ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

ΣΕΜΣΙΡΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ

“Ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας και προεξοφλημένων καταβαλλόμενων μερισμάτων για το γενικό Μαρκοβιανό μοντέλο κινδύνου με πολλαπλά μερίσματα”

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ Ε.

Αν. Καθηγητής

Τριμελής Επιτροπή:

ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ Ε.

Αν. Καθηγητής

ΒΡΟΝΤΟΣ Σ. Λέκτορας

ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ Μ. Αν. Καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Κλασικό Μοντέλο Θεωρίας Κινδύνου

Όπως αναφέρθηκε η θεωρία κινδύνου εξετάζει την στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος η οποία περιγράφεται από την σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

Στην σχέση αυτή η στοχαστική διαδικασία $S(t)$ περιγράφει το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων και μάλιστα είναι:

$$S(t) = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N(t)}$$

όπου X_i ο i κίνδυνος σε σειρά εμφάνισης.

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου εισάγει κάποιες υποθέσεις τόσο για την στοχαστική διαδικασία $P(t)$ όσο και για την στοχαστική διαδικασία $S(t)$. Συνοπτικά δίνεται ο ακόλουθος ορισμός.

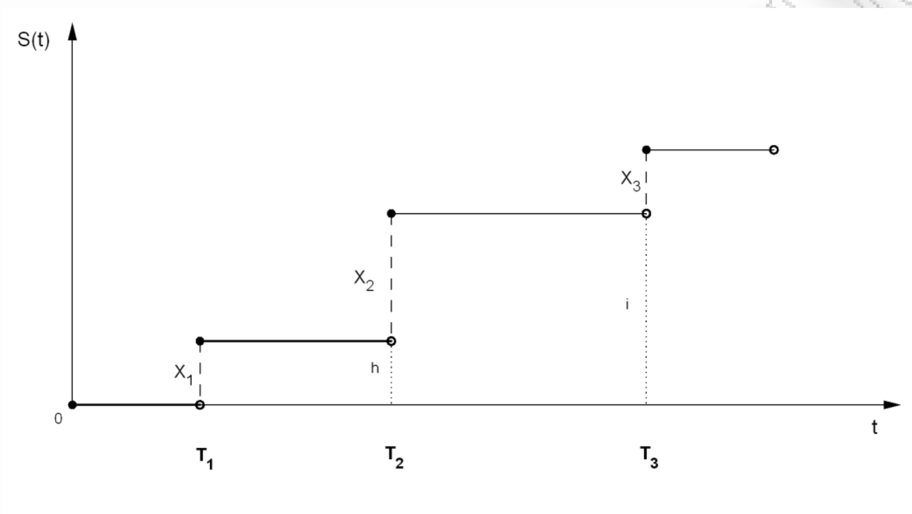
Ορισμός 1.0.1 : Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ορίζει την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος από την σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

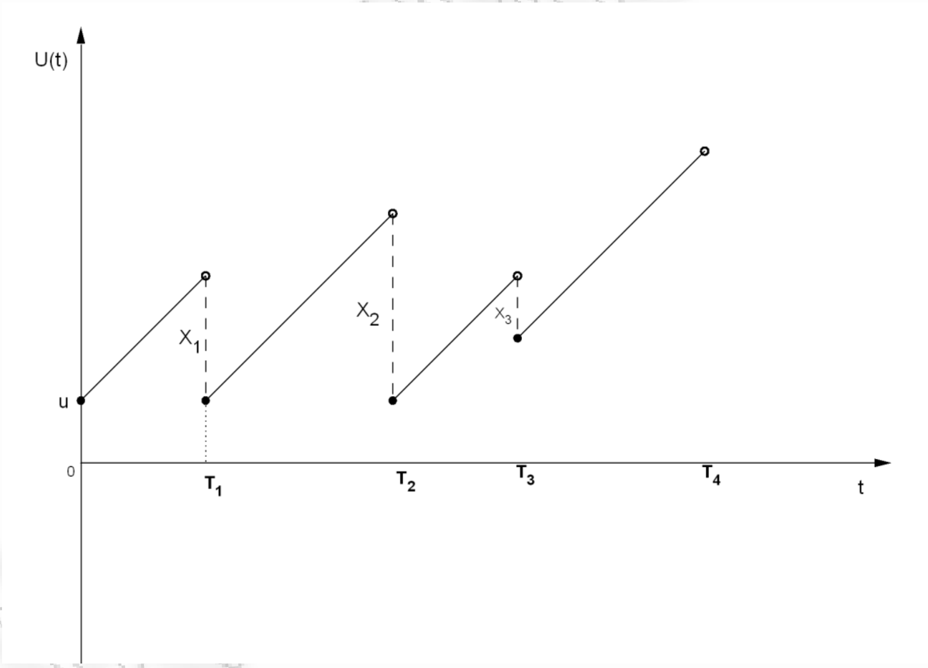
όπου $u = U(0)$ και ισχύουν:

- Η στοχαστική διαδικασία $P(t)$ είναι ντετερμινιστική και μάλιστα $P(t) = c \cdot t$, $c > 0$, δηλαδή τα ασφάλιστρα καταβάλλονται με σταθερό ρυθμό $c > 0$.
- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομα εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ.
- Οι τ.μ. X_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X και συνάρτηση κατανομής F_X.

➢ Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων και τα ύψη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα.



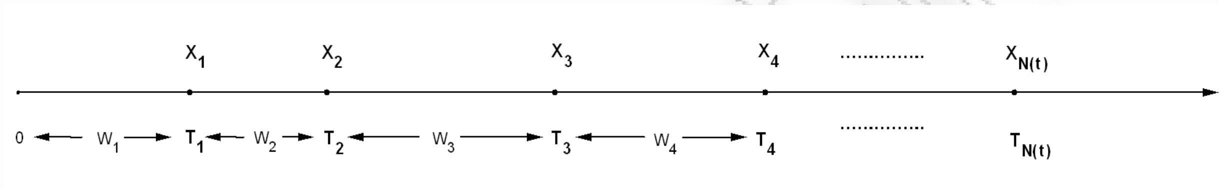
Σχήμα 1.0.1: Γραφική παράσταση της στοχαστικής διαδικασίας S(t)



Σχήμα 1.0.2: Γραφική παράσταση της στοχαστικής διαδικασίας P(t)

1.1 Ο αριθμός των αποζημιώσεων $N(t)$

Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομα εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ. Σχηματικά είναι:



Σχήμα 2.1: Γράφημα των κινδύνων και των χρόνων εμφάνισής τους

όπου T_i, $i=1,2,3,\ldots,N(t)$ οι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων και W_i, $i=1,2,3,\ldots,N(t)$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων, συγκεκριμένα ισχύει:

$$\begin{cases} W_1 = T_1 \\ W_i = T_i - T_{i-1}, \quad \forall i = 2,3,\ldots,N(t) \end{cases}$$

Εφόσον οι τ.μ. W_i είναι ανεξάρτητες με $W_i \sim Exp(\lambda)$, $\forall i=1,2,\ldots,N(t)$ προκύπτει ότι $W_1+W_2+\ldots+W_n \sim G(n,\lambda)$. Προκύπτει λοιπόν:

$$\begin{aligned} \Pr\big(N(t)=\kappa\big) &= \Pr\big(N(t)\le\kappa\big)-\Pr\big(N(t)\le\kappa-1\big)= \\ &= \Pr\big(W_1+W_2+\ldots+W_{\kappa+1}>t\big)-\Pr\big(W_1+W_2+\ldots+W_{\kappa}>t\big)= \\ &= \int_t^\infty \frac{\lambda^{\kappa+1}y^k e^{-\lambda y}}{\kappa!}dy - \int_t^\infty \frac{\lambda^{\kappa}y^{k-1}e^{-\lambda y}}{(\kappa-1)!}dy = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{\nu=0}^{\kappa}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} - e^{-\lambda t}\sum_{\nu=0}^{\kappa-1}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} \Rightarrow \boxed{N(t)\sim P(\lambda t)} \end{aligned}$$

δηλαδή σύμφωνα με την κλασική θεωρία κινδύνου ο αριθμός των κινδύνων που εμφανίζονται στο διάστημα $[0,t]$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

1.2 Περιθώριο Ασφάλειας θ

Όσον αφορά τα ασφάλιστρα όπως έχει αναφερθεί στο κλασικό μοντέλο θεωρείται ότι καταβάλλονται με έναν σταθερό αριθμό $c>0$. Μία αρχική απαίτηση που προκύπτει είναι:

$$c\cdot t \geq E\left(S(t)\right) \Leftrightarrow c\cdot t \geq E\left(\mathrm{X}\right)\cdot E\left(N(t)\right)$$

επειδή όμως $N(t) \sim P(\lambda t)$ είναι:

$$c\cdot t \geq E\left(S(t)\right) \Leftrightarrow c\cdot t \geq E\left(\mathrm{X}\right)\cdot \lambda \cdot t \Leftrightarrow c \geq \lambda \cdot E\left(X\right)$$

Επομένως $\boxed{c=\left(1+\theta\right)\cdot \lambda \cdot E\left(X\right)}$ όπου $\theta \geq 0$. Ο αριθμός θ καλείται περιθώριο ασφάλειας.

1.3 Πιθανότητα Χρεωκοπίας

Έστω T η χρονική στιγμή κατά την οποία η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος «πέφτει» για πρώτη φορά κάτω από το μηδέν, δηλαδή:

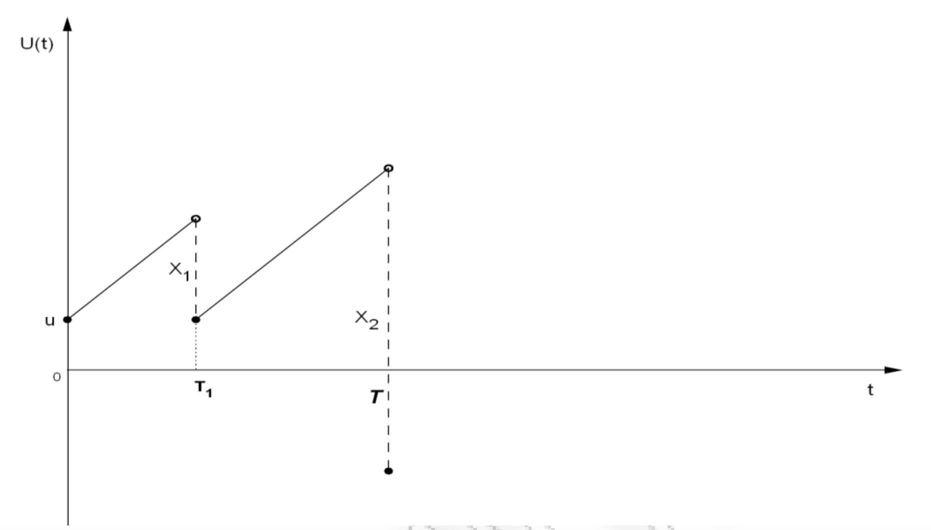
$$T=\inf\{t \,/\, t\geq 0, U(t)<0, U(0)=u\}$$

Η στιγμή T καλείται χρόνος χρεωκοπίας και εξ' ορισμού μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος, στην περίπτωση που ο χρόνος της χρεωκοπίας είναι άπειρος ουσιαστικά αυτό σημαίνει ότι δεν επέρχεται χρεωκοπία.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι μια σημαντική ποσότητα στην θεωρία κινδύνου είναι η πιθανότητα να επέλθει χρεωκοπία η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.3.1 : Δεδομένου ότι το αρχικό απόθεμα είναι u η πιθανότητα χρεωκοπίας συμβολίζεται με $\psi\left(u\right)$ και εκφράζει την πιθανότητα η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος να πέσει κάτω από το «μηδέν». Η πιθανότητα χρεωκοπίας ορίζεται από την σχέση:

$$\psi(u) = \Pr\left(T < \infty / U(0) = u\right)$$



Σχήμα 1.3.1: Χρόνος Χρεωκοπίας

Υπό τις προϋποθέσεις του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος προκύπτει η σχέση:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, f_X(x)dxdt$$

Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή ως προς u προκύπτει:

$$\boxed{\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)\, f_X(x)dx - \overline{F}(u)\right)}$$

Η τελευταία σχέση καλείται ολοκληρωδιαφορική της πιθανότητας χρεωκοπίας.

1.4 Συντελεστής Προσαρμογής

Έστω η εξίσωση $1+(1+\theta)\cdot E(X)\cdot r = M_x(r)$, η οποία καλείται εξίσωση Lundberg, με την προϋπόθεση ότι η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$.

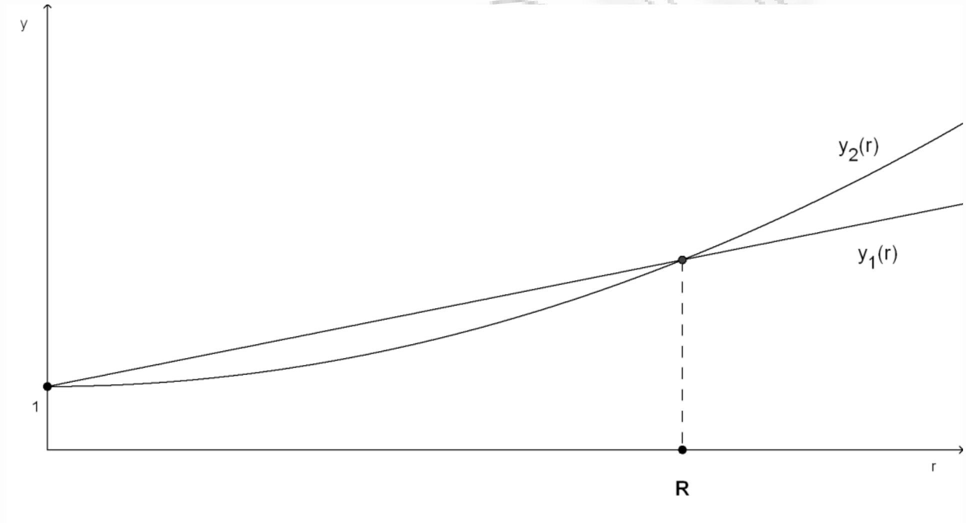
Αρχικά το ερώτημα που προκύπτει είναι αν η εξίσωση αυτή έχει θετικές ρίζες. Μία γραφική απόδειξη του παραπάνω ερωτήματος προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τα ακόλουθα:

Έστω $y_1(r) = 1 + (1+\theta)\cdot E(X)\cdot r$ και $y_2(r) = M_X(r)$ τότε είναι $y'_1(r) = (1+\theta)\cdot E(X) > 0$,

$y'_2(r) = E\left(Xe^{rX}\right) > 0$ και $y'_2(r) = E\left(Xe^{rX}\right) > 0$

Δηλαδή η συνάρτηση y_1 είναι γραμμική με θετική κλίση ενώ η συνάρτηση y_2 είναι φθίνουσα και κυρτή.

Λαμβάνοντας ακόμα υπόψη ότι $y'_2(0) = E(X) < y'_1(0) = (1+\theta)\cdot E(X)$ προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Σχήμα 1.4.1: Συντελεστής Προσαρμογής

<u>**Ορισμός 1.4.1**</u> : Έστω $R > 0$ η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$1 + (1+\theta)\cdot E(X)\cdot r = M_x(r)$$

Η ρίζα αυτή καλείται συντελεστής προσαρμογής.

Εναλλακτική μορφή της παραπάνω εξίσωσης είναι η $\lambda + c\cdot r = \lambda\cdot M_X(r)$.

