

ΕΝΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΟ ΝΑΥΛΟΔΕΙΚΤΗ ΒΔΙ

Η εργασία υποβάλλεται για τη μερική κάλυψη των απαιτήσεων για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΒΑΣΙΛΑΤΟΣ ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ (ΜΝ/03007)

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΚΙΖΙΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΤΙΛΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2010

Πρόλογος

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών στη Ναυτιλία στο Πανεπιστήμιο Πειραιά. Το καταρχήν κίνητρο για την εργασία αυτή ήταν η επιθυμία του γράφοντα να έρθει σε επαφή με τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και τις δυναμικές εφαρμογές τους στη Ναυτιλία. Η δομή της εργασίας είναι συνοπτικά η εξής:

Το πρώτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις βασικές έννοιες των δυναμικών συστημάτων. Το κεφάλαιο αυτό εκ πρώτης όψεως φαίνεται κάπως γενικό, αλλά είναι απαραίτητο, ειδικά αν δεν υπάρχει προτεραιότητα εξοικείωση με τα (μη γραμμικά) δυναμικά συστήματα. Οι έννοιες που παρατίθενται είναι σαφώς μη-τετριμμένες και κρίνονται αναγκαίες καθώς αποτελούν τα θεμέλια για κάθε προσπάθεια μελέτης ενός (μη γραμμικού) δυναμικού συστήματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι διάφορες μέθοδοι μελέτης και ανάλυσης των χρονοσειρών. Το κεφάλαιο αυτό λειτουργεί συμπληρωματικά με το πρώτο, αλλά ο χαρακτήρας του είναι σαφώς πιο συγκεκριμένος: από το σύνολο των δυναμικών συστημάτων, επικεντρωνόμαστε πλέον αποκλειστικά στις χρονοσειρές. Τα εργαλεία που παρουσιάζονται εδώ θα βρουν την εφαρμογή τους στο τρίτο κεφάλαιο, στη μελέτη του ναυλοδείκτη BDI.

Το τρίτο (και τελευταίο) κεφάλαιο αναφέρεται συγκεκριμένα στη Ναυτιλία. Ξεκινά με μια γενική εισαγωγή, όπου παρουσιάζονται εν τάχει κάποια βασικά χαρακτηριστικά της ναυλαγοράς (που είναι το δυναμικό σύστημα στο οποίο έχουμε στρέψει την προσοχή μας). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του δευτέρου κεφαλαίου, κατασκευάζεται ένα μη γραμμικό μοντέλο βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης του ναυλοδείκτη BDI και παρουσιάζονται τα ανάλογα αποτελέσματα.

Κλείνοντας αυτόν το σύντομο πρόλογο, ας ξεκαθαρίσουμε ότι σκοπός της εργασίας αυτής δεν είναι η πρόβλεψη του ναυλοδείκτη BDI. Ούτως ή άλλως, η βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι εξαιρετικά δύσκολη, η δε μακροπρόθεσμη είναι αδύνατη. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι μια καταρχήν εξοικείωση με τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και μια δειλή προσπάθεια εφαρμογής κάποιων από των μεθόδων τους στη ναυλαγορά. Σε κάθε περίπτωση, πρόκειται για ένα τεράστιο κεφάλαιο που επουδενί δεν εξαντλείται στα πλαίσια μιας διπλωματικής. Η εργασία αυτή απλά προσπαθεί να κάνει κάποια μικρά βήματα προς την κατεύθυνση αυτή...

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο: Περί δυναμικών συστημάτων

1.1.Εισαγωγή στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων.....	6
1.2.Δυναμικά συστήματα : το «ευθύ» και το «αντίστροφο» πρόβλημα	8
1.3.Βασικά στοιχεία κλασικής θεωρίας δυναμικών συστημάτων.....	9
1.3.1.Το πορτραίτο φάσεων του δισδιάστατου ομογενούς γραμμικού συστήματος.....	10
1.3.2.Γενίκευση των αποτελεσμάτων του δισδιάστατου ομογενούς γραμμικού συστήματος...12	
1.3.3.Η συμπεριφορά των συνεχών δυναμικών συστημάτων.....	13
1.3.4.Η εμφάνιση του χάους και οι παράξενοι ελκυστές.....	14
1.3.5.Το παράδειγμα του ελκυστή Lorenz.....	17
1.3.6.Τα διακριτά δυναμικά συστήματα. Το παράδειγμα της λογιστικής απεικόνισης.....	18
1.4. Εκθέτες Lyapunov.....	23
1.5. Η διάσταση του ελκυστή.....	26

Κεφάλαιο 2ο: Περί χρονοσειρών

2.1.Εισαγωγή στις χρονοσειρές.....	30
2.2.Μερικά σημαντικά σημεία για τη μελέτη των χρονοσειρών.....	31
2.3.Το θεώρημα Takens.....	33
2.4.Μέθοδοι και τεχνικές μελέτης και πρόβλεψης χρονοσειρών.....	35
2.4.1.Η ανάλυση Fourier.....	35
2.4.2.Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.....	36
2.4.3.Τα «κλασικά» γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης (AR, MA, ARMA κλπ).....	37
2.4.4.Τα μη γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης.....	38
2.4.4.α. Τα καθολικά μοντέλα.....	39
2.4.4.β. Τα τοπικά μοντέλα.....	40

2.4.4.γ. Τα ημιτοπικά μοντέλα.....	42
2.4.4.δ. Η εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης. Η μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων.....	46
2.4.4.ε. Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov.....	47
Κεφάλαιο 3ο: Η ναυλαγορά. Ένα μη γραμμικό μοντέλο για το δείκτη BDI	
3.1. Εισαγωγή.....	50
3.2. Ναυλαγορά: βασικά στοιχεία και χαρακτηριστικά.....	50
3.3. Η χρονοσειρά – Ο ναυλοδείκτης BDI.....	55
3.4. Το μη γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης του BDI.....	58
3.4.1. Το μοντέλο.....	59
3.4.2. Τα αποτελέσματα.....	63
Παράρτημα παραγράφου 1.3.1. (σχήματα).....	66
Βιβλιογραφία (ελληνική και ξένη).....	69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1.1. Εισαγωγή στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων

Ως δυναμικό σύστημα ορίζεται ένα σύστημα το οποίο εξελίσσεται στον χρόνο.

Ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να είναι διακριτό (*discrete*) ή συνεχές (*continuous*). Στην πρώτη περίπτωση ο χρόνος μεταβάλλεται με διακριτό τρόπο (και το σύστημα μελετάται σε διαδοχικές χρονικές στιγμές), ενώ στη δεύτερη περίπτωση η ροή του χρόνου είναι συνεχής (και το σύστημα μελετάται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή). Τα περισσότερα συστήματα στη φύση είναι συνεχή συστήματα. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι πρέπει να υποτιμήσουμε τη σημασία της μελέτης των διακριτών συστημάτων. Εξάλλου ένα σύστημα που στην πραγματικότητα είναι συνεχές, μπορεί τελικά να μελετηθεί και ως διακριτό (απομονώνοντας το σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές).

Ένα από τα κεντρικά προβλήματα της Επιστήμης είναι η πρόβλεψη (ενός δυναμικού συστήματος): γνωρίζοντας το παρελθόν, πως μπορούμε να προβλέψουμε το μέλλον¹; Με βάση αυτό το ερώτημα, τα δυναμικά συστήματα χωρίζονται εν γένει σε δύο κατηγορίες:

α) ντετερμινιστικά συστήματα: σε αυτήν την περίπτωση το μέλλον καθορίζεται πλήρως από το παρελθόν με βάση συγκεκριμένους μαθηματικούς κανόνες.

β) στοχαστικά συστήματα: σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα εξελίσσεται τυχαία (*evolves randomly*), όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος.

Θεωρώντας ότι το υπό μελέτη σύστημα είναι ντετερμινιστικό, η «κλασική» προσέγγιση του παραπάνω προβλήματος εστιάζει στην κατασκευή ενός αναλυτικού μοντέλου που προκύπτει από τις βασικές αρχές που διέπουν το σύστημα/φαινόμενο (και το οποίο μοντέλο μπορεί για παράδειγμα να είναι ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων) και από την καταγραφή κάποιων αρχικών συνθηκών/δεδομένων. Δυστυχώς, τις περισσότερες φορές μια τέτοια προσέγγιση δεν είναι αποτελεσματική/εφικτή: η πραγματικότητα μας έχει δείξει ότι ακόμα και απλά ντετερμινιστικά συστήματα είναι τελικά μη προβλέψιμα και μη επαναλήψιμα. Ο Jules Henri Poincare² έγραψε χαρακτηριστικά το 1903:

¹ Farmer Doyne J., Sidorowich J.J. (1987), *Predicting Chaotic Time Series*, Physics Review Letters.

² Ο Jules Henri Poincare (1854-1912) θεωρείται ως ο τελευταίος μεγάλος καθολικός Μαθηματικός, αφού το εύρος της επιστημονικής του δραστηριότητας κάλυπτε το σύνολο της τότε μαθηματικής επιστήμης (κάτι που παρεμπιπτόντως σήμερα δεν είναι εφικτό, καθώς η μαθηματική επιστήμη διανύει μια φάση εκρηκτικής διαστολής). Μεταξύ άλλων είχε ασχοληθεί και με τα δυναμικά συστήματα. Στα 1887 ο βασιλιάς Όσκαρ II της Σουηδίας προσέφερε βραβείο 2,500 κορώνων σε όποιον θα κατάφερνε να λύσει το πρόβλημα των n -σωμάτων. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα κλασικό πρόβλημα της Αστρονομίας (για τους Μαθηματικούς είναι ένα κλασικό πρόβλημα Δυναμικού Συστήματος) και αφορά στην βαρυτική αλληλεπίδραση n σωμάτων (για $n=2$ το πρόβλημα έχει λυθεί από τον Νεύτωνα με το Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης και τη χρήση Απειροστικού / Ολοκληρωτικού Λογισμού). Το βραβείο τελικά δόθηκε στα 1889 στον Poincare, όχι γιατί έλυσε το πρόβλημα (το οποίο ακόμη και σήμερα παραμένει άλυτο), αλλά για την προσέγγιση του και τη γενική διερεύνηση του συστήματος των

Εάν γνωρίζαμε ακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σύμπαντος σε μια αρχική στιγμή, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε την κατάσταση αυτού του ίδιου σύμπαντος σε μια διαδοχική στιγμή. Αλλά ακόμη και αν οι φυσικοί νόμοι δεν είχαν πλέον μυστικά για εμάς, θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση μονάχα προσεγγιστικά. Εάν αυτό μας επέτρεπε να προβλέψουμε την διαδοχική κατάσταση με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης, τότε θα ήμασταν πραγματικά ευτυχείς, δεν θα θέλαμε τίποτα άλλο, και θα λέγαμε ότι το φαινόμενο έχει προβλεφθεί και ότι κυβερνάται από νόμους. Αλλά δεν είναι πάντοτε έτσι. Μπορεί να συμβεί μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες να παράγουν μεγάλες διαφορές στο τελικό φαινόμενο. Ένα μικρό λάθος στην προτεραιία (ενν. κατάσταση) θα παράγει ένα τεράστιο λάθος στην μεταγενέστερη (ενν. κατάσταση). Η πρόβλεψη γίνεται αδύνατη και έχουμε το φαινόμενο της «ενδυνάμωσης» (*fortuitous phenomenon*).

Το παραπάνω κείμενο ουσιαστικά φωτογραφίζει τη θεωρία του χάους, που είναι και η «αιχμή του δόρατος» στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Η θεωρία αυτή αποτελεί παρακλάδι του ευρύτερου κλάδου των δυναμικών συστημάτων. Η εξέλιξη της θεωρίας του χάους κατέστη δυνατή κυρίως τα τελευταία χρόνια, καθώς σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την αντίστοιχη εξέλιξη στο χώρο των υπολογιστών. Η θεωρία του χάους επιχειρεί να εξηγήσει τη μη κανονική (τυχαία) συμπεριφορά και τις αντίστοιχες ανωμαλίες που εμφανίζουν δυναμικά συστήματα τα οποία (εκ πρώτης όψευς) είναι μη στοχαστικά. Με άλλα λόγια, σε πολλές περιπτώσεις οι παρατηρήσεις που συλλέγουμε από ντετερμινιστικά συστήματα φαίνονται να είναι στοχαστικές. Η θεωρία του χάους επιχειρεί λοιπόν να εξηγήσει αυτήν την αντίφαση, να αποκαλύψει τη ντετερμινιστική δομή του συστήματος και τελικά να κατασκευάσει αντίστοιχα μοντέλα (βραχείας εν γένει) πρόβλεψης. Κατά μια έννοια δηλαδή, ένα πρόβλημα το οποίο φαινομενικά είναι στοχαστικό ίσως τελικά να έχει μια ντετερμινιστική λύση³.

διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει. Η ειρωνεία είναι ότι η εργασία του Poincare περιείχε ένα σημαντικό λάθος το οποίο ανακαλύφθηκε μετά την απονομή του βραβείου. Η εν λόγω εργασία πάντως (συμπεριλαμβανομένης και της ανακάλυψης του λάθους) θεωρείται ως σταθμός για τη γέννηση της θεωρίας του χάους.

³ Lillekjendlie B., Kugiuntzis D., Christophersens N., *Chaotic Time Series Part II: System Identification and prediction*, Modeling Identification and Control, Volume 15, No4, January 1994.

1.2. Δυναμικά συστήματα : το «ευθύ» και το «αντίστροφο» πρόβλημα

Έστω ένα δυναμικό σύστημα το οποίο είναι ντετερμινιστικό και για το οποίο γνωρίζουμε πλήρως τις εξισώσεις που το περιγράφουν. Το πρόβλημα αυτό αποκαλείται «ευθύ» σε αντιδιαστολή με το «αντίστροφο» πρόβλημα, όπου δεν γνωρίζουμε ποιές είναι οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα και όπου προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τη δομή και την εξέλιξη του συστήματος παρακολουθώντας και καταγράφοντας τη συμπεριφορά του.

Ένα παράδειγμα «ευθέως προβλήματος» είναι το πρόβλημα των n σωμάτων για το οποίο ήδη μιλήσαμε: είναι ένα κλασικό πρόβλημα της Μηχανικής, όπου οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι πλήρως γνωστές, και οι επιστήμονες (από την εποχή του Νεύτωνα μέχρι και σήμερα) προσπαθούν να τις λύσουν.

Ένα παράδειγμα «αντίστροφου» προβλήματος είναι η ναυλαγορά ή αντίστοιχα η χρηματιστηριακή αγορά: υποθέτοντας ότι τα συστήματα αυτά είναι ντετερμινιστικά (κάτι που παρεμπιπτόντως απαιτεί διερεύνηση), οι ακριβείς εξισώσεις που τα διέπουν μας είναι άγνωστες. Οπότε μια προσέγγιση είναι να παρακολουθούμε την πορεία της αγοράς και βάσει της πορείας αυτής να εξάγουμε συμπεράσματα για τη δομή της και για την εξέλιξή της στο μέλλον. Η εν λόγω μεθοδολογία θα μας απασχολήσει στη συνέχεια εκτενώς.

Είναι προφανές ότι το «ευθύ» πρόβλημα είναι εν γένει πιο απλό από το «αντίστροφο» πρόβλημα. Είναι επίσης προφανές ότι η κατανόηση των βασικών αρχών που διέπουν το «ευθύ» πρόβλημα είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση του «αντίστροφου» προβλήματος, καθώς είναι η απαραίτητη θεωρητική βάση πάνω στην οποία στηρίζεται όλο το οικοδόμημα.

Παρακάτω λοιπόν θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά στοιχεία από την κλασική θεωρία των δυναμικών συστημάτων (θεωρώντας ότι οι εξισώσεις που διέπουν το σύστημα είναι γνωστές: «ευθύ πρόβλημα»).

1.3. Βασικά στοιχεία κλασικής θεωρίας δυναμικών συστημάτων

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται καταρχήν από τη διάστασή του, δηλαδή τον αριθμό των μεταβλητών που το περιγράφουν πλήρως. Για παράδειγμα ένα σύστημα διάστασης n περιγράφεται πλήρως από τις μεταβλητές⁴: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ας σημειωθεί εδώ ότι κάθε μια από τις παραπάνω μεταβλητές είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Για λόγους απλότητας ας θεωρήσουμε $n = 2$, και ας αφήσουμε τον χρόνο t να «τρέχει». Τότε η $\mathbf{x}(t)$ ορίζει μια δισδιάστατη καμπύλη, το ίχνος της οποίας ονομάζεται *τροχιά (trajectory)* του συστήματος. Η τροχιά αυτή μπορεί να αποτυπωθεί πάνω στο επίπεδο $Ox\psi$ με ένα γράφημα που ονομάζεται *πορτραίτο φάσεων (phase portrait)*, ενώ το επίπεδο $Ox\psi$ που περιέχει την τροχιά ονομάζεται *χώρος φάσεων* του συστήματος (*phase space*). Όταν λοιπόν μελετάμε ένα δυναμικό σύστημα, καταρχήν σκοπός μας είναι να απεικονίσουμε τις τροχιές / το πορτραίτο φάσεων του εν λόγω συστήματος.

Δυστυχώς στις περισσότερες περιπτώσεις οι τροχιές $\mathbf{x}(t)$ ενός δυναμικού συστήματος δεν είναι εξαρχής γνωστές. Εκείνο που συνήθως έχουμε στα χέρια μας είναι ένα σύνολο n διαφορικών εξισώσεων της μορφής⁵:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

που συνοδεύεται και από κάποια αρχική συνθήκη, δηλαδή από μια συνθήκη που μας περιγράφει την κατάσταση του συστήματος σε μια δεδομένη στιγμή t_0 :

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί συνοπτικά να γραφεί ως εξής (η τελεία συμβολίζει παραγωγή ως προς το χρόνο):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

Άρα λοιπόν στις περισσότερες περιπτώσεις καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο πρέπει να λυθεί. Δυστυχώς η λύση αυτού του συστήματος (και κατά

⁴ Οι έντονοι (bold) χαρακτήρες από εδώ και μπρός θα συμβολίζουν διανυσματικά μεγέθη.

⁵ Οι διαφορικές εξισώσεις όπου η τιμή ενός μεγέθους συνδέεται με το ρυθμό μεταβολής της, είναι ένα από τα καλύτερα «όπλα» που έχουμε στα χέρια μας για να περιγράψουμε πολλά από τα φαινόμενα γύρω μας.

συνέπεια ο υπολογισμός των τροχιών) είναι συνήθως δύσκολη. Οπότε πρέπει να αναζητήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης του προβλήματος. Για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να ορίσουμε δυο καινούργιες έννοιες, τα *αυτόνομα συστήματα* και τα *σημεία ισορροπίας*:

- Αυτόνομο σύστημα ονομάζεται ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

Συγκρίνοντας το σύστημα (1) με το σύστημα (2) βλέπουμε ότι στο αυτόνομο σύστημα ο χρόνος δεν εμφανίζεται ρητώς μέσα στις εξισώσεις. Ας σημειωθεί εδώ ότι υπάρχουν τρόποι για να γραφτεί ένα οποιοδήποτε σύστημα σε αυτόνομη μορφή, χωρίς όμως αυτό να είναι πάντα εφικτό.

- Σημείο ισορροπίας: ένα σημείο x^* ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο του συστήματος (2) όταν ισχύει ότι: $f(x^*) = 0$. Είναι φανερό ότι αν το x^* είναι σημείο ισορροπίας του (2) τότε η σταθερή συνάρτηση $x = x^*$ είναι λύση του προβλήματος: $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x^*$

Αυτό που συνήθως επιδιώκουμε είναι να γράψουμε το σύστημα μας σε αυτόνομη μορφή, να υπολογίσουμε τα σημεία ισορροπίας του, και να εξετάσουμε το πορτραίτο φάσεων στην περιοχή των σημείων αυτών. Στη συνέχεια μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα που πήραμε γύρω από τα σημεία ισορροπίας και να σχηματίσουμε μια αρκετά καλή ιδέα για το πώς είναι ο συνολικός χώρος των φάσεων (δηλαδή να κάνουμε ένα είδος παρεκβολής στηριζόμενοι στα αποτελέσματα που πήραμε για τα σημεία ισορροπίας).

Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την πιο απλή δυνατή περίπτωση, αυτή ενός δισδιάστατου ομογενούς γραμμικού συστήματος. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι πολύ ενδιαφέροντα και όπως θα δούμε μπορούν να γενικευτούν και σε μη γραμμικά συστήματα / συστήματα υψηλότερης διάστασης.

1.3.1. Το πορτραίτο φάσεων του δισδιάστατου ομογενούς γραμμικού συστήματος

Έστω ένα αυτόνομο δισδιάστατο γραμμικό ομογενές σύστημα. Αυτό έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y$$

$$\dot{y} = \gamma x + \delta y$$

Ισοδύναμα το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ή } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \text{ όπου } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε ότι η ορίζουσα $|\mathbf{A}| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, οπότε υπάρχει ένα μόνο σημείο ισορροπίας, το $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) = (0,0)$.

Δεν υπάρχει λόγος να μπούμε σε λεπτομέρειες σχετικά με το πώς λύνεται το εν λόγω σύστημα κλπ. Εκείνο που έχει σημασία είναι ότι το κριτήριο εκείνο που τελικά διαμορφώνει την εικόνα των τροχιών γύρω από το σημείο ισορροπίας, είναι οι *ιδιοτιμές* και τα *ιδιοδιανύσματα* του πίνακα \mathbf{A} των σταθερών συντελεστών⁶. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα συνοπτικό πίνακα που περιέχει όλες τις δυνατές μορφές των τροχιών. Στο παράρτημα υπάρχουν και τα αντίστοιχα σχήματα που οπτικοποιούν τις τροχιές σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1		
Ιδιοτιμές λ_1, λ_2	Κρίσιμο σημείο	Σχήμα
Πραγματικές, ομόσημες, >0	Ασταθής κόμβος	1
Πραγματικές, ομόσημες, <0	Ευσταθής κόμβος	2
Πραγματικές, ετερόσημες	Σαγματικό σημείο	3
Πραγματικές, ίσες, <0	Ευσταθής κόμβος	4
Πραγματικές, ίσες, >0	Ασταθής κόμβος	5
Μιγαδικές $\lambda_{1,2} = \pm bi$	Κέντρο	6
Μιγαδικές $\lambda_{1,2} = a \pm bi, a < 0$	Ευσταθής εστία	7
Μιγαδικές $\lambda_{1,2} = a \pm bi, a > 0$	Ασταθής εστία	8

Αν θέλει κανείς να καταλάβει γιατί προκύπτουν τα παραπάνω αποτελέσματα, αρκεί να λάβει υπόψη του ότι η λύση του συστήματος σε κάθε περίπτωση περιέχει όρους της μορφής $e^{\lambda t}$. Όταν λοιπόν η ιδιοτιμή $\lambda > 0$, τότε οι λύσεις αργά ή γρήγορα τείνουν στο άπειρο (θυμίζουμε ότι $e^t \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow +\infty$). Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που στα σχήματα 1,5,8 οι τροχιές αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας (που κατά συνέπεια χαρακτηρίζεται ασταθές). Αντιθέτως, αν η ιδιοτιμή $\lambda < 0$, τότε οι λύσεις αργά ή γρήγορα τείνουν στο μηδέν (θυμίζουμε ότι $e^{-t} \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$). Αυτός είναι και ο λόγος που στα σχήματα 2,4,7 οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας (που κατά συνέπεια χαρακτηρίζεται ευσταθές).

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη του *σαγματικού σημείου* (*shaddle point*). Για να καταλάβει κανείς την περίπτωση αυτή, αρκεί να φέρει στο μυαλό του τη σέλα (σάγμα) του αλόγου. Η σέλα λοιπόν στη μια της διάσταση (στο μπρος-πίσω) είναι «ευσταθής» (για να

⁶ Θυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές λ και τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{v} ενός πίνακα \mathbf{A} ορίζονται ως οι μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Η εξίσωση αυτή ισοδύναμα γράφεται $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, όπου \mathbf{I} ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας. Οπότε προκειμένου η εξίσωση να έχει μη τετριμμένες λύσεις πρέπει η ορίζουσα $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς λ βρίσκουμε τις ιδιοτιμές.

«βουλιάζει» και να κάθεται σταθερά ο αναβάτης), αλλά στην άλλη της διάσταση (στο δεξιά-αριστερά) είναι «ασταθής». Αυτό ακριβώς συμβαίνει και με τις ιδιοτιμές του συστήματος αφού η μια εξ αυτών είναι αρνητική (και άρα οδηγεί το σύστημα στο σημείο ισορροπίας) ενώ η άλλη εξ αυτών είναι θετική (και οδηγεί το σύστημα μακριά από την ισορροπία). Ας σημειώσουμε εδώ ότι τα σαγματικά σημεία (που είναι ο πιο κοινός τύπος σημείου ισορροπίας σε συστήματα υψηλότερας διάστασης) συνδέονται άμεσα με την παρουσία χαοτικής συμπεριφοράς, αφού ταυτόχρονα «απωθούν» και «έλκουν». Αυτό γεωμετρικά αντιστοιχεί σε παραμόρφωση του χώρου των φάσεων, που με τη σειρά του οδηγεί στο χάος.

1.3.2. Γενίκευση των αποτελεσμάτων του δισδιάστατου ομογενούς γραμμικού συστήματος

Το δισδιάστατο γραμμικό ομογενές σύστημα που εξετάσαμε παραπάνω είναι η πλέον απλοποιημένη μορφή δυναμικού συστήματος. Παρά ταύτα τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε έχουν γενικότερη ισχύ, καθώς ισχύουν ακόμη και σε μη γραμμικά συστήματα.

Έστω λοιπόν ένα σύστημα της μορφής $\dot{x} = f(x)$ όπου η f είναι μια εν γένει μη γραμμική συνάρτηση. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, έστω $\mathbf{0}$ ένα σημείο ισορροπίας τέτοιο ώστε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Τότε αποδεικνύεται ότι στη γειτονιά του σημείου $\mathbf{0}$ η συνάρτηση f μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$f(x) = Ax + g(x), \text{ όπου } A_{n \times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right] \text{ και } \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{g(x)}{\|x\|} = \mathbf{0}$$

Δηλαδή στην πραγματικότητα η συνάρτηση f γράφεται ως άθροισμα ενός γραμμικού όρου Ax (όπου A είναι ο Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων στο σημείο $\mathbf{0}$) και ενός όρου υψηλότερας τάξης $g(x)$ που τείνει γρήγορα στο μηδέν (και τον οποίο, για αυτό το λόγο, συνήθως αγνοούμε). Η παραπάνω γραφή είναι στην ουσία μια γενίκευση του γνωστού θεωρήματος Taylor σε υψηλότερες διαστάσεις⁷.

Όποτε μπορούμε πλέον να γράψουμε το σύστημα μας στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

$$\dot{x} = Ax + g(x), \text{ όπου } A_{n \times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right] \text{ και } \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{g(x)}{\|x\|} = \mathbf{0}$$

Όπως έχουμε ήδη πει, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την εικόνα των τροχιών του παραπάνω συστήματος στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας $\mathbf{0}$. Αποδεικνύεται⁸ ότι μπορούμε να

⁷ Για μια απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί κανείς να ανατρέξει στο: Παντελίδης Γ.Ν. (1994), *Μαθηματική Ανάλυση, Τόμος III*, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα.

⁸ Για λόγους οικονομίας δεν παραθέτουμε την απόδειξη. Όποιος ενδιαφέρεται μπορεί να τη βρει στο: Hurewicz W. (1975), *Lectures on ordinary differential equations*, Cambridge, Massachusetts.

αγνοήσουμε πλήρως τον μη γραμμικό όρο $g(x)$ και έτσι εντελώς ισοδύναμα αρκεί να μελετήσουμε τις τροχιές του γραμμικοποιημένου συστήματος:

$$\dot{x} = Ax, \text{ όπου } A_{n \times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right]$$

Οπότε πλέον ισχύουν τα αποτελέσματα του πίνακα 1 που παρουσιάσαμε παραπάνω και τελικά η εικόνα του πορτραίτου φάσεων θα καθοριστεί πλήρως από τις ιδιοτιμές του ιακωβιανού πίνακα A .

