ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Παναγιώτης Β. Ματζιώρος

Τριμελής επιτροπή:

Κ. Πολίτης
Ν. Μαχαιράς
Γ. Ψαρράκος

Πειραιάς,

Φεβρουάριος 2012

Στους γονείς μου
και στο Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή, Κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη, για την πολύτιμη βοήθεια και τη συμβουλευτική κατεύθυνση που μου παρείχε. Θα ήταν πολύ σημαντική παράλειψη να μην αναφέρω το ότι, με βοήθησε σημαντικά σε ολόκληρη την πορεία της διπλωματικής μου εργασίας και φυσικά στην τελική και επιτυχή περάτωσή της. Επίσης, θα πρέπει να ευχαριστήσω και το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ), για την σημαντική οικονομική στήριξη και βοήθεια που μου παρέχει ανελλιπώς εδώ και δύο χρόνια, όσον αφορά στις οικονομικές μου υποχρεώσεις, σε αυτό το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα σπουδών.

Περίληψη

Στα σύγχρονα πλαίσια της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεωκοπίας, η ανάλυση και περιγραφή της κατανομής πιθανότητας, που ακολουθεί ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία, μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο, όσον αφορά στη μελέτη ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων, σε μία δεδομένη χρονική περίοδο εξέλιξής του. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα επιχειρηθεί η μελέτη της κατανομής πιθανότητας που ακολουθεί η διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$, που δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων, ακολουθούν την κατανομή *Erlang* (και όχι την εκθετική κατανομή, όπως συμβαίνει στην απλούστερη περίπτωση του κλασσικού μοντέλου) και ότι τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Παράλληλα, εκτός από την θεωρητική προσέγγιση που αναφέρθηκε, θα παρουσιαστούν, σε ξεχωριστό κεφάλαιο, και ορισμένα ειδικά ενδεικτικά διαγράμματα και γραφήματα, τα οποία θα απεικονίζουν τη γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, για ειδικές περιπτώσεις παραμέτρων των κατανομών των ενδιάμεσων χρόνων και των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων, στο ανανεωτικό μοντέλο. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η παρούσα διπλωματική εργασία, δεν «συμπυκνώνει» ολόκληρο το γνωστικό αντικείμενο των ανανεωτικών μοντέλων κινδύνου, αφού εξετάζεται μόνο η περίπτωση της *Erlang* κατανομής, για τους ενδιάμεσους χρόνους που μεσολαβούν μεταξύ των αποζημιώσεων.

Abstract

Within the scope of ruin theory and risk theory nowadays, the description and analysis of the probability distribution, of the number of claims until the time of ruin, can be important, regarding the study and observation of an insurance risk portfolio. In the present dissertation, we study the probability distribution of the number of claims until the ruin, will take place, in the special case of the renewal risk model. For this analysis, we assume that the interarrival time intervals, between the successive claim sizes, follow an Erlang (continuous) distribution (and not the Exponential distribution, as it holds in the simplified case of the classical risk model), and that the individual claim sizes, follow an Exponential distribution. Moreover, apart from the above-mentioned theoretical study, a few indicative charts and diagrams, concerning the analyzed probability distribution of the number of claims until ruin, will be presented and explained, in a separate chapter of this dissertation. These charts, will depict this probability distribution, for special cases of the probabilistic parameters in the renewal risk model, regarding the (continuous) distributions of the interarrival time intervals and the individual claim sizes, which were mentioned above. However, in any case, this master dissertation, does not aim to address the renewal risk model in its full generality, because only the special case of the Erlang distribution is examined and analyzed particularly, regarding the interarrival time intervals of the claims. The other special cases, for the distributions of the interarrival time intervals, in the renewal risk model, have not been studied and analyzed yet, within the scope of modern actuarial bibliography.

Πρόλογος

Στα σύγχρονα πλαίσια της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεωκοπίας (όπως και της αναλογιστικής επιστήμης, γενικότερα), ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα εισέλθουν, σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, κατά τη διάρκεια του χρόνου εξέλιξής του, μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας του χαρτοφυλακίου (αν πράγματι συμβεί κάποτε η χρεωκοπία) παίζει σημαντικό ρόλο, στη θεωρητική ανάλυση του χαρτοφυλακίου. Πρώτον, επειδή η μελέτη της κατανομής πιθανότητας που ακολουθεί η τ.μ. $\tilde{N}$, που δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων που πληρώνονται μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας (ως διακριτή, θετική και ακέραιη τυχαία μεταβλητή), προσδιορίζει, ως ένα βαθμό, την κατανομή που ακολουθεί η χρονική στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία (ο χρόνος της χρεωκοπίας, ως συνεχής και θετική τυχαία μεταβλητή). Και δεύτερον, επειδή μπορεί να είναι μία χρήσιμη πληροφορία, για την ασφαλιστική εταιρία, να γνωρίζει ή τουλάχιστον να μπορεί να προβλέψει με ικανοποιητική ακρίβεια, πόσες αποζημιώσεις θα εμφανιστούν στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, έως τη στιγμή που θα επέλθει η χρεωκοπία (αν κάποτε συμβεί η χρεωκοπία στο χαρτοφυλάκιο).

Μέχρι πριν μερικά χρόνια, γινόταν η θεωρητική υπόθεση (παραδοχή) ότι, ο αριθμός των αποζημιώσεων που εισέρχονται σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, κατά την πάροδο του χρόνου, περιγράφεται, ως μία στοχαστική διαδικασία ή στοχαστική ανέλιξη (και όχι ως τυχαία μεταβλητή σε «σταθερό χρόνο»), και πιο συγκεκριμένα, από μία στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, με συγκεκριμένες ιδιότητες και προϋποθέσεις. Τα μοντέλα κινδύνου, τα οποία βασίζονται σε αυτήν την θεωρητική παραδοχή, ονομάστηκαν «κλασσικά» μοντέλα. Με βάση αυτήν την παραδοχή, αναπτύχθηκε εκτενής έρευνα και μελέτη, την τελευταία δεκαετία, για την κατανομή πιθανότητας που ακολουθεί ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας. Αρχικά, αυτό έγινε, από τον *Egidio Dos Reis* (2000) και στη συνέχεια και από άλλους ερευνητές και επιστήμονες παγκοσμίως, στη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία.

Όμως, έχει διαπιστωθεί ότι, σε ορισμένες σύγχρονες περιπτώσεις, η συγκεκριμένη θεωρητική παραδοχή της στοχαστικής ανέλιξης *Poisson*, δεν φαίνεται να ισχύει με ακρίβεια, ή τουλάχιστον ικανοποιητικά. Τότε λοιπόν, ασχολούμαστε με τα λεγόμενα «ανανεωτικά» μοντέλα κινδύνου, τα οποία προφανώς, αποτελούν μία γενίκευση των παραπάνω «κλασσικών» μοντέλων που αναφέρθηκαν.

Για την τελευταία περίπτωση των ανανεωτικών μοντέλων κινδύνων, όπου η υπόθεση της στοχαστικής ανέλιξης *Poisson*, για τον αριθμό των αποζημιώσεων (ή ζημιών) που πληρώνονται, παύει να ισχύει, έχει διαπιστωθεί, στη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία ότι, η ακριβής μελέτη και ανάλυση της κατανομής πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, δεν είναι γενικά εύκολο, ούτε πάντα εφικτό να πραγματοποιηθεί. Αυτό συμβαίνει, κυρίως λόγω των δύσχρηστων και πολύπλοκων μαθηματικών και πιθανοθεωρητικών εκφράσεων που υπεισέρχονται στα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, στα οποία, η στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, αντικαθίσταται πλέον, από κάποια άλλη, ανανεωτική (και πιο πολύπλοκη) στοχαστική ανέλιξη.

Συγκεκριμένα, στα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, η μελέτη της ζητούμενης κατανομής πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, μπορεί να πραγματοποιηθεί επιτυχώς, μόνο έμμεσα, με βάση γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα, από τον επιστημονικό χώρο της θεωρίας ουρών αναμονής, που εμφανίζει μία αντιστοιχία και ισοδυναμία (δυϊκότητα) με τα ανανεωτικά μοντέλα. Ειδικότερα, στην (πιο ρεαλιστική και «φυσιολογική») περίπτωση, όπου υπάρχει ένα αρχικό απόθεμα $u>0$, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, έχει βρεθεί τότε, ότι η μελέτη της ζητούμενης κατανομής πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων, μπορεί να γίνει μόνο μέσω προσεγγιστικών και αναδρομικών εκφράσεων, με τη βοήθεια βέβαια της παραπάνω δυϊκότητας που αναφέρθηκε, και όχι μέσω «κλειστών» και άμεσων (όχι εύχρηστων) μαθηματικών εκφράσεων.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, αναμένουμε ακόμη περαιτέρω ανάπτυξη και εξέλιξη, τα επόμενα χρόνια, στη διεθνή βιβλιογραφία, για το σχετικά σύγχρονο και ενδιαφέρον επιστημονικό αντικείμενο των ανανεωτικών μοντέλων κινδύνων, καθώς επίσης και της μελέτης της κατανομής πιθανότητας (προσεγγιστικής ή ακριβούς) της τ.μ. $\tilde{N}$.

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα είναι η εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα γίνει μία σύντομη εισαγωγή και αναφορά στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεωκοπίας, με όλες εκείνες τις χαρακτηριστικές ιδιότητες και προϋποθέσεις που ικανοποιεί. Θα αναφερθούν επίσης, συνοπτικά, η έννοια του συντελεστή προσαρμογής R, το περιθώριο ασφαλείας θ, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$ με αρχικό απόθεμα u, καθώς και ορισμένα βασικά θεωρήματα και προτάσεις του κλασσικού μοντέλου χρεωκοπίας. Ακόμη, θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά για το ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεωκοπίας (το οποίο, ονομάζεται αλλιώς και ως "*Sparre-Andersen*" μοντέλο), σχετικά με τον ορισμό του και τις βασικές διαφορές που παρουσιάζει, σε σύγκριση με το κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα αναφερθεί η δυϊκότητα (μαθηματική αντιστοιχία) που έχει διαπιστωθεί ότι ισχύει, ανάμεσα στο ανανεωτικό μοντέλο ("*Sparre-Andersen*") και στη Θεωρία Ουρών Αναμονής (*Queueing Theory*), και με ποιόν τρόπο, αυτή η δυϊκότητα βοηθάει και ερμηνεύει, την θεωρητική ανάλυση και περιγραφή του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα αναφερθούν γνωστές προτάσεις και θεωρήματα, που δίνουν αναλυτικές εκφράσεις, για τον μαθηματικό τύπο της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, καθώς και για την αντίστοιχη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της $\tilde{N}$ (δοθέντος δηλαδή ότι θα συμβεί η χρεωκοπία), υπό την προϋπόθεση όμως ότι δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση $u = 0$. Επιπλέον, θα αναλυθεί η σχέση που υπάρχει, μεταξύ της πιθανογεννήτριας συνάρτησης και της συνάρτησης πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, καθώς και ορισμένες σύντομες ερμηνείες αυτών των γνωστών θεωρημάτων και αποτελεσμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα γίνουν αριθμητικά παραδείγματα και ειδικές εφαρμογές των γνωστών θεωρητικών αποτελεσμάτων που αναφέρθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, στο ειδικό στατιστικό πρόγραμμα *R*, έτσι ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητά και ερμηνεύσιμα, τα συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Τέλος, στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, θα γίνει η (θεωρητική) περιγραφή της κατανομής πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, μέσω αναδρομικών και προσεγγιστικών εκφράσεων, για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση και για την αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας, της $\tilde{N}$. Η ανάλυση αυτή, θα γίνει, υπό τη νέα (και πιο ρεαλιστική) υπόθεση, ότι υπάρχει αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του χαρτοφυλακίου, δηλαδή ότι ισχύει u>0. Θα χρησιμοποιηθούν γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα, που έχουν βρεθεί στην πρόσφατη διεθνή βιβλιογραφία, μαζί με τις συνοπτικές ερμηνείες και τους σχολιασμούς αυτών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη θεωρία χρεωκοπίας

Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει μία αρχική εισαγωγή στη θεωρία χρεωκοπίας, σχετικά με το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, αλλά και το ανανεωτικό μοντέλο (*Sparre-Andersen model*). Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν συνοπτικά, ορισμένες βασικές και σημαντικές έννοιες της θεωρίας χρεωκοπίας, όπως είναι η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος, το περιθώριο ασφαλείας, ο συντελεστής προσαρμογής, η πιθανότητα χρεωκοπίας, καθώς και γνωστά βασικά θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν βρεθεί σχετικά με την πιθανότητα χρεωκοπίας, όπως είναι η ανισότητα του *Lundberg* και ο ασυμπτωτικός τύπος των *Cramer-Lundberg*.

Η θεωρία κινδύνου (ή θεωρία των κινδύνων), είναι ένα σχετικά σύγχρονο και καινούργιο επιστημονικό αντικείμενο, που εξετάζει και μελετά την (πιθανοθεωρητική) κατανομή και εξέλιξη των συνολικών (αθροιστικών) αποζημιώσεων που προβλέπεται να καταβάλλει μία ασφαλιστική εταιρία απέναντι στους ασφαλισμένους της, με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στο χαρτοφυλάκιο των ασφαλιστικών κινδύνων της, σε ένα συγκεκριμένο μελλοντικό χρονικό διάστημα. Οι δύο βασικές τυχαίες μεταβλητές που εξετάζονται, για ένα συγκεκριμένο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και για συγκεκριμένο μελλοντικό χρονικό διάστημα, είναι ο αριθμός (πλήθος) των αποζημιώσεων που θα απαιτηθούν να πληρωθούν (που είναι μία διακριτή τ.μ. με μη-αρνητικές ακέραιες τιμές) και το μέγεθος (οικονομικό ποσό) που θα έχει η καθεμία από αυτές τις μελλοντικές αποζημιώσεις (που είναι μία συνεχής τ.μ. με μη-αρνητικές τιμές). Οι προϋποθέσεις και παραδοχές πάνω στις οποίες στηρίζεται το αντικείμενο της θεωρίας κινδύνου, είναι οι εξής:

- Τα ξεχωριστά μεγέθη των μελλοντικών αποζημιώσεων, θεωρούνται ανεξάρτητες τ.μ., δηλαδή η μία αποζημίωση δεν επηρεάζει καθόλου την άλλη, ως προς τα μεγέθη τους,

- Ο αριθμός των μελλοντικών αποζημιώσεων, ως διακριτή και μη-αρνητική τ.μ., θεωρείται ανεξάρτητος από τα ξεχωριστά μεγέθη των μελλοντικών αποζημιώσεων, δηλαδή το συνολικό πλήθος των αποζημιώσεων δεν επηρεάζεται από τα ξεχωριστά μεγέθη τους,

- Τα μεγέθη των μελλοντικών αποζημιώσεων, θεωρούνται ισόνομες τ.μ., δηλαδή έχουν όλα την ίδια, συνεχή και μη-αρνητική, κατανομή πυκνότητας πιθανότητας.

Μέχρι πρόσφατα, ολόκληρη η θεωρητική και εφαρμοσμένη μελέτη της θεωρίας κινδύνου, βασιζόταν στην προϋπόθεση και παραδοχή ότι το πλήθος των μελλοντικών αποζημιώσεων που θα πληρωθούν στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, ακολουθεί μία στοχαστική ανέλιξη (στοχαστική διαδικασία) *Poisson*, με όλες τις χαρακτηριστικές θεωρητικές ιδιότητές της (π.χ. ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, ιδιότητα των ομογενών προσαυξήσεων, ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων, κ.λ.π.). Ισοδύναμα, με άλλα λόγια, γινόταν η υπόθεση ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές αποζημιώσεις που πληρώνονται, ως συνεχείς και μη-αρνητικές τ.μ., ακολουθούν την εκθετική κατανομή (*Exponential Distribution*), με παράμετρο, τον μοναδιαίο ρυθμό εμφάνισης λ της απαριθμήτριας στοχαστικής ανέλιξης *Poisson*. Τα μοντέλα που βασίζονται στις παραπάνω προϋποθέσεις, ονομάζονται «κλασσικά μοντέλα» της θεωρίας κινδύνου. Μελετήθηκαν για πρώτη φορά και προτάθηκαν, στις αρχές του 20ού αιώνα, από τον Σουηδό μαθηματικό *F. Lundberg* (βλέπε *Πολίτης*, 2005). Πάνω σε αυτήν την παραδοχή της ανέλιξης *Poisson*, για το πλήθος των μελλοντικών ασφαλιστικών αποζημιώσεων, βασίζεται το μεγαλύτερο μέρος της σύγχρονης διεθνούς βιβλιογραφίας, σχετικά με τα αντικείμενα της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεωκοπίας.

Όμως, σε αρκετές σύγχρονες περιπτώσεις και εφαρμογές, έχει διαπιστωθεί ότι, το πλήθος των μελλοντικών αποζημιώσεων, δεν περιγράφεται ικανοποιητικά και επαρκώς (ή δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί), από αυτήν την στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, αλλά το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κάποια άλλη, διαφορετική στοχαστική ανέλιξη (δηλαδή μία ανανεωτική απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη). Ισοδύναμα, σε αυτές τις περιπτώσεις, παρατηρείται ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ανάμεσα στις διαδοχικές μελλοντικές αποζημιώσεις, δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή, αλλά ακολουθούν κάποια άλλη, συνεχή και μη-αρνητική κατανομή (όπως για παράδειγμα, κατανομή *Weibull, Pareto, Log-Normal, Γάμμα*, κ.λ.π.). Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν, χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα «ανανεωτικά μοντέλα» της θεωρίας κινδύνου, σχετικά με την διακριτή κατανομή του πλήθους των μελλοντικών αποζημιώσεων, τα οποία αποτελούν μία ευρεία επέκταση της στοχαστικής ανέλιξης *Poisson* και των αντίστοιχων κλασσικών μοντέλων.

Δύο βασικές τυχαίες μεταβλητές που συμμετέχουν στα ανανεωτικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου, είναι οι ακόλουθες:

1) Ο χρόνος (χρονική στιγμή) όπου μπορεί να συμβεί η χρεωκοπία, συμβολίζεται με T και είναι μία συνεχής και μη-αρνητική τ.μ., η κατανομή της οποίας, είναι αντικείμενο έρευνας στη σύγχρονη αναλογιστική βιβλιογραφία,

2) Ο αριθμός (πλήθος) των αποζημιώσεων, που θα πληρωθούν στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, μέχρι τη στιγμή που θα επέλθει η χρεωκοπία. Συμβολίζεται με $\tilde{N}$ και είναι μία διακριτή, μη-αρνητική και ακέραιη τ.μ., με σύνολο τιμών της τους φυσικούς αριθμούς $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, η κατανομή της οποίας, είναι το βασικό αντικείμενο μελέτης, της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

1.1 Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος

Το βασικότερο αντικείμενο μελέτης της θεωρίας χρεωκοπίας, είναι η μελέτη της στοχαστικής ανέλιξης (στοχαστικής διαδικασίας) των συνολικών εσόδων (ασφαλίστρων) και των συνολικών εξόδων (αποζημιώσεων) της ασφαλιστικής εταιρίας, στην (συνεχή) εξέλιξη του χρόνου, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο των κινδύνων. Σχετικά με τα συνολικά έσοδα στο κλασσικό μοντέλο, γίνονται (βλέπε *Πολίτης*, 2005), οι ακόλουθες υποθέσεις και παραδοχές:

1) Τα ασφάλιστρα, θεωρούνται σταθερά με την πάροδο του χρόνου και ισούνται με ένα συγκεκριμένο και προκαθορισμένο ποσό c, το οποίο ουσιαστικά είναι το σταθερό ασφάλιστρο που εισπράττεται σε μοναδιαίο χρονικό διάστημα,

2) Το συνολικό ποσό των ασφαλίστρων, που θα έχει συσσωρευθεί, έως κάποια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή t, θεωρείται γραμμική συνάρτηση αυτής της μελλοντικής στιγμής t, και είναι της μορφής $u+ct$, όπου u είναι το αρχικό απόθεμα που κρατά η ασφαλιστική εταιρία (ως απόθεμα «ασφαλείας»), κατά την έναρξη του χρόνου που εξελίσσονται τα ασφάλιστρα και οι αποζημιώσεις.

Τότε, υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, το πλεόνασμα $U(t)$ της ασφαλιστικής εταιρίας, σε συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή t, ορίζεται ως η διαφορά των συνολικών εσόδων $P(t)$ που θα έχουν εισπραχθεί μελλοντικά από τα συνολικά ασφάλιστρα, μείον τα συνολικά έξοδα $S(t)$ των αποζημιώσεων, μέχρι το t. Δηλαδή:

$$U(t) = P(t) - S(t), \quad \forall t \geq 0,$$

όπου $U(0) = u$, είναι το αρχικό απόθεμα που υπάρχει, κατά την έναρξη του χρόνου.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, για τη στοχαστική ανέλιξη των συνολικών εσόδων (ασφαλίστρων) $\{P(t),\ t \geq 0\}$, θα ισχύει ότι:

$$P(t) = u + c\,t, \quad \forall t \geq 0.$$

Επίσης (βλέπε *Πολίτης*, 2005), η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων $\{S(t),\ t \geq 0\}$ που θα πληρωθούν, μέχρι κάποια μελλοντική στιγμή t, θα περιγράφεται από μία σύνθετη τ.μ. (κατανομή τυχαίου αθροίσματος), ως εξής:

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \text{ αν } \{N(t) \geq 1\},$$

$$S(t) = 0, \text{ αν } \{N(t) = 0\}$$

και

$$S(0) = 0, \text{ αν } t = 0.$$

όπου:

$N(t)$, για σταθερό t >0, είναι η διακριτή, θετική και ακέραιη τ.μ., που δηλώνει τον συνολικό αριθμό των αποζημιώσεων που θα έχουν πληρωθεί, μέχρι και τη μελλοντική χρονική στιγμή t και X_i, είναι η μη-αρνητική τ.μ. (διακριτή ή συνεχής), που δηλώνει το οικονομικό μέγεθος που έχει η καθεμία αποζημίωση που καταβάλλεται.

Επίσης, τα μεγέθη X_i των αποζημιώσεων, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. (δηλαδή, ακολουθούν την ίδια κατανομή, διακριτή ή συνεχή και δεν επηρεάζονται μεταξύ τους) και θεωρούνται ανεξάρτητα από το συνολικό πλήθος $N(t)$ των αποζημιώσεων που καταβάλλονται.

Επιπλέον, αναφέρεται εδώ ότι, για σταθερό $t > 0$, η σύνθετη κατανομή των συνολικών (αθροιστικών) αποζημιώσεων $S(t)$, στην περίπτωση που τα ξεχωριστά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων ακολουθούν κάποια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας, θα είναι μία κατανομή μικτού τύπου (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009). Συγκεκριμένα, η σύνθετη τ.μ. $S(t)$, θα έχει μία μάζα πιθανότητας στο σημείο 0, αν $N(t) = 0$, δηλαδή αν δεν υπάρξει καμία απαίτηση για αποζημίωση στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας και θα είναι συνεχής, στο αυστηρά θετικό διάστημα $(0, \infty)$ των συνεχών τιμών της, αν ισχύει $N(t) = 1, 2, 3, \ldots$. Όμως, αν τα ξεχωριστά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων, ακολουθούν κάποια διακριτή κατανομή πιθανότητας, τότε σε αυτήν την περίπτωση και η σύνθετη τ.μ. $S(t)$, θα ακολουθεί επίσης κάποια διακριτή κατανομή, δηλαδή με διακριτό σύνολο τιμών τότε.

Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω, η στοχαστική ανέλιξη $\{U(t), t \geq 0\}$ για κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t, θα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$U(t) = u + c\,t - S(t), \quad \forall t \geq 0,$$

όπου *u*, είναι το αρχικό απόθεμα που υπάρχει στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, κατά την έναρξη του χρόνου, δηλαδή για *t*=0.

Από τα προηγούμενα, συνεπάγεται εδώ ότι, η στοχαστική ανέλιξη $\{U(t),\ t \geq 0\}$ του πλεονάσματος, θα εξαρτάται κυρίως από την (συνήθως σύνθετη) κατανομή $S(t)$ των συνολικών μελλοντικών αποζημιώσεων, αλλά θα εξαρτάται επίσης και από τις τιμές των σταθερών παραμέτρων *u* (αρχικό απόθεμα) και *c* (σταθερό ασφάλιστρο που εισπράττεται στη μονάδα του χρόνου).

1.2 Το κλασσικό μοντέλο χρεωκοπίας

Η βασική υπόθεση που γίνεται στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεωκοπίας (βλέπε *Πολίτης*, 2005) είναι ότι, η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t > 0\}$ του αριθμού των αποζημιώσεων που καταβάλλονται μέχρι κάποια μελλοντική στιγμή *t*, περιγράφεται από μία στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, με παράμετρο (ρυθμό εμφάνισης) *λ*. Δηλαδή, αυτό σημαίνει ότι, ο αριθμός $N(t)$ των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν, ακολουθεί την κατανομή $Poisson(\lambda t), \forall t > 0$, με ρυθμό εμφάνισης *λt*. Η παράμετρος *λ*, δηλώνει (βλέπε *Πολίτης*, 2005) τον αναμενόμενο αριθμό (ή αναμενόμενο ρυθμό) εμφάνισης των μελλοντικών αποζημιώσεων, σε χρονικό διάστημα μοναδιαίου μήκους (*t* =1). Για παράδειγμα, αν ισχύει ότι $N(t) \sim Poisson(3t),\ \forall t > 0$ και ο χρόνος *t* μετριέται σε μήνες, τότε αυτό θα σημαίνει ότι αναμένουμε, σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο της στοχαστικής ανέλιξης *Poisson*, να καταβληθούν 3 αποζημιώσεις ανά μήνα, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτό το κλασσικό μοντέλο, η σύνθετη (αθροιστική) κατανομή των συνολικών μελλοντικών αποζημιώσεων $\{S(t),\ t > 0\}$, για συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή *t*, θα περιγράφεται από μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, με παράμετρο *λt*, και αυτό, θα συμβολίζεται ως: $S(t) \sim CP(\lambda t)$, από τα αρχικά "*Compound Poisson*" (σύνθετη *Poisson*), όπου:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, \text{ αν } \{N(t) \geq 1\}$$

και

$$S(t) = 0, \text{ αν } \{N(t) = 0\}.$$

1.2.1 Η μέση τιμή και η διασπορά των συνολικών αποζημιώσεων, για το κλασσικό μοντέλο χρεωκοπίας

Σύμφωνα με το παραπάνω κλασσικό μοντέλο και την ανέλιξη *Poisson* $\{N(t),\ t > 0\}$ που αναφέρθηκαν, για τη μέση τιμή και τη διασπορά του αριθμού $N(t)$ των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μελλοντικά, θα ισχύουν (βλέπε *Κούτρας*, 2002), οι ακόλουθες σχέσεις:

$$E\,[N(t)] = \lambda\, t,\ \ \forall t \geq 0$$

και

$$Var\,[N(t)] = \lambda\, t,\ \ \forall t \geq 0.$$

Άρα λοιπόν, για τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού μεγέθους των αποζημιώσεων $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, θα ισχύουν (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009), σύμφωνα με τις τελευταίες δύο σχέσεις, οι παρακάτω τύποι:

$$E\,[S(t)] = E(X_i)E[N(t)] = E(X_i)(\lambda\, t) = (\lambda\, t)E(X_i)$$

$$\Rightarrow\ E\,[S(t)] = (\lambda\, t)E(X_i),\ \ \forall\, t > 0$$

και

$$Var[S(t)] = Var(X_i)E\,[N(t)] + [E(X_i)]^2\, Var\,[N(t)] =$$

$$Var(X_i)(\lambda\, t) + [E(X_i)]^2(\lambda\, t) = (\lambda\, t)\{Var(X_i) + [E(X_i)]^2\},$$

$$\Rightarrow\ Var[S(t)] = (\lambda\, t)\{Var(X_i) + [E(X_i)]^2\},\ \ \forall\, t > 0,$$

όπου, $E(X_i)$ και $Var(X_i)$, δηλώνουν, τη μέση τιμή και τη διασπορά αντίστοιχα, για τα ατομικά μεγέθη X_i των ανεξάρτητων και ισόνομων αποζημιώσεων, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$.

1.2.2 Οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης μεταξύ των αποζημιώσεων και η κατανομή τους στο κλασσικό μοντέλο χρεωκοπίας

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στις χρονικές στιγμές που πληρώνονται οι διαδοχικές αποζημιώσεις, μπορούν να παίξουν σημαντικό ρόλο, στη μελέτη και ανάλυση του κλασσικού μοντέλου χρεωκοπίας. Έστω λοιπόν, οι εξής συμβολισμοί: A_1 το χρονικό διάστημα που περνά μέχρι την 1η κατά σειρά αποζημίωση, A_2 το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην 1η και στην 2η κατά σειρά αποζημίωση, A_3 το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην 2η και στην 3η αποζημίωση, A_i το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην (*i*–1) και στην (*i*) αποζημίωση, κλπ.. Τότε, υπό την ισχύ του κλασσικού μοντέλου, δηλαδή υποθέτοντας ότι, ο αριθμός $N(t)$ των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν, προέρχεται από μία στοχαστική ανέλιξη $Poisson(\lambda t)$, $\forall t > 0$, μπορεί τότε να αποδειχθεί (βλέπε *Πολίτης*, 2005) ότι, οι ενδιάμεσοι χρόνοι A_i, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$, είναι συνεχείς, θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., πουακολουθούν την ίδια εκθετική κατανομή (*Exponential Distribution*) *Exp*(*λ*), με παράμετρο $\lambda > 0$, όπου το λ, δηλώνει τον αναμενόμενο ρυθμό εμφάνισης, σε μοναδιαίου μήκους χρονικό διάστημα, αυτής της απαριθμήτριας ανέλιξης *Poisson* $\{N(t),\ t > 0\}$. Δηλαδή, στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F της εκθετικής κατανομής των ενδιαμέσων χρόνων A_i, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$, θα δίνονται αντίστοιχα, από τις παρακάτω σχέσεις:

$$f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \forall t > 0,\ \lambda > 0,$$

$$F_{T_i}(t) = P(T_i \le t) = 1 - e^{-\lambda t},\ \forall t > 0,\ \lambda > 0.$$

1.3 Το περιθώριο ασφαλείας θ στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου

Ο βασικός στόχος και σκοπός κάθε ασφαλιστικής εταιρίας (όπως και κάθε εταιρίας, γενικότερα) είναι, κατά την πάροδο του χρόνου, τα συνολικά έσοδα, να υπερβαίνουν (κατά μέσο όρο) τα συνολικά έξοδα, έτσι ώστε να μην είναι βέβαιο το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας της εταιρίας. Δηλαδή, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, για το χαρτοφυλάκιο κινδύνων μίας ασφαλιστικής εταιρίας, θα πρέπει να ισχύει (βλέπε *Πολίτης*, 2005) η παρακάτω σχέση– ανισότητα:

$$ct > E[S(t)], \ \forall t > 0, \tag{1.1}$$

όπου:

ct, είναι τα συνολικά έσοδα από ασφάλιστρα και $E[S(t)]$, οι αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις, μέχρι και τη στιγμή t. Με άλλα λόγια, τα ασφάλιστρα που εισπράττονται, θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε περισσότερα σε σχέση με τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις, μέχρι και τη χρονική στιγμή t.

