



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
Μ.Π.Σ. ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

**«Αποτίμηση δικαιωμάτων με στοχαστική
μεταβλητότητα και αντιστάθμιση κινδύνου»**

Ελένη Δρόσου

Αρ. Μητρώου: ΜΧΡΗ1004

Ιανουάριος 2012

Επιβλέπων

Νικόλαος Εγγλέζος

Μέλη Επιτροπής

Γεώργιος Σκιαδόπουλος

Δημήτριος Μαλλιαρόπουλος

Περίληψη

Από εμπειρικές έρευνες για τη μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών, γνωρίζουμε ότι η μεταβλητότητα αλλάζει τυχαία. Σημαντική πρόοδος έχει γίνει τα τελευταία χρόνια για την εύρεση μοντέλων αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο, του οποίου η μεταβλητότητα ακολουθεί στοχαστική διαδικασία. Η διπλωματική αυτή εργασία αναλύει τα δύο πιο σημαντικά μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων με στοχαστική μεταβλητότητα, το μοντέλο των Hull και White και το μοντέλο του Heston, και διερευνά τις αποκλίσεις αυτών των μοντέλων από το υπόδειγμα Black – Scholes, το οποίο υποθέτει σταθερή μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Επιπλέον, εξετάζουμε την ευαισθησία των τιμών των δύο μοντέλων στις μεταβολές των παραμέτρων τους. Ακόμα, αναλύουμε δύο ακόμη μεθόδους αποτίμησης δικαιωμάτων, τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo και τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Στη συνέχεια, αναλύουμε αποτελεσματικές μεθόδους αντιστάθμισης κινδύνου για το καθένα από τα δύο μοντέλα. Χρησιμοποιούμε μεθόδους είτε με ένα μοναδικό μέσο αντιστάθμισης, είτε με επιπλέον μέσα, ώστε να απαλειφθεί όχι μόνο ο κίνδυνος της μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου, αλλά και ο κίνδυνος της μεταβολής της μεταβλητότητας. Παρατηρούμε ότι για να είναι αποτελεσματική η αντιστάθμιση πρέπει να γίνεται συνεχής εξισορρόπηση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Τέλος, υπολογίζουμε το σφάλμα αντιστάθμισης για να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των μεθόδων.

Λέξεις – Κλειδιά

Αποτίμηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Στοχαστική Μεταβλητότητα

Μοντέλα Αποτίμησης δικαιωμάτων

Θεωρητική τιμή δικαιώματος

Προσομοίωση Monte Carlo

Μέθοδος αποτίμησης Πεπερασμένων Διαφορών

Αντιστάθμιση κινδύνου με μοναδικό μέσο

Αντιστάθμιση Δέλτα ουδετερότητας

Περιεχόμενα

| | |
|--|---------|
| 1. Εισαγωγή..... | σελ. 5 |
| 1.1 Βασικά στοιχεία..... | σελ. 7 |
| 1.2 Αποτίμηση υπό συνθήκες χωρίς arbitrage..... | σελ. 11 |
| 1.3 Το μοντέλο Black & Scholes (B&S)..... | σελ. 14 |
| 1.4 Τα μειονεκτήματα του μοντέλου B&S..... | σελ. 19 |
| 2. Στοχαστική Μεταβλητότητα..... | σελ. 20 |
| 2.1 Η μερική διαφορική εξίσωση με στοχαστική μεταβλητότητα | σελ. 21 |
| 2.2 Μοντέλο Hull & White..... | σελ. 27 |
| 2.3 Μοντέλο Heston..... | σελ. 33 |
| 3. Εφαρμογές και αριθμητικά αποτελέσματα | σελ. 42 |
| 3.1 Προσομοίωση Monte Carlo..... | σελ. 42 |
| 3.2 Προσέγγιση ολοκληρώματος (μοντέλο Heston)..... | σελ. 49 |
| 3.3 Ιδιότητες των τιμών του μοντέλου Hull&White..... | σελ. 52 |
| 3.4 Ιδιότητες των τιμών του μοντέλου του Heston..... | σελ. 54 |
| 3.5 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών | σελ. 57 |
| 4. Αντιστάθμιση κινδύνου..... | σελ. 65 |
| 4.1 Μοντέλο Hull & White..... | σελ. 65 |
| 4.2 Μοντέλο Heston..... | σελ. 69 |

| | |
|--------------------------------------|---------|
| 4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα.....σελ. | 74 |
| 5. Συμπεράσματα.....σελ. | 77 |
| 7. Βιβλιογραφία | σελ. 79 |
| 8. Λίστα σχημάτων | σελ. 81 |
| 9. Λίστα πινάκων | σελ. 87 |
| 10. Λίστα προγραμμάτων.....σελ. | 94 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές στις χρηματαγορές είναι να βρουν την σωστή αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης (αγοράς ή πώλησης). Οι Black και Scholes (1973) ήταν αυτοί που πρώτοι ανέπτυξαν ένα μοντέλο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Θεώρησαν ότι η μεταβλητότητα, που μετρά τη διασπορά της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου γύρω από τη μέση τιμή, παραμένει σταθερή.

Από την άλλη μεριά, η τεκμαρτή μεταβλητότητα που προκύπτει από το υπόδειγμα Black-Scholes φαίνεται να ποικίλλει συστηματικά σε σχέση με τον χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε το υπόδειγμα των Black-Scholes για να καθορίσουμε την τεκμαρτή μεταβλητότητα για δικαιώματα near-to-the-money, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη τόσο μικρότερη είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα (Hull and White (1987)). Αυτό όμως δε συνάδει με την υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας των Black-Scholes. Αυτό προκύπτει και από την ύπαρξη πλατύκυρτων ουρών, δηλαδή ακραίες τιμές των μετοχών που είναι πιο πιθανό να πραγματοποιηθούν κάτω από το πραγματικό μέτρο πιθανότητας σε σχέση με το λογαριθμοκανονικό μοντέλο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα μεταβάλλεται σε σχέση με το λόγο της τιμής του υποκείμενου τίτλου ως προς την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Δεδομένου ότι είναι σχήματος U, η καμπύλη της τεκμαρτής μεταβλητότητας ονομάζεται «χαμόγελο» (smile effect) και δείχνει ότι τα δικαιώματα που είναι γραμμένα στον ίδιο υποκείμενο τίτλο έχουν διαφορετικές τεκμαρτές μεταβλητότητες σε όρους του υποδείγματος των Black-Scholes. Για παράδειγμα deep in-the-money (ITM) και deep out-of-the-money (OTM)

δικαιώματα εμπορεύονται σε υψηλότερη τεκμαρτή μεταβλητότητα από ότι τα at-the-money δικαιώματα.

Πολλοί ερευνητές, όπως οι Hull - White και Wiggins, έχουν προσπαθήσει να λύσουν το πρόβλημα της αποτίμησης δικαιωμάτων με στοχαστική μεταβλητότητα. Για παράδειγμα οι Hull - White προτείνουν ένα μοντέλο στο οποίο η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί και αυτή μία γεωμετρική κίνηση Brown. Όμως τέτοιου είδους μοντέλα έχουν το μειονέκτημα ότι η μεταβλητότητα δεν είναι εμπορεύσιμο περιουσιακό στοιχείο και οι τιμές των δικαιωμάτων εξαρτώνται από τις προτιμήσεις των επενδυτών στον κίνδυνο, δηλαδή το μοντέλο αποτίμησης δεν είναι ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral). Επιπλέον, οι περισσότεροι από τους συγγραφείς αυτούς συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με αυτά του μοντέλου των Black-Scholes.

Στην παρούσα διπλωματική εξετάζουμε δύο από τα πιο σημαντικά μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας, αυτό των Hull & White και αυτό του Heston. Με τη βοήθεια προσομοίωσης μέσω της Matlab εξετάζουμε το σχετικό σφάλμα που παράγεται από αυτά τα μοντέλα σε σχέση με τις τιμές από το υπόδειγμα Black-Scholes. Έπειτα συγκρίνουμε τα σχετικά σφάλματα για να βρούμε πιο από τα μοντέλα έχει μεγαλύτερη διαφοροποίηση από το BS και εξετάζουμε την ευαισθησία των μοντέλων στις αλλαγές των παραμέτρων τους.

Επίσης, αναλύουμε διάφορους τρόπους αντιστάθμισης κινδύνου για το καθένα από τα δύο στοχαστικά μοντέλα και εξετάζουμε την αποτελεσματικότητά τους ανάλογα με το σφάλμα αντιστάθμισης που προκύπτει από την καθημερινή αποτίμηση του χαρτοφυλακίου που εξετάζουμε. Παρατηρούμε ότι δε μπορεί να δημιουργηθεί αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης όταν η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου είναι στοχαστική, αλλά η αντιστάθμιση γίνεται με μεθόδους ελαχιστοποίησης κινδύνου και συνεχή εξισορρόπηση του χαρτοφυλακίου (continuous rebalancing).

1.1 Βασικά Στοιχεία

Κίνηση Brown

Η Κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία (έστω $z(t)$) με τις κάτωθι ιδιότητες:

1. Συνεχής συνάρτηση του χρόνου.
2. Ισόνομες προσαυξήσεις.

$$\Delta z(\tau) = z(\tau + \Delta t) - z(\tau) = \varepsilon \sqrt{\Delta t}.$$

Για κάθε τ , όπου Δt είναι ένα μικρό χρονικό διάστημα και ε είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την $N(0,1)$. Ή αλλιώς:

$$z(\tau + \Delta t) - z(\tau) \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$$

3. Ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Για κάθε χρονικά σημεία $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ οι τυχαίες μεταβλητές $z(t_2) - z(t_1)$ και $z(t_4) - z(t_3)$ είναι ανεξάρτητες.

Επιπλέον προκύπτει ότι:

$$z(t_2) - z(t_1) \sim N(0, \sqrt{t_2 - t_1}) \text{ για κάθε χρονικό σημείο } t_1 < t_2 \text{ και } z(0) = 0.$$

Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

$$\Delta x(\tau) = x(\tau + \Delta t) - x(\tau) = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

όπου a και b είναι σταθεροί αριθμοί. Άρα συνεπάγεται:

$$\Delta x(\tau) = x(\tau + \Delta t) - x(\tau) \sim N(a\Delta t, b\sqrt{\Delta t}).$$

Η παράμετρος a ονομάζεται drift (μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου):

$$a = \frac{E[x(\tau + \Delta t) - x(\tau)]}{\Delta t}.$$

Η παράμετρος b^2 είναι η διακύμανση (η διακύμανση της μεταβολής ανά μονάδα του χρόνου):

$$b^2 = \frac{\text{Var}[x(\tau+\Delta t) - x(\tau)]}{\Delta t}.$$

Η κίνηση Brown είναι μια γενικευμένη διαδικασία Wiener Z_t με drift $a = 0$ και $b^2 = 1$. Έτσι $Z_t \sim N(0,t)$. Αν Z_t είναι κίνηση Brown τότε $X_t = \mu t + \sigma Z_t$ είναι μία κίνηση Brown με drift μ και διακύμανση σ^2 . Μπορούμε να γράψουμε την X_t σε διαφορική μορφή:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t.$$

Έτσι η μεταβολή στην X_t προκαλείται από έναν ντετερμινιστικό όρο μdt και έναν τυχαίο όρο σdZ_t .

Δυναμικά τιμής μετοχής

Αν ορίσουμε S την τιμή μιας μετοχής, τότε η απόδοση της τιμής της σε χρόνο Δt θα ισούται με έναν ντετερμινιστικό όρο που εκφράζει την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (μdt) και έναν τυχαίο όρο που εκφράζει την αβεβαιότητα που υπάρχει (σdZ_t). Δηλαδή ισχύει:

$$dS/S = \mu dt + \sigma dZ_t$$

ή

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ_t \text{ (Γεωμετρική κίνηση Brown),}$$

όπου Z_t είναι η κίνηση Brown, μ είναι το drift και σ είναι η μεταβλητότητα.

Λογαριθμοκανονικότητα

Αν στη συνάρτηση $G(S) = \ln(S)$ εφαρμόσω το λήμμα του Ito θα έχω:

$$d\ln(S(t)) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dZ(t).$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\ln(S(T)) - \ln(S(0)) = \ln(S(T)/S(0)) \sim N((\mu - \sigma^2/2)T, \sigma\sqrt{T})$$

ή αλλιώς

$$\ln(S(T)) \sim N(\ln(S(0)) + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma\sqrt{T}).$$

Με άλλα λόγια η συνάρτηση $\ln(S_t/S_0)$ κατανέμεται κανονικά με μέσο $(\mu - \sigma^2/2)(T - t)$ και διακύμανση $\sigma^2(T - t)$. Έτσι η τιμή της μετοχής κατανέμεται λογαριθμοκανονικά με

$$E[S(T)] = S(0)e^{\mu T}$$

και

$$\text{Var}[S(T)] = S^2(0) e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1).$$

Εκτίμηση της μεταβλητότητας

Ένας τρόπος να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι να χρησιμοποιήσουμε ιστορικά στοιχεία. Πολλοί παίρνουν πληροφορίες από το παρελθόν και τις χρησιμοποιούν για να προβλέψουν το μέλλον. Αυτό είναι σωστό μόνο όταν γνωρίζουμε ότι το μέλλον είναι όπως το παρελθόν, δηλαδή θα επαναληφθούν τα ίδια γεγονότα που συνέβησαν στο παρελθόν. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση:

- Διαλέγουμε τη συχνότητα των δεδομένων (κάθε ώρα, κάθε μέρα κ.τ.λ.). Ορίζουμε αυτό το χρονικό διάστημα ως τ .
- Διαλέγουμε τον αριθμό των παρατηρήσεων των τιμών της μετοχής που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση. Ορίζουμε αυτόν τον αριθμό ως n .
- Αν S_i ορίσουμε ως την τιμή της μετοχής στο τέλος του i -στού διαστήματος, υπολογίζουμε την σειρά:

$$u_i = \ln(S_i/S_{i-1}) \text{ για } i = 1, 2, \dots, n.$$

- Μετά εκτιμούμε την τυπική απόκλιση των u_i :

$$s = \sqrt{\left(\frac{1}{n-1} \sum (u_i - \bar{u})^2\right)},$$

όπου \bar{u} είναι ο μέσος των u_i .

- Εκτιμούμε τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής ως: $\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$. (Αυτή είναι η ιστορική μεταβλητότητα).
- Σφάλμα = $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$.

Εμείς χρησιμοποιούμε την ημερήσια μεταβλητότητα u_i όπου εκφράζει την απόδοση της i -στης μέρας. Άρα $\tau = 1$ μέρα = $1/252$ χρόνια (ο χρόνος έχει 252 μέρες διαπραγμάτευσης). Άρα:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = s\sqrt{252}$$

Έτσι, η ετησιοποιημένη μεταβλητότητα εκτιμάται ως $\sqrt{252}$ φορές η τυπική απόκλιση των αποδόσεων. Αυτή είναι η μεταβλητότητα που χρησιμοποιούμε σαν μεταβλητή εισόδου στο υπόδειγμα των Black-Scholes.

Προέλευση της μεταβλητότητας

Μία θεωρία υποστηρίζει ότι η μεταβλητότητα στην τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου προκαλείται από την τυχαία είσοδο νέας πληροφορίας για τις μελλοντικές αποδόσεις στην τιμή της μετοχής. Αυτή η θεωρία στηρίζεται στην *υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς*. Σε μία αποτελεσματική αγορά οι προσδοκίες των επενδυτών για τις μελλοντικές αποδόσεις βασίζονται στις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες στην αγορά και η τιμή της μετοχής αντανακλά όλη την πρόσφατη πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη. Άρα κάθε νέα πληροφορία προσαρμόζεται κατευθείαν στην τιμή της μετοχής. Έτσι λοιπόν ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα:

$$E(S_{t_n} | S_{t_1}, \dots, S_{t_{n-1}}) = E(S_{t_n} | S_{t_{n-1}}).$$

Μία άλλη θεωρία υποστηρίζει πως η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής προκαλείται κυρίως από τις συναλλαγές ή αλλιώς την εμπορευσιμότητά της.

1.2 Αποτίμηση υπό συνθήκες χωρίς arbitrage

Σ' αυτήν την ενότητα εξετάζουμε το πως η αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων μέσω των αναμενόμενων αποδόσεων σχετίζεται με το *ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας* κατά την προσέγγιση Martingale. Μία στρατηγική ή ένα χαρτοφυλάκιο ονομάζεται *αυτο-χρηματοδοτούμενο* αν περιλαμβάνει μόνο ανανεώσεις χωρίς επιπλέον κόστος, που σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται να εισέλθουν ή να εξέλθουν χρήματα από το χαρτοφυλάκιο. Τα μελλοντικά έσοδα (μελλοντική απόδοση) δεν τα γνωρίζουμε με βεβαιότητα αλλά εξαρτώνται από την έκβαση του περιουσιακού στοιχείου στη λήξη (π.χ. F_t - μετρήσιμη μη - αρνητική τυχαία μεταβλητή). Το μελλοντικό έσοδο καλείται *εφικτό* αν η τυχαία μεταβλητή μπορεί να αναπαραχθεί με αυτο-χρηματοδοτούμενη στρατηγική (rebalancing). Καλούμε ένα μοντέλο *αποτελεσματικό* αν όλα τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι εφικτά μέσω του μοντέλου αυτού. Τώρα καλούμαστε να απαντήσουμε στο ερώτημα ποια πρέπει να είναι η *δίκαιη τιμή* μιας μελλοντικής απαίτησης.

Ονομάζουμε arbitrage την ευκαιρία να δημιουργήσουμε κέρδη χωρίς να αναλάβουμε κανέναν κίνδυνο. Όταν υπάρχει μια ευκαιρία arbitrage, οι επενδυτές την εκμεταλλεύονται αμέσως και έτσι εξαλείφεται, δηλαδή δεν υπάρχει μακροπρόθεσμο arbitrage. Το κλειδί σε αυτή την προσέγγιση είναι ότι όταν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage εμφανίζεται ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας martingale. Αυτό είναι γνωστό ως το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων.

Για να δούμε πότε ένα μοντέλο είναι arbitrage-free ορίζουμε ένα μοντέλο στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ που ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες, όπου $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ είναι η διήθηση πληροφορίας και \mathbb{P} είναι το πραγματικό μέτρο πιθανότητας. Δεδομένης της τιμής της μετοχής S , του drift μ και της μεταβλητότητας σ , τα οποία είναι προσαρμοσμένα στην \mathcal{F} , τα δυναμικά του υποκείμενου τίτλου είναι τα εξής:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dZ_t .$$

Επιπλέον υποθέτουμε την ύπαρξη ενός τραπεζικού λογαριασμού χωρίς κίνδυνο B_t τέτοιο ώστε:

$$dB_t = rB_t dt \text{ και } B_0 = 1 ,$$

όπου r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Η αγοραία αξία κινδύνου (market price of risk) ορίζεται ως η υπερβάλλουσα μέση απόδοση από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ανά μονάδα κινδύνου $(\frac{\mu-r}{\sigma})$. Υπό την απουσία arbitrage η αγοραία αξία κινδύνου είναι ίδια για όλα τα περιουσιακά στοιχεία.

Martingale ονομάζεται η διαδικασία π.χ. $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ σε σχέση με το σύνολο πληροφοριών F_t και την πιθανότητα P , αν για κάθε $t > 0$ ισχύει:

- το X_t είναι γνωστό δεδομένου του F_t .
- οι μη δεσμευμένες προβλέψεις είναι πεπερασμένες:

$$E|X_t| < \infty ,$$

- και

$$E[X_T | F_t] = X_t \text{ για κάθε } t < T .$$

Αν S_t είναι μία *Martingale* διαδικασία, τότε η καλύτερη πρόβλεψη για την μεταβολή της S_t είναι μηδέν.

Επιπλέον:

- ✓ Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε πλήρη αγορά τότε υπάρχει στρατηγική θ , που μπορούμε να ακολουθήσουμε, τέτοια ώστε να προσομοιώσουμε τα μελλοντικά έσοδα ενός περιουσιακού στοιχείου (π.χ. παραγώγου) με αυτά ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από το περιουσιακό στοιχείο S και τον τραπεζικό λογαριασμό B . Αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage η τιμή του παραγώγου σήμερα θα ισούται με την τιμή του χαρτοφυλακίου σήμερα.
- ✓ Αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας για όλες τις καταστάσεις του κόσμου.
- ✓ Αν οι αγορές είναι πλήρεις το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας είναι μοναδικό, άρα δίνει μοναδική τιμή στο κάθε περιουσιακό στοιχείο.

- ✓ Κάτω από αυτό το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας οι προεξοφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων είναι martingales.

Επομένως, αν σχηματίσουμε τις προεξοφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων ως προς την τιμή του B_t , τότε κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας θα είναι Martingale. Για παράδειγμα, για ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο C_t η προεξοφλημένη τιμή του θα είναι $\frac{C_t}{B_t}$ και άρα θα ισχύει:

$$E^* \left[\frac{C_t}{B_t} \mid F_t \right] = \frac{C_t}{B_t}.$$

Δηλαδή

$$C_t = B_t \cdot E^* \left[\frac{C_t}{B_t} \mid F_t \right],$$

το οποίο είναι το θεμελιώδες υπόδειγμα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων όταν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage και E^* είναι η αναμενόμενη τιμή κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, το οποίο κατασκευάζεται αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Girsanov. Κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου η αγοραία αξία του κινδύνου εξαφανίζεται άρα δεν επηρεάζει την αποτίμηση υπό συνθήκες χωρίς arbitrage.

Αν υπολογίσουμε την τιμή ενός δικαιώματος με υποκείμενο τίτλο την τιμή μιας μετοχής που ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown σύμφωνα με αυτό το υπόδειγμα, θα καταλήξουμε στην τιμή του υποδείγματος των Black-Scholes.

Faynman – Κac φόρμουλα

Η φόρμουλα Faynman – Κac παρέχει δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις ως λύση σε συγκεκριμένη κατηγορία μερικών διαφορικών εξισώσεων και ισχύει μόνο για τις Μαρκοβιανές διαδικασίες: $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. Δεδομένου, λοιπόν, του

$$dS = qSdt + vSdZ$$

και του

$$F(t, S_t) = E_t^p [e^{-\int_t^T q(su)du} F(T, S_T) | S_t = s]$$

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial t} = AF - q(S_t)F,$$

όπου το A είναι ο τελεστής:

$$A = qS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} v^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}.$$

Επομένως, ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε δει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ορίζεται το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που οδηγεί σε μοναδική τιμή, έχουμε δει ότι κάτω από αυτό το μέτρο πιθανότητας οι προεξοφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων είναι martingale και ότι με το θεώρημα Girsanov μπορούμε να αλλάξουμε το μέτρο πιθανότητας σε ισοδύναμο μέτρο martingale – πολύ χρήσιμο για την προσομοίωση Monte Carlo. Η φόρμουλα Feynman – Kac δείχνει ότι η προσέγγιση PDE και η προσέγγιση Martingale είναι ισοδύναμες (μόνο για μαρκοβιανές διαδικασίες).

1.3 Το μοντέλο των Black-Scholes

Η μερική διαφορική εξίσωση των B&S.

Οι Black-Scholes το 1973 δημοσίευσαν ένα άρθρο σύμφωνα με το οποίο πρότειναν ένα υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων. Η ιδέα του υποδείγματος ήταν να κατασκευάσουν ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα δικαίωμα και από έναν αριθμό Δ μετοχών και εξέτασαν τη στιγμιαία μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου. Επέλεξαν το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να είναι χωρίς κίνδυνο (το χαρτοφυλάκιο παραμένει χωρίς κίνδυνο αν αναπροσαρμόζεται το Δ συνεχώς – continuous rebalancing). Αφού το χαρτοφυλάκιο ήταν χωρίς κίνδυνο έπρεπε να κερδίζει το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, διαφορετικά υπάρχουν

ευκαιρίες για arbitrage (pricing by arbitrage). Έτσι δημιουργείται η μερική διαφορική εξίσωση.

Οι υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής:

- 1) Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερή μεταβλητότητα και επιπλέον δεν υπάρχουν άλματα στα μονοπάτια που ακολουθεί η μετοχή (συνεχή μονοπάτια).
- 2) Ο υποκείμενος τίτλος δεν αποδίδει μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του παραγώγου.
- 3) Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.
- 4) Το short selling των μετοχών με πλήρη χρήση των εσόδων επιτρέπεται.
- 5) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών – επιτρέπει τη συνεχή αναπροσαρμογή των εσόδων.
- 6) Όλοι οι τίτλοι είναι διαιρέσιμοι.
- 7) Η διαπραγμάτευση των τίτλων είναι συνεχής.
- 8) Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι σταθερό και το ίδιο για όλες τις λήξεις.

Έστω $F(S, t)$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος που εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου S και το χρόνο t . Έστω χαρτοφυλάκιο Π που αποτελείται από

-1: δικαιώματα

+ Δ : περιουσιακά στοιχεία

Η αξία του Π τότε θα είναι:

$$\Pi = -F + \Delta S$$

Και η μεταβολή του $d\Pi$ είναι:

$$d\Pi = -dF + \Delta dS$$

1^η υπόθεση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ. \quad (1.1)$$

2^η υπόθεση: $F = F(S, t)$ και διπλά διαφορίσιμη.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του λήμματος του Ito και έτσι:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2 .$$

Από τη γεωμετρική κίνηση Brown έχουμε: $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt^2$. Τότε

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dZ_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 dt) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dZ_t . \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η F είναι μια καινούρια διαδικασία Ito και έτσι:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dF + \Delta dS \\ &= - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt - \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dZ_t + \Delta (\mu S dt + \sigma S dZ_t) \\ &= - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \left(\frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt - \left(\frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S dZ_t \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ μπορούμε να εξαλείψουμε τον κίνδυνο (τυχαίο όρο dZ_t).

Έτσι

$$\begin{aligned} d\Pi &= - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r(-F + \Delta S) dt \\ &= (-rF + r\Delta S) dt \end{aligned}$$

αφού το Π τώρα είναι χωρίς κίνδυνο.

Άρα έχουμε

$$-rF + r\Delta S = - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) ,$$

το οποίο γίνεται

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - rF = 0. \quad (1.2)$$

Η σχέση (1.2) είναι η γνωστή μερική διαφορική εξίσωση (PDE) των Black-Scholes. Είναι μία γραμμική, 2^{ου} βαθμού, παραβολική εξίσωση. Καθώς η PDE προέκυψε χωρίς καμία υπόθεση σχετικά με το περιουσιακό στοιχείο S, μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο όπως η μετοχή S ή ένας καταθετικός λογαριασμός B. Σε αυτή την εξίσωση δεν βλέπουμε καθόλου το μ . Αυτό συμβαίνει γιατί όταν θέτουμε $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ το μ απαλείφεται και στη θέση του εμφανίζεται το r . Το μ αντανάκλα τις προτιμήσεις του επενδυτή, οι οποίες τελικά απαλείφονται (αντίστοιχο με το risk-neutral valuation).