Συνοψίζοντας, ακόμη και στην περίπτωση που μελετάμε ένα μη γραμμικό σύστημα, αρκεί να θεωρήσουμε το αντίστοιχο «γραμμικοποιημένο» σύστημα στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας, και να το μελετήσουμε σύμφωνα με τις μεθόδους που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 1.3.1.

1.3.3. Η συμπεριφορά των συνεχών δυναμικών συστημάτων

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε κάποιες βασικές έννοιες για τα συνεχή δυναμικά συστήματα και παρουσιάσαμε μια (ποιοτική) μέθοδο για τη μελέτη των συστημάτων αυτών. Στην παράγραφο αυτό θα μας απασχολήσει το (επίσης ποιοτικό) ερώτημα: ποιά είναι η συμπεριφορά που μακροπρόθεσμα μπορεί να εμφανίσει ένα συνεχές δυναμικό σύστημα;

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα σχετίζεται άμεσα με τη διάσταση του συστήματος. Έτσι λοιπόν ένα συνεχές δυναμικό σύστημα διάστασης ένα ή δύο έχει μακροπρόθεσμα τις εξής «δυνατότητες»:

- να ξεφύγει στο άπειρο. Η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς δεν μοντελοποιεί αποτελεσματικά τα περισσότερα φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα (τα οποία είναι φραγμένα). Για αυτό το λόγο και δεν θα μας απασχολήσει.
- να παραμείνει φραγμένο και να συγκλίνει προς ένα συγκεκριμένο σταθερό σημείο.
- να παραμείνει φραγμένο και να εμφανίσει περιοδική συμπεριφορά (όπως για παράδειγμα το εκκρεμές του τοίχου, το οποίο ασχέτως από το πώς ξεκίνησε, τελικά καταλήγει να κάνει μια πολύ συγκεκριμένη επαναλαμβανόμενη κίνηση). Σε αυτήν την περίπτωση οι τροχιές του συστήματος τελικά συγκλίνουν σε έναν *οριακό κύκλο*⁹ (*limit cycle*).

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα διάστασης ένα ή δύο *αποκλείεται* να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά: το *θεώρημα της μη τομής*¹⁰ (*no intersection theorem*) εξασφαλίζει ότι οι τροχιές

⁹ Ο όρος αυτός καθιερώθηκε από τον Poincaré, προκειμένου να περιγράψει την εικόνα που τελικά εμφανίζουν οι τροχιές του συστήματος.

¹⁰ Hilborn R.C. (2000), *Chaos and nonlinear dynamics* (2nd edition), Oxford University Press.

του συστήματος δεν αλληλοτέμνονται και κατά συνέπεια (και εφόσον είμαστε σε διάσταση ένα ή το πολύ δύο) αποκλείει την πιθανότητα εμφάνισης του χάους. Με άλλα λόγια μετά τα πρώτα μεταβατικά στάδια οι (φραγμένες) λύσεις του συστήματος είτε θα συγκλίνουν σε ένα σταθερό σημείο, είτε θα ταλαντώνονται περιοδικά. Το αποτέλεσμα αυτό θεωρείται θεμελιώδες για τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και ονομάζεται Θεώρημα *Poincare-Bendixson*¹¹.

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα διάστασης τρία ή και παραπάνω έχει μακροπρόθεσμα τις εξής «δυνατότητες»:

- να ξεφύγει στο άπειρο. Όπως ήδη εξηγήσαμε η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον.
- να παραμείνει φραγμένο και να συγκλίνει προς ένα συγκεκριμένο σταθερό σημείο.
- να παραμείνει φραγμένο και να εμφανίσει περιοδική συμπεριφορά, οπότε οι τροχιές συγκλίνουν σε έναν οριακό κύκλο (όπως ήδη είδαμε και παραπάνω).
- να παραμείνει φραγμένο και οι τροχιές του να συγκλίνουν σε έναν *τόρο*¹². Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τόρου είναι η επιφάνεια μιας σαμπρέλας ή η επιφάνεια ενός λουκουμά ντόνατ. Συνήθως ο τόρος είναι το αποτέλεσμα μιας πολύ-περιοδικής κίνησης που περιέχει δυο ή περισσότερες μη-σύμμετρες¹³ συχνότητες. Η διάκριση ανάμεσα στον οριακό κύκλο και στον τόρο είναι πολλές φορές αρκετά ασαφής, καθώς ένας οριακός κύκλος με πολύ μεγάλη περίοδο προσεγγίζει σε έναν τόρο. Για λόγους οικονομίας περαιτέρω εμβάθυνση στο εν λόγω θέμα παραλείπεται.
- να παραμείνει φραγμένο και να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά, οπότε το σύνολο των τροχιών προσεγγίζει έναν *παράξενο ελκυστή (strange attractor)*. Η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται όταν στο σύστημα επισέρχονται *μη γραμμικοί όροι* και όπως ήδη αναφέραμε σχετίζεται συνήθως με την ύπαρξη σαγματικών σημείων ισορροπίας.

Εν κατακλείδι, καθώς η διάσταση του συστήματος μεγαλώνει οι επιπλέον πιθανές καταστάσεις ισορροπίας του είναι οι τόροι και οι παράξενοι ελκυστές (χάος).

1.3.4. Η εμφάνιση του χάους και οι παράξενοι ελκυστές

Είδαμε παραπάνω ότι το χάος είναι μια από τις πιθανές μορφές που μπορεί να εμφανίσει ένα δυναμικό σύστημα και σχετίζεται κατά κύριο λόγο με την ύπαρξη σαγματικών σημείων ισορροπίας. Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να δώσουμε έναν ορισμό του χάους

¹¹ Hirsch M.W. and Smale S.(1974), *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, New York.

¹² Ο γράφων δεν μπόρεσε να βρεί πιο κατάλληλη μετάφραση για τον όρο αυτό που στην αγγλική βιβλιογραφία είναι γνωστός ως *torus*.

¹³ Δυο συχνότητες ω_1, ω_2 λέγονται σύμμετρες (commensurate) όταν το πηλίκο $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ είναι ρητός αριθμός.

και του παράξενου ελκυστή (παρόλο που μέχρι σήμερα δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτός ορισμός ούτε για χάος ούτε για τον παράξενο ελκυστή). Εν γένει, ως χαοτικά συστήματα χαρακτηρίζονται τα δυναμικά συστήματα που έχουν τις κάτωθι βασικές ιδιότητες¹⁴:

1) Δεν επαναλαμβάνονται (είναι απεριοδικά).

2) Εμφανίζουν εξαιρετική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες (και κατά συνέπεια είναι πολύ δύσκολο να γίνει μακροχρόνια πρόβλεψη).

3) Εξαρτώνται από μια ή περισσότερες παραμέτρους ελέγχου (*control parameters*). Οποιαδήποτε (έστω και μικρή) αλλαγή σε κάποια από αυτές τις παραμέτρους μπορεί να οδηγήσει στην εκδήλωση του χάους.

4) Οι εξισώσεις που τα περιγράφουν είναι μη γραμμικές.

Τα παραδείγματα των δυναμικών συστημάτων που εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά είναι εξαιρετικά πολλά. Ο Πολωνός μαθηματικός Stanislaw Ulam¹⁵ είχε χαρακτηριστικά πει ότι η μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων στη φύση είναι σαν τη μελέτη των μη-ελεφάντων θηλαστικών στη ζωολογία, εννοώντας προφανώς ότι οι περισσότερες διαδικασίες στη φύση είναι μη γραμμικές (και κατά συνέπεια δυνητικά χαοτικές).

Ενδεικτικά αναφέρουμε παρακάτω μερικά (μόνο) δυναμικά συστήματα τα οποία επιδεικνύουν χαοτική συμπεριφορά:

- Η τυρβώδης ροή των ρευστών (σε όλες τις κλίμακες: από το ανακάτεμα του καφέ με την κρέμα μέσα στο φλιτζάνι, μέχρι την κίνηση των αέριων μαζών στην ατμόσφαιρα).

- Η εξάπλωση των επιδημιών στους πληθυσμούς.

- Η ροή των πληροφοριών στο Διαδίκτυο.

- Η κίνηση ουράνιων σωμάτων.

- Η λειτουργία διαφόρων οργάνων του ανθρώπινου σώματος (όπως η καρδιά ή οι πνεύμονες).

- Η εξάπλωση των πυρκαγιών στα δάση.

- Η οικονομία και η ροή του χρήματος από τον αγοραστή στον πωλητή.

- Η εξάπλωση των καρκινικών κυττάρων σε έναν οργανισμό.

- Η κίνηση του ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στο δίκτυο διανομής.

¹⁴ Sprott Clinton J. (2003), *Chaos and time Series Analysis*, Oxford University Press.

¹⁵ Ulam S.M. (1983), *Adventures of a Mathematician*, Scribner's New York.

Η έννοια του παράξενου ελκυστή είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του χάους. Ένας παράξενος ελκυστής είναι κατά κάποιον τρόπο η γεωμετρική αναπαράσταση του χάους: οι τροχιές ενός χαοτικού δυναμικού συστήματος συνήθως συγκλίνουν σε μια μικρή περιοχή του χώρου των φάσεων, και τελικά καταλήγουν να κινούνται με τρόπο απρόβλεπτο μεν, αλλά ντετερμινιστικό¹⁶ δε, απάνω στη (γεωμετρική) οντότητα που ονομάζεται παράξενος ελκυστής.

Όπως είπαμε και παραπάνω δεν υπάρχει κάποιος καθολικά αποδεκτός, ακριβής ορισμός της έννοιας του παράξενου ελκυστή. Παρακάτω λοιπόν θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τον παράξενο ελκυστή παρουσιάζοντας συνοπτικά κάποιες από τις βασικές του ιδιότητες:

- Είναι ένα οριακό σύνολο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο¹⁷. Αυτό σημαίνει ότι θεωρητικά μια τροχιά του συστήματος θα χρειαστεί άπειρο χρόνο για να πάει να «πέσει πάνω» στον παράξενο ελκυστή. Στην πράξη πάντως, οι τροχιές του συστήματος συγκλίνουν πολύ κοντά στον παράξενο ελκυστή ύστερα από πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Σαν κλίμακα μεγέθους αυτό το χρονικό διάστημα είναι ανάλογο με τον αντίστροφο εκθέτη Lyapunov (δες επόμενο κεφάλαιο).
- Είναι φραγμένος (δηλαδή δεν εκτείνεται στο άπειρο).
- Μια τροχιά που ξεκινάει πάνω σε έναν παράξενο ελκυστή, παραμένει διαρκώς απάνω στον ελκυστή.
- Είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου¹⁸ στο χώρο των φάσεων.
- Είναι ένα φράκταλ (μορφοκλασματική οντότητα). Τα φράκταλς είναι γεωμετρικές οντότητες, που αυτοεπαναλαμβάνονται, με δομή σε όλες τις κλίμακες μεγέθους και με μη ακέραια διάσταση.
- Είναι πυκνός σε περιοδικές τροχιές. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο του ελκυστή είναι κοντά σε μια περιοδική τροχιά. Οι περισσότερες πάντως εξ αυτών έχουν πολύ μεγάλη περίοδο.
- Είναι πυκνός σε μη περιοδικές τροχιές. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο του ελκυστή είναι κοντά σε μια μη περιοδική τροχιά. Επίσης, εάν ξεκινήσουμε από ένα οποιοδήποτε σημείο εκτός περιοδικής τροχιάς, τότε καθώς το σύστημα εξελίσσεται θα περάσουμε κοντά από οποιοδήποτε άλλο σημείο του ελκυστή.
- Είναι εργοδικός (μη αποδομήσιμος). Αυτό σημαίνει ότι δεν φτιάχνεται από μικρότερους ελκυστές που «κολλάνε» μεταξύ τους και κατά συνέπεια δεν μπορεί να αποσυντεθεί σε μικρότερης κλίμακας δομικές οντότητες.

¹⁶ Δηλαδή όχι τυχαίο.

¹⁷ Τέτοια είδους σύνολα στα μαθηματικά αποκαλούνται ωμέγα σύνολα.

¹⁸ Θα αποφύγουμε εδώ να δώσουμε ακριβή ορισμό του μέτρου ενός συνόλου. Απλώς, διαισθητικά αναφέρουμε το παράδειγμα μιας γραμμής, η οποία παρότι περιέχει άπειρα σημεία έχει τελικά μηδενικό μέτρο, αφού έχει μηδενικό πλάτος. Ο πατέρας της θεωρίας του μέτρου είναι ο Γάλλος μαθηματικός Henri Lebesgue (1875-1941).

- Είναι δομικά σταθερός. Με άλλα λόγια μικρές αριθμητικές διαταραχές στους συντελεστές του δεν αλλοιώνουν τη μορφή του.
- Είναι συνήθως χαοτικός, δηλαδή γειτονικές αρχικές συνθήκες αποκλίνουν εκθετικά (γρήγορα).
- Είναι συνήθως αισθητικά κομψός και ελκυστικός. Παρότι αυτό δεν είναι μια μαθηματική ιδιότητα με την αυστηρή έννοια, είναι ένα από τα πλέον άμεσα αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά ενός παράξενου ελκυστή¹⁹.

Κλείνοντας να σημειώσουμε ότι είναι πολύ δύσκολο ένας παράξενος ελκυστής να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες τις παραπάνω ιδιότητες (ένας τέτοιος ορισμός θα ήταν απαγορευτικά αυστηρός). Συνήθως ένας παράξενος ελκυστής ικανοποιεί κάποιες από αυτές.

1.3.5. Το παράδειγμα του ελκυστή Lorenz

Παραπάνω παρουσιάσαμε το γενικότερο πλαίσιο των χαοτικών συστημάτων και των παράξενων ελκυστών. Στην παράγραφο αυτή θα γίνουμε πιο συγκεκριμένοι και θα παρουσιάσουμε το παράδειγμα του ελκυστή Lorenz, που άλλωστε αποτελεί και ορόσημο στην εξέλιξη της θεωρίας του χάους.

Στη δεκαετία του 1960 ο Αμερικανός μετεωρολόγος Edward Lorenz που εργαζόταν στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέτης προσπαθούσε να μοντελοποιήσει τις κινήσεις των αέριων μαζών στην ατμόσφαιρα. Είχε καταλήξει στο κάτωθι σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

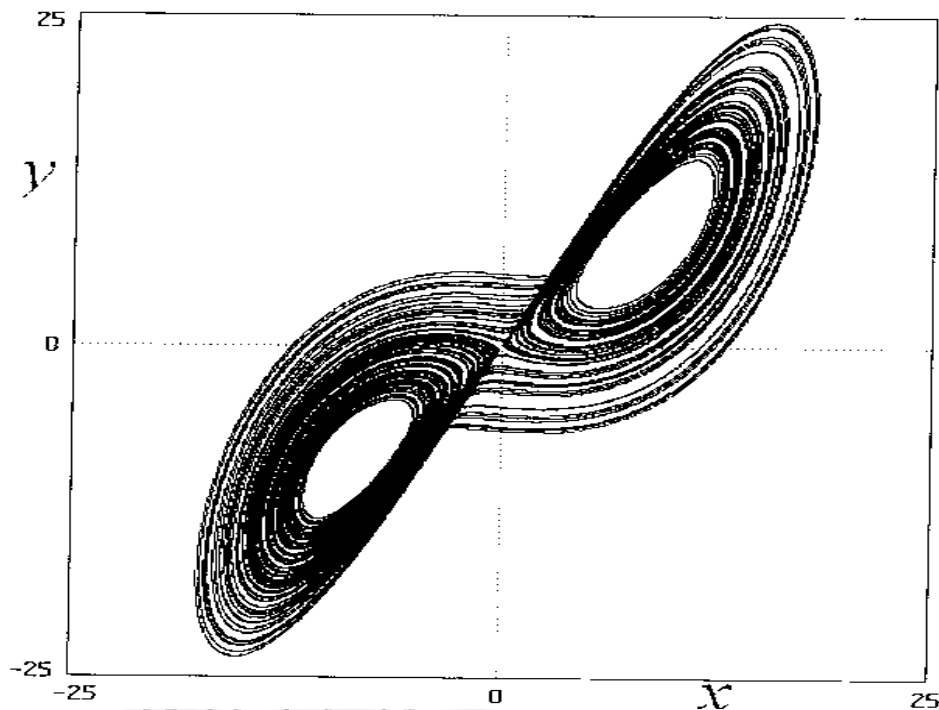
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό καθώς περιέχει τους όρους xz , xy , και αυτοί ακριβώς οι μη γραμμικοί όροι δημιουργούν τις όποιες «επιπλοκές». Πειραματιζόμενος λοιπόν σε έναν πρωτόγονο Η/Υ, ο Lorenz διαπίστωσε με έκπληξη ότι τα αποτελέσματα άλλαζαν άρδην ακόμα και όταν έκανε (φαινομενικά) ασήμαντες στρογγυλοποιήσεις κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Με άλλα λόγια ανακάλυψε την «έντονη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες» και κατά συνέπεια διαπίστωσε πόσο δύσκολη είναι η όποια προσπάθεια μακροχρόνιας πρόβλεψης το καιρού. Αυτός άλλωστε ήταν και ο λόγος που χαρακτηριστικά έγραψε ότι «η κίνηση μια πεταλούδας στη Βραζιλία μπορεί να προκαλέσει ανεμοστρόβιλο στο Τέξας»²⁰. Ο Lorenz πρωτοδημοσίευσε τα αποτελέσματα του στο περιοδικό Journal of Atmospheric

¹⁹ Μια κλασική πραγματεία ανάμεσα στη σχέση μαθηματικών και αισθητικής είναι το κάτωθι έργο του Αμερικάνου Μαθηματικού George Birkhoff:
Birkhoff G.D. (1933), *Aesthetic Measure*, Harvard University Press, Cambridge MA.

²⁰ Είναι το γνωστό «butterfly effect». Βλέπε:
Lorenz E.N. (1993), *The essence of Chaos*, University of Washington Press, Seattle WA.

Sciences²¹. Για πάνω από μια δεκαετία πέρασαν σχεδόν απαρατήρητα. Ο ένας λόγος ήταν ότι το περιοδικό, αν και πολύ σοβαρό, ήταν μικρής αναγνωσιμότητας. Ο πιο βασικός λόγος όμως ήταν, ότι τον καιρό εκείνο οι επιστήμονες στην πλειονότητά τους δεν είχαν κατανοήσει ότι η πολυπλοκότητα μπορεί τελικά να μην προϋποθέτει τυχαιότητα, αλλά να είναι απόρροια ενός πλήρους ντετερμινιστικού (και δη «απλού») συστήματος. Η βιβλιογραφία στις μέρες μας (πλέον) βρίθει από παρόμοια παραδείγματα όπου «απλά» ντετερμινιστικά συστήματα παρουσιάζουν πολύπλοκη συμπεριφορά, αλλά στη δεκαετία του 1960 η επιστημονική κοινότητα δεν ήταν καθόλου εξοικειωμένη με την ιδέα αυτή. Παρακάτω παρατίθεται ο ελκυστής Lorenz (για την ακρίβεια η προβολή του ελκυστή στο επίπεδο $Ox\psi$). Η μορφή του ελκυστή είναι πολύ χαρακτηριστική και είναι γνωστός ως *Butterfly attractor*.



Η προβολή του ελκυστή Lorenz στο $Ox\psi$ επίπεδο

1.3.6. Τα διακριτά δυναμικά συστήματα. Το παράδειγμα της λογιστικής απεικόνισης

Μέχρις στιγμής καταπιαστήκαμε με συνεχή δυναμικά συστήματα. Οι βασικές αρχές παραμένουν οι ίδιες και για τα διακριτά δυναμικά συστήματα. Εκείνο που αξίζει να σημειωθεί

²¹ Lorenz E.N. (1963), *Deterministic non periodic flow*, Journal of Atmospheric Sciences 20.

είναι ότι τα διακριτά συστήματα εμφανίζουν εν γένει πιο «πλούσιες» δυναμικές ιδιότητες από τα αντίστοιχα συνεχή συστήματα: ακόμα και ένα φαινομενικά απλό, μονοδιάστατο διακριτό σύστημα δύναται να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά. Αντιθέτως, όπως είδαμε ένα συνεχές σύστημα πρέπει να έχει διάσταση τουλάχιστον 3 για να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά. Από την άλλη μεριά, η αριθμητική μελέτη των διακριτών συστημάτων είναι εν γένει πιο απλή από τα αντίστοιχα συνεχή συστήματα.

Προκειμένου να γίνουν κατανοητές κάποιες βασικές αρχές, θα περάσουμε ευθύς αμέσως στη μελέτη της *λογιστικής απεικόνισης (logistic map)*. Πρόκειται για ένα πρωτόλειο διακριτό δυναμικό σύστημα, απλό στη δομή (καθώς είναι πλήρως ντετερμινιστικό, περιέχει μόνο μια μεταβλητή και μια παράμετρο ελέγχου), το οποίο εμφανίζει πολλές από τις πτυχές που χαρακτηρίζουν πολύ πιο σύνθετα συστήματα. Αυτός είναι άλλωστε και ο βασικός λόγος για τον οποίον η μελέτη της λογιστικής απεικόνισης είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την εν γένει κατανόηση της χαοτικής συμπεριφοράς.

Έστω X ένας πληθυσμός από έντομα. Κάθε χρόνο τα έντομα γεννούν αυγά και μετά πεθαίνουν (αυτό είναι μια απλοποίηση για να αποφύγουμε να έχουμε αλληλεπικαλυπτόμενες γενεές εντόμων). Ένας τέτοιος πληθυσμός μπορεί να περιγραφεί με αρκετή επιτυχία από την παρακάτω απλή σχέση που είναι γνωστή ως *λογιστική εξίσωση (logistic equation)*:

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο πληθυσμός X παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και στο 1 (δηλαδή έχουμε αδιαστατοποιήσει τον πληθυσμό και $X = 1$ είναι η μέγιστη τιμή του). Για τιμές του $X \ll 1$ ο όρος $1 - X$ είναι σχεδόν ανενεργός και η αύξηση του πληθυσμού είναι εκθετική (ο πληθυσμός των εντόμων είναι ακόμη μικρός οπότε υπάρχει αρκετή τροφή και η αύξηση του πληθυσμού είναι γοργή). Για $X=1$ ενεργοποιείται ο διορθωτικός όρος $1 - X$ και ο πληθυσμός μηδενίζεται (ο πληθυσμός έχει γίνει πολύ μεγάλος, έχει φτάσει σε επίπεδα κορεσμού, η τροφή πλέον δεν αρκεί και ως εκ τούτου ο πληθυσμός τελικά εξαφανίζεται).

Η παραπάνω αναδρομική σχέση χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των πληθυσμών εντόμων²² και ψαριών²³. Χρησιμοποιήθηκε επίσης και για την κατασκευή μακροοικονομικών μοντέλων²⁴. Είναι *μη γραμμική* (αφού περιέχει έναν τετραγωνικό όρο X_n^2), πράγμα που τελικά ευθύνεται για την εκδήλωση της χαοτικής συμπεριφοράς. Επίσης είναι διάστασης ένα, αφού η κατάσταση X_n τη χρονική στιγμή n εξαρτάται αποκλειστικά και μόνον από την αμέσως προηγούμενη κατάσταση X_{n-1} τη χρονική στιγμή $n - 1$.

²² Moran P.A.P. (1950), *Some remarks on animal populations*, Biometrics 6.

²³ Ricker W. (1954), *Stock and recruitment*, Journal of the fisheries Research Board of Canada 11.

²⁴ Stutzer M.J. (1980), *Chaotic Dynamics and bifurcation in a macro model*, Journal of Economic Dynamics and Control 2.

Το βασικό ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: ποιός θα είναι τελικά ο πληθυσμός των εντόμων μετά την έλευση αρκετά μεγάλου χρονικού διαστήματος; Με άλλα λόγια ποια είναι τελικά η τιμή του X_n καθώς $n \rightarrow \infty$;

Η απάντηση είναι τελικά πιο περίπλοκη από ότι κανείς θα περίμενε και εξαρτάται άμεσα από την τιμή που παίρνει η παράμετρος A (ας θυμηθούμε εδώ ότι η έντονη εξάρτηση από τις εκάστοτε παραμέτρους ελέγχου είναι ίδιον των χαοτικών συστημάτων). Πιο αναλυτικά:

- Περίπτωση $0 < A < 1$

Στην περίπτωση αυτή ο πολλαπλασιαστικός όρος A είναι μικρότερος της μονάδας, πράγμα που σημαίνει ότι κάθε χρόνο ο πληθυσμός μειώνεται και τελικά εξαφανίζεται: $X_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$ για όλες τις αρχικές συνθήκες (δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή εκκίνησης X_0 , τελικά ο πληθυσμός εξαφανίζεται). Το σημείο $X = 0$ «τραβάει» λοιπόν απάνω του όλες τις λύσεις, και είναι ένα ελκυστής-σημείο.

- Περίπτωση $1 < A < 3$

Στην περίπτωση αυτή ο πολλαπλασιαστικός όρος A είναι μεγαλύτερος της μονάδας, πράγμα που σημαίνει ότι στα πρώτα στάδια τουλάχιστον, ο πληθυσμός αυξάνεται εκθετικά. Στην πορεία όμως ο πληθυσμός σταθεροποιείται αφού για όλες τις αρχικές συνθήκες αποδεικνύεται ότι $X_n \rightarrow 1 - 1/A$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια το σύστημα αποκτά έναν καινούργιο ελκυστή στο σημείο $X = 1 - 1/A$.

Ας σημειωθεί εδώ ότι η συμπεριφορά του πληθυσμού διαφοροποιείται άρδην γύρω από το σημείο $A = 1$: για $A < 1$ ο πληθυσμός μειώνεται εκθετικά και τελικά εξαφανίζεται, ενώ για $A > 1$ ο πληθυσμός αυξάνεται και τελικά διατηρείται σταθερός. Το σημείο $A = 1$ είναι λοιπόν ένα σημείο διακλάδωσης. Οι διακλαδώσεις (*bifurcations*) είναι άλλη μια πολύ σημαντική έννοια για τα χαοτικά συστήματα.

- Περίπτωση $3 < A < 3.44948 \dots$

Το σημείο $A = 3$ είναι ένα νέο σημείο διακλάδωσης γύρω από το οποίο η συμπεριφορά του συστήματος αλλάζει έντονα.

Όταν $3 < A < 3.44948 \dots$ ο πληθυσμός εμφανίζει μακροπρόθεσμα μια συμπεριφορά ταλάντωσης, όπου τη μια χρονιά είναι μικρός (εξασθενημένος) ενώ την επόμενη χρονιά είναι μεγάλος (αναζωογονημένος). Ανεξάρτητα λοιπόν από την αρχική συνθήκη X_0 , ο πληθυσμός τελικά ταλαντώνεται ανάμεσα στις παρακάτω τιμές:

$$X_n = X_{n+2} = X_{n+4} = \dots = X_{\pm} = \frac{A+1 \pm \sqrt{(A-3)(A+1)}}{2A} \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Δηλαδή (μακροπρόθεσμα) τη μια χρονιά ο πληθυσμός θα παίρνει την τιμή $X +$, την επόμενη χρονιά την τιμή $X -$, μετά ξανά την τιμή $X +$ κ.ο.κ. Έχουμε λοιπόν την περίπτωση ενός περιοδικού ελκυστή (με περίοδο $n=2$).

- Περίπτωση $3.44948 < A < 3.56994$

Η συμπεριφορά του συστήματος αρχίζει πλέον να γίνεται πιο περίπλοκη και έχουμε τη σταδιακή μετάβαση στο χάος. Αυτή η μετάβαση πραγματοποιείται μέσα από την εμφάνιση αλληπάλληλων σημείων διακλάδωσης. Κάθε νέο σημείο διακλάδωσης συνοδεύεται και από τη δημιουργία ενός νέου ελκυστή του οποίου η περίοδος είναι διπλάσια. Πιο συγκεκριμένα:

Όταν $A = 1 + \sqrt{6} = 3.449490 \dots$ τότε δημιουργείται ένας ελκυστής με περίοδο $n=4$. Αυτό σημαίνει ότι μακροπρόθεσμα, και ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, η συμπεριφορά του πληθυσμού είναι επαναλαμβανόμενη, κάνοντας κύκλους διάρκειας 4 ετών:
 $X_n = X_{n+4} = X_{n+8} = \dots$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Όταν $A = 3.544090 \dots$ τότε δημιουργείται ένας ελκυστής με περίοδο $n=8$.

