οδηγεί στην ανάγκη της αξιολόγησης και σύγκρισης των διαθέσιμων αυτών μοντέλων.

#### **2.2 Προβλήματα αξιολόγησης προβλέψεων**

Η αξιολόγηση και σύγκριση οικονομικών προβλέψεων είναι ένα αντικείμενο πολύ καλά μελετημένο ξεκινώντας η μελέτη του τουλάχιστον από τον Theil (1958). Ωστόσο η αξιολόγηση και σύγκριση των προβλέψεων της μεταβλητότητας σε αντίθεση με άλλες προβλέψεις παρουσιάζει δυσκολίες και ο λόγος είναι ότι η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει, η δεσμευμένη διακύμανση, δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη. Αυτό το εμπόδιο προσπαθούμε να το ξεπεράσουμε, μερικώς τουλάχιστον, χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου ή το λογάριθμο των τετραγώνων σαν εκτιμητή της πραγματικής δεσμευμένης διακύμανσης του περιουσιακού στοιχείου.

Υπάρχουν πολυάριθμες μελέτες, όπως για παράδειγμα Tse (1991), Lee (1991), Figlewski (1994), Xu και Taylor (1995), που ακούν έντονη κριτική για



την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων ARCH έξω από το δείγμα ακόμη και για τη χρησιμότητά τους γενικότερα. Αυτή η αντίληψη βασίζεται στις υψηλές τιμές των στατιστικών σφάλματος πρόβλεψης καθώς επίσης και στην περιορισμένη επεξηγηματική ικανότητα των προβλέψεων για την πραγματική μεταβλητότητα κατά την προσέγγιση της από τα τετράγωνα των αποδόσεων ή το λογάριθμο αυτών.

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στο σφάλμα που παράγεται κατά την προσέγγιση της πραγματικής μεταβλητότητας από τα τετράγωνα των αποδόσεων ή τον λογάριθμο αυτών με σκοπό να αναλύσουμε την επάρκεια των μοντέλων μεταβλητότητας. Ποσοτικοποιούμε τις επιδράσεις των προσεγγίσεων αυτών και δείχνουμε ότι τείνουν να «φουσκώσουν» σημαντικά το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) ώστε να οδηγούμαστε σε παραπλανητικά συμπεράσματα για την αξιολόγηση των προβλέψεων.

### 2.3 Χρήση του $r_{t+s}^2$ σαν εκτιμητή του $\sigma_{t+s}$

Η στατιστική προσέγγιση του ζητήματος δεν απαιτεί οικονομικές υποθέσεις ώστε να είναι περισσότερο πρακτική. Όταν χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των προβλέψεων δείχνει χαμηλή προβλεπτική ικανότητα έξω από το δείγμα και αιτία αυτού είναι η χρήση των τετραγώνων των αποδόσεων ως προσέγγιση της πραγματικής μεταβλητότητας. Θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε τις επιδράσεις της χρήσης προσεγγίσεων στα κλασσικά στατιστικά αξιολόγησης προβλέψεων όπως ME (mean error), MAE (mean absolute error), MSE (mean squared error).

Έστω  $\{r_t\}$  οι αποδόσεις περιουσιακού στοιχείου και έστω ότι ακολουθούν το μοντέλο

$$r_t = \sigma_t^2 \varepsilon_t \quad (1)$$

όπου  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  και  $\sigma_t$  ακολουθεί ένα οποιοδήποτε ARCH μοντέλο. Η παραπάνω φόρμα αποτελεί βασική δομή πάνω στην οποία έχουν κατασκευαστεί πολλά μοντέλα ARCH. Υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση (1) και αφαιρώντας την πρόβλεψη της μεταβλητότητας για  $s$  περιόδους μπροστά  $\hat{\sigma}_{t+s}$  και από τα δύο μέλη έχουμε:

$$r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s} = \sigma_{t+s} \varepsilon_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s}$$

και προσθαφαιρώντας το  $\sigma_{t+s}$  δεξιά και αριστερά καταλήγουμε στη σχέση

$$r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s} = (\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}) + \sigma_{t+s} (\varepsilon_{t+s}^2 - 1) \quad (2)$$

στην οποία το παρατηρούμενο σφάλμα πρόβλεψης της μεταβλητότητας στο αριστερό μέλος αναλύεται στο πραγματικό σφάλμα συν το σφάλμα λόγω προσέγγισης στο δεξί μέλος. Είναι φανερό ότι το σφάλμα λόγω προσέγγισης εξαρτάται από το σοκ  $\varepsilon_t$  και τη μεταβλητότητα  $\sigma_t$ . Με αποτέλεσμα τόσο η κατανομή του σοκ όσο και το μοντέλο που ακολουθεί η μεταβλητότητα να διαμορφώνουν το σφάλμα λόγω προσέγγισης. Παίρνοντας μέση τιμή και στα δύο μέλη της (2) έχουμε:

$$E[r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s}] = E[(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}) + \sigma_{t+s} (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)] =$$

$$= E[\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}] + E[\sigma_{t+s} (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)] =$$

$$= E[\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}] + E[\sigma_{t+s}] E[\varepsilon_{t+s}^2 - 1] \Rightarrow$$

$$E[r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s}] = E[\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}] \Leftrightarrow$$

$$ME_{obs} = ME_{true}$$

όπου  $E[\varepsilon_{t+s}^2 - 1] = 0$  αφού υποθέτουμε ότι  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  και είναι ανεξάρτητο από το  $\sigma_t$ . Επίσης υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση (2) έχουμε:

$$(r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s})^2 = (\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})^2 + \sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2 + 2(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}) \sigma_{t+s} (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)$$

και παίρνοντας μέση τιμή

$$E[(r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s})^2] = E[(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})^2 + \sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2 + 2(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})\sigma_{t+s} (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)] =$$

$$= E[(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})^2] + E[\sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2] + 2E[(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})]E[\sigma_{t+s}]E[(\varepsilon_{t+s}^2 - 1)] \Rightarrow$$

$$E[(r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s})^2] = E[(\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s})^2] + E[\sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2] \Leftrightarrow$$

$$MSE_{obs} = MSE_{true} + E[\sigma_{t+s}^2]E[\varepsilon_{t+s}^4]$$

Από τη τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η αύξηση του  $MSE_{true}$  εξαρτάται από την τέταρτη ροπή των αποδόσεων  $r_t = \sigma_t^2 \varepsilon_t$ . Αυτή τη ποσότητα μπορούμε να την ποσοτικοποιήσουμε υποθέτοντας μια κατανομή για το σοκ  $\varepsilon_t$  και ένα μοντέλο για τη μεταβλητότητα  $\sigma_t$ . Επίσης από την τριγωνική ιδιότητα έχουμε:

$$E[|r_{t+s}^2 - \hat{\sigma}_{t+s}|] \leq E[|\sigma_{t+s} - \hat{\sigma}_{t+s}|] + E[|\sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2|] \Leftrightarrow$$

$$MAE_{obs} \leq MAE_{true} + E[|\sigma_{t+s}^2 (\varepsilon_{t+s}^2 - 1)^2|]$$

## 2.4 Χρήση του $\ln(r_{t+s}^2)$ σαν εκτιμητή του $\ln(\sigma_{t+s})$

Υψώνοντας ξανά την (1) στο τετράγωνο και λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$\ln(r_{t+s}^2) = \ln(\sigma_{t+s}^2) + \ln(\varepsilon_{t+s}^2) \quad (2)$$

Είναι φανερό ότι το  $\ln(r_{t+s}^2)$  προσεγγίζει το  $\ln(\sigma_{t+s}^2)$  αυξανόμενο από ένα σφάλμα  $\ln(\varepsilon_{t+s}^2)$  το οποίο κάτω από την υπόθεση  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  θα είναι ο λογάριθμος μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή  $X^2(1)$ . Αν και οι τετραγωνισμένες αποδόσεις είναι ένας λογικός εκτιμητής της  $\sigma_t$ , αφού

$E[r_t^2] = \sigma_t$  όταν  $\varepsilon_t$  και  $\sigma_t$  είναι ανεξάρτητα, η χρήση του  $\ln(r_{t+s}^2)$  σαν εκτιμητή του  $\ln(\sigma_{t+s})$  παράγει μια αξιοσημείωτη στατιστική απόκλιση εξαιτίας του λογαριθμικού μετασχηματισμού και της ανισότητας Jensen. Πράγματι η ποσότητα  $E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)]$  δεν είναι μηδέν αλλά εξαρτάται από την υπόθεση για το σοκ  $\varepsilon_t$ . Για το λόγο αυτό διορθώνουμε τη σχέση (2) αφαιρώντας και από τα δύο μέλη την ποσότητα  $E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)]$ :

$$\ln(r_{t+s}^2) - E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)] = \ln(\sigma_{t+s}) + \ln(\varepsilon_{t+s}^2) - E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)] \Rightarrow$$

$$\ln(r_{t+s}^2)' = \ln(\sigma_{t+s}) + n_{t+s} \quad (3)$$

όπου  $\ln(r_{t+s}^2)' = \ln(r_{t+s}^2) - E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)]$  και  $n_{t+s} = \ln(\varepsilon_{t+s}^2) - E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)]$  με  $n_{t+s} \sim (0, \sigma_n^2)$ . Αφαιρώντας τώρα και από τα δύο μέλη της (3) την πρόβλεψη της μεταβλητότητας για  $s$  περιόδους μπροστά  $\ln(\sigma_{t+s})^f$  έχουμε:

$$\ln(r_{t+s}^2)' - \ln(\sigma_{t+s})^f = (\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f) + n_{t+s} \quad (4)$$

όπου το παρατηρούμενο σφάλμα πρόβλεψης στο αριστερό μέλος αναλύεται σε πραγματικό σφάλμα πρόβλεψης και σε σφάλμα λόγω προσέγγισης στο δεξί μέλος. Ας δούμε τώρα πως επηρεάζονται τα στατιστικά σφάλματος πρόβλεψης. Παίρνουμε μέση τιμή και στα δύο μέλη της (4) και έχουμε:

$$\begin{aligned} E[\ln(r_{t+s}^2)' - \ln(\sigma_{t+s})^f] &= E[\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f] + E[n_{t+s}] = \\ &= E[\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$ME_{obs} = ME_{true}$$

αφού  $n_{t+s} \sim (0, \sigma_n^2)$ . Υψώνοντας στο τετράγωνο τη (4) και παίρνοντας μέση τιμή έχουμε:

$$E[(\ln(r_{t+s}^2)' - \ln(\sigma_{t+s})^f)^2] = E[(\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f)^2] + E[n_{t+s}^2] + 2E[n_{t+s}(\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f)] \quad (5)$$

Στη τελευταία σχέση ο παράγοντας  $E[n_{t+s}^2]$  είναι η διακύμανση του  $n_{t+s}$ . Επίσης αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητότητα ακολουθεί ένα μοντέλο

δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας, για παράδειγμα, ένα EGARCH, ο παράγοντας  $\ln(\sigma_{t+s})$  εξαρτάται μόνο από παλιά σοκ ώστε  $\ln(\sigma_{t+s})$  είναι ανεξάρτητος του  $n_{t+s}$  και επομένως

$$E[n_{t+s}(\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f)] = E[n_{t+s}]E[\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f] = 0$$

αφού  $n_{t+s} \sim (0, \sigma_n^2)$ . Επομένως η σχέση (5) γίνεται:

$$E[(\ln(r_{t+s}^2) - \ln(\sigma_{t+s})^f)^2] = E[(\ln(\sigma_{t+s}) - \ln(\sigma_{t+s})^f)^2] + E[n_{t+s}^2] \Leftrightarrow$$

$$MSE_{obs} = MSE_{true} + E[n_{t+s}^2].$$

Υποθέτοντας κανονικότητα για το σοκ  $\varepsilon_{t+s}$  έπεται ότι  $\varepsilon_{t+s}^2 \sim X^2(1)$  ώστε η ποσότητα  $E[n_{t+s}^2] = E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2) - E[\ln(\varepsilon_{t+s}^2)]]$  είναι γνωστή και υπολογίζεται ίση με 4.9348. Τελικά καταλήγουμε ότι

$$MSE_{obs} = MSE_{true} + 4.9348$$

Επίσης από την τριγωνική ιδιότητα

$$MAE_{obs} \leq MAE_{true} + E[|n_{t+s}|]$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι καταφέραμε να ποσοτικοποιήσουμε την επίδραση της προσέγγισης της μεταβλητότητας  $\sigma_t$  από το  $\ln(r_t^2)$  στα διάφορα στατιστικά πρόβλεψης χωρίς να κάνουμε κάποια υπόθεση για το μοντέλο που ακολουθεί το  $\sigma_t$  παρά μόνο για την κατανομή του σοκ  $\varepsilon_t$ .

## 2.5 Diebold & Mariano τεστ

Οι Diebold και Mariano στην εργασία τους το 1995 πρότειναν ένα ασυμπτωτικό τεστ, όπου από εδώ και στο εξής θα αναφέρουμε ως DM, για την ισοδυναμία δύο μοντέλων ως προς τις προβλέψεις τους. Το τεστ αυτό αν και σε μικρά δείγματα φαίνεται να μην δίνει καλά αποτελέσματα, κάτι που

βελτίωσε και παρουσίασε ο Harvey (1997), για μεγάλα δείγματα λειτουργεί εξαιρετικά. Το γεγονός ότι επιτρέπει τα σφάλματα πρόβλεψης να μην είναι κανονικά, να μην έχουν μέσο μηδέν και να είναι γραμμικά συσχετισμένα κάνουν το DM στατιστικό αρκετά χρήσιμο.

Έστω  $\{\hat{y}_{it}\}_{t=1}^T$  και  $\{\hat{y}_{jt}\}_{t=1}^T$  δύο προβλέψεις της χρονοσειράς  $\{y_t\}_{t=1}^T$  και έστω  $\{\varepsilon_{it}\}_{t=1}^T$  και  $\{\varepsilon_{jt}\}_{t=1}^T$  τα αντίστοιχα σφάλματα. Η επιλογή της καταλληλότερης συνάρτησης απώλειας, που σχετίζεται με το σφάλμα πρόβλεψης, για την αξιολόγηση των μοντέλων δεν είναι προφανής. Το γεγονός αυτό μπορεί να διαπιστώσει κανείς και στις εργασίες των Bollerslev, Engle και Nelson (1994), Diebold και Lopez (1996) και Lopez (2001). Ωστόσο αν αναλογιστεί κανείς την ποικιλία των αποφάσεων που λαμβάνουν οι οικονομικοί πράκτορες έχοντας ως οδηγό τις προβλέψεις (π.χ. αντιστάθμιση κινδύνου, απογραφή εμπορευμάτων, πολιτική, διαφημιστικές δαπάνες και άλλα) είναι ξεκάθαρο ότι γενικώς η συνάρτηση απώλειας είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση.

Ωστε θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή  $t$  η συνάρτηση απώλειας είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση της πραγματικής τιμής και της πρόβλεψης της (έστω της  $i$ )  $g(y_t, \hat{y}_{it})$ . Σε πολλές εφαρμογές η συνάρτηση απώλειας χρησιμοποιείται απευθείας ως συνάρτηση του σφάλματος πρόβλεψης, δηλαδή  $g(y_t, \hat{y}_{it}) = g(\varepsilon_{it})$ . Για δική μας διευκόλυνση υιοθετούμε και εμείς αυτό το συμβολισμό. Επομένως η μηδενική υπόθεση της ισοδυναμίας στην ακρίβεια πρόβλεψης για δύο μοντέλα είναι  $E[g(\varepsilon_{it})] = E[g(\varepsilon_{jt})]$  ή  $E[d_t] = 0$ , όπου  $d_t = g(\varepsilon_{it}) - g(\varepsilon_{jt})$ . Αν η σειρά  $\{d_t\}_{t=1}^T$  έχει στάσιμη συνδιακύμανση και κοντή μνήμη τότε έχουμε :

$$\sqrt{T}(\bar{d} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, 2\pi f_d(0))$$

όπου

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [g(\varepsilon_{it}) - g(\varepsilon_{jt})]$$

ο δειγματικός μέσος,

$$f_d(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_d(\tau)$$

η συνάρτηση πυκνότητας της σειράς  $d_t$  στο μηδέν,

$$\gamma_d(\tau) = E[(d_t - \mu)(d_{t-\tau} - \mu)]$$

η συνδιακύμανση των τιμών  $d_t$  και  $d_{t-\tau}$  για  $t = \tau, \dots, T$  και  $\mu$  ο πραγματικός μέσος. Για μεγάλα δείγματα το στατιστικό DM γίνεται

$$S = \frac{\bar{d}\sqrt{T}}{\sqrt{LRV(\bar{d})}}$$

όπου  $LRV(\bar{d})$  η μακροχρόνια διακύμανση του  $\bar{d}$ .

Στο πλαίσιο της δική μας εργασίας τα σφάλματα πρόβλεψης μπορούν να γραφτούν σύμφωνα με τη τελευταία σχέση (4) ως  $\hat{\varepsilon}_{it} = \varepsilon_{it} + n_t$  και  $\hat{\varepsilon}_{jt} = \varepsilon_{jt} + n_t$ .

Επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας  $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$  έχουμε:

$$\hat{d}_t = g(\hat{\varepsilon}_{it}) - g(\hat{\varepsilon}_{jt}) = d_t + 2\alpha_t$$

όπου  $\alpha_t = n_t(\varepsilon_{it} - \varepsilon_{jt})$ , ώστε  $\hat{d} = \bar{d} + 2\bar{\alpha}$ . Έτσι το DM στατιστικό γίνεται:

$$\hat{S} = \frac{\hat{d}}{[\text{Var}(\hat{d})]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{d} + 2\bar{\alpha}}{[\text{Var}(\bar{d}) + \text{Var}(2\bar{\alpha})]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$S \left[ \frac{\text{Var}(\bar{d})}{\text{Var}(\bar{d}) + \text{Var}(2\bar{\alpha})} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2\bar{\alpha}}{[\text{Var}(\bar{d}) + \text{Var}(2\bar{\alpha})]^{\frac{1}{2}}}$$

όπου  $\text{Cov}(\bar{d}, \bar{\alpha}) = 0$  αφού  $n_t \sim N(0, \sigma_n^2)$  και είναι ασυσχέτιστο με το σοκ  $\varepsilon$ .

Επίσης

$$\text{Var}(2\bar{\alpha}) = \frac{4}{n} \sigma_n^2 (MSE_i + MSE_j) - 2\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

ή

$$\text{Var}(2\bar{\alpha}) = \frac{4}{n} \sigma_n^2 (MSE_i + MSE_j)$$

για  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ , όπου  $MSE$  είναι το πραγματικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα του κάθε μοντέλου. Σε επίπεδο σημαντικότητας  $\lambda$  απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν η απόλυτη τιμή του στατιστικού DM είναι μεγαλύτερη από την τιμή  $Z_{\frac{\lambda}{2}}$  ή η τιμή p-value είναι μικρότερη του  $1-\lambda$ . Τέλος στην περίπτωση που απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση επιλέγουμε ως καταλληλότερο το μοντέλο με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα.



## **Κεφάλαιο 3**

### **Αξία σε Κίνδυνο**

#### **3.1 Εισαγωγή**

Αν και οι ακραίες διακυμάνσεις των τιμών στις χρηματοοικονομικές αγορές είναι σπάνιες ωστόσο είναι πολύ σημαντικές. Οι μεγάλες οικονομικές κρίσεις στο παρελθόν (Wall Street τον Οκτώβρη του 1987, Lehman Brothers) σε συνδυασμό με την πρόσφατη παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση, κύριο χαρακτηριστικό της οποίας είναι η μεγάλη αύξηση της μεταβλητότητας των αγορών, έχουν μονοπωλήσει την προσοχή των επενδυτών και ερευνητών δημιουργώντας νέες σταθερές για τον κίνδυνο αγοράς και τα αποθέματα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Ως αποτέλεσμα των προηγούμενων είναι η καθιέρωση της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk / VaR), που από εδώ και στο εξής θα αναφέρουμε ως VaR, σε μέτρο πρότυπο για τον κίνδυνο αγοράς.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχολούμαστε με την μέθοδο υπολογισμού του VaR καθώς και την στατιστική θεωρία που απαιτεί αυτή. Από τις πιο γνωστές μεθόδους είναι η μέθοδος RiskMetrics, η χρήση οικονομετρικών μοντέλων και η χρήση εμπειρικών ποσοστημορίων. Ωστόσο εμείς επικεντρωνόμαστε μόνο στον υπολογισμό του VaR με τη χρήση οικονομετρικών μοντέλων. Τέλος στα κεφάλαια 3.3 και 3.4 παρουσιάζουμε μεθόδους για την αξιολόγηση των υπολογισμών μας και την σύγκριση μοντέλων.

#### **3.2 Αξία σε κίνδυνο (VaR)**

Οι κυριότερες κατηγορίες χρηματοοικονομικών κινδύνων είναι ο πιστωτικός κίνδυνος, ο λειτουργικός κίνδυνος και ο κίνδυνος αγοράς. Το VaR συνήθως

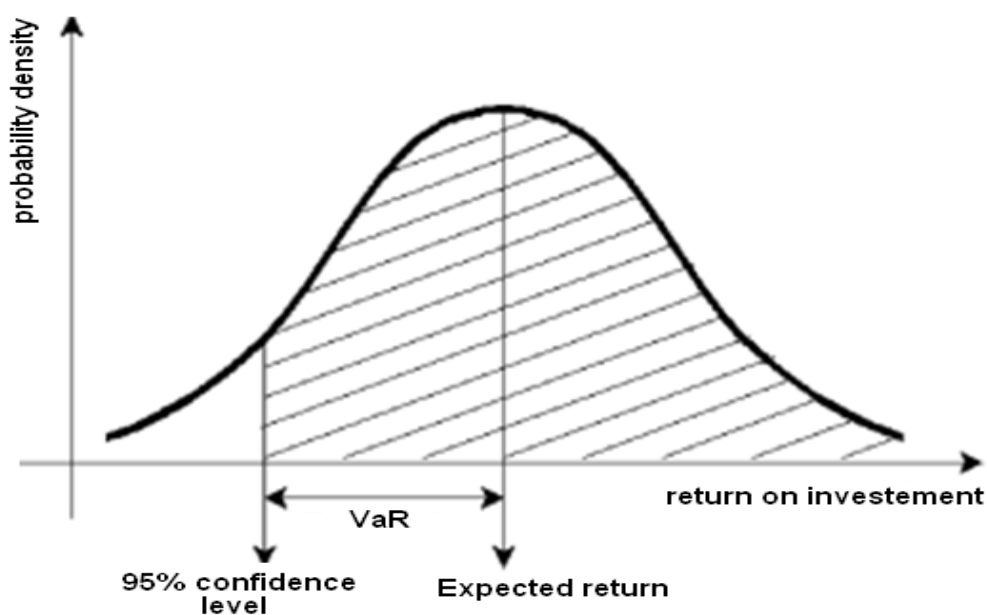
σχετίζεται με τον κίνδυνο αγοράς αλλά η ίδια λογική μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλους τύπους κινδύνου. Το VaR ενός χαρτοφυλακίου μετρά το ποσό που ένας επενδυτής μπορεί να χάσει με κάποια πιθανότητα, συνήθως μεταξύ 1% και 10%, για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο λόγω μεταβολών της αγοράς. Λεπτομερή αναφορά μπορεί να βρει κανείς στις εργασίες των Duffie και Pan (1997) και Jorion (2006).

Ανεξάρτητα από ποια σκοπιά εξετάζουμε το VaR (π.χ. επενδυτής, εποπτική αρχή) χρησιμοποιείται για να μας επιβεβαιώσει ότι ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή μια επένδυση θα συνεχίσει να υπάρχει ακόμη και μετά από ένα ακραίο σενάριο. Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του VaR. Υποθέτουμε ότι τώρα βρισκόμαστε στη χρονική στιγμή  $t$  και ενδιαφερόμαστε για τον κίνδυνο μιας χρηματοοικονομικής θέσης σε διάστημα  $s$  περιόδων.

#### Ορισμός 4.1

Έστω  $\Delta V(s)$  η μεταβολή της αξίας κάποιου περιουσιακού στοιχείου από τη χρονική στιγμή  $t$  στη χρονική στιγμή  $t+s$  και  $L(s)$  η συνάρτηση απώλειας που σχετίζεται με αυτή. Ορίζουμε το VaR μιας χρηματοοικονομικής θέσης για χρονικό ορίζοντα  $s$  περιόδων με πιθανότητα για την ουρά  $p$  ως εξής:

$$p = \Pr(L(s) \geq VaR) = 1 - \Pr(L(s) < VaR).$$



Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η πιθανότητα ένας επενδυτής να χάσει περισσότερα από το VaR σε διάστημα  $s$  περιόδων είναι  $p$  ή διαφορετικά με πιθανότητα  $1-p$  η ενδεχόμενη απώλεια του επενδυτή θα είναι μικρότερη του VaR. Έστω αν  $F_s(x)$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $L(s)$  τότε

$$1-p = \Pr(L(s) < VaR) = F_s(VaR)$$

δηλαδή το VaR είναι το  $(1-p)$  ποσοστημόριο της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής ( $VaR = x_{1-p}$ ).

Παρόλα αυτά η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δεν είναι γνωστή και οι μελέτες για το VaR σχετίζονται με την εκτίμηση της ή των ποσοστημορίων αυτής.

Ο υπολογισμός του VaR εξαρτάται από διάφορους παράγοντες:

1. Την πιθανότητα της ουράς  $p$  που μας ενδιαφέρει κάθε φορά. Για παράδειγμα για τα στρες τεστ χρησιμοποιείται  $p=0.001$  και στη διαχείριση κινδύνων  $p=0.01$ .
2. Το χρονικό ορίζοντα. Καθορίζεται ανάλογα με τον τύπο κινδύνου που μελετάμε, έτσι για τον κίνδυνο αγοράς συνήθως είναι μια 1-10 μέρες ενώ για το πιστωτικό κίνδυνο από 1-5 χρόνια.
3. Από την αθροιστική συνάρτηση ή τα ποσοστημόρια της.
4. Το ύψος της χρηματοοικονομικής θέσης που λαμβάνει ο επενδυτής.

Ιδιαίτερης σημασίας είναι η ακόλουθη παρατήρηση

#### 4.1 Παρατήρηση

Ο ορισμός του VaR γίνεται βάσει της άνω ουράς της συνάρτησης απώλειας. Για μια θέση long έχουμε απώλειες όταν οι αποδόσεις είναι αρνητικές. Έστω για μια θέση long πρέπει να χρησιμοποιούμε στην ανάλυση μας τη σειρά των «αρνητικών αποδόσεων» (σειρά αποδόσεων πολλαπλασιασμένες με -1).

### 3.3 Εκτίμηση του VaR με μοντέλα GARCH

Ο υπολογισμός του VaR με οικονομετρικά μοντέλα γίνεται με τη χρήση μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας. Συγκεκριμένα στην ενότητα αυτή θα δούμε πως μέσω των μοντέλων GARCH, που σχολιάσαμε στο 2 κεφάλαιο, υπολογίζουμε το VaR.

Έστω  $r_t$  οι λογαριθμισμένες αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου και έστω ότι ακολουθούν το παρακάτω GARCH(P,Q)

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_m r_{t-m}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot e_t.$$

Οι σχέσεις (1),(2) είναι οι εξισώσεις του μέσου και της μεταβλητότητας αντίστοιχα για τη χρονοσειρά  $r_t$ . Από τις σχέσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε για μια περίοδο μπροστά τις προβλέψεις του δεσμευμένου μέσου και της δεσμευμένης διακύμανσης ως εξής:

$$r_t(1) = \mu_{t+1} = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t+1-1} + \dots + \varphi_m r_{t+1-m}$$

$$\sigma_t^2(1) = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \varepsilon_{t+1-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t+1-q}^2.$$

Αν υποθέσουμε ότι  $e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  τότε

$$r_{t+1} / F_t \sim N(r_t(1), \sigma_t^2(1))$$

και το 95% ποσοστημόριο για την κατανομή αυτή ισούται με

$$r_t(1) + 1.65\sigma_t^2(1)$$

Αν αντί για  $e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  υποθέσουμε ότι ακολουθούν την τυποποιημένη Student-t κατανομή με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας τότε το  $(1-p)$  ποσοστημόριο της δεσμευμένης κατανομής του  $r_{t+1}$  είναι

$$r_t(1) + t_{\nu}^*(1-p)\sigma_t^2(1)$$

όπου  $t_{\nu}^*(1-p)$  είναι το  $(1-p)$  ποσοστημόριο της τυποποιημένης Student-t κατανομής με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας.

#### Παράδειγμα 4.1

Έστω  $r_t$  η χρονοσειρά αποδόσεων της μετοχής IBM από τις 3 Ιουλίου του 1962 ως τις 31 Δεκεμβρίου του 1998 και έστω ότι μας ενδιαφέρει το VaR της επόμενης ημέρας (δηλαδή 1 Ιανουαρίου του 1999) για μια θέση long ύψους 10.000.000 ευρώ. Εφαρμόζουμε στην «αρνητική σειρά των αποδόσεων»  $r_t^c = -r_t$  ένα GARCH(1,1) μοντέλο και έχουμε

$$r_t^c = -0.00066 - 0.0247r_{t-2}^c + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot e_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00000389 + 0.0799\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9073\sigma_{t-1}^2.$$

Γνωρίζουμε ότι  $r_t = 0.0128$ ,  $r_{t-1} = 0.00201$ ,  $r_{t-2} = 0.011230$  και  $\sigma_t^2 = 0.00033455$ .

Από το μοντέλο προκύπτουν οι παρακάτω προβλέψεις

$$r_t^c(1) = -0.00066 - 0.0247r_{t-1}^c = -0.00071$$

$$\sigma_t^2(1) = 0.00000389 + 0.0799\varepsilon_t^2 + 0.9073\sigma_t^2 = 0.00032.$$

Οπότε για την περίπτωση όπου  $e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  το 95% ποσοστημόριο είναι

$$-0.00071 + 1.6449\sqrt{0.00032} = 0.0409738$$

και το ζητούμενο VaR ισούται με  $(0.0409738) \times (10.000.000) = 4.099.738$  ευρώ.

Αντίστοιχα δουλεύουμε και για την περίπτωση που τα  $e_t$  ακολουθούν την τυποποιημένη Student-t κατανομή με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας μόνο που τώρα αλλάζουν οι παράμετροι του μοντέλου και ο τύπος υπολογισμού του ποσοστημρίου.

Θα δούμε τώρα πως υπολογίζουμε το VaR για χρονικό ορίζοντα  $s$  περιόδων. Έστω  $r_t$  οι λογαριθμισμένες αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου και έστω ότι ακολουθούν τα μοντέλα των σχέσεων (1) και (2) όπως πριν. Επικεντρωνόμαστε τώρα στην απόδοση για διάστημα  $s$  περιόδων από τη χρονική στιγμή  $t$  που βρισκόμαστε, δηλαδή στη μεταβλητή  $r_t[s]$ . Για το δεσμευμένο μέσο  $E[r_t[s]/F_t] = \hat{r}_t[s]$  ισχύει

$$\hat{r}_t[s] = r_t(1) + \dots + r_t(s)$$

όπου  $r_t(k)$  είναι η πρόβλεψη της απόδοσης  $k$  περιόδους μπροστά τη χρονικά στιγμή  $t$ . Συμβολίζουμε με  $e_t^*[s]$  το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης το οποίο ισούται με

$$e_t^*[s] = e_t^*(1) + \dots + e_t^*(s)$$

όπου  $e_t^*(k) = r_{t+k} - r_t(k)$  το σφάλμα πρόβλεψης  $k$  περιόδους μπροστά. Αν υποθέσουμε ότι  $e_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  τότε

$$r_t[s]/F_t \sim N(\hat{r}_t[s], \text{Var}(e_t^*[s]/F_t))$$

και το 95% ποσοστημώριο είναι ίσο με

$$\hat{r}_t[s] + 1.6449 \sqrt{\text{Var}(e_t^*[s]/F_t)}$$

ενώ αν  $e_t$  ακολουθούν την τυποποιημένη Student-t κατανομή με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας το  $(1-p)$  ποσοστημώριο ισούται με

$$\hat{r}_t[s] + t_\nu^*(1-p) \sqrt{\text{Var}(e_t^*[s]/F_t)} .$$

Παράδειγμα 4.2(μέθοδος υπολογισμού του  $\text{Var}(e_t^*[s]/F_t)$ )

Θεωρούμε το ακόλουθο μοντέλο για τη χρονοσειρά  $r_t$

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot e_t.$$

Από το μοντέλο προκύπτει ότι

$$e_t^*(1) = r_{t+1} - r_t(1) = \mu + \varepsilon_{t+1} - \mu = \varepsilon_{t+1}$$

και γενικά για  $s$  περιόδους μπροστά

$$e_t^*(s) = r_{t+s} - r_t(s) = \mu + \varepsilon_{t+s} - \mu = \varepsilon_{t+s}.$$

Οπότε για το σφάλμα πρόβλεψης για διάστημα  $s$  περιόδων έχουμε

$$e_t^*[s] = e_t^*(1) + \dots + e_t^*(s) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_{t+i}.$$

Επομένως

$$\text{Var}(e_t^*[s] / F_t) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^s \varepsilon_{t+i}\right) = \sum_{i=1}^s \text{Var}(\varepsilon_{t+i}) = \sum_{i=1}^s \sigma_t^2(i)$$

αφού  $\varepsilon_{t+i}$  ανεξάρτητα μεταξύ τους.