Για να λυθεί η μερική διαφορική εξίσωση (1.2) ως προς την τιμή ενός συγκεκριμένου τύπου παραγώγου πρέπει να ορίσουμε τις συνοριακές και τις τελικές συνθήκες. Για παράδειγμα ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K και χρόνο μέχρι τη λήξη T έχει τελική συνθήκη τη συνάρτηση εσόδων στη λήξη:

$$C(S, T) = \max\{S - K, 0\},$$

ενώ ένα δικαίωμα πώλησης:

$$P(S, T) = \max\{K - S, 0\}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\text{αν } S \rightarrow 0 \text{ τότε } C = 0$$

και

$$\text{αν } S \rightarrow \infty \text{ τότε } C = \text{άνω φράγμα.}$$

Οι φόρμουλες αποτίμησης των Black-Scholes

Οι τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με υποκείμενο τίτλο μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα δίνονται από τους τύπους:

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (1.3)$$

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \quad (1.4)$$

αντίστοιχα, όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Εδώ S είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής, K είναι η τιμή εξάσκησης, r είναι το συνεχώς επανατοκιζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, t είναι ο τρέχοντας χρόνος και T είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Τιμή δικαιώματος όταν ο υποκείμενος τίτλος μοιράζει μέρισμα

Όταν ο υποκείμενος τίτλος πληρώνει μέρισμα η τιμή των δικαιωμάτων διαμορφώνεται ως εξής:

$$C_t = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (1.5)$$

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1), \quad (1.6)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

1.4 Τα μειονεκτήματα του υποδείγματος B&S

Ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο, για παράδειγμα ένα δικαίωμα, είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, γραμμένο πάνω σε έναν υποκείμενο τίτλο, για παράδειγμα μία μετοχή. Το απλούστερο χρηματοοικονομικό παράγωγο είναι το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς. Ένα δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο σε μία δεδομένη τιμή, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή που είναι η λήξη. Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μπορεί να αποτιμηθεί με τη φόρμουλα B&S, στην οποία ο κίνδυνος ποσοτικοποιείται με την παράμετρο της μεταβλητότητας. Οι παράμετροι στο υπόδειγμα B&S είναι πέντε: η αρχική τιμή της μετοχής S_0 , η τιμή εξάσκησης K , ο χρόνος μέχρι τη λήξη T , το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r και η μεταβλητότητα σ . Από αυτές τις παραμέτρους, η μόνη άγνωστη εξ' αρχής είναι η μεταβλητότητα σ .

Είναι γνωστό ότι η Γεωμετρική κίνηση Brown δε μοντελοποιεί τέλεια την τιμή της μετοχής, επειδή οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων δεν κατανέμονται κανονικά. Έτσι, δε συμπίπτει το πραγματικό μέτρο πιθανότητας με αυτό των B&S, ούτε με αυτό της προσέγγισης Martingale. Για την ακρίβεια, η τεκμαρτή μεταβλητότητα των παρατηρούμενων τιμών διαμορφώνει ένα σχήμα χαμόγελο – U ως προς τις διάφορες τιμές εξάσκησης K . Αυτό το σχήμα, με ελάχιστο στα at-the-money δικαιώματα, δε συνάδει με την υπόθεση των B&S ότι η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει να ορίσουμε τη μεταβλητότητα σαν στοχαστική διαδικασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστική μεταβλητότητα

Σε ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας, η μεταβλητότητα μεταβάλλεται τυχαία ως μία στοχαστική διαδικασία. Αυτός ο επιπρόσθετος τυχαίος όρος εξηγεί εν μέρει γιατί δικαιώματα επί του ίδιου τίτλου με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και λήξη έχουν διαφορετικές τεκμαρτές μεταβλητότητες, οι οποίες έχουν παρατηρηθεί στις τιμές της αγοράς. Το 1987, οι Hull και White χρησιμοποίησαν τη Γεωμετρική κίνηση Brown για τη διαδικασία της διακύμανσης. Αυτή η μέθοδος οδηγεί στην αύξηση της διακύμανσης εκθετικά αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα εμπειρικά αποτελέσματα (βλέπε Wiggins (1987)) που υποστηρίζουν ότι η διακύμανση τείνει να φθίνει με το πέρασμα του χρόνου. Λόγω της ανεπάρκειας της Γεωμετρικής κίνησης Brown στη στοχαστική διαδικασία της διακύμανσης, μπορεί κανείς να εκτιμήσει διακυμάνσεις γύρω από ένα μέσο επίπεδο, δηλαδή, κατά μέσο όρο επαναφορά της διαδικασίας της διακύμανσης αντί να αυξάνεται γεωμετρικά όπως η Γεωμετρική κίνηση Brown. Αυτό σημαίνει ότι αν το τρέχον επίπεδο της διακύμανσης είναι κάτω από το μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο, θ , τότε η διακύμανση θα τείνει να κινηθεί προς τα επάνω για να πλησιάσει το μέσο επίπεδο θ , και αντίστροφα. Για παράδειγμα, η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck χρησιμοποιήθηκε για να αποτυπώσει αυτή την κατά μέσο όρο αναστροφή της διακύμανσης. Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck είναι πιο ρεαλιστική επιλογή σε σχέση με τη γεωμετρική κίνηση Brown. Όμως, το μειονέκτημα είναι ότι μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές για την διαδικασία της διακύμανσης, κάτι το οποίο δεν είναι καθόλου αυτό που ψάχνουμε. Για να ξεπεράσουν αυτό το πρόβλημα οι Stein και Stein (1991) και Heston (1993)

υιοθέτησαν την απόλυτη τιμή της στοχαστικής διαδικασίας και την ρίζα της στοχαστικής διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck για τη στοχαστική μεταβλητότητα, αντίστοιχα. Σε αντίθεση με το μοντέλο των Black-Scholes, είναι δύσκολο να βρούμε μια αναλυτική λύση για την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος υπό την ύπαρξη δύο στοχαστικών διαδικασιών: μία για την τιμή του περιουσιακού στοιχείου και μία για την μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Μια προσεγγιστική λύση επιτυγχάνεται με την επέκταση μιας δυναμικής σειράς, η οποία προτάθηκε από τους Hull και White. Η τεχνική αυτή βασίζεται στην κατανομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου του δικαιώματος, η οποία εξαρτάται από τον μέσο όρο της διαδικασίας της διακύμανσης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιάσουμε δύο από τα πιο σημαντικά μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία.

2.1. Η μερική διαφορική εξίσωση με στοχαστική μεταβλητότητα

Στο υπόδειγμα B&S η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή της μετοχής περιέχει τον τυχαίο όρο Z_t :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ_t,$$

όπου μ είναι το drift και σ είναι η μεταβλητότητα της απόδοσης της μετοχής τα οποία θεωρούνται σταθερά. Σε ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας, η μεταβλητότητα περιέχει άλλον όρο τυχαιότητας που είναι διαφορετικός από τον Z_t , αλλά που πιθανόν να έχουν κάποια συσχέτιση. Έτσι έχουμε δύο στοχαστικές διαδικασίες:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ_t^{(1)},$$

$$dV = p(S, v, t) dt + q(S, v, t) dZ_t^{(2)}, \quad (2.1)$$

όπου $v = \sigma^2$ είναι η διακύμανση της τιμής της μετοχής, και p και q είναι το drift και η μεταβλητότητα αντίστοιχα. $Z_t^{(1)}$ και $Z_t^{(2)}$ είναι τυπικές κινήσεις Brown με συντελεστή συσχέτισης ρ , δηλαδή ισχύει:

$$dZ_t^{(1)} dZ_t^{(2)} = \rho dt.$$

Αν ακολουθήσουμε τα βήματα των B&S μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη μερική διαφορική εξίσωση (PDE) για το μοντέλο δύο μεταβλητών. Για να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο πρέπει να εξαλείψουμε και τις δύο πηγές τυχαιότητας (κινδύνου), $dZ_t^{(1)}$ και $dZ_t^{(2)}$. Για να εξαλείψουμε το όρο $Z_t^{(1)}$ μπορούμε να εμπορευτούμε τον υποκείμενο τίτλο S . Για να εξαλείψουμε το όρο $Z_t^{(2)}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο παράγωγο για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου. Άρα κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο Π , το οποίο περιέχει:

$$- 1: F$$

$$+\Delta: \text{μετοχές}$$

$$+\Delta_1: F_1,$$

όπου F είναι το παράγωγο που θέλουμε να αποτιμήσουμε, F_1 είναι το παράγωγο που χρησιμοποιούμε για να αντισταθμίσουμε τον τυχαίο όρο της μεταβλητότητας, Δ και Δ_1 είναι οι λόγοι αντιστάθμισης που θέλουμε ώστε το χαρτοφυλάκιο να είναι χωρίς κίνδυνο. Έτσι, η τιμή του Π θα είναι:

$$\Pi = -F + \Delta S + \Delta_1 F_1 \quad (2.2)$$

και η μεταβολή του χαρτοφυλακίου $d\Pi$ είναι:

$$d\Pi = -dF + \Delta dS + \Delta_1 dF_1.$$

Επειδή το F είναι συνάρτηση του S , v και t , από το λήμμα του Ito έχουμε:

$$dF =$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (dv)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} (dS)(dv) \right\}.$$

Από την (2.1)

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt,$$

$$(dv)^2 = q^2 dt,$$

$$(dS)(dv) = \sigma S q dt.$$

Άρα η έκφραση dF γίνεται:

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dZ_t^{(1)}) + \frac{\partial F}{\partial v} (p dt + q dZ_t^{(2)}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dt + q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dt + 2\sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} dt \right\} \\
&= \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right\} dt \\
&\quad + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dZ_t^{(1)} + q \frac{\partial F}{\partial v} dZ_t^{(2)}
\end{aligned}$$

και παρομοίως για το F_1 .

Άρα:

$$\begin{aligned}
d\Pi &= -dF + \Delta dS + \Delta_1 dF_1 \\
&= - \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right\} dt \\
&\quad - \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dZ_t^{(1)} - q \frac{\partial F}{\partial v} dZ_t^{(2)} + \Delta \mu S dt + \Delta \sigma S dZ_t^{(1)} \\
&\quad + \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F_1}{\partial S} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \right. \\
&\quad \left. \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} \right\} dt + \Delta_1 \sigma S \frac{\partial F_1}{\partial S} dZ_t^{(1)} + \Delta_1 q \frac{\partial F_1}{\partial v} dZ_t^{(2)} \\
&= - \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right\} dt \\
&\quad + \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F_1}{\partial S} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \right. \\
&\quad \left. \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} \right\} dt + \Delta \mu S dt + \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial S} - \frac{\partial F}{\partial S} + \Delta \right) \sigma S dZ_t^{(1)} + \\
&\quad \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} \right) q dZ_t^{(2)}.
\end{aligned}$$

Για να εξαλείψω τον κίνδυνο, δηλαδή τους τυχαίους όρους dZ^1 και dZ^2 , πρέπει να θέσω τους συντελεστές τους ίσους με μηδέν. Δηλαδή:

$$\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial S} - \frac{\partial F}{\partial S} + \Delta = 0,$$

$$\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Έτσι ορίσαμε τους δύο λόγους αντιστάθμισης Δ και Δ_1 , ενώ

$$\Delta \mu S dt = -\Delta_1 \mu S \frac{\partial F_1}{\partial S} dt + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} dt.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} d\Pi &= -\left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right\} dt \\ &+ \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} \right\} dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r(-F + \Delta S + \Delta_1 F_1) dt \\ &= (-rF + r\Delta S + r\Delta_1 F_1) dt, \end{aligned}$$

αφού το Π είναι τώρα χωρίς κίνδυνο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} &-\left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} \right\} \\ &+ \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} \right\} \\ &= -rF + r\Delta S + r\Delta_1 F_1, \end{aligned}$$

το οποίο γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF + r\Delta S \\ &= \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} - rF_1 \right\}. \end{aligned}$$

Αλλά

$$r\Delta S = -\Delta_1 rS \frac{\partial F_1}{\partial S} + rS \frac{\partial F}{\partial S}$$

άρα έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF - \Delta_1 rS \frac{\partial F_1}{\partial S} + rS \frac{\partial F}{\partial S} \\ & = \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} - rF_1 \right\}. \end{aligned}$$

Αν αναδιατάξουμε τους όρους της παραπάνω εξίσωσης θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF \\ & = \Delta_1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t} + rS \frac{\partial F_1}{\partial S} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} - rF_1 \right\}. \end{aligned}$$

Τώρα

$$\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \frac{\partial F}{\partial v} / \frac{\partial F_1}{\partial v}$$

άρα

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + p \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF}{\frac{\partial F}{\partial v}} \\ & = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial t} + rS \frac{\partial F_1}{\partial S} + p \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial v} - rF_1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}}. \end{aligned}$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω μερικής διαφορικής εξίσωσης περιέχει μόνο το F και το δεξί μέλος περιέχει μόνο το F₁. Για να ισχύει αυτή η ισότητα πρέπει και τα δύο μέρη να ισούνται με μία συνάρτηση λ των ανεξάρτητων μεταβλητών S, v, t. Με άλλα λόγια

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF = -(p - \lambda) \frac{\partial F}{\partial v}$$

για κάποια συνάρτηση λ(S, v, t). Αναδιατάσσοντας έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + (p - \lambda) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \sigma S q \rho \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial v} - rF = 0. \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση $\lambda(S, v, t)$ ονομάζεται αγοραία αξία του κινδύνου μεταβλητότητας ή αλλιώς το ασφάλιστρο κινδύνου της μεταβλητότητας. Επειδή η μεταβλητότητα δεν είναι εμπορεύσιμο περιουσιακό στοιχείο όπως μία μετοχή, ο κίνδυνος μεταβλητότητας δεν μπορεί να επαλειφθεί μέσω του επιχειρήματος arbitrage. Άρα η αγοραία αξία του, λ , ρητά εισέρχεται στην PDE. Γενικά, λ είναι ένα μέτρο ασφαλίστρου που ζητούν οι επενδυτές όταν αναλαμβάνουν τον κίνδυνο μεταβλητότητας και πρέπει να είναι ο ίδιος για όλα τα περιουσιακά στοιχεία που εξαρτώνται από τη μεταβλητότητα.

Η μορφή του ασφαλίστρου λ είναι ένα μεγάλο πρόβλημα για τα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας, επειδή δεν μπορεί να συναχθεί από την υπόθεση ότι όλοι οι επενδυτές προτιμούν περισσότερο ή λιγότερο πλούτο. Οι επενδυτές έχουν διαφορετικές προτιμήσεις στον κίνδυνο και είναι δύσκολο να προσδιοριστούν. Μια συνήθης επιλογή είναι να θέσουμε $\lambda(S_t, V_t, t) = \lambda \cdot V(t)$, όπου λ είναι σταθερά, ανεξάρτητη από το εκάστοτε δικαίωμα. Στην πράξη η τιμή του λ θα μπορούσε να εκτιμηθεί από κάποιο δικαίωμα και στη συνέχεια η τιμή αυτή να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση των υπολοίπων.

Από τη φόρμουλα Feynman-Kac, το F , που ικανοποιεί τη σχέση (2.3), θα είναι

$$F(S, v, t) = E_{t,S,v} [\Phi(S_T, v_T) \exp\{-\int_t^T r(S_u, v_u, u) du\}], \quad (2.4)$$

όπου τα S, v ακολουθούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} dS &= rSdu + \sigma Sd\hat{Z}_u^1, \\ dv &= (p - \lambda)du + qd\hat{Z}_u^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

με

$$S_t = S,$$

$$v_t = v,$$

όπου

$$d\hat{Z}_u^1 = \alpha dt + dZ_u^1,$$

$$d\hat{Z}_u^2 = \lambda/q dt + dZ_u^2$$

σύμφωνα με το θεώρημα Girsanov και

$$\alpha = \frac{\mu - r}{v}.$$

Οι \hat{Z}_u^1 και \hat{Z}_u^2 είναι τυπικές κινήσεις Brown στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Η ποσότητα $(\rho - \lambda)$ είναι το drift ουδέτερου κινδύνου της διακύμανσης. Όταν αποτιμούμε παράγωγα, έχει σημασία το drift ουδέτερου κινδύνου και όχι το πραγματικό. Υποθέτουμε σταθερό επιτόκιο. Το Φ είναι η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη. Για παράδειγμα εάν έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς τότε

$$\Phi(S_T, v_T) = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$$

όπου K είναι η τιμή εξάσκησης του, και η σχέση (2.4) γράφεται:

$$V(S, v, t) = e^{-r(T-t)} E_Q [(S_T - K)^+ | S_t = S, v_t = v].$$

Το E_Q αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q .

2.2. Μοντέλο Hull & White

Οι Hull & White (1997) πρότειναν το ακόλουθο μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας

$$dv = \phi V dt + \xi V dz,$$

όπου ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί την διαδικασία

$$dS = \mu S dt + \sqrt{V} S dw.$$

Αυτό είναι ένα από τα πρώτα μοντέλα που έλυσαν το πρόβλημα της στοχαστικής μεταβλητότητας. Όμως, έκαναν κάποιες υποθέσεις για να απλοποιήσουν τη διαδικασία αποτίμησης, όπως το ότι ο κίνδυνος μεταβλητότητας δεν τιμολογείται και ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των διαδικασιών dz και dw . Με άλλα λόγια, $\lambda=0$ και $\rho=0$ στην μερική διαφορική εξίσωση (2.3). Η φόρμουλα των Hull & White για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων βασίζεται στην κατανομή της μέσης διακύμανσης \bar{V} της τιμής του περιουσιακού στοιχείου κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος και ορίζεται ως εξής

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T v(u) du.$$

Οι Hull & White (1987) βρήκαν στην ανάλυση τους ότι η δεσμευμένη κατανομή της τελικής τιμής του υποκείμενου τίτλου, δεδομένης της μέσης διακύμανσης, κατανέμεται λογαριθμοκανονικά. Για να το αποδείξουν χρησιμοποίησαν το εξής **λήμμα**:

Ας υποθέσουμε ότι, σε ένα κόσμο ουδέτερου κινδύνου, η τιμή της μετοχής S και η διακύμανση σ^2 ακολουθούν τις στοχαστικές διαδικασίες

$$dS = rS dt + \sigma S dz,$$

$$d\sigma^2 = a\sigma^2 dt + \xi\sigma^2 dw,$$

όπου r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και θεωρείται σταθερό, a και ξ είναι ανεξάρτητα του S , και dz και dw είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Wiener. Επίσης έστω \bar{V} η μέση διακύμανση στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt.$$

Τότε η δεσμευμένη κατανομή του $\log[S(T)/S(0)]$ δεδομένης της \bar{V} είναι κανονική με μέσο $rT - \bar{V}T/2$ και διακύμανση $\bar{V}T$.

Για να δούμε ότι το λήμμα είναι αληθές, ας υποθέσουμε πρώτα ότι σ^2 είναι ντετερμινιστική αλλά όχι σταθερή. Σ' αυτή την περίπτωση, η κατανομή του $\log[S(T)/S(0)]$ είναι κανονική με μέσο $rT - \bar{V}T/2$ και διακύμανση $\bar{V}T$. Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι της λογαριθμοκανονικής κατανομής εξαρτώνται μόνο από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, την αρχική τιμή της μετοχής, το χρόνο μέχρι τη λήξη και τη μέση διακύμανση κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Έτσι, οποιοδήποτε μονοπάτι ακολουθεί η σ^2 που έχει την ίδια μέση διακύμανση \bar{V} θα παράγει την ίδια λογαριθμοκανονική κατανομή. Αν η σ^2 είναι στοχαστική, υπάρχει άπειρος αριθμός μονοπατιών που δίνουν την ίδια μέση διακύμανση \bar{V} αλλά όλα αυτά τα μονοπάτια παράγουν την ίδια κατανομή της τελικής τιμής της μετοχής. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, ακόμα και αν η σ^2 είναι στοχαστική, η κατανομή της τελικής τιμής της μετοχής δεδομένης της μέσης διακύμανσης \bar{V} είναι λογαριθμοκανονική.

Το λήμμα δεν ισχύει όταν βρισκόμαστε σε κόσμο όπου οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο. Σε έναν τέτοιο κόσμο το drift της τιμής της μετοχής εξαρτάται από τη σ^2 μέσω της επιρροής της σ^2 στο συντελεστή β των μετοχών. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος της κατανομής της τελικής τιμής της μετοχής εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολουθεί η μη σταθερή σ^2 . Διαφορετικά μονοπάτια για τη σ^2 που έχουν την ίδια μέση διακύμανση παράγουν κατανομές για το λογάριθμο της τελικής τιμής της μετοχής με ίδια διακύμανση αλλά διαφορετικούς μέσους. Σ' αυτή την περίπτωση η τελική τιμή της μετοχής με δέσμευση τη μέση διακύμανση δεν ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή.

Επιπλέον, τα δυναμικά ουδέτερου κινδύνου της μεταβλητότητας δεν εξαρτώνται από την τιμή της μετοχής, π.χ. $(p - \lambda)$ και q είναι ανεξάρτητα του S . Τα αποτελέσματα αλλάζουν σημαντικά όταν η τιμή της μετοχής και η μεταβλητότητα συσχετίζονται. Στο μοντέλο των Hull & White έχουμε:

$$p(S, v, t) = \rho v,$$

$$q(S, v, t) = \xi v,$$

$$\lambda = 0.$$

Έστω $C(S, v, t)$ η τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τη χρονική στιγμή t , με τιμή εξάσκησης K και χρόνο μέχρι τη λήξη T . Η μερική διαφορική εξίσωση (2.3) γίνεται:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \varphi v \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \xi^2 v^2 \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + S \rho \xi v^{3/2} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} - rC = 0$$

και για $\rho = 0$,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \varphi v \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \xi^2 v^2 \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC = 0$$

Επειδή δεν τιμολογείται ο κίνδυνος της μεταβλητότητας, η τιμή του C δεν εξαρτάται από τις προτιμήσεις των επενδυτών και άρα το C μπορεί να τιμολογηθεί χρησιμοποιώντας αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου:

$$C(S, v, t) = e^{-r(T-t)} \int C(S_T, v_T, T) f(S_T | S, v) dS_T, \quad (2.6)$$

όπου

T = διάρκεια του δικαιώματος,

S = η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t ,

v = η διακύμανση την χρονική στιγμή t ,

$f(S_T | S, v)$ = η δεσμευμένη κατανομή του S_T δεδομένης της τιμής της μετοχής και της διακύμανσης τη χρονική στιγμή t ,

$C(S, v, t)$ = η συνάρτηση απόδοσης = $\max \{S_T - K, 0\}$.

Για κάθε τρεις συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές x , y και z οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πρέπει να ικανοποιούν την

$$f(x|y) = \int g(x|z)h(z|y)dz.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέση διακύμανση η κατανομή του S_T μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$f(S_T|v) = \int g(S_T|\bar{V})h(\bar{V}|v)d\bar{V},$$

όπου το S παραλείπεται για λόγους απλοποίησης στην παραπάνω έκφραση. Αντικαθιστώντας αυτό στην σχέση (2.6) έχουμε

$$C(S, v, t) = e^{-r(T-t)} \int \int C(S_T)g(S_T|\bar{V})h(\bar{V}|v)d\bar{V}dS_T,$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί

$$C(S, v, t) = \int (e^{-r(T-t)} \int C(S_T)g(S_T|\bar{V})dS_T)h(\bar{V}|v)d\bar{V}.$$

Ο εσωτερικός όρος στην παραπάνω σχέση είναι η τιμή των Black & Scholes για την τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με μέση διακύμανση \bar{V} , τον οποίο ορίζουμε ως $BS(\bar{V})$. Έτσι έχουμε

$$C(S, v, t) = \int BS(\bar{V})h(\bar{V}|v)d\bar{V}.$$

Δεν φαίνεται να είναι δυνατό να βρεθεί αναλυτική μορφή για την κατανομή της \bar{V} αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές της \bar{V} (βλ. Boyle & Emanuel (1985)) όταν φ και ξ είναι σταθερά. Για παράδειγμα, όταν $\varphi \neq 0$,

$$E(\bar{V}) = \frac{e^{\varphi T} - 1}{\varphi T} V_0,$$

$$E(\bar{V}^2) = \left[\frac{2e^{(2\varphi + \xi^2)T}}{(\varphi + \xi^2)(2\varphi + \xi^2)T^2} + \frac{2}{\varphi T^2} \left(\frac{1}{2\varphi + \xi^2} - \frac{e^{\varphi T}}{\varphi + \xi^2} \right) \right] V_0^2,$$

και όταν $\varphi = 0$,

$$E(\bar{V}) = V_0,$$

$$E(\bar{V}^2) = \frac{2(e^{\xi^2 T} - \xi^2 T - 1)}{\xi^4 T^2} V_0^2,$$

$$E(\bar{V}^3) = \frac{e^{3\xi^2 T} - 9e^{\xi^2 T} + 6\xi^2 T + 8}{3\xi^6 T^3} V\sigma^3.$$

Οι Hull & White ανέπτυξαν την $BS(\bar{V})$ σε σειρά Taylor γύρω από την $E(\bar{V})$:

$$\begin{aligned} C(S, v, t) &= BS(E(\bar{V})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 BS}{\partial \bar{V}^2} \mathbb{E}(\bar{V}) \int (\bar{V} - E(\bar{V}))^2 h(\bar{V}) d\bar{V} + \dots \\ &= BS(E(\bar{V})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 BS}{\partial \bar{V}^2} \mathbb{E}(\bar{V}) \text{Var}(\bar{V}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 BS}{\partial \bar{V}^3} \mathbb{E}(\bar{V}) \text{Skew}(\bar{V}) + \dots, \end{aligned}$$

όπου $\text{Var}(\bar{V})$ και $\text{Skew}(\bar{V})$ είναι η δεύτερη και τρίτη κεντρική ροπή του \bar{V} . Αυτή η σειρά συγκλίνει πολύ γρήγορα για πολύ μικρές τιμές του $\xi^2(T-t)$. Με $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} C(S, \sigma^2, t) &= BS(\sigma^2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1 d_2 - 1)}{4\sigma^3} \left\{ \frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right\} \quad (2.7) \\ &+ \frac{1}{6} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)[(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{8\sigma^5} \\ &\times \sigma^6 \left\{ \frac{e^{3k} - (9 + 18k)e^k + (8 + 24k + 18k^2 + 6k^3)}{3k^3} \right\} + \dots, \end{aligned}$$

όπου $k = \xi^2(T-t)$.

Στη σχέση (2.7), $\sigma = \sqrt{v}$ είναι η τρέχουσα μεταβλητότητα της απόδοσης της μετοχής, ενώ d_1 και d_2 είναι τα γνωστά

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}.$$

Οι Hull και White (1987) αιτιολόγησαν τη χρήση του $\varphi = 0$, αφού για κάθε μη μηδενικό φ , τα δικαιώματα με διαφορετική λήξη θα έχουν διαφορετική τεκμαρτή μεταβλητότητα. Επειδή αυτό δεν παρατηρείται συχνά εμπειρικά, συμπέραναν ότι το φ είναι τουλάχιστον κοντά στο 0.