Όταν $A = 3.564407 \dots$ τότε δημιουργείται ένας ελκυστής με περίοδο $n=16$.

Όταν $A = 3.568759 \dots$ τότε δημιουργείται ένας ελκυστής με περίοδο $n=32$.

.....

Όταν $A = 3.5699456718 \dots$ (σημείο συσσώρευσης) τότε η ολοένα αυξανόμενη περίοδος του ελκυστή γίνεται πλέον άπειρη, οπότε ο πληθυσμός παύει να εμφανίζει επαναλαμβανόμενη συμπεριφορά. Σε αυτήν την περίπτωση οι δυνατές τιμές του πληθυσμού είναι άπειρες²⁵.

Ας σημειωθεί εδώ, ότι ο διπλασιασμός της περιόδου είναι μια γενικότερη διαδικασία που έχει παρατηρηθεί σε πολλά πειράματα όπως για παράδειγμα στη ροή των ρευστών²⁶, στους χτύπους της καρδιάς²⁷ κλπ.

- Περίπτωση $3.56994 \dots < A < 4$

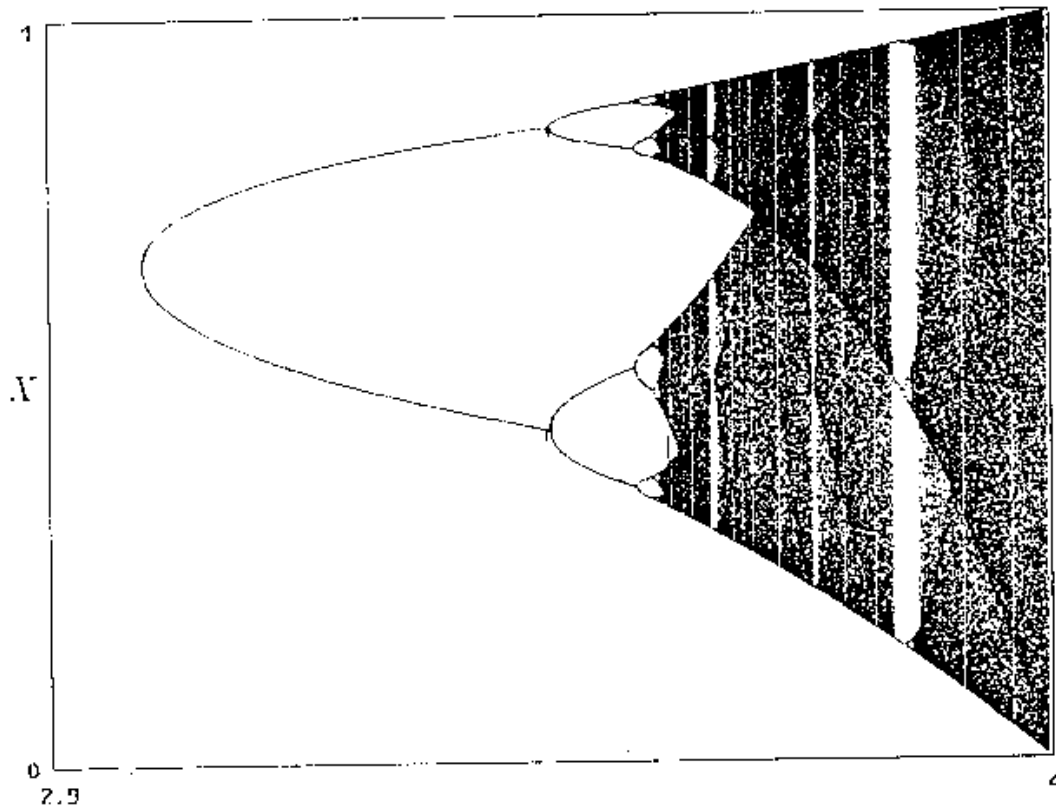
Όταν η παράμετρος ελέγχου A ξεπεράσει το σημείο συσσώρευσης $3.56994 \dots$, τότε πλέον έχουμε την εμφάνιση του χάους (μέσω του μηχανισμού που εξηγήσαμε προηγουμένα).

²⁵ Σημ: Το σύνολο των δυνατών τιμών του πληθυσμού (αν και άπειρο) είναι «αμελητέο» συγκρινόμενο με το μοναδιαίο διάστημα $0 < X < 1$.

²⁶ Libchaber A. (1982), *Convection and turbulence in liquid helium*, Physica B 109 and 110, 1583-9.

²⁷ Guevara et al (1981), *Phase locking, period doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells*, Science, 214, 1350.

Παρακάτω παρουσιάζουμε το *διάγραμμα διακλαδώσεων* (*bifurcation diagram*) ο οριζόντιος άξονας του οποίου απεικονίζει τις δυνατές τιμές της παραμέτρου A (έχουμε περιοριστεί στις τιμές $2,9 < A < 4$) και ο κατακόρυφος άξονας απεικονίζει τις μακροπρόθεσμα δυνατές τιμές του πληθυσμού (δηλαδή τις τιμές X_n καθώς $n \rightarrow \infty$). Η μορφή του διαγράμματος είναι πολύ κατατοπιστική και οπτικοποιεί πλήρως τη μετάβαση στο χάος (μέσα από τις συνεχείς διακλαδώσεις).



Η λογιστική απεικόνιση. Διάγραμμα διακλαδώσεων. Η μετάβαση στο χάος

- Περίπτωση $A = 4$

Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει πολλές ιδιαιτερότητες, και για αυτό το λόγο στη βιβλιογραφία μελετάται συνήθως ξεχωριστά. Πολύ συνοπτικά, το βασικό της γνώρισμα είναι ότι το μοναδιαίο διάστημα απεικονίζεται πίσω στον εαυτό του (δηλαδή αν $0 < X_n < 1$ τότε και η επόμενη επανάληψη $0 < X_{n+1} < 1$ κοκ). Η απεικόνιση αυτή όμως είναι *μη αντιστρέψιμη*: δηλαδή ακόμα και αν γνωρίζουμε την τιμή X_n στο βήμα n , είναι αδύνατον να πούμε με

σιγουριά ποια ήταν η τιμή X_{n-1} στο αμέσως προηγούμενο βήμα $n-1$. Αυτή ακριβώς η εκθετική απώλεια πληροφορίας σε κάθε βήμα είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του χάους.

Αν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε την λογιστική εξίσωση με $A = 4$ για να μοντελοποιήσουμε τον πληθυσμό των εντόμων, τότε ο πληθυσμός κάθε χρόνο θα παρουσιάζει μεγάλες, ακανόνιστες διακυμάνσεις²⁸. Είναι χαρακτηριστικό ότι ήδη από την δεκαετία του 1940, ο Stanislaw Ulam και ο John von Neumann²⁹ την είχαν προτείνει σαν γεννήτρια τυχαίων αριθμών στους πρωτόλειους τότε ηλεκτρονικούς υπολογιστές³⁰.

- Περίπτωση $A > 4$

Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει μειωμένο ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα, όλες σχεδόν οι αρχικές συνθήκες οδηγούν τελικά σε κάποια επανάληψη με $X_n > 1$ (δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή εκκίνησης θα βρεθεί n τέτοιο ώστε $X_n > 1$). Όταν αυτό συμβεί, τότε η επόμενη επανάληψη είναι αρνητική, και στη συνέχεια το σύστημα γρήγορα καταλήγει στο μείον άπειρο ($X_n \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$).

Εδώ λοιπόν ολοκληρώνεται η μελέτη της λογιστικής εξίσωσης, η οποία είναι αρκετά διδακτική καθώς με τρόπο σχετικά απλό μας εξοικειώνει με πολλές από τις βασικές έννοιες των χασοτικών δυναμικών συστημάτων (πχ η ύπαρξη συγκεκριμένου μοντέλου πίσω από μια φαινομενικά τυχαία συμπεριφορά, η έντονη εξάρτηση του συστήματος από την παράμετρο ελέγχου, η ύπαρξη ελκυστών, η ύπαρξη σημείων διακλάδωσης, ο μηχανισμός δημιουργίας του χάους κλπ).

1.4. Εκθέτες Lyapunov

Όπως ήδη έχουμε πει, ένα από τα κατεξοχήν γνωρίσματα του χάους είναι η έντονη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (μικρή μεταβολή στις αρχικές συνθήκες προκαλεί μεγάλη μεταβολή στο τελικό αποτέλεσμα). Προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε την εξάρτηση αυτή, θα

²⁸ Να λοιπόν ένα ωραίο παράδειγμα όπου μια φαινομενικά τυχαία συμπεριφορά, τελικά υπακούει πλήρως σε ένα πολύ συγκεκριμένο και μάλλον απλό μαθηματικό μοντέλο.

²⁹ Ο S. Ulam (Λβοβ Πολωνίας 1909-ΗΠΑ 1984) και ο J. von Neumann (Βουδαπέστη 1903-ΗΠΑ 1957) είναι δυο από τις πολλές περιπτώσεις λαμπρών μαθηματικών που μετανάστευσαν από την Κεντρική Ευρώπη στις ΗΠΑ στα χρόνια του μεσοπολέμου για να αποφύγουν τη Ναζιστική λαίλαπα. Και οι δύο κατά διαστήματα εργάστηκαν για λογαριασμό των Αμερικανικών ενόπλων δυνάμεων και καταπιάστηκαν μεταξύ άλλων με τη δημιουργία της βόμβας υδρογόνου. Είναι προτιμότερο πάντως να τους θυμόμαστε για τα καθαρά μαθηματικά τους επιτεύγματα: τον μεν Ulam ως τον πατέρα της θεωρίας Monte Carlo και τον δε von Neumann ως έναν από τους λαμπρούς πρωτοπόρους στο χώρο των σύγχρονων υπολογιστικών μαθηματικών.

³⁰ Ulam, S.M. and von Neumann, J. (1947), *On combination of stochastic and deterministic processes*, Bulletin of the American Mathematical Society 53, 1120.

εισάγουμε παρακάτω τους εκθέτες Lyapunov³¹: το πρόσημο των εκθετών αυτών σχετίζεται άμεσα με την ύπαρξη του χάους ή όχι, η δε τιμή τους είναι ένα μέτρο για το «πόσο» χαοτικό είναι τελικά το σύστημα που εξετάζουμε.

Έστω ένα μονοδιάστατο διακριτό δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται πλήρως από την αναδρομική σχέση $X_{n+1} = f(X_n)$. Και έστω δυο αρχικές συνθήκες X_0 και $X_0 + \Delta X_0$ οι οποίες είναι κοντά (απέχουν μόλις ΔX_0). Μας ενδιαφέρει να δούμε αν και κατά πόσο οι δυο αυτές συνθήκες εξακολουθούν να παραμένουν κοντά ή όχι καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ύστερα από μια επανάληψη τα δύο σημεία θα απέχουν ΔX_1 . Χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα Taylor εύκολα προκύπτει ότι:

$$\Delta X_1 = f(X_0 + \Delta X_0) - f(X_0) \cong \Delta X_0 f'(X_0)$$

Άρα λοιπόν η απόσταση των δύο σημείων μεταβλήθηκε κατά: $\frac{\Delta X_1}{\Delta X_0} = f'(X_0)$. Ορίζουμε λοιπόν τον τοπικό εκθέτη Lyapunov λ ως:

$$e^\lambda = \left| \frac{\Delta X_1}{\Delta X_0} \right| \rightarrow \lambda = \ln \left| \frac{\Delta X_1}{\Delta X_0} \right| \cong \ln |f'(X_0)|$$

Ο δε ολικός εκθέτης Lyapunov λ μπορεί πολύ απλά να οριστεί ως ο μέσος όρος του αντίστοιχου τοπικού εκθέτη³²:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(X_n)|$$

Ας σημειωθεί εδώ ότι ο εκθέτης Lyapunov ορίστηκε χρησιμοποιώντας τον Νεπέριο λογάριθμο γιατί εκείνο που τελικά μας ενδιαφέρει, είναι να δούμε αν και κατά πόσο η απόσταση των δυο σημείων αυξάνει εκθετικά (δηλαδή πολύ γρήγορα), ή όχι.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μεθοδολογία για να ορίσουμε τους εκθέτες Lyapunov σε διακριτά συστήματα υψηλότερης διάστασης (διάστασης δύο ή και παραπάνω), αλλά ακόμα και σε συνεχή συστήματα. Για παράδειγμα, σε ένα μονοδιάστατο αυτόνομο συνεχές σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $\dot{x} = f(x)$ είναι εύκολο να δειχτεί ότι ο τοπικός εκθέτης Lyapunov δίνεται από τη σχέση $\lambda = f'(x)$.

Καθώς η διάσταση του συστήματος αυξάνει, μεγαλώνει και το πλήθος των εκθετών Lyapunov: ένα σύστημα διάστασης n έχει εν γένει n εκθέτες Lyapunov. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας

³¹ Ο όρος «εκθέτης Lyapunov» αποτίνει φόρο τιμής στο Ρώσο Μαθηματικό Aleksandr Lyapunov (1857-1918) που αφιέρωσε μεγάλο κομμάτι της ζωής του στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Πάντως η πρωτότυπη ιδέα για τους «εκθέτες Lyapunov» προϋπάρχει στο έργο της γυναίκας μαθηματικού Sofya Kovalevskaya (1850-1891).

³² Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο λ είτε πρόκειται για τον τοπικό είτε για τον ολικό εκθέτη Lyapunov.

σκεφτεί κανείς το παράδειγμα των δυο διαστάσεων: στο επίπεδο $Ox\psi$ κάθε απόσταση αναλύεται σε δύο συνιστώσες (μια στον άξονα Ox και μια στον άξονα $O\psi$). Κάθε μια από αυτές τις δυο συνιστώσες αντιστοιχεί και σε έναν εκθέτη Lyapunov.

Πάντως, σε συστήματα υψηλότερας διάστασης, ο υπολογισμός των εκθετών Lyapunov γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκος (αφού τελικά πρέπει να υπολογιστεί ο Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων). Για το λόγο αυτό θα αποφύγουμε να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον υπολογισμό των εκθετών Lyapunov και θα περιοριστούμε σε κάποια βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά τους, τα οποία και θα παραθέσουμε παρακάτω:

α) Το φάσμα των εκθετών Lyapunov ενός δυναμικού συστήματος σχετίζεται άμεσα με τις γεωμετρικές ιδιότητες του εν λόγω συστήματος. Πιο συγκεκριμένα το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι ένα μέτρο του πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του συστήματος.

Ας πάρουμε το παράδειγμα ενός τρισδιάστατου συνεχούς συστήματος. Έστω λοιπόν δυο διαφορετικές αρχικές συνθήκες, οι οποίες ανά πάσα χρονική στιγμή απέχουν απόσταση ΔR και κατά συνέπεια ορίζουν έναν όγκο V . Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Η παραπάνω εξίσωση (που είναι στην πραγματικότητα άμεση συνέπεια του τρόπου με τον οποίον έχουμε ορίσει τους εκθέτες Lyapunov) μας δίνει με σαφήνεια τη σχέση ανάμεσα στο ρυθμό μεταβολής του όγκου του συστήματος και στους δείκτες Lyapunov.

β) Με βάση και τα παραπάνω, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στους εκθέτες Lyapunov και στη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος. Ας εξετάσουμε λοιπόν τις κάτωθι υποπεριπτώσεις:

- Αν το άθροισμα των εκθετών είναι θετικό, τότε το σύστημα είναι μη φραγμένο (δηλαδή το σύστημα συνεχώς διαστέλλεται και μακροπρόθεσμα η τιμή του τείνει στο άπειρο). Όπως ήδη έχουμε πει η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς αδυνατεί να μοντελοποιήσει ρεαλιστικά την πλειοψηφία των δυναμικών συστημάτων που συναντάμε στη φύση και στην κοινωνία (τα οποία είναι φραγμένα).
- Αν το άθροισμα των εκθετών είναι αρνητικό, τότε το σύστημα μακροπρόθεσμα συστέλλεται και τελικά καταλήγει σε έναν «ελκυστή». Η μορφή που θα έχει ο ελκυστής εξαρτάται από τις επιμέρους τιμές των εκθετών:
 - Αν όλοι οι εκθέτες είναι αρνητικοί, τότε το σύστημα μακροπρόθεσμα «καταρρέει» σε ένα συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας, αφού όλες οι αρχικές συνθήκες συγκλίνουν εκθετικά. Έχουμε λοιπόν την περίπτωση ενός «ελκυστή σημείου».

- Εάν ένας ή περισσότεροι από τους εκθέτες είναι θετικός/οί, τότε έχουμε την εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς. Υπενθυμίζεται εδώ ότι η ύπαρξη θετικού εκθέτη σημαίνει ότι γειτονικές αρχικές συνθήκες αποκλίνουν πολύ γρήγορα και τελικά δίνουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα (που άλλωστε είναι κατεξοχήν ίδιον των χαοτικών συστημάτων). Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα οδηγείται σε έναν «παράξενο ελκυστή»³³.
- Αποδεικνύεται³⁴ ότι ένα χαοτικό συνεχές σύστημα (εκτός από την ύπαρξη θετικού εκθέτη) οφείλει να έχει και έναν μηδενικό εκθέτη Lyapunov.

Όλες τις παραπάνω πληροφορίες μπορούμε να τις συγκεντρώσουμε σε ένα συνοπτικό πίνακα, ο οποίος παρατίθεται παρακάτω. Ο εν λόγω πίνακας αντιστοιχεί σε ένα συνεχές σύστημα (αυτόνομο) με διάσταση 4. Τα αποτελέσματα του πίνακα μπορούν πολύ εύκολα να γενικευτούν για συστήματα υψηλότερας ή ακόμα και χαμηλότερας διάστασης (για αυτό άλλωστε το λόγο επελέγη διάσταση 4).

4D Συνεχές σύστημα – Σχέση ελκυστών & εκθετών Lyapunov				
λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Ελκυστής
-	-	-	-	Σημείο ισορροπίας
0	-	-	-	Οριακός κύκλος (limit cycle)
0	0	-	-	2D-torus
0	0	0	-	3D-torus
+	0	-	-	Παράξενος (χαοτική συμπεριφορά)
+	+	0	-	Παράξενος (χαοτική συμπεριφορά)

1.5. Η διάσταση του ελκυστή

Ο ελκυστής ενός δυναμικού συστήματος είναι ένα σύνολο σημείων στο χώρο των φάσεων και ως εκ τούτου έχει κάποια διάσταση που τον χαρακτηρίζει. Η διάσταση αυτή είναι ένα σημαντικό μέγεθος καθώς στην πραγματικότητα είναι ένα μέτρο της πολυπλοκότητας του ελκυστή. Θεωρητικά η διάσταση του ελκυστή είναι το πολύ ίση με τον αριθμό των μεταβλητών που περιγράφουν το σύστημα. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως είναι αρκετά μικρότερη, που σημαίνει ότι τελικά η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από ένα πιο απλό μοντέλο με λιγότερες μεταβλητές. Εκεί άλλωστε έγκειται και η

³³ Μια αντιστοιχία που είναι άξια αναφοράς:

-τα σαγματικά σημεία ισορροπίας (που όπως είδαμε σχετίζονται άμεσα με το χάος) χαρακτηρίζονται από ετερόσημες ιδιοτιμές.

-ένας παράξενος ελκυστής χαρακτηρίζεται από ετερόσημους εκθέτες Lyapunov.

³⁴ Haken H. (1983), *At least one exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point*, Physics Letter A 94, 71-4.

χρησιμότητα της θεωρίας του χάους: στη δημιουργία «απλών» μοντέλων για σύνθετα συστήματα.

Το φάσμα των εκθετών Lyapunov σχετίζεται άμεσα με τον υπολογισμό της διάστασης ενός ελκυστή:

- Αν όλοι οι εκθέτες Lyapunov είναι αρνητικοί, τότε η διάσταση του ελκυστή είναι μηδενική (πράγμα αναμενόμενο αφού τελικά ο ελκυστής καταρρέει σε ένα σημείο στο οποίο συγκλίνουν όλες οι αρχικές συνθήκες).
- Αν ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov είναι μηδενικός, τότε η διάσταση ταυτίζεται με τον αριθμό των μηδενικών εκθετών. Για παράδειγμα ένας τρισδιάστατος τόρος (που όπως ήδη έχουμε δει χαρακτηρίζεται από τρεις μηδενικούς εκθέτες), έχει διάσταση τρία. Εν γένει κάθε μηδενικός εκθέτης Lyapunov σχετίζεται με την ύπαρξη μιας διάστασης στην οποία ο χώρος των φάσεων δεν «καταρρέει».
- Αν ο μεγαλύτερος εκθέτης είναι θετικός, τότε το σύστημα είναι χαοτικό και έχει έναν παράξενο ελκυστή. Η διάσταση ενός παράξενου ελκυστή είναι μη ακέραιος αριθμός.

Παρακάτω θα ορίσουμε τη διάσταση ενός παράξενου ελκυστή και θα δείξουμε πως είναι δυνατόν να είναι μη ακέραιος αριθμός. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι το σύστημα μας έχει N εκθέτες και έστω ότι αυτοί διατάσσονται κατά μέγεθος ως εξής: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ με τον λ_1 να είναι ο μεγαλύτερος. Αν το σύστημα είναι χαοτικό, τότε σίγουρα κάποιοι από τους εκθέτες αυτούς είναι θετικοί, ενώ το άθροισμα τους είναι αρνητικό (για να παραμείνει το σύστημα φραγμένο). Ας ονομάσουμε λ_D τον εκθέτη εκείνον που βρίσκεται στο μεταίχμιο και για τον οποίον ισχύει ότι: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_D \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_D + \lambda_{D+1} < 0$. Όπως ήδη έχουμε πει το άθροισμα των εκθετών είναι ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής του όγκου του συστήματος. Δηλαδή μέχρι και τον εκθέτη λ_D ο όγκος του συστήματος αυξάνει, ενώ από τον εκθέτη λ_{D+1} και μετά ο όγκος του συστήματος συστέλλεται. Κάπου λοιπόν ανάμεσα στο D και στο $D + 1$ υπάρχει κάποιο σημείο που το άθροισμα γίνεται ίσο με το μηδέν και ο όγκος του συστήματος ούτε διαστέλλεται αλλά και ούτε συστέλλεται. Αυτό ακριβώς το σημείο είναι η διάσταση του ελκυστή την οποία θα συμβολίσουμε με D_{KY} (το οποίο στην πραγματικότητα είναι αρτικόλεκτο για το Kaplan-Yorke Dimension). Το σημείο αυτό μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας απλή γραμμική παρεμβολή ως εξής:

$$D_{KY} = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1} + 1|} \sum_{j=1}^D \lambda_j$$

Άρα λοιπόν η *τοπολογική* διάσταση του συστήματος είναι D , και η διάσταση του ελκυστή είναι D_{KY} . Αυτός άλλωστε είναι και ο ορισμός ενός φράκταλ: το φράκταλ ορίζεται ως ένα αντικείμενο του οποίου η χωρική διάσταση είναι συνήθως μη ακέραιος αριθμός και

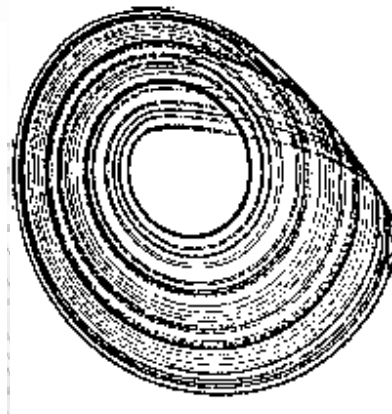
υπερβαίνει την τοπολογική του διάσταση. Όπως έχουμε ήδη πει οι παράξενοι ελκυστές είναι συνήθως φράκταλς.

Παρακάτω παρατίθενται κάποια χαστικά δυναμικά συστήματα με τους αντίστοιχους παράξενους ελκυστές και τη διάσταση D_{KY} των ελκυστών αυτών. Τα παραδείγματα αυτά είναι χρήσιμα μιας και βοηθούν στην κατανόηση της έννοιας της διάστασης D_{KY} .



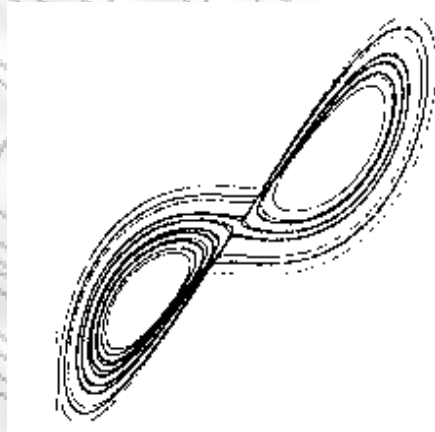
Η απεικόνιση Ikeda με:

$$\lambda_1 = 0.50760, \lambda_2 = -0.71832, D_{KY} \cong 1.70665$$



Ο ελκυστής Rossler με:

$$\lambda_1 = 0.0714, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -5.3943, D_{KY} \cong 2.0132$$



Ο ελκυστής Lorenz με:

$$\lambda_1 = 0.9056, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -14.5723, D_{KY} \cong 2.06215$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΠΕΡΙ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

2.1. Εισαγωγή στις χρονοσειρές

Ήδη από τις πρώτες σελίδες της εργασίας αυτής διαχωρίσαμε με αρκετά σαφή τρόπο το «ευθύ» από το «αντίστροφο» πρόβλημα: στο μεν «ευθύ» πρόβλημα οι εξισώσεις που περιγράφουν το υπό μελέτη σύστημα είναι γνωστές, στο δε «αντίστροφο» πρόβλημα οι εξισώσεις που περιγράφουν το υπό μελέτη φαινόμενο δεν είναι γνωστές και έχουμε στα χέρια μας μόνο πειραματικά δεδομένα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, τα δεδομένα αυτά είναι απλώς μια σειρά μετρήσεων σε διαδοχικές χρονικές στιγμές (μια χρονοσειρά).

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήσαμε αρκετά διεξοδικά το «ευθύ» πρόβλημα. Το καταρχήν συμπέρασμα είναι ότι φαινομενικά απλά συστήματα μπορεί να έχουν πολύπλοκες λύσεις (που μοιάζουν τυχαίες αλλά τελικά δεν είναι) οι οποίες «κατοικούν» πάνω σε παράξενους ελκυστές, και οι οποίες είναι πολύ ευαίσθητες στις αρχικές συνθήκες. Οπλισμένοι με αυτήν τη γνώση, θα προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε το «αντίστροφο» πρόβλημα, τις χρονοσειρές.

Προτού προχωρήσουμε πρέπει να σημειώσουμε ότι η θεωρία των χρονοσειρών είναι εν γένει λιγότερο ανεπτυγμένη από την αντίστοιχη θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Ακόμη και σήμερα (που τα Μαθηματικά διανύουν μια φάση εκρηκτικής ανάπτυξης) οι χρονοσειρές είναι περισσότερο «τέχνη» παρά επιστήμη: παρότι η βιβλιογραφία εμπλουτίζεται συνεχώς με νέες μεθόδους, η αποτελεσματικότητα των μεθόδων αυτών είναι συνήθως περιορισμένη και δυστυχώς δεν υπάρχουν πολλά καθολικά αποδεκτά αποτελέσματα.

Συνήθως οι μελετητές των χρονοσειρών έχουν σαν σκοπό τους την πρόβλεψη: γνωρίζοντας τις προτεραιές τιμές, επιθυμούν να προβλέψουν τις μελλοντικές τιμές. Για να γίνει αυτό εφικτό, και πέρα από την όποια μεθοδολογία χρησιμοποιηθεί, απαιτείται η ουσιαστική κατανόηση της υποβόσκουσας δυναμικής του συστήματος (*underlying dynamics*). Παρακάτω παραθέτουμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα χρονοσειρών:

-Ο χρηματιστηριακός δείκτης (πχ του ΧΑΑ)

-Η τιμή μιας συγκεκριμένης μετοχής

-Η σχέση ισοτιμίας δυο νομισμάτων (πχ Ευρώ και Δολαρίου)

-Η ναυλαγορά (όπως αυτή εκφράζεται από έναν συγκεκριμένο δείκτη, πχ τον BDI ή τον BPI, ή όπως αυτή εκφράζεται από την τιμή του ναύλου σε μια συγκεκριμένη διαδρομή, πχ T/C Rate for North Pacific Round Voyage for bulk carrier of panamax size).