### 3.3.1 Αναμενόμενο έλλειμμα

Συνήθως όταν πραγματοποιείται ένα ακραίο σενάριο η πραγματική ζημιά είναι μεγαλύτερη από το VaR. Για το λόγο αυτό σε πολλές περιπτώσεις εκτός από το VaR μας ενδιαφέρει η αναμενόμενη ζημιά αν αυτή υπερβεί το VaR, γνωστή ως Expected Shortfall (ES). Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση απώλειας είναι κανονική και δεδομένου ότι η ζημιά ξεπερνάει το VaR οδηγούμαστε σε μια κολοβή από κάτω κανονική κατανομή. Επομένως αν η δεσμευμένη κατανομή του  $r_t$  είναι  $N(\mu_t, \sigma_t^2)$  και  $p$  η πιθανότητα για την ουρά τότε το ES υπολογίζεται ως εξής:

$$ES_q = \mu_t + \frac{f(x_q)}{p} \sigma_t$$

όπου  $q=1-p$  και  $x_q$  το  $q$  ποσοστημόριο της κανονικής τυποποιημένης κατανομής.

### 3.3.2 VaR χαρτοφυλακίου

Σε πολλές εφαρμογές όπου οι επενδυτές έχουν χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από διάφορες επενδύσεις, χρειάζεται να υπολογίσουν το VaR ολόκληρου του χαρτοφυλακίου. Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με δυο επενδύσεις που η κάθε μια ξεχωριστά έχει  $VaR_1$ ,  $VaR_2$  αντίστοιχα. Έστω επίσης  $\rho_{12}$  ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων της κάθε επένδυσης

δηλαδή  $\rho_{12} = \frac{Cov(r_{1t}, r_{2t})}{\sqrt{Var(r_{1t})Var(r_{2t})}}$ . Το συνολικό VaR του χαρτοφυλακίου δίνεται

από τη σχέση

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2}$$

και αν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από  $m$  επενδύσεις τότε

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^m VaR_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} VaR_i VaR_j}$$

### 3.4 Backtesting

Η διαδικασία του backtesting χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ορθότητας του VaR που εκτιμάμε κάθε φορά. Η ιδέα του backtesting βασίζεται σε 2 χαρακτηριστικά που εμφανίζει η ακολουθία των παραβιάσεων του VaR. Συγκεκριμένα αν για μια χρονοσειρά έχουμε τις προβλέψεις του VaR,  $VaR_t^f$ ,  $t=1, \dots, T$ , για ένα χρονικό διάστημα και τις πραγματικές απώλειες που



επήλθαν στο διάστημα αυτό  $L_t$  τότε η ακολουθία των παραβιάσεων του VaR ορίζεται ως εξής:

$$\{I_t = 1, L_t > VaR_t^f \text{ \& } I_t = 0, L_t < VaR_t^f \}.$$

Επομένως η ακολουθία των παραβιάσεων παίρνει την τιμή 1 τη χρονική στιγμή  $t$  αν την ημέρα αυτή η απώλεια ήταν μεγαλύτερη από το  $VaR_t^f$  που είχαμε προβλέψει. Αν αντίθετα η ζημιά είναι μικρότερη τότε το  $VaR_t^f$  δεν παραβιάζεται και η ακολουθία παίρνει την τιμή 0. Οι τιμές της ακολουθίας αυτής ωστόσο είναι εντελώς απρόβλεπτες ώστε να κατανέμεται ανεξάρτητα στο χρόνο σαν μια Bernoulli μεταβλητή, δηλαδή

$$I_t \stackrel{i.i.d}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$$

και

$$f(I_t; p) = (1-p)^{1-I_t} p^{I_t}$$

η συνάρτηση κατανομής Bernoulli με  $p$  την πιθανότητα για την ουρά. Συνεπώς η μελέτη της ακολουθίας των παραβιάσεων είναι σαν να μελετάμε την ακολουθία ρίψεων κέρματος, που με πιθανότητα  $p$  φέρνει κορόνα.

Βάσει όλων των παραπάνω λοιπόν καταλήγουμε ότι ο έλεγχος της ορθότητας του VaR βασίζεται σε δυο επιμέρους ελέγχους, τον έλεγχο της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων καθώς και τον έλεγχο του αριθμού των παραβιάσεων ο οποίος δεν πρέπει να διαφέρει σημαντικά από το ποσοστό  $p$  των παρατηρήσεων.

### 3.4.1 Unconditional Coverage Testing

Σκοπός του τεστ είναι να ελέγξουμε αν ο αριθμός των παραβιάσεων του VaR (εκφρασμένος σε ποσοστό του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων) για το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε, έστω  $\pi$ , διαφέρει σημαντικά από τον αναμενόμενο αριθμό παραβιάσεων  $p$  (επιλέγοντας μια πιθανότητα  $p$  για την ουρά, στην ουσία υποθέτουμε ότι στις  $T$  παρατηρήσεις το αναμενόμενο

ποσοστό παραβιάσεων είναι  $p$ ). Δηλαδή οι υποθέσεις του τεστ είναι οι ακόλουθες

$$H_0 : \pi = p \text{ και } H_1 : \pi \neq p .$$

Ο έλεγχος θα γίνει με τη χρήση ενός likelihood ratio test. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για μια ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία  $Bernoulli(\pi)$  είναι

$$L(\pi) = \prod_{t=1}^T (1-\pi)^{1-I_t} \pi^{I_t} = (1-\pi)^{T_0} \pi^{T_1}$$

όπου  $T_1$  ο αριθμός παραβιάσεων του VaR και  $T_0$  αριθμός των μη παραβιάσεων. Έχουμε

$$l = \ln(L(\pi)) = T_0 \ln(1-\pi) + T_1 \ln(\pi)$$

και θέτοντας  $\frac{\partial l}{\partial \pi} = 0$  προκύπτει ότι  $\hat{\pi} = \frac{T_1}{T}$ . Έτσι η συνάρτηση πιθανοφάνειας

υπό τον εκτιμητή  $\hat{\pi}$  γίνεται

$$L(\hat{\pi}) = \prod_{t=1}^T (1-\hat{\pi})^{1-I_t} \hat{\pi}^{I_t} = (1-\frac{T_1}{T})^{T_0} (\frac{T_1}{T})^{T_1}$$

και κάτω από τη μηδενική υπόθεση όπου  $\pi = p$

$$L(p) = \prod_{t=1}^T (1-p)^{1-I_t} p^{I_t} = (1-p)^{T_0} p^{T_1} .$$

Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης γίνεται με το ακόλουθο στατιστικό

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right) .$$

Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων  $T$  τείνει στο άπειρο τότε το στατιστικό ακολουθεί την  $X^2$  κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας. Οπότε αν το στατιστικό  $LR_{uc}$  είναι μεγαλύτερο της κρίσιμης τιμής απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ή ομοίως αν το p-value μικρότερο του επιπέδου σημαντικότητας.

### 3.4.2 Έλεγχος Ανεξαρτησίας των παραβιάσεων

Αν αναλογιστεί κανείς την αυξημένη πιθανότητα χρεοκοπίας ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος στη περίπτωση όπου αρκετές παραβιάσεις του VaR εμφανίζονται σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι μοντέλα με τέτοιου είδους συμπεριφορά είναι ανεπιθύμητα. Επομένως στόχος του τεστ είναι η απόρριψη ενός μοντέλου VaR που εμφανίζει πυκνώματα στις παραβιάσεις. Θεωρούμε την ακολουθία των παραβιάσεων σαν μια πρώτης τάξης Markov ακολουθία, η οποία είναι εξαρτημένη στο χρόνο, με πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

όπου  $\pi_{01}$  η πιθανότητα μια ημέρα που δεν είχαμε παραβίαση να ακολουθείται από ημέρα με παραβίαση και  $\pi_{11}$  η πιθανότητα μια ημέρα με παραβίαση να ακολουθείται από ημέρα με παραβίαση. Η πρώτης τάξης Markov ιδιότητα υποθέτει ότι μόνο τα σημερινά αποτελέσματα επηρεάζουν τα αποτελέσματα του αύριο. Έτσι για δείγμα  $T$  παρατηρήσεων η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}}$$

με  $T_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$  είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων όπου μια ημέρα με  $i$  αποτέλεσμα ακολουθείται από μια ημέρα με αποτέλεσμα  $j$ . Έχουμε

$$l = \ln(L(\Pi_1)) = T_{00} \ln(1 - \pi_{01}) + T_{01} \ln \pi_{01} + T_{10} \ln(1 - \pi_{11}) + T_{11} \ln \pi_{11}$$

και θέτοντας τις μερικές παραγώγους  $\frac{\partial l}{\partial \pi_{01}}$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \pi_{11}}$  ίσες με μηδέν προκύπτει

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \quad \text{και} \quad \hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}. \quad \text{Συνεπώς αφού οι πιθανότητες πρέπει να}$$

αθροίζουν στη μονάδα έπεται ότι  $\hat{\pi}_{00} = 1 - \hat{\pi}_{01}$ ,  $\hat{\pi}_{10} = 1 - \hat{\pi}_{11}$  και ο εκτιμημένος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{pmatrix}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι παραβιάσεις είναι ανεξάρτητες στο χρόνο τότε  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$  και ο πίνακας μετάβασης γίνεται

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix}.$$

Ελέγχουμε την υπόθεση  $H_0$  της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων, ισοδύναμα ότι  $\pi_{01} = \pi_{11}$ , με το likelihood ratio test

$$LR_{ind} = -2 \ln \left( \frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right).$$

Για μεγάλα δείγματα έχουμε ότι  $LR_{ind} \sim X^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας, επομένως απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν η τιμή του στατιστικού  $LR_{ind}$  είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής.

### 3.4.3 Conditional coverage test

Με το τεστ αυτό ελέγχουμε συνολικά αν ο αριθμός των παραβιάσεων και η ανεξαρτησία αυτών είναι αποδεκτά. Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε είναι

$$LR_{cc} = -2 \ln \left( \frac{L(p)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right)$$

το οποίο ακολουθεί  $X^2$  κατανομή με δυο βαθμούς ελευθερίας. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι

$$LR_{cc} = -2 \ln \left( \frac{L(p)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) = -2 \ln \left( \frac{L(p)}{L(\hat{\Pi})} \frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) =$$

$$= -2 \ln\left(\frac{L(p)}{L(\hat{\Pi})}\right) - 2 \ln\left(\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)}\right) = LR_{uc} + LR_{ind}.$$

### 3.5 Σύγκριση μοντέλων VaR με το Diebold & Mariano τεστ

Με την ίδια λογική που χρησιμοποιείται το DM τεστ για τη σύγκριση μοντέλων ως προς τις προβλέψεις τους για το δεσμευμένο μέσο ή τη δεσμευμένη διακύμανση, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε μοντέλα VaR. Έστω  $L(r_{t+1}, VaR_{t+1|t})$  η συνάρτηση απώλειας που σχετίζεται με το VaR.

Το DM στατιστικό υπολογίζεται ως εξής:

$$DM = \sqrt{R} \frac{\bar{d}}{\sqrt{\widehat{Var}[d]}}$$

$$d_t = L(r_{t+1}, VaR_{t+1|t}^A) - L(r_{t+1}, VaR_{t+1|t}^B),$$

$$L(r_{t+1}, VaR_{t+1|t}) = p(r_{t+1} - VaR_{t+1|t})(1 - I_{[r_{t+1} < VaR_{t+1|t}]}) + (1 - p)(VaR_{t+1|t} - r_{t+1})I_{[r_{t+1} < VaR_{t+1|t}]},$$

$VaR^A$ ,  $VaR^B$  τα VaR δύο μοντέλων A και B αντίστοιχα και  $\bar{d} = \frac{1}{R} \sum_{t=M+1}^{M+R} d_t$ ,  $M$  ο

αριθμός των παρατηρήσεων μέσα στο δείγμα,  $R$  ο αριθμός των παρατηρήσεων έξω από το δείγμα (χωρίζουμε τις  $T$  παρατηρήσεις σε 2 μέρη: τις παρατηρήσεις  $M$  μέσα από το δείγμα και τις παρατηρήσεις  $R$  έξω από το δείγμα,  $T = M + R$ ). Τέλος  $\widehat{Var}(\bar{d})$  είναι η μακροχρόνια διακύμανση του  $\bar{d}$ .

## **4 Κεφάλαιο**

### **Εμπειρική ανάλυση**

#### **4.1 Εισαγωγή**

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε όλο το θεωρητικό πλαίσιο που προηγήθηκε σε πραγματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα αναπτύσσουμε μοντέλα πρόβλεψης μεταβλητότητας για τους οχτώ χρηματιστηριακούς δείκτες Dow Jones, S&P 500, Ftse 100 (UK), Cac 40(FR), Dax (GER), Nikkei 225(JAPAN) και τα συγκρίνουμε μεταξύ τους. Στόχος μας είναι να δούμε αν το αποτέλεσμα της σύγκρισης των μοντέλων ως προς τη πρόβλεψη της μεταβλητότητας συμφωνεί με το αποτέλεσμα της σύγκρισης των μοντέλων ως προς τη πρόβλεψη του VaR. Τέλος για την υλοποίηση όλων των παραπάνω δουλεύουμε με το στατιστικό πρόγραμμα Eviews.

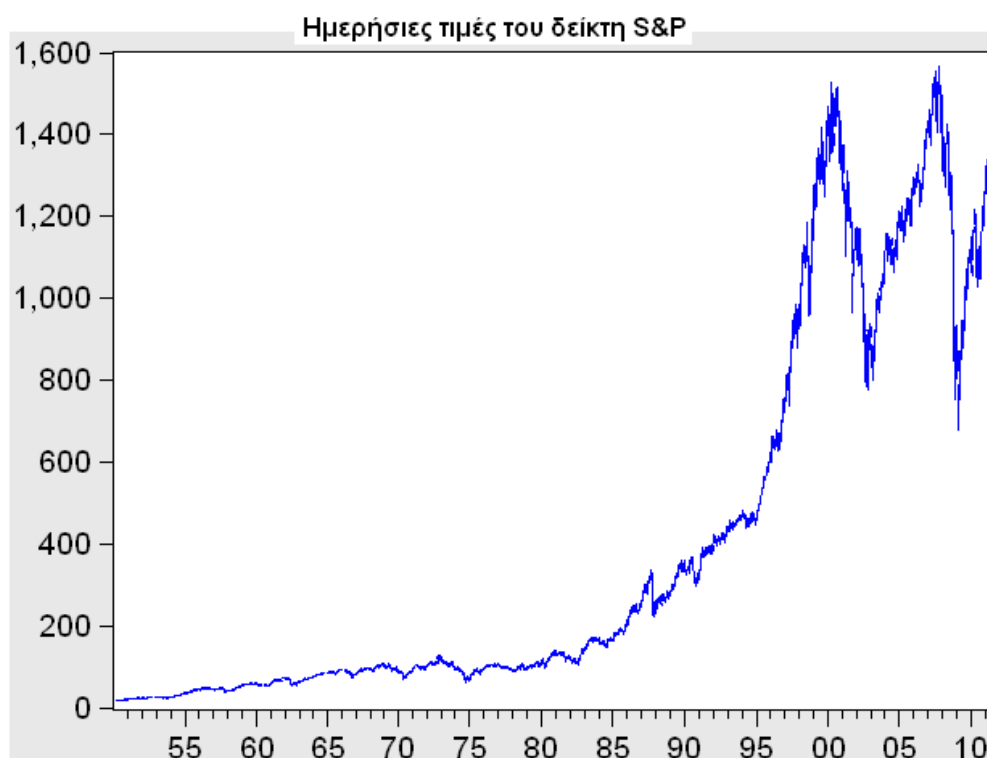
#### **4.2 Εφαρμογές μοντέλων πρόβλεψης μεταβλητότητας – VaR σε χρηματιστηριακούς δείκτες**

Η δημιουργία των οργανωμένων χρηματιστηριακών αγορών επέβαλλε την καθιέρωση κάποιων μέτρων τα οποία έχουν την δυνατότητα να μετράνε τις γενικές τάσεις και διαθέσεις ολόκληρης της αγοράς. Αυτά τα μέτρα ονομάστηκαν χρηματιστηριακοί δείκτες με σκοπό να αντικατοπτρίζουν το δυνατόν καλύτερο την γενική συμπεριφορά της αγοράς.

Ένας χρηματιστηριακός δείκτης δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα καλάθι επιλεγμένων μετοχών από το σύνολο των εταιριών που είναι εισηγμένες στη χρηματιστηριακή αγορά. Καθώς οι μετοχές που αποτελούν τον δείκτη προοδεύουν, οι ανοδικές τάσεις αντικατοπτρίζονται στον δείκτη.

