ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Αποτίμηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου Των Συμβολαίων Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Επιβλέπων καθηγητής: κ. Εγγλέζος Νικόλαος

Μέλη επιτροπής: κ. Σκιαδόπουλος Γεώργιος

κ. Μπότσαρη Αντωνία

Ονοματεπώνυμο: Τσιάκα Νικολέτα

ΑΜ: ΜΧΡΗ 1025

Δεκέμβριος 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζουμε τους βασικούς τρόπους τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο παραθέτουμε την ιστορική εξέλιξη των παραγώγων μεταβλητότητας, αναλύουμε τους παράγοντες που οδήγησαν στη χρήση των συμβολαίων που μελετάμε και διακρίνουμε τα δύο είδη αυτών των συμβολαίων καθώς και τις διαφορές τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε τους τρόπους τιμολόγησης των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τους βασικούς συντελεστές ευαισθησίας οι οποίοι μας δείχνουν την ευαισθησία της αξίας ενός χαρτοφυλακίου σε μια μικρή αλλαγή σε μια συγκεκριμένη υποκείμενη παράμετρο. Ακολούθως στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μία ανάλυση της μεθόδου αντιστάθμισης κινδύνου των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης με τη χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και της μεθόδου αντιστάθμισης των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο, όπου παραθέτουμε τα εμπειρικά μας αποτελέσματα, δείχνουμε πως μπορεί κάποιος να αντισταθμίσει τη θέση του σε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης και ακολούθως σε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας. Επίσης συγκρίνουμε και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της σύγκρισης της τιμολόγησης των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης με τη χρήση των ακόλουθων μεθόδων τιμολόγησης: τιμολόγηση ανεξαρτήτως μοντέλου, τιμολόγηση με χρήση της μεθόδου Monte Carlo, τιμολόγηση με επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης στο μοντέλο του Heston, τιμολόγηση στο συνεχές χρόνο στο μοντέλο του Heston.

Λέξεις Κλειδιά: Συμβόλαια Ανταλλαγής Μεταβλητότητας, Συμβόλαια Ανταλλαγής Διακύμανσης, Στοχαστικά Μοντέλα Αποτίμησης, Αντιστάθμιση Κινδύνου, Heston.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον πυρήνα της, η μελέτη των οικονομικών αφορά την εναλλαγή μεταξύ κινδύνου και προσδοκώμενης απόδοσης. Υπάρχουν διάφορα μέτρα τα οποία έχουν προταθεί για μέτρηση του κινδύνου αυτού, αλλά από τα μέσα του περασμένου αιώνα, η τυπική απόκλιση της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου αποτελεί αναμφίβολα το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μέτρο.

1.1 Η Έννοια της Μεταβλητότητας

Η μεταβλητότητα συνήθως ορίζεται ως η τυπική απόκλιση ανά μονάδα χρόνου της απόδοσης της τιμής της μετοχής. Είναι ευρέως αποδεκτό ως το μέτρο της αβεβαιότητας ή της επικινδυνότητας του υποκείμενου μέσου. Γενικά η μεταβλητότητα μπορεί να παραμένει σταθερή, να είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική ή να είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση της τιμής της μετοχής σ_t=σ(t,S_t) οπότε και αναγνωρίζεται ως τοπική μεταβλητότητα. (Dupire B, 1994).

Ο Wilmott συγκεκριμένα διακρίνει τέσσερις βασικούς τύπους μεταβλητότητας αν και στην πράξη ελάχιστα γίνεται διάκριση μεταξύ τους. Ο πρώτος τύπος μεταβλητότητας είναι η μεταβλητότητα σ στην ακόλουθη εξίσωση d S_t=$(r_t - d_t)S_t\, dt$ + $\sigma_t S_t dW_t$ η οποία είναι ένα μέτρο της τυχαιότητας της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων και δεδομένου ότι υπάρχει σε κάθε χρονική στιγμή δεν έχει κανένα «χρονοδιάγραμμα» που να συνδέεται με αυτή. Μια άλλη μορφή είναι η *ιστορική μεταβλητότητα* (επίσης γνωστή ως πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα) η οποία μετράται με τη χρήση παλαιότερων εμπειρικών στοιχείων. Πολύ σημαντική είναι επίσης η *τεκμαρτή μεταβλητότητα* η οποία υπολογίζεται βάση των εμπειρικών τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει τέλος η *προθεσμιακή μεταβλητότητα* που δείχνει τις αναμενόμενες μελλοντικές κινήσεις της τιμής της μετοχής στο πέρασμα του χρόνου.

1.2 Τα παράγωγα Μεταβλητότητας

Για να έχουν μια εικόνα για το επίπεδο της μελλοντικής μεταβλητότητας-κινδύνου, οι επενδυτές έχουν κατασκευάσει διάφορα είδη παραγώγων μεταβλητότητας. Τα παράγωγα μεταβλητότητας είναι αξιόγραφα των οποίων η πληρωμή εξαρτάται από την πραγματοποιηθείσα διακύμανση ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ή ενός δείκτη απόδοσης. Εξέχοντα παραδείγματα από αυτά τα παράγωγα αποτελούν οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης αλλά και τα δικαιώματα προαίρεσης που βασίζονται στον δείκτη VIX. Αναφέρουμε ότι ο VIX ως δείκτης τεκμαρτής μεταβλητότητας για τον S&P ιδρύθηκε το 1993 για το Chicago Board Options Exchange (CBOE) ενώ ο VXN ως δείκτης τεκμαρτής μεταβλητότητας του NASDAQ 100 ξεκίνησε τον Ιανουάριο 2001.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε βασικές πτυχές των προθεσμιακών συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακυμάνσεως των μετοχών. Ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης πληρώνει στον αγοραστή τη διαφορά μεταξύ της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης και της διακύμανσης που έχει καθοριστεί από τους αρχικούς όρους του συμβολαίου. Η πληρωμή αυτή είναι μια κοίλη συνάρτηση της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης, ενώ μια συμφωνία ανταλλαγής μεταβλητότητας έχει μια πληρωμή η οποία είναι μια γραμμική συνάρτηση της μεταβλητότητας που πραγματοποιείται. Η πραγματοποιηθείσα διακύμανση είναι πολύ σημαντική διότι παρέχει ένα σχετικά ακριβές μέτρο της μεταβλητότητας που είναι χρήσιμο για πολλούς σκοπούς, συμπεριλαμβανομένης της πρόβλεψης της μεταβλητότητας και την αξιολόγηση των σχετικών προβλέψεων. Και οι δύο αυτοί τύποι των συμβολαίων ανταλλαγής συλλαμβάνουν τη μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα και αποτελούν ουσιαστικά μέσα για την μέτρηση της έκθεσης στον κίνδυνο-μεταβλητότητα. Παλαιότερα οι έμποροι χρησιμοποιούσαν διαφορετικές στρατηγικές προκειμένου να καλυφθούν από τον κίνδυνο της μεταβλητότητας. Το κλασικό παράδειγμα είναι η αγορά ενός straddle (η αγορά δηλαδή ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης), η αξία του οποίου ανεβαίνει καθώς αυξάνει και η μεταβλητότητα. Επίσης βασίζονταν στα δικαιώματα προαίρεσης για τη μέτρηση και αντιμετώπιση της μεταβλητότητας αλλά η αναποτελεσματικότητά τους τους οδήγησε στη χρήση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα εφάρμοζαν τη λήψη δυναμικής θέσης στα δικαιώματα με στόχο την ουδετεροποίηση του δέλτα της θέσης. Θεωρούσαν πως εφόσον ο επενδυτής καταφέρει να μηδενίσει τον κίνδυνο από τη μεταβολή της τιμής, τότε ο παράγοντας που καθορίζει το κέρδος ή τη ζημία της συνολικής θέσης είναι ουσιαστικά η διαφορά της πραγματοποιηθείσας μεταβλητότητας και της αναμενόμενης μεταβλητότητας που χρησιμοποιείται ως μεταβλητή για την τιμολόγηση του δικαιώματος. Επειδή όμως τα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μετοχών επηρεάζονται τόσο από τη μεταβλητότητα όσο και από την τιμή μιας μετοχής η μέθοδος αυτή κρίθηκε ανεπιτυχής.

Στην περίπτωση που προσπαθήσει κάποιος να αφαιρέσει αυτή την επιρροή της τιμής της μετοχής από την αντιστάθμιση των επιλογών ανάλογα με το μοντέλο Black-Scholes δεν θα είναι σε θέση να αντιμετωπίσει τις επιπτώσεις της μεταβλητότητας διότι αυτή δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί με ακρίβεια στον πραγματικό κόσμο. Ο ευκολότερος τρόπος λοιπόν να γίνει αποτελεσματική διαπραγμάτευση της μεταβλητότητας είναι η χρήση συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας, τα οποία μερικές φορές ονομάζονται προθεσμιακά συμβόλαια μεταβλητότητας, επειδή παρέχουν καθαρή έκθεση σε αυτήν.

1.3 Περίγραμμα Εργασίας

Στην εργασία μας αρχικά θα παρουσιάσουμε την ιστορική εξέλιξη των παραγώγων μεταβλητότητας ώστε να δούμε πως φτάσαμε στη μορφή που χρησιμοποιούνται σήμερα. Ύστερα θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την έννοια των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακύμανσης, τις βασικές τους διαφορές, καθώς και να μάθουμε τις βασικές κατηγορίες των εμπόρων αυτών των συμβολαίων και τους τρόπους χρήσεις τους.

Στο τρίτο τμήμα θα παρουσιάσουμε τις βασικές κατηγορίες των μεθόδων αποτίμησης των συμβολαίων δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα σε ορισμένες από αυτές ώστε να υπάρξει καλύτερη κατανόηση του θέματος. Στο τέταρτο τμήμα παρουσιάζουμε τους βασικούς συντελεστές ευαισθησίας των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας-διακύμανσης ώστε να κατανοήσουμε τον ρόλο τους στην διαμόρφωση της τελικής αξίας των συμβολαίων.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια βασική τεχνική αντιστάθμισης που χρησιμοποιείται ευρέως στα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης και βασίζεται στην χρήση ενός λογαριθμικού συμβολαίου, καθώς και μια πιο απλοϊκή τεχνική αντιστάθμισης για τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας. Στο τέλος θα παρουσιάσουμε κάποια εμπειρικά αποτελέσματα με την βοήθεια της Matlab ώστε να εξάγουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα βασιζόμενοι πλέον σε αριθμούς.

1.4 Ιστορία των Παραγώγων Μεταβλητότητας

Το πρώτο παράγωγο προϊόν μεταβλητότητας εμφανίστηκε στην έξω χρηματιστηριακή αγορά (OTC) στις αρχές της περασμένης δεκαετίας και συγκεκριμένα το 1993 με τη μορφή συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας από τον Michael Weber. Μεταξύ του 1993 και του 1998 υπάρχουν αναφορές για συναλλαγές που πραγματοποιήθηκαν τόσο με συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας όσο και με συμβόλαια ανταλλαγής διακυμάνσεως με ζήτηση κυρίως στα πρώτα λόγω της ιδιαίτερης προτίμησης από τους επαγγελματίες οι οποίοι επιθυμούν να σκέφτονται από την σκοπιά της τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Έως το 1998 παρατηρήθηκε μια μεγάλη ανάπτυξη στα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας τα οποία βασίζονταν σε χρηματιστηριακούς δείκτες. Συγκεκριμένα το 1993 το CBOE(Chicago Board Options Exchange) παρουσίασε τον πρώτο δείκτη μεταβλητότητας, γνωστό ως VIX, ο οποίος βασιζόταν στο μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης των Black - Scholes. Αν και το CBOE δεν εισήγαγε παράγωγα προϊόντα του VIX ,τουλάχιστον για την πρώτη δεκαετία, κάποιες επιχειρήσεις όπως η UMLX και η DTB παρουσίασαν στην αγορά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) μεταβλητότητας βασισμένα σε ήδη εισαγμένους δείκτες. Συγχρόνως με την εισαγωγή του νέου VIX, τα VIX futures απολαμβάνουν σημαντική επιτυχία. Το 2003 το CBOE εισάγει συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διακύμανσης και δύο χρόνια αργότερα ξεκινά η παρουσίαση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης από την Eurex που βασίζονται στον δείκτη VSTOXX, στον VDAX-New και στον t VSMI.

Παρακινούμενοι από την επιτυχία των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης του δείκτη VIX κατά το 2005 ξεκινά η εισαγωγή πολλών καινοτομιών στις συμβάσεις σχετικά με την πραγματοποιηθέντα διακύμανση των δεικτών των μετοχών. Για παράδειγμα δικαιώματα επί της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης ξεκίνησαν να συναλλάσσονται ευθέως και όχι μόνο μέσω των συμβολαίων ανταλλαγής διακυμάνσεως. Το 2007 εμφανίζονται δικαιώματα αγοράς και πώλησης βάζει χρονομέτρου. Πρόκειται για επιλογές που προσφέρουν τις συνήθεις πληρωμές, αλλά η ημερομηνία λήξης είναι ένας τυχαίος χρόνος. Συγκεκριμένα, η διακοπή του χρόνου είναι η πρώτη μέρα που το σωρευτικό άθροισμα των τετραγώνων των αποδόσεων ξεπερνά ένα θετικό εμπόδιο που τίθεται κατά την έναρξη.

Ο οικονομικός κατακλυσμός που έπληξε όλες σχεδόν τις χρηματοοικονομικές αγορές το 2008 είχε ιδιαίτερα έντονες επιπτώσεις για τα παράγωγα μεταβλητότητας. Ιστορικά κερδοφόρες στρατηγικές αποδείχτηκαν ανεπιτυχείς. Εκείνη την εποχή παρατηρήθηκε πως όσο ο υποκείμενος δείκτης ή μετοχή κινούνταν μακριά από το αρχικό τους επίπεδο οι διαπραγματευτές (dealers) βρίσκονταν εκτεθειμένοι σε πολύ μεγαλύτερο vega σε σχέση με αυτό που θα μπορούσαν να αντισταθμίσουν ακολουθώντας μια στρατηγική αντιστάθμισης. Το γεγονός αυτό ήταν πιο έντονο στην περίπτωση των συμβολαίων που ήταν εγγεγραμμένα σε απλές μετοχές όπως τα απλά δικαιώματα επί μιας μετοχής, τα οποία λόγω της έλλειψης ρευστότητας που τα διακρίνει μια μεγάλη κίνηση στην τιμή της μετοχής θα ήταν καταστροφική για τους διαπραγματευτές τους. Για το λόγο αυτό η αγορά των απλών συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας, τα οποία βασίζονταν στην μεταβλητότητα απλών μετοχών, εξαφανίστηκε το 2009 και έδωσε την θέση της στην αγορά των συμβολαίων που βασίζονταν σε χρηματιστηριακούς δείκτες (όπως ο VIX), η οποία συνεχίζει να αναπτύσσεται έως σήμερα.

1.5 Επισκόπηση της Βιβλιογραφίας

Μετά το κραχ του 1987 οι Brenner και Galai (1989, 1993) πρότειναν τη χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης εγγεγραμμένων σε δείκτες μεταβλητότητας, οι οποίοι θα χρησίμευαν ως το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Από τότε το θεωρητικό υπόβαθρο για τις επιλογές τιμολόγησης για τη μεταβλητότητα έχει αναπτυχθεί ευρέως. Για παράδειγμα, ο Neuberger (1994) έδειξε ότι από την αντιστάθμιση δέλτα ενός λογαριθμικού συμβολαίου, το οποίο πληρώνει κατά το χρόνο λήξης της σύμβασης τον λογάριθμο της τιμής του περιουσιακού στοιχείου, ο επενδυτής αποκομίζει τη διαφορά μεταξύ της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης και της τεκμαρτής διακύμανσης. Ταυτόχρονα ο Whaley (1993) χρησιμοποίησε την φόρμουλα του Black (1976) για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης βασισμένων σε δείκτες μεταβλητότητας. Επίσης ο κατασκεύασε τον δείκτη VIX (σήμερα ονομάζεται VXO), έναν δείκτη μεταβλητότητας που βασίζεται στις S&P 100 τεκμαρτές μεταβλητότητες που διαπραγματεύονται στο Chicago Board of Exchange (CBOE). Από τότε, άλλοι δείκτες μεταβλητότητας έχουν επίσης αναπτυχθεί (π.χ., VDAX στη Γερμανία, VXN σε CBOE, VX1 και VX6 στη Γαλλία).

Το CBOE εισήγαγε μια νέα μεθοδολογία για τον υπολογισμό των δεικτών μεταβλητότητας το 2003. Σε ένα πολύ σημαντικό άρθρο οι Demeterfi et al (1999) εξέτασαν τις ιδιότητες της διασποράς και της μεταβλητότητας των συμβολαίων, όπου δείχνουν πώς μπορεί να αναπαραχθεί ένα συμβόλαιο διακύμανσης μέσα από μια δυναμική στρατηγική εμπορικών συναλλαγών που αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα αγοράς και πώλησης όλων των τιμών εξάσκησης με κατάλληλα επιλεγμένους συντελεστές στάθμισης. Παρόλα αυτά όπως υπέδειξαν οι Carr and Corso (2001) η τεχνική της αναπαραγωγής ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας με την χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης οδηγεί σε αποτελέσματα στο συνεχή χρόνο και έτσι το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να χαρακτηριστεί ως προσέγγιση της πραγματικότητας στην οποία όλα τα συμβόλαια αφορούν την μεταβλητότητα η οποία αξιολογείται σε ένα σύνολο διακριτών χρονικών στιγμών. Οι τελευταίοι αναφέρουν, επίσης, ότι για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση πιο σύνθετων επιλογών απαιτείται ο σχεδιασμός ενός κατάλληλου μοντέλου που περιγράφει τη στοχαστική δυναμική της επιφάνειας μεταβλητότητας της αγοράς.

Ένα από τα μοντέλα τα οποία είναι υποψήφια για το παραπάνω σκοπό είναι το στοχαστικό μοντέλο Heston μεταβλητότητας (1993) που γνωρίζει μεγάλη αποδοχή και ανάλυση από πληθώρα επιστημόνων. Για παράδειγμα οι Brockhaus και Long (2000) συζήτησαν τα θέματα τιμολόγησης των συμφωνιών ανταλλαγής μεταβλητότητας με βάση το στοχαστικό μοντέλο μεταβλητότητας του Heston. Λίγα χρόνια αργότερα ο Swishchuk (2004) χρησιμοποιεί έναν εναλλακτικό τρόπο τιμολόγησης των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας βάση του μοντέλου του Heston. Το επόμενο έτος οι Carr et al (2005) τιμολόγησαν δικαιώματα προαίρεσης βασισμένα στη τεκμαρτή μεταβλητότητα με απευθείας μοντελοποίηση της τετραγωνικής διακύμανσης της υποκείμενης διαδικασίας. Ακολούθως οι Broadie και Jain (2007) έδειξαν ότι η προσέγγιση κυρτότητας δεν παρέχει μια καλή εκτίμηση της εύλογης τιμής εξάσκησης της μεταβλητότητας της στοχαστικής διαδικασίας του Heston και των μοντέλων διάχυσης με άλμα του Merton. Μεταξύ άλλων οι Elliott et al (2007) εφάρμοσαν διαφορετικά στοχαστικά μοντέλα μεταβλητότητας για την τιμολόγηση και τέλος οι Zhu and Lian (2009) παρουσίασαν μια προσέγγιση τιμολόγησης των συμφωνιών ανταλλαγής μεταβλητότητας όπου δίνεται μια κλειστής μορφής λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση βάση του μοντέλου του Heston.

2. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Οι συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακύμανσης αποτελούν δύο διαφορετικούς τύπους συμβολαίων. Κρίνεται λοιπόν σημαντικός ο διαχωρισμός τους και η ανάλυση των βασικών χαρακτηριστικών που τα κάνουν ελκυστικά για μεγάλο αριθμό εμπόρων οι οποίοι τα εκμεταλλεύονται με πολλαπλούς τρόπους. Ας δούμε αναλυτικά ποιοι και γιατί ενδιαφέρονται να συμμετέχουν σε διαπραγματεύσεις που αφορούν την αντιμετώπιση του κινδύνου της μεταβλητότητας.

2.1 Κατηγορίες Εμπόρων

Η αμεσότητα της έκθεσης των συμβολαίων ανταλλαγής στη μεταβλητότητα και η σχετική ευκολία της αναπαραγωγής τους μέσα από ένα στατικό χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων προαίρεσης (βλέπε Παράγραφο 5.1) τα μετατρέπουν αυτομάτως σε ιδιαιτέρως ελκυστικά μέσα για τους επενδυτές και τους διαπραγματευτές των αγορών. Όλα αυτά τα χρόνια έχουν εμφανιστεί τρεις διαφορετικοί τύποι εμπόρων. Πρώτον, οι «directional traders» οι οποίοι κερδοσκοπούν πάνω στο μελλοντικό επίπεδο της μεταβλητότητας, ανοίγοντας θέσεις, είτε αγοράς είτε πώλησης, πιστεύοντας ότι είναι σε θέση να προβλέψουν σωστά την κίνηση των τιμών ενός αξιόγραφου.

Από την άλλη πλευρά υπάρχουν οι «spread traders», οι οποίοι προσπαθούν να επωφεληθούν είτε από τη διαφορά τεκμαρτής και πραγματικής μεταβλητότητας είτε της μεταβλητότητας μεταξύ δυο υποκειμένων τίτλων(π.χ. δεικτών). Συνήθως αγοράζουν ένα αξιόγραφο και πωλούν ταυτόχρονα ένα άλλο σχετικό με αυτό ώστε να προσφέρουν μια συνολική καθαρή θέση, της οποίας η αξία, που ονομάζεται άνοιγμα, εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ της αξίας των τίτλων αυτών.

Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν οι «volatility traders» οι οποίοι θέλουν να αντισταθμίσουν την ήδη υπάρχουσα πτωτική τους θέση στην μεταβλητότητα. Το γεγονός αυτό παρατηρείται στους επενδυτές μετοχικών τίτλων και δεικτών, λόγω της αρνητικής θέσης τους απέναντι στην μεταβλητότητα που επιβάλλεται από την αρνητική μεταξύ τους συσχέτιση.

Λόγω της μεγάλης ζήτησης για συναλλαγές της μεταβλητότητας, η αγορά των συμβολαίων ανταλλαγής έχει αναπτυχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια. Ο ημερήσιος όγκος συναλλαγών επί χρηματιστηριακών δεικτών εκτιμάται γύρω στα \$ 30 – 35 εκατομμύρια. Έτσι δικαιολογείται το γεγονός ότι η τιμολόγηση και αντιστάθμιση αυτών των παραγώγων είναι πολύ σημαντικό θέμα το οποίο εξακολουθεί να αποτελεί πρόβλημα που ερευνάται στον ακαδημαϊκό χώρο και τη βιομηχανία.

2.2 Χρήση Των Συμβολαίων Ανταλλαγής

Ολοένα και περισσότερο οι επενδυτές αντιμετωπίζουν την ίδια τη μεταβλητότητα ως μια κατηγορία περιουσιακού στοιχείου που μπορεί να οδηγήσει στη διαφοροποίηση της απόδοσης των επενδύσεων ή να αντισταθμίσει ανεπιθύμητα σενάρια επενδύσεων. Ορισμένες από τις πιο σημαντικές χρήσεις των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι οι εξής:

1. Συναλλαγές μεταβλητότητας

Όταν ένας έμπορος αναμένει ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου θα αυξηθεί, μπορεί να αγοράσει ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης. Αν η πραγματοποιηθείσα διακύμανση υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης Κ, ο έμπορος καθιστά κέρδος.

Ένα απλό παράδειγμα είναι όταν μια επιχείρηση γνωρίζει πως θα συμβεί ένα γεγονός μια δεδομένη στιγμή, όμως δε γνωρίζει το αποτέλεσμα του γεγονότος στην τιμή της μετοχής. Ας θεωρήσουμε ότι ύστερα από συνέλευση αποφασίζεται η πώληση ενός μέρους της εταιρείας. Η απόφαση αυτή μπορεί να οδηγήσει σε μια τεράστια αγνώστου κατεύθυνσης κίνηση της τιμής της μετοχής της επιχείρησης. Σε αυτή την περίπτωση μια συμφωνία ανταλλαγής μεταβλητότητας θα μπορέσει να βοηθήσει στην εκμετάλλευση αυτού του γεγονότος με απώτερο σκοπό το κέρδος.

2. Αντιστάθμιση με τη χρήση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας

Οι συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμιστεί η έκθεση στον κίνδυνο της μεταβλητότητας. Για παράδειγμα, οι ασφαλιστικές εταιρείες που ασχολούνται με ασφάλειες ζωής προσφέρουν συμβόλαια που εγγυώνται αποδόσεις τις οποίες προσπαθούν να δημιουργήσουν με την κατοχή μετοχών. Αυτές οι εταιρείες είναι σε θέση στην οποία κατέχουν τίτλους και πωλούν τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης προς τους αντισυμβαλλομένους. Για τη μείωση της έκθεσης του δικαιώματος πώλησης χρησιμοποιείται δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου. Όμως η δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου δε μπορεί να αντισταθμίσει τον κίνδυνο σε σχέση με την μεταβλητότητα για αυτό το λόγο και όλο και περισσότερες ασφαλιστικές εταιρείες εξετάζουν τη χρήση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας-διακύμανσης (swaps) για την αντιστάθμιση του σχετικού κινδύνου.

3. Διαφοροποίηση

Η διαφοροποίηση είναι μια τεχνική διαχείρισης κινδύνου που περιορίζει τον κίνδυνο μιας επένδυσης με βάση ένα χαρτοφυλάκιο διαφοροποιημένων επενδύσεων. Εφόσον ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης έχει αρνητική συσχέτιση με την μετοχή, μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να κερδίσει διαφοροποίηση.

4. Ανοίγματα των χρηματιστηριακών δεικτών

Τα ανοίγματα προσφοράς/ζήτησης έχουν κάνει την εμφάνισή τους σε σημαντικό βαθμό τα τελευταία χρόνια και στην Ευρώπη είναι τώρα συνήθως στην περιοχή των 0,5 vegas για τους δείκτες και 1-2 vegas για τις απλές μετοχές αν και στην περίπτωση αυτή ποικίλλει ανάλογα με τους παράγοντες της ρευστότητας. Αναμένουμε ότι τα ανοίγματα θα εξελιχθούν και περαιτέρω στο μέλλον, καθώς η ρευστότητα συνεχίζει να βελτιώνεται. Τα ανοίγματα για τους δείκτες στις ΗΠΑ και την Ιαπωνία είναι παρόμοια με τα bid/offer των μετοχών δηλαδή κυμαίνονται σε φάσμα 2 έως 2,5 vegas. Τα ανοίγματα είναι λογικά υψηλότερα στις αναδυόμενες αγορές, αν και αυτές διακρίνονται όλο και περισσότερο από ρευστότητα. Με μεταβλητότητα συχνά πολύ υψηλότερη και λιγότερο σταθερή από ό, τι στις αναπτυγμένες αγορές, στις αναδυόμενες αγορές η διακύμανση μπορεί να προσφέρει ενδιαφέρουσες ευκαιρίες.