-Δείκτες μέτρησης μετεωρολογικών φαινομένων (πχ μέτρηση θερμοκρασίας, ή μέτρηση έντασης και κατεύθυνσης ανέμου, ή μέτρηση ύψους βροχοπτώσεων σε συγκεκριμένες τοποθεσίες και ανά τακτά χρονικά διαστήματα).

-Μέγεθος πληθυσμού (είτε πρόκειται για πληθυσμό ανθρώπων, είτε ζώων, είτε φυτών, είτε μικροβίων κλπ).

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα που αναφέραμε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος (εξ ου και ο όρος χρονοσειρά), χωρίς όμως αυτό να είναι δεσμευτικό. Επίσης στα περισσότερα από τα παραδείγματα αυτά το μέγεθος που μετράται είναι βαθμωτό, και πάλι όμως αυτό δεν είναι δεσμευτικό (πχ η καταγραφή της διεύθυνσης του ανέμου δεν εμπίπτει στην κατηγορία των βαθμωτών μεγεθών).

2.2. Μερικά σημαντικά σημεία για τη μελέτη των χρονοσειρών

Προτού αναφερθούμε σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες μελέτης και πρόβλεψης των χρονοσειρών, αξίζει να παρουσιάσουμε (εν τάχει) κάποια βασικές/α έννοιες/σημεία που είναι σημαντικές/ά για τη συνολικότερη κατανόηση του ζητήματος:

α) Καταρχήν ξεκινάμε με τη διαπίστωση ότι όταν μελετάμε μια χρονοσειρά συνήθως αγνοούμε ποιές ακριβώς και πόσες ακριβώς είναι οι *θεμελιώδεις μεταβλητές* που επηρεάζουν το σύστημά μας. Ο σκόπελος αυτός εν μέρει ξεπερνιέται με τη χρήση του θεωρήματος Takens που θα δούμε αναλυτικά παρακάτω.

β) Ήδη στο πρώτο κεφάλαιο διαχωρίσαμε το χάος από την τυχαιότητα. Όταν λοιπόν μελετάμε μια χρονοσειρά είναι σημαντικό να γνωρίζουμε κατά πόσο αυτή είναι όντως χαοτική, ή κατά πόσο είναι προϊόν τυχαιότητας (στοχαστική). Η βιβλιογραφία είναι δυστυχώς γεμάτη από περιπτώσεις όπου στοχαστικά (δηλ. τυχαία) συστήματα μελετώνται σαν χαοτικά (δηλ. ντετερμινιστικά) συστήματα.

Η αλήθεια βέβαια είναι ότι στην πράξη ο διαχωρισμός τυχαιότητας και ντετερμινισμού δεν είναι ιδιαίτερα σαφής. Η ερώτηση «είναι χάος;» είναι τελικά αρκετά απλουστευμένη, αφού στην πραγματικότητα υπάρχει μια ιεραρχία δυναμικών συμπεριφορών με κλιμακούμενα ποσά ντετερμινισμού. Ο Moon³⁵ παραθέτει έναν πίνακα με επτά κατηγορίες δυνατών συμπεριφορών, ενώ ο Sprott³⁶ τον έχει εμπλουτίσει περαιτέρω και περιλαμβάνει συνολικά έντεκα κατηγορίες δυνατών συμπεριφορών. Οι πίνακες αυτοί δεν παρατίθενται εδώ για λόγους οικονομίας. Απλά αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι η πλήρως ντετερμινιστική συμπεριφορά είναι η κίνηση των πλανητικών σωμάτων (η οποία κυβερνάται από τους νόμους της Ουράνιας Μηχανικής). Στον αντίποδα βρίσκονται οι ατομικές διεργασίες που κυβερνούνται από τους νόμους της κβαντομηχανικής και είναι εγγενώς στοχαστικές³⁷. Η

³⁵ Moon F.C. (1992), *Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied scientists and engineers*, Wiley-Inter science, New York

³⁶ Sprott J.C. (2003), *Chaos and Time Series Analysis*, Oxford University Press

³⁷ Σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg ο πλήρης και ταυτόχρονος καθορισμός της θέσης και της ταχύτητας ενός σωματιδίου είναι αδύνατος: $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$, όπου \hbar είναι η σταθερά του Planck.

πληθώρα των φυσικών συστημάτων βρίσκεται κάπου στο ενδιάμεσο και η συμπεριφορά τους είναι συνδυασμός τυχαιότητας και ντετερμινισμού. Για παράδειγμα η μέση ημερήσια θερμοκρασία σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία, περιέχει ένα γενναίο ποσό ντετερμινισμού (που σχετίζεται με την εναλλαγή των εποχών και την ετήσια περιοδικότητα) στο οποίο όμως υπερτίθεται μια (φαινομενικά) τυχαία διακύμανση.

Συμφασμένο με τα παραπάνω είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποια γενικευμένη μεθοδολογία προκειμένου να ξεχωρίζουμε το χάος από την τυχαιότητα. Υπάρχουν βέβαια επιμέρους δείκτες που χαρακτηρίζουν μια χρονοσειρά (όπως το φάσμα ισχύος, ή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης), αλλά αυτοί οι δείκτες δεν αρκούν για να αποφανθούμε αν η χρονοσειρά είναι τελικά χαοτική ή τυχαία. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε δυο χρονοσειρές, έστω X_n και Ψ_n , με τη Ψ_n πλήρως ντετερμινιστική και τη X_n πλήρως τυχαία³⁸, των οποίων τόσο η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης όσο και το φάσμα ισχύος σχεδόν ταυτίζονται. Με άλλα λόγια ένα χαοτικό σύστημα μπορεί εύκολα να παράγει μια χρονοσειρά που μοιάζει στοχαστική, και αντίστροφα ένα τυχαίο σύστημα εύκολα «μεταμφιέζεται» και περνιέται για χαοτικό.

Εν κατακλείδι ο διαχωρισμός του χάους από την τυχαιότητα, αν και είναι πολύ σημαντικός, είναι αρκετά ασαφής και δύσκολος.

γ) Η συχνότητα με την οποία γίνεται η δειγματοληψία είναι ένα επιπλέον σημαντικό ζήτημα (ιδιαίτερα αν το υπό μελέτη σύστημα είναι συνεχές). Αν η δειγματοληψία είναι πολύ συχνή, τότε επιβαρύνεται η μνήμη του Η/Υ και τελικά οι υπολογισμοί γίνονται επώδυνα αργοί. Από την άλλη, αν η δειγματοληψία είναι πολύ αραιή, τότε κινδυνεύουμε να χάσουμε τις «γρήγορες» εκείνες συνιστώσες του συστήματος που εκδηλώνονται σε σύντομα χρονικά διαστήματα.

Η συχνότητα της δειγματοληψίας σχετίζεται και με το αν η υπό μελέτη χρονοσειρά είναι *στάσιμη*³⁹ ή όχι. Όταν μια διαδικασία είναι μη-στάσιμη, τότε ο μηχανισμός παραγωγής των δεδομένων μεταβάλλεται στο χρόνο. Σε αυτήν την περίπτωση ενδέχεται να υπάρχουν συνιστώσες που εκδηλώνονται σε πολύ χαμηλές συχνότητες (πχ όταν ο μηχανισμός αλλάζει πολύ αργά) και τις οποίες μια πεπερασμένη βάση δεδομένων που δεν πάει πολύ πίσω στο χρόνο, αδυνατεί να συλλάβει. Καλό είναι λοιπόν, όταν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία, η χρονοσειρά να εκτείνεται επαρκώς.

³⁸ Αρκεί να θέσουμε:

$$X = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin 2\pi r_2 \text{ όπου } r_1, r_2 \text{ είναι ασυσχέτιστοι τυχαίοι αριθμοί ομοιόμορφοι στο διάστημα } (0,1) \text{ και}$$
$$\Psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{|\Psi_n|}} - \frac{1}{2} - |\Psi_n|$$

³⁹ Μια διαδικασία λέγεται *στάσιμη* ή *ισχυρά στάσιμη* όταν η σκπ δεν μεταβάλλεται στο χρόνο. Μια διαδικασία λέγεται *ασθενώς στάσιμη* όταν: α)ο μέσος όρος δεν μεταβάλλεται στο χρόνο και β)η αυτοσυσχέτιση δυο όρων εξαρτάται μόνο από την απόσταση τους (δηλαδή από τη σχετική τους θέση).

2.3. Το θεώρημα Takens

Η πλήρης γνώση του χώρου των φάσεων και των τροχιών ενός χαοτικού συστήματος είναι πρακτικά αδύνατη. Κατά συνέπεια πρέπει να αναζητήσουμε έναν εναλλακτικό και πιο ευέλικτο τρόπο προσέγγισης του προβλήματος.

Ο τρόπος αυτός βασίζεται πάνω σε κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες που εν γένει έχουν τα χαοτικά συστήματα (στις οποίες παρεμπιπτόντως έχουμε ήδη αναφερθεί σε προηγούμενες παραγράφους) και οι οποίες τελικά κάνουν εφικτή την όποια προσπάθεια μελέτης τους. Πιο συγκεκριμένα:

α) Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να μελετήσουμε ολόκληρο το χώρο των φάσεων του συστήματος, αλλά αρκεί να επικεντρωθούμε μόνο στη μελέτη του παράξενου ελκυστή (αφού οι τροχιές του συστήματος τελικά συγκλίνουν στον ελκυστή). Το πλεονέκτημα είναι ότι η διάσταση του ελκυστή είναι συνήθως πολύ μικρότερη από τη διάσταση του συστήματος και κατά συνέπεια η μελέτη του πολύ πιο εύκολη.

β) Οι βασικές δυναμικές και τοπολογικές ιδιότητες περιέχονται σε κάθε μια από τις μεταβλητές του συστήματος και στις παραγώγους τους. Κατά συνέπεια η μελέτη του συστήματος είναι εφικτή ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε όλες τις μεταβλητές που τελικά εμπλέκονται.

Με βάση και τα παραπάνω, οι προσπάθειες μας επικεντρώνονται στην ανακατασκευή ενός τοπολογικά ισοδύναμου ελκυστή-χώρου φάσεων (*state space reconstruction*). Ο αρχικός και ο ισοδύναμος χώρος πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός ομαλού μετασχηματισμού. Αυτό προϋποθέτει μεταξύ άλλων ότι ο ισοδύναμος χώρος πρέπει να έχει ικανοποιητικά μεγάλη διάσταση ώστε να μην παρουσιάζει αυτοτομές⁴⁰ (*no self intersections*).

Το θεώρημα εμβύθισης του Whitney⁴¹ παρέχει το καταρχήν υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται όλο το οικοδόμημα. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό ένας καμπυλωμένος χώρος διάστασης D μπορεί να απεικονισθεί σε έναν Καρτεσιανό χώρο διάστασης $2D + 1$ χωρίς αυτοτομές⁴². Ένα απλό παράδειγμα είναι μια καμπύλη γραμμή (διάστασης 1) η οποία

⁴⁰ Έχουμε ήδη αναφερθεί στο θεώρημα μη τομής, σύμφωνα με το οποίο οι τροχιές ενός δυναμικού συστήματος δεν αλληλοτέμνονται, το οποίο απλά σημαίνει ότι από ένα σημείο του χώρου των φάσεων περνάει το πολύ μια τροχιά. Ο όποιος ισοδύναμος χώρος κατασκευαστεί πρέπει να διατηρεί και να αναπαράγει αυτή τη βασική ιδιότητα.

⁴¹ Whitney H. (1936), *Differentiable manifolds*, Annals of Mathematics 37.

⁴² Αν απεικονίσουμε το χώρο διάστασης D σε έναν χώρο διάστασης $D + 1$, τότε εν γένει θα έχουμε αυτοτομές που θα ανήκουν σε έναν χώρο διάστασης $2D - (D + 1) = D - 1$, εάν τον απεικονίσουμε σε έναν χώρο διάστασης $D + 2$ τότε οι αυτοτομές θα έχουν διάσταση $2D - (D + 2) = D - 2, \dots$, εάν τον απεικονίσουμε σε ένα χώρο διάστασης $2D$ τότε οι αυτοτομές θα έχουν διάσταση $2D - 2D = 0$ (θα είναι σημειακές). Οπότε η αύξηση της διάστασης από D σε $2D + 1$ είναι απαραίτητη προκειμένου να αποφύγουμε εντελώς τις αυτοτομές.

εμβυθισμένη σε μια επιφάνεια (διάσταση 2) σχεδόν σίγουρα θα εμφανίσει κάποιες αυτοτομές, ενώ εμβυθισμένη στο χώρο (διάσταση 3) δεν θα εμφανίσει αυτοτομές.

Ο Ολλανδός μαθηματικός Takens⁴³ εφάρμοσε το παραπάνω αποτέλεσμα στις χρονοσειρές. Ξεκινώντας από την ιδέα ότι η εκάστοτε τιμή του μετρούμενου μεγέθους x_i της χρονοσειράς εξαρτάται με κάποιο τρόπο από τις παρελθούσες τιμές x_{i-1}, x_{i-2}, \dots ο Takens απέδειξε ότι τα $x_i, \dots, x_{i-(m-1)}$ μπορούν να ανακατασκευάσουν ικανοποιητικά το χώρο των φάσεων με την προϋπόθεση ότι $m \geq 2D + 1$ όπου D η διάσταση του ελκυστή. Ο Sauer⁴⁴ γενίκευσε το θεώρημα του Takens και έδειξε ότι αρκεί να ισχύει $m > 2D_F$, όπου D_F είναι η μορφοκλασματική (φράκταλ) διάσταση του ελκυστή. Υπάρχει ένα είδος «ισορροπίας» στο θεώρημα του Takens: από τη μια μεριά μας δίνεται η δυνατότητα να ανακατασκευάσουμε το χώρο των φάσεων χωρίς να γνωρίζουμε όλες τις μεταβλητές που εμπλέκονται (γνωρίζουμε μόνο το μετρούμενο μέγεθος x), από την άλλη όμως, αυτή ακριβώς η άγνοια των υπολοίπων μεταβλητών πρέπει να εξαγοραστεί με ένα τίμημα, το οποίο είναι η αύξηση της διάστασης σε $2D + 1$.

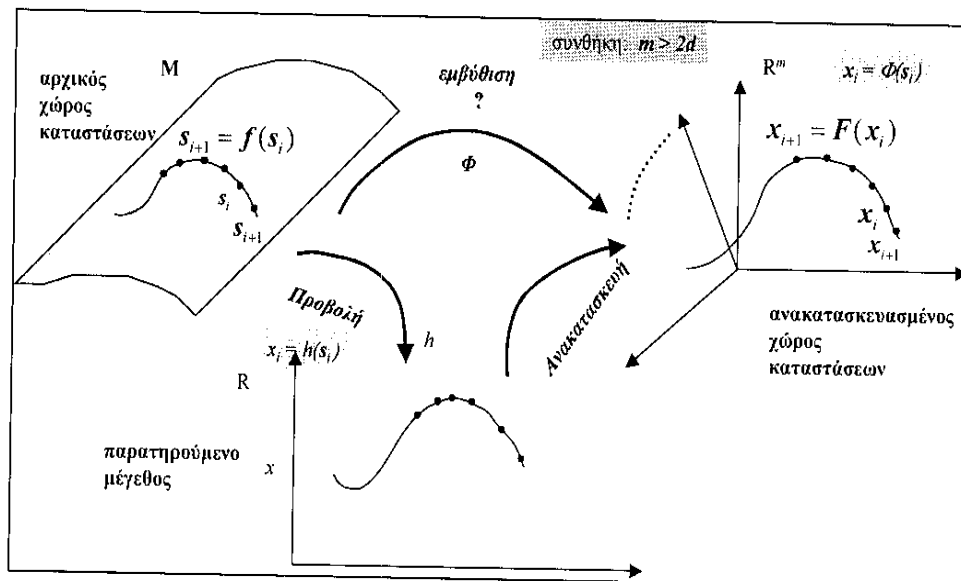
Το θεώρημα του Takens απεικονίζεται σχηματικά στο τέλος της παραγράφου: ο αρχικός χώρος των φάσεων περιγράφεται από τη γενική σχέση $s_{i+1} = f(s_i)$. Δυστυχώς συνήθως δεν γνωρίζουμε ούτε την εμπλεκόμενη μεταβλητή s ούτε τη σχέση f . Εμείς γνωρίζουμε μόνο το παρατηρούμενο βαθμωτό μέγεθος x (που είναι στην ουσία μια από τις συνιστώσες του s). Με άλλα λόγια γνωρίζουμε την προβολή $x_i = h(s_i)$. Χρησιμοποιώντας τις προβολές αυτές κατασκευάζουμε τα σημεία $x_i = [x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-(m-1)}]$ και μέσω αυτών τελικά ανακατασκευάζουμε τον χώρο των φάσεων. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν *μέθοδος των υστερήσεων (method of delays)*. Όπως ήδη είπαμε ο ανακατασκευασμένος ελκυστής διατηρεί τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες με τον αρχικό ελκυστή και το ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα $x_{i+1} = F(x_i)$ διατηρεί τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα $s_{i+1} = f(s_i)$. Με άλλα λόγια έχουμε πετύχει *εμβύθιση (embedding)* Φ του αρχικού συστήματος στο ανακατασκευασμένο σύστημα, $x_i = \Phi(s_i)$.

Μια σημαντική παράμετρος που εμπλέκεται στην ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι η *διάσταση εμβύθισης (embedding dimension)* m . Στην πράξη υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι για την επιλογή της παραμέτρου αυτής. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό σε επόμενη παράγραφο.

Τελειώνοντας να σημειώσουμε ότι το θ. Takens αναφέρεται σε χρονοσειρές δίχως θόρυβο και με άπειρο μήκος. Προφανώς κάτι τέτοιο στην πράξη δεν συναντάται, οπότε τα αποτελέσματα είναι προσεγγιστικά.

⁴³ Takens F., *Detecting Strange Attractors in Turbulence, In Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980 Proceedings* (ed D.A. Rand and L.S. Young). Lecture Notes in Mathematics, No 898, pp. 366-81. Springer, New York

⁴⁴ Sauer et al. (1991), *Embedology*, Journal of Statistical Physics, 65.



Θεώρημα Takens. Εμβύθιση και ανακατασκευή του χώρου των φάσεων.

2.4. Μέθοδοι και τεχνικές μελέτης και πρόβλεψης χρονοσειρών

2.4.1. Η ανάλυση Fourier

Η ανάλυση Fourier είναι εκείνος ο κλάδος των μαθηματικών που καταπιάνεται με την αποδόμηση των συνεχών συναρτήσεων σε αθροίσματα απλών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων. Αποτελεί παρακλάδι της ευρύτερης θεωρίας της Αρμονικής Ανάλυσης.

Στην περίπτωση των χρονοσειρών, η ανάλυση Fourier βρίσκει κυρίως εφαρμογή σε δεδομένα που παρουσιάζουν κάποιο είδος περιοδικότητας και στασιμότητας. Η καταρχήν ιδέα είναι ότι η χρονοσειρά μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων. Κάθε ένας από αυτούς τους όρους χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα και το εύρος του. Θεωρώντας λοιπόν ότι η υπό μελέτη χρονοσειρά είναι πεπερασμένη και έχει N σημεία X_1, \dots, X_N , αποδεικνύεται ότι ο n -οστός όρος X_n προσεγγίζεται από το κάτωθι τριγωνομετρικό άθροισμα:

$$X_n \cong \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} \alpha_m \cos \frac{2\pi mn}{N} + b_m \sin \frac{2\pi mn}{N}$$

Όπου οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N X_n \cos \frac{2\pi mn}{N}, b_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N X_n \sin \frac{2\pi mn}{N}$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γνωστές με την ονομασία Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform). Κοιτώντας τες, διαπιστώνουμε ότι οι όροι που εμπλέκονται έχουν συχνότητες που κυμαίνονται από $1/N$ μέχρι $1/2$. Η συχνότητα $1/2$ αντιστοιχεί σε δυο οποιαδήποτε γειτονικά σημεία (έστω X_k, X_{k+1}) ενώ η συχνότητα $1/N$ αντιστοιχεί στα δύο ακραία σημεία (X_1, X_N). Στην πραγματικότητα τα a_m, b_m περιέχουν τις ίδιες/ισοδύναμες πληροφορίες με τα X_n , απλώς τα μεν a_m, b_m είναι στο πεδίο των συχνοτήτων, τα δε X_n είναι στο πεδίο του χρόνου.

Άμεσα συνδεδεμένη με την ανάλυση Fourier είναι η εύρεση του *φάσματος ισχύος* (*power spectrum*): σε ένα οποιοδήποτε τριγωνομετρικό άθροισμα, υπάρχουν όροι (συχνότητες) που είναι πιο «ισχυροί» και όροι (συχνότητες) που είναι πιο «ασθενείς». Σκοπός μας είναι να αναγνωρίσουμε τις «ισχυρές» συχνότητες μιας και αυτές κατά βάση καθορίζουν τη συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος. Το φάσμα ισχύος λοιπόν, είναι το διάγραμμα της ισχύος συναρτήσει της συχνότητας: $S = S(f)$. Κατασκευάζεται εύκολα, αρκεί να γνωρίζουμε τους όρους a_m, b_m (μιας και η ισχύς S_m που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη συχνότητα mf_0 είναι ανάλογη του τετραγώνου του εύρους της ταλάντωσης: $S_m = a_m^2 + b_m^2$).

Το φάσμα ισχύος μας βοηθά να ξεχωρίσουμε μια περιοδική ή πολύ-περιοδική (quasi-periodic) διαδικασία από μια χαοτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα στην πολύ-περιοδική διαδικασία το φάσμα εμφανίζει συγκεκριμένες κορυφές (που αντιστοιχούν στις «ισχυρές» συχνότητες που χαρακτηρίζουν το σύστημα), ενώ στην περίπτωση του χάους το φάσμα εμφανίζει συνεχή δομή. Δυστυχώς το φάσμα ισχύος δεν είναι αρκετό για να ξεχωρίσουμε εάν η διαδικασία είναι χαοτική ή αν είναι απλώς θόρυβος: τόσο το χάος όσο και ο θόρυβος παράγουν συνεχές φάσμα ισχύος, και κατά συνέπεια το φάσμα δεν αποτελεί επαρκές κριτήριο διαχωρισμού του χάους από τον θόρυβο⁴⁵.

Η ανάλυση Fourier μπορεί μεταξύ άλλων να χρησιμοποιηθεί και για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς. Δυστυχώς στις περισσότερες περιπτώσεις η ακρίβεια αυτής της πρόβλεψης είναι περιορισμένη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα περισσότερα φαινόμενα γύρω μας δεν είναι αμιγώς περιοδικά και σαφώς δεν είναι γραμμικά⁴⁶.

2.4.2. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) μιας χρονοσειράς δίνεται από τον κάτωθι τύπο:

$$G(k) = \frac{\sum_{n=1}^{N-k} (X_n - \langle X \rangle)(X_{n+k} - \langle X \rangle)}{\sum_{n=1}^{N-k} (X_n - \langle X \rangle)^2}$$

⁴⁵ Ήδη σε προηγούμενη παράγραφο αναφερθήκαμε στη δυσκολία διαχωρισμού του χάους από την τυχαιότητα.

⁴⁶ Ας σημειωθεί εδώ ότι η ανάλυση Fourier προϋποθέτει γραμμική υπέρθεση των διάφορων όρων.

Στην πραγματικότητα η αυτοσυσχέτιση $G(k)$ είναι ένα μέτρο του πόσο δυνατά ένα σημείο X_n συσχετίζεται με ένα άλλο σημείο X_{n+k} που βρίσκεται k βήματα μακριά. Ισοδύναμα μετράει κατά πόσο η $X_n \rightarrow X_{n+k}$ είναι ευθεία γραμμή. Ο τύπος της αυτοσυσχέτισης είναι κανονικοποιημένος, ώστε η «πλήρης» συσχέτιση να αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή 1. Κατά συνέπεια, και αφού ένα σημείο θεωρείται «πλήρως» συσχετισμένο με τον εαυτό του, ισχύει $G(0) = 1$. Από την άλλη, όταν δυο σημεία είναι πλήρως ασυσχέτιστα, ισχύει $G(k) = 0$.

Θα θεωρούμε ότι τα δεδομένα μιας χρονοσειράς είναι ασυσχέτιστα, όταν για το 95% περίπτωση των τιμών του δείκτη k ισχύει ότι: $-2/\sqrt{N} \leq G(k) \leq 2/\sqrt{N}$.⁴⁷ Με άλλα λόγια τα δεδομένα θεωρούνται ασυσχέτιστα, όταν για τις περισσότερες τιμές του δείκτη k , το $G(k)$ παίρνει πρακτικά μηδενική τιμή.

Εν γένει, η τιμή του $G(k)$ μειώνεται από τη μονάδα ($G(0) = 1$), προς το μηδέν για μεγάλες τιμές του k . Η τιμή του δείκτη k για την οποία η αυτοσυσχέτιση πέφτει στο 0,37 ($G(k) = 0,37$) ονομάζεται *χρόνος συσχέτισης* τ_c . Ο χρόνος συσχέτισης είναι ένα μέτρο της μνήμης που έχει το σύστημα. Ισοδύναμα, η αντίστροφη ποσότητα $1/\tau_c$ είναι ένα μέτρο του πόσο γρήγορα χάνεται η δυνατότητα πρόβλεψης. Σε πολλές περιπτώσεις η ποσότητα $0.5/\tau_c$ είναι αρκετά κοντά στον μεγαλύτερο δείκτη Lyapunov.

Κλείνοντας, αξίζει να σημειώσουμε ότι όπως και στην περίπτωση του φάσματος ισχύος, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αδυνατεί να διαχωρίσει το χάος από το θόρυβο, αφού μια χαοτική και μια στοχαστική χρονοσειρά (θόρυβος) παρουσιάζουν παρόμοιας μορφής συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $G(k)$.

2.4.3. Τα «κλασικά» γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης (AR, MA, ARMA κλπ)

Η βασική ιδέα πίσω από τα γραμμικά μοντέλα είναι ότι το ντετερμινιστικό κομμάτι του x_n γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προτεραιών τιμών $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες γραμμικών μοντέλων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Τα AR(m) (αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα τάξης m) έχουν τη μορφή:

$$X_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i X_{n-m+i} + r_n$$

Ο όρος r_n αντιπροσωπεύει το μη ντετερμινιστικό κομμάτι της σχέσης και είναι λευκός θόρυβος (με μηδενικό μέσο όρο και Γκαουσιανή κατανομή).

- Τα ARMA(m,l) (αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα κινούμενου μέσου τάξης m,l) έχουν τη μορφή:

⁴⁷ Makridakis et al. (1983), *Forecasting methods and applications*, Wiley, New York.

$$X_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i X_{n-m+i} + \sum_{j=1}^l b_j r_{n-l+j}$$

Ο όρος r_n και πάλι αντιπροσωπεύει το μη ντετερμινιστικό κομμάτι της σχέσης και είναι χρωματιστός θόρυβος. Όταν θέσουμε $m=0$ τότε παίρνουμε το μοντέλο MA(l) (κινούμενου μέσου τάξης l).

Το βασικό πλεονέκτημα που έχουν τα γραμμικά μοντέλα έγκειται στο ότι είναι αρκετά απλά τόσο στη μορφή, όσο και στους υπολογισμούς. Είναι τα πρώτα μοντέλα που αναπτύχθηκαν για χρονοσειρές και υπάρχουν συγκεκριμένες εφαρμογές όπου τα «καταφέρνουν» αρκετά καλά. Το βασικό τους μειονέκτημα σχετίζεται ακριβώς με το γεγονός ότι είναι γραμμικά και κατά συνέπεια αδυνατούν να αναπαράγουν το χάος. Με άλλα λόγια τα μοντέλα αυτά είναι πολύ φτωχά για να προσομοιώσουν τη μη-ομαλή συμπεριφορά που παρουσιάζει ένα μη γραμμικό σύστημα ακόμα και στην ιδανική περίπτωση που αυτό είναι απαλλαγμένο από το θόρυβο.