2.3 Μοντέλο του Heston

Ο Heston (1993) ανέπτυξε μια λύση κλειστής μορφής για τις τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Μοντελοποίησε τη στοχαστική διαδικασία της διακύμανσης ως μία διαδικασία επαναφοράς του μέσου χρησιμοποιώντας την τετραγωνική ρίζα της. Ξεκίνησε υποθέτοντας ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dW_t^1,$$

όπου W_t^1 είναι διαδικασία Wiener. Επίσης η μεταβλητότητα ακολουθεί τη διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck (όπως π.χ. στο μοντέλο των Stein και Stein (1991))

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dW_t^2.$$

Σύμφωνα με το λήμμα του Ito για

$$dx(t) = a(x(t), t)dt + b(x(t), t)dW_t^2$$

έχουμε ότι

$$df(x(t), t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} a(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2(x(t), t) \right] dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x} b(x(t), t) \right) dW^2(t).$$

Θέτοντας $x = \sqrt{v(t)}$ και $f(x) = x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

άρα

$$df = [2xa + b^2]dt + (2xb)dW^2(t).$$

Δηλαδή για $a(x(t), t) = -\beta\sqrt{v(t)}$ και $b(x(t), t) = \delta$ έχουμε:

$$df(x(t), t) = \left[2\sqrt{v(t)} \left(-\beta\sqrt{v(t)} \right) + \delta^2 \right] dt + 2\sqrt{v(t)}\delta dW^2(t)$$

ή ισοδύναμα

$$dv(t) = 2\beta \left[\frac{\delta^2}{2\beta} - v(t) \right] dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dW^2(t).$$

Αν θέσουμε $\kappa = 2\beta$, $\theta = \delta^2/2\beta$ και $\zeta = 2\delta$ θα έχουμε συνοψίζοντας:

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)}S dW_t^1,$$

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \zeta\sqrt{v(t)}dW_t^2, \quad (2.8)$$

όπου το W^2 έχει συσχέτιση ρ με το W^1 . Η σχέση (2.8) εξασφαλίζει ότι η διακύμανση είναι πάντα θετική για εύλογες τιμές των παραμέτρων.

Έστω C η αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K και χρόνο μέχρι τη λήξη T . Η μεταβλητότητα της τιμής S του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.8). Με άλλα λόγια,

$$p(S, v, t) = \kappa(\theta - v),$$

$$q(S, v, t) = \zeta\sqrt{v}$$

στη σχέση (2.1). Τότε θέτοντας $\lambda(S, v, t) = \lambda v$, η μερική διαφορική εξίσωση (2.3) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + (\kappa(\theta - v) - \lambda v) \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\ + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \rho \zeta S v \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} - rC = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Το C πρέπει να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (2.9) που υπόκειται στις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$C(S, v, T) = (S - K)^+ = \max(0, S - K),$$

$$C(0, v, t) = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}(\infty, v, t) = 1,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, 0, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta \frac{\partial C}{\partial v}(S, 0, t) - rC(S, 0, t) = 0,$$

$$C(S, \infty, t) = S. \quad (2.10)$$

Κατά αναλογία με το υπόδειγμα Black – Scholes ο Heston υπέθεσε ότι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (ΜΔΕ) είναι της μορφής

$$C(S, v, t) = SP_1 - KPP_2, \quad (2.11)$$

όπου $P = e^{-r(T-t)}$ και $P_1 = P_1(S, v, t), P_2 = P_2(S, v, t)$. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση (2.11) στη διαφορική εξίσωση, έχω:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial P_1}{\partial t} - KrPP_2 - KP \frac{\partial P_2}{\partial t} + rS \left(P_1 + S \frac{\partial P_1}{\partial S} - KP \frac{\partial P_2}{\partial S} \right) \\ + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \left(S \frac{\partial P_1}{\partial v} - KP \frac{\partial P_2}{\partial v} \right) \\ + \frac{1}{2} vS^2 \left(2 \frac{\partial P_1}{\partial S} + S \frac{\partial^2 P_1}{\partial S^2} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial S^2} \right) \\ + \frac{1}{2} \zeta^2 v \left(S \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right) \\ + \rho \zeta Sv \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + S \frac{\partial^2 P_1}{\partial S \partial v} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial S \partial v} \right) - rSP_1 + rKPP_2 = 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = \ln(S)$ έχουμε

$$\frac{\partial P_i}{\partial S} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{1}{S},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial P_i}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{1}{S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right) \frac{1}{S} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial P_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial P_i}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial S \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial P_i}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{1}{S} \right) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial v} \frac{1}{S}$$

για $i = 1, 2$ η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial P_1}{\partial t} - KrPP_2 - KP \frac{\partial P_2}{\partial t} + rS \left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - KP \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{1}{S} \right) \\ & + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \left(S \frac{\partial P_1}{\partial v} - KP \frac{\partial P_2}{\partial v} \right) \\ & + \frac{1}{2} v S^2 \left(2 \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{1}{S} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \frac{1}{S} - \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{1}{S} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \frac{1}{S^2} + KP \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{1}{S^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \zeta^2 v \left(S \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right) \\ & + \rho \zeta S v \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} - KP \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \frac{1}{S} \right) - rSP_1 + rKPP_2 = 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα τους συντελεστές του S και του KP ίσους με μηδέν παίρνουμε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_1}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_1}{\partial x} + (\kappa\theta - (\kappa + \lambda - \rho\zeta)v) \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \rho\zeta v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_2}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + (\kappa\theta - (\kappa + \lambda)v) \frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \rho\zeta v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} = 0. \end{aligned}$$

Πρέπει επίσης να ικανοποιούνται οι τελικές συνθήκες

$$P_1(x, v, T; \ln[K]) = 1_{(x \geq \ln[K])},$$

$$P_2(x, v, T; \ln[K]) = 1_{(x \geq \ln[K])},$$

ούτως ώστε να έχουμε $C(S, v, T) = \max(S - K, 0)$. Οι διαφορικές εξισώσεις για τα P_1 και P_2 γράφονται πιο σύντομα στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial t} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \rho \zeta v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου για $j = 1, 2$

$$u_1 = 1/2, \quad u_2 = -1/2, \quad \alpha = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\zeta, \quad b_2 = \kappa + \lambda.$$

Οι τιμές $P_1(x, v, T)$, $P_2(x, v, T)$ μπορούν να θεωρηθούν πιθανότητες του ενδεχομένου ότι $S_T \geq K$. Στη συνέχεια της ενότητας θα ασχοληθούμε με τη λύση της (2.12).

Έστω ότι για $j = 1, 2$ οι x, v είναι στοχαστικές ανελίξεις που δίνονται από τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dx_t = (r + u_j v)dt + \sqrt{v}dW_t^1,$$

$$dv_t = (a - b_j v)dt + \zeta\sqrt{v}dW_t^2.$$

Έστω η συνάρτηση $f_j(x, v, t)$, η οποία είναι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή

$$f(x, v, t) = E[g(x(T), v(T)) | x(t) = x, v(t) = v]$$

για μία συνάρτηση $g = g(x, v)$.

Εφαρμογή της φόρμουλας του Ito για την f δίνει

$$\begin{aligned} df_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} \right. \\ \left. + \rho \zeta v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} \right) dt \end{aligned}$$

$$+(r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} dW_t^1 + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} dW_t^2.$$

Για $s < t$ από τον ορισμό της f_j και από ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} E[f_j(x, v, t) | x(s), v(s)] &= E[E[g(x(T), v(T)) | x(t), v(t)] | x(s), v(s)] \\ &= E[g(x(T), v(T)) | x(s), v(s)] = f_j(x, v, s). \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η f_j είναι martingale οπότε ισχύει

$$E[df_j] = 0,$$

και συνεπώς πρέπει

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial t} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} \\ + \rho \zeta v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = 0. \end{aligned}$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι η ίδια με τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η P_j της (2.12) με τη διαφορά ότι η τελική συνθήκη εδώ είναι λόγω του ορισμού της f_j , η

$$\begin{aligned} f_j(x, v, T) &= E[g(x(T), v(T)) | x(T) = x, v(T) = v] \\ &= g(x, v). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε βέβαια $g(x, v) = 1_{x \geq \ln[K]}$ παίρνουμε ακριβώς τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η P_j . Η λύση της ΜΔΕ (2.12) είναι η δεσμευμένη πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_j(x, v, t) &= E[1_{\{x(T) \geq \ln[K]\}} | x(t) = x, v(t) = v] \\ &= 1P(x(T) \geq \ln(K) | x(t) = x, v(t) = v). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $g(x, v) = e^{i\varphi x}$ θα έχω σαν λύση τη χαρακτηριστική συνάρτηση $f_j(x, v, t; \varphi)$ της $P_j(x, v, t)$. Υποθέτουμε τώρα για την f_j , ότι είναι της μορφής

$$f_j(x, v, t) = e^{C(T-t)+D(T-t)v+i\varphi x} \quad (2.13)$$

εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα των συντελεστών στην ΜΔΕ. Αντικατάστασή της στη διαφορική εξίσωση δίνει

$$\begin{aligned} (-C' - D'v)f_j + (a - b_jv)Df_j + (r + u_jv)i\varphi f_j + \frac{1}{2}\zeta^2vD^2f_j \\ + \rho\zeta vi\varphi Df_j - \frac{1}{2}v\varphi^2f_j = 0, \end{aligned}$$

και στη συνέχεια διαχωρίζοντας τους συντελεστές του v από τους σταθερούς συντελεστές έχουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$-C' + aD + r\varphi i = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\varphi^2 + \rho\zeta\varphi iD + \frac{1}{2}\zeta^2D^2 + u_j\varphi i - b_jD - D' = 0$$

με τη συνοριακή συνθήκη

$$C(0) = 0,$$

$$D(0) = 0.$$

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται αναλυτικά, και η λύση τους είναι

$$C(\tau; \varphi) = r\varphi i\tau + \frac{\alpha}{\zeta^2} \left\{ (b_j - \rho\zeta\varphi i + d)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right) \right\},$$

$$D(\tau; \varphi) = \frac{b_j - \rho\zeta\varphi i + d}{\zeta^2} \left\{ \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right\},$$

όπου

$$g = \frac{b_j - \rho\zeta\varphi i + d}{b_j - \rho\zeta\varphi i - d},$$

$$d = \sqrt{(\rho\zeta\phi i - b_j)^2 - \zeta^2(2u_j\phi i - \phi^2)}.$$

Οι πιθανότητες P_1 και P_2 τότε μπορούν να βρεθούν αντιστρέφοντας τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις (2.13):

$$P_j(x, v, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi \ln(K)} f_j(x, v, t; \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi. \quad (2.14)$$

Οι σχέσεις (2.11), (2.13) και (2.14) δίνουν την τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Δηλαδή, η τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή 0 θα δίνεται από τη σχέση

$$U(S_0, v_0, 0) = S_0 P_1(S_0, v_0, 0) - K e^{-rt} P_2(S_0, v_0, 0).$$

Ο Heston υπέθεσε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου, λ , πρέπει να είναι ανάλογο της διακύμανσης v , π.χ. $\lambda(S, v, t) = \lambda v$. Έτσι το drift ουδέτερου κινδύνου της διακύμανσης είναι

$$\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t) = \kappa(\theta - v) - \lambda v = \kappa\theta - (\kappa + \lambda)v = (\kappa + \lambda) \left(\frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} - v \right).$$

Έτσι, ορίζουμε τις παραμέτρους ουδέτερου κινδύνου

$$\kappa^* = \kappa + \lambda \quad \text{και} \quad \theta^* = \kappa\theta / (\kappa + \lambda) \quad (2.15)$$

και αντικαθιστώντας τα στη σχέση (2.9) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \kappa^*(\theta^* - v) \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \\ \frac{1}{2} \zeta^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \rho \zeta S v \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} - rC = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Άρα, η διαδικασία ουδέτερου κινδύνου της διακύμανσης είναι

$$dv = \kappa^*(\theta^* - v)dt + \zeta\sqrt{v} dW_t^2, \quad (2.17)$$

σε αντίθεση με την διαδικασία που ακολουθεί η διακύμανση στον πραγματικό κόσμο (σχέση (2.8)). Το θ^* είναι το επίπεδο αναστροφής του μέσου και κ^* είναι ο ρυθμός επαναφοράς του μέσου στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Η

σχέση (2.16) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (2.9), αλλά χωρίς να περιέχει παραμέτρους που αποτυπώνουν τις προτιμήσεις των επενδυτών. Όταν μοντελοποιούμε τιμές δικαιωμάτων χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Heston πρέπει να κοιτάμε τα θ^* και κ^* και όχι τα πραγματικά θ και κ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογή και αριθμητικά αποτελέσματα

3.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Με τη μέθοδο Monte Carlo υπολογίζουμε αριθμητικά μέσες τιμές. Από τον Ισχυρό Νόμο Των Μεγάλων Αριθμών (INMA) γνωρίζουμε ότι για N αριθμό τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ταυτόνομες, ο δειγματικός μέσος τους

$$\bar{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j$$

τείνει στην πραγματική μέση τιμή $\mu = E(X_j)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Χρησιμοποιούμε λοιπόν έναν αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής των τυχαίων μεταβλητών μας – στην συγκεκριμένη περίπτωση των προεξοφλημένων αποδόσεων των δικαιωμάτων στη λήξη – παράγοντας N τυχαίους αριθμούς από τη γνωστή τυπική κανονική κατανομή και προσομοιώνοντας την τιμή της μετοχής.

Για να βρούμε το μέγεθος N του δείγματος που απαιτείται για να έχουμε μια δεδομένη ακρίβεια χρησιμοποιούμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Δηλαδή ποσοτικοποιούμε την ποιότητα του εκτιμητή μας \bar{X}_N από το αναμενόμενο τετραγωνικό σφάλμα:

$$E[(\bar{X}_N - \mu)^2] = Var(\bar{X}_N) = Var\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N Var(X_j) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}.$$

Παρατηρούμε ότι όσο το N αυξάνεται η εκτίμησή μας βελτιώνεται. Το διάστημα εμπιστοσύνης για τον πληθυσμιακό μέσο με συντελεστή εμπιστοσύνης $(1 - \alpha)100\%$ είναι

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right]$$

για δείγματα με πολύ μεγάλο μέγεθος. Μας ενδιαφέρει το σχετικό σφάλμα:

$$\frac{|\bar{X}_n - \mu|}{|\bar{X}_n|} = \left| 1 - \frac{\mu}{\bar{X}_n} \right|.$$

Από τα διαστήματα εμπιστοσύνης γνωρίζουμε ότι για τα $(1 - \alpha)$ στα 100 δείγματα μεγέθους N ο πραγματικός μέσος θα βρίσκεται:

$$\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}$$

$$\frac{|\bar{X}_n - \mu|}{|\bar{X}_n|} \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}}{|\bar{X}_n|}.$$

Άρα όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι το δεξιό μέλος, τόσο καλύτερη προσέγγιση έχω.

Μοντέλο Hull and White

Οι ανελίξεις της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας κάτω από ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας martingale ($\lambda = 0$ στην (2.5)) ακολουθούν τις στοχαστικές διαδικασίες:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t,$$

$$dV_t = \varphi V_t dt + \xi V_t dZ_t.$$

Τότε για την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς έχουμε τον τύπο

$$C_0 = E^* [e^{-rT} \max(S_T - K, 0)].$$

Άρα, η εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος με την προσομοίωση Monte Carlo είναι

$$C'_0 = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j$$

όπου N είναι ο αριθμός του δείγματος και

$$Y_j = \max(S_{T,j} - K, 0).$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $\max(S_{T,j} - K, 0)$ είναι ανεξάρτητες και ταυτόνομες, προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι το σφάλμα

$$E[(C'_0 - C_0)^2] = \text{Var}(C'_0) = \frac{e^{-2rT}}{N} \sigma_y^2$$

Έτσι, η μέθοδος έχει σφάλμα που είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού των επαναλήψεων.

Για την προσέγγιση της τιμής ενός δικαιώματος με την μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo ακολουθούμε τη διαδικασία που ακολούθησαν και οι Hull & White (1987) για τις περιπτώσεις που δεν ισχύουν οι υποθέσεις που είναι απαραίτητες για την σχέση (2.7). Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito για την $x(t) = \ln(S_t)$ έχουμε

$$dx_t = \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) dt + \sqrt{V_t}dW_t.$$

Παρατηρούμε ότι είναι προτιμότερη η προσέγγιση της x_t , αφού στη стоχαστική διαφορική εξίσωση δεν εμφανίζεται η τιμή x_t και άρα το σφάλμα διακριτοποίησης ελαχιστοποιείται. Την ίδια διαδικασία ακολουθώ και για την V_t . Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Euler έχουμε

$$x_{t+1} = x_t + \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \Delta t + \sqrt{V_t}u_{t+1}\sqrt{\Delta t}$$

και

$$\ln(V_{t+1}) = \ln(V_t) + \left(\varphi - \frac{1}{2}\xi^2\right) \Delta t + \xi v_{t+1}\sqrt{\Delta t}$$

για τυχαίες μεταβλητές $u_{t+1}, v_{t+1} \sim N(0,1)$ με συσχέτιση ρ .

Πρώτη μέθοδος

Στην πρώτη μέθοδο προσομοίωσης υποθέτουμε ότι οι κινήσεις Brown W, Z είναι ανεξάρτητες, δηλαδή $\rho=0$. Επίσης, χρησιμοποιούμε μια διαδικασία επαναφοράς του μέσου για τη μεταβλητότητα. Μια τέτοια απλή διαδικασία είναι η

$$\varphi = \alpha(\sigma^* - \sqrt{V}), \quad (3.1)$$

όπου ξ, α, σ^* είναι σταθερές. Χωρίζουμε το διάστημα $T - t$ σε n ίσα υποδιαστήματα και παράγουμε n τυχαίους αριθμούς v_i ($1 \leq i \leq n$) από την τυπική κανονική κατανομή. Έπειτα, παράγουμε τη μεταβλητότητα V_i τη χρονική στιγμή $t + i(T - t)/n$ χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Euler:

$$V_i = V_{i-1} e^{\left(\varphi(\alpha, \sigma^*, \sqrt{V}) - \frac{\xi^2}{2}\right)\Delta t + v_i \xi \sqrt{\Delta t}}$$

όπου $\Delta t = (T - t)/n$. Εδώ δεν είναι απαραίτητο να προσομοιώσουμε και την S και τη V . Μετά υπολογίζουμε την τιμή του μοντέλου BS, p_1 , θέτοντας ως μεταβλητότητα τον αριθμητικό μέσο των V_i ($1 \leq i \leq n$). Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται χρησιμοποιώντας τις αντίθετες μεταβλητές, $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$), ώστε να πάρουμε την τιμή p_2 . Στη συνέχεια υπολογίζουμε το

$$y = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Η μέση τιμή των υπολογισθέντων y μετά από μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων δίνει μια πολύ καλή εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος αφού η διακύμανση του δειγματικού μέσου των y είναι μικρότερη όταν λόγω της χρήσης των αντίθετων μεταβλητών. Αυτή η τιμή μπορεί να συγκριθεί με την τιμή του BS (με μεταβλητότητα V_0) και του Heston για να ελεγχθεί η ακρίβεια προσέγγισης της τιμής των δικαιωμάτων μεταξύ των μοντέλων. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν ισχύουν οι υποθέσεις

για την σχέση (2.7), αλλά το ξ είναι πολύ μεγάλο για να συγκλίνει η σειρά αυτή γρήγορα.

Δεύτερη μέθοδος

Στη δεύτερη μέθοδο προσομοίωσης, χρησιμοποιούμε συσχέτιση $\rho \neq 0$ μεταξύ των κινήσεων Brown W , Z και τα φ και ξ εξαρτώνται από το $\sigma = \sqrt{V}$ και t . Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να προσομοιώσουμε και την S και τη V . Ο χρόνος μέχρι τη λήξη διαιρείται πάλι σε n ίσα μέρη και παράγουμε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές u_i και v_i ($1 \leq i \leq n$) από την τυπική κανονική για να παράξουμε την τιμή της μετοχής S_i και τη μεταβλητότητα V_i τη χρονική στιγμή $t + i \frac{(T-t)}{n}$ στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Από την προσέγγιση Euler χρησιμοποιούμε τις φόρμουλες:

$$S_i = S_{i-1} e^{\left(r - \frac{V_{i-1}}{2}\right)\Delta t + u_i \sqrt{V_{i-1}}\Delta t},$$

$$V_i = V_{i-1} e^{\left(\varphi(a, \sigma^*, \sqrt{V}) - \frac{\xi^2}{2}\right)\Delta t + \xi \sqrt{\Delta t} (\rho u_i + \sqrt{1 - \rho^2} v_i)},$$

εφαρμόζοντας την παραγοντοποίηση Cholesky για δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

$$\varepsilon_1 = u_1,$$

$$\varepsilon_2 = \rho u_1 + \sqrt{(1 - \rho^2)} v_1$$

με $\rho = \text{Cor}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Εδώ οι τιμές των φ και ξ μπορούν και να εξαρτώνται από το $\sigma^2 = V_{i-1}$ και $S = S_{i-1}$.

Ακολουθεί ο υπολογισμός του

$$e^{-r(T-t)} \max[S_n - K, 0]$$

για να δώσει την τιμή του δείγματος, p_1 , για το δικαίωμα. Μια δεύτερη τιμή, p_2 , υπολογίζεται αντικαθιστώντας τα u_i με τα $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$) επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς. Έπειτα υπολογίζεται η p_3

αντικαθιστώντας τα v_i με τα $-v_i$ ($1 \leq i \leq n$) επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς και η p_4 αντικαθιστώντας τα u_i με τα $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$) και τα v_i με τα $-v_i$ ($1 \leq i \leq n$) επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς. Τέλος, υπολογίζονται δύο δειγματικές τιμές του μοντέλου BS, q_1 και q_2 , προσομοιώνοντας την S με την χρήση των u_i και $-u_i$, αντίστοιχα, με σταθερή μεταβλητότητα την V_0 . Αυτοί οι υπολογισμοί δίνουν τις παρακάτω δύο εκτιμήσεις των αποκλίσεων αποτίμησης:

$$\frac{p_1 + p_3 - 2q_1}{2}$$

και

$$\frac{p_2 + p_4 - 2q_2}{2}.$$

Υπολογίζονται, τέλος, οι μέσες τιμές αυτών των εκτιμήσεων για μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων. Αυτή η διαδικασία χρησιμοποιεί την τεχνική αντίθετων μεταβλητών δύο φορές και την τεχνική μεταβλητής ελέγχου.

Μοντέλο Heston

Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου η ανέλιξη της τιμής της μετοχής ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1$$

και η V ακολουθεί την

$$dV_t = \kappa^*(\theta^* - V_t)dt + \zeta\sqrt{V_t}dW_t^2,$$

σύμφωνα με την (2.17). Η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι πάλι

$$C_0 = E^*[e^{-rT} \max(S_T - K, 0)]$$

και η εκτιμήτρια είναι

$$C'_0 = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j,$$

όπου N είναι ο αριθμός επαναλήψεων και

$$Y_j = \max(S_{T,j} - K, 0).$$

Επομένως και η μέθοδος αυτή έχει σφάλμα που είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού των επαναλήψεων.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Euler, όπως και με το προηγούμενο μοντέλο, έχουμε

$$x_{t+1} = x_t + \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \Delta t + \sqrt{V_t} u_{t+1} \sqrt{\Delta t}$$

και

$$V_{t+1} = V_t + \kappa^*(\theta^* - V_t)\Delta t + \zeta \sqrt{V_t} v_{t+1} \sqrt{\Delta t}$$

για τυχαίες μεταβλητές $u_{t+1}, v_{t+1} \sim N(0,1)$ με συσχέτιση ρ .

Χρησιμοποιούμε και εδώ τη μέθοδο αντίθετων μεταβλητών για να έχουμε καλύτερη προσέγγιση της τιμής του δικαιώματος. Χρησιμοποιούμε $\rho \neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να προσομοιώσουμε και την S και τη V . Ο χρόνος μέχρι τη λήξη διαιρείται πάλι σε n ίσα μέρη και παράγουμε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική u_i και v_i ($1 \leq i \leq n$) για να παράξουμε την τιμή της μετοχής S_i και τη μεταβλητότητα V_i τη χρονική στιγμή i στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση Cholesky για δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έτσι

$$S_i = S_{i-1} e^{[(r - \frac{V_{i-1}}{2})\Delta t + u_i \sqrt{V_{i-1}}\Delta t]}$$

$$V_i = V_{i-1} + \kappa^*(\theta^* - V_{i-1})\Delta t + (\rho u_i + \sqrt{1 - \rho^2} v_i) \zeta \sqrt{V_{i-1}} \sqrt{\Delta t}.$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός του

$$e^{-r(T-t)} \max[S_n - K, 0]$$

για να δώσει την τιμή του δείγματος, p_1 , για το δικαίωμα. Έπειτα υπολογίζεται η p_2 , αντικαθιστώντας τα u_i με τα $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$) και τα v_i με τα $-v_i$ ($1 \leq i \leq n$). Στη συνέχεια υπολογίζουμε το

$$y = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

και τη μέση τιμή των y μετά από μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων, ώστε να έχουμε μια πολύ καλή εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος.

3.2 Προσέγγιση ολοκληρώματος (μοντέλο Heston)

Η απλούστερη αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης Simpson, στηρίζεται στο γνωστό κανόνα Simpson, σύμφωνα με τον οποίο για τον υπολογισμό του πεπερασμένου ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx$$

χωρίζουμε το διάστημά μας σε κόμβους

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

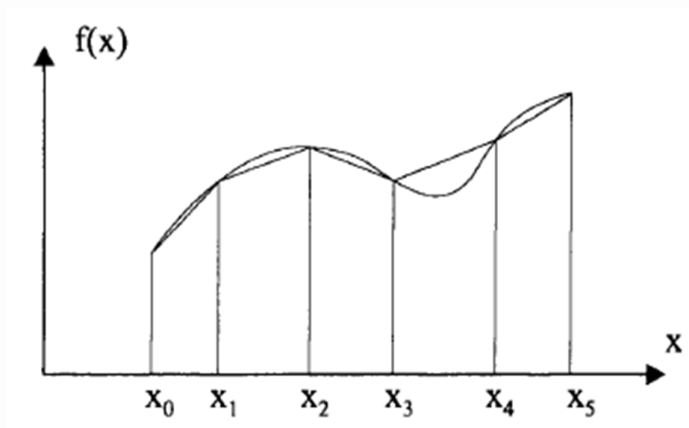
όπου $h = (b - a)/n$.

Ας θέσουμε $f_i = f(x_i)$. Δεδομένων των $n + 1$ κόμβων μπορούμε να θεωρήσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange βαθμού n :

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i L_i(x).$$

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τα σωστά βάρη ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f_i \left(\int_a^b L_i(x)dx \right) = \sum_{i=0}^n w_i f_i.\end{aligned}$$



Εδώ, ουσιαστικά, παρεμβάλουμε την $f(x)$ με μια τεθλασμένη γραμμή. Δηλαδή, μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδό της περιοχής κάτω από την f , χρησιμοποιώντας τραπεζοειδή στοιχεία.

Η συνάρτηση $f(x)$ προσεγγίζεται, λοιπόν, από το πολυώνυμο δεύτερης τάξης $P(x)$, το οποίο λαμβάνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση $f(x)$ στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ και στο μέσο του διαστήματος $M = \frac{a+b}{2}$. Για την εύρεση του πολυωνύμου αυτού χρησιμοποιείται το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange ως εξής:

$$\begin{aligned}P(x) &= f(a) \frac{(x-M)(x-b)}{(a-M)(a-b)} + f(M) \frac{(x-a)(x-b)}{(M-a)(M-b)} \\ &\quad + f(b) \frac{(x-a)(x-M)}{(b-a)(b-M)}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ο κανόνας του Simpson λαμβάνει την ακόλουθη απλή προσέγγιση

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Το σφάλμα προσέγγισης σύμφωνα με τον απλό κανόνα του Simpson είναι:

$$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

όπου $h = (b - a)/2$ και $a < \xi < b$.