Για τους παραπάνω λόγους έχουν αναπτυχθεί οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συλληφθεί το άνοιγμα της μεταβλητότητας μεταξύ δύο συσχετιζόμενων δεικτών όπως ο DAX και ο Euro Stoxx 50. Κάποιος μπορεί για παράδειγμα να είναι σε θέση αγοραστή σε ένα 3 μηνών συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας του δείκτη DAX και σε θέση πωλητή σε ένα 3-μηνο συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας του δείκτη Euro Stoxx 50.

2.3 Συμβόλαια Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Μια συμφωνία ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαιο που βασίζεται στη μελλοντική μεταβλητότητα των τιμών ενός δείκτη μετοχών. Ο αγοραστής του συμβολαίου λαμβάνει στη λήξη του μια πληρωμή από τον αντισυμβαλλόμενο, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την πώληση του συμβολαίου εφόσον η μεταβλητότητα του δείκτη μετοχών υπερβαίνει την προκαθορισμένη μεταβλητότητα του συμβολαίου ανταλλαγής η οποία θα σημειωθεί κατά την λήξη της σύμβασης. Στη λήξη ο ιδιοκτήτης του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας λαμβάνει N πλασματικά δολάρια για κάθε σημείο για το οποίο η μεταβλητότητα του δείκτη έχει υπερβεί την προκαθορισμένη μεταβλητότητα του συμβολαίου. Από την άλλη πλευρά, αν η μεταβλητότητα του δείκτη είναι κάτω από το σημείο της μεταβλητότητας του συμβολαίου ανταλλαγής, ο κάτοχος του συμβολαίου πληρώνει στον πωλητή του συμβολαίου το αναφερόμενο ποσό.

Τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας παρέχουν προστασία σε σχέση με μεταβολές της μεταβλητότητας και μόνο, σε αντίθεση με τα απλά δικαιώματα που αποτελούν επιλογές με τις οποίες η έκθεση μεταβλητότητας εξαρτάται από την τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Ο συγκεκριμένος τύπος συμβολαίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία εικασιών σχετικά με το επίπεδο της μελλοντικής μεταβλητότητας, και να συντελέσει στο εμπόριο του ανοίγματος μεταξύ πραγματοποιηθείσας και τεκμαρτής μεταβλητότητας, ή να αντισταθμίσει την έκθεση στον κίνδυνο της μεταβλητότητας άλλων θέσεων.

Η πληρωμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας ορίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\text{Κέρδος ή Ζημία} = N\,(\sigma_R(S) - K_{vol}) \tag{2.1}$$

όπου ως σ_R (S) ορίζεται η μεταβλητότητα μετοχών κατά τη διάρκεια του συμβολαίου (αναφέρεται σε ετήσια βάση), K είναι η τιμή εξάσκησης και N το ονομαστικό ποσό του συμβολαίου σε δολάρια.

Το παράδειγμα που ακολουθεί θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαδικασία υπολογισμού των πληρωμών που πραγματοποιούνται κατά τη συναλλαγή ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας. Ας υποθέσουμε ότι δύο μέρη συμφώνησαν για τη συναλλαγή της μεταβλητότητας ενός συμβολαίου ανταλλαγής εγγεγραμμένου στον δείκτη Standard&Poors 500 με τιμή εξάσκησης 25 τοις εκατό ονομαστικό ποσό τις 50.000. Εάν η πραγματοποιηθείσα τυπική απόκλιση του S&P 500 κατά την περίοδο αυτή αποδεικνύεται ότι είναι τελικά 30 τοις εκατό το κέρδος του συμβαλλόμενου ο οποίος λαμβάνει τη μεταβλητότητα είναι 50.000 x (0.30- 0.25), ή 1375 ενώ εάν η τυπική απόκλιση ήταν 20 τοις εκατό η πληρωμή για το μέρος που πληρώνει τη μεταβλητότητα θα είναι 50,000 x (0.20- 0.25), ή 1125.

2.4 Συμβόλαια Ανταλλαγής Διακύμανσης

Μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης είναι ένα έξω-χρηματοοικονομικό παράγωγο που επιτρέπει την κερδοσκοπία ή την αντιστάθμιση των κινδύνων που συνδέονται με το μέγεθος της αστάθειας ορισμένων υποκειμένων προϊόντων, όπως μια συναλλαγματική ισοτιμία, ένα επιτόκιο ή ένας χρηματιστηριακός δείκτης. Το ένα συμβαλλόμενο μέρος του συμβολαίου θα καταβάλει ένα ποσό με βάση την πραγματοποιηθείσα διακύμανση των μεταβολών των τιμών του υποκείμενου προϊόντος. Συμβατικά, οι μεταβολές των τιμών θα είναι ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις, με βάση την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη τιμή κλεισίματος. Το άλλο σκέλος της ανταλλαγής θα πληρώνει ένα σταθερό ποσό, το οποίο είναι η τιμή εξάσκησης που αναφέρεται κατά την έναρξη της συμφωνίας. Έτσι, η καθαρή πληρωμή προς τους αντισυμβαλλομένους θα είναι η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο και θα πληρώνονται σε μετρητά κατά τη λήξη της συμφωνίας. Μερικές πληρωμές σε μετρητά κατά πάσα πιθανότητα γίνονται στην πορεία από τον ένα ή τον άλλο αντισυμβαλλόμενο ώστε να διατηρήσει το περιθώριο που έχει συμφωνηθεί. Συγκεκριμένα, η εξόφληση της ανταλλαγής διακύμανσης ορίζεται ως εξής :

Κέρδος ή Ζημία= N ($\sigma^2{}_R$(S)-K_{var}) (2.2)

όπου $\sigma^2{}_R$(S) είναι η πραγματοποιηθείσα διακύμανση των αποδόσεων των μετοχών κατά τη διάρκεια ζωής του συμβολαίου [0,T], K είναι η τιμή εξάσκησης της διακύμανσης και N το ονομαστικό ποσό του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης σε δολάρια.

Ακολούθως παραθέτουμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνει κατανοητή η παραπάνω διαδικασία: Ας υποθέσουμε πως ένας επενδυτής επιθυμεί να προστατευθεί από τις μεταβολές που μπορεί να παρουσιάσει τον επόμενο χρόνο η μεταβλητότητα του δείκτη Euro Stoxx 50. Για το λόγο αυτό θα πάρει την θέση του αγοραστή σε μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης και θα λάβει την διαφορά μεταξύ της πραγματοποιηθείσας και του τωρινού επιπέδου διακύμανσης που ορίζεται από την τιμή εξάσκησης πολλαπλασιασμένη με το αρχικό ονομαστικό ποσό.

Συγκεκριμένα εάν το ονομαστικό ποσό ισούται με 3000 ευρώ, η τιμή εκκαθάρισης με 10% και η πραγματοποιηθείσα διακύμανση στο τέλος του έτους είναι ίση με 15% ο επενδυτής θα κερδίσει το παρακάτω ποσό:3000*(15%-10%)=150.

2.5 Σημαντικές Διαφορές Των Συμβολαίων Ανταλλαγής Μεταβλητότητας Και Διακύμανσης.

Μέχρι στιγμής τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακύμανσης έχουν συζητηθεί σαν να ήταν πανομοιότυπα προϊόντα. Αν και χρησιμοποιούνται για τον ίδιο σκοπό, υπάρχουν κάποιες σημαντικές διαφορές μεταξύ τους που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

1. Οι πληρωμές των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας συνδέονται γραμμικά με την πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα, ενώ οι συμφωνίες ανταλλαγής διακυμάνσεως έχουν καμπυλόγραμμη σχέση. Το Διάγραμμα 1 θα μας βοηθήσει να αναλύσουμε τη διαφορά αυτή λίγο περισσότερο.

Ειδικότερα, από τη σκοπιά ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας, τα κέρδη μιας θέσης αγοραστή ή πωλητή είναι γραμμικά συνδεδεμένα με την πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα και απεικονίζονται ως η διακεκομμένη γραμμή στο Διάγραμμα 1. Για μεγαλύτερα ποσά η γραμμή παρουσιάζει μια πιο απότομη κλίση, με αποτέλεσμα μια μεγαλύτερη πληρωμή. Η πληρωμή εξισώνεται για τους δύο τύπους συμβολαίων στο νεκρό σημείο όπου η πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα ισούται με την τεκμαρτή μεταβλητότητα. Για υψηλότερα (χαμηλότερα) επίπεδα της τεκμαρτής μεταβλητότητας το *νεκρό σημείο* της γραμμής μετατοπίζεται προς τα δεξιά (αριστερά). Έτσι, όσο υψηλότερη είναι η μεταβλητότητα τόσο υψηλότερη είναι θα είναι και η πληρωμή.

Από την άλλη πλευρά, η χρήση της διακύμανσης αντί για τη μεταβλητότητα έχει ως αποτελέσματα μια μη γραμμική εξόφληση. Συγκεκριμένα, για θέσεις αγοράς στην διακύμανση (Διάγραμμα 1 η συνεχής γραμμή) η καμπύλη που απεικονίζει την πληρωμή παρουσιάζει θετική κυρτότητα. Αυτό σημαίνει ότι οι ζημίες και τα κέρδη δεν είναι συμμετρικά: υπάρχει μια μεγαλύτερη πληρωμή στον ιδιοκτήτη του συμβολαίου όταν η πραγματοποιηθείσα διακύμανση υπερβαίνει την τεκμαρτή διακύμανση, σε σύγκριση με τις ζημίες που υπέστη όταν παρουσιάζεται μεγαλύτερη τεκμαρτή σε σχέση με την πραγματοποιηθείσα διακύμανση. Για τον λόγο αυτό λέμε ότι οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης συνήθως διαπραγματεύονται σε επίπεδα ανώτερα της ΑΤΜ μεταβλητότητας.

Μια μεγάλη διακύμανση επιτρέπει στον ιδιοκτήτη να απολαμβάνει μεγάλα κέρδη, αλλά και τον προστατεύει από σημαντικές απώλειες. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές για μεγάλες διαφορές μεταξύ των δύο ειδών μεταβλητότητας. Αντιθέτως, από την πλευρά του πωλητή ενός συμβολαίου διαπραγμάτευσης διακύμανσης, η συνάρτηση πληρωμών παρουσιάζει αρνητική κυρτότητα. Όπως και με τη θετική κυρτότητα, τα κέρδη και ζημιές δεν είναι συμμετρικά. Όμως στην περίπτωση αυτή υπάρχει μία μεγαλύτερη ζημιά για τον πωλητή ενός συμβολαίου όταν η πραγματοποιηθείσα διακύμανση υπερβαίνει την τεκμαρτή διακύμανση, σε σύγκριση με τα κέρδη που παράγονται για τον αγοραστή όταν εμφανίζεται η απόκλιση αυτή. Μία ποσοτική ανάλυση των παραπάνω γίνεται στην Ενότητα 3.4.

2. Οι συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι πολύ πιο δύσκολες στην τιμολόγηση και τη διαχείριση του κινδύνου που εμπεριέχουν. Στο σημείο αυτό θα αναλύσουμε κάποιες πηγές κινδύνου για μια ανταλλαγή μεταβλητότητας ώστε να κατανοήσουμε καλύτερη την παραπάνω παρατήρηση. Αναφέρουμε λοιπόν πως η mark-to-market αξία της ανταλλαγής μεταβλητότητας έχει τις παρακάτω τρεις κύριες πηγές κινδύνου.

- **Κινήσεις της εύλογης αξίας της μεταβλητότητας (κίνδυνος τιμής εξάσκησης**). Η εύλογη αξία της K_t για ένα swap **τ**η χρονική στιγμή t είναι η κυρίαρχη πηγή κινδύνου για τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας. Οι κινήσεις της K_t επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την τελική αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στη λήξη και αποτελούν τον σημαντικότερο παράγοντα κινδύνου όσον αφορά την τελική διαμόρφωση της τιμής του συμβολαίου. Οι ίδιες οι κινήσεις της εύλογης αξίας της μεταβλητότητας καθοδηγούνται από τις κινήσεις της τεκμαρτής μεταβλητότητας και, κατά συνέπεια, ο κίνδυνος που σχετίζεται με τις κινήσεις στην εύλογη αξία της μεταβλητότητας ονομάζεται κίνδυνος vega.
- **Άλματα των τιμών των περιουσιακών στοιχείων (κίνδυνος άλματος)**. Εάν η διαδικασία για την κίνηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων αποτελείται από μια συνεχή συνιστώσα και μια συνιστώσα διάχυσης άλματος, η συνεχής συνιστώσα είναι αμελητέα κατά τη μέτρηση του κινδύνου μεταβλητότητας ή διακύμανσης ενός συμβολαίου. Αυτός ο κίνδυνος είναι χαμηλός και είναι γνωστός ως κίνδυνος δέλτα εφόσον μας δείχνει πως μπορεί να επηρεαστεί η τιμή του συμβολαίου από μια μεταβολή της τιμής του υποκείμενου μέσου. Τα άλματα όμως στην τιμή του υποκείμενου τίτλου μπορούν να προκαλέσουν απότομες αλλαγές στην αξία της ανταλλαγής διακύμανσης. Ο σχετικός κίνδυνος μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω διαδικασιών διάχυσης άλματος για τον υποκείμενο τίτλο. Ωστόσο, τα μοντέλα τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνων που καθορίζουν εμμέσως την mark-to-market αξία της ανταλλαγής μεταβλητότητας με βάση την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν άλματα, οδηγεί σε πρόσθετα σφάλματα (Demeterfi et al, 1999, όπου γίνεται συζήτηση για τις επιπτώσεις των αλμάτων των τιμών στην

αντιστάθμιση των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης). Τέτοια άλματα μπορούν επίσης να έχουν σημαντική επίπτωση στη διάθεση ανάληψης κινδύνου των επενδυτών, που οδηγεί σε σημαντικές αλλαγές στις εκτιμήσεις ως προς την εύλογη αξία της μεταβλητότητας. Κατά συνέπεια, θεωρούμε ότι αυτός ο κίνδυνος είναι τόσο υψηλός που δεν μπορεί να περιγραφεί-μοντελοποιηθεί.

- **Η μη ρευστοποιήσιμη τεκμαρτή μεταβλητότητα (κίνδυνος ρευστότητας).** Η θεωρητική τιμή της τιμής εξάσκησης ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης εξαρτάται από τις τεκμαρτές μεταβλητότητες των δικαιωμάτων προαίρεσης διαφορετικών τιμών εξάσκησης που μόνο ένα μικρό μέρος από αυτές έχουν παρατηρήσιμες τιμές. Μη παρατηρήσιμες αξίες δικαιωμάτων προαίρεσης είναι, φυσικά, οι τεκμαρτές μεταβλητότητες των βαθιά out-of-the-money δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης που αντιπροσωπεύουν το πέρας της ασυμμετρίας της μεταβλητότητας. Αυτή η ευαισθησία στην ουρά της ασυμμετρίας της μεταβλητότητας είναι σημαντική. Το επίπεδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας και των καθημερινών αλλαγών στην ασυμμετρία της μεταβλητότητας σε αυτή την παρατηρήσιμη περιοχή είναι ουσιαστικά ένα θέμα προσωπικής άποψης και διέπεται από τις προτιμήσεις της οποιαδήποτε θεωρίας. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερα ακανθώδες θέμα, επειδή η στάση ενός αντιπρόσωπου απέναντι στο βαθμό επικινδυνότητας του out-of-the-money δικαιώματος πώλησης μπορεί να αλλάξει λόγω διαφόρων παραγόντων, περιλαμβανομένης της αυξημένης αποστροφής κινδύνου. Αυτή η αύξηση της ασυμμετρίας μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στην εύλογη αξία της μεταβλητότητας και ως εκ τούτου στην αξία κάθε μεταβλητότητας.

2.6 Πραγματοποιηθείσα Μεταβλητότητα-Διακύμανση

Η μεταβλητότητα μετράει την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου και κατά κάποιο τρόπο παρέχει ένα μέτρο του κινδύνου κατοχής του υποκείμενου μέσου. Η πραγματική (ή ιστορική) μεταβλητότητα είναι η κυμαινόμενη μεταβλητότητα των υποκείμενων στοιχείων ενεργητικού που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της σύμβασης ανταλλαγής και δεν είναι γνωστή μέχρι τη λήξη της σύμβασης.

Υπάρχει μια ποικιλία τρόπων που μπορούν να μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα. Μια από τις πιο απλές μεθόδους είναι η ετησία τυπική απόκλιση των καθημερινών αποδόσεων των υποκειμένων τίτλων, που υπολογίζεται από ένα σύνολο στοιχείων που εκτείνονται σε κάποια καθορισμένη χρονική περίοδο. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι είναι πολύ εύκολη στην κατανόηση και τον υπολογισμό της αξία της μεταβλητότητας. Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι η μεταβλητότητα μπορεί ξαφνικά να παρουσιάσει μια μεγάλη μεταβολή μεγέθους και να βγει έξω από το όριο της παρατήρησής μας.

Η μεταβλητότητα μπορεί επίσης να υπολογιστεί με βάση τις αποδόσεις διαφόρων συχνοτήτων (εβδομαδιαίες, καθημερινές, κλπ). Αν οι αποδόσεις είναι πραγματικά ανεξάρτητες σε αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, η μεταβλητότητα θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα των αποδόσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της. Ωστόσο, στην πράξη, η μεταβλητότητα συνήθως υπολογίζεται χρησιμοποιώντας καθημερινές πολύ κοντινές σε μέγεθος αποδόσεις. Αυτό είναι σχεδόν πάντα το είδος της διακύμανσης που υπαγορεύει η πληρωμή μιας σύμβασης ανταλλαγής διακύμανσης.

Η μεταβλητότητα συνήθως αναφέρεται ως ετήσια μεταβλητότητα και εκφράζεται ως ποσοστό. Η ετήσια μεταβλητότητα αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη ετήσια τυπική απόκλιση της κατανομής των σχετικών αποδόσεων, με την προϋπόθεση ότι οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες. Για τη μετάβαση από την τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων καταγραφής, στην ετήσια μεταβλητότητα, απλά πολλαπλασιάζουμε με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των ημερών διαπραγμάτευσης εντός του έτους, συνήθως θεωρείται ότι είναι 252. Σημειώστε ότι από την τετραγωνική ρίζα του 252 είναι περίπου 16, μια διακύμανσης της τάξεως του 16 ισοδυναμεί με μια τυπική απόκλιση των ημερήσιων κινήσεων της τάξης του 1%.

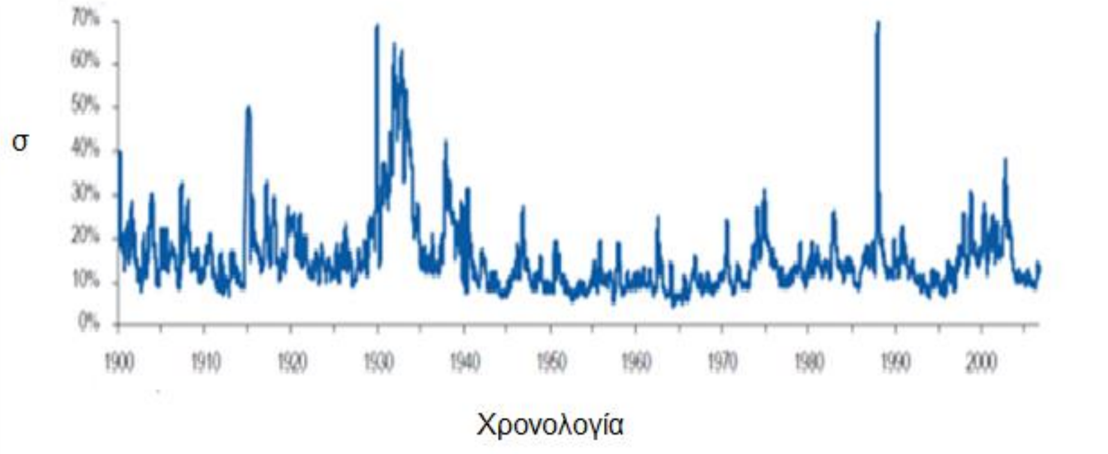
Τέλος η μεταβλητότητα μπορεί επίσης να οριστεί από ένα RMS (ρίζα του μέσου όρου των τετραγώνων) μέτρο, το οποίο είναι σαν μια τυπική απόκλιση, αλλά υποθέτοντας μηδενική μέση τιμή. Αυτό απλοποιεί τους υπολογισμούς, και στην πράξη, η διαφορά από την παραδοσιακή τυπική απόκλιση είναι πολύ μικρή. Η μέση απόδοση είναι η τάση, η οποία θα πρέπει να είναι κοντά στο μηδέν σε καθημερινή βάση.

Επιπλέον, το μέτρο αυτό (RMS) χρησιμοποιείται για να καθορίσει την πληρωμή της σύμβασης ανταλλαγής διακύμανσης. Η διαδικασία RMS για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας και της διακύμανσης ορίζεται στη σύμβαση παραγώγου και περιλαμβάνει λεπτομέρειες σχετικά με τη συχνότητα και την πηγή παρακολούθησης της τιμής της υποκείμενης αξίας, το συντελεστή ετησιοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί κατά τη μετάβαση σε μια ετήσια μεταβλητότητα, και την μέθοδο υπολογισμού της διακύμανσης.

Η τεκμαρτή διακύμανση σύμφωνα με την συγκεκριμένη μέθοδο υπολογίζεται ως εξής: $\sigma_{\mathrm{R}}{}^2 = \frac{AF}{N} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} (\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}} - \mathrm{S}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}}}})^2$

Ή $\sigma_R{}^2 = \frac{AF}{N} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} = (\frac{\mathrm{InS}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}} - \mathrm{InS}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}}}}{\mathrm{InS}_{\mathrm{t}_{\mathrm{i}}}})^2$

για μια ανταλλαγή που καλύπτει N παρατηρήσεις επιστροφής. Εδώ AF είναι ο παράγοντας ετησιοποίησης εάν η διάρκεια της πράξης είναι ένα έτος με καθημερινή δειγματοληψία, και S_iείναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου κατά την i-οστή φορά. Η μεταβλητότητα είναι απλά η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης που πραγματοποιήθηκε. Το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει την εξέλιξη της μεταβλητότητας τα τελευταία 100 χρόνια στον δείκτη Dow Jones Industrial Average. Παρατηρούμε ότι το 1930 λόγω της μεγάλης ύφεσης, το 1987 λόγω μιας μοναδικής υψηλής ημερήσιας κίνησης και το 2000 λόγω της διπλής φούσκας(ακινήτων και χρηματιστηρίου) το επίπεδο της μεταβλητότητας ήταν σε πολύ υψηλό επίπεδο και απαιτούσε την άμεση παρέμβαση με οποιοδήποτε τρόπο ώστε να καταπολεμηθεί.



ΠΗΓΗ:JP MORGAN

2.7 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα

Παρόλο που η μελλοντική μεταβλητότητα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη στην αγορά είναι πραγματικά δυνατό να εκμαιεύσουμε την προσδοκία των αγορών σχετικά με τα επίπεδα της μελλοντικής μεταβλητότητας από δικαιώματα τα οποία αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε δημόσια χρηματιστήρια (ή OTC). Η εκτίμηση αυτή έχει ονομαστεί τεκμαρτή μεταβλητότητα και βασίζεται σχετικά στην μελέτη Black-Scholes. Συγκεκριμένα δεκαετίες πριν οι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton πρότειναν ένα πλαίσιο για την αποτίμηση των παραγώγων το οποίο βραβεύτηκε το 1997 με το βραβείο Νόμπελ στην Οικονομία.

Σύμφωνα λοιπόν με τη μελέτη των BS, θεωρείται ότι η τιμή της μετοχής (S_t) ακολουθεί μια γεωμετρική Κίνηση Brown (GBM),η οποία υπάγεται στην κατηγορία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Η GBM παρουσιάζεται ως d S_t=μ $S_t\,dt$ + σ S_tdW_t, όπου ως μ ορίζεται η τάση που χρησιμοποιείται στη μέτρηση της ετήσιας αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής, που σημαίνει ότι ως μ dt ορίζεται η αναμενόμενη απόδοση σε μια απειροστή περίοδο του χρόνου. Ο όρος σ μετρά την ετήσια μεταβλητότητα των τιμών της μετοχής και το στοχαστικό μέρος, δηλαδή η αβεβαιότητα, καθορίζεται από την κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener, W_t . Μαζί μας δείχνουν κατά πόσο θα κυμαίνεται η τιμή γύρω από την αναμενόμενη τιμή (πόση παρέκκλιση θα υπάρχει).

2.8 Τεκμαρτή Έναντι Πραγματοποιηθείσας Μεταβλητότητας

Για τα περισσότερα διαπραγματεύσιμα στοιχεία η τεκμαρτή μεταβλητότητα τείνει να είναι υψηλότερη από την πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα. Αυτό είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό που συνδέεται με το λόγο που τα δικαιώματα προαίρεσης χρησιμοποιούνται. Συγκεκριμένα, όταν ένας επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα προαίρεσης προκειμένου αυτός να αποκτήσει ασφάλιση έναντι των διακυμάνσεων των τιμών, πρέπει να πληρώσει στον πάροχο της ασφάλισης ένα είδος πριμοδότησης ώστε να αντισταθμιστεί ο κίνδυνος που έχει ληφθεί. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής που επιθυμεί να αντισταθμίσει την θέση του έναντι μεγάλης προς τα κάτω κινήσεως θα αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης. Ο πωλητής του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι πρόθυμος να το πουλήσει, αν αναμένει κέρδη από την αντιστάθμιση του κινδύνου που αναλαμβάνει. Ως εκ τούτου το δικαίωμα πώλησης θα τιμολογείται σε υψηλότερο επίπεδο από το αναμενόμενο. Εν κατακλείδι, αυτά τα δικαιώματα προαίρεσης όπως και διάφορες άλλες δομές που βασίζονται σε αυτά, όπως οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης, θα τείνουν να τιμολογούνται με υψηλότερη τεκμαρτή μεταβλητότητα από ότι αναμένεται στην πραγματικότητα να ρευστοποιηθούν.

3. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ-ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Η ορθολογική τιμολόγηση στηρίζεται πάντα σε μια βασική υπόθεση που ισχύει στα χρηματοοικονομικά και σύμφωνα με την οποία οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού θα πρέπει αντανακλούν την τιμή του περιουσιακού στοιχείου χωρίς την ύπαρξη arbitrage, εφόσον κάθε παρέκκλιση από αυτήν την τιμή θα εξαλείφεται. Οι τιμές λέγεται ότι αποτελούν μια ισορροπία arbitrage ή μια αγορά απαλλαγμένη από τον κίνδυνο του arbitrage, εάν οι τιμές της αγοράς δεν επιτρέπουν την κερδοφορία μέσω arbitrage. Η υπόθεση αυτή είναι χρήσιμη για την τιμολόγηση των παράγωγων μέσων και είναι θεμελιώδους σημασίας προκειμένου να υπολογιστεί μια μοναδική και ουδέτερη από τον κίνδυνο τιμή για τα παράγωγα.

3.1 Σημασία της Τιμολόγησης Ουδέτερου Κινδύνου

Οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον κίνδυνο, καθώς οι επενδυτές απαιτούν συνήθως περισσότερο κέρδος για την ανάληψη μεγαλύτερου βαθμού αβεβαιότητας. Ως εκ τούτου, η σημερινή τιμή που αξιώνουν οι επενδυτές θα διαφέρει γενικά από την αναμενόμενη τιμή της. Συνήθως, οι επενδυτές προσπαθούν να αποφεύγουν το ρίσκο και η τρέχουσα τιμή είναι συνήθως χαμηλότερη της προσδοκώμενης, επιβραβεύοντας όσους αναλαμβάνουν τον σχετικά υψηλό κίνδυνο. Η τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων, κατά συνέπεια, απαιτεί την προσαρμογή των υπολογιζόμενων αναμενόμενων τιμών στις προτιμήσεις του επενδυτή που αφορούν το ποσοστό ανάληψης κινδύνου. Δυστυχώς, οι μειωμένες τιμές που κυμαίνονται μεταξύ των επενδυτών και των προτιμήσεων κινδύνου ενός ατόμου είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν.

Αποδεικνύεται ότι σε μια αποτελεσματική αγορά χωρίς ευκαιρίες αρμπιτράζ υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος για να κάνει κανείς τον παραπάνω υπολογισμό. Αντί να υπολογιστεί πρώτα η προσδοκία και μετά να γίνει προσαρμογή στην προτίμηση του κινδύνου του επενδυτή, μπορεί κανείς να προσαρμόσει αρχικά τις πιθανότητες των μελλοντικών αποτελεσμάτων, ώστε να περιλαμβάνουν ασφάλιστρο κινδύνου όλων των επενδυτών, και στη συνέχεια να λάβει την προσδοκία στο πλαίσιο της νέας κατανομής πιθανοτήτων του μέτρου ουδέτερου κινδύνου. Το κύριο όφελος προέρχεται από το γεγονός ότι από τη στιγμή που βρίσκονται οι ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες κάθε περιουσιακού στοιχείου μπορεί να τιμολογηθεί με την απλή λήψη της αναμενόμενης εξόφλησής του. Σημειώστε ότι αν χρησιμοποιούταν η πραγματική πιθανότητα, κάθε ασφάλεια θα απαιτούσε μια διαφορετική ρύθμιση (όπως διαφέρουν και στον βαθμό επικινδυνότητας).

Η έλλειψη του αρμπιτράζ είναι ζωτικής σημασίας για την ύπαρξη του μέτρου ουδέτερου κινδύνου. Στην πραγματικότητα, από το θεμελιώδες θεώρημα της τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων, η κατάσταση της απουσίας arbitrage είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη του μέτρου ουδέτερου κινδύνου. Η πληρότητα της αγοράς είναι επίσης σημαντική διότι σε μια ατελή αγορά υπάρχει ένα πλήθος πιθανών τιμών για ένα περιουσιακό στοιχείο που αντιστοιχεί σε διαφορετικό μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Είναι σύνηθες να υποστηρίζεται ότι η αποτελεσματικότητα της αγοράς σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μια τιμή (<<νόμος της μίας τιμής>>).

Η σωστή χωρίς κίνδυνο τιμή θα πρέπει να επιλέγεται βάσει οικονομικών και όχι καθαρά μαθηματικών επιχειρημάτων. Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να συγχέουμε την κατασκευασμένη κατανομή πιθανοτήτων με τον πραγματικό κόσμο πιθανοτήτων. Θα υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ τους διότι στον πραγματικό κόσμο οι επενδυτές απαιτούν πριμ κινδύνου, ενώ μπορεί να αποδειχθεί ότι, σύμφωνα με τις ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες, όλα τα περιουσιακά στοιχεία έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, και ως εκ τούτου δεν περιλαμβάνουν καμία τέτοια πριμοδότηση. Η μέθοδος της ουδέτερης από πλευράς κινδύνου τιμολόγησης θα πρέπει να θεωρείται ένα πολύ χρήσιμο υπολογιστικό εργαλείο - άνετο και ισχυρό, ακόμη και αν φαινομενικά μοιάζει τεχνητό.

3.2 Τεχνικές Τιμολόγησης Ουδέτερου Κινδύνου

Στα πλαίσια της εργασίας θα αναλύσουμε τρεις κύριες προσεγγίσεις τιμολόγησης για την εκτίμηση της τιμής των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Για το υπόλοιπο της εργασίας καθορίζουμε τη βασική σημειογραφία ως εξής: Η υπό συνθήκη προσδοκία την χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $E_t^Q[\bullet]$, όπου ως Q ορίζεται το ισοδύναμο martingale μέτρο βάσει του οποίου όλες οι αποπληθωρισμένες τιμές των χρεογράφων είναι martingales και E_0 είναι η αρχική τιμή της προσδοκίας. Όλες οι προσδοκίες θεωρούνται σε σχέση με το ουδέτερο από πλευράς κινδύνου μέτρο πιθανότητας που αναλύσαμε παραπάνω. Εννοιολογικά, η εκτίμηση ενός προθεσμιακού συμβολαίου ή μιας συμφωνίας ανταλλαγής μεταβλητότητας δεν διαφέρει από οποιοδήποτε άλλο παράγωγο

Η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου που βασίζεται στη μελλοντική τιμή της διακύμανσης εξάσκησης K είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών πληρωμών σε ένα κόσμο απαλλαγμένο από τον κίνδυνο:

P=E_0^Q $\{e^{-rT}(\sigma^2{}_R$-K)$\}$, όπου r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο το οποίο παραμένει σταθερό και αντιστοιχεί στην ημερομηνία λήξης T. Η εύλογη αξία της μελλοντικής διακύμανσης είναι η τιμή εξάσκησης για την οποία το συμβόλαιο θα έχει μηδενική τρέχουσα αξία δηλαδή $K_{var}= E_0^Q\{\sigma^2{}_R\}$ (Merton R, 1973). Πρέπει λοιπόν να επιλέξει τις κατάλληλες τιμές της τιμής εξάσκησης $K_{var} = E_0^Q\{\sigma^2{}_R\} = E_0^Q\{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t{}^2\, d_t\}$ ώστε την χρονική στιγμή t=0 το συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης, όπως συμβαίνει με κάθε προθεσμιακό συμβόλαιο, να έχει μηδενική αξία. Για ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας, θα ισχύει αντίστοιχα με τα παραπάνω ότι $K_{vol} = E_0^Q\{\sigma_R\} = E_0^Q\{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t\, d_t\}$ και ομοίως στην πιο περίπλοκη περίπτωση ενός συμβολαίου ανταλλαγής μέσης μεταβλητότητας οι ανταλλαγές μεταβλητότητας τιμολογούνται με το συνήθη τρόπο. Για παράδειγμα, η τιμή της ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι:

$E_0^Q\{\max(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t\, d_t$-K, 0)$\}$.

3.3 Τιμολόγηση Ανεξάρτητα Από Το Μοντέλο Που Ακολουθεί η Μεταβλητότητα

Οι αγοραίες τιμές των μετοχών παρουσιάζουν μια διακύμανση στο πέρασμα του χρόνου. Όπως είδαμε και από τον τύπο βάσει του οποίου υπολογίζεται η πραγματοποιηθείσα διακύμανση εάν παρατηρήσουμε τις τιμές της αγοράς της μετοχής για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μπορούμε εύκολα να βρούμε τη διακύμανση - και συνεπώς την μεταβλητότητα - εφόσον είναι η ρίζα της υπολογισθείσας διακύμανσης.

Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος αυθαίρετα να θεωρήσει πως στην περίπτωση που η πραγματοποιηθείσα διακύμανση είναι σε υψηλότερα επίπεδα από την τεκμαρτή μπορεί να αγοράσει ένα απλό δικαίωμα αγοράς και να επιτύχει κέρδος. Η αντίληψη αυτή όμως είναι λανθασμένη διότι τα απλά δικαιώματα αποτελούν ένα αναποτελεσματικό μέσο πρόβλεψης της διακυμάνσεως εφόσον η τιμή τους αλλά και η ευαισθησία της τιμής τους απέναντι στις αλλαγές της μεταβλητότητας εξαρτώνται από την τιμή της μετοχής. Σίγουρα λοιπόν χρειαζόμαστε ένα άλλο μέσο που θα μας βοηθήσει να τιμολογήσουμε την διακύμανση.

Γενικά θα λέγαμε ότι οι αγορές των δικαιωμάτων επηρεάζονται από τις αναμενόμενες τιμές της διακύμανσης. Αυτό το συμπέρασμα βασίζεται κυρίως στον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατή η δυναμική αναπαραγωγή της απόδοσης ενός δικαιώματος με τη χρήση της υποκείμενης μετοχής και χρημάτων όπως περιγράφεται αναλυτικά στο βιβλίο του Hull (2008). Σύμφωνα με τις αναφορές στο βιβλίο αυτό φαίνεται πως μπορεί να αντιμετωπιστεί η ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος στις μεταβολές της τιμής (δέλτα αντιστάθμιση) διατηρώντας μια αντίθετη θέση στο υποκείμενο μέσο σε ποσότητα ίση με τον συντελεστή δέλτα.

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε πως χρησιμεύει το λογαριθμικό συμβόλαιο. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε πως δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, πως η τιμή της μετοχής είναι συνεχής (χωρίς άλματα) και πως το περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown η οποία δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{ds_t}{s_t} = r\,dt + \sigma_t dW_t, \qquad (3.1)$$

όπου με W_tσυμβολίζεται η κίνηση κατά Brown και σ_t =σ(t,S) η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής η οποία μπορεί να είναι σταθερή ντετερμινιστική είτε στοχαστική. Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την αξία μιας συμφωνίας ανταλλαγής διακύμανσης που διαρκεί από 0 έως T και η οποία όπως είδαμε στην Ενότητα 3.2 έχει μια απόδοση ίση με $\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t)dt$.

Η κύρια στρατηγική που χρησιμοποιείται για να αναπαραχθεί η πραγματοποιηθείσα διακύμανση (Broadie (2008), Demeterfy et al (1999)) είναι η ακόλουθη: Ο γενικός τύπος του Ito (Black and Scholes) για μια συνάρτηση F(t, S_t) όπου η S_t ικανοποιεί την (3.1) είναι ο εξής:

$$dF(t, S_t)=\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)+ rS_t\frac{\partial F}{\partial S_t}(t, S_t)+\frac{1}{2}\sigma_t{}^2S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial {S^2}_t}(t, S_t)\}dt+\sigma_t S_t\frac{\partial F}{\partial S_t}(t, S_t)dW_t \qquad (3.2)$$

Εάν η F οριστεί ως F(t, S_t) =logS_t τότε θα έχουμε:

$\frac{\partial F}{\partial S}=\frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2}$, $\frac{\partial F}{\partial t}=0$,

και έτσι λοιπόν εάν αντικαταστήσουμε στην φόρμουλα του $\hat{I}$ to και ολοκληρώσουμε θα αποκτήσουμε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση για τον λογάριθμο log S_t: $d(logS_t)$ =(r-$\frac{1}{2}\sigma_t{}^2$)dt+$\sigma_t\, dW_t$ (3.3).

Αφαιρώντας την (3.3) από την (3.1) έχουμε ότι:

$$\frac{dS_t}{S_t} - d(\log S_t)=\frac{1}{2}{\sigma^2}_t dt, \qquad (3.4)$$

όπου το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο έχει απαλειφθεί. Ολοκληρώνοντας τώρα για το διάστημα από 0 έως T και διαιρώντας με T τις δύο πλευρές της (3.4) θα έχουμε: $\frac{2}{T}\int_0^T\frac{dS_t}{S_t}-\frac{1}{T}\int_0^T d(log\, S_t)=\frac{1}{2}\int_0^T {\sigma^2}_t\, dt.$ (3.5)

Έτσι, το μέτρο της πραγματοποιηθείσας συνεχούς διακύμανσης είναι:

$$K_{var}=\frac{1}{T}\int_0^T {\sigma^2}_t\, dt=\frac{2}{T}(\int_0^T\frac{dS_t}{S_t}-log\frac{S_T}{S_0}). \qquad (3.6)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει ότι η πραγματοποιηθείσα διακύμανση μπορεί να υπολογιστεί ανεξαρτήτως του μονοπατιού που ακολουθεί η τιμή της μετοχής θεωρώντας πάντα ως βασική υπόθεση πως δεν παρατηρούνται άλματα. Τώρα εφαρμόζουμε τις προσδοκίες ώστε να πάρουμε τιμές απαλλαγμένες από τον κίνδυνο. Σημαντική παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε είναι πως $E_0^Q\{\int_0^T \frac{dS(s)}{S(s)}\} = E_0^Q\{\int_{t_0}^T \mathrm{rd}\, t + \int_0^T {\sigma_t}^2\, dW_t\}$ όπου ο δεύτερος όρος ισούται με r(T-t_0).

Άρα η 3.6 δίνει ότι ½ $E_0^Q\{\int_0^T {\sigma_t}^2 \ \ dt\}$ =rT+log So- E_0^Qlog S_T}, όπου ο τελικός όρος στη δεξιά πλευρά είναι η αξία ενός λογαριθμικού συμβολαίου, το οποίο μπορεί να αναλυθεί σε ένα συνδυασμό από δικαιώματα αγοράς και πώλησης όπως θα αναλύσουμε στο κεφάλαιο 5. Ως εκ τούτου τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης μπορούν εύκολα να τιμολογούνται από την άποψη των απλών δικαιωμάτων. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δεν μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές αντιστάθμισης ούτε μας παρέχει μια φόρμουλα για όλες τις περιπτώσεις.

3.4 Τιμολόγηση Στην Περίπτωση Συμβολαίων Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Η αναπαραγωγή των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι αρκετά πολύπλοκη όμως ιδιαιτέρως σημαντική λόγω της ιδιαίτερης προτίμησης που δείχνουν οι επενδυτές των αγορών στην χρήση τέτοιων συμβολαίων. Στο σημείο αυτό θα ερευνήσουμε την αναπαραγωγή των συμφωνιών ανταλλαγής μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας μια λίγο απλοϊκή μέθοδο χωρίς να βασιζόμαστε σε κάποιο στοχαστικό μοντέλο για την τιμή ούτε σε κάποια δυναμικά της μεταβλητότητας (Demeterfi et al(1999), Sam Howison et al (2002), Anatoliy Swishchuk (2004)). Στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης δεν κάναμε καμία υπόθεση σχετικά με την μεταβολή της μεταβλητότητας. Το μόνο που υποθέσαμε ήταν πως η τιμή εξελίσσεται συνεχώς (χωρίς άλματα).

Στην περίπτωση όμως της αναπαραγωγής των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας η αξία τους επηρεάζεται από τη μεταβλητότητα του μελλοντικού επιπέδου της πραγματοποιηθείσας μεταβλητότητας. Ουσιαστικά δηλαδή η διακύμανση θεωρείται ως το αρχικό υποκείμενο μέσο και όλες οι άλλες πληρωμές μεταβλητότητας, όπως στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας, θεωρούνται αξιόγραφα που έχουν ως υποκείμενο τίτλο την διακύμανση. Άρα λοιπόν η αξία ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας εξαρτάται από τη μεταβλητότητα της υποκείμενης διακύμανσης δηλαδή από τη μεταβλητότητα της μεταβλητότητας.

Κάνοντας τις παραπάνω αρχικές υποθέσεις θα ασχοληθούμε στο σημείο αυτό με την τιμολόγηση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας ως συμβόλαια ανταλλαγής τυπικής απόκλισης, εφόσον η τυπική απόκλιση μπορεί να θεωρηθεί ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Μια απλοϊκή λοιπόν μέθοδος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τη σειρά του Taylor και θα πάρουμε μια πρώτου βαθμού Taylor προσέγγιση. Όπως γνωρίζουμε η σειρά Taylor μιας πραγματικής ή πολύπλοκης συνάρτησης f(x) η οποία είναι απείρως διαφορίσιμη γύρω από έναν πραγματικό αριθμό x_0 είναι η ακόλουθη:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!})(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε πως $x_0=K{s/_d}$, όπου $K{s/_d}$ είναι η τιμή εξάσκησης ενός συμβολαίου ανταλλαγής τυπικής απόκλισης και ότι x=$\sqrt{v_R}$ και πάρουμε την πρώτου βαθμού προσέγγιση του Taylor θα έχουμε ότι:

$$(\sqrt{v_R})^2-\left(K{s/_d}\right)^2 \approx 2K{s/_d}(\sqrt{v_R}-K{s/_d})$$

άρα $\sqrt{v_R}-K{s/_d}=\frac{1}{2K{s/_d}}(v_R-K{s/_d}^2)$.

Αυτό σημαίνει ότι η πληρωμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής τυπικής απόκλισης με τυπική απόκλιση κοντά στο $K{s/_d}$ μπορεί να αναπαραχθεί, κρατώντας περίπου $\frac{1}{2K{s/_d}}$ συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης με τιμή εξάσκησης την $K{s/_d}^2$ και με την ίδια διάρκεια. Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβής, όταν αποδεικνύεται ότι $\sqrt{v_R}=K{s/_d}$ δηλαδή όποτε $v_R=K{s/_d}^2$. Έτσι, αφελώς, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη δίκαιη τιμή εξάσκησης των τυποποιημένων συμβολαίων ανταλλαγής τυπικής απόκλισης από την τετραγωνική ρίζα της τιμής εξάσκησης ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης. Όμως θα πρέπει να τονίσουμε και πάλι πως αυτή η προσέγγιση είναι καλή μόνο όταν η τιμή της πραγματοποιηθείσας τυπικής απόκλισης αποδεικνύεται ότι είναι κοντά στην δίκαιη τιμή εξάσκησης της τυπικής απόκλισης.

Από την άλλη μεριά στην περίπτωση που η τιμή της πραγματοποιηθείσας τυπικής απόκλισης απομακρύνεται από την εύλογη τυπική απόκλιση η μέθοδος αυτή δεν εξυπηρετεί διότι δεν μπορεί να ταυτίσει μια παραβολή παντού με μια ευθεία γραμμή. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα της ανταλλαγής διακύμανσης είναι πάντα μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της ανταλλαγής τυπικής απόκλισης. Αυτό δεν είναι πολύ ρεαλιστικό, διότι, αν συνέβαινε, τότε οι επενδυτές στην αγορά θα ήταν πιο πρόθυμοι να επενδύσουν σε συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης και όχι σε συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας. Γνωρίζουμε όμως ότι δεν το κάνουν αυτό, διότι σύμφωνα με τα στοιχεία της αγοράς, τα συμβόλαια ανταλλαγής τυπικής απόκλισης είναι πιο δημοφιλή μέσα ανταλλαγής του κινδύνου της μεταβλητότητας σε σχέση με τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης.

Επίσης, εάν το αποτέλεσμα της ανταλλαγής διακύμανσης είναι πάντα μεγαλύτερο από την πληρωμή που προσφέρει μια συμφωνία ανταλλαγής τυπικής απόκλισης, τότε αυτό δημιουργεί σίγουρα μια ευκαιρία για arbitrage (η οποία έρχεται σε άμεση αντίθεση με την παραδοχή της βιωσιμότητας της αγοράς). Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η εξόφληση της ανταλλαγής διακύμανσης στο χρονικό σημείο T είναι μεγαλύτερη από την πληρωμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής τυπικής απόκλισης με την ίδια διάρκεια, τότε θα εμφανιστεί η εξής ευκαιρία arbitrage. Τη χρονική στιγμή t=0 θα μπορούσαμε να πουλήσουμε μια συμφωνία ανταλλαγής τυπικής απόκλισης και να αγοράσουμε μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης. Τη χρονική στιγμή t=T θα μπορούσαμε να κλείσουμε την θέση μου παίρνοντας τη θέση του αγοραστή σε μια συμφωνία ανταλλαγής τυπικής απόκλισης με απόδοση ίση με $K_{s/d} - \sqrt{v_R}$ και να κλείσουμε την άλλη ανοιχτή μου θέση μπαίνοντας στη θέση του πωλητή σε μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης με απόδοση ίση με v_R-K_{var}.

Εφόσον η παραπάνω μέθοδος ισχύει μόνο όταν $K_{s/d} = \sqrt{K_{var}}$ για να αποφύγουμε τις ευκαιρίες arbitrage θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μια τιμή $K_{s/d} < \sqrt{K_{var}}$ ώστε η ευθεία γραμμή να κινηθεί προς τα πάνω και να μην βρίσκεται συνεχώς κάτω από την παραβολή. Για να ισχύσει ότι $K_{s/d} < \sqrt{K_{var}}$

θα πρέπει να πάρουμε τη δευτέρου βαθμού προσέγγιση της σειράς Taylor για μια συνάρτηση g(v_R)=$\sqrt{v_R}$ γύρω από την $K_{var} = E_0(v_R)$ μέσω της οποίας θα έχουμε ότι:

$$\sqrt{v_R}=\sqrt{K_{var}}+\frac{1}{2\sqrt{K_{var}}}(v_R\text{-}K_{var})\text{-}\ \frac{1}{8K_{var}{}^{1.5}}(v_R - K_{var})^2$$

Από όπου εάν πάρουμε τις αναμενόμενες τιμές θα έχουμε ότι:

$K_{s/d}$=$E_0(\sqrt{v_R})$= $\sqrt{K_{var}} - \frac{1}{8K_{var}{}^{1.5}}E_0(v_R - K_{var})^2$=>$K_{s/d}$=$E_0(\sqrt{v_R})$= $\sqrt{K_{var}} - \frac{Var_0(v_R)}{8K_{var}{}^{1.5}}$, όπου ο παράγοντας $\frac{Var_0(v_R)}{8K_{var}{}^{1.5}}$ ονομάζεται μεροληψία κυρτότητας και δείχνει το μέγεθος της απόκλισης μεταξύ $K_{s/d}$ και $\sqrt{K_{var}}$.

Ουσιαστικά λοιπόν όπως αναλύσαμε και στην Ενότητα 2.5 η πληρωμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης συνδέεται γραμμικά με τη διακύμανση αλλά παρουσιάζει κυρτότητα σε σχέση με την μεταβλητότητα. Αυτό σημαίνει πως κάποιος ο οποίος είναι σε θέση αγοραστή σε μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης θα κερδίζει περισσότερο από την αύξηση της μεταβλητότητας από όσο θα χάνει στην περίπτωση μείωσής της. Άρα λοιπόν για μια μικρή μείωση στην μεταβλητότητα, όταν η επίδραση της κυρτότητας του συμβολαίου ανταλλαγής διακυμάνσεως θα είναι αμελητέα, τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας θα προσεγγίζονται από τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης και τότε η τιμολόγησή τους θα πραγματοποιείται με ανάλογο τρόπο.

3.5 Τιμολόγηση Βάσει Του Μοντέλου Στοχαστικής Μεταβλητότητας

Μια δεύτερη μέθοδος τιμολόγησης που αναλύεται στο άρθρο των Sam Howinson et al (2002) αναφέρεται στην τιμολόγηση όταν η μεταβλητότητα ακολουθεί ένα συγκεκριμένο στοχαστικό μοντέλο εξέλιξης. Αυτή είναι μια πολύ πιο σύνθετη μέθοδος από την προηγούμενη που αναπτύξαμε, γι' αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε μόνο ένα μέρος των απαιτούμενων υπολογισμών. Όπως έχουμε αναφέρει η δίκαιη τιμή εξάσκησης ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας δίνεται από την εξίσωσηK_{vol}=$E_0^Q(\sigma_R)$= $E_0^Q(\frac{1}{T}\int \sigma_t dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_0^Q(\sigma_t)\,dt$. Ομοίως, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος για μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης είναι ίση με K_{var}=$E_0^Q(v_R)$=E_0^Q $(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2{}_t\, dt)$ =$\frac{1}{T}E_0^Q\int_0^T \sigma^2{}_t\, dt$. Ωστόσο, ακόμη και όταν ένα μοντέλο για τη διακύμανση είναι δεδομένο, η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της δίκαιης τιμής εξάσκησης είναι λιγότερο σαφής.

Θα εξετάσουμε τώρα πως οι τιμές εξάσκησης δίνονται από εξισώσεις με μερικά παραδείγματα από στοχαστικά μοντέλα για τη μεταβλητότητα. Ως πρωτότυπο παράδειγμα στοχαστικού μοντέλου για την μεταβλητότητα, θεωρούμε τη γενικευμένη διαδικασία Wiener:

$$d\sigma_t = (a_1 + a_2\,\sigma_t)\,dt + (a_3 + a_4\,\sigma_t)\,dW_t, \qquad (3.7)$$

όπου W_t είναι η τυπική κίνηση κατά Brown και $a_1,..,a_4$ είναι σταθερές με $a_1>0$ και $a_2<0$ ώστε να μοντελοποιήσουμε την αναστροφή στο μέσο. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το μοντέλο ορίζουμε:

$$E_{1t}=E_0^Q(\sigma_t), \quad \overline{E_{1t}} = \int_0^T E_{1t}\,dt \text{ και } E_{2t} = E_0^Q(\sigma^2{}_t), \quad \overline{E_{2t}} = \int_0^T E_{2t}\,dt \;.$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν τις παραμέτρους του μοντέλου, οι K_{var}και K_{vol} θα ισούνται με $K_{vol}=\frac{1}{T}\overline{E_{1t}}$ και $K_{var}=\frac{1}{T}\overline{E_{2t}}$. Για να υπολογίσουμε τις τιμές εξάσκησης των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακύμανσης πρέπει να βρούμε μια φόρμουλα για τις E_{1t} και E_{2t} . Αντίστοιχα ολοκληρώνουμε από 0 έως t τη διαδικασία της (3.7) ώστε να πάρουμε $\sigma_t=\sigma_0+\int_0^t(a_1 + a_2\sigma_s\text{ds}+\int_0^t(a_3 + a_4\sigma_s)dW_s$,

Και τότε $E_{\;1t} = E_0^Q(\sigma_t)= E_0^Q(\sigma_0+\int_0^t(a_1 + a_2\sigma_s)ds+\int_0^t(a_3 + a_4\sigma_s)dW_s)$

$$=\sigma_0+a_1t+E_0^Q\left(\int_0^t(a_2\sigma_s)\text{ds}+\int_0^t(a_3 + a_4\sigma_s)dW_s\right)$$

$$=\sigma_0+a_1t+a_2\left(\int_0^t E_0^Q\,\sigma_s ds+E_0^Q\int_0^t(a_3 + a_4\sigma_s)dW_s\right). \qquad (3.8)$$

Γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με τον Itô το ολοκλήρωμα $\int_0^t \mathrm{f(Ws)dW_s}$ με την $f(Ws)$ ως τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (square integrable) συνάρτηση θα είναι martingale και άρα η μέση τιμή του θα είναι 0. Αν διαφορίσουμε τις δύο πλευρές της (3.8) έχουμε ότι:

$dE_{1t}= (a_1+a_2E_{1t})d_t$, η οποία είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Η γενική λύση για την ΜΔΕ είναι:E_{1t}=C$e^{\alpha_2 t}$ -$\frac{a_1}{a_2}$. Εφόσον η E_{1t} είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή δεδομένης της σ_0 , έχουμε ότι C= σ_0 + $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, ώστε $E_{1t} = \sigma_0 e^{\alpha_2 t}$ -$\frac{a_1}{a_2}$(1- $e^{\alpha_2 t}$). Τελικά η μέση αναμενόμενη τιμή θα είναι $\overline{E_{1t}}=\int_0^T E_{1t}\, d_t=\int_0^T \sigma_0 e^{\alpha_2 t}\ dt$ - $\frac{a_1}{\alpha_2}\int_0^T(1-e^{\alpha_2 t}$)dt= $\frac{\sigma_0}{\alpha_2}(e^{\alpha_2 t}$ -1)- $\frac{a_1}{a^2{}_2}(T\alpha_2$-$e^{a_2 T}$+1).