2.4.4. Τα μη γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης

Τα μοντέλα αυτά έχουν αναπτυχθεί κυρίως τα τελευταία χρόνια⁴⁸ προκειμένου να καλυφθούν τα κενά που παρουσιάζουν τα γραμμικά μοντέλα και να προσεγγιστούν τα εκάστοτε προβλήματα με πιο αποτελεσματικό τρόπο. Η θεώρηση σύμφωνα με την οποία το υπό μελέτη φαινόμενο είναι αποτέλεσμα ενός γραμμικού μοντέλου με την επιβάρυνση θορύβου μπαίνει στην άκρη, και πλέον εξετάζεται το ενδεχόμενο οι όποιες ανωμαλίες/διακυμάνσεις του συστήματος να οφείλονται στην ύπαρξη χάους χαμηλής διάστασης⁴⁹.

Προτού προχωρήσουμε, πρέπει να σημειώσουμε ότι εξαιτίας της εγγενούς ευαισθησίας που παρουσιάζουν τα χαοτικά συστήματα στις αρχικές συνθήκες, η πρόβλεψη που προσφέρουν τα όποια μοντέλα είναι *βραχυπρόθεσμου ορίζοντα*. Με άλλα λόγια είναι πρακτικά αδύνατο (με τα σημερινά δεδομένα τουλάχιστον) να προβούμε σε προβλέψεις για το απώτερο/μακρινό μέλλον.

⁴⁸ Το πρώτο άρθρο που επιχείρησε μη γραμμική πρόβλεψη χρονοσειρών, και το οποίο σήμερα θεωρείται κλασικό, εκδόθηκε το 1987 και είναι το εξής: Farmer J. Doynne and Sidorowich John J. (1987), *Predicting Chaotic Time Series*, Physical Review Letters, Volume 59, Number 8.

⁴⁹ Βέβαια στην πραγματικότητα, ο θόρυβος είναι παρών σε όλα σχεδόν τα φαινόμενα που μας περιβάλλουν. Ακόμα και συστήματα που είναι κατά βάση ντετερμινιστικά «μολύνονται» από θόρυβο. Κανονικά ο θόρυβος πρέπει να απομακρύνεται/διαχωρίζεται και να μελετάται η ντετερμινιστική συνιστώσα της χρονοσειράς. Οι τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό, δυστυχώς αδυνατούν να απομακρύνουν το θόρυβο εντελώς από το σήμα. Ένα επιπλέον αρνητικό σημείο είναι ότι η όποια προσπάθεια απομάκρυνσης του θορύβου καταλήγει πάντα σε παραμόρφωση του αρχικού σήματος. Για λόγους οικονομίας θα αποφύγουμε περαιτέρω αναφορά στη μείωση του θορύβου.

Αν θέλουμε να θέσουμε το όλο ζήτημα σε μια γενικότερη βάση, μπορούμε να πούμε ότι τελικά πρόκειται για ένα πρόβλημα προσέγγισης (approximation problem): όπως ήδη έχουμε δει, μέσω του θεωρήματος Takens, το πρόβλημα τελικά ανάγεται στον προσδιορισμό του ανακατασκευασμένου χώρου των φάσεων. Με άλλα λόγια το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της πολλαπλότητας $F: x_{k+1} = F(x_k)$, $x_k \in \mathbb{R}^m$. Η πολλαπλότητα αυτή είναι στην ουσία μια «επιφάνεια» διάστασης $m + 1$ και μας είναι εν γένει άγνωστη. Γνωρίζουμε μόνο συγκεκριμένα σημεία της (που αντιστοιχούν στις γνωστές τιμές της χρονοσειράς) και προσπάθεια μας είναι χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά, να κατασκευάσουμε μια \hat{F} η οποία να προσεγγίζει την αρχική F όσο το δυνατόν καλύτερα. Προβλήματα τέτοιου είδους έχουν κεντρική θέση στη θεωρία προσέγγισης (approximation theory) και συναντώνται σε πάρα πολλές εφαρμογές.

Τα μη γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης κατατάσσονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- καθολικά (global) μοντέλα: τα μοντέλα αυτά έχουν μοναδική αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού. Τέτοια μοντέλα είναι τα πολυωνυμικά μοντέλα.
- τοπικά (local) μοντέλα: τα μοντέλα αυτά δεν επιδέχονται κοινή αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού, αλλά διαμορφώνονται διαφορετικά σε κάθε περιοχή του χώρου των φάσεων.
- ημιτοπικά (semi-local) μοντέλα: αποτελούν στην ουσία υβριδικά μοντέλα που προσπαθούν να συνδυάσουν τα πλεονεκτήματα των τοπικών και των καθολικών μοντέλων. Με τα μοντέλα αυτά υπάρχει αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού. Η έκφραση αυτή αποτελείται από ένα σύνολο συναρτήσεων βάσης και έτσι η τελική μορφή αλλάζει στις διάφορες περιοχές του χώρου των φάσεων.

Η ορθότητα του όποιου μοντέλου τελικά χρησιμοποιήσουμε δεν αποδεικνύεται με την αυστηρή μαθηματική έννοια του όρου. Απλά το μοντέλο δοκιμάζεται στα δεδομένα του προβλήματος και εκ του αποτελέσματος κρίνεται αν και πόσο αποδοτικό τελικά είναι.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε τόσο στα μοντέλα της πρόβλεψης, όσο και στα μοντέλα εκτίμησης των διαφόρων ζωτικών παραμέτρων του προβλήματος (πχ εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov, εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης m). Άλλωστε αυτά τα δύο σκέλη είναι άρρηκτα δεμένα.

2.4.4.α. Τα καθολικά μοντέλα

Ένα απλό παράδειγμα καθολικού μοντέλου είναι τα γραμμικά υποδείγματα τύπου ARMA και ARIMA τα οποία παρέχουν μια ενιαία αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού. Τα πολυωνυμικά μοντέλα αποτελούν τη μη γραμμική γενίκευση των υποδειγμάτων αυτών και έχουν την κάτωθι μορφή:

$$x_{k+1} = F(x_k) = \sum_{i,j=k-(m-1)}^k \sum_{l,m=0}^p b_{lm} x_i^l x_j^m, \quad x_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(m-1)})$$

Με άλλα λόγια εξακολουθεί να υπάρχει ενιαία αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού, αλλά πλέον επισέρχονται μη γραμμικοί όροι της μορφής $x_i^l x_j^m$.

Ένα σημαντικό ζήτημα είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών b_{lm} . Οι συντελεστές αυτοί προσδιορίζονται ώστε το μοντέλο μας τελικά να προσομοιώσει όσο το δυνατόν καλύτερα τα ήδη υπάρχοντα στοιχεία (δηλαδή τις ήδη γνωστές τιμές της χρονοσειράς). Συνήθως για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων. Τελικά το όλο πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα.

Τα πολυωνυμικά μοντέλα είναι αρκετά εύκολα στο χειρισμό τους, καθώς τα πολυώνυμα είναι πολύ «οικείες» συναρτήσεις. Από την άλλη, ο αριθμός των συντελεστών που πρέπει να προσδιοριστούν είναι $\binom{m+p}{m}$. Αυτό σημαίνει ότι καθώς αυξάνει η τάξη p , ο αριθμός των συντελεστών γίνεται υπερβολικά μεγάλος και αυτό έχει επίπτωση στο υπολογιστικό κόστος.

Τα υψηλόβαθμα πολυώνυμα εν γένει παρουσιάζουν έντονα ταλαντωτική συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αυτή δεν είναι επιθυμητή (γιατί είναι ασταθής) και αποτελεί βασικό μειονέκτημα των εν λόγω μοντέλων. Επίσης σε κάποιες περιπτώσεις οι τιμές του πολυωνύμου ξεφεύγουν στο άπειρο, πράγμα επίσης μη επιθυμητό. Οι δυσκολίες αυτές εν μέρει ξεπερνιούνται με τη χρήση των ημιτοπικών μεθόδων που θα δούμε παρακάτω.

2.4.4.β. Τα τοπικά μοντέλα

Η βασική φιλοσοφία πίσω από τα υποδείγματα αυτά είναι αρκετά απλή: εξετάζοντας τη χρονοσειρά, ψάχνουμε να εντοπίσουμε τις τιμές εκείνες που είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στην παρούσα τιμή. Όταν αυτές εντοπιστούν, βλέπουμε με ποιο τρόπο εξελίχθηκαν και θεωρούμε ότι η παρούσα τιμή της χρονοσειράς θα έχει και αυτή παρόμοια εξέλιξη.

Έστω λοιπόν x_i η παρούσα τιμή της χρονοσειράς και ας συμβολίσουμε με $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)}$ τις k παρελθούσες τιμές που είναι πλησιέστερες στο x_i ⁵⁰.

Το πιο απλό τοπικό μοντέλο χρησιμοποιεί μόνο το πλησιέστερο σημείο $x_{i(1)}$ και μας δίνει για την τιμή x_{i+1} την πρόβλεψη μηδενικής τάξης: $x_{i+1} = x_{i(1)+1}$. Το μοντέλο αυτό (που είναι γνωστό και ως μοντέλο των αναλόγων) προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Lorenz⁵¹ για την

⁵⁰ Με άλλα λόγια τα $x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}$ είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιούν την απόσταση $\|x_i - x_{i(j)}\|, j = 1, \dots, k$.

⁵¹ Lorenz, E.N. (1969), *Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues*, Journal of Atmospheric Sciences 26, 636-646.

πρόβλεψη του καιρού. Δυστυχώς δεν λειτουργεί αποτελεσματικά όταν δεν υπάρχει επάρκεια αντίστοιχων/ανάλογων καταστάσεων (όπως άλλωστε συνήθως συμβαίνει, ιδιαίτερα στα συστήματα υψηλότερας διάστασης).

Η άμεση επέκταση της παραπάνω μεθόδου χρησιμοποιεί όλα τα σημεία $x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}$ και μας δίνει την πρόβλεψη του μέσου όρου: $x_{i+1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{i(j)+1}$.

Ο παραπάνω μέσος όρος είναι μη σταθμισμένος, καθώς όλα τα $x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}$ συμμετέχουν στο σχηματισμό του αθροίσματος με την ίδια βαρύτητα, ανεξάρτητα από την απόσταση που έχουν από το x_i . Εναλλακτικά, μπορούμε να μετατρέψουμε το μέσο όρο σε σταθμισμένο, και η βαρύτητα του κάθε όρου να καθορίζεται από την απόσταση του d από το x_i . Για το σκοπό αυτό πρέπει να επιλέξουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις βαρύτητας που θα εμπλακούν στο σχηματισμό του μέσου όρου. Οι Hegger et al.⁵² προτείνουν οι συναρτήσεις αυτές να είναι της μορφής e^{-d^2/σ^2} . Και άλλες ισοδύναμες μορφές μπορεί να χρησιμοποιηθούν εξίσου καλά (όπως για παράδειγμα η μορφή $1/d^\alpha$), αρκεί να τείνουν στο μηδέν καθώς η απόσταση d αυξάνει.

Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος είναι αυτή του τοπικού γραμμικού μοντέλου. Το μοντέλο αυτό συνδέεται άμεσα με τα κλασικά γραμμικά μοντέλα τύπου AR(m), μόνο που πλέον οι παράμετροι που εμπλέκονται καθορίζονται για κάθε σημείο x_i χρησιμοποιώντας τα γειτονικά/κοντινά του σημεία $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)}$.

Πιο αναλυτικά, θεωρούμε ότι η τιμή x_{i+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των προτεραιών τιμών $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-(m-1)}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$x_{i+1} = A_0^{(i)} + A_1^{(i)} x_i + A_2^{(i)} x_{i-1} + \dots + A_m^{(i)} x_{i-(m-1)}$$

Προκειμένου λοιπόν να υπολογίσουμε την τιμή x_{i+1} αρκεί να καθορίσουμε τις παραμέτρους $A_0^{(i)}, \dots, A_m^{(i)}$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι η ισχύς της παραπάνω σχέσης δεν περιορίζεται μόνο στο x_i (για τον υπολογισμό του x_{i+1}) αλλά επεκτείνεται και στα $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)}$. Αυτή η θεώρηση στηρίζεται στο γεγονός ότι τα σημεία αυτά είναι γειτονικά / κοντά στο x_i . Με άλλα λόγια θεωρούμε ότι ισχύει:

$$x_{i(1)+1} = A_0^{(i)} + A_1^{(i)} x_{i(1)} + A_2^{(i)} x_{i(1)-1} + \dots + A_m^{(i)} x_{i(1)-(m-1)}$$

.....

$$x_{i(k)+1} = A_0^{(i)} + A_1^{(i)} x_{i(k)} + A_2^{(i)} x_{i(k)-1} + \dots + A_m^{(i)} x_{i(k)-(m-1)}$$

⁵² Hegger R., Kantz H., and Schreiber T. (1999), *Practical implementation of nonlinear time series methods: the TISEAN package*, Chaos 9, 413-35

Όλα τα σημεία που εμπλέκονται στις παραπάνω σχέσεις (συμπεριλαμβανομένων των $x_{i(1)+1}, \dots, x_{i(k)+1}$) είναι γνωστά, αφού στην πραγματικότητα αντιστοιχούν σε προτεραιές τιμές της χρονοσειράς. Οπότε οι σχέσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το βέλτιστο προσδιορισμό των παραμέτρων $A_0^{(i)}, \dots, A_m^{(i)}$. Ο προσδιορισμός αυτός θα γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε το «συνολικό» σφάλμα πρόβλεψης να ελαχιστοποιηθεί:

$$\min_{A_0^{(i)}, \dots, A_m^{(i)}} \sum_{j=1}^k (x_{i(j)+1} - A_0^{(i)} - A_1^{(i)} x_{i(j)} - A_2^{(i)} x_{i(j)-1} - \dots - A_m^{(i)} x_{i(j)-(m-1)})^2$$

Η παραπάνω ελαχιστοποίηση του αθροίσματος και συνεπώς η αντίστοιχη εύρεση των παραμέτρων γίνεται εύκολα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Υπάρχουν και άλλα μοντέλα τα οποία εμπίπτουν στην κατηγορία των τοπικών μοντέλων αλλά για λόγους οικονομίας θα αποφύγουμε περαιτέρω αναφορές.

2.4.4.γ. Τα ημιτοπικά μοντέλα

Τα ημιτοπικά μοντέλα είναι υβριδικής φύσεως και προσπαθούν να συνδυάσουν τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν τα καθολικά μοντέλα (κοινή γραφή για όλο το πεδίο ορισμού) με αυτά των τοπικών μοντέλων (ευαισθησία και δυνατότητα αναπαραγωγής των εκάστοτε τοπικών συνθηκών).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι στην ουσία ένα πρόβλημα προσέγγισης: χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές τιμές της χρονοσειράς, προσπαθούμε να βρούμε μια συνάρτηση, έστω \hat{F} , η οποία να προσεγγίζει όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά την πραγματική μορφή του ελκυστή F . Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε η \hat{F} να είναι το γραμμικό άθροισμα επιμέρους συναρτήσεων βάσης, η κάθε μια εκ των οποίων έχει πεπερασμένο και συγκεκριμένη έκταση φορέα⁵³. Επιλέγοντας με τον κατάλληλο τρόπο τους συντελεστές των επιμέρους συναρτήσεων βάσης, μας δίνεται η δυνατότητα να «ενεργοποιήσουμε» ή αντίστοιχα να «απενεργοποιήσουμε» κάποιους από τους όρους του αθροίσματος και κατά συνέπεια να προσαρμόσουμε την \hat{F} στις εκάστοτε απαιτήσεις που έχουμε. Με άλλα λόγια, η «έξυπνη» αυτή γραφή μας βοηθάει στο να αποφύγουμε τα προβλήματα που εμφανίζουν τα καθολικά μοντέλα και ταυτόχρονα μας δίνει τη δυνατότητα να αναπαράγουμε τις εκάστοτε τοπικές ιδιομορφίες που μπορεί να παρουσιάζει ο ελκυστής.

Προκειμένου να καταλάβουμε καλύτερα τη φιλοσοφία που κρύβεται πίσω από τις μεθόδους αυτές αξίζει να κάνουμε μια μικρή ιστορική αναφορά: οι πρώτες συναρτήσεις που η επιστημονική κοινότητα χρησιμοποίησε για την παρεμβολή/προσέγγιση δεδομένων ήταν τα κλασικά αλγεβρικά πολυώνυμα. Ο δρόμος για τη χρήση τους άνοιξε με το θεώρημα του Weierstrass (1863), σύμφωνα με το οποίο μια τυχαία συνεχής συνάρτηση μπορεί να

⁵³ Ως φορέας μιας συνάρτησης ορίζεται το τμήμα εκείνο του πεδίου ορισμού για το οποίο η συνάρτηση παίρνει μη μηδενικές τιμές. Έξω από τον φορέα οι τιμές της συνάρτησης είναι μηδενικές.

προσεγγιστεί οσοδήποτε καλά από ένα πολυώνυμο αυθαίρετου βαθμού. Το θεώρημα αυτό είναι ο θεμέλιος λίθος του σύγχρονου *approximation theory* καθώς ουσιαστικά «νομιμοποίησε» την προσπάθεια προσέγγισης μιας άγνωστης (ή έστω εν μέρει γνωστής) οντότητας μέσω συγκεκριμένων και πλήρως γνωστών (πολυωνυμικών) συναρτήσεων⁵⁴. Στην πράξη πάντως η χρήση των πολυωνύμων εμφανίζει πολλές δυσκολίες, τις οποίες άλλωστε ήδη περιγράψαμε παραπάνω: εκθετική αύξηση του υπολογιστικού κόστους, μη ομαλή (έντονα ταλαντωτική) συμπεριφορά των πολυωνύμων κλπ. Για το σκοπό αυτό στις δεκαετίες 1930-70 καθιερώνεται η εναλλακτική προσέγγιση των *κατά τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων (spline functions)*. Η θεωρία αυτή στηρίζεται κατά κύριο λόγο στο έργο του Isaac Schoenberg και του Karl De Boor και αποδείχθηκε αρκετά επιτυχημένη. Τα τελευταία χρόνια οι θεωρίες αυτές έχουν επεκταθεί / γενικευτεί περαιτέρω καθώς πλέον δεν χρησιμοποιούνται μόνο πολυωνυμικές συναρτήσεις για την προσέγγιση. Κλείνοντας αυτή τη μικρή ιστορική αναφορά, αξίζει να σημειώσουμε ότι η φύση του αντικειμένου είναι τόσο πολυσχιδής, ώστε τελικά προσελκύει το ενδιαφέρον από διάφορους κλάδους της επιστήμης: θεωρητικά μαθηματικά, αριθμητικά μαθηματικά, Η/Υ, στατιστική κλπ.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε συνοπτικά δυο βασικές κατηγορίες ημιτοπικών μοντέλων: τα RBF (Radial Basis Functions) και τα νευρωνικά δίκτυα.

Radial Basis Functions

Ένα μοντέλο RBF έχει εν γένει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{F}(x_k) = \sum_{i=1}^s \omega_i \varphi_i(\|x_k - \xi_i\|)$$

όπου:

x_k : είναι το διάνυσμα των ήδη γνωστών τιμών της χρονοσειράς, $x_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(m-1)})$, όπου η υστέρηση m προκύπτει από το θεώρημα Takens.

\hat{F} : είναι η προσέγγιση που επιχειρούμε στην F , δηλαδή στον ελκυστή. Η $\hat{F}(x_k)$ μας δίνει την πρόβλεψη \hat{x}_{k+1} για την επόμενη τιμή x_{k+1} της χρονοσειράς.

s : είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης φ_i που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να κατασκευάσουμε την \hat{F} . Ο αριθμός αυτός είτε είναι καθορισμένος από την αρχή, είτε είναι παράμετρος προς βελτιστοποίηση.

ω_i : είναι οι σταθεροί συντελεστές. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι παράμετροι προς βελτιστοποίηση και υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να ελαχιστοποιούν το σφάλμα προσέγγισης (μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων).

⁵⁴ Ας σημειωθεί εδώ ότι το *th. Weierstrass* είναι μια κλασική περίπτωση θεωρήματος *ύπαρξης*. Με άλλα λόγια, ενώ επιβεβαιώνει την ύπαρξη ενός πολυωνύμου προσέγγισης, δυστυχώς δεν μας δίνει καμιά πληροφορία για το ποιο τελικά είναι αυτό το πολυώνυμο, ή με ποιό τρόπο μπορούμε να το κατασκευάσουμε.

φ_i : είναι οι συναρτήσεις βάσης. Τόσο το πεδίο τιμών, όσο και το πεδίο ορισμού τους είναι οι πραγματικοί αριθμοί, $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η επιλογή των συναρτήσεων φ_i είναι πολύ σημαντική για την αποτελεσματικότητα του μοντέλου. Αυτό που καταρχήν μας απασχολεί είναι οι $(\varphi_i)_{i=1}^s$ να είναι *universal approximators*, ή με απλά λόγια οι $(\varphi_i)_{i=1}^s$ να μπορούν να προσεγγίσουν οσοδήποτε κοντά, μια οποιαδήποτε λεία συνάρτηση, καθώς το πλήθος τους s αυξάνει. Υπάρχουν διάφορα αποτελέσματα τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένες μορφές συναρτήσεων φ_i και αποδεικνύουν ότι οι εν λόγω συναρτήσεις είναι πράγματι *universal approximators*⁵⁵. Μια μορφή που συχνά χρησιμοποιείται είναι το *καπέλο του Gauss*: $\varphi_i = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_i^2}\right)$. Οι συναρτήσεις αυτής της μορφής είναι συμμετρικές και πρακτικά έχουν πεπερασμένο φορέα το μήκος του οποίου εξαρτάται από τη σταθερά σ_i . Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μορφές, όπως η τετραγωνική μορφή: $\varphi_i = (r^2 + a^2)^{-1/2}$ κλπ.

ξ_i : είναι τα κέντρα των συναρτήσεων βάσης φ_i . Ο ρόλος τους είναι σημαντικός, γιατί στην ουσία το κάθε ξ_i καθορίζει την περιοχή επιρροής της αντίστοιχης συνάρτησης βάσης φ_i . Κατά συνέπεια, η επιλογή των ξ_i πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε τελικά η γραμμική υπέρθεση των συναρτήσεων βάσης φ_i να μας δώσει μια «καλή» επιφάνεια \hat{F} , η οποία να προσεγγίζει ικανοποιητικά τον ελκυστή. Συνήθως, και προκειμένου το υπολογιστικό κομμάτι του προβλήματος να μη γίνει δυσβάσταχτο, τα ξ_i προκαθορίζονται με κάποιο κριτήριο, οπότε τελικά οι μόνοι παράμετροι προς βελτιστοποίηση είναι οι συντελεστές ω_i . Πάντως, υπάρχουν και μέθοδοι στις οποίες τα ξ_i θεωρούνται παράμετροι προς βελτιστοποίηση. Στις περιπτώσεις αυτές απαιτείται η χρήση αρκετά πολύπλοκων και εν γένει χρονοβόρων μεθόδων βελτιστοποίησης.

Νευρωνικά δίκτυα (neural networks)

Τα νευρωνικά δίκτυα είναι μια κατηγορία μοντέλων πρόβλεψης που τα τελευταία χρόνια εξελίσσεται γοργά. Η λειτουργία των νευρωνικών δικτύων θεωρείται ότι προσομοιάζει (ή τουλάχιστον προσπαθεί να προσομοιάσει) τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου κυρίως σε γνωσιοθεωρητικό (cognitive) επίπεδο. Τα βασικά πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν τα νευρωνικά δίκτυα ως μοντέλα πρόβλεψης είναι τα εξής:

- Ένα νευρωνικό δίκτυο μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση οσοδήποτε κοντά θέλουμε, αρκεί να έχει επαρκή αριθμό νευρώνων⁵⁶. Το αποτέλεσμα

⁵⁵ Το θεώρημα του Weierstrass το οποίο ήδη συναντήσαμε είναι το πρώτο αποτέλεσμα αυτού του είδους με $\varphi_i = a_i x^{i-1}, i = 1 \dots s$. Τα πιο μοντέρνα αποτελέσματα χρησιμοποιούν μη-πολυωνυμικές συναρτήσεις. Μια πολύ ενδιαφέρουσα επισκόπηση για τα RBF δίνεται από το σπουδαίο Βρετανό μαθηματικό Michael Powell στο: Powell M.J.D. (1987), *Radial Basis functions for multivariable interpolation: A review*. In J.C. Mason and M.G.Cox, editors, *Algorithms for Approximation*, Clarendon Press, London.

⁵⁶ Hornik, K. (1989), *Multilayer feed forward networks are universal approximators*, *Neural networks* 2, 359-66.

και

Hornik et al. (1990), *Universal approximation of unknown mapping and its derivatives using multilayer feed forward networks*, *Neural networks* 3, 535-49.

αυτό είναι κατά κάποιο τρόπο αντίστοιχο του Θεωρήματος Weierstrass που ήδη συναντήσαμε παραπάνω για τα αλγεβρικά πολυώνυμα. Είναι ένα αποτέλεσμα ύπαρξης και είναι πολύ σημαντικό καθώς «νομιμοποιεί» τη χρήση των νευρωνικών δικτύων για την προσέγγιση μη γραμμικών οντοτήτων. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που στην ξένη βιβλιογραφία τα νευρωνικά δίκτυα χαρακτηρίζονται ως *universal approximators*.

- Σχετικά μικρά δίκτυα μπορούν να προσομοιάσουν με αρκετή επιτυχία πολύπλοκα συστήματα που παρουσιάζουν έντονη μη γραμμικότητα.
- Οι τιμές τους είναι πάντα φραγμένες. Εδώ να θυμίσουμε ότι οι τιμές ενός παράξενου ελκυστή είναι πάντα φραγμένες, κατά συνέπεια ζητούμε και το όποιο μοντέλο πρόβλεψης χρησιμοποιούμε να έχει την ίδια ιδιότητα.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο μονού στρώματος (*single layer feed forward neural network*). Δίκτυα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πρόβλεψη των χρονοσειρών. Ένα τέτοιο δίκτυο μπορεί να έχει την εξής μορφή:

$$\hat{X}_n = \sum_{i=1}^N b_i \tanh(a_{i0} + \sum_{j=1}^D a_{ij} X_{n-j})$$

Τα βασικά συστατικά στοιχεία του παραπάνω μοντέλου είναι τα εξής:

- Τα δεδομένα εισόδου X_{n-j} .
- Το πλήθος D των δεδομένων εισόδου. Στην πραγματικότητα αυτό σχετίζεται με τη διάσταση εμπύθισης, δηλαδή τον αριθμό των προτεραιών τιμών που θα χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό της επόμενης τιμής του συστήματος.
- Οι νευρώνες, το πλήθος των οποίων είναι N . Ο κάθε νευρώνας περιέχει μια χαρακτηριστική συνάρτηση που τελικά καθορίζει τη λειτουργία του. Στο προκείμενο μοντέλο επιλέξαμε η συνάρτηση αυτή να είναι η υπερβολική εφαπτομένη \tanh . Η επιλογή αυτή δεν είναι δεσμευτική, αλλά ας σημειώσουμε ότι συνήθως χρησιμοποιούνται φραγμένες συναρτήσεις σιγμοειδούς μορφής (όπως άλλωστε η υπερβολική εφαπτομένη).
- Οι σταθεροί συντελεστές b_i, a_{i0}, a_{ij} .
- Το δεδομένου εξόδου \hat{X}_n (πρόβλεψη για την επόμενη τιμή X_n του συστήματος).

Στην πράξη λοιπόν έχουμε ένα στρώμα με τα δεδομένα εισόδου, ένα στρώμα νευρώνων και ένα στρώμα με τα δεδομένα εξόδου. Ο κάθε νευρώνας τροφοδοτείται με ένα γραμμικό συνδυασμό των δεδομένων εισόδου στα οποία επιδρά μέσω της χαρακτηριστικής του συνάρτησης. Κατά αυτό τον τρόπο παράγεται το στρώμα των δεδομένων εξόδου, το δε τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των δεδομένων αυτών.

Ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει αφορά στην επιλογή των σταθερών συντελεστών b_i και a_{ij} . Μια καταρχήν προσέγγιση είναι η επιλογή των συντελεστών αυτών να γίνει ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο σφάλμα πρόβλεψης μοναδιαίου βήματος (one step mean square prediction error) $E = \langle (\hat{X}_n - X_n)^2 \rangle$. Ας σημειώσουμε πάντως ότι η βιβλιογραφία γύρω από το εν λόγω ζήτημα είναι εν γένει πολύ πλούσια, με πολλά αποτελέσματα, που κατά κύριο λόγο σχετίζονται με μη γραμμική βελτιστοποίηση (non linear optimization).