1.5 Υπολογισμός του $\psi(0)$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεωκοπίας, δεδομένου ότι το αρχικό απόθεμα είναι μηδενικό, γίνεται χρήση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης οπότε είναι:

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\psi(u)-\int_0^u \psi(u-x)\, f_X(x)dx-\overline{F}(u)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \psi'(u)\,du=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)\,du-\int_0^\infty\int_0^u \psi(u-x)\, f_X(x)dxdu-\int_0^\infty \overline{F}(u)du\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)\,du-\int_0^\infty f_X(x)\int_x^\infty \psi(u-x)\,dudx-E(X)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)\,du-\int_0^\infty f_X(x)\int_0^\infty \psi(u)\,dudx-E(X)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)\,du-\int_0^\infty \psi(u)\,du\,\cancelto{1}{\int_0^\infty f_X(x)dx}-E(X)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\psi(0)=-\frac{\lambda}{c}E(X)\Rightarrow \psi(0)=\frac{\lambda}{(1+\theta)\cdot\lambda\cdot E(X)}E(X)\Rightarrow \boxed{\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}}$$

1.6 Ολοκληρωτική εξίσωση της πιθανότητας χρεωκοπίας

Ξεκινώντας από την ολοκληρωδιαφορική εξίσωση της πιθανότητας χρεωκοπίας και ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\psi(u)-\int_0^u \psi(u-x)\, f_X(x)dx-\overline{F}(u)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^u \psi'(t)\,dt=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(t)\,dt-\int_0^u\int_0^t \psi(t-x)\, f_X(x)dxdt-\int_0^u \overline{F}(t)dt\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(u)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-t)\,dt-\int_0^u \psi(u-t)F(t)\,dt-\int_0^u \overline{F}(t)dt\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(u)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-t)\overline{F}(t)\,dt-\int_0^u \overline{F}(t)dt\right)\overset{\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}(t)dt}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-t)\overline{F}(t)\,dt-\int_u^\infty \overline{F}(t)dt\right)}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{\lambda}{c}=\frac{\psi(0)}{E(X)}$ προκύπτει η ισοδύναμη μορφή:

$$\psi(u)=\psi(0)\left(\int_0^u \psi(u-t)\,f_e(t)\,dt-\int_u^\infty f_e(t)dt\right)\Rightarrow \boxed{\psi(u)=\psi(0)\left(\int_0^u \psi(u-t)\,f_e(t)\,dt-\overline{F}_e(u)\right)}$$

όπου $f_e(x)=\frac{\overline{F}(x)}{E(X)}$ η οποία προφανώς είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και ονομάζεται συνάρτηση ισορροπίας.

1.7 Η πιθανότητα χρεωκοπίας ως συνάρτηση επιβίωσης μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην τελευταία ολοκληρωδιαφορική εξίσωση προκύπτει:

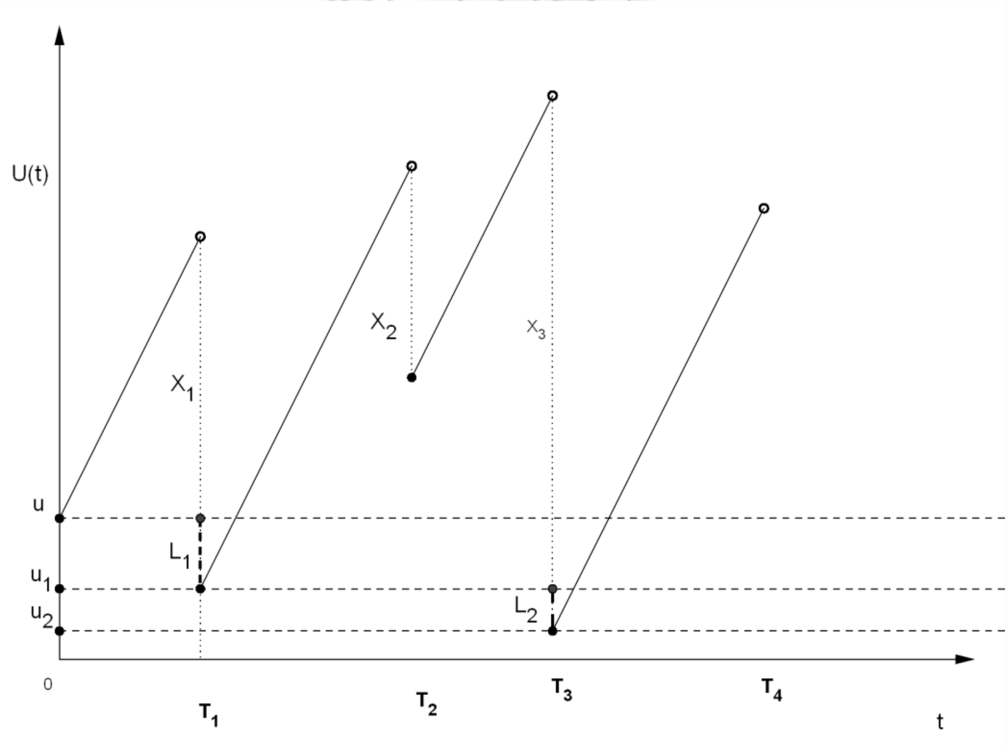
$$\psi(s)=\frac{1}{1+\theta}\psi(s)\,f_e(s)+\frac{1}{1+\theta}\overline{F}_e(s)\Rightarrow \psi(s)=\frac{\frac{1}{1+\theta}\overline{F}_e(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}f_e(s)}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\psi(u)=\Pr(L>u)$ όπου $L=L_1+L_2+\ldots+L_N$ με $N\sim G\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$ και $f_L=f_e=\frac{\overline{F}}{E(X)}$.

Γεωμετρικά η παραπάνω σχέση γίνεται αντιληπτή λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\Pr\left(\inf\{t / t \geq 0, U(t) < u\} < \infty\right) = \Pr\left(\inf\{t / t \geq 0, u + ct - S(t) < u\} < \infty\right) =$$
$$= \Pr\left(\inf\{t / t \geq 0, ct - S(t) < 0\} < \infty\right) = \psi\left(0\right) = \frac{1}{1+\theta}$$

Δηλαδή ξεκινώντας με αρχικό απόθεμα u, τότε με πιθανότητα $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ η στοχαστική διαδικασία $U(t)$ «πέφτει» κάτω από το u ενώ με πιθανότητα $1-\psi\left(0\right) = \frac{\theta}{1+\theta}$ παραμένει πάνω από το αρχικό απόθεμα. Κάθε φορά που η στοχαστική διαδικασία $U(t)$ «πέφτει» κάτω από το u ανανεώνεται και με ένα νέο αρχικό απόθεμα $u_1 < u$ επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία. Συμπερασματικά λοιπόν η τ.μ. N απαριθμεί το πλήθος των φορών που η $U(t)$ πέφτει κάτω από το ελάχιστο πλεόνασμα που έχει διαμορφωθεί μέχρι την στιγμή t. Όπως είναι φυσικό η έλευση ενός κινδύνου που δεν ρίχνει την στοχαστική διαδικασία κάτω από το ελάχιστο $U(t)$ δεν καταγράφεται από την τ.μ. N.



Οι καταγεγραμμένες πτώσεις εκφράζονται από τις τ.μ. $L_i, i = 1, 2, ..., N$ και εκφράζουν την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την ελάχιστη τιμή του $U(t)$ κάθε φορά που συμβαίνει ένας αρκετά μεγάλος κίνδυνος. Είναι προφανές τώρα ότι η τ.μ. L για την οποία $L = L_1 + L_2 + ... + L_N$ εκφράζει την μέγιστη σωρευτική απώλεια, δηλαδή την συνολική πτώση της στοχαστικής διαδικασίας $U(t)$. Όταν η σωρευτική απώλεια είναι μεγαλύτερη από το αρχικό απόθεμα τότε επέρχεται και η χρεωκοπία.

1.8 Συνάρτηση Gerber-Shiu

Στην διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου συν τοις άλλοις ενδιαφέρουν και οι εξής ποσότητες:

- Η κατανομή του χρόνου χρεωκοπίας T.
- Η κατανομή του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεωκοπία $U(T-)$
- Η κατανομή του ελλείμματος $|U(T)|$ την στιγμή της χρεωκοπίας.

Έστω $f(x,y,t/u)$ η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. $U(T-)$, $|U(T)|$ και T δεδομένου ότι το αρχικό απόθεμα είναι u. Η συγκεκριμένη σ.π.π. καλείται «ελαττωματική» εφόσον το παρακάτω ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει απαραίτητα στην μονάδα:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y,t/u)\,dxdydt = \psi(u) \le 1$$

Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ότι η τ.μ. T είναι μία «ελαττωματική» τυχαία μεταβλητή εφόσον έχει μάζα πιθανότητα στο ∞.

<u>**Ορισμός 1.8.1**</u> : Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ορίζεται ως:

$$\varphi_\delta(u) = E\left(e^{-\delta T} \cdot w\big(U(T-),|U(T)|\big) \cdot I(T<\infty) / U(0) = u\right)$$

όπου η συνάρτηση $w(x,y)$ είναι μία μη αρνητική συνάρτηση η οποία ονομάζεται συνάρτηση ποινής.

1.9 Ολοκληρωδιαφορική Εξίσωση της συνάρτησης Gerber-Shiu

Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος προκύπτει ότι:

$$\varphi_\delta(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct} f_X(x)e^{-\delta t}\varphi_\delta(u+ct-x)dx+\int_{u+ct}^\infty f_X(x)e^{-\delta t}w(u+ct,x-u+ct)dx\right)dt$$

Παραγωγίζοντας ως προς u και θεωρώντας $\gamma(s)=\int_s^\infty w(s,x-s)f_X(x)dx$ προκύπτει:

$$\boxed{c\cdot\varphi'_\delta(u)=\lambda\left(\frac{\lambda+\delta}{\lambda}\varphi_\delta(u)-\gamma(u)-\int_0^u\varphi_\delta(u-x)f_X(x)dx\right)}$$

Ανάλογα με την πιθανότητα χρεωκοπίας λαμβάνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$c\left(s\cdot\varphi_\delta(s)-\varphi_\delta(0)\right)=(\lambda+\delta)\cdot\varphi_\delta(s)-\lambda\cdot\gamma(s)-\lambda\cdot\varphi_\delta(s)f_X(s)$$

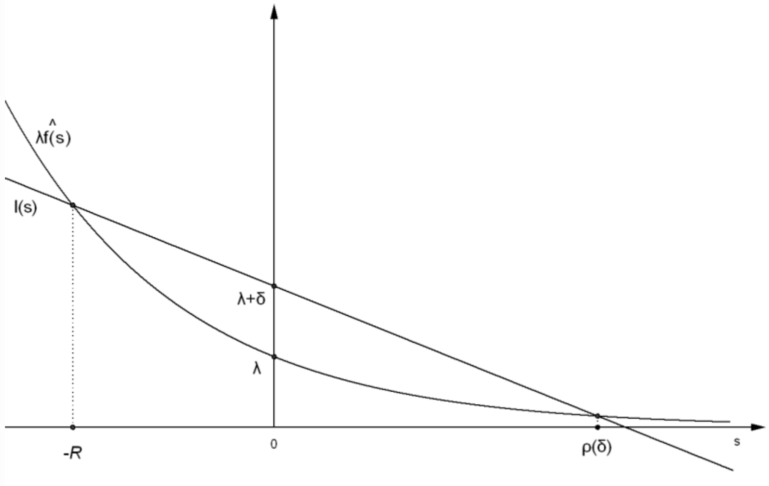
Οπότε:

$$\varphi_\delta(s)=\frac{c\cdot\varphi_\delta(0)-\lambda\cdot\gamma(s)}{c\cdot s-\lambda-\delta+\lambda\cdot f_X(s)}$$

Εφόσον η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ είναι φραγμένη θα πρέπει $\varphi_\delta(s)<\infty$, από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι οι ρίζες του παρονομαστή της παραπάνω σχέσης θα πρέπει να είναι ρίζες και του αριθμητή.

1.10 Γενικευμένη Εξίσωση Lundberg

Η εξίσωση $c\cdot s-\lambda-\delta+\lambda\cdot f_X(s)=0$ καλείται γενικευμένη εξίσωση Lundberg και γράφεται ισοδύναμα $(\lambda+\delta)+c\cdot s=M_X(s)$. Προφανώς για $\delta=0$ ανάγεται στην εξίσωση Lundberg.



Σχήμα 1.10.1: Οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg

Έστω $l(s)=\lambda+\delta-c\cdot s$ τότε η γενικευμένη εξίσωση Lundberg γράφεται $l(s)=\lambda f_X(s)$ και η μοναδική θετική ρίζα συμβολίζεται με $\rho(\delta)$.

1.11 Ολοκληρωτική Εξίσωση της συνάρτησης Gerber-Shiu

Από τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu και λαμβάνοντας υπόψη την θετική ρίζα $\rho(\delta)$ της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, προκύπτει:

$$\varphi_\delta(s)=\frac{c\cdot\varphi_\delta(0)-\lambda\cdot\gamma(s)}{c\cdot s-\lambda-\delta+\lambda\cdot f_X(s)}\Rightarrow\varphi_\delta(s)=\frac{\left(c\cdot\varphi_\delta(0)-\lambda\cdot\gamma(s)\right)-\left(c\cdot\varphi_\delta(0)-\lambda\cdot\gamma(\rho)\right)}{\left(c\cdot s-\lambda-\delta+\lambda\cdot f_X(s)\right)-\left(c\cdot\rho-\lambda-\delta+\lambda\cdot f_X(\rho)\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_\delta(s)=\frac{\lambda\left(\gamma(\rho)-\gamma(s)\right)}{c(s-\rho)-\lambda\left(f_X(\rho)-f_X(s)\right)}\Rightarrow\varphi_\delta(s)=\frac{\lambda\dfrac{\gamma(\rho)-\gamma(s)}{s-\rho}}{c-\lambda\dfrac{f_X(\rho)-f_X(s)}{s-\rho}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_\delta(s)=\frac{\lambda T_\rho\gamma(s)}{c-\lambda T_\rho f_X(s)}$$

όπου $T_r f(x)=\int_x^\infty e^{-r(y-x)}f(y)dy$ (Τελεστής Dickson-Hipp).

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$c\varphi_\delta(s)=\lambda\varphi_\delta(s)T_\rho f_X(s)+\lambda T_\rho\gamma(s)\Rightarrow\boxed{c\varphi_\delta(u)=\lambda\int_0^u\varphi_\delta(u-x)T_\rho f_X(x)dx+\lambda T_\rho\gamma(u)}$$

Θέτοντας $\begin{cases} z(x)=\dfrac{\lambda}{c}T_\rho f_X(x) \text{ και } \displaystyle\int_0^\infty z(x)dx=\frac{1}{1+\xi_\delta} \\ G(u)=\dfrac{\int_0^u z(x)dx}{\int_0^\infty z(x)dx} \text{ και } g(u)=\dfrac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx} \\ H_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\dfrac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)\end{cases}$ προκύπτει:

$$\boxed{\varphi_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u\varphi_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u),\ u\geq 0}$$

1.12 Επίλυση της Ολοκληρωτικής Εξίσωσης της συνάρτησης Gerber-Shiu

Στόχος είναι να λυθεί η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση των Gerber-Shiu. Για να επιτευχθεί αυτό χρήσιμη είναι η ακόλουθη πρόταση:

<u>Πρόταση 1.12.1</u> : Έστω $0<\varphi<1$ και F συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που ορίζεται στο $[0,+\infty)$ με $F(0)=0$.