Όμως, με βάση αυτά που αναφέρθηκαν προηγουμένως, σχετικά με την απαριθμήτρια ανέλιξη *Poisson* $\{N(t), \ t > 0\}$, θα ισχύει ότι:

$$E[S(t)] = E[N(t)]E(X_i) = (\lambda t)E(X_i), \ \ \forall t > 0,$$

και επομένως, η προηγούμενη ανισότητα (1.1), με βάση την τελευταία σχέση, θα γραφτεί ως ακολούθως:

$$(1.1): ct > E[S(t)], \forall t > 0 \Leftrightarrow ct > (\lambda t)E(X_i), \ \forall t > 0,$$

$$\Leftrightarrow c > \lambda E(X_i) \Leftrightarrow c = (1+\theta)\lambda E(X_i), \ \theta > 0. \tag{1.2}$$

Ο θετικός αυτός αριθμός θ, που λόγω της τελευταίας σχέσης (1.2), εκφράζεται ως:

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X_i)} - 1,$$

ονομάζεται, *περιθώριο ασφαλείας* ή *συντελεστής ασφαλείας*, στο κλασσικό μοντέλο χρεωκοπίας, και δηλώνει πόσο μεγαλύτερος είναι ο σταθερός ρυθμός c πληρωμής των ασφαλίστρων, σε σχέση με τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις $E[S(1)]$, για μοναδιαίου μήκους χρονικό διάστημα, δηλαδή, για $t = 1$. Επιπρόσθετα, αυτό το περιθώριο ασφαλείας *θ*, εμπεριέχει, σε μικρότερο βαθμό από την προηγούμενη ανισότητα που γράφτηκε, επίσης ένα δίκαιο και λογικό «περιθώριο κέρδους» για την ασφαλιστική εταιρία, εκφράζοντας τη διαφορά ανάμεσα στα αναμενόμενα έσοδα από ασφάλιστρα και στα αναμενόμενα έξοδα από την πληρωμή αποζημιώσεων, κατά τη χρονική εξέλιξη του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων.

Για να είναι το χαρτοφυλάκιο κινδύνων της ασφαλιστικής εταιρίας, ανταγωνιστικό, αξιόπιστο και «δίκαιο με την αγορά», θα πρέπει (βλέπε *Πολίτης*, 2005), αυτό το *περιθώριο ασφαλείας θ*, να παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή να ισχύει $0<\theta<1$, έτσι ώστε να μην γίνεται υπερβολικό το κέρδος της εταιρίας και, κατά συνέπεια, να μην γίνεται «απαγορευτικό» το ασφάλιστρο για τους ασφαλισμένους πελάτες. Το περιθώριο ασφαλείας θ, μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια, ή και να εκτιμηθεί από την ασφαλιστική εταιρία, εφόσον ο αναμενόμενος αριθμός $E[N(t)]$ και το αναμενόμενο μέγεθος $E[S(t)]$, των συνολικών αποζημιώσεων, μπορούν να εκτιμηθούν με τη βοήθεια παλαιότερων ασφαλιστικών δεδομένων ή μέσω ειδικών στατιστικών μεθόδων, με την προϋπόθεση ότι οι παράμετροι *u* και *c*, θα είναι εκ των προτέρων γνωστές.

Επίσης, έχει διαπιστωθεί (βλέπε *Πολίτης*, 2005) ότι, στην ειδική περίπτωση όπου θεωρήσουμε το περιθώριο ασφαλείας θ αρνητικό, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, τότε, η χρεωκοπία (με αντίστοιχη πιθανότητα $\psi(u)$, $\forall u \geq 0$) για το χαρτοφυλάκιο κινδύνων, θα είναι βέβαιη και σίγουρη ότι θα συμβεί (δηλαδή, θα έχει πιθανότητα ίση με 1) και θα έχουμε τότε ότι:

$$\psi(u)=1, \quad \text{αν } \theta\leq 0, \; \forall u\geq 0.$$

Αυτή όμως η ειδική περίπτωση, με $\theta\leq 0$, δε λαμβάνεται υπ' όψιν, στα (θεωρητικά και πρακτικά) πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

1.4 Η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$

Μία άλλη σημαντική έννοια στην θεωρία χρεωκοπίας (και στη θεωρία κινδύνου γενικότερα) είναι η πιθανότητα, για κάποια (απροσδιόριστη) μελλοντική στιγμή $t=T$, τα έξοδα από αποζημιώσεις να υπερβούν τα έσοδα από ασφάλιστρα μαζί και με το αρχικό απόθεμα *u*, ή με άλλα λόγια, το αντίστοιχο πλεόνασμα $U(T)$, στη χρονική στιγμή T, να πάρει αρνητική τιμή, δηλαδή να προκύψει η ανισότητα, $U(T)<0$.

Γενικά, στη θεωρία χρεωκοπίας, η πιθανότητα χρεωκοπίας, συνηθίζεται να συμβολίζεται με $\psi(u)$, δηλαδή ως συνάρτηση του αρχικού αποθέματος *u*, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Όμως, η πιθανότητα χρεωκοπίας, εκτός από το αρχικό απόθεμα, εξαρτάται (σε μικρό ή μεγάλο βαθμό) και από άλλες παραμέτρους, όπως είναι ο σταθερός ρυθμός c πληρωμής των ασφαλίστρων, το περιθώριο ασφαλείας *θ*, η μέση τιμή $E[N(t)]$ του αριθμού των αποζημιώσεων που αναμένεται να καταβληθούν, κ.λ.π. .

Για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου χρεωκοπίας, δηλαδή όταν θεωρούμε ότι, ο αριθμός $N(t)$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν, περιγράφεται από μία στοχαστική ανέλιξη (στοχαστική διαδικασία) *Poisson* και τα ατομικά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή (ή μείξη δύο εκθετικών κατανομών), τότε η ζητούμενη πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα και μέσω ενός «κλειστού» και άμεσου μαθηματικού τύπου (βλέπε *Πολίτης*, 2005). Όμως, στις περιπτώσεις που τα ατομικά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων δεν ακολουθούν εκθετική κατανομή ή μείξη δύο εκθετικών κατανομών, αλλά ακολουθούν κάποια άλλη κατανομή (όπως για παράδειγμα, κατανομές *Weibull, Pareto, Gamma* ή *Log-Normal*, οι οποίες παρουσιάζουν σχετικά «βαριά» δεξιά ουρά και μεγάλη ασυμμετρία), τότε αποδεικνύεται ότι, η πιθανότητα χρεωκοπίας, δε μπορεί να υπολογιστεί εύκολα και άμεσα, παρά μόνο μέσω προσεγγιστικών εκφράσεων, αναδρομικών τύπων ή ανισοτικών φραγμάτων (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)).

Έτσι όπως ορίστηκε λοιπόν προηγουμένως, η πιθανότητα χρεωκοπίας, αυτή εκφράζεται μαθηματικά, μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\psi(u)=P(U(t)<0,\ \text{για κάποιο}\ t>0\,|\,U(0)=u),$$

όπου *u*, το αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου.

Συνήθως, η απροσδιόριστη μελλοντική στιγμή *t*, κατά την οποία μπορεί να συμβεί το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, με $U(t)<0$, συμβολίζεται, στη διεθνή βιβλιογραφία, ως T. Ονομάζεται «χρόνος της χρεωκοπίας» και είναι μία συνεχής τ.μ., η οποία παίρνει (αυστηρά) θετικές τιμές (βλέπε *Πολίτης*, 2005, *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2010). Ακόμη, για την περίπτωση που δεν θα πραγματοποιηθεί ποτέ το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας (που προφανώς, είναι η πλέον επιθυμητή περίπτωση, για κάθε ασφαλιστική εταιρία), η αντίστοιχη πιθανότητα αυτού του (συμπληρωματικού) ενδεχομένου, συμβολίζεται ως $\delta(u)$ και τότε, ο χρόνος T της χρεωκοπίας (όπως ορίστηκε πριν), θεωρείται ότι είναι «άπειρος», δηλαδή τότε θα ισχύει $\{T = \infty\}$, με αντίστοιχη πιθανότητα, που θα είναι:

$$\delta(u) = P(T = \infty) = P(U(t) \geq 0,\ \forall t > 0 \,|\, U(0) = u),$$

και προφανώς, θα ισχύει ότι:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u),\ \forall u > 0.$$

Στην τελευταία αυτήν περίπτωση, όταν δηλαδή $\{T = \infty\}$, τότε η τ.μ. T του χρόνου χρεωκοπίας, θα καλείται «ελειμματική τ.μ.» (*defective random variable*), με αντίστοιχη πιθανότητα, που θα είναι:

$$\delta(u) = P(T = \infty) = 1 - \psi(u).$$

1.5 Ο συντελεστής προσαρμογής *R*

Μία άλλη βασική έννοια, στην θεωρία χρεωκοπίας και κυρίως για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, είναι ο συντελεστής προσαρμογής *R*, ο οποίος προσδιορίζεται, αν φυσικά υπάρχει, ως η θετική λύση, ως προς *r*, της παρακάτω εξίσωσης (βλέπε *Πολίτης*, 2005):

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r), \text{ με } r > 0, \qquad (1.3)$$

όπου:

$M_X(r)$, είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση, αν φυσικά υπάρχει, για το κάθε (ατομικό) μέγεθος αποζημίωσης *X*, υπολογισμένη στο σημείο *r*, $E(X)$ η μέση τιμή του ατομικού μεγέθους αποζημίωσης και *θ*, το περιθώριο ασφαλείας. Η παραπάνω εξίσωση (1.3), είναι γνωστή ως “εξίσωση του *Lundberg*”.

Ο συντελεστής προσαρμογής, με την προϋπόθεση ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(r)$ υπάρχει (δηλαδή, ότι δεν απειρίζεται), μπορεί εναλλακτικά να βρεθεί (βλέπε *Πολίτης*, 2005) και από την επίλυση της παρακάτω ισοδύναμης εξίσωσης, ως προς *r*:

$$\lambda + c\,r = M_X(r), \quad \text{με} \quad r > 0,$$

όπου *λ*, είναι ο μοναδιαίος ρυθμός άφιξης των απαιτήσεων (πληρωμής των αποζημιώσεων) και *c*, ο σταθερός μοναδιαίος ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων.

Αν συμβεί, οι παραπάνω εξισώσεις που γράφτηκαν, να έχουν περισσότερες από μία θετικές ρίζες, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ κ.λ.π., τότε ο συντελεστής προσαρμογής *R*, ορίζεται να είναι η μικρότερη ρίζα από αυτές, δηλαδή θα ισχύει (βλέπε *Πολίτης*, 2005) ότι:

$$R = \min\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}, \quad \text{με} \quad R > 0.$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, απαραίτητη και βασική προϋπόθεση για να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής *R*, είναι (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)) να υπάρχει (να μην απειρίζεται), η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(r)$ του ατομικού μεγέθους αποζημίωσης. Αυτό σημαίνει ότι, για κατανομές των ατομικών αποζημίωσεων X_i, για τις οποίες δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια, όπως είναι, για παράδειγμα, οι κατανομές *LogNormal, Pareto, Weibull* (με παράμετρο $\gamma < 1$) και μείξεις ή συνελίξεις αυτών, τότε ο *R* δεν ορίζεται και δεν υπάρχει, , επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν θα έχει νόημα η χρήση του.

Ο συντελεστής προσαρμογής, αποτελεί μία σημαντική έννοια στη θεωρία χρεωκοπίας (και στη θεωρία κινδύνου γενικότερα), τόσο για το κλασσικό, όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, επειδή χρησιμοποιείται σε δύο βασικά θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν βρεθεί, τα οποία είναι (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)) η ανισότητα του *Lundberg* και ο ασυμπτωτικός τύπος των *Cramer-Lundberg* και αναφέρονται συνοπτικά παρακάτω, σε μορφή θεωρημάτων:

Θεώρημα 1.5.1

Η ανισότητα του *Lundberg*, είναι η ακόλουθη:

$$\psi(u) \le e^{-Ru}, \ \forall u \ge 0,$$

όπου:

u, το αρχικό απόθεμα και *R*, ο συντελεστής προσαρμογής (αν φυσικά υπάρχει).

Η παραπάνω ανισότητα του *Lundberg*, δηλώνει ουσιαστικά ότι, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα *u*, αποκλείεται να υπερβαίνει την εκθετική ποσότητα e^{-Ru}, $\forall u \ge 0$, με την προϋπόθεση φυσικά ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής *R*.

Θεώρημα 1.5.2

Ο ασυμπτωτικός τύπος των *Cramer-Lundberg*, είναι ο ακόλουθος:

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}, \text{ καθώς } u \to \infty,$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u) e^{Ru}}{C} = 1,$$

όπου:

η σταθερά *C*, είναι το ακόλουθο πηλίκο,

$$C = \frac{\theta E(X_i)}{E(X_i e^{R X_i}) - (1+\theta) E(X_i)} ,$$

X_i, είναι το μέγεθος των ατομικών αποζημιώσεων,ως ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και R, ο συντελεστής προσαρμογής (αν βέβαια υπάρχει).

Η τελευταία σχέση, δηλώνει ουσιαστικά ότι, όσο αυξάνεται το αρχικό απόθεμα *u*, (δηλαδή καθώς $u \to \infty$), τόσο περισσότερο συγκλίνει (πλησιάζει) η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, στην εκθετική ποσότητα $C e^{-Ru}$. Με άλλα λόγια, η πιθανότητα χρεωκοπίας μειώνεται με εκθετικό ρυθμό, όσο αυξάνεται το αρχικό απόθεμα *u*.

Για κατανομές των ατομικών μεγεθών αποζημίωσης X_i, για τις οποίες δεν υπάρχει και απειρίζεται η ροπογεννήτρια, όπως είναι οι κατανομές που αναφέρθηκαν προηγουμένως, τότε ο συντελεστής προπσαρμογής δεν θα υπάρχει και επομένως, τα δύο προηγούμενα θεωρήματα (η ανισότητα *Lundberg* και ο ασυμπτωτικός τύπος των *Cramer-Lundberg*), δεν θα ισχύουν και κατά συνέπεια, δεν θα μπορούν να εφαρμοστούν.

Ειδικότερα, για την περίπτωση των εκθετικών ατομικών αποζημιώσεων X_i, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, έχει βρεθεί (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)) ότι, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, σε απροσδιόριστη χρονική στιγμή, δίνεται μέσω της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.5.3

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές ατομικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta)$, $\beta > 0$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, θα είναι:

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru} = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0, \tag{1.4}$$

όπου:

$\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$ (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)), θ το περιθώριο ασφαλείας, έτσι όπως ορίστηκε σε προηγούμενη ενότητα, και R ο συντελεστής προσαρμογής.

Με βάση λοιπόν τα προηγούμενα, σχετικά με την εκθετική κατανομή των αποζημιώσεων και το περιθώριο ασφαλείας θ, όπου $\theta = \dfrac{c}{\lambda E(X_i)} - 1$, τότε συνεπάγεται ότι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X_i)} - 1 = \frac{c}{\lambda\left(\frac{1}{\beta}\right)} - 1 = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1. \qquad (1.5)$$

Άρα, θα ισχύει:

$$\theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 \Rightarrow 1+\theta = \frac{c\beta}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda}{c\beta} \Rightarrow \psi(0) = \frac{\lambda}{c\beta}. \qquad (1.6)$$

Για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου και για την περίπτωση των εκθετικών ατομικών αποζημιώσεων $X_i \sim Exp(\beta),\ \beta > 0,\ \forall i = 1, 2, 3, \ldots$, με βάση τις σχέσεις που αναφέρθηκαν σε αυτήν την ενότητα, αποδεικνύεται (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)) ότι, ο συντελεστής προσαρμογής R, με βάση την προηγούμενη εξίσωση (1.3) από την οποία ορίζεται, υπάρχει και δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.5.4

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, υποθέτοντας την εκθετική κατανομή, με παράμετρο *β*>0, για τις ατομικές αποζημιώσεις και με περιθώριο ασφαλείας *θ*, ο συντελεστής προσαρμογής R, ο οποίος υπολογίζεται από την επίλυση, ως προς *r*>0, της προηγούμενης εξίσωσης (1.3), υπάρχει και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}, \quad \forall \theta > 0,\ \beta > 0. \qquad (1.7)$$

Με βάση λοιπόν τις σχέσεις (1.5), (1.6) και (1.7), έπεται ότι η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, στο κλασσικό μοντέλο με εκθετικές αποζημιώσεις, θα είναι:

$$(1.4): \ \psi(u) = \psi(0) e^{-Ru} \underset{(1.7)}{\overset{(1.5),\,(1.6)}{\Rightarrow}} \psi(u) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right) e^{-\left(\frac{\theta\beta}{1+\beta}\right)},$$

$$\forall \lambda > 0,\ \beta > 0,\ \theta > 0,\ c > 0,$$

όπου $\theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1$, είναι το περιθώριο ασφαλείας του κλασσικού μοντέλου, με εκθετικές αποζημιώσεις, σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση (1.5).

1.6 Το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (*Sparre–Andersen* risk model)

Μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, στη θεωρία χρεωκοπίας, είναι το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, το οποίο ονομάζεται αλλιώς και ως "*Sparre-Andersen risk model*". Ο εισηγητής και μελετητής του ανανεωτικού μοντέλου, ήταν ο *Sparre-Andersen*, ως μέλος του διεθνούς αναλογιστικού ινστιτούτου της Νέας Υόρκης, ο οποίος το πρότεινε για πρώτη φορά το 1958, και για αυτόν τον λόγο, το συγκεκριμένο μοντέλο ονομάστηκε έτσι. Στο ανανεωτικό μοντέλο, οι ενδιάμεσοι χρόνοι A_i που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές πληρωμές απαιτήσεων (αποζημιώσεων), ως συνεχείς, θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., δεν ακολουθούν πλέον την εκθετική κατανομή, όπως ίσχυε στο κλασσικό μοντέλο, αλλά τώρα ακολουθούν (βλέπε *Πολίτης*, 2005, *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2010) κάποια άλλη συνεχή και θετική κατανομή (όπως για παράδειγμα, κατανομή *Pareto, LogNormal, Weibull*, *Erlang*, *Γάμμα*, κ.λ.π.).

Αυτό λοιπόν συνεπάγεται ότι, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t>0\}$ του αριθμού των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν, μέχρι κάποια μελλοντική στιγμή *t*, δεν περιγράφεται τώρα από μία ανέλιξη *Poisson*, όπως συνέβαινε στο κλασσικό μοντέλο, αλλά τώρα η $\{N(t),\ t>0\}$, θα είναι κάποια άλλη στοχαστική ανέλιξη, που ονομάζεται *ανανεωτική ανέλιξη* (βλέπε *Πολίτης,* 2005, *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2010), με αναμενόμενο (ανανεωτικό) ρυθμό εμφάνισης $m(t)$, ο οποίος ορίζεται, ως ακολούθως:

$$E[N(t)] = m(t),\ \forall t>0.$$

Τα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, στα πλαίσια της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεωκοπίας, έχουν αποτελέσει ένα ενδιαφέρον επιστημονικό αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας και μελέτης, τα τελευταία χρόνια, στη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία. Και αυτό, κυρίως λόγω του ότι, τα κλασσικά μοντέλα, έτσι όπως ορίστηκαν προηγουμένως, δεν φαίνεται να ισχύουν, σχετικά με τις προϋποθέσεις και τις ιδιότητές τους, σε ορισμένες πρακτικές περιπτώσεις και εφαρμογές, με αναλογιστικά και ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών ή αποζημιώσεων.

1.7 Το περιθώριο ασφαλείας *θ* στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Όπως ορίστηκε το περιθώριο ασφαλείας *θ* στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, έτσι και στο αντίστοιχο ανανεωτικό μοντέλο, το *θ*, ορίζεται με τέτοιον τρόπο, έτσι ώστε για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα *t*, τα αναμενόμενα έσοδα από τα εισπραχθέντα ασφάλιστρα, να ξεπερνούν τα αναμενόμενα έξοδα από τις αποζημιώσεις που θα πληρωθούν. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη αυστηρή ανισότητα:

$$E[P(t)] > E[S(t)], \ \forall t > 0 \tag{1.8}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις τυχαίες μεταβλητές, A_i, που δηλώνουν τους ενδιάμεσους χρόνους που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές αποζημιώσεις, $\forall i = 1, 2, \ldots$ και $N(t)$, που δηλώνει το πλήθος των αποζημιώσεων που θα έχουν πληρωθεί μέχρι και τη χρονική στιγμή *t*, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το σταθερό (σε μοναδιαίο χρόνο) ασφάλιστρο *c*, τότε η προηγούμενη ανισότητα (1.8), θα γίνει:

$$(1.8): E[P(t)] > E[S(t)], \ \forall t > 0 \Rightarrow E[\sum_{i=1}^{N(t)} c A_i] > E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i], \ \forall t > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c E[\sum_{i=1}^{N(t)} A_i] > E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] \tag{1.9}$$

και λαμβάνοντας εδώ υπ' όψιν (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009) τους τύπους που δίνουν τις μέσες τιμές των τυχαίων αθροισμάτων (σύνθετων κατανομών) $\sum_{i=1}^{N(t)} A_i$ και $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, τότε η τελευταία σχέση (1.9), θα γίνει:

$$(1.9): c E[\sum_{i=1}^{N(t)} A_i] > E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c E[N(t)] E(A_i) > E[N(t)] E(X_i) \tag{1.10}$$

και απλοποιώντας τώρα, την κοινή ποσότητα (μέση τιμή) $E[N(t)]$, στα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας (αφού είναι μη-μηδενική ποσότητα και επομένως θα μπορεί να απλοποιηθεί), η τελευταία σχέση (1.10), θα γίνει:

$$(1.10): \; c\,E[N(t)]E(A_i) > E[N(t)]E(X_i) \Rightarrow c\,E(A_i) > E(X_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\,E(A_i) = (1+\theta)E(X_i), \; \theta > 0 \qquad (1.11)$$

και τελικά, από την τελευταία σχέση (1.11), το περιθώριο ασφαλείας θ του ανανεωτικού μοντέλου, θα είναι:

$$(1.11): \; c\,E(A_i) = (1+\theta)E(X_i) \Rightarrow 1+\theta = \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} - 1, \; \theta > 0 \qquad (1.12),$$

όπου c, είναι ο σταθερός και μοναδιαίος ρυθμός πληρωμής των ασφαλίστρων και X_i, τα ατομικά μεγέθη των αποζημιώσεων, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$.

Σημειώνεται πάλι εδώ ότι, αν ορίσουμε στο ανανεωτικό μοντέλο, το περιθώριο ασφαλείας θ να παίρνει και αρνητικές τιμές ή μηδενική τιμή, τότε (βλέπε *Πολίτης*, 2005) η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$ με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, θα ισούται με τη μονάδα, δηλαδή θα είναι βέβαιη η χρεωκοπία της ασφαλιστικής επιχείρησης (σε απροσδιόριστη χρονική στιγμή).

Επιπλέον, με βάση την τελευταία σχέση (1.12) που δίνει το περιθώριο ασφαλείας για το ανανεωτικό μοντέλο, αν θεωρήσουμε ως ειδική περίπτωση τους εκθετικούς ενδιαμέσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda), \; \forall i = 1, 2, 3, \ldots, \; \lambda > 0$, τότε θα προκύψει η περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, με $E(A_i) = \dfrac{1}{\lambda}, \; \forall i = 1, 2, 3, \ldots$ και ο τύπος που δίνει το θ, θα πάρει την παρακάτω μορφή:

$$\theta = \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{c\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{E(X_i)} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{c}{\lambda\,E(X_i)} - 1.$$

Δηλαδή προκύπτει τώρα, η γνωστή σχέση για το περιθώριο ασφαλείας θ του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, που αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, του παρόντος κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 2

Το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου και η δυϊκότητα ανάμεσα σε αυτό και στο μοντέλο ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει μία σύντομη εισαγωγή στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (βλέπε *Frostig et al*., 2011), μέσω του ορισμού του, των βασικών ιδιοτήτων του και των δύο σημαντικότερων τυχαίων μεταβλητών που περιλαμβάνει, οι οποίες είναι ο χρόνος της χρεωκοπίας (συνεχής, με θετικές τιμές) και ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα εισέλθουν, μέχρι να συμβεί η χρεωκοπία (διακριτή, με θετικές ακέραιες τιμές). Επίσης, θα γίνει μία, σχετικά σύντομη, αναφορά, για την δυϊκότητα (μαθηματική αντιστοιχία) που υπάρχει, ανάμεσα στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου και στο μοντέλο ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή (*single-server queueing model*), η οποία δυϊκότητα, βοηθάει, μέσω εξειδικευμένων μαθηματικών σχέσεων, στην ακριβή εύρεση της κατανομής πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων (ως διακριτή τ.μ.) που θα εισέλθουν μέχρι τη χρεωκοπία, σε σχέση και με την πιθανογεννήτρια συνάρτηση αυτής της διακριτής τ.μ. που αναφέρθηκε.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι, όλες οι έννοιες και οι σχέσεις που θα αναφερθούν, σε όλες τις ενότητες του παρόντος, αλλά και των επόμενων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ κεφαλαίου, βασίζονται στην υπόθεση ότι, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων, δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα, δηλαδή στην υπόθεση ότι u=0. Στην πιο ρεαλιστική και «φυσιολογική» περίπτωση όπου υπάρχει απόθεμα u>0, τότε οι μαθηματικές και στατιστικές μέθοδοι και τεχνικές που χρησιμοποιούνται, είναι σαφώς πιο δυσχερείς και πολύπλοκες και συγκεκριμένα, σε αυτήν την περίπτωση, η εύρεση της κατανομής πιθανότητας που ακολουθεί ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, επιτυγχάνεται μόνο μέσω ειδικών αναδρομικών και προσεγγιστικών σχέσεων, και όχι με άμεσους και «κλειστούς» μαθηματικούς τύπους, όπως συμβαίνει, όταν ισχύει η σχέση u=0.

2.1 Εισαγωγή στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου (*Sparre-Andersen risk model*), είναι εκείνο στο οποίο (βλέπε *Πολίτης* (2005), *Χατζηκωνσταντινίδης* (2010)) οι ενδιάμεσοι χρόνοι A_i μεταξύ των διαδοχικών ζημιών, ως ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή, αλλά ακολουθούν κάποια άλλη συνεχή και θετική κατανομή (όπως για παράδειγμα, κατανομή *Weibull, Pareto, LogNormal, Erlang*, κ.λ.π.). Με άλλα λόγια, η στοχαστική ανέλιξη, $\{N(t),\ t>0\}$ του αριθμού των ζημιών που θα έχουν φτάσει στο χαρτοφυλάκιο της ασφ/κής εταιρίας μέχρι και τη χρονική στιγμή *t*, δεν είναι πλέον η γνωστή (κλασσική) ανέλιξη *Poisson*, αλλά τώρα είναι μία διαφορετική στοχαστική ανέλιξη, που ονομάζεται «ανανεωτική ανέλιξη» (βλέπε *Πολίτης* (2005)), με ανανεωτική συνάρτηση $m(t)=E[N(t)]$, $\forall t>0$, η οποία δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό ζημιών, που πληρώνονται μέχρι και τη χρονική στιγμή *t*.

Σημειώνεται εδώ ότι, το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι μία ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων, ακολουθούν την εκθετική κατανομή, ως ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικές τ.μ.. Ισοδύναμα, τα ανανεωτικά μοντέλα, είναι ουσιαστικά μία γενίκευση των κλασσικών μοντέλων κινδύνου, όταν δηλαδή οι ενδιάμεσοι αυτοί χρόνοι, ακολουθούν κάποια άλλη συνεχή και θετική κατανομή, διαφορετική της εκθετικής.

Σε όλα τα επόμενα που θα αναφερθούν, θα υποτεθεί ότι τα ατομικά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων (ή ζημιών), ως ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, ακολουθούν κάποια συνεχή (θετική) κατανομή, η οποία είναι κατανομή τύπου "*phase-type*". Για περισσότερες πληροφορίες και διευκρινίσεις σχετικά με τις "*phase-type*" κατανομές και τις βασικές ιδιότητές τους, μπορεί να γίνει παραπομπή στο βιβλίο "*Ruin Probabilities*", του *S. Asmussen* (2000).

Τα ανανεωτικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου, είναι ένα σχετικά σύγχρονο επιστημονικό αντικείμενο, που έχει μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία 30 χρόνια, από αρκετούς ερευνητές και επιστήμονες στη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία, και έχουν σχετικά ευρεία εφαρμογή στα σημερινά πραγματικά ασφαλιστικά και αναλογιστικά δεδομένα ζημιών ή αποζημιώσεων, των ασφαλιστικών εταιριών.

Στην ενότητα που ακολουθεί, θα αναφερθούν εν συντομία, οι βασικές τυχαίες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα ανανεωτικά μοντέλα, μαζί με τις βασικές ιδιότητές τους.

2.2 Οι βασικές τ.μ. του ανανεωτικού μοντέλου

2.2.1 Η διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$

Στα πλαίσια του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, υπάρχουν (βλέπε *Frostig*, *Pitts* and *Politis*, 2011) δύο τ.μ., που παίζουν σημαντικό ρόλο, στη μελέτη και ανάλυσή του. Η πρώτη, είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν από την ασφαλιστική επιχείρηση, μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία. Συμβολίζεται με $\tilde{N}$, είναι διακριτή, ακέραιη και θετική τ.μ., με σύνολο τιμών της, τους φυσικούς αριθμούς $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Αξίζει να αναφερθεί εδώ ότι, το πεδίο τιμών της τ.μ. $\tilde{N}$, δεν περιέχει την αρχική τιμή 0 των φυσικών αριθμών, αφού αν υποτεθεί ότι $\tilde{N} = 0$, τότε σε αυτήν την περίπτωση δεν θα πληρωθεί καμία αποζημίωση, άρα θα υπάρχουν μόνο έσοδα στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής επιχείρησης και τότε, δεν θα συμβεί το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, κάτι που προφανώς δεν θα έχει νόημα σε αυτήν την περίπτωση, έτσι όπως ορίστηκε αυτή η τ.μ. $\tilde{N}$.

Η συγκεκριμένη τ.μ., παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον μελέτης και ανάλυσης, τόσο στο κλασσικό, όσο και στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, για δύο κυρίως λόγους. Πρώτον, επειδή, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω σε αυτήν την ενότητα, η $\tilde{N}$, συνδέεται άμεσα (βλέπε *Frostig*, *Pitts* and *Politis*, 2011) με τη χρονική στιγμή $\tilde{T}$ όπου θα συμβεί η χρεωκοπία (χρόνος της χρεωκοπίας), αν πράγματι συμβεί η χρεωκοπία, η οποία (συνεχής και μη-αρνητική) τ.μ., παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον μελέτης, και δεύτερον, διότι ο αριθμός των αποζημιώσεων $\tilde{N}$ που θα πληρωθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, είναι μία τ.μ. που μπορεί να παρέχει σημαντική πληροφορία, για τον κίνδυνο της χρεωκοπίας και για το χρονικό διάστημα «επιβίωσης» ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, για μία ασφαλιστική εταιρία ζημιών (βλέπε *Φλουρής*, 2010).