2.4.4.δ. Η εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης. Η μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων.

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάσαμε διάφορες μεθόδους πρόβλεψης χρονοσειρών. Όλες αυτές οι μέθοδοι έχουν ένα κοινό σημείο: προκειμένου να προβλέψουν την τιμή x_n χρησιμοποιούν τις προτεραιές τιμές $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$. Είναι εύλογο λοιπόν το ερώτημα: ποια διάσταση εμβύθισης m πρέπει να επιλέξουμε ώστε να βελτιστοποιήσουμε την πρόβλεψη που επιχειρούμε;

Το θεώρημα Takens απαντάει σε αυτό το ερώτημα με θεωρητικό τρόπο: $m \geq 2D + 1$, όπου D η διάσταση του ελκυστή. Επειδή όμως η διάσταση D είναι εν γένει άγνωστη, στην πράξη το θ. Takens δεν μας δίνει μια χειροπιαστή τιμή για το m . Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να αποδώσουμε στο m μια αυθαίρετα «μεγάλη» τιμή. Η προσέγγιση αυτή είναι λανθασμένη: αχρείαστα μεγάλη διάσταση εμβύθισης m δεν εξασφαλίζει κατ'ανάγκην καλύτερα αποτελέσματα. Αντιθέτως, σημαίνει αυξημένο υπολογιστικό κόστος, ενώ μπορεί να δημιουργήσει και επιπλέον προβλήματα που σχετίζονται με την εισαγωγή θορύβου. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια μέθοδο, η οποία λαμβάνοντας υπόψη τα εκάστοτε δεδομένα του προβλήματος να παρέχει μια καλή εκτίμηση για τη διάσταση εμβύθισης m . Η μέθοδος που κατά κύριο λόγο χρησιμοποιείται σήμερα για το σκοπό αυτό είναι αυτή των ψευδών κοντινότερων γειτόνων (false nearest neighbors)⁵⁷. Τα αποτελέσματα της μεθόδου αυτής κρίνονται σε γενικές γραμμές ικανοποιητικά για τις περισσότερες εφαρμογές. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο αυτή συνοπτικά.

Έστω ότι έχουμε επιλέξει αυθαίρετα μια τιμή m για τη διάσταση εμβύθισης. Και έστω $x_i^m = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$ και $x_j^m = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m})$ δυο τυχαία σημεία του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων (ο εκθέτης m χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει τη διάσταση εμβύθισης). Έστω επίσης ότι τα σημεία αυτά είναι κοντά, δηλαδή $\|x_i^m - x_j^m\| \approx 0$. Υπάρχουν δύο εκδοχές: είτε τα σημεία αυτά είναι πραγματικά κοντά (δηλαδή είναι πράγματι γειτονικά), είτε έχουμε επιλέξει λανθασμένα τη διάσταση m και τα σημεία φαίνεται να βρίσκονται κοντά λόγω αυτοτομής του ελκυστή (δηλαδή είναι ψευδείς γείτονες⁵⁸).

⁵⁷ Kennel et al. (1992), *Determining minimum embedding dimension using a geometric construction*, Physical Review A 45, 3403-11.

⁵⁸ Ένα απλουστευμένο αλλά κατοπτριστικό παράδειγμα προκειμένου να γίνει αντιληπτή η έννοια της ψευδούς γειτνείωσης είναι το εξής. Έστω δυο σημεία $x_1 = (2, 4, 3)$ και $x_2 = (2, 4, 1000)$. Εάν αντιλαμβανόμαστε μόνο τις δυο διαστάσεις και πάρουμε τις προβολές, έστω x_1^p και x_2^p , των δύο αυτών σημείων στο επίπεδο, τότε φαίνεται ότι ταυτίζονται ($x_1^p = x_2^p = (2, 4)$). Στην πραγματικότητα όμως, τα δυο αυτά σημεία ανήκουν στο τριδιάστατο χώρο, και μάλιστα είναι το ένα είναι αρκετά μακριά από το άλλο (καθώς η τρίτη συντεταγμένη διαφέρει πολύ).

Προκειμένου λοιπόν να ξεκαθαρίσουμε τι γίνεται, αυξάνουμε κατά 1 τη διάσταση εμπύθισης (σε $m + 1$) και εξετάζουμε εκ νέου την απόσταση των σημείων $x_i^{m+1} = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m-1})$ και $x_j^{m+1} = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m-1})$. Αν η απόσταση αυτή έχει μεγαλώσει πολύ, τότε συμπεραίνουμε ότι τα εν λόγω σημεία είναι ψευδείς γείτονες, και ότι η διάσταση εμπύθισης m που αρχικά επιλέξαμε δεν είναι επαρκής.

Η παραπάνω απλή λογική μπορεί εύκολα να προγραμματιστεί σε έναν αλγόριθμο, τα βασικά βήματα του οποίου είναι τα εξής:

α) Επιλέγουμε μια τιμή εκκίνησης m για τη διάσταση εμπύθισης.

β) Για κάθε σημείο x_i^m εντοπίζουμε το κοντινότερο του σημείο x_j^m .

γ) Αυξάνουμε τη διάσταση σε $m + 1$ και βλέπουμε πόσα από τα σημεία είναι τελικά ψευδείς γείτονες.

δ) Αν το ποσοστό των ψευδών γειτόνων είναι κάτω από το όριο που έχουμε θέσει, τότε η διάσταση εμπύθισης είναι m και ο αλγόριθμος σταματά εδώ.

Αν το ποσοστό ψευδών γειτόνων είναι πάνω από το όριο που έχουμε θέσει⁵⁹ τότε η διάσταση εμπύθισης είναι μεγαλύτερη από m . Αυξάνουμε λοιπόν τη διάσταση σε $m + 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα α).

Ένα σύνθηρες κριτήριο για τον τερματισμό της όλης διαδικασίας είναι το ποσοστό των ψευδών γειτονικών σημείων να είναι περίπου 1% ή λιγότερο.

2.4.4.ε. Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov

Έχουμε ήδη αναφερθεί στη σημασία των εκθετών Lyapunov: τα χαοτικά συστήματα επιδεικνύουν εν γένει μεγάλη ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, κάτι που τελικά βάζει και ένα όριο στην όποια προσπάθεια μακροπρόθεσμης πρόβλεψης. Η ευαισθησία αυτή ποσοτικοποιείται μέσω της εύρεσης του μέγιστου εκθέτη Lyapunov.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μια μέθοδο για την εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov μέσα από διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τους Rosenstein et al.⁶⁰. Ας σημειώσουμε ότι στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλες παρόμοιες μέθοδοι στις οποίες δεν θα αναφερθούμε, απλά και μόνο για λόγους οικονομίας.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής: για κάθε σημείο x_i του ανακατασκευασμένου χώρου των φάσεων (διάστασης m), ψάχνουμε να βρούμε το κοντινότερο του σημείο x_n . Στη συνέχεια εξετάζουμε το λογαριθμικό ρυθμό με τον οποίο τα δύο αυτά σημεία απομακρύνονται καθώς η χρονοσειρά εξελίσσεται, και υπολογίζουμε το μέσο όρο του για τα προσεχή k βήματα:

⁵⁹ Το ποιο ακριβώς είναι αυτό το όριο είναι ένα μεγάλο θέμα που θέλει αρκετή συζήτηση. Μια πιο διεξοδική αναφορά γίνεται στο 3^ο κεφάλαιο.

⁶⁰ Rosenstein et al., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D 65, 117-34.

$$L_k = L_k(k) = \frac{1}{2(N-k-m+1)} \sum_{n=m}^{N-k} \log \sum_{j=0}^{m-1} (X_{l-j+k} - X_{n-j+k})^2$$

Το αποτέλεσμα L_k της παραπάνω σχέσης εξαρτάται από τον αριθμό k των βημάτων, εξου και ο συμβολισμός $L_k(k)$. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov δίνεται από την παράγωγο ως προς k :

$$\lambda = \frac{dL_k}{dk}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση ο εκθέτης Lyapunov λ φαίνεται να εξαρτάται από την τιμή του k : $\lambda = \lambda(k)$. Ας σημειώσουμε εδώ τα εξής:

α) Γενικά αποφεύγουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο στις μικρές τιμές του k (γιατί τα τυχόν λάθη στρογγυλοποίησης είναι ακόμη σημαντικά, αλλά και γιατί τα σημεία δεν έχουν ακόμη προσανατολιστεί στην διεύθυνση της μέγιστης απομάκρυνσης), αλλά και στις μεγάλες τιμές του k (γιατί έχουμε αποκλίσεις από την εκθετική συνάρτηση). Προτιμούμε να υπολογίζουμε την παράγωγο στις *ενδιάμεσες* τιμές του δείκτη k .

β) Τα χαοτικά συστήματα εν γένει εμφανίζουν $L_k \propto k$ (που συνεπάγεται $dL_k/dk = const.$), με αποτέλεσμα η τιμή του εκθέτη Lyapunov που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την τιμή του k .

γ) Το παραπάνω αποτελεί και ένα καλό κριτήριο για να ξεχωρίσουμε ένα χαοτικό σύστημα από το θόρυβο: ύπαρξη ευρείας περιοχής με σταθερή παράγωγο dL_k/dk αποτελεί ισχυρή ένδειξη παρουσίας χάους. Αντιθέτως, ο θόρυβος εμφανίζει παράγωγο που εξαρτάται από την τιμή του δείκτη k . Για παράδειγμα θόρυβος με φάσμα της μορφής $1/f^a$ εμφανίζει $dL_k/dk = H/k$, που σημαίνει ότι για μικρές τιμές του k ($k \rightarrow 0$) ο εκθέτης Lyapunov που υπολογίζεται με την παραπάνω μεθοδολογία τείνει στο άπειρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Η ΝΑΥΛΑΓΟΡΑ. ΕΝΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΟ ΔΕΙΚΤΗ BDI

3.1. Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μιλήσαμε για δυναμικά συστήματα, για χάος, για χρονοσειρές και μεθόδους πρόβλεψης αυτών κλπ. Η ναυλαγορά είναι και αυτή μια χρονοσειρά (με τις όποιες ιδιαιτερότητες την χαρακτηρίζουν) και στο κεφάλαιο τούτο θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε τη χρονοσειρά αυτή χρησιμοποιώντας κάποια από τα εργαλεία και τις τεχνικές που ήδη παρουσιάσαμε. Βασικός στόχος λοιπόν, είναι η δημιουργία ενός αριθμητικού, μη-γραμμικού μοντέλου βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης της ναυλαγοράς⁶¹ των φορτηγών πλοίων χύδην ξηρού φορτίου (bulk carriers). Ο στόχος αυτός πραγματώνεται μέσα από τα εξής τρία βασικά βήματα:

- α) Δημιουργία του θεωρητικού μοντέλου πρόβλεψης.
- β) Δημιουργία κώδικα (προγράμματος) προκειμένου το θεωρητικό μοντέλο να τρέξει σε Η/Υ.
- γ) Εισαγωγή δεδομένων στον κώδικα, εξαγωγή αποτελεσμάτων και έλεγχος της ακρίβειάς τους.

Ας σημειωθεί εδώ ότι απορρίφθηκε η «εύκολη» λύση της χρησιμοποίησης ενός έτοιμου «πακέτου» λογισμικού. Αντί αυτού, ο κώδικας για το μη γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στη συνέχεια έχει συνταχθεί εξολοκλήρου από τον γράφοντα στο περιβάλλον του Maple6⁶².

3.2. Ναυλαγορά: βασικά στοιχεία και χαρακτηριστικά

Προτού κανείς ξεκινήσει να μελετά μια χρονοσειρά, είναι σημαντικό να έχει άποψη και γνώση για την καταρχήν φυσική οντότητα που παράγει τη χρονοσειρά αυτή. Το να αντιλαμβάνεται κανείς μια χρονοσειρά απλά και μόνο σαν μια λίστα από αριθμούς, είναι εξαιρετικά στείρο. Για αυτό το λόγο προτού περάσουμε στη δημιουργία του μοντέλου μας, είναι χρήσιμο να πούμε λίγα πράγματα για την οντότητα που κρύβεται πίσω από τους αριθμούς: τη ναυλαγορά των bulk carriers.

Ξεκινάμε λοιπόν κάνοντας την καταρχήν διάκριση ανάμεσα στη βιομηχανική ναυτιλία (industrial shipping) και στην ελεύθερη (tramp) ναυτιλία. Στην περίπτωση της βιομηχανικής ναυτιλίας ο κάτοχος του φορτίου παίζει και το ρόλο του πλοιοκτήτη (είτε είναι ιδιοκτήτης πλοίων, είτε προβαίνει σε μακροχρόνιες ναυλώσεις πλοίων για να ικανοποιήσει τις ανάγκες του). Στην περίπτωση της tramp ναυτιλίας, ο ναυλωτής αναζητεί διαθέσιμο πλοίο στην αγορά προκειμένου να ικανοποιήσει τις όποιες (λιγότερο ή περισσότερο άμεσες) ανάγκες του.

Η βιομηχανική ναυτιλία συναντάται κυρίως σε περιπτώσεις που η αγορά είναι «κλειστή», στα χέρια λίγων «παικτών», τα δε προϊόντα και τα δρομολόγια είναι συγκεκριμένα. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι τα vehicle carriers, εξειδικευμένα πλοία για τη μεταφορά

⁶¹ Θυμίζουμε εδώ ότι η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη στα μη γραμμικά συστήματα δεν είναι εφικτή.

⁶² Εάν κάποιος αναζητά ένα έτοιμο πακέτο λογισμικού για τη (μη γραμμική) ανάλυση των χρονοσειρών, τότε κατά γενική ομολογία το καλύτερο είναι το TISEAN (Time Series ANalysis). Το πακέτο αυτό αποτελεί προϊόν της δεκάχρονης και πλέον προσπάθειας των Rainer Hegger, Holger Kantz, Thomas Schreiber και διατίθεται δωρεάν στο διαδίκτυο στη διεύθυνση: www.mpijks-dresden.mpg.de/tisean. Προειδοποιούμε ότι είναι σχεδιασμένο σε περιβάλλον LINUX και ως εκ τούτου δεν είναι ιδιαίτερα φιλικό στο (μη εξοικειωμένο) χρήστη.

αυτοκινήτων Ι.Χ. τα οποία ναυπηγούνται για λογαριασμό των Ιαπωνικών αυτοκινητοβιομηχανιών προκειμένου να μεταφέρουν τα προϊόντα τους από την Ιαπωνία στη Ευρώπη.

Αντιθέτως, η αγορά των bulk carriers χαρακτηρίζεται από μεγάλο πλήθος ναυλωτών, μεταφερόμενων φορτίων και πλοιοκτητών. Κατά συνέπεια προσεγγίζει το μοντέλο της ελεύθερης ναυτιλίας. Υπάρχουν βέβαια και εδώ περιπτώσεις βιομηχανικών κολοσσών (όπως για παράδειγμα οι μεγάλες εταιρείες εξόρυξης σιδηρομεταλλεύματος) που προσπαθούν να καλύψουν μέρος τουλάχιστον από τις μεταφορικές τους ανάγκες με κινήσεις μακροπρόθεσμου χαρακτήρα (πχ ναυπηγώντας πλοία). Πάντως τα bulk carriers χαρακτηρίζονται εν γένει ως tramp ναυτιλία .

Η ναυλαγορά είναι ένα κατεχοχόν δυναμικό σύστημα και καθορίζεται κυρίως από τη σχέση και την ισορροπία Προσφοράς και Ζήτησης. Η ζήτηση για μεταφορικές υπηρεσίες μπορεί εν γένει να μεταβληθεί πολύ γρήγορα. Αντιθέτως η προσφορά του διαθέσιμου μεταφορικού τονάζ μεταβάλλεται με πολύ πιο αργούς ρυθμούς, αφού:

-η λήψη της απόφασης για τη ναυπήγηση ενός νέου πλοίου, ή τη διάλυση ενός παλαιού πλοίου είναι δύσκολη και συνήθως λαμβάνεται μετά από αρκετές διαβουλεύσεις.

-η ναυπήγηση ενός νέου πλοίου διαρκεί πολλούς μήνες.

-από τη στιγμή που θα ληφθεί η απόφαση για τη διάλυση ενός παλαιού πλοίου, μέχρι τη στιγμή που αυτό θα καταλήξει στο διαλυτήριο (η πλειοψηφία των διαλυτηρίων βρίσκεται στην Ινδία και στο Πακιστάν), μπορεί να μεσολαβήσουν αρκετοί μήνες.

Ας δούμε τώρα πολύ συνοπτικά ποιοι είναι οι βασικοί παράγοντες που καθορίζουν τη ναυλαγορά:

1)Η διεθνής οικονομική κατάσταση: η ζήτηση για θαλάσσιες μεταφορικές υπηρεσίες είναι παράγωγος ζήτηση και προκύπτει από τη ζήτηση για συγκεκριμένα προϊόντα. Έτσι μια καλή διεθνής οικονομική συγκυρία (που συνοδεύεται από ανάπτυξη και αυξημένη κατανάλωση) έχει σαν αποτέλεσμα ισχυρή ζήτηση για θαλάσσιες μεταφορές.

2)Ο ρυθμός ανάπτυξης των αναπτυσσόμενων χωρών (Κίνα και δευτερευόντως Ινδία): τα τελευταία χρόνια οι εξελίξεις στην Κίνα καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την εικόνα της ναυλαγοράς και ως εκ τούτου αξίζει να γίνει μια ξεχωριστή μνεία. Ο πληθυσμός της χώρας είναι τεράστιος και αστικοποιείται με γοργούς ρυθμούς. Η αστικοποίηση συνοδεύεται από εκτεταμένα έργα (κατοικίες, δρόμοι, υποδομές κλπ) και κατά συνέπεια η ζήτηση για πρώτες ύλες (και άρα για θαλάσσιες μεταφορές) είναι μεγάλη. Προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε αυτό το φαινόμενο υπάρχει ένας πολύ συγκεκριμένος δείκτης, η «πυκνότητα χάλυβα». Στις προηγμένες χώρες της Δύσης και στην Ιαπωνία αντιστοιχούν περίπου 1,000 κιλά χάλυβα ανά κάτοικο. Στην Κίνα αντιστοιχούν περίπου 250 κιλά χάλυβα ανά κάτοικο, ενώ στην Ινδία μόνο 32 κιλά χάλυβα ανά κάτοικο⁶³. Είναι φανερό λοιπόν ότι για τις χώρες αυτές, υπάρχει ένα τεράστιο δυναμικό το οποίο περιμένει να εκδηλωθεί (ή ήδη εκδηλώνεται).

⁶³Toth Peter (2005), *Production and market Strategies in a changing iron ore world*, AJM Global Iron Ore and Steel Forecasting Conference, Perth.

Αν και η Κίνα είναι πλέον ένας πολύ ισχυρός παράγοντας στη διαμόρφωση της ναυλαγοράς, καλό θα είναι να μην την αντιλαμβανόμαστε αποκομμένη από τη διεθνή οικονομική συγκυρία. Στο πίσω μέρος του μυαλού μας θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η Κίνα είναι μια χώρα με έντονο εξαγωγικό προσανατολισμό. Κατά συνέπεια μια υποτονική οικονομία με μειωμένους ρυθμούς κατανάλωσης στις Δυτικές χώρες, έχει απευθείας αντίκτυπο στην οικονομία της Κίνας.

3) Ο παγκόσμιος πληθυσμός: ο παγκόσμιος πληθυσμός είναι ανοδικός. Αυτό εν γένει σημαίνει ότι σε ένα μεσοπρόθεσμο ορίζοντα υπάρχει μια ολοένα αυξανόμενη ζήτηση για πρώτες ύλες και κατά συνέπεια για θαλάσσιες μεταφορές.

4) Η τιμή των μεταφερόμενων αγαθών: όπως ήδη εξηγήσαμε η ζήτηση για θαλάσσιες μεταφορές είναι παράγωγος ζήτηση και προκύπτει από τη ζήτηση για τα διάφορα (προς μεταφορά) αγαθά. Η δε ζήτηση για τα αγαθά είναι με τη σειρά της άμεσα συνδεδεμένη με την τιμή των αγαθών αυτών. Κατά συνέπεια υπάρχει μια εξάρτηση ανάμεσα στη ναυλαγορά και την τιμή των μεταφερόμενων αγαθών.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: η αγορά των φορτηγών πλοίων είναι σε μεγάλο βαθμό συνδεδεμένη με τη βιομηχανία του χάλυβα, καθώς τα bulk carriers μεταφέρουν τόσο τις απαραίτητες πρώτες ύλες⁶⁴, όσο και τα τελικά προϊόντα⁶⁵. Υπάρχουν στατιστικές μελέτες που τεκμηριώνουν την ύπαρξη ισχυρής συσχέτισης ανάμεσα στους ναύλους των bulk carriers, και στις τιμές του σιδηρομεταλλεύματος/χάλυβα. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το έτος 2003 η τιμή του σιδηρομεταλλεύματος⁶⁶ ήταν 30 \$USD/dmt (dry metric ton), η τιμή του χάλυβα⁶⁷ ήταν 350 \$USD/ton και ο δείκτης BDI⁶⁸ (Baltic Dry Index) ήταν στις 2,044 μονάδες. Την άνοιξη του 2008 η τιμή του σιδηρομεταλλεύματος ήταν 135 \$USD/dmt, η τιμή του χάλυβα ήταν 800 \$USD/ton και ο δείκτης BDI στις 8,330 μονάδες. Η πενταετία 2003-2008 χαρακτηρίστηκε από τη μεγάλη αύξηση της παγκόσμιας ζήτησης χάλυβα (που εν πολλοίς συνδέεται με τη ραγδαία ανάπτυξη της Κίνας), και κατά συνέπεια από υψηλές τιμές, τόσο για τα αγαθά (σιδηρομετάλλευμα και χάλυβας), όσο και για τους ναύλους. Το φθινόπωρο του 2008 η ναυλαγορά κατρακύλησε (το Νοέμβριο του 2008 η μέση τιμή του δείκτη BDI ήταν μόλις 835 μονάδες), ενώ παράλληλα η spot τιμή του σιδηρομεταλλεύματος έφτασε στα πιο χαμηλά επίπεδα της πενταετίας (57 \$USD ο τόνος). Όλα τα παραπάνω ασφαλώς καταδεικνύουν την

⁶⁴ Η πρώτη ύλη μπορεί να είναι σιδηρομετάλλευμα ή παλιοσίδηρο scrap, ανάλογα με τον τύπο της χαλυβουργίας. Επίσης πρώτη ύλη μπορεί να είναι και ο μεταλλουργικός άνθρακας (coking coal), που συνήθως είναι απαραίτητος στη διαδικασία παραγωγής (περίπου το 70% της παγκόσμιας παραγωγής χάλυβα γίνεται με τη χρήση μεταλλουργικού άνθρακα). Υπολογίζεται ότι το έτος 2007 μεταφέρθηκαν δια θαλάσσης περίπου 780 εκ. τόνοι σιδηρομεταλλεύματος (πηγή: www.clarksons.net) και 220 εκ. τόνοι μεταλλουργικού άνθρακα (πηγή: www.worldcoal.org).

⁶⁵ Η γκάμα των «τελικών» προϊόντων είναι τεράστια και περιλαμβάνει από προϊόντα έτοιμα προς χρήση (όπως σωλήνες ή λαμαρίνες), μέχρι ημικατεργασμένα προϊόντα που θα οδηγηθούν ξανά στο χυτήριο (steel slabs). Υπολογίζεται ότι το 2007 μεταφέρθηκαν δια θαλάσσης περίπου 270 εκ. τόνοι προϊόντων σιδήρου (πηγή: www.thefreelibrary.com).

⁶⁶ Αναφέρεται η προ-συμφωνηθείσα τιμή (contract price) FOB από το λιμάνι του Tubarao, και αφορά τις εξαγωγές του μεταλλευτικού κολοσσού Vale προς τις χαλυβουργίες της Βόρειας Ευρώπης.

⁶⁷ Αναφέρεται η τιμή FOB για Hot Rolled Coil (HRC), από εξαγωγικό λιμάνι της Μαύρης Θάλασσας.

⁶⁸ Αναφέρεται η μέση τιμή του δείκτη για το μήνα Απρίλιο του έτους 2003.

«παράλληλη» πορεία που ακολουθεί η αγορά χάλυβα και η ναυλαγορά. Σαφέστατα δε κανείς αντιλαμβάνεται και την ύπαρξη κάποιου «κύκλου» (με μια φάση ανάπτυξης και μια φάση κορεσμού που οδήγησε στην κατάρρευση), αλλά για αυτό θα μιλήσουμε παρακάτω.

5) Η παραγωγικότητα των λιμένων: η χαμηλή παραγωγικότητα των λιμένων είναι ικανή να προκαλέσει μια τεχνητή μείωση στην προσφορά διαθέσιμου τανάζ και άρα να συνεισφέρει στην αύξηση των ναύλων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της Νιγηρίας όπου στη δεκαετία του 1970 τα πλοία περίμεναν ακινητοποιημένα ολόκληρους μήνες προκειμένου να ξεφορτώσουν. Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα λιμάνια στην Ανατολική ακτή της Αυστραλίας, όπου το έτος 2007 ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πλοίου στο αγκυροβόλιο προκειμένου να φορτώσει, ήταν πάνω από ένα μήνα.

6) Πολιτικά γεγονότα: τα διάφορα πολιτικά γεγονότα, όπως είναι οι πόλεμοι, οι επαναστάσεις, οι απεργίες, οι αποκλεισμοί, η σύναψη διακρατικών συμμαχιών κλπ επηρεάζουν σημαντικά τη ναυλαγορά. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο Αραβο-Ισραηλινός πόλεμος την δεκαετία του 1950 που είχε σαν αποτέλεσμα το κλείσιμο της Διώρυγας του Σουέζ. Τα πλοία ήταν πλέον υποχρεωμένα να κάνουν τον περίπλο της Αφρικής, και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την αύξηση των τονομιλίων και άρα της ζήτησης για θαλάσσιες μεταφορές.

7) Η διανυθείσα απόσταση (τονομίλια): εκείνο που πραγματικά ενδιαφέρει δεν είναι απλά η ποσότητα των μεταφερομένων φορτίων (τόνοι), αλλά το γινόμενο της ποσότητας επί τη διανυθείσα απόσταση (τονομίλια). Ήδη παραπάνω είδαμε τον αντίκτυπο που είχε το κλείσιμο της Διώρυγας του Σουέζ στη δεκαετία του 1950. Ένα άλλο αντίστοιχο παράδειγμα είναι οι κινεζικές εισαγωγές σιδηρομεταλλεύματος: οι εισαγωγές αυτές μπορεί να γίνουν από την Ινδία και την Αυστραλία (περίπου 15 μέρες έμφορτου ταξιδιού), ή από τη Νότια Αμερική (πάνω από ένας μήνας έμφορτου ταξιδιού). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε πρακτικά διπλασιασμό της ζήτησης για μεταφορικές υπηρεσίες.

8) Οι καιρικές συνθήκες: οι καιρικές συνθήκες επηρεάζουν ποικιλοτρόπως τις θαλάσσιες μεταφορές. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι καιρικές συνθήκες επηρεάζουν την κατά τόπους γεωργική παραγωγή, και κατά συνέπεια διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό το προφίλ του θαλάσσιου εμπορίου των δημητριακών (οι χώρες που είχαν πλούσια σοδειά τροφοδοτούν τις χώρες που είχαν φτωχή σοδειά).

9) Ο ρυθμός παράδοσης νέων πλοίων και ο ρυθμός διάλυσης παλαιών πλοίων: η παράδοση των νέων πλοίων και η απόσυρση των παλαιών, παίζει σπουδαίο ρόλο καθώς διαμορφώνει το προφίλ της προσφοράς τανάζ. Οι αποφάσεις που λαμβάνονται από τους πλοιοκτήτες στηρίζονται συνήθως σε υποκειμενικά κριτήρια: για παράδειγμα, μια καλή ναυλαγορά δημιουργεί υπεραισιοδοξία που μεταφράζεται σε σωρεία νέων παραγγελιών (παρόλο που οι τιμές των πλοίων είναι υψηλές και οι χρόνοι παράδοσης μεγάλοι). Σε κάθε περίπτωση, και όπως ήδη αναφέραμε, οι μεταβολές στην προσφορά χωρητικότητας είναι εν γένει αργές και παρουσιάζουν ένα σημαντικό ποσό αδράνειας.