Έστω $m(x)=\varphi\int_0^x m(x-y)dF(y)+r(x),\ x\geq 0$ όπου $r(x)$ γενικά είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, τότε ισχύει:

$$m(x)=\frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{\infty} r(x-y)dG(y)+r(x)$$

όπου $\overline{G}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n\overline{F^{*n}}(x)$.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση προκύπτει:

$$\boxed{\varphi_\delta(u)=\frac{1}{\xi_\delta}\int_{0^+}^{u} H_\delta(u-x)dK_\delta(x)+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u),\ u\geq 0}$$

όπου $\overline{K_\delta}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n\overline{G_\delta^{*n}}(u)$ με $\varphi=\dfrac{1}{1+\xi_\delta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Μαρκοβιανό Μοντέλο Θεωρίας Κινδύνου χωρίς καταβολή μερισμάτων

Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι εκθετικά κατανεμημένοι και οι κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι.

Στο μαρκοβιανό μοντέλο τοποθετείται ένα ευρύτερα στοχαστικό περιβάλλον σύμφωνα με το οποίο μια στοχαστική διαδικασία $\{J(t)/t \geq 0\}$, η οποία είναι ομογενής και αδιαχώριστη, προσδιορίζει το κλίμα μέσα στο οποίο συμβαίνουν οι κίνδυνοι.

<u>Ορισμός 2.0.1</u>: Η διαδικασία $J(t)$ στα πλαίσια της θεωρίας κινδύνου ορίζεται ως η στοχαστική διαδικασία που έχει χώρο καταστάσεων $E = \{1,2,3,...,m\}$ και οι πιθανότητες της αρχικής κατάστασης δίνονται από το διάνυσμα $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3, ..., a_m\right)^T$. Επίσης ο πίνακας τάσεων της διαδικασίας ορίζεται ως $D = D_0 + D_1$, όπου:

- $D_0(i, j) \geq 0$ για $i \neq j$ είναι η τάση μετάβασης από την κατάσταση i στην j δοθέντος ότι δεν επέρχεται κάποιος κίνδυνος.
- $D_1(i, j) \geq 0$ είναι η τάση μετάβασης από την κατάσταση i στην j δοθέντος ότι επέρχεται κάποιος κίνδυνος.

- Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα D_0 προσδιορίζονται από την σχέση $\sum_{j=1}^{m} D(i,j)=0$, επομένως $D_0(i,i)\le 0$.

Όπως αναφέρθηκε η διαδικασία $J(t)$ εισάγει ένα ευρύτερο περιβάλλον στο μοντέλο και ως εκ τούτου επόμενο είναι το ύψος των κινδύνων να καθορίζεται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα.

<u>Ορισμός 2.0.2.</u>: Το ύψος των κινδύνων $\{X_n, n=1,2,3,...\}$ στο μαρκοβιανό μοντέλο περιγράφεται από την συνάρτηση κατανομής $F_{i,j}$ η οποία καθορίζεται από την κατάσταση i της διαδικασίας κατά την οποία επέρχεται ο κίνδυνος και την κατάσταση j αμέσως μετά την εμφάνιση του κινδύνου. Η σ.π.π. συμβολίζεται με $f_{i,j}$ ενώ ο μετασχηματισμός Laplace με $f_{i,s}(s)$

2.1 Η συνάρτηση $\varphi(u)$

Σύμφωνα με το μαρκοβιανό μοντέλο η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος ότι αρχίζουμε από την κατάσταση $i\in E$ ορίζεται ως:

$$\varphi_i(u)=E_i\left(e^{-\delta T}\cdot w\left(U(T-),\left|U(T)\right|\right)\cdot I(T<\infty)/U(0)=u\right)$$

όπου η συνάρτηση $w(x,y)$ είναι η συνάρτηση ποινής και u το αρχικό απόθεμα.

Λαμβάνοντας υπόψη το διάνυσμα $\vec{a}$ με τις πιθανότητες της αρχικής κατάστασης και θέτοντας $\vec{\varphi}(u)=\left(\varphi_1(u),\varphi_2(u),...,\varphi_m(u)\right)^T$ προκύπτει ότι:

$$\varphi(u)=\vec{a}^T\vec{\varphi}(u)$$

όπου $\varphi(u)$ η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

2.2 Ολοκληρωδιαφορική εξίσωσης της $\varphi_i(u)$

Θεώρημα 2.2.1: Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος ότι αρχίζουμε από την κατάσταση $i \in E$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$c\varphi_i'(u) = \delta\varphi_i(u) - \sum_{j=1}^{m} D_0(i,j)\varphi_j(u) - \sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\left(\int_0^u \varphi_j(u-x)dF_{i,j}(x) + \omega_{i,j}(u)\right)$$

όπου c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων, δ η ένταση ανατοκισμού και

$$\omega_{i,j}(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)dF_{i,j}(x).$$

Απόδειξη

Δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i και ξεκινάμε με ένα αρχικό απόθεμα u την χρονική στιγμή 0, τότε στο χρονικό διάστημα $[0,h]$ μπορούν να συμβούν τα εξής:

- Να παραμείνουμε στην κατάσταση i και να μην εμφανιστεί κίνδυνος με πιθανότητα $1 + D_0(i,i)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση $j \neq i$ χωρίς την εμφάνιση κινδύνου με πιθανότητα $D_0(i,j)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j και να εμφανιστεί στο διάστημα αυτό ένας κίνδυνος με σ.κ. $F_{i,j}$ με πιθανότητα $D_1(i,j)$
- Να συμβεί οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο με πιθανότητα $o(h)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$\varphi_i(u) = \left(1 + D_0(i,i)\cdot h\right)e^{-\delta h}\varphi_i(u+ch) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot he^{-\delta h}\varphi_j(u+ch) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot he^{-\delta h}\left(\int_0^{u+ch}\varphi_j(u+ch-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u+ch}^\infty w(u+ch, x-u-ch)dF_{i,j}(x)\right) + o(h)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^{-\delta h} = 1 - \delta h + o(h)$ προκύπτει:

$$\varphi_i(u) = \big(1 + D_0(i,i)\cdot h\big)\big(1 - \delta h + o(h)\big)\varphi_i(u+ch) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot h\big(1 - \delta h + o(h)\big)\varphi_j(u+ch) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot h\big(1 - \delta h + o(h)\big)\left(\int_0^{u+ch}\varphi_j(u+ch-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u+ch}^{\infty} w(u+ch, x-u-ch)dF_{i,j}(x)\right) +$$

$$+o(h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_i(u) = \big(1 + D_0(i,i)\cdot h - \delta h\big)\varphi_i(u+ch) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot h\cdot \varphi_j(u+ch) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot h\cdot\left(\int_0^{u+ch}\varphi_j(u+ch-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u+ch}^{\infty} w(u+ch, x-u-ch)dF_{i,j}(x)\right) + o(h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_i(u) - \varphi_i(u+ch) = \big(D_0(i,i)\cdot h - \delta h\big)\varphi_i(u+ch) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot h\cdot \varphi_j(u+ch) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot h\cdot\left(\int_0^{u+ch}\varphi_j(u+ch-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u+ch}^{\infty} w(u+ch, x-u-ch)dF_{i,j}(x)\right) + o(h)$$

Διαιρώντας με h και λαμβάνοντας $h \to 0$ προκύπτει:

$$\frac{\varphi_i(u) - \varphi_i(u+ch)}{h} = \big(D_0(i,i) - \delta\big)\varphi_i(u+ch) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot \varphi_j(u+ch) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot\left(\int_0^{u+ch}\varphi_j(u+ch-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u+ch}^{\infty} w(u+ch, x-u-ch)dF_{i,j}(x)\right) + \frac{o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$\overset{h\to 0}{\Rightarrow} -c\varphi_i'(u) = \big(D_0(i,i) - \delta\big)\varphi_i(u) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot \varphi_j(u) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot\left(\int_0^{u}\varphi_j(u-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u}^{\infty} w(u, x-u)dF_{i,j}(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\varphi_i'(u) = \delta\varphi_i(u) - \sum_{j=1}^{m} D_0(i,j)\cdot\varphi_j(u) - \sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot\left(\int_0^{u}\varphi_j(u-x)dF_{i,j}(x) + \int_{u}^{\infty} w(u, x-u)dF_{i,j}(x)\right)$$

Θέτοντας $\omega_{i,j}(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)dF_{i,j}(x)$ προκύπτει το ζητούμενο.

2.3 Αναλυτική έκφραση της $\varphi_i(u)$

Για να βρούμε τις αναλυτικές εκφράσεις των ποσοτήτων $\varphi_i(u)$, $i \in E$ εργαζόμαστε από κοινού κάνοντας χρήση των πινάκων.

Συγκεκριμένα αν $\vec{\varphi}(u) = \left(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)\right)^T$ τότε η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση γράφεται:

$$c\vec{\varphi}'(u) = \delta\vec{\varphi}(u) - D_0\vec{\varphi}(u) - \int_0^u \Lambda_f(x)\vec{\varphi}(u-x)dx - \vec{\zeta}(u)$$

όπου $\Lambda_f(x)$ είναι ο πίνακας ο οποίος στην θέση (i,j) περιέχει το στοιχείο $D_1(i,j)\cdot f_{i,j}(x)$ ενώ το διάνυσμα $\vec{\zeta}(u)$ είναι ένας πίνακας στήλη με $\zeta_i(u) = \sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\cdot \omega_{i,j}(u)$.

Η παραπάνω ολοκληρωδιαφορική εξίσωση είναι μη ομογενής εξαιτίας του όρου $\vec{\zeta}(u)$. Θεωρούμε λοιπόν αρχικά την αντίστοιχη ολοκληρωδιαφορική εξίσωση, δηλαδή την:

$$c\vec{\varphi}'(u) = \delta\vec{\varphi}(u) - D_0\vec{\varphi}(u) - \int_0^u \Lambda_f(x)\vec{\varphi}(u-x)dx$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στο πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\int_0^\infty e^{-su}c\vec{\varphi}'(u)du = c\int_0^\infty e^{-su}\vec{\varphi}'(u)du = c\left[e^{-su}\vec{\varphi}(u)\right]_0^\infty + cs\int_0^\infty e^{-su}\vec{\varphi}(u)du = -c\vec{\varphi}(0) + csL_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]$$

όπου $L_s(\cdot)$ ο μετασχηματισμός Laplace.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\int_0^\infty e^{-su}\left(\delta\vec{\varphi}(u)-D_0\vec{\varphi}(u)-\int_0^u \Lambda_f(x)\vec{\varphi}(u-x)dx\right)du=\delta\int_0^\infty e^{-su}\vec{\varphi}(u)du-D_0\int_0^\infty e^{-su}\vec{\varphi}(u)du-$$

$$-\int_0^\infty e^{-su}\int_0^u \Lambda_f(x)\vec{\varphi}(u-x)dxdu=\delta L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]-D_0L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]-\Lambda_f(s)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=$$

$$=\left(\delta I-D_0\right)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]-\Lambda_f(s)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακάς.

Τελικά προκύπτει:

$$-c\vec{\varphi}(0)+csL_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\left(\delta I-D_0\right)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]-\Lambda_f(s)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(csI-\delta I+D_0+\Lambda_f(s)\right)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=c\vec{\varphi}(0)\Leftrightarrow\left[\left(cs-\delta\right)I+D_0+\Lambda_f(s)\right]L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=c\vec{\varphi}(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\vec{\varphi}(0)}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\vec{\varphi}(0)$$

Οπότε παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$\vec{\varphi}(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}\vec{\varphi}(0)$$

Θέτοντας $v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ έχουμε ότι:

$$\boxed{\vec{\varphi}(u)=v(u)\vec{\varphi}(0)\quad,\quad u\geq 0}$$

Από την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι για $u=0$, $v(0)=I$.

Στα προηγούμενα επετεύχθη η επίλυση μέσω μετασχηματισμών Laplace της αντίστοιχης ομογενής ολοκληρωδιαφορικής εξίσωσης. Για την επίλυση στην μη ομογενή περίπτωση εργαζόμαστε ανάλογα λαμβάνοντας υπόψη τον μη ομογενή όρο, οπότε είναι:

$$\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\left[\left(s-\dfrac{\delta}{c}\right)I+\dfrac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\left(\vec{\varphi}(0)-\dfrac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\right)\\ v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\dfrac{\delta}{c}\right)I+\dfrac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=L_s\left[v(u)\right]\left(\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\right)\Rightarrow L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=L_s\left[v(u)\vec{\varphi}(0)\right]-\frac{1}{c}L_s\left[v(u)\right]L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία σχέση καταλήγουμε:

$$\boxed{\vec{\varphi}(u)=v(u)\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}\int_0^u v(u-t)\vec{\zeta}(t)dt\ \ ,\ \ u\geq 0}$$

2.4 Υπολογισμός του $\vec{\varphi}(0)$

Όπως ορίζεται στους Albrecher & Boxma (2005) η γενικευμένη εξίσωση Lundberg δίνεται από την σχέση:

$$Det\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]=0\Leftrightarrow Det\left[L_c(s)\right]=0$$

όπου $L_c(s)=\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)$.

Ακολουθώντας λοιπόν την διαδικασία των Shuanming Li & Yi Lu (2008) προκύπτει:

$$\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(s)L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\Leftrightarrow L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=A^{-1}(s)\left(\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]=\frac{A^*(s)\vec{\varphi}(0)-A^*(s)\frac{1}{c}L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]}{Det\left[A(s)\right]}}$$

όπου $A(s)=\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]$ και $A^*(s)$ ο προσαρτημένος πίνακας του $A(s)$.

Στην τελευταία σχέση ο παρονομαστής είναι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg που όπως αποδεικνύεται στους Albrecher & Boxma (2005) η εξίσωση αυτή έχει m μιγαδικές ρίζες $\rho_i, i=1,2,...,m$ με $\mathrm{Re}(\rho_i)>0, i=1,2,...,m$.

Παρατηρούμε ότι $L_s\left[\vec{\varphi}(u)\right]<\infty$ για $\mathrm{Re}(s)>0$ οπότε για τις μιγαδικές ρίζες τις εξίσωσης Lundberg πρέπει να ισχύει:

$$A^*(\rho_i)\vec{\varphi}(0)-A^*(\rho_i)\frac{1}{c}L_{\rho_i}\left[\vec{\sigma}(u)\right]=0 \text{ για } i=1,2,...,m$$

Χρησιμοποιώντας τις διαιρεμένες διαφορές πινάκων μπορούμε αναδρομικά να δούμε ότι:

$$\boxed{\vec{\varphi}(0)=\frac{1}{c}\left\{A^*\left[\rho_1,\rho_2,...,\rho_m\right]\right\}^{-1}\left(A^*\vec{\zeta}\right)\left[\rho_1,\rho_2,...,\rho_m\right]}$$

όπου $\vec{\zeta}(s)=L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]$ και $\left(A^*\vec{\zeta}\right)\left[\rho_1,\rho_2,...,\rho_m\right]=\sum_{i=1}^{m}A^*\left[\rho_1,\rho_2,...,\rho_i\right]\vec{\zeta}\left[\rho_i,\rho_{i+1},...,\rho_m\right]$.

Μία άλλη μέθοδος υπολογισμού των αρχικών ποσοτήτων $\vec{\varphi}(0)$, σύμφωνα με τον Badescu (2008) είναι μέσω των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $L_c(s)$ για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του $\rho_i, i=1,2,...,n$.