Ο αριθμός $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, με πιο ακριβή ορισμό, μπορεί να γραφτεί με αυστηρή μαθηματική έκφραση, ως εξής:

$$\tilde{N} = \inf\{n : u + \sum_{i=1}^{n}(c A_i - X_i) < 0\},$$

όπου:

u, είναι το αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου (θα είναι είτε θετικό είτε μηδέν),

c, ο σταθερός και μοναδιαίος ρυθμός πληρωμής των ασφαλίστρων, κατά τη διάρκεια του χρόνου,

A_i, οι ενδιάμεσοι χρόνοι που παρεμβάλλονται ανάμεσα στις διαδοχικές αποζημιώσεις (ή ζημιές) που πληρώνονται, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$, οι οποίοι είναι συνεχείς, θετικές και ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ.,

X_i, τα ατομικά μεγέθη των αποζημιώσεων (ή ζημιών), που είναι συνεχείς, θετικές και ανεξάρτητες τ.μ., $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$ και

"*inf*", δηλώνει το μαθηματικό σύμβολο του «ελάχιστου» (*infimum*).

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να γίνει η ουσιώδης παρατήρηση ότι, έτσι όπως ορίστηκε αυτή η διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$, στην περίπτωση που δεν συμβεί ποτέ η χρεωκοπία στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, τότε η $\tilde{N}$, θα πάρει την τιμή «άπειρο», με θετική (μη-μηδενική) πιθανότητα, δηλαδή τότε θα ισχύει ότι:

$$\{\tilde{N} = \infty\},$$

με αντίστοιχη πιθανότητα, που θα είναι:

$$P(\tilde{N} = \infty) = \delta(u) = 1 - \psi(u), \ \forall u > 0,$$

όπου *u*, δηλώνει το αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του χαρτοφυλακίου και $\delta(u)$, την πιθανότητα της μη-χρεωκοπίας, ως συνάρτηση του *u*.

Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, η διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$, θα καλείται «ελλειμματική» (*defective random variable*), εννοώντας ότι η τιμή της ενδέχεται να γίνει άπειρη, με αντίστοιχη πιθανότητα, που θα είναι η $\delta(u) = 1 - \psi(u),\ \forall u \geq 0$.

Η ακριβής κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, για διάφορες περιπτώσεις γνωστών κατανομών των ενδιάμεσων χρόνων A_i και των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων X_i, μελετήθηκε για πρώτη φορά, αναλυτικά και διεξοδικά, από τον *Egidio dos Reis* (βλέπε *Egidio dos Reis*, 2000) και τα επόμενα έτη, υπήρξε εκτεταμένη έρευνα και μελέτη και από άλλους ερευνητές.

Συγκεκριμένα, ο *dos Reis*, σε μία σειρά από άρθρα του, βρήκε και πρότεινε αναδρομικούς τύπους για την συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, μόνο όμως για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου (και όχι για το ανανεωτικό μοντέλο). Ο ερευνητής αυτός (βλέπε *Egidio dos Reis*, 2000), χρησιμοποίησε κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις με ολοκληρώματα, δεσμεύοντας ως προς την τ.μ. του χρόνου που πληρώνεται η 1η κατά σειρά απαίτηση στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, και εισήγαγε κατάλληλες συνελίξεις κατανομών, μεταξύ της τ.μ. $\tilde{N}$ και των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων X_i. Επίσης, υπολόγισε, μέσω κατάλληλου ολοκληρώματος, την πιθανότητα να συμβεί η χρεωκοπία κατά την 1η αποζημίωση που θα πληρωθεί, δηλαδή, υπολόγισε την πιθανότητα $P(\tilde{N} = 1)$, αποκλειστικά για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου.

2.2.2 Η συνεχής τ.μ. $\tilde{T}$

Ο χρόνος της χρεωκοπίας, είναι μία συνεχής και θετική τ.μ., με πεδίο τιμών το συνεχές διάστημα $(0, \infty]$. Δηλώνει τη μελλοντική χρονική στιγμή, κατά την οποία θα συμβεί (για πρώτη φορά) η χρεωκοπία, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, αν φυσικά συμβεί (αλλιώς, αν δεν συμβεί ποτέ η χρεωκοπία, τότε αυτή η τ.μ., θα πάρει την τιμή «άπειρο» (∞), με αντίστοιχη πιθανότητα, $\delta(u) = 1 - \psi(u),\ \forall u > 0$). Συμβολίζεται με $\tilde{T}$ και ορίζεται, με αυστηρή μαθηματική έκφραση, ως εξής:

$$\tilde{T} = \inf\{t : U(t) < 0,\ t > 0\},$$

όπου $\{U(t),\ t > 0\}$, δηλώνει τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος, έτσι όπως αυτή ορίστηκε στο 1ο κεφάλαιο.

Έχει διαπιστωθεί (βλέπε *Frostig et al*., 2011) ότι, ο χρόνος $\tilde{T}$ της χρεωκοπίας, μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή, μέσω ενός τυχαίου αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών:

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} A_i\,,$$

όπου:

A_i, είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι που παρεμβάλλονται ανάμεσα στις διαδοχικές αποζημιώσεις που πληρώνονται και $\tilde{N}$, είναι η διακριτή τ.μ. που ορίστηκε προηγουμένως, η κατανομή της οποίας, είναι το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Δηλαδή, ο χρόνος $\tilde{T}$ της χρεωκοπίας, μπορεί να εκφραστεί, ως ένα τυχαίο άθροισμα (ως μία σύνθετη δηλαδή κατανομή) των ενδιάμεσων χρόνων A_i, με τυχαίο πλήθος τον αριθμό $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία.

Λέγοντας ότι η συνεχής και μη-αρνητική τ.μ. $\tilde{T}$ είναι «ελαττωματική», εννοούμε ότι η $\tilde{T}$, μπορεί να πάρει την τιμή «άπειρο», στην περίπτωση που δεν συμβεί ποτέ η χρεωκοπία στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, με αντίστοιχη πιθανότητα, που θα είναι:

$$P(\tilde{T} = \infty) = \delta(u) = 1 - \psi(u),\ \forall u \ge 0.$$

Σημειώνεται εδώ ότι, για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με ενδιάμεσους χρόνους A_i, το περιθώριο ασφαλείας $\theta > 0$, θα ορίζεται ως εξής:

$$\theta = \frac{c\,E(A_i)}{p_1} - 1 \Leftrightarrow 1 + \theta = \frac{c\,E(A_i)}{p_1} \Leftrightarrow c\,E(A_i) = (1+\theta)\,p_1 \Leftrightarrow c\,E(A_i) > p_1,$$

όπου:

$E(A_i)$, είναι η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης A_i, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$ (ως ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.) και $p_1 = E(X_i)$, είναι η μέση τιμή των ατομικών μεγεθών αποζημίωσεων X_i (επίσης ως ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.). Το περιθώριο ασφαλείας $\theta > 0$, ορίστηκε με τέτοιον τρόπο, έτσι ώστε τα αναμενόμενα συνολικά έσοδα από τα ασφάλιστρα που θα εισπράττονται μέσα στο χρόνο, να είναι (αυστηρά) μεγαλύτερα, από τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις που θα πληρωθούν από την ασφαλιστική εταιρία. Η τελευταία σχέση που γράφτηκε, $c\,E(T_i) > p_1$, θα πρέπει να ισχύει, διότι αλλιώς (βλέπε *Πολίτης*, 2005), θα είναι βέβαιο το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας για την ασφαλιστική επιχείρηση, δηλαδή τότε, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, θα ισούται με 1.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφερθεί ότι, με τον όρο «χρεωκοπία», για το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων μίας ασφαλιστικής εταιρίας, δεν εννοούμε την πραγματική χρηματοοικονομική χρεωκοπία της εταιρίας, αλλά απλώς εννοούμε την πιθανότητα (μέσω της ποσότητας $\psi(u)$, $\forall u \geq 0)$) κάποια μελλοντική στιγμή, τα έξοδα $\{S(t),\ t > 0\}$ της εταιρίας από την πληρωμή των συνολικών αποζημιώσεων (ως μία στοχαστική ανέλιξη), να υπερβούν τα έσοδα $P(t)$ από την είσπραξη των σταθερών και γραμμικών στο χρόνο, ασφαλίστρων. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν (βλέπε *Πολίτης* (2005)), δεν θεωρούμε ότι συμβαίνει η πραγματική χρεωκοπία στο χαρτοφυλάκιο κινδύνων της ασφαλιστικής εταιρίας, αλλά θεωρούμε ότι παρουσιάζεται για πρώτη φορά χρηματοοικονομικό έλλειμμα και έλλειψη ρευστότητας, καταστάσεις που είναι δυνατόν να καλυφθούν και να ισοσταθμιστούν από την ασφαλιστική εταιρία, με διάφορες χρηματοοικονομικές μεθόδους και τεχνικές (όπως για παράδειγμα, μέσω δανεισμού ή ανάληψης επιπλέον ευνοϊκών επενδύσεων, ή αύξησης μετοχικού κεφαλαίου, ή μέσω αντασφάλισης, κ.λ.π.).

2.3 Η δυϊκότητα που υπάρχει, ανάμεσα στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου και στη θεωρία ουρών αναμονής

Η θεωρία ουρών αναμονής (*queuing theory*), έχει παράγει τα τελευταία χρόνια, στη διεθνή βιβλιογραφία, σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα, τα οποία μπορούν να βοηθήσουν και να απλοποιήσουν τη μελέτη του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί (βλέπε *Frostig*, 2004, *Frostig et al*, 2011), ότι υπάρχει μία δυϊκότητα, δηλαδή μία μαθηματική αντιστοιχία, ανάμεσα στις ουρές αναμονής με έναν εξυπηρετητή (*single-server queuer*) και στον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου.

Το βασικό χαρακτηριστικό που παρουσιάζει αυτή η δυϊκότητα, στις ουρές αναμονής με έναν εξυπηρετητή, είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των πελατών (ως συνεχείς, θετικές και ανεξάρτητες τ.μ.) αντιστοιχούν και συνδέονται με τα ατομικά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, τα χρονικά διαστήματα εξυπηρέτησης των πελατών (ως συνεχείς, θετικές και ανεξάρτητες τ.μ.) αντιστοιχούν και συνδέονται με τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης T_i των αποζημιώσεων και ο συνολικός αριθμός των πελατών που θα εμφανιστούν (ως διακριτή και θετική ακέραια τ.μ.) μέχρι να ολοκληρωθεί η συνολική περίοδος απασχόλησης (*busy period of the single-server queue*) στην ουρά αναμονής, αντιστοιχεί και συνδέεται με τον συνολικό αριθμό $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν, μέχρι να εμφανιστεί η χρεωκοπία, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

Τα παραπάνω αποτελέσματα που αναφέρθηκαν, ισχύουν υπό την ουσιώδη προϋπόθεση ότι, το αντίστοιχο μοντέλο ουράς με έναν εξυπηρετητή, βρίσκεται σε μαθηματική και χρονική ισορροπία, δηλαδή ότι για αυτό το μοντέλο ουράς, ο χρόνος παρακολούθησής του *t*, τείνει στο άπειρο, $t \to \infty$ (με άλλα λόγια, υπό την προϋπόθεση ότι, παρακολουθούμε το φαινόμενο της άφιξης των πελατών, σε αυτό το μοντέλο ουράς, για «απεριόριστα μεγάλο» χρονικό διάστημα).

Για να προσδιοριστεί και να γίνει κατανοητή η συγκεκριμένη δυϊκότητα (αντιστοιχία) που ήδη αναφέρθηκε, θα δοθούν παρακάτω, μερικοί σχετικοί βοηθητικοί συμβολισμοί και ορισμοί, για το μοντέλο ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή (βλέπε *Frostig et al*., 2011).

Έστω λοιπόν, οι παρακάτω συμβολισμοί:

(1) $u + cA_1$, η χρονική στιγμή, που εμφανίζεται ο 1^{ος} κατά σειρά πελάτης, στην ουρά αναμονής με έναν μόνο εξυπηρετητή,

(2) cA_j, ο χρόνος (χρονικό διάστημα) εξυπηρέτησης του *j*–κατά σειρά πελάτη που εμφανίζεται, $\forall j = 1, 2, 3, \ldots$,

(3) X_j, ο χρόνος που μεσολαβεί, ανάμεσα στις διαδοχικές εμφανίσεις των (j) και (j+1) κατά σειρά πελατών, $\forall j = 1, 2, 3, \ldots$,

(4) $\tilde{B}(u)$, είναι η συνολική περίοδος απασχόλησης όλων των πελατών της ουράς. Δηλαδή, είναι εκείνη η στιγμή, όπου για πρώτη φορά θα έχουν εξυπηρετηθεί όλοι οι πελάτες που θα έχουν εισέλθει στην ουρά μέχρι τότε,

(5) $N_{\tilde{B}(u)}$, ο συνολικός αριθμός των πελατών που θα έχουν φτάσει στην ουρά, στη χρονική περίοδο απασχόλησης $\tilde{B}(u)$,

(6) A_i, οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των διαδοχικών αποζημιώσεων, για το ανανεωτικό μοντέλο, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$,

(7) X_i, τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων του ανανεωτικού μοντέλου, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$,

(8) $\tau(u)$, η χρονική στιγμή, που συμβαίνει για πρώτη φορά η χρεωκοπία, $\forall u > 0$,

(9) $\tilde{N}_{\tau(u)}$, ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, αν αυτή συμβεί στο ανανεωτικό μοντέλο.

Εδώ, τα σύμβολα c και u, δηλώνουν τις γνωστές έννοιες που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, σχετικά με τον σταθερό και μοναδιαίο ρυθμό πληρωμής των ασφαλίστρων και το μέγεθος του αρχικού αποθέματος αντίστοιχα, τα οποία μπορεί να επηρεάσουν (σε μικρό ή μεγάλο βαθμό) την πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, αλλά και την κατανομή πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα εισέλθουν, μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας.

Τότε λοιπόν, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, έτσι όπως ορίστηκε αυτό το μοντέλο ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή, για την χρονική περίοδο απασχόλησης $\tilde{B}(u)$

και για τον αριθμό $N_{\tilde{B}(u)}$ των πελατών που θα εμφανιστούν σε μία χρονική περίοδο απασχόλησης, θα ισχύουν (βλέπε *Frostig et al.*, 2011) οι παρακάτω σχέσεις:

$$N_{\tilde{B}(u)} = \inf\{n : u + \sum_{i=1}^{n}(cA_i - X_i) < 0\}, \ \tilde{B}(u) = u + \sum_{j=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} cA_j,$$

και για το αντίστοιχο (δυϊκό) ανανεωτικό μοντέλο, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που γράφτηκαν παραπάνω, θα έχουμε ότι:

$$N_{\tau(u)} = \inf\{n : u + \sum_{i=1}^{n}(cA_i - X_i) < 0\}, \ \tau(u) = \sum_{j=1}^{N_{\tau(u)}} A_j,$$

όπου το σύμβολο "*inf*", σημαίνει «ελάχιστο» (*infimum*).

Συνδυάζοντας λοιπόν, βήμα προς βήμα, όλες τις τελευταίες σχέσεις που γράφτηκαν και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μαθηματική αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των δύο μοντέλων, συνεπάγεται τότε ότι θα ισχύουν, για τις ποσότητες που προαναφέρθηκαν, οι παρακάτω αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις:

$$N_{\tau(u)} = N_{\tilde{B}(u)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_{\tau(u)}} A_i = \sum_{i=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} A_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} c\,A_i = c \sum_{i=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} A_i = c \sum_{i=1}^{N_{\tau(u)}} A_i = c\,\tau(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} cA_i = c\,\tau(u) \Rightarrow u + \sum_{i=1}^{N_{\tilde{B}(u)}} c\,A_i = u + c\,\tau(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{B}(u) = u + c\,\tau(u) \Rightarrow \tau(u) = \frac{\tilde{B}(u) - u}{c}, \ \forall u \geq 0, \ \forall c > 0.$$

Επομένως, έπεται εδώ ότι, ο χρόνος $\tau(u)$ της χρεωκοπίας, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, θα συνδέεται με την χρονική περίοδο απασχόλησης $\tilde{B}(u)$ του αντίστοιχου μοντέλου ουράς με έναν εξυπηρετητή. Επίσης, ο συνολικός αριθμός $N_{\tau(u)}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, θα αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό $N_{\tilde{B}(u)}$ των πελατών που θα έχουν φτάσει στην ουρά, κατά την περίοδο απασχόλησης $\tilde{B}(u)$. Αυτά λοιπόν είναι τα βασικότερα αποτελέσματα, τα οποία ερμηνεύουν και εκφράζουν, τη δυϊκότητα ανάμεσα στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεωκοπίας και στο μοντέλο της ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή, με την προϋπόθεση ότι αυτό το μοντέλο ουράς βρίσκεται σε μαθηματική και οριακή χρονική ισορροπία.

Στην περίπτωση όπου, στο ανανεωτικό μοντέλο, τα ατομικά μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή, τότε για το αντίστοιχο δυϊκό μοντέλο ουράς με έναν εξυπηρετητή και για τους αντίστοιχους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των πελατών, χρησιμοποιείται (βλέπε *Frostig et al*., 2011) ο συμβολισμός "*M*/*G*/1", από τα αρχικά των λέξεων "*Memoryless*" και "*General*". Αν τα ατομικά μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν κάποια άλλη συνεχή και μη-αρνητική κατανομή, τότε για το αντίστοιχο μοντέλο ουράς, έχουμε τον συμβολισμό "*GI*/*G*/1" (από τα αρχικά "*General Independent*" και "*General*"). Επίσης, αν οι πελάτες στο μοντέλο ουράς, εισέρχονται σύμφωνα με μία στοχαστική ανέλιξη (στοχαστική διαδικασία) *Markov*, τότε χρησιμοποιείται ο πιο εξειδικευμένος συμβολισμός "*MAP*/*G*/1" (από τα αρχικά "*Markovian Arrival Process*" και "*General*").

Η συγκεκριμένη δυϊκότητα (μαθηματική αντιστοιχία), μεταξύ του ανανεωτικού μοντέλου και του μοντέλου ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή, αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο, όσον αφορά στην εύρεση (ακριβή ή προσεγγιστική) της δεσμευμένης κατανομής πιθανότητας του συνολικού αριθμού $N_{\tau(u)}$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη χρεωκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί (κάποτε) η χρεωκοπία. Δηλαδή τώρα, ο χρόνος της χρεωκοπίας δε μπορεί να είναι άπειρος, ούτε και ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία μπορεί να είναι άπειρος, αφού τώρα δεσμεύουμε στο ενδεχόμενο ότι θα συμβεί η χρεωκοπία, δηλαδή, δεσμεύουμε στο ενδεχόμενο $\{\tau(u) < \infty\}$.

Με άλλα λόγια, αυτή η δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2 = N_{\tau(u)} | \tau(u) < \infty$, δεν είναι πλέον ελαττωματική, όπως συνέβαινε προηγουμένως με την αρχική τ.μ. $\tilde{N}$. Η πιθανοθεωρητική μελέτη και ανάλυση της κατανομής πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2$, μπορεί να γίνει (βλέπε *Frostig et al*., 2011) μέσω του προσδιορισμού της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P_{N_{\tau(u)}}(z)$ της $\tilde{N}_2$, η οποία συνάρτηση ως προς z, θα είναι η παρακάτω δεσμευμένη μέση τιμή,

$$P_{N_2}(z) = E[z^{N_{\tau(u)}} \mid \tau(u) < \infty], \quad \forall u \geq 0, \quad \forall z \in (-1,1).$$

Κεφάλαιο 3

Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, για ειδικές περιπτώσεις κατανομών

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν ορισμένα σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν βρεθεί στη σύγχρονη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία, σχετικά με την κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν, μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας. Θα αναφερθούν οι κυριώτερες ιδιότητες αυτών των κλάσεων κατανομών, μαζί με τις προϋποθέσεις που ικανοποιούν. Επίσης, θα γίνει αναφορά για μία σημαντική διακριτή κατανομή, με θετικές ακέραιες τιμές, η οποία είναι η γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή *ENB* (*Extended Negative Binomial Distribution*).

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι εξειδικευμένες σχέσεις που δίνουν την συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα (δηλαδή, όταν u=0), όταν η κατανομή των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων είναι η εκθετική, για δύο ειδικές περιπτώσεις: πρώτον, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή όταν ισχύει το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, $\{N(t),\ t>0\}$, για τον αριθμό των αποζημιώσεων που πληρώνονται κατά τη διάρκεια του χρόνου και δεύτερον, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι την ακολουθούν κατανομή *Erlang*, όπου τότε, έχουμε το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t>0\}$, η οποία δεν είναι πλέον η γνωστή ανέλιξη *Poisson*.

Τέλος, θα αναλυθεί η μαθηματική μορφή που έχει η συνάρτηση πιθανότητας $p_k = P(\tilde{N} = k)$ του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη χρεωκοπία, για τις δύο παραπάνω ειδικές περιπτώσεις που αναφέρθηκαν. Η ανάλυση αυτή, θα αφορά τη μονοτονία αυτής της συνάρτησης πιθανότητας, ως προς τις διάφορες πιθανές θετικές και ακέραιες τιμές k, ενώ η ίδια θεωρητική ανάλυση, θα γίνει και για την συνάρτηση πιθανότητας της αντίστοιχης δεσμευμένης διακριτής τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, δοθέντος δηλαδή τότε, ότι θα συμβεί, κάποια στιγμή, η χρεωκοπία.

3.1 Η γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer*

Ο *Panjer* (Ελβετός μαθηματικός και αναλογιστής), κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '80, μελέτησε και πρότεινε, συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών (βλέπε *Panjer* (1981)), οι οποίες πήραν το όνομά του, και αποτέλεσαν τη βάση, για την περαιτέρω ανάπτυξη και εξέλιξη των αναλογιστικών μαθηματικών, στη σύγχρονη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία. Οι συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών, ικανοποιούν συγκεκριμένες μαθηματικές και στατιστικές ιδιότητες, που θα αναφερθούν συνοπτικά, στις επόμενες ενότητες.

Μία διακριτή τ.μ. *N*, με πεδίο τιμών της τους μη-αρνητικούς ακεραίους, θα λέμε ότι ανήκει στη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer*, αν η συνάρτηση πιθανότητάς της, $p_n = P(N = n)$, ικανοποιεί την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$p_n = (r + \frac{b}{n}) p_{n-1}, \quad \forall n \geq m + 1,$$

και

$$p_n = P(N = n) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots, m - 1,$$

όπου:

m, είναι ένας σταθερός θετικός ακέραιος και *b*, *r*, είναι σταθερές παράμετροι (θετικές ή αρνητικές), όχι απαραίτητα ακέραιες. Αυτή η κλάση κατανομών που αναφέρθηκε, συμβολίζεται ως "κλάση κατανομών *Panjer* (*r, b, m*)". Οι δύο παράμετροι *r* και *b*, προσδιορίζουν, εκτός από την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. *N*, επίσης και τη μέση τιμή και την διακύμανση της *N*.

Επιπλέον, οι πιο γνωστές διακριτές κατανομές, με πεδίο τιμών τους μη-αρνητικούς ακεραίους, όπως είναι η διωνυμική (*binomial*) με παραμέτρους (*n, p*), η αρνητική δυωνυμική (*negative binomial*) με παραμέτρους (*r, p*), η γεωμετρική (*geometric*) με παράμετρο *p* (ως ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, με παραμέτρους *r*=1 και *p*) και η *Poisson* με παράμετρο *λ*, έχει βρεθεί (βλέπε *Willmot*, 1988) ότι ανήκουν σε αυτήν τη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer*. Αυτή η κλάση κατανομών, χρησιμοποιείται στη θεωρία κινδύνου, κυρίως για να περιγράψει και να αναλύσει την κατανομή του αριθμού N των αποζημιώσεων που καταβάλλονται σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, χωρίς όμως να λαμβάνεται υπ' όψιν η εξέλιξη του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, κατά τη διάρκεια του χρόνου.

Στο σημείο αυτό, θα γίνει μία συνοπτική αναφορά, στη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer* (r, b, 1), για μία διακριτή τ.μ. N, με πεδίο τιμών της, τους θετικούς ακεραίους $\{1, 2, 3, \ldots\}$, όπου εδώ ισχύει, m=1. Έχει βρεθεί (βλέπε *Φλουρής*, 2010) ότι, η μέση τιμή, η παραγοντική ροπή 2^{ης} τάξης, $E[N_{(2)}] = E[N(N-1)]$ και η διακύμανση της N, θα δίνονται αντίστοιχα, από τους τύπους της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 3.1.1

Για μία διακριτή τ.μ. N, η κατανομή της οποίας ανήκει στη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer* (r, b, 1), οι δύο πρώτες παραγοντικές ροπές της, θα είναι (βλέπε *Φλουρής*, 2010) οι παρακάτω:

$$E[N_{(1)}] = E(N) = \frac{r+b+p_1}{1-r},$$

$$E[N_{(2)}] = E[N(N-1)] = \frac{(2r+b)(r+b+p_1)}{(1-r)^2},$$

ενώ η διακύμανση της N, θα είναι:

$$Var(N) = \frac{(r+b+p_1)(1-p_1)}{(1-r)^2}, \quad \text{με } r \neq 1,\ p_1 = P(N=1).$$

Επίσης, εκτός από τη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer* (r, b, 1) που αναφέρθηκε, είχε προταθεί, επίσης από τον *Panjer* (βλέπε *Panjer* (1981), *Willmot* (1988)), κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '80 και η κλάση κατανομών (r, b, 0), δηλαδή με m=0, για μία διακριτή τ.μ. N^*, με τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ των μη-αρνητικών ακεραίων. Για την κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0), η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. N^*, θα ικανοποιεί την ίδια αναδρομική σχέση, ως ακολούθως:

$$p_n = (r + \frac{b}{n}) p_{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

όπου:

$$p_n = P(N^* = n), \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

και

$$p_0 = P(N^* = 0).$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0) του *Panjer*, είναι υποσύνολο (υπο-κλάση), της αντίστοιχης κλάσης κατανομών (*r*, *b*, 1). Το αποτέλεσμα αυτό, αποδεικνύεται σχετικά εύκολα, ως εξής:

Αν μία διακριτή τ.μ. $N \in (r, b, 0)$, τότε για την συνάρτηση πιθανότητας της N, θα ισχύει:

$$p_n = (r + \frac{b}{n}) p_{n-1}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \Rightarrow p_n = (r + \frac{b}{n}) p_{n-1}, \ \forall n = 2, 3, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \in (r, b, 1) \Rightarrow (r, b, 0) \subseteq (r, b, 1).$$

Όπως με την προηγούμενη κλάση (*r*, *b*, 1) του *Panjer*, έτσι και στην αντίστοιχη κλάση (*r*, *b*, 0), έχουν βρεθεί (βλέπε Φλουρής, 2010) αντίστοιχοι τύποι, που δίνουν τη μέση τιμή, την παραγοντική ροπή 2ης τάξης και τη διακύμανση μίας διακριτής τ.μ. *N*, με πεδίο τιμών της, το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Συγκεκριμένα, για μία διακριτή τ.μ. *N*, που ανήκει στην κλάση (*r*, *b*, 0) του *Panjer*, η μέση τιμή, η παραγοντική ροπή 2ης τάξης και η διακύμανσή της, θα δίνονται αντίστοιχα, από τους τύπους της παρακάτω πρότασης (χωρίς απόδειξη):

Πρόταση 3.1.2

Για μία διακριτή τ.μ. *N*, η κατανομή της οποίας ανήκει στη γενικευμένη κλάση κατανομών του *Panjer* (*r*, *b*, 0), οι δύο πρώτες παραγοντικές ροπές της, θα είναι (βλέπε *Φλουρής*, 2010) οι ακόλουθες:

$$E[N_{(1)}] = E(N) = \frac{r+b}{1-r},$$

$$E[N_{(2)}] = E[N(N-1)] = \frac{(2r+b)(r+b)}{(1-r)^2}, \; r \neq 1,$$

ενώ η διακύμανση της *N*, θα είναι:

$$Var(N) = \frac{(r+b)}{(1-r)^2}, \;\; \text{με} \;\; r \neq 1.$$

Σημειώνεται εδώ (βλέπε *Φλουρής*, 2010) ότι, η συγκεκριμένη κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0) του *Panjer*, έτσι όπως ορίστηκε, μπορεί να περιγράψει και να μοντελοποιήσει αποτελεσματικά, μόνο εκείνες τις δειγματικές κατανομές ασφαλιστικών δεδομένων αποζημιώσεων, στις οποίες είτε δεν εμφανίζονται συχνά αποζημιώσεις (δηλαδή, όταν υπάρχει σχετικά μικρό πλήθος αποζημιώσεων στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας), είτε δεν εμφανίζεται καμία αποζημίωση στο δείγμα, με όχι αμελητέα (μη-μηδενική) στατιστική συχνότητα. Επίσης, αυτή η κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0), παρέχει ισχύ και αξιοπιστία στην εφαρμογή της, μόνο σε δείγματα δεδομένων ασφαλιστικών αποζημιώσεων, στα οποία τα σχετικά μεγάλα πλήθη αποζημιώσεων (που έχουν δηλαδή σχετικά μεγάλες τιμές για την διακριτή τ.μ. *N*), εμφανίζονται με αρκετά χαμηλή συχνότητα εμφάνισης στο δείγμα που μελετάται, το οποίο σημαίνει, σε πιθανοθεωρητική έκφραση, ότι το δείγμα των τιμών για τα πλήθη των αποζημιώσεων, δεν εμφανίζει «βαριά δεξιά ουρά», σχετικά με την αντίστοιχη πληθυσμιακή κατανομή πιθανότητας.

Αν λοιπόν δεν πληρούνται οι παραπάνω στατιστικές και πιθανοθεωρητικές προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, για ένα δείγμα δεδομένων αποζημιώσεων, τότε είναι προφανές ότι, η συγκεκριμένη κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0), δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται, και αντί αυτής, θα θεωρείται πιο αποτελεσματική, η προηγούμενη κλάση (*r*, *b*, 1), για την περιγραφή της κατανομής του δείγματος των αποζημιώσεων.

Η κλάση κατανομών (*r*, *b*, 1) του *Panjer*, αποτελεί ουσιαστικά (βλέπε *Panjer* (1981), *Willmot* (1988)), μία γενίκευση της κλάσης κατανομών (*r*, *b*, 0), θεωρώντας την ίδια αναδρομική σχέση, σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας των διακριτών, μη-αρνητικών και ακέραιων τ.μ. που περιλαμβάνονται σε αυτές τις δύο κλάσεις. Η βασική διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο κλάσεις κατανομών, (*r*, *b*, 1) και (*r*, *b*, 0), είναι ότι, η πρώτη κλάση περιλαμβάνει κατανομές με πεδίο τιμών το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots\}$ των θετικών ακεραίων, ενώ στην δεύτερη κλάση, ανήκουν κατανομές με πεδίο τιμών το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, μαζί δηλαδή με την αρχική τιμή 0.