Συνδυάζοντας όλους τους παραπάνω παράγοντες, και κοιτώντας την πορεία της ναυλαγοράς στο πέρασμα του χρόνου, μπορεί κανείς να αντιληφθεί την ύπαρξη κάποιας κυκλικότητας. Οι θεωρίες των οικονομικών κύκλων είναι εν γένει διαδεδομένες στην οικονομική επιστήμη και εμφανίζονται ήδη από τον 19^ο αιώνα⁶⁹. Υπάρχουν αρκετές επιστημονικές προσπάθειες που προσπαθούν να εξηγήσουν το χαρακτήρα της ναυλαγοράς με βάση τις θεωρίες αυτές⁷⁰. Κοινός παρανομαστής σε όλες αυτές τις προσπάθειες είναι η ύπαρξη διαδοχικών φάσεων:

-η φάση της ύφεσης: εδώ υπάρχει υπερπροσφορά χωρητικότητας. Οι ναύλοι είναι χαμηλοί, κάτι που αναγκάζει τους πλοιοκτήτες να παροπλίσουν τα πλοία τους ή να τα οδηγήσουν στο διαλυτήριο. Υπάρχει απαισιοδοξία, οι αξίες των πλοίων είναι χαμηλές, και οι παραγγελίες για νέα πλοία στα ναυπηγεία είναι περιορισμένες.

-η φάση της ανάκαμψης: η προσφορά και η ζήτηση τείνουν σε μια σχετική ισορροπία. Οι ναύλοι έχουν ανέβει και ο αριθμός των παροπλισμένων πλοίων μειώνεται.

-η φάση της κορύφωσης: οι ναύλοι είναι πλέον πολύ υψηλοί (υπερκαλύπτουν αρκετές φορές το κόστος λειτουργίας των πλοίων). Ο αριθμός των παροπλισμένων πλοίων είναι πρακτικά μηδενικός. Υπάρχει ευφορία που οδηγεί σε πληθώρα νέων παραγγελιών αλλά και σε μείωση του αριθμού των πλοίων που οδηγούνται στα διαλυτήρια.

-η φάση της κατάρρευσης: η διατήρηση των ναύλων σε πολύ υψηλά επίπεδα δημιουργεί πρόβλημα καθώς δυσχεραίνει το διεθνές εμπόριο. Η είσοδος των νέων πλοίων και η μη-απομάκρυνση των παλαιών διαταράσσει την ισορροπία και δημιουργεί υπερπροσφορά χωρητικότητας. Το αποτέλεσμα είναι η πτώση των ναύλων.

Για προφανείς λόγους οικονομίας, θα αποφύγουμε την περαιτέρω ποιοτική ανάλυση της ναυλαγοράς και θα κλείσουμε αυτήν την παράγραφο εδώ. Ο αναγνώστης που επιθυμεί να εμβαθύνει περισσότερο, μπορεί να καταφύγει στην υπάρχουσα ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, που είναι πλούσια⁷¹.

⁶⁹ Ενδεικτικά αναφέρουμε το έργο του Kitchin (κύκλοι 3-5 χρόνων), του Juglar (κύκλοι 9-11 χρόνων), του Kuznets (κύκλοι 15-20 χρόνων) και του Kondratieff (κύκλοι 45-60 χρόνων):

-Kitchin J. (1923), *Cycles and trends in Economic Factors*, Review of Economic Statistics 5.

-Juglar Clement (1862), *Des crises commerciales et leur retour periodique en France, en Angleterre et aux Etats Unis*

-Kuznets S. (1930), *Secular movements in production and prices: the nature and their bearing upon cyclical fluctuations*, Boston Houghton Mifflin.

-Kondratieff Nikolai D. (1935), *The long waves in economic life*.

⁷⁰ Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Hampton M.J. (1990), *Long and Short Shipping Cycles. The rhythms and psychology of Shipping Markets*, Cambridge Academy of Transport, 2nd Edition.

⁷¹ Ενδεικτικά αναφέρουμε:

-Βλάχος Γεώργιος & Γεωργαντόπουλος Ελευθέριος (1997), *Ναυτιλιακή Οικονομική*, Εκδόσεις J&J Hellas, Πειραιάς.

-Γκιζιάκης Κώστας, Παπαδόπουλος Α, Πλωμαρίτου Ε (2002), *Εισαγωγή στις Ναυλώσεις*, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα.

-Stopford Martin (1999), *Maritime Economics*, 2nd Edition Routledge.

3.3. Η χρονοσειρά – Ο ναυλοδείκτης BDI

Όπως έχουμε ήδη πει σκοπός μας είναι η δημιουργία ενός μη γραμμικού μοντέλου βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης της ναυλαγοράς των φορτηγών χύδην ξηρού φορτίου. Προκειμένου να γίνει αυτό πρέπει καταρχήν να επιλέξουμε τον τρόπο με τον οποίο αποτιμάται η ναυλαγορά και να δημιουργήσουμε την αντίστοιχη χρονοσειρά. Η επιλογή αυτή δεν είναι προφανής. Τίθενται διάφορα ερωτήματα, όπως για παράδειγμα:

- θα επικεντρωθούμε σε ένα συγκεκριμένο μέγεθος (πχ αγορά των capesizes); 'Η πολύ περισσότερο, σε μια συγκεκριμένη διαδρομή (πχ capesize iron ore trip Brazil to North Europe); 'Η μήπως θέλουμε μια πιο σφαιρική εικόνα;
- θα αποτιμήσουμε την αγορά σε όρους TimeCharter trip (\$USD/day); 'Η μήπως να επιλέξουμε κάποιον από τους καθιερωμένους ναυλοδείκτες;

Προτού απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά, είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε τι είναι οι ναυλοδείκτες: η απόδοση της ναυλαγοράς των bulkers αποτιμάται καθημερινά μέσα από τους ναυλοδείκτες (freight indices) ξηρού φορτίου. Οι πλέον καθιερωμένοι ναυλοδείκτες είναι αυτοί που εκδίδονται από το Baltic Exchange του Λονδίνου. Το Baltic Exchange εξέδωσε για πρώτη φορά τον Ιανουάριο του 1985 τον BFI (Baltic Freight Index). Έκτοτε έχει προβεί σε αρκετές τροποποιήσεις, με σκοπό οι δείκτες να είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικοί και να μεταφέρουν την καλύτερη δυνατή εικόνα της αγοράς. Σήμερα, ανάλογα με το μέγεθος του πλοίου, συναντάμε τον BCI (Baltic Cape Index-αφορά πλοία τύπου capesize), τον BPI (Baltic Panamax Index-αφορά πλοία τύπου panamax), τον BSI (Baltic Supramax Index-αφορά πλοία τύπου supramax) και τον BHSI (Baltic Handysize Index-αφορά πλοία τύπου handy). Ο κάθε ένας από αυτούς τους δείκτες προκύπτει ως σταθμισμένος μέσος όρος των τυπικών ναυλώσεων της ημέρας⁷². Η σύνθεση των τεσσάρων αυτών επιμέρους δεικτών δίνει τον BDI (Baltic Dry Index), που είναι ο γενικός δείκτης μέτρησης της ναυλαγοράς ξηρού χύδην φορτίου. Ο δείκτης BDI αντικατέστησε τον BFI τον Οκτώβρη του 1999.

Επανερχόμενοι λοιπόν στο ζήτημα της επιλογής της χρονοσειράς, η χρήση του δείκτη BDI προβάλλει ως η καλύτερη λύση. Τα βασικά πλεονεκτήματα που παρουσιάζει είναι τα εξής:

- τα στοιχεία του BDI καλύπτουν μια μεγάλη χρονική περίοδο (ξεκινούν από το 1985 και συνεχίζουν αδιάλειπτα μέχρι και σήμερα) και είναι σχετικά εύκολα προσβάσιμα. Τα στοιχεία των επιμέρους δεικτών είναι πιο περιορισμένα καθώς άρχισαν να χρησιμοποιούνται στα τέλη της δεκαετίας του '90.
- ο δείκτης BDI είναι σήμερα το πλέον καθιερωμένο εργαλείο αποτίμησης της ναυλαγοράς και φέρει την εγκυρότητα του Baltic Exchange.
- ο δείκτης BDI δίνει μια σφαιρική εικόνα της ναυλαγοράς. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου δρομολογίου δεν είναι τόσο καλή ιδέα, γιατί είναι εκτεθειμένη σε μεμονωμένους παράγοντες

⁷² Οι «τυπικές» ναυλώσεις αναφέρονται σε συγκεκριμένα/χαρακτηριστικά δρομολόγια/φορτία (τα λεγόμενα routes, πχ Transatlantic round, ή US Gulf-Japan κλπ). Ανάλογα δε με τη σημασία του συγκεκριμένου δρομολογίου επιλέγεται και ο αντίστοιχος συντελεστής βαρύτητας, προκειμένου να προκύψει ο τελικός σταθμισμένος μέσος όρος.

που πολλές φορές δε σχετίζονται με την πραγματική εικόνα της αγοράς (εποχικότητα, καιρικές συνθήκες, παραγωγικότητα λιμένων, σύναψη συγκεκριμένων εμπορικών συμφωνιών κτλ).

-ας σημειώσουμε επίσης ότι παρόλο που ο τρόπος υπολογισμού του BFI/BDI έχει τροποποιηθεί επανειλημμένα, κάθε φορά εξασφαλιζόταν η συνέχεια των τιμών του δείκτη. Επίσης η βασική φιλοσοφία πίσω από το δείκτη εξακολουθεί να παραμένει η ίδια από την πρώτη ημέρα της δημιουργίας του.

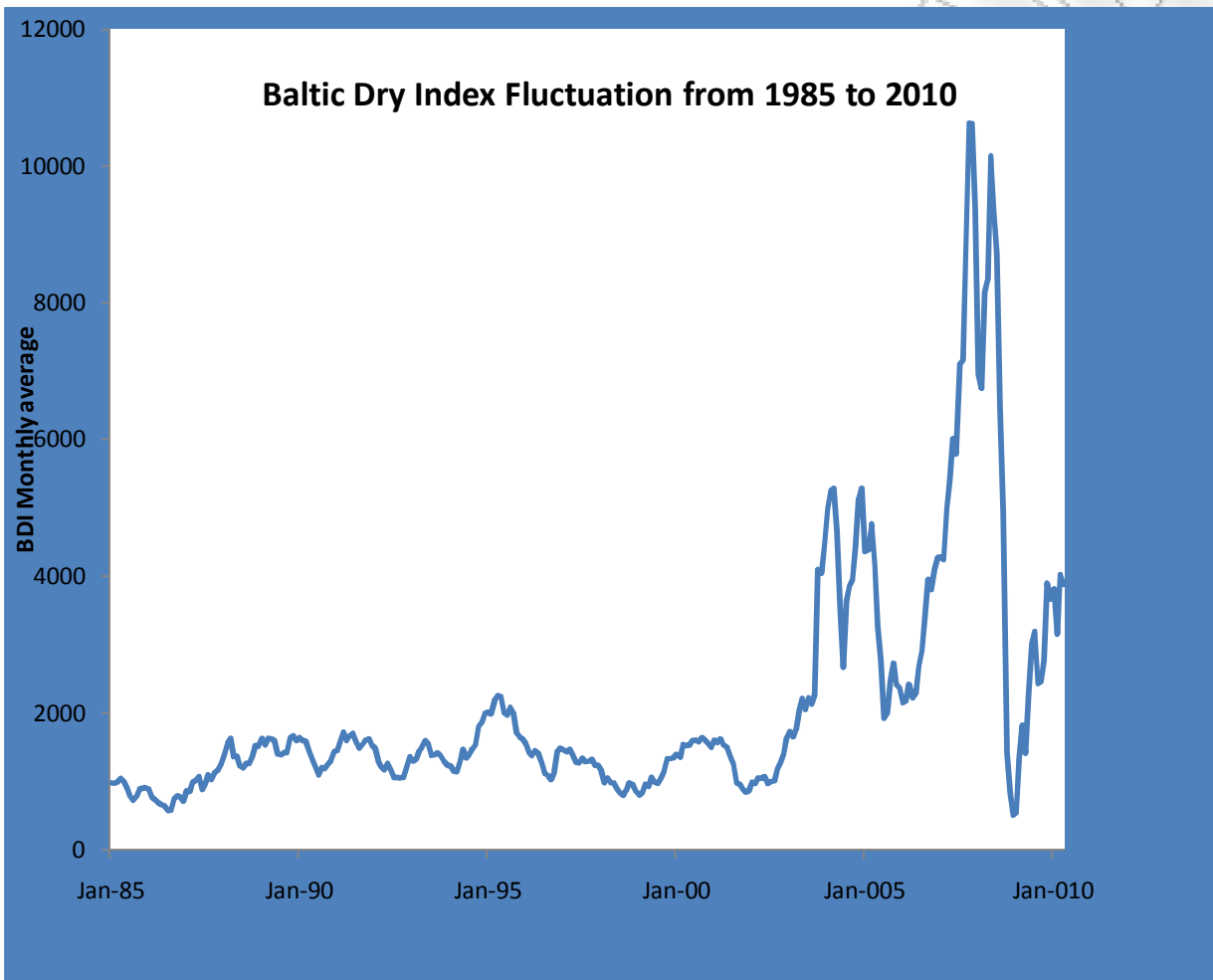
Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τις τιμές του BDI από το 1985 μέχρι και σήμερα. Όπως είναι γνωστό ο δείκτης BDI εκδίδεται σε καθημερινή βάση. Προκειμένου πάντως να περιορίσουμε τον όγκο των δεδομένων και ταυτόχρονα να αποδώσουμε την ουσιαστική εικόνα της αγοράς, επιλέξαμε να δουλέψουμε με τη μέση μηνιαία τιμή του δείκτη BDI.

Οι αριθμοί που ακολουθούν θα αποτελέσουν τα «δεδομένα εισόδου» για το μη γραμμικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού.

BDI – MONTHLY AVERAGE FROM 1985 TO 2010												
	Ιαν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μια	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νοε	Δεκ
85	980	974	994	1045	1004	913	780	725	782	892	903	907
86	893	774	741	693	661	643	573	587	748	790	772	707
87	864	852	991	1019	1070	886	969	1102	1031	1136	1171	1263
88	1399	1562	1630	1358	1370	1231	1197	1261	1266	1369	1528	1519
89	1635	1533	1633	1629	1596	1401	1387	1426	1422	1635	1667	1599
90	1646	1595	1591	1446	1317	1211	1101	1212	1188	1250	1306	1437
91	1449	1591	1725	1599	1668	1707	1573	1491	1541	1606	1622	1538
92	1493	1311	1217	1172	1266	1170	1066	1067	1053	1062	1208	1359
93	1300	1329	1441	1503	1599	1545	1377	1387	1417	1371	1299	1233
94	1225	1154	1148	1296	1475	1347	1402	1481	1537	1808	1862	1993
95	2017	1990	2196	2258	2241	2006	1968	2089	2010	1716	1654	1622
96	1549	1435	1384	1454	1415	1272	1118	1088	1030	1132	1448	1489
97	1461	1439	1471	1385	1279	1273	1340	1294	1298	1324	1237	1235
98	1155	985	1055	984	981	897	840	799	872	984	958	851
99	803	836	967	923	1063	989	977	1046	1146	1339	1334	1344
00	1396	1356	1548	1522	1539	1597	1606	1583	1646	1608	1555	1497
01	1611	1569	1621	1536	1497	1371	1253	984	960	888	842	864
02	988	969	1058	1043	1069	972	998	1006	1182	1285	1410	1645
03	1731	1657	1763	2044	2218	2053	2222	2130	2273	4100	4043	4461
04	4988	5265	5285	4652	3543	2672	3641	3853	3953	4425	5144	5285
05	4361	4394	4774	4162	3270	2767	1927	2001	2482	2729	2414	2373
06	2154	2179	2419	2223	2283	2678	2912	3393	3954	3811	4087	4272
07	4286	4245	4989	5390	6016	5787	7101	7165	8828	10631	10616	9395
08	6954	6743	8149	8330	10144	9324	8716	6470	4943	1417	835	512
09	551	1332	1824	1416	2293	3015	3194	2435	2459	2770	3898	3666
10	3823	3155	4024	3885								

Πηγή: Carriers Chartering and Brokering - Athens

Στην επόμενη σελίδα, τα παραπάνω στοιχεία παρατίθενται και σε διαγραμματική μορφή. Το διάγραμμα εμφανίζει (έναντι του πίνακα) το πλεονέκτημα της αμεσότητας, καθώς η πορεία του δείκτη αποτυπώνεται πολύ αποτελεσματικά και οι διάφορες μεταβολές είναι εύκολα ορατές.



Κοιτώντας το διάγραμμα, μπορούμε να πούμε ότι η πορεία του BDI αποτυπώνεται πολύ συνοπτικά ως εξής:

- μέχρι το 2003 η αγορά παρουσιάζει μια εν γένει «σταθερή» εικόνα με «φυσιολογικές» διακυμάνσεις.
- από το τέλος του 2003, η αγορά «εκτινάσσεται». Παρουσιάζει βέβαια κάποια τοπικά ελάχιστα, αλλά μέχρι και το φθινόπωρο του 2008 θα κυμανθεί σε πρωτοφανώς υψηλά επίπεδα.
- Το φθινόπωρο του 2008 η αγορά καταρρέει ξαφνικά, για να ανακάμψει μερικώς στα μέσα του 2009.

Οι λόγοι πίσω από αυτήν την πορεία (κυρίως μετά το 2003) είναι προφανώς πολλοί. Είναι πάντως κοινός αποδεκτός τόπος ότι η έντονη ανάπτυξη της Κίνας (με κυρίαρχο χαρακτηριστικό τα μεγάλα έργα υποδομών και την έντονη αστικοποίηση) υπήρξε καταλύτης καθώς συνοδεύτηκε από τεράστιες εισαγωγές πρώτων υλών (κυρίως σιδηρομεταλλεύματος). Στα τέλη του 2008, η αγορά φαίνεται ότι έφτασε σε σημείο κορεσμού, κάτι που οδήγησε σε βίαιη αντίδραση και στην πρωτοφανώς απότομη πτώση της. Βασικό χαρακτηριστικό της πτώσης αυτής ήταν το μεγάλο ποσό αδράνειας που περιείχε, αφού η αγορά οδηγήθηκε σε πρακτικά μηδενικά επίπεδα.

Είναι ενδιαφέρον να δούμε αν (και κατά πόσο) το θεωρητικό μας μοντέλο θα μπορέσει να αναπαράγει αυτήν την απότομη αντίδραση που είχε η αγορά το φθινόπωρο του 2008.

3.4. Το μη γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης του BDI

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε μια εκτενή παρουσίαση των διαφόρων μοντέλων πρόβλεψης χρονοσειρών: αναφερθήκαμε στα γραμμικά και στα μη γραμμικά μοντέλα. Επίσης αναφερθήκαμε στα τοπικά, στα ημι-τοπικά και στα καθολικά μοντέλα.

Στην παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω (ή τουλάχιστον μέρος από αυτά) και να κατασκευάσουμε ένα μη γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης για τη χρονοσειρά μας, το ναυλοδείκτη BDI. Για το σκοπό αυτό επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ημι-τοπικό μοντέλο, τύπου RBF (Radial Basis Function). Η επιλογή αυτή βασίζεται καταρχήν στην ευελιξία που παρουσιάζουν τα ημιτοπικά μοντέλα (όπως ήδη έχουμε πει, συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα των καθολικών και των τοπικών μοντέλων). Από την άλλη, στη βιβλιογραφία τα μοντέλα RBF είναι λιγότερο διαδεδομένα από τα αντίστοιχα μοντέλα νευρωνικών δικτύων. Αξίζει λοιπόν να πειραματιστούμε με ένα μοντέλο RBF και να δούμε αν και κατά πόσο είναι αποτελεσματικό.

3.4.1. Το μοντέλο

Θυμίζουμε ότι ένα μοντέλο RBF έχει εν γένει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{F}(x_k) = \sum_{i=1}^s \omega_i \varphi_i(\|x_k - \xi_i\|)$$

Για να πάρει το μοντέλο αυτό σάρκα και οστά, και να μπορέσει να τρέξει σε υπολογιστή, πρέπει καταρχήν να καθορίσουμε με σαφήνεια τις διάφορες παραμέτρους που περιέχει. Πιο συγκεκριμένα:

x_k : είναι το διάνυσμα των ήδη γνωστών (πλέον πρόσφατων) τιμών της χρονοσειράς $x_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(m-1)})$, όπου m είναι η υστέρηση που αντιστοιχεί στο θεώρημα Takens. Θα αναφερθούμε αναλυτικά στην επιλογή της υστέρησης m παρακάτω.

s : είναι ο αριθμός των κέντρων ξ_i και των συναρτήσεων βάσης $\varphi_i, i = 1, \dots, s$. Σε κάποια μοντέλα ο αριθμός αυτός είναι παράμετρος προς βελτιστοποίηση. Κάτι τέτοιο όμως αυξάνει πολύ το υπολογιστικό κόστος και για αυτό το λόγο θα το αποφύγουμε στην παρούσα εργασία. Αντί αυτού, το πλήθος s προκύπτει αυτόματα από τη διαδικασία επιλογής των κέντρων ξ_i (δες και παρακάτω τη μεθοδολογία επιλογής των κέντρων ξ_i). Αξίζει πάντως να σημειώσουμε σα γενικό σχόλιο, ότι τα μοντέλα RBF είναι εν γένει ευαίσθητα στην ύπαρξη του θορύβου και για αυτό καλό είναι να αποφύγουμε να «υπερ-ορίσουμε» το σύστημά μας. Κατά συνέπεια, καλό είναι ο αριθμός s των συναρτήσεων να είναι σαφώς μικρότερος από το συνολικό αριθμό των γνωστών τιμών της χρονοσειράς⁷³.

ω_i : είναι οι σταθεροί συντελεστές βαρύτητας οι οποίοι ενεργούν απάνω στις συναρτήσεις βάσης φ_i . Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό σφάλμα πρόβλεψης. Πιο συγκεκριμένα, έστω $x_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(m-1)})$, το διάνυσμα με τις πλέον πρόσφατες τιμές της χρονοσειράς μας. Αναζητούμε μια προτεραιά κατάσταση της χρονοσειράς, η οποία να ομοιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο με την παρούσα κατάσταση. Με άλλα λόγια αναζητούμε το πλέον κοντινό διάνυσμα τιμών στο διάνυσμα x_k . Το διάνυσμα αυτό το ονοματίζουμε $x_{k(1)} = (x_{k(1)}, x_{k(1)-1}, \dots, x_{k(1)-m+1})$ και εξ ορισμού ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|x_k - x_{k(1)}\|$. Η κατάσταση $x_{k(1)}$ έχει το διττό πλεονέκτημα ότι αφενός είναι πλήρως γνωστή (αφού γνωρίζουμε και την επόμενη τιμή $x_{k(1)+1}$), και αφετέρου είναι «συγγενής» (δηλαδή πολύ κοντά) της παρούσης κατάστασης x_k . Άρα είναι η πλέον κατάλληλη για τον προσδιορισμό των συντελεστών ω_i . Εισάγοντας λοιπόν στο μοντέλο που έχουμε δημιουργήσει το διάνυσμα $x_{k(1)}$, μπορούμε να επιχειρήσουμε να κάνουμε μια πρόβλεψη, έστω $\hat{x}_{k(1)+1}$, για την ήδη γνωστή τιμή $x_{k(1)+1}$. Στην περίπτωση αυτή, το σφάλμα πρόβλεψης $e_{k(1)} = |\hat{x}_{k(1)+1} - x_{k(1)+1}|$ είναι γνωστό και εξαρτάται αποκλειστικά από τους συντελεστές ω_i , δηλαδή $e_{k(1)} = g(\omega_i)$, όπου g είναι μια γραμμική συνάρτηση. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία l φορές (για

⁷³ Δες και:

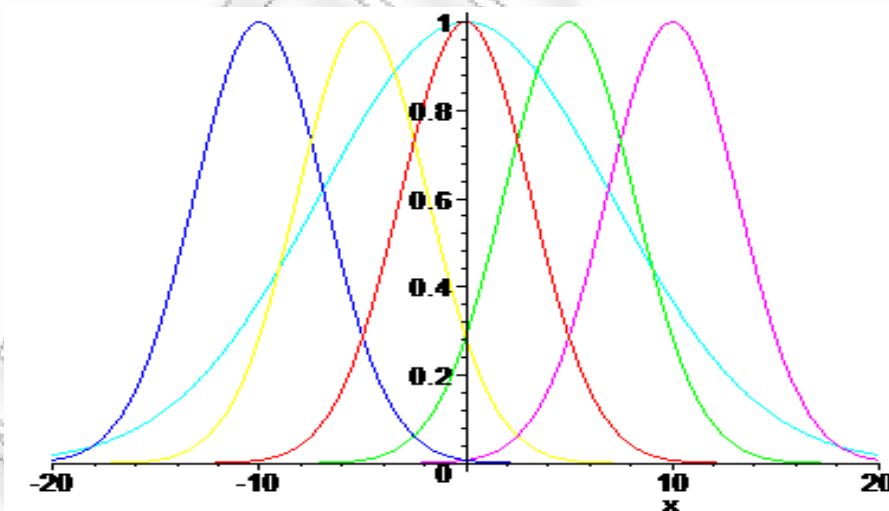
D.S. Broomhead and D.Lowe (1988), *Multivariate functional interpolation and adaptive networks*, Complex Systems, 2:321-355.

$\mathbf{x}_{k(1)}, \mathbf{x}_{k(2)}, \dots, \mathbf{x}_{k(l)}$, όπου με $\mathbf{x}_{k(i)}$ εν γένει συμβολίζουμε το i -οστό πιο κοντινό διάνυσμα στο \mathbf{x}_1 , με $l \geq s$, καταλήγουμε σε ένα συνολικό σφάλμα πρόβλεψης $e = e_{k(1)} + e_{k(2)} + \dots + e_{k(l)}$. Η απαίτηση το σφάλμα αυτό να γίνει ελάχιστο, οδηγεί απευθείας σε μονοσήμαντο καθορισμό των συντελεστών ω_i . Ας σημειώσουμε εδώ ότι εάν $l < s$, τότε το πρόβλημα δεν είναι επαρκώς ορισμένο και οι συντελεστές ω_i δεν καθορίζονται μονοσήμαντα. Εάν $l = s$, τότε στην ουσία το πρόβλημα εκπίπτει στη λύση ενός γραμμικού $s \times s$ συστήματος (δηλαδή κατά κάποιο τρόπο απουσιάζει η έννοια της βελτιστοποίησης). Αν τέλος $l > s$, τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι επαρκώς ορισμένο, και οι τιμές ω_i όντως ελαχιστοποιούν το σφάλμα. Βέβαια σε αυτήν την τελευταία περίπτωση απαιτείται και η χρήση κάποιας μεθοδολογίας/λογισμικού βελτιστοποίησης/εύρεσης ελαχίστου.

φ_i : είναι οι συναρτήσεις βάσεις. Επιλέξαμε οι συναρτήσεις αυτές να έχουν την κάτωθι μορφή:

$$\varphi_i(r) = \exp(-r^2/2\sigma_i^2)$$

Η μορφή αυτή, που είναι γνωστή ως «καπέλο του Gauss», είναι ευρέως καθιερωμένη σαν approximator⁷⁴ και έχει κάποια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά: αν και θεωρητικά το πεδίο τιμών της $\varphi_i(r - \mu) = \exp(-(r - \mu)^2/2\sigma_i^2)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, στην πράξη ο φορέας της είναι πεπερασμένος, και για πρακτικούς λόγους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι $[\mu - 3\sigma_i, \mu + 3\sigma_i]$. Αν λοιπόν πάρουμε ένα γραμμικό συνδυασμό $\sum \omega_i \varphi_i(r - \mu_i)$ και επιλέξουμε με «έξυπνο» τρόπο τους συντελεστές βαρύτητας ω_i , τα κέντρα μ_i και το εύρος (διασπορά) σ_i του εκάστοτε φορέα, τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε πρακτικά οποιαδήποτε μορφή θέλουμε (universal approximator). Το παρακάτω σχήμα είναι χαρακτηριστικό, καθώς παρουσιάζει μια τέτοια γραμμική υπέρθεση συναρτήσεων Gauss.