Ειδικότερα αν $q_i=\left(q_{i,1},q_{i,2},...,q_{i,m}\right)$, $i=1,2,...,m$, προκύπτει:

$$q_i \cdot \left[\left(\rho_i - \frac{\delta}{c}\right) I + \frac{1}{c}\left(D_0 + \Lambda_f(\rho_i)\right)\right] L_{\rho_i}\left[\vec{\varphi}(u)\right] = q_i \cdot \vec{\varphi}(0) - \frac{1}{c} q_i \cdot L_{\rho_i}\left[\vec{\zeta}(u)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = q_i \cdot \vec{\varphi}(0) - \frac{1}{c} q_i \cdot \vec{\zeta}(\rho_i) \Rightarrow q_i \cdot \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c} q_i \cdot \vec{\zeta}(\rho_i) \Rightarrow \boxed{q_i \cdot \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_i)}$$

Υπό την μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται

$$Q \cdot \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} q_{1,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_1) \\ \sum_{j=1}^{m} q_{2,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{m} q_{m,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_m) \end{bmatrix} \Rightarrow Q \cdot \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}\begin{bmatrix} q_{1,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_1) \\ q_{2,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{m,j} \cdot \vec{\zeta_j}(\rho_m) \end{bmatrix} \Rightarrow Q \cdot \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m} R_j \cdot Q_{e_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m} Q^{-1} R_j \cdot Q_{e_j} \Rightarrow \boxed{\vec{\varphi}(0) = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{m} Q^{-1} R_i \cdot Q_{e_i}}$$

όπου $Q = \left(q_1^T, q_2^T, ..., q_m^T\right)^T$, $R_j = diag\left(\vec{\zeta_j}(\rho_1), \vec{\zeta_j}(\rho_2), ..., \vec{\zeta_j}(\rho_m)\right)$, $j = 1, 2, ..., m$ και Q_{e_j} η j στήλη του πίνακα Q.

2.5 Αναλυτική έκφραση της πιθανότητας χρεοκοπίας

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεωκοπίας $\psi_i(u)$ γίνεται χρήση της ολοκληρωδιαφορικής εξίσωσης οπότε είναι:

$$\boxed{c\psi_i\,'(u) = -\sum_{j=1}^{n} D_0(i,j)\psi_j(u) - \sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\left(\int_0^u \psi_j(u-x)dF_{i,j}(x) + \overline{F}_{i,j}(u)\right)}$$

η οποία με την βοήθεια των πινάκων γράφεται:

$$c\vec{\psi}\,'(u) = -D_0\vec{\psi}(u) - \int_0^u \Lambda_f(x)\psi_j\left(u-x\right)dF_{i,j}(x) - \vec{\zeta}(u)$$

όπου $\Lambda_f(x)$ είναι ο πίνακας ο οποίος στην θέση (i,j) περιέχει το στοιχείο $D_1(i,j)\cdot f_{i,j}(x)$ ενώ το διάνυσμα $\vec{\zeta}(u)$ είναι ένας πίνακας στήλη με $\zeta_i(u)=\sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\cdot \overline{F}_{i,j}(u)$.

Λαμβάνοντας μετασχηματισμούς Laplace τελευταία σχέση προκύπτει:

$$-c\vec{\psi}(0)+csL_s\left[\vec{\psi}(u)\right]=-D_0L_s\left[\vec{\psi}(u)\right]-L_s\left[\vec{\psi}(u)\right]L_s\left[\Lambda_f(u)\right]-L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow csL_s\left[\vec{\psi}(u)\right]+D_0L_s\left[\vec{\psi}(u)\right]+L_s\left[\vec{\psi}(u)\right]L_s\left[\Lambda_f(u)\right]=c\vec{\psi}(0)-L_s\left[\vec{\zeta}(u)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[sI+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]\vec{\psi}(u)=c\vec{\psi}(0)-\vec{\zeta}(u)\Leftrightarrow\boxed{A(s)\vec{\psi}(u)=c\vec{\psi}(0)-\widehat{\vec{\zeta}(u)}}$$

όπου $A(s)=\left[sI+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]$.

Τελικά παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην σχέση:

$$\boxed{\vec{\psi}(u)=v(u)\vec{\psi}(0)-\frac{1}{c}\int_0^u v(u-t)\vec{\zeta}(t)dt}$$

όπου $v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$.

Για να καταφέρουμε να βγάλουμε αριθμητικά αποτελέσματα στην παραπάνω σχέση πρέπει να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\vec{\psi}(0)$. Ακολουθώντας ανάλογο συλλογισμό με την γενική περίπτωση καταλήγουμε ότι:

$$\boxed{\vec{\psi}(0)=\frac{1}{c}\left\{A^*\left[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m\right]\right\}^{-1}\left(A^*\vec{\zeta}\right)\left[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m\right]}$$

όπου $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n$ οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg η οποία στην περίπτωσή μας ανάγεται στην $DetA(s)=0\Leftrightarrow Det\left[sI+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]=0$.

Διαφορετικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$\boxed{\vec{\psi}(0)=\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{m}Q^{-1}R_i\cdot Q_{e_i}}$$

2.6 Εφαρμογή – Εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο Κλασικό Μοντέλο

Στο παράδειγμα αυτό θεωρούμε ότι $n=1$, $D_0=-\lambda$, $D_1=\lambda$ και ότι το ύψος των κινδύνων είναι εκθετικά κατανεμημένο με παράμετρο β, δηλαδή $X \sim Exp(\beta)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω $\Lambda_f(x)=\lambda\beta e^{-\beta x}$ οπότε $\Lambda_f(s)=\dfrac{\lambda\beta}{\beta+s}$. Από την εξίσωση Lundberg προκύπτει:

$$Det\left[sI+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]=0 \Leftrightarrow Det\left[s+\frac{1}{c}\left(-\lambda+\frac{\lambda\beta}{\beta+s}\right)\right]=0 \Leftrightarrow s+\frac{1}{c}\left(-\lambda+\frac{\lambda\beta}{\beta+s}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow cs-\lambda+\frac{\lambda\beta}{\beta+s}=0 \Leftrightarrow \beta cs+cs^2-\cancel{\lambda\beta}-\lambda s+\cancel{\lambda\beta}=0 \Leftrightarrow s=0 \text{ ή } s=\frac{\lambda-\beta c}{c}$$

Λαμβάνοντας $c=(1+\theta)\lambda \mathrm{E}(X) \Leftrightarrow c=(1+\theta)\lambda\dfrac{1}{\beta}$ παίρνουμε $s=0$ ή $s=-\dfrac{\beta\theta}{1+\theta}$.

Οπότε $\boxed{\rho_1=0}$ ενώ η ρίζα $\boxed{s=-\dfrac{\beta\theta}{1+\theta}}$ είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Βρίσκουμε $\zeta(u)=D_1\cdot\overline{F}(u) \Leftrightarrow \zeta(u)=\lambda e^{-\beta u}$, οπότε το $\psi(0)$ υπολογίζετε από την σχέση:

$$c\psi(0)-\zeta(\rho_1)=0 \Leftrightarrow c\psi(0)=\zeta(\rho_1) \Leftrightarrow c\psi(0)=\frac{\lambda}{\beta+\rho_1} \Leftrightarrow (1+\theta)\lambda\frac{1}{\beta}\psi(0)=\frac{\lambda}{\beta+0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\theta)\frac{1}{\beta}\psi(0)=\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \boxed{\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το $v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[s+\frac{1}{c}\left(-\lambda+\frac{\lambda\beta}{\beta+s}\right)\right]^{-1}\right\}$ οπότε προκύπτει:

$$v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[s+\frac{1}{c}\left(-\lambda+\frac{\lambda\beta}{\beta+s}\right)\right]^{-1}\right\}\Leftrightarrow v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\frac{s\left(cs+\beta c-\lambda\right)}{\left(\beta+s\right)c}\right]^{-1}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(u)=L_s^{-1}\left\{\frac{\left(\beta+s\right)c}{s\left(cs+\beta c-\lambda\right)}\right\}\Leftrightarrow v(u)=L_s^{-1}\left\{\frac{\beta+s}{s\left(s-\frac{\lambda-\beta c}{c}\right)}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(u)=L_s^{-1}\left\{\frac{\beta+s}{s\left(s+\frac{\beta\theta}{1+\theta}\right)}\right\}\Leftrightarrow v(u)=L_s^{-1}\left\{\frac{\frac{1+\theta}{\theta}}{s}-\frac{\frac{1}{\theta}}{\left(s+\frac{\beta\theta}{1+\theta}\right)}\right\}\Leftrightarrow \boxed{v(u)=\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}}$$

Τελικά είναι:

$$\psi(u)=v(u)\psi(0)-\frac{1}{c}\int_0^u v(u-t)\zeta(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\psi(u)=\left(\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\right)\frac{1}{1+\theta}-\frac{1}{c}\int_0^u\left(\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}(u-t)}\right)\lambda e^{-\beta t}dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\psi(u)=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}-\frac{\beta}{\theta}\int_0^u e^{-\beta t}dt+\frac{\beta}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\int_0^u e^{-\frac{\beta}{1+\theta}t}dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\psi(u)=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}-\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{e^{-\beta u}}{-\beta}-\frac{1}{-\beta}\right)+\frac{\beta}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\left(\frac{e^{-\frac{\beta}{1+\theta}u}}{-\frac{\beta}{1+\theta}}-\frac{1}{-\frac{\beta}{1+\theta}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\psi(u)=\cancel{\frac{1}{\theta}}-\frac{1}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}+\cancel{\frac{1}{\theta}e^{-\beta u}}-\cancel{\frac{1}{\theta}}-\cancel{\frac{1}{\theta}e^{-\beta u}}+\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\psi(u)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}-\frac{1}{\theta\left(1+\theta\right)}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\Leftrightarrow\boxed{\psi(u)=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}\quad,\quad u\geq 0}$$

2.7 Εφαρμογή – Εύρεση της προεξοφλημένης πιθανότητας χρεοκοπίας-Markovian Arrival Process

Στο παράδειγμα αυτό (Chen 2009) θεωρούμε ότι έχουμε δύο καταστάσεις, δηλαδή $n=2$, και οι πινάκες τάσεων είναι:

$$D_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ p\lambda_2 & (1-p)\lambda_2\end{pmatrix} \text{ και } D_0\begin{pmatrix}-\alpha_{12}-\lambda_1 & \alpha_{12}\\ \alpha_{21}-p\lambda_2 & -\alpha_{21}-(1-p)\lambda_2\end{pmatrix}$$

επίσης ο πίνακας με το ύψος των κινδύνων είναι:

$$\overrightarrow{f}(x)=\begin{pmatrix}\beta_{11}e^{-\beta_{11}x} & \beta_{12}e^{-\beta_{12}x}\\ \beta_{21}e^{-\beta_{21}x} & \beta_{22}e^{-\beta_{22}x}\end{pmatrix}$$

όπου $p=0.5$, $\beta_{11}=1$, $\beta_{12}=1$, $\beta_{21}=0.5$, $\beta_{22}=0.5$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.4$, $\alpha_{12}=\frac{1}{4}$ και $\alpha_{21}=\frac{3}{4}$.

Τελικά οι παραπάνω πίνακες είναι:

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.2 & 0.2\end{pmatrix},\ D_0\begin{pmatrix}-1.25 & 0.25\\ 0.55 & -0.95\end{pmatrix} \text{ και } \overrightarrow{f}(x)=\begin{pmatrix}e^{-x} & e^{-x}\\ 0.5e^{-0.5x} & 0.5e^{-0.5x}\end{pmatrix}$$

Προκύπτει οπότε: $\Lambda_f(x)=\begin{pmatrix}e^{-x} & 0\\ 0.01e^{-x} & 0.01e^{-x}\end{pmatrix}$ και $\Lambda_f(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+s} & 0\\ \frac{0.01}{1+s} & \frac{0.01}{1+s}\end{pmatrix}$

Για $c=150$ η γενικευμένη εξίσωση Lundberg $Det\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]=0$ δίνει:

$$Det\left[\left(s-\frac{0.1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-1.25 & 0.25\\ 0.55 & -0.95\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{1+s} & 0\\ \frac{0.01}{1+s} & \frac{0.01}{1+s}\end{pmatrix}\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Det\begin{bmatrix} s-\frac{1.35}{2}+\frac{1}{2(1+s)} & \frac{0.25}{2}\\ \frac{0.55}{2}+\frac{0.01}{2(1+s)} & s-\frac{1.05}{2}+\frac{1}{2(1+s)}\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(s-\frac{1.35}{2}+\frac{1}{2(1+s)}\right)\cdot\left(s-\frac{1.05}{2}+\frac{1}{2(1+s)}\right)-\frac{0.25}{2}\left(\frac{0.55}{2}+\frac{0.01}{2(1+s)}\right)=0$$

Οπότε παίρνουμε $\rho_1 = 0.145409$ και $\rho_2 = 0.647785$.

Είναι:

$$A(s)=\begin{pmatrix} s-\frac{1.35}{2}+\frac{1}{2(1+s)} & \frac{0.25}{2}\\ \frac{0.55}{2}+\frac{0.01}{2(1+s)} & s-\frac{1.05}{2}+\frac{1}{2(1+s)}\end{pmatrix} \Rightarrow A^*(s)=\begin{pmatrix} s-\frac{1.05}{2}+\frac{1}{2(1+s)} & -\frac{0.55}{2}-\frac{0.01}{2(1+s)}\\ \frac{-0.25}{2} & s-\frac{1.35}{2}+\frac{1}{2(1+s)}\end{pmatrix}$$

Οπότε:

$$A^*[\rho_1,\rho_2]=\frac{A^*(\rho_1)-A^*(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2} \Rightarrow A^*[\rho_1,\rho_2]=\frac{\begin{pmatrix}\text{-0.375226} & \text{-0.279365}\\ \text{-0.125} & \text{-0.0930657}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.125819 & \text{-0.278034}\\ \text{-0.125} & 0.276223\end{pmatrix}}{0.145409-0.647785} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^*[\rho_1,\rho_2]=\begin{pmatrix}0.997351 & 0.00264916\\ 0 & 0.735084\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left\{A^*[\rho_1,\rho_2]\right\}^{-1}=\begin{pmatrix}1.00266 & \text{-0.00361347}\\ 0 & 1.36039\end{pmatrix}}$$

Επίσης $\zeta_i(u)=\sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\cdot \overline{F}_{i,j}(u)$ οπότε:

$$\overline{\zeta}(u)=\begin{pmatrix}e^{-u}\\ 0.4e^{-0.5u}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\zeta(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{0.4}{s+0.5}\end{pmatrix}}$$

Προκύπτει συνεπώς:

$$\left(A^{*}\vec{\zeta}\right)[\rho_1,\rho_2]=A^{*}[\rho_1]\vec{\zeta}[\rho_1,\rho_2]+A^{*}[\rho_1,\rho_2]\vec{\zeta}[\rho_2]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(A^{*}\vec{\zeta}\right)[\rho_1,\rho_2]=\begin{pmatrix}-0.375226 & -0.279365\\ -0.125 & -0.0930657\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.529833\\ -0.539964\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.735084 & 0.002649\\ 0 & 0.735084\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.606875\\ 0.348497\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\left(A^{*}\vec{\zeta}\right)[\rho_1,\rho_2]=\begin{pmatrix}0.955845\\ 0.372656\end{pmatrix}}$$

Επομένως:

$$\vec{\varphi}(0)=\frac{1}{c}\left\{A^{*}[\rho_1,\rho_2]\right\}^{-1}\left(A^{*}\vec{\zeta}\right)[\rho_1,\rho_2]\Rightarrow\vec{\varphi}(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1.00266 & -0.00361347\\ 0 & 1.36039\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.955845\\ 0.372656\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{\varphi}(0)=\begin{pmatrix}0.957037\\ 0.506957\end{pmatrix}}$$