Από τα παραπάνω, γίνεται μάλλον προφανές ότι, για τη μελέτη της κατανομής του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι να συμβεί η χρεωκοπία, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, δεν είναι κατάλληλη η κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0), διότι το πεδίο τιμών της $\tilde{N}$, είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots\}$ των θετικών ακεραίων, χωρίς την αρχική τιμή 0. Αντιθέτως, η προηγούμενη κλάση κατανομών (*r*, *b*, 1) που αναφέρθηκε, είναι (συνήθως) πιο κατάλληλη, για να περιγράψει και να αναλύσει την κατανομή της τ.μ. $\tilde{N}$.

Στη σύγχρονη διεθνή αναλογιστική βιβλιογραφία, έχουν προταθεί (βλέπε *Klugman et al*., 2004) δύο τροποποιήσεις κατανομών, για την κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0) του *Panjer*. Η πρώτη κατηγορία τροποποίησης της κλάσης (*r*, *b*, 0), είναι η *zero-truncated* κατανομή, στην οποία, η πιθανότητα που υπάρχει στην αρχική τιμή 0, «αποκόπτεται» (δηλαδή, θεωρούμε εδώ, ότι δεν υπάρχει καθόλου μάζα πιθανότητας στο αρχικό σημείο 0) και «μεταφέρεται» στις υπόλοιπες, θετικές και ακέραιες, τιμές της *zero-truncated* κατανομής. Χρησιμοποιώντας, δηλαδή, ενδεικτικούς συμβολισμούς, αν N είναι η διακριτή και ακέραιη τ.μ., με πεδίο τιμών της το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, τότε η αντίστοιχή της, *zero-truncated* τ.μ., θα είναι η δεσμευμένη τ.μ. $N^T = N | N > 0$ (ή ισοδύναμα, η δεσμευμένη τ.μ. $N^T = N | N \neq 0$), η οποία πλέον, θα έχει πεδίο τιμών, το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Η δεύτερη κατηγορία τροποποίησης, είναι η *zero-modified* κατανομή, στην οποία, αφήνουμε «ελεύθερη» την πιθανότητα στο αρχικό σημείο 0, η οποία συμβολίζεται ως

$P(N=0)=p_0^M=P(N^M=0)$, όπου N^M δηλώνει την αντίστοιχη *zero-modified* τ.μ. της αρχικής τ.μ. N και τροποποιούμε, «αναλογικά», τις πιθανότητες των υπόλοιπων τιμών 1, 2, ... , πολλαπλασιάζοντάς τις, με μία θετική σταθερά *c*, ως εξής:

$$P(N^M=k)=p_k^M=c\,P(N=k)=c\,p_k\,,\quad \forall k=1,2,3,\dots .$$

Αποδεικνύεται (βλέπε *Klugman et al*., 2004) ότι, αυτή η θετική σταθερά *c*, για την *zero-modified* κατανομή, θα ισούται με το ακόλουθο πηλίκο:

$$c=\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\,,$$

όπου:

$$p_0^M=P(N^M=0),\ p_0=P(N=0).$$

Ακόμη, έχουν βρεθεί (βλέπε *Klugman et al*., 2004), τα εξής αποτελέσματα για αυτές τις δύο τροποποιήσεις κατανομών: αν μία διακριτή, μη-αρνητική και ακέραιη τ.μ. N, ανήκει στην κλάση κατανομών (*r, b,* 0) του *Panjer*, τότε η αντίστοιχή της, *zero-truncated* τ.μ., $N^T=N|N>0$, θα ανήκει στην κλάση κατανομών (*r, b,* 1) του *Panjer*, ενώ επίσης και η αντίστοιχή της, *zero-modified* τ.μ. N^M, θα ανήκει και αυτή στην κλάση κατανομών (*r, b,* 1).

Και οι δύο αυτές κατηγορίες τροποποιήσεων, αναφέρονται μόνο στην κλάση κατανομών (*r, b,* 0) του *Panjer* (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009, *Klugman et al*. 2004).

Σημειώνεται εδώ (βλέπε *Sundt* & *Jewell*, 1981) ότι, η κλάση κατανομών (*r, b,* 0), περιλαμβάνει, αποκλειστικά και μόνο, τις εξής γνωστές διακριτές κατανομές: διωνυμική (*binomial*), αρνητική διωνυμική (*negative binomial*), γεωμετρική (*geometric*) και *Poisson*, οι οποίες έχουν θετική (μη-μηδενική) μάζα πιθανότητας στην αρχική τιμή 0. Για παράδειγμα, για μία διακριτή τ.μ. N, με μη-αρνητικές και ακέραιες τιμές, αν αυτή ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (*n, p*), τότε, θα ισχύει ότι $P(N=0)=p^n$, αν ακολουθεί την αρνητική διωνυμική με παραμέτρους (*r, p*), τότε $P(N=0)=p^r$, αν ακολουθεί τη γεωμετρική με παράμετρο *p*, τότε $P(N=0)=p$, ενώ αν ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο *λ*, τότε θα ισχύει, $P(N=0)=e^{-\lambda}$. Η συνάρτηση πιθανότητας αυτών των διακριτών κατανομών που αναφέρθηκαν, ικανοποιεί (βλέπε *Φλουρής*, 2010) τη γνωστή αναδρομική σχέση, η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως, για την κλάση κατανομών (*r*, *b*, 0).

3.2 Η γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή (*ENB*)

Τα παρακάτω αποτελέσματα αυτής της ενότητας, έχουν προκύψει (βλέπε *Willmot*, 1988), από ένα άρθρο του *Willmot*, ο οποίος, πρώτος μελέτησε και εισήγαγε, τις έννοιες που θα ακολουθήσουν.

Μία διακριτή τ.μ. *N*, με πεδίο τιμών της τους μη-αρνητικούς ακεραίους, θα λέμε ότι ακολουθεί τη γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή *ENB* (*Extended Negative Binomial distribution*), με παραμέτρους (*θ*, *α*, *m*), αν η συνάρτηση πιθανότητάς της, $p_n = P(N=n)$, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$p_n = \frac{\binom{\alpha+n-1}{n}\theta^n}{(1-\theta)^{-\alpha} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{\alpha+j-1}{j}\theta^j}\ , \quad \forall n \geq m$$

και

$$p_n = P(N=n) = 0, \ \ \forall n = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Στην ειδική περίπτωση, όπου *m*=1, ισχύει τότε, η παρακάτω μαθηματική και συνδυαστική, ταυτότητα:

$$\binom{\alpha+n-1}{n} = \frac{(\alpha+n-1)!}{n!\,[(\alpha+n-1)-n]!} = \frac{(\alpha+n-1)!}{n!\,(\alpha-1)!} = \frac{[(\alpha+n)-1]!}{n!\,(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)}\ .$$

Εδώ, με τον συμβολισμό $\Gamma(\ )$, εννοούμε την ειδική συνάρτηση *Γάμμα*, η οποία ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y}\, dy, \ \forall x > 0.$$

Επίσης, είναι γνωστό (βλέπε Κούτρας, 2001) ότι, η παραπάνω συνάρτηση *Γάμμα,* ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\,[\Gamma(\alpha)],$$

με

$$\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$$

και

$$\Gamma(k) = (k-1)!\,,$$

για κάθε φυσικό ακέραιο *k*.

Με βάση όλα τα παραπάνω, συνεπάγεται τότε ότι, η συνάρτηση πιθανότητας της *ENB* κατανομής που αναφέρθηκε, μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$p_n = \frac{-[\Gamma(\alpha + n)]\theta^n}{n!\,\Gamma(\alpha)[1-(1-\theta)^{-\alpha}]}, \ \forall n \geq 1,$$

και

$$p_0 = P(N=0) = 0, \text{ για } n = 0, \ m = 1.$$

Για την *ENB* κατανομή (βλέπε *Willmot*, 1988), με παράμετρο $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, οι παράμετροι *θ* και *α*, έχουν συγκεκριμένο (περιορισμένο) διάστημα τιμών και ισχύει:

$$0 < \theta < 1, \ -m < \alpha < -m + 1.$$

Επίσης, έχει βρεθεί (βλέπε *Willmot*, 1988) ότι, για μία διακριτή τ.μ. *N*, η οποία ακολουθεί την *ENB* κατανομή, με παραμέτρους (*θ*, *α*, 1), όπου *m*=1, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, $Q(z) = E(z^N) = P_N(z)$, της *N*, θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Q(z)=\frac{1-(1-\theta z)^{-\alpha}}{1-(1-\theta)^{-\alpha}},$$

με $|z| \le \frac{1}{\theta}$, έτσι ώστε να συγκλίνει (να μην απειρίζεται) η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, ως προς *z*.

Χρησιμοποιώντας τώρα την τελευταία σχέση, για την πιθανογεννήτρια της *ENB* κατανομής, με παραμέτρους (*θ, α, m*=1) και υπολογίζοντας τις παραγώγους *k*-τάξης, ως προς *t*, της αντίστοιχης ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_N(t)=E(e^{tN})$ της *ENB* κατανομής, τότε μπορούν να βρεθούν (βλέπε *Κούτρας*, 2004), όλες οι ροπές *k*-τάξης. Δηλαδή, θα μπορούν να βρεθούν, οι ποσότητες (μέσες τιμές) $E(N^k)$, για $k=1, 2, 3, \ldots$, υπολογίζοντας τις παραγώγους *k*-τάξης, της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_N(t)$, στο σημείο $t=0$.

Επιπλέον, ισχύει η παρακάτω μαθηματική σχέση, η οποία συνδέει την πιθανογεννήτρια $P_N(t)$ και τη ροπογεννήτρια $M_N(t)$ μίας διακριτής τ.μ. (βλέπε *Κούτρας*, 2004):

$$M_N(t)=P_N(e^t),$$

για κάθε *t* που ορίζονται και υπάρχουν αυτές οι συναρτήσεις.

Από την τελευταία σχέση, έπεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της *ENB* κατανομής, με παραμέτρους (*θ, α, m* = 1), θα είναι η παρακάτω:

$$M_N(t)=Q(e^t)=\frac{1-(1-\theta e^t)^{-\alpha}}{1-(1-\theta)^{-\alpha}}, \quad \forall t<-\ln\theta,$$

έτσι ώστε να συγκλίνει (να μην απειρίζεται) ως προς *t*, η ροπογεννήτρια.

Από την παραπάνω μορφή της ροπογεννήτριας, συνεπάγεται άμεσα ότι, οι δύο πρώτες παράγωγοί της, θα είναι οι ακόλουθες:

$$M'_N(t)=\frac{\alpha\theta e^t(1-\theta e^t)^{-2\alpha}}{1-(1-\theta)^{-\alpha}},$$

$$M''_N(t) = \frac{\alpha\theta e^t (1-\theta e^t)^{-2\alpha-1}(1+2\alpha\theta-\theta e^t)}{1-(1-\theta)^{-\alpha}} \,.$$

Επομένως, θέτοντας τώρα, όπου $t = 0$, στις δύο τελευταίες σχέσεις των παραγώγων της ροπογεννήτριας, μπορούμε τότε, να υπολογίσουμε την 1η ροπή, $E(N)$ και την 2η ροπή, $E(N^2)$ της *ENB* κατανομής, με παραμέτρους (*θ*, *α*, *m*=1), οι οποίες θα είναι:

$$E(N) = M'_N(0) = \frac{\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha}}{1-(1-\theta)^{-\alpha}} \,,$$

$$E(N^2) = M''_N(0) = \frac{\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha-1}(1+2\alpha\theta-\theta)}{1-(1-\theta)^{-\alpha}} \,.$$

Με βάση λοιπόν όλες τις παραπάνω σχέσεις, και έπειτα από μερικές απλές αριθμητικές πράξεις, προκύπτει τελικά ότι η διακύμανση $Var(N)$ της *ENB* κατανομής, με παραμέτρους (*θ*, *α*, *m*=1), θα είναι η ακόλουθη:

$$Var(N) = E[\{N - E(N)\}^2] = E(N^2) - [E(N)]^2$$

$$= \frac{\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha-1}(1+2\alpha\theta-\theta)}{1-(1-\theta)^{-\alpha}} - \left[\frac{\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha}}{1-(1-\theta)^{-\alpha}}\right]^2$$

$$= \frac{\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha}\,[\{1-(1-\theta)^{-\alpha}\}(1-\theta)^{-1}(1+2\alpha\theta-\theta)-\alpha\theta(1-\theta)^{-2\alpha}]}{[1-(1-\theta)^{-\alpha}]^2} \,.$$

3.3 Η κλάση κατανομών *PW* των *Panjer–Willmot*

Μία διακριτή τ.μ. *N*, με πεδίο τιμών της τους μη-αρνητικούς ακεραίους, θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση κατανομών (*PW*) των *Panjer-Willmot*, αν η συνάρτηση πιθανότητας της *N*, $p_n = P(N = n)$, ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση, ως προς *n*:

$$p_n = \left[\frac{\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i n^i}{\sum_{j=0}^{\nu} b_j n^j} \right] p_{n-1}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots ,$$

όπου:

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu, b_0, b_1, \dots, b_\nu$, είναι πραγματικές σταθερές και *ν*, είναι ένας σταθερός θετικός ακέραιος (βλέπε *Panjer* and *Willmot* (1982), *Hesselager* (1994)).

Από την τελευταία σχέση, συνεπάγεται άμεσα, ότι θα ισχύει το εξής:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i n^i}{\sum_{j=0}^{\nu} b_j n^j}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots .$$

Η ερμηνεία της τελευταίας σχέσης, είναι ότι, το πηλίκο $\frac{p_n}{p_{n-1}}$, των «διαδοχικών» πιθανοτήτων των τιμών (*n*–1) και (*n*), για την κλάση κατανομών (*PW*) των *Panjer-Willmot*, έχει τη μορφή ενός πηλίκου δύο πολυωνύμων ως προς *n*, βαθμού *ν*, με συντελεστές τις σταθερές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu, b_0, b_1, \dots, b_\nu$.

Η συγκεκριμένη κλάση κατανομών *PW*, περιλαμβάνει πολλές γνωστές διακριτές κατανομές, με πεδίο τιμών τους το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων, αλλά αναφέρεται αποκλειστικά σε διακριτές κατανομές, στις οποίες υπάρχει «μάζα πιθανότητας» στο σημείο 0 (δηλαδή, που ικανοποιούν τη σχέση, $P(N = 0) > 0$).

Οι *Panjer, Willmot* και *Hesselager*, μελέτησαν και πρότειναν, τη γενικευμένη κλάση κατανομών *PW*, η οποία (βλέπε *Panjer* and *Willmot* (1982), *Hesselager* (1994)) ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$p_n = \left(\frac{\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i n^i}{\sum_{j=0}^{\nu} b_j n^j} \right) p_{n-1}, \quad \forall n = m, \ m+1, \ m+2, \dots ,$$

όπου v και m, είναι θετικές και ακέραιες σταθερές. Αυτή η γενικευμένη κλάση κατανομών, συμβολίζεται με $PW(v, m)$. Για την ειδική περίπτωση m=1, προκύπτει η κλάση κατανομών των *Panjer-Willmot*, που αναφέρθηκε προηγουμένως.

3.4 Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, για εκθετικές αποζημιώσεις

Η απλούστερη περίπτωση στη θεωρία κινδύνου και στη θεωρία χρεωκοπίας, από άποψη αριθμητικών υπολογισμών και μαθηματικών εκφράσεων, είναι όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι A_i και τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων X_i, ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή όταν ισχύει:

$$A_i \sim Exp(\lambda),\ \forall i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

με σ.π.π. h, της μορφής:

$$h(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ \forall x > 0,$$

και

$$X_i \sim Exp(\beta),\ \forall i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

με σ.π.π. f, της μορφής:

$$f(x) = \beta e^{-\beta x},\ \forall x > 0,$$

όπου λ και β, είναι σταθερές παράμετροι. Σε αυτήν την περιπτωση, μιλάμε για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους και με στοχαστική ανέλιξη *Poisson*, για τον αριθμό των αποζημιώσεων που πληρώνονται μέχρι και τη χρονική στιγμή t, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων.

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω υποθέσεις, έχει βρεθεί (βλέπε *Frostig et al.*, 2011) ότι, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία, θα δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4

Για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P(\tilde{N}=k)=\frac{2^{2k-2}\lambda^{k}(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,\Gamma(1/2)},\quad \forall k=1,2,3,\ldots,$$

όπου *c*, είναι ο σταθερός και μοναδιαίος ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τη γνωστή μαθηματική ιδιότητα της συνάρτησης *Γάμμα*, σχετικά με τα παραγοντικά των θετικών ακεραίων, συνεπάγεται τότε ότι, η παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, μπορεί να γραφτεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$P(\tilde{N}=k)=\frac{\lambda^{k}(\beta c)^{k-1}(2k-2)!}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,(k-1)!},\quad \forall k=1,2,3,\ldots .$$

Επίσης, με βάση την προηγούμενη πρόταση, έχει βρεθεί (βλέπε *Frostig et al.*, 2011) ότι, η δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2$, όπου $\tilde{N}_2=\tilde{N}\,|\,\tilde{N}<\infty$, θα ακολουθεί την *ENB* κατανομή (*θ, α, m*), η οποία ορίστηκε σε προηγούμενη ενότητα, με τις παραμέτρους:

$$\theta=\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^{2}},\quad \alpha=-\frac{1}{2},\quad m=1.$$

Το τελευταίο αυτό θεωρητικό αποτέλεσμα, μπορεί να αποδειχθεί, ως ακολούθως:

Η *ENB* κατανομή, με παραμέτρους *θ, α* και *m*=1, όπου $\theta\in(0,1)$ και $\alpha\in(-1,0)$, για μία διακριτή τ.μ. *N*, που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{1,2,\ldots\}$ των θετικών ακεραίων, θα έχει την παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n=P(N=n)=\frac{\binom{\alpha+n-1}{n}\theta^{n}}{(1-\theta)^{-\alpha}-1}=\frac{\left[\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}\right]\theta^{n}}{(1-\theta)^{-\alpha}-1}=\frac{\left[\dfrac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)!\,n!}\right]\theta^{n}}{(1-\theta)^{-\alpha}-1}=$$

$$=\left[\frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)!\,n!}\right]\left[\frac{\theta^{n}}{(1-\theta)^{-\alpha}-1}\right],\quad \forall n=1,2,\ldots,\ 0<\theta<1,\ -1<\alpha<0.$$

Σημειώνεται εδώ ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η παράμετρος *α*, δεν είναι ένας ακέραιος αριθμός, αλλά είναι ένας αρνητικός και κλασματικός αριθμός, με τιμές στο διάστημα, $(-1, 0)$. Επομένως, η έκφραση του παραγοντικού, $(\alpha + n - 1)!$, στον παραπάνω τύπο της συνάρτησης πιθανότητας, δεν έχει τη γνωστή φυσική έννοια του παραγοντικού, που συναντάμε στη μελέτη των φυσικών ακεραίων. Και αυτό γιατί, εφ'όσον ο αριθμός *α* δεν είναι ακέραιος, έπεται τότε ότι και ο αριθμός $\alpha + n - 1$, επίσης δεν θα είναι ακέραιος. Εδώ λοιπόν, η προηγούμενη έκφραση του παραγοντικού, $(\alpha + n - 1)!$, δεν ορίζεται με την συνηθισμένη έννοια των παραγοντικών των θετικών ακεραίων, αλλά ορίζεται και προκύπτει, σύμφωνα με τη γνωστή μαθηματική συνάρτηση *Γάμμα*, ως ακολούθως:

$$(\alpha + n - 1)! = [(\alpha + n) - 1]! = \Gamma(\alpha + n), \ \forall \alpha \in (-1, 0), \ \forall n = 1, 2, \ldots .$$

Άρα λοιπόν, οι ζητούμενες τιμές, για την παραγοντική έκφραση $(\alpha + n - 1)!$, όπου *α* είναι αρνητικός και κλασματικός αριθμός, ανάμεσα στο –1 και στο 0, μπορούν να υπολογιστούν, μέσω ενός ειδικού υπολογιστικού ή μαθηματικού πακέτου (για παράδειγμα, στο *Mathematica* ή στο *R*), χρησιμοποιώντας (προαιρετικά) και την παρακάτω γνωστή μαθηματική ιδιότητα της συνάρτησης *Γάμμα,*

$\Gamma(x+1) = x\,[\Gamma(x)], \ \forall x \in R$, εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους και το 0.

Επίσης, σύμφωνα με συγκεκριμένους τύπους, οι οποίοι αναφέρθηκαν σε προηγούμενα σημεία του 3^{ου} κεφαλαίου, η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρου *c*, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda)$ και με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων $X_i \sim Exp(\beta)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0, \ \beta > 0$, θα είναι η παρακάτω:

$$\tilde{p}_k = P(\tilde{N} = k) = \frac{2^{2k-2}\lambda^k (\beta c)^{k-1}\Gamma(k - 1/2)}{(\beta c + \lambda)^{2k-1} k!\,\Gamma(1/2)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots, \ \lambda < \beta c. \quad (3.1)$$

Ακόμη, η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης διακριτής τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, θα είναι η ακόλουθη:

$$\tilde{p}_k^{(2)} = P(\tilde{N}_2 = k) = P(\tilde{N} = k \,|\, \tilde{N} < \infty) = \frac{P(\{\tilde{N} = k\} \cap \{\tilde{N} < \infty\})}{P(\tilde{N} < \infty)} =$$

$$= \frac{P(\tilde{N} = k)}{\psi(0)} = \frac{P(\tilde{N} = k)}{\left(\dfrac{1}{1+\theta}\right)} = (1+\theta)\, P(\tilde{N} = k)$$

$$= \left[1 + \left(\frac{c\,\beta}{\lambda} - 1\right)\right] P(\tilde{N} = k) = \left(\frac{c\,\beta}{\lambda}\right) P(\tilde{N} = k)$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_k^{(2)} = P(\tilde{N}_2 = k) = \left(\frac{c\,\beta}{\lambda}\right) P(\tilde{N} = k), \ \forall k = 1, 2, \dots, \ \lambda < \beta c. \qquad (3.2)$$

Βάσει των προηγούμενων σχέσεων (3.1) και (3.2) λοιπόν, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2$, θα είναι η εξής:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \left(\frac{\beta c}{\lambda}\right) P(\tilde{N} = k) = \left(\frac{\beta c}{\lambda}\right) \frac{2^{2k-2} \lambda^k (\beta c)^{k-1} \Gamma(k - 1/2)}{(\beta c + \lambda)^{2k-1} k!\, \Gamma(1/2)}$$

$$= \left(\frac{\beta c}{\lambda}\right) \frac{2^{2(k-1)} \lambda^k (\beta c)^{k-1} \Gamma(k - 1/2)}{(\beta c + \lambda)^{2k-1} k!\, \Gamma(1/2)}$$

$$= \left(\frac{\beta c}{\lambda}\right) \frac{4^{k-1} \lambda^k (\beta c)^{k-1} \Gamma(k - 1/2)}{(\beta c + \lambda)^{2k-1} k!\, \Gamma(1/2)}$$

$$= \left(\frac{\beta c}{\lambda}\right) \frac{4^k \lambda^k (\beta c + \lambda)(\beta c)^k \Gamma(k - 1/2)}{4(\beta c)(\beta c + \lambda)^{2k} \ k!\, \Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{(4\lambda\beta c)^k (\beta c + \lambda) \Gamma(k - 1/2)}{(4\lambda)[(\beta c + \lambda)^2]^k \ k!\, \Gamma(1/2)}.$$

Άρα λοιπόν, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}_2$, θα είναι:

$$\tilde{p}_k^{(2)} = P(\tilde{N}_2 = k) = P(\tilde{N} = k \,|\, \tilde{N} < \infty) = \frac{(4\lambda\beta c)^k (\beta c + \lambda) \Gamma(k - 1/2)}{4\lambda [(\beta c + \lambda)^2]^k \ k!\, \Gamma(1/2)} \qquad (3.3)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, \ \lambda < \beta c,$$

όπου *Γ*(*x*), δηλώνει τη μαθηματική συνάρτηση *Γάμμα*, υπολογισμένη όμως, σε μη-ακέραιο (κλασματικό) και θετικό όρισμα *x*, λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι ισχύει,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \sqrt{3.14128}\ .$$

Για μία διακριτή τ.μ. *N*, που ακολουθεί την *ENB* κατανομή, με τις ακόλουθες παραμέτρους, $\theta = \dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $m = 1$, με $\theta \in (0,1)$ και $\alpha \in (-1,0)$, η συνάρτηση πιθανότητας της *N*, θα είναι η ακόλουθη:

$$p_k = P(N=k) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)k!}\right]\left[\frac{\theta^k}{(1-\theta)^{-\alpha}-1}\right]$$

$$= \frac{\Gamma[(-1/2)+k]}{\Gamma(-1/2)k!}\;\frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[1-\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{-(-\frac{1}{2})}-1}$$

$$= \frac{\Gamma[(-1/2)+k]}{\Gamma(-1/2)k!}\;\frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c+\lambda)^2}{(\beta c+\lambda)^2}-\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{-(-\frac{1}{2})}-1}\ .$$

Το δεύτερο σύνθετο κλάσμα της τελευταίας σχέσης, μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c+\lambda)^2}{(\beta c+\lambda)^2}-\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{-(-\frac{1}{2})}-1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c)^2+2\lambda\beta c+\lambda^2-4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c)^2-2\lambda\beta c+\lambda^2}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c-\lambda)^2}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\left(\dfrac{\beta c-\lambda}{\beta c+\lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\left(\dfrac{\beta c-\lambda}{\beta c+\lambda}\right)-1\right]}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k}{\left[\dfrac{(\beta c-\lambda)-(\beta c+\lambda)}{\beta c+\lambda}\right]}$$

$$= \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k\left[\frac{\beta c+\lambda}{(-2)\lambda}\right].$$

Συνεπώς λοιπόν, για την συνάρτηση πιθανότητας $\{p_k,\ k=1, 2, \ldots\}$, θα ισχύει ότι:

$$p_k = \left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\,\Gamma(-1/2)}\right]\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k\left(-\frac{\beta c+\lambda}{2\lambda}\right),\ \forall k=1, 2, \ldots,\ \lambda<\beta c, \tag{3.4}$$

για την *ENB* κατανομή, με τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων της,

$$\theta = \frac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}\ ,\ \alpha = -\frac{1}{2}\ ,\ m = 1.$$

Επίσης, με βάση την παρακάτω ιδιότητα της συνάρτησης *Γάμμα*, που αναφέρθηκε και σε προηγούμενο σημείο,

$$\Gamma(x+1) = x[\Gamma(x)],\ \forall x > -1, \tag{3.5}$$

και θέτοντας τώρα, όπου $x = -\frac{1}{2}$, τότε, η σχέση (3.4), θα γίνει:

$$(3.4):\ \Gamma((-1/2)+1) = (-1/2)\Gamma(-1/2)\ \Rightarrow \Gamma(1/2) = (-1/2)\Gamma(-1/2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(-1/2) = (-2)\Gamma(1/2). \tag{3.6}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία σχέση (3.6), η προηγούμενη (3.4), θα γίνει:

$$(3.4):\ p_k = P(N=k) = \left[\frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{k!\,\Gamma(-\frac{1}{2})}\right]\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k\left(-\frac{\beta c+\lambda}{2\lambda}\right)$$

$$\overset{(3.6)}{\Rightarrow}\ p_k = \left[\frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{k!(-2)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k\left(-\frac{\beta c+\lambda}{2\lambda}\right)$$

$$= \left[\frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{k!(-2)(-2)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\right]\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k\left(\frac{\beta c+\lambda}{\lambda}\right)$$

$$= \left[\frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{k!\ \Gamma(\frac{1}{2})}\right]\left(\frac{\beta c+\lambda}{4\lambda}\right)\left[\frac{4\lambda\,\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]^k$$

$$= \frac{(4\lambda\beta c)^k(\beta c+\lambda)\,\Gamma(k-1/2)}{(4\lambda)[(\beta c+\lambda)^2]^k\ k!\,\Gamma(1/2)}$$

$$\Rightarrow\ p_k = P(N=k) = \frac{(4\lambda\beta c)^k(\beta c+\lambda)\,\Gamma(k-1/2)}{(4\lambda)[(\beta c+\lambda)^2]^k\ k!\,\Gamma(1/2)}, \tag{3.7}$$

για την *ENB* κατανομή, με τις παραμέτρους, $\theta = \dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $m = 1$.

Από τις σχέσεις (3.7) και (3.3), έπεται ότι η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρου *c*, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda)$ και με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων $X_i \sim Exp(\beta)$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, θα ταυτίζεται με την συνάρτηση πιθανότητας της *ENB* κατανομής, με παραμέτρους, $\theta = \dfrac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $m = 1$. Επομένως, τελικά συνεπάγεται εδώ ότι, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, η δεσμευμένη διακριτή τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, η οποία δηλώνει τον συνολικό αριθμό των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, δοθέντος ότι θα συμβεί κάποια (απροσδιόριστη) στιγμή η χρεωκοπία, θα ακολουθεί τελικά την *ENB* κατανομή πιθανότητας, με τις παραπάνω παραμέτρους που αναφέρθηκαν, όπου $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\lambda < \beta c$, $\theta \in (0,1)$ και $\alpha \in (-1,0)$.

Επιπλέον, αυτή η δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2$, δοθέντος ότι θα συμβεί (σε απροσδιόριστη χρόνική στιγμή) η χρεωκοπία, θα είναι μία «μη-ελαττωματική» και «κατάλληλη» διακριτή τ.μ. (*Proper Discrete Random Variable*), δηλαδή, δεν είναι πλέον ελαττωματική, όπως συνέβαινε προηγουμένως με την αρχική διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$.

3.4.1 Η μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης πιθανότητας της πρότασης 3.4

Για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots$ και εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta)$, $\beta > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, ισχύει ότι, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα εισέλθουν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, είναι γνησίως φθίνουσα. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε ως $p_k = P(\tilde{N} = k)$, θα έχουμε τότε ότι:

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots ,$$

ή αλλιώς, με διαφορετικό συμβολισμό,

$$p_{k+1} < p_k, \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots \Leftrightarrow \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1, \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Απόδειξη

Το πηλίκο $\frac{p_{k+1}}{p_k}$, των αντίστοιχων πιθανοτήτων $P(\tilde{N} = k+1)$ και $P(\tilde{N} = k)$, γράφεται, με βάση τον τύπο της προηγούμενης πρότασης 3.4, ως εξής:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = p_{k+1}\left(\frac{1}{p_k}\right) =$$

$$= \left[\frac{2^{2(k+1)-2}\,\lambda^{k+1}(\beta c)^{(k+1)-1}\Gamma[(k+1)-1/2]}{(\beta c+\lambda)^{2(k+1)-1}(k+1)!\ \Gamma(1/2)}\right]\left[\frac{(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\ \Gamma(1/2)}{2^{2k-2}\,\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}\right]$$

$$= \left[\frac{2^{2k+2-2}\,\lambda^{k+1}(\beta c)^k\ \Gamma[(k-1/2)+1]}{2^{2k-2}\,\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}\right]\left[\frac{(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!}{(\beta c+\lambda)^{2k+1}[k!(k+1)]}\right]$$

$$= \left[\frac{2^2\lambda(\beta c)\Gamma[(k-1/2)+1]}{\Gamma(k-1/2)}\right]\left[\frac{(\beta c+\lambda)^{2k-1}}{(\beta c+\lambda)^{2k+1}(k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{\Gamma[(k-1/2)+1]}{\Gamma(k-1/2)(k+1)}\right]. \quad (3.8)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, την παρακάτω γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης *Γάμμα*,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha[\Gamma(\alpha)], \ \forall \alpha > 0,$$

και θέτοντας όπου $\alpha = k - \frac{1}{2} > 0$ (αφού $k \in \{1, 2, \ldots\}$), η σχέση (3.8), θα γίνει:

$$(3.8):\ \frac{p_{k+1}}{p_k}=\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{\Gamma\,[(k-1/2)+1]}{\Gamma(k-1/2)(k+1)}\right]=$$

$$=\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{(k-1/2)\ \Gamma(k-1/2)}{(k+1)\ \Gamma(k-1/2)}\right]=\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{k-1/2}{k+1}\right],\ \forall k=1,2,\ldots.\ (3.9)$$

Ακόμη, ισχύει και η ακόλουθη (προφανής) σχέση–ανισότητα:

$$k-1/2<k+1\Rightarrow\frac{k-1/2}{k+1}<1,\ \forall k=1,2,\ \ldots.\quad(3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, την ακόλουθη γνωστή αλγεβρική (στοιχειώδη) ταυτότητα,

$$(\beta c-\lambda)^2\geq 0\Rightarrow(\beta c)^2-2(\beta c)\lambda+\lambda^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\qquad(\beta c)^2-2(\beta c)\lambda+\lambda^2+4(\beta c)\lambda\geq 4(\beta c)\lambda$$

$$\Rightarrow(\beta c)^2+2(\beta c)\lambda+\lambda^2\geq 4(\beta c)\lambda\Rightarrow(\beta c+\lambda)^2\geq 4(\beta c)\lambda$$

$$\Rightarrow\qquad 4(\beta c)\lambda\leq(\beta c+\lambda)^2\Rightarrow\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\leq 1,\qquad(3.11)$$

και λόγω των τελευταίων σχέσεων (3.10) και (3.11), τότε η (3.9), θα γραφεί ως εξής:

$$(3.9):\ \frac{p_{k+1}}{p_k}=\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{k-1/2}{k+1}\right]<1\cdot 1=1,\ \forall k=1,2,\ \ldots\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{p_{k+1}}{p_k}<1,\ \forall k\ \Rightarrow p_{k+1}<p_k,\ \forall k=1,2,\ldots,\quad(3.12)$$

η οποία τελευταία σχέση, σημαίνει ότι, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις.

Από το τελευταίο αποτέλεσμα, σχετικά με τη μονοτονία της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, έπεται ότι, η συνάρτηση πιθανότητας, $p_k=P(\tilde{N}=k)$, θα παρουσιάζει μέγιστο στην 1η τιμή της, για $k = 1$. Δηλαδή, η μέγιστη πιθανότητα για την τ.μ. $\tilde{N}$, θα είναι η $p_1 = P(\tilde{N} = 1)$. Αυτό το αποτέλεσμα, δικαιολογείται ως ακολούθως:

$$p_{k+1} < p_k,\ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow p_k > p_{k+1},\ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots \Rightarrow p_1 > p_m,\ \forall m \geq 2, \qquad (3.13)$$

όπου, από την τελευταία σχέση–ανισότητα (3.13), συνεπάγεται ότι η 1η τιμή, $k = 1$, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, αντιστοιχεί στη μέγιστη πιθανότητα, $p_1 = P(\tilde{N} = 1)$.

Η ουσιαστική ερμηνεία του τελευταίου μαθηματικού αποτελέσματος, είναι ότι, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου με εκθετικές αποζημιώσεις, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, αν πράγματι συμβεί η χρεωκοπία, είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί κατά την επέλευση της 1ης χρονικά αποζημίωσης, δηλαδή, με τη μέγιστη πιθανότητα εμφάνισης στην 1η αποζημίωση.

Η επόμενη πρόταση 3.4.1, η οποία παρατίθεται χωρίς την απόδειξή της, αναφέρει ότι η συνάρτηση πιθανότητας, $p_k = P(\tilde{N} = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, εκτός του ότι είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, όπως ήδη αποδείχθηκε προηγουμένως, συγκλίνει επίσης και στο 0, για $k \to \infty$. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 3.4.1

Για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta)$ και με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda)$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$,

$$p_k = P(\tilde{N} = k) = \frac{2^{2k-2}\,\lambda^k\,(\beta c)^{k-1}\,\Gamma(k - 1/2)}{(\beta c + \lambda)^{2k-1}\,k!\;\Gamma(1/2)},\ \forall k = 1, 2, \ldots,$$

θα ικανοποιεί την ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση:

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0, \text{ για } k \to \infty.$$

3.4.2 Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις

Για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda)$ και με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta)$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης διακριτής τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, όπου $\tilde{N}$, είναι η διακριτή (και ελαττωματική) τ.μ. που ορίστηκε σε προηγούμενη ενότητα, θα δίνεται από τον τύπο της επόμενης πρότασης 3.4.2:

Πρόταση 3.4.2

Η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης (και μη-ελαττωματικής) διακριτής τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αποζημιώσεων, $A_i \sim Exp(\lambda)$ και με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta)$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, θα είναι η παρακάτω:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \left(\frac{\beta c + \lambda}{4\lambda}\right)\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}\right]^k \left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\,\Gamma(1/2)}\right], \quad \forall k = 1, 2, \ldots,$$

όπου $\Gamma(\,)$, δηλώνει τη συνάρτηση *Γάμμα*, με θετικό (ή θετικό ακέραιο) όρισμα.

Απόδειξη της πρότασης 3.4.2

Από τον ορισμό της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, θα ισχύει ότι:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = P(\tilde{N} = k \mid \tilde{N} < \infty) = \frac{P(\{\tilde{N} = k\} \cap \{\tilde{N} < \infty\})}{P(\tilde{N} < \infty)} =$$

$$= \frac{P(\tilde{N} = k)}{P(\tilde{N} < \infty)} = \frac{P(\tilde{N} = k)}{\psi(0)}, \qquad (3.14)$$

όπου το $\psi(0)$, δηλώνει την πιθανότητα χρεωκοπίας, με μηδενικό αρχικό απόθεμα *u*=0. Αντικαθιστώντας τώρα, με βάση την πρόταση 3.4, την πιθανότητα $P(\tilde{N}=k)$ του αριθμητή της προηγούμενης σχέσης (3.14), τότε, η (3.14), θα γίνει:

$$(3.14):\; P(\tilde{N}_2=k)=\frac{P(\tilde{N}=k)}{\psi(0)}=\frac{\left[\dfrac{2^{2k-2}\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,\Gamma(1/2)}\right]}{\psi(0)}=$$

$$=\frac{2^{2(k-1)}\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{\psi(0)(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,\Gamma(1/2)}\,. \qquad (3.15)$$

Αλλά για το κλασσικό μοντέλο, με περιθώριο ασφαλείας $\theta>0$, εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους $A_i\sim Exp(\lambda)$, $\lambda>0$ και εκθετικές αποζημιώσεις, $X_i\sim Exp(\beta)$, $\beta>0$, $\forall i=1,2,\ldots$, έχει προαναφερθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}=\frac{1}{1+\left[\dfrac{c}{\lambda E(X_i)}-1\right]}=\frac{1}{\left[\dfrac{c}{\lambda E(X_i)}\right]}=\frac{\lambda E(X_i)}{c}=\frac{\lambda\left(\dfrac{1}{\beta}\right)}{c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(0)=\frac{\lambda}{\beta c}\,, \qquad (3.16)$$

και επομένως, λόγω της τελευταίας σχέσης (3.16), η προηγούμενη (3.15), θα γίνει:

$$(3.15):\; P(\tilde{N}_2=k)=\frac{2^{2(k-1)}\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{\psi(0)(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,\Gamma(1/2)}$$

$$=\frac{(2^2)^{(k-1)}\lambda^k(\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{\left(\dfrac{\lambda}{\beta c}\right)(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\,\Gamma(1/2)}$$

$$=\frac{4^{k-1}\lambda^k(\beta c)^{k-1}(\beta c)\Gamma(k-1/2)}{\lambda(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\Gamma(1/2)}=\left[\frac{4^{k-1}\lambda^{k-1}(\beta c)^k}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right]$$

$$=\left[\frac{(4\lambda)^{k-1}(\beta c)^k}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\,\Gamma(1/2)}\right]=\left[\frac{(4\lambda)^k(\beta c)^k}{(4\lambda)(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right]$$

$$= \frac{4^{k-1}\lambda^{k}(\beta c)^{k-1}(\beta c)\Gamma(k-1/2)}{\lambda(\beta c+\lambda)^{2k-1}k!\Gamma(1/2)} = \left[\frac{4^{k-1}\lambda^{k-1}(\beta c)^{k}}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right]$$

$$= \left[\frac{(4\lambda)^{k-1}(\beta c)^{k}}{(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right] = \left[\frac{(4\lambda)^{k}(\beta c)^{k}}{(4\lambda)(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right]$$

$$= \left[\frac{(4\lambda\beta c)^{k}}{(4\lambda)(\beta c+\lambda)^{2k-1}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right] = \left[\frac{(4\lambda\beta c)^{k}}{(4\lambda)\left[\frac{(\beta c+\lambda)^{2k}}{(\beta c+\lambda)}\right]}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\,\Gamma(1/2)}\right].$$

Μετά από τις σχετικές απλοποιήσεις στην τελευταία παράσταση, παίρνουμε ότι:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \left[\frac{(\beta c+\lambda)}{4\lambda}\right]\left[\frac{(4\lambda\beta c)^{k}}{(\beta c+\lambda)^{2k}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right] =$$

$$= \left[\frac{(\beta c+\lambda)}{4\lambda}\right]\left[\frac{(4\lambda\beta c)^{k}}{[(\beta c+\lambda)^{2}]^{k}}\right]\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right] =$$

$$= \left(\frac{\beta c+\lambda}{4\lambda}\right)\left[\frac{4\lambda\,\beta c}{(\beta c+\lambda)^{2}}\right]^{k}\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right],\ \ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\tilde{N}_2 = k) = \left(\frac{\beta c+\lambda}{4\lambda}\right)\left[\frac{4\lambda\,\beta c}{(\beta c+\lambda)^{2}}\right]^{k}\left[\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!\Gamma(1/2)}\right],\ \ \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Για την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, αποδεικνύεται, με τον ίδιο τρόπο, όπως με την τ.μ. $\tilde{N}$, ότι ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες με την αντίστοιχη σ.π. της $\tilde{N}$. Δηλαδή, είναι γνησίως φθίνουσα (μονότονη) και προσεγγίζει οριακά το 0, όσο το όρισμα $k = 1, 2, \ldots$, των τιμών της $\tilde{N}$, τείνει στο άπειρο ($k \to \infty$).

3.5 Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, για *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και για εκθετικές αποζημιώσεις

Μία διαφορετική περίπτωση στη θεωρία χρεωκοπίας είναι, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι A_i, ακολουθούν την κατανομή *Erlang* με παραμέτρους *n* και *μ* (δηλαδή, την κατανομή *Γάμμα* (*n*, *μ*), με θετική ακέραιη παράμετρο *n*), με σ.π.π. *h*, της μορφής:

$$h(x) = \frac{\mu^n x^{n-1} e^{-\mu x}}{(n-1)!}, \quad \forall x > 0,$$

και τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων X_i, ακολουθούν την εκθετική κατανομή,

$$X_i \sim Exp(\beta), \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots,$$

με σ.π.π. f, που είναι:

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad \forall x > 0.$$

Εδώ λοιπόν, έχουμε μία ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με κατανομή *Erlang* (και όχι εκθετική, όπως πριν) για τους ενδιάμεσους χρόνους A_i, $\forall i = 1, 2, \ldots$, και με εκθετικές αποζημιώσεις X_i.

Τότε, έχει αποδειχθεί (βλέπε *Frostig et al.*, 2011) ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, θα δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.5

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους A_i, με παραμέτρους *μ*>0, *n*=2 και με εκθετικές αποζημιώσεις X_i, με παράμετρο *β*>0, $\forall i = 1, 2, \ldots$, η συνάρτηση πιθανότητας $P(\tilde{N} = k)$, $\forall k = 1, 2, \ldots$, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P(\tilde{N}=k)=\frac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!}\,,\ \forall k=1,2,3,\ \ldots,$$

όπου *c*, είναι ο σταθερός και μοναδιαίος ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων.

Αναφέρεται πάλι εδώ ότι, η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, και σε αυτήν την περίπτωση, θα είναι μία ελλειμματική κατανομή πιθανότητας, αφού έχει υποτεθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο (βλέπε *Πολίτης*, 2005), ότι το περιθώριο ασφαλείας *θ*, στο ανανεωτικό μοντέλο, δε μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Τότε λοιπόν, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, δεν θα είναι βέβαιο, άρα και το ενδεχόμενο $\{\tilde{N}=\infty\}$, που έχει την αντίστοιχη πιθανότητα $\psi(0)=P(\tilde{N}=\infty)$, θα έχει μη-μηδενική (αυστηρά θετική) πιθανότητα να συμβεί (το οποίο ενδεχόμενο, θα είναι αδύνατο να συμβεί, δηλαδή, θα έχει αντίστοιχη πιθανότητα ίση με 0, αν υποτεθούν αυθαίρετα αρνητικές τιμές, για το περιθώριο ασφαλείας *θ* του ανανεωτικού μοντέλου).

Η συνάρτηση πιθανότητας της παραπάνω σχέσης, έχει προκύψει, με βάση την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_{\tilde{N}}(z)$ της τ.μ. $\tilde{N}$, παραγωγίζοντας την $P_{\tilde{N}}(z)$, ως προς z, στο σημείο $z=0$ (βλέπε *Κούτρας* (2004)) και διαιρώντας στη συνέχεια, την παράγωγο της $P_{\tilde{N}}(z)$ στο σημείο 0, με τα κατάλληλα παραγοντικά. Δηλαδή, θα ισχύουν, οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{P_{\tilde{N}}'(0)}{1!}=P_{\tilde{N}}'(0)=P(\tilde{N}=1),\quad \frac{P_{\tilde{N}}''(0)}{2!}=\frac{P_{\tilde{N}}''(0)}{2}=P(\tilde{N}=2),$$

$$\frac{P_{\tilde{N}}^{(3)}(0)}{3!}=\frac{P_{\tilde{N}}^{(3)}(0)}{6}=P(\tilde{N}=3),\ \ldots$$

ενώ, θα ισχύει επίσης ότι,

$$P_{\tilde{N}}(0)=P(\tilde{N}=0),\ P(\tilde{N}=0)=0\ \Rightarrow\ P_{\tilde{N}}(0)=0,$$

αφού, ο αριθμός $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, δεν είναι δυνατόν, πιθανοθεωρητικά, να πάρει την τιμή 0 (βλέπε προηγούμενα κεφάλαια 1 και 2).

Επιπλέον, σημειώνεται εδώ ότι, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_{\tilde{N}}(z)$ της τ.μ. $\tilde{N}$, για συγκεκριμένες γνωστές κατανομές των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης και των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, μπορεί να υπολογιστεί, μέσω κατάλληλων και ειδικών σχέσεων, με βάση τη δυϊκότητα (μαθηματική αντιστοιχία) που υπάρχει, ανάμεσα στο ανανεωτικό μοντέλο και στο μοντέλο ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή (*single-server queueing model*), σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο $2^{ο}$ κεφάλαιο.

Επίσης, έχει βρεθεί (βλέπε *Frostig et al*., 2011) ότι, στην ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή *Erlang* με παραμέτρους n=2 και μ>0, τότε, η κατανομή πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2$, θα ανήκει στην κλάση κατανομών *PW*(2,1) των *Panjer-Willmot* (δηλαδή, θα ανήκει στην κλάση *PW*(*v*, *m*), με *v*=2 και *m*=1). Το ίδιο συμπέρασμα, σε αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει επίσης, και για την κατανομή πιθανότητας της αρχικής τ.μ. $\tilde{N}$.

Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα, μπορεί να διαπιστωθεί, ως ακολούθως:

$$P(\tilde{N}=k)=\frac{\mu^{nk}(\beta c)^{k-1}[(n+1)k-2]!}{(\beta c+\mu)^{(n+1)k-1}k!(nk-1)!},\quad \forall k=1,2,\ldots \Rightarrow$$

$$\overset{n=2}{\Rightarrow} P(\tilde{N}=k)=\frac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!},\quad \forall k=1,2,\ldots$$

και

$$\frac{P(\tilde{N}_2=k+1)}{P(\tilde{N}_2=k)}=\frac{P(\tilde{N}=k+1|\tilde{N}<\infty)}{P(\tilde{N}=k|\tilde{N}<\infty)}=\frac{\left[\dfrac{P(\tilde{N}=k+1)}{P(\tilde{N}<\infty)}\right]}{\left[\dfrac{P(\tilde{N}=k)}{P(\tilde{N}<\infty)}\right]}=$$

$$=\frac{P(\tilde{N}=k+1)}{P(\tilde{N}=k)}=\frac{\left[\dfrac{\mu^{2(k+1)}(\beta c)^{(k+1)-1}[3(k+1)-2]!}{(\beta c+\mu)^{3(k+1)-1}(k+1)!\,[2(k+1)-1]!}\right]}{\left[\dfrac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!\,(2k-1)!}\right]}$$

$$= \left[\frac{\mu^{2k+2}(\beta c)^{k}(\beta c+\mu)^{3k-1}}{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(\beta c+\mu)^{3k+3-1}}\right]\left[\frac{(3k+3-2)!\,k!\,(2k-1)!}{(3k-2)!\,(k+1)!\,(2k+2-1)!}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{(3k+1)!}{(3k-2)!}\right]\left[\frac{k!}{(k+1)!}\right]\left[\frac{(2k-1)!}{(2k+1)!}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{(3k-2)!(3k-1)(3k)(3k+1)}{(3k-2)!}\right]\left[\frac{k!}{k!(k+1)}\right]\left[\frac{(2k-1)!}{(2k-1)!(2k)(2k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right][(3k-1)(3k)(3k+1)]\left(\frac{1}{k+1}\right)\left[\frac{1}{2k(2k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{(3k)(3k-1)(3k+1)}{(2k)(k+1)(2k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{3[(3k-1)(3k+1)]}{2(k+1)(2k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{3(9k^{2}-1)}{2(k+1)(2k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{3\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left[\frac{9k^{2}-1}{2(2k^{2}+3k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{3\mu^{2}(\beta c)}{(\beta c+\mu)^{3}}\right]\left(\frac{9k^{2}-1}{4k^{2}+6k+2}\right).$$

Από την τελευταία παράσταση που προέκυψε, συνεπάγεται εδώ, ότι:

$$\frac{P(\tilde{N}_2 = k+1)}{P(\tilde{N}_2 = k)} = \frac{(-3)\,\mu^{2}(\beta c) + [27\mu^{2}(\beta c)]k^{2}}{2(\beta c+\mu)^{3} + [6(\beta c+\mu)^{3}]k + [4(\beta c+\mu)^{3}]k^{2}}$$

$$= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^{2}}{b_0 + b_1 k + b_2 k^{2}}\,,\ \forall k = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

όπου εδώ, έχουμε θέσει, τους παρακάτω συντελεστές:

$$\alpha_0 = (-3)\mu^{2}(\beta c),\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 27\mu^{2}(\beta c),$$

$$b_0 = 2(\beta c+\mu)^{3},\ b_1 = 6(\beta c+\mu)^{3},\ b_2 = 4(\beta c+\mu)^{3}.$$

Άρα λοιπόν, για τη δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2$, θα ισχύει η ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$P(\tilde{N}_2 = k+1) = \left[\frac{\alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2}{b_0 + b_1 k + b_2 k^2}\right] P(\tilde{N}_2 = k), \quad \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Επομένως τελικά, η τελευταία σχέση που προέκυψε, σημαίνει ότι η δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας, του αριθμού $\tilde{N}_2$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία, δοθέντος ότι αυτή θα συμβεί (με $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$), θα ανήκει στην κλάση κατανομών *PW*(2,1) των *Panjer-Willmot,* με *v*=2 και *m*=1. Το ίδιο συμπέρασμα, θα ισχύει και για την (μη-δεσμευμένη) κατανομή πιθανότητας της $\tilde{N}$ (αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Υπενθυμίζεται ξανά εδώ ότι, οι σχέσεις που γράφτηκαν σε αυτήν την ενότητα, για την κατανομή πιθανότητας της $\tilde{N}$, θα ισχύουν, μόνο στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει καθόλου αρχικό απόθεμα *u*, δηλαδή όταν *u*=0. Αν όμως, ισχύει *u*>0, τότε οι τύποι που δίνουν την προσεγγιστική συνάρτηση πιθανότητας της $\tilde{N}$, θα είναι κάπως πιο πολύπλοκοι στη μορφή τους (βλέπε *Frostig et al*., 2011) και αυτή η πιο σύνθετη περίπτωση, θα μελετηθεί σε επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

3.6 Η μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο ανανεωτικό μοντέλο, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις

Για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις, σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση (η οποία παρατίθεται μαζί με την απόδειξή της), ισχύει ότι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Πρόταση 3.6

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους, $A_i \sim Erlang\,(n=2,\ \mu>0)$, $\forall i = 1,\ 2,\ \ldots$ και εκθετικές αποζημιώσεις, $X_i \sim Exp(\beta),\ \beta>0,\ \forall i=1,2,\ \ldots$, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε, $p_k = P(\tilde{N}=k)$, θα ισχύει ότι:

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots,$$

ή αλλιώς, με διαφορετικό συμβολισμό,

$$p_{k+1} < p_k \Leftrightarrow \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1,\ \forall k = 1,2,3,\ \ldots .$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με σχέσεις που προαναφέρθηκαν, για το ανανεωτικό μοντέλο με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους, η συνάρτηση πιθανότητας $p_k = P(\tilde{N}=k),\ k=1,\ 2,\ \ldots$, της τ.μ. $\tilde{N}$, θα ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{P(\tilde{N}=k+1)}{P(\tilde{N}=k)} = \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left[\frac{9k^2-1}{4k^2+6k+2}\right],\ \forall k=1,2,\ \ldots . \quad (3.17)$$

Εισάγοντας τώρα, από το δεξιό μέλος της σχέσης (3.17), την εξής ακολουθία,

$$a_k = \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1},\ \forall k=1,\ 2,\ \ldots,$$

τότε, για την ακολουθία αυτή a_k, θα ισχύει ότι:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left[\dfrac{4(k+1)^2+6(k+1)+2}{9(k+1)^2-1}\right]}{\left[\dfrac{4k^2+6k+2}{9k^2-1}\right]} = \frac{[4(k+1)^2+6(k+1)+2]\,(9k^2-1)}{(4k^2+6k+2)\,[9(k+1)^2-1]}$$

$$= \frac{[4(k^2+2k+1)+6k+8](9k^2-1)}{(4k^2+6k+2)[9(k^2+2k+1)-1]}$$

$$= \frac{(4k^2+8k+4+6k+8)(9k^2-1)}{(4k^2+6k+2)(9k^2+18k+9-1)}$$

$$= \frac{(4k^2+14k+12)(9k^2-1)}{(4k^2+6k+2)(9k^2+18k+8)}$$

$$= \frac{36k^4+126k^3+104k^2-14k-12}{36k^4+126k^3+158k^2+84k+16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{36k^4+126k^3+86k^2-14k-10}{36k^4+126k^3+158k^2+84k+16}, \ \forall k = 1,\ 2,\ \dots . \quad (3.18)$$

Από το πηλίκο της τελευταίας σχέσης (3.18), μπορεί να διαπιστωθεί, ότι ο αριθμητής του, είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, αφού ισχύει ότι:

$$86k^2 < 158k^2,\ (-14)k < 84k,\ \ \forall k = 1, 2, \dots \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 86k^2 - 14k - 10 < 158k^2 + 84k + 16,\ \forall k = 1, 2, \dots \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36k^4 + 126k^3 + 86k^2 - 14k - 10 < 36k^4 + 126k^3 + 158k^2 + 84k + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36k^4+126k^3+86k^2-14k-10}{36k^4+126k^3+158k^2+84k+16} < 1,\ \forall k \Rightarrow$$

$$\overset{(3.18)}{\Rightarrow} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,\ \ \forall k \Rightarrow a_{k+1} < a_k,\ \ \forall k = 1,\ 2,\ \dots . \quad (3.19)$$

Από την τελευταία σχέση (3.19), βλέπουμε ότι, η ακολουθία a_k, είναι γνησίως φθίνουσα, ως προς *k*.

Επίσης, το όριο της $\{a_k,\ k = 1, 2, \dots\}$, για $k \to \infty$, θα είναι:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\dfrac{4k^2+6k+2}{k^2}\right)}{\left(\dfrac{9k^2-1}{k^2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(4+\dfrac{6}{k}+\dfrac{2}{k^2}\right)}{\left(9-\dfrac{1}{k^2}\right)} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \frac{4}{9}. \quad (3.20)$$

Επίσης, λόγω της μονοτονίας (γνησίως φθίνουσα) της ακολουθίας a_k, και με βάση την τελευταία σχέση (3.20), για το όριο της a_k, συνεπάγεται ότι, ο κάθε όρος της a_k, θα είναι μεγαλύτερος από αυτό το όριο $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{4}{9}$. Δηλαδή, θα ισχύει:

$$a_k \downarrow,\ \forall k = 1,2,\ldots \Rightarrow a_k > \lim_{k\to\infty} a_k,\ \forall k = 1,2,\ldots \Rightarrow a_k > \frac{4}{9},\ \forall k = 1,2,\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1} > \frac{4}{9},\quad \forall k = 1, 2, \ldots. \quad (3.21)$$

Έστω τώρα, η παρακάτω συνάρτηση *f*, ως προς την παράμετρο μ της *Erlang* κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων, με σταθερές τις άλλες δύο παραμέτρους β και c:

$$f(\mu) := 4(\beta c+\mu)^3 - 27\mu^2(\beta c),\ 0<\mu<2\beta c,\ \beta>0,\ c>0.$$

Η συνάρτηση αυτή *f*, εισήχθη, έτσι ώστε να αποδειχθεί ότι ισχύουν, οι παρακάτω ισοδύναμες ανισότητες:

$$f(\mu)>0 \Leftrightarrow 4(\beta c+\mu)^3 - 27\mu^2(\beta c)>0 \Leftrightarrow 4(\beta c+\mu)^3 > 27\mu^2(\beta c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}(\beta c+\mu)^3 > 3\mu^2(\beta c) \Leftrightarrow \frac{4}{9} > \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3},\ a_k > \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow a_k > \frac{4}{9} > \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3},\ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3} < a_k,\ \forall k = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right)}{a_k} < 1,\ \forall k \Leftrightarrow \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left(\frac{1}{a_k}\right) < 1,\ \forall k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left[\frac{1}{\left(\frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1}\right)}\right] < 1 \Leftrightarrow \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left(\frac{9k^2-1}{4k^2+6k+2}\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(3.17)}{\Leftrightarrow} \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1,\ \forall k = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow p_{k+1} < p_k,\ \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Ο παραπάνω περιορισμός, $\mu < 2\beta c$, τέθηκε, λόγω της βασικής σχέσης–ανισότητας, θ>0, για το περιθώριο ασφαλείας θ, του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου, θεωρώντας την κατανομή *Erlang*, με παραμέτρους n=2 και μ>0, για τους ενδιάμεσους χρόνους A_i και θεωρώντας εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, $X_i \sim Exp(\beta)$, $\beta > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots$, θα πρέπει τότε να ισχύουν, οι ακόλουθες ισοδύναμες σχέσεις:

$$\theta > 0 \Rightarrow \frac{cE(A_i)}{E(X_i)} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{cE(A_i)}{E(X_i)} > 1 \Rightarrow cE(A_i) > E(X_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\left(\frac{2}{\mu}\right) > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{2c}{\mu} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow 2c\beta > \mu \Rightarrow \mu < 2c\beta .$$

Για αυτήν τη συνάρτηση f, η 1η παράγωγός της f', θα είναι:

$$f(\mu) = 4(\beta c + \mu)^3 - 27\mu^2(\beta c),\ 0 < \mu < 2\beta c,\ \beta > 0,\ c > 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(\mu) = 12(\beta c + \mu)^2 - 54\mu(\beta c)$$

$$= \quad 12(\beta c)^2 + 12\mu^2 + 24(\beta c)\mu - 54\mu(\beta c)$$

$$= \quad 12(\beta c)^2 + 12\mu^2 - 30\mu(\beta c)$$

$$\Rightarrow f'(\mu) = 12\mu^2 - 30(\beta c)\mu + 12(\beta c)^2,\ 0 < \mu < 2\beta c,\ \beta > 0,\ c > 0.$$

Δηλαδή, βλέπουμε εδώ ότι, η 1η παράγωγος της f, είναι ένα τριώνυμο 2ου βαθμού, ως προς την παράμετρο μ της *Erlang* κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων.

Οι ρίζες μ_1 και μ_2, αυτού του τριωνύμου, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις, $f'(\mu_1) = 0$ και $f'(\mu_2) = 0$, θα είναι:

$$\mu_1 = \frac{\beta c}{2},\ \mu_2 = 2\beta c .$$

Τότε, με βάση γνωστό σχολικό θεώρημα, λόγω του θετικού δευτεροβάθμιου συντελεστή του προηγούμενου τριωνύμου, το τριώνυμο της παραγώγου $f'(\mu)$, θα έχει αρνητικό πρόσημο μεταξύ των δύο ριζών, $\mu_1 = \frac{\beta c}{2}$, $\mu_2 = 2\beta c$, και θα έχει θετικό πρόσημο εκτός αυτών των δύο ριζών. Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$f'(\mu) < 0, \text{ αν } \mu_1 < \mu < \mu_2$$

και

$$f'(\mu) > 0, \text{ αν } 0 < \mu < \mu_1 \text{ ή } \mu > \mu_2 .$$

Άρα λοιπόν, θα έχουμε ότι:

$$f'(\mu) < 0, \text{ αν } \frac{\beta c}{2} < \mu < 2\beta c$$

και

$$f'(\mu) > 0, \text{ αν } 0 < \mu < \frac{\beta c}{2} .$$

Επομένως, στο 1ο διάστημα, $\frac{\beta c}{2} < \mu < 2\beta c$, λόγω του αρνητικού πρόσημου της παραγώγου, η συνάρτηση f θα είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ στο 2ο διάστημα, $0 < \mu < \frac{\beta c}{2}$, λόγω του θετικού πρόσημου της παραγώγου, η f θα είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, θα ισχύουν τότε, οι ακόλουθες σχέσεις:

$$f(\frac{\beta c}{2}) > f(\mu) > f(2\beta c), \text{ αν } \frac{\beta c}{2} < \mu < 2\beta c \qquad (3.22)$$

και

$$f(0) < f(\mu) < f(\frac{\beta c}{2}), \text{ αν } 0 < \mu < \frac{\beta c}{2} . \qquad (3.23)$$

Αλλά για τις τιμές της συνάρτησης f, θα ισχύει ότι:

$$f(\frac{\beta c}{2}) = 4(\beta c + \frac{\beta c}{2})^3 - 27\left(\frac{\beta c}{2}\right)^2 (\beta c) = 4\left(\frac{3\beta c}{2}\right)^3 - \frac{27}{4}(\beta c)^3$$

$$= \frac{27}{2}(\beta c)^3 - \frac{27}{4}(\beta c)^3 = \frac{27}{4}(\beta c)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\beta c}{2}\right)=\frac{27}{4}(\beta c)^3>0 \Rightarrow f\left(\frac{\beta c}{2}\right)>0, \quad (3.24)$$

$$f(2\beta c)=4(\beta c+2\beta c)^3-27(2\beta c)^2(\beta c)=4(3\beta c)^3-(27)(4)(\beta c)^3$$

$$=(4)(27)(\beta c)^3-(4)(27)(\beta c)^3=0 \Rightarrow f(2\beta c)=0, \quad (3.25)$$

και

$$f(0)=4(\beta c+0)^3-27(0)^2(\beta c)=4(\beta c)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)=4(\beta c)^3. \quad (3.26)$$

Λόγω λοιπόν των τελευταίων σχέσεων (3.24), (3.25) και (3.26), οι προηγούμενες σχέσεις (3.22) και (3.23), θα γίνουν:

$$(3.22): f\left(\frac{\beta c}{2}\right)>f(\mu)>f(2\beta c), \text{ αν } \frac{\beta c}{2}<\mu<2\beta c,$$

$$\overset{(3.24),(3.25)}{\Rightarrow} \frac{27}{4}(\beta c)^3>f(\mu)>0 \Rightarrow f(\mu)>0, \text{ αν } \frac{\beta c}{2}<\mu<2\beta c, \quad (3.27)$$

$$(3.23): f(0)<f(\mu)<f\left(\frac{\beta c}{2}\right), \; 0<\mu<\frac{\beta c}{2},$$

$$\overset{(3.24),(3.26)}{\Rightarrow} 4(\beta c)^3<f(\mu)<\frac{27}{4}(\beta c)^3 \Rightarrow f(\mu)>4(\beta c)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mu)>0, \text{ αν } 0<\mu<\frac{\beta c}{2}. \quad (3.28)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις (3.27) και (3.28), βλέπουμε ότι η συνάρτηση f,

$$f(\mu)=4(\beta c+\mu)^3-27\mu^2(\beta c), \; 0<\mu<2\beta c, \; \beta>0, c>0,$$

θα είναι παντού θετική, ως προς μ, στο διάστημα $(0,\ 2\beta c)$, δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$4(\beta c+\mu)^3-27\mu^2(\beta c)>0, \; 0<\mu<2\beta c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(\beta c+\mu)^3>27\mu^2(\beta c) \Rightarrow 4(\beta c+\mu)^3>(9\cdot 3)\mu^2(\beta c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}(\beta c+\mu)^3 > 3\mu^2(\beta c) \Rightarrow \frac{4}{9} > \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3} . \quad (3.29)$$

Λόγω τώρα της τελευταίας σχέσης (3.29), η προηγούμενη (3.21), θα γίνει:

$$(3.21): \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1} > \frac{4}{9}, \ \forall k=1,2,\ldots,$$

$$\overset{(3.29)}{\Rightarrow} \quad \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1} > \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}, \ \forall k,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3} < \frac{4k^2+6k+2}{9k^2-1}, \ \forall k,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left[\dfrac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]}{\left[\dfrac{4k^2+6k+2}{9k^2-1}\right]} < 1, \ \forall k,$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left[\frac{1}{\left[\dfrac{4k^2+6k+2}{9k^2-1}\right]}\right] < 1, \ \forall k,$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{3\mu^2(\beta c)}{(\beta c+\mu)^3}\right]\left[\frac{9k^2-1}{4k^2+6k+2}\right] < 1, \ \forall k,$$

$$\overset{(3.17)}{\Rightarrow} \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1, \ \forall k \ \Rightarrow \ p_{k+1} < p_k, \ \forall k,$$

$$\Rightarrow P(\tilde{N}=k+1) < P(\tilde{N}=k), \ \forall k=1,2,\ldots . \quad (3.30)$$

Η τελευταία σχέση (3.30), δηλώνει ότι η συνάρτηση πιθανότητας, $p_k = P(\tilde{N}=k)$ της τ.μ. $\tilde{N}$, μειώνεται, καθώς αυξάνεται το όρισμα *k*. Άρα, αυτή η συνάρτηση πιθανότητας, θα είναι γνησίως φθίνουσα, για το ανανεωτικό μοντέλο με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους, συμπέρασμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Το αποτέλεσμα που προέκυψε, για τη μονοτονία της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, σημαίνει ότι αυτή η συνάρτηση, θα παρουσιάζει μέγιστο, στην 1η τιμή της, $p_1 = P(\tilde{N} = 1)$. Πράγματι, από την τελευταία σχέση (3.30), θα έχουμε ότι:

$$p_{k+1} < p_k,\ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow p_2 < p_1,\ p_3 < p_2,\ p_4 < p_3,\ \ldots$$

$$\Rightarrow p_1 > p_2,\ p_2 > p_3,\ p_3 > p_4,\ \ldots \Rightarrow p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > \ldots .$$

Οι τελευταίες αυτές ανισότητες, δηλώνουν ότι η 1η τιμή p_1, της συνάρτησης πιθανότητας $p_k = P(\tilde{N} = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, είναι η μέγιστη πιθανότητα. Με άλλα λόγια, για το ανανεωτικό μοντέλο, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, αν συμβεί, θα είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί μέσω της 1ης χρονικά αποζημίωσης, δηλαδή, μέσω του ενδεχομένου $\{\tilde{N} = 1\}$, με την αντίστοιχη μέγιστη πιθανότητα, $p_1 = P(\tilde{N} = 1)$.

3.7 Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, για το ανανεωτικό μοντέλο, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις

Η πρόταση που ακολουθεί (βλέπε *Rolski et al.*, 1999), δίνει την πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, για την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, θεωρώντας κατανομή *Erlang*, με παραμέτρους μ=2, n>0, για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων και θεωρώντας εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, με παράμετρο β>0. Η συγκεκριμένη ποσότητα $\psi(u)$, θα πρέπει να είναι γνωστή, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα $\psi(0)$, με μηδενικό αρχικό απόθεμα $u = 0$, και κατά συνέπεια να μπορεί να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$. Σημειώνεται εδώ πάλι ότι, η συνάρτηση πιθανότητας της $\tilde{N}_2$, είναι η ακόλουθη:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{P(\tilde{N} = k)}{\psi(0)}, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

όπου,

$$P(\tilde{N} = k) = \frac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c + \mu)^{3k-1} k!(2k-1)!}, \quad \forall k = 1, 2, \dots .$$

Πρόταση 3.7.1 (βλέπε *Rolski et al.*, σελίδα 251)

Στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετική κατανομή για τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, $X_i \sim Exp(\beta)$, $\beta > 0$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots$, (βλέπε *Rolski et al.*, 1999) η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(u)$, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\psi(u) = (1 - \frac{\gamma}{\beta}) e^{-\gamma u}, \quad \forall u \geq 0,$$

όπου:

γ, είναι η μοναδική θετική ρίζα, της παρακάτω εξίσωσης, ως προς *s*,

$$\left(\frac{\beta}{\beta - s}\right) \hat{L}_{A_i}(cs) = 1, \quad s > 0,$$

c, ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου και $\hat{L}_{A_i}(cs)$, ο μετασχηματισμός *Laplace* της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων, υπολογισμένος στο σημείο cs.

Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό του μετασχηματισμού *Laplace*, για μία συνεχή και μη-αρνητική τ.μ., η ποσότητα $\hat{L}_{A_i}(cs)$, για την τ.μ. A_i των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων του ανανεωτικού μοντέλου, θα είναι η παρακάτω μέση τιμή, ως συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής *t*:

$$\hat{L}_{A_i}(t) = E(e^{-tA_i}), \quad \forall t \in R, \quad \forall i = 1, 2, \dots .$$

Μπορεί να αποδειχθεί (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009) ότι, ο μετασχηματισμός *Laplace*, για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων A_i του ανανεωτικού μοντέλου, ως μία μέση τιμή μίας συνεχούς και μη-αρνητικής τ.μ., υπάρχει (δεν απειρίζεται), για οποιοδήποτε πραγματικό *t*, θεωρούμενος ως συνάρτηση της μεταβλητής *t*. Συγκεκριμένα, μπορεί να διαπιστωθεί (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009) ότι, ο μετασχηματισμός *Laplace* των A_i, ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση-ανισότητα:

$$0 < \hat{L}_{A_i}(t) < 1, \ \forall t \in R, \ \forall i = 1, 2, \dots .$$

Άμεση συνέπεια (ως πόρισμα) της παραπάνω πρότασης, θέτοντας όπου $u = 0$, είναι ότι, στο ανανεωτικό μοντέλο, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(0)$, με μηδενικό αρχικό απόθεμα, θα ισούται με:

$$\psi(0) = 1 - \frac{\gamma}{\beta} .$$

Η πρόταση που ακολουθεί, δίνει τη ζητούμενη θετική παράμετρο *γ*, για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεωκοπίας $\psi(0)$, με μηδενικό αρχικό απόθεμα $u = 0$, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις.

Πρόταση 3.7.2

Στο ανανεωτικό μοντέλο, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και κατανομή $Erlang\,(n = 2, \mu > 0)$, για τους ενδιάμεσους χρόνους, για την πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(0)$, με $u = 0$, σύμφωνα με την πρόταση 3.7.1 και τις υπόλοιπες παραμέτρους που ορίστηκαν, η θετική παράμετρος *γ*, θα είναι η ακόλουθη:

$$\gamma = \frac{(\beta c^2 - 2\mu c) + \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}{2c^2} \ , \quad \gamma \in (0,1).$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση 3.7.1, η παράμετρος *γ*, που απαιτείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεωκοπίας, $\psi(0) = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$, όταν $u = 0$, θα βρεθεί, ως η μοναδική θετική ρίζα, μέσω της επίλυσης ως προς *s*, της εξίσωσης:

$$\left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)\hat{L}_{A_i}(cs) = 1\,. \qquad (3.31)$$

Για το ανανεωτικό μοντέλο, με κατανομή $Erlang\,(n = 2,\ \mu > 0)$ για τους ενδιάμεσους χρόνους A_i, $\forall i = 1, 2, \ldots$, ο μετασχηματισμός *Laplace* της κατανομής των A_i, υπολογισμένος στο σημείο cs, θα είναι ο παρακάτω:

$$\hat{L}_{A_i}(cs) = \left(\frac{\mu}{\mu + cs}\right)^2, \ \ \forall s > 0.$$

Η τελευταία αυτή σχέση, έχει προκύψει (βλέπε *Χατζηκωνσταντινίδης*, 2009), με βάση τον τρόπο που συνδέεται ο μετασχηματισμός *Laplace* των ενδιάμεσων χρόνων, με την αντίστοιχη ροπογεννήτρια συνάρτησή τους, $M_{A_i}(cs) = \left(\frac{\mu}{\mu + cs}\right)^2$, υπολογισμένη στο σημείο cs, θεωρώντας την κατανομή $Erlang\,(n = 2,\ \mu > 0)$ για τις συνεχείς, μη-αρνητικές και ανεξάρτητες τ.μ. A_i, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

Επομένως λοιπόν, με βάση όλα τα παραπάνω, η προηγούμενη εξίσωση (3.31), θα πάρει τελικά, την παρακάτω μορφή:

$$(3.31):\ \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)\hat{L}_{A_i}(cs) = 1 \ \Rightarrow \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)\left(\frac{\mu}{\mu + cs}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\beta\,\mu^2}{(\beta - s)(\mu + cs)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad (\beta - s)(\mu + cs)^2 = \beta\mu^2$$

$$\Rightarrow \qquad (\beta - s)(\mu^2 + 2\mu\, cs + c^2 s^2) = \beta\mu^2$$

$$\Rightarrow \ \beta\mu^2 + 2\beta\mu\, cs + \beta\, c^2 s^2 - s\mu^2 - 2\mu\, cs^2 - c^2 s^3 = \beta\mu^2$$

$$\Rightarrow \qquad 2\beta\mu\, cs + \beta\, c^2 s^2 - s\mu^2 - 2\mu\, cs^2 - c^2 s^3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad s\,(2\beta\mu\, c + \beta\, c^2 s - \mu^2 - 2\mu\, cs - c^2 s^2) = 0$$

$$\overset{s>0}{\Rightarrow} \qquad 2\beta\mu c + \beta c^2 s - \mu^2 - 2\mu c s - c^2 s^2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 s^2 + (2\mu c - \beta c^2)s + (\mu^2 - 2\beta\mu c) = 0. \qquad (3.32)$$

Για την τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση (3.32) που προέκυψε, οι δύο ρίζες της, γ_1 και γ_2, ως προς s, θα είναι οι παρακάτω:

$$\gamma_1 = \frac{(\beta c^2 - 2\mu c) + \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}{2c^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{(\beta c^2 - 2\mu c) - \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}{2c^2}.$$

Από αυτές τις δύο ρίζες, μόνο η γ_1 είναι θετική, ενώ η γ_2 είναι αρνητική. Αυτό, μπορεί να διαπιστωθεί ως ακολούθως:

$$\sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3} > \left| \beta c^2 - 2\mu c \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}\right)^2 > \left| \beta c^2 - 2\mu c \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3 > (\beta c^2 - 2\mu c)^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3 > (\beta c^2)^2 - 2(\beta c^2)(2\mu c) + (2\mu c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3 > \beta^2 c^4 - 4\beta\mu c^3 + 4\mu^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\beta\mu c^3 > -4\beta\mu c^3 + 4\mu^2 c^2 \Leftrightarrow 8\beta\mu c^3 > 4\mu^2 c^2$$

$$\overset{4\mu c^2 > 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{8\beta\mu c^3}{4\mu c^2} > \frac{4\mu^2 c^2}{4\mu c^2} \Leftrightarrow 2\beta c > \mu \Leftrightarrow \frac{2\beta c}{\mu} > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\beta c}{\mu} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{c\left(\frac{2}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \theta > 0,$$

ανισότητα η οποία, θα πρέπει να ισχύει, λόγω του αναγκαίου θεωρητικού περιορισμού για το αυστηρά θετικό πρόσημο του περιθωρίου ασφαλείας θ, έτσι ώστε να μην είναι βέβαιο το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο.

Επομένως, εφ' όσον πρέπει να ισχύει η τελευταία ανισότητα $\theta > 0$, θα πρέπει τότε να ισχύει και η αρχική ισοδύναμη ανισότητα,

$$\sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} > \left| \beta\, c^2 - 2\mu\, c \right| \tag{3.33}$$

και επίσης, θα ισχύει η προφανής ανισότητα,

$$\left|\beta\, c^2 - 2\mu\, c\right| \geq -(\beta\, c^2 - 2\mu\, c) \tag{3.34}$$

$$\overset{(3.33),\,(3.34)}{\Rightarrow} \qquad \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} > -(\beta\, c^2 - 2\mu\, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} + (\beta\, c^2 - 2\mu\, c) > 0 \tag{3.35}$$

$$\overset{(3.35)}{\Rightarrow} \qquad \frac{(\beta\, c^2 - 2\mu\, c) + \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3}}{2c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 > 0.$$

Επίσης, από την προηγούμενη ανισότητα (3.33), θα έχουμε ότι:

$$(3.33):\ \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} > \left| \beta\, c^2 - 2\mu\, c \right|,\ \left|\beta\, c^2 - 2\mu\, c\right| \geq (\beta\, c^2 - 2\mu\, c)$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} > \beta\, c^2 - 2\mu\, c$$

$$\Rightarrow \qquad \beta\, c^2 - 2\mu\, c < \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3}$$

$$\Rightarrow \quad (\beta\, c^2 - 2\mu\, c) - \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\beta\, c^2 - 2\mu\, c) - \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu\, c^3}}{2c^2} > 0$$

$$\Rightarrow \gamma_2 < 0,$$

όπου γ_2, είναι η 2η ρίζα (και αρνητική) της προηγούμενης δευτεροβάθμιας εξίσωσης (3.32). Επομένως λοιπόν, προκύπτει εδώ ότι, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και κατανομή $Erlang(n = 2, \mu > 0)$ για τους ενδιάμεσους χρόνους, η πιθανότητα χρεωκοπίας $\psi(0)$, με $u = 0$, σύμφωνα με την πρόταση 3.7.1 που προαναφέρθηκε, θα είναι:

$$\psi(0) = 1 - \frac{\gamma}{\beta}, \qquad (3.36)$$

όπου:

β, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και γ, είναι η παρακάτω ποσότητα,

$$\gamma = \frac{(\beta c^2 - 2\mu c) + \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}{2c^2},$$

η οποία προκύπτει, ως η μοναδική θετική ρίζα, ως προς s, της εξίσωσης (3.31).

Η πρόταση που ακολουθεί, δίνει την συνάρτηση πιθανότητας για την τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, στο ανανεωτικό μοντέλο, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους. Η πρόταση αυτή, βασίζεται στις δύο προηγούμενες προτάσεις, 3.7.1 και 3.7.2, που αναφέρθηκαν σε αυτήν την ενότητα.

Πρόταση 3.7.3

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με κατανομή $Erlang(n = 2, \mu > 0)$ για τους ενδιάμεσους χρόνους A_i και εκθετική κατανομή $Exp(\beta > 0)$, για τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων X_i, $\forall i = 1, 2, \ldots$, η συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \left[\frac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c + \mu)^{3k-1} k!(2k-1)!}\right]\left[\frac{2\beta c^2}{(\beta c^2 + 2\mu c) - \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}\right],$$

$$\forall k = 1, 2, \ldots .$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, η συνάρτηση πιθανότητας της $\tilde{N}_2$, θα είναι:

$$P(\tilde{N}_2 = k) = P(\tilde{N} = k \mid \tilde{N} < \infty) = \frac{P(\tilde{N} = k)}{P(\tilde{N} < \infty)} = \frac{P(\tilde{N} = k)}{\psi(0)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots \quad (3.37)$$

Επίσης, λόγω της προηγούμενης σχέσης (3.36) και της προηγούμενης πρότασης 3.5, η τελευταία σχέση (3.36), γράφεται ως εξής:

$$(3.36): P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{P(\tilde{N} = k)}{\psi(0)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{\left[\dfrac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!}\right]}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{\left[\dfrac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!}\right]}{\left(\dfrac{\beta - \gamma}{\beta}\right)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{\left[\dfrac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!}\right]}{\left(\dfrac{\beta - \gamma}{\beta}\right)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow P(\tilde{N}_2 = k) = \frac{\left[\dfrac{\mu^{2k}(\beta c)^{k-1}(3k-2)!}{(\beta c+\mu)^{3k-1}k!(2k-1)!}\right]}{\left(\dfrac{\beta - \dfrac{(\beta c^2 - 2\mu c) + \sqrt{\beta^2 c^4 + 4\beta\mu c^3}}{2c^2}}{\beta}\right)}, \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

και κάνοντας εδώ, τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις, στον σύνθετο παρονομαστή της τελευταίας ποσότητας που εμφανίστηκε, προκύπτει η ζητούμενη σχέση, για την συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης διακριτής τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} | \tilde{N} < \infty$, στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις και *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων.

Κεφάλαιο 4

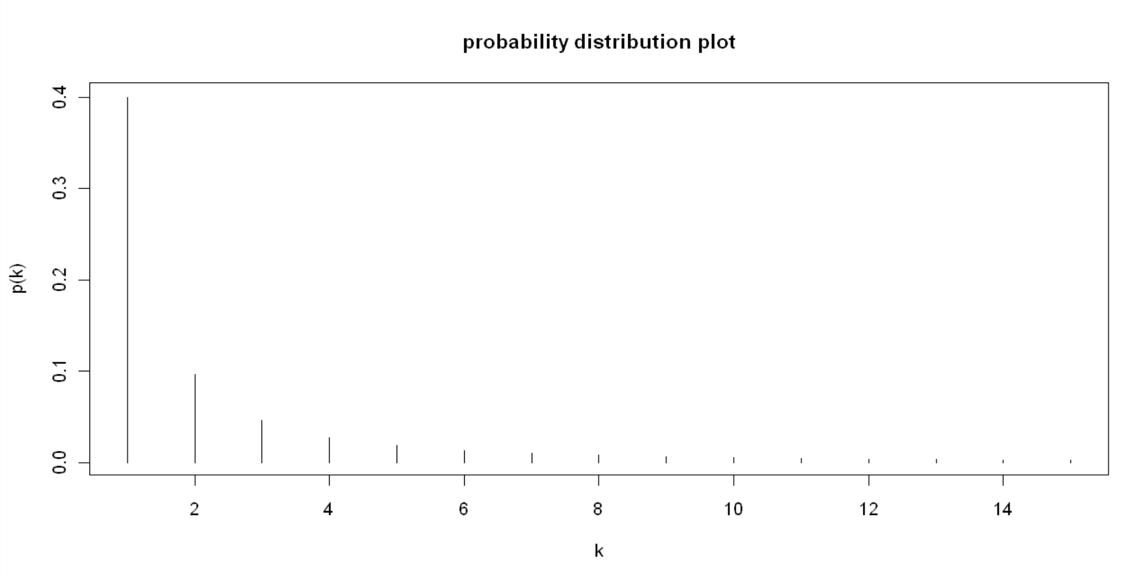
Αριθμητικά παραδείγματα και εφαρμογές, για την κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο στατιστικό πακέτο *R*

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν ορισμένα ειδικά αριθμητικά παραδείγματα και εφαρμογές, σχετικά με την κατανομή πιθανότητας που ακολουθεί, ο αριθμός $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν, μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας. Τα παραδείγματα αυτά, αφορούν τις περιπτώσεις του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους A_i και με εκθετικές αποζημιώσεις X_i, και του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και με εκθετικές αποζημιώσεις. Για τα αριθμητικά αυτά παραδείγματα και τα αντίστοιχα γραφήματά τους, θα χρησιμοποιηθεί το στατιστικό πακέτο *R*, υποθέτοντας κατάλληλες και συγκεκριμένες τιμές των στατιστικών παραμέτρων των κατανομών που ακολουθούν, για τα ατομικά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων και τους ενδιάμεσους χρόνους A_i μεταξύ των αποζημιώσεων.

Για καθεμία περίπτωση κατανομών και παραμέτρων, θα παρουσιαστούν τα σχετικά γραφήματα, μαζί με σύντομες περιγραφές, ερμηνείες και σχολιασμούς αυτών των γραφικών αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν, επτά ειδικά αριθμητικά παραδείγματα της κατανομής πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, τρία παραδείγματα για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου και τέσσερα παραδείγματα για το ανανεωτικό μοντέλο, μαζί με τις συνοπτικές επεξηγήσεις και ερμηνείες τους. Όλα τα παραδείγματα και τα σχετικά γραφήματα που θα παρουσιαστούν, αναφέρονται στην ειδική περίπτωση, όπου στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα, κατά την έναρξη του χρόνου, δηλαδή στην περίπτωση που ισχύει η σχέση, $u = 0$.

Παράδειγμα 1ο

Το 1ο παράδειγμα, αφορά την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 3)$, με ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda = 2)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 1$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, για τις πρώτες 15 διακριτές τιμές της τ.μ. $\tilde{N}$, είναι το παρακάτω:



Η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, για αυτό το 1ο παράδειγμα, όπως και για τα επόμενα 2 παραδείγματα, σύμφωνα με τύπο του προηγούμενου 3ου κεφαλαίου, είναι η εξής:

$$P(\tilde{N} = k) = \frac{2^{2k-2}\lambda^k (\beta c)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{(\beta c+\lambda)^{2k-1} k!\,\Gamma(1/2)} =$$

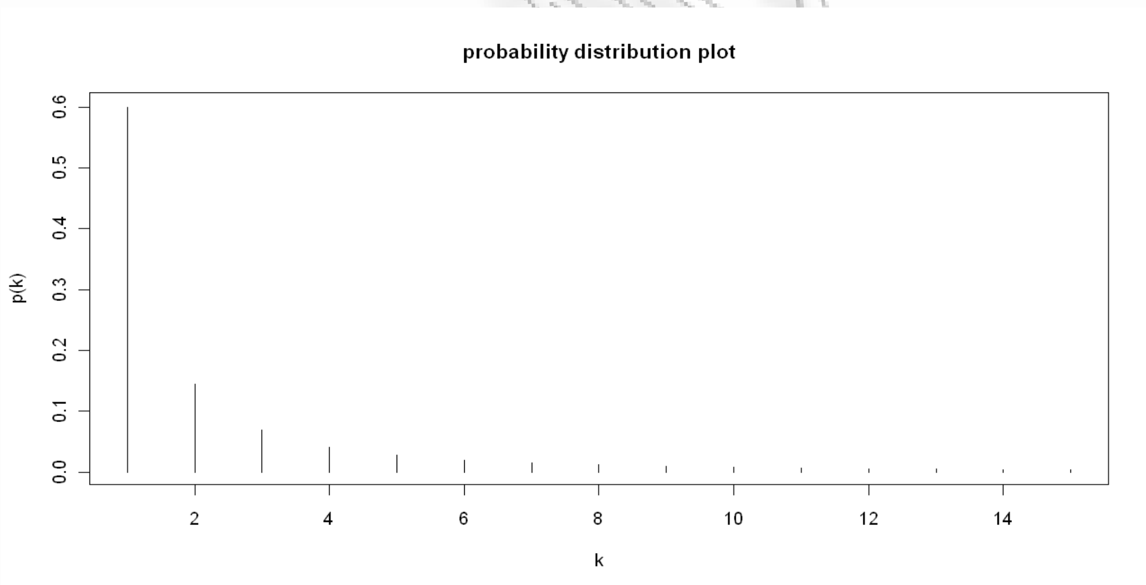
$$= \frac{\lambda^k (\beta c)^{k-1}(2k-2)!}{(\beta c+\lambda)^{2k-1} k!(k-1)!}, \quad \forall\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots .$$

Από τη μορφή του παραπάνω γραφήματος, φαίνεται ότι, η συνάρτηση πιθανότητας $P(\tilde{N} = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, είναι γνησίως φθίνουσα και παρουσιάζει μέγιστο, στην πρώτη τιμή 1. Δηλαδή, αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις, για αυτές τις ειδικές τιμές των παραμέτρων *λ*, *β* και *c*, η χρεωκοπία, (αν αυτή συμβεί κάποια στιγμή), είναι πιθανότερο να συμβεί κατά την έλευση της 1ης χρονικά αποζημίωσης (χωρίς να προσδιορίζεται όμως εδώ ο ακριβής χρόνος της χρεωκοπίας).

Το αντίστοιχο γράφημα, για τη δεσμευμένη (και μη-ελαττωματική) τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, η συνάρτηση πιθανότητας της οποίας, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο,

$$P(\tilde{N}_2 = k) = \left(\frac{\beta c + \lambda}{4\lambda}\right)\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}\right]^k \left[\frac{\Gamma(k - 1/2)}{k!\,\Gamma(1/2)}\right], \quad \forall k = 1, 2, \ldots,$$

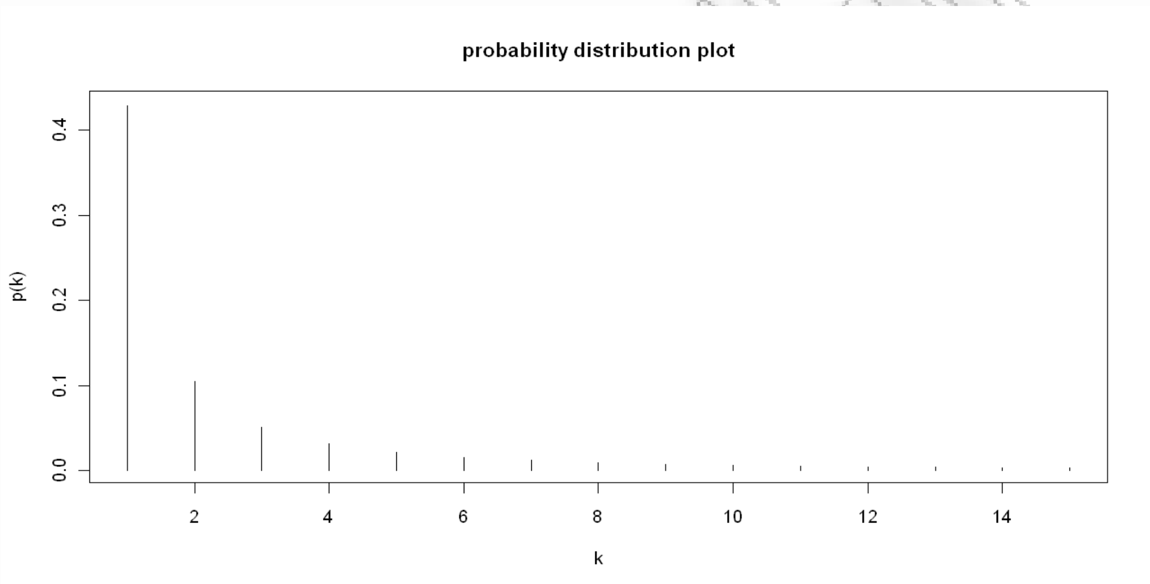
είναι το παρακάτω:



Από το τελευταίο αυτό γράφημα πιθανότητας, παρατηρούμε ότι ισχύουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα, όπως αυτά για το αντίστοιχο γράφημα που δόθηκε προηγουμένως, για την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$. Δηλαδή, ότι είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και παρουσιάζει μέγιστο, στην 1η τιμή του ορίσματός της, για $k = 1$.

Παράδειγμα 2^o

Το 2^o παράδειγμα, αφορά πάλι την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 4)$, με ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda = 3)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 1$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, για τις πρώτες 15 διακριτές τιμές της, είναι το ακόλουθο:



από το οποίο διάγραμμα, προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα για τη μορφή της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, όπως στο αντίστοιχο διάγραμμα του προηγούμενου $1^{ου}$ παραδείγματος. Η βασική διαφορά εδώ, είναι ότι, η μέγιστη τιμή $P(\tilde{N} = 1)$, της συνάρτησης πιθανότητας $P(\tilde{N} = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, αυξήθηκε σε σχέση με το προηγούμενο γράφημα, όπως αυξήθηκαν επίσης και οι τιμές των «επόμενων» πιθανοτήτων $P(\tilde{N} = 2)$ και $P(\tilde{N} = 3)$. Η βασική εξήγηση για αυτήν την αλλαγή, είναι ότι, στην $2^η$ αυτή περίπτωση, μειώθηκε η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ, όπου:

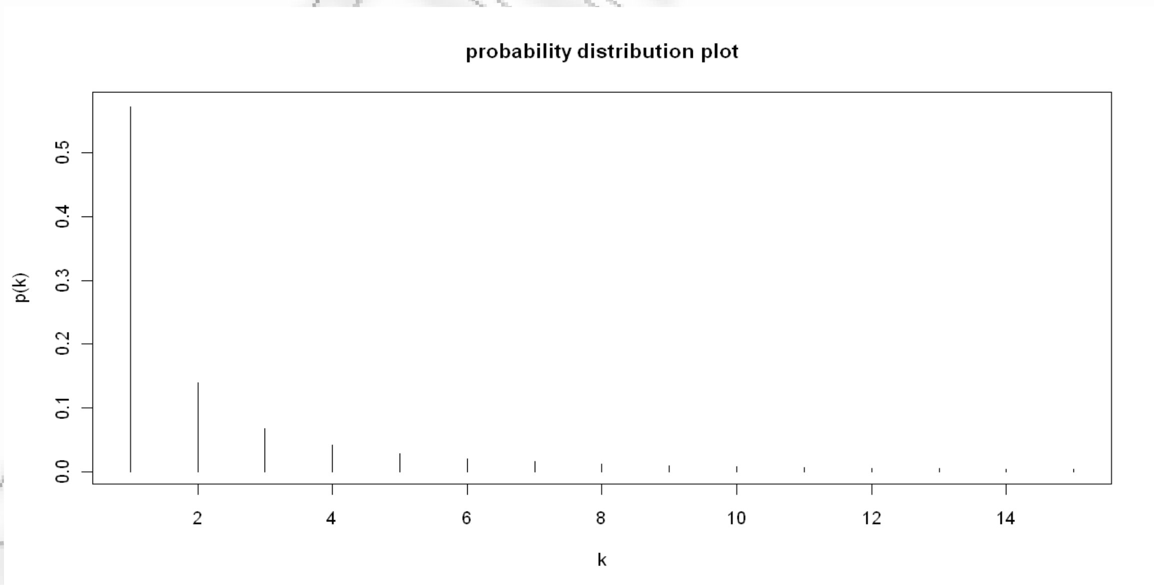
$$\theta = \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} - 1 = \frac{c\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)} - 1 = \frac{c\beta}{\lambda} - 1.$$

Στα 2 παραδείγματα που αναφέρθηκαν, οι αντίστοιχες τιμές για το περιθώριο ασφαλείας θ, θα είναι:

$$\theta_1 = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\theta_2 = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta_2 < \theta_1,$$

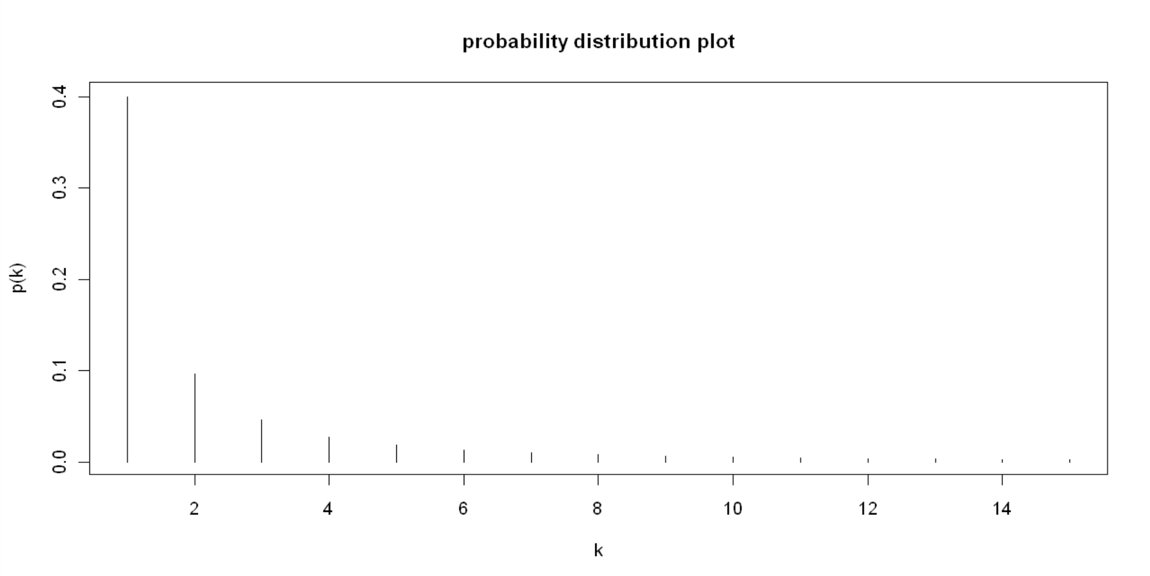
που η τελευταία αυτή ανισότητα, σημαίνει ότι, για το 2ο αυτό παράδειγμα, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, μπορεί να συμβεί «ευκολότερα» και «γρηγορότερα», δηλαδή με λιγότερες το πλήθος $\tilde{N}$ αποζημιώσεις, ακριβώς λόγω αυτής της μείωσης του περιθωρίου ασφαλείας θ. Βλέπουμε λοιπόν ότι, για το κλασσικό μοντέλο, η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, θα εξαρτάται άμεσα από την τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ, δηλαδή ισοδύναμα, θα εξαρτάται από τις ειδικές τιμές των παραμέτρων λ, β και c, αναφορικά με τις εκθετικές κατανομές των ενδιαμέσων χρόνων A_i και των ατομικών μεγεθών αποζημιώσεων X_i. Το αντίστοιχο γράφημα, για την τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, είναι το παρακάτω:



Από το τελευταίο γράφημα, βλέπουμε ότι ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα, όπως και για το αντίστοιχο γράφημα που δόθηκε προηγουμένως, για την τ.μ. $\tilde{N}$.

Παράδειγμα 3ο

Το 3ο παράδειγμα, αφορά πάλι την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 3)$, με ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Exp(\lambda = 4)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 2$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, για τις πρώτες 15 διακριτές τιμές της, είναι το παρακάτω:

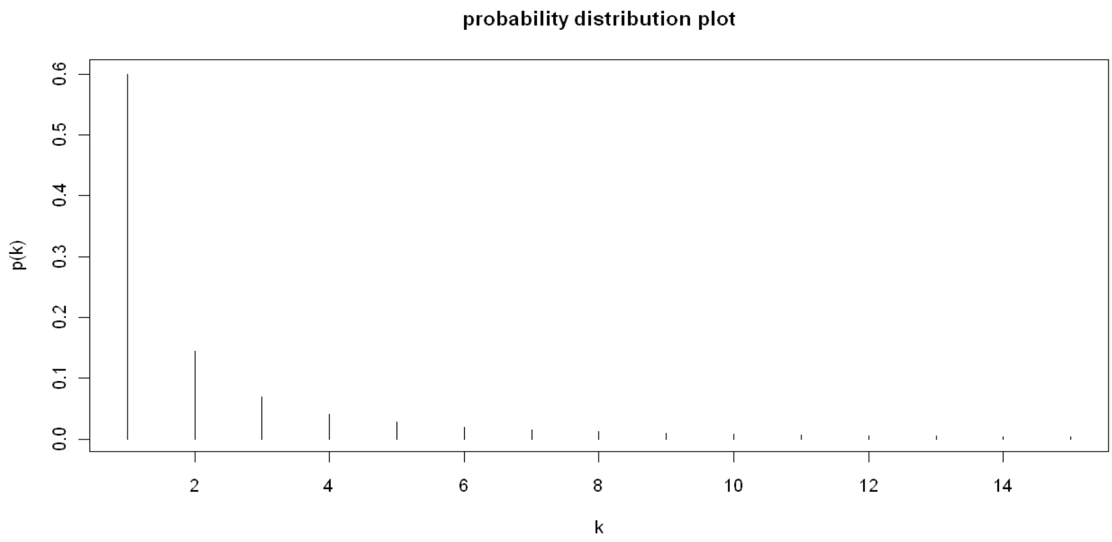


και βλέπουμε εδώ ότι και για αυτό το γράφημα, ισχύουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα, όπως και στα προηγούμενα δύο γραφήματα. Για την 3η αυτή περίπτωση, η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ, είναι:

$$\theta_3 = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_3 > \theta_2,$$

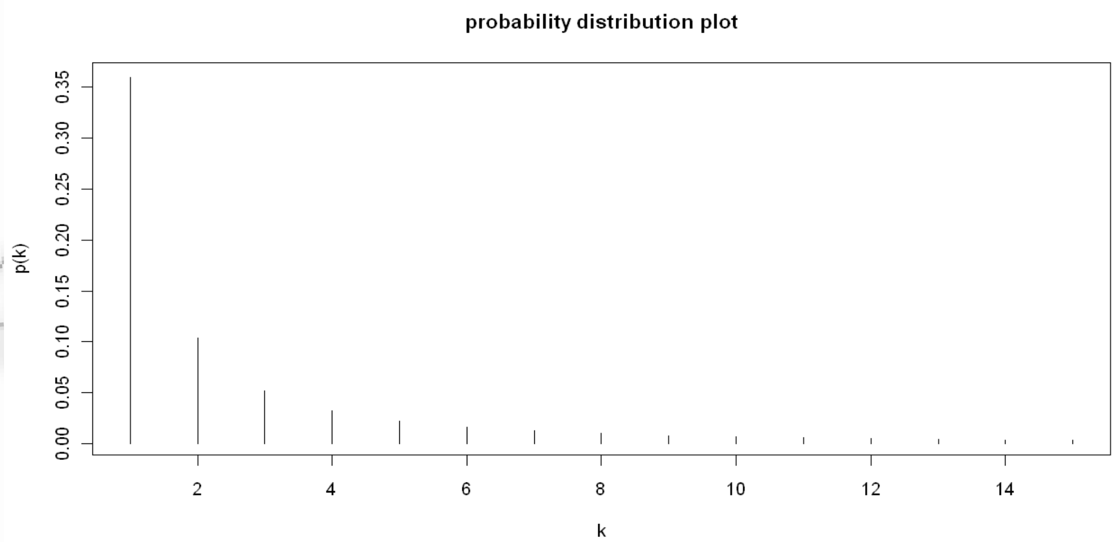
όπου, η τελευταία αυτή σχέση, σημαίνει ότι, για το 3ο αυτό παράδειγμα, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, μπορεί να συμβεί με περισσότερες το πλήθος αποζημιώσεις, ακριβώς λόγω της αύξησης του περιθωρίου ασφαλείας θ. Για το λόγο αυτό λοιπόν, στο τελευταίο διάγραμμα, οι τιμές των πιθανοτήτων $P(\tilde{N} = 1)$, $P(\tilde{N} = 2)$ και $P(\tilde{N} = 3)$, θα είναι μικρότερες, σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές τους, στο προηγούμενο διάγραμμα του 2ου παραδείγματος.

Το αντίστοιχο γράφημα για τη δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, είναι το εξής:



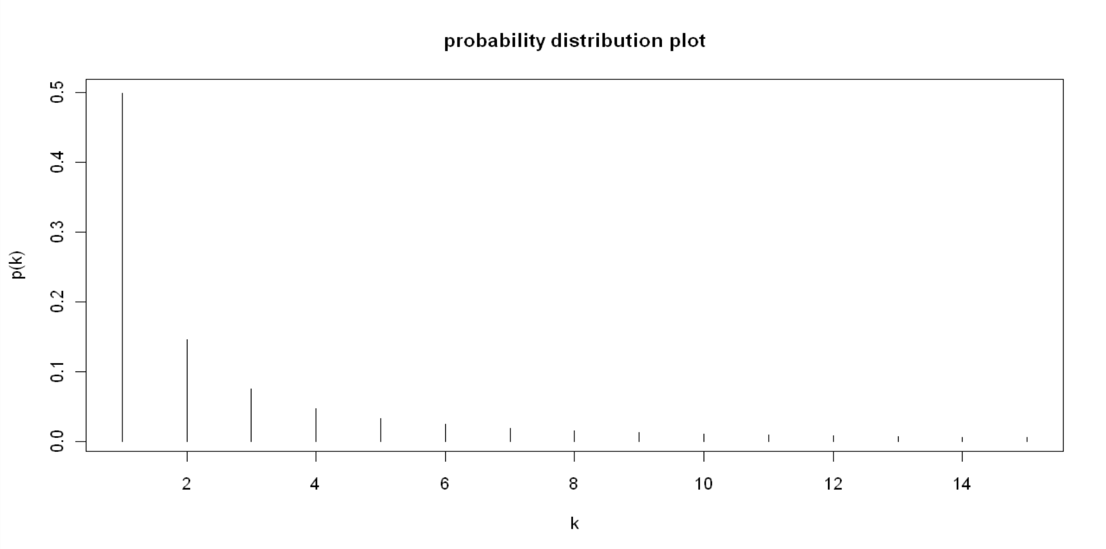
Παράδειγμα 4^{ο}

Το 4^{ο} παράδειγμα, αφορά τώρα την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 4)$, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Erlang\,(n = 2,\ \mu = 6)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 1$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, για τις πρώτες 15 διακριτές τιμές της, είναι το ακόλουθο:



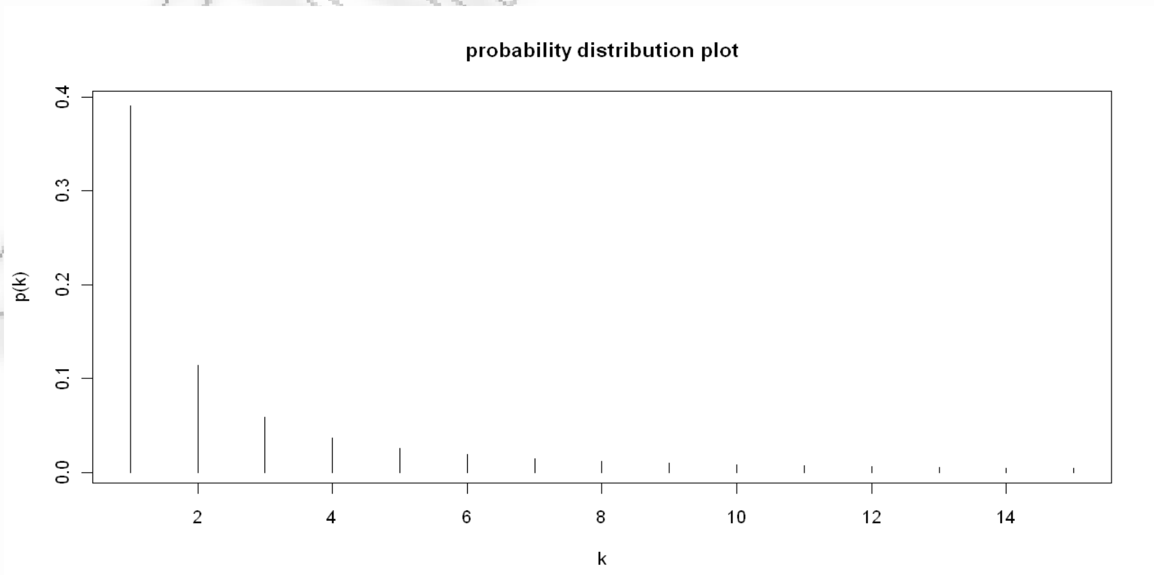
Από το τελευταίο διάγραμμα, φαίνεται ότι η συνάρτηση πιθανότητας της. $\tilde{N}$, είναι γνησίως φθίνουσα και παρουσιάζει μέγιστο στην 1η τιμή της, για *k*=1. Δηλαδή, η χρεωκοπία, είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί κατά την 1η χρονικά αποζημίωση.

Το αντίστοιχο γράφημα, για την τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, είναι το ακόλουθο:



Παράδειγμα 5ο

Το 5ο παράδειγμα, αφορά πάλι το ανανεωτικό μοντέλο, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 3)$, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Erlang(n = 2,\ \mu = 5)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 1$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, είναι το ακόλουθο:



Και για αυτό το γράφημα, θα ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα, σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, όπως προηγουμένως. Η βασική διαφορά στο τελευταίο γράφημα, σε σύγκριση με το προηγούμενο, είναι ότι, η μέγιστη τιμή $P(\tilde{N}=1)$, της συνάρτησης πιθανότητας $P(\tilde{N}=k)$, αυξήθηκε σε σχέση με το προηγούμενο γράφημα, όπως αυξήθηκαν και οι τιμές των πιθανοτήτων $P(\tilde{N}=2)$ και $P(\tilde{N}=3)$. Η βασική εξήγηση για αυτήν την αλλαγή είναι ότι, στην τελευταία αυτή περίπτωση, αυξήθηκε η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας *θ*, το οποίο υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση,

$$\theta = \frac{c\,E(A_i)}{E(X_i)} - 1 = \frac{c\left(\frac{n}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)} - 1 = \frac{c\,n\beta}{\mu} - 1 .$$

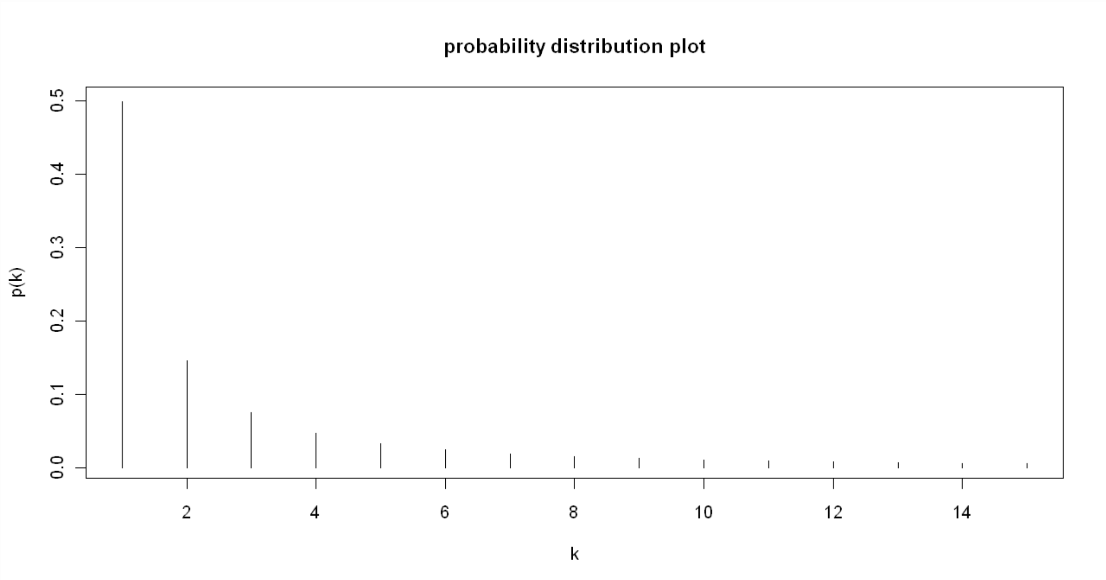
Στο προηγούμενο 4^o παράδειγμα, η τιμή του *θ*, ήταν:

$$\theta_4 = \frac{c\,n\beta}{\mu} - 1 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

ενώ, στο 5^o αυτό παράδειγμα, η τιμή του *θ*, είναι:

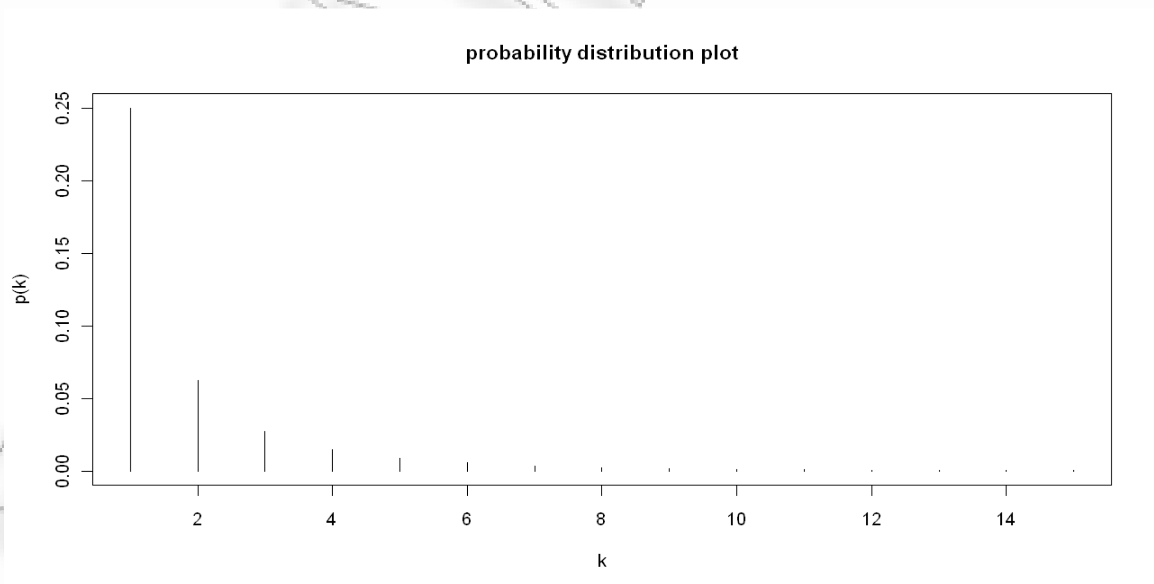
$$\theta_5 = \frac{c\,n\beta}{\mu} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \theta_5 < \theta_4,$$

ανισότητα η οποία σημαίνει ότι, για το 5^o αυτό παράδειγμα, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, μπορεί να συμβεί με λιγότερες το πλήθος $\tilde{N}$ αποζημιώσεις που θα εισέλθουν, ακριβώς λόγω αυτής της μείωσης του περιθωρίου ασφαλείας *θ*. Βλέπουμε εδώ λοιπόν ότι, για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, η κατανομή πιθανότητας του αριθμού $\tilde{N}$ των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, θα εξαρτάται άμεσα από την τιμή του περιθωρίου ασφαλείας *θ*, δηλαδή από τις ειδικές τιμές των παραμέτρων *μ, n, β* και *c*. Το αντίστοιχο γράφημα για την συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, θα είναι το παρακάτω:



Παράδειγμα 6^o

Το 6^o παράδειγμα, αφορά πάλι το ανανεωτικό μοντέλο, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 3)$, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Erlang(n = 2,\ \mu = 6)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 2$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, για τις πρώτες 15 τιμές της, θα είναι το ακόλουθο:



από το οποίο γράφημα, παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή $P(\tilde{N} = 1)$ της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, μειώθηκε σε σχέση με τα προηγούμενα δύο γραφήματα, όπως επίσης μειώθηκαν και οι τιμές των πιθανοτήτων $P(\tilde{N}=2)$ και $P(\tilde{N}=3)$. Η βασική εξήγηση για αυτήν την αλλαγή, είναι ότι, στην τελευταία αυτή περίπτωση, αυξήθηκε η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας *θ*,

$$\theta = \frac{cE(A_i)}{E(X_i)} - 1 = \frac{cn\beta}{\mu} - 1.$$

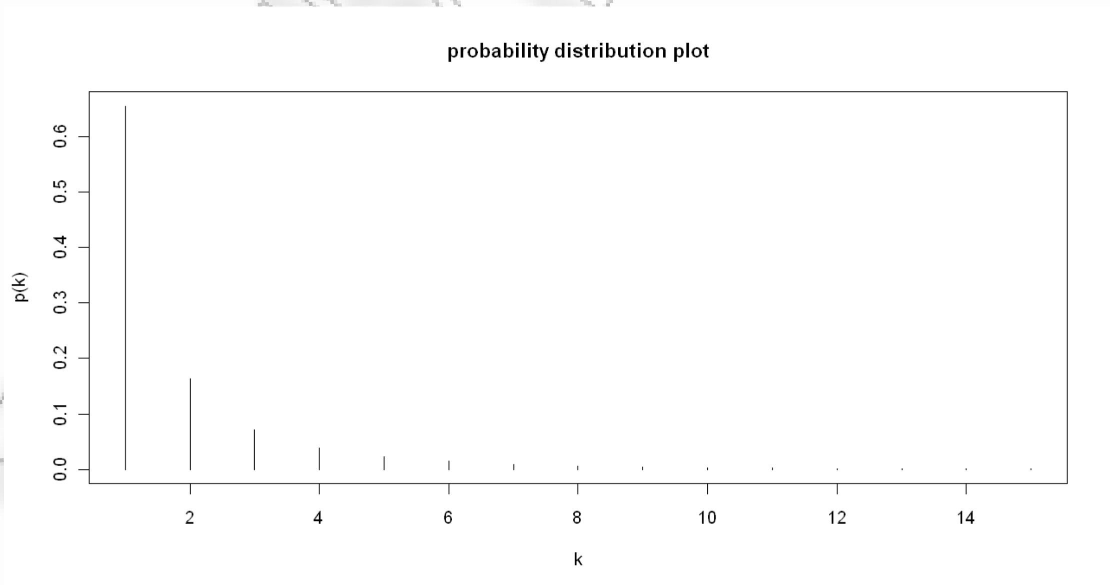
Στο τελευταίο παράδειγμα, το περιθώριο ασφαλείας *θ*, ήταν:

$$\theta_6 = \frac{cn\beta}{\mu} - 1 = \frac{12}{6} - 1 = 1 \Rightarrow \theta_6 = 1,$$

ενώ, στα προηγούμενα δύο παραδείγματα, οι τιμές του *θ*, ήταν αντίστοιχα:

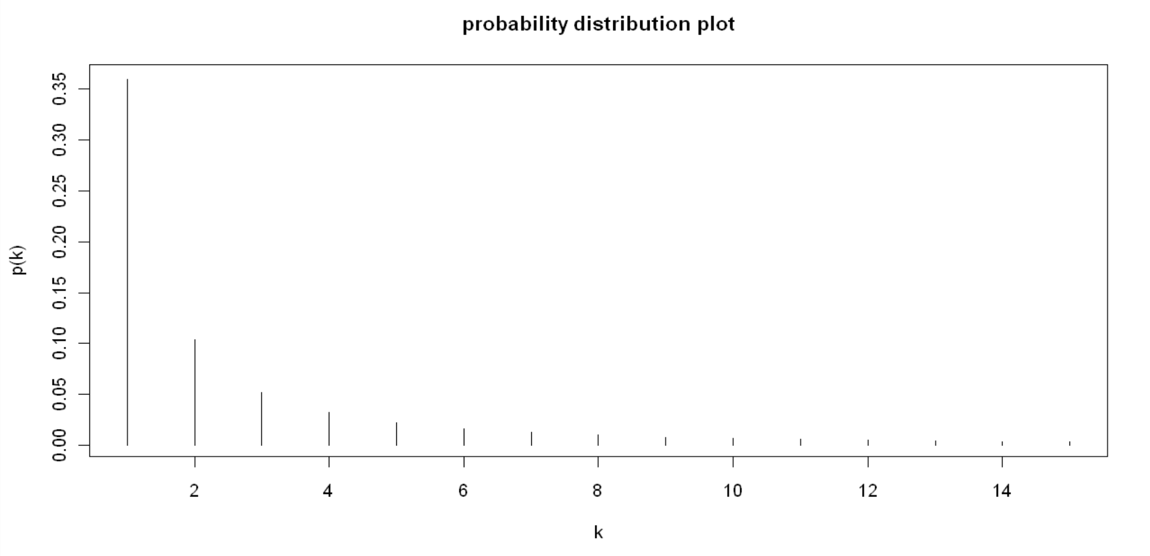
$$\theta_4 = \frac{1}{3},\ \theta_5 = \frac{1}{5},\ \theta_6 = 1 \Rightarrow \theta_6 > \theta_4,\ \theta_6 > \theta_5.$$

Άρα λοιπόν, προκύπτει εδώ το ίδιο συμπέρασμα, δηλαδή ότι οι ειδικές τιμές των παραμέτρων *μ*, *n*, *β* και *c*, άρα και η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας *θ*, θα επηρεάζουν τη μορφή της συνάρτησης πιθανότητας της $\tilde{N}$, για το ανανεωτικό μοντέλο, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές αποζημιώσεις. Το αντίστοιχο γράφημα πιθανότητας για την τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, θα είναι το παρακάτω:



Παράδειγμα 7ο

Το 7ο και τελευταίο παράδειγμα, αφορά πάλι την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις $X_i \sim Exp(\beta = 2)$, με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους $A_i \sim Erlang(n = 2,\ \mu = 6)$ και με ρυθμό ασφαλίστρων $c = 2$. Το γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, θα είναι το ακόλουθο:



από το οποίο διάγραμμα, προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα και συμπεράσματα για τη μορφή της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, όπως ακριβώς και στα προηγούμενα διαγράμματα.

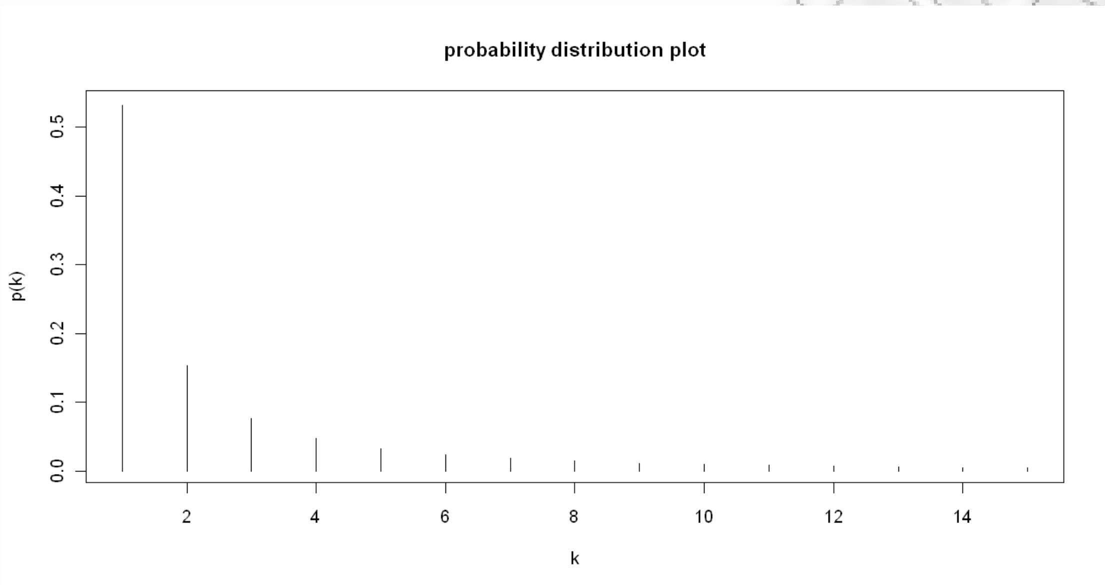
Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας *θ*, στο τελευταίο αυτό παράδειγμα, θα είναι:

$$\theta_7 = \frac{c\,n\beta}{\mu} - 1 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_7 = \frac{1}{3},\ \theta_6 = 1,\ \theta_7 < \theta_6,$$

και προκύπτει εδώ, με βάση τα παραπάνω, το συμπέρασμα ότι η μείωση του περιθωρίου ασφαλείας, στο 7ο παράδειγμα, σε σύγκριση με το αντίστοιχο περιθώριο ασφαλείας στο 6ο παράδειγμα, έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των πιθανοτήτων των πρώτων τιμών 1, 2 και 3, για την διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$. Με άλλα λόγια, το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας, στο τελευταίο 7ο παράδειγμα, είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί, με λιγότερες χρονικά αποζημιώσεις, δηλαδή πιο γρήγορα, σε σύγκριση με το αντίστοιχο ενδεχόμενο της χρεωκοπίας του προηγούμενου 6^ου^ παραδείγματος.

Το αντίστοιχο γράφημα πιθανότητας, για τη δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, θα είναι το ακόλουθο:



Σημειώνεται εδώ ότι, όλα τα συμπεράσματα και τα σχόλια που αναφέρθηκαν, σχετικά με τη σύγκριση μεταξύ των γραφημάτων της κατανομής πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, σε αυτά τα 4 παραδείγματα του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, ισχύουν επίσης και για τη σύγκριση των γραφημάτων για την αντίστοιχη δεσμευμένη τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$. Και αυτό διότι, όπως ήδη αναφέρθηκε σε ορισμένα σημεία του προηγούμενου 3^ου^ κεφαλαίου, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}_2 = \tilde{N} \mid \tilde{N} < \infty$, είναι ανάλογης μαθηματικής μορφής με την αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας της $\tilde{N}$.

Κεφάλαιο 5

Ο αναδρομικός τύπος για την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις, στην περίπτωση που ισχύει $u > 0$.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει αναφορά και ανάλυση, σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, η οποία δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων (αν πράγματι συμβεί), για την ειδική εκείνη περίπτωση, όπου υπάρχει (μη μηδενικό, δηλαδή αυστηρά θετικό) αρχικό απόθεμα, *u*>0, κατά την έναρξη του χρόνου εξέλιξης του χαρτοφυλακίου. Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αποζημιώσεων. Για την εναλλακτική (και πιο σύνθετη) περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων και με *Erlang* ενδιάμεσους χρόνους, δεν έχουν υπάρξει ακόμη ολοκληρωμένα και έτοιμα αποτελέσματα, σχετικά με την προαναφερθείσα συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$.

Έχει διαπιστωθεί, μετά από διεξοδική μελέτη (βλέπε *Frostig et al.*, 2011), ότι οι μαθηματικοί τύποι που δίνουν την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους, με αυστηρά θετικό αρχικό απόθεμα *u*>0, είναι αναδρομικοί και όχι άμεσοι και «κλειστοί» τύποι. Δηλαδή, αυτό σημαίνει ότι, οι αναδρομικοί αυτοί τύποι, ως συναρτήσεις των διακριτών τιμών, *k* =1,2,… για την διακριτή τ.μ. $\tilde{N}$, εμπεριέχουν και τις προηγούμενες διακριτές τιμές *k*–1, *k*–2, ... , ως ορίσματα της συνάρτησης πιθανότητας.

Επίσης, έχει βρεθεί ότι, οι αναδρομικοί αυτοί τύποι στο κλασσικό μοντέλο, με *u*>0, χρησιμοποιούν επιπλέον και εκείνους τους (όχι αναδρομικούς) τύπους που δίνουν την συγκεκριμένη συνάρτηση πιθανότητας, οι οποίοι αναφέρονται στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα και ισχύει u=0. Η σύνδεση αυτή των τύπων, για τις δύο περιπτώσεις όπου ισχύει u>0 και u=0, θα γίνει κατανοητή σε επόμενη ενότητα που θα ακολουθήσει σε αυτό το κεφάλαιο.

Η παρακάτω πρόταση, δίνει τον αναδρομικό τύπο για την συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους, στην περίπτωση όπου υπάρχει μη μηδενικό αρχικό απόθεμα, u>0.

Πρόταση 5.1

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, με εκθετικές αποζημιώσεις και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους, θεωρώντας ότι υπάρχει (μη μηδενικό) αρχικό απόθεμα u>0 στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, ο αναδρομικός τύπος για την συνάρτηση πιθανότητας, $p_k = P(\tilde{N} = k),\ k = 1, 2, \ldots$, της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, που δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων που θα καταβληθούν μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεωκοπία, θα είναι ο ακόλουθος:

$$p_k = e^{-\beta u} p_k^{(u=0)} + (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} p_{k-i}\, p_i^{(u=0)},\ \forall k = 2,3,\ldots,\ \forall u > 0, \qquad (5.1)$$

όπου:

β, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου και

$p_i^{(u=0)}$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\tilde{N}$, στο κλασσικό μοντέλο, για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση u=0. Αυτή η συνάρτηση πιθανότητας, όπως αναφέρθηκε σε σημείο του 3^{ου} κεφαλαίου της παρούσας εργασίας, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο,

$$p_i^{(u=0)} = P(\tilde{N} = i) = \left(\frac{\beta c + \lambda}{4\beta c}\right)\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c + \lambda)^2}\right]\left[\frac{\Gamma(i - \frac{1}{2})}{i!\ \Gamma(1/2)}\right],$$

$$\forall i = 1, 2, \ldots, k,\ \ \forall k = 2, 3, \ldots,\ \ u = 0,$$

η οποία, όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο 3° κεφάλαιο, μπορεί να γραφτεί και στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή,

$$p_i^{(u=0)} = \frac{\lambda^i (\beta c)^{i-1} (2i-2)!}{(\beta c + \lambda)^{2i-1} i!\,(i-1)!},\ u = 0,\ \forall i = 1,2,\dots,k,\ \forall k = 2,3,\dots,$$

όπου:

λ, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι του κλασσικού μοντέλου και *c*, ο μοναδιαίος ρυθμός πληρωμής των ασφαλίστρων.

Απόδειξη

Για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z;u)$ της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, έχει διαπιστωθεί (βλέπε *Frostig et al*., 2011), με βάση την δυϊκότητα (μαθηματική αντιστοιχία) του μοντέλου ουράς αναμονής που αναφέρθηκε στο 2° κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ότι ισχύει η ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$P(z;u) = P(z;0)\exp[(-\beta + \beta P(z;0))u],\ \forall u > 0,\ \beta > 0, \qquad (5.1)$$

όπου:

$P(z;0)$, είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $\tilde{N}$, για την ειδική εκείνη περίπτωση, όπου δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και ισχύει u=0 και *β*, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που έχουμε υποθέσει ότι ακολουθούν τα ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων.

Θεωρούμε τώρα, την ακόλουθη συνάρτηση δύο μεταβλητών, ως προς *z* και *u*,

$$\phi(z;u) = \exp[\beta P(z;0)u],\ \forall u \geq 0.$$

Είναι μάλλον προφανές ότι, στην περίπτωση που ισχύει u=0 (η οποία περίπτωση, αναπτύχθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια), τότε συνεπάγεται (σχετικά εύκολα) ότι:

$$\phi(z;0) = \exp(0) \Rightarrow$$

$$\phi(z;0) = 1,\ \text{για}\ u = 0. \qquad (5.2)$$

Επίσης, θέτοντας όπου z=0, στον παραπάνω τύπο της συνάρτησης $\phi(z;u)$ που ορίστηκε, παίρνουμε ότι:

$$\phi(0;u) = \exp[\beta P(0;0)u], \;\; \forall u \geq 0, \text{ για } z = 0. \qquad (5.3)$$

Όμως, η ποσότητα $P(0;0)$, που βρίσκεται μέσα στο εκθετικό μέρος της τελευταίας σχέσης (5.3), ισούται με το μηδέν. Η εξήγηση για αυτό, είναι η εξής:

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z;0)$ της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, στο σημείο z=0, για την περίπτωση που ισχύει u=0, ισούται (βλέπε *Κούτρας*, 2004) με την πιθανότητα,

$$P(0;0) = P(\tilde{N} = 0), \text{ για } z = 0, \; u = 0. \qquad (5.4)$$

Αλλά αυτή η πιθανότητα, $P(\tilde{N} = 0)$, ισούται με το μηδέν, αφού όπως έχει ήδη σημειωθεί, σε προηγούμενο κεφάλαιο, η τ.μ. $\tilde{N}$, παίρνει τις τιμές 1, 2, ... , στο σύνολο των θετικών ακεραίων και δε μπορεί να πάρει την τιμή 0. Επομένως λοιπόν, θα ισχύει η ακόλουθη σχέση,

$$P(\tilde{N} = 0) = 0 \qquad (5.5)$$

και συνδυάζοντας τώρα, τις δύο τελευταίες σχέσεις, (5.4) και (5.5), έπεται εδώ ότι θα ισχύει,

$$P(0;0) = 0, \qquad (5.6)$$

για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z;0)$ της διακριτής τ.μ. $\tilde{N}$, στο σημείο z=0.

Για την συνάρτηση πιθανότητας $P(\tilde{N} = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, της $\tilde{N}$, για την περίπτωση που ισχύει u>0, στο κλασσικό μοντέλο, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικά ατομικά μεγέθη αποζημιώσεων, έστω ο συμβολισμός,

$$p_k^{(u>0)} = P(\tilde{N} = k), \; k = 1, 2, \ldots, \; u > 0.$$

Με βάση τότε, την αρχική σχέση (5.1) και την συνάρτηση $\phi(z;u)$ που ορίστηκε, είναι σχετικά εύκολο να διαπιστωθεί ότι, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z;u)$ της $\tilde{N}$, μπορεί να γραφεί, στην ακόλουθη (ισοδύναμη) μορφή:

$$P(z;u) = [\exp(-\beta u)]P(z;0)\phi(z;u), \;\; \forall u > 0, \;\; \beta > 0 \,. \qquad (5.7)$$

Για να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $p_k^{(u>0)} = P(\tilde{N} = k),\ k = 1, 2, \ldots$, της τ.μ. $\tilde{N}$, θα πρέπει να υπολογιστούν, οι παράγωγοι *k*–τάξης της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P(z;u)$ της $\tilde{N}$, ως προς τη μεταβλητή *z*, στο σημείο *z*=0. Και αυτό, επειδή (βλέπε *Κούτρας*, 2004), η συνάρτηση πιθανότητας μίας διακριτής τ.μ., μπορεί να προκύψει, υπολογίζοντας όλες τις παραγώγους της πιθανογεννήτριας της τ.μ., στο σημείο 0. Έτσι λοιπόν, θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$p_1^{(u>0)} = P(\tilde{N} = 1) = \frac{\partial}{\partial z} P(z;u)\Big|_{z=0},\ \forall u > 0,$$

$$p_2^{(u>0)} = P(\tilde{N} = 2) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z;u)\Big|_{z=0},\ \forall u > 0,$$

$$p_3^{(u>0)} = P(\tilde{N} = 3) = \frac{\partial^3}{\partial z^3} P(z;u)\Big|_{z=0},\ \forall u > 0,$$

$$\ldots$$

$$p_r^{(u>0)} = P(\tilde{N} = r) = \frac{\partial^r}{\partial z^r} P(z;u)\Big|_{z=0},\ \forall u > 0,\ \forall r \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Παρατηρώντας την τελευταία σχέση (5.7), βλέπουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z;u)$ της τ.μ. $\tilde{N}$, εκφράζεται ως ένα γινόμενο, των εξής τριών όρων:

$\exp(-\beta u)$, που είναι σταθερή ποσότητα ως προς τη μεταβλητή *z*,

$P(z;0)$, που είναι σταθερή ποσότητα ως προς τη μεταβλητή *u* και

$\phi(z;u)$, που περιέχει και τις δύο μεταβλητές *z* και *u* και είναι η συνάρτηση που ορίστηκε προηγουμένως, με τύπο,

$$\phi(z;u) = \exp[\beta P(z;0)u],\ \forall u \geq 0.$$

Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P(z;u)$ ως προς τη μεταβλητή *z*, στο σημείο *z*=0, με βάση την τελευταία διαπίστωση που αναφέρθηκε για τη μορφή της $P(z;u)$, εφαρμόζουμε τον κανόνα του *Leibnitz* (βλέπε *Frostig et al.*, 2011), για την παράγωγο του γινομένου συναρτήσεων. Με βάση λοιπόν τον κανόνα αυτόν, για την παράγωγο *k*–τάξης της $P(z;u)$, ως προς *z*, στο σημείο *z*=0, θα ισχύει η παρακάτω μαθηματική σχέση:

$$\frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\ \frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\right]\Big|_{z=0},\ \forall u>0$$

$$= e^{-\beta u}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right],\ \forall u>0 \qquad (5.8)$$

όπου:

$\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)$, είναι η παράγωγος *i*–τάξης, ως προς *z*, της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P(z;0)$, στην περίπτωση που ισχύει *u*=0, και

$\frac{d^{k-i}}{dz^{k-i}}\phi(z;u)$, είναι η παράγωγος (*k*–*i*)–τάξης, ως προς *z*, της συνάρτησης $\phi(z;u)$ που ορίστηκε προηγουμένως.

Το άθροισμα της τελευταίας σχέσης (5.8), ως προς τον δείκτη *i*, μπορεί να γραφεί εναλλακτικά, ως ακολούθως:

$$\frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$= e^{-\beta u}\binom{k}{0}\left[P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k}}{\partial z^{k}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\binom{k}{k}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$= e^{-\beta u}\cdot 1\cdot\left[P(0;0)\right]\left[\frac{\partial^{k}}{\partial z^{k}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\cdot 1\cdot\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^k}{dz^k} P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\left[P(0;0)\right]\left[\frac{\partial^k}{\partial z^k}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]+$$

$$+\ e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+\quad e^{-\beta u}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right],\ \forall u>0. \quad (5.9)$$

Αλλά σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση (5.6), ισχύει $P(0;0)=0$, οπότε με βάση αυτό το αποτέλεσμα, η τελευταία σχέση (5.9), θα γίνει:

$$(5.9):\ \frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\cdot 0\cdot\left[\frac{\partial^k}{\partial z^k}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+e^{-\beta u}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right],\ \forall u>0. \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας επίσης (βλέπε *Κούτρας*, 2004), την ακόλουθη σχέση, για την παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης,

$$p_k^{(u>0)} = P(\tilde{N}=k) = \frac{\frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0}}{k!},\ \forall k=1,2,\ldots,\ \forall u>0,$$

έπεται ότι θα ισχύει:

$$\frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = (k!)\,p_k^{(u>0)},\ \forall k=1,2,\ldots, \quad (5.11)$$

και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της τελευταίας σχέσης (5.11), στην προηγούμενη (5.10), θα προκύψει ότι:

$$(5.10):\ \frac{d^k}{dz^k}P(z;u)\Big|_{z=0} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+e^{-\beta u}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right]\Rightarrow$$

$$\overset{(5.11)}{\Rightarrow}\ (k!)\,p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\left[\left[\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]\right]$$

$$+e^{-\beta u}\left[\frac{d^k}{dz^k}P(z;0)\Big|_{z=0}\right]\left[\phi(0;u)\right],\ \forall u>0. \qquad (5.12)$$

Επίσης, θα ισχύει (βλέπε *Κούτρας*, 2004) και η ακόλουθη σχέση,

$$p_i^{(u=0)} = P(\tilde{N}=i) = \frac{\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0}}{i!},\ \forall i=1,2,\ldots,\ u=0,$$

οπότε, παίρνουμε πάλι ότι:

$$\frac{d^i}{dz^i}P(z;0)\Big|_{z=0} = (i!)\,p_i^{(u=0)},\ \forall i=1,2,\ldots,\ u=0, \qquad (5.13)$$

και με βάση την τελευταία σχέση (5.13), η προηγούμενη (5.12), θα γίνει:

$$(5.12):\ (k!)\,p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}(i!)\,p_i^{(u=0)}\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\,(k!)\,p_k^{(u=0)}\ \left[\phi(0;u)\right],\ \forall u>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k!)\,p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}\right](i!)\,p_i^{(u=0)}\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}\,(k!)\,p_k^{(u=0)}\ \left[\phi(0;u)\right],\ \forall u>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = \frac{1}{k!}\ e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}\right](i!)\,p_i^{(u=0)}\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ \frac{1}{k!}\, e^{-\beta u}\,(k!)\,p_k^{(u=0)}\ [\phi(0;u)],\ \forall u>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{k!\,i!}{k!\,i!(k-i)!}\right]p_i^{(u=0)}\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)}\,[\phi(0;u)],\ \forall u>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{1}{(k-i)!}\right]p_i^{(u=0)}\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)}\,[\phi(0;u)],\ \forall u>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)}\,[\phi(0;u)],\ \forall u>0 \qquad (5.14)$$

Λόγω των προηγούμενων σχέσεων (5.3) και (5.6), η ποσότητα $\phi(0;u)$, θα είναι:

$$(5.3):\ \phi(0;u)=\exp[\beta P(0;0)u],\ \forall u\geq 0,\ \text{για}\ z=0\ \overset{(5.6)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\ \phi(0;u)=\exp(\beta\cdot 0\cdot u)=\exp(0)=1,\ \forall u\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \phi(0;u)=1,\ \forall u\geq 0. \qquad (5.15)$$

Επομένως, με βάση την τελευταία σχέση (5.15), η προηγούμενη (5.14), θα γίνει:

$$(5.14):\ p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)}\,[\phi(0;u)],\ \forall u>0$$

$$\overset{(5.15)}{\Rightarrow}\ p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)}\cdot 1,\ \ \forall u>0$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+\ e^{-\beta u}p_k^{(u=0)},\ \ \forall u>0. \qquad (5.16)$$

Επιπλέον, για την συνάρτηση $\phi(z;u)$, που ορίστηκε προηγουμένως, με τύπο:

$$\phi(z;u) = \exp[\beta P(z;0)u], \ \forall u \geq 0,$$

μπορεί να αποδειχθεί (βλέπε *Frostig et al.*, 2011), εφαρμόζοντας και τον γνωστό κανόνα του *Leibnitz* για την παράγωγο του γινομένου συναρτήσεων, ότι η παράγωγος *k*–τάξης της συνάρτησης $\phi(z;u)$, ως προς τη μεταβλητή z, δίνεται από τον ακόλουθο αθροιστικό και αναδρομικό τύπο,

$$\frac{\partial^k \phi(z;u)}{\partial z^k} = (\beta u)\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left[\frac{\partial^{k-j}\phi(z;u)}{\partial z^{k-j}}\right]\left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j}\right], \ \forall u > 0, \quad (5.17)$$

όπου β, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν οι ατομικές αποζημιώσεις, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

Θέτοντας τώρα, όπου $k \to k-i$, στον τελευταίο τύπο (5.17), θα προκύψει:

$$\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u) = (\beta u)\sum_{j=1}^{k-i}\binom{k-i}{j}\left[\frac{\partial^{(k-i)-j}\phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}}\right]\left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j}\right], \ \forall u > 0. \quad (5.18)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση (5.18), στην προηγούμενη (5.16), παίρνουμε ότι:

$$(5.16): p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}}\phi(z;u)\Big|_{z=0}\right]$$

$$+ e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u > 0 \overset{(5.18)}{\Rightarrow}$$

$$p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\left\{(\beta u)\sum_{j=1}^{k-i}\binom{k-i}{j}\left[\frac{\partial^{(k-i)-j}\phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}}\right]\left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j}\right]\right\}$$

$$+ e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\sum_{j=1}^{k-i}\binom{k-i}{j}\left[\frac{\partial^{(k-i)-j}\phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}}\right]\left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j}\right]$$

$$+ e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}\left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!}\right]\binom{k-i}{j}\left[\frac{\partial^{(k-i)-j}\phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}}\right]\left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j}\right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0 \ \Rightarrow$$

$$p_k^{(u>0)} = (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!} \right] \left[\frac{(k-i)!}{j!\,((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right] \left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j} \right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{j!\,((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right] \left[\frac{d^j P(z;0)}{dz^j} \right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0 \qquad (5.19)$$

Ανακαλώντας τη γνωστή σχέση που αναφέρθηκε για την πιθανογεννήτρια,

$$p_j^{(u=0)} = P(\tilde{N}=j) = \frac{\dfrac{d^j}{dz^j} P(z;0)\Big|_{z=0}}{j!}, \ \forall j=1,2,\dots, \ u=0,$$

$$\Rightarrow \frac{d^j}{dz^j} P(z;0)\Big|_{z=0} = (j!)\, p_j^{(u=0)}, \ \forall j=1,2,\dots, \ u=0, \qquad (5.20)$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση (5.20), στην προηγούμενη (5.19), θα πάρουμε ότι:

$$(5.19): p_k^{(u>0)} =$$

$$= (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{j!\,((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right] \left[(j!)\, p_j^{(u=0)} \right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{(j!)\, p_i^{(u=0)} p_j^{(u=0)}}{j!\,((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u) e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{p_i^{(u=0)} p_j^{(u=0)}}{((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+\, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u>0. \qquad (5.21)$$

Κάνοντας τώρα, την εναλλαγή των δεικτών άθροισης i και j, στο τελευταίο διπλό άθροισμα της σχέσης (5.21), θα έχουμε για τους δύο δείκτες, ότι:

$$i = 1, 2, \ldots k-1, \;\; j = 1, 2, \ldots k-i \;\Rightarrow\; j = 1, 2, \ldots k-1, \;\; i = 1, 2, \ldots k-j,$$

και επομένως, με τα νέα αυτά όρια άθροισης των δύο δεικτών, η τελευταία σχέση (5.21), θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$(5.21): p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \left[\frac{p_i^{(u=0)} p_j^{(u=0)}}{((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \;\; \forall u > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} \left[\frac{p_i^{(u=0)} p_j^{(u=0)}}{((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \;\; \forall u > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} p_j^{(u=0)} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \;\; \forall u > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(u=0)} \sum_{i=1}^{k-j} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{((k-i)-j)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-i)-j} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-i)-j}} \right]$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \;\; \forall u > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; p_k^{(u>0)} = (\beta u)e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(u=0)} \sum_{i=1}^{k-j} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{((k-j)-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-j)-i} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-j)-i}} \right]$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u) \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(u=0)} \left\{ e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-j} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{((k-j)-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-j)-i} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-j)-i}} \right] \right\}$$

$$+ \, e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \;\; \forall u > 0. \qquad (5.22)$$

Σχετικά με την προηγούμενη σχέση (5.16), μπορεί να διαπιστωθεί, γράφοντας τήν σε ένα ενιαίο άθροισμα, χωρίς δεύτερο προσθετέο ότι, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(5.16): p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}} \phi(z;u) \Big|_{z=0} \right] + e^{-\beta u} p_k^{(u=0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}} \phi(z;u) \Big|_{z=0} \right], \ \forall u > 0. \qquad (5.23)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις τελευταίες σχέσεις (5.22) και (5.23), παρατηρούμε ότι, το εσωτερικό κομμάτι μέσα στην αγκύλη της σχέσης (5.22), είναι η πιθανότητα $p_{k-j}^{(u>0)}$, αντικαθιστώντας δηλαδή, στη σχέση (5.23), τον δείκτη *k*, με τον δείκτη *k–j*. Επομένως τελικά, η σχέση (5.22), λαμβάνοντας υπ'όψιν και την τελευταία παρατήρηση που αναφέρθηκε, θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$(5.22): p_k^{(u>0)} = (\beta u) \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(u=0)} \left\{ e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k-j} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{((k-j)-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{(k-j)-i} \phi(z;u)}{\partial z^{(k-j)-i}} \right] \right\}$$

$$+ e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u > 0, \ \forall k = 2, 3, \ldots \overset{(5.23)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow p_k^{(u>0)} = (\beta u) \sum_{j=1}^{k-1} p_j^{(u=0)} p_{k-j}^{(u>0)} + e^{-\beta u} p_k^{(u=0)}, \ \forall u > 0, \ \forall k = 2, 3, \ldots . \quad (5.24)$$

και ισχύει,

$$p_1^{(u>0)} = P(\tilde{N} = 1) = e^{-\beta u} p_1^{(u=0)}, \ \forall u > 0, \ \beta > 0, \qquad (5.25)$$

από την προηγούμενης σχέσης (5.23),

$$(5.23): p_k^{(u>0)} = e^{-\beta u} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{p_i^{(u=0)}}{(k-i)!} \right] \left[\frac{\partial^{k-i}}{\partial z^{k-i}} \phi(z;u) \Big|_{z=0} \right], \ \forall u > 0,$$

θέτοντας όπου *k* =1.

Η τελευταία σχέση (5.24) που προέκυψε, δίνει τον αναδρομικό τύπο, για την συνάρτηση πιθανότητας, $p_k^{(u>0)} = P(\tilde{N} = k), \forall k = 2, 3, \ldots, \forall u > 0$, της τ.μ. $\tilde{N}$, για την περίπτωση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου, με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους και εκθετικές ατομικές αποζημιώσεις. Ο τύπος αυτός, συνδέει την πιθανότητα $p_k^{(u>0)}$ της τιμής (*k*), με τις πιθανότητες $p_{k-j}^{(u>0)}$, των προηγούμενων τιμών (*k–j*), για *j* = 1, 2, …, (*k*–1) και ∀ *k* = 2, 3, 4, … . Σε αυτόν τον αναδρομικό τύπο, συμμετέχουν οι πιθανότητες $p_j^{(u=0)} = P(\tilde{N} = j), \forall j = 1, 2, \ldots, u = 0,$ οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν, σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο, ο οποίος αναφέρθηκε στο 3ο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας,

$$p_j^{(u=0)} = P(\tilde{N} = j) = \left(\frac{\beta c + \lambda}{4\beta c}\right)\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\beta c+\lambda)^2}\right]\left[\frac{\Gamma(j-\frac{1}{2})}{(j!)\,\Gamma(1/2)}\right], \ \forall j = 1,2,\ldots,$$

ή εναλλακτικά, μπορούν να υπολογιστούν, σύμφωνα με τον ακόλουθο ισοδύναμο τύπο,

$$p_j^{(u=0)} = \frac{\lambda^j(\beta c)^{j-1}(2j-2)!}{(\beta c+\lambda)^{2j-1}\, j!\,(j-1)!}, \ \forall j = 1,2,\ldots,$$

όπου,

$$p_1^{(u=0)} = \frac{\lambda^1(\beta c)^0\, 0!}{(\beta c+\lambda)^{2-1} 1!\, 0!} = \frac{\lambda}{\beta c+\lambda}, \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p_1^{(u=0)} = \frac{\lambda}{\beta c+\lambda}, \ u=0,\ \beta>0,\ c>0,\ 0<\lambda<\beta c,$$

για τον υπολογισμό της πιθανότητας $p_1^{(u>0)} = P(\tilde{N}=1,\ u>0) = e^{-\beta u} p_1^{(u=0)}$, της τελευταίας σχέσης (5.25).

Επίσης, στον αναδρομικό τύπο που αναφέρθηκε, συμμετέχει και η εκθετική ποσότητα $e^{-\beta u}$, όπου *β*, είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που έχουμε υποθέσει ότι ακολουθούν τα ατομικά μεγέθη των αποζημιώσεων, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

Επίλογος

Τα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, στη θεωρία χρεωκοπίας και στον αναλογισμό γενικότερα, αποτελούν ένα αρκετά ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης και ανάλυσης. Και αυτό, λόγω του ότι τα κλασσικά μοντέλα, σε ορισμένες ειδικές αναλογιστικές περιπτώσεις και εφαρμογές, δεν φαίνεται να πληρούν τις προϋποθέσεις, σχετικά με τη λειτουργία ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στην πράξη. Ειδικότερα, η διακριτή τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, για την περίπτωση των ανανεωτικών μοντέλων, μπορεί να παίξει αρκετά σημαντικό ρόλο, για τη μελέτη και την ανάλυση ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων, κατά την πάροδο του χρόνου εξέλιξής του.

Ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα πληρωθούν μέχρι τη στιγμή της χρεωκοπίας, αν πράγματι συμβεί η χρεωκοπία στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, ως διακριτή και θετική ακέραιη τ.μ., μπορεί να παρέχει σημαντικές πληροφορίες, ως προς τον χρόνο «επιβίωσης» του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου και ως προς το πόσες αποζημιώσεις θα προκαλέσουν τη χρεωκοπία του (αν αυτή συμβεί). Συγκεκριμένα, τα τελευταία χρόνια, στη διεθνή βιβλιογραφία, έχει πραγματοποιηθεί εκτεταμένη έρευνα και μελέτη, για την κατανομή πιθανότητας αυτής της τ.μ., για την περίπτωση των ανανεωτικών μοντέλων. Οι περισσότερες σχέσεις και εκφράσεις που έχουν βρεθεί, είναι προσεγγιστικές ή αναδρομικές, και όχι άμεσες, με τη μορφή ενός «κλειστού» τύπου. Η ιδιαιτερότητα αυτή λοιπόν, καθιστά απολύτως απαραίτητη, τη διεξαγωγή επιπλέον έρευνας, για την εύρεση της κατανομής αυτής της τ.μ..

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, παρουσιάστηκε αναλυτικά, η μελέτη της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία, μόνο για την ειδική εκείνη περίπτωση, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων, ακολουθούν την κατανομή *Erlang*. Και αυτό επειδή οι υπόλοιπες περιπτώσεις κατανομών των ενδιάμεσων χρόνων, για τα ανανεωτικά μοντέλα, βρίσκονται ήδη υπό μελέτη, στη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία, και δεν έχουν παράγει ακόμα έτοιμα και άμεσα θεωρητικά αποτελέσματα. Ελπίζουμε ότι στα επόμενα χρόνια, θα έχει ολοκληρωθεί η εξειδικευμένη μελέτη αυτών των υπόλοιπων περιπτώσεων κατανομών, σχετικά με τα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, προς όφελος της αναλογιστικής επιστήμης.

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

[1] Κούτρας Μ.Β. (2001) *Εισαγωγή στη Συνδυαστική*, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

[2] Κούτρας Μ.Β. (2002) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και εφαρμογές, Μέρος Ι*, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

[3] Κούτρας Μ.Β. (2004) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και εφαρμογές, Μέρος ΙΙ*, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

[4] Πολίτης Κ. (2005) *Σημειώσεις στη Θεωρία Χρεωκοπίας*, Παν/μιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

[5] Φλουρής Κ. (2010) *Διπλωματική Εργασία με θέμα, «Η κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεωκοπία»*, Παν/μιο Πειραιώς, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

[6] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2009) *Σημειώσεις στο μάθημα Θεωρία Κινδύνου Ι*, Παν/μιο Πειραιώς, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

[7] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2010) *Σημειώσεις στο μάθημα Θεωρία Κινδύνου ΙΙ*, Παν/μιο Πειραιώς, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

B. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

[8] Asmussen S. (2000) *Ruin probabilities*, World Scientific, Singapore.

[9] Egidio dos Reis A.D. (2000) *How many times does it take to get ruined and recovered*, Insurance: Mathematics and Economics, **31**, 235-248.

[10] Frostig E. (2004) *Upper bounds at the expected time to ruin and the expected recovery time*, Advances in Applied Probability, **36**, 377-397.

[11] Frostig E., Pitts S.M., Politis K. (2011) *The time to ruin and the number of claims until ruin for phase-type claims* (submitted), Mathematics subject classification.

[12] Hesselager O. (1994) *A recursive procedure for calculation of some compound distributions*, ASTIN Bulletin, **24**, 19-32.

[13] Klugman S., Panjer H., Willmot G. (2004) *Loss models from data to decisions, Wiley Series in Probability and Statistics*.

[14] Panjer H. (1981) *Recursive evaluation of a family of compound distributions, ASTIN Bulletin*, **12**, 22-26.

[15] Panjer H.H., Willmot G.E. (1982) *Recursions for compound distributions, ASTIN Bulletin*, **13**, 1-11.

[16] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999) *Stochastic Processes for Insurance and Finance, Wiley Series in Probability and Statistics*.

[17] Sundt B., Jewell W.S. (1981) *Further results on recursive evaluation of compound distributions, ASTIN Bulletin*, **12**, 27-39.

[18] Willmot G.E. (1988) *Sundt and Jewell's family of discrete distributions, ASTIN Bulletin*, **18**, 17-29.