Ομοίως με όσα κάναμε για τον υπολογισμό της $\overline{E_{1t}}$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την $\overline{E_{2t}}$ ώστε να τιμολογήσουμε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης. Διαλέγοντας διαφορετικές τιμές για τα α_1,α_2,α_3,α_4 της εξίσωσης (3.7) καταλήγουμε στην εύρεση τιμής εξάσκησης παραγώγων βάσει διαφόρων στοχαστικών μοντέλων. Κάποια από τα βασικότερα είναι τα εξής:

- Hull and White (1973): dσ_t=σ_t(adt+γdW_t), ρ=0,
- Stein &Stein (1991): dσ_t=β$(\mathrm{a}+\sigma_t)$dt+γdW_t, ρ=0,

καθώς επίσης και τα:

- Scott (1987): dσ_t=σ_t(a-βσ_t)dt+γdW_t,
- Heston (1993): dv_t=-k(v_t-θ)dt+η$\sqrt{v_t}$dW_t.

3.5.1 Τιμολόγηση Με Βάση Το Μοντέλο Των HULL - WHITE

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μερικώς την παραπάνω γενική μέθοδο για να υπολογίσουμε βάσει του στοχαστικού μοντέλου των Hull-White τις τιμές των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Γνωρίζουμε ότι το μοντέλο των Hull-White βασίζεται στην ακόλουθη γεωμετρική κίνηση κατά Brown d$\sigma^2{}_t$=κ$\sigma^2{}_t\, dt$ +θ$\sigma^2{}_t\, dW_t$ για τη διακύμανση και στην περίπτωση της μεταβλητότητας ισχύει η υπόθεση ότι dσ_t=κ$\sigma_t\, dt$ +θ$\sigma_t\, dW_t$. Συγκεκριμένα εάν πάρουμε τη γενική εξίσωση $d\sigma_t$=(α_1+ $\alpha_2\sigma_t$)dt +(α_3+ $\alpha_4\sigma_t$) dw_t και αντικαταστήσουμε όπου α_1=0, α_2=k θα βρούμε πολύ απλά τις τιμές ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης και ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας αντίστοιχα.

Υποθέτουμε λοιπόν πως dσ_t=κ$\sigma_t\, dt$+θ$\sigma_t\, dW_t$. Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε και την παραπάνω επιλογή για τα α_1, α_2 παρατηρούμε αναλόγως ότι $E_{1t}=E_0$ (σ_t)= $\sigma_0 e^{kT}$, $\overline{E_{1t}}=\int_0^T E_{1t}\, dt=\frac{\sigma_0}{\kappa}(e^{kt}-1)$ και εφόσον η τιμή εξάσκησης είναι K_{vol}=$E_0(\sigma_R)$= $E_0(\frac{1}{T}\int_0^T\sigma_t\, dt$ =$\frac{1}{T}E_{1t}$ είναι πολύ εύκολο να την υπολογίσουμε και έτσι να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμολόγηση του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας. Η διαδικασία υπολογισμού της τιμής ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακυμάνσεως είναι ανάλογη μόνο που εκεί θεωρούμε ότι η διακύμανση v_t=${\sigma^2}_t$ ακολουθεί τη διαδικασία που περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση όπου v_t =F(σ_t):

dF(σ_t)=[(a_1+$a_2\sigma_t$) F′(σ_t)+$\frac{1}{2}$(a_3+$a_4\sigma_t$)^2 F″(σ_t)]dt+(a_3+$a_4\sigma_t$) F′(σ_t)]dW_t.

3.5.2 Τιμολόγηση Με Βάση Το Στοχαστικό Μοντέλο Του Heston

Ένα δημοφιλές μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη της μεταβλητότητας ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι το μοντέλο το οποίο αναπτύχθηκε από τον Heston (1993). Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι η μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου δεν είναι σταθερή, ακόμα ούτε και ντετερμινιστική, αλλά ακολουθεί μια τυχαία διαδικασία. Στο μοντέλο του Heston, υπάρχουν κλειστού τύπου λύσεις για τις τιμές των διαφόρων παραγώγων έναντι της πραγματοποιηθείσας μεταβλητότητας και διακύμανσης. Για παράδειγμα, μπορούμε να εξάγουμε σημαντικές φόρμουλες υπολογισμού της δίκαιης τιμής εξάσκησης ενός απλού, εντός ανώτατου ορίου και υπό όρους, συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης ή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος εγγεγραμμένου στη πραγματοποιηθείσα διακύμανση.

Στο μοντέλο του Heston, τόσο η τιμή του περιουσιακού στοιχείου όσο και η διακύμανση υποτίθεται ότι είναι στοχαστικές. Η διαδικασία των τιμών είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown και η διαδικασία της διακύμανσης είναι διαδικασία RMS όπως αναλύσαμε στην Παράγραφο 2.6. Το βασικό μοντέλο Heston υποθέτει ότι η τιμή S_t του περιουσιακού στοιχείου, προσδιορίζεται από μια στοχαστική διαδικασία: d S_t=μ $S_t\,dt$ + σ_t S_tdW_t^1, όπου η στιγμιαία διακύμανση $\mathrm{v}_t = {\sigma_t}^2$, είναι μια διαδικασία CIR. Το CIR είναι μια διαδικασία Markov που είναι παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε από τους Cox, Ingersoll και Ross (1985) - εξού και η ονομασία - και η οποία ορίζεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση dr_t=θ(μ-r_t)dt +σ$\sqrt{r_t}dW_t$.

Έτσι λοιπόν $d{\sigma^2}_t = k(\theta - {\sigma^2}_t)dt + \xi\sigma_t dW_t^2$, όπου οι W_t^1 , W_t^2 , είναι διαδικασίες Wiener (π.χ τυχαίος περίπατος) με συντελεστή συσχέτισης ρ δηλαδή [$d\mathrm{W}_t^1 dW_t^2$]=ρdt. Οι παράμετροι στις παραπάνω εξισώσεις αντιπροσωπεύουν τα ακόλουθα:

- μ είναι το ποσοστό απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου. Βάσει του θεωρήματος του Girsanov για να περάσουμε από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου αρκεί μια απλή αντικατάσταση του μ με r, όπου το r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου,
- θ είναι η διακύμανση ή η μακροπρόθεσμη μέση απόκλιση των τιμών. Όσο η χρονική στιγμή t τείνει στο άπειρο, η αναμενόμενη τιμή της ${\sigma^2}_t$ τείνει στο θ,·
- κ είναι ο ρυθμός με τον οποίο η σ_t επανέρχεται στο μέσο,
- ξ είναι η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας. Όπως υποδηλώνει και το όνομα, αυτό καθορίζει τη διακύμανση της σ_t.

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε βάσει του συγκεκριμένου μοντέλου την τιμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης (Swishchuk(2004)). Έτσι λοιπόν βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή της διακύμανσης η οποία στην αρχή θα ισούται με την τιμή εξάσκησης K όπως έχουμε αναφέρει. Δηλαδή θα ισχύει ότι: $E_0\,\{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2\,dt\}= \theta + (1-e^{-kT})\left(\frac{v_0}{T\kappa}-\frac{\theta}{KT}\right)$. Πράγματι στην Ενότητα 3.1 αναφέραμε ότι η δίκαιη τιμή εξάσκησης είναι K_{var}=$\frac{1}{T}$E$\{\int_0^\tau {\sigma_t}^2\,dt\}$. Επίσης βάσει των δυναμικών του Heston η διακύμανση ακολουθεί την εξίσωση d v_s= $k(\theta-\mathrm{v}_s)dt$ + ξ $\sqrt{\mathrm{v}_s}\mathrm{dW_s}$.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση στο διάστημα από 0 έως t θα έχουμε ότι:

$\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{d}\,\mathrm{v}_s$=$\int_0^{\mathrm{t}} k(\theta-\mathrm{v}_s)dt$+$\xi\int_0^{\mathrm{t}}\sqrt{\mathrm{v}_s}\mathrm{dW_s}$, όπου εάν λάβουμε τις αναμενόμενες τιμές θα έχουμε ότι:

E(v_t)-v_0=kθt-k E($\int_0^t \mathrm{v}_s\,\mathrm{ds}$)+ξE($\int_0^{\mathrm{t}}\sqrt{\mathrm{v}_t}\mathrm{dW_t}$).

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος έχουμε ότι E($\int_0^t\sqrt{\mathrm{v}_t}\mathrm{dW_t}$)=0 άρα E(v_t)-v_0=kθt-k E($\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{v}_s\,\mathrm{ds}$). Εάν θέσουμε όπου E($\mathrm{v}_t$)=μ(t) θα έχουμε ότι μ(t)-v_0=k θ t-k $\int_0^{\mathrm{t}}\mu(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}$. Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση ως προς τον χρόνο έχουμε ότι μ'(t) =k (θ-μ(t)) την οποία εάν λύσουμε ως μια κλασσική πρώτου βαθμού διαφορική εξίσωση θα έχουμε ότι μ(t)=θ+e^{-kT}c όπου c= σταθερά. Τέλος για μ(0)=v_0 και μ(t)=E(v_t) η παραπάνω σχέση δίνει

$E(v_t)=(v_0-\theta)e^{-kt}+\theta$.

Εφόσον όμως $K_{var} = \frac{1}{T} E\{ \int_0^T \sigma_t{}^2\, dt \}= \frac{1}{T} \{ \int_0^T E\,(v_t) dt \}$ τελικά καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση $E\,\{\sigma^2{}_R\} =E_0\, \{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2\, dt\}= K_{var} = \theta + (1-e^{-kT})\left(\frac{v_0}{T\kappa} - \frac{\theta}{KT}\right)$

η οποία αποτελεί και τη θεωρητική τιμή που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης στο συνεχές χρόνο.

3.5.3 Τιμολόγηση Μέσω Διαφορικών Εξισώσεων

Μέχρι στιγμής έχουμε αναπτύξει φόρμουλες για την τιμολόγηση των παραγώγων μεταβλητότητας όταν οι συντελεστές της διαδικασίας μεταβλητότητας εξαρτώνται μόνο από το χρόνο και την ίδια τη μεταβλητότητα. Θα εξετάσουμε τώρα τη γενική περίπτωση των παραγώγων μεταβλητότητας για τα οποία δε μπορεί να παραχθεί συγκεκριμένος τύπος οπότε και εφαρμόζουμε μια γενική διαδικασία τιμολόγησης με τη χρήση μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Οι ρητές φόρμουλες είναι γενικά διαθέσιμες μόνο για τα καθαρά προϊόντα μεταβλητότητας, και υπό την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές της διαδικασίας προσδιορισμού της είναι ανεξάρτητοι από την τιμή S_t . Για πιο γενικές περιπτώσεις, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είτε μεθόδους Monte-Carlo είτε τις αριθμητικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης τιμολόγησης.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η τιμή της μετοχής και η διακύμανση ακολουθούν τις διαδικασίες: $d\, S_t=\mu\, S_t\, dt + \sigma_t\, S_t dW_t^1$, $d\, v_t= \kappa(\theta-v_t)dt+\xi\, \sigma_t dW_t^2$ όπου οι διαδικασίες W_t^1, W_t^2 παρουσιάζουν συσχέτιση η οποία εκφράζεται μέσω του συντελεστή ρ. Όπως και με τα Asian δικαιώματα απαιτείται η εισαγωγή μίας νέας μεταβλητής I ώστε να μετρήσουμε την μέση ημερήσια μεταβλητότητα. Η απόδοση των συμβολαίων που μελετάμε περιλαμβάνει έναν μέσο της μορφής $I_t = \int_0^T F(\sigma_s)ds$. Για παράδειγμα η απόδοση ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακυμάνσεως έχει απόδοση ίση με $\frac{1}{T} I_T^{var} - K_{var} = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2{}_s ds - K_{var}$, ενώ ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας παρουσιάζει απόδοση ίση με:

$$\frac{1}{T} I_T^{var} - K_{s/d} = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_s ds - K_{s/d}.$$

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε μια προσέγγιση για τη διαμόρφωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης

Timsah (2009). Στο μοντέλο των Black και Scholes η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown και διαχέεται από μία και μοναδική πηγή τυχαιότητας η οποία συμβολίζεται με W_t . Στην περίπτωση του στοχαστικού μοντέλου του Heston παρατηρούμε άλλη μία πηγή τυχαιότητας η οποία χαρακτηρίζει τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, και η οποία όπως έχουμε αναφέρει και στο κυρίως μας κείμενο είναι άμεσα συσχετισμένη με την W_t. Άρα λοιπόν έχουμε ένα ζεύγος από στοχαστικές διαδικασίες που είναι οι εξής:

d S_t=μ $S_t\, dt$ + σ_t S_tdW_t^1 και d v_t= $k(\theta - \mathrm{v}_t)dt$ + σ_v $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2,

όπου E(W_t^1, W_t^2)=ρdt. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε μια μερική διαφορική εξίσωση δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο με βασικό στόχο την εξάλειψη της τυχαιότητας που δημιουργούν τα W_t^1, W_t^2. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε την τυχαιότητα που προκύπτει από την γεωμετρική κίνηση Brown W_t^1 αρκεί η διαπραγμάτευση της μετοχής, ενώ για την εξάλειψη της W_t^2 απαιτείται η χρήση ενός άλλου παραγώγου αφού η μεταβλητότητα δεν αποτελεί εμπορεύσιμο περιουσιακό στοιχείο.

Θεωρούμε λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο Π=-U+ΔS+$\Delta_1 U_1$, (3.9)

όπου U είναι η τιμή του προϊόντος που θέλουμε να τιμολογήσουμε το οποίο στην περίπτωσή μας είναι τα συμβόλαια ανταλλαγής διακυμάνσεως, Δ είναι ο αριθμός των μετοχών που χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση της πηγής της τυχαιότητας W_t^1 που προκύπτει από τις κινήσεις της μετοχής και Δ_1 ο αριθμός των παραγώγων ιδίου τύπου με τιμή U_1 που θα χρησιμοποιηθούν για την αντιστάθμιση του κινδύνου που προκύπτει από την τυχαιότητα της W_t^2. Άρα από την σχέση (3.9) προκύπτει ότι dΠ=-dU+ΔdS+$\Delta_1 dU_1$, όπου η U είναι μια συνάρτηση U(S_t,v_t, I_t,t) και I_t=$f({\sigma^2}_t)$ στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης ή $I_t = f(\sigma_t)$ στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας. Επίσης εφόσον ${\sigma_\mathrm{R}}^2 = \frac{AF}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\frac{\mathrm{S_{t_{i+1}}}-\mathrm{S_{t_i}}}{\mathrm{S_{t_i}}})^2 * 100^2$ θα θεωρήσουμε πως I_t=$f(S_t)$ ώστε να εισάγουμε στην ανάλυσή μας τη Dirac συνάρτηση σύμφωνα με την οποία $I_t = \int_0^t \delta(t_{i-1} - \tau)S_\tau\, d\tau$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito για την U(S_t,v_t, I_t,t) θα έχουμε ότι dU=$\frac{\partial U}{\partial t}$dt+$\frac{\partial U}{\partial S}dS_t$+$\frac{\partial U}{\partial v}dv_t$+$\frac{\partial U}{\partial I}dI_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$(d$S_t$)^2+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}$(d$v_t$)²+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial I^2}$(d$I_t$)²+ $\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}dS_t dv_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial I}dv_t dI_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial I\partial S}dI_tdS_t$

Εφόσον όμως (dt²)= dt ,d$B_t dt$=0, (dB_t)²=dt και

d S_t=μ $S_t\, dt$ + σ_t S_tdW_t^1 , d v_t= $k(\theta-\mathrm{v}_t)dt$ + σ_v $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2 και

$dI_t=\delta(t_{i-1}-t)S_t dt$ θα έχουμε ότι:

dU=$\frac{\partial U}{\partial t}$dt + $\frac{\partial U}{\partial S}$(μ$\mathrm{S}_t\, dt$+$\sigma_t \mathrm{S}_td\mathrm{W}_\mathrm{t}^1$)+$\frac{\partial U}{\partial v}(k(\theta-\mathrm{v}_t)dt$+$\sigma_v\sqrt{\mathrm{v}_t}d\mathrm{W}_\mathrm{t}^2$)

+$\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t dt$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t S^2{}_t dt$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t dt$+$\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho dt$

=[$\frac{\partial U}{\partial t}$+$\frac{\partial U}{\partial S}$μ S_t+$\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt

+$\frac{\partial U}{\partial S}\sigma_t$ S_tdW_t^1 +$\frac{\partial U}{\partial v}\sigma_v$ $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω και για την $U_1(S_t$,v_t, I_t,t) θα έχουμε ότι

dΠ=-dU+ΔdS+$\Delta_1 dU_1$=-[$\frac{\partial U}{\partial t}$+$\frac{\partial U}{\partial S}$μ S_t+$\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$

+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt-$\frac{\partial U}{\partial S}$σ S_tdW_t^1 $-\frac{\partial U}{\partial v}\sigma_v$ $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2+Δ(μ $S_t\, dt$ + $\sigma_t S_t$dW_t^1)

+Δ_1[$\frac{\partial U_1}{\partial t}$+$\frac{\partial U_1}{\partial S}$μ S_t+$\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial {U_1}^2}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$+$\frac{\partial^2 U_1}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt

+$\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}\sigma_t$ S_t dW_t^1 +$\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial v}\sigma_v$ $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2

=-[$\frac{\partial U}{\partial t}$+$\frac{\partial U}{\partial S}$μ S_t+$\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt+

Δ_1[$\frac{\partial U_1}{\partial t}$ + $\frac{\partial U_1}{\partial S}$μ S_t + $\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$ + $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$ + $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$ +
$\frac{\partial^2 U_1}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt+ Δ μ $\mathrm{S}_t\, dt$+($\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}$ - $\frac{\partial U}{\partial S}$ +Δ)σ_t S_t) dW_t^1+($\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial v}-\frac{\partial U}{\partial v}$)$\sigma_v$ $\sqrt{\mathrm{v}_t}\mathrm{W}_\mathrm{t}^2$.

Προκειμένου να απαλλαχτούμε από την τυχαιότητα θα πρέπει να μηδενίσουμε τους συντελεστές των dW_t^1και dW_t^2. Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε ότι :

$\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}$ - $\frac{\partial U}{\partial S}$+Δ=0 και $\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial v}$ - $\frac{\partial U}{\partial v}$=0 και άρα Δ μ $\mathrm{S}_t\, dt$=($\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}$ - $\frac{\partial U}{\partial S}$) μ $\mathrm{S}_t\, dt$.

Έτσι τελικά θα ισχύει ότι dΠ=rΠdt⇛

-[$\frac{\partial U}{\partial t}$ + $\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$+$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$+$\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$]dt

+Δ_1[$\frac{\partial U}{\partial t}$ + $\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)$ + $\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t$ + $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial S^2}v_t S^2{}_t$ + $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t$ + $\frac{\partial^2 U_1}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$)]dt

=r(-U+ΔS+$\Delta_1 U_1$)dt εφόσον το χαρτοφυλάκιο Π είναι χωρίς κίνδυνο.

Η σχέση αυτή θα ισούται με:

$\frac{\partial U}{\partial t}++\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r U+r ΔS

$=\Delta_1[\frac{\partial U_1}{\partial t}++\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U_1}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho-rU_1]$.

Όμως εφόσον r ΔS=($-\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}+\frac{\partial U}{\partial s}$)r S θα ισχύει ότι

$(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-rU+($-\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial S}+\frac{\partial U}{\partial s}$)rS=

$\Delta_1[\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho-rU_1]$.

Τώρα εφόσον θέλουμε $\Delta_1\frac{\partial U_1}{\partial v}-\frac{\partial U}{\partial v}=0\Rightarrow\Delta_1=\frac{\frac{\partial U}{\partial v}}{\frac{\partial U_1}{\partial v}}$ αντικαθιστώντας καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial t}+rS\frac{\partial U}{\partial S}+\frac{\partial U}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho-\mathrm{r\,U}}{\frac{\partial U}{\partial v}}=$$

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial t}+rS\frac{\partial U_1}{\partial S}+\frac{\partial U_1}{\partial v}k(\theta-\mathrm{v}_t)+\frac{\partial U_1}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial {U^2}_1}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial {U^2}_1}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial {U^2}_1}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho-rU_1}{\frac{\partial U_1}{\partial v}}.$$

Όπως παρατηρούμε το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μια μερική διαφορική εξίσωση η οποία περιλαμβάνει μόνο U ενώ το δεξί μέλος της σχέσης είναι η ίδια σχέση που περιλαμβάνει μόνο U_1.Προκειμένου να ισχύει αυτή η εξίσωση θα πρέπει και οι δύο πλευρές της να ισούνται με μία παράμετρο λ η οποία εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές S,t,V,I, δηλαδή πρέπει :

$\frac{\partial U}{\partial t}+rS\frac{\partial U}{\partial S}+\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r U$=\frac{\partial U}{\partial v}[-k(\theta-\mathrm{v}_t)+\lambda]$,

από όπου εάν αναδιατάξουμε τους όρους θα έχουμε τελικά ότι

$\frac{\partial U}{\partial t}+rS\frac{\partial U_1}{\partial S}+\frac{\partial U}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}v_t {S^2}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}{\sigma^2}_v v_t+\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r U$+\frac{\partial U}{\partial v}[k(\theta-\mathrm{v}_t)-\lambda]$=0.

Το λ είναι συνάρτηση των S,v,t,I και αποτελεί τον κίνδυνο της αγοραίας τιμής ή αλλιώς το ασφάλιστρο κινδύνου της μεταβλητότητας. Εφόσον η μεταβλητότητα της μετοχής δεν αποτελεί διαπραγματεύσιμο στοιχείο, όπως ας πούμε είναι η μετοχή, δεν μπορούμε να εξαλείψουμε το λ επικαλούμενοι συνθήκες arbitrage ούτε μπορούμε να υποθέσουμε πως όλοι οι επενδυτές προτιμούν τον περισσότερο από τον λιγότερο πλούτο. Οι επενδυτές έχουν διαφορετικές προτιμήσεις απέναντι στο ρίσκο και έτσι θα ζητούν άλλοτε μικρότερα και άλλοτε μεγαλύτερα ασφάλιστρα κινδύνου προκειμένου να ενταχθούν σε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας.

4. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

Οι συντελεστές ευαισθησίας αποτελούν μια συλλογή των στατιστικών τιμών (που εκφράζονται ως ποσοστά) που δίνουν στον επενδυτή μια καλύτερη εικόνα για την απόδοση μιας μετοχής. Αυτές οι στατιστικές τιμές μπορεί να είναι χρήσιμες για να αποφασιστεί ποιες επιλογές στρατηγικής είναι καλύτερες να χρησιμοποιηθούν. Ο επενδυτής θα πρέπει να θυμάται ότι οι στατιστικές αυτές τιμές δείχνουν τις τάσεις με βάση την προηγούμενη απόδοση. Δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι η μελλοντική απόδοση των μετοχών θα συμπεριφερθεί αναλόγως με τους ιστορικούς αριθμούς. Οι τάσεις αυτές μπορεί να αλλάξουν δραστικά βασιζόμενες σε μια νέα απόδοση της μετοχής.

4.1 Χρήση των συντελεστών ευαισθησίας

Οι συντελεστές ευαισθησίας είναι ζωτικής σημασίας εργαλεία διαχείρισης του κινδύνου. Ορίζονται ως πρώτες και στην περίπτωση του γάμμα δεύτερες μερικές παράγωγοι. Κάθε συντελεστής ευαισθησίας μετράει την ευαισθησία της αξίας ενός χαρτοφυλακίου σε μια μικρή αλλαγή σε μια συγκεκριμένη υποκείμενη παράμετρο, έτσι ώστε κάθε στοιχείο κίνδυνου να μπορεί να αντιμετωπιστεί μεμονωμένα, και το χαρτοφυλάκιο να εξισορροπηθεί ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός βαθμός έκθεσης. Οι συντελεστές ευαισθησίας στο υπόδειγμα των Black-Scholes είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστούν, και είναι πολύ χρήσιμοι για τα παράγωγά των εμπόρων, ιδίως εκείνων που επιδιώκουν να αντισταθμίσουν τα χαρτοφυλάκιά τους από τις δυσμενείς αλλαγές στις συνθήκες της αγοράς.

Οι πιο κοινοί συντελεστές ευαισθησίας είναι οι παράγωγοι πρώτου βαθμού : Δέλτα, Βέγκα, Θήτα και Rho καθώς και Γάμμα, μια δεύτερης τάξης παράγωγος της συνάρτησης αξίας. Στη συνέχεια ορίζουμε αυτούς τους συντελεστές ευαισθησίας για τις συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας.

Συγκεκριμένα,

- Το Δέλτα είναι η μερική παράγωγος σε σχέση με την τιμή της μετοχής S_t τη χρονική στιγμή t που δίνεται από $\frac{\eth A\xi i\alpha}{\eth s_t}$. Είναι ένα μέτρο για την ευαισθησία της αξίας ενός συμβολαίου σε σχέση με τις μεταβολές της τιμής της μετοχής.