Επίσης είναι $v(u)=L_s^{-1}\left\{\left[sI+\frac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ οπότε:

$$v(u)=\begin{pmatrix}-0.488801e^{-0.596477t}+1.15647e^{0.145409t}+0.332334e^{0.647785t} & 0\\ 0.831e^{-0.611283u}-1.59e^{-0.522818u}+3.42e^{0.0478178u}-2.66e^{0.286283u} & -0.836e^{-0.522818u}+1.836e^{0.0478178u}\end{pmatrix}$$

Τελικά από την σχέση $\vec{\varphi}(u)=v(u)\vec{\varphi}(0)-\frac{1}{c}\int_0^u v(u-t)\vec{\sigma}(t)dt$, $u\geq 0$ προκύπτει:

$$\boxed{\vec{\varphi}(u)=\begin{pmatrix}0.299563e^{-0.611283u}+0.295014e^{0.286283u}\\ -0.574e^{-0.611u}-6.913e^{-0.522u}+8e^{-0.5u}+0.402e^{0.04781u}-0.5485e^{0.2862u}\end{pmatrix}}$$

2.8 Ολοκληρωδιαφορική εξίσωση για $u\geq b_{\kappa-1}$

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινή στην περίπτωση που το αρχικό απόθεμα είναι μεγαλύτερο από $b_{\kappa-1}$. Θεωρούμε $B=(b_0=0,b_1,b_2,...,b_m)$ τα φράγματα σύμφωνα με τα οποία όταν για το απόθεμα u ισχύει $u \ge b_{\kappa-1}$ το ύψος του ασφαλίστρου είναι c_κ. Τότε έχουμε την ακόλουθη ολοκληρωδιαφορική εξίσωση:

$$c_\kappa \vec{\varphi}_\kappa{}'(u)=\delta\vec{\varphi}_\kappa(u)-D_0\vec{\varphi}_\kappa(u)-\int_0^u \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_\kappa(u-x)dx-\vec{\zeta}_\kappa(u)$$

<u>Λήμμα 2.8.1</u>: Η λύση της παραπάνω ολοκληρωδιαφορικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{\vec{\varphi}_\kappa(u)=v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})-\frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(u-t)\vec{\zeta}_\kappa(u-t)dt \quad , \quad u \ge b_{\kappa-1}}$$

όπου $v_\kappa(u-b_{\kappa-1})=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\dfrac{\delta}{c}\right)I+\dfrac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ με $v_k(0)=I$.

<u>Απόδειξη</u>

Για $u \ge b_{k-1}$ θέτουμε $x=u-b_{k-1}$ οπότε είναι:

$$c_\kappa \vec{\varphi}_\kappa{}'(x+b_{k-1})=\delta\vec{\varphi}_\kappa(x+b_{k-1})-D_0\vec{\varphi}_\kappa(x+b_{k-1})-\int_0^u \Lambda_f(t)\vec{\varphi}_\kappa(x+b_{k-1}-t)dt-\vec{\zeta}_\kappa(x+b_{k-1})$$

Θέτοντας $\vec{\varphi}_k^{*}(x)=\vec{\varphi}_\kappa(x+b_{k-1})$ και $\vec{\zeta}_k^{*}(x)=\vec{\zeta}_k(x+b_{k-1})$ η τελευταία σχέση γράφεται:

$$c_\kappa \vec{\varphi}_k^{*\prime}(x)=\delta\vec{\varphi}_k^{*}(x)-D_0\vec{\varphi}_k^{*}(x)-\int_0^u \Lambda_f(t)\vec{\varphi}_k^{*}(x-t)dt-\vec{\zeta}_k^{*}(x), \qquad x \ge 0$$

Με χρήση μετασχηματισμών Laplace καταλήγουμε:

$$\vec{\varphi}_k^{*}(x)=v_k(x)\vec{\varphi}_k^{*}(0)-\frac{1}{c_k}\int_0^u v_k(t)\vec{\zeta}_k^{*}(x-t)dt, \qquad x \ge 0$$

όπου $v_\kappa(x)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\dfrac{\delta}{c}\right)I+\dfrac{1}{c}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ με $v_k(0)=I$.

Τελικά αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς που θέσαμε καταλήγουμε:

$$\vec{\varphi}_\kappa(u)=v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})-\frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(u-t)\vec{\zeta}_\kappa(u-t)dt \quad , \quad u \ge b_{\kappa-1}$$

2.9 Υπολογισμός του $\overrightarrow{\varphi_k}(b_{k-1})$

Η διαδικασία υπολογισμού $\vec{\varphi}_k(b_{k-1})$ είναι ανάλογη με τον υπολογισμό του $\vec{\varphi}(0)$ στην περίπτωση αυτή όμως γίνεται χρήση του τελεστή Dickson-Hipp ο οποίος ορίζεται από την σχέση $T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy, \quad x \geq 0$.

Ειδικότερα από την σχέση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του $\vec{\varphi}_k(b_{k-1})$ προκύπτει:

$$\vec{\varphi}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\zeta}_\kappa(u-t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-s(u-b_{k-1})}\vec{\varphi}_\kappa(u) = e^{-s(u-b_{k-1})}v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}e^{-s(u-b_{k-1})}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\zeta}_\kappa(u-t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{b_{k-1}}^\infty e^{-s(u-b_{k-1})}\vec{\varphi}_\kappa(u)du = \int_{b_{k-1}}^\infty e^{-s(u-b_{k-1})}v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})du -$$

$$-\frac{1}{c_\kappa}\int_{b_{k-1}}^\infty e^{-s(u-b_{k-1})}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\zeta}_\kappa(u-t)dtdu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}v_\kappa(x)dx}_{u-b_{k-1}=x} - \frac{1}{c_\kappa}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\int_0^x v_\kappa(t)\vec{\zeta}_\kappa(x+b_{k-1}-t)dtdx}_{u-b_{k-1}=x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})L_s[v_k(x)] - \frac{1}{c_\kappa}L_s[v_k(x)]L_s[\vec{\zeta}_k(x+b_{k-1})] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1}) = L_s[v_k(x)]\left(\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}T_s\vec{\zeta}_\kappa(b_{k-1})\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{c_k}(s)T_s\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}T_s\vec{\zeta}_\kappa(b_{k-1})} \qquad u \geq b_{k-1}$$

όπου $L_{c_k}(s) = \left(s - \frac{\delta}{c_k}\right)I + \frac{1}{c_k}\left(D_0 + \Lambda_f(s)\right)$.

Βρίσκοντας τα αριστερά ιδιοδιανύσματα $\vec{q}_{i,k}^{\,T}$ του πίνακα $L_{c_k}(s)$ για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\rho_{i,k}, i = 1,2,\ldots,m$ και πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση από αριστερά παίρνουμε:

$$\vec{q}_{i,k}^{T} L_{c_k}(\rho_{i,k}) T_{\rho_{i,k}} \vec{\varphi}_{\kappa}(b_{k-1}) = \vec{q}_{i,k}^{T} \vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa} \vec{q}_{i,k}^{T} T_{\rho_{i,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{q}_{i,k}^{T} \vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa} \vec{q}_{i,k}^{T} T_{\rho_{i,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}) \Rightarrow \vec{q}_{i,k}^{T} \vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1}) = \frac{1}{c_\kappa} \vec{q}_{i,k}^{T} T_{\rho_{i,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1})$$

Υπό την μορφή πινάκων είναι:

$$Q_k \vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1}) = \frac{1}{c_\kappa} \sum_{i=1}^{m} diag\left[T_{\rho_{1,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}), \ldots, T_{\rho_{m,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}) \right] Q_k e_i$$

όπου $Q_k = \left(\vec{q}_{1,k}^{T}, \ldots, \vec{q}_{m,k}^{T} \right)^T$ και $Q_k e_i$ η i στήλη του πίνακα Q_k.

Επειδή ο Q_k είναι αντιστρέψιμος καταλήγουμε:

$$\boxed{\vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1}) = \frac{1}{c_\kappa} \sum_{i=1}^{m} Q_k^{-1} diag\left[T_{\rho_{1,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}), \ldots, T_{\rho_{m,k}} \vec{\zeta}_{\kappa}(b_{k-1}) \right] Q_k e_i}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μαρκοβιανό Μοντέλο Θεωρίας Κινδύνου με πολλαπλά φράγματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε το μαρκοβιανό μοντέλο χωρίς φράγματα. Το σκεπτικό σε αυτό το κεφάλαιο είναι ότι σε μια ασφαλιστική εταιρεία όταν τα αποθεματικά υπερβαίνουν κάποιο ύψος τότε αυτή προκειμένου να είναι ανταγωνιστική ελαττώνει το ασφάλιστρο. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε $B=\left(b_0=0,b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ τα φράγματα σύμφωνα με τα οποία όταν για το απόθεμα u ισχύει $b_{\kappa-1}\le u<b_\kappa$ το ύψος του ασφαλίστρου είναι c_κ.

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ως αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής με αρχική κατάσταση $i\in E=\{1,2,3,\ldots,m\}$

$$\varphi_i\left(u;B\right)=\begin{cases}\varphi_{i,1}\left(u;B\right) & 0\le u<b_1\\ \varphi_{i,\kappa}\left(u;B\right) & b_{k-1}\le u<b_k \quad \kappa=2,\ldots,n\\ \varphi_{i,n+1}\left(u;B\right) & b_n\le u<\infty\end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε το διάνυσμα $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)=\left(\varphi_{1,\kappa}(u;B),\varphi_{2,\kappa}(u;B),\ldots,\varphi_{n,\kappa}(u;B)\right)^{\mathrm{T}},b_{\kappa-1}\le u<b_\kappa$.

Τελικά η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο μαρκοβιανό μοντέλο με πολλαπλά φράγματα ορίζεται ως εξής:

$$\vec{\varphi}\left(u;B\right)=\begin{cases}\vec{\varphi}_1\left(u;B\right) & 0\le u<b_1\\ \vec{\varphi}_\kappa\left(u;B\right) & b_{k-1}\le u<b_k \qquad \kappa=2,\ldots,n\\ \vec{\varphi}_{n+1}\left(u;B\right) & b_m\le u<\infty\end{cases}$$

3.1 Ολοκληρωδιαφορική εξίσωση της $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$

Δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i και ξεκινάμε με ένα αρχικό απόθεμα u την χρονική στιγμή 0 για το οποίο $b_{k-1} \le u < b_k$, στο χρονικό διάστημα $[0,h]$ μπορούν να συμβούν τα εξής:

- Να παραμείνουμε στην κατάσταση i και να μην εμφανιστεί κίνδυνος με πιθανότητα $1+D_0(i,i)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση $j \neq i$ χωρίς την εμφάνιση κινδύνου με πιθανότητα $D_0(i,j)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j και να εμφανιστεί στο διάστημα αυτό ένας κίνδυνος με σ.κ. $F_{i,j}$ με πιθανότητα $D_1(i,j)$
- Να συμβεί οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο με πιθανότητα $o(h)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$\varphi_{i,\kappa}(u;B) = \left(1+D_0(i,i)\cdot h\right)e^{-\delta h}\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} D_0(i,j)\cdot he^{-\delta h}\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot he^{-\delta h}\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}} \varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\cdot he^{-\delta h}\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}} \varphi_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x) + \gamma_{i,j}(u+ch)\right] + o(h)$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού και $\gamma_{i,j}(u) = \int_u^\infty w(u,x-u)dF_{i,j}(x)$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^{-\delta h}=1-\delta h+o(h)$ προκύπτει:

$$\varphi_{i,\kappa}(u;B)=\left(1+D_0(i,i)\cdot h\right)\left(1-\delta h+o(h)\right)\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}\varphi_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+\gamma_{i,j}(u+ch)\right]+o(h)$$

οπότε απαλείφοντας τους όρους ανώτερης τάξης του h:

$$\varphi_{i,\kappa}(u;B)-\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)=D_0(i,i)\cdot h\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)-\delta h\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot h\cdot\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}\varphi_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+\gamma_{i,j}(u+ch)\right]+o(h)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\varphi_{i,\kappa}(u;B)-\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)}{h}=D_0(i,i)\cdot\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)-\delta\varphi_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}\varphi_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}\varphi_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+\gamma_{i,j}(u+ch)\right]+\frac{o(h)}{h}$$

Λαμβάνοντας οπότε $h\to 0$ προκύπτει:

$$-c_\kappa\varphi_{i,\kappa}^{'}(u;B)=D_0(i,i)\cdot\varphi_{i,\kappa}(u;B)-\delta\varphi_{i,\kappa}(u;B)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot\varphi_{j,\kappa}(u;B)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\int_0^{u-b_{\kappa-1}}\varphi_{j,\kappa}(u-x;B)dF_{i,j}(x)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}\varphi_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)+\gamma_{i,j}(u)\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{c_\kappa\varphi_{i,\kappa}^{'}(u;B)=\delta\varphi_{i,\kappa}(u;B)-\sum_{j=1}^{m}D_0(i,j)\cdot\varphi_{j,\kappa}(u;B)-\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\int_0^{u-b_{\kappa-1}}\varphi_{j,\kappa}(u-x;B)dF_{i,j}(x)-\xi_{i,\kappa}(u)}$$

όπου $b_{k-1}<u<b_k$ και $\xi_{i,k}(u)=\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}\varphi_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)+\gamma_{i,j}(u)\right].$

Υπό την μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\boxed{c_\kappa \vec{\varphi}_\kappa'(u;B) = \delta\vec{\varphi}_\kappa(u;B) - D_0\vec{\varphi}_\kappa(u;B) - \int_0^{u-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_\kappa(u-x;B)dx - \vec{\xi}_\kappa(u)}$$

όπου $\vec{\xi}_\kappa(u) = \left(\xi_{1,\kappa}(u), \xi_{2,\kappa}(u), ..., \xi_{m,\kappa}(u)\right)^{T}$.

Όσον αφορά την συνέχεια τον διανυσμάτων $\vec{\varphi}_1(u;B), ..., \vec{\varphi}_{n+1}(u;B)$ εκφράζεται μέσω της συνθήκης

$$\vec{\varphi}_k(b_k-;B) = \vec{\varphi}_{k+1}(b_k+;B),\ k=1,...,n$$

Παρατηρούμε τότε με χρήση της συνέχειας των παραπάνω διανυσμάτων ότι προκύπτει:

$$c_\kappa \vec{\varphi}_\kappa'(b_k-;B) = \delta\vec{\varphi}_\kappa(b_k-;B) - D_0\vec{\varphi}_\kappa(b_k-;B) - \int_0^{(b_k-)-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_\kappa((b_k-)-x;B)dx - \vec{\xi}_\kappa(b_k-) =$$
$$= \delta\vec{\varphi}_{\kappa+1}(b_k+;B) - D_0\vec{\varphi}_{\kappa+1}(b_k+;B) - \int_0^{(b_k-)-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_{\kappa+1}((b_k+)-x;B)dx - \vec{\xi}_\kappa(b_k-) =$$
$$= \delta\vec{\varphi}_{\kappa+1}(b_k+;B) - D_0\vec{\varphi}_{\kappa+1}(b_k+;B) - \vec{\xi}_{\kappa+1}(b_k+) = c_{\kappa+1}\vec{\varphi}_{\kappa+}'(b_k+;B)$$

όπου έγινε χρήση της σχέσης $\vec{\xi}_{\kappa+1}(b_k+) = \int_0^{(b_k-)-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_{\kappa+1}((b_k+)-x;B)dx + \vec{\xi}_\kappa(b_k-)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η παράγωγος αυτών των διανυσμάτων δεν είναι συνεχής πάνω στα φράγματα b_k, $k=1,2,...,n$.