Υπέρθεση συναρτήσεων Gauss με διαφορετικές διασπορές και κέντρα.

Ένα σημαντικό ερώτημα που τίθεται λοιπόν, είναι με ποιο τρόπο θα επιλέξουμε τη διασπορά σ_i και τα κέντρα μ_i (στην προκείμενη περίπτωση τα σημεία ξ_i) των διαφόρων συναρτήσεων

⁷⁴ B.Lillekjendlie, D.Kugiumtzis, N.Christophersens, *Chaotic Time Series Part II: System Identification and Prediction*, Modelling Identification and Control, Vol 15, No4.

Gauss. Κακή επιλογή διασπορών/κέντρων μπορεί να οδηγήσει σε πλημμυρή κάλυψη του χώρου, με αποτέλεσμα πολλά σημεία να μην υποστηρίζονται καθόλου από τον αντίστοιχο φορέα κάποιας συνάρτησης Gauss⁷⁵. Από την άλλη, είναι σημαντικό να συγκρατήσουμε το υπολογιστικό βάρος σε όσο το δυνατόν χαμηλά επίπεδα για να αποφευχθεί «υπερφόρτωση» του συστήματος.

Για το σκοπό αυτό, και προκειμένου να επιλέξουμε τα κέντρα ξ_i , θα στηριχθούμε στην προσέγγιση που έχει προταθεί από τους Kantz&Schreiber⁷⁶. Πιο συγκεκριμένα, αν m είναι η διάσταση εμβύθισης και $[a, b]$ το διάστημα μέσα στο οποίο κινείται εν γένει η τιμή της χρονοσειράς μας, τότε μας ενδιαφέρει ο υπόχωρος $[a, b] \times [a, b] \times \dots \times [a, b] \subseteq \mathbb{R}^m$. Τον υπόχωρο αυτόν τον διαμερίζουμε σε κελιά, δημιουργώντας καταυτόν τον τρόπο ένα ορθογώνιο πλέγμα. Το πλέγμα αυτό θα μας βοηθήσει να επιλέξουμε τα κέντρα ξ_i . Μια πιθανή λύση θα ήταν να τοποθετήσουμε ένα κέντρο ξ_i μέσα σε κάθε κελί. Κάτι τέτοιο όμως θα αύξανε υπερβολικά το υπολογιστικό κόστος. Για το σκοπό αυτό λοιπόν, επιλέγουμε μόνο τα κελιά που περιέχουν σημεία του ελκυστή⁷⁷, και τοποθετούμε τα ξ_i αποκλειστικά και μόνο στα κελιά αυτά (πιο συγκεκριμένα τοποθετείται ένα ξ_i στο κέντρο κάθε τέτοιου κελιού). Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται μια ορθολογιστική διανομή των κέντρων ξ_i (η οποία παρ' ελπίδα θα αναπαράγει με επιτυχία τον ελκυστή), ενώ ταυτόχρονα το υπολογιστικό κόστος συγκρατείται όσο το δυνατόν χαμηλά.

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, για δεδομένη διαμέριση, η θέση και ο αριθμός των κέντρων ξ_i καθορίζονται μονοσήμαντα. Ένα ζήτημα που σαφώς προκύπτει είναι ποια είναι η βέλτιστη διαμέριση: μπορούμε να πάμε σε μια πυκνή διαμέριση (*fine grid*) με πολλά κελιά ή σε μια πιο αραιή διαμέριση (*coarse grid*) με λίγα κελιά. Μια πυκνή διαμέριση σαφώς αυξάνει το υπολογιστικό κόστος και ως εκ τούτου είναι επιλογή μας σε αυτήν την εργασία να δουλέψουμε με αραιό πλέγμα.

Η επιλογή των διασπορών σ_i , είναι ένα επίσης σημαντικό κομμάτι του μοντέλου και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή. Η διασπορά εν γένει δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μικρή, αλλά ούτε πολύ μεγάλη: μικρή διασπορά ισοδυναμεί με περιορισμένο φορέα, και ως εκ τούτου κάποιες περιοχές του χώρου δε θα καλύπτονται καθόλου από συναρτήσεις Gauss. Μεγάλη διασπορά, πρακτικά σημαίνει ότι η συνάρτηση Gauss τείνει σε ευθεία γραμμή και ως εκ τούτου γίνεται πλέον ακατάλληλη για να μπορέσει να αναπαράγει τις όποιες ιδιαιτερότητες του ελκυστή. Βέβαια οι έννοιες «μικρή» και «μεγάλη» διασπορά, σχετίζονται μεταξύ άλλων και με τη διαμέριση του χώρου: πυκνό πλέγμα συνοδεύεται από μικρότερες τιμές διασποράς, ενώ αραιό πλέγμα απαιτεί μεγαλύτερες τιμές διασποράς. Σε κάθε περίπτωση, η σωστή προσέγγιση είναι να θεωρηθεί η διασπορά παράμετρος προς βελτιστοποίηση. Δυστυχώς η βελτιστοποίηση (αριθμητική ή αναλυτική) του συστήματος που μεταξύ άλλων περιέχει ως παράμετρο και τη διασπορά είναι αρκετά πολύπλοκη και σαφώς ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Αντί αυτού λοιπόν, επιλέξαμε μια πιο εμπειρική προσέγγιση: έχοντας καθορίσει τα λοιπά δεδομένα του προβλήματος, τρέξαμε τον αλγόριθμο μας επιλεκτικά για κάποιες

⁷⁵ Lillekjendlie B., Kugiumtzis D., Christophersens N.: όπως παραπάνω.

⁷⁶ Kantz Holger and Schreiber Thomas (2004), *Nonlinear Time Series Analysis*, 2nd Edition, Cambridge University Press.

⁷⁷ Ένα τυχαίο σημείο του ελκυστή, έστω x_i , είναι m -διάστατο και έχει τη μορφή $x_i = (x_i, \dots, x_{i-m+1})$, όπου x_i είναι μια οποιαδήποτε προτεραιία (γνωστή) τιμή της χρονοσειράς μας.

συγκεκριμένες τιμές διασποράς και τελικά υιοθετήσαμε την τιμή εκείνη που έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα.

m : είναι η διάσταση εμβύθισης. Έχουμε ήδη αναφερθεί εκτενώς στη σημασία της, καθώς και στον υπολογισμό της μέσω της μεθόδου των ψευδών κοντινότερων γειτόνων. Η φιλοσοφία της μεθόδου αυτής είναι πολύ ξεκάθαρη και διαυγής, αλλά εμπεριέχει ένα λεπτό σημείο, το οποίο χρήζει ειδικής μνείας: θυμίζουμε λοιπόν ότι όταν $x_i^m = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m+1})$ και $x_j^m = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m+1})$ είναι δυο σημεία του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων⁷⁸ τα οποία είναι κοντά (δηλαδή $\|x_i^m - x_j^m\| \approx 0$), τότε καλούμαστε να ελέγξουμε αν τα σημεία αυτά είναι πραγματικά κοντά, ή αν είναι ψευδείς γείτονες. Για να γίνει αυτό, αυξάνουμε κατά 1 τη διάσταση εμβύθισης (σε $m + 1$) και εξετάζουμε εκ νέου την απόσταση των $x_i^{m+1} = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$ και $x_j^{m+1} = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m})$. Αν η απόσταση αυτή έχει μεγαλώσει πολύ, τότε συμπεραίνουμε ότι τα εν λόγω σημεία είναι ψευδείς γείτονες, και ότι η διάσταση εμβύθισης m που αρχικά επιλέξαμε δεν είναι επαρκής. Η παραπάνω διαδικασία περιέχει ένα σημείο, όχι καλά καθορισμένο: πότε ακριβώς θεωρούμε ότι η απόσταση των x_i^m και x_j^m μεγάλωσε «πολύ»; Με άλλα λόγια, υπάρχει κάποια συγκεκριμένη τιμή που ποσοτικοποιεί και προσδιορίζει επακριβώς το «πολύ»;

Οι Holger Kantz & Thomas Schreiber⁷⁹ αναφέρουν ότι «... υπολογίζουμε το λόγο των αποστάσεων ανάμεσα στα δύο σημεία σε διάσταση m και διάσταση $m + 1$. Αν ο λόγος αυτός είναι μεγαλύτερος από μια οριακή τιμή (*threshold value*) r , τότε είναι ψευδείς γείτονες». Δεν προτείνουν κάποια συγκεκριμένη τιμή για το r . Αντιθέτως στα παραδείγματα που παραθέτουν, κατασκευάζουν το διάγραμμα του αριθμού των ψευδών γειτόνων συναρτήσει της τιμής r . Ακριβώς την ίδια ορολογία (*threshold value*) χρησιμοποιεί και ο Sprott⁸⁰, δίχως να καθορίζει ακριβώς την τιμή. Ο Abarbanel⁸¹ προτείνει την εξής φόρμουλα:

$$\frac{|X_{l-m} - X_{n-m}|}{\sqrt{(X_l - X_n)^2 + (X_{l-1} - X_{n-1})^2 + \dots}} > 15$$

Με άλλα λόγια ο Abarbanel ποσοτικοποιεί ακριβώς την οριακή τιμή πέραν της οποίας τα δύο σημεία θεωρούνται ψευδείς γείτονες. Πάντως η τιμή που προτείνει δεν είναι καθολική και εν γένει είναι αμφισβητήσιμη.

Ο Schreiber στην ιστοσελίδα⁸² για το υπολογιστικό πακέτο TISEAN αναφέρεται στην οριακή τιμή r , χωρίς να την ποσοτικοποιεί και χαρακτηρίζοντας την ως *ευρετική*⁸³ (...*heuristic threshold value*). Θεωρούμε ότι η προσέγγιση αυτή του Schreiber είναι και η πλέον επιτυχής. Με απλά λόγια δηλαδή, ως r (ή ισοδύναμα ως διάσταση εμβύθισης m) πρέπει να επιλεγεί η τιμή εκείνη που δίνει τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα (αυτά που είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα).

Ένας επιπλέον παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψη είναι ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο που έχουμε επιλέξει (τύπου RBF), η διάσταση εμβύθισης επιβαρύνει το υπολογιστικό κόστος

⁷⁸ Ο εκθέτης m χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει τη διάσταση εμβύθισης.

⁷⁹ Kantz H. and Schreiber T., *Nonlinear Time Series Analysis*, 2nd Edition, Cambridge University Press

⁸⁰ Sprott Clinton J. (2003), *Chaos and Time Series Analysis*, Oxford University Press

⁸¹ Abarbanel H.D.I. (1996), *Analysis of observed chaotic data*, Springer, New York .

⁸² www.mpi-pks-dresden.mpg.de/tisean.

⁸³ Ο όρος «heuristic» (ελλ. «ευρετικός») υποδηλώνει την εξαγωγή συμπερασμάτων μέσα από την εμπειρία και την παρατήρηση.

με εκθετικό τρόπο. Έτσι αν το πεδίο τιμών της χρονοσειράς χωριστεί σε s διαστήματα, τότε ο συνολικός αριθμός των κελιών του υπολογιστικού πλέγματος είναι s^m . Κατά συνέπεια είναι προς όφελος μας να δουλέψουμε με όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή της διάστασης m .

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, επιλέγουμε για το μοντέλο μας τη μικρότερη δυνατή διάσταση εμβύθισης m που δίνει αποδεκτά αποτελέσματα. Η διάσταση αυτή είναι $m = 2$.

3.4.2. Τα αποτελέσματα

Στην προηγούμενη υποπαράγραφο παρουσιάσαμε αναλυτικά το μη γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης του BDI (δομή, παράμετροι κλπ). Ήρθε πλέον η ώρα το μοντέλο αυτό να δοκιμαστεί στην πράξη και να δώσει συγκεκριμένα αποτελέσματα. Προκειμένου να γίνει αυτό (και για να πάρει το μοντέλο σάρκα και οστά), συντάχθηκε από τον γράφοντα κώδικας H/Y στο περιβάλλον του μαθηματικού πακέτου Maple6.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν, και τα οποία αφορούν στις πιο πρόσφατες τιμές του BDI στις οποίες υπήρχε πρόσβαση. Η επιλογή των διαφόρων παραμέτρων που επισέρχονται στον κώδικα, έγινε με βασικό κριτήριο την απλότητα και το χαμηλό υπολογιστικό κόστος (δες και προηγούμενη παράγραφο).

Πρόβλεψη μηνιαίων τιμών BDI μέσω μη γραμμικού μοντέλου RBF (παράμετροι $m = 2$, $\sigma = 1200$, $s = 10$, $l = 14$)		
Μήνας	Πρόβλεψη τιμής	Πραγματική τιμή
Μάης 2010	4455	4305
Απρίλης 2010	3315	3885
Μάρτης 2010	2365	4024
Φλεβάρης 2010	3947	3155
Γενάρης 2010	3804	3823
Δεκέμβρης 2009	3874	3666

Είναι ενδιαφέρον να δούμε αν και κατά πόσο το μοντέλο μας ανταποκρίνεται στη μεγάλη κρίση που σημειώθηκε στο τέλος του 2008 / αρχές του 2009. Θυμίζουμε ότι στην προκείμενη περίπτωση η αντίδραση του δείκτη ήταν εξαιρετικά βίαιη και από την κορυφή των 10,000 μονάδων κατακρημνίστηκε στις 500 μονάδες. Παραθέτουμε παρακάτω τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Πρόβλεψη μηνιαίων τιμών BDI μέσω μη γραμμικού μοντέλου RBF (παράμετροι $m = 2$, $\sigma = 1200$, $s = 10$, $l = 14$)		
Μήνας	Πρόβλεψη τιμής	Πραγματική τιμή
Απρίλης 2008	9149	8330
Μάης 2008	10213	10144
Ιούνης 2008	10850	9324
Ιούλης 2008	7741	8716
Αύγουστος 2008	8933	6470
Σεπτέμβρης 2008	17096	4943
Οκτώβρης 2008	31609	1417
Νοέμβρης 2008	18158	835
Δεκέμβρης 2008	441	512
Γενάρης 2009	-1103	551
Φλεβάρης 2009	1627	1332

Τα παραπάνω αποτελέσματα σε κάποιες περιπτώσεις κρίνονται ως πολύ καλά, σε κάποιες σχετικά καλά, και σε κάποιες όχι καλά. Το πρόβλημα έγκειται κυρίως στην απότομη κατακρήμνιση των μηνών Σεπτέμβρη, Οκτώβρη και Νοέμβρη 2008. Δυστυχώς το μοντέλο μας δεν μπόρεσε επουδενί να την αναπαράγει. Αντιθέτως η απότομη αυτή μεταβολή οδήγησε στην παραγωγή μη ρεαλιστικών αποτελεσμάτων.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με κάποιες σκέψεις για την περαιτέρω μελέτη του μοντέλου, και γιατί όχι, για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Η βέλτιστη προσέγγιση θα ήταν να αντιμετωπίσει κανείς το μοντέλο ως ένα πολυπαραμετρικό σύστημα προς βελτιστοποίηση, και να εντοπίσει το συνδυασμό εκείνο των παραμέτρων που δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα. Κάτι τέτοιο (στην πλήρη αναλυτική ή αριθμητική μορφή του) είναι προφανώς πολύ δύσκολο. Σε κάθε περίπτωση αξίζει να πειραματιστεί κανείς ακόμη περισσότερο με τις παραμέτρους και να δοκιμάσει να πάει σε υπολογιστικά πιο κοστοβόρες επιλογές (όπως πχ η αύξηση της διάστασης εμβύθισης).

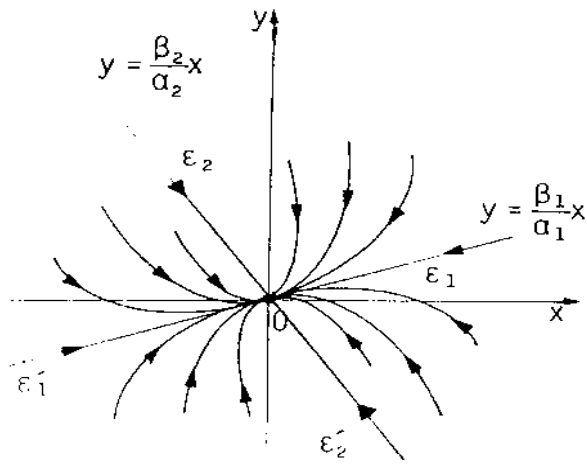
Επίσης από μαθηματικής πλευράς, θα ήταν χρήσιμο να μελετήσει κανείς την ευστάθεια του γραμμικού συστήματος που προκύπτει για τον προσδιορισμό των παραμέτρων. Το ζητούμενο είναι προφανώς το σύστημα αυτό να είναι όσο το δυνατόν πιο ευσταθές.

Τέλος μπορούν να μελετηθούν και άλλες πτυχές του προβλήματος, όπως η ύπαρξη (και απομάκρυνση) του θορύβου από τη χρονοσειρά, ο προσδιορισμός του εκθέτη Lyapunov, η ύπαρξη στασιμότητας ή όχι κλπ. Όμως όλα αυτά ξεφεύγουν από τα στενά πλαίσια μιας απλής διπλωματικής εργασίας, και έτσι τα παραθέτουμε απλά σα σκέψεις...

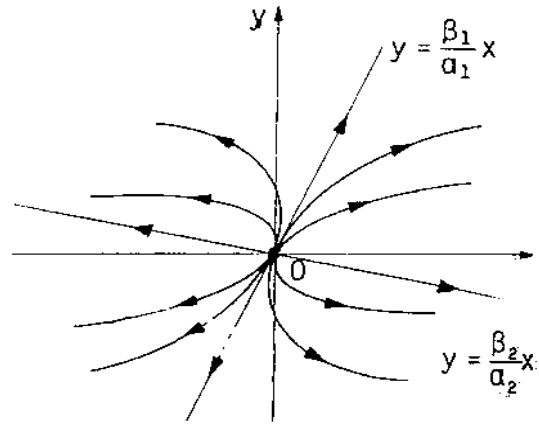
РАВЕЛЪТНО РЕПА

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1.3.1. Το πορτραίτο φάσεων του 2-D ομογενούς γραμμικού συστήματος Σχήματα για τις τροχιές και τους κόμβους

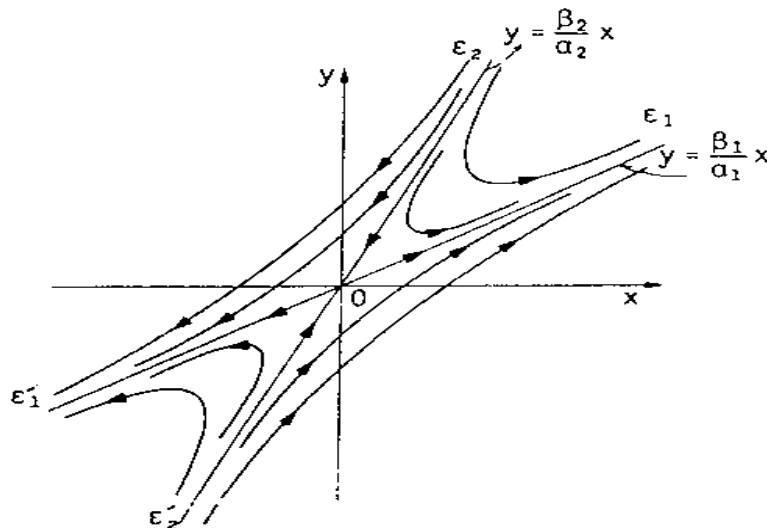


Ευσταθής κόμβος
 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



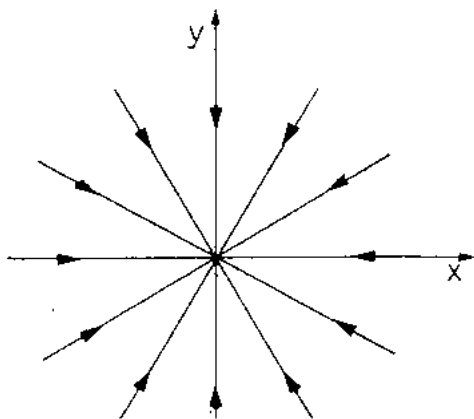
Ασταθής κόμβος
 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

Σχήμα 1 και 2: Ευσταθής και ασταθής κόμβος

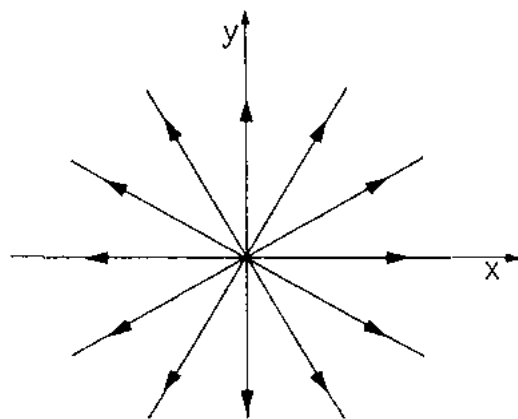


Σαγματικό σημείο, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Σχήμα 3: Σαγματικό σημείο. Η ταυτόχρονη ύπαρξη απόκλισης και σύγκλισης παραμορφώνει το χώρο και σε μεγαλύτερες διαστάσεις οδηγεί στο χάος.

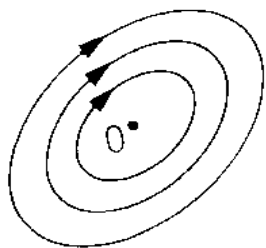


$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$
Ευσταθής



$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$
Ασταθής

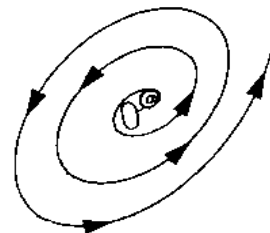
Σχήμα 4 και 5: Ευσταθής και ασταθής αστεροειδής κόμβος



$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$
α. Κέντρο



$\lambda_{1,2} = a \pm bi, a < 0$
β. Ευσταθής εστία



$\lambda_{1,2} = a \pm bi, a > 0$
γ. Ασταθής εστία

Σχήμα 6 και 7 και 8: κέντρο, ευσταθής και ασταθής εστία

РАСЧЕТНО ТЕРА

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΞΕΝΗ ΚΑΙ ΕΛΛΗΝΙΚΗ)

- Abarbanel H.D.I. (1996), *Analysis of observed chaotic data*, Springer, New York .
- Birkhoff G.D. (1933), *Aesthetic Measure*, Harvard University Press, Cambridge MA.
- Broomhead D.S. and and Lowe D. (1988), *Multivariate functional interpolation and adaptive networks*, *Complex Systems*, 2:321-355.
- Farmer Doyné J., Sidorowich J.J. (1987), *Predicting Chaotic Time Series*, *Physics Review Letters*.
- Guevara et al (1981), *Phase locking, period doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells*, *Science*, 214, 1350.
- Haken H. (1983), *At least one exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point*, *Physics Letter A* 94, 71-4.
- Hampton M.J. (1990), *Long and Short Shipping Cycles. The rhythms and psychology of Shipping Markets*, Cambridge Academy of Transport, 2nd Edition.
- Hegger R., Kantz H., and Schreiber T. (1999), *Practical implementation of nonlinear time series methods: the TISEAN package*, *Chaos* 9, 413-35
- Hilborn R.C. (2000), *Chaos and nonlinear dynamics* (2nd edition), Oxford University Press.
- Hirsch M.W. and Smale S. (1974), *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, New York.
- Hornik, K. (1989), *Multilayer feed forward networks are universal approximators*, *Neural networks* 2, 359-66.
- Hornik et al. (1990), *Universal approximation of unknown mapping and its derivatives using multilayer feed forward networks*, *Neural networks* 3, 535-49.
- Hurewicz W. (1975), *Lectures on ordinary differential equations*, Cambridge, Massachusetts.
- Juglar Clement (1862), *Des crises commerciales et leur retour periodique en France, en Angleterre et aux Etats Unis*
- Kantz Holger and Schreiber Thomas (2004), *Nonlinear Time Series Analysis*, 2nd Edition, Cambridge University Press.
- Kennel et al. (1992), *Determining minimum embedding dimension using a geometric construction*, *Physical Review A* 45, 3403-11.

- Kitchin J. (1923), *Cycles and trends in Economic Factors*, Review of Economic Statistics 5.
- Kondratieff Nikolai D. (1935), *The long waves in economic life*.
- Kuznets S. (1930), *Secular movements in production and prices: the nature and their bearing upon cyclical fluctuations*, Boston Houghton Mifflin.
- Libchaber A. (1982), *Convection and turbulence in liquid helium*, Physica B 109 and 110, 1583-9.
- Lillekjendlie B., Kugiumtzis D., Christophersens N., *Chaotic Time Series Part II: System Identification and prediction*, Modeling Identification and Control, Volume 15, No4, January 1994.
- Lorenz E.N. (1993), *The essence of Chaos*, University of Washington Press, Seattle WA.
- Lorenz E.N. (1963), *Deterministic non periodic flow*, Journal of Atmospheric Sciences 20.
- Lorenz, E.N. (1969), *Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues*, Journal of Atmospheric Sciences 26, 636-646.
- Makridakis et al. (1983), *Forecasting methods and applications*, Wiley, New York.
- Moon F.C. (1992), *Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied scientists and engineers*, Wiley-Inter science, New York
- Moran P.A.P. (1950), *Some remarks on animal populations*, Biometrics 6.
- Powell M.J.D. (1987), *Radial Basis functions for multivariable interpolation: A review*. In J.C. Mason and M.G.Cox, editors, Algorithms for Approximation, Clarendon Press, London.
- Ricker W. (1954), *Stock and recruitment*, Journal of the fisheries Research Board of Canada 11.
- Rosenstein et al., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D 65, 117-34.
- Sauer et al. (1991), *Embedology*, Journal of Statistical Physics, 65.
- Sprott Clinton J. (2003), *Chaos and time Series Analysis*, Oxford University Press.
- Stopford Martin (1999), *Maritime Economics*, 2nd Edition Routledge.
- Stutzer M.J. (1980), *Chaotic Dynamics and bifurcation in a macro model*, Journal of Economic Dynamics and Control 2.

Takens F., *Detecting Strange Attractors in Turbulence, In Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick, 1980 Proceedings (ed D.A. Rand and L.S. Young). Lecture Notes in Mathematics, No 898, pp. 366-81. Springer, New York

Toth Peter (2005), *Production and market Strategies in a changing iron ore world*, AJM Global Iron Ore and Steel Forecasting Conference, Perth.

Ulam S.M. (1983), *Adventures of a Mathematician*, Scribner's New York.

Ulam, S.M. and von Neumann, J. (1947), *On combination of stochastic and deterministic processes*, Bulletin of the American Mathematical Society 53, 1120.

Whitney H. (1936), *Differentiable manifolds*, Annals of Mathematics 37.

Βλάχος Γεώργιος & Γεωργαντόπουλος Ελευθέριος (1997), *Ναυτιλιακή Οικονομική*, Εκδόσεις J&J Hellas, Πειραιάς.

Γκιζιάκης Κώστας, Παπαδόπουλος Α, Πλωμαρίτου Ε (2002), *Εισαγωγή στις Ναυλώσεις*, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα.

Παντελίδης Γ.Ν. (1994), *Μαθηματική Ανάλυση, Τόμος ΙΙΙ*, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα.

Κουγιουμτζής Δ., *Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών-Σημειώσεις μαθήματος*, ΑΠΘ.

Filename: διπλωματική version 5
Directory: C:\Documents and Settings\gerasimos\Desktop\diplomatiki
Template: C:\Documents and Settings\gerasimos\Application
Data\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Title: ΕΝΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΟ ΝΑΥΛΟΔΕΙΚΤΗ ΒΔΙ.
Subject:
Author: ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΒΑΣΙΛΑΤΟΣ
Keywords:
Comments:
Creation Date: 21/10/2010 10:10:00 πμ
Change Number: 12
Last Saved On: 8/3/2011 4:06:00 μμ
Last Saved By: gerasimos
Total Editing Time: 49 Minutes
Last Printed On: 8/3/2011 4:07:00 μμ
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 71
Number of Words: 23.171 (approx.)
Number of Characters: 125.126 (approx.)