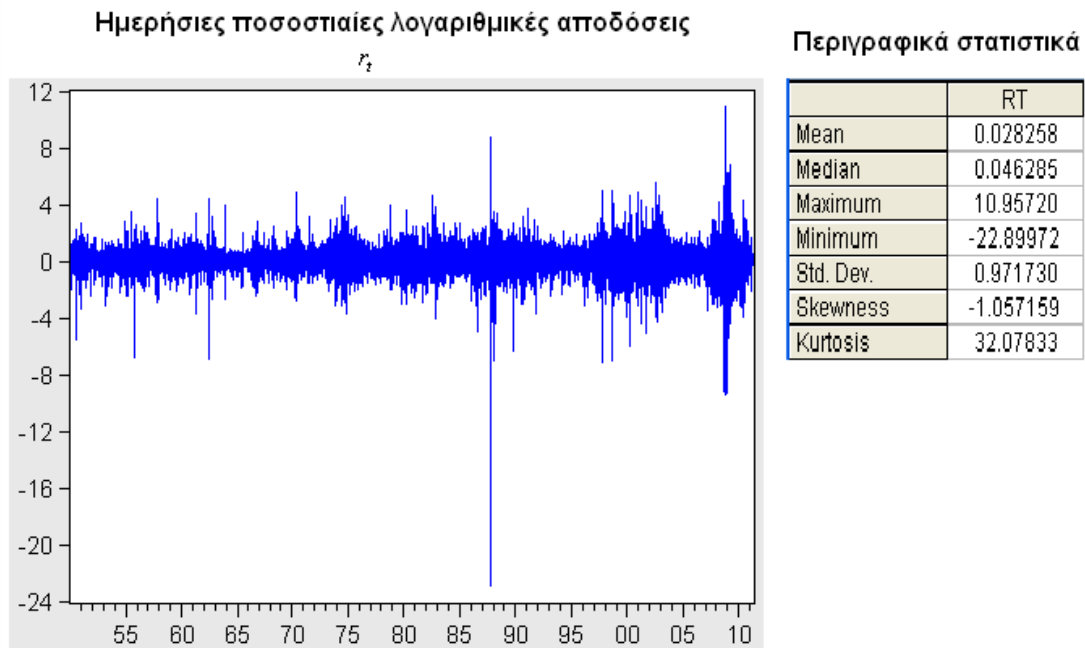
#### 4.2.1 S&P 500

Ο S&P δημιουργήθηκε τη δεκαετία του 1950, ανήκει στην Standard & Poor's και είναι ένας σταθμισμένος δείκτης που αποτελείται από 500 μετοχές μεγάλων εταιρειών. Συγκεκριμένα οι μετοχές που περιλαμβάνονται στο δείκτη είναι μετοχές εταιρειών εισηγμένων σε ένα από τα δύο μεγαλύτερα αμερικάνικα χρηματιστήρια, το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και το Nasdaq. Χρησιμοποιείται από τους επενδυτές ως σημείο αναφοράς για την αγορά αυτή. Καλύπτει σχεδόν το 70% της αξίας της αμερικανικής χρηματιστηριακής αγοράς και συμπεριλαμβάνει 380 βιομηχανικές, 37 για δημόσιες υπηρεσίες, 73 οικονομικές και 10 μετοχές μεταφοράς. Αν και λιγότερο δημοφιλές από το DJIA, χρησιμοποιείται συχνά ως μια πιο ακριβής μέτρηση των επιδόσεων της οικονομίας των ΗΠΑ. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από το 03/01/1950 ως 22/03/2011.



Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιαίων

λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{S \& P(t)}{S \& P(t-1)}\right) \cdot 100$ .



Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με 0.028258 (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία -1.057159 (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή, 32.07833, γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση από το μέσο στο τέλος του 1987 και στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στο κραχ και την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση αντίστοιχα.



### Πρόβλεψη του VaR και της μεταβλητότητας

Χωρίζουμε το δείγμα των 15402 παρατηρήσεων σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος (in sample) αποτελείται από τις πρώτες 10.000 παρατηρήσεις (2/3 του δείγματος περίπου) και το δεύτερο (out of sample) από τις υπόλοιπες 5402 παρατηρήσεις (1/3 του δείγματος περίπου). Βάσει των πρώτων 10.000 παρατηρήσεων εκτιμούμε το VaR και τη μεταβλητότητα για τις επόμενες 5402 μέρες. Συγκεκριμένα η κάθε πρόβλεψη λαμβάνει υπόψη της ένα δείγμα 10.000 παρατηρήσεων το οποίο μετακυλύετε κάθε μέρα. Έτσι η πρόβλεψη για την ημέρα 10.001 προκύπτει από τις πρώτες 10.000 παρατηρήσεις, η πρόβλεψη για την ημέρα 10.002 προκύπτει από τις τελευταίες 9.999 παρατηρήσεις του πρώτου μέρους και την πρώτη παρατήρηση του δευτέρου κ.ο.κ. Δηλαδή κάθε μέρα αφαιρούμε από το δείγμα των 10.000 παρατηρήσεων του πρώτου μέρους την παλαιότερη παρατήρηση και προσθέτουμε την παρατήρηση της ημέρας που κάνουμε πρόβλεψη ώστε το δείγμα να παραμένει σταθερό ως προς το μέγεθος αλλά να διαφέρει από το δείγμα της προηγούμενης εκτίμησης κατά μία παρατήρηση. Ακολουθώντας τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε και εφαρμόζοντας τα μοντέλα GARCH, EGARCH, GJR GARCH, APARCH στις αποδόσεις  $r_t$  παίρνουμε τα επόμενα διαγράμματα για το VaR και τη μεταβλητότητα.

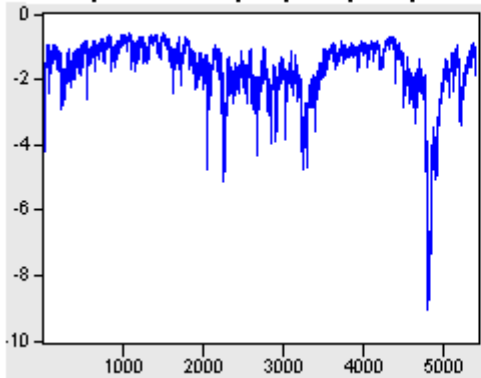
## GARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

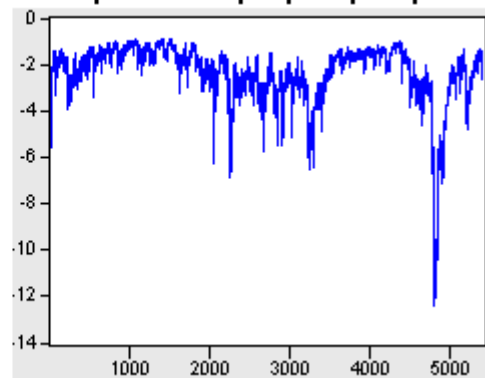
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

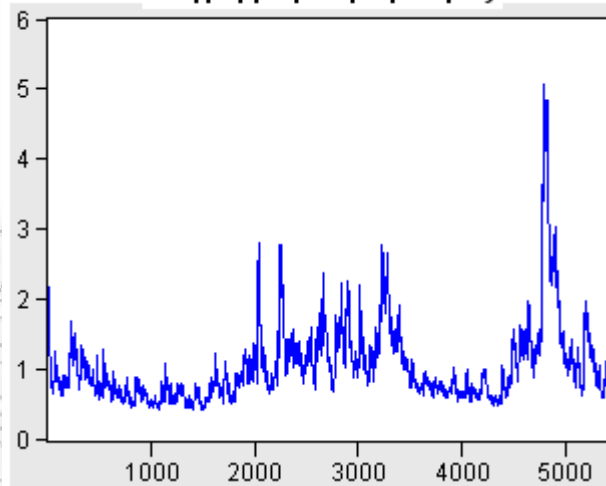
VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%



VaR με πιθανότητα για την ουρά 1%



Διάγραμμα μεταβλητότητας



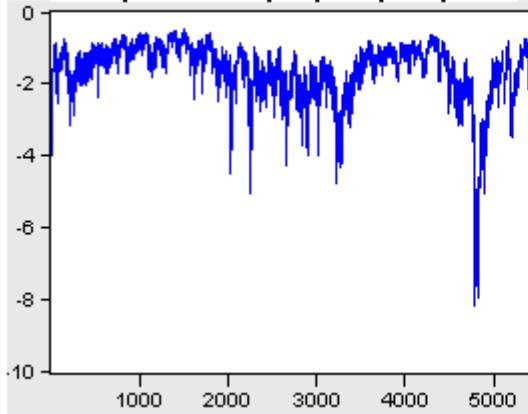
## EGARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \alpha_2 \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

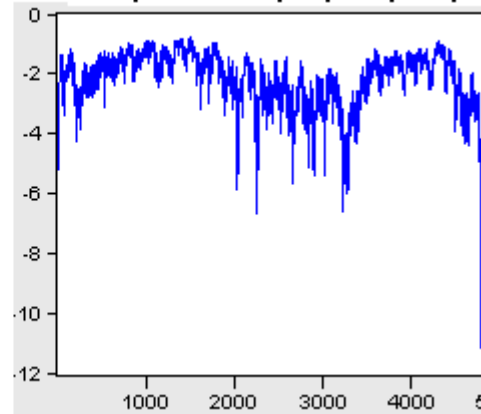
$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%

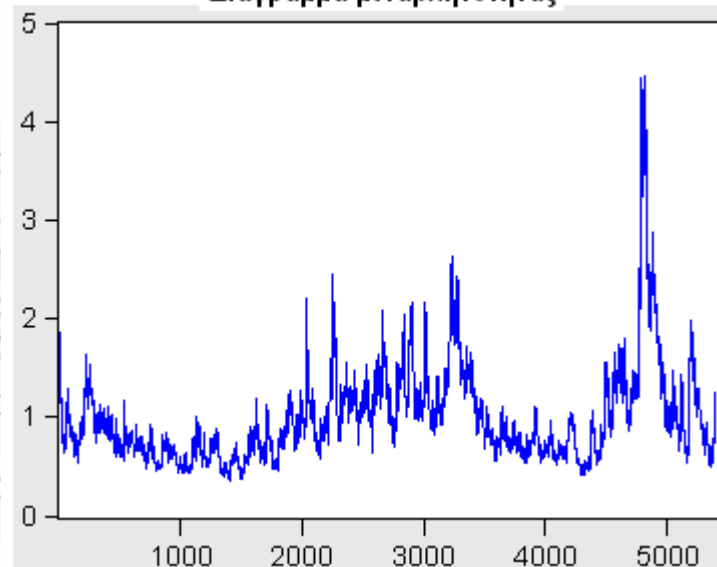


3.

VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%



Διάγραμμα μεταβλητότητας



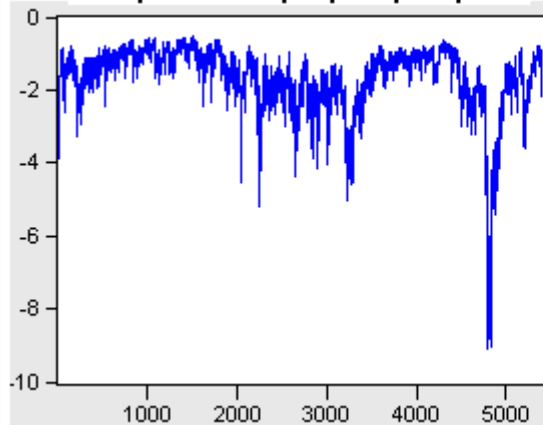
## APARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

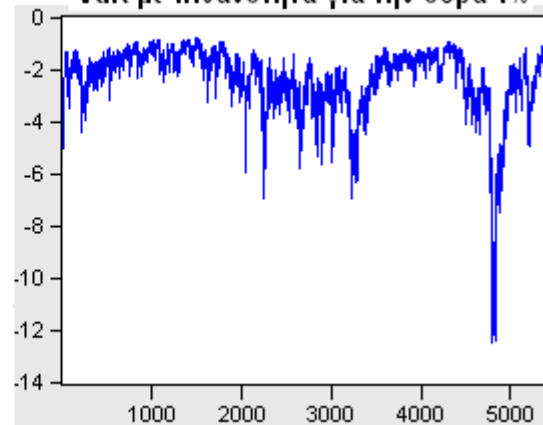
$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1 |\varepsilon_{t-1}|)^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

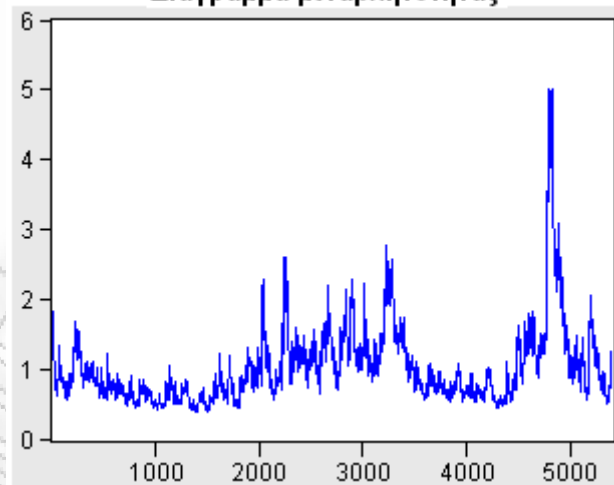
VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%



VaR με πιθανότητα για την ουρά 1%



Διάγραμμα μεταβλητότητας

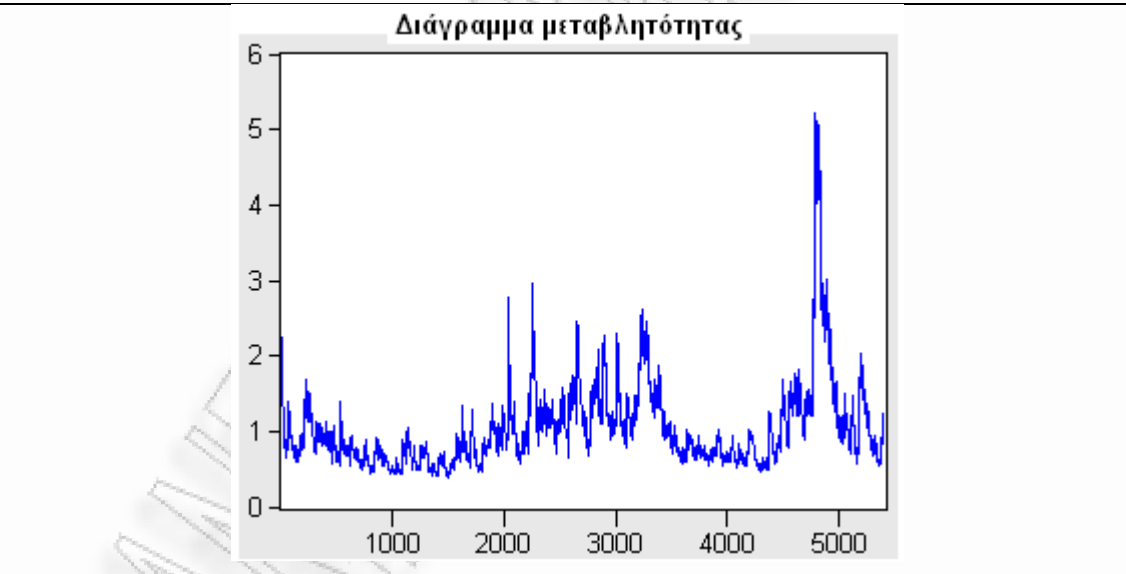
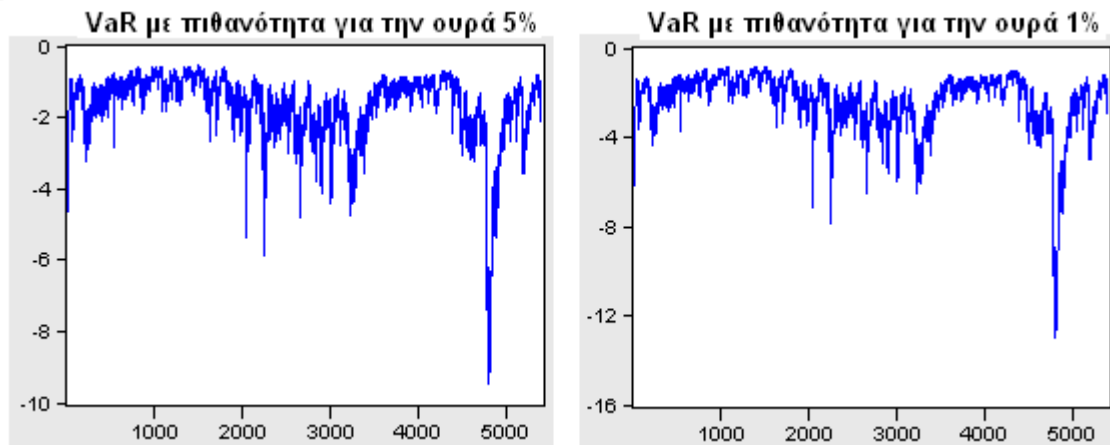


## GJR GARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$



### Backtesting VaR

Ελέγχουμε την επάρκεια των μοντέλων που εφαρμόσαμε ως προς την πρόβλεψη του VaR μέσω των τριών ελέγχων  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$ ,  $LR_{cc}$  που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3.

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.196198 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                            | $LR_{uc} = 1.24E-07 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .                                |
| $LR_{ind} = 0.307685 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                           | $LR_{ind} = 0.534599 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                           |
| $LR_{cc} = 0.257813 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                            | $LR_{cc} = 6.99E-07 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .                                |

| EGARCH                                                                             |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.057573 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 6.67E-08 < 0.1$ Απορρίπτω τη $H_0$ .                                    |
| $LR_{ind} = 0.060131 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                  | $LR_{ind} = 0.057010 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                  |
| $LR_{cc} = 0.028160 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{cc} = 7.61E-08 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

| APARCH                                                                             |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.097494 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 1.33E-06 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.140168 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.071032 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                  |
| $LR_{cc} = 0.085342 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{cc} = 1.64E-06 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

| GJR                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                     | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                         |
| Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.097494 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.076158 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.052573 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . | Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 2.34E-06 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.622106 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 1.28E-05 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . |

Παρατηρούμε ότι από τα τέσσερα μοντέλα μόνο το μοντέλο GARCH για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$  είναι επαρκές για την πρόβλεψη του VaR. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αν και υπάρχουν μοντέλα που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία των παραβιάσεων τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting δεν είναι ικανοποιητικά.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

|               |               |                |                |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH         | GARCH         | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH        | APARCH        | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 8.22908$ | $S = 8.52037$ | $S = 7.452812$ | $S = -2.96704$ | $S = -4.33849$ | $S = -4.46299$ |



|              |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας αφού απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση παντού. Ως καλύτερο μοντέλο επιλέγουμε το EGARCH αφού διαφέρει στατιστικά από όλα τα υπόλοιπα και στη μεταξύ τους σύγκριση έχει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα κάτι που εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τις πραγματικές τιμές  $S$  του στατιστικού DM.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 2.737203$                           | $S = 4.599608$ | $S = 4.176584$ | $S = 0.891723$ | $S = 0.026095$ | $S = -1.28994$ |
| $ S  > 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |               |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH         | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR           | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 0.09133$                            | $S = 2.312063$ | $S = -42.812$ | $S = 2.804065$ | $S = -44.0383$ | $S = -43.0156$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$  | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Το μοντέλο GARCH στατιστικά διαφέρει απ'όλα τα μοντέλα ενώ από τη σύγκριση των μοντέλων EGARCH, APARCH, GJR μεταξύ τους, προκύπτει ότι

τα μοντέλα είναι ισοδύναμα αφού οι διάφορες τιμές του  $|S|$  είναι μικρότερες από το 1.96 (δεν απορρίπτουμε την  $H_0$ ). Τέλος τα μοντέλα αυτά υπερτερούν του μοντέλου GARCH για την πρόβλεψη του VaR αφού η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης απώλειας  $L$  είναι μικρότερη από αυτή του μοντέλου GARCH.

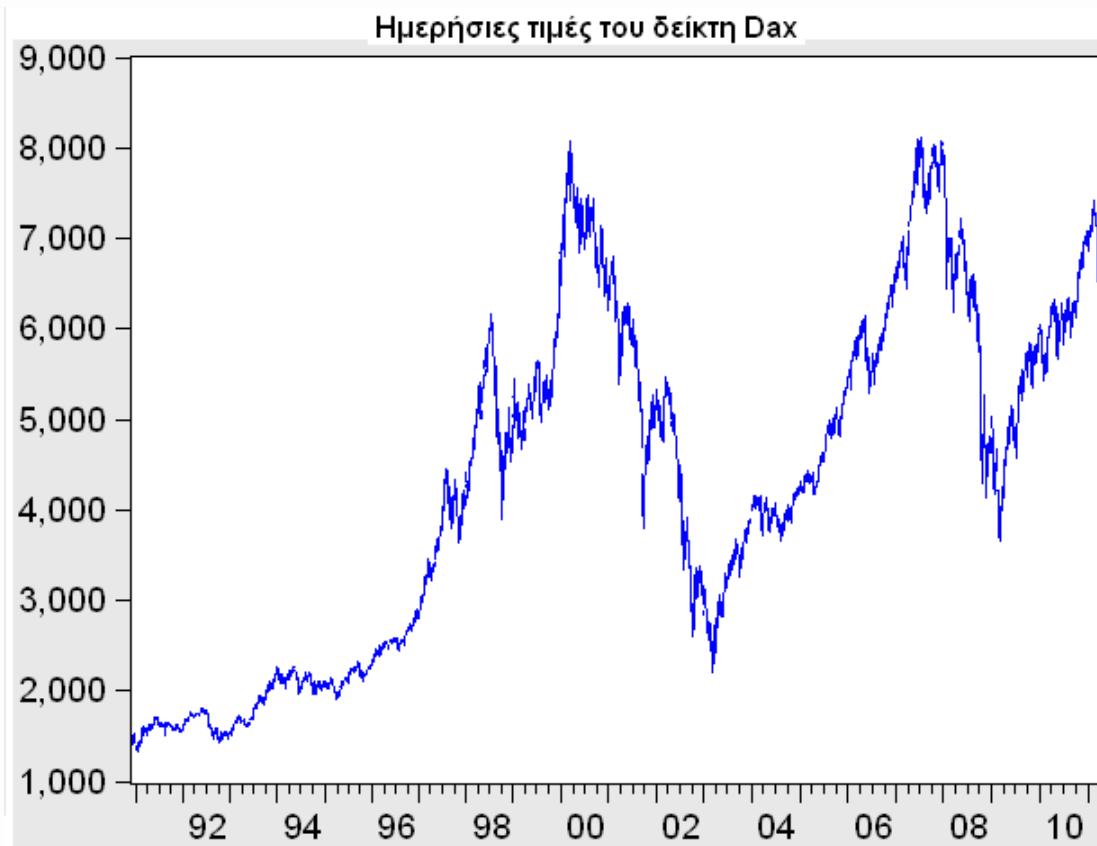
(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε ότι όλα τα μοντέλα στατιστικά διαφέρουν εκτός από τα GARCH και EGARCH που είναι στατιστικά ισοδύναμα, αφού δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση μιας  $k$  η τιμή του στατιστικού DM είναι μικρότερη από τη κρίσιμη τιμή. Ως καταλληλότερο επιλέγουμε το μοντέλο APARCH αφού διαφέρει στατιστικά από όλα και η συνάρτηση απώλειας του  $L$  έχει την μικρότερη μέση τιμή.

#### **4.2.2 Dax**

Ο χρηματιστηριακός δείκτης Dax (Deutscher Aktien Index) αποτελείται από τις τριάντα μεγαλύτερες εταιρείες που εμπορεύονται στο χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης και αντιπροσωπεύει το 80% της γερμανικής κεφαλαιαγοράς. Οι τιμές λαμβάνονται από το ηλεκτρονικό σύστημα συναλλαγών Xetra και ως ένας από τους σημαντικότερους δείκτες στο κόσμο χρησιμεύει ως υπόβαθρο για περισσότερα από 40.000 χρηματοοικονομικά προϊόντα.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από 26/11/1990 ως 22/3/2011.

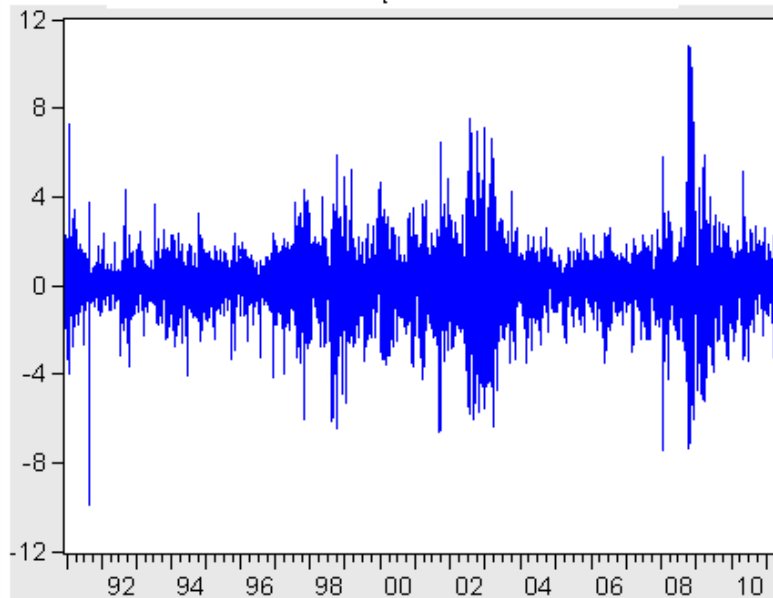


Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιάων

λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{Dax(t)}{Dax(t-1)}\right) \cdot 100$ .

### Ημερήσιες ποσοστιαίες λογαριθμικές αποδόσεις

$r_t$



### Περιγραφικά στατιστικά

|           | RT        |
|-----------|-----------|
| Mean      | 0.030137  |
| Median    | 0.077815  |
| Maximum   | 10.79747  |
| Minimum   | -9.870916 |
| Std. Dev. | 1.453428  |
| Skewness  | -0.090372 |
| Kurtosis  | 7.967316  |

Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με 0.030137 (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία -0.090372 (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή, 7.967316, γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση από το μέσο στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στην παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση.

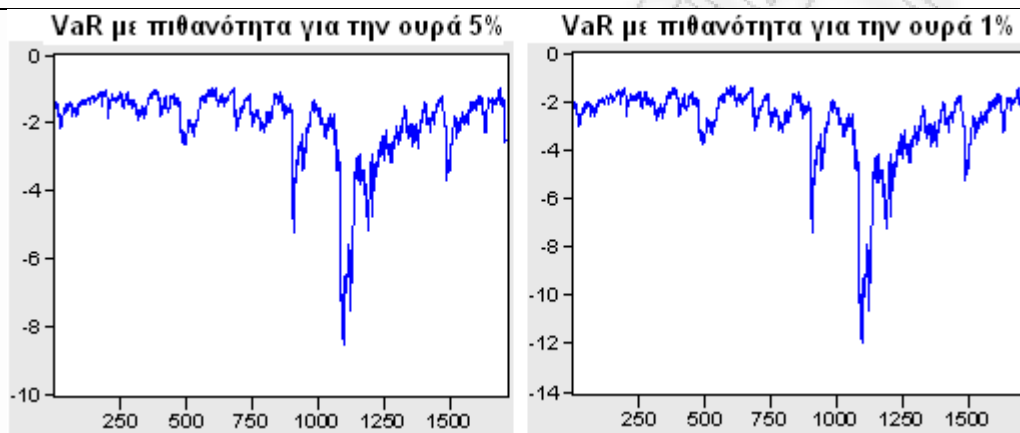
## Προβλεψη του VaR και της μεταβλητότητας

### GARCH

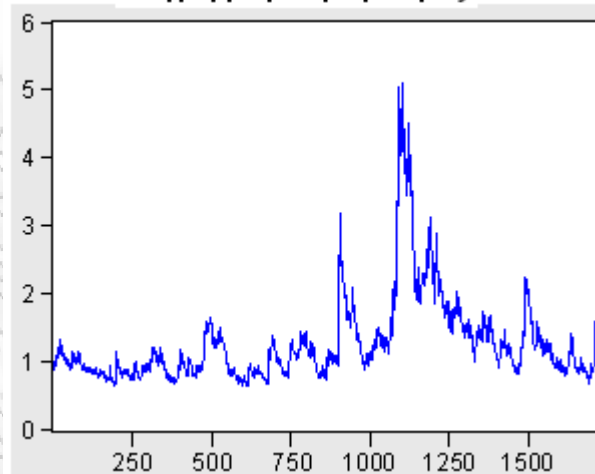
$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$



### Διάγραμμα μεταβλητότητας



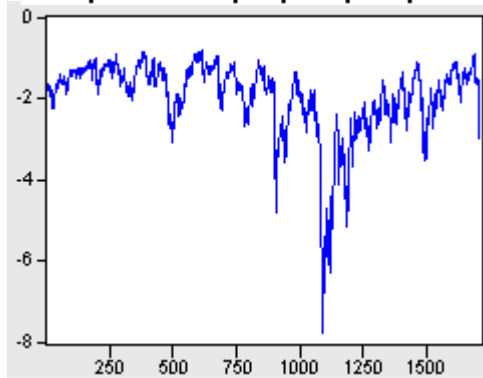
## EGARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

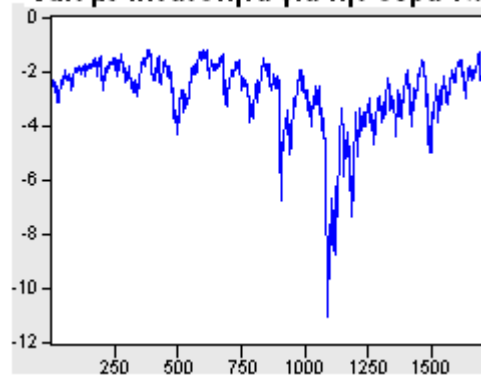
$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \alpha_2 \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

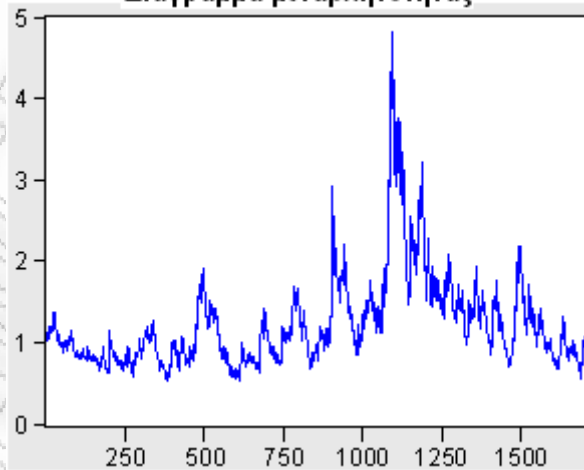
VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%



VaR με πιθανότητα για την ουρά 1%



Διάγραμμα μεταβλητότητας



## APARCH

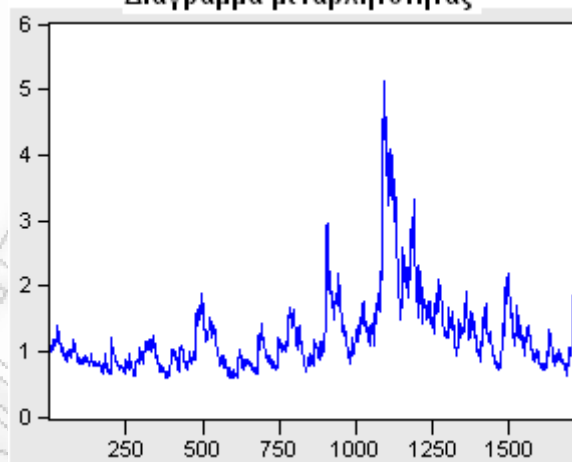
$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| + \gamma_1 |\varepsilon_{t-1}|)^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$



## Διάγραμμα μεταβλητότητας



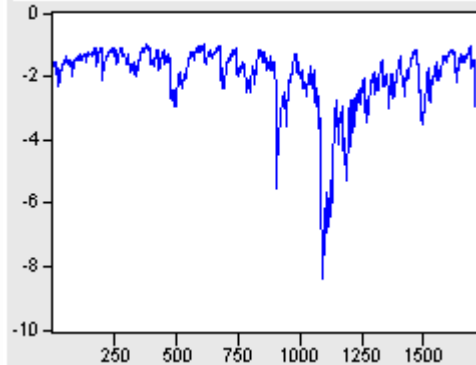
## GJR GARCH

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

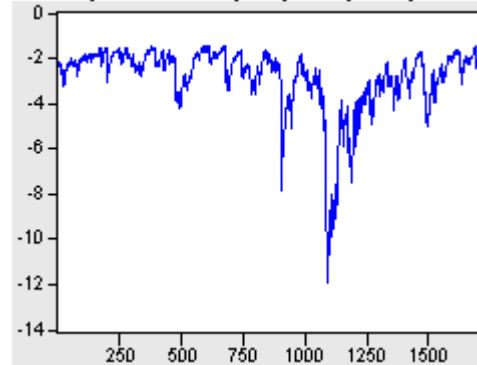
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$$

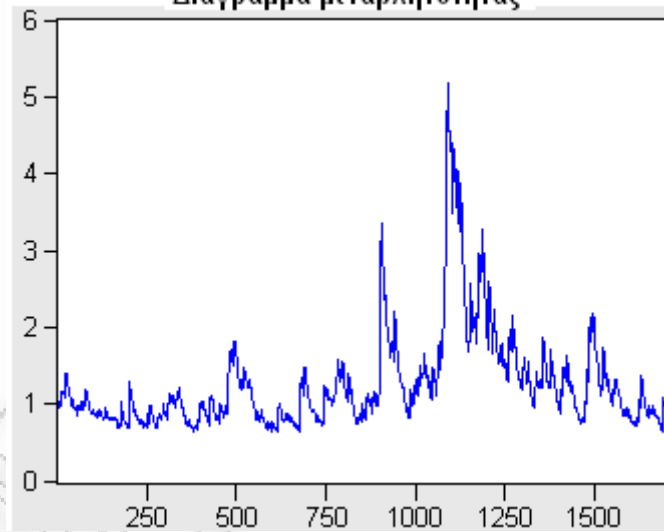
VaR με πιθανότητα για την ουρά 5%



VaR με πιθανότητα για την ουρά 1%



Διάγραμμα μεταβλητότητας





### Backtesting VaR

Ελέγχουμε την επάρκεια των μοντέλων που εφαρμόσαμε ως προς την πρόβλεψη του VaR μέσω των τριών ελέγχων  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$ ,  $LR_{cc}$  που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3.

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.145070 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                            | $LR_{uc} = 0.015379 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .                                |
| $LR_{ind} = 0.420405 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                           | $LR_{ind} = 0.479981 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                           |
| $LR_{cc} = 0.250009 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .                            | $LR_{cc} = 0.041350 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .                                |

| EGARCH                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                              | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                             |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.047417 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.121214 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.042170 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.004651 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω τη <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.552782 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.015277 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| APARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                              |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.145070 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.187308 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.145003 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.004651 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.552782 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.015277 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| GJR                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br><br>και επίπεδο σημαντικότητας<br><br>του ελέγχου 10%                                                                                                          | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br><br>και επίπεδο σημαντικότητας<br><br>του ελέγχου 10%                                                                                                          |
| Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.355864 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.019672 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.042998 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ . | Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.008589 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.515972 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.025626 < 0.1$ Απορρίπτω την<br>$H_0$ . |

Παρατηρούμε ότι από τα τέσσερα μοντέλα μόνο τα μοντέλα GARCH, APARCH για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$  είναι επαρκεί για την πρόβλεψη του VaR. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αν και υπάρχουν μοντέλα που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία ή τον επιθυμητό αριθμό των παραβιάσεων τα συνολικά αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting δεν είναι ικανοποιητικά.

#### *Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

|                |              |                |                |               |                |
|----------------|--------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| GARCH          | GARCH        | GARCH          | EGARCH         | EGARCH        | APARCH         |
| EGARCH         | APARCH       | GJR            | APARCH         | GJR           | GJR            |
| $S = 5.638576$ | $S = 5.9721$ | $S = 4.338702$ | $S = -1.76476$ | $S = -3.8388$ | $S = -4.78554$ |
| $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$  | $ S  > 1.96$   |

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας εκτός των μοντέλων EGARCH και APARCH που είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Ως καλύτερα επιλέγουμε τα μοντέλα EGARCH, APARCH που έχουν το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε σχέση με τα μοντέλα GARCH και GJR.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |              |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH        | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR          | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 0.945975$                           | $S = 1.127209$ | $S = 1.176$  | $S = 0.094599$ | $S = 0.158385$ | $S = 0.163147$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$ | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |               |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH         | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR           | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 0.600239$                           | $S = 0.824778$ | $S = -28.678$ | $S = 0.648121$ | $S = -28.4891$ | $S = -28.8328$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$  | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Δεν απορρίπτω σε καμία περίπτωση την μηδενική υπόθεση δηλαδή και τα τέσσερα μοντέλα στατιστικά είναι ισοδύναμα ως προς τη πρόβλεψη του VaR.

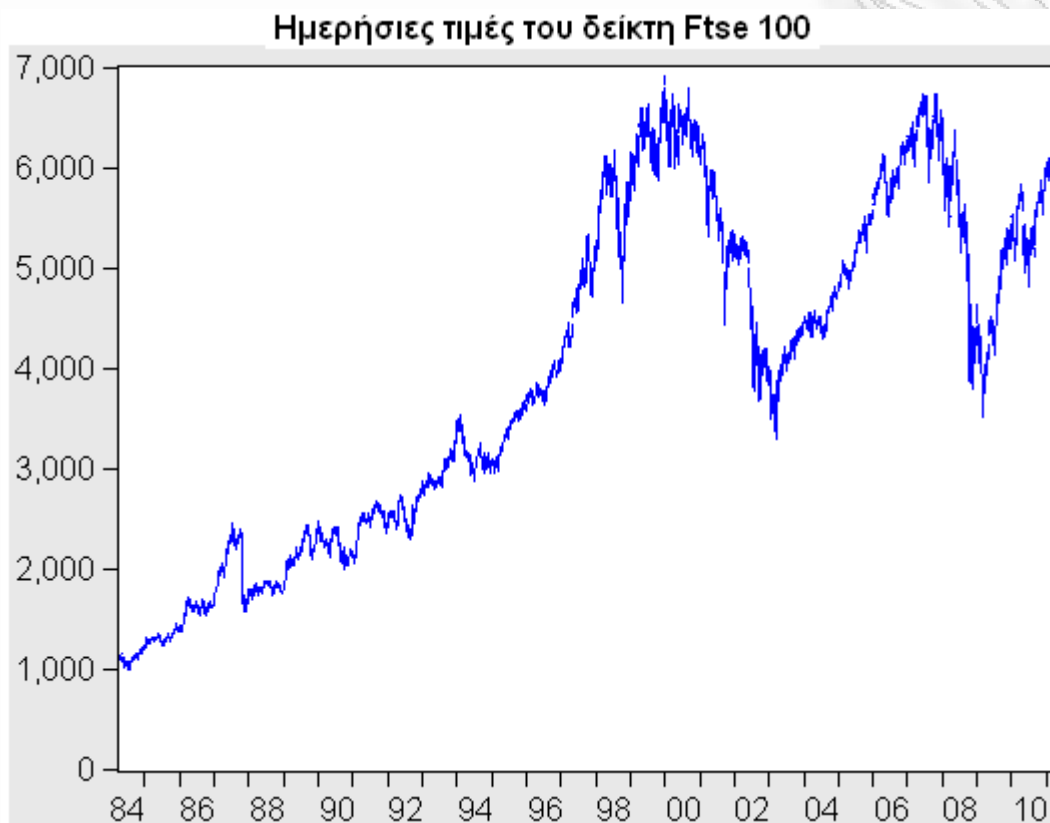
(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

Για τα μοντέλα GARCH, EGARCH και APARCH δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ώστε στατιστικά να είναι ισοδύναμα. Αντίθετα από τις συγκρίσεις τους με το μοντέλο GJR η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και καταλληλότερα είναι τα μοντέλα GARCH, EGARCH, APARCH αφού η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης απώλειας  $L$  είναι μικρότερη από αυτή του μοντέλου GJR.

#### **4.2.3 Ftse 100**

Ο χρηματιστηριακός δείκτης ftse 100 (Financial Times Stock Exchange) συγκροτείται από τις 100 αγγλικές εταιρείες με τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση που είναι εισηγμένες στο χρηματιστήριο του Λονδίνου και αντιπροσωπεύει το 81% της κεφαλαιαγοράς. Ανήκει από κοινού στη Financial Times και το χρηματιστήριο του Λονδίνου κάνοντας την πρώτη του εμφάνιση το 1984. Αν και υπάρχει ένα γκρουπ από ftse δείκτες, ο ftse 100 είναι αυτός που χρησιμοποιείται ευρέως και συχνά αναφέρεται ως μέτρο της ευημερίας των επιχειρήσεων.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από 2/4/1984 ως 22/3/2011.

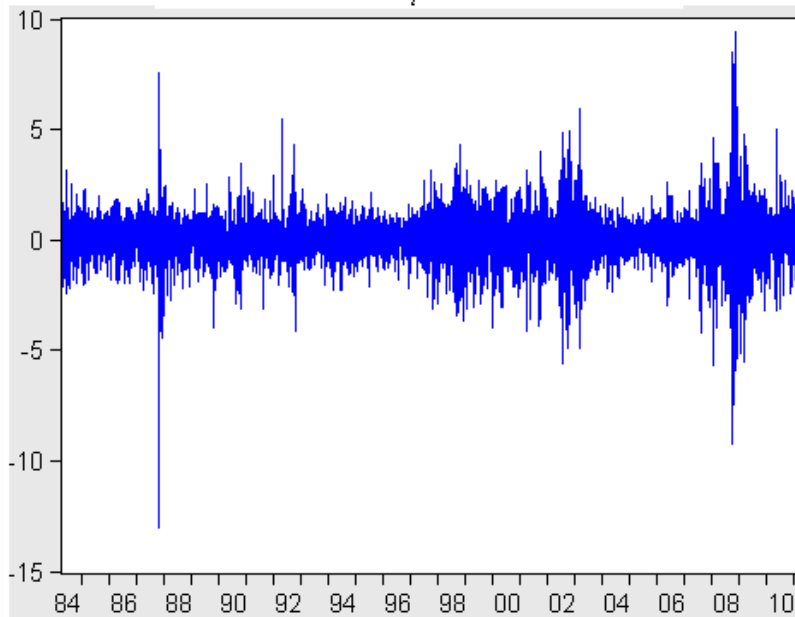


Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιαίων

λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{Ftse100(t)}{Ftse100(t-1)}\right) \cdot 100$ .

### Ημερήσιες ποσοστιαίες λογαριθμικές αποδόσεις

$r_t$



### Περιγραφικά στατιστικά

|           | RT        |
|-----------|-----------|
| Mean      | 0.024204  |
| Median    | 0.056943  |
| Maximum   | 9.384244  |
| Minimum   | -13.02860 |
| Std. Dev. | 1.122597  |
| Skewness  | -0.384167 |
| Kurtosis  | 11.77456  |

Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με 0.024204 (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία -0.384167 (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή, 11.77456, γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση από το μέσο στο τέλος του 1987 και στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στο κραχ και την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση αντίστοιχα.

### Backtesting VaR

Ελέγχουμε την επάρκεια των μοντέλων που εφαρμόσαμε ως προς την πρόβλεψη του VaR μέσω των τριών ελέγχων  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$ ,  $LR_{cc}$  που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3.

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.014642 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 0.000204 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.146950 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.201619 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              |
| $LR_{cc} = 0.017750 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{cc} = 0.000447 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |



| EGARCH                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                             | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                            |
| Τιμές p-value<br>$LR_{uc} = 0.005156 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{ind} = 0.937106 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{cc} = 0.019938 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . | Τιμές p-value<br>$LR_{uc} = 0.000103 < 0.1$ Απορρίπτω τη $H_0$ .<br>$LR_{ind} = 0.191233 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{cc} = 0.000227 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . |

| APARCH                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                             | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                             |
| Τιμές p-value<br>$LR_{uc} = 0.023703 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{ind} = 0.577975 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{cc} = 0.066345 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . | Τιμές p-value<br>$LR_{uc} = 0.000204 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{ind} = 0.201619 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br>$LR_{cc} = 0.000447 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . |

| GJR                                                                                |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.085556 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 0.000103 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.765992 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.191233 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              |
| $LR_{cc} = 0.218206 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                               | $LR_{cc} = 0.000227 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

Παρατηρούμε ότι από τα τέσσερα μοντέλα μόνο το μοντέλο GJR για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$  είναι επαρκές για την πρόβλεψη του VaR. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αν και υπάρχουν μοντέλα που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία των παραβιάσεων τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting δεν είναι ικανοποιητικά.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

|                |               |               |                |                |             |
|----------------|---------------|---------------|----------------|----------------|-------------|
| GARCH          | GARCH         | GARCH         | EGARCH         | EGARCH         | APARCH      |
| EGARCH         | APARCH        | GJR           | APARCH         | GJR            | GJR         |
| $S = 7.129608$ | $S = 7.15602$ | $S = 5.06665$ | $S = -1.37391$ | $S = -4.62331$ | $S = -5.28$ |

|              |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  < 1.96$ | $ S  > 1.96$ | $ S  > 1.96$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας εκτός από τα μοντέλα EGARCH, APARCH που είναι ισοδύναμα αφού από τη σύγκριση τους δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Ως καλύτερα επιλέγουμε τα μοντέλα EGARCH, APARCH που είναι το μοντέλα με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα κάτι που φαίνεται από τις συγκρίσεις τους με τα μοντέλα GARCH και GJR.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |               |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH         | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR           | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 0.693248$                           | $S = 1.976981$ | $S = 2.53804$ | $S = 1.720752$ | $S = 0.845072$ | $S = -0.09197$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$  | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 2.173995$                           | $S = 2.708478$ | $S = -28.4694$ | $S = 0.486462$ | $S = -28.5621$ | $S = -28.7455$ |
| $ S  > 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Για τα μοντέλα GARCH, APARCH και GARCH, GJR δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση γιατί η τιμή του  $|S|$  είναι οριακά μεγαλύτερη από τη κρίσιμη τιμή, έτσι και τα τέσσερα μοντέλα στατιστικά είναι ισοδύναμα.

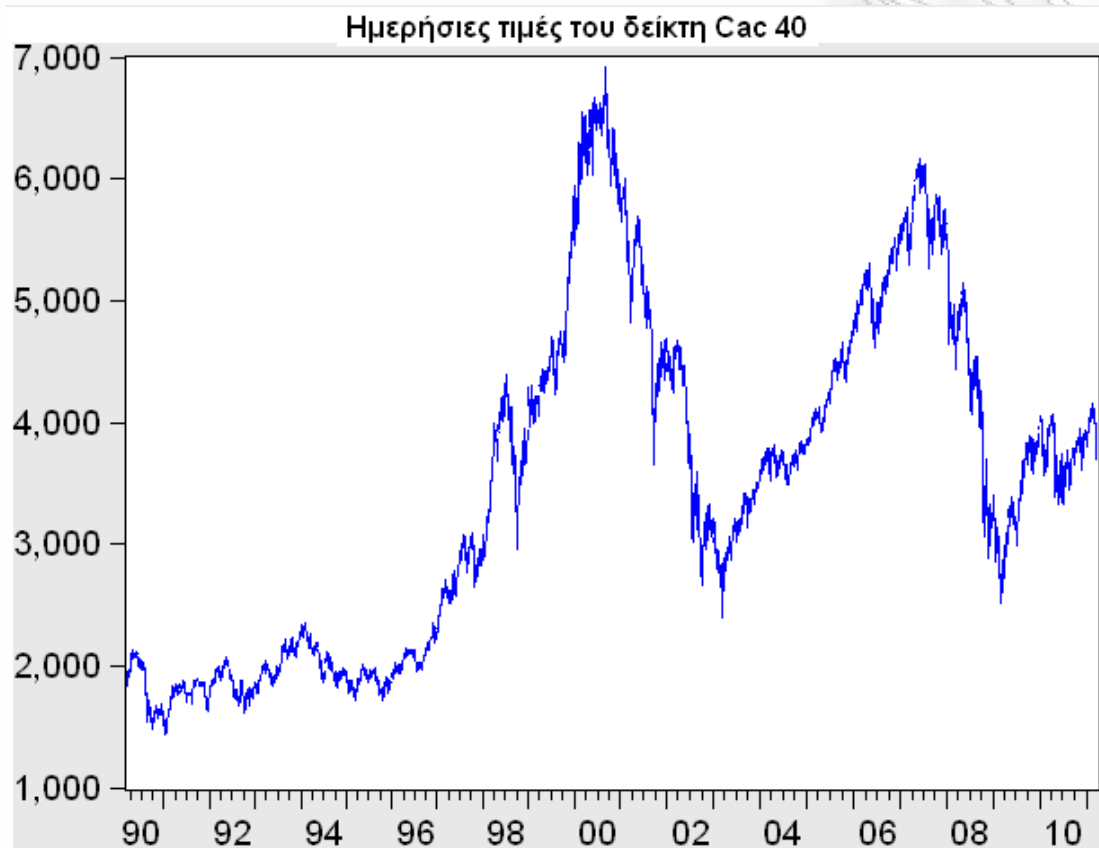
(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

Το μοντέλα EGARCH, APARCH είναι στατιστικά ισοδύναμα και διαφέρουν από τα μοντέλα GARCH, GJR που και αυτά με τη σειρά τους διαφέρουν μεταξύ τους. Ως καταλληλότερα επιλέγουμε τα μοντέλα EGARCH, APARCH αφού διαφέρουν στατιστικά από όλα και η συνάρτηση απώλειας τους  $L$  έχει την μικρότερη μέση τιμή.

#### **4.2.4 Cac 40**

Ο χρηματιστηριακός δείκτης Cac 40 (Cotation Assistee en Continu/Continuous Assisted Quotation) συγκροτείται από τις 40 σημαντικότερες εταιρείες μεταξύ των 100 με τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση που εμπορεύονται στο χρηματιστήριο Euronext Paris και αποτελεί σημείο αναφοράς για την εικόνα της Γαλλικής αγοράς. Παρόλο που συγκροτείται από εταιρείες που εδρεύουν στη Γαλλία πάνω από το 45% των μετοχών τους ανήκουν σε ξένους επενδυτές εξαιτίας της πολυεθνικής δραστηριοποίησής τους.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από 01/03/1990 ως 22/3/2011.

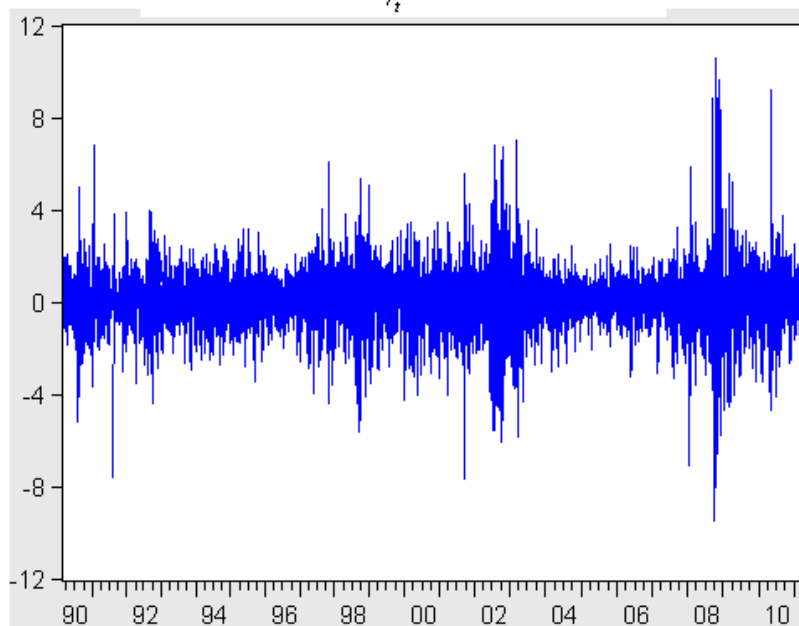


Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιαίων

λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{Cac40(t)}{Cac40(t-1)}\right) \cdot 100$ .

### Ημερήσιες ποσοστιαίες λογαριθμικές αποδόσεις

$r_t$



### Περιγραφικά στατιστικά

|           | RT        |
|-----------|-----------|
| Mean      | 0.014157  |
| Median    | 0.032538  |
| Maximum   | 10.59459  |
| Minimum   | -9.471537 |
| Std. Dev. | 1.416141  |
| Skewness  | -0.010902 |
| Kurtosis  | 7.790704  |

Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με 0.014157 (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία -0.010902 (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή, 7.790704, γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στην παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση.

### Backtesting VaR

Ελέγχουμε την επάρκεια των μοντέλων που εφαρμόσαμε ως προς την πρόβλεψη του VaR μέσω των τριών ελέγχων  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$ ,  $LR_{cc}$  που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3.

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.032029 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 0.039943 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.602571 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.067402 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                  |
| $LR_{cc} = 0.087681 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{cc} = 0.022760 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

| EGARCH                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                  | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.103105 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.143240 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.090734 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.325954 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.274893 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.340093 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| APARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.154978 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.388189 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.250679 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.229058 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.303280 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.285587 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |



| GJR                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                                          | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                                          |
| Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.103105 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.338366 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.167507 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ . | Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.229058 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.436833 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.358566 > 0.1$ Δεν απορρίπτω<br>την $H_0$ . |

Παρατηρούμε ότι από τα τέσσερα μοντέλα μόνο το μοντέλο GARCH δεν είναι επαρκές για την πρόβλεψη του VaR για οποιαδήποτε πιθανότητα της ουράς  $p$ . Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting είναι ικανοποιητικά.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

| GARCH          | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| EGARCH         | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 7.935199$ | $S = 6.851067$ | $S = 4.405605$ | $S = -5.06232$ | $S = -5.87648$ | $S = -5.72743$ |
| $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας αφού απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση παντού. Ως καλύτερο μοντέλο επιλέγουμε το EGARCH αφού διαφέρει στατιστικά από όλα τα υπόλοιπα και στη μεταξύ τους σύγκριση έχει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα κάτι που εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τις πραγματικές τιμές  $S$  του στατιστικού DM.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |                |               |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH        | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH        | GJR            | GJR            |
| $S = 1.671091$                           | $S = 2.109579$ | $S = 2.355606$ | $S = 0.27548$ | $S = 0.406812$ | $S = 0.429532$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$  | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 1.933826$                           | $S = 1.834455$ | $S = -27.7787$ | $S = -0.97565$ | $S = -28.2367$ | $S = -28.6392$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Από τη σύγκριση των GARCH, EGARCH απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αφού η τιμή του  $|S|$  είναι μικρότερη του 1.96 αλλά πολύ κοντά σε αυτό. Έτσι το μοντέλο GARCH στατιστικά διαφέρει από τα ισοδύναμα μοντέλα

EGARCH, APARCH, GJR που είναι και καταλληλότερα αφού η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης απώλειας  $L$  είναι μικρότερη από αυτή του μοντέλου GARCH.

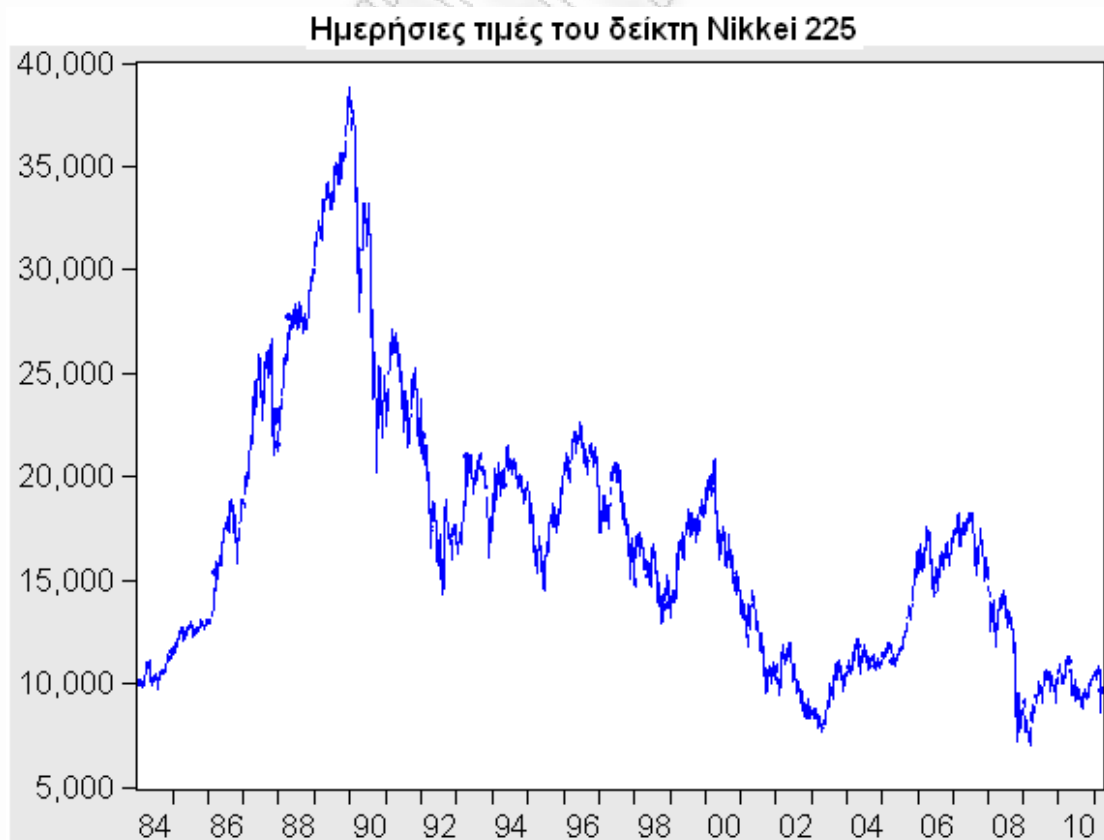
(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

Το μοντέλο GJR στατιστικά διαφέρει από τα ισοδύναμα μοντέλα GARCH, EGARCH, APARCH που είναι και καταλληλότερα αφού η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης απώλειας  $L$  είναι μικρότερη από αυτή του μοντέλου GJR.

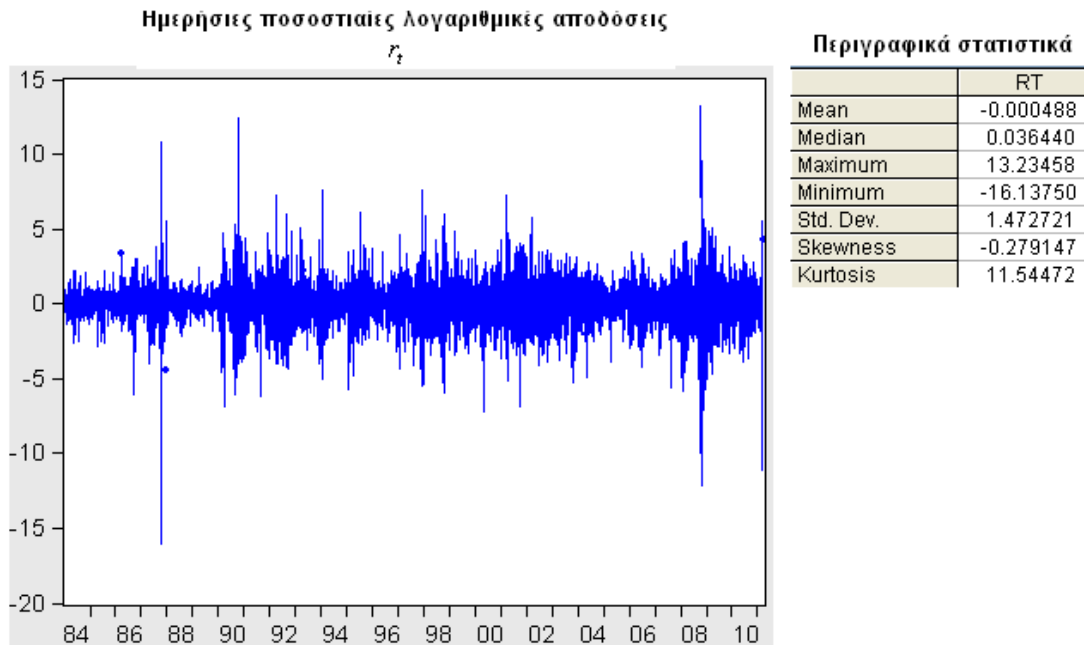
#### 4.2.5 Nikkei 225

Ο χρηματιστηριακός δείκτης Nikkei 225 είναι ο πιο γνωστός ιαπωνικός δείκτης και αποτελεί σημείο αναφοράς για την πορεία του χρηματιστηρίου του Τοκίου.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από 04/01/1984 ως 22/3/2011.



Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιαίων λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{Nikkei225(t)}{Nikkei225(t-1)}\right) \cdot 100$ .



Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με  $-0.000488$  (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία  $-0.279147$  (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή,  $11.54472$ , γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση στο τέλος του 1987 και στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στο κραχ και την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση αντίστοιχα.

### Backtesting VaR

Ελέγχουμε την επάρκεια των μοντέλων που εφαρμόσαμε ως προς την πρόβλεψη του VaR μέσω των τριών ελέγχων  $LR_{uc}$ ,  $LR_{ind}$ ,  $LR_{cc}$  που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3.

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.016353 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{uc} = 0.020682 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.876428 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.546058 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              |
| $LR_{cc} = 0.055337 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   | $LR_{cc} = 0.057332 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

| EGARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                              |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.115746 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.586472 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.250342 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.002375 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.679544 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.009073 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| APARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                              |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.115746 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.586472 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.250342 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.007369 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.611907 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.024256 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| GJR                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                             | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                         |
| Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.064184 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.500402 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.143711 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ . | Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.007369 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.611907 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.024256 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . |

Παρατηρούμε ότι για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$  μόνο το μοντέλο GARCH δεν είναι επαρκές για την πρόβλεψη του VaR. Στη περίπτωση που  $p = 1\%$  αν και υπάρχουν μοντέλα που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία των παραβιάσεων τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting δεν είναι ικανοποιητικά.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

| GARCH          | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| EGARCH         | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 4.221014$ | $S = 5.272936$ | $S = 4.716809$ | $S = 3.928183$ | $S = 0.465876$ | $S = -1.64759$ |
| $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

Από τη σύγκριση των APARCH, GJR απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αφού η τιμή του  $|S|$  είναι μικρότερη από το 1.96 αλλά πολύ κοντά σε αυτό. Έτσι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας εκτός από τα μοντέλα EGARCH, GJR που είναι ισοδύναμα. Ως καλύτερο μοντέλο επιλέγουμε το APARCH αφού διαφέρει από τα άλλα και είναι το μοντέλο με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 1.207926$                           | $S = 1.882949$ | $S = 2.331064$ | $S = 1.122435$ | $S = 0.960113$ | $S = 0.654472$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 1.265524$                           | $S = 1.017088$ | $S = -33.1599$ | $S = -0.94039$ | $S = -34.5277$ | $S = -35.1944$ |
| $ S  < 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Από τη σύγκριση των GARCH, GJR δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αφού η τιμή του  $|S|$  είναι μεγαλύτερη από το 1.96 αλλά πολύ κοντά σε αυτό. Έτσι όλα τα μοντέλα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.



(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

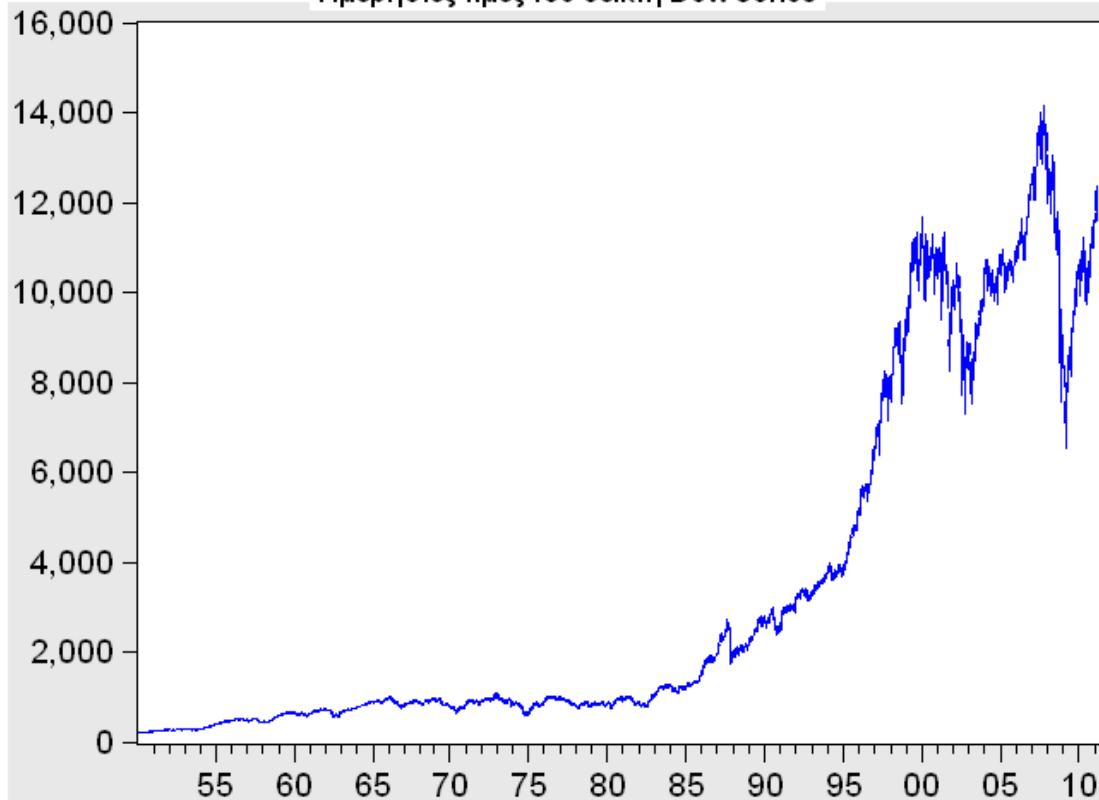
Τα μοντέλα GARCH, EGARCH, APARCH στατιστικά δε διαφέρουν ενώ από τις συγκρίσεις τους με το μοντέλο GJR απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Καταλληλότερα είναι τα τρία ισοδύναμα μοντέλα αφού η μέση τιμή της συνάρτησης απώλειας  $L$  είναι μικρότερη από αυτή του μοντέλου GJR.

#### **4.2.6 Dow Jones**

Ο Dow (Dow Jones Industrial Average) δημιουργήθηκε από τον συντάκτη της έγκυρης Wall Street Journal και συνιδρυτή της Dow Jones & Company, Charles Dow και πήρε το όνομά του από τον ιδρυτή του και τον συνεργάτη του στατιστικολόγο Edward Jones. Είναι ο δημοφιλέστερος δείκτης στον κόσμο και μετράει την συνολική δραστηριότητα τιμών των 30 μεγαλύτερων εταιριών των ΗΠΑ. Κάθε μια από αυτές τις εταιρίες αντιπροσωπεύει κάποιο μεγάλο βιομηχανικό τομέα, έτσι ώστε ο δείκτης απεικονίζει μια ισορροπημένη εικόνα της αγοράς. Ο Dow είναι ο πιο δημοφιλής δείκτης από όλους τους δείκτες που υπάρχουν, όχι μόνο γιατί ιστορικά είναι από τους παλαιότερους αλλά για την απλότητα του και το ότι αντιπροσωπεύει τις καλύτερες εταιρίες των ΗΠΑ.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε την πορεία των ημερήσιων τιμών του δείκτη από 03/01/1950 ως 22/3/2011.

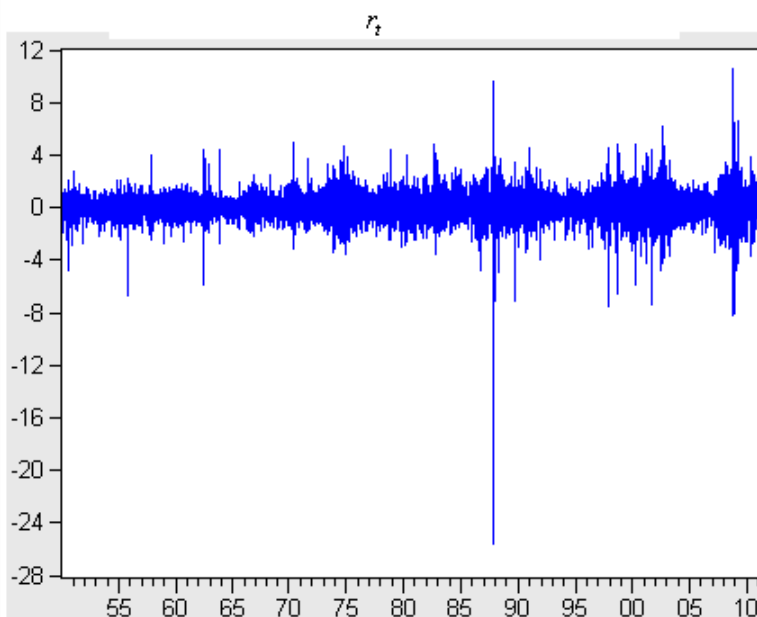
Ημερήσιες τιμές του δείκτη Dow Jones



Από τις ημερήσιες τιμές κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά  $r_t$  των ποσοστιαίων

λογαριθμικών αποδόσεων, δηλαδή  $r_t = \log\left(\frac{Dow(t)}{Dow(t-1)}\right) \cdot 100$ .

Ημερήσιες ποσοστιαίες λογαριθμικές αποδόσεις



Περιγραφικά στατιστικά

|           | RT        |
|-----------|-----------|
| Mean      | 0.026628  |
| Median    | 0.043072  |
| Maximum   | 10.50835  |
| Minimum   | -25.63151 |
| Std. Dev. | 0.966907  |
| Skewness  | -1.292732 |
| Kurtosis  | 42.88240  |

Από το διάγραμμα και τα περιγραφικά στατιστικά παρατηρούμε τα εξής για τη χρονοσειρά των αποδόσεων  $r_t$ : (α) Ο μέσος των αποδόσεων είναι κοντά στο μηδέν ίσος με 0.026628 (β) Είναι στάσιμη γύρω από το μέσο (γ) Εμφανίζει μικρή αρνητική ασυμμετρία -1.292732 (δ) Η τιμή της υπερβάλλουσας κύρτωσης είναι υψηλή, 42.88240, γεγονός που δηλώνει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά (λεπτόκυρτη) (ε) Έχουμε σημαντική απόκλιση στο τέλος του 1987 και στις αρχές του 2009 κάτι που οφείλεται στο κραχ και την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση αντίστοιχα.

### Backtesting VaR

| GARCH                                                                              |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10% |
| Τιμές p-value                                                                      | Τιμές p-value                                                                      |
| $LR_{uc} = 0.538879 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                               | $LR_{uc} = 4.12E-06 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |
| $LR_{ind} = 0.685032 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                              | $LR_{ind} = 0.077404 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                  |
| $LR_{cc} = 0.762564 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .                               | $LR_{cc} = 5.21E-06 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .                                   |

| EGARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                          |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.623478 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.464653 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.678524 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 1.89E-08 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.052105 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 2.08E-08 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| APARCH                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 5\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                                      | <p>Πιθανότητα για την ουρά <math>p = 1\%</math></p> <p>και επίπεδο σημαντικότητας</p> <p>του ελέγχου 10%</p>                                                                                                                                                          |
| <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 0.955218 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.503009 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 0.797824 &gt; 0.1</math> Δεν απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> | <p>Τιμές p-value</p> <p><math>LR_{uc} = 3.43E-05 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{ind} = 0.091471 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> <p><math>LR_{cc} = 4.51E-05 &lt; 0.1</math> Απορρίπτω την <math>H_0</math>.</p> |

| GJR                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                                 | Πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$<br>και επίπεδο σημαντικότητας<br>του ελέγχου 10%                                                                                                         |
| Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.945217 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.466101 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.764936 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ . | Τιμές p-value<br><br>$LR_{uc} = 0.000914 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{ind} = 0.120933 > 0.1$ Δεν απορρίπτω την $H_0$ .<br><br>$LR_{cc} = 0.001231 < 0.1$ Απορρίπτω την $H_0$ . |

Παρατηρούμε ότι και τα τέσσερα μοντέλα για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$  είναι επαρκεί για την πρόβλεψη του VaR ενώ αντίθετα για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$  τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του backtesting δεν είναι ικανοποιητικά για όλα τα μοντέλα.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς τη μεταβλητότητα μέσω του DM τεστ*

Έχοντας υπόψη τη θεωρία της ενότητας 2.5 και επιλέγοντας ως συνάρτηση απώλειας την συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή  $g(\varepsilon_t) = (\ln(r_t^2) - \ln(\sigma_t))^2$ , παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

|                |                |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH          | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH         | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 7.951974$ | $S = 7.682332$ | $S = 5.425808$ | $S = -4.92259$ | $S = -5.89041$ | $S = -6.14307$ |
| $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα διαφέρουν στατιστικά ως προς τις προβλέψεις της μεταβλητότητας αφού απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση παντού. Ως καλύτερο μοντέλο επιλέγουμε το EGARCH που είναι το μοντέλο με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

*Σύγκριση των μοντέλων ως προς το VaR μέσω του DM τεστ*

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 5\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 3.87031$                            | $S = 4.323746$ | $S = 3.181481$ | $S = -0.71875$ | $S = -1.80589$ | $S = -2.77416$ |
| $ S  > 1.96$                             | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

| VaR με πιθανότητα για την ουρά $p = 1\%$ |                |                |                |                |                |
|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| GARCH                                    | GARCH          | GARCH          | EGARCH         | EGARCH         | APARCH         |
| EGARCH                                   | APARCH         | GJR            | APARCH         | GJR            | GJR            |
| $S = 1.969861$                           | $S = 1.583156$ | $S = -51.6152$ | $S = -1.46378$ | $S = -53.7444$ | $S = -54.7821$ |
| $ S  > 1.96$                             | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  < 1.96$   | $ S  > 1.96$   | $ S  > 1.96$   |

Από τη σύγκριση των μοντέλων διαπιστώνουμε τα εξής:

(α) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 5\%$

Το μοντέλο GARCH διαφέρει στατιστικά απ'όλα τα μοντέλα ενώ τα μοντέλα EGARCH, APARCH είναι ισοδύναμα. Από τη σύγκριση των EGARCH, GJR απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση γιατί η τιμή του  $|S|$  είναι οριακά μικρότερη από το 1.96 και το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και από τη σύγκριση των APARCH, GJR. Καταλληλότερα είναι τα μοντέλα EGARCH, APARCH

αφού διαφέρουν στατιστικά από όλα και η συνάρτηση απώλειας τους  $L$  έχει την μικρότερη μέση τιμή.

(β) Για πιθανότητα της ουράς  $p = 1\%$

Για τα μοντέλα GARCH, EGARCH δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση γιατί η τιμή του  $|S|$  είναι οριακά μεγαλύτερη από τη κρίσιμη τιμή, έτσι τα μοντέλα GARCH, EGARCH, APARCH στατιστικά είναι ισοδύναμα. Αντίθετα τα τρία αυτά μοντέλα διαφέρουν στατιστικά από το GJR και είναι καταλληλότερα αφού η συνάρτηση απώλειας τους  $L$  έχει την μικρότερη μέση τιμή.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση μας για τους έξι χρηματιστηριακούς δείκτες παρουσιάζουμε ένα συγκενρωτικό πίνακα με όλα τα αποτελέσματα για διευκόλυνση μας ώστε να έχουμε μια καλύτερη γενική εικόνα όσων εξάγουμε.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

|                          | ΕΛΕΧΓΟΣ                                    | S&P<br>500              | Dax                          | Ftse<br>100                  | Cac 40                    | Nikkei<br>225                | Dow Jones                 |
|--------------------------|--------------------------------------------|-------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|---------------------------|
| ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΕΡΟ<br>ΜΟΝΤΕΛΟ | DIEBOLD&MARIANO<br>ΓΙΑ ΤΗ<br>ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ | EGARCH                  | EGARCH<br>APARCH             | EGARCH<br>APARCH             | EGARCH                    | APARCH                       | EGARCH                    |
|                          | VaR BACKTESTING<br>$p = 5\%$               | GARCH                   | GARCH<br>APARCH              | GJR                          | EGARCH<br>APARCH<br>GJR   | EGARCH<br>APARCH<br>GJR      | ΟΛΑ                       |
|                          | VaR BACKTESTING<br>$p = 1\%$               | .                       | .                            | .                            | EGARCH<br>PARCH<br>GJR    | .                            | .                         |
|                          | DIEBOLD&MARIANO<br>ΓΙΑ ΤΟ VaR<br>$p = 5\%$ | EGARCH<br>APARCH<br>GJR | ΟΛΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ<br>ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ | ΟΛΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ<br>ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ | EGARCH<br>APARCH<br>GJR   | ΟΛΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ<br>ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ | EGARCH<br>APARCH          |
|                          | DIEBOLD&MARIANO<br>ΓΙΑ ΤΟ VaR<br>$p = 1\%$ | APARCH                  | GARCH<br>EGARCH<br>APARCH    | EGARCH<br>APARCH             | GARCH<br>EGARCH<br>APARCH | GARCH<br>EGARCH<br>APARCH    | GARCH<br>EGARCH<br>APARCH |



## **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στόχοι της παρούσας εργασίας ήταν η αξιολόγηση και η σύγκριση των διαφόρων μοντέλων μεταβλητότητας καθώς και η ανάδειξη του ρόλου τους στη διαχείριση κινδύνου μετοχικών κεφαλαίων.

Για την υλοποίηση του πρώτου στόχου, αφού αρχικά παρουσιάσαμε τέσσερα από τα κυριότερα μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (GARCH, EGARCH, APARCH, GJR) , αναδείξαμε τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά την αξιολόγηση των προβλέψεων τους. Συγκεκριμένα είδαμε πως κατά την προσέγγιση του  $\ln(\sigma_t)$  από το  $\ln(r_t^2)$  αυξάνεται η τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, ώστε να οδηγούμαστε σε παραπλανητικά συμπεράσματα και να ασκείται έντονη κριτική για την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων.

Για τη σύγκριση των μοντέλων και επιλογή του καταλληλότερου παρουσιάσαμε τον έλεγχο Diebold και Mariano. Ο έλεγχος αυτός έχοντας ως μηδενική υπόθεση την ισοδυναμία των δύο υπό σύγκριση μοντέλων έχει δύο συνέπειες. Πρώτον αποφασίζουμε ποια μοντέλα είναι στατιστικά ισοδύναμα μεταξύ τους και εν συνεχεία επιλέγουμε ως καταλληλότερο το μοντέλο ή τα ισοδύναμα μοντέλα με τη μικρότερη μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης απώλειας σε σχέση με αυτή των μοντέλων που στατιστικά διαφέρουν. Στην περίπτωση των VaR μοντέλων εκτός από την ταξινόμηση μέσω του ελέγχου DM, ταξινομήσαμε τα μοντέλα ελέγχοντας την επάρκεια τους στην εκτίμηση του VaR μέσω του Backtesting. Έτσι για κάθε δείκτη καταλήγουμε σε τρία μοντέλα:

- Το καταλληλότερο για τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας μέσω του ελέγχου DM

- Το καταλληλότερο για τη μοντελοποίηση του VaR μέσω του ελέγχου DM
- Τα επαρκή για την εκτίμηση του VaR μέσω του Backtesting

Από την ανάλυσή μας οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα αυτά δεν είναι απαραίτητως τα ίδια, κάτι που εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς παρατηρώντας το συγκεντρωτικό πίνακα αποτελεσμάτων. Επομένως τα αποτελέσματα του ελέγχου DM για τη μεταβλητότητα, του ελέγχου DM για το VaR και του Backtesting για το VaR είναι εντελώς ανεξάρτητα και δεν είναι σίγουρο ότι συμφωνούν.

Τέλος για τη συμβολή των μοντέλων μεταβλητότητας στη διαχείριση κινδύνου μετοχικών κεφαλαίων είδαμε πως μέσω των μοντέλων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας μπορούμε να εκτιμήσουμε το VaR, παράγοντας που αποτελεί μέτρο πρότυπο για τον κίνδυνο αγοράς ιδιαίτερα στις μέρες κρίσης που διανύουμε.

## **Βιβλιογραφία**

[1]Bera, A.K. and Higgins, M.L. (1995) *On ARCH models: properties, estimating and testing*, in L. Exley, D. A. R. George, C. J. Roberts and S. Sawyer (eds), *Surveys in Econometrics*, Basil Blackwell: Oxford, reprinted from *Journal of Economic Surveys*.

[2]Bollerslev, T., Engle, R. F. & Nelson, D. (1994), *ARCH models*, in R. F. Engle & D. L. McFadden, eds, 'Handbook of Econometrics', Vol. IV, Elsevier Science B.V., pp. 2961–3038.

[3]Bollerslev, T., Engle, R. and Nelson, D. (1994) *ARCH models*, in R. F. Engle and D. MacFadden (eds), *Handbook of Econometrics*, vol. IV, North-Holland, Amsterdam.

[4]Bollerslev, T. (1986) *Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

[5]Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.

[6]Campbell, J.Y. and Kyle, A.S. (1993) *Smart money, noise trading and stock price behaviour*, *Review of Economic Studies*, **60**, 1–34

[7]Diebold, F. and Lopez, J.A. (1995) *Modelling volatility dynamics*, in K. Hoover (ed.), *Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects*, 427–466.

[8]Diebold, F. X. & Lopez, J. A. (1996), *Forecast evaluation and combination*, in G. S. Maddala & C. R. Rao, eds, 'Handbook of Statistics', Vol. 14: *Statistical Methods in Finance*, North-Holland, Amsterdam, pp. 241–268.

[9]Ding, Z., R. F. Engle, and C.W. J. Granger (1993): "A LongMemory Property of StockMarket Returns and a NewModel," *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.

[10]Duffie, D. and Pan, J. (1997). *An overview of value at risk*. *Journal of Derivatives* **Spring**: 7–48.

[11]Engle, R.F. (1982) *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of theVariance of UK inflation*, *Econometrica*, **50**, 987–1008.

[12]Engle, R.F. and Ng, V.K. (1993) *Measuring and testing the impact of news on volatility*, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1801.

[13]Figlewski, S. (1994) *Forecasting volatility using historical data*, New York University, Stern School of Business, discussion paper.

[14]Gallant, A.R., Rossi, P.E. and Tauchen, G. (1992) *Stock prices and volume*, *Review of Financial Studies*, **5**, 199–242.

[15]Gallant, A.R., Rossi, P.E. and Tauchen, G. (1993) *Nonlinear dynamic structures*, *Econometrica*, **61**, 871–907.

[16]Glosten, L., R. Jagannathan, and D. Runkle (1993): "On the Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks," *Journal of Finance*, 48, 1779–1801.

[17]Harvey, D., Leybourne, S., Newbold, P. (1997). *Testing the equality of prediction mean squared errors*. *Int. J. Forecasting* 13:281–291.

[18]Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd ed. McGraw-Hill, Chicago.

[19]Lee, K.Y. (1991) *Are the GARCH models best in out-of-sample performance?*, *Economics Letters*, **37**, 305–308.

[20]Lopez, J. A. (2001), 'Evaluation of predictive accuracy of volatility models', *Journal of Forecasting* **20**(1), 87–109.

[21]Nelson, D.B. (1991) *Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach*, *Econometrica*, **59**, 347–370.

[22]Peter F. Cristoffersen. *Academic Press, Elements of Financial Risk Management*. [2003. ISBN0121742326].

[23] Ruey S. Tsay 2010. *Analysis of Financial Time Series (Third edition)*.

[24] Theil, H., 1958, *Economic Forecasts and Policy*, North-Holland, Amsterdam.

[25]Tse, Y.K. (1991) *Stock returns volatility in the Tokyo Stock Exchange, Japan and the World Economy*, **3**, 285–298.

[26]Xu, X. and Taylor, S.J. (1995) *Conditional volatility and the informational efficiency of the PHLX currency options market*, *Journal of Banking and Finance*, **19**, 803–821.

# РАНЕЕЗНАКО ПЕРПАА