3.2 Αναλυτική έκφραση της $\varphi_i(u)$

<u>**Θεώρημα 3.2.1**</u>: Η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση

$$c_\kappa \vec{\varphi}_\kappa'(u;B) = \delta\vec{\varphi}_\kappa(u;B) - D_0\vec{\varphi}_\kappa(u;B) - \int_0^{u-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{\varphi}_\kappa(u-x;B)dF_{i,j}(x) - \vec{\xi}_\kappa(u)$$

όπου $b_{k-1} \le u < b_k$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\boxed{\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = v_\kappa\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\xi}_\kappa(u-t)dt}$$

όπου $v_{\kappa}(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c_{\kappa}}\right)I+\frac{1}{c_{\kappa}}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\},\quad b_{k-1}\le u<b_k$.

Απόδειξη

Θέτοντας $x=u-b_{\kappa-1}\Leftrightarrow u=x+b_{\kappa-1}$ τότε $0\le x<b_{\kappa}-b_{\kappa-1}$ και η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$c_{\kappa}\vec{\varphi}_{\kappa}{}'(x+b_{\kappa-1};B)=\delta\vec{\varphi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1};B)-D_0\vec{\varphi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1};B)-$$
$$-\int_0^x\Lambda_f(t)\vec{\varphi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1}-t;B)dF_{i,j}(t)-\vec{\xi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1})$$

Θέτοντας $\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(x)=\vec{\varphi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1},B)$ και $\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}(x)=\vec{\xi}_{\kappa}(x+b_{\kappa-1})$ προκύπτει:

$$c_{\kappa}\vec{\varphi}^{\,*\prime}_{\kappa}(x)=\delta\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(x)-D_0\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(x)-\int_0^x\Lambda_f(t)\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(x-t)dF_{i,j}(t)-\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}(x)$$

Λαμβάνοντας μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει:

$$c_{\kappa}L_s\left[\vec{\varphi}^{\,*\prime}_{\kappa}(x)\right]=\delta\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-D_0\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-\Lambda_f(s)\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}(s)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c_{\kappa}\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(0)+c_{\kappa}s\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)=\delta\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-D_0\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-\Lambda_f(s)\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)-\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}(s)$$

$$\Rightarrow\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(s)=\left[\left(s-\frac{\delta}{c_{\kappa}}\right)I+\frac{1}{c_{\kappa}}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(0)-\frac{1}{c_{\kappa}}\left[\left(s-\frac{\delta}{c_{\kappa}}\right)I+\frac{1}{c_{\kappa}}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\widehat{\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}}(s)$$

Λαμβάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω σχέση και θέτοντας $v_{\kappa}(u)=L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c_{\kappa}}\right)I+\frac{1}{c_{\kappa}}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ προκύπτει:

$$\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(x)=v_{\kappa}(x)\vec{\varphi}^{\,*}_{\kappa}(0)-\frac{1}{c_{\kappa}}\int_0^x v_{\kappa}(t)\vec{\xi}^{\,*}_{\kappa}(x-t)dt$$

Τελικά λαμβάνοντας υπόψη τους μετασχηματισμούς που θέσαμε καταλήγουμε:

$$\vec{\varphi}_{\kappa}(u;B)=v_{\kappa}\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{\varphi}_{\kappa}(b_{\kappa-1};B)-\frac{1}{c_{\kappa}}\int_0^{u-b_{\kappa-1}}v_{\kappa}(t)\vec{\xi}_{\kappa}(u-t)dt$$

3.3 Υπολογισμός του $v_\kappa(u)$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω ο υπολογισμός της ποσότητας $v(u)$ και της $v_\kappa(u)$ αντίστοιχα παίζουν κρίσιμο ρόλο στον υπολογισμό της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του $v(u)$ οπότε αντίστοιχα θα προκύψει το $v_\kappa(u)$ με αντικατάσταση του c με c_κ.

Μία προσέγγιση του υπολογισμού του $v(u)$ είναι μέσω της χρήσης αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace κάτι το οποίο είναι δύσκολο ως προς την εύρεση αναλυτικής έκφρασης του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace του αντιστρόφου ενός πίνακα.

Μία άλλη προσέγγιση είναι μέσω του υπολογισμού μίας ειδικής αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής. Η προσέγγιση αυτή αναπτύχθηκε αρχικά από τους Gerber & Shiu (1998) στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου και διευρύνθηκε από τον Li (2008b) για το Sparre-Andersen μοντέλο. Για το μαρκοβιανό μοντέλο η διαδικασία ακολουθείται όπως περιγράφεται από τον Chen (2009).

Αρχικά εισάγουμε έναν χρόνο στάσης $\tau^*(u,a,b)$ για $a \le b$ ο οποίος ορίζεται από την σχέση:

$$\tau^*(u,a,b) = \inf\left\{t \ge 0 : U(t) \notin [a,b] / U(0) = u\right\}$$

Επίσης ορίζουμε:

$$\tau^+(u,a,b) = \begin{cases} \tau^*(u,a,b) & \text{εάν } U(\tau^*(u,a,b)) = b \\ \infty & \text{εάν } U(\tau^*(u,a,b)) < a \end{cases}$$

και

$$\tau^-(u,a,b) = \begin{cases} \infty & \text{εάν } U(\tau^*(u,a,b)) = b \\ \tau^*(u,a,b) & \text{εάν } U(\tau^*(u,a,b)) < a \end{cases}$$

Όπως προκύπτει ο χρόνος στάσης $\tau^{+}(u,a,b)$ εκφράζει την πρώτη στιγμή κατά την οποία η διαδικασία πλεονάσματος υπερβαίνει το άνω φράγμα b, ενώ αντίστοιχα ο χρόνος στάσης $\tau^{-}(u,a,b)$ εκφράζει την πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία η διαδικασία πλεονάσματος πέφτει κάτω από το φράγμα a.

Ορίζουμε ως

$$B_{i,j}(u,b)=E\left[e^{-\delta\tau^{+}(u,a,b)}I\left(J\left(\tau^{+}(u,a,b)=j\right)\right)/\,J(0)=i\right],\ \ u\geq 0$$

τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου στάσης $\tau^{+}(u,a,b)$ δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση στο μαρκοβιανό μοντέλο είναι i και την χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα φτάνει το φράγμα b γίνεται j. Όταν $b=0$ η διαδικασία πλεονάσματος πέφτει κάτω από το «μηδέν» πρώτου επανέλθει. Συμβολίζουμε με $\tau_0=\tau^{+}(u,0,0)$ την πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα επανέρχεται σε θετικά επίπεδα μετά την στιγμή της χρεωκοπίας. Το τ_0 καλείται και χρόνος ανάκτησης.

Για $\delta>0$ ορίζουμε ως

$$\psi_{i,j}(u)=E_i\left[e^{-\delta\tau_0}I\left(\tau<\infty,J(\tau_0)=j\right)/U(0)=u\right],\ \ u\geq 0$$

τον μετασχηματισμό Laplace του τ_0 εφόσον η διαδικασία πλεονάσματος ανακτήσει τις απώλειες, δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση είναι i και η κατάσταση κατά τον χρόνο ανάκτησης είναι j.

Ας είναι $B(u;b)$ ο πίνακας με (i,j) στοιχείο την ποσότητα $B_{i,j}(u,b)$. Όπως έχει δειχθεί στον Ren (2009) ο πίνακας $B(u;b)$ έχει την μορφή

$$B(u;b)=e^{-K(b-u)},\ \ u\leq b$$

όπου ο πίνακας K ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση πινάκων

$$cK + \left(-\delta I + D_0\right) + \int_0^{\infty} \Lambda_f(x) e^{-Kx} dx = 0$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης όπως έδειξε ο Ren (2009) προκύπτει ως

$$K = H \Delta_\rho H^{-1}$$

όπου $\Delta_\rho = diag\left[\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m\right]$ με $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ να είναι οι λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και $H = \left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, ..., \overrightarrow{h_m}\right)$ όπου το διάνυσμα στήλη $\overrightarrow{h_i}$ είναι το από δεξιά ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $L_c(\rho_i)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0.

Ας είναι $\psi(u)$ ο πίνακας με (i, j) στοιχείο την ποσότητα $\psi_{i,j}(u)$. Όπως έχει δειχθεί στον Li (2008b) ισχύει

$$\psi(u) = E\left[e^{-\delta\tau + KU(\tau)} I\left(\tau < \infty\right) / U(0) = u\right], \quad u \geq 0$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης $K = H \Delta_\rho H^{-1}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\psi(u) = H diag\left[\theta_1(u), ..., \theta_m(u)\right] H^{-1}$$

όπου

$$\theta_i(u) = E\left[e^{-\delta\tau - \rho_i |U(\tau)|} I\left(\tau < \infty\right) / U(0) = u\right], \quad i \in E$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία όπως εμφανίζεται στους Gerber & Shiu (1998) και στον Li (2008b), ο πίνακας $B(u;b)$ παίρνει την ακόλουθη έκφραση

$$B(u;b) = \left[e^{Ku} - \psi(u)\right]\left[e^{Kb} - \psi(b)\right]^{-1}, \quad u \geq 0$$

και επίσης ικανοποιεί την ομογενή ολοκληρωδιαφορική εξίσωση

$$cB'(u;b) = \delta B(u;b) - D_0 B(u;b) - \int_0^u \Lambda_f(x) B(u-x;b) dx, \quad u \geq 0$$

με $B(b,b) = I$.

Ας είναι $v(u)=\left[e^{Ku}-\psi(u)\right]\left[I-\psi(0)\right]^{-1}$ οπότε από την παραπάνω ολοκληρωδιαφορική εξίσωση προκύπτει:

$$cv'(u)=\delta v(u)-D_0 v(u)-\int_0^u \Lambda_f(x)v(u-x)dx, \quad u\geq 0$$

με $v(0)=I$.

Κάνοντας χρήση μετασχηματισμών Laplace στην τελευταία σχέση καταλήγουμε στην γνώριμη έκφραση του $v(u)$, οπότε αυτό σημαίνει ότι το $v(u)$ μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια του $\psi(u)$ όπως ορίστηκε παραπάνω.

Καταλήγουμε οπότε με την βοήθεια της έκφρασης του K στο εξής:

$$v(u)=H\left[e^{\Delta_\rho}-diag\left[\theta_1(u),...,\theta_m(u)\right]\right]H^{-1}H\left[I-diag\left[\theta_1(0),...,\theta_m(0)\right]\right]^{-1}H^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(u)=Hdiag\left[\frac{e^{\rho_1 u}-\theta_1(u)}{1-\theta_1(0)},...,\frac{e^{\rho_m u}-\theta_m(u)}{1-\theta_m(0)}\right]H^{-1}, \quad u\geq 0}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το $v_\kappa(u)$ για $\kappa=1,...,n+1$ οπότε με αντίστοιχη συλλογιστική πορεία προκύπτει:

$$v_\kappa(u)=\left[e^{K_k u}-\psi_k(u)\right]\left[I-\psi_k(0)\right]^{-1}$$

όπου $K_k=H_k\Delta_{\rho,k}H_k^{-1}$, $\Delta_{\rho,k}=diag\left[\rho_{1,k},...,\rho_{m,k}\right]$ και $H_k=\left(\overrightarrow{h_{1,k}},\overrightarrow{h_{2,k}},...,\overrightarrow{h_{m,k}}\right)$ με $\rho_{1,k},...,\rho_{m,k}$ οι ρίζες της εξίσωσης $\det\left[L_{c_k}(s)\right]=0$ και $\overrightarrow{h_{1,k}},\overrightarrow{h_{2,k}},...,\overrightarrow{h_{m,k}}$ τα από δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα $L_{c_k}(\rho_{i,k})$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0.

Τελικά καταλήγουμε:

$$\boxed{v(u)=H_k diag\left[\frac{e^{\rho_{1,k}u}-\theta_{1,k}(u)}{1-\theta_{1,k}(0)},...,\frac{e^{\rho_{m,k}u}-\theta_{m,k}(u)}{1-\theta_{m,k}(0)}\right]H_k^{-1}, \quad u\geq 0}$$

όπου το $\theta_{i,k}(u)$ ορίζεται ως

$$\theta_{i,k}(u)=E\left[e^{-\delta\tau-\rho_{i,k}|U(\tau)|}I\left(\tau<\infty\right)/U(0)=u\right], \quad u\geq 0, i\in E$$

3.4 Αναδρομικός υπολογισμός του $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$

Για τον υπολογισμό του $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$ χρειάζεται να υπολογιστεί πρώτα η ποσότητα $\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1};B)$. Ωστόσο δεν είναι εφικτό να εφαρμόσουμε διαδικασίες ανάλογες με τον υπολογισμό του $\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1})$ εξαιτίας του περιορισμού $b_{k-1} \le u < b_k$.

Θεωρούμε οπότε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\vec{\varphi}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(u-t)\vec{\xi}_\kappa(u-t)dt \quad , \quad u \ge b_{\kappa-1}$$

όπου θέσαμε $\vec{\zeta}_\kappa(u) = \vec{\xi}_\kappa(u)$.

Κάνοντας χρήση και της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = v_\kappa\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\xi}_\kappa(u-t)dt, \qquad b_{k-1} \le u < b_k$$

παρατηρούμε ότι με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\vec{\varphi}_\kappa(u;B) - \vec{\varphi}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\left[\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = \vec{\varphi}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\left[\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})\right]} \quad , \qquad b_{k-1} \le u < b_k$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση $\vec{\kappa}_\kappa(B) = \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1})$ προκύπτει:

$$\boxed{\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = \vec{\varphi}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\kappa}_\kappa(B)} \quad , \qquad b_{k-1} \le u < b_k$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.1: Η αναλυτική έκφραση του διανύσματος της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = \vec{\varphi}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\kappa}_\kappa(B), \; b_{k-1} \le u < b_k, \; k = 1,2,...,m$$

όπου το $\vec{\varphi}_\kappa(u)$ και το $\vec{\kappa}_\kappa(B)$ υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\vec{\varphi}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(u-t)\vec{\xi}_\kappa(u-t)dt, \; b_{k-1} \le u < b_k$$

και

$$\begin{cases} \vec{\kappa}_{\kappa+1}(B) = \vec{\varphi}_{\kappa}(b_k) - \vec{\varphi}_{\kappa+1}(b_\kappa) + v_\kappa (b_\kappa - b_{\kappa-1}) \vec{\kappa}_\kappa(B) \quad , \quad \kappa = 1,2,\ldots,m \\ \vec{\kappa}_{m+1}(B) = \vec{0} \end{cases}$$

όπου το i στοιχείο του διανύσματος $\vec{\xi}_k(u)$ δίνεται από την σχέση

$$\xi_{i,k}(u) = \sum_{j=1}^{m} D_1(i,j) \left[\sum_{l=1}^{\kappa-1} \int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} \varphi_{j,l}(u-x;B) dF_{i,j}(x) + \gamma_{i,j}(u) \right]$$

με $\omega_{i,j}(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) dF_{i,j}(x)$.