Στις περιπτώσεις που η συνάρτηση $f(x)$ δε μεταβάλλεται ομαλά, είτε στο σύνολο του διαστήματος ολοκλήρωσης, είτε σε επιμέρους τμήματα αυτού, η εφαρμογή του παραπάνω απλού κανόνα Simpson δε δίνει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται ο σύνθετος κανόνας Simpson, σύμφωνα με τον οποίο το συνολικό διάστημα ολοκλήρωσης διαιρείται σε κατάλληλο αριθμό υποδιαστημάτων στα οποία εφαρμόζεται επιμέρους ο απλός κανόνας Simpson. Το γεγονός ότι χρειαζόμαστε τρία σημεία για την ολοκλήρωση κάθε διαστήματος, απαιτείται να υπάρχουν άρτια σε πλήθος διαστήματα. Στη συνέχεια το συνολικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως άθροισμα των αποτελεσμάτων του απλού κανόνα Simpson στα επιμέρους υποδιαστήματα:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right),$$

όπου n είναι ο περιττός αριθμός των υποδιαστημάτων στα οποία διαιρείται το συνολικό διάστημα $[a, b]$, και $x_i = a + ih$, με $i = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, και $x_n = b$. Στην περίπτωση του σύνθετου κανόνα Simpson το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης του ολοκληρώματος είναι:

$$-\frac{h^4}{180}(b - a)f^{(4)}(\xi),$$

όπου $h = (b - a)/2$ και $a < \xi < b$.

Εμείς για την εκτίμηση του ολοκληρώματος στη συνάρτηση των P_1 και P_2 της (2.14), για τον προσδιορισμό της τιμής του ευρωπαϊκού δικαιώματος

αγοράς σύμφωνα με το μοντέλο του Heston, θα χρησιμοποιήσουμε το σύνθετο κανόνα του Simpson, όπως περιγράφηκε ανωτέρω.

3.3 Ιδιότητες των τιμών του μοντέλου Hull&White

Στην παρούσα ενότητα εξετάζονται οι ιδιότητες των τιμών των δικαιωμάτων στο μοντέλο Hull & White που προκύπτουν από τις θεωρητικές τιμές και τις αριθμητικές λύσεις (προσομοιώσεις).

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η μεταβλητότητα είναι ασυσχέτιστη με την τιμή της μετοχής και ϕ και ξ είναι σταθερά. Το Σχήμα 1 δείχνει τη σχέση μεταξύ της τιμής του B-S και της θεωρητικής τιμής σύμφωνα με το μοντέλο H-W. Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που τιμολογείται έχει 180 μέρες μέχρι τη λήξη, το ετήσιο επιτόκιο θεωρείται μηδενικό, η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου είναι 15% ετησίως, $\phi = 0$ και $\xi = 1$. Η τιμή του B-S είναι πιο χαμηλή στα deep-in-the-money και deep-out-of-the-money και πιο υψηλή στα at-the-money δικαιώματα. Οι μεγαλύτερες απόλυτες διαφορές μεταξύ των τιμών παρατηρούνται στα at ή near-the-money δικαιώματα. Συγκρίνοντας, λοιπόν, τα αποτελέσματα που βρήκαμε από τη σχέση (2.7) με το μοντέλο των Black-Scholes παρατηρούμε ότι το μοντέλο BS υπερεκτιμά near-to-the-money δικαιώματα και υποεκτιμά deep-in-the-money και deep-out-of-the-money δικαιώματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Στο Σχήμα 2 φαίνεται το αποτέλεσμα της αλλαγής του σ , ενώ στο Σχήμα 3 φαίνεται το αποτέλεσμα της αλλαγής του ξ . Ενώ το απόλυτο μέγεθος της διαφοράς των τιμών είναι πολύ μικρό, εκφρασμένο σαν ποσοστό ως προς την τιμή του B-S είναι αρκετά μεγάλο. Στο Σχήμα 2 παρατηρούμε πως καθώς αυξάνεται το σ , το ποσοστό της διαφοράς των τιμών για τα out-of-the-money γίνεται πιο θετικό ενώ για τα in-the-money γίνεται πιο αρνητικό. Αν κάποιος κοιτάξει στα deep-out-of-the-money, το αποτέλεσμα αυτό αντιστρέφεται, και έτσι καθώς αυξάνεται το σ^2 μειώνεται η διαφορά. Το κύριο αποτέλεσμα της αύξησης του ξ στο Σχήμα 3 είναι να γίνεται πιο αρνητική η διαφορά στα near-the-money δικαιώματα.

Στον Πίνακα 1 φαίνονται αναλυτικά οι τιμές καθώς και οι σχετικές διαφορές των τιμών των δύο μεθόδων (Σειριακή λύση και μέθοδος Monte Carlo) με το μοντέλο B-S. Στην τελευταία στήλη είναι το σχετικό σφάλμα της μεθόδου Monte Carlo για κάθε ένα από τα δικαιώματα. Παρατηρούμε ότι όσο τα δικαιώματα γίνονται in-the-money τόσο μειώνεται το σφάλμα της μεθόδου Monte Carlo ενώ στα deep-in-the-money το σφάλμα είναι μηδενικό. Ακόμα, παρατηρούμε ότι ενώ στη σειριακή λύση η σχετική διαφορά γίνεται αρνητική στα near-the-money δικαιώματα και θετική στα in-the-money και out-of-the-money δικαιώματα, στη μέθοδο Monte Carlo η σχετική διαφορά είναι πάντα θετική και μειώνεται καθώς τα δικαιώματα γίνονται από out-of-the-money σε in-the-money. Τέλος, παρατηρούμε πως η σχετική διαφορά με τη μέθοδο Monte Carlo είναι πολύ μικρή από ότι με τη σειριακή λύση.

Επιπλέον αναπτύσσουμε μία διαδικασία Monte Carlo για να προσομοιώσουμε τις τιμές των δικαιωμάτων για μη μηδενικά ρ και μη μηδενική συσχέτιση μεταξύ της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητά της. Όταν η συσχέτιση είναι θετική, το μοντέλο Black-Scholes υποεκτιμά out-of-the-money δικαιώματα και υπερεκτιμά in-the-money δικαιώματα. Όταν η συσχέτιση είναι αρνητική, συμβαίνει το αντίθετο. Αυτά τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 2. Όταν η μεταβλητότητα είναι θετικά συσχετισμένη με την τιμή της μετοχής η τιμή του δικαιώματος έχει ένα σφάλμα ως προς την τιμή του μοντέλου B-S που τείνει να μειώνεται καθώς η τιμή της μετοχής αυξάνεται. Out-of-the-money δικαιώματα τιμολογούνται αρκετά υψηλότερα από ότι με το B-S, ενώ η τιμή των in-the-money δικαιωμάτων είναι χαμηλότερη από αυτή του B-S. Όταν η μεταβλητότητα είναι αρνητικά συσχετισμένη με την τιμή της μετοχής συμβαίνει το αντίθετο. Out-of-the-money δικαιώματα τιμολογούνται, σύμφωνα με το μοντέλο H-W, χαμηλότερα από ότι με το B-S, ενώ in-the-money δικαιώματα έχουν τιμές υψηλότερες από το B-S. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδέν, η διαφορά των δύο μοντέλων είναι συνδυασμός των δύο προηγούμενων αποτελεσμάτων. Στις παρενθέσεις του πίνακα 2 φαίνονται τα σχετικά σφάλματα της μεθόδου Monte Carlo για την εκάστοτε τιμή που δίνει το μοντέλο H-W όπως αυτό ορίστηκε στην Ενότητα 3.1.

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να εξηγηθούν από την επιρροή που έχει ο συντελεστής συσχέτισης στην τελική κατανομή των τιμών των μετοχών. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός, υψηλές τιμές μετοχών συνδέονται με υψηλές τιμές μεταβλητότητας: όσο αυξάνεται η τιμή της μετοχής αυξάνεται η πιθανότητα μεγάλων θετικών αλλαγών. Αυτό σημαίνει ότι γίνονται πιο πιθανές οι υψηλές τιμές μετοχής από όταν η μεταβλητότητα είναι σταθερή. Χαμηλές τιμές μετοχής συνδέονται με χαμηλές μεταβλητότητες: αν η τιμή της μετοχής πέσει γίνεται λιγότερο πιθανό ότι μεγάλες αλλαγές θα συμβούν. Αυτό συνεπάγεται ότι η κατανομή της τελικής τιμής της μετοχής θα έχει θετική ασυμμετρία σε αντίθεση με τη λογαριθμοκανονική κατανομή όταν η μεταβλητότητα είναι σταθερή. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός, συμβαίνει το αντίθετο. Δηλαδή, υψηλές τιμές μειώνουν τη μεταβλητότητα ώστε να είναι απίθανο να υπάρξουν πολύ υψηλές αλλαγές στην τελική τιμή της μετοχής. Χαμηλές τιμές συνδέονται με υψηλή μεταβλητότητα, άρα αυξάνεται η πιθανότητα μεγάλων θετικών μεταβολών. Το αποτέλεσμα είναι η κατανομή της τελικής τιμής της μετοχής να είναι πιο λεπτόκυρτη από τη λογαριθμοκανονική.

3.4 Ιδιότητες των τιμών του μοντέλου Heston

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τα αποτελέσματα της στοχαστικής μεταβλητότητας στις τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με βάση το μοντέλο του Heston και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με το μοντέλο B-S. Για την αποτίμηση χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους ουδέτερου κινδύνου που αναφέραμε στην Ενότητα 2.3 στη σχέση (2.15).

Πολλά είναι τα αποτελέσματα της επιρροής των παραμέτρων στις τιμές των δικαιωμάτων. Για παράδειγμα, υψηλή διακύμανση $v(t)$ αυξάνει τις τιμές όλων των δικαιωμάτων όπως ακριβώς και στο μοντέλο B-S. Έτσι, μία αύξηση στο θ^* (μέσο επίπεδο διακύμανσης) αυξάνει τις τιμές των δικαιωμάτων. Η παράμετρος του ρυθμού μέσης επαναφοράς της διακύμανσης καθορίζει τα αντίστοιχα βάρη της τρέχουσας διακύμανσης και της μέσης μακροπρόθεσμης διακύμανσης στις τιμές των δικαιωμάτων. Όταν, δηλαδή, η κ^* είναι θετική, η κατανομή της διακύμανσης είναι σταθερή με μέσο θ^* και έτσι οι αποδόσεις

των τιμών των μετοχών για μεγάλες χρονικές περιόδους θα έχουν σχεδόν κανονικές κατανομές με διακύμανση ανά μονάδα χρόνου θ^* .

Ένα διάγραμμα που απεικονίζει το πώς εξελίσσονται οι τιμές του μοντέλου αυτού για διαφορετικές τιμές του υποκείμενου τίτλου είναι το Σχήμα 4. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το πηλίκο S/K αυξάνεται και η τιμή του αντίστοιχου δικαιώματος. Στα in-the-money δικαιώματα, όπως είναι φυσικό, η τιμή των δικαιωμάτων είναι αυξημένη. Βλέπουμε και τη διαφορά των τιμών του μοντέλου με τις αντίστοιχες τιμές του B-S. Στα at-the-money δικαιώματα η διαφορά είναι μεγάλη, ενώ στα deep-in-the-money και deep-out-of-the-money οι τιμές των δύο μοντέλων συγκλίνουν. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: $K = 100$, $T = 0.5$, $r = 0$, $V_0 = 0.01$, $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$.

Οι παράμετροι ρ και ζ παίζουν σημαντικό ρόλο στο να καθορίσουν το σχήμα της κατανομής της τελικής τιμής στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου και άρα επηρεάζουν την τιμή των δικαιωμάτων άμεσα. Το πρόσημο και το μέγεθος του ρ καθορίζουν την 'κατεύθυνση' και το επίπεδο της ασυμμετρίας στην κατανομή του υποκείμενου τίτλου. Αρνητική συσχέτιση, με όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές, σημαίνει ότι μία αύξηση στην απόδοση της μετοχής σχετίζεται με μείωση της διακύμανσης. Άρα, η αριστερή πλευρά γίνεται παχύτερη και η δεξιά ουρά λεπτότερη από την λογαριθμοκανονική κατανομή που υποθέτει το μοντέλο Black-Scholes. Αυτό οδηγεί σε υψηλότερη πιθανότητα (από την λογαριθμοκανονική κατανομή) για την τιμή της μετοχής που θα καταλήξει κάτω από ένα ακραία χαμηλό επίπεδο της τιμής εξάσκησης και άρα αυξάνει τη διαφορά των τιμών των out-of-the-money δικαιωμάτων πώλησης και in-the-money δικαιωμάτων αγοράς σε σχέση με το μοντέλο BS, ενώ από την άλλη μειώνει τη διαφορά των τιμών των in-the-money δικαιωμάτων πώλησης και out-of-the-money δικαιωμάτων αγοράς. Διαισθητικά, τα deep-out-of-the-money δικαιώματα πώλησης ωφελούνται σημαντικά από την παχιά αριστερή ουρά και πληρώνουν μικρή 'ποινή' (δηλαδή η τιμή τους δεν πέφτει τόσο πολύ όσο στο υπόδειγμα BS) λόγω της αυξημένης πιθανότητας μείωσης της τιμής της μετοχής. Θετική συσχέτιση έχει ακριβώς τα αντίθετα αποτελέσματα όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.

Ενώ ο συντελεστής συσχέτισης ρ επηρεάζει την ασυμμετρία της κατανομής της τιμής της μετοχής, η παράμετρος ζ ελέγχει τη μεταβλητότητα της μεταβλητότητας. Όταν το ζ είναι 0, η μεταβλητότητα είναι ντετερμινιστική, ενώ αντίθετα, όταν αυξάνεται το ζ αυξάνεται η κύρτωση της κατανομής της τιμής της μετοχής και κάνει τις ουρές της κατανομής παχύτερες. Έτσι, η ύπαρξη ακραίων αποδόσεων της μετοχής είναι πιο πιθανή, με αποτέλεσμα οι τιμές των δικαιωμάτων που είναι deep-in-the-money και deep-out-of-the-money αυξάνονται, ενώ, οι τιμές των near-the-money δικαιωμάτων μειώνονται σε σχέση με το υπόδειγμα BS (Σχήμα 6).

Η συσχέτιση μεταξύ της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας είναι απαραίτητη για να δημιουργήσει ασυμμετρία. Η ασυμμετρία στην κατανομή των αποδόσεων των τιμών των μετοχών επηρεάζει την αποτίμηση των in-the-money και out-of-the-money δικαιωμάτων. Χωρίς συσχέτιση η στοχαστική μεταβλητότητα αλλάζει μόνο την κύρτωση, η οποία επηρεάζει την αποτίμηση των near-the-money δικαιωμάτων.

Monte Carlo

Στην περίπτωση του απλού δικαιώματος αγοράς η ύπαρξη της αναλυτικής μεθόδου καθιστά τη μέθοδο Monte Carlo περιττή αλλά μπορεί να προσφέρει τη βάση για την ανάλυση της σύγκλισης της μεθόδου. Η μέθοδος αυτή, όμως, είναι μονόδρομος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αποτίμησης παραγώγων των οποίων η τιμή εξαρτάται από την ιστορία της τιμής του υποκείμενου τίτλου καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του παραγώγου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι τα Asian δικαιώματα των οποίων η αξία στη λήξη εξαρτάται από όλο το μονοπάτι της τιμής της μετοχής αφού τα έσοδα στη λήξη είναι ο μέσος όρος των τιμών του υποκείμενου τίτλου καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Η εφαρμογή της μεθόδου είναι απλή, αφού το μόνο που χρειάζεται είναι η παραγωγή των τυχαίων αριθμών από την τυπική κανονική κατανομή. Όμως η μέθοδος είναι ιδιαίτερα απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους λόγω της αργής σύγκλισης της μεθόδου. Έτσι, ο απαιτούμενος χρόνος για τον υπολογισμό μιας τιμής είναι πολύ μεγάλος.

Για την εφαρμογή της μεθόδου θεωρούμε τους συντελεστές να έχουν τιμές: $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$, $V_0 = 0.01$, $S_0 = 100$, $T = 0.5$, $r = 0$. Στην

περίπτωση του απλού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 100 έχουμε την τιμή 2,73 ενώ η αντίστοιχη θεωρητική είναι 2,19 και η τιμή B-S είναι 2,82. Στον Πίνακα 3 φαίνονται αναλυτικά τα αποτελέσματα των παραπάνω μεθόδων. Συγκεκριμένα, ο πίνακας δείχνει πως η απόκλιση των τιμών του μοντέλου του Heston με αυτές του B-S είναι μεγαλύτερη με τη μέθοδο Monte Carlo για όλα τα δικαιώματα εκτός από τα deep-in-the-money, όπου η απόκλιση της θεωρητικής τιμής του Heston είναι οριακά μεγαλύτερη. Επιπλέον, παρατηρούμε πως για οποιαδήποτε τιμή S/K, η απόκλιση των τιμών είναι πάντα θετική όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo σε αντίθεση με την απόκλιση των τιμών όταν χρησιμοποιείται η θεωρητική τιμή του Heston, όπου γίνεται και αρνητική στα out – the – the - money δικαιώματα. Τέλος, το τυπικό σφάλμα της μεθόδου Monte Carlo μειώνεται αισθητά καθώς προχωρούμε στα in-the-money δικαιώματα.

Παρατήρηση

Συγκρίνοντας τα δύο μοντέλα μεταξύ τους ως προς την ταχύτητα υπολογισμού της τιμής των δικαιωμάτων με τη μέθοδο κλειστής μορφής καθώς και την μέθοδο Monte – Carlo, παρατηρούμε πως το μοντέλο του Heston υπολογίζει πιο γρήγορα την τιμή και στις δύο μεθόδους σε σύγκριση με το μοντέλο Hull – White. Συγκρίνοντας τις μεθόδους μεταξύ τους, η μέθοδος κλειστής μορφής χρειάζεται πολύ λιγότερο χρόνο για να υπολογίσει την τιμή από ότι η μέθοδος Monte Carlo και για τα δύο μοντέλα.

3.5 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Σε αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για να λύσουμε τη μερική διαφορική εξίσωση (MΔΕ) των δύο μοντέλων. Δηλαδή αναζητούμε την τιμή μιας συνάρτησης $U(S,v,t)$, που ικανοποιεί όχι μόνο τη MΔΕ αλλά και τις συνοριακές συνθήκες. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στην επίλυση MΔΕ βασίζεται στην απλή ιδέα της προσέγγισης κάθε μερικής παραγώγου από ένα πηλίκο διαφοράς, μετατρέποντας τη λειτουργική εξίσωση σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων. Για την εφαρμογή αυτής της ιδέας πάνω στη MΔΕ που

περιλαμβάνει την $U(S,v,t)$ δημιουργούμε ένα διακριτό πλέγμα των σημείων τύπου $(i\delta S, j\delta v, n\delta t)$, όπου δS , δv και δt είναι τα βήματα διακριτοποίησης και αναζητούμε την τιμή της U πάνω σε αυτό το πλέγμα. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, προσεγγίσεις για τις μερικές παραγώγους και τις συνοριακές συνθήκες και πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $U(S,v,t)$ σε καθένα από τα σημεία του πλέγματος.

Τα ακόλουθα πηλίκα διαφορών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντικαταστήσουν τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς την τιμή της μετοχής:

κεντρική διαφορά:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\delta S},$$

προδρομική διαφορά:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\delta S},$$

οπισθοδρομική διαφορά:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\delta S},$$

δεύτερη μερική παράγωγος:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\delta S^2}.$$

Αντίστοιχα βρίσκουμε και τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς τη μεταβλητότητα v . Επίσης,

μικτή μερική παράγωγος:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} = \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1}}{4\delta S \delta v}$$

Για να διακριτοποιήσουμε τη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο χρησιμοποιούμε μία από τις παρακάτω μεθόδους:

$$\text{έμμεση μέθοδος Euler: } U^{n+1} - U^n = \delta t \cdot f(U^{n+1}),$$

$$\text{άμεση μέθοδος Euler: } U^{n+1} - U^n = \delta t \cdot f(U^n),$$

$$\text{μέθοδος Crank - Nicolson: } U^{n+1} - U^n = \frac{1}{2} \cdot \delta t \cdot [f(U^{n+1}) + f(U^n)],$$

όπου η f προσδιορίζεται από τη ΜΔΕ (2.3).

Η μέθοδος Crank - Nicolson δίνει την πιο ακριβή λύση όμως, για ευκολία των υπολογισμών, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την Έμμεση μέθοδο.

Η τιμή του δικαιώματος που θέλουμε να αποτιμήσουμε είναι γνωστή στη λήξη T . Χρησιμοποιώντας αυτήν την τιμή και τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες και πηγαίνοντας βήμα προς βήμα πίσω προσεγγίζουμε την τιμή του δικαιώματος $U(S, v, t)$ σε όλα τα χρονικά σημεία μέχρι να φτάσουμε στη χρονική στιγμή $t = 0$.

Οι συνοριακές συνθήκες προσδιορίζουν την αξία της άγνωστης συνάρτησης U στα σύνορα του πλέγματος. Γνωρίζουμε ότι ο κάτοχος ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς έχει το δικαίωμα να αγοράσει τη μετοχή στη λήξη του δικαιώματος στην τιμή εξάσκησης K . Έτσι, η αξία του συμβολαίου την χρονική στιγμή T είναι μηδέν, αν η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης, και $S - K$, αν είναι μεγαλύτερη. Η συνοριακή συνθήκη την στιγμή $t = T$ είναι:

$$U(S, v, T) = \max(0, S - K). \quad (3.2)$$

Όταν η τιμή της μετοχής είναι μηδέν, τότε λόγω της Γεωμετρικής κίνησης Brown που ακολουθεί, παραμένει μηδέν και άρα η αξία του δικαιώματος είναι μηδέν. Έτσι, η συνοριακή συνθήκη για $S = 0$ είναι

$$U(0, v, t) = 0. \quad (3.3)$$

Για πολύ μεγάλες τιμές της S η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται γραμμικά. Η συνοριακή συνθήκη στο σημείο $S = S_{\max}$ είναι

$$\frac{\partial U(S_{max}, v, t)}{\partial S} = 1. \quad (3.4)$$

Η τιμή του δικαιώματος, γενικά, αυξάνεται καθώς αυξάνεται η μεταβλητότητα. Οριοθετείται, όμως, από την τιμή της μετοχής. Όταν η μεταβλητότητα παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της, η τιμή του δικαιώματος τείνει να σταθεροποιείται:

$$\frac{\partial U(S, v_{max}, T)}{\partial v} = 0 \Rightarrow U(S, v_{max}, t) = S. \quad (3.5)$$

Hull & White

Επίσης, στα σημεία όπου η μεταβλητότητα παίρνει τιμή μηδέν η συνοριακή συνθήκη είναι μια μερική διαφορική εξίσωση. Δηλαδή, για $v = 0$, αντικαθιστώντας στη ΜΔΕ του μοντέλου Hull-White έχουμε:

$$\frac{\partial U(S, 0, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial U(S, 0, t)}{\partial S} - rU(S, 0, t) = 0.$$

Αντικαθιστώντας την προδρομική μέθοδο προσέγγισης των μερικών παραγώγων ως προς S και την οπισθοδρομική για την μερική παράγωγο ως προς το χρόνο, έχουμε

$$\frac{U_{i,0}^{n+1} - U_{i,0}^n}{\delta t} + rS \frac{U_{i+1,0}^{n+1} - U_{i,0}^{n+1}}{\delta S} - rU_{i,0}^{n+1} = 0,$$

όπου ο πρώτος δείκτης μετράει τα βήματα της τιμής της μετοχής, ο δεύτερος δείκτης μετράει τα βήματα της τιμής της μεταβλητότητας και ο εκθέτης μετράει τα χρονικά βήματα. Λύνοντας ως προς $U_{i,0}^n$ έχουμε:

$$U_{i,0}^n = r\delta t U_{i+1,0}^{n+1} + (1 - r\delta t - r\delta t)U_{i,0}^{n+1}. \quad (3.6)$$

Αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ως συνοριακή συνθήκη για $v = 0$. Εναλλακτικές οριακές συνθήκες για τη μεταβλητότητα προτείνονται από το βιβλίο D. Duffy - Finite Difference Methods in Financial Engineering (2006) σελ. 242 – 247.

Αφού έχουμε ορίσει τις συνοριακές συνθήκες είμαστε έτοιμοι να λύσουμε τη ΜΔΕ. Αν αντικαταστήσουμε την οπισθοδρομική διαφορά για τον

χρόνο και την κεντρική διαφορά για τις μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές S και v έχουμε:

$$U_{i,j}^n = A \cdot U_{i,j}^{n+1} + B \cdot U_{i-1,j}^{n+1} + \Gamma \cdot U_{i+1,j}^{n+1} + \Delta \cdot U_{i,j-1}^{n+1} + E \cdot U_{i,j+1}^{n+1} + Z \cdot (U_{i+1,j+1}^{n+1} + U_{i-1,j-1}^{n+1} - U_{i-1,j+1}^{n+1} - U_{i+1,j-1}^{n+1}), \quad (3.7)$$

όπου

$$A_{i,j} = (1 - j\delta v i^2 \delta t - \xi^2 j^2 \delta t),$$

$$B_{i,j} = \left(\frac{j\delta v i^2 \delta t}{2} - \frac{r i \delta t}{2} \right),$$

$$\Gamma_{i,j} = \left(\frac{r i \delta t}{2} + \frac{j\delta v i^2 \delta t}{2} \right),$$

$$\Delta_j = \left(\frac{\xi^2 j^2 \delta t}{2} - \frac{\varphi j \delta t}{2} \right),$$

$$E_j = \left(\frac{\varphi j \delta t}{2} + \frac{\xi^2 j^2 \delta t}{2} \right),$$

$$Z_{i,j} = \frac{i\rho\xi j\sqrt{v}}{4} \delta t.$$

Βλέπουμε πως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εννέα σημεία του $n+1$ χρονικού επιπέδου για να υπολογίσουμε ένα σημείο του n χρονικού επιπέδου. Ξεκινάμε με χρονικό επίπεδο $n = T$, μετά υπολογίζουμε την αξία του U στο προηγούμενο χρονικό επίπεδο $n = T - \delta t$, και προχωρούμε προς τα πίσω βήμα προς βήμα για να βρούμε την τιμή του U σήμερα (στο χρονικό επίπεδο $n = 0$).

Heston

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο για το μοντέλο του Heston και χρησιμοποιώντας τη ΜΔΕ που προκύπτει από το μοντέλο αυτό θα έχουμε τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (3.2 – 3.5), ενώ για $v = 0$ θα έχουμε:

$$\frac{\partial U(S, 0, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial U(S, 0, t)}{\partial S} + \kappa\theta \frac{\partial U(S, 0, t)}{\partial v} - rU(S, 0, t) = 0$$

Άρα διακριτοποιώντας ανάλογα

$$U_{i,0}^n = r\delta t U_{i+1,0}^{n+1} + \left(1 - \frac{\kappa\theta}{\delta v} \delta t - r\delta t - r\delta t\right) U_{i,0}^{n+1} + \frac{\kappa\theta}{\delta v} \delta t U_{i,1}^{n+1} \quad (3.8)$$

και η ΜΔΕ (2.3) γίνεται

$$U_{i,j}^n = A \cdot U_{i,j}^{n+1} + B \cdot U_{i-1,j}^{n+1} + \Gamma \cdot U_{i+1,j}^{n+1} + \Delta \cdot U_{i,j-1}^{n+1} + E \cdot U_{i,j+1}^{n+1} + Z \cdot (U_{i+1,j+1}^{n+1} + U_{i-1,j-1}^{n+1} - U_{i-1,j+1}^{n+1} - U_{i+1,j-1}^{n+1}), \quad (3.9)$$

όπου

$$A_{i,j} = \left(1 - j\delta v i^2 \delta t - \frac{\zeta^2 j \delta t}{\delta v} - r\delta t\right),$$

$$B_{i,j} = \left(\frac{j\delta v i^2 \delta t}{2} - \frac{r\delta t}{2}\right),$$

$$\Gamma_{i,j} = \left(\frac{r\delta t}{2} + \frac{j\delta v i^2 \delta t}{2}\right),$$

$$\Delta_j = \left(\frac{\zeta^2 j \delta t}{2\delta v} - \frac{(\kappa(\theta - v) - \lambda)\delta t}{2\delta v}\right),$$

$$E_j = \left(\frac{\zeta^2 j \delta t}{2\delta v} + \frac{(\kappa(\theta - v) - \lambda)\delta t}{2\delta v}\right),$$

$$Z_{i,j} = \frac{i\rho\zeta j}{4} \delta t.$$

Εφαρμογή

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή σε ένα απλό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για $K = 30$, $r = 0$, $T = 0.5$, $\rho = 0$, $\lambda = 0$, $\delta S = 3$, $\delta v = 0.0125$, $\delta t = 0.001$,

$S_{max} = 90$, $v_{max} = 1$ και $\phi = 0.02$, $\xi = 0.1$ για το μοντέλο Hull – White και $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$ για το μοντέλο Heston δημιουργούμε το Σχήμα 7, το οποίο αποτυπώνει την τιμή του δικαιώματος ως προς τη μετοχή. Παρατηρούμε, όπως είναι φυσικό, ότι η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται καθώς αυξάνεται η τιμή της μετοχής. Στο Σχήμα 8 βλέπουμε την τιμή του δικαιώματος σε τρεις διαστάσεις και στο Σχήμα 9 βλέπουμε το πώς μεταβάλλεται η τιμή του δικαιώματος ως προς τις μεταβολές της μεταβλητότητας. Παρατηρούμε και εδώ ότι καθώς αυξάνεται η μεταβλητότητα αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος.

Για να συγκρίνουμε αυτή τη μέθοδο αποτίμησης με τις προηγούμενες μεθόδους, (α) λύση κλειστής μορφής και (β) προσομοίωση Monte Carlo, ορίζουμε ένα δικαίωμα με αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 35$, τιμή εξάσκησης $K = 30$, επιτόκιο $r = 0$, χρόνο μέχρι τη λήξη έξι μήνες ($T = 0.5$), αρχική διακύμανση $v_0 = 0.0225$ ή μεταβλητότητα $\sigma = 0.15$ και συντελεστή συσχέτισης $\rho = 0$, και χρησιμοποιώντας την εντολή `interp2` του `matlab` βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος για αυτά τα S_0 και v_0 με τη μέθοδο της διγραμμικής παρεμβολής. Χρησιμοποιώντας την εντολή `tic – toc` του `matlab` συγκρίνουμε το χρόνο που χρειάζεται κάθε μέθοδος για να μας δώσει το αποτέλεσμα. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε ένα από τα δύο μοντέλα είναι: $\phi = 0$, $\xi = 0.1$ για το μοντέλο Hull – White και $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$ για το μοντέλο Heston, όπως και πριν.

Σύμφωνα με το μοντέλο *Hull – White*, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών δίνει τιμή **5,1367** σε χρόνο 0,41 δευτερόλεπτα, η μέθοδος προσομοίωσης Monte – Carlo δίνει στο ίδιο δικαίωμα τιμή **5,1119** σε χρόνο 8,62 δευτερόλεπτα ενώ η λύση κλειστής μορφής δίνει τιμή **5,2986** σε χρόνο 0,04 δευτερόλεπτα. Αντίστοιχα για το μοντέλο *Heston*, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών δίνει τιμή **5,0952** σε χρόνο 0,39 δευτερόλεπτα, η μέθοδος προσομοίωσης Monte – Carlo δίνει στο ίδιο δικαίωμα τιμή **5,0982** σε χρόνο 1,25 δευτερόλεπτα, ενώ η λύση κλειστής μορφής δίνει τιμή **5,0405** σε 0,06 δευτερόλεπτα (Πίνακας 7).

Μία παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε είναι πως πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν ορίζουμε τα βήματα διακριτοποίησης, ώστε να έχουμε

μία πολύ καλή προσέγγιση της τιμής του δικαιώματος με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Η μέθοδος αυτή έχει τρία σφάλματα διακριτοποίησης, δS , δn και δt και έτσι μπορεί να δίνει τιμή που αποκλίνει αρκετά από τη θεωρητική τιμή που δίνει το κάθε μοντέλο, αν δε γίνει κατάλληλη διακριτοποίηση. Όμως, αυτή η μέθοδος χρειάζεται πολύ λιγότερο χρόνο για να υπολογίσει την τιμή του δικαιώματος από ότι η μέθοδος Monte – Carlo. Επιπλέον, με την μέθοδο αυτή δεν χρειαζόμαστε τυχαίους αριθμούς για να προσεγγίσουμε την τιμή του δικαιώματος που σημαίνει πως ενδεχομένως να έχουμε αρκετά μικρότερο κόστος για την αποτίμηση μας. Τέλος, αυτή η μέθοδος είναι πολύ πιο απλή από τη λύση κλειστής μορφής, κυρίως στο μοντέλο Heston, και μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός δύσκολων συναρτήσεων και η προσέγγιση πολύπλοκων ολοκληρωμάτων και χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αντιστάθμιση Κινδύνου

4.1 Μοντέλο Hull & White

Το μοντέλο Hull & White, όπως και τα άλλα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας, είναι ατελές ως προς το γεγονός ότι δεν μπορούν να αντισταθμιστούν τέλεια όλες οι ενδεχόμενες απαιτήσεις χρησιμοποιώντας αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική. Η έλλειψη τέλει αυτοχρηματοδοτούμενης αντιστάθμισης δημιουργεί πρόβλημα στη διαδικασία αποτίμησης δικαιωμάτων και αυτό φαίνεται από τις επαναλαμβανόμενες έρευνες που έχουν γίνει με σκοπό την εύρεση ενός τρόπου αποτίμησης των δικαιωμάτων υπό συνθήκες στοχαστικής μεταβλητότητας. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτοχρηματοδοτούμενες στρατηγικές super-hedging, αλλά είναι πολύ ακριβές για να εφαρμοστούν και παράλληλα είναι δύσκολος ο υπολογισμός τους αριθμητικά. Μια άλλη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε στρατηγικές που δεν είναι απαραίτητα αυτοχρηματοδοτούμενες αλλά μπορούν να αναπαράγουν τις ενδεχόμενες απαιτήσεις και σε αγορές που δεν είναι πλήρεις. Τέτοιου είδους στρατηγικές, όμως, εμπεριέχουν κόστη και προσθέτουν επιπλέον κίνδυνο στον επενδυτή.

Το Delta-hedging, που αποτελεί τέλεια αντιστάθμιση στο μοντέλο Black-Scholes, είναι ακόμα μία προσέγγιση αντιστάθμισης κινδύνου. Αυτή η στρατηγική είναι ιδιαίτερα σημαντική για το μοντέλο Hull-White γιατί όταν υπολογίζεται κάτω από το ελάχιστο Martingale μέτρο συμπίπτει με την αντιστάθμιση τοπικής ελαχιστοποίησης κινδύνου (locally R-minimizing hedge) (Yang & Ewald (2010)).

Το Delta - hedging είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος αντιστάθμισης κινδύνου. Στο μοντέλο BS κάθε μελλοντική απαίτηση μπορεί να αντισταθμιστεί τέλεια μέσω αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής η οποία επιτυγχάνεται με διαφοροποίηση της τιμής της απαίτησης ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ότι ο υποκείμενος τίτλος είναι η τιμή μιας μετοχής που ακολουθεί διαδικασία S_t και η τιμή της μελλοντικής απαίτησης τη χρονική στιγμή t είναι $V(t, S_t)$. Έπειτα, για να αντισταθμίσουμε την μελλοντική απαίτηση, αγοράζουμε $\frac{\partial}{\partial S_t} V(t, S_t)$ μετοχές και ταυτόχρονα επενδύουμε $\left(V(t, S_t) - \frac{\partial}{\partial S_t} V(t, S_t) S_t \right) e^{-rt}$ στην αγορά χρήματος. Αυτή η στρατηγική είναι αυτοχρηματοδοτούμενη και άρα χωρίς κίνδυνο αφού δεν χρειάζεται ο επενδυτής να δώσει επιπλέον χρήματα για να αντισταθμίσει τη θέση του.

Αντίθετα, στα στοχαστικά μοντέλα, η Δέλτα - αντιστάθμιση δεν είναι ούτε τέλεια ούτε αυτοχρηματοδοτούμενη. Αυτό αποδείχτηκε, καθώς έμπειροι επενδυτές που αντιστάθμιζαν με αυτό τον τρόπο τη θέση τους έπρεπε να δώσουν επιπλέον χρήματα όταν προσάρμοζαν τη θέση τους. Έτσι, η αντιστάθμιση συνδέεται με μία συνάρτηση κόστους που μετρά αυτή την επιπλέον επένδυση. Άρα, ένα λογικό κριτήριο απόδοσης της αντιστάθμισης είναι ο κίνδυνος που επιφέρει η διαδικασία αυτού του επιπλέον κόστους. Πάνω σε αυτό στηρίζεται και η θεωρία τοπικής ελαχιστοποίησης του κινδύνου (locally R - minimizing hedging) που βρίσκει τέλειες αντισταθμίσεις και από αυτές επιλέγει αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση της διακύμανσης της διαδικασίας του κόστους.

Όμως, στο στοχαστικό μοντέλο Hull - White η Δέλτα αντιστάθμιση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς συμπίπτει με την αντιστάθμιση τοπικής ελαχιστοποίησης του κινδύνου, όπως αναφέρει και η Πρόταση 6.5 καθώς και η παρατήρηση που ακολουθεί στο άρθρο του Frey (1997). Η πρόταση αυτή λέει πως όταν η συνδιακύμανση μεταξύ της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας είναι μηδέν, η Δέλτα αντιστάθμιση συμπίπτει με την αντιστάθμιση τοπικής ελαχιστοποίησης κινδύνου. Το μοντέλο Hull - White υποθέτει εξαρχής $\rho = 0$. Έτσι, ο κίνδυνος της επιπλέον επένδυσης ελαχιστοποιείται με τη Δέλτα αντιστάθμιση.

Ένα δικαίωμα με τελική απόδοση $H(S_T)$, υπό συνθήκες χωρίς arbitrage, έχει τιμή

$$V(t, S_t, V_t) = e^{-r(T-t)} E_Q(H|F_t),$$

όπου Q δηλώνει το ελάχιστο Martingale μέτρο. Αυτή η τιμή είναι συνάρτηση του S_t και V_t . Η φόρμουλα για τη Δέλτα αντιστάθμιση, για το συγκυριακό συμβόλαιο $H(S_T)$ δίνεται από τη στρατηγική (ξ, η) όπου, σε κάθε χρονικό σημείο t ,

$$\xi_t = \frac{\partial}{\partial S_t} V(t, S_t, V_t)$$

είναι ο αριθμός των μετοχών που κρατά ο επενδυτής, και

$$\eta_t = \left(V(t, S_t, V_t) - S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V(t, S_t, V_t) \right) e^{-rt}$$

είναι το ποσό στον καταθετικό λογαριασμό. Αυτή η στρατηγική είναι εμφανώς μία αντιστάθμιση κινδύνου αφού $\xi_t S_t + \eta_t e^{rt} = V(t, S_t, V_t)$ για όλα τα t . Αυτή η στρατηγική δεν είναι, όμως, αυτοχρηματοδοτούμενη και η συσσωρευτική διαδικασία κόστους είναι η εξής:

$$C_t(\xi, \eta) = V(t, S_t, V_t) - \int_0^t \xi_u dS_u - \int_0^t \eta_u r e^{ru} du. \quad (4.1)$$

Στη συνέχεια δημιουργούμε μία φόρμουλα για τη Δέλτα αντιστάθμιση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Διαφορίζοντας την τιμή του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left[e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)^+ | F_t) \right] = e^{-r(T-t)} E_Q \left(\frac{\partial}{\partial S_T} S_T \cdot 1_{\{S_T \geq K\}} | S_t, V_t \right).$$

Καθώς

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} \exp \left(\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^2 ds \right)$$

συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial S_t} S_T = \frac{\partial}{\partial S_t} \left(S_t \frac{S_T}{S_t} \right) = \frac{S_T}{S_t}.$$

Άρα ο αριθμός των μετοχών που πρέπει να κρατούνται σε μία στρατηγική Δέλτα αντιστάθμισης για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς είναι

$$\xi_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{S_t} E_Q(S_T \cdot 1_{\{S_T \geq K\}} | F_t).$$

Αναπροσαρμόζοντας τους όρους έχουμε

$$\begin{aligned} \xi_t &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{S_t} \left[E_Q \left((S_T - K) \cdot 1_{\{S_T \geq K\}} | F_t \right) + E_Q \left(K \cdot 1_{\{S_T \geq K\}} | F_t \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{S_t} \left[E_Q \left((S_T - K)^+ | F_t \right) + K E_Q \left(1_{\{S_T \geq K\}} | F_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{S_t} (V_{call}(t, S_t, K, T, V_t) + K \cdot V_{digit}(t, S_t, K, T, V_t)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Για τον λογαριασμό στην τράπεζα έχουμε

$$\begin{aligned} \eta_t &= e^{-rt} (V_{call}(t) - \xi_t S_t) \\ &= e^{-rt} (V_{call}(t) - [V_{call}(t) + K \cdot V_{digit}(t)]) \\ &= -e^{-rt} K \cdot V_{digit}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Αυτή τη στρατηγική θα χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε το λόγο αντιστάθμισης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo. Έπειτα ακολουθεί ο υπολογισμός του σφάλματος αντιστάθμισης που δίνεται από τον τύπο:

$$H(t + \Delta t) = \xi(t)S(t + \Delta t) + \eta(t)e^{r\Delta t} - V_{call}(t + \Delta t, \tau - \Delta t),$$

Στο τέλος, υπολογίζουμε το μέσο απόλυτο σφάλμα αντιστάθμισης ως συνάρτηση της συχνότητας εξισορρόπησης Δt : $H(\Delta t) = \left(\frac{1}{M} \right) \sum_{i=1}^M |H(t + \Delta t) - V_{call}(t + \Delta t, \tau - \Delta t)|$ και το μέσο ταμειακό $H(\Delta t) = \left(\frac{1}{M} \right) \sum_{i=1}^M H(t + \Delta t)$ όπου

$$l = 1, 2, \dots, M \equiv (T - t)/\Delta t.$$

4.2 Μοντέλο Heston

Η φόρμουλα κλειστής μορφής (2.11) για την αποτίμηση δικαιωμάτων μπορεί να παράγει τους λόγους αντιστάθμισης αναλυτικά. Στο πλαίσιο των στοχαστικών μοντέλων υπάρχουν δύο πηγές κινδύνου, ο κίνδυνος μεταβολής της τιμής και ο κίνδυνος μεταβλητότητας. Άρα έχουμε δύο δέλτα:

$$\begin{aligned}\Delta_S(t, \tau; K) &= \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial S} = P_1 \geq 0 \\ \Delta_V(t, \tau; K) &= \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial V} = S(t) \frac{\partial P_1}{\partial V} - KP(t, \tau) \frac{\partial P_2}{\partial V}\end{aligned}\quad (4.4)$$

όπου

$$\frac{\partial P_j}{\partial V} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[(i\varphi)^{-1} e^{-i\varphi \ln[K]} \frac{\partial f_j}{\partial V} \right] d\varphi.$$

Θα εξετάσουμε δύο μεθόδους αντιστάθμισης: την αντιστάθμιση μοναδικού μέσου και την αντιστάθμιση Δέλτα ουδετερότητας Bakshi, Cao, Chen (1997). Οι τελευταίοι κατασκεύασαν ένα γενικευμένο μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων, το οποίο θεωρεί στοχαστική τη μεταβλητότητα, θεωρεί ότι η τιμή της μετοχής κάνει άλματα και ότι το επιτόκιο δεν είναι ντετερμινιστικό αλλά ακολουθεί στοχαστική διαδικασία. Εμείς θα προσαρμόσουμε το γενικευμένο αυτό μοντέλο στο μοντέλο Heston, μηδενίζοντας τους όρους που αντιστοιχούν στα άλματα της τιμής της μετοχής και στη στοχαστικότητα του επιτοκίου, αφού ο Heston υποθέτει σταθερό επιτόκιο και ότι η μετοχή δεν κάνει άλματα.

A. Αντιστάθμιση μοναδικού μέσου

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που ένα μόνο μέσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αντιστάθμιση. Άλλες πηγές αβεβαιότητας που επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος αλλά δε συσχετίζονται με την τιμή της

υποκείμενης μετοχής δε μπορούν να αντισταθμιστούν από οποιαδήποτε θέση στη μετοχή.

Έστω ότι θέλουμε να αντισταθμίσουμε μία ανοικτή θέση πώλησης (short) σε ένα δικαίωμα αγοράς με τ χρόνο μέχρι τη λήξη και τιμή εξάσκησης K . Έστω $X_S(t)$ είναι ο αριθμός των μετοχών που πρέπει να αγοραστεί και $X_0(t)$ είναι η υπολειπόμενη ταμειακή θέση, έτσι ώστε η τιμή, τη χρονική στιγμή t , ενός χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής της τιμής του δικαιώματος (replicating portfolio) είναι

$$X_0(t) + X_S(t)S(t).$$

Λύνοντας αυτό το πρόβλημα ελάχιστης – διακύμανσης υπό το μοντέλο του Heston έχουμε

$$\Pi(t) = -C(t, \tau) + X_0(t) + X_S(t)S(t),$$

$$d\Pi(t) = -dC(t, \tau) + dX_0(t) + X_S(t)dS(t),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(d\Pi(t)) &= \text{Var}(dC(t, \tau)) + X_S^2(t)\text{Var}(dS(t)) \\ &\quad - 2X_S(t)\text{Cov}(dC(t, \tau), dS(t)), \end{aligned}$$

$$\frac{d\text{Var}(d\Pi(t))}{dX_S(t)} = 2X_S(t)\text{Var}(dS(t)) - 2\text{Cov}(dC(t, \tau), dS(t)) = 0.$$

Άρα η διακύμανση ελαχιστοποιείται για

$$X_S(t) = \frac{\text{Cov}(dC(t, \tau), dS(t))}{\text{Var}(dS(t))}.$$

Από το λήμμα του Ito για τα δυναμικά της μεταβολής του δικαιώματος έχουμε:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} dV^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} dS dV.$$

Οι τετραγωνισμένοι όροι της παραπάνω εξίσωσης είναι τάξης dt και επιπλέον έχουμε

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{V(t)} S dW_t^1$$

$$dV_t = \kappa^*(\theta^* - V_t) dt + \zeta \sqrt{V_t} dW_t^2$$

και

$$\text{Cov}(dW_t^1, dW_t^2) = \rho dt.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} X_S(t) &= \frac{\text{Cov}(dC(t, \tau), dS(t))}{\text{Var}(dS(t))} = \frac{\text{Cov}(C_S dS(t) + C_V dV(t), dS(t))}{\text{Var}(dS(t))} \\ &= C_S + C_V \frac{\text{Cov}(dS(t), dV(t))}{\text{Var}(dS(t))} \\ &= C_S + C_V \frac{\text{Cov}(\zeta \sqrt{V} dW^2, S \sqrt{V} dW^1)}{\text{Var}(S \sqrt{V} dW^1)} \\ &= \Delta_S(t, \tau) + \Delta_V(t, \tau) \frac{\rho \zeta}{S}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

και η θέση μετρητών που προκύπτει για την αντιστάθμιση είναι

$$X_0(t) = C(t, \tau) - X_S(t) S(t). \quad (4.6)$$

Παρατηρούμε ότι αν η μεταβλητότητα είναι ντετερμινιστική, δηλαδή $\zeta = 0$, ή αν οι αποδόσεις των μετοχών δεν συσχετίζονται με τις αλλαγές της μεταβλητότητας, δηλαδή $\rho = 0$, τότε αρκεί να είμαστε σε ανοικτή θέση αγοράς (long) σε $\Delta_S(t)$ μετοχές. Όμως, αν η μεταβλητότητα είναι στοχαστική και συσχετίζεται με τις αποδόσεις των μετοχών, η θέση που πρέπει να πάρουμε πρέπει να ελέγχει όχι μόνο τις επιπτώσεις στην τιμή του δικαιώματος από τις αλλαγές στην τιμή της μετοχής, αλλά και την έμμεση επίπτωση των μεταβολών της μεταβλητότητας που επηρεάζουν τις μεταβολές της τιμής της μετοχής. Αυτό αποτυπώνεται στον δεύτερο όρο της (4.5), ο οποίος δείχνει ότι ο επιπλέον αριθμός μετοχών που χρειάζεται εκτός του Δ_S είναι ανάλογος του ρ .

Θεωρητικά, αυτή η στρατηγική προϋποθέτει συνεχή αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου (continuous rebalancing) για να αποτυπώνει τις αλλαγές στις συνθήκες της αγοράς. Στην πραγματικότητα, μόνο διακριτή αναπροσαρμογή μπορούμε να κάνουμε. Για να κατασκευάσουμε ένα μέτρο αποτελεσματικότητας της αντιστάθμισης αυτής, υποθέτουμε ότι η αναπροσαρμογή διενεργείται κατά διαστήματα μήκους Δt . Τη χρονική στιγμή t παίρνω θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς, παίρνω θέση αγοράς σε $X_S(t)$ μετοχές και επενδύω το υπόλοιπο $X_0(t)$ της (4.6) σε ομόλογο χωρίς κίνδυνο. Η συνολική θέση είναι ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο. Έπειτα, τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ υπολογίζουμε το σφάλμα αντιστάθμισης ως εξής:

$$H(t + \Delta t) = X_S(t)S(t + \Delta t) + X_0(t)e^{r\Delta t} - C(t + \Delta t, t - \Delta t). \quad (4.7)$$

Την ίδια στιγμή, αναπροσαρμόζουμε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό του σφάλματος αντιστάθμισης τη χρονική στιγμή $t + 2\Delta t$, και ούτω καθεξής. Καταγράφουμε τα σφάλματα $H(t + l\Delta t)$ για $l = 1, 2, \dots, M \equiv (T - t)/\Delta t$. Στο τέλος, υπολογίζουμε το μέσο απόλυτο σφάλμα αντιστάθμισης ως συνάρτηση της συχνότητας αναπροσαρμογής Δt : $H(\Delta t) = \left(\frac{1}{M}\right) \sum_{i=1}^M |H(t + l\Delta t)|$ και το μέσο ταμειακό $H(\Delta t) = \left(\frac{1}{M}\right) \sum_{i=1}^M H(t + l\Delta t)$.

Για να εκτελέσουμε την ανωτέρω μέθοδο αντιστάθμισης ακολουθούμε τα εξής δύο βήματα: Πρώτον, την μέρα t , κατασκευάζουμε την αντιστάθμιση όπως δίνεται στη σχέση (4.5) χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 3.4. Δεύτερον, υπολογίζουμε το σφάλμα αντιστάθμισης την μέρα $t + 1$ αν η αναπροσαρμογή διενεργείται καθημερινά ή $t+5$ αν διενεργείται ανά πέντε ημέρες. Αυτά τα δύο βήματα επαναλαμβάνονται καθημερινά ή ανά πέντε ημέρες για να υπάρχει δυναμική αναπροσαρμογή και αντιστάθμιση του κινδύνου του επενδυτή.

B. Αντιστάθμιση Δέλτα ουδετερότητας

Τώρα, υποθέτουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε μέσο για να κατασκευάσουμε μία τέλεια αντιστάθμιση Δέλτα ουδετερότητας. Υποθέτουμε πάλι πως είμαστε σε θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς με $\tau = (T - t)$ χρόνο μέχρι τη λήξη και τιμή εξάσκησης K . Για αυτή τη μέθοδο αντιστάθμισης χρειαζόμαστε μία θέση σε (α) $X_S(t)$ μετοχές για να ρυθμίσουμε τον κίνδυνο της τιμής της μετοχής και (β) $X_C(t)$ μονάδες από ένα άλλο δικαίωμα αγοράς με την ίδια ληκτότητα αλλά διαφορετική τιμή εξάσκησης \bar{K} για να ρυθμίσουμε τον κίνδυνο μεταβλητότητας. Έτσι, τη χρονική στιγμή t η αξία του χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής (replicating portfolio) είναι

$$X_0(t) + X_S(t)S(t) + X_C(t)C(t, \tau, \bar{K}),$$

όπου $X_0(t)$ ορίζει την υπολειπόμενη ταμειακή θέση. Παράγοντας τα δυναμικά για το χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής και συγκρίνοντάς τα με αυτά του $C(t, \tau, \bar{K})$ βρίσκουμε τα παρακάτω:

$$X_C(t) = \frac{\Delta_V(t, \tau; K)}{\Delta_V(t, \tau; \bar{K})},$$

$$X_S(t) = \Delta_S(t, \tau; K) - \Delta_S(t, \tau; \bar{K})X_C(t),$$

$$X_0(t) = C(t, \tau; K) - X_S(t)S(t) - X_C(t)C(t, \tau, \bar{K}), \quad (4.2.5)$$

όπου όλα τα δέλτα, Δ_S και Δ_V , δίνονται από τις σχέσεις (4.2.1).

Για να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης, τη χρονική στιγμή t μπαίνουμε σε θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς και δημιουργούμε την ανωτέρω αντιστάθμιση. Το επόμενο διάστημα, υπολογίζουμε το σφάλμα αντιστάθμισης ως εξής:

$$H(t + \Delta t) = X_0 e^{r\Delta t} + X_S(t)S(t + \Delta t) + X_C(t)C(t + \Delta t, \tau - \Delta t; \bar{K}) - C(t + \Delta t, \tau - \Delta t; K). \quad (4.9)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, επαναλαμβάνουμε αυτούς τους υπολογισμούς για κάθε μέρα t ώστε να συλλέξουμε τα σφάλματα αντιστάθμισης, τα οποία χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε το μέσο απόλυτο και το μέσο ταμειακό σφάλμα αντιστάθμισης ως συνάρτηση της συχνότητας αναπροσαρμογής (rebalancing frequency) Δt .

Για το μοντέλο Black – Scholes η δέλτα αντιστάθμιση συμπίπτει με την αντιστάθμιση μοναδικού μέσου. Άρα η μέθοδος δέλτα ουδετερότητας για το BS περιλαμβάνει μόνο τον υποκείμενο τίτλο (μετοχή) και κανένα άλλο μέσο.

4.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

A. Hull & White

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι $S_0 = 42$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0$, $V_0 = 0.1$, $\varphi = 2$, $\xi = 1$ (μεταβλητότητα της μεταβλητότητας). Παρατηρούμε ότι για $t = 0$ η τιμή του δικαιώματος αγοράς (V_{call}) είναι 5.7177, η τιμή του ψηφιακού δικαιώματος (V_{digit}) είναι 0.5130, η τιμή του ξ_0 (αριθμός μετοχών) είναι 0.6247 και του η_0 (ποσότητα χρήματος στην τράπεζα) είναι -20.52. Το αντίστοιχο κόστος αντιστάθμισης για αυτή τη χρονική στιγμή είναι 0, όπως αναμενόταν αφού έχουμε αντισταθμίσει πλήρως τη θέση μας. Δημιουργώντας στο Matlab ένα μονοπάτι για την τιμή της μετοχής και της μεταβλητότητας με $S_0 = 42$, $V_0 = 0.1$, $T = 0.5$ χρόνια και 36 χρονικά βήματα, προσομοιώνουμε την πορεία της μετοχής και της μεταβλητότητας και χρησιμοποιούμε τις τιμές των μονοπατιών για τον υπολογισμό των ξ_t και η_t . Για την επόμενη χρονική στιγμή (μετά από 5 μέρες) έχουμε $V_{call} = 4.7684$, $V_{digit} = 0.4395$, $S_1 = 39.8338$, $\xi_1 = 0.5610$, $\eta_1 = -17.58$ κ.ο.κ. Το αντίστοιχο σφάλμα για αυτή τη χρονική στιγμή είναι -0.40. Ο Πίνακας 4 δείχνει αναλυτικά τη θέση που πρέπει να έχει ένας επενδυτής κάθε φορά που ανασχηματίζει το χαρτοφυλάκιο του για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Ακόμα στον ίδιο πίνακα φαίνεται και το σφάλμα αντιστάθμισης καθώς περνά ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Παρατηρούμε ότι, ο επενδυτής παρουσιάζει μέσο απόλυτο σφάλμα 0.25 και

μέσο ταμειακό – 0.017. Βλέπουμε, λοιπόν, πως το χαρτοφυλάκιό δεν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, και πρέπει να ανασχηματίζεται συνεχώς.

B. Heston

Αντιστάθμιση μοναδικού μέσου

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4) για τον υπολογισμό των Δ_S και Δ_V και (4.5) - (4.6) για τον υπολογισμό των λόγων αντιστάθμισης, εφαρμόζουμε τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 3.4 για να βρούμε τη θέση που πρέπει να έχει ένας επενδυτής για να αντισταθμίσει τη θέση του σε ένα δικαίωμα αγοράς. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής: $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$, $K = 100$, $S_0 = 105$, $T = 0.5$, $r = 0$. Με αυτές τις παραμέτρους έχω $\Delta_S = 0.8330$ και $\Delta_V = 67,0394$. Άρα, $X_S = 0.7691$. Έτσι, αν αφαιρέσουμε το ποσό των χρημάτων που σπαταλήσαμε για την αγορά 0.7691 μετοχών από την τιμή του δικαιώματος (5.8138) θα βρούμε το ποσό που πρέπει να επενδύσουμε στο ομόλογο χωρίς κίνδυνο: $X_0 = -74.9450$. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου ισούται με μηδέν άρα η θέση στο δικαίωμα είναι αντισταθμισμένη. Δημιουργώντας στο Matlab ένα μονοπάτι για την τιμή της μετοχής με $S_0 = 105$, $T = 0.5$ χρόνια και 36 χρονικά βήματα, προσομοιώνουμε την πορεία της μετοχής. Με βάση τις τιμές του μονοπατιού αυτού βρίσκουμε το σφάλμα αντιστάθμισης ανά 5 ημέρες και αναπροσαρμόζουμε το χαρτοφυλάκιό μας. Για να πετύχουμε τη συσχέτιση της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση Cholesky. Στο τέλος της ζωής του δικαιώματος αθροίζουμε τα σφάλματα και βρίσκουμε το μέσο απόλυτο σφάλμα και το μέσο ταμειακό σφάλμα. Στον Πίνακα 5 φαίνονται αναλυτικά οι λόγοι αντιστάθμισης, οι τιμές της μετοχής και του δικαιώματος καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα. Το μέσο απόλυτο σφάλμα, σύμφωνα με τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε είναι 0.051 και το μέσο ταμειακό σφάλμα είναι -0.0155.

Αντιστάθμιση Δέλτα ουδετερότητας

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4) για τον υπολογισμό των Δ_S και Δ_V και (4.8) για τον υπολογισμό των λόγων αντιστάθμισης, εφαρμόζουμε τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως για να βρούμε τη

θέση που πρέπει να έχει ένας επενδυτής για να αντισταθμίσει τη θέση του σε ένα δικαίωμα αγοράς χρησιμοποιώντας μετοχές και ένα δεύτερο δικαίωμα αγοράς με ίδια ληκτότητα και διαφορετική τιμή εξάσκησης. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής: $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$, $S_0 = 105$, $T = 0.5$, $r = 0$. Για το δικαίωμα που θέλουμε να αντισταθμίσουμε χρησιμοποιούμε τιμή εξάσκησης $K = 100$, ενώ για το δικαίωμα που χρησιμοποιούμε ως μέσο έχουμε τιμή εξάσκησης $\bar{K} = 110$. Επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα με πριν για να βρούμε το μέσο απόλυτο σφάλμα αντιστάθμισης και το μέσο ταμειακό σφάλμα αντιστάθμισης. Προσομοιώνουμε την πορεία της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας μέσω του Matlab δημιουργώντας 36 χρονικά βήματα. Έχουμε, δηλαδή, χωρίσει την περίοδο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος σε 36 χρονικά διαστήματα δt , ώστε να γίνεται εφικτός ο ανασχηματισμός του χαρτοφυλακίου κάθε 5 μέρες. Χρησιμοποιούμε και εδώ την παραγοντοποίηση Cholesky για να αποτυπώσουμε τη συσχέτιση της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας. Στον Πίνακα 6 φαίνονται οι λόγοι αντιστάθμισης, οι τιμές της μετοχής και των δύο δικαιώματος καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα. Το μέσο απόλυτο σφάλμα, σύμφωνα με τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε είναι 0.0407 και το μέσο ταμειακό σφάλμα είναι 0.0069. Παρατηρούμε, λοιπόν, πως με την είσοδο ενός ακόμη δικαιώματος στο χαρτοφυλάκιο μας μειώνεται και το μέσο απόλυτο και το μέσο ταμειακό σφάλμα αντιστάθμισης. Άρα, η εισαγωγή ενός δικαιώματος, C_2 , ως οργάνου αντιστάθμισης του δικαιώματος στόχου, C_1 , στο συνολικό χαρτοφυλάκιο αντισταθμίζει καλύτερα τον κίνδυνο μας όχι μόνο απέναντι στις μεταβολές της τιμής της μετοχής, αλλά και στον κίνδυνο της μεταβολής της μεταβλητότητας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εξετάσαμε δύο μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων με στοχαστική μεταβλητότητα. Το πρώτο μοντέλο είναι αυτό των Hull και White, το οποίο προτείνει μία απλή στοχαστική διαδικασία για τη μεταβλητότητα και υποθέτει πως ο κίνδυνος της μεταβλητότητας δεν τιμολογείται και πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ασυσχέτιστη με τη μεταβλητότητα. Το δεύτερο μοντέλο είναι του Heston, το οποίο προτείνει μία διαδικασία αναστροφής του μέσου για την κίνηση της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας την τετραγωνική ρίζα της. Εξετάσαμε τις αποκλίσεις αυτών των μοντέλων από το μοντέλο Black – Scholes και την ευαισθησία των τιμών του κάθε μοντέλου στις μεταβολές των παραμέτρων τους. Στην εφαρμογή του μοντέλου Hull – White παρατηρήσαμε ότι το μοντέλο Black – Scholes υπερεκτιμά at – the – money δικαιώματα και υποεκτιμά deep – in και deep – out – of – the – money δικαιώματα. Στην εφαρμογή του μοντέλου του Heston παρατηρήσαμε ότι στα at – the – money δικαιώματα η διαφορά των τιμών των δύο μοντέλων είναι μεγάλη (το μοντέλο B – S υποεκτιμά at – the – money δικαιώματα), ενώ καθώς πηγαίνουμε στα deep – in – the – money ή deep – out – of – the – money δικαιώματα η διαφορά τείνει στο μηδέν. Συσχέτιση μεταξύ της μεταβλητότητας και της τιμής της μετοχής δημιουργεί ασυμμετρία στην κατανομή των αποδόσεων των τιμών, η οποία επηρεάζει την αποτίμηση των in – the – money και out – of – the – money δικαιωμάτων. Χωρίς συσχέτιση η στοχαστική μεταβλητότητα αλλάζει μόνο την κύρτωση, η οποία επηρεάζει την αποτίμηση στα near – the – money δικαιώματα.

Αναλύσαμε δύο ακόμη μεθόδους αποτίμησης. Την προσομοίωση Monte Carlo και τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών. Την πρώτη τη χρησιμοποιήσαμε για να εξετάσουμε τις αποκλίσεις των τιμών της μεθόδου με αυτές του υποδείγματος Black - Scholes, όταν ο υποκείμενος τίτλος και η μεταβλητότητα ακολουθούν τις στοχαστικές διαδικασίες των δύο μοντέλων. Αυτή η μέθοδος μας έδωσε τη δυνατότητα κυρίως να ξεπεράσουμε κάποιους από τους περιορισμούς του μοντέλου Hull – White, όπως την υπόθεση ότι το drift της μεταβλητότητας είναι μηδέν και η τιμή της μετοχής είναι ασυσχέτιστη με την μεταβλητότητα. Στην περίπτωση που υπάρχει θετική συσχέτιση της μεταβλητότητας και της τιμής της μετοχής, out – of – the – money δικαιώματα

υποεκτιμώνται από το μοντέλο Black – Scholes, ενώ in – the – money δικαιώματα υπερεκτιμώνται. Όταν η συσχέτιση είναι αρνητική συμβαίνει το αντίθετο. Τη δεύτερη τη χρησιμοποιήσαμε για να συγκρίνουμε τις αποκλίσεις της τιμής του δικαιώματος από αυτές των δύο προηγούμενων μεθόδων (τη λύση κλειστής μορφής και την προσομοίωση Monte Carlo) και το χρόνο υπολογισμού της τιμής. Καταλήξαμε στο ότι αυτή η μέθοδος έχει αρκετά πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες δύο. Σε σύγκριση με τη λύση κλειστής μορφής, παρόλο που απαιτεί περισσότερο χρόνο για τον υπολογισμό της τιμής, είναι πολύ πιο απλή στην εφαρμογή της αφού δεν απαιτεί τον υπολογισμό πολύπλοκων συναρτήσεων. Σε σύγκριση με την προσομοίωση Monte Carlo, απαιτεί πολύ λιγότερο χρόνο για τον υπολογισμό της τιμής και δεν απαιτεί τη χρήση τυχαίων αριθμών που ενδεχομένως να στοιχίζει ακριβότερα.

Τέλος, αναλύσαμε αποτελεσματικές μεθόδους αντιστάθμισης κινδύνου. Τα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων με στοχαστική μεταβλητότητα λαμβάνουν ιδιαίτερα υπόψη την ατέλεια των αγορών. Έτσι, παρουσιάστηκε η αγοραία αξία του κινδύνου μεταβλητότητας, λ , για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων. Επειδή δεν είναι δυνατή η τέλεια αντιστάθμιση στις ατελές αγορές, αναλύθηκε η μέθοδος αντιστάθμισης μείωσης της μέσης διακύμανσης. Χρησιμοποιήθηκαν χαρτοφυλάκια αναπαραγωγής της τιμής του δικαιώματος που αποτελούνται είτε από κάποιο αριθμό μετοχών και ένα τραπεζικό λογαριασμό, είτε από κάποιο αριθμό μετοχών, κάποιο αριθμό μεριδίων ενός άλλου δικαιώματος, ίδιας ληκτότητας και διαφορετικής τιμής εξάσκησης, και έναν τραπεζικό λογαριασμό. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως όταν εισάγεται το δεύτερο δικαίωμα στο χαρτοφυλάκιο η αντιστάθμιση είναι πιο αποτελεσματική καθώς μειώνεται το μέσο απόλυτο και το μέσο ταμειακό σφάλμα αντιστάθμισης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alexander, C., and Nogueira, L. M., 2006, "Model-free hedge ratios and scale-invariant models", *Journal of Banking and Finance*, 31, 1839-1861.
- Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., 1997, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", *The Journal of Finance*, Vol 52, No. 5, 2003-2049
- Black, F., and M. Scholes, 1973, "The Valuation of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- Cox, J.C. , Ingersoll J. E., and Ross S.A., 1985, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 385-408.
- Frey, R., 1997, "Derivative Asset Analysis in Models with Level-Dependent and Stochastic Volatility", *Quarterly*, Vol. 10, 1-34.
- Heston, S. L., 1993, "A Closed – Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *The Review of Financial Studies*, 6, 327 – 343.
- Hull, J. C., and White A., 1987, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, 281-300.
- Merton, R. C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- Psychoyios, D., and Skiadopoulos, G., 2006, "Volatility Options: Hedging Effectiveness, Pricing and Model Error", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 26, No. 1, 1-31.
- Rubinstein, M., 1985, "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978", *Journal of Finance*, 40, 455-480.

Scott, L. O., 1987, "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419-438.

Stein, E. M., and Stein J. C., 1991, "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, 4, 727-752.

Wiggins, J. B., 1987, "Option Values under Stochastic Volatilities", *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.

Yang, Z., Ewald, C. O., 2010, "An Explicit Expression to the Locally R-minimizing Hedge of a European Call in the Hull and White Model", *Quantitative and Qualitative Analysis in Social Sciences*, Vol. 4, Issue 1, 1-18.

BIBLIA

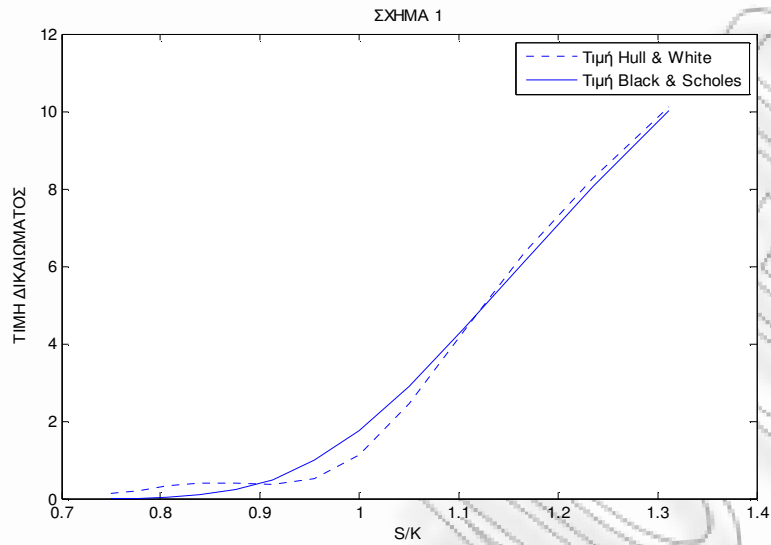
Brandimarte, P. (2006) *Numerical Methods in Finance and Economics: A Matlab-Based Introduction*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York.

Duffy, D. (2006) *Finite Difference Methods in Financial Engineering. A Partial Differential Equation Approach*. John Wiley & Sons, Ltd

Hull, J. (2011) *Options, Futures, and Other Derivatives*, 8th Edition, Prentice Hall, New Jersey.

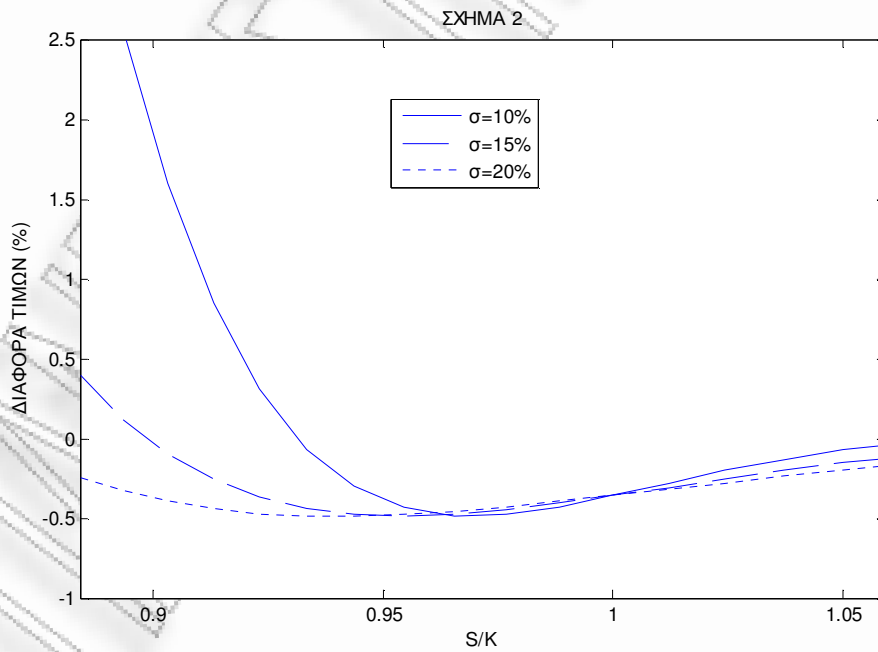
ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.



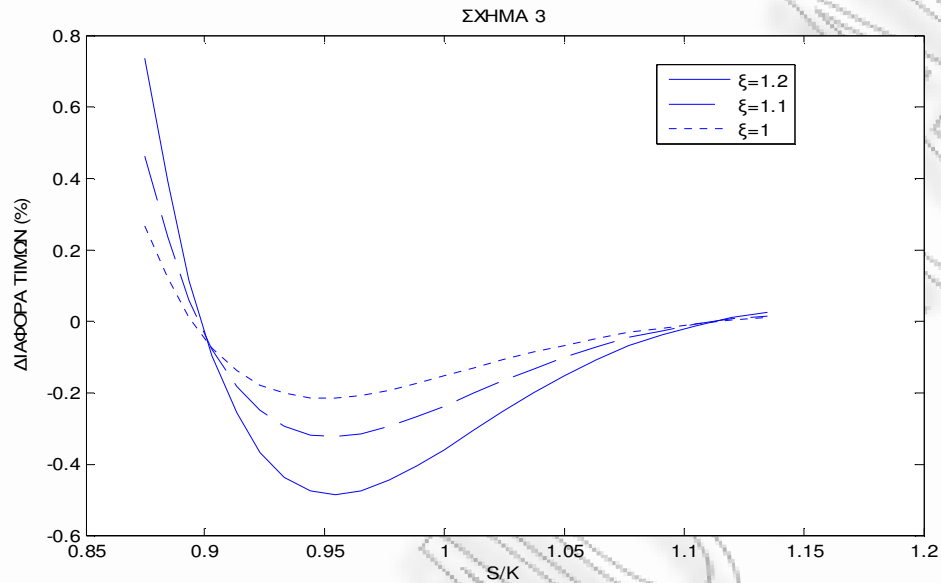
Σχήμα 1. Τιμές των δύο μοντέλων όταν $\phi = 0$, $r = 0$, $\sigma = 15\%$, $\xi = 1$, $T - t = 180$ μέρες.

2.



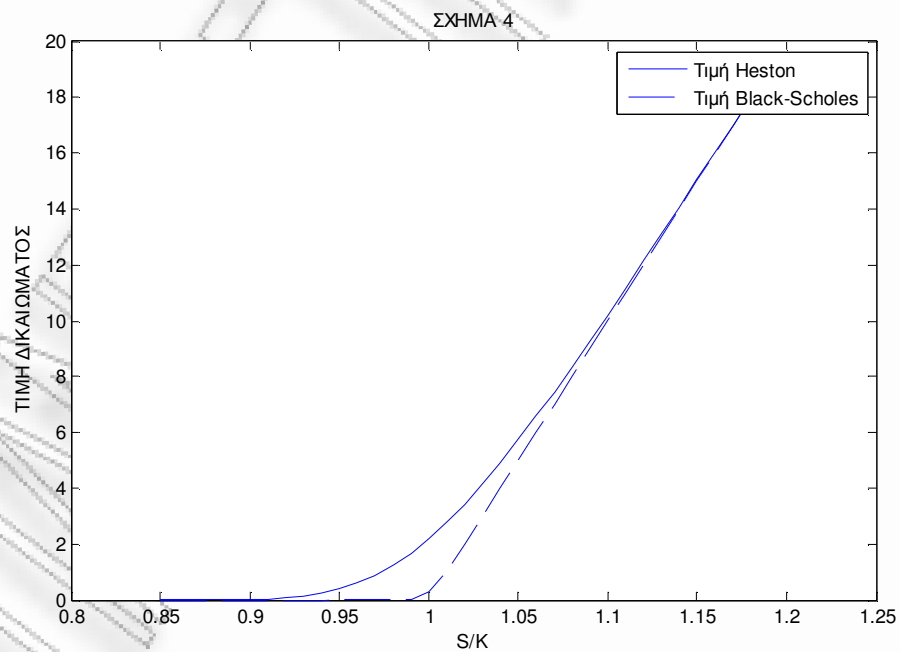
Σχήμα 2. Αποτέλεσμα της μεταβολής του σ στο μοντέλο Hull-White όταν $\phi = 0$, $r = 0$, $\xi = 1$, $T - t = 180$ μέρες.

3.



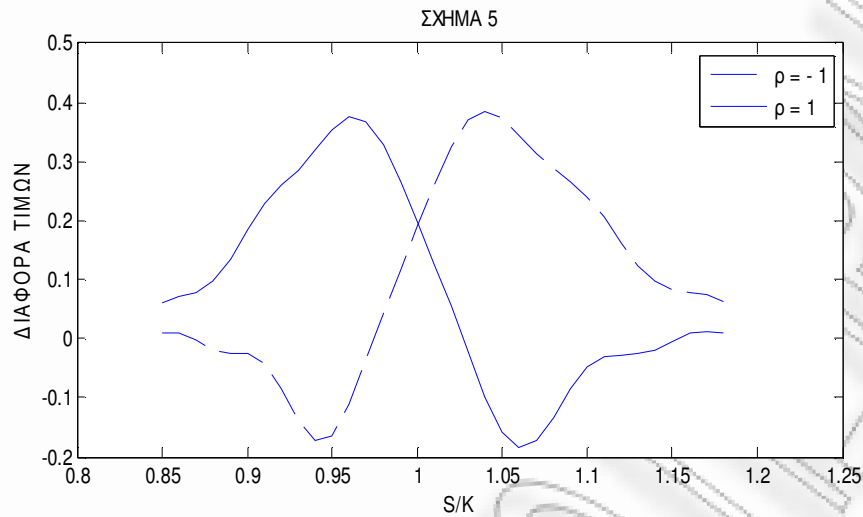
Σχήμα 3. Αποτέλεσμα της μεταβολής του ξ στο μοντέλο Hull-White όταν $\varphi = 0$, $r = 0$, $\sigma = 15\%$, $T - t = 180$ μέρες.

4.



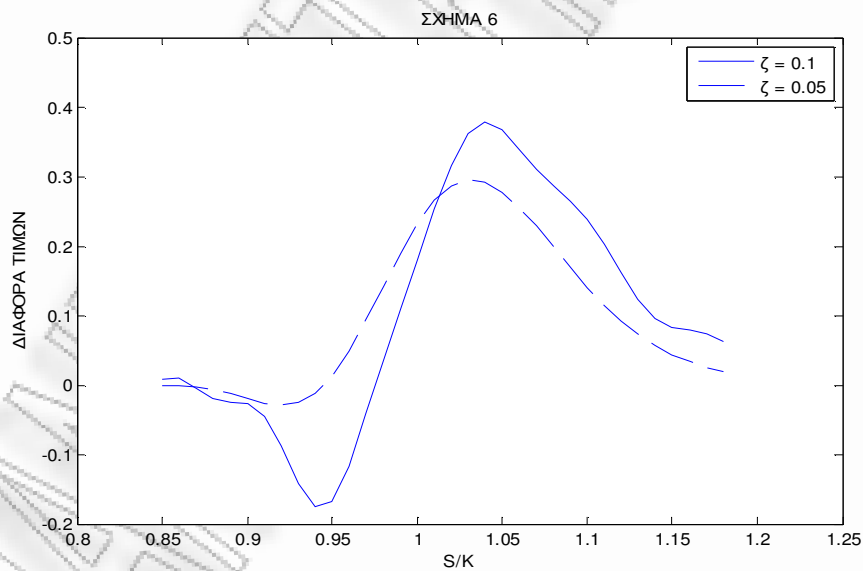
Σχήμα 4. Τιμές δικαιωμάτων υπολογισμένες με το μοντέλο Heston και Black-Scholes για διάφορες τιμές υποκείμενου τίτλου.

5.



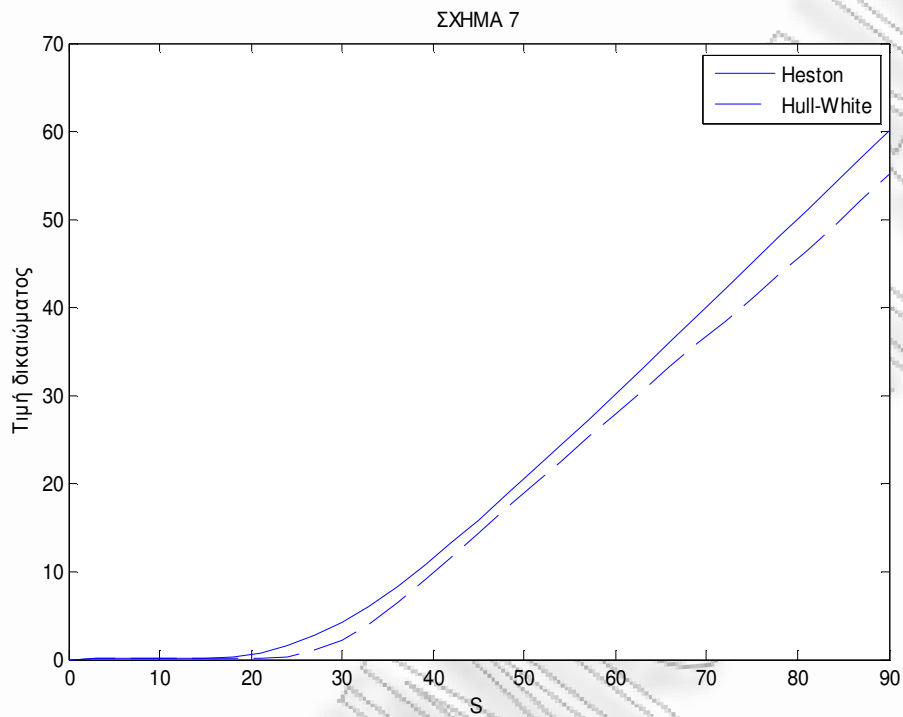
Σχήμα 5. Διαφορά των τιμών των δικαιωμάτων μεταξύ του μοντέλου του Heston και του B-S για θετική και αρνητική συσχέτιση. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των τιμών είναι: $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $T-t = 0.5$ χρόνια, $r = 0$ και $K = 100$.

6.



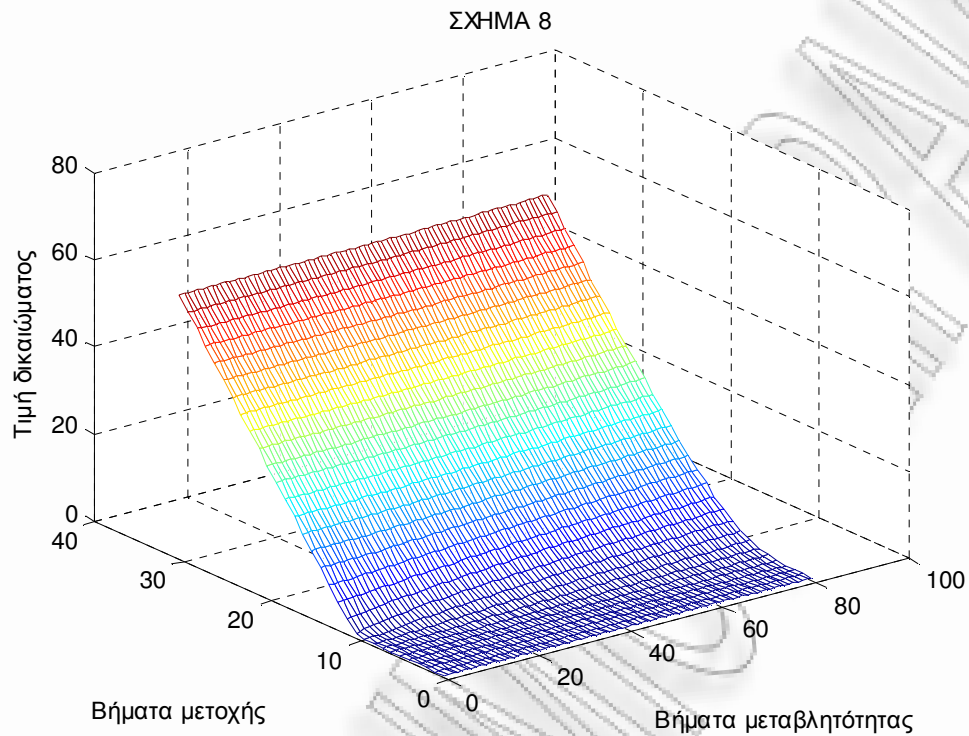
Σχήμα 6. Διαφορά των τιμών των δικαιωμάτων μεταξύ του μοντέλου του Heston και του B-S για διαφορετικές τιμές της μεταβλητότητας της μεταβλητότητας (ζ). Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των τιμών είναι: $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\rho = -1$, $T-t = 0.5$ χρόνια, $r = 0$ και $K = 100$.

7.



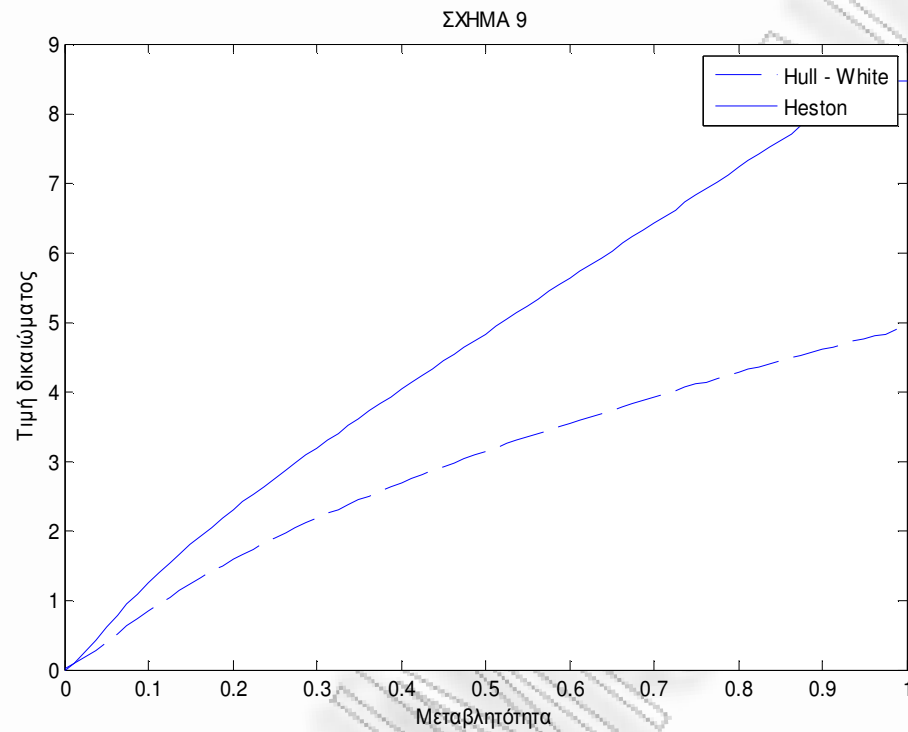
Σχήμα 7. Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς υπολογισμένη ως προς την μετοχή με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για $K = 30$, $r = 0$, $T = 0.5$, $\rho = 0$, $\lambda = 0$, $\delta S = 3$, $\delta V = 0.0125$, $\delta t = 0.001$, $S_{\max} = 90$, $V_{\max} = 1$ ($\varphi = 0.02$, $\xi = 0.1$ για το μοντέλο Hull – White και $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$ για το μοντέλο Heston).

8.



Σχήμα 8. Η τιμή του δικαιώματος αγοράς υπολογισμένη με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών σε τρεις διαστάσεις. Χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Hull – White. Ανάλογο είναι το σχήμα και για το μοντέλο Heston. Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες παράμετροι με το προηγούμενο σχήμα.

9.



Σχήμα 9. Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς υπολογισμένη ως προς την μεταβλητότητα με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών και ίδιες παραμέτρους με τα δύο προηγούμενα σχήματα.

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 1 | | | | | | |
|--|--------|--------------|-----------------|------------------|-----------------|---------------|
| Σύγκριση της διαδικασίας Monte Carlo και της θεωρητικής τιμής του μοντέλου HW με το υπόδειγμα B-S. | | | | | | |
| Παράμετροι δικαιωμάτων: $r=0$, $T=6/12$, $\sigma_0=10\%$, $\xi=1$, $\alpha=10$, $\sigma^*=0.15$. | | | | | | |
| | | Hull - White | | Monte Carlo | | |
| S/K | B-S | H-W | Σχετική Διαφορά | Τιμή Monte Carlo | Σχετική Διαφορά | Τυπικό Σφάλμα |
| 0.8750 | 0.0361 | 0.2333 | 5.4626 | 0.0568 | 0.5734 | 0.0581 |
| 0.8842 | 0.0523 | 0.2538 | 3.8528 | 0.0774 | 0.4799 | 0.0543 |
| 0.8936 | 0.0746 | 0.2672 | 2.5818 | 0.1017 | 0.3633 | 0.0413 |
| 0.9032 | 0.1049 | 0.2722 | 1.5948 | 0.1351 | 0.2879 | 0.0340 |
| 0.9130 | 0.1455 | 0.2689 | 0.8481 | 0.1785 | 0.2268 | 0.0269 |
| 0.9231 | 0.1990 | 0.2599 | 0.3060 | 0.2343 | 0.1774 | 0.0213 |
| 0.9333 | 0.2681 | 0.2501 | -0.0671 | 0.3053 | 0.1387 | 0.0167 |
| 0.9438 | 0.3560 | 0.2478 | -0.3039 | 0.3945 | 0.1081 | 0.0132 |
| 0.9545 | 0.4660 | 0.2636 | -0.4343 | 0.5053 | 0.0843 | 0.0103 |
| 0.9655 | 0.6011 | 0.3104 | -0.4836 | 0.6408 | 0.0660 | 0.0080 |
| 0.9767 | 0.7644 | 0.4012 | -0.4751 | 0.8040 | 0.0518 | 0.0063 |
| 0.9882 | 0.9582 | 0.5479 | -0.4282 | 0.9978 | 0.0413 | 0.0049 |
| 1.0000 | 1.1846 | 0.7593 | -0.3590 | 1.2238 | 0.0331 | 0.0040 |
| 1.0120 | 1.4443 | 1.0392 | -0.2805 | 1.4834 | 0.0271 | 0.0033 |
| 1.0244 | 1.7377 | 1.3861 | -0.2023 | 1.7765 | 0.0223 | 0.0028 |
| 1.0370 | 2.0639 | 1.7924 | -0.1315 | 2.1021 | 0.0185 | 0.0024 |
| 1.0500 | 2.4210 | 2.2461 | -0.0722 | 2.4583 | 0.0154 | 0.0020 |
| 1.0633 | 2.8066 | 2.7324 | -0.0264 | 2.8424 | 0.0127 | 0.0017 |
| 1.0769 | 3.2173 | 3.2361 | 0.0058 | 3.2511 | 0.0105 | 0.0015 |
| 1.0909 | 3.6497 | 3.7439 | 0.0258 | 3.6808 | 0.0105 | 0.0012 |
| 1.1053 | 4.1001 | 4.2463 | 0.0356 | 4.1278 | 0.0067 | 0.0009 |
| 1.1200 | 4.5648 | 4.7379 | 0.0379 | 4.5887 | 0.0052 | 0.0008 |
| 1.1351 | 5.0405 | 5.2179 | 0.0352 | 5.0606 | 0.0040 | 0.0006 |

2.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 2 | | | | | | |
|---|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Εκτίμηση μέσων αποκλίσεων των τιμών HW και B-S για διάφορες τιμές S/K και συντελεστή συσχέτισης ρ. | | | | | | |
| Παράμετροι Δικαιωμάτων: $\sigma_0=15\%$, $r=0$, $\xi=1$, $\alpha=10$, $\sigma^*=0.15$ | | | | | | |
| T (Μέρες) | ρ | S/K | | | | |
| | | 0.90 | 0.95 | 1.00 | 1.05 | 1.10 |
| 90 | -1.0 | -0.0873 | -0.0960 | -0.0235 | 0.0566 | 0.0727 |
| | | (-0.4800) | (-0.4469) | (-2.0478) | (0.9257) | (0.7254) |
| | -0.5 | -0.0421 | -0.0485 | -0.0174 | 0.0266 | 0.0391 |
| | | (-0.5856) | (-0.5392) | (-1.5935) | (1.1295) | (0.7746) |
| | 0.0 | 0.0024 | -0.0082 | -0.0152 | -0.0085 | 0.0018 |
| | | (4.3741) | (-1.3908) | (-0.6290) | (-1.3037) | (7.0461) |
| | 0.5 | 0.0411 | 0.0261 | -0.0173 | -0.0495 | -0.0389 |
| | | (0.5343) | (0.8614) | (-1.4211) | (-0.5244) | (-0.7095) |
| | 1.0 | 0.0780 | 0.0556 | -0.0242 | -0.0981 | -0.0826 |
| | | (0.6072) | (0.8757) | (-2.2075) | (-0.5653) | (-0.6849) |
| 180 | -1.0 | -0.2130 | -0.1798 | -0.0683 | 0.0567 | 0.1145 |
| | | (-0.3928) | (-0.4789) | (-1.3827) | (1.7952) | (0.9062) |
| | -0.5 | -0.1135 | -0.1002 | -0.0516 | 0.0207 | 0.0539 |
| | | (-0.4606) | (-0.5435) | (-1.1098) | (2.9812) | (1.1680) |
| | 0.0 | -0.0253 | -0.0366 | -0.0454 | -0.0280 | -0.0163 |
| | | (-0.9044) | (-0.7009) | (-0.5291) | (-0.9756) | (-1.7794) |
| | 0.5 | 0.0531 | 0.0152 | -0.0475 | -0.0905 | -0.0982 |
| | | (0.8026) | (3.0051) | (-1.0213) | (-0.5626) | (-0.5314) |
| | 1.0 | 0.1232 | 0.0525 | -0.0597 | -0.1703 | -0.1954 |
| | | (0.7952) | (1.9452) | (-1.8078) | (-0.6520) | (-0.5695) |
| 270 | -1.0 | -0.3161 | -0.2561 | -0.1226 | 0.0284 | 0.1157 |
| | | (-0.3930) | (-0.5027) | (-1.1320) | (5.2338) | (1.3172) |
| | -0.5 | -0.1753 | -0.1546 | -0.0972 | -0.0095 | 0.0424 |
| | | (-0.4619) | (-0.5394) | (-0.8966) | (-9.7611) | (2.2587) |
| | 0.0 | -0.0565 | -0.0747 | -0.0861 | -0.0653 | -0.0443 |
| | | (-0.6770) | (-0.5481) | (-0.4664) | (-0.6776) | (-1.0593) |
| | 0.5 | 0.0445 | -0.0099 | -0.0861 | -0.1371 | -0.1518 |
| | | (1.4244) | (-6.8410) | (-0.8266) | (-0.5412) | (-0.4977) |
| | 1.0 | 0.1370 | 0.0353 | -0.1006 | -0.2306 | -0.2856 |
| | | (1.0809) | (4.3537) | (-1.5937) | (-0.7115) | (-0.5762) |

3.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 3 | | | | | | |
|---|------------|---------------|----------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|
| Σύγκριση της διαδικασίας Monte Carlo και της θεωρητικής τιμής του μοντέλου Heston με το υπόδειγμα B-S. | | | | | | |
| Παράμετροι: $r=0$, $T=6/12$, $V_0=0.01$, $\kappa^*=2$, $\theta^*=0.01$, $\zeta=0.1$, $\rho=-1$. | | | | | | |
| | | Heston | | Monte Carlo | | |
| S/K | B-S | Heston | Διαφορά τιμών | Τιμή Monte Carlo | Διαφορά τιμών | Τυπικό Σφάλμα |
| 0.85 | 0.0007 | 0.0091 | 0.0084 | 0.0264 | 0.0257 | 1.1477 |
| 0.87 | 0.0036 | 0.0094 | 0.0058 | 0.0554 | 0.0518 | 0.8773 |
| 0.89 | 0.0152 | 0.0097 | -0.0055 | 0.1197 | 0.0402 | 0.6065 |
| 0.91 | 0.0532 | 0.0099 | -0.0433 | 0.2539 | 0.2007 | 0.4128 |
| 0.93 | 0.1548 | 0.0160 | -0.1387 | 0.5064 | 0.3516 | 0.2869 |
| 0.95 | 0.3813 | 0.2182 | -0.1632 | 0.9073 | 0.5260 | 0.2111 |
| 0.97 | 0.8110 | 0.7754 | -0.0356 | 1.4882 | 0.6772 | 0.1590 |
| 0.99 | 1.5159 | 1.6346 | 0.1187 | 2.2791 | 0.7632 | 0.5577 |
| 1.01 | 2.5354 | 2.7957 | 0.2603 | 3.3065 | 0.7711 | 0.0848 |
| 1.03 | 3.8607 | 4.2299 | 0.3692 | 4.5608 | 0.7001 | 0.0576 |
| 1.05 | 5.4412 | 5.8138 | 0.3726 | 6.0166 | 0.5754 | 0.0384 |
| 1.07 | 7.2064 | 7.5195 | 0.3131 | 7.6295 | 0.4231 | 0.0256 |
| 1.09 | 9.0880 | 9.3542 | 0.2662 | 9.3614 | 0.2734 | 0.0173 |
| 1.11 | 11.0343 | 11.2386 | 0.2043 | 11.1976 | 0.1633 | 0.0118 |
| 1.13 | 13.0122 | 13.1355 | 0.1233 | 13.1048 | 0.0926 | 0.0083 |
| 1.15 | 15.0040 | 15.0870 | 0.0830 | 15.0538 | 0.0498 | 0.0060 |
| 1.17 | 17.0012 | 17.0751 | 0.0739 | 17.0275 | 0.0263 | 0.0046 |

4.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 4 | | | | |
|--|----------------------------|-----------------------------|----------------|---------------|
| Ροή τιμών μετοχής, λόγω αντιστάθμισης και σφάλματος αντιστάθμισης υπολογισμένα με το μοντέλο Hull-White | | | | |
| Παράμετροι: $S_0 = 42$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0$, $\varphi = 2$, $\xi = 1$, $\rho = 0$ | | | | |
| Hull - White | | | | |
| S(t) | $\xi(t)$ | $\eta(t)$ | Call(t) | Σφάλμα |
| 42,0000 | 0.6247 | -20.52 | 5.7177 | 0,00 |
| 39.8338 | 0.5610 | -17.58 | 4.7684 | -0,4042 |
| 37.5574 | 0.4624 | -14.10 | 3.2680 | 0,2217 |
| 38.2449 | 0.5033 | -15.46 | 3.7887 | -0,2042 |
| 37.9328 | 0.5018 | -15.42 | 3.6161 | 0,0154 |
| 37.5875 | 0.4819 | -14.32 | 3.7917 | -0,3502 |
| 40.0983 | 0.5612 | -18.00 | 4.5041 | 0,4992 |
| 40.5535 | 0.5753 | -18.68 | 4.6486 | 0,1100 |
| 40.8534 | 0.5900 | -19.64 | 4.4648 | 0,3581 |
| 43.4426 | 0.6728 | -22.46 | 6.7676 | -0,7764 |
| 41.7846 | 0.6140 | -19.80 | 5.8575 | -0,2048 |
| 43.2075 | 0.6525 | -21.10 | 7.0924 | -0,3630 |
| 45.1574 | 0.7119 | -24.10 | 8.0497 | 0,3155 |
| 44.5301 | 0.7095 | -24.20 | 7.3958 | 0,2051 |
| 44.9640 | 0.7217 | -24.90 | 7.5494 | 0,1525 |
| 42.3285 | 0.6344 | -20.88 | 5.9715 | -0,3230 |
| 39.6947 | 0.5438 | -17.34 | 4.2458 | 0,0565 |
| 39.8626 | 0.5619 | -17.98 | 4.4187 | -0,0814 |
| 41.4767 | 0.6059 | -20.38 | 4.7496 | 0,5761 |
| 47.2899 | 0.8031 | -29.26 | 8.7194 | -0,4464 |
| 45.6588 | 0.7640 | -27.68 | 7.2041 | 0,2044 |
| 46.0233 | 0.7947 | -29.42 | 7.1540 | 0,3278 |
| 45.8067 | 0.7932 | -29.36 | 6.9736 | 0,0089 |
| 41.7993 | 0.6205 | -21.88 | 4.0578 | -0,2626 |
| 40.8791 | 0.5860 | -20.56 | 3.3965 | 0,0889 |
| 37.4151 | 0.3763 | -12.66 | 1.4181 | -0,0528 |
| 38.8323 | 0.4676 | -16.10 | 2.0595 | -0,1069 |
| 37.1306 | 0.3523 | -11.78 | 1.3021 | -0,0398 |
| 37.2715 | 0.3503 | -11.86 | 1.1953 | 0,1554 |
| 36.2190 | 0.2634 | -8.78 | 0.7618 | 0,0657 |
| 36.7351 | 0.2808 | -9.56 | 0.7562 | 0,1398 |
| 35.5897 | 0.1512 | -5.10 | 0.2804 | 0,1531 |
| 36.3648 | 0.1637 | -5.66 | 0.2938 | 0,1045 |
| 37.5792 | 0.2183 | -7.84 | 0.3626 | 0,1291 |
| 40.4876 | 0.5906 | -22.60 | 1.2308 | -0,2323 |
| 40.1227 | 0.5409 | -21.00 | 0.7020 | 0,3944 |
| 36.8268 | 0 | 0 | 0 | -1,0803 |

5.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 5 | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|----------------|---------------|
| Ροή τιμών μετοχής, λόγω αντιστάθμισης μοναδικού μέσου και σφάλματος αντιστάθμισης υπολογισμένα με το μοντέλο Heston. | | | | |
| Παράμετροι: $S_0 = 105$, $K = 100$, $T = 0.5$, $r = 0$, $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$ | | | | |
| Heston | | | | |
| S(t) | $\chi_s(t)$ | $\chi_0(t)$ | Call(t) | Σφάλμα |
| 105.0000 | 0.7691 | -74.9450 | 5.8138 | |
| 104.9755 | 0.7697 | -75.0266 | 5.7777 | 0.0173 |
| 103.4394 | 0.6940 | -67.2501 | 4.5321 | 0.0632 |
| 103.5918 | 0.7045 | -68.3479 | 4.6320 | 0.0058 |
| 106.4656 | 0.8231 | -80.6435 | 6.9927 | -0.3361 |
| 105.5639 | 0.7991 | -78.1502 | 6.2011 | 0.0494 |
| 106.2663 | 0.8234 | -80.7084 | 6.7876 | -0.0252 |
| 106.6089 | 0.8359 | -82.0436 | 7.0723 | -0.0026 |
| 105.1042 | 0.7896 | -77.2311 | 5.7589 | 0.0555 |
| 104.7428 | 0.7766 | -75.9109 | 5.4372 | 0.0365 |
| 105.9088 | 0.8253 | -81.0045 | 6.4068 | -0.0641 |
| 106.5300 | 0.8482 | -83.4271 | 6.9347 | -0.0152 |
| 107.0588 | 0.8668 | -85.4109 | 7.3927 | -0.0095 |
| 107.0699 | 0.8716 | -85.9323 | 7.3856 | 0.0167 |
| 105.1234 | 0.8104 | -79.5432 | 5.6460 | 0.0432 |
| 107.0262 | 0.8799 | -86.8610 | 7.3105 | -0.1226 |
| 106.2924 | 0.8637 | -85.1790 | 6.6268 | 0.0380 |
| 106.8628 | 0.8860 | -87.5550 | 7.1241 | -0.0046 |
| 107.7035 | 0.9122 | -90.3573 | 7.8859 | -0.0169 |
| 109.6080 | 0.9516 | -94.6125 | 9.6953 | -0.0722 |
| 110.4151 | 0.9666 | -96.2492 | 10.4739 | -0.0105 |
| 109.6157 | 0.9601 | -95.5678 | 9.6796 | 0.0216 |
| 107.9235 | 0.9406 | -93.4797 | 8.0305 | 0.0243 |
| 108.4944 | 0.9559 | -95.1404 | 8.5658 | 0.0017 |
| 107.4986 | 0.9461 | -94.1113 | 7.5943 | 0.0197 |
| 106.8099 | 0.9380 | -93.2701 | 6.9198 | 0.0230 |
| 107.0973 | 0.9527 | -94.8509 | 7.1775 | 0.0118 |
| 106.7554 | 0.9527 | -94.8761 | 6.8304 | 0.0214 |
| 106.0530 | 0.9426 | -93.8314 | 6.1308 | 0.0304 |
| 104.4835 | 0.8984 | -89.2478 | 4.6154 | 0.0360 |
| 105.1509 | 0.9383 | -93.4558 | 5.2086 | 0.0063 |
| 103.4541 | 0.8882 | -88.2815 | 3.6061 | 0.0104 |
| 101.8255 | 0.7653 | -75.7715 | 2.1569 | 0.0026 |
| 100.6939 | 0.6051 | -59.7413 | 1.1861 | 0.1049 |
| 102.4491 | 0.9213 | -91.8178 | 2.5731 | -0.3250 |
| 103.5853 | 1.0434 | -104.3589 | 3.7254 | -0.1054 |
| 102.6033 | 1.0711 | -107.1131 | 2.7885 | -0.0877 |

6.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 6 | | | | | | |
|--|------------------|-------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------|
| Ροή τιμών μετοχής, λόγω αντιστάθμισης Δέλτα ουδετερότητας και σφάλματος αντιστάθμισης υπολογισμένα με το μοντέλο Heston. | | | | | | |
| Παράμετροι: $S_0 = 105$, $K = 100$, $\bar{K} = 110$, $T = 0.5$, $r = 0$, $\kappa^* = 2$, $\theta^* = 0.01$, $\zeta = 0.1$, $\rho = -1$ | | | | | | |
| Heston | | | | | | |
| S(t) | Vcall (t) | \bar{V}call (t) | χ_c (t) | χ_s(t) | χ_o(t) | Σφάλμα |
| 105.0000 | 5.8138 | 0.3455 | 0.6616 | 0.6884 | -66.7 | |
| 107.2866 | 7.6374 | 0.7768 | 0.3135 | 0.7941 | -77.8 | 0.0359 |
| 104.7818 | 5.6229 | 0.3152 | 0.7372 | 0.6762 | -65.5 | -0.1191 |
| 105.8580 | 6.4359 | 0.4594 | 0.4991 | 0.7376 | -71.9 | 0.0209 |
| 106.2337 | 6.7283 | 0.5254 | 0.4449 | 0.7554 | -73.8 | 0.0177 |
| 104.6956 | 5.5049 | 0.2878 | 0.7923 | 0.6759 | -65.5 | -0.0442 |
| 104.1449 | 5.0755 | 0.2217 | 0.9977 | 0.6460 | -62.4 | 0.0048 |
| 104.5764 | 5.3679 | 0.2518 | 0.8542 | 0.6764 | -65.6 | 0.0163 |
| 109.1706 | 9.2528 | 1.3016 | 0.2248 | 0.8445 | -83.2 | 0.1192 |
| 111.9869 | 11.9452 | 2.7836 | 0.7100 | 0.4262 | -37.8 | 0.0191 |
| 110.9104 | 10.8986 | 2.1307 | 0.3753 | 0.7245 | -70.3 | 0.1243 |
| 113.6912 | 13.6991 | 3.9852 | 0.4532 | 0.5722 | -52.9 | -0.0899 |
| 114.1734 | 14.2206 | 4.3532 | 0.7537 | 0.2435 | -16.8 | 0.1814 |
| 114.1313 | 14.1808 | 4.3165 | 0.3642 | 0.7101 | -68.5 | 0.0100 |
| 114.6115 | 14.6971 | 4.6962 | 0.7817 | 0.2765 | -20.7 | -0.1011 |
| 114.4772 | 14.5534 | 4.5890 | 0.4655 | 0.5735 | -53.2 | 0.0228 |
| 114.3894 | 14.4592 | 4.5214 | 0.2476 | 0.7759 | -75.4 | 0.0123 |
| 115.4740 | 15.6043 | 5.4264 | -0.5326 | 1.5131 | -156.2 | -0.0795 |
| 116.3655 | 16.5365 | 6.2166 | -0.8694 | 1.8475 | -193.0 | -0.0041 |
| 117.1443 | 17.3115 | 6.9650 | -0.9267 | 1.9093 | -199.9 | 0.0131 |
| 117.4603 | 17.6061 | 7.2920 | -0.9188 | 1.9043 | -199.4 | 0.0057 |
| 116.8962 | 17.0149 | 6.7780 | -0.8632 | 1.8478 | -193.1 | -0.0106 |
| 117.3225 | 17.4250 | 7.2064 | -0.8772 | 1.8652 | -195.1 | 0.0077 |
| 118.2619 | 18.2853 | 8.2064 | -0.8169 | 1.8113 | -189.2 | 0.0147 |
| 118.4931 | 18.4838 | 8.4700 | -0.7700 | 1.7660 | -184.3 | 0.0050 |
| 118.9955 | 18.9143 | 9.0440 | -0.5832 | 1.5812 | -164.0 | 0.0148 |
| 119.3221 | 19.1917 | 9.4247 | 0.1613 | 0.8311 | -81.5 | 0.0170 |
| 119.1862 | 19.0823 | 9.2653 | 0.1145 | 0.8800 | -86.9 | -0.0292 |
| 119.3378 | 19.2196 | 9.4335 | 0.1265 | 0.8713 | -85.9 | 0.0154 |
| 118.9116 | 18.8570 | 8.9430 | -0.3532 | 1.3512 | -138.7 | -0.0180 |
| 119.4779 | 19.3541 | 9.5803 | -2.0101 | 3.0203 | -322.2 | 0.0429 |
| 118.7902 | 18.7674 | 8.7877 | -0.5130 | 1.5108 | -156.2 | 0.1029 |
| 118.0247 | 18.0982 | 7.9310 | -0.8401 | 1.8336 | -191.7 | -0.0478 |
| 117.3607 | 17.5009 | 7.2117 | -0.9567 | 1.9465 | -204.0 | -0.0159 |
| 114.7440 | 14.6986 | 4.8116 | -0.7648 | 1.7741 | -185.2 | 0.0052 |
| 116.3327 | 16.5260 | 6.1695 | -1.2114 | 2.1964 | -231.5 | -0.0474 |
| 116.6546 | 16.9739 | 6.3604 | 0,0000 | 0,0000 | 0,00 | 0.0279 |

7.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 7 | | | | |
|---|-----------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|
| Σύγκριση Μεθόδων Αποτίμησης | | | | |
| Παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν: | | | | |
| $S_0 = 35, K = 30, r = 0, T = 0.5, V_0 = 0.0225 (\sigma = 0.15), \rho = 0.$ | | | | |
| | Hull - White | | Heston | |
| | $\phi = 0, \xi = 0.1$ | | $\kappa^* = 2, \theta^* = 0.01, \zeta = 0.1$ | |
| | Τιμή | Χρόνος (σε δευτερόλεπτα) | Τιμή | Χρόνος (σε δευτερόλεπτα) |
| Λύση κλειστής μορφής | 5.2986 | 0.04 | 5.0405 | 0.06 |
| Monte Carlo | 5.1119 | 8.62 | 5.0982 | 1.25 |
| Πεπερασμένες Διαφορές | 5.1367 | 0.41 | 5.0952 | 0.39 |

ΛΙΣΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1. Υπολογισμός θεωρητικής τιμής Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για το μοντέλο Hull & White.

```
function c=HullWhite(xi)
S0=35;
r=0;
K=30;
T=6/12;
sigma=0.15;
k=xi^2*T;
d1=(log(S0./K)+(r+1/2*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
BSP=S0*normcdf(d1)-K.*exp(-r*T).*normcdf(d2);
Term2=(S0*sqrt(T)*(1/sqrt(2*pi)).*exp(-0.5.*(d1.^2)).*(d1.*d2-1))./(8*sigma^3).*(2*sigma^4*(exp((k)-k-1)/(k^2)-(sigma^4)));
Term3a=(S0*sqrt(T)*(1/sqrt(2*pi)).*exp(-0.5.*(d1.^2)).*((d1.*d2-1).*(d1.*d2-3)-(d1.^2+d2.^2)))/(48*(sigma^5));
Term3b=(sigma^6)*(exp(3*k)-(9+18*k)*exp(k)+(8+24*k+18*(k^2)+6*(k^3)))/(3*(k^3));
HWP=BSP+Term2+Term3a*Term3b;
c=HWP;
```

2. Υπολογισμός της τιμής Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo για το μοντέλο Hull & White.

```
function [Price, CI]=HullWhiteMCAV(S0, V0, sigmamean, K, r, a, T, xi, NRepl, NSteps)
VPaths=zeros(NRepl, 1+NSteps);
VPaths(:, 1)=V0;
VPaths1=zeros(NRepl, 1+NSteps);
VPaths1(:, 1)=V0;
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl, 1+NSteps);
for i=1:NRepl
    for j=1:NSteps
        fi=a*(sigmamean-sqrt(VPaths(i, j)));
        fi1=a*(sigmamean-sqrt(VPaths1(i, j)));
        VPaths(i, j+1)=VPaths(i, j)*exp((fi-0.5*xi^2)*dt+xi*Vus(i, j+1)*sqrt(dt));
        VPaths1(i, j+1)=VPaths1(i, j)*exp((fi1-0.5*xi^2)*dt+xi*(-Vus(i, j+1))*sqrt(dt));
    end
    Vmean(i)=mean(VPaths(i, :));
    p1(i)=blsprice(S0, K, r, T, sqrt(Vmean(i)));
    Vmean1(i)=mean(VPaths1(i, :));
    p2(i)=blsprice(S0, K, r, T, sqrt(Vmean1(i)));
    y(i)=(p1(i)+p2(i))/2;
end
[Price, VarPrice, CI]=normfit(y);
```


3. Εκτίμηση των μέσων αποκλίσεων της τιμής του μοντέλου Hull – White και του μοντέλου Heston για μη μηδενικά ϕ και ρ .

```
function[estimation1,estimation2,CI1,CI2]=HullWhiteMCAV1(S0,V0,rho,sigmamean,
n,K,r,a,T,xi,NRepl,NSteps)
SPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
SPaths1=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths1(:,1)=S0;
SPaths2=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths2(:,1)=S0;
SPaths3=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths3(:,1)=S0;
SPaths4=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths4(:,1)=S0;
SPaths5=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths5(:,1)=S0;
VPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths(:,1)=V0;
VPaths1=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths1(:,1)=V0;
VPaths2=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths2(:,1)=V0;
VPaths3=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths3(:,1)=V0;
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl,1+NSteps);
Vvs=randn(NRepl,1+NSteps);
nudt=(r-0.5*V0)*dt;
sidt=sqrt(V0)*sqrt(dt);
for i=1:NRepl
    for j=1:NSteps
        fi=a*(sigmamean-sqrt(VPaths(i,j)));
        fi1=a*(sigmamean-sqrt(VPaths1(i,j)));
        fi2=a*(sigmamean-sqrt(VPaths2(i,j)));
        fi3=a*(sigmamean-sqrt(VPaths3(i,j)));
        SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp((r-
        VPaths(i,j)/2)*dt+sqrt(VPaths(i,j)*dt)*Vus(i,j+1));
        VPaths(i,j+1)=VPaths(i,j)*exp((fi-
        0.5*xi^2)*dt+rho*Vus(i,j+1)*xi*sqrt(dt)+sqrt(1-rho^2)*Vvs(i,j+1)*xi*sqrt(dt));
        SPaths1(i,j+1)=SPaths1(i,j)*exp((r-VPaths1(i,j)/2)*dt+sqrt(VPaths1(i,j)*dt)*(-
        Vus(i,j+1)));
        VPaths1(i,j+1)=VPaths1(i,j)*exp((fi1-0.5*xi^2)*dt+rho*(-
        Vus(i,j+1))*xi*sqrt(dt)+sqrt(1-rho^2)*Vvs(i,j+1)*xi*sqrt(dt));
        SPaths2(i,j+1)=SPaths2(i,j)*exp((r-
        VPaths2(i,j)/2)*dt+sqrt(VPaths2(i,j)*dt)*Vus(i,j+1));
        VPaths2(i,j+1)=VPaths2(i,j)*exp((fi2-
        0.5*xi^2)*dt+rho*Vus(i,j+1)*xi*sqrt(dt)+sqrt(1-rho^2)*(-Vvs(i,j+1))*xi*sqrt(dt));
        SPaths3(i,j+1)=SPaths3(i,j)*exp((r-VPaths3(i,j)/2)*dt+sqrt(VPaths3(i,j)*dt)*(-
        Vus(i,j+1)));
```

```

VPaths3(i,j+1)=VPaths3(i,j)*exp((fi3-0.5*xi^2)*dt+rho*(-
Vus(i,j+1))*xi*sqrt(dt)+sqrt(1-rho^2)*(-Vvs(i,j+1))*xi*sqrt(dt));
SPaths4(i,j+1)=SPaths4(i,j)*exp(nudt+siddt*Vus(i,j+1));
SPaths5(i,j+1)=SPaths5(i,j)*exp(nudt+siddt*(-Vus(i,j+1)));
end
p1(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths(i,1+NSteps)-K);
p2(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths1(i,1+NSteps)-K);
p3(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths2(i,1+NSteps)-K);
p4(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths3(i,1+NSteps)-K);
q1(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths4(i,1+NSteps)-K);
q2(i)=exp(-r*T)*max(0,SPaths5(i,1+NSteps)-K);
pricingbias1(i)=(p1(i)+p3(i)-2*q1(i))/2;
pricingbias2(i)=(p2(i)+p4(i)-2*q2(i))/2;
end
[estimation1,VarPrice1,CI1]=normfit(pricingbias1);
[estimation2,VarPrice2,CI2]=normfit(pricingbias2);

```

4. Υπολογισμός της θεωρητικής τιμής του μοντέλου του Heston

```

function c=Hestonnew(x)
global kappa theta zeta rho
kappa=x(1); % τιμή αναστροφής του μέσου ουδέτερου κινδύνου
theta=x(2); % μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση ουδέτερου κινδύνου
zeta=x(3); % μεταβλητότητα της μεταβλητότητας
rho=x(4); % συσχέτιση μεταξύ S και V
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
S0=105;
r=0;
q=0;
K=100;
T=0.5;
x0=log(S0);
v0=0.0225;
u1=0.5;
u2=-0.5;
a=kappa*theta;
b1=kappa-rho*zeta;
b2=kappa;
k=6;
N=2^k;
Iodd=1:2:(N-1);
Ieven=2:2:(N-2);
a=0.0000001;
b=100;
dphi=(b-a)/N;
phi_odd=a+Iodd*dphi;
phi_even=a+Ieven*dphi;
odd_sum1=0;

```



```

odd_sum2=0;
even_sum1=0;
even_sum2=0;
for i=1:length(phi_odd)
    odd_sum1=odd_sum1+P1_integrand(phi_odd(i),x0,v0,T);
    odd_sum2=odd_sum2+P2_integrand(phi_odd(i),x0,v0,T);
end
for i=1:length(phi_even)
    even_sum1=even_sum1+P1_integrand(phi_even(i),x0,v0,T);
    even_sum2=even_sum2+P2_integrand(phi_even(i),x0,v0,T);
end
sum1=(P1_integrand(a,x0,v0,T)+4*odd_sum1+2*even_sum1+P1_integrand(b,x0,v0,
T))*dphi/3;
sum2=(P2_integrand(a,x0,v0,T)+4*odd_sum2+2*even_sum2+P2_integrand(b,x0,v0,
T))*dphi/3;
P1=0.5+sum1./pi;
P2=0.5+sum2./pi;
HP=S0*exp(-q.*T).*P1-exp(-r.*T).*K.*P2;
c=HP;

```

Υπολογισμός C1 και C2 για την εύρεση της θεωρητικής τιμής του μοντέλου Heston.

```

function c=C1(t,phi)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d1 g1
c=r.*phi.*i.*t+a/(zeta^2).*((b1-rho*zeta*phi*i+d1).*t-2.*log((1-g1.*exp(d1.*r))./(1-
g1)))));

```

```

function c=C2(t,phi)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d2 g2
c=r.*phi.*i.*t+a/(zeta^2).*((b2-rho*zeta*phi*i+d2).*t-2.*log((1-g2.*exp(d2.*r))./(1-
g2)))));

```

Υπολογισμός D1 και D2 για την εύρεση της θεωρητικής τιμής του μοντέλου Heston.

```

function c=D1(t,phi)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d1 g1
c=(b1-rho*zeta*phi*i+d1)./(zeta*zeta).*((1-exp(d1.*t))./(1-g1.*exp(d1.*t)));

```

```

function c=D2(t,phi)

```

```

global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d2 g2
c=(b2-rho*zeta*phi*i+d2)/(zeta*zeta).*((1-exp(d2.*t))/(1-g2.*exp(d2.*t)));

```

Υπολογισμός f1 και f2 για την εύρεση της θεωρητικής τιμής του μοντέλου Heston.

```

function c=f1(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d1 g1
d1=sqrt((rho*zeta*phi*i-b1)^2-zeta*zeta*(2*u1*phi*i-phi*phi));
g1=(b1-rho*zeta*phi*i+d1)/(b1-rho*zeta*phi*i-d1);
c=exp(C1(t,phi)+D1(t,phi).*v+i.*x.*phi);

```

```

function c=f2(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d2 g2
d2=sqrt((rho*zeta*phi*i-b2)^2-zeta*zeta*(2*u2*phi*i-phi*phi));
g2=(b2-rho*zeta*phi*i+d2)/(b2-rho*zeta*phi*i-d2);
c=exp(C2(t,phi)+D2(t,phi).*v+i.*x.*phi);

```

Υπολογισμός P1 - ολοκληρώματος και P2 – ολοκληρώματος για την εύρεση της θεωρητικής τιμής του μοντέλου Heston.

```

function c=P1_integrand(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global mu1 mu2 a b1 b2
global d1 g1
global x0 v0
c=real(exp(-i*phi.*log(K)).*f1(phi,x,v,t)/(i*phi));

```

```

function c=P2_integrand(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d2 g2
global x0 v0
c=real(exp(-i*phi.*log(K)).*f2(phi,x,v,t)/(i*phi));

```

5. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για το μοντέλο Heston με τη μέθοδο Monte Carlo.

```

function [Price, CI] = HestonMCAV1(S0, V0, K, r, T, kappa, theta, zeta, rho, NRepl, NSteps)
SPaths = zeros(NRepl, 1 + NSteps);
SPaths(:, 1) = S0;
SPaths1 = zeros(NRepl, 1 + NSteps);
SPaths1(:, 1) = S0;
VPaths = zeros(NRepl, 1 + NSteps);
VPaths(:, 1) = V0;
VPaths1 = zeros(NRepl, 1 + NSteps);
VPaths1(:, 1) = V0;
Payoff1 = zeros(NRepl, 1);
Payoff2 = zeros(NRepl, 1);
dt = T / NSteps;
Vus = randn(NRepl, 1 + NSteps);
Vvs = randn(NRepl, 1 + NSteps);
for i = 1:NRepl
    for j = 1:NSteps
        SPaths(i, j+1) = SPaths(i, j) * exp((r -
            VPaths(i, j) / 2) * dt + sqrt(VPaths(i, j) * dt) * Vus(i, j+1));
        VPaths(i, j+1) = VPaths(i, j) + kappa * (theta -
            VPaths(i, j)) * dt + rho * Vus(i, j+1) * zeta * sqrt(VPaths(i, j) * dt) + sqrt(1 -
            rho^2) * Vvs(i, j+1) * zeta * sqrt(VPaths(i, j) * dt);
        SPaths1(i, j+1) = SPaths1(i, j) * exp((r - VPaths1(i, j) / 2) * dt + sqrt(VPaths1(i, j) * dt) * (-
            Vus(i, j+1)));
        VPaths1(i, j+1) = VPaths1(i, j) + kappa * (theta - VPaths1(i, j)) * dt + rho * (-
            Vus(i, j+1)) * zeta * sqrt(VPaths1(i, j) * dt) + sqrt(1 - rho^2) * (-
            Vvs(i, j+1)) * zeta * sqrt(VPaths1(i, j) * dt);
    end
    Payoff1(i) = max(0, SPaths(i, 1 + NSteps) - K);
    Payoff2(i) = max(0, SPaths1(i, 1 + NSteps) - K);
end
DiscPayoff = exp(-r * T) * 0.5 * (Payoff1 + Payoff2);
[Price, VarPrice, CI] = normfit(DiscPayoff);

```

6. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για το μοντέλο Hull - White με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών.

```

function [price, u] = EuCallHWImpl(phi, xi, rho, dS, dV)
r = 0;
smax = 90;
vmax = 1;
dt = 0.001;
T = 0.5;
K = 30;
M = round(smax / dS);
N = round(vmax / dV);
dS = smax / M;
dV = vmax / N;
u = zeros(M + 1, N + 1, T / dt + 1);
vetS = linspace(0, smax, M + 1);

```

```

vetV=linspace(0,vmax,N+1);
for i=1:M+1
    for j=1:N+1
        for t=T/dt+1
            if (i-1)*dS<K
                u(i,j,t)=0;
            else
                u(i,j,t)=(i-1)*dS-K;
            end
        end
    end
end
for t=T/dt:-1:1
    for i=2:M
        u(i,1,t)=r*(i-1)*dt*u(i+1,1,t+1)+(1-r*(i-1)*dt-r*dt)*u(i,1,t+1);
    end
    for i=2:M
        for j=2:N
            u(i,j,t)=(1-(j-1)*dV*(i-1)^2*dt-xi^2*dt*(j-1)^2)*u(i,j,t+1)+(1/2*(j-1)*dV*(i-1)^2*dt-1/2*r*(i-1)*dt)*u(i-1,j,t+1)+(1/2*r*(i-1)*dt+1/2*(j-1)*dV*(i-1)^2*dt)*u(i+1,j,t+1)+(1/2*xi^2*dt*(j-1)^2-1/2*phi*(i-1)*dt)*u(i,j-1,t+1)+(1/2*phi*(j-1)*dt+1/2*xi^2*dt*(j-1)^2)*u(i,j+1,t+1)+(i-1)*rho*xi*dt*(j-1)*sqrt((j-1)*dV)/4*(u(i+1,j+1,t+1)+u(i-1,j-1,t+1)-u(i-1,j+1,t+1)-u(i+1,j-1,t+1));
        end
    end
    for j=1:N
        u(M+1,j,t)=u(M,j,t)+dS;
    end
    for i=2:M+1
        u(i,N+1,t)=u(i,N,t);
    end
end
i=1:M+1;
j=1:N+1;
%plot((i-1)*dS,u(:,7,1)) % Η τιμή του δικαιώματος;
%mesh(u(:,1,1)); % Η τιμή του δικαιώματος 3D;
plot((j-1)*dV,u(10,.,1)); % Η τιμή του δικαιώματος έναντι της μεταβλητότητας;
price=interp2(vetV,vetS,u(:,1,1),0.0225,35);

```

7. Υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για το μοντέλο Heston με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών.

```

function [price,C]=EuCallHestonImpl(kappa,theta,zeta,rho,dS,dV)
r=0;
lamda=0;
smax=90;
vmax=1;
dt=0.001;
T=0.5;

```

```

K=30;
M=round(smax/dS);
N=round(vmax/dV);
dS=smax/M;
dV=vmax/N;
C=zeros(M+1,N+1,T/dt+1);
vetS=linspace(0,smax,M+1);
vetV=linspace(0,vmax,N+1);
for i=1:M+1
    for j=1:N+1
        for t=T/dt+1
            if (i-1)*dS<K
                C(i,j,t)=0;
            else
                C(i,j,t)=(i-1)*dS-K;
            end
        end
    end
end
for t=T/dt:-1:1
    for i=2:M
        C(i,1,t)=r*(i-1)*dt*C(i+1,1,t+1)+(1-kappa*theta*dt/dV-r*(i-1)*dt-
r*dt)*C(i,1,t+1)+kappa*theta*dt/dV*C(i,2,t+1);
    end
    for i=2:M
        for j=2:N
            C(i,j,t)=(1-dt*(j-1)*dV*(i-1)^2-dt*zeta^2*(j-1)/dV-dt*r)*C(i,j,t+1)+(dt*(j-
1)*dV*(i-1)^2/2-dt*r*(i-1)/2)*C(i-1,j,t+1)+(dt*r*(i-1)/2+dt*(j-1)*dV*(i-
1)^2/2)*C(i+1,j,t+1)+(dt*zeta^2*(j-1)/(2*dV)-dt*(kappa*(theta-(j-1)*dV)-
lamda)/(2*dV))*C(i,j-1,t+1)+(dt*zeta^2*(j-1)/(2*dV)+dt*(kappa*(theta-(j-1)*dV)-
lamda)/(2*dV))*C(i,j+1,t+1)+(dt*rho*zeta*(i-1)*(j-1)/4)*(C(i+1,j+1,t+1)+C(i-1,j-
1,t+1)-C(i-1,j+1,t+1)-C(i+1,j-1,t+1));
        end
    end
    for j=1:N
        C(M+1,j,t)=C(M,j,t)+dS;
    end
    for i=2:M+1
        C(i,N+1,t)=C(i,N,t);
    end
end
i=1:M+1;
j=1:N+1;
%plot((i-1)*dS,C(:,33,1)) % Η τιμή του δικαιώματος;
%mesh(C(:,:,1));% Η τιμή του δικαιώματος 3D;
%plot((j-1)*dV,C(10,(:,1)));% Η τιμή του δικαιώματος έναντι της μεταβλητότητας;
price=interp2(vetV,vetS,C(:,:,1),0.0225,35);

```


8. Προσομοίωση μονοπατιών της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας θεωρώντας $\rho = 0$ (σύμφωνα με το μοντέλο Hull – White).

```
function [SPaths, VPaths]=HWSPaths(S0, V0, r, fi, T, xi, NRepl, NSteps)
SPaths=zeros(NRepl, 1+NSteps);
SPaths(:, 1)=S0;
VPaths=zeros(NRepl, 1+NSteps);
VPaths(:, 1)=V0;
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl, 1+NSteps);
Vvs=randn(NRepl, 1+NSteps);
for i=1:NRepl
    for j=1:NSteps
        SPaths(i, j+1)=SPaths(i, j)*exp((r-
            VPaths(i, j)/2)*dt+sqrt(VPaths(i, j)*dt)*Vus(i, j+1));
        VPaths(i, j+1)=VPaths(i, j)*exp((fi-0.5*xi^2)*dt+xi*Vvs(i, j+1)*sqrt(dt));
    end
end
```

9. Υπολογισμός της τιμής του ψηφιακού δικαιώματος για την αντιστάθμιση κινδύνου σύμφωνα με το μοντέλο Hull – White.

```
function [Price, CI]=HWMCAVdigit(S0, V0, K, r, fi, T, xi, NRepl, NSteps)
SPaths=zeros(NRepl, 1+NSteps);
SPaths(:, 1)=S0;
SPaths1=zeros(NRepl, 1+NSteps);
SPaths1(:, 1)=S0;
VPaths=zeros(NRepl, 1+NSteps);
VPaths(:, 1)=V0;
VPaths1=zeros(NRepl, 1+NSteps);
VPaths1(:, 1)=V0;
Payoff1=zeros(NRepl, 1);
Payoff2=zeros(NRepl, 1);
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl, 1+NSteps);
Vvs=randn(NRepl, 1+NSteps);
for i=1:NRepl
    for j=1:NSteps
        SPaths(i, j+1)=SPaths(i, j)*exp((r-
            VPaths(i, j)/2)*dt+sqrt(VPaths(i, j)*dt)*Vus(i, j+1));
        VPaths(i, j+1)=VPaths(i, j)*exp((fi-0.5*xi^2)*dt+xi*Vvs(i, j+1)*sqrt(dt));
        SPaths1(i, j+1)=SPaths1(i, j)*exp((r-VPaths1(i, j)/2)*dt+sqrt(VPaths1(i, j)*dt)*(-
            Vus(i, j+1)));
        VPaths1(i, j+1)=VPaths1(i, j)*exp((fi-0.5*xi^2)*dt+xi*(-Vvs(i, j+1))*sqrt(dt));
    end
    if SPaths(i, 1+NSteps)>K
        Payoff1(i)=1;
    else
        Payoff1(i)=0;
    end
end
```

```

end
if SPaths1(i,1+NSteps)>K
    Payoff2(i)=1;
else
    Payoff2(i)=0;
end
end
DiscPayoff=exp(-r*T)*0.5*(Payoff1+Payoff2);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);

```

10. Υπολογισμός της πρώτης παραγώγου των f_1 και f_2 .

```

function c=f1hedge(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d1 g1
d1=sqrt((rho*zeta*phi*i-b1)^2-zeta*zeta*(2*u1*phi*i-phi*phi));
g1=(b1-rho*zeta*phi*i+d1)/(b1-rho*zeta*phi*i-d1);
c=exp(C1(t,phi)+D1(t,phi).*v+i.*x.*phi).*D1(t,phi);

```

```

function c=f2hedge(phi,x,v,t)
global kappa theta zeta lamda rho
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
global d2 g2
d2=sqrt((rho*zeta*phi*i-b2)^2-zeta*zeta*(2*u2*phi*i-phi*phi));
g2=(b2-rho*zeta*phi*i+d2)/(b2-rho*zeta*phi*i-d2);
c=exp(C2(t,phi)+D2(t,phi).*v+i.*x.*phi).*D2(t,phi);

```

11. Υπολογισμός της μερικής παραγώγου της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς v , Δ_v , σύμφωνα με το μοντέλο Heston για την αντιστάθμιση κινδύνου.

```

function Deltav=Hestonnew1(x)
global kappa theta zeta rho
kappa=x(1);
theta=x(2);
zeta=x(3);
rho=x(4);
global S0 r q K T
global u1 u2 a b1 b2
S0=119.827;
r=0;
q=0;
K=100;
T=0.5;
x0=log(S0);

```

```

v0=0.0099;
u1=0.5;
u2=-0.5;
a=kappa*theta;
b1=kappa-rho*zeta;
b2=kappa;
k=6;
N=2^k;
Iodd=1:2:(N-1);
Ieven=2:2:(N-2);
a=0.0000001;
b=100;
dphi=(b-a)/N;
phi_odd=a+Iodd*dphi;
phi_even=a+Ieven*dphi;
odd_sum1=0;
odd_sum2=0;
even_sum1=0;
even_sum2=0;
for i=1:length(phi_odd)
    odd_sum1=odd_sum1+P1_integrandnew(phi_odd(i),x0,v0,T);
    odd_sum2=odd_sum2+P2_integrandnew(phi_odd(i),x0,v0,T);
end
for i=1:length(phi_even)
    even_sum1=even_sum1+P1_integrandnew(phi_even(i),x0,v0,T);
    even_sum2=even_sum2+P2_integrandnew(phi_even(i),x0,v0,T);
end
sum1=(P1_integrandnew(a,x0,v0,T)+4*odd_sum1+2*even_sum1+P1_integrandnew(
b,x0,v0,T))*dphi/3;
sum2=(P2_integrandnew(a,x0,v0,T)+4*odd_sum2+2*even_sum2+P2_integrandnew(
b,x0,v0,T))*dphi/3;
P1der=sum1./pi;
P2der=sum2./pi;
HD=S0*exp(-q.*T).*P1der-exp(-r.*T).*K.*P2der;
Deltav=HD;

```

12. Προσομοίωση μονοπατιών της τιμής της μετοχής και της μεταβλητότητας σύμφωνα με το μοντέλο του Heston.

```

function
[SPaths,VPaths]=HestonSPaths(S0,V0,r,T,kappa,theta,zeta,rho,NRepl,NSteps)
SPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
VPaths=zeros(NRepl,1+NSteps);
VPaths(:,1)=V0;
dt=T/NSteps;
Vus=randn(NRepl,1+NSteps);
Vvs=randn(NRepl,1+NSteps);
for i=1:NRepl

```



```
for j=1:NSteps
    SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp((r-
    VPaths(i,j)/2)*dt+sqrt(VPaths(i,j)*dt)*Vus(i,j+1));
    VPaths(i,j+1)=VPaths(i,j)+(kappa*(theta-
    VPaths(i,j))*dt+rho*Vus(i,j+1)*zeta*sqrt(VPaths(i,j)*dt)+sqrt(1-
    rho^2)*Vvs(i,j+1)*zeta*sqrt(VPaths(i,j)*dt));
end
end
```