- Το Θήτα, το οποίο είναι η αρνητική μερική παράγωγος ως προς το χρόνο t ,δίνεται από τον τύπο $-\frac{\eth A\xi\acute{\iota}\alpha}{\eth t}$. Υπολογίζει τη χρονική φθορά της αξίας του swap.
- Το Rho, είναι η μερική παράγωγος σε σχέση με το επιτόκιο r και ορίζεται ως $\frac{\eth A\xi\acute{\iota}\alpha}{\eth r}$. Είναι μέτρο της αλλαγής της αξίας του συμβολαίου σε σχέση με τις μεταβολές του επιτοκίου.
- Το Βέγκα ή Κάπα είναι η μερική παράγωγος σε σχέση με τη μεταβλητότητα σ_t. Ορίζεται ως $\frac{\eth A\xi\acute{\iota}\alpha}{\eth \sigma_t}$ και μετρά την ευαισθησία της αξίας του συμβολαίου σε σχέση με τις αλλαγές στη μεταβλητότητα.
- Το Γάμμα, που αποτελεί την δεύτερη μερική παράγωγο σε σχέση με την τιμή της μετοχής S_t ορίζεται ως $\frac{\eth^2 A\xi\acute{\iota}\alpha}{\eth {s^2}_t}$. Είναι μέτρο της ευαισθησίας της αξίας του συμβολαίου σε σχέση με τις αλλαγές στο Δέλτα. Είναι σημαντικό για τη μελέτη των μοντέλων μεταβλητότητας.

Στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας η αξία του συμβολαίου κατά την σύναψή του θα πρέπει είναι ίση με 0. Όπως λοιπόν αναλύσαμε στην Παράγραφο 3.5.2 η δίκαιη τιμή εξάσκησης τη χρονική στιγμή t=0 θα δίνεται από τον τύπο $K_{var} = \theta + \left(1 - e^{-k^*T}\right)\left(\frac{v_0}{Tk^*} - \frac{\theta}{k^*T}\right)$. Στην περίπτωση όμως που η συμφωνία ανταλλαγής είναι ήδη σε ισχύ και θέλουμε να δούμε ποια θα είναι η δίκαιη τιμή εξάσκησής της σε μία χρονική στιγμή 0<t<T τότε θα πρέπει να βρούμε αξία του συμβολαίου την χρονική στιγμή t η οποία κατ'αντιστοιχία με τα παραπάνω θα ισούται με $X_t^T = \theta\left(\frac{v_t}{k^*(T-t)} - \frac{\theta}{k^*(T-t)}\right)$.

4.2 Δέλτα Των Παραγώγων Μεταβλητότητας

Στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας-διακύμανσης θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό των συντελεστών ευαισθησίας την θεωρητική τιμή που υπολογίσαμε στην Παράγραφο 3.5.2 βάση του στοχαστικού μοντέλου του Heston (Broadie et al,(2008)). Έτσι, το δέλτα των πράξεων ανταλλαγής διακύμανσης ορίζεται ως η πρώτου βαθμού μεταβολή της αξίας του συμβολαίου σε σχέση με τη διακύμανση ${\sigma^2}_t$ εφόσον όταν αναφερόμαστε σε συμφωνίες ανταλλαγής διακυμάνσεως ή μεταβλητότητας θεωρούμε ως υποκείμενο μέσο την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και όχι την τιμή της μετοχής. Έτσι λοιπόν το δέλτα του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης θα έχει ως εξής:

$$\text{δέλτα}=\frac{\eth X_t^T}{\eth {\sigma^2}_t}=\frac{1-e^{-k^*(T-t)}}{k^*(T-t)}$$

Είναι προφανές ότι το δέλτα του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης είναι ανεξάρτητο της διακύμανσης και θετικό, δεδομένου ότι το αποτέλεσμα της ανταλλαγής διακύμανσης αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με την πραγματοποιηθείσα διακύμανση. Επίσης, καθώς ο χρόνος λήξης πλησιάζει το δέλτα ισούται με μηδέν, δεδομένου ότι στη λήξη η απόδοση ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης είναι ανεξάρτητη της αρχικής διακύμανσης.

4.2.1 Σχέση Μεταξύ Της Μεταβλητότητας Και Του Συντελεστή Δέλτα

Μια από τις έννοιες που φαίνεται να συγχέουν τους νέους διαπραγματευτές δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας και του δέλτα. Κατ 'αρχάς, ας αναλύσουμε κάθε θέμα χωριστά. Η μεταβλητότητα αντιπροσωπεύει το επίπεδο της αβεβαιότητας στην αγορά και το βαθμό στον οποίο οι τιμές των υποκείμενων τίτλων αναμένεται να αλλάξουν με την πάροδο του χρόνου. Έτσι όταν υπάρχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα και φόβος, οι άνθρωποι θα πληρώσουν περισσότερα για τα δικαιώματα προαίρεσης ως ένα μέσο ελέγχου του κινδύνου. Καθώς οι άνθρωποι αισθάνονται πιο ασφαλείς στο μέλλον, θα πωλήσουν τις επιλογές τους προκαλώντας την πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα να πέσει.

Το δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως η ευαισθησία του δικαιώματος προαίρεσης στην κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα, ένα δικαίωμα προαίρεσης με ένα δέλτα της τάξεως του 0,5 σημαίνει ότι για κάθε $ 1 κίνηση του υποκειμένου τίτλου της μετοχής το δικαίωμα θα μεταβληθεί κατά 0,50 δολάρια. Μια αύξηση της μεταβλητότητας προκαλεί όλα τα δέλτα να κινηθούν προς το 0,50. Έτσι, για τα εντός χρηματικού ισοδύναμου δικαιώματα, το δέλτα θα μειωθεί και για τα εκτός χρηματικού ισοδύναμου δικαιώματα το δέλτα θα αυξηθεί. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό διαισθητικά εφόσον όταν αυξάνεται η αβεβαιότητα γίνεται λιγότερο σαφές που θα καταλήξει το υποκείμενο στην λήξη. Δεδομένου ότι το δέλτα μπορεί επίσης να ορίζεται ως η πιθανότητα ένα δικαίωμα να καταλήξει in the money στην λήξη, καθώς αυξάνεται η αβεβαιότητα, όλες οι πιθανότητες ή το δέλτα θα πρέπει να κινηθούν μεταξύ του 50-50. Για παράδειγμα, ένα εντός χρηματικού ισοδύναμου δικαίωμα αγοράς με ένα δέλτα της τάξεως του 0,80 υπό «κανονικές» συνθήκες μεταβλητότητας θα μπορούσε να μειωθεί σε 0,65 κάτω από ένα υψηλότερο περιβάλλον μεταβλητότητας, γεγονός που αντανακλά λιγότερη βεβαιότητα το δικαίωμα αγοράς να λήξει εντός χρηματικού ισοδύναμου.

Ένας άλλος τρόπος να το δει κανείς είναι ότι στη λήξη, η μεταβλητότητα είναι 0 αφού με βεβαιότητα ξέρουμε όταν το δικαίωμα θα λήξει. Στην περίπτωση της μηδενικής μεταβλητότητας όλα τα δέλτα είναι 0 ή 1 είτε λήξουν τα δικαιώματα εντός είτε εκτός χρηματικού ισοδύναμου. Οποιαδήποτε αύξηση της μεταβλητότητας, που μπορεί να οδηγήσει στο να ξεφύγουμε από τις πιθανότητες 0 και 1, αντανακλά ένα υψηλότερο επίπεδο αβεβαιότητας και κινδύνου. Είναι πάντα σημαντικό να παρακολουθείτε η μεταβλητότητα όχι μόνο για τα εντός χρηματικού ισοδύναμου δικαιώματα, αλλά και για τα εκτός χρηματικού ισοδύναμου. Μια συναλλαγή μπορεί να έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο χαρακτηριστικών σε ένα επίπεδο μεταβλητότητας, αλλά ένα τελείως διαφορετικό σύνολο στο άλλο. Η γνώση του τρόπου συμπεριφοράς του δέλτα για μεταβολές στη μεταβλητότητα και την κίνηση του υποκείμενου τίτλου είναι απαραίτητη για την επίτευξη επικερδών συναλλαγών δικαιωμάτων.

4.3 Άλλοι Τύποι Συντελεστών Ευαισθησίας

Ακριβώς όπως έχουμε δημιουργήσει τη δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου, μπορούμε να καλυφθούμε έναντι αλλαγών και σε άλλες παραμέτρους. Ωστόσο, συνήθως είναι δύσκολο και δαπανηρό να προσπαθήσει κανείς να αντισταθμίσει όλες αυτές τις παραμέτρους. Αντ 'αυτού, ίσως θα πρέπει κανείς κυρίως να πραγματοποιεί δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου και να παρακολουθεί τους υπόλοιπους συντελεστές ευαισθησίας μόνο όταν κριθεί απαραίτητη η ανάληψη συγκεκριμένης δράσης. Για παράδειγμα θα παραθέσουμε κάποιους άλλους σημαντικούς συντελεστές ευαισθησίας που μπορεί να είναι πολύ χρήσιμοι για την κατανόηση της ευαισθησίας των τιμών των παραγώγων μεταβλητότητας στις διάφορες παραμέτρους του μοντέλου στοχαστικής μεταβλητότητας του Heston(1993). Δύο από αυτούς είναι οι ακόλουθοι:

α) Ο πρώτος μας δείχνει πώς αλλάζει η εύλογη τιμή εξάσκησης σε σχέση με τη μέση ταχύτητα k. Για τις πράξεις ανταλλαγής της διακύμανσης ορίζεται ως: $k^{\cdot}=\frac{ðX_t^T}{ðk}$. Εφόσον X_t^T= (T-t)θ + $\frac{\sigma^2{}_t-\theta}{k^*(T-t)}$(1-$e^{-k^*(T-t)}$) τότε:

$k^{\cdot}=\frac{ðX_t^T}{ðk}$=($\sigma^2{}_t$-θ)($\frac{e^{-k^*(T-t)}}{k^*}$ - $\frac{1-e^{-(k^*T-t)}}{k^{*2}(T-t)}$).

β) Ο δεύτερος συντελεστής είναι ο $\theta^{\cdot}$ που ορίζεται ως η πρώτου βαθμού μεταβολή της εύλογης τιμή εξάσκησης σε σχέση με τη μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση θ. Συγκεκριμένα, $\theta^{\cdot}=\frac{ðX_t^T}{ð\theta}$ = $\frac{1-e^{-k^*(T-t)}}{k^*(T-t)}$ και βλέπουμε ότι δεδομένου ότι η πραγματοποιηθείσα διακύμανση αυξάνει όσο αυξάνει η μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση, η ευαισθησία της εύλογης τιμής εξάσκησης είναι σταθερή και θετική.

5. ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Πολλοί διαπραγματευτές βρίσκουν τις συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης ενδιαφέρουσες και ιδιαιτέρως χρήσιμες για τη διαπραγμάτευση της μεταβλητότητας. Ένας εναλλακτικός τρόπος να κάνουμε αντιστάθμιση κινδύνου για τη μεταβλητότητα είναι με ένα δικαίωμα προαίρεσης, αλλά αν κάποιος έχει μόνο ενδιαφέρον για τον κίνδυνο μεταβλητότητας, η στρατηγική αυτή θα απαιτήσει συνεχή αντιστάθμιση δέλτα, έτσι ώστε ο κίνδυνος του υποκείμενου τίτλου να αφαιρεθεί. Από την άλλη μεριά μια αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου της ανταλλαγής διακύμανσης θα απαιτήσει μια ολόκληρη σειρά από δικαιώματα προαίρεσης, τα οποία θα ήταν πολύ δαπανηρό να χρησιμοποιηθούν.

Ωστόσο μπορεί κανείς να έχει την ανάγκη να ανανεώνει τακτικά όλη αυτή τη σειρά των επιλογών, έτσι ώστε να παραμένει επικεντρωμένος γύρω από την τρέχουσα τιμή της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης. Το πλεονέκτημα των συμφωνιών ανταλλαγής διακύμανσης είναι ότι παρέχουν καθαρή έκθεση στη μεταβλητότητα των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων, σε αντίθεση με τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης που μπορεί να φέρουν κίνδυνο που οφείλεται στις μεταβολές τις τιμής της μετοχής. Το κέρδος και η ζημιά από μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης εξαρτάται άμεσα από τη διαφορά μεταξύ πραγματοποιηθείσας και τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Μια άλλη πτυχή που μερικοί κερδοσκόποι μπορούν να βρουν ενδιαφέρουσα είναι ότι η τιμή εξάσκησης καθορίζεται από το χαμόγελο που εμφανίζει η μεταβλητότητα στην αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης, ενώ η τελική απόδοση θα βασίζεται στην πραγματική τιμή διακύμανσης. Ιστορικά, η τεκμαρτή διακύμανση βρίσκεται πάνω από την πραγματοποιηθείσα διακύμανση, ένα φαινόμενο γνωστό ως το *ασφάλιστρο κινδύνου διασποράς*, δημιουργώντας μια ευκαιρία για κερδοσκοπία. Για το λόγο αυτό, οι συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αντιστάθμιση δικαιωμάτων που έχουν ως υποκείμενο τίτλο την πραγματοποιηθείσα διακύμανση.

5.1 Αντιστάθμιση Κινδύνου Των Συμβολαίων Ανταλλαγής Διακύμανσης

Ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε την πραγματική διακύμανση είναι η αναπαραγωγή της διασποράς με τη χρήση ενός χαρτοφυλακίου από απλά δικαιώματα. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *στρατηγική αναπαραγωγής* και το κόστος της εφαρμογής αυτής της στρατηγικής είναι η εύλογη αξία της μελλοντικής πραγματικής διακύμανσης. Η ιδέα πίσω από την αναπαραγωγή της στρατηγικής είναι να κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα προαίρεσης που είναι ουδέτερο στις κινήσεις των τιμών των μετοχών και δίνει την αναμενόμενη προεξόφληση της μελλοντικής πραγματικής διακύμανσης κατά τη λήξη Τ. Όπως αναλύσαμε στην Ενότητα 3.2 ένα λογαριθμικό συμβόλαιο παρέχει απόδοση ίση με τη διακύμανση των αποδόσεων της μετοχής. Είναι λοιπόν ιδιαιτέρα ενδιαφέρον να αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο ένα τέτοιο εξωτικό δικαίωμα μπορεί να αναπαραχθεί από ένα χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχών διαφορετικών τιμών εξάσκησης. Η εξήγηση της στρατηγικής που ακολουθεί βασίζεται στο άρθρο των Demeterfi et al (1999).

5.1.1 Επιλογή του κατάλληλου χαρτοφυλακίου

Ας υποθέσουμε αρχικά πως ένας επενδυτής παίρνει θέση αγοραστή σε ένα συμβόλαιο που διαπραγματεύεται τη μελλοντική τιμή της διακύμανσης και ψάχνει τρόπους αντιστάθμισης της θέσης του. Αρχικά θα πρέπει να τονίσουμε πως για να αντισταθμίσει τη θέση του θα ήταν σημαντικό να εξετάσει τη λήψη μια θέσης σε ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα αντί για μια μεμονωμένη επιλογή. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι ένα μοναδικό δικαίωμα προαίρεσης θα ήταν μία ατελής στρατηγική , εφόσον ο επενδυτής δεν θα ήταν ασφαλισμένος έναντι περαιτέρω αλλαγών στη διακύμανση σε περίπτωση που πραγματοποιούνταν επιπλέον κινήσεις των τιμών των μετοχών. Με τη λήψη όμως μια θέσης σε ένα χαρτοφυλάκιο, η ευαισθησία έναντι της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης θα είναι ανεξάρτητη από τη χρηματιστηριακή τιμή S. Ωστόσο, για την απόκτηση ενός χαρτοφυλακίου ανεξάρτητου από τις διακυμάνσεις των τιμών των μετοχών ο επενδυτής θα πρέπει να συνδυάσει δικαιώματα προαίρεσης πολλαπλών τιμών εξάσκησης.

Έτσι λοιπόν ένα βασικό πρόβλημα το οποίο παραμένει είναι ποιος συνδυασμός από τιμές εξάσκησης θα δώσει μια καθαρή έκθεση στην διακύμανση. Προκειμένου να διευκολυνθούμε θα θεωρήσουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r να είναι ίσο με μηδέν. Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t ένας επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα προαίρεσης με τιμή εξάσκησης ίση με K και λήξη T, η αξία του οποίου δίδεται από τον τύπο BS $C_{BS}(S, K, \sigma, \sqrt{\tau})$. Από τώρα και στο εξής με W συμβολίζουμε την έκθεση του δικαιώματος προαίρεσης στις μεταβολές της διακύμανσης μιας μετοχής. Με άλλα λόγια η μεταβλητή W μετρά τις μεταβολές της αξίας της θέσης που προκύπτει από μια αλλαγή στη διακύμανση και συμβολίζεται με

$$V=\frac{ðC_{BS}}{ð\sigma^2}=\frac{S\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{d1^2}{2}\right)}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ όπου } d_1=\frac{log(S/K)+(\sigma^2\tau)/2}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

η οποία είναι επίσης γνωστή ως βέγκα.

Το Διάγραμμα 2 δείχνει την έκθεση στη διακύμανση των δικαιωμάτων προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης σε τρία χαρτοφυλάκια όπου ακολουθείται διαφορετικός τρόπος σταθμίσεών τους. Στο πρώτο μέρος του διαγράμματος το χαρτοφυλάκιο είναι σταθμισμένο αναλόγως των τιμών εξάσκησης στο δεύτερο μέρος οι συντελεστές στάθμισης είναι αντιστρόφως ανάλογοι της τιμής εξάσκησης, και στο τρίτο μέρος αντιστρόφως ανάλογοι του τετραγώνου των τιμών εξάσκησης. Παρατηρούμε πως η έκθεση στη διακύμανση των δικαιωμάτων που είναι στο χρηματικό ισοδύναμο είναι υψηλότερη των δικαιωμάτων που είναι εκτός και εντός χρηματικού ισοδύναμου. Επίσης διακρίνουμε πως ο ‘κίνδυνος’ βέγκα είναι κατά γενική ομολογία μεγαλύτερος για δικαιώματα με μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης. Η σημαντικότερη παρατήρηση όμως είναι πως στο τελευταίο μέρος του γραφήματος το βέγκα είναι ανεξάρτητο των κινήσεων των τιμών εξάσκησης και άρα είναι σχεδόν παράλληλο με τον οριζόντιο άξονα.

Κατανοούμε λοιπόν πως οι επενδυτές που συναλλάσσονται με την πραγματοποιηθείσα διακύμανση απαιτούν την ύπαρξη ανεξαρτησίας όσον αφορά την κίνηση της τιμής της μετοχής, και αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου των δικαιωμάτων όλων των τιμών εξάσκησης, σταθμισμένο αντιστρόφως ανάλογα με το επίπεδο K^2.

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες σχετικά με τα μαθηματικά πίσω από τη μεταβλητή W, η προσέγγιση αυτή μπορεί να γίνει κατανοητή διαισθητικά. Όταν ένα δικαίωμα προαίρεσης με υψηλότερη τιμή προστίθεται σε ένα χαρτοφυλάκιο, μια συμπληρωματική συνεισφορά στο W ανάλογη με την τιμή εξάσκησης θα προστεθεί επίσης. Ένα δικαίωμα προαίρεσης το οποίο έχει υψηλότερη τιμή εξάσκησης θα παράγει μια συμβολή στο W που αυξάνεται με την S. Ως εκ τούτου, για να αντισταθμιστεί αυτή η εξάρτηση από την τιμή της μετοχής, χρειάζεται μείωση των ποσοτήτων των δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν τις υψηλότερες τιμές εξάσκησης, με συντελεστές στάθμισης αντιστρόφως ανάλογους με την K^2.

5.1.2 Απόδειξη του τρόπου υπολογισμού του κόστους αντιστάθμισης

Στο σημείο αυτό θα δούμε βάσει συγκεκριμένων μαθηματικών τύπων πλέον πως υλοποιείται η αντιστάθμιση ενός λογαριθμικού συμβολαίου, το οποίο όπως αναφέραμε θα παρέχει μια πληρωμή ίση με τη διακύμανση των αποδόσεων της μετοχής. Βασική υπόθεση εδώ είναι ότι η τιμή της μετοχής εξελίσσεται συνεχώς στο χρόνο χωρίς άλματα. Αυτό είναι μια υπόθεση για το μοντέλο Black-Scholes όπου μια τυπική διαδικασία για την τιμή της μετοχής είναι η ουδέτερη από άποψη κινδύνου γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\mathrm{d}S_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t ,$$

όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, $\sigma_t = \sqrt{v_t}$ και W_t είναι η τυπική κίνηση Brown. Επίσης υποθέτουμε ότι υπάρχει αποτελεσματική αγορά (για τα δικαιώματα όλων των τιμών εξάσκησης), μηδενικά κόστη συναλλαγών ,δυνατότητα για συνεχή διαπραγμάτευση και πως το υποκείμενο μέσο (συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης) ακολουθεί συνεχή διαδικασία χωρίς άλματα.

Σύμφωνα με την Ενότητα 3.3, η ανάλυση που προηγήθηκε της (3.6) ισχύει τόσο στο στοχαστικό μοντέλο του Heston όσο και στο μοντέλο των Black-Scholes. Μάλιστα επιτρέπει την καταγραφή της διακύμανσης ανεξάρτητα από την πορεία της τιμής της μετοχής, δεδομένου ότι αυτή κινείται συνεχώς.

Πράγματι διαιρώντας με την τιμή της μετοχής και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή στην εξίσωση $\frac{dS}{S_t}$=$r_t dt$+$\sigma_t dz_t$, ο όρος που αφορά την κίνηση Brown απαλείφεται εφόσον η προσδοκία της κίνησης Brown είναι μηδέν. Αυτό οδηγεί σε : E $\{\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\}$ = rT, (5.1)

που σημαίνει πως ο τύπος K_{var}=$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2{}_t\, dt = \frac{2}{T}(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - log\frac{S_T}{S_0})$ μπορεί να μεταμορφωθεί σε

$Kvar$=$\frac{2}{T}${r T-E$\left(log\frac{S_T}{S_0}\right)$}. (5.2)

Από αυτή την αναδιάταξη είναι προφανές ότι το λογαριθμικό συμβόλαιο πρέπει επίσης να αναπαραχθεί καθώς δεν υπάρχουν ενεργά διαπραγματευόμενα λογαριθμικά συμβόλαια. Ως εκ τούτου, δημιουργούμε ένα αντίγραφο του λογαριθμικού συμβολαίου για όλες τις τιμές των μετοχών από 0 έως την λήξη T, αποσυνθέτοντας το σχήμα του σε γραμμικά και καμπύλα στοιχεία και στη συνέχεια αντιγράφοντας κάθε ένα από αυτά ξεχωριστά (λεπτομερής ανάλυση σχήματος ακολουθεί στο Παράρτημα Β). Το γραμμικό στοιχείο μπορεί να αναπαραχθεί με ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με χρόνο παράδοσης T και το υπόλοιπο κυρτό εξάρτημα μπορεί να αντιγραφεί χρησιμοποιώντας δικαιώματα προαίρεσης με όλα τα δυνατά επίπεδα τιμών εξάσκησης αλλά της ίδιας χρονικής στιγμής λήξης T.

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε μια νέα αυθαίρετη παράμετρο S* για να καθορίσουμε τα όρια μεταξύ των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Με άλλα λόγια, το S* είναι πάνω στο χρηματικό ισοδύναμο επίπεδο τιμής που θέτει το όριο μεταξύ ρευστών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Η απόδοση του λογαριθμικού συμβολαίου μπορεί να γραφτεί ως $log\frac{S_T}{S_0}$= $log\frac{S_T}{S^*}$+ $log\frac{S^*}{S_0}$. (5.3)

Δεδομένου ότι ο δεύτερος όρος είναι σταθερός και ανεξάρτητος από την τελική τιμή της μετοχής δεν απαιτείται καμία αντιγραφή. Από την άλλη πλευρά η πληρωμή του λογαριθμικού συμβολαίου μπορεί να αναλυθεί ως εξής (Παράρτημα Α):

$$-\log\frac{S_T}{S^*}=-\frac{S_T-S^*}{S^*}+\int_0^{S^*}\frac{1}{K^2}\text{Max}(K-S_T,0)\,dk+\int_{S*}^{\infty}\frac{1}{K^2}\text{Max}(S_T-K,0)dk. \quad (5.4)$$

Έτσι, η απόδοση του λογαριθμικού συμβολαίου είναι η σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μια short θέση σε ($1/S_*$) προθεσμιακά συμβόλαια, μια θέση αγοραστή σε (1 / K ²) δικαιώματα πώλησης με τιμή εξάσκησης K, για όλες τις τιμές από 0 έως S_*και θέση αγοραστή σε (1 / K ²) δικαιώματα προαίρεσης αγοράς με τιμή K, για όλες τις τιμές εξάσκησης από S_* έως ∞. Τέλος, η εύλογη αξία της μελλοντικής διακύμανσης στην εξίσωση (5.2) μπορεί να παρουσιαστεί με τη βοήθεια των εξισώσεων (5.3 και 5.4) ως εξής: $K_{var}=\frac{2}{T}\{ rT-(\frac{S_0}{S^*}e^{rT}-1)-\log\frac{S^*}{S_0}+e^{rt}\int_0^{S^*}\frac{1}{K^2}P(K)dk+e^{rt}\int_{S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dk\}.$ (5.5).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μεταβλητό μέρος της πληρωμής που προσφέρει ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακυμάνσεως μπορεί να αναπαραχθεί μέσα από ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μια θέση πώλησης σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, μια θέση αγοραστή σε 1/K² δικαιώματα πώλησης με τιμές εξάσκησης από 0 έως S_0 ,και μια θέση αγοραστή σε 1/K² δικαιώματα αγοράς για όλες τις τιμές εξάσκησης από την S_0 έως το ∞.

5.1.3 Μειονεκτήματα της μεθόδου αντιστάθμισης

Έχουμε αποδείξει ότι ένα χαρτοφυλάκιο με συντελεστές στάθμισης αντιστρόφως ανάλογους ως προς την τιμή εξάσκησης K² παράγει μια τιμή που είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μετοχής όσο η S_t βρίσκεται μέσα σε συγκεκριμένο εύρος και μακριά από την άκρη του φάσματος. Στην πράξη, αυτό δεν είναι δυνατό ακόμη και όταν η χρηματιστηριακή αγορά και τα δικαιώματα προαίρεσης ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις των Black and Scholes. Στην ουσία η αναπαραγωγή της διακύμανσης απαιτεί την κυριότητα του λογαριθμικού συμβολαίου, του οποίου η αναπαραγωγή χρειάζεται μια άπειρη σειρά από τιμές εξάσκησης. Αλλά δεδομένου ότι τα λογαριθμικά συμβόλαια δεν είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην πράξη, θα πρέπει να αναπαραχθούν οι πληρωμές τους με την χρήση δικαιωμάτων εντός ενός περιορισμένου εύρους τιμών K. Έτσι, αν έχετε στην κατοχή σας έναν περιορισμένο αριθμό δικαιωμάτων θα πληρώσετε λιγότερο από την πλήρη τιμή και όταν η τιμή της μετοχής εξελίσσεται σε περιοχές όπου η καμπυλότητα του χαρτοφυλακίου δεν είναι αρκετά μεγάλη θα αποτυπώνετε μικρότερη τιμή από την πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα, ακόμη και εάν δεν υπάρξουν άλματα και η μετοχή πάντα κινείται συνεχώς.

Από την άλλη πλευρά, όταν η τιμή της μετοχής πραγματοποιεί άλματα το λογαριθμικό συμβόλαιο δεν μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί για την αναπαραγωγή της μεταβλητότητας για τους ακόλουθους λόγους:

- Εάν το λογαριθμικό συμβόλαιο έχει αντιγραφεί από ένα πεπερασμένο εύρος τιμών εξάσκησης, ένα μεγάλο άλμα μπορεί να οδηγήσει την τιμή της μετοχής σε μια περιοχή στην οποία η διακύμανση δεν αποκτά το δικαιούμενο ποσοστό.
- Ακόμα κι αν έχουμε πετύχει την τέλεια αναπαραγωγή ένα ασυνεχές άλμα της τιμής της μετοχής μπορεί να προκαλέσει στην εξίσωση (5.5) να μας δώσει μια τιμή που δεν είναι ίση με την πραγματική διακύμανση.

Τέλος θα πρέπει να αναλογιστούμε τη δυσκολία επίτευξης της τέλειας αντιστάθμισης, δεδομένου των συνθηκών της αγοράς και το κόστος της συχνής και επαναλαμβανόμενης αντιστάθμισης, ιδιαιτέρως όταν βρισκόμαστε κοντά στην λήξη. Κατανοούμε λοιπόν πως η διαδικασία που περιγράψαμε για την αντιστάθμιση των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης απαιτεί την εξέλιξη της τιμής βάση μια συνεχούς διαδικασίας η οποία δεν θα παρουσιάζει άλματα, και πως μια απολύτως αποτελεσματική αντιστάθμιση απαιτεί την καταβολή υψηλών χρηματικών ποσών για τη συνεχή προσαρμογή του χαρτοφυλακίου.

5.2 Αντιστάθμιση Κινδύνου Των Συμβολαίων Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Στην περίπτωση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας η διαδικασία αντιστάθμισης κινδύνου είναι πολύπλοκη. Όπως στην περίπτωση των δικαιωμάτων προαίρεσης, όπου το hedge ratio εξαρτιόταν από την τιμή της μελλοντικής μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής την οποία είχαμε υποθέσει εξ'αρχής, έτσι και σε αυτήν την περίπτωση η δυναμική αντιστάθμιση ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας απαιτεί μία διαδικασία που λαμβάνει υπόψιν της τη μεταβλητότητα της μεταβλητότητας. Γενικότερα θα μπορούσαμε να πούμε πως μια τέτοια στρατηγική αντιστάθμισης απαιτεί την διατήρηση ενός συγκεκριμένου ‘δέλτα διακυμάνσεως’ για τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης, ικανού να αντισταθμίζει κάθε στιγμή τη θέση του ενδιαφερόμενου.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε μια προσέγγιση που δίνεται από τους M.Broadie και A.Jain (2008), στην οποία εξηγείται πως η δυναμική αντιστάθμιση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι δυνατή μέσω ενός στοχαστικού μοντέλου χρησιμοποιώντας συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι είμαστε σε θέση αγοράς σε μία μονάδα ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας τη χρονική στιγμή t, όταν η αξία της σύμβασης ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι:

P_t=$E_t(e^{-r(T-t)}(\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_s ds}$-$K^*{}_{vol}))$.

Είναι επίσης δεδομένο ότι το ονομαστικό ποσό της σύμβασης είναι μηδέν. Για να αντισταθμιστεί η θέση μας, θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με μία μονάδα του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας και β μονάδες συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης. Έτσι, η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t ισούται με:

$\Pi_t = E_t \{ e^{-r(T-t)} (\beta_t (\frac{1}{T}\int_0^T v_s ds - K^*{}_{var})+ (\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_s ds}$ - $K^*{}_{vol}))\}$, όπου εάν X_t^T=$E_t(\frac{1}{T}\int_0^T v_s ds)$ και $Y_t^T = E_t(\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_s ds})$ θα ισχύει ότι:

$\Pi_t = e^{-r(T-t)}(\beta_t(X_t^T - K^*{}_{var})$+$(Y_t^T - K^*{}_{vol})$. Αν υπολογιστεί η μεταβολή του χαρτοφυλακίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα έχουμε: dΠ_t=r$\Pi_t dt$+$e^{-r(T-t)}(\beta_t$dX_t^T+d$Y_t^T)$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε μια μεταβλητή I_t=$\int_0^t v_s\, ds$ η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση dI_t=v_t. Με αυτόν τον τρόπο η Y_t^T μπορεί να εκφραστεί ως Y_t^T=$E_t[\sqrt{\frac{1}{T}[I_t + \int_t^T v_s ds]}]$=F(t,$v_t, I_t$) που μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito για την F(t,v_t, I_t) ως ακολούθως:

$$dF=[\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}k(\theta-v_t)+\frac{\partial F}{\partial I}v_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v_t\sigma^2{}_v]dt+\frac{\partial F}{\partial v}\sigma_v\sqrt{v_t}dW_t^2. \quad (5.6)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.6) για τις τιμές των Y_t^T=$E_t[\sqrt{\frac{1}{T}[I_t + \int_0^T v_s ds]}$ και $X_t^T = \frac{1}{T}[I_t + \int_0^T v_s ds]$ καταλήγουμε στο ότι η αλλαγή του χαρτοφυλακίου που δημιουργήσαμε θα ισούται με:

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt + e^{-r(T-t)}\{\beta_t(\{\frac{\partial X_t^T}{\partial Y_t^T} + \frac{\partial X_t^T}{\partial v} k(\theta - v_t) + \frac{\partial X_t^T}{\partial I} v_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_t^T}{\partial v^2} v_t {\sigma^2}_v\}dt + \frac{\partial X_t^T}{\partial v}\sigma_v\sqrt{v_t}\, dW_t^2)$$

$$+\{\frac{\partial Y_t^T}{\partial t} + \frac{\partial Y_t^T}{\partial v} \kappa(\theta - v_t) + \frac{\partial Y_t^T}{\partial I} v_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t^T}{\partial v^2} v_t {\sigma^2}_v\}dt + \frac{\partial Y_t^T}{\partial v}\sigma_v\sqrt{v_t}\, dW_t^2\}$$

από όπου εάν απαλείψουμε τους συντελεστές του dt, αφού οι X_t^T και Y_t^T είναι martingales, θα έχουμε ότι $d\Pi_t = r\Pi_t dt + e^{-r(T-t)}(\beta_t \frac{\partial X_t^T}{\partial v} + \frac{\partial Y_t^T}{\partial v})\sigma_v\sqrt{v_t} dW_t^2)$. Στη συνέχεια ορίζουμε ως β= $-\frac{\frac{\partial Y_t^T}{\partial v}}{\frac{\partial X_t^T}{\partial v}}$ το hedge ratio ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για την αντιστάθμιση της θέσης μας σε μια συμφωνία ανταλλαγής μεταβλητότητας μπορούμε να παίρνουμε, σε τακτά χρονικά διαστήματα στη διάρκεια ζωής του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας, θέση πωλητή σε β μονάδες συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι αντισταθμισμένη δυναμικά.

5.3 Ποιο είδος συμβολαίου κρίνεται περισσότερο αποτελεσματικό;

Πολλοί οικονομολόγοι υποστηρίζουν πως οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης αποτελούν ένα πιο σίγουρο και αποτελεσματικό εργαλείο στην προσπάθεια αντιμετώπισης των δυσμενών συνθηκών της μεταβλητότητας. Οι υπερασπιστές αυτού του είδους συμβολαίων θεωρούν πολύ σημαντική την ‘προσθετική’ ιδιότητα που τα διακρίνει. Συγκεκριμένα αναφέρουμε ότι σε ένα ενδιάμεσο χρονικό σημείο της ζωής ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης η αναμενόμενη διακύμανση στη λήξη είναι απλά το άθροισμα των διακυμάνσεων έως εκείνη την στιγμή σταθμισμένο με συντελεστές στάθμισης τα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα όπου παρατηρείται το εκάστοτε ποσό διακύμανσης. Ας δούμε ένα παράδειγμα ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα αυτή την ιδιότητα. Εάν η μεταβλητότητα ενός δείκτη για το πρώτο 4-μηνο είναι 20% και τους επόμενους 8 μήνες του έτους που διαρκεί το συμβόλαιο είναι 30% η συνολική διακύμανση θα είναι: ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ={1/3*20^2}+{2/3*30^2}=733.

Ως βασικό τους επιχείρημα αναφέρουν επίσης την ευκολία με την οποία μπορεί κάποιος να αναπαράγει ένα τέτοιου είδους συμβόλαιο μέσω ενός χαρτοφυλακίου από δικαιώματα το οποίο από την στιγμή που θα σχηματιστεί απαιτεί μόνο δέλτα αντιστάθμιση και όχι περαιτέρω αγορά ή πώληση δικαιωμάτων κατά τη διάρκεια της σύμβασης. Αντιθέτως υποστηρίζουν πως ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας απαιτεί δυναμική αντιστάθμιση, δηλαδή απαιτείται συνεχής προσαρμογή του χαρτοφυλακίου των δικαιωμάτων σε κάθε αλλαγή της μεταβλητότητας του υποκείμενου μέσου γεγονός που καθιστά την αντιστάθμιση αυτών των συμβολαίων με μια τεχνική περισσότερο χρονοβόρα και με μεγαλύτερο κόστος. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε βέβαια πως η έλλειψη ρευστότητας στην αγορά δικαιωμάτων δυσκολεύει την επίτευξη της αντιστάθμισης των συμβολαίων ανταλλαγής διακυμάνσεως.

Τέλος δίνουν μεγάλη σημασία στο γεγονός ότι τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης εμπεριέχουν μεγαλύτερο κίνδυνο λόγω της κυρτής σχέσης που συνδέει την απόδοση τους σε σχέση με τις μεταβολές της μεταβλητότητας, σε αντίθεση με τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας τα οποία είναι περισσότερο ασφαλή ως προς τις απολαβές που προσφέρουν στους διαπραγματευόμενους. Ουσιαστικά, εφόσον από την αντιστάθμιση των δικαιωμάτων προαίρεσης προκύπτουν φυσικά και απλά τα συμβόλαια ανταλλαγής διακύμανσης -ή αλλιώς μεταβλητότητας εις το τετράγωνο-η διακύμανση θα πρέπει να θεωρείται-σύμφωνα με τους υποστηρικτές της- ως το πραγματικό υποκείμενο μέσο και οι συμφωνίες ανταλλαγής μεταβλητότητας να θεωρούνται παράγωγα προϊόντα που βασίζονται στην διακύμανση.

6. ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα παρουσιάσουμε παραδείγματα των τρόπων αντιστάθμισης των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους τιμολόγησης που αναλύσαμε στην θεωρία προκειμένου να κατανοήσουμε τις διαφορές των προσεγγίσεών τους.

6.1 Παράδειγμα Αντιστάθμισης Συμβολαίου Ανταλλαγής Διακύμανσης

Στο Κεφάλαιο 5 συζητήσαμε για την πραγματοποίηση της αναπαραγωγής ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης μέσω ενός χαρτοφυλακίου από δικαιώματα. Η βασικότερη υπόθεση που είχαμε κάνει ήταν πως θα χρησιμοποιούσαμε δικαιώματα όλων των τιμών εξάσκησης από το 0 έως το ∞ γεγονός το οποίο είναι φυσικά αδύνατον. Εφόσον λοιπόν τα δικαιώματα που διαθέτουμε περιορίζονται σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών εξάσκησης η τιμή της διακύμανσης που θα υπολογίσουμε βάση αυτής της μεθόδου θα είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του συμβολαίου. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να βρούμε μια φόρμουλα υπολογισμού για συγκεκριμένο εύρος τιμών εξάσκησης.

Αρχικά ανακαλούμε την εξίσωση (3.6) όπου $K_{var}=\frac{2}{T}E\ \{\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - log\frac{S_T}{S_0}\}$. Όπως αναφέραμε στη Παράγραφο 5.1.2 ο λογάριθμος $log\frac{S_T}{S_0}$. μπορεί να γραφεί και ως $log\frac{S_T}{S^*} + log\frac{S^*}{S_0}$. Εάν προσθαφαιρέσουμε τον όρο $\frac{S_T-S^*}{S^*}$ θα έχουμε ότι: $K_{var}=\frac{2}{T}\ E\ \{\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - log\frac{S^*}{S_0} - \frac{S_T-S^*}{S^*}+\frac{S_T-S^*}{S^*} - \log\frac{S_T}{S_0}\}$. Βάζοντας μέσα στην αγκύλη την προσδοκία, από την (5.1) παίρνουμε ότι:

$$K_{var}=\frac{2}{T}\ \{rT- \frac{S_0}{S^*}e^{rT}-1)- log\frac{S^*}{S_0}\}+\frac{2}{T}E\{\frac{S_T-S^*}{S^*} - \log\frac{S_T}{S_0}\}.$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα αγοράς και πώλησης του οποίου η παρούσα αξία θα ισούται με $\mathrm{P} = \sum_i w(K_i^c)\mathrm{C}(K_i^c)$ $+\sum_j w\left(K_j^p\right)\mathrm{P}\left(K_j^p\right)$, όπου $w(K_i^c)$είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων αγοράς που θα χρησιμοποιηθούν με τιμή ίση με $\mathrm{C}(K_i^c)$ και $w\left(K_j^p\right)$ ο αριθμός των δικαιωμάτων πώλησης που χρησιμοποιούνται με τιμή ίση με $\mathrm{P}\left(K_j^p\right)$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει απόδοση στη λήξη ίση με f(S_T)= $\frac{2}{T}\{\frac{S_T-S^*}{S^*} - log\frac{S_T}{S_*}\}$ και άρα θα ισχύει ότι K_{var}=$\frac{2}{T}$ {rT- ($\frac{S_o}{S_*}e^{rT}$-1)- $log\frac{S_*}{S_0}$}+f(S_T).

Εμείς επιθυμούμε να αναπαράγουμε την τιμή του χαρτοφυλακίου f(S_T). Ας υποθέσουμε πως διατηρούμε ένα χαρτοφυλάκιο με δικαιώματα αγοράς με τιμές εξάσκησης K_i^c , $S_* = K_0^c < K_1^c < K_2^c < \cdots$, και δικαιώματα πώλησης με τιμές εξάσκησης K_j^P , $S_* = K_0^p < K_1^p < K_2^p < \cdots$. Για να αναπαράγουμε αυτό το χαρτοφυλάκιο χρειάζεται να βρούμε τους συντελεστές στάθμισης για κάθε δικαίωμα οι οποίοι δίνονται με το συμβολισμό $w(K_i^c)$ και $w(K_j^p)$. Αναλυτική παρουσίαση του τρόπου υπολογισμού των συντελεστών στάθμισης ακολουθεί στο Παράρτημα Β.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα υπολογισμού της τιμής ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης, μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης, υποθέτοντας ένα εύρος τιμών εξάσκησης από 200 έως 400 με μεταβλητότητα η οποία αυξάνεται κατά 1 volatility point και τιμή δικαιώματος η οποία υπολογίζεται βάση της μεθόδου των Black and Scholes.

Στο παράδειγμά μας υποθέσαμε ότι: S0=300, r=0.05,T=1. Βάσει των στοιχείων του Πίνακα 1 το κόστος του χαρτοφυλακίου των δικαιωμάτων θα είναι f(S_T)=578.854.

Άρα K_{var}=$\frac{2}{T}${r T-($\frac{S_o}{S^*}e^{rT}$-1)- $ln\frac{S^*}{S_0}$}+$f(S_T)$=574.850.

6.2 Παράδειγμα Αντιστάθμισης Συμβολαίου Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Ας υποθέσουμε ότι είμαστε σε θέση αγοράς σε μία μονάδα ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας την χρονική στιγμή t=0 το οποίο λήγει την T=0.25. Όπως αναλύσαμε στην Ενότητα 5.2 για να αντισταθμιστεί η θέση μας θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με μία μονάδα του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας και β μονάδες συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης όπου β=$-\frac{\frac{\partial Y_t^T}{\partial v}}{\frac{\partial X_t^T}{\partial v}}$. Επίσης βάσει των όσων παραθέσαμε σχετικά με τους συντελεστές ευαισθησίας των συμβολαίων ανταλλαγής διακυμάνσεως και μεταβλητότητας στην Ενότητα 4.2 έχουμε ότι $\frac{ðX_t^T}{ðv}=\frac{1-e^{-\kappa^*(T-t)}}{\kappa^*(T-t)}$, και προκειμένου να συγκρίνουμε τους συντελεστές δέλτα που εκφράζουν την ευαισθησία των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\frac{ð\sqrt{X_t^T}}{ð\boldsymbol{v_t}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{X_t^T}}\frac{ðX_t^T}{ðv_t}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{X_t^T}}\frac{1-e^{-\kappa^*(T-t)}}{\kappa^*(T-t)}$.

Έτσι λοιπόν προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές β για να αντισταθμίσουμε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας διάρκειας τριών μηνών χρειαζόμαστε την τιμή του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης (X_t^T) κάθε ημέρα από τις 90 ημέρες στις οποίες πραγματοποιούμε την αντιστάθμιση κινδύνου και τη παράμετρο κ* που χρησιμοποιείται στο μοντέλο του Heston. Επειδή όμως στη μέχρι τώρα ανάλυσή μας έχουμε βασιστεί σε υποθετικά δεδομένα θα θεωρήσουμε πως κ^*=1.15 (όπως και σε όλα τα εμπειρικά μας αποτελέσματα).

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε τον παραπάνω υπολογισμό για κάθε ημέρα έως την λήξη απαιτείται ο υπολογισμός της τιμής των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης που πουλάμε κάθε ημέρα. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για αυτό τον υπολογισμό αφορά τη χρησιμοποίηση της μεθόδου Monte Carlo για τη δημιουργία μονοπατιών για την τιμή της μετοχής και τη μεταβλητότητα, όπου σε κάθε χρονικό βήμα θεωρούμε ως αρχικές τιμές για τα μονοπάτια των τιμών της μετοχής και της μεταβλητότητας τις αμέσως προηγούμενες. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας φαίνονται στο Διάγραμμα 3 όπου παρατηρούμε πως ο συντελεστής β μειώνεται όσο πλησιάζει ο χρόνος λήξης του συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας.

Κατανοούμε λοιπόν πως η αντιστάθμιση μιας θέσης αγοραστή σε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής μεταβλητότητας με λήξη σε τρεις μήνες θα απαιτούσε την πώληση συγκεκριμένου αριθμού μονάδων συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης -ο οποίος όσο πλησιάζει ο χρόνος έως τη λήξη μειώνεται- και μιας μονάδας ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας από την χρονική στιγμή t=0 και για κάθε ημέρα έως την λήξη του συμβολαίου. Αυτό οδηγεί σε σημαντικά κόστη συναλλαγών και είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί το επιθυμητό κέρδος.

6.3 Εμπειρικό Παράδειγμα Υπολογισμού Της Τιμής Ενός Συμβολαίου Ανταλλαγής Διακυμάνσεως Με Τη Χρήση Όλων Των Μεθόδων

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιάσουμε με αριθμητικά παραδείγματα μία σύγκριση όλων των μεθόδων τιμολόγησης των δικαιωμάτων ανταλλαγής διακύμανσης. Ο πρώτος τρόπος που θα χρησιμοποιήσουμε για την τιμολόγησή μας είναι η μέθοδος της αναπαραγωγής από απλά δικαιώματα την οποία αναλύσαμε στην Ενότητα 6.1. Σημαντική μέθοδος είναι και οι εκτιμήσεις με Monte Carlo η οποία βασίζεται σε μια CIR διαδικασία. Σύμφωνα με τους Higham and Mao (2005) η μέθοδος Euler-Maruyama αποτελεί έναν πολύ ελκυστικό και ακριβή τρόπο διακριτοποίησης των στοχαστικών διαδικασιών για την τιμή S_t και τη μεταβλητότητα v_t της μετοχής. Σύμφωνα λοιπόν με τον συγκεκριμένο τρόπο διακριτοποίησης θα πρέπει:

$$S_t = S_{t-1} + rS_{t-1}\Delta t + \sqrt{\left|v_{t-1}\right|}\, S_{t-1}\sqrt{\Delta t}\, W_t^1$$

$$v_t = v_{t-1} + k^*(\theta^* - v_{t-1})\Delta t + \sigma\sqrt{\left|v_{t-1}\right|}\sqrt{\Delta t}\, W_t^2 + \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^2,$$

όπου W_t^1, W_t^2 είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή N(0,1).

Ο τρίτος τρόπος τιμολόγησης είναι εκείνος που αναπτύξαμε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.5 ο οποίος μας παρέχει μια τιμή για το συμβόλαιό στο συνεχή χρόνο. Συγκεκριμένα βάση των μελετών των Swishchuk (2004) και Zhang & Zhu (2006) η πραγματοποιηθείσα διακύμανση προσεγγίζεται από τον τύπο ${\sigma^2}_R = \frac{1}{T}\int_0^T v_t$ dt x 100², ο οποίος είναι πολύ αποτελεσματικός στον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της διακύμανσης εφόσον ο ορισμός της συναρτήσει ενός ολοκληρώματος διευκολύνει την εύρεση της αναμενόμενης τιμής της. Αναλυτικά λοιπόν η φόρμουλα του Swishchuk για τον υπολογισμό της τιμής θα δίνεται από τον τύπο: $E_0^Q[{\sigma^2}_R] = [v_0 \frac{1-e^{-k^*T}}{k^*T} + \theta^*(1 - \frac{1-e^{-k^*T}}{k^*T})]$X100², δηλαδή θα ερμηνεύεται ως ο μέσος όρος της v_0 και του μέσου της διακύμανσης θ^*. Ο τέταρτος τρόπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που αναλύσαμε στην Παράγραφο 3.5.3 και στο Παράρτημα Γ, η οποία δίνεται από τον τύπο

K_{var}=$E_0^Q[\sigma^2{}_R]$=$\frac{e^{r\Delta t}}{T}[f(v_0)+\sum_{i=2}^{N} f_i(v_0)]$x100².

Στον Πίνακα 2 παραθέτουμε ένα τρόπο υπολογισμού του κόστους αντισταθμίσεως ενός συμβολαίου διακυμάνσεως βάσει των υποθετικών δεδομένων, όπου οι τιμές εξάσκησης μεταβάλλονται κατά 25, η τιμή της μεταβλητότητας είναι ίδια για όλα τα δικαιώματα και η κάθε τιμή υπολογίζεται από τη μέθοδο Monte Carlo μέσω της οποία είναι δυνατή η προσέγγιση των πραγματικών τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Εφόσον υποθέσαμε ότι S0=1250,r=0.05,T=1 και f(S_t)=795.612 θα ισχύει ότι:

K_{var} =$\frac{2}{T}${rT-($\frac{S_o}{S^*}e^{rT}$-1)- $log\frac{S^*}{S_0}$}+f(S_t)=791.61.

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε τη σύγκριση των μεθόδων τιμολόγησης θα πρέπει να δώσουμε τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου του Heston. Στην βιβλιογραφία αναφέρονται αρκετά άρθρα τα οποία ασχολούνται αποκλειστικά με την εκτίμηση αυτών των παραμέτρων. Ύστερα από μία μικρή έρευνα καταλήξαμε στη χρησιμοποίηση των τιμών που διαφαίνονται στον Πίνακα 3.

Ακολούθως παρουσιάζουμε μια σύγκριση όλων των μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό της τιμής ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, τα οποία διαφαίνονται στο Πίνακα 4, παρατηρούμε ότι οι τιμές εξάσκησης των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης μειώνονται όταν αυξάνεται ο χρόνος ωρίμανσης του συμβολαίου. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως οι τιμές που υπολογίσαμε βάσει της μεθόδου Monte Carlo ταυτίζονται με τις θεωρητικές τιμές του Swishchuk και οι τιμές βάσει της μεθόδου της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης κινούνται χαμηλότερα κατά ένα μικρό ποσοστό από τις τιμές που υπολογίσαμε βάσει του μοντέλου συνεχούς χρόνου. Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά των τιμών που υπολογίσαμε βάσει της θεωρίας της τιμολόγησης μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στη τελευταία περίπτωση, όπως παρατηρούμε και στο Διάγραμμα 4, η τιμή του συμβολαίου μειώνεται και πάλι, όμως όσο ο χρόνος λήξης του συμβολαίου μεγαλώνει η συγκεκριμένη μέθοδος δίνει τιμές που παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις σε σχέση με τις τιμές που υπολογίσαμε χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες μεθόδους. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την αδυναμία της μεθόδου υπολογισμού της τιμής εξάσκησης του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης μέσω δικαιωμάτων, εφόσον οι προσεγγίσεις που παρέχει διαφέρουν σημαντικά και από τις τρεις προυπάρχουσες μεθόδους. Φυσικά θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας πως βάσει αυτής της μεθόδου απαιτείται η προσέγγιση του λογαριθμικού συμβολαίου με άπειρες τιμές από δικαιώματα, γεγονός το οποίο δεν είναι εφικτό λόγω της μειωμένης ρευστότητας που παρουσιάζουν αυτά στην αγορά και έτσι η απόκλιση ήταν αναμενόμενη. Είναι σημαντικό να τονίσουμε επίσης πως στις μεθόδους Monte Carlo στο πλαίσιο δημιουργίας του αλγορίθμου λαμβάνονται τυχαίες τιμές (W_t^1, W_t^2) οι οποίες προφανώς επηρεάζουν την προσέγγισή μας.

Ακολούθως μεταβάλλαμε τα χρονικά βήματα των μεθόδων Monte Carlo και της μεθόδου επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης προκειμένου να παρατηρήσουμε σε πόσα χρονικά βήματα οι τιμές πιθανότατα θα πλησιάσουν. Έτσι λοιπόν ορίσαμε χρόνο λήξης του συμβολαίου T=0.5 και τα αποτελέσματά μας παρουσιάζονται στον Πίνακα 5:

Όπως παρατηρούμε οι τιμές που υπολογίσαμε βάσει της μεθόδου Monte Carlo, αλλά και εκείνες της μεθόδου των μερικών διαφορικών εξισώσεων, προσεγγίζουν καλύτερα τη σταθερή τιμή της μεθόδου που αναπτύχθηκε από τον Swishchuk όσο αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων, εντός των οποίων λαμβάνουμε δείγμα στον ίδιο χρόνο λήξης του συμβολαίου (T=0.5). Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 5 η μέθοδος Monte Carlo δίνει περίπου την ίδια τιμή για το συμβόλαιο διακύμανσης για N=52, ενώ το μοντέλο διακριτού χρόνου σημειώνει σημαντική ταύτιση με την θεωρητική τιμή του Swishchuk για N=252. Τα συγκεκριμένα συμπεράσματα είναι προφανή και στο Διάγραμμα 5.

Ακολούθως παραθέτουμε μια σύγκριση των τιμών των συμβολαίων διακύμανσης όταν αυξάνεται και πάλι το έτος ωρίμανσης του συμβολαίου. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήσαμε μόνο τις τρεις μεθόδους (όπως παρατηρούμε από το Διάγραμμα 6 και διακρίνουμε ότι πέραν του γεγονότος ότι οι τιμές των συμβολαίων κινούνται καθοδικά, αυξάνονται και οι αποκλίσεις που παρουσιάζει η μέθοδος Monte Carlo όσο αυξάνει το έτος ωρίμανσης του συμβολαίου. Το γεγονός αυτό οφείλεται πιθανότατα στα σφάλματα που παρουσιάζουν οι εκτιμήσεις βάσει της μεθόδου Monte Carlo λόγω της επιπρόσθετης τυχαιότητας που περιλαμβάνεται στους συγκεκριμένους υπολογισμούς.

Τέλος είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε πόσο επηρεάζουν την τιμολόγησή μας οι τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιήσουμε δεδομένου ότι διακρίνουμε μεγάλη ευαισθησία της τιμής των συμβολαίων στις μεταβολές των συγκεκριμένων παραμέτρων του μοντέλου του Heston. Στον Πίνακα 6 παρατηρούμε την ευαισθησία που παρουσιάζουν οι παράγοντες κ^*, θ^*,v_o, σ_v όταν μεταβάλουμε κάθε μία από τις παραμέτρους κατά 1% από την αρχική τους τιμή που αναφέραμε παραπάνω. Όπως παρατηρούμε η τιμή του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης παρουσιάζει μια αξιοσημείωτη ευαισθησία στις αλλαγές της μέσης διακύμανσης θ^* όμως η παράμετρος η οποία παίζει κυρίαρχο ρόλο είναι η αρχική τιμή της διακύμανσης v_o εφόσον η ευαισθησία στις αλλαγές της αγγίζει το 5.134%.

Στο πλαίσιο της κατανόησης των όσων αναφέρουμε παραπάνω παραθέτουμε και το Διάγραμμα 7 όπου διαφαίνεται η μεγάλη ευαισθησία των τιμών εξάσκησης των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης στις αλλαγές των τιμών των παραμέτρων θ^*,v_0. Προκειμένου να αντιληφθούμε το σημαντικό τους ρόλο εφαρμόσαμε τη διαδικασία τιμολόγησης βάσει όλων των μεθόδων, εκτός της μεθόδου του Derman, για v_0>θ και για v_0<θ. Όπως παρατηρούμε, όταν η αρχική τιμή της διακυμάνσεως είναι μεγαλύτερη της θ η τιμή εξάσκησης του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης μειώνεται όσο αυξάνεται το έτος λήξης του συμβολαίου, ενώ στην περίπτωση όπου v_0<θ η τιμή εξάσκησης παρουσιάζει μία σταδιακή αύξηση όσο αυξάνεται το έτος ωριμότητας του συμβολαίου. Κατανοούμε λοιπόν πόσο εύκολα μία μικρή αλλαγή των παραμέτρων μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τα αποτελέσματά μας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη συγκεκριμένη εργασία αναπτύξαμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά των συμβολαίων τα οποία χρησιμοποιούνται από τους επενδυτές προκειμένου να αντιμετωπίσουν τον κίνδυνο που προκύπτει από τις διακυμάνσεις των τιμών της μεταβλητότητας των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων. Προκειμένου να επιτευχθεί αποτελεσματική και δίκαιη διαπραγμάτευση αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε όλες τις μεθόδους ουδέτερου κινδύνου τιμολόγησης αρχικά χωρίς να βασιστούμε σε κάποιο μοντέλο και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το στοχαστικό μοντέλο του Heston. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως στην ανάλυσή μας αναπτύξαμε πλήρως τη διαδικασία υπολογισμού της γενικής μερικής διαφορικής εξίσωσης για όλα τα παράγωγα προϊόντα βασιζόμενοι στα δυναμικά του Heston, και στη συνέχεια δώσαμε την αριθμητική λύση της εξίσωσης αυτής στην περίπτωση των συμφωνιών ανταλλαγής διακύμανσης.

Μέσα από τα εμπειρικά μας αποτελέσματα αναπτύξαμε τη διαδικασία που ακολουθείται προκειμένου να αντισταθμίσει ο εκάστοτε επενδυτής τη θέση του σε ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης μέσα από την χρήση ενός περιορισμένου αριθμού δικαιωμάτων προαίρεσης. Παρουσιάσαμε επίσης ένα απλό παράδειγμα της διαδικασίας που μπορεί να ακολουθηθεί στην αντιστάθμιση των συμβολαίων ανταλλαγής μεταβλητότητας η οποία απαιτεί την ύπαρξη ρευστότητας στην αγορά των δικαιωμάτων ανταλλαγής διακύμανσης εφόσον για την επίτευξη αποτελεσματικής αντιστάθμισης απαιτείται η χρήση συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης

Ακολούθως συγκρίναμε τα αποτελέσματα που παρήχθησαν από τη μέθοδο του Derman με αυτά των μεθόδων Monte Carlo, τη μέθοδο υπολογισμού τιμής στο συνεχές χρόνο του Swishchuk και τη μερική διαφορική εξίσωση. Μέσω της σύγκρισης αυτής επιβεβαιώσαμε τη λανθασμένη εκτίμηση που μας παρέχει η μέθοδος του Derman σε συμβόλαια τα οποία λήγουν μακροχρόνια.

Στη συνέχεια κατά την σύγκριση των τιμών των συμβολαίων ανταλλαγής διακύμανσης με τη χρήση όλων των μεθόδων που βασίζονται στα δυναμικά του Heston (1993) παρατηρήσαμε πως οι τιμές των συμβολαίων μειώνονταν στο πέρασμα των ετών λήξεως του συμβολαίου. Επίσης παρατηρήσαμε την παράλληλη πορεία των τιμών που προέκυψαν βάσει της επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης και της επίλυσης της μεθόδου τιμολόγησης στο συνεχές χρόνο του Swishchuk, επιβεβαιώνοντας πως οι δύο θεωρητικές τιμές παρουσιάζουν ανάλογη συμπεριφορά. Ακολούθως η σύγκριση όλων των μεθόδων, εκτός της αναπαραγωγής του συμβολαίου με απλά δικαιώματα, για δύο διαφορετικές περιπτώσεις όπου $v0>\theta$ και $v0<\theta$ μας απέδειξε πως παρατηρείται μεγάλη ευαισθησία των τιμών των συμβολαίων στις τιμές των παραμέτρων.

Τέλος θα πρέπει να τονίσουμε πως το μοντέλο του Heston που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων μας εξαρτάται απόλυτα από τα δυναμικά που ορίσαμε. Κατανοούμε λοιπόν πως η ανεύρεση του μοντέλου εκείνου που προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική τιμή του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης αποτελεί ένα πεδίο για περαιτέρω έρευνα. Άλλωστε όπως γίνεται και σε όλα τα παράγωγα προϊόντα το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για την αποτίμησή τους αποτελεί ιδιαίτερη προτίμηση του εκάστοτε επενδυτή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΣΤΗΜΑ Α: ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ ΕΝΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟΥ

Ας υποθέσουμε πως η f είναι μια διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση. Για οποιαδήποτε σταθερά κ η f(s) μπορεί να γραφτεί ως:

$$f(s)= f(k)+1_{(S>k)} \int_k^s f'_{(u)du} - 1_{(S<k)} \int_s^k f'_{(u)du} = f(k)+1_{(S>k)} \int_k^s f'_{(k)} - \int_u^k f''(v)dv)du$$

$$-1_{(S<k)} \int_k^s f'_{(k)} - \int_u^k f''(v)dv)du.$$

Εφόσον η f(k) δεν εξαρτάται από το u χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fubini θα έχουμε ότι :

$$f(s)=f(k)+f'(k)(S-k)+ 1_{(S>k)} \int_k^s \int_v^s f''(v)du\, dv + 1_{(S<k)} \int_s^k \int_s^v f''(v)du\, dv.$$

Στο σημείο αυτό εάν ολοκληρώσουμε τους δύο τελευταίους όρους της παραπάνω εξίσωσης θα έχουμε ότι:

$$f(s) = f(k)+f'(k)(S-k)+ 1_{(S>k)} \int_\kappa^s f''(v)(S-v)\, dv + 1_{(S<k)} \int_\kappa^s f''(v)(v-S)\, dv$$

$$=f(k)+f'(k)(S-k)+ \int_\kappa^\infty f''(v)(S-v)^+\, dv + \int_0^k f''(v)(v-S)^+\, dv.$$

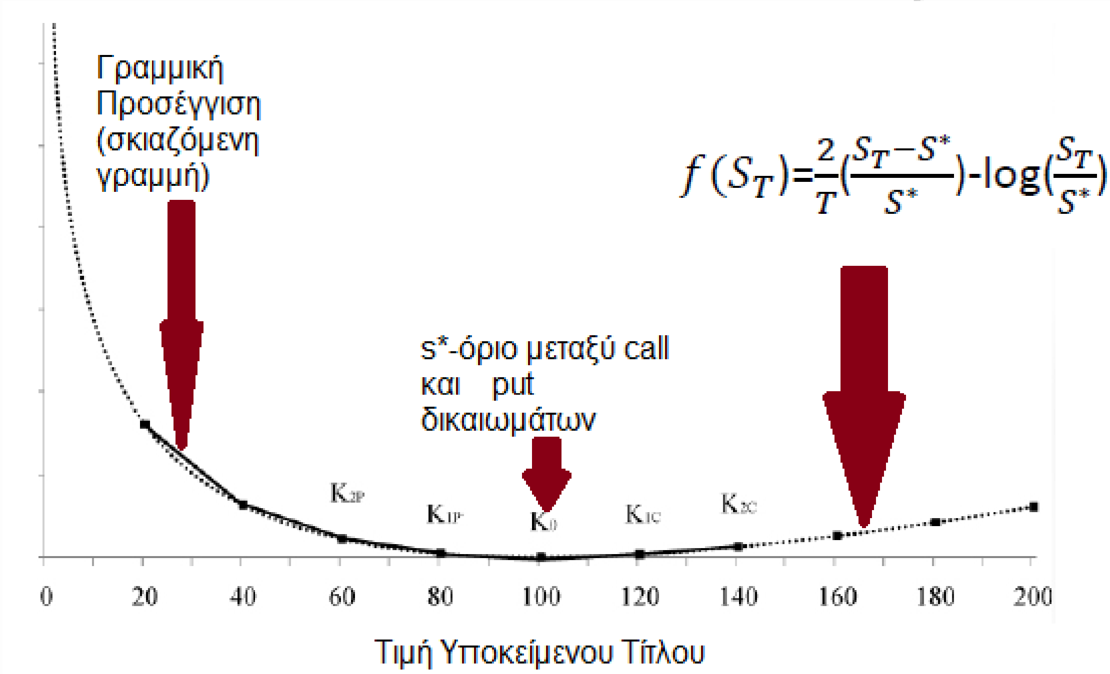
Εάν θεωρήσουμε ότι S= S_T ,k= S^* , f(y)=ln(y) θα πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο αποτελεί το μηχανισμό υπολογισμού της πληρωμής-απόδοσης ενός λογαριθμικού συμβολαίου:

$$ln\frac{S_T}{S_*} = \frac{S_T - S^*}{S^*} - \int_{S^*}^\infty \frac{1}{v^2}(S_T - v)^+ dv - \int_0^{S^*} \frac{1}{v^2}(v - S_T)^+ dv.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ

Ας θεωρήσουμε την απόδοση f(S_T)= $\frac{2}{T}\{\frac{S_T - S^*}{S^*} - log\frac{S_T}{S_*}\}$. Επιθυμούμε να αναπαράγουμε την τιμή του χαρτοφυλακίου f(S_T). Ψάχνουμε να βρούμε τους συντελεστές στάθμισης των δικαιωμάτων με τιμές εξάσκησης $S_* = K_0^c < K_1^c < K_2^c < \cdots$και των δικαιωμάτων πώλησης με τιμές εξάσκησης K_j^P , $S_* = K_0^p < K_1^p < K_2^p < \cdots$. Εάν ορίσουμε $w(K_i^c)$ τους συντελεστές στάθμισης για τα δικαιώματα αγοράς και $w(K_j^p)$ τους συντελεστές στάθμισης για τα δικαιώματα πώλησης βασικός μας στόχος θα είναι να βρούμε μια προσέγγιση της f(S_T).

Αυτό θα προσπαθήσουμε να το πράξουμε μέσω μιας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης όπως παρατηρούμε στο ακόλουθο σχήμα.



B1: Ακριβής Προσέγγιση Της Απόδοσης Του Λογαριθμικού Συμβολαίου

Το διάστημα από K_0^c έως K_1^c αναπαρίσταται από την πληρωμή $w(K_0^c)$δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης K_0^c.

$$w(K_0^c)=\frac{\mathrm{f}(K_1^c)-\mathrm{f}(K_0^c)}{K_1^c-K_0^c}.$$

Με τον ίδιο τρόπο το διάστημα από K_1^c έως K_2^c είναι ο συνδυασμός από δικαιώματα αγοράς με τιμές εξάσκησης K_0^c και K_1^c. Δεδομένου ότι ήδη διατηρούμε $w(K_0^c)$δικαιώματα αγοράς θα δημιουργηθεί ένα σύστημα το οποίο θα λύσουμε ως προς $w(K_1^c)$.

Συγκεκριμένα, $w(K_1^c)$(S-K_1^c)+ $w(K_0^c)(S-K_0^c)$= f(S) όπου $S_\epsilon[K_1^c, K_2^c]$.

Για S=K_1^c παίρνουμε την προηγούμενη σχέση ενώ για S=K_2^c λύνουμε ως προς $w(K_1^c)=\frac{\mathrm{f}(K_2^c)-\mathrm{f}(K_1^c)}{K_2^c-K_1^c}-w(K_0^c)$.

Γενικά λοιπόν θα μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές στάθμισης βάσει του παρακάτω τύπου για τα δικαιώματα αγοράς: $w(K_n^c)=\frac{\mathrm{f}(K_{n+1}^c)-\mathrm{f}(K_n^c)}{K_{n+1}^c-K_n^c}-\sum_0^{n-1} w(K_i^c)$.

Αντίστοιχα για τα δικαιώματα πώλησης: $\mathrm{w}(\mathrm{K}_\mathrm{n}^\mathrm{p})=\frac{\mathrm{f}(\mathrm{K}_{\mathrm{n}+1}^\mathrm{p})-\mathrm{f}(\mathrm{K}_\mathrm{n}^\mathrm{p})}{\mathrm{K}_{\mathrm{n}+1}^\mathrm{p}-\mathrm{K}_\mathrm{n}^\mathrm{p}}-\sum_0^{\mathrm{n}-1}\mathrm{w}(\mathrm{K}_\mathrm{i}^\mathrm{p})$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ.

Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 2.6 η αναμενόμενη τιμή της πραγματοποιηθείσας διακυμάνσεως σε ένα κόσμο ουδέτερου κινδύνου ισούται με:

$$E_0^Q[\sigma_R^2] = E_0^Q \frac{1}{N\Delta t}\left[\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{S_{t_i}-S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2\right] \times 100^2 = \frac{100^2}{N\Delta t}\left[\sum_{i=1}^{N} E_0^Q\left(\frac{S_{t_i}-S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2\right].$$

Άρα ουσιαστικά το πρόβλημα της τιμολόγησης της συμφωνίας ανταλλαγής διακύμανσης περιορίζεται στον υπολογισμό N αναμενόμενων τιμών της μορφής: $E_0^Q\left(\frac{S_{t_i}-S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2$ για Δt σταθερά χρονικά διαστήματα πλήθους N, εφόσον $t_i=i\Delta t$ (i=1,….,N).

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε μια πολύ σημαντική μεταβλητή :

$$I_t = \int_0^t \delta(t_{i-1}-\tau) S_\tau \, d\tau,$$

όπου δ(·) είναι η συνάρτηση Dirac Delta και όπως παρατηρούμε $I_t = 0$ για $t<t_{i-1}$ και $I_t=S_{t_{i-1}}$ για $t\geq t_{i-1}$. Η παρατήρηση αυτή που προκύπτει από τις ιδιότητες της συνάρτησης Dirac είναι πολύ χρήσιμη, διότι μας δίνει τη δυνατότητα να σπάσουμε το αρχικό πρόβλημά μας σε δύο υποπροβλήματα και να βρούμε τη λύση βασιζόμενοι σε δύο διαφορετικές συνθήκες.

Συγκεκριμένα θα διακρίνουμε την περίπτωση που το i>1 στην οποία ο χρόνος $t_{i-1} > 0$ και η ποσότητα $S_{t_{i-1}}$ αποτελεί μία ακόμη άγνωστη ποσότητα εκτός της S_t, και την περίπτωση που το i=0 όπου πλέον η μόνη άγνωστη ποσότητα είναι το S_t εφόσον η τιμή $S_{t_{i-1}}$=S0 δηλαδή ισούται με την αρχική τιμή της μετοχής.

Ακολουθώντας την απόδειξη που αναπτύξαμε στην Παράγραφο 3.5.3 θα θεωρήσουμε ένα συγκυριακό συμβόλαιο $U_i=U_i$ (S_t,v_t, I_t,t) του οποίου η τελική απόδοση το χρόνο t_i δίνεται από τον τύπο $\left(\frac{S_{t_i}}{I_{t_i}} - 1\right)^2$, και αφού μηδενίσουμε για λόγους καθαρά υπολογιστικούς το πριμ κινδύνου λ, μεταβούμε στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου, και βασιστούμε στα δυναμικά του Heston θα καταλήξουμε στην ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$\frac{\partial U_i}{\partial t}+rS\frac{\partial U_i}{\partial S}+\frac{\partial U_i}{\partial I}\delta(t_{i-1}-t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial S^2}v_t S^2{}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r $U_i+\frac{\partial U_i}{\partial v}[\kappa^*(\theta^*-v_t)]$=0.

Βάση της ιδιότητας της Dirac συνάρτησης σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο εκτός του t_{i-1} η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$\frac{\partial U_i}{\partial t}+rS\frac{\partial U_i}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial S^2}v_t S^2{}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r $U_i+\frac{\partial U_i}{\partial v}[\kappa^*(\theta^*-v_t)]$=0

δηλαδή I_t=0. Επειδή όμως η I_t εμφανίζεται και στην τελική συνθήκη η οποία θα είναι η βάση για τον υπολογισμό της λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης χρειαζόμαστε άλλη μία συνθήκη, γνωστή ως συνθήκη του άλματος. Συγκεκριμένα αφού $I_t=0$ για t< t_{i-1} και $I_t=S_{t_{i-1}}$ για t≥ t_{i-1}, η τιμή της I_t χαρακτηρίζεται από ένα άλμα το οποίο θα εισάγει στην ανάλυσή μας άλλη μία συνθήκη η οποία είναι:

$\lim_{t\uparrow t_{i-1}} U_i\,(S_t, v_t, I_t, \mathrm{t})= \lim_{t\downarrow t_{i-1}} U_i\,(S_t, v_t, I_t, \mathrm{t})$.

Τελικά λοιπόν η αρχική μας μερική διαφορική θα εκφραστεί ως δύο συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων τα οποία είναι τα ακόλουθα:

$\frac{\partial U_i}{\partial t}+rS\frac{\partial U_i}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial S^2}v_t S^2{}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r $U_i+\frac{\partial U_i}{\partial v}[\kappa^*(\theta^*-v_t)]$=0, (Γ.1)

U_i=U_i (S_t,v_t, I_t,t)= ($\frac{S_{t_i}}{I_{t_i}}$ -1)² στο διάστημα $t_{i-1}<t<t_i$ και

$\frac{\partial U_i}{\partial t}+rS\frac{\partial U_i}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial S^2}v_t S^2{}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho$-r $U_i+\frac{\partial U_i}{\partial v}[\kappa^*(\theta^*-v_t)]$=0, (Γ.2)

$\lim_{t\uparrow t_{i-1}} U_i\,(S_t, v_t, I_t, \mathrm{t})= \lim_{t\downarrow t_{i-1}} U_i\,(S_t, v_t, I_t, \mathrm{t})$ στο διάστημα 0<t<t_{i-1}.

Για την επίλυση αυτού του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων απαιτείται η χρήση της μεθόδου Fourier (Lewis 2000).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Εάν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί τη διαδικασία d v_t= $k(\theta-v_t)dt$ + ξ $\sqrt{v_t}dW_t^2$, και ένα ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο έχει μια απόδοση του τύπου U(S,v,t)=H(S) στη λήξη τότε η επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή ως:

U(x,v,t)=□$^{-1}[e^{(\breve{D}(\omega,T-t)+\check{C}(\omega,T-t)v}$F[H($e^x$)]] η οποία αποτελεί τη γενική μέθοδο του μετασχηματισμού του Fourier, όπου x=lnS, j=$\sqrt{-1}$, ω είναι η μεταβλητή μετασχηματισμού του Fourier και

$\check{C}$(ω,τ)=r(ωj-1)τ$\tilde{a}$+ $\frac{k^*\theta^*}{\sigma^2{}_v}$[($\tilde{a}$+$\tilde{b}$)τ-2ln($\frac{1-\tilde{g}e^{\tilde{b}\tau}}{1-\tilde{g}}$)],

$\breve{D}$(ω,τ)=$\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\sigma^2{}_v}\frac{1-e^{\tilde{b}\tau}}{1-\tilde{g}e^{\tilde{b}\tau}}$,

$\tilde{a}$=κ*-ρσ_vωj, $\tilde{b}$=$\sqrt{\tilde{a}^2+\sigma^2{}_v(\omega^2\ +\omega j)}$, $\tilde{g}$=$\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\tilde{a}-\tilde{b}}$.

Βασιζόμενοι λοιπόν σε αυτή την γενική μορφή του μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό F[e^{jat}]=2πδ_α(ω), όπου δ_α(ω) είναι η γενική συνάρτηση δέλτα η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(t)\,\Phi(t)dt=\Phi(a)$. Στην περίπτωση λοιπόν της δικής μας μερικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.1) όπου H(S)=($\frac{S}{I}$-1)², εάν θέσουμε x=lnS και εφόσον το I στο διάστημα αυτό είναι σταθερό θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό του Fourier στην συνάρτηση αποδόσεως H(e^x) σε σχέση με το x. Άρα θα έχουμε ότι: [($\frac{e^x}{I}$-1)²]=2π[$\frac{\delta_{-2j(\omega)}}{I^2}-2\frac{\delta_{-j(\omega)}}{I}$+$\delta_0$(ω)].

Χρησιμοποιώντας την ΠΡΟΤΑΣΗ 1 η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από:U_i (S_t,v_t, I_t,t)= $F^{-1}[e^{C(\omega,t_i-t)+D(\omega,t_i-t)v}$2π[$\frac{\delta_{-2j(\omega)}}{I^2}-2\frac{\delta_{-j(\omega)}}{I}+\delta_0(\omega)$]=

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tilde{C}(\omega,t_i-t)+\tilde{D}(\omega,t_i-t)v}[\frac{\delta_{-2j(\omega)}}{I^2}-2\frac{\delta_{-j(\omega)}}{I}+\delta_0(\omega)]e^{x\omega j}$dω

=$\frac{1}{I^2}e^{C(\omega,t_i-t)+D(\omega,t_i-t)v+x\omega j}\mid_{\omega=-2j}-\frac{2}{I}e^{C(\omega,t_i-t)+D(\omega,t_i-t)v+x\omega j}\mid_{\omega=-j}$

+ $e^{C(\omega,t_i-t)+D(\omega,t_i-t)v+x\omega j}\mid_{\omega=0}$ = $\frac{e^{2x}}{I^2}e^{C(t_i-t)+D(t_i-t)v}$ - $\frac{2e^x}{I}$ + $e^{-r(t_i-t)}$, όπου x=lnS , t_{i-1}<t<t_i, $\breve{C}$(τ) και $\breve{D}$(τ) ισούνται με:

$\check{C}$(τ)=rτ+ $\frac{k^*\theta^*}{\sigma^2{}_v}$[($\tilde{a}$+$\tilde{b}$)τ-2ln($\frac{1-\tilde{g}e^{\tilde{b}\tau}}{1-\tilde{g}}$)],

$\breve{D}$(τ)= $\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\sigma^2{}_v}\frac{1-e^{\tilde{b}\tau}}{1-\tilde{g}e^{\tilde{b}\tau}}$,

$\tilde{a}$=κ*-ρσ_vωj, $\tilde{b}$=$\sqrt{\tilde{a}^2+\sigma^2{}_v(\omega^2\ +\omega j)}$, $\breve{g}$=$\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\tilde{a}-\tilde{b}}$.

Ακολούθως εφόσον λύσαμε τη μερική διαφορική εξίσωση Γ.1 θα αναλύσουμε τον τρόπο επίλυσης της Γ.2. Παρατηρώντας βάση ορισμού ότι :

$\lim_{t\uparrow t_{i-1}}$ lnS_t=lnI έχουμε ότι $\lim_{t\downarrow t_{i-1}} U_i\ (S_t, v_t, I_t,$ t)=$e^{C(\Delta t)+D(\Delta t)v}$+$e^{-r\Delta t}$-2=f(v),

η οποία θα αποτελέσει την τελική συνθήκη που θα μας βοηθήσει να επιλύσουμε την Γ.2 στο διάστημα 0≤t≤t_{i-1}και η οποία αποτελείται από μία και μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή v.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Εάν το υποκείμενο μέσο ακολουθεί μια διαδικασία d v_t= $k(\theta-\mathrm{v}_t)dt$ + ξ $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2, το παράγωγο προϊόν το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο μέσο και διακρίνεται από απόδοση η οποία εξαρτάται από την v_t,όπως για παράδειγμα U(S_t,v_t, I_t,t)=G(v_t), θα ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+rS\frac{\partial U_i}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial S^2}v_tS^2{}_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial v^2}\sigma^2{}_v v_t+\frac{\partial^2 U_i}{\partial S\partial v}S_t\sigma_v v_t\rho\text{-r } U_i+\frac{\partial U_i}{\partial v}[\kappa^*(\theta^*-\mathrm{v}_t)]=0.$$

Τότε η λύση αυτής της μερικής διαφορικής μπορεί να δοθεί στη μορφή:

$$\mathrm{U}(S_t,v_t, I_t,\mathrm{t})=\int_0^{+\infty} e^{-r(T-t)}\ \mathrm{G}(v_t)\mathrm{p}(v_T\ |v_t)\mathrm{d}v_T\ ,$$

όπου $\mathrm{p}(v_T\ |v_t)=\mathrm{c}e^{-W-V}(\frac{V}{W})^{\frac{q}{2}}I_q(2\sqrt{WV})$,

c=$\frac{2k*}{(1-e^{-k*(T-t)})\sigma^2{}_v}$, W=$cv_t$, q=$\frac{2k*\theta*}{\sigma^2{}_v}$-1, V=$cv_t$, όπου I_q(.)είναι η Bessel συνάρτηση τάξεως q.

Η απόδειξη της Πρότασης 2 βασίζεται στη Feynman-Kac φόρμουλα και έτσι η λύση της διαφορικής εκφράζεται στην μορφή:

U(S_t,v_t, I_t,t)=$E_t^Q\,[e^{-r(T-t)}$ G(v_t)] όπου η v_t,S_t ακολουθούν τις στοχαστικές διαδικασίες d S_t=μ $S_t\,dt$ + σ S_tdW_t^1 και d v_t= $k(\theta-\mathrm{v}_t)dt$ + ξ $\sqrt{\mathrm{v}_t}$dW_t^2.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2 η λύση της παραπάνω μερικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$U_i(S_t,v_t, I_t,\mathrm{t})=\int_0^{+\infty} e^{-r(T-t)}\mathrm{f}(v_{t-1})\mathrm{p}(v_{t-1}\ |v_t)\mathrm{d}v_{t-1},$$

όπου f(v_{t-1}), p($v_{t-1}\ |v_t$) είναι γνωστά. Όπως υποδεικνύουν οι Zhang and Zhu (2009) στο άρθρο τους, βάσει των παραπάνω καταλήγουμε σε μια λύση κλειστής μορφής η οποία δίνεται από τον τύπο:

K_{var}=$E_0^Q[\sigma^2{}_R]$=$\frac{e^{r\Delta t}}{T}$$[f(v_0)$+$\sum_{i=2}^{N} f_i(v_0)]$x100²,

όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των φορών που λαμβάνουμε δείγμα της απόδοσης του συμβολαίου και $f_i.(v_0)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση.

Πρέπει να τονίσουμε πως παρόλη την πληθώρα των μελετών-όπως έχουμε αναφέρει στην επισκόπηση της βιβλιογραφίας-προτιμήσαμε να αναλύσουμε τον παραπάνω τρόπο επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης που χρησιμοποιείται στην τιμολόγηση, εφόσον είναι η πρώτη φορά που στη διαδικασία επίλυσης λαμβάνεται υπόψιν ο βασικός ορισμός της πραγματοποιηθείσας διακύμανσης, δηλαδή ο τύπος $E_0^Q[\sigma_{\mathrm{R}}{}^2]$=$\frac{100^2}{N\Delta t}$ $[\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} E_0^Q(\frac{\mathrm{S_{t_i}}-\mathrm{S_{t_{i-1}}}}{\mathrm{S_{t_{i-1}}}})^2]$. Επίσης είναι η πρώτη φορά που μας δίνεται η δυνατότητα βασιζόμενοι στη συγκεκριμένη ανάλυση να αξιολογήσουμε την αξιοπιστία του μοντέλου της τιμολόγησης συνεχούς χρόνου όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 6 όπου παραθέσαμε τα εμπειρικά μας αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bakshi G., C. Cao, Z. Chen, 1997, Empirical performance of altemative option pricing models, The Journal of Finance 52(5), pp. 2003-2049.

2. Black F., M Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy (81), pp. 637–659.

3. Bossu S., Strasser E., Guichard R., 2005, Just what you need to know about variance swaps, Equity Derivatives Investor Marketing, Quantitative Research and Development, JPMorgan London.

4. Broadie, Jain, 2008, Pricing and hedging of volatility derivatives.

5. Brockhaus O, Long D., 1999, Volatility swaps made simple 2(1), pp. 92-95.

6. Neuberger A, 1994, The log contract, Journal of Derivatives, pp. 74–79.

7. Carr P, Lee R., 2007, Realised volatility and variance: options via swaps Risk 20,pp.76–83.

8. Carr P., Lee R., 2008, Robust replication of volatility derivatives, MFA 2008 Annual Meeting.

9. Chicago Board of Options Exchange website: www.cboe.com.

10. Chriss N., Morokoff W., 1999, Market risk for volatility and variance swaps, Risk 12, pp.55–59.

11.Cox J.C.,J.E. Ingersoll ,S.A. Ross., 1985, A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, 53(2), pp.385-407.

12. Demeterfi K., Derman E., Kamal M. and Zou J., 1999, More than you ever wanted to know about volatility swaps, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.

13. Financial CAD Corporation, 2008, Variance and volatility swaps in the Heston model. http://www.¯ncad.com/support/developerFunc/mathref/HestonVolAndVarSwaps.htm.

14. Dupire B., 1993, Model art risk Risk, pp.118–20.

15. Fouque J., G. Papanicolaou, Sircar K., 2000, Derivatives in financial markets with stochastic volatility, Cambridge University Press.

16. Heston S., 1993, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies 6, pp. 327–343.

17. Higham, D., and X.Mao, 2005, Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean revertion square root process, Journal of Computational Finance 8(3),pp. 35-62.

18. Howison S, Rafailidis, A., Rasmussen H., 2002, A Note on the pricing and hedging of Volatility Derivatives, Bachelier Finance Society Second World congress proceedings, Crete.

19. Hull J., 2008, Options, Futures, and Other Derivatives (7th revised) Prentice Hall International.

20. Hull J., A. White, 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, Journal of Finance 42 ,no. 1,pp.281–300.

21. Lewis A., 2000, Option valuation under stochastic volatility, Finance Press Newport Beach, CA.

22. Lipton A., 2001, Mathematical methods for foreign exchange. World Scientific.

23. Little T, Pant V., 2001, A finite difference method for the valuation of variance swaps, J. Comput.Finance 5, pp.81–103.

24. Merton R, 1973, Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economic Management Science 4, pp. 141–183.

25. Sulima C. L., 2001, Volatility and variance Swaps, Capital Market News, Federal Reserve Bank of Chicago.

26. Swishchuk A., 2004, Modeling of variance and volatility Swaps for financial markets with stochastic volatilities, Wilmott magazine, September Issue, Technical article, pp. 64-72.

27. Timsah J., 2009, Stochastic volatility and time-varying risk-free rate model for pricing European options .

28. Wilmott P., 2007, Wilmott introduces Quantitative Finance, Wiley, second edition.

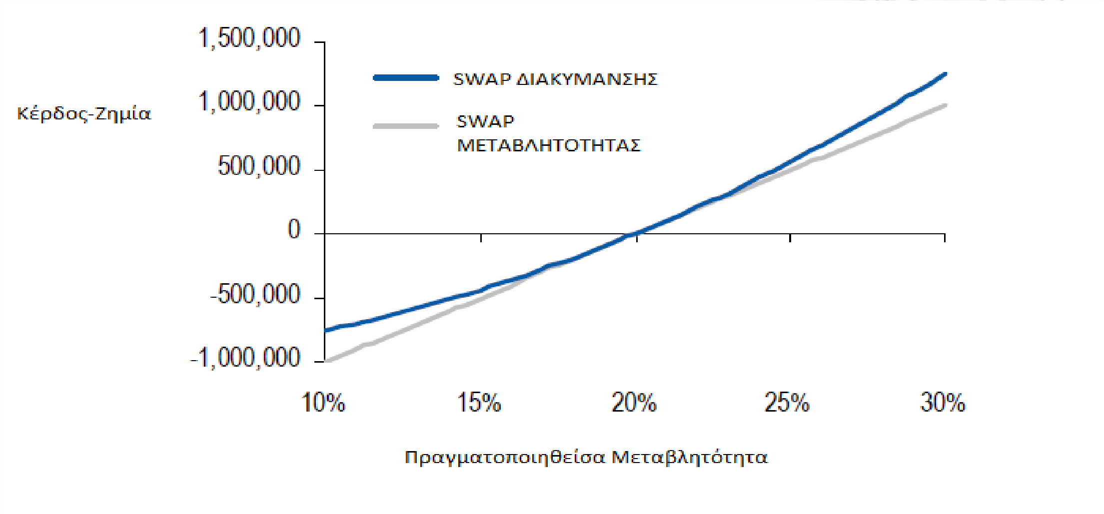
29. Zhang J., Y. Zhu, 2006, VIX Futures, Journal of futures markets 26(5),pp. 521-531.

30. S-PZhu, H Lian, 2009, Pricing variance swaps with stochastic volatility, World Congress on Engineering.

ΛΙΣΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1.

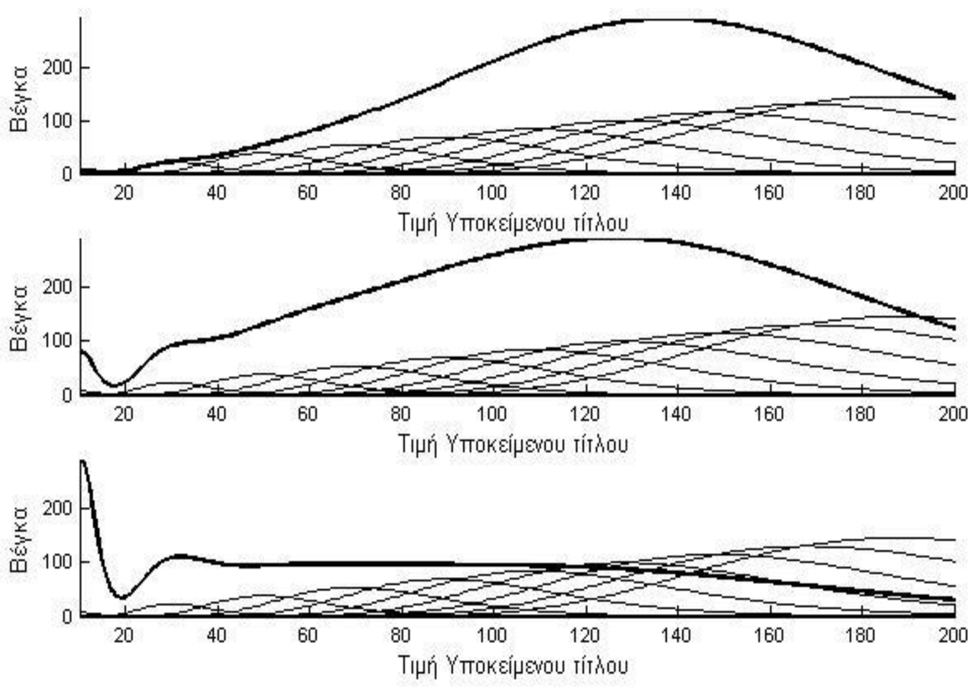
Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 1:Παρουσίαση του κέρδους-ζημίας ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης και ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας συναρτήσει της πραγματοποιηθείσας μεταβλητότητας.

2.

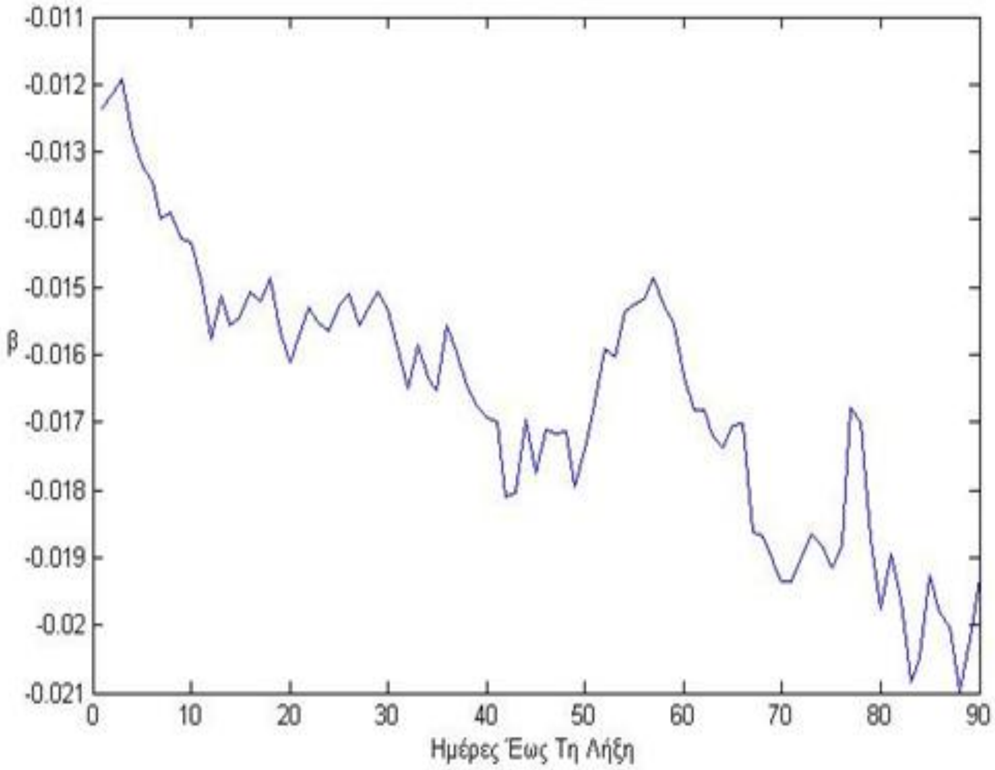
Διάγραμμα 2



Διάγραμμα 2:Βέγκα χαρτοφυλακίου από δικαιώματα προαίρεσης συναρτήσει των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Οι συντελεστές στάθμισης ορίζονται ως: ανάλογοι της εκάστοτε Κ, ανάλογοι του 1/Κ και αντιστρόφως ανάλογοι του $1/K^2$, όπου Κ είναι η τιμή εξάσκησης του εκάστοτε δικαιώματος.

3.

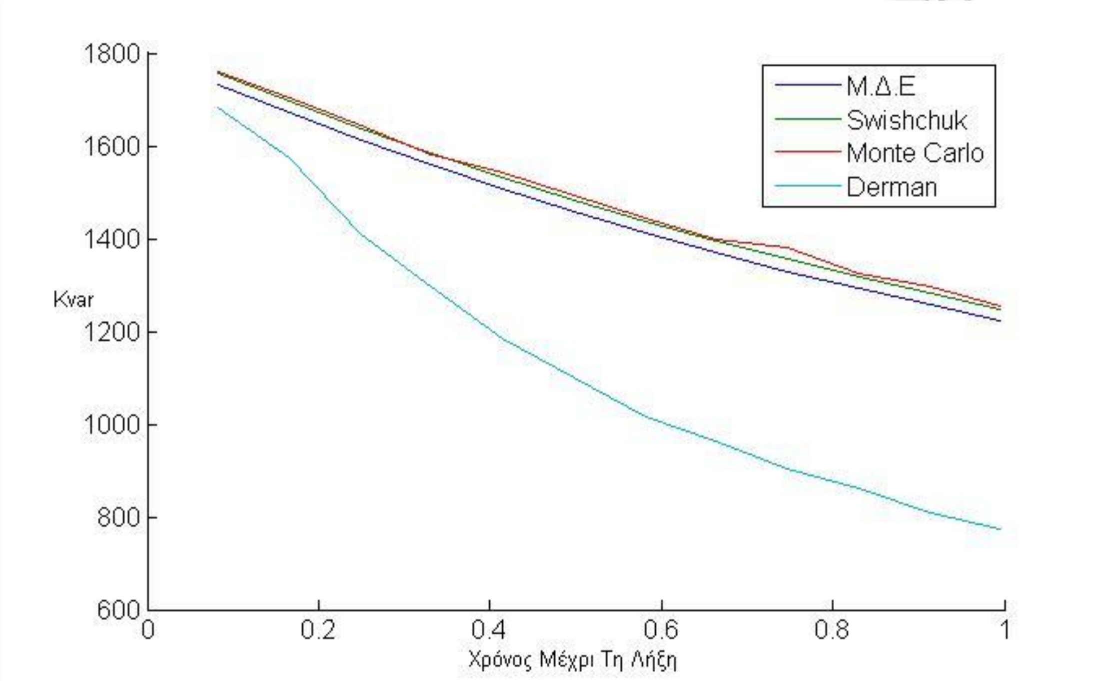
Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 3:Τιμές του hedge ratio για διαφορετικό χρόνο(ημέρες) έως τη λήξη.

4.

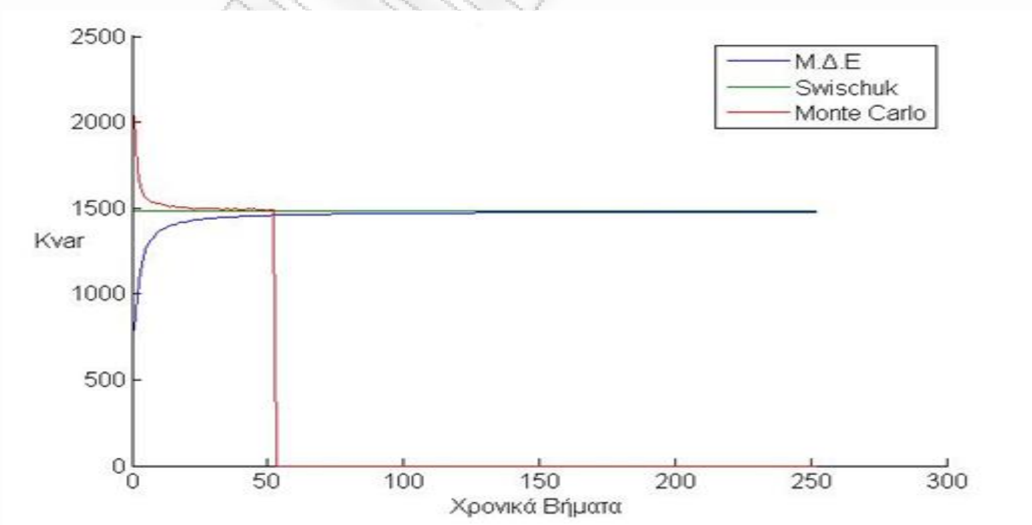
Διάγραμμα 4



Διάγραμμα 4:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Derman, Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη.

5.

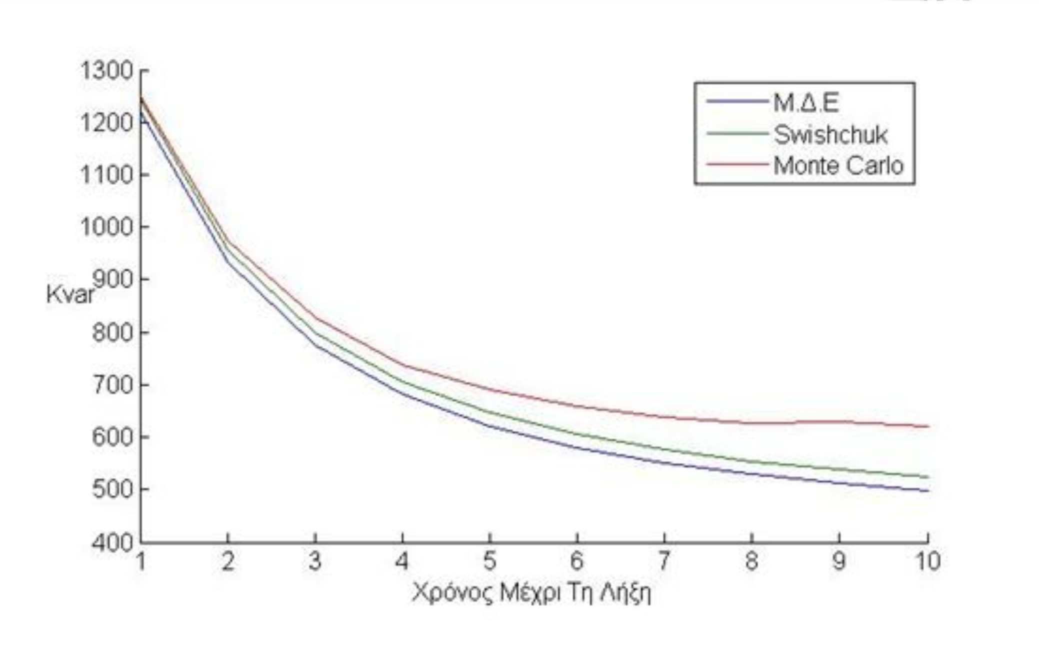
Διάγραμμα 5



Διάγραμμα 5:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικά χρονικά βήματα.

6.

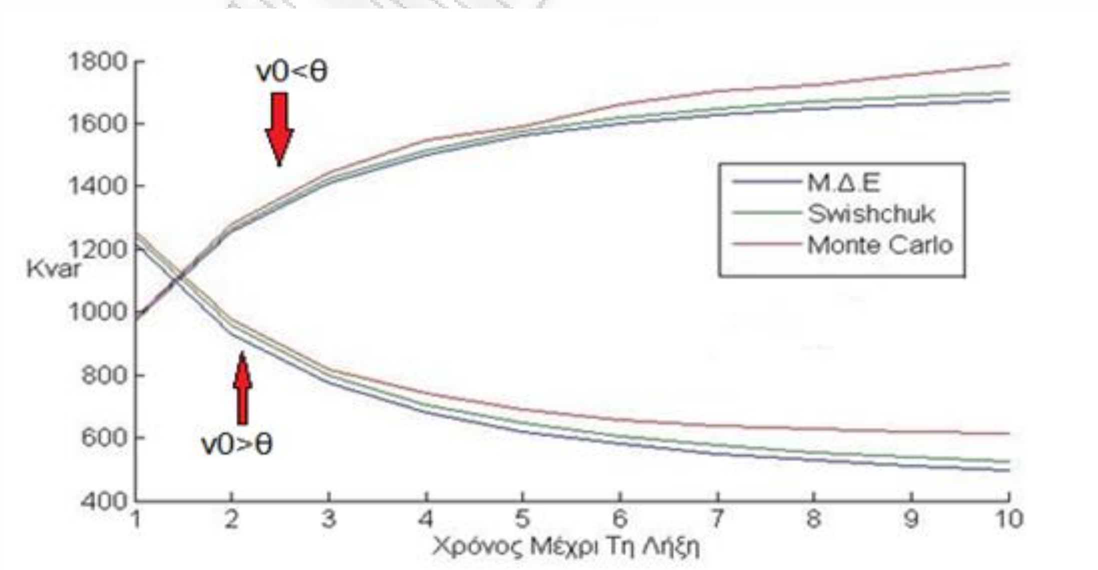
Διάγραμμα 6



Διάγραμμα 6:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη.

7.

Διάγραμμα 7



Διάγραμμα 7:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη και για τις περιπτώσεις όπου v0<θ,v0>θ.

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.

Πίνακας 1

ΤΙΜΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ	ΕΙΔΟΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ	σ	ΤΙΜΗ BS	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ
200	PUT	0.13	0.0018	4.7230
210	PUT	0.14	0.0182	4.5403
220	PUT	0.15	0.1017	4.1365
230	PUT	0.16	0.3730	3.7843
240	PUT	0.17	1.0150	3.4752
250	PUT	0.18	2.2264	3.2026
260	PUT	0.19	4.1675	2.9608
270	PUT	0.20	6.9303	2.7454
280	PUT	0.21	10.5361	2.5526
290	PUT	0.22	14.9316	2.3795
300	PUT	0.23	21.906	1.1431
300	CALL	0.24	35.8733	2.0870
310	CALL	0.25	32.2175	2.0064

320	CALL	0.26	29.1092	2.0022
330	CALL	0.27	26.4704	1.9541
340	CALL	0.28	24.2308	1.8374
350	CALL	0.29	22.3284	1.7309
360	CALL	0.30	20.7120	1.6333
370	CALL	0.31	19.3354	1.5438
380	CALL	0.32	18.1620	1.4615
390	CALL	0.33	17.1605	1.3855
400	CALL	0.34	15.5607	1.3154

Πίνακας 1:Αναλυτική παρουσίαση όλων των στοιχείων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του κόστους του χαρτοφυλακίου των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

2.

Πίνακας 2

ΤΙΜΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ	ΕΙΔΟΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ	σ	ΤΙΜΗ Monte Carlo	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ
950	PUT	0.42	43.25	0.0947
975	PUT	0.42	47.43	0.1034
1000	PUT	0.42	56.62	0.1223
1025	PUT	0.42	61.98	0.1579
1050	PUT	0.42	64.86	0.3076

1075	PUT	0.42	77.60	0.2959
1100	PUT	0.42	82.77	0.2848
1125	PUT	0.42	91.70	0.2744
1150	PUT	0.42	95.36	0.2645
1175	PUT	0.42	116.86	0.2551
1200	PUT	0.42	120.05	0.2463
1225	PUT	0.42	132.90	0.2378
1250	PUT	0.42	140.46	0.2299
1250	CALL	0.42	210.12	0.0954
1275	CALL	0.42	200.80	0.1040
1300	CALL	0.42	165.53	0.1264
1325	CALL	0.42	163.02	0.1579
1350	CALL	0.42	151.20	0.3076
1375	CALL	0.42	137.04	0.2959
1400	CALL	0.42	120.28	0.2848
1425	CALL	0.42	118.34	0.2744
1450	CALL	0.42	111.54	0.2645
1475	CALL	0.42	99.02	0.2551
1500	CALL	0.42	97.32	0.2463
1525	CALL	0.42	94.20	0.2378
1550	CALL	0.42	91.10	0.2229

Πίνακας 2:Αναλυτική παρουσίαση όλων των στοιχείων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του κόστους του χαρτοφυλακίου των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

3.

Πίνακας 3

κ^*	θ^*	σ_v	v_0	p
1.15	0.04	0.39	0.1823	-0.64

Πίνακας 3:Οι παράμετροι που χρησιμοποιήσαμε στα εμπειρικά μας αποτελέσματα.

4.

Πίνακας 4

Έτος Λήξης	Derman	Swishchuk	PDE	Monte Carlo
T=0.1	1686	1744	1720	1745
T=0.2	1476	1671	1647	1678
T=0.4	1228	1540	1516	1548
T=0.6	1037	1427	1404	1434
T=0.8	883.44	1330	1305	1340
T=1	791.61	1245	1221	1256

Πίνακας 4:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Derman,Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη.

5.

Πίνακας 5

Συχνότητα Λήψης Δείγματος	Swishchuk	Monte Carlo	PDE
N=4	1482.21	1584.10	1209.81
N=12	1482.21	1510.55	1381.60
N=26	1482.21	1496.23	1434.49
N=52	1482.21	1489.95	1458.10
N=252	1482.21		1477.18

Πίνακας 5:Σύγκριση των τιμών που παρήχθησαν με τη χρήση των μεθόδων Swishchuk, Monte Carlo, Μ.Δ.Ε για διαφορετικά χρονικά βήματα.

6.

Πίνακας 6

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΑ	ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ
κ^*	1.15	-0.148%
θ^*	0.04	1.619%
σ_v	0.39	-0.0001%
v_0	0.1823	5.134%

Πίνακας 6:Παρουσίαση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης στην περίπτωση της μεταβολής της αρχικής τιμής της εκάστοτε παραμέτρου κατά 1%.