3.5 Αλγόριθμος εύρεσης του $\vec{\varphi}(u;B)$

<u>Βήμα 1ο</u>

Για κάθε c_κ, $\kappa = 1,2,\ldots,n+1$ λύνουμε την γενικευμένη εξίσωση Lundberg, $\det[L_{c_\kappa}(s)] = 0$ και βρίσκουμε m ρίζες, τις $\rho_{i,\kappa}$ $i = 1,2,\ldots,m$. Βρίσκουμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\vec{q}_{i,\kappa}^{\,T}$ της ιδιοτιμής 0 του πίνακα $L_{c_\kappa}(\rho_{i,\kappa})$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα $Q_\kappa = \left(\vec{q}_{1,\kappa}, \vec{q}_{1,\kappa}, \ldots, \vec{q}_{n,\kappa} \right)^T$. Αντίστοιχα βρίσκουμε το δεξιό ιδιοδιάνυσμα $\vec{h}_{i,\kappa}$ της ιδιοτιμής 0 του πίνακα $L_{c_\kappa}(\rho_{i,\kappa})$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα $H_\kappa = \left(\vec{h}_{1,\kappa}, \vec{h}_{1,\kappa}, \ldots, \vec{h}_{n,\kappa} \right)$.

<u>Βήμα 2ο</u>

Για κάθε ρίζα $\rho_{i,\kappa}$, $\kappa = 1,2,\ldots,n+1$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $\theta_{i,k}(u)$ οι οποίες είναι μία ειδική περίπτωση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής με $w(x,y) = e^{-\rho_{i,k} y}$ στο μαρκοβιανό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου χωρίς την καταβολή μερισμάτων.

Η έκφραση της ποσότητας $v_k(u)$, $\kappa = 1,2,...,n+1$ μπορεί να προκύψει από την σχέση $v_k(u) = H_k diag\left[\frac{e^{\rho_{1,k}u} - \theta_{1,k}(u)}{1-\theta_{1,k}(0)},...,\frac{e^{\rho_{m,k}u} - \theta_{m,k}(u)}{1-\theta_{m,k}(0)}\right] H_k^{-1}, \quad u \ge 0$.

<u>Βήμα 3ο</u>

Για $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{\xi}_1(u) = \left(\xi_{1,1}(u),...,\xi_{n,1}(u)\right)^T$ όπου $\xi_{\iota,1}(u) = \sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\omega_{i,j}(u)$ και $\omega_{i,j}(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) dF_{i,j}(x)$.

Υπολογίζουμε οπότε το $\vec{\varphi}_1(0)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_1(0) = \frac{1}{c_1}\sum_{i=1}^{n} Q_1^{-1} diag\left[T_{\rho_{1,1}}\vec{\xi}_1(0),...,T_{\rho_{n,1}}\vec{\xi}_1(0)\right] Q_1 \vec{e}_i$$

όπου T ο τελεστής Dickson-Hipp.

Υπολογίζουμε το $\vec{\varphi}_1(u)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_1(u) = v_1(u)\vec{\varphi}_1(0) - \frac{1}{c_1}\int_0^u v_1(t)\vec{\xi}_1(u-t)dt, \; u \ge 0$$

<u>Βήμα 4ο</u>

Από την σχέση $\vec{\varphi}_1(u;B) = \vec{\varphi}_1(u) + v_1(u)\vec{\kappa}_1(B)$ με τον περιορισμό $0 \le u < b_1$ υπολογίζουμε την συνάρτηση $\vec{\varphi}_1(u;B)$. Στην σχέση αυτή υπάρχει η σταθερά $\vec{\kappa}_1(B)$ η οποία θα υπολογιστεί στο τελευταίο βήμα. Αξίζει να τονιστεί ότι η συνάρτηση $\vec{\varphi}_1(u;B)$ με $0 \le u < b_1$ προς το παρών είναι συνάρτηση του άγνωστου διανύσματος $\vec{\kappa}_1(B)$.

<u>Βήμα 5ο</u>

Για $\kappa = 2$ προκύπτει $\vec{\xi}_2(u) = \left(\xi_{1,2}(u),...,\xi_{n,2}(u)\right)^T$ όπου

$$\xi_{i,2}(u) = \sum_{j=1}^{n} D_1(i,j)\int_{u-b_1}^{u} \varphi_{j,1}(u-x;B)dF_{i,j}(x) + \xi_{i,1}(u)$$

όπου $\varphi_{j,1}(u;B)$ είναι το j στοιχείο του διανύσματος $\vec{\varphi}_1(u;B)$.

Υπολογίζουμε οπότε το $\vec{\varphi}_2(b_1)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_2(b_1) = \frac{1}{c_2}\sum_{i=1}^{n} Q_2^{-1} diag\left[T_{\rho_{1,2}}\vec{\xi}_2(b_1),...,T_{\rho_{n,2}}\vec{\xi}_2(b_1)\right]Q_2\vec{e}_i$$

όπου T ο τελεστής Dickson-Hipp.

Υπολογίζουμε το $\vec{\varphi}_2(u)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_2(u) = v_2(u-b_1)\vec{\varphi}_2(b_1) - \frac{1}{c_2}\int_0^{u-b_1} v_2(t)\vec{\xi}_2(u-t)dt,\ u \geq b_1$$

Τονίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{\xi}_2(u)$ εξαρτάται από το διάνυσμα $\vec{\kappa}_1(B)$. Συνεπώς και τα διανύσματα $\vec{\varphi}_2(b_1)$ και $\vec{\varphi}_2(u)$ είναι συναρτήσεις του άγνωστου προς το παρών διανύσματος $\vec{\kappa}_1(B)$.

<u>Βήμα 6ο</u>

Με τον περιορισμό $b_1 \leq u < b_2$ υπολογίζουμε την συνάρτηση $\vec{\varphi}_2(u;B)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_2(u;B) = \vec{\varphi}_2(u) + v_2(u-b_1)\vec{\kappa}_2(B),\ b_1 \leq u < b_2$$

όπου η ποσότητα $v_2(u-b_1)$ υπολογίστηκε στο δεύτερο βήμα και

$$\vec{\kappa}_2(B) = \vec{\varphi}_1(b_1) - \vec{\varphi}_2(b_1) + v_1(b_1)\vec{\kappa}_1(B)$$

Από την εξάρτηση των $\vec{\kappa}_2(B)$ και $\vec{\kappa}_1(B)$ προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{\kappa}_2(B)$ και $\vec{\varphi}_2(u;B)$ με $b_1 \leq u < b_2$ είναι συναρτήσεις του $\vec{\kappa}_1(B)$.

Βήμα 7ο

Κατά τον ίδιο τρόπο για $\kappa = 3,4,\ldots,m$ προκύπτει

$$\xi_{i,k}(u) = \sum_{j=1}^{m} D_1(i,j)\int_{u-b_{\kappa-1}}^{u-b_{\kappa-2}} \varphi_{j,k-1}(u-x;B)dF_{i,j}(x) + \xi_{i,k-1}(u)$$

Υπολογίζουμε οπότε το $\vec{\varphi}_2(b_{k-1})$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) = \frac{1}{c_\kappa}\sum_{i=1}^{n} Q_\kappa^{-1} diag\left[T_{\rho_{1,\kappa}}\vec{\xi}_\kappa(b_{\kappa-1}),\ldots,T_{\rho_{n,\kappa}}\vec{\xi}_\kappa(b_{\kappa-1})\right]Q_\kappa \vec{e}_i$$

Υπολογίζουμε το $\vec{\varphi}_\kappa(u)$ από την σχέση:

$$\vec{\varphi}_k(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\varphi}_\kappa(b_{k-1}) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\xi}_\kappa(u-t)dt,\ u \geq b_{k-1}$$

οπότε από την σχέση

$$\vec{\varphi}_\kappa(u;B) = \vec{\varphi}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\kappa}_\kappa(B)$$

υπολογίζουμε το διάνυσμα $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$ όπου η ποσότητα $v_\kappa(u-b_{\kappa-1})$ έχει υπολογιστεί στο δεύτερο βήμα και το διάνυσμα $\vec{\kappa}_\kappa(B)$ υπολογίζεται από την σχέση

$$\vec{\kappa}_\kappa(B) = \vec{\varphi}_{\kappa-1}(b_{k-1}) - \vec{\varphi}_\kappa(b_{\kappa-1}) + v_{\kappa-1}(b_{\kappa-1}-b_{\kappa-2})\vec{\kappa}_{\kappa-1}(B)$$

Αντίστοιχα με το έκτο βήμα παρατηρούμε τα διανύσματα $\vec{\kappa}_\kappa(B)$ και $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$ με $b_{\kappa-1} \leq u < b_\kappa$ είναι συναρτήσεις του $\vec{\kappa}_1(B)$.

Βήμα 8ο

Για $\kappa = n+1$ η έκφραση $\vec{\xi}_{n+1}(u)$ περιέχει όλα τα προηγούμενα διανύσματα $\vec{\varphi}_\kappa(u;B)$, $\kappa = 1,2,\ldots,n$.

Επειδή στο τελευταίο φράγμα παρατηρούμε ότι $\vec{\varphi}_{n+1}(u;B) = \vec{\varphi}_{n+1}(u)$ για $u \geq b_n$ προκύπτει από την αναδρομική σχέση ότι $\vec{\kappa}_{n+1}(B) = \vec{0}$.

Τονίζουμε ότι όλα τα διανύσματα $\vec{\varphi}_{n+1}(b_n)$, $\vec{\varphi}_{n+1}(u)$, $\vec{\varphi}_{n+1}(u;B)$ και $\vec{\kappa}_n(B)$ εξαρτώνται από το διάνυσμα $\vec{\kappa}_1(B)$.

Κάνοντας χρήση της σχέσης

$$0=\vec{\kappa}_{n+1}(B)=\vec{\varphi}_n(b_n)-\vec{\varphi}_{n+1}(b_n)+v_n(b_n-b_{n-1})\vec{\kappa}_n(B)$$

υπολογίζουμε την ποσότητα $\vec{\kappa}_1(B)$ και ολοκληρώνεται η διαδικασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Αναμενόμενη Προεξοφλημένη Καταβολή Μερισμάτων

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση του μαρκοβιανού μοντέλου με πολλαπλά φράγματα υπό την συνθήκη της καταβολής μερισμάτων. Ορίζουμε λοιπόν την παρούσα αξία της καταβολής μερισμάτων μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας τ_B, δοθέντος ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι u, ως εξής:

$$D_{u,B} = \int_0^{\tau_B} e^{\delta t} dD(t),\ u \geq 0$$

όπου $D(t)$ είναι η αθροιστική καταβολή μερισμάτων την χρονική στιγμή t.

Ορίζουμε

$$V_i(u;B) = E_i\left[D_{u,B} / U_B(0) = u\right],\ u \geq 0,\ i \in E$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της καταβολής μερισμάτων κάτω από μια στρατηγική πολλαπλών φραγμάτων, δοθέντος ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι u και η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι $i \in E$. Υπό την μορφή πινάκων γράφουμε $\vec{V}(u;B) = \left(V_1(u;B),....,V_m(u;B)\right)^T$ και επίσης ορίζουμε

$$V_i(u;B) = \begin{cases} V_{i,1}(u;B) & 0 \leq u < b_1 \\ V_{i,k}(u;B) & b_{k-1} \leq u < b_k, \quad k = 2,....,n \\ V_{i,n+1}(u;B) & b_n \leq u < \infty \end{cases}$$

Υπό την μορφή πινάκων γράφουμε:

$$\vec{V}(u;B)=\begin{cases}\vec{V}_1(u;B) & 0\le u<b_1\\ \vec{V}_k(u;B) & b_{k-1}\le u<b_k, \quad k=2,....,n\\ \vec{V}_{n+1}(u;B) & b_n\le u<\infty\end{cases}$$

όπου $\vec{V}_k(u;B)=\left(\vec{V}_{1,k}(u;B),...,\vec{V}_{m,k}(u;B)\right)^T$, $b_{k-1}\le u<b_k$, $k=1,2,...,n+1$.

Στην περίπτωση του μαρκοβιανού μοντέλου με ένα φράγμα b, η διαδικασία πλεονάσματος συμβολίζεται $U_b(t)$ και το αρχικό κεφάλαιο $U_b(0)=u$. Αντίστοιχα η παρούσα αξία των μερισμάτων ορίζεται

$$D_{u,b}=\int_0^{\tau_B}e^{\delta t}dD(t),\ u\ge 0$$

όπου $\tau_b=\inf\{t\ge 0:U_b(t)<0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας.

Η αναμενόμενη παρούσα αξία ορίζεται

$$V_i(u;b)=E_i\left[D_{u,b}/U_b(0)=u\right]$$

δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση είναι $i\in E$.

Αργότερα θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο ότι η αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων στο μαρκοβιανό μοντέλο με πολλαπλά φράγματα σχετίζεται με την αναμενόμενη παρούσα αξία στην περίπτωση του ενός φράγματος.

4.1 Ολοκληρωδιαφορική εξίσωση της $\vec{V}_\kappa(u;B)$

Δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση $i\in E$ και ξεκινάμε με ένα αρχικό απόθεμα u την χρονική στιγμή 0 για το οποίο $b_{k-1}\le u<b_k$, στο χρονικό διάστημα $[0,h]$ καταβάλλονται μερίσματα ύψους $(c-c_k)\cdot h$ και μπορούν να συμβούν τα εξής:

- Να παραμείνουμε στην κατάσταση i και να μην εμφανιστεί κίνδυνος με πιθανότητα $1+D_0(i,i)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση $j\neq i$ χωρίς την εμφάνιση κινδύνου με πιθανότητα $D_0(i,j)\cdot h$
- Να μεταβούμε από την κατάσταση i στην κατάσταση j και να εμφανιστεί στο διάστημα αυτό ένας κίνδυνος με σ.κ. $F_{i,j}$ με πιθανότητα $D_1(i,j)$
- Να συμβεί οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο με πιθανότητα $o(h)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$V_{i,k}(u;B)=\left(c-c_k\right)\cdot h+\left(1+D_0(i,i)\cdot h\right)e^{-\delta h}V_{i,\kappa}(u+c_k h;B)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot he^{-\delta h}V_{j,\kappa}(u+c_k h;B)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot he^{-\delta h}\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot he^{-\delta h}\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}V_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)\right]+o(h)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^{-\delta h}=1-\delta h+o(h)$ προκύπτει:

$$V_{i,\kappa}(u;B)=\left(c-c_k\right)\cdot h+\left(1+D_0(i,i)\cdot h\right)\left(1-\delta h+o(h)\right)V_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left(1-\delta h+o(h)\right)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}V_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)\right]+o(h)$$

οπότε απαλείφοντας τους όρους ανώτερης τάξης του h:

$$V_{i,\kappa}(u;B)-V_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)=\left(c-c_k\right)\cdot h+D_0(i,i)\cdot hV_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)-\delta hV_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot h\cdot V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\cdot h\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}V_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)\right]+o(h)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{V_{i,\kappa}(u;B)-V_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)}{h}=\left(c-c_k\right)+D_0(i,i)\cdot V_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)-\delta V_{i,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}D_0(i,j)\cdot V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h;B)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\int_0^{u+c_\kappa h-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u+c_\kappa h-b_l}^{u+c_\kappa h-b_{l-1}}V_{j,l}(u+c_\kappa h-x;B)dF_{i,j}(x)\right]+\frac{o(h)}{h}$$

Λαμβάνοντας οπότε $h\to 0$ προκύπτει:

$$-c_\kappa V_{i,\kappa}^{'}(u;B)=\left(c-c_k\right)-\delta V_{i,\kappa}(u;B)+\sum_{j=1}^{m}D_0(i,j)\cdot\varphi_{j,\kappa}(u;B)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\int_0^{u-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u-x;B)dF_{i,j}(x)+\sum_{j=1}^{m}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}V_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{c_\kappa V_{i,\kappa}^{'}(u;B)=\delta V_{i,\kappa}(u;B)-\sum_{j=1}^{n}D_0(i,j)\cdot V_{j,\kappa}(u;B)-\sum_{j=1}^{n}D_1(i,j)\int_0^{u-b_{\kappa-1}}V_{j,\kappa}(u-x;B)dF_{i,j}(x)-\gamma_{i,\kappa}(u)}$$

όπου $b_{k-1}<u<b_k$, $i\in E$ και $\gamma_{i,k}(u)=\left(c-c_k\right)+\sum_{j=1}^{n}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}V_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)\right]$.

Υπό την μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\boxed{c_\kappa\vec{V}_\kappa^{'}(u;B)=\delta\vec{V}_\kappa(u;B)-D_0\vec{V}_\kappa(u;B)-\int_0^{u-b_{\kappa-1}}\Lambda_f(x)\vec{V}_\kappa(u-x;B)dF_{i,j}(x)-\vec{\gamma}_\kappa(u)}$$

όπου $\vec{\gamma}_\kappa(u)=\left(\gamma_{1,\kappa}(u),\gamma_{2,\kappa}(u),...,\gamma_{m,\kappa}(u)\right)^{\mathrm{T}}$.

Η συνέχεια των πινάκων $\vec{V}_1(u;B),\vec{V}_2(u;B),....,\vec{V}_{n+1}(u;B)$ εξασφαλίζεται από την σχέση:

$$\vec{V}_k(b_k-;B)=\vec{V}_{k+1}(b_k+;B)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι η παράγωγος των πινάκων $\vec{V}_k(u;B)$ δεν είναι συνεχής πάνω στα φράγματα εφόσον ισχύει η σχέση:

$$c_k \vec{V}'_k(b_k-;B) = c_{k+1}\vec{V}'_{k+1}(b_k+;B) + \left(c-c_k\right)\vec{V}_{k+1}(b_k+;B)$$

4.2 Αναλυτική Έκφραση της $\vec{V}_\kappa(u;B)$

<u>Θεώρημα 4.2.1</u>: Η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση

$$c_\kappa \vec{V}'_\kappa(u;B) = \delta\vec{V}_\kappa(u;B) - D_0\vec{V}_\kappa(u;B) - \int_0^{u-b_{\kappa-1}} \Lambda_f(x)\vec{V}_\kappa(u-x;B)dF_{i,j}(x) - \vec{\gamma}_\kappa(u)$$

όπου $b_{k-1} \le u < b_k$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\boxed{\vec{V}_\kappa(u;B) = v_\kappa\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt}$$

όπου $v_\kappa(u) = L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c_\kappa}\right)I + \frac{1}{c_\kappa}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}, \quad b_{k-1} \le u < b_k$.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτοντας $x = u - b_{\kappa-1} \Leftrightarrow u = x + b_{\kappa-1}$ τότε $0 \le x < b_\kappa - b_{\kappa-1}$ και η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$c_\kappa \vec{V}'_\kappa(x+b_{\kappa-1};B) = \delta\vec{V}_\kappa(x+b_{\kappa-1};B) - D_0\vec{V}_\kappa(x+b_{\kappa-1};B) - \int_0^x \Lambda_f(t)\vec{V}_\kappa(x+b_{\kappa-1}-t;B)dF_{i,j}(t) - \vec{\gamma}_\kappa(x+b_{\kappa-1})$$

Θέτοντας $\vec{V}^*_\kappa(x) = \vec{V}_\kappa(x+b_{\kappa-1},B)$ και $\vec{\gamma}^*_\kappa(x) = \vec{\gamma}_\kappa(x+b_{\kappa-1})$ προκύπτει:

$$c_\kappa \vec{V}^{*\prime}_\kappa(x) = \delta\vec{V}^*_\kappa(x) - D_0\vec{V}^*_\kappa(x) - \int_0^x \Lambda_f(t)\vec{V}^*_\kappa(x-t)dF_{i,j}(t) - \vec{\gamma}^*_\kappa(x)$$

Λαμβάνοντας μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει:

$$c_\kappa L_s\left[\vec{V}^{*\prime}_\kappa(x)\right] = \delta\vec{V}^*_\kappa(s) - D_0\vec{V}^*_\kappa(s) - \Lambda_f(s)\vec{V}^*_\kappa(s) - \vec{\gamma}^*_\kappa(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c_\kappa\vec{V}^*_\kappa(0) + c_\kappa s\vec{V}^*_\kappa(s) = \delta\vec{V}^*_\kappa(s) - D_0\vec{V}^*_\kappa(s) - \Lambda_f(s)\vec{V}^*_\kappa(s) - \vec{\gamma}^*_\kappa(s)$$

$$\Rightarrow \vec{V}^*_\kappa(s) = \left[\left(s-\frac{\delta}{c_\kappa}\right)I + \frac{1}{c_\kappa}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\vec{V}^*_\kappa(0) - \frac{1}{c_\kappa}\left[\left(s-\frac{\delta}{c_\kappa}\right)I + \frac{1}{c_\kappa}\left(D_0+\Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\widehat{\vec{\gamma}^*_\kappa(s)}$$

Λαμβάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω σχέση και θέτοντας $v_\kappa(u) = L_s^{-1}\left\{\left[\left(s-\frac{\delta}{c_\kappa}\right)I + \frac{1}{c_\kappa}\left(D_0 + \Lambda_f(s)\right)\right]^{-1}\right\}$ προκύπτει:

$$\vec{V}_\kappa^*(x) = v_\kappa(x)\vec{V}_\kappa^*(0) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^x v_\kappa(t)\vec{\gamma}_\kappa^*(x-t)dt$$

Τελικά λαμβάνοντας υπόψη τους μετασχηματισμούς που θέσαμε καταλήγουμε:

$$\vec{V}_\kappa(u;B) = v_\kappa\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt$$

4.3 Αναδρομικός υπολογισμός του $\vec{V}_\kappa(u;B)$

Για τον υπολογισμό του $\vec{V}_\kappa(u;B)$ χρειάζεται να υπολογιστεί πρώτα η ποσότητα $\vec{V}_\kappa(b_{k-1};B)$. Ωστόσο δεν είναι εφικτό να εφαρμόσουμε διαδικασίες ανάλογες με τον υπολογισμό του $\vec{V}_\kappa(b_{k-1})$ εξαιτίας του περιορισμού $b_{k-1} \le u < b_k$.

Θεωρούμε οπότε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\vec{V}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1}) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(u-t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt \ \ , \ \ u \ge b_{\kappa-1}$$

Κατά αντιστοιχία με το τρίτο κεφάλαιο κάνοντας χρήση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\vec{V}_\kappa(u;B) = v_\kappa\left(u-b_{\kappa-1}\right)\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}} v_\kappa(t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt, \qquad b_{k-1} \le u < b_k$$

παρατηρούμε ότι με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\vec{V}_\kappa(u;B) - \vec{V}_\kappa(u) = v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\left[\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_\kappa(u;B) = \vec{V}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\left[\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})\right]} \quad , \quad b_{k-1} \le u < b_k$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση $\vec{\pi}_\kappa(B) = \vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1};B) - \vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})$ προκύπτει:

$$\boxed{\vec{V}_\kappa(u;B) = \vec{V}_\kappa(u) + v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\pi}_\kappa(B)} \quad , \quad b_{k-1} \le u < b_k$$

όπου η ποσότητα $\vec{V}_\kappa\left(b_{k-1};B\right)$ μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια του τελεστή Dickson-Hipp και τον πίνακα Q_k ως εξής:

$$\vec{V}_\kappa\left(b_{k-1};b\right)=\frac{1}{c_k}\sum_{i=1}^{m}Q_k^{-1}diag\left[T_{\rho_1,\kappa}\vec{\gamma}_\kappa\left(b_{k-1}\right),\dots,T_{\rho_m,\kappa}\vec{\gamma}_\kappa\left(b_{k-1}\right)\right]Q_k\vec{e}_i$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο παρακάτω θεώρημα:

<u>**Θεώρημα 4.3.1**</u>: Η *αναλυτική έκφραση του διανύσματος της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης καταβολής μερισμάτων μπορεί να προκύψει ως εξής:*

$$\vec{V}_\kappa(u;B)=\vec{V}_\kappa(u)+v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\pi}_\kappa(B),\ b_{k-1}\le u<b_k,\ k=1,2,\dots,m$$

όπου το $\vec{V}_\kappa(u)$ και το $\vec{\pi}_\kappa(B)$ υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\vec{V}_\kappa(u)=v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})-\frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}}v_\kappa(u-t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt\ \ ,\ \ u\ge b_{\kappa-1}$$

και

$$\begin{cases}\vec{\pi}_{\kappa+1}(B)=\vec{V}_\kappa(b_k)-\vec{V}_{\kappa+1}(b_\kappa)+v_\kappa(b_\kappa-b_{\kappa-1})\vec{\pi}_\kappa(B) \quad , \quad \kappa=1,2,\dots,m\\ \vec{\pi}_{n+1}(B)=\vec{0}\end{cases}$$

όπου το i στοιχείο του διανύσματος $\vec{\gamma}_k(u)$ δίνεται από την σχέση

$$\gamma_{i,k}(u)=\left(c-c_k\right)+\sum_{j=1}^{n}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}V_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)\right]$$

4.4 Αλγόριθμος εύρεσης του $\vec{V}_\kappa\left(u;B\right)$

<u>**Βήμα 1ο**</u>

Για κάθε c_κ, $\kappa=1,2,\dots,n+1$ λύνουμε την γενικευμένη εξίσωση Lundberg, $\det[L_{c_\kappa}(s)]=0$ και βρίσκουμε m ρίζες, τις $\rho_{i,\kappa}$ $\kappa=1,2,\dots,n$. Προσδιορίζουμε οπότε τους πίνακες Q_k και H_k, $k=1,\dots,n+1$.

Βήμα 2ο

Υπολογίζουμε την ποσότητα $v_k(u)$, $k=1,\dots,n+1$ αντίστοιχα με το δεύτερο βήμα του αλγόριθμου στο τρίτο κεφάλαιο.

Βήμα 3ο

Για $k=1$ είναι $\vec{\gamma}_1(u)=\vec{0}$ και ισχύει

$$\vec{V}_1(u;B)=v_1(u)\vec{V}_1(0;B),\ 0\le u\le b_1$$

Στην σχέση αυτή η ποσότητα $v_1(u)$ είναι γνωστή από το δεύτερο βήμα ενώ παραμένει άγνωστη η $\vec{V}_1(0;B)$.

Βήμα 4ο

Από την αναδρομική σχέση είναι

$$\vec{V}_1(u;B)=\vec{V}_1(u)+v_1(u)\vec{\pi}_1(B),\ 0\le u<b_1$$

όπου το διάνυσμα $\vec{\pi}_1(B)$ είναι άγνωστο και θα προσδιοριστεί στο τελευταίο βήμα.

Βήμα 5ο

Για $k=2,\dots,n$ είναι $\vec{\gamma}_\kappa(u)=\left(\gamma_{1,\kappa}(u),\gamma_{2,\kappa}(u),\dots,\gamma_{m,\kappa}(u)\right)^{\mathrm{T}}$ με

$$\gamma_{i,k}(u)=\left(c-c_k\right)+\sum_{j=1}^{n}D_1(i,j)\left[\sum_{l=1}^{\kappa-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}}V_{j,l}(u-x;B)dF_{i,j}(x)\right]$$

Οπότε υπολογίζουμε το $\vec{V}_k(b_{k-1};B)$ από την σχέση

$$\vec{V}_\kappa\left(b_{k-1};B\right)=\frac{1}{c_k}\sum_{i=1}^{m}Q_k^{-1}diag\left[T_{\rho_1,\kappa}\vec{\gamma}_\kappa\left(b_{k-1}\right),\dots,T_{\rho_m,\kappa}\vec{\gamma}_\kappa\left(b_{k-1}\right)\right]Q_k\vec{e}_i$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε το $\vec{V}_k(u)$ από την σχέση

$$\vec{V}_\kappa(u)=v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})-\frac{1}{c_\kappa}\int_0^{u-b_{\kappa-1}}v_\kappa(u-t)\vec{\gamma}_\kappa(u-t)dt\ \ ,\ \ u\ge b_{\kappa-1}$$

Βήμα 6ο

Με τον περιορισμό $b_{k-1}\le u<b_k$, $k=2,3,\dots,n$ είναι

$$\vec{V}_\kappa(u;B)=\vec{V}_\kappa(u)+v_\kappa(u-b_{\kappa-1})\vec{\pi}_\kappa(B)$$

όπου η ποσότητα $v_\kappa(u-b_{\kappa-1})$ υπολογίστηκε στο δεύτερο βήμα και

$$\vec{\pi}_\kappa(B)=\vec{V}_{\kappa-1}(b_{k-1})-\vec{V}_\kappa(b_{\kappa-1})+v_{\kappa-1}(b_{\kappa-1}-b_{\kappa-2})\vec{\pi}_{\kappa-1}(B)$$

<u>Βήμα 7ο</u>

Για $k=n+1$ είναι $\vec{V}_{n+1}(u;B)=\vec{V}_{n+1}(u)$ για $u \ge b_n$ και $\vec{\pi}_{n+1}(B)=\vec{0}$. Αντίστοιχα και με τον αλγόριθμο στο τρίτο κεφάλαιο, έτσι και εδώ όλες οι παραπάνω συναρτήσεις που κατασκευάσαμε εξαρτώνται από το άγνωστο διάνυσμα $\vec{\pi}_1(B)$.

Από την σχέση

$$0=\vec{\pi}_{n+1}(B)=\vec{V}_n(b_n)-\vec{V}_{n+1}(b_n)+v_n(b_n-b_{n-1})\vec{\pi}_n(B)$$

υπολογίζουμε το $\vec{\pi}_1(B)$ και ολοκληρώνεται η διαδικασία.

Βιβλιογραφία

- Ahn, S. , and Badescu, A. L. On the analysis of Gerber-Shiu discounted penalty function for risk processes with Markovian arrivals. Insurance: Mathematics and Economics 41 (2007), 234-249.
- Asmussen, S. Risk theory in a Markovian environment. Scandinavian Actuarial Journal 2 (1989), 69-100.
- Badescu, A. L. Discussion of "The discounted joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a Sparre Andersen model". North American Actuarial Journal 12, 2 (2008),210-212.
- Badescu, A. L. , Drekic, S., and Landriault, D. On the analysis of a multithreshold Markovian risk model. Scandinavian Actuarial Journal 4 (2007), 248-260.
- Chen , J. The discounted penalty function and the distribution of the total dividend payments in a multi-threshold Markovian risk model (2009)
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. The time value of ruin. North American Actuarial Journal 2, 1 (1998), 48-78.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. The time value of ruin in a Sparre Andersen Model. North American Actuarial Journal 2, 1 (1998), 48-78.
- Li, S. Discussion of "The discounted joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a Sparre Andersen model". North American Actuarial Journal 12, 2 (2008),208-210.
- Li, S., and Garido, J. On ruin of erlang(n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 34 (2005), 391-408.
- Li, S., and Lu, Y. The decompositions of the discounted penalty functions and dividends – penalty identity in a Markov-modulated risk model. Astin Bulletin 38 (2008), 53-71.
- Ren, J. The discounted joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a Sparre Andersen model. North America Actuarial Journal 11,3 (2007), 128-137.

- Ren, J. Discussion of "The time of recovery and the maximum severity of ruin in a Sparre Andersen model". North America Actuarial Journal 13, 1 (2009), 155-156.
- Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη Θεωρίας Κινδύνου ΙΙ μεταπτυχιακού μαθήματος του τμήματος